UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Grupo fundamental equivariante de Rhodes

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

PEDRO FRANCISCO VALENCIA VIZCAÍNO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Tutor: Dr. Carlos Prieto de Castro

2006

FACULTAD DE CIENCIAS

VNIVERSDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

División de Estudios Profesionales

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Grupo fundamental equivariante de Rhodes"

realizado por **Valencia Vizcaíno Pedro Francisco,** con número de cuenta **401048285,** quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Dr.	Carlos Prieto de Castro
Propietario	Dr.	Marcelo Alberto Aguilar González de la Vega
Propietario	Dr.	José Luis Cisneros Molina
Suplente	Dr.	Sergey Antonyan Gzabski
Suplente	Dr.	Rolando Jiménez Benitez

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 3 de noviembre del 2006.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Índice general

Introducción

Los objetos básicos de estudio de la topología son los espacios topológicos y un problema muy importante es decidir cuando dos de ellos son homeomorfos, es decir, cuando dos de dichos espacios son equivalentes desde el punto de vista de su estructura topológica.

El grupo fundamental de un espacio topológico es una construcción que nos permite decidir negativamente si dos espacios X y Y son del mismo tipo de homotopía ya que a espacios del mismo tipo de homotopía les corresponden grupos fundamentales isomorfos, es decir, equivalentes desde el punto de vista de su estructura de grupo. En particular, si los espacios son homeomorfos, entonces son del mismo tipo de homotopía, de modo que efectivamente el grupo fundamental ayuda a responder si dos espacios no son homeomorfos. Una ventaja del grupo fundamental es que en algunos casos es relativamente fácil de calcular.

En esta tesis tratamos de exponer con un poco más de detalle y con una notación un poco más actual los resultados que consideramos relevantes (y entendibles) del artículo On the fundamental group of a transformation group de Frank Rhodes. Adoptamos un punto de vista, quizás más cercano a las categorías ya que en lugar de estudiar los grupos de transformaciones, estudiamos acciones semicontinuas. Es decir, en lugar de pensar en parejas (X, G) donde X es un espacio topológico y G un grupo que actúa en X, pensaremos en la acción misma

$$\Gamma : G \times X \to X.$$

como objeto. Desde luego que dicho punto de partida tiene sus ventajas y sus desventajas; en la mayoría de los casos se simplifica mucho la notación y también se tiene la ventaja de que las acciones semicontinuas incluyen tanto a acciones continuas de grupos topológicos en espacios topológicos como a grupos de transformaciones. Por otro lado no se toma en cuenta la continuidad del morfismo del grupo activo en el grupo de homeomorfismos del espacio, lo cual es en cierto sentido una pérdida, pero en las construcciones que estudiaremos no hace falta hacer ese tipo de consideraciones. Los primeros dos capítulos están dedicados a presentar algunos resultados muy famosos, sobre homotopía, trayectorias y el grupo fundamental, que son indispensables para hacer las construcciones que nos interesan debidas a Rhodes. El lector que tenga conocimientos sobre estos temas no encontrará nada nuevo en esta primera parte. Sin embargo decidimos incluirla por dos motivos: primero, porque nos permite darnos cuenta de la estrecha similitud entre los resultados clásicos para espacios topológicos y los resultados para acciones semicontinuas y segundo porque en varias demostraciones de teoremas de acciones semicontinuas están metidos o son necesarios los teoremas clásicos. Es importante mencionar que el segundo capítulo está basado en el libro de Munkres de topología [Munkres], mismo que es una gran influencia en toda la tesis y con el cual estamos profundamente endeudados y agradecidos.

En el tercer capítulo construimos el grupo fundamental de una acción semicontinua. Dicho grupo, llamado el grupo fundamental equivariante de Rhodes, resulta ser un grupo que contiene un subgrupo isomorfo al grupo fundamental del espacio topológico en el cual se efectúa la acción. Se demuestra en este capítulo que, con una definición apropiada de tipo de homotopía para acciones semicontinuas, se cumple que el grupo fundamental equivariante de Rhodes es un invariante de ese tipo de homotopía. Después estudiamos un grupo cociente del grupo fundamental equivariante de Rhodes, llamado el grupo reducido, el cual Rhodes afirma es un invariante de los grupos de transformaciones. Nosotros demostraremos una versión más débil de este hecho, a saber, que cuando el grupo activo es fijo con respecto a los espacios topológicos entonces el grupo reducido de Rhodes es invariante. En esa misma sección veremos que, cuando el espacio topológico subyacente de una acción semicontinua es un poliedro y la acción es simplicial, hay una manera relativamente sencilla de calcular el grupo reducido de Rhodes. Este hecho depende fuertemente de un teorema de Armstrong, el cual citamos sin demostración, misma que puede consultarse en [Armstrong]. En la última parte de el tercer capítulo hablamos un poco de representaciones para el grupo fundamental equivariante de Rhodes en términos del grupo fundamental del espacio subyacente de la acción y presentamos un teorema sobre el producto de acciones semicontinuas.

Después de los tres capítulos que conforman la tesis hay un apéndice sobre continuidad que escribimos con la intención de que los resultados presentados en los primeros capítulos estén un poco más completos sin desviarnos mucho en la exposición de los mismos. Buen provecho.

CAPíTULO 1

Conceptos básicos

Las propiedades topológicas como compacidad, conexidad, metrizabilidad o conexidad local de los espacios topológicos, nos permiten algunas veces distinguirlos, es decir, podemos decidir (al menos, quizás, en principio) si no son homeomorfos revisando si difieren en alguna de las propiedades mencionadas. Desde luego que también la cardinalidad de los conjuntos subyacentes es una manera de decidir si son o no equivalentes. Sin embargo si nos apegamos estrictamente a estas propiedades no podremos, por ejemplo, distinguir entre espacios como $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, o la esfera y el toro. Es decir, necesitamos otras cosas que nos permitan diferenciar a los espacios. Es posible que en casos muy concretos y particulares encontremos alguna manera ingeniosa de distinguir dos espacios, sin embargo hacer esto en un contexto más general puede resultar un poco más complicado. Una propiedad que surge de manera más o menos natural es la de ser simplemente conexo, es decir, que toda curva cerrada en el espacio en cuestión pueda ser contraída a un punto. Esta propiedad nos permite, por ejemplo, distinguir entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ porque si quitamos un punto de $\mathbb{R}^3$ nos queda un espacio simplemente conexo, pero al quitar un punto de $\mathbb{R}^2$ esto no sucede. Pero el ser simplemente conexo no nos permitirá distinguir entre el toro y el toro doble.

Es precisamente como respuesta a estas cuestiones que se introduce el grupo fundamental de un espacio topológico, el cual de alguna manera mide qué tan simplemente conexo es el espacio en consideración. En este capítulo probaremos algunos hechos indispensables para la construcción del grupo fundamental. Varios resultados se basan en hechos conocidos de cálculo y topología general, algunos de los cuales pueden consultarse en el apéndice de este trabajo.

Una de las nociones más importantes de la topología algebraica (por lo menos vista como actividad humana actual) es la noción de homotopía, que captura de manera más formal nuestra idea intuitiva de deformación entre funciones. Prácticamente toda la tesis depende de este concepto así que no podríamos empezar más adelante. Veamos pues, la definición y algunas consecuencias útiles de este concepto.

1.1. Homotopía

Definición 1.1. *Sean X y Y espacios topológicos. Llamaremos* homotopía de X en Y *a cualquier función* [1] *continua* $H : X \times I \to Y$.

Por ejemplo, la identidad en $I \times I$ se puede ver como una homotopía de I en $I \times I$. O si tomamos un punto en un espacio Y digamos c y cualquier espacio X, entonces $\kappa_c : X \times I \to Y$ (la función constante de valor c), es una homotopía de X en Y. Más adelante veremos ejemplos menos triviales. Lo importante es recordar que una homotopía de X en Y es una función continua del espacio $X \times I$, que a veces llamamos cilindro de X, en el espacio Y.

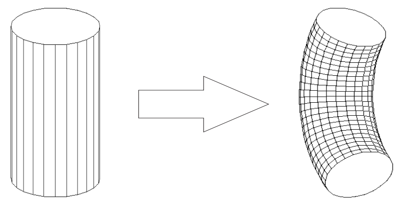

Figura 1. Homotopía de la circunferencia en $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.2. *Sean X, Y espacios topológicos, $f, g : X \to Y$ funciones continuas y H una homotopía de X en Y. Diremos que H es una* homotopía en Top [2] entre f y g *si:*

$$H((x, 0)) = f(x)$$
$$H((x, 1)) = g(x).$$

Podemos pensar esto de la siguiente manera, H es una homotopía entre f y g si transforma la copia homeomorfa de X de la tapa de abajo del cilindro $X \times I$ como f y manda la copia homeomorfa de X de la tapa de arriba a Y como lo hace g.

[1] La palabra 'función' es controversial y tiene muchas acepciones, en este trabajo adoptamos la convención de que 'función' significa un conjunto f de pares ordenados tal que $\langle x, y\rangle \in f$ y $\langle x, z\rangle \in f$ implican $y = z$. El par ordenado $\langle x, y\rangle$ es por definición el conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

[2] 'Top' denotará la categoría cuyos objetos son espacios topológicos y cuyas flechas son funciones continuas.

Definición 1.3. *Sean X y Y espacios topológicos, $f, g : X \to Y$. Diremos que f y g son* homotópicas en Top*, si existe una homotopía de X en Y que sea una homotopía en Top entre f y g.*

Ponemos énfasis en el hecho de que las homotopías que consideramos en esta sección son homotopías en la categoría de espacios topológicos y funciones continuas porque en otras secciones estaremos interesados en otros tipos de homotopías, por ejemplo homotopías equivariantes.

Notación 1.1. *Si X y Y son espacios topológicos, $f, g : X \to Y$ son funciones continuas y H es una homotopía de X en Y, usaremos la fórmula $f \simeq_T g$ para indicar que f y g son homotópicas. La fórmula $H : f \simeq_T g$ es una abreviatura que usaremos para indicar que H es una homotopía en Top entre f y g.*

Ejemplo 1.1. *Sea X un espacio topológico no vacío; entonces las funciones*

$$\kappa_0,\, \kappa_1 : X \to I$$

son homotópicas en Top[3].

Notación 1.2. *Sean X y Y espacios topológicos. $C(X,Y)$ denotará al conjunto de funciones continuas con dominio igual a X y codominio igual a Y.*

La siguiente proposición es quizás muy tediosa y trivial, pero la utilizamos tanto que decidimos incluirla.

Proposición 1.1. *Sean X, Y espacios topológicos. Entonces el subconjunto de $C(X,Y) \times C(X,Y)$, $R = \{(f,g) \in C(X,Y) \times C(X,Y) \mid f \simeq_T g\}$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sean $f, g, h \in C(X,Y)$.

1. La función

$$T : X \times I \to Y, (x,t) \mapsto f(x)$$

[3] Para ver esto consideremos la función $H : X \times I \to I, (x,t) \mapsto t$. Recordemos que H es una función continua porque dado un abierto $U \subseteq I$ su imagen inversa bajo H es el conjunto $X \times U$ que es un abierto básico en el producto $X \times I$, y efectivamente $H((x,0)) = \kappa_0(x)$ y $H((x,1)) = \kappa_1(x)$, es decir, H es una homotopía en Top entre κ_0 y κ_1.

es una homotopía en Top entre f y f, de hecho es la composición de la proyección en X con f, por lo que es continua y

$$T((x,0)) = f(x) = T((x,1))$$

por lo tanto $(f,f) \in R$.

2. Si $(f,g) \in R$, es porque existe una homotopía, digamos $F : X \times I \to Y$ que es una homotopía en Top entre f y g, entonces la función

$$\hat{F} : X \times I \to Y, \quad (x,t) \mapsto F((x, 1-t))$$

es una homotopía en Top entre g y f, es continua por ser la composición de las funciones continuas F y $(x,t) \mapsto (x, 1-t)$ y

$$\hat{F}((x,0)) = F((x,1)) = g(x)$$
$$\hat{F}((x,1)) = F((x,0)) = f(x)$$

es decir, $(g,f) \in R$.

3. Si $(f,g), (g,h) \in R$ es porque existen homotopías en Top F y H tales que $F : f \simeq_T g$ y $H : g \simeq_T h$. Entonces la función $K : X \times I \to Y$ dada por la regla

$$K((x,t)) = \begin{cases} F((x,2t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H((x,2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía en Top entre f y h (compárese K con el producto de trayectorias de la definición 1.7). Es continua por el lema de pegadura y

$$K((x,0)) = F((x,0)) = f(x)$$
$$K((x,1)) = H((x,1)) = h(x)$$

Así, $(f,h) \in R$.

$\square$

Proposición 1.2. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f, g : X \to Y$ y $f', g' : Y \to Z$ funciones continuas. Si $f \simeq_T g$ y $f' \simeq_T g'$ entonces*

$$f' \circ f \simeq_T g' \circ g.$$

Demostración. Por hipótesis existen homotopías

$$H : X \times I \to Y$$

$$H' : Y \times I \to Z$$

tales que $H : f \simeq_T g$ y $H' : f' \simeq_T g'$. Entonces la función

$$K : X \times I \to Z, (x,t) \mapsto H'(H((x,t)),t)$$

es una homotopía en Top entre $f' \circ f$ y $g' \circ g$. $\square$

1.2. Trayectorias

Definición 1.4. *Sea X un espacio topológico. Llamaremos* trayectoria en X *a cualquier función continua $\sigma : I \to X$, es decir, a cualquier elemento $\sigma \in C(I, X)$.*

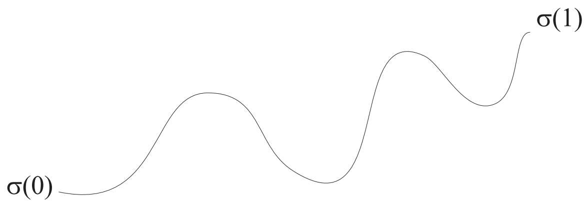

Figura 2. Una trayectoria en el plano.

A veces dibujaremos la imagen directa de la trayectoria para aclarar algunos conceptos y no la función estrictamente, pero lo hacemos simplemente como ayuda a la comprensión y no como parte de los argumentos matemáticos, es decir, se puede prescindir absolutamente de todos los dibujos de esta tesis; decidimos incluirlos con el afán de que algunas ideas queden más claras. Probablemente también sea pertinente aclarar que los dibujos no pueden representar con toda exactitud los objetos de que se pretende hablar, y por lo tanto no hay que esperar tal exactitud.

Ejemplos:

(a) Si X es un espacio topológico no vacío y $x \in X$ entonces $\kappa_x : I \to X$ es una trayectoria.
(b) La función identidad $id_I : I \to I$ es una trayectoria en I.
(c) La isometría $\rho : I \to I, t \mapsto 1 - t$ es también una trayectoria en I.

Definición 1.5. *Sean X un espacio topológico y σ una trayectoria en X. A $\sigma(0)$ se le llamará el* origen o punto inicial de σ *y a $\sigma(1)$ se le llamará el* destino o punto final de σ.

Definición 1.6. *Sean X un espacio topológico no vacío y σ una trayectoria en X. Diremos que σ es una* trayectoria en X de x_0 a x_1 *si el punto inicial de σ es x_0 y el punto final de σ es x_1.*

Notación 1.3. *Si X es un espacio topológico no vacío, $x_0, x_1 \in X$, y $\sigma \in C(I, X)$, usaremos la fórmula $\sigma : x_0 \rightsquigarrow x_1$ para indicar que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x_1$.*

Definición 1.7. *Sean X un espacio topológico, σ y μ dos trayectorias en X, tales que $\sigma(1) = \mu(0)$. Definimos el producto $\cdot$ de σ y μ como sigue:*

$$(\sigma \cdot \mu)(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \mu(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

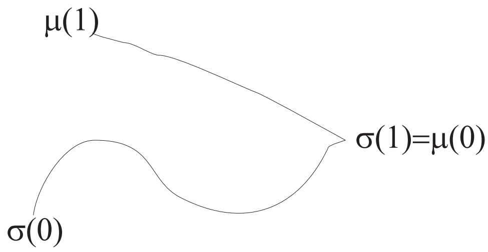

Figura 3. El producto $\cdot$ de σ y μ.

Observación 1.1. *El producto $\cdot$ de dos trayectorias es una trayectoria por el lema de pegadura (una prueba de este lema puede consultarse en el apéndice al final de esta tesis).*

Definición 1.8. *Sean X un espacio topológico, τ y τ' dos trayectorias en X; diremos que τ* y *τ'* tienen los mismos extremos *si*

$$\tau(0) = \tau'(0)$$
$$\tau(1) = \tau'(1).$$

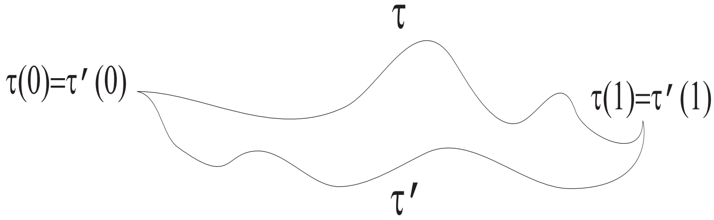

Figura 4. Dos trayectorias con los mismos extremos.

Definición 1.9. *Sean X un espacio topológico, σ, μ dos trayectorias en X que tengan los mismos extremos y F una homotopía de I en X. Diremos* *que F es una* homotopía en Top de trayectorias *entre σ y μ si*

$$F((s,0)) = \sigma(s)$$
$$F((s,1)) = \mu(s)$$
$$F((0,t)) = \sigma(0) = \mu(0)$$
$$F((1,t)) = \sigma(1) = \mu(1)$$

Notación 1.4. *Si X es un espacio topológico, σ, $\mu : I \to X$ son trayectorias que tienen los mismos extremos y H es una homotopía de I en X, usaremos la fórmula*

$$\sigma \simeq_T^t \mu$$

para indicar que hay una homotopía de trayectorias en Top entre σ y μ. La fórmula

$$H : \sigma \simeq_T^t \mu$$

es una abreviatura que usaremos para indicar que H es una homotopía de trayectorias en Top entre σ y μ.

Definición 1.10. *Sean V un espacio vectorial real y $A \subseteq V$. Diremos que A es un* subconjunto asteroide *de V si existe un $a \in A$ tal que para todo $v \in A$ se tiene que $\{ta + (1-t)v \mid t \in [0,1]\} \subseteq A$.*

Ejemplos:

(a) $\{\sigma_p : I \to I, t \mapsto t^p \mid p \in \mathbb{Z}^+\}$ es un conjunto de trayectorias en el intervalo $[0,1]$, que tienen como origen a 0 y como destino a 1.

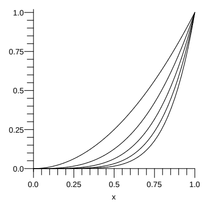

Figura 5. Algunas trayectorias de tipo $t \mapsto t^p$.

(b) Sean X un espacio topológico, $f, g : X \to \mathbb{R}^2$. Entonces la función F dada por

$$F((x,t)) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

es una homotopía entre f y g. Se conoce como homotopía por rectas y también como homotopía lineal. Nosotros la llamaremos homotopía por segmentos. En general si A es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ entonces cualesquiera $f, g : X \to A$ son homotópicas. Si σ y μ son dos trayectorias en A que tienen los mismos extremos, entonces la homotopía por segmentos es una homotopía en Top de trayectorias entre σ y μ porque

$$\begin{aligned} F((0,t)) &= (1-t)\sigma(0) + t\mu(0) \\ &= (1-t)\sigma(0) + t\sigma(0) \\ &= \sigma(0) \end{aligned}$$

y análogamente para $F((1,t))$.

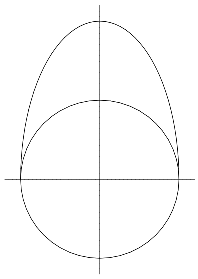

FIGURA 6. Las trayectorias σ, μ y τ.

(c) Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$, entonces las trayectorias

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= (\cos(\pi s), \operatorname{sen}(\pi s)) \\ \mu(s) &= (\cos(\pi s), 2\operatorname{sen}(\pi s)) \end{aligned}$$

son homotópicas; podemos usar la homotopía por segmentos para verificar esto: como

$$F((s,t)) = (1-t)(\cos(\pi s), \operatorname{sen}(\pi s)) + t(\cos(\pi s), 2\operatorname{sen}(\pi s))$$

entonces la primera coordenada de $F((s,t))$ sólo es cero si $s = \frac{1}{2}$ pero en ese caso la segunda coordenada de $F((s,t))$ es $1 - t + 2t = 1 + t > 0$ porque $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$ por lo que la homotopía por segmentos sí tiene como codominio a X. Es importante observar que no podemos usar la homotopía por segmentos para σ y la trayectoria τ dada por

$$\tau(s) = (\cos(\pi s), -\operatorname{sen}(\pi s))$$

ya que la imagen de esta homotopía no está contenida en X porque como tendríamos

$$F((s,t)) = (1-t)(\cos(\pi s), \operatorname{sen}(\pi s)) + t(\cos(\pi s), -\operatorname{sen}(\pi s))$$

vemos que $F((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = (0,0)$.

De la proposición 1.1 se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 1.1. *Sea X un espacio topológico. Entonces el conjunto*

$$R = \{(\sigma, \mu) \in C(I,X) \times C(I,X) \mid \sigma(0) = \mu(0), \sigma(1) = \mu(1) \text{ y } \sigma \simeq_T^t \mu\}$$

es una relación de equivalencia.

Demostración. Simplemente hay que notar que las homotopías dadas en 1.1 son, en este caso, homotopías en Top de trayectorias. Sean $\sigma, \mu, \tau \in C(I,X)$ que tengan los mismos extremos dos a dos. Efectivamente, la función

$$T : X \times I \to X,\ (s,t) \mapsto \sigma(s)$$

es una homotopía en Top de trayectorais entre σ y σ ya que por definición de T, $T((0,t)) = \sigma(0)$ y $T((1,t)) = \sigma(1)$. Si F es una homotopía en Top de trayectorias entre σ y μ, entonces la función $\hat{F} : I^2 \to X, (s,t) \mapsto F((s, 1-t))$ es una homotopía en Top de trayectorias entre μ y σ, ya que $\hat{F}((0,t)) = F((0, 1-t)) = \mu(0)$ y $\hat{F}((1,t)) = F((1,1-t)) = \mu(1)$. Si F es una homotopía en Top de trayectorias entre σ y μ y H es una homotopía en Top de trayectorias entre μ y τ entonces la función $K : I^2 \to X$ dada por

$$K((s,t)) = \begin{cases} F((s,2t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H((s,2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía en Top de trayectorias entre σ y τ porque

$$K((0,t)) = \begin{cases} F((0,2t)) = \sigma(0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H((0,2t-1)) = \mu(0) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$K((1,t)) = \begin{cases} F((1,2t)) = \sigma(1) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H((1,2t-1)) = \mu(1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

□

La siguiente proposición nos servirá para probar que la operación del grupo fundamental es asociativa.

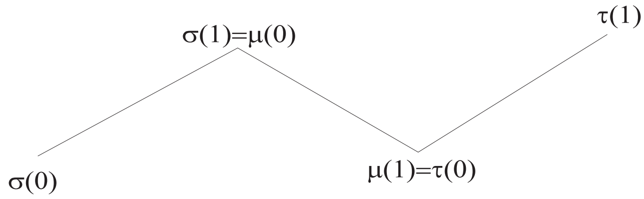

FIGURA 7. $(\sigma \cdot \mu) \cdot \tau \simeq_T^t \sigma \cdot (\mu \cdot \tau)$.

PROPOSICIÓN 1.3. *Sean $\sigma, \mu, \tau \in C(I, X)$ tales que*

$$\sigma(1) = \mu(0)$$
$$\mu(1) = \tau(0).$$

Entonces $(\sigma \cdot \mu) \cdot \tau \simeq_T \sigma \cdot (\mu \cdot \tau)$,i.e., el producto de trayectorias es asociativo salvo homotopía. Mas aún $(\sigma \cdot \mu) \cdot \tau \simeq_T^t \sigma \cdot (\mu \cdot \tau)$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición de la operación $\cdot$ tenemos que

$$((\sigma \cdot \mu) \cdot \tau)(s) = \begin{cases} (\sigma \cdot \mu)(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \tau(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sigma(4s) & 0 \le 2s \le \frac{1}{2} \\ \mu(4s-1) & \frac{1}{2} \le 2s \le 1 \\ \tau(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sigma(4s) & 0 \le s \le \frac{1}{4} \\ \mu(4s-1) & \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2} \\ \tau(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$(\sigma \cdot (\mu \cdot \tau))(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ (\mu \cdot \tau)(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \mu(4s-2) & 0 \le 2s-1 \le \frac{1}{2} \\ \tau(4s-3) & \frac{1}{2} \le 2s-1 \le 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \mu(4s-2) & \frac{1}{2} \le s \le \frac{3}{4} \\ \tau(4s-3) & \frac{3}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

Por lo tanto la función $F : I^2 \to X$ dada por

$$F((s,t)) = \begin{cases} \sigma(\frac{4s}{t+1}) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ \mu(4(s - \frac{t+1}{4})) & \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ \tau(\frac{4}{2-t}(s - \frac{t+2}{4})) & \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía entre $(\sigma \cdot \mu) \cdot \tau$ y $\sigma \cdot (\mu \cdot \tau)$ y es de hecho una homotopía en Top de trayectorias entre $(\sigma \cdot \mu) \cdot \tau$ y $\sigma \cdot (\mu \cdot \tau)$. □

NOTACIÓN 1.5. *ρ denotará a la isometría $s \mapsto 1 - s$ del intervalo en sí mismo y para cualquier trayectoria σ, $\bar{\sigma}$ denotará $\sigma \circ \rho$.*

PROPOSICIÓN 1.4. *Sean X un espacio topológico $\sigma, \mu \in C(I, X)$. Entonces se cumplen:*

1. $\sigma \cdot \kappa_{\sigma(1)} \simeq^t_T \sigma$.
2. $\kappa_{\sigma(0)} \cdot \sigma \simeq^t_T \sigma$.
3. $\kappa_{\sigma(0)} \simeq^t_T \sigma \cdot \bar{\sigma}$.
4. $\kappa_{\sigma(1)} \simeq^t_T \bar{\sigma} \cdot \sigma$.

DEMOSTRACIÓN. Las siguientes son homotopías en Top de trayectorias entre las funciones mencionadas:

1.
$$F((s,t)) = \begin{cases} \sigma(\frac{2s}{t+1}) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2} \\ \sigma(1) & \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

2.
$$F((s,t)) = \begin{cases} \sigma(0) & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \sigma(\frac{2}{1+t}(s - \frac{1-t}{2})) & \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

3.
$$F((s,t)) = \begin{cases} \sigma(2st) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(t\rho(2s-1)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

4.
$$F((s,t)) = \begin{cases} \sigma(\rho(2st)) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(1 - t\rho(2s-1))) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

□

DEFINICIÓN 1.11. *Sea X un espacio topológico. Llamaremos lazo en X a cualquier trayectoria $\lambda \in C(I, X)$ tal que $\lambda(0) = \lambda(1)$.*

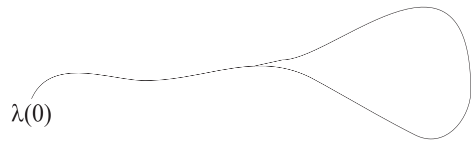

FIGURA 8. La imagen directa de un lazo en el plano.

DEFINICIÓN 1.12. *Sean X un espacio topológico no vacío, $x \in X$ y λ un lazo en X. Diremos que λ* está basado en *x si $\lambda(0) = x$.*

PROPOSICIÓN 1.5. *Sean X un espacio topológico, μ y σ dos trayectorias en X tales que $\sigma \simeq_T^t \mu$, y $\varphi : X \to Y$ una función continua. Entonces $\varphi \circ \sigma \simeq_T^t \varphi \circ \mu$.*

DEMOSTRACIÓN. Si F es una homotopía en Top de trayectorias entre σ y μ entonces $H : I^2 \to X, (s,t) \mapsto \varphi(F((s,t)))$ es una homotopía en Top de trayectorias entre $\varphi \circ \sigma$ y $\varphi \circ \mu$. $\square$

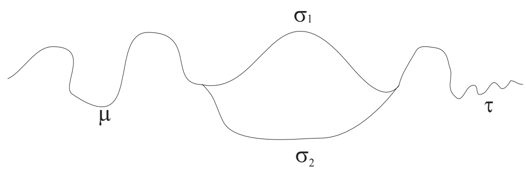

FIGURA 9. Sumamos a ambos lados de la ecuación.

PROPOSICIÓN 1.6. *Si σ_1, σ_2, μ y τ son trayectorias en X tales que σ_1 y σ_2 tienen los mismos extremos y $\mu(1) = \sigma_1(0) = \sigma_2(0)$, $\tau(0) = \sigma_1(1)$, entonces*

$$\sigma_1 \simeq_T^t \sigma_2 \Rightarrow \mu \cdot \sigma_1 \simeq_T^t \mu \cdot \sigma_2, \ \sigma_1 \cdot \tau \simeq_T^t \sigma_2 \cdot \tau$$

DEMOSTRACIÓN. Si F es una homotopía en Top de trayectorias entre σ_1 y σ_2 entonces

$$H((s,t)) = \begin{cases} \mu(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ F((2s-1,t)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

y

$$K((s,t)) = \begin{cases} F((2s,t)) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

son homotopías en Top de trayectorias entre $\mu \cdot \sigma_1$ y $\mu \cdot \sigma_2$ y $\sigma_1 \cdot \tau$ y $\sigma_2 \cdot \tau$. $\square$

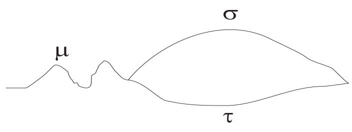

FIGURA 10. Ley de cancelación.

COROLARIO 1.2. *Sean X un espacio topológico, $\mu, \sigma, \tau \in C(I, X)$ tales que σ y τ tienen los mismos extremos y $\mu(1) = \sigma(0)$, entonces*

$$\mu \cdot \sigma \simeq_T^t \mu \cdot \tau \Rightarrow \sigma \simeq_T^t \tau.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el resultado anterior tenemos que $\bar{\mu} \cdot \mu \cdot \sigma \simeq_T^t \bar{\mu} \cdot \mu \cdot \tau$ (omitimos los paréntesis en vista de la proposición 1.3), pero entonces, por la proposición 1.4 tenemos que $\kappa_{\mu(1)} \cdot \sigma \simeq_T^t \kappa_{\mu(1)} \cdot \tau$ lo cual implica por la proposición 1.1 que $\sigma \simeq_T^t \tau$. □

El siguiente es un resultado técnico que será utilizado posteriormente:

PROPOSICIÓN 1.7. *Si σ y σ' son dos trayectorias en X que tienen los mismos extremos, entonces $(\sigma \cdot (\sigma' \circ \rho)) \circ \rho = \sigma' \cdot (\sigma \circ \rho)$ (ρ denota la isometría $t \mapsto 1 - t$).*

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
(\sigma \cdot (\sigma' \circ \rho))(\rho(s)) &= \begin{cases} \sigma(2\rho(s)) & 0 \leq \rho(s) \leq \frac{1}{2} \\ \sigma'(\rho(2\rho(s) - 1)) & \frac{1}{2} \leq \rho(s) \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma(2\rho(s)) & 0 \leq \ 1 - s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma'(1 - 2(1 - s) + 1) & \frac{1}{2} \leq 1 - s \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma'(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2\rho(s)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\
(\sigma' \cdot (\sigma \circ \rho))(s) &= \begin{cases} \sigma'(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(\rho(2s - 1)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma'(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(1 - (2s - 1)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sigma'(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2 - 2s) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

CAPíTULO 2

El grupo $\pi_1(X, x_0)$

En este capítulo construiremos el grupo fundamental de un espacio topológico y probaremos algunas de sus propiedades.

NOTACIÓN 2.1. *Si X es un espacio topológico no vacío y $x_0 \in X$, denotaremos con $\Omega(X, x_0)$ al conjunto de lazos en X basados en x_0.*

OBSERVACIÓN 2.1. *El producto $\cdot$ de cualesquiera dos elementos de $\Omega(X, x_0)$ es un elemento de $\Omega(X, x_0)$.*

NOTACIÓN 2.2. *A la clase de equivalencia de un lazo $\lambda \in \Omega(X, x_0)$ bajo la relación de equivalencia $\simeq_T^t$ (véase el corolario 1.1) la denotaremos $[\lambda]$. Al conjunto $\Omega(X, x_0)/\simeq_T^t$ lo denotaremos $\pi_1(X, x_0)$.*

PROPOSICIÓN 2.1. *$\pi_1(X, x_0)$ con la operación $[\lambda_1][\lambda_2] = [\lambda_1 \cdot \lambda_2]$ es un grupo.*

DEMOSTRACIÓN. La operación está bien definida ya que si

$$H_1 : \lambda_1 \simeq_T^t \lambda_1'$$
$$H_2 : \lambda_2 \simeq_T^t \lambda_2'$$

entonces la función F dada por:

$$F((s,t)) = \begin{cases} H_1((2s,t)) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H_2((2s-1,t)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

es una homotopía en Top de trayectorias entre $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ y $\lambda_1' \cdot \lambda_2'$. La operación

$$([\lambda_1], [\lambda_2]) \mapsto [\lambda_1 \cdot \lambda_2]$$

es asociativa ya que por la proposición 1.3 $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \lambda_3 \simeq_T^t \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \lambda_3)$, i.e., $([\lambda_1][\lambda_2])[\lambda_3] = [\lambda_1]([\lambda_2][\lambda_3])$. El neutro de esta operación es $[\kappa_{x_0}]$ ya que por la proposición 1.4 $\kappa_{x_0} \cdot \lambda \simeq_T^t \lambda \simeq_T^t \lambda \cdot \kappa_{x_0}$, i.e., $[\kappa_{x_0}][\lambda] = [\lambda] = [\lambda][\kappa_{x_0}]$. El inverso de $[\lambda]$ es $[\bar{\lambda}]$ ya que por la proposición 1.4 $\lambda \cdot \bar{\lambda} \simeq_T^t \kappa_{x_0} \simeq_T^t \bar{\lambda} \cdot \lambda$. $\square$

DEFINICIÓN 2.1. *Llamaremos a $\pi_1(X, x_0)$ el* grupo fundamental del espacio X basado en el punto x_0.

Observación 2.2. *El grupo $\pi_1(X, x_0)$ solamente depende de la componente conexa por trayectorias de X a la cual pertenece x_0.*

Teorema 2.1. *Sean X un espacio topológico no vacío conectable por trayectorias, $x_0, x_1 \in X$ y $\sigma : x_0 \rightsquigarrow x_1$. Entonces σ induce un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$.*

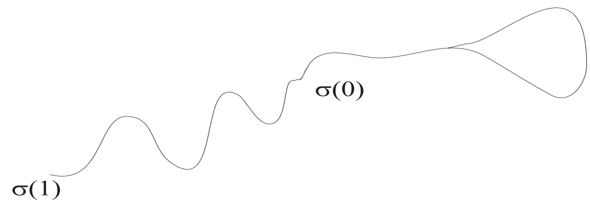

Figura 1. Un lazo desde $\sigma(1)$.

Demostración. Sea $\hat{\sigma} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), [\lambda] \mapsto [\bar{\sigma} \cdot \lambda \cdot \sigma]$. Esta función está bien definida porque por la proposición 1.6 si $\lambda \simeq_T^t \lambda'$ entonces $\bar{\sigma} \cdot \lambda \cdot \sigma \simeq_T^t \bar{\sigma} \cdot \lambda' \cdot \bar{\sigma}$.

$\hat{\sigma}$ es inyectiva ya que si

$$\begin{gathered}
[\bar{\sigma} \cdot \lambda \cdot \sigma] = [\bar{\sigma} \cdot \lambda' \cdot \sigma] \Rightarrow \\
\bar{\sigma} \cdot \lambda \cdot \sigma \simeq_T^t \bar{\sigma} \cdot \lambda' \cdot \sigma \Rightarrow \\
\sigma \cdot \bar{\sigma} \cdot \lambda \cdot \sigma \simeq_T^t \sigma \cdot \bar{\sigma} \cdot \lambda' \cdot \sigma \Rightarrow \\
\sigma \cdot \bar{\sigma} \cdot \lambda \cdot \sigma \cdot \bar{\sigma} \simeq_T^t \sigma \cdot \bar{\sigma} \cdot \lambda' \cdot \sigma \cdot \bar{\sigma}
\end{gathered}$$

pero entonces, por el corolario 1.2, concluimos que $\lambda \simeq_T^t \lambda'$, i.e., $[\lambda] = [\lambda']$.

La función también es suprayectiva; dado un $[\lambda_1] \in \pi_1(X, x_1)$ tenemos que $\sigma \cdot \lambda_1 \cdot \bar{\sigma} \in \pi_1(X, x_0)$ y $\hat{\sigma}([\sigma \cdot \lambda_1 \cdot \bar{\sigma}]) = [\bar{\sigma} \cdot (\sigma \cdot \lambda_1 \cdot \bar{\sigma}) \cdot \sigma] = [\lambda_1]$.

Finalmente la función es un homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}([\lambda_1][\lambda_2]) &= \hat{\sigma}([\lambda_1 \cdot \lambda_2]) \\
&= [\bar{\sigma} \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \sigma] \\
&= [\bar{\sigma} \cdot \lambda_1 \cdot \sigma \cdot \bar{\sigma} \cdot \lambda_2 \cdot \sigma] \\
&= [\bar{\sigma} \cdot \lambda_1 \cdot \sigma][\bar{\sigma} \cdot \lambda_2 \cdot \sigma] \\
&= \hat{\sigma}([\lambda_1])\hat{\sigma}([\lambda_2])
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.1. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto asteroide y $a_0 \in A$ un punto con respecto al cual A sea asteroide, entonces $\pi_1(A, a_0)$ es el grupo trivial* *(consistente solamente del neutro) ya que si σ es un lazo en A basado en a_0, la homotopía por segmentos es una homotopía en Top de trayectorias entre σ y κ_{a_0}. En vista del teorema anterior dado cualquier $a \in A$ se tiene que $\pi_1(A, a)$ es el grupo trivial.*

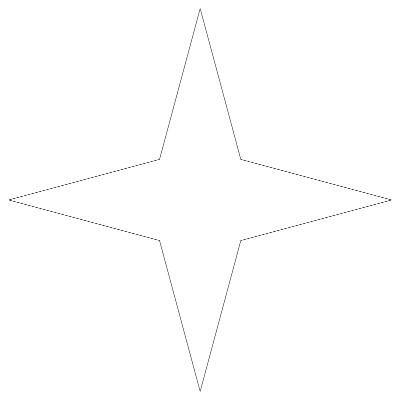

Figura 2. Un conjunto asteroide.

Definición 2.2. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X* es simplemente conexo *si X es conectable por trayectorias y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial para algún $x_0 \in X$.*

Proposición 2.2. *Sean X un espacio topológico simplemente conexo, y σ y μ dos trayectorias en X que tengan los mismos extremos; entonces $\sigma \simeq_T^t \mu$.*

Demostración. Sean x_0 el origen y x_1 el destino de σ, entonces

$$(\sigma \cdot \bar{\mu}) \cdot \mu \simeq_T^t \kappa_{x_0} \cdot \mu$$

de donde se deduce que $\sigma \simeq_T^t \mu$. □

2.1. Espacios topológicos punteados

Definición 2.3. *Llamaremos* categoría de espacios topológicos punteados *a la categoría cuyos objetos son parejas de la forma (X, x_0) donde X es un espacio topológico y $x_0 \in X$ y donde una flecha f con dominio (X, x_0) y codominio (Y, y_0) es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$.*

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea* $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *una flecha en la categoría de espacios topológicos punteados. Entonces podemos definir un homomorfismo de grupos*

$$h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

mediante la fórmula

$$h_*([\lambda]) = [h \circ \lambda]$$

DEMOSTRACIÓN. La aplicación h_* está bien definida ya que si F es una homotopía de trayectorias entre σ y σ' entonces $h \circ F$ es una homotopía de trayectorias entre $h \circ \sigma$ y $h \circ \sigma'$. El hecho de que h_* sea un homomorfismo se deduce de la ecuación

$$(h \circ \sigma) \cdot (h \circ \mu) = h \circ (\sigma \cdot \mu)$$

□

DEFINICIÓN 2.4. *La aplicación* h_* *de la proposición anterior se denomina* homomorfismo inducido por h relativo al punto básico x_0.

NOTACIÓN 2.3. *El homomorfismo* h_* *no sólo depende de la aplicación* $h : X \to Y$, *sino también de la elección del punto básico* x_0. *Si es preciso indicaremos el hecho de que el dominio de la flecha* h_* *es* (X, x_0) *escribiendo* $(h_{x_0})_*$.

PROPOSICIÓN 2.4. *Podemos definir un funtor de la categoría de espacios topológicos punteados a la categoría de grupos si asociamos a un espacio topológico punteado* (X, x_0), *el grupo* $\pi_1(X, x_0)$ *y a una flecha* $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *el homomorfismo* $(h_{x_0})_*$ *de la proposición anterior.*

$$\begin{tikzcd}
(X, x_0) \arrow[d, "h_{x_0}"'] & & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "(h_{x_0})_*"] \\
(Y, y_0) & \mapsto & \pi_1(Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ espacios topológicos punteados y $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ flechas en la categoría de espacios topológicos punteados. Las identidades van a dar a las identidades porque por definición de id_*, $id_*([\lambda]) = [id \circ \lambda] = [\lambda]$. La composición $g \circ f$

va a dar por definición al homomorfismo $[\lambda] \mapsto [(g \circ f) \circ \lambda]$ que es igual al homomorfismo $g_* \circ f_*$ ya que

$$\begin{aligned}(g_* \circ f_*)([\lambda]) &= g_*(f_*([\lambda])) \\ &= g_*([f \circ \lambda]) \\ &= [g \circ (f \circ \lambda)] \\ &= [(g \circ f) \circ \lambda].\end{aligned}$$

□

Proposición 2.5. *Sea* $(h_{x_0}) : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *una flecha en la categoría de espacios topológicos punteados. Si* $h : X \to Y$ *es un homeomorfismo, entonces* $(h_{x_0})_*$ *es un isomorfismo entre* $\pi_1(X, x_0)$ *y* $\pi_1(Y, y_0)$.

Demostración. Consideremos $k : Y \to X$ la inversa de h. Entonces se satisface $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = (id_X)_*$ y $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = (id_Y)_*$. Como las identidades van a dar a las identidades k_* es la inversa de h_*. □

Definición 2.5. *Sean* $(X, x_0), (Y, y_0)$ *espacios topológicos punteados. Diremos que* (X, x_0) y (Y, y_0) son del mismo tipo de homotopía en la categoría de espacios topológicos punteados *si existen flechas en la categoría* $f_{x_0} : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *y* $g_{y_0} : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *y homotopías* $H : X \times I \to X$ *y* $K : Y \times I \to Y$ *tales que* $K : f \circ g \simeq_T id_Y$, $H : g \circ f \simeq_T id_X$ *y* $H((x_0, t)) = x_0$ *y* $K((y_0, t)) = y_0$ *para toda* $t \in I$.

Teorema 2.2. *Sean* $(X, x_0), (Y, y_0)$ *espacios topológicos punteados del mismo tipo de homotopía en la categoría de espacios topológicos punteados. Entonces*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

Demostración. Existen aplicaciones punteadas

$$f_{x_0} : (X, x_0) \to (Y, y_0),\ g_{y_0} : (Y, y_0) \to (X, x_0)$$

y homotopías $H : X \times I \to X$, $K : Y \times I \to Y$ tales que $H((x, 0)) = g(f(x))$, $H((x, 1)) = x$, $K((y, 0)) = f(g(y))$, $K((y, 1)) = y$ y $H((x_0, t)) = x_0$ y $K((y_0, t)) = y_0$ para toda $t \in I$. Sea λ un lazo en X basado en x_0, entonces la función $F : I \times I \to X, (s, t) \mapsto H((\lambda(s), t))$ es una homotopía en Top de trayectorias entre $g_{y_0} \circ f_{x_0} \circ \lambda$ y λ. □

2.2. Espacios cubrientes

Definición 2.6. *Sean E, B espacios topológicos y $p : E \to B$ una función continua y suprayectiva. Diremos que* un abierto $U \subseteq B$ está parejamente cubierto por p *si la imagen inversa de U es una unión ajena de conjuntos abiertos V_α tales que para cada α la restricción de p a V_α sea un homeomorfismo de V_α en U. La colección $\{V_\alpha\}$ será denominada* partición de $p^{-1}[U]$ en rebanadas.

Definición 2.7. *Sean E, B espacios topológicos $p : E \to B$ continua y suprayectiva. Diremos que p* es una aplicación cubriente *si para todo $b \in B$ existe una vecindad U de b que esté parejamente cubierta por p. En este caso E se llama* espacio cubriente de B.

Observación 2.3. *Si $p : E \to B$ es una aplicación cubriente entonces para cada $b \in B$ se tiene que $p^{-1}[\{b\}]$ es un subespacio discreto porque cada V_α intersecta a $p^{-1}[\{b\}]$ en un solo punto.*

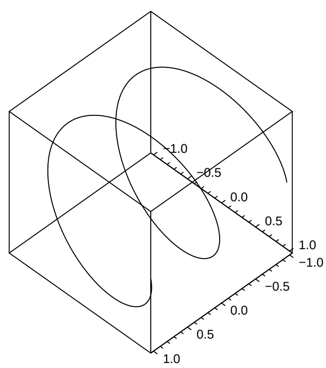

Figura 3. La función $t \mapsto (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$.

Teorema 2.3. *La función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, x \mapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$ es una aplicación cubriente.*

Demostración. Consideremos el subconjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ de los puntos de $\mathbb{S}^1$ que tienen la primera coordenada positiva. El conjunto $p^{-1}[U]$ consiste de aquellos puntos x para los que $\cos(2\pi x)$ es positivo, es decir, es la unión de los intervalos $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. La aplicación p restringida a cualquier intervalo cerrado $\bar{V}_n$ es inyectiva porque $\operatorname{sen}(2\pi x)$ es estrictamente monótona en tales intervalos. Además p lleva $\bar{V}_n$ suprayectivamente a $\bar{U}$ y a

V_n sobre U por el teorema del valor intermedio. Dado que $\bar{V}_n$ es compacto, $p \restriction \bar{V}_n$ es un homeomorfismo entre $\bar{V}_n$ y $\bar{U}$. En particular $p \restriction V_n$ es un homeomorfismo entre V_n y U. Análogamente las intersecciones de $\mathbb{S}^1$ con el semiplano superior, inferior e izquierdo están cubiertos parejamente por p, por lo tanto p es una aplicación cubriente. $\square$

Teorema 2.4. *Sea $p : E \to B$ una aplicación cubriente. Si B_0 es un subespacio de B y si $E_0 = p^{-1}[B_0]$ entonces la aplicación $p_0 : E_0 \to B_0$ obtenida al restringir p es una aplicación cubriente.*

Demostración. Dado $b_0 \in B_0$ sea U un conjunto abierto en B que contiene a b_0 y que está parejamente cubierto por p; sea V_α una partición de $p^{-1}[U]$ en rebanadas. Entonces $U \cap B_0$ es una vecindad de b_0 en B_0 y los conjuntos $V_\alpha \cap E_0$ son abiertos ajenos de E_0 cuya unión es $p^{-1}[U \cap B_0]$ y cada uno de ellos se aplica homeomorfamente en $U \cap B_0$ mediante p. $\square$

Teorema 2.5. *Si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son aplicaciones cubrientes entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ es una aplicación cubriente.*

Demostración. Dados $b \in B$, $b' \in B'$, sean U y U' vecindades de b y b' respectivamente, que estén parejamente cubiertas por p y p'. Sean $\{V_\alpha\}$ y $\{V'_\beta\}$ particiones en rebanadas de $p^{-1}[U], p^{-1}[U']$. Entonces la imagen inversa mediante $p \times p'$ de $U \times U'$ es la unión de todos los conjuntos $V_\alpha \times V'_\beta$. Estos conjuntos son abiertos ajenos de $E \times E'$ y cada uno de ellos se aplica homeomorfamente en $U \times U'$ bajo $p \times p'$. $\square$

Cabe mencionar que el teorema anterior no se puede generalizar a un producto infinito como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2. *Sean $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, t \mapsto \langle cos(2\pi t), sin(2\pi t)\rangle$ y $p^\omega : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{S}^{1^\omega}, f \mapsto (p(f(0)), p(f(1)), ..., p(f(n)), ...)$, entonces aún cuando p es una aplicación cubriente, p^ω no lo es. Esto podemos verlo por contradicción; supongamos que hay un elemento $f \in \mathbb{S}^{1^\omega}$ que tiene una vecindad parejamente cubierta por p^ω. Entonces si q pertenece a la imagen inversa de $\{f\}$, habría un abierto básico de $\mathbb{R}^\omega$ que contiene a q y tal que p^ω restringida a este abierto es un homeomorfismo, pero esto no puede ser porque dicho abierto básico es de la forma $U_1 \times \cdots \times U_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \ldots$ y p^ω restringida a este abierto no es una función inyectiva.*

2.3. El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$

Definición 2.8. *Sean E, B espacios topológicos y $p : E \to B$ una función continua. Si f es una función continua de algún espacio topológico X en B,* un levantamiento de f *es una función continua $\tilde{f} : X \to E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$, es decir, tal que conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Lema 2.1. *Sean $p : E \to B$ una aplicación cubriente, $e_0 \in E$ y $b_0 = p(e_0)$. Entonces cualquier trayectoria σ en B que comience en b_0 tiene un único levantamiento a una trayectoria $\tilde{\sigma}$ en E que comienza en e_0.*

Demostración. Cubramos B por conjuntos abiertos U que estén parejamente cubiertos por p. Encontremos una subdivisión de I, digamos $s_0 = 0, s_1, s_2, ..., s_n = 1$ tal que para cada i el conjunto $\sigma[[s_i, s_{i+1}]]$ esté contenido en alguno de los conjuntos abiertos U (se puede por el teorema del número de Lebesgue (ver A.2)). Primero definimos $\tilde{\sigma}(0) = e_0$. Entonces, suponiendo que $\tilde{\sigma}(s)$ está definida para $0 \leq s \leq s_i$, definimos $\tilde{\sigma}$ en $[s_i, s_{i+1}]$ como sigue: el conjunto $\sigma[[s_i, s_{i+1}]]$ está contenido en algún conjunto abierto U que está parejamente cubierto por p. Sea V_α una partición en conjuntos abiertos de $p^{-1}[U]$; cada conjunto V_α es aplicado por p homeomorfamente sobre U. Así $\tilde{\sigma}(s_i)$ pertenece a alguno de estos conjuntos, pongamos en V_0. Definamos $\tilde{\sigma}(s)$ para $s \in [s_i, s_{i+1}]$ por la ecuación $\tilde{\sigma}(s) = (p \restriction V_0)^{-1}[\{\sigma(s)\}]$. Como $p \restriction V_0 : V_0 \to U$ es un homeomorfismo, $\tilde{\sigma}$ será continua en $[s_i, s_{i+1}]$. Continuando de esta forma, definimos $\tilde{\sigma}$ en todo I. Es inmediato de la construcción de $\tilde{\sigma}$ que $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$. La unicidad de $\tilde{\sigma}$ se prueba paso a paso. Supongamos que μ es otro levantamiento de σ que comienza en e_0. Entonces $\mu(0) = e_0 = \tilde{\sigma}(0)$. Supongamos que $\mu(s) = \tilde{\sigma}(s)$ para todo $s \in [0, s_i]$. Sea V_0 como en lo anterior, entonces para $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $\tilde{\sigma}(s)$ está definido como $(p \restriction V_0)^{-1}[\{\sigma(s)\}]$. Dado que μ es un levantamiento de σ, debe llevar el intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ en el conjunto $p^{-1}[U] = \bigcup\{V_\alpha\}$. Los V_α son conjuntos abiertos ajenos; como el conjunto $\mu[[s_i, s_{i+1}]]$ es conexo, debe estar contenido en sólo uno de estos V_α y como $\mu(s_i) = \tilde{\sigma}(s_i)$ que está en V_0, μ debe llevar todo el intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ en V_0. Por lo tanto, para $s \in [s_i, s_{i+1}]$, $\mu(s)$ debe ser igual a un punto $y \in V_0$ que esté en $p^{-1}[\{\sigma(s)\}]$, pero sólo hay un punto y en estas condiciones, concretamente $(p \restriction V_0)^{-1}[\{\sigma(s)\}]$. Por lo tanto $\mu(s) = \tilde{\sigma}(s)$ para toda $s \in [s_i, s_{i+1}]$. $\square$

LEMA 2.2. *Sean $p : E \to B$ una aplicación cubriente, $e_0 \in E$ y $b_0 = p(e_0)$. Sea $F : I \times I \to B$ una función continua con $F((0,0)) = b_0$. Entonces, existe un único levantamiento de F a una función continua $\tilde{F} : I \times I \to E$ tal que $\tilde{F}((0,0)) = e_0$. Si F es una homotopía en Top de trayectorias, entonces $\tilde{F}$ también es una homotopía en Top de trayectorias.*

DEMOSTRACIÓN. Dada F definimos primero $\tilde{F}((0,0)) = e_0$. Por el lema anterior extendemos $\tilde{F}$ al lado izquierdo $\{0\} \times I$ y al lado inferior $I \times \{0\}$ de $I \times I$. Entonces extendemos $\tilde{F}$ a todo el cuadrado como sigue. Elijamos subdivisiones $s_0, ...s_m$ y $t_0, ..., t_n$ de I lo suficientemente finas como para que cada rectángulo $I_i \times J_j = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ se aplique mediante F en un conjunto abierto de B que esté parejamente cubierto por p (es posible hacer esto en vista del lema del número de Lebesgue). Definimos el levantamiento $\tilde{F}$ paso a paso que comienza con el rectángulo $I_1 \times J_1$, continuando con los otros rectángulos $I_i \times J_1$ de la fila inferior, después con los rectángulos $I_i \times J_2$ de la siguiente fila y así sucesivamente. En general dados i_0, j_0, supongamos que $\tilde{F}$ está definida en el conjunto A determinado por la unión de $\{0\} \times I, I \times \{0\}$ y todos los rectángulos previos a $I_{i_0} \times J_{j_0}$ (aquellos rectángulos $I_i \times I_j$ con $j < j_0$ y aquellos con $j = j_0$ e $i < i_0$). Supongamos también que $\tilde{F}$ es un levantamiento continuo de $F \restriction A$. Definamos $\tilde{F}$ en $I_{i_0} \times J_{j_0}$. Escojamos un conjunto abierto U de B que esté parejamente cubierto por p y contenga al conjunto $F[I_{i_0} \times J_{j_0}]$. Sea $\{V_\alpha\}$ una partición en rebanadas de $p^{-1}[U]$; cada V_α se aplica mediante p homeomorfamente sobre U. Ahora, $\tilde{F}$ está ya definida en el conjunto $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$. Este conjunto es la unión de los lados izquierdo e inferior del rectángulo $I_{i_0} \times J_{j_0}$ y por tanto es conexo. Así $\tilde{F}[C]$ es conexo y debe estar totalmente contenido dentro de uno de los conjuntos V_α. Supongamos que está contenido en V_0. Denotemos por $p_0 : V_0 \to U$ la restricción de p a V_0. Dado que $\tilde{F}$ es un levantamiento de $F \restriction A$ sabemos que para $x \in C,\ p_0(\tilde{F}(x)) = p(\tilde{F}(x)) = F(x)$ de manera que $\tilde{F}(x) = p_0^{-1}[\{F(x)\}]$. Por tanto, podemos extender $\tilde{F}$ definiendo $\tilde{F}(x) = p_0^{-1}[\{F(x)\}]$ para $x \in I_{i_0} \times J_{j_0}$. Continuando de esta manera definimos $\tilde{F}$ en todo el cuadrado I^2.

Para comprobar la unicidad observemos que en cada paso de la construcción de $\tilde{F}$, como primero hemos extendido $\tilde{F}$ a los lados inferior e izquierdo de I^2 y entonces a los rectángulos $I_i \times J_j$ uno por uno, existe sólo una forma de extender $\tilde{F}$ de manera continua. De modo que, una vez especificado el valor de $\tilde{F}$ en $(0,0), \tilde{F}$ está completamente determinada.

Supongamos ahora que F es una homotopía en Top de trayectorias. La aplicación F lleva todo el lado izquierdo $\{0\} \times I$ del cuadrado a un solo punto b_0 de B. Como $\tilde{F}$ es un levantamiento de F, lleva todo este lado sobre el conjunto $p^{-1}[\{b_0\}]$. Pero este conjunto tiene la topología discreta como subespacio de E. Dado que $\{0\} \times I$ es conexo y $\tilde{F}$ es continua, $\tilde{F}[\{0\} \times I]$ es conexo y por lo tanto debe ser igual a un conjunto singular (de cardinalidad 1). Análogamente $\tilde{F}[\{1\} \times I]$ debe ser también un conjunto singular. Así $\tilde{F}$ es una homotopía en Top de trayectorias. $\square$

TEOREMA 2.6. *Sean $p : E \to B$ una aplicación cubriente, $e_0 \in E$ y $b_0 = p(e_0)$. Sean σ y μ dos trayectorias en B de b_0 a b_1 y sean $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\mu}$ sus respectivos levantamientos a trayectorias en E que comienzan en e_0. Si σ y μ son homotópicas por trayectorias, entonces $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\mu}$ terminan en el mismo punto de E y son homotópicas por trayectorias.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F : I \times I \to B$ una homotopía de trayectorias entre σ y μ. Entonces $F((0,0)) = b_0$. Sea $\tilde{F} : I \times I \to E$ el levantamiento de F a E tal que $\tilde{F}((0,0)) = e_0$. Por el lema anterior $\tilde{F}$ es una homotopía en Top de trayectorias de manera que $\tilde{F}[\{0\} \times I] = \{e_0\}$ y $\tilde{F}[\{1\} \times I]$ es un conjunto singular $\{e_1\}$.

La restricción $\tilde{F} \restriction I \times \{0\}$ de $\tilde{F}$ es una trayectoria en E que comienza en e_0 y que es un levantamiento de $F \restriction I \times \{0\}$. Por la unicidad de los levantamientos de trayectorias, tenemos que $\tilde{F}((s,0)) = \tilde{\sigma}(s)$. Análogamente, $\tilde{F} \restriction I \times \{1\}$ es una trayectoria en E que es un levantamiento de $F \restriction I \times \{1\}$ y comienza en e_0. Por la unicidad de los levantamientos de trayectorias $\tilde{F}((s,1)) = \tilde{\mu}(s)$. Por lo tanto $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\mu}$ terminan en e_1 y $\tilde{F}$ es una homotopía en Top de trayectorias entre ellas. $\square$

DEFINICIÓN 2.9. *Sean $p : E \to B$ una aplicación cubriente y $b_0 \in B$. Elijamos e_0 de forma que $p(e_0) = b_0$. Dado un elemento $[\sigma] \in \pi_1(B, b_0)$, sea $\tilde{\sigma}$ el levantamiento de σ a una trayectoria en E que comience en e_0. Denotemos por $\phi([\sigma])$ a $\tilde{\sigma}(1)$. Entonces ϕ es una aplicación bien definida $\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}[\{b_0\}]$. Denominamos a ϕ* correspondencia del levantamiento derivada de la aplicación cubriente p.

TEOREMA 2.7. *Sean $p : E \to B$ una aplicación cubriente, $b_0 \in B$ y $e_0 \in E$ tal que $p(e_0) = b_0$. Si E es conectable por trayectorias entonces la* *correspondencia del levantamiento $\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}[\{b_0\}]$ es suprayectiva. Si E es simplemente conexo, entonces es biyectiva.*

Demostración. Si E es conectable por trayectorias entonces dado $e_1 \in p^{-1}[\{b_0\}]$ existe una trayectoria $\tilde{\sigma}$ en E de e_0 a e_1. De modo que $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$ es un lazo en B con base b_0 y $\phi([\sigma]) = e_1$ por definición.

Supongamos que E es simplemente conexo. Sean $[\sigma]$ y $[\mu]$ dos elementos de $\pi_1(B, b_0)$ tales que $\phi([\sigma]) = \phi([\mu])$. Sean $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\mu}$ los levantamientos de σ y μ respectivamente a trayectorias en E que comiencen en e_0; entonces $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\mu}(1)$. Como E es simplemente conexo, existe una homotopía en Top de trayectorias $\tilde{F}$ en E entre $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\mu}$. Entonces $p \circ \tilde{F}$ es una homotopía en Top de trayectorias entre σ y μ. □

Teorema 2.8. *El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es isomorfo al grupo aditivo de los enteros.*

Demostración. Sean $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, x \mapsto (\cos(2\pi x), \operatorname{sen}(2\pi x))$, $e_0 = 0$ y $b_0 = p(e_0)$. Entonces $p^{-1}[\{b_0\}] = \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo y la función p es una aplicación cubriente (véase el teorema 2.3), entonces por el teorema anterior concluimos que la correspondencia del levantamiento $\phi : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \to \mathbb{Z}$ es biyectiva. Dados $[f]$ y $[g]$ en $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$, sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus respectivos levantamientos a trayectorias en $\mathbb{R}$ que comiencen en 0. Sean $n = \tilde{f}(1)$ y $m = \tilde{g}(1)$, entonces $\phi([f]) = n$ y $\phi([g]) = m$ por definición. Sea τ la trayectoria en $\mathbb{R}$ dada por $\tau(s) = n + \tilde{g}(s)$. Como $p(n + x) = p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la trayectoria τ es un levantamiento de g que comienza en n. Entonces el producto $\tilde{f} \cdot \tau$ está definido y es el levantamiento de $f \cdot g$ que comienza en 0. El punto final de esta trayectoria es $n + m$. Entonces por definición $\phi([f] \cdot [g]) = n + m = \phi([f]) + \phi([g])$. □

2.4. Retracciones, retractos por deformación y tipo de homotopía

Definición 2.10. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Llamaremos* retracción de X en A *a cualquier función continua $r : X \to A$ tal que $r \restriction A$ es la identidad de A. Si existe dicha función r diremos que A* es un retracto de X.

Lema 2.3. *Sean X un espacio topológico, $\varnothing \neq A \subseteq X$, $a \in A$. Si A es un retracto de X, entonces el homomorfismo de grupos fundamentales inducido por la flecha $j_a : (A, a) \to (X, a)$, donde $j : A \to X$ es la inclusión, es inyectivo y de hecho se escinde.*

Demostración. Si $r : X \to A$ es una retracción y $j : A \to X$ es la inclusión, entonces la composición $r \circ j$ es igual a la identidad de A, además $r_a : (X, a) \to (A, a)$ es una flecha en la categoría de espacios topológicos punteados de donde se sigue, por las propiedades de funtor, que $(r_a)_* \circ (j_a)_*$ es la aplicación identidad de $\pi_1(A, a)$, es decir $(r_a)_*$ escinde a $(j_a)_*$, lo cual en particular implica que $(j_a)_*$ es inyectivo (si dos elementos de $\pi_1(A, a)$ tuvieran la misma imagen bajo $(j_a)_*$, al componer con $(r_a)_*$ tendrían la misma imagen, pero esto no puede ser porque $(r_a)_* \circ (j_a)_*$ es la identidad de $\pi_1(A, a)$).

$$\pi_1(A, a) \xrightarrow{(j_a)_*} \pi_1(X, a) \xrightarrow{(r_a)_*} \pi_1(A, a)$$

□

Lema 2.4. *Sean X, Y espacios topológicos, $x_0 \in X$, $h, k : X \to Y$ dos funciones continuas tales que $h(x_0) = k(x_0) = y_0$. Si h y k son homotópicas y si la imagen del punto base x_0 de X permanece fija en y_0 durante la homotopía entonces los homomorfismos h_* y k_* coinciden.*

Demostración. Por hipótesis existe una homotopía $H : X \times I \to Y$ entre h y k tal que $H((x_0, t)) = y_0$ para todo $t \in I$. Se sigue que si λ es un lazo en X basado en x_0, entonces la composición $I \times I \xrightarrow{\lambda \times id} X \times I \xrightarrow{H} Y$ es una homotopía de trayectorias, porque H aplica $\{x_0\} \times I$ en y_0. □

Teorema 2.9. *La inclusión $j : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$ induce un isomorfismo de grupos fundamentales.*

Demostración. Sean $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$ y $b_0 = (1, 0, ..., 0)$. Sea $r : X \to \mathbb{S}^n$ la función dada por $r(x) = x/\|x\|$. Entonces $r \circ j$ es la identidad en $\mathbb{S}^n$, por lo que $r_* \circ j_*$ es el homomorfismo identidad de $\pi_1(\mathbb{S}^n, b_0)$. Consideremos ahora la composición $j \circ r$, de X en si mismo. Esta aplicación no es la identidad pero es homotópica a la identidad. La homotopía por segmentos $H : X \times I \to X$ dada por

$$H((x, t)) = (1 - t)x + tx/\|x\|$$

es una homotopía entre la identidad de X y la función $j \circ r$. $H((x, t))$ nunca es igual a 0 porque $(1-t)+t/\|x\|$ es un número entre 1 y $1/\|x\|$. El punto b_0 permanece fijo durante la homotopía ya que $\|b_0\| = 1$. Entonces por el lema anterior $(j \circ r)_* = j_* \circ r_*$ es el homomorfismo identidad de $\pi_1(X, b_0)$. □

Definición 2.11. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que* A es un retracto por deformación de X *si existe una función continua*

$H : X \times I \to X$ *tal que*

$$H((x,0)) = x$$
$$H((x,1)) \in A$$
$$H((a,t)) = a$$

La homotopía H se llama retracción por deformación de X en A. *La función $r : X \to A, x \mapsto H((x,1))$ es una retracción de X en A y H es una homotopía entre la aplicación identidad de X y la aplicación $j \circ r$ donde $j : A \to X$ es la inclusión.*

Por ejemplo, la homotopía H del teorema anterior es una retracción por deformación.

Definición 2.12. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones continuas. Diremos que f y g* son inversos homotópicos *si $f \circ g \simeq_T id_Y$ y $g \circ f \simeq_T id_X$.*

Definición 2.13. *Sean X, Y espacios topológicos. Diremos que X* y *Y* son del mismo tipo de homotopía en Top, *si existen funciones continuas $f : X \to Y, g : Y \to X$ que sean inversos homotópicos.*

Lema 2.5. *Sean $h, k : X \to Y$ dos funciones continuas tales que $h(x_0) = y_0$ y $k(x_0) = y_1$. Si h y k son homotópicas, entonces existe una trayectoria α en Y de y_0 a y_1 tal que $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$. Si $H : X \times I \to Y$ es la homotopía entre h y k entonces α es la trayectoria dada por $\alpha(t) = H((x_0, t))$.*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "h_*"] \arrow[dr, "k_*"'] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "\hat{\alpha}"] \\
& \pi_1(Y, y_1)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\lambda : I \to X$ un lazo basado en x_0. Consideremos los lazos λ_0 y λ_1 en el espacio $X \times I$ dados por las ecuaciones

$$\lambda_0(s) = (\lambda(s), 0) \qquad\qquad \lambda_1(s) = (\lambda(s), 1).$$

Consideremos también la trayectoria en $X \times I$ dada por la ecuación

$$c(t) = (x_0, t).$$

Entonces $H \circ \lambda_0 = h \circ \lambda$ y $H \circ \lambda_1 = k \circ \lambda$ mientras que $H \circ c$ es igual a la trayectoria α. Sea $F : I \times I \to X \times I$, $(s,t) \mapsto (f(s),t)$. Consideremos las siguientes trayectorias en $I \times I$, las cuales recorren los cuatro lados de $I \times I$:

$$\begin{aligned} \beta_0(s) &= (s,0), & \beta_1(s) &= (s,1) \\ \gamma_0(s) &= (0,t), & \gamma_1(s) &= (1,t) \end{aligned}$$

Entonces $F \circ \beta_0 = \lambda_0$ y $F \circ \beta_1 = \lambda_1$, mientras que $F \circ \gamma_0 = F \circ \gamma_1 = c$. Las trayectorias rectas por pedazos $\beta_0 \cdot \gamma_1$ y $\gamma_0 \cdot \beta_1$ son trayectorias en $I \times I$ de $(0,0)$ a $(1,1)$; como $I \times I$ es convexo, existe K una homotopía en Top de trayectorias entre ellas. Entonces $F \circ K$ es una homotopía de trayectorias en $X \times I$ entre $\lambda_0 \cdot c$ y $c \cdot \lambda_1$. Y $H \circ (F \circ K)$ es una homotopía de trayectorias en Y entre:

$$\begin{aligned} &(H \circ \lambda_0) \cdot (H \circ c) = (h \circ \lambda) \cdot \alpha \ \text{ y} \\ &(H \circ c) \cdot (H \circ \lambda_1) = \alpha \cdot (k \circ \lambda). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.10. *Sean X y Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ continua con $f(x_0) = y_0$. Si existe una inversa homotópica de f, entonces*

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sean $g : Y \to X$ una inversa homotópica de f, $x_1 = g(y_0)$ y $y_1 = f(x_1)$. Tenemos la siguiente sucesión de homomorfismos inducidos:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "(f_{x_0})_*"] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[dl, "g_*"'] \\ \pi_1(X,x_1) \arrow[r, "(f_{x_1})_*"] & \pi_1(Y,y_1) \end{tikzcd}$$

Por hipótesis $g \circ f : (X, x_0) \to (X, x_1)$ es homotópica a la aplicación identidad, de manera que existe una trayectoria α en X tal que $(g \circ f)_* = \hat{\alpha} \circ (i_X)_* = \hat{\alpha}$. Se sigue que $(g \circ f)_* = g_* \circ (f_{x_0})_*$ es un isomorfismo. Análogamente, dado que $f \circ g$ es homotópica a la identidad, el homomorfismo $(f \circ g)_* = (f_{x_1})_* \circ g_*$ es un isomorfismo. Lo primero implica que g_* es suprayectiva y lo segundo implica que g_* es inyectiva. Por lo tanto, g_* es un isomorfismo. Aplicando la primera ecuación una vez más obtenemos

$(f_{x_0})_* = (g_*)^{-1} \circ \hat{\alpha}$, de modo que $(f_{x_0})_*$ es también un isomorfismo. Observemos que, aunque g es una inversa homotópica para f, el homomorfismo g_* no es necesariamente inverso del homomorfismo $(f_{x_0})_*$. $\square$

2.5. Producto de grupos fundamentales

TEOREMA 2.11. *$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $p : X \times Y \to X$ y $q : X \times Y \to Y$ las proyecciones. Tenemos los homomorfismos inducidos:

$$p_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0),$$
$$q_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(Y, y_0)$$

Definimos un homomorfismo

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0),$$
$$[\lambda] \mapsto (p_*([\lambda]), q_*([\lambda])) = ([p \circ \lambda], [q \circ \lambda])$$

Veamos que Φ es un isomorfismo: Φ es suprayectiva: si $\sigma : I \to X$ es un lazo basado en x_0 y $\mu : I \to Y$ es un lazo basado en y_0 definimos $\tau : I \to X \times Y$ por la ecuación

$$\tau(s) = (\sigma(s), \mu(s)).$$

Entonces τ es un lazo en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0) y

$$\Phi([\tau]) = ([p \circ \tau]), [q \circ \tau]) = ([\sigma], [\mu]).$$

El núcleo de Φ es cero: Supongamos que $\lambda : I \to X \times Y$ es un lazo en $X \times Y$ basado en (x_0, y_0) y tal que $\Phi([\lambda]) = ([p \circ \lambda], [q \circ \lambda])$ es el elemento neutro. Esto significa que $p \circ \lambda \simeq_T^t \kappa_{x_0}$ y $q \circ \lambda \simeq_T^t \kappa_{y_0}$; sean G y H las respectivas homotopías de trayectorias. Entonces la función $F : I^2 \to X \times Y$ definida por

$$F((s, t)) = (G((s, t)), H((s, t)))$$

es una homotopía en Top de trayectorias entre λ y el lazo constante basado en (x_0, y_0). $\square$

CAPíTULO 3

El grupo $\pi_1(\Gamma, x_0)$

En el capítulo anterior enfocamos nuestra atención a un tipo muy particular de objeto matemático: los espacios topológicos. Construimos un funtor de la categoría de estos espacios (Top) a la categoría de grupos (Grp). En este capítulo discutiremos algunas construcciones de Rhodes, análogas al funtor grupo fundamental, para ciertos objetos que tienen que ver con espacios topológicos y acciones de grupos. La manera que nos parece más conveniente de abordar estas construcciones es mediante las acciones semicontinuas. Primero, recordemos la definición de G-conjunto.

Definición 3.1. *Sean X un conjunto, G un grupo y $\Gamma : G \times X \to X$ una función. Diremos que Γ* es una acción de G en X *si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\Gamma(\langle \gamma, \Gamma(\langle \delta, x \rangle) \rangle) = \Gamma(\langle \gamma\delta, x \rangle)$ *para todo* $\gamma, \delta \in G$ *y para todo* $x \in X$.
2. $\Gamma(\langle e, x \rangle) = x$ *para todo* $x \in X$, *donde* e *es el neutro de* G.

Al conjunto X junto con la acción Γ de G en X se le llama G-conjunto.

Notación 3.1. *En lugar de escribir $\Gamma(\langle \gamma, x \rangle)$ escribiremos simplemente γx si no hay peligro de confusión. De esta manera los axiomas de acción se pueden escribir como*

1. $\gamma(\delta x) = (\gamma\delta)x$ *para todo* $\gamma, \delta \in G$ *y para todo* $x \in X$.
2. $ex = x$ *para todo* $x \in X$, *donde* e *es el neutro de* G.

Ejemplo 3.1. *Sea X el cuadrado en el plano complejo con vértices en los puntos $1, i, -1, -i$ junto con el grupo $\mathbb{Z}_4$ y la función $\Gamma : \mathbb{Z}_4 \times X \to X$, $([n], z) \mapsto i^n z$. Entonces Γ es una acción de $\mathbb{Z}_4$ en X.*

Lo siguiente es ver la definición de acción semicontinua y más adelante será clara su relación con los grupos de transformaciones y las acciones continuas de grupos topológicos. Es posible, y de hecho es más común, tratar a los grupos como grupos topológicos dándoles la topología discreta y entonces las que aquí llamamos acciones semicontinuas son acciones de grupos y

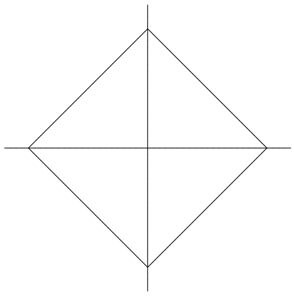

Figura 1. Cuadrado con vértices en $1, i, -1, -i$.

continuas como funciones del producto topológico $G \times X$. Pero de cualquier modo seguiremos haciendo la distinción en este trabajo, porque para las construcciones de Rhodes lo único que necesitamos es lo que aquí denominamos acciones semicontinuas. Veamos pues, su definición

Definición 3.2. *Sean X un espacio topológico, G un grupo y Γ una acción de G en el conjunto subyacente de X. Diremos que* Γ es una acción semicontinua (de G en X), o que G actúa semicontinuamente en X, *si para cada $\gamma \in G$ la función $\theta_\gamma : X \to X, x \mapsto \Gamma(\langle \gamma, x \rangle)$ es una función continua de X en X.*

Ejemplo 3.2. $\Gamma : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\langle n, x \rangle) \mapsto n + x$, *es una acción semicontinua.*

Notación 3.2. *Sean X un espacio topológico y G un grupo. La fórmula $G {\curvearrowright} X$ es una abreviatura que usaremos para indicar que G actúa semicontinuamente en X.*

Proposición 3.1. *Hay una categoría cuyos objetos son las acciones semicontinuas y donde una flecha entre dos objetos $\Gamma : G \times X \to X$ y $\Xi : H \times Y \to Y$ es un conjunto de funciones $\{\psi \times \varphi, \varphi\}$ tal que $\varphi : X \to Y$ es una función continua y $\psi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos y además se cumple que*

$$\varphi(\gamma x) = (\psi\gamma)(\varphi(x))$$

para todo $x \in X$ y para todo $\gamma \in G$, es decir, conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\psi\times\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ H \times Y \arrow[r, "\Xi"'] & Y \end{tikzcd}$$

Demostración. Las identidades en los conjuntos subyacentes funcionan como conjunto flecha identidad y dadas flechas entre Γ_1 y Γ_2 y Γ_2 y Γ_3 podemos pegar los diagramas conmutativos en un diagrama conmutativo más grande de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} G_1 \times X_1 \arrow[r, "\Gamma_1"] \arrow[d, "\psi_1 \times \varphi_1"'] & X_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ G_2 \times Y_2 \arrow[r, "\Gamma_2"] \arrow[d, "\psi_2 \times \varphi_2"'] & X_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\ G_3 \times X_3 \arrow[r, "\Gamma_3"] & X_3 \end{tikzcd}$$

Es decir, tenemos que la composición de funciones nos da una flecha composición en esta categoría. Escrito de otra manera tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1(\gamma x) &= \varphi_2(\varphi_1(\gamma x)) \\ &= \varphi_2(\psi_1(\gamma)\varphi_1(x)) \\ &= \psi_2(\psi_1(\gamma))\varphi_2(\varphi_1(x)) \\ &= \psi_2 \circ \psi_1(\gamma)(\varphi_2 \circ \varphi_1(x)). \end{aligned}$$

□

Esta categoría es la que nos va a interesar para las construcciones de Rhodes. Usamos solamente la acción porque en ella está contenida toda la información necesaria: El espacio topológico, el grupo que actúa en el, y precisamente de que manera actúa dicho grupo. Veremos que hay una correspondencia entre las acciones semicontinuas y otros objetos como los grupos de transformaciones y las acciones continuas de grupos topológicos, pero antes es conveniente recordar algunas definiciones.

Definición 3.3. *Sea G un grupo. Diremos que G* es un grupo topológico *si G tiene una topología tal que:*

1. *la operación de grupo $\circledast : G \times G \to G, \langle \gamma, \delta \rangle \mapsto \gamma \circledast \delta$ es continua en el producto topológico $G \times G$.*
2. *la función $(\ )^{-1} : G \to G, \gamma \mapsto \gamma^{-1}$ es continua en G.*

Ejemplo 3.3. *Sea G un grupo y consideremos a G con la topología indiscreta. Entonces G es un grupo topológico ya que cualquier función de un espacio topológico a un espacio topológico indiscreto es continua, (sólo tenemos que checar las imágenes inversas de dos abiertos, el vacío y el total* *(y ambas son abiertos)), en particular la multiplicación del grupo y tomar inversos resultan ser funciones continuas.*

Ejemplo 3.4. *$\langle \mathbb{R}, + \rangle$ es un grupo topológico.*

Definición 3.4. *Sean X un espacio topológico, G un grupo topológico y $\Gamma : G \times X \to X$ una función. Diremos que* Γ es una acción continua de G en X (o que G actúa continuamente en X) *si Γ es una acción del grupo G en el conjunto subyacente de X, y si además Γ es una función continua del producto topológico $G \times X$ a X. Al espacio X junto con la acción continua Γ de G en X se le llama* G-espacio.

Observación 3.1. *Si G actúa continuamente en X, entonces G actúa semicontinuamente en X.*

Definición 3.5. *Llamaremos* grupo de transformaciones *a cualquier pareja ordenada (X, G) donde X es un espacio topológico y G es un subgrupo de $\langle Homeo(X), \circ \rangle$ (el conjunto de homeomorfismos de X en X con la composición como operación).*

Ejemplo 3.5. *Sea X un espacio topológico. Entonces $(X, \{id_X\})$ es un grupo de transformaciones.*

Ejemplo 3.6. *Sea X un espacio discreto de dos puntos, digamos a, b; sea $G = \{id_X, \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}\}$ con la composición de funciones como operación de grupo y con la topología indiscreta ($\langle G, \circ, \tau \rangle$ ($\tau = \{\varnothing, G\}$)). Entonces $\langle X, G \rangle$ es un grupo de transformaciones, pero la acción $\Gamma : G \times X \to X, (\gamma, x) \mapsto \gamma(x)$ no es una acción continua de G en X; la imagen inversa de $\{a\}$ bajo Γ es el conjunto $\{\langle id_X, a \rangle, \langle (a\ b), b \rangle\}$ (donde $(a\ b) = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$) y no es abierto en el producto topológico de G y X porque de serlo sería unión de abiertos básicos que son de la forma $U \times V$ donde U es abierto en G con la topología indiscreta y V es un abierto de X, y si esto pasara tendríamos que o bien $\langle id_X, b \rangle$ o bien $\langle (a\ b), a \rangle$ pertenecería a $\Gamma^{-1}[\{a\}]$, lo cual no sucede.*

Proposición 3.2. *Si (X, G) es un grupo de transformaciones entonces la función*

$$\mathrm{ev} : G \times X \to X, \quad \langle h, x \rangle \mapsto h(x)$$

es una acción semicontinua de G en X.

Demostración. Veamos que ev es una acción:

$$\mathrm{ev}(\langle h, \mathrm{ev}(g, x) \rangle) = h(\mathrm{ev}(g, x)) = h(g(x)) = \mathrm{ev}(\langle h \circ g, x \rangle)$$

$$\mathrm{ev}(\langle id_X, x\rangle) = id_X(x) = x$$

La otra condición para ser una acción semicontinua se satisface porque cada $h \in G$ es un homeomorfismo (en particular es una función continua). $\square$

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean* $\Gamma : G \times X \to X$ *una acción semicontinua y sea* $Homeo(X)$ *el grupo de homeomorfismos de* X *en sí mismo. Entonces para cada* $\gamma \in G$ *la función* $\theta_\gamma : X \to X, x \mapsto \gamma x$ *es un homeomorfismo de* X *en* X *y* $\theta : G \to Homeo(X)$, $\gamma \mapsto \theta_\gamma$ *es un homomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in X$ y $\gamma \in G$, entonces la función $\theta_{\gamma^{-1}}$ es inversa de la función θ_γ ya que por los axiomas de acción de grupo

$$\theta_\gamma(\theta_{\gamma^{-1}}(x)) = \gamma(\gamma^{-1}x) = (\gamma\gamma^{-1})x = ex = x = (\gamma^{-1}\gamma)x = \gamma^{-1}(\gamma x) = \theta_{\gamma^{-1}}(\theta_\gamma(x)).$$

Entonces cada función θ_γ es continua porque $G \curvearrowright X$ y tiene una inversa continua, i.e., cada función θ_γ es un homeomorfismo. Ahora, como $\theta_\gamma(\theta_h(x)) = \gamma(h(x)) = (\gamma h)(x) = \theta_{\gamma h}(x)$, entonces θ es un homomorfismo de grupos. $\square$

Estas proposiciones nos muestran, que si tenemos una acción semicontinua Γ de un grupo G en un espacio topológico X entonces $(X, \theta[G])$ (donde θ es la función de la proposición anterior) es un grupo de transformaciones y recíprocamente, que para todo grupo de transformaciones (Y, H) la acción evaluación ev es una acción semicontinua. El ejemplo 3.6 muestra que aunque G sea un grupo topológico de homeomorfismos de un espacio X que actúa semicontinuamente en X, no podemos decir que G actúe continuamente en X.

A continuación definiremos algunos conceptos necesarios para las construcciones de Rhodes y lo haremos, en vista de las proposiciones anteriores, en base a las acciones semicontinuas.

DEFINICIÓN 3.6. *Sean* $\Gamma : G \times X \to X$ *una acción semicontinua y* $x, y \in X$. *Una* Γ-trayectoria en X de x a y *es una pareja ordenada* (σ, γ) *donde* $\gamma \in G$ *y* $\sigma : I \to X$ *es una función continua tal que* $\sigma(0) = x$, $\sigma(1) = \gamma y$. *Un* Γ-lazo en X basado en x *es una* Γ*-trayectoria de* x *a* x.

Si (σ, γ) es una Γ-trayectoria algunas veces diremos que σ es una trayectoria de orden γ en X o incluso que σ es una γ-trayectoria si no se presta a confusión.

NOTACIÓN 3.3. *Si* $\Gamma : G \times X \to X$ *es una acción semicontinua, denotaremos con* $\Omega(\Gamma, x_0)$ *al conjunto de* Γ*-lazos en* X *basados en* x_0.

EJEMPLO 3.7. $\Omega(\mathrm{ev} : \{id_X\} \times X \to X, x_0)$ *es el conjunto de lazos en* X *basados en* x_0.

DEFINICIÓN 3.7. *Sean* $(\sigma, \gamma_1), (\mu, \gamma_2) \in \Omega(\Gamma, x_0)$. *Definimos el producto* $\odot$ *de* (σ, γ_1) *y* (μ, γ_2) *como sigue:*

$$(\sigma, \gamma_1) \odot (\mu, \gamma_2) = (\sigma \cdot \gamma_1\mu, \gamma_1\gamma_2).$$

(Por $\gamma_1\mu$ *entendemos la función* $t \mapsto \gamma_1\mu(t)$*.)*

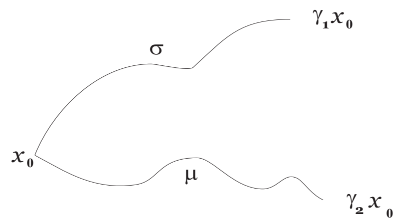

FIGURA 2. Dos Γ-lazos en el plano.

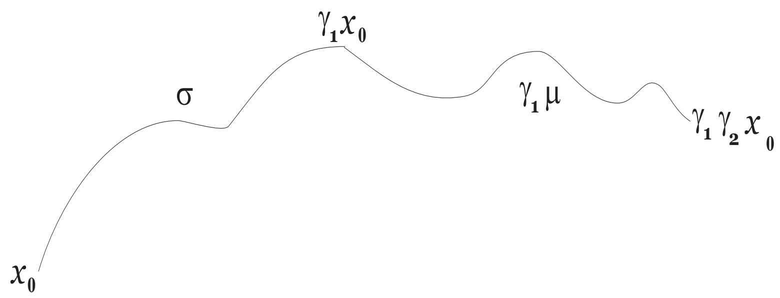

FIGURA 3. El producto $\odot$ de (σ, γ_1) y (μ, γ_2).

En las figuras vemos el ejemplo en el plano actuando en si mismo mediante traslaciones.

OBSERVACIÓN 3.2. *El producto* $\odot$ *de cualesquiera dos elementos de* $\Omega(\Gamma, x_0)$ *es un elemento de* $\Omega(\Gamma, x_0)$.

DEFINICIÓN 3.8. *Sean* $\Gamma : G \times X \to X$ *una acción semicontinua y* $(\sigma, \gamma), (\sigma', \gamma')$ *dos* Γ*-trayectorias en* X. *Diremos que* (σ, γ) y (σ', γ') son homotópicas en la categoría de acciones semicontinuas *si* $\gamma = \gamma'$ *y* $\sigma \simeq_T^t \sigma'$.

Notación 3.4. *Si* (σ,γ) *y* (σ',γ') *son homotópicas en la categoría de acciones semicontinuas, escribiremos* $(\sigma,\gamma)\simeq(\sigma',\gamma')$.

Proposición 3.4. *Sean* $\Gamma: G\times X\to X$ *una acción semicontinua y* $x_0\in X$*. Entonces el conjunto*

$$\{((\sigma,\gamma),(\sigma',\gamma'))\in\Omega(\Gamma,x_0)\times\Omega(\Gamma,x_0)\mid(\sigma,\gamma)\simeq(\sigma',\gamma')\}$$

es una relación de equivalencia.

Notación 3.5. *a la clase de equivalencia de* (σ,γ) *bajo esta relación la denotaremos* $[\sigma;\gamma]$*. Al conjunto* $\Omega(\Gamma,x_0)/\simeq$ *lo denotaremos* $\pi_1(\Gamma,x_0)$.

Proposición 3.5. *Sean* $\Gamma: G\times X\to X$ *una acción semicontinua y* $x_0\in X$*. Entonces* $\pi_1(\Gamma,x_0)$ *con la operación* $[\sigma;\gamma_1][\mu;\gamma_2]=[\sigma\cdot\gamma_1\mu;\gamma_1\gamma_2]$ *es un grupo.*

Demostración. La operación está bien definida ya que si $(\sigma,\gamma_1)\simeq(\sigma',\gamma_1)$ y $(\mu,\gamma_2)\simeq(\mu',\gamma_2)$ entonces hay homotopías en Top de trayectorias H_1 y H_2 tales que $H_1:\sigma\simeq_T^t\sigma'$ y $H_2:\mu\simeq_T^t\mu'$ entonces

$$F((s,t))=\begin{cases}H_1((2s,t)) & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ \gamma_1H_2((2s-1,t)) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

es una homotopía entre $(\sigma\cdot\gamma_1\mu,\gamma_1\gamma_2)$ y $(\sigma'\cdot\gamma_1\mu',\gamma_1\gamma_2)$.

La operación es asociativa:

$$\begin{aligned}([\sigma;\gamma_1][\mu;\gamma_2])[\tau;\gamma_3]&=[\sigma\cdot\gamma_1\mu;\gamma_1\gamma_2][\tau;\gamma_3]\\&=[(\sigma\cdot\gamma_1\mu)\cdot\gamma_1\gamma_2\tau;\gamma_1\gamma_2\gamma_3]\\ [\sigma;\gamma_1]([\mu;\gamma_2][\tau;\gamma_3])&=[\sigma;\gamma_1][\mu\cdot\gamma_2\tau;\gamma_2\gamma_3]\\&=[\sigma\cdot\gamma_1(\mu\cdot\gamma_2\tau);\gamma_1\gamma_2\gamma_3]\end{aligned}$$

$[\kappa_{x_0};e]$, donde e es el elemento neutro de G, funciona como neutro para la operación:

$$\begin{aligned}[\sigma;\gamma][\kappa_{x_0};e]&=[\sigma\cdot\gamma\kappa_{x_0};\gamma e]\\&=[\sigma\cdot\gamma\kappa_{x_0};\gamma]\\ [\kappa_{x_0};e][\sigma;\gamma]&=[\kappa_{x_0}\cdot e\sigma;e\gamma]\\&=[\kappa_{x_0}\cdot\sigma;\gamma]\end{aligned}$$

y ya hemos visto que $\sigma\cdot\gamma\kappa_{x_0}\simeq_T^t\sigma$ y $\kappa_{x_0}\cdot\sigma\simeq_T^t\sigma$.

Dado $[\sigma;\gamma]$, $[\gamma^{-1}\bar{\sigma};\gamma^{-1}]$ es su inverso:

$$\begin{aligned}[\sigma;\gamma][\gamma^{-1}\bar{\sigma};\gamma^{-1}] &= [\sigma\cdot\gamma\gamma^{-1}\bar{\sigma};\gamma\gamma^{-1}]\\ &= [\sigma\cdot\bar{\sigma};e]\\ &= [\kappa_{x_0};e]\end{aligned}$$

□

Definición 3.9. *Sean $\Gamma : G\times X\to X$ una acción semicontinua y $x_0\in X$. Llamaremos a $\pi_1(\Gamma,x_0)$* el grupo fundamental equivariante de Rhodes (o simplemente el grupo de Rhodes) de (Γ,x_0).

Notación 3.6. *A la componente conexa por trayectorias de X que contiene a x_0 la denotaremos X_0.*

Observación 3.3. *$\pi_1(\Gamma,x_0)$ solamente depende de X_0 y de los elementos $\gamma\in G$, tales que $\gamma x_0\in X_0$.*

Notación 3.7. *Si G y H son grupos, la fórmula $G\leq H$ es una abreviatura que usaremos algunas veces para decir que G es un subgrupo de H.*

Proposición 3.6. *Sea $\Gamma : G\times X\to X$ una acción semicontinua y $x_0\in X$. Entonces*

$$G_0=\{\gamma\in G\mid \ \gamma x_0\in X_0\}\leq G.$$

Demostración. Sean $\gamma_1,\gamma_2,\gamma\in G_0$, como la función $x\mapsto\gamma_1 x$ es un homeomorfismo de X en X debe mandar una componente conexa por trayectorias de X en una componente conexa por trayectorias de X. Por hipótesis resulta que $\gamma_1 x_0\in X_0$ así que para toda $x\in X_0$ debe de cumplirse que $\gamma_1 x\in X_0$ (de no ser así se estarían mandando puntos de la componente X_0 a distintas componentes). Por lo tanto, como $\gamma_2 x_0\in X_0$ entonces $\gamma_1\gamma_2 x_0\in X_0$ lo cual quiere decir por definición de G_0 que $\gamma_1\gamma_2\in G_0$. Similarmente, $x\mapsto\gamma^{-1}x$ es un homeomorfismo de X en X y como $\gamma^{-1}\gamma x_0=x_0\in X_0$ debe de cumplirse que para toda $x\in X_0$, $\gamma^{-1}x\in X_0$ en particular $\gamma^{-1}x_0\in X_0$. □

Teorema 3.1. *Sean $\Gamma : G\times X\to X$ una acción semicontinua, $x_0\in X$, $x_1\in X_0$ y $\lambda : x_0\rightsquigarrow x_1$. Entonces λ induce un isomorfismo*

$$\lambda_\natural : \pi_1(\Gamma,x_0)\to\pi_1(\Gamma,x_1).$$

Demostración. Dado un $(\sigma,\gamma)\in\Omega\langle\Gamma,x_0\rangle$ podemos construir una trayectoria en $\Omega(\Gamma,x_1)$ utilizando σ y λ de la siguiente manera: $\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\lambda$. Si $(\sigma,\gamma)\simeq(\sigma',\gamma')$ entonces $\gamma=\gamma'$ y $\sigma\simeq^t_T\sigma'$ lo cual implica que $\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\lambda\simeq^t_T\bar\lambda\cdot\sigma'\cdot\gamma\lambda$, por lo que $[\sigma;\gamma]\mapsto[\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\lambda;\gamma]$ es una función bien definida que proponemos como $\lambda_\natural$. Esta función tiene como inversa a la función $[\alpha;h]\mapsto[\lambda\cdot\alpha\cdot h\bar\lambda;h]$:

$$\begin{aligned}
\lambda_\natural[\sigma;\gamma]=[\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\lambda;\gamma]\mapsto[\lambda\cdot\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\lambda\cdot\gamma\bar\lambda;\gamma]&=[\lambda\cdot\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma(\lambda\cdot\bar\lambda);\gamma]\\
&=[\lambda\cdot\bar\lambda\cdot\sigma;\gamma][\lambda\cdot\bar\lambda;e]\\
&=[\lambda\cdot\lambda\rho;e][\sigma;\gamma][\lambda\cdot\lambda\rho;e]\\
&=[\sigma;\gamma]\\
[\alpha;h]\mapsto[\lambda\cdot\alpha\cdot h\bar\lambda;h]\mapsto[\bar\lambda\cdot\lambda\cdot\alpha\cdot h\bar\lambda\cdot h\lambda;h]&=[\bar\lambda\cdot\lambda\cdot\alpha\cdot h(\bar\lambda\cdot\lambda);h]\\
&=[\bar\lambda\cdot\lambda\cdot\alpha;h][\bar\lambda\cdot\lambda;e]\\
&=[\bar\lambda\cdot\lambda;e][\alpha;h][\bar\lambda\cdot\lambda;e]\\
&=[\alpha;h]
\end{aligned}$$

$\lambda_\natural$ es homomorfismo:

$$\begin{aligned}
\lambda_\natural([\sigma;\gamma_1][\mu;\gamma_2])&=\lambda_\natural([\sigma\cdot\gamma_1\mu;\gamma_1\gamma_2])\\
&=[\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma_1\mu\cdot\gamma_1\gamma_2\lambda;\gamma_1\gamma_2]\\
\lambda_\natural[\sigma;\gamma_1]\lambda_\natural[\mu;\gamma_2]&=[\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma_1\lambda;\gamma_1][\bar\lambda\cdot\mu\cdot\gamma_2\lambda;\gamma_2]\\
&=[\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma_1\lambda\cdot\gamma_1(\bar\lambda\cdot\mu\cdot\gamma_2\lambda);\gamma_1\gamma_2]\\
&=[\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma_1\lambda\cdot\gamma_1\bar\lambda\cdot\gamma_1\mu\cdot\gamma_1\gamma_2\lambda;\gamma_1\gamma_2]
\end{aligned}$$

pero $\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma_1\lambda\cdot\gamma_1\bar\lambda\cdot\gamma_1\mu\cdot\gamma_1\gamma_2\lambda\simeq^t_T\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma_1\mu\cdot\gamma_1\gamma_2\lambda$, por lo tanto $\lambda_\natural$ es un isomorfismo. Si λ es un lazo en X basado en x_0, $\lambda(0)=\lambda(1)=x_0$ y entonces $\lambda_\natural$ es conjugar por $\bar\lambda$ ya que $\lambda_\natural[\sigma;\gamma]=[\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\lambda;\gamma]=[\bar\lambda;e][\sigma;\gamma][\lambda;e]$. El isomorfismo $\lambda_\natural$ sólo depende de la clase de homotopía de λ. De hecho dos isomorfismos $\lambda_\natural$ y $\lambda'_\natural$ inducidos por dos trayectorias de x_0 a x_1 λ y λ' respectivamente, están relacionados por el automorfismo inducido por el lazo $\lambda\cdot\bar\lambda'$. Para cualquier $[\sigma;\gamma]$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
\lambda'_\natural(\lambda\cdot\bar\lambda')_\natural[\sigma;\gamma] &= \lambda'_\natural[(\lambda\cdot\bar\lambda')\circ\rho\cdot\sigma\cdot\gamma(\lambda\cdot\bar\lambda');\gamma]\\
&= [\bar\lambda'\cdot(\lambda\cdot\bar\lambda')\circ\rho\cdot\sigma\cdot\gamma(\lambda\cdot\bar\lambda')\cdot\gamma\lambda';\gamma]\\
&= [\bar\lambda'\cdot\lambda'\cdot\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\lambda;\gamma]\\
&= [\bar\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\lambda;\gamma]\\
&= \lambda_\natural[\sigma;\gamma]
\end{aligned}
$$

□

TEOREMA 3.2. *Sean $\Gamma : G\times X\to X$ una acción semicontinua, $x_0\in X$ y $x_1\in GX_0$, supongamos además que G es un grupo abeliano. Entonces hay un isomorfismo entre $\pi_1(\Gamma,x_0)$ y $\pi_1(\Gamma,x_1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente probar que $\pi_1(\Gamma,x)\cong\pi_1(\Gamma,\gamma x)$, porque si $x_1=\gamma x'_0$ con $x'_0\in X_0$ tendríamos $\pi_1(\Gamma,x'_0)\cong\pi_1(\Gamma,\gamma x'_0)$ y por el teorema 3.1 $\pi_1(\Gamma,x_0)\cong\pi_1(\Gamma,x'_0)$. Supongamos entonces que $x_1=\gamma x_0$; como G es abeliano,

$$(\sigma,\gamma_1)\in\Omega(\Gamma,x_0)\Rightarrow(\gamma\sigma,\gamma\gamma_1)\in\Omega(\Gamma,x_1),$$

entonces γ induce una función

$$\gamma_\flat:\pi_1(\Gamma,x_0)\longrightarrow\pi_1(\Gamma,x_1),\ [\sigma;\gamma_1]\mapsto[\gamma\sigma;\gamma_1].$$

Esta función $\gamma_\flat$ tiene como inversa a la función $[\alpha;h]\mapsto[\gamma^{-1}\alpha;h]$; y además $\gamma_\flat$ es homomorfismo dado que para cualesquiera $[\sigma;\gamma_1],[\mu;\gamma_2]\in\pi_1(\Gamma,x_0)$:

$$
\begin{aligned}
\gamma_\flat[\sigma;\gamma_1]\gamma_\flat[\mu;\gamma_2] &= [\gamma\sigma;\gamma_1][\gamma\mu;\gamma_2]\\
&= [\gamma\sigma\cdot\gamma_1\gamma\mu;\gamma_1\gamma_2]\\
&= [\gamma\sigma\cdot\gamma\gamma_1\mu;\gamma_1\gamma_2]\\
&= \gamma_\flat[\sigma\cdot\gamma_1\mu;\gamma_1\gamma_2]\\
&= \gamma_\flat([\sigma;\gamma_1][\mu;\gamma_2])
\end{aligned}
$$

□

El siguiente ejemplo muestra que el resultado anterior no necesariamente se cumple si quitamos la hipótesis de que el grupo G sea abeliano.

EJEMPLO 3.8. *Sea $X=\{x_0,x_1,x_2\}$ con la topología discreta y sea G el grupo generado por los dos homeomorfismos γ_1,γ_2 donde*

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1x_0=x_1, &&\gamma_1x_1=x_2, &&\gamma_1x_2=x_0,\\
&\gamma_2x_0=x_0, &&\gamma_2x_1=x_2, &&\gamma_2x_2=x_1
\end{aligned}
$$

Entonces $G \cong S_3$ *(el grupo de permutaciones de un conjunto de tres elementos),* $X_0 = \{x_0\}$*,* $G_0 = \{e, \gamma_2\}$ *y* $\pi_1(\mathrm{ev}, x_0) = \{[\kappa_{x_0}; e], [\kappa_{x_0}; \gamma_2]\}$*.*
Por otro lado $X_1 = \{x_1\}$*,* $G_1 = \{e\}$ *y* $\pi_1(\mathrm{ev}, x_1) = \{[\kappa_{x_1}; e]\}$*.*

3.1. Flechas y tipo de homotopía

En la sección anterior vimos la construcción para la parte de objetos del funtor grupo de Rhodes, veamos ahora la parte de flechas.

Proposición 3.7. *Sean $\Gamma : G \times X \to X$ y $\Xi : H \times Y \to Y$ dos acciones semicontinuas y sea $\{\varphi, \psi \times \varphi\}$ una flecha entre ellas. Entonces hay un homomorfismo de $\pi_1(\Gamma, x_0)$ a $\pi_1(\Xi, \varphi(x_0))$ dado por*

$$(\varphi, \psi)_* : \pi_1(\Gamma, x_0) \to \pi_1(\Xi, \varphi(x_0)),\ [\sigma; \gamma] \mapsto [\varphi\sigma; \psi\gamma].$$

Demostración. Como $\{\varphi, \psi \times \varphi\}$ es un flecha entre Γ y Ξ tenemos la siguiente igualdad:

$$\varphi(\gamma x) = (\psi\gamma)(\varphi(x))$$

y entonces

$$\begin{aligned}
(\varphi, \psi)_*([\sigma; \gamma_1])(\varphi, \psi)_*([\mu; \gamma_2]) &= [\varphi \circ \sigma; \psi\gamma_1][\varphi \circ \mu; \psi\gamma_2] \\
&= [\varphi \circ \sigma \cdot (\psi\gamma_1)(\varphi \circ \mu); (\psi\gamma_1)(\psi\gamma_2)] \\
&= [\varphi \circ \sigma \cdot \varphi\gamma_1\mu; \psi(\gamma_1\gamma_2)] \\
&= [\varphi \circ (\sigma \cdot \gamma_1\mu); \psi(\gamma_1\gamma_2)] \\
&= (\varphi, \psi)_*[\sigma \cdot \gamma_1\mu; \gamma_1\gamma_2] \\
&= (\varphi, \psi)_*([\sigma; \gamma_1][\mu; \gamma_2])
\end{aligned}$$

lo cual quiere decir que la función $(\varphi, \psi)_*$ es un homomorfismo. Las identidades van a dar a las identidades y si tenemos otra flecha con dominio Ξ, digamos $\{\varphi', \psi' \times \varphi'\}$ entonces $(\varphi', \psi')_*(\varphi, \psi)_* = (\varphi'\varphi, \psi'\psi)_*$ lo cual quiere decir que las composiciones van a dar a las composiciones. $\square$

Si λ es una trayectoria en X de x_0 a x_1, entonces $\varphi\lambda$ es una trayectoria en Y de $y_0 = \varphi x_0$ a $y_1 = \varphi x_1$. Las trayectorias λ y $\varphi\lambda$ inducen los isomorfismos $\lambda_* : \pi_1(\Gamma, x_0) \to \pi_1(\Gamma, x_1)$ y $(\varphi\lambda)_* : \pi_1(\Xi, y_0) \to \pi_1(\Xi, y_1)$, pero además

$$\begin{aligned}
(\varphi, \psi)_*\lambda_*[\sigma; \gamma] &= (\varphi, \psi)_*[\lambda\rho \cdot \sigma \cdot \gamma\lambda; \gamma] \\
&= [\varphi(\lambda\rho \cdot \sigma \cdot \gamma\lambda); \psi\gamma] \\
(\varphi\lambda)_*(\varphi, \psi)_*[\sigma; \gamma] &= (\varphi\lambda)_*[\varphi\sigma; \psi\gamma] \\
&= [\varphi\lambda\rho \cdot \varphi\sigma \cdot (\psi\gamma)\varphi\lambda; \psi\gamma]
\end{aligned}$$

por lo que λ_* es natural. De manera similar, si G y H son abelianos entonces para cada elemento $\gamma \in H$, $(\varphi, \psi)_*\gamma_\flat = (\psi\gamma)_\flat(\varphi, \psi)_*$ por lo que $\gamma_\flat$ es natural.

Definición 3.10. *Sean* $\Gamma : G \times X \to X$ *y* $\Xi : H \times Y \to Y$ *acciones semicontinuas y* $\{\varphi, \psi \times \varphi\} : \Gamma \to \Xi$ *y* $\{\varphi', \psi' \times \varphi'\} : \Xi \to \Gamma$ *flechas en la categoría de acciones semicontinuas. Diremos que* $\{\varphi, \psi \times \varphi\}$ y $\{\varphi', \psi' \times \varphi'\}$ son equivalencias homotópicas equivariantes *si* ψ *y* ψ' *son isomorfismos y*

$$\varphi'\varphi \simeq_T id_X, \; \varphi\varphi' \simeq_T id_Y.$$

Teorema 3.3. *Sean* $\Gamma : G \times X \to X$ *y* $\Xi : H \times Y \to Y$ *acciones semicontinuas,* $x_0 \in X$*,* $\{\varphi, \psi \times \varphi\} : \Gamma \to \Xi$ *y* $\{\varphi', \psi' \times \varphi'\} : \Xi \to \Gamma$ *equivalencias homotópicas equivariantes. Entonces* $\pi_1(\Gamma, x_0) \cong \pi_1(\Xi, \varphi(x_0))$*.*

Demostración. Sean $y_0 = \varphi(x_0)$, $x_1 = \varphi'(y_0)$ y $y_1 = \varphi(x_1)$. Denotemos a los homomorfismos inducidos por $\{\varphi, \psi \times \varphi\}$ y $\{\varphi', \psi' \times \varphi'\}$ de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\Gamma, x_0) \arrow[r, "((\varphi,\psi)_{x_0})_*"] & \pi_1(\Xi, y_0) \arrow[dl, "((\varphi',\psi')_{y_0})_*"'] \\
\pi_1(\Gamma, x_1) \arrow[r, "((\varphi,\psi)_{x_1})_*"] & \pi_1(\Xi, y_1)
\end{tikzcd}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
\varphi'\varphi(\psi^{-1}\psi'^{-1}\gamma)x_0 &= \varphi'(\psi\psi^{-1}\psi'^{-1}\gamma)\varphi x_0 \\
&= \varphi'(\psi'^{-1}\gamma)\varphi x_0 \\
&= \psi'\psi'^{-1}\gamma\varphi'\varphi x_0 \\
&= \gamma\varphi'\varphi x_0 \\
&= \gamma x_1
\end{aligned}$$

Por la homotopía $h : X \times I \to X$, tal que

$$\begin{aligned}
h((x, 0)) &= \varphi'\varphi(x) \\
h((x, 1)) &= x
\end{aligned}$$

tenemos las trayectorias: $h_\gamma : I \to X, t \mapsto h((\psi^{-1}\psi'^{-1}\gamma x_0, t))$, en particular h_e es una trayectoria de x_1 a x_0. Si σ es una trayectoria en X, de x_1 a γx_1, entonces $\overline{h}_e \cdot \sigma \cdot h_\gamma$ es una trayectoria en X de x_0 a $(\psi^{-1}\psi'^{-1}\gamma)x_0$. Sean $F : I^2 \to X$, $(s, t) \mapsto h((h_e\rho \cdot \sigma \cdot h_\gamma)(s), t))$ y

$$K((s,t)) = \begin{cases} h_e(3st) & 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ F((3s-1,t)) & \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ h_\gamma(t\rho(3s-2)) & \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

K muestra que $\varphi'\varphi(h_e\rho \cdot \sigma \cdot h_\gamma) \simeq_T^t h_e \cdot h_e\rho \cdot \sigma \cdot h_\gamma \cdot h_\gamma\rho$ y por tanto $\varphi'\varphi(h_e\rho \cdot$

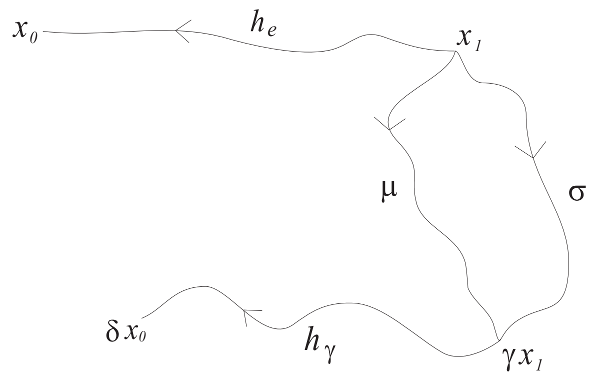

FIGURA 4. $\mu = \varphi'(\varphi(h_e \cdot \sigma \cdot h_\gamma))$ y $\delta = \psi^{-1}(\psi'^{-1}(\gamma))$.

$\sigma \cdot h_\gamma) \simeq_T^t \sigma$, es decir $(\varphi', \psi')_*(\varphi, \psi)_*$ es un homomorfismo suprayectivo que manda clases de homotopia de trayectorias de orden γ con punto básico x_0 a clases de homotopía de trayectorias de orden $\psi'\psi\gamma$ con punto básico x_1. Como ψ y ψ' son isomorfismos, solamente clases de homotopía de orden e con punto básico x_0 van a dar a clases de homotopía de orden e con punto básico x_1. El conjunto de clases de homotopía de orden e con punto básico x_0 forma un subgrupo de $\pi_1(\Gamma, x_0)$ isomorfo al grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ y $(\varphi', \psi')_*(\varphi, \psi)_*$ restringido a este subgrupo es el isomorfismo del teorema 2.10. Por lo tanto $(\varphi', \psi')_*(\varphi, \psi)_*$ debe ser un isomorfismo. Análogamente $(\varphi, \psi)_{**}(\varphi', \psi')_*$ es un isomorfismo y entonces $(\varphi', \psi')_*$ es un isomorfismo. $\square$

3.2. El grupo $\tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0)$

En esta sección construiremos otro de los grupos de Rhodes, que llamaremos grupo fundamental equivariante de Rhodes reducido, y hablaremos un poco del caso en que el espacio topológico en consideración es un poliedro, para lo cual necesitaremos hablar un poco de complejos simpliciales. También hablaremos de acciones simpliciales y su relación con las acciones semicontinuas. Para esto es conveniente recordar algunos hechos de la teoría de grupos. Lo primero que veremos a continuación es una manera útil de pensar el subgrupo generado por un subconjunto de un grupo.

NOTACIÓN 3.8. *Sea G un grupo, si B es un subgrupo de G escribiremos $B \leq G$. Si B es un subgrupo normal de G escribiremos $B \trianglelefteq G$.*

NOTACIÓN 3.9. *Sea A un conjunto. Denotamos con $\mathcal{P}(A)$ al conjunto potencia de A.*

PROPOSICIÓN 3.8. *Sean G un grupo y $A \subseteq G$. Entonces el conjunto*

$$\bigcap\{B \in \mathcal{P}(G) \mid B \leq G \wedge A \subseteq B\}$$

es un subgrupo de G y es el mínimo subgrupo de G con respecto a la contención de conjuntos que contiene a A.

DEMOSTRACIÓN. Sea $W = \bigcap\{B \in \mathcal{P}(G) \mid B \leq G \wedge A \subseteq B\}$, observemos que, por definición, el neutro de G pertenece a W. Sean $a, b \in W$ y $H \leq G$ tal que $A \subseteq H$. Entonces $a, b \in H$ y como H es un subgrupo de G se cumple que $ab \in H$. Además el inverso de a pertenece a H. Como H es un elemento de $\{B \in \mathcal{P}(G) \mid B \leq G \wedge A \subseteq B\}$ arbitrario concluimos que W es un subgrupo de G. $\square$

DEFINICIÓN 3.11. *Llamaremos* subgrupo generado por A *a la intersección:*

$$\bigcap\{B \in \mathcal{P}(G) \mid B \leq G \wedge A \subseteq B\}.$$

NOTACIÓN 3.10. *Denotaremos con $\langle A \rangle$ al subgrupo generado por A.*

PROPOSICIÓN 3.9. *Sean G un grupo y $N \subseteq G$. Entonces el conjunto*

$$A = \{a_0^{i_0} a_1^{i_1} ... a_k^{i_k} \in G \mid k \in \mathbb{N},\, i_0, ..., i_k \in \mathbb{Z},\, a_j \in N\, \forall j = 0, ..., k\}$$

es un subgrupo de G y es igual al subgrupo generado por N. Es decir se cumple la siguiente igualdad:

$$A = \bigcap\{B \in \mathcal{P}(G) \mid B \leq G \wedge N \subseteq B\}.$$

Demostración. A es un subgrupo de G, porque dados dos productos finitos de elementos de N a ciertas potencias enteras el producto de ellos es otra vez un producto finito de elementos de N a ciertas potencias enteras y el inverso de $a_0^{i_0}a_1^{i_1}...a_k^{i_k}$ es $a_k^{-i_k}a_{k-1}^{-i_{k-1}}...a_0^{-i_0}$. Entonces $\bigcap\{B \leq G \mid A \subseteq G\} \subseteq A$. La otra contención se da porque el producto finito de elementos de N pertenece a todos los subgrupos de G que contienen a N. $\square$

Lema 3.1. *Sean G un grupo y $N \subseteq G$ un subconjunto normal de G, es decir N es un subconjunto de G tal que para toda $n \in N$ y para toda $g \in G$, $gng^{-1} \in N$. Entonces el subgrupo generado por N es un subgrupo normal de G.*

Demostración. Sea $a \in N$, veamos que $\forall g \in G$ y $\forall i \in \mathbb{Z}$ se cumple que $ga^ig^{-1} \in \langle N\rangle$: si $i > 0$ entonces como para toda $g \in G$, $gag^{-1} \in N$ tenemos que $ga^ig^{-1} = (gag^{-1})^i \in \langle N\rangle$ porque por hipótesis cada $gag^{-1} \in N$. Si $i < 0$, como $ga^{-1}g^{-1}$ es el inverso de $gag^{-1} \in N$ se tiene que $ga^{-1}g^{-1} \in \langle N\rangle$ y por lo tanto dado que $ga^ig^{-1} = (ga^{-1}g^{-1})^{-i}$ se tiene que $ga^ig^{-1} \in \langle N\rangle$. Sea $a_0^{i_0}a_1^{i_1}...a_k^{i_k} \in \langle N\rangle$ entonces

$$ga_0^{i_0}a_1^{i_1}...a_k^{i_k}g^{-1} = ga_0^{i_0}g^{-1}ga_1^{i_1}g^{-1}...g^{-1}ga_k^{i_k}g^{-1} \in \langle N\rangle.$$

$\square$

Definición 3.12. *Sea $\Gamma : G \times X \to X$ una acción semicontinua. Llamaremos* conjunto de órdenes fijos de Rhodes *al subconjunto del conjunto subyacente de $\pi_1(\Gamma, x_0)$ definido de la siguiente manera:*

$$N(\Gamma, x_0) = \{[\lambda \cdot \gamma\bar{\lambda}; \gamma] \in \pi_1(\Gamma, x_0) \mid \lambda : x_0 \rightsquigarrow x \text{ } y \text{ } \gamma x = x\}.$$

Notación 3.11. *Al subgrupo generado por $N(\Gamma, x_0)$ lo denotaremos $\pi_1'(\Gamma, x_0)$.*

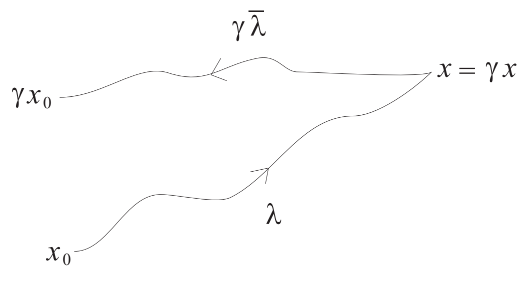

Figura 5. Un elemento de $N(\Gamma, x_0)$.

$\pi_1'(\Gamma, x_0)$ es el subgrupo generado por los elementos de la forma $[\lambda\cdot\gamma\bar{\lambda}; \gamma]$ donde λ es una trayectoria de x_0 a x y x es un punto fijo de γ.

LEMA 3.2. $\pi_1'(\Gamma, x_0) \trianglelefteq \pi_1(\Gamma, x_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $[\sigma_1;\gamma_1] \in \pi_1(\Gamma, x_0)$ y $[\lambda \cdot \gamma\bar{\lambda};\gamma] \in N(\Gamma, x_0)$, entonces $\sigma_1 \cdot \gamma_1\lambda$ es una trayectoria de x_0 al punto $\gamma_1 x$ que es un punto fijo de $\gamma_1\gamma\gamma_1^{-1}$, por lo que

$$[\sigma_1;\gamma_1][\lambda\cdot\gamma\bar{\lambda};\gamma][\gamma^{-1}\bar{\sigma}_1;\gamma_1^{-1}] = [\sigma_1\cdot\gamma_1\lambda\cdot\gamma_1\gamma\bar{\lambda}\cdot\gamma_1\gamma\gamma_1^{-1}\bar{\sigma}_1;\gamma_1\gamma\gamma_1^{-1}] \in N(\Gamma, x_0)$$

es decir $N(\Gamma, x_0)$ es un subconjunto normal de $\pi_1(\Gamma, x_0)$, entonces por el lema anterior $\pi_1'(\Gamma, x_0) \trianglelefteq \pi_1(\Gamma, x_0)$. □

DEFINICIÓN 3.13. *Al cociente* $\pi_1(\Gamma, x_0)/\pi_1'(\Gamma, x_0)$ *se le llama el* grupo fundamental equivariante reducido de Rhodes de (Γ, x_0).

NOTACIÓN 3.12. *Escribiremos* $\tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0)$ *como abreviatura de* $\pi_1(\Gamma, x_0)/\pi_1'(\Gamma, x_0)$.

PROPOSICIÓN 3.10. *Sean* $\Gamma : G \times X \to X$ *una acción semicontinua,* $x_1 \in X$ *y* $\lambda \in C(I, X)$ *una trayectoria de* x_0 *a* x_1. *Entonces* λ *induce un isomorfismo* $\lambda_* : \tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0) \to \tilde{\pi}_1(\Gamma, x_1)$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\lambda_* : \pi_1(\Gamma, x_0) \to \pi_1(\Gamma, x_1), [\sigma;\gamma] \mapsto [\bar{\lambda}\cdot \sigma\cdot\gamma\lambda;\gamma]$ es un isomorfismo. Si tomamos $[l\cdot\gamma\bar{l};\gamma] \in N(\Gamma, x_0)$ se tiene que $\lambda_*([l\cdot\gamma\bar{l};\gamma]) = [\bar{\lambda}\cdot l\cdot\gamma\bar{l}\cdot\gamma\lambda;\gamma] \in N(\Gamma, x_1)$, i.e., es un generador de $\pi_1'(\Gamma, x_1)$. Si $[\sigma\cdot\gamma\bar{\sigma};\gamma] \in N(\Gamma, x_1) \Rightarrow [\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\overline{(\lambda\cdot\sigma)};\gamma] \in N(\Gamma, x_0)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_*([\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\overline{(\lambda\cdot\sigma)};\gamma]) &= [\bar{\lambda}\cdot\lambda\cdot\sigma\cdot\gamma\overline{(\lambda\cdot\sigma)}\cdot\gamma\lambda;\gamma]\\
&= [\sigma\cdot\gamma(\bar{\sigma}\cdot\bar{\lambda})\cdot\gamma\lambda;\gamma]\\
&= [\sigma\cdot\gamma\bar{\sigma}\cdot\gamma\bar{\lambda}\cdot\gamma\lambda;\gamma]\\
&= [\sigma\cdot\gamma\bar{\sigma}\cdot\gamma(\bar{\lambda}\cdot\lambda);\gamma]\\
&= [\sigma\cdot\gamma\bar{\sigma};\gamma]
\end{aligned}$$

Así, $\lambda_*(N(\Gamma, x_0)) = N(\Gamma, x_1)$ y por lo tanto $\pi_1'(\Gamma, x_0) \cong \pi_1'(\Gamma, x_1)$, de donde concluimos que $\pi_1(\Gamma, x_0)/\pi_1'(\Gamma, x_0) \cong \pi_1(\Gamma, x_1)/\pi_1'(\Gamma, x_1)$, es decir $\tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0) \cong \tilde{\pi}_1(\Gamma, x_1)$. □

La siguiente proposición es una consecuencia del teorema 3.2.

PROPOSICIÓN 3.11. *Sea* G *un grupo abeliano y* $x_1 \in GX_0$. *Entonces*

$$\tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0) \cong \tilde{\pi}_1(\Gamma, x_1).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_1 = \gamma_0 x_0$, veamos que la función $\gamma_{0_\flat}$ del teorema 3.2, restringida a $N(\Gamma, x_0)$ es suprayectiva:

$$\gamma_{0_\flat} : N(\Gamma, x_0) \to N(\Gamma, x_1), [l\cdot\gamma\bar{l};\gamma] \mapsto [\gamma_0 l\cdot\gamma_0\gamma\bar{l};\gamma]$$

Sea $l : x_0 \rightsquigarrow x$ tal que x es un punto fijo de γ. Entonces $\gamma_0 l : \gamma_0 x_0 \rightsquigarrow \gamma_0 x$, y $\gamma_0 x$ es un punto fijo de γ ya que, por ser G Abeliano $\gamma\gamma_0 x = \gamma_0\gamma x = \gamma_0 x$, i.e., $\gamma_{0_\flat}$ tiene codominio $N(\Gamma, x_1)$, y de hecho es suprayectiva porque dado $[l \cdot \gamma\bar{l}; \gamma] \in N(\Gamma, x_1)$, $[\gamma_0^{-1} l \cdot \gamma_0^{-1}\gamma\bar{l}; \gamma] \in N(\Gamma, x_0)$ y su imagen bajo $\gamma_{0_\flat}$ es precisamente $[l \cdot \gamma\bar{l}; \gamma]$. Sabemos que $\gamma_{0_\flat}$ es un isomorfismo de $\pi_1(\Gamma, x_0)$ a $\pi_1(\Gamma, x_1)$ (ver el teorema 3.2), entonces $\gamma_{0_\flat}$ es un isomorfismo de $\pi_1'(\Gamma, x_0)$ a $\pi_1'(\Gamma, x_1)$ de donde se concluye que $\tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0) \cong \tilde{\pi}_1(\Gamma, x_1)$. □

Definición 3.14. *Sean G un grupo y (X, x_0) un espacio topológico punteado. Diremos que G* actúa semicontinuamente en (X, x_0) *si G actúa semicontinuamente en X.*

Proposición 3.12. *Hay una categoría cuyos objetos son los espacios topológicos punteados en los que actúa semicontinuamente un grupo G y donde una flecha $(f_{x_0})_G : (X, x_0)_G \to (Y, y_0)_G$ está dada por una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$ y $f(\gamma x) = \gamma f(x)$ para toda $\gamma \in G, x \in X$.*

Demostración. La función $id_X : X \to X, x \mapsto x$ da origen a una flecha que funciona como identidad. Si $f : X \to Y, h : Y \to Z$ dan origen a flechas entonces $h \circ f$ da origen a una flecha que cumple con lo requerido para ser la composición de flechas ya que $h(f(\gamma x)) = h(\gamma f(x)) = \gamma h(f(x))$. □

Notación 3.13. *A esta categoría la denotaremos G-Top$_*$.*

Definición 3.15. *Sean $f, g : (X, x_0)_G \to (Y, y_0)_G$ flechas en la categoría G-Top$_*$, diremos que $h : X \times I \to Y$* es una homotopía en G-Top$_*$ entre f y g *si*

$$\begin{aligned} h((x,0)) &= f(x) \\ h((x,1)) &= g(x) \\ h((x_0,t)) &= y_0 \\ h((\gamma x,t)) &= \gamma h((x,t)) \end{aligned}$$

para toda $x \in X, \gamma \in G, t \in I$.

De manera análoga a los casos anteriores se puede definir tipo de homotopía en G-Top$_*$.

Definición 3.16. *Sean $(X, x_0)_G, (Y, y_0)_G$ objetos en la categoría G-Top$_*$, diremos que $(X, x_0)_G$* y *$(Y, y_0)_G$* son del mismo tipo de homotopía en G-Top$_*$ *si existen flechas $f, : (X, x_0)_G \to (Y, y_0)_G, g : (Y, y_0)_G \to (X, x_0)_G$*

y homotopías en G-Top$_*$ entre $f \circ g$ y la identidad en $(Y, y_0)_G$ y $g \circ f$ y la identidad en $(X, x_0)_G$.

PROPOSICIÓN 3.13. *Sean $\Gamma : G \times X \to X$ y $\Psi : G \times Y \to Y$ acciones semicontinuas tales que $(X, x_0)_G, (Y, y_0)_G$ con estas acciones son del mismo tipo de homotopía en G-Top$_*$. Entonces*

$$\tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0) \cong \tilde{\pi}_1(\Psi, y_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $f : (X, x_0)_G \to (Y, y_0)_G, g : (Y, y_0)_G \to (X, x_0)_G$ inversas homotópicas en G-Top$_*$. Por 3.3, sólo tenemos que verificar que

$$f_* : \pi_1(\Gamma, x_0) \to \pi_1(\Psi, y_0)$$

es una función suprayectiva de el subgrupo $\pi'_1(\Gamma, x_0)$ al subgrupo $\pi'_1(\Psi, y_0)$ y para eso solamente hay que ver que dicha función es suprayectiva en los generadores de $\pi'_1(\Psi, y_0)$. Sea $[\lambda \cdot \gamma\bar{\lambda}; \gamma] \in N(\Psi, y_0)$ entonces $[g(\lambda \cdot \gamma\bar{\lambda}); \gamma] \in N(\Gamma, x_0)$ por las propiedades de las flechas en la categoría y $[f \circ g(\lambda \cdot \gamma\bar{\lambda}); \gamma] = [\lambda \cdot \gamma\bar{\lambda}; \gamma]$. $\square$

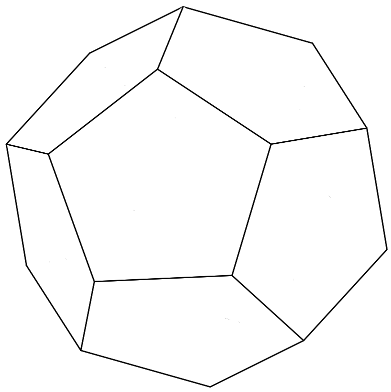

FIGURA 6. Un poliedro.

3.2.1. El grupo reducido de un poliedro.

Nuestro objetivo en esta subsección es demostrar que el grupo fundamental equivariante reducido de Rhodes de una acción semicontinua, cuyo espacio subyacente es un poliedro, es isomorfo al grupo fundamental del espacio de órbitas de la acción en dicho poliedro. Para esto vamos a necesitar un teorema de Armstrong que enunciaremos sin prueba, su demostración se encuentra en [Armstrong]. Utilizaremos también propiedades de los poliedros que pueden consultarse en [Hilton] (se recomienda ampliamente leerlo antes de continuar). Para evitar que la exposición se vuelva muy extensa y complicada, seremos muy informales e incompletos en algunas cosas, es decir, esta subsección no sólo no es autocontenida si no que supone un conocimiento mucho mayor que cualquiera de las otras secciones. Primero recordemos algunos hechos sobre las acciones de grupos.

Definición 3.17. *Sean G un grupo y X un espacio topológico (no vacío) $x \in X$ y supongamos que $G \curvearrowright X$. Llamaremos* conjunto de isotropía de x (con respecto a G) *al conjunto:*

$$\{\gamma \in G \mid \gamma x = x\}$$

Notación 3.14. *Si X es un espacio topológico y G un grupo tal que $G \curvearrowright X$ y $x \in X$, denotaremos con G_x al conjunto de isotropía de x.*

Proposición 3.14. *Sean G un grupo, X un espacio topológico tales que $G \curvearrowright X$ y $x \in X$. Entonces el conjunto de isotropía de x es un subgrupo de G.*

Demostración. Sean $\gamma, \delta \in G_x$ elementos arbitrarios de G_x y $e \in G$ el elemento neutro de G, entonces

$$(\gamma\delta)x = \gamma(\delta x) = \gamma x = x$$
$$\gamma^{-1}x = \gamma^{-1}(\gamma x) = (\gamma\gamma^{-1})x = ex = x.$$

□

Definición 3.18. *Sean X un espacio topológico no vacío, G un grupo tal que $G \curvearrowright X$ y $x \in X$. Llamaremos* órbita de x (con respecto a G) *al conjunto*

$$\{\gamma x \mid \gamma \in G\}.$$

Notación 3.15. *Sean X un espacio topológico, G un grupo tal que $G \curvearrowright X$ y $x \in X$. Denotaremos con $orb(x)$ a la órbita de x.*

Proposición 3.15. *Sean X un espacio topológico (no vacío) y G un grupo tal que $G \curvearrowright X$. Entonces*

$$\{orb(x) \mid x \in X\}$$

es una partición de X.

Demostración. Sea $x \in X$ entonces $x \in \mathrm{orb}(x)$ ya que $ex = x$. Supongamos que para algún $y \in X$, $\mathrm{orb}(y) \cap \mathrm{orb}(x) \neq \varnothing$, entonces hay un $w \in \mathrm{orb}(x) \cap \mathrm{orb}(y)$, es decir, hay $\gamma, \delta \in G$ tales que $w = \gamma x = \delta y$ pero entonces para todo $\gamma' x$ tenemos que $\gamma' x \in \mathrm{orb}(y)$ porque

$$\gamma' x = \gamma'\gamma^{-1}\gamma x = \gamma'\gamma^{-1}\delta y$$

y análogamente para todo $\delta' y$ tenemos que $\delta' y \in \mathrm{orb}(x)$. $\square$

Definición 3.19. *Sean X un espacio topológico y G un grupo tal que $G \curvearrowright X$. Llamaremos* espacio de órbitas de X (con respecto a G) *al conjunto $\{orb(x) \mid x \in X\}$ con la topología de identificación de la proyección $x \mapsto orb(x)$.*

Notación 3.16. *Denotaremos con X/G al espacio de órbitas de X con respecto a G.*

Ahora vamos a entrar un poco al mundo de los poliedros. Los poliedros son objetos construidos topológicamente a partir de bloques básicos que llamamos simplejos. Mediante un objeto combinatorio, que llamamos complejo simplicial etiquetado, pegamos estos simplejos para formar nuestro poliedro. Nuestro plan de ataque es el siguiente:

1. Vamos a definir simplejo.
2. Vamos a definir complejo simplicial y a hablar un poco de los espacios que podemos construir con un complejo simplicial.
3. Vamos a definir complejo simplicial etiquetado.
4. Vamos a ver que dado un complejo simplicial etiquetado podemos construir espacios topológicos (que llamaremos poliedros) asociados a estos complejos simpliciales etiquetados. Veremos que hay dos maneras de construir un poliedro para un mismo complejo simplicial etiquetado, y que ambas maneras dan espacios homeomorfos.

Definición 3.20. *Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\{v_i^n \mid i = 1, \dots, n\}$ la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos* simplejo canónico de dimensión $n-1$ *al conjunto*

$$\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

A la base canónica también se le llama el conjunto de vértices del simplejo. *Al conjunto*

$$\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^n \mid 0 < \lambda_i < 1 \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

lo llamaremos simplejo canónico abierto de dimensión $n-1$.

Notación 3.17. *A veces denotaremos con Δ^n al simplejo canónico de dimensión n y con $(\Delta^n)^\circ$ al simplejo canónico abierto de dimensión n.*

Notación 3.18. *Denotaremos con $vert(\Delta^n)$ al conjunto de vértices del simplejo canónico Δ^n.*

Hablemos ahora un poco de complejos simpliciales.

Definición 3.21. *Un* complejo simplicial *es una pareja* (V_K, K) *donde* V_K *es un conjunto no vacío y* K *es un conjunto no vacío de subconjuntos finitos no vacíos de* V_K *tal que*

1. *Si* $k \in K$ *y* $\varnothing \neq w \subseteq k$ *entonces* $w \in K$.
2. $\forall v \in V_K(\{v\} \in K)$

Sean (V_K, K) un complejo simplicial y

$$A = \{\alpha : V_K \to I \mid \alpha^{-1}[(0,1]] \in K \wedge \sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1\}.$$

Entonces la función $d : A \times A \to \mathbb{R}$ definida por la ecuación:

$$d(\langle \alpha, \beta \rangle) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}$$

es una métrica para A. Este espacio es uno de los que llamamos poliedro del complejo simplicial. También es posible usar simplejos para dar una topología al conjunto

$$A = \{\alpha : V_K \to I \mid \alpha^{-1}[(0,1]] \in K \wedge \sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1\}.$$

Para cada $k \in K$, definimos

$$|s_k| = \{\alpha \in A \mid \alpha^{-1}[(0,1]] \subseteq k\}.$$

Ahora, a cada $|s_k|$ podemos darle una topología mediante un simplejo ya que por cada biyección entre los puntos de k y la base canónica ordenada del correspondiente espacio euclideano, heredamos por linealidad una biyección entre el conjunto $|s_k|$ y el simplejo cuyos vértices son la base canónica ordenada mencionada. Es decir, si $f : vert(\Delta^n) \to k$ es una biyección entre la base canónica ordenada de $\mathbb{R}^{n+1}$ y k, entonces la función $\hat{f} : \Delta^n \to |s_k|, \sum \lambda_i v_i \mapsto \{(x,y) \mid (x = f(v_i) \wedge y = \lambda_i) \vee (x \notin f[vert(\Delta^n)] \wedge y = 0)\}$ es una biyección entre Δ^n y $|s_k|$. Utilizando estas biyecciones podemos dar topologías a cada $|s_k|$ y como estos cubren a A, podemos dar a A la topología coherente de estos subconjuntos. Estas topologías no dependen de las biyecciones f que se tomen, y de hecho cuando de antemano especificamos que biyecciones queremos usar es cuando tenemos un complejo simplicial etiquetado. Las topologías de las que hemos hablado, la métrica y la coherente con los $|s_k|$, en general no son iguales, coinciden en el caso en que los espacios resultantes son localmente compactos que es equivalente a que el complejo simplicial sea localmente finito, (i.e., cada vértice sólo pertenece a una cantidad finita de elementos de K). Veamos ahora la definición de complejo simplicial etiquetado.

DEFINICIÓN 3.22. *Un* complejo simplicial etiquetado *es una terna* (K, B, F) *donde* K *es un conjunto no vacío,* B *es una familia no vacía de subconjuntos finitos no vacíos de* K *que cumple:*

1. *Si* $s \in B$ *y* $\varnothing \neq c \subset s$ *entonces* $c \in B$.
2. $\forall a \in K(\{a\} \in B)$.

y F *es un conjunto de funciones biyectivas cuyos codominios son los elementos de* B *y cuyos dominios son las respectivas bases canónicas ordenadas del respectivo* $\mathbb{R}^n$.

NOTACIÓN 3.19. *Si* (K, B, F) *es un complejo simplicial etiquetado, usaremos la fórmula* $S \prec K$ *para decir que* $S \in B$. *Y a los elementos de* F *los denotaremos* con_b *donde el subíndice indica el codominio de la función.*

A cada punto de un simplejo canónico le podemos asociar una función y a veces es más cómodo usar tales representaciones de los puntos del simplejo en vez de los puntos mismos. ¿Qué función es la que asociamos? Pues al punto $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^n$ le asociamos la función $\{(v_i^n, \lambda_i)\}$. Y al conjunto de estas funciones le damos la topología que le pasa el simplejo y lo denotamos λ^n.

NOTACIÓN 3.20. *Sea* A *un conjunto. Denotamos con* $|A|$ *al cardinal de* A.

DEFINICIÓN 3.23. *Sea* (K, B, F) *un complejo simplicial etiquetado. Llamaremos* función de coordenadas (o función de coordenadas no cero) *a la función*

$$V : \bigcup\{\{b\}\times\lambda^{|b|} \mid b \in B\} \to \mathcal{P}(K\times I), (b, \{(v_i^{|b|}, \lambda_i)\}) \mapsto \{(con_b(v_i^{|b|}), \lambda_i) \mid \lambda_i \neq 0\}.$$

Ahora vamos a tomar uniones ajenas de simplejos canónicos (uno por cada elemento de B) y los vamos a pegar mediante una función. El espacio que resulte es el que consideraremos como poliedro.

DEFINICIÓN 3.24. *Sea* (K, B, F) *un complejo simplicial etiquetado. Llamaremos* realización de (K, B, F) o poliedro de (K, B, F) *al espacio*

$$\bigcup\{\{b\} \times \lambda^{|b|} \mid b \in B\}$$

módulo la relación

$$\{((b_1, \{(v_i^{|b_1|}, \lambda_i)\}), (b_2, \{(v_j^{|b_2|}, \mu_j)\})) \mid V((b_1, \{(v_i^{|b_1|}, \lambda_i)\})) = V((b_2, \{(v_j^{|b_2|}, \mu_j)\}))\}.$$

Notación 3.21. *Denotaremos con $|K|$ al poliedro de K.*

Así como no hacemos referencia a la topología cuando hablamos de un espacio topológico, o a la operación cuando hablamos de un grupo, a veces no haremos referencia al conjunto B de un complejo simplicial.

Otra manera de construir poliedros es dado un complejo simplicial etiquetado (K, B, F) considerar el conjunto $\{\alpha : K \to I \mid \alpha^{-1}[(0,1]] \in B \wedge \sum_{v\in K} \alpha(v) = 1\}$ y utilizar la topología coinducida por las funciones de F, como veremos a continuación.

Definición 3.25. *Sea (K, B, F) un complejo simplicial etiquetado. Al conjunto*

$$\rangle K\langle = \{\alpha : K \to I \mid \alpha^{-1}[(0,1]] \in B \wedge \sum_{v\in K} \alpha(v) = 1\}$$

con la topología coinducida por el conjunto de funciones

$$\{f : \{b\}\times\Delta^{|b|} \to \rangle K\langle, (b, \sum_{i=1}^{|b|} \lambda_i v_i) \mapsto \{(x,y) \mid (x = con_b(v_i) \wedge y = \lambda_i) \vee ((x \in K\backslash b) \wedge y = 0)\} \mid b \in B\}.$$

le llamaremos realización o poliedro de (K, B, F).

Proposición 3.16. *Sea (K, B, F) un complejo simplicial etiquetado. Entonces $|K|$ y $\rangle K\langle$ son homeomorfos.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{\langle[(b, \{(v_i^{|b|}, \lambda_i)\})], \{(x,y) \mid (x = con_b(v_i) \wedge y = \lambda_i) \vee ((x \in K \setminus b) \wedge y = 0)\}\rangle\}$$

Ahora,

$$\begin{gathered}(b_1, \{(v_i^{|b_1|}, \lambda_i)\}) \in [(b_2, \{(v_j^{|b_2|}, \mu_j)\})] \Leftrightarrow \\ V((b_1, \{(v_i^{|b_1|}, \lambda_i)\})) = V((b_2, \{(v_j^{|b_2|}, \mu_j)\})) \Leftrightarrow \\ \{(con_{b_1}(v_i^{|b_1|}), \lambda_i) \mid \lambda_i \neq 0\} = \{(con_{b_2}(v_j^{|b_2|}), \mu_j) \mid \mu_j \neq 0\} \Leftrightarrow \\ \{(x,y) \mid (x = con_{b_1}(v_i) \wedge y = \lambda_i) \vee ((x \in K \setminus b_1) \wedge y = 0)\} = \\ \{(x,y) \mid (x = con_{b_2}(v_j) \wedge y = \mu_j) \vee ((x \in K \setminus b_2) \wedge y = 0)\}.\end{gathered}$$

Por lo que el conjunto A es una función inyectiva. Dada $\alpha \in \rangle K\langle$ tenemos que $\alpha^{-1}[(0,1]] \in B$ y $\sum_{v\in K} \alpha(v) = 1$, entonces digamos que $\alpha^{-1}[(0,1]] = b$ y que $\alpha(con_b(v_i^{|b|})) = \lambda_i$, pues entonces $[(b, \{(v_i^{|b|}, \lambda_i)\})] \mapsto \alpha$ por lo que la función es suprayectiva. La función A hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} \bigcup\{\{b\}\times\lambda^{|b|} \mid b\in B\} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr] & \\ |K| \arrow[r, "A"'] & \rangle K\langle \end{tikzcd}$$

donde la flecha sin nombre es la función que a $(b, \{(v_i^{|b_1|}, \lambda_i)\}) \mapsto \{(x,y) \mid (x = con_b(v_i) \wedge y = \lambda_i) \vee ((x \in K \setminus b) \wedge y = 0)\}$. Por la conmutatividad del diagrama y el hecho de que $|K|$ y $\rangle K\langle$ tienen la topología coinducida por las funciones del diagrama concluimos que son homeomorfos. $\square$

Definición 3.26. *Sea K un complejo simplicial etiquetado finito. Llamaremos* trayectoria por aristas en K *a cualquier sucesión finita de vértices de K, $a_0a_1...a_n$, que cumpla $a_ia_{i+1} \prec K$ para toda $i = 0, ..., n-1$.*

Definición 3.27. *Sean K un complejo simplicial etiquetado finito, y $s = a_0a_1...a_n$ una trayectoria por aristas en K con $n > 0$. Llamaremos* realización de s *a la función dada por*

$$|s|(t) = (1 - n(t - \frac{i}{n}))a_i + n(t - \frac{i}{n})a_{i+1}$$

para $\frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}, i = 0, ..., n-1$.

La realización de la trayectoria constante a_0 es κ_{a_0}.

Definición 3.28. *Sean K un complejo simplicial etiquetado, y w y w' dos trayectorias por arsitas en K tales que el primer vértice de w' es igual al último vértice de w digamos $w = a_{i_0}a_{i_1}...a_{i_r}$ y $w' = a_{i_r}...a_{i_{r+s}}$. Definimos el* producto $\star$ de w y w' *como la sucesión $a_{i_0}a_{i_1}...a_{i_r}a_{i_r}a_{i_{r+1}}...a_{i_{r+s}}$. Definimos el* inverso de w, $\bar{w}$ *como la sucesión $a_{i_r}...a_{i_1}a_{i_0}$.*

Sea K un complejo simplicial etiquetado. Vamos a decir qué es lo que entendemos por operaciones admisibles en trayectorias por aristas: Dada una trayectoria por aristas en K digamos $w = a_{i_0}a_{i_1}...a_{i_r}$, quitar de tres vértices consecutivos en la sucesión el de en medio si los tres determinan un simplejo de K, es decir, si en la sucesión w aparecen $a_{i_{k-1}}a_{i_k}a_{i_{k+1}}$ y si $\{a_{i_{k-1}}, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}\}$ determinan un simplejo de K podemos quitar el vértice a_{i_k}. O bien entre dos vértices de la sucesión podemos insertar en medio de ellos uno si al hacerlo los tres consecutivos que nos quedan determinan un simplejo de K. La trayectoria por aristas $a_{i_0}a_{i_0}$ se puede reemplazar por a_{i_0} y la trayectoria por aristas a_{i_0} se puede reemplazar por $a_{i_0}a_{i_0}$. En [Hilton] se declara una relación de equivalencia $\equiv$ entre dos trayectorias por aristas diciendo que dos son equivalentes si se puede obtener una de otra mediante un número finito de aplicaciones de operaciones admisibles en trayectorias por aristas. El conjunto subyacente del complejo simplicial etiquetado $\tilde{K}$ que triangula al cubriente universal de $|K|$ tiene como puntos a las clases de equivalencia bajo esta relación de trayectorias por aristas que empiezan en a_0 y como simplejos los conjuntos de clases de equivalencia tales que los puntos finales de sus representantes determinan simplejos en K. La clase de equivalencia de la trayectoria $a_{i_0}a_{i_1}...a_{i_r}$ la denotaremos $[a_{i_0}a_{i_1}...a_{i_r}]_{\equiv}$.

DEFINICIÓN 3.29. *Sean K un complejo simplicial etiquetado y $f : K \to K$ una función. Diremos que f* es una transformación simplicial *si para todo $\{a_1, ..., a_p\} \subseteq K$ que determine un simplejo de K se tiene que el conjunto $\{f(a_1), ..., f(a_p)\}$ determina un simplejo de K.*

DEFINICIÓN 3.30. *Sean K un complejo simplicial etiquetado y G un grupo que actúa en el conjunto subyacente de K (el conjunto de vértices de K). Diremos que G* actúa simplicialmente en K *si para cada $\gamma \in G$ la función $x \mapsto \gamma x$ es una transformación simplicial de K.*

DEFINICIÓN 3.31. *Sea $\Gamma : G \times K \to K$ una acción simplicial, definimos la* realización de la acción *como la función:*

$$|\Gamma| : G \times |K| \to |K|, \quad (\gamma, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \gamma a_i.$$

PROPOSICIÓN 3.17. *Una función simplicial $f : K \to K$ que tiene inversa bilateral simplicial, induce una función continua $\lceil f \rceil$ en $\bigcup\{\{b\} \times \lambda^{|b|} \mid b \in B\}$ dada por $(b, \{(v_i, \lambda_i\}) \mapsto (f[b], \{(con_{f[b]}^{-1}(f(con_b(v_i^{|b|}))), \lambda_i)\})$ y esta a su vez induce una función continua en el poliedro de K dada por mandar a la clase de x a la clase de $\lceil f \rceil(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U un abierto de $\bigcup\{\{b\} \times \lambda^{|b|} \mid b \in B\}$, entonces la intersección de U y cada elemento de la unión ajena es abierto en dicho elemento. Así, la imagen inversa de U es la unión de las imágenes inversas de estas intersecciones. Observemos que la función $\mathrm{con}_b^{-1} \circ f^{-1} \circ \mathrm{con}_{f[b]}$ es una permutación de los vértices del simplejo canónico, de modo que si el conjunto de puntos correspondientes al conjunto de funciones $\{\{(v_i, \lambda_i)\}, ...\}$ (recordemos que a la función $\{(v_i^{|b|}, \lambda_i)\}$ corresponde el punto $\sum_{i=1}^{|b|} \lambda_i v_i^{|b|}$) es abierto en el simplejo canónico, pues ciertamente lo es si permutamos los vértices del simplejo canónico porque permutar los vértices de la base canónica de $\mathbb{R}^{|b|}$

induce una isometría de $\mathbb{R}^{|b|}$, es decir, $\{\{(\mathrm{con}_b^{-1} \circ f^{-1} \circ \mathrm{con}_{f[b]}(v_i^{|b|}), \lambda_i\}, ...\}$ es un conjunto abierto y es la imagen inversa de U intersección $\{b\} \times \lambda^{|b|}$. Sean $(b_1, \{(v_i^{|b_1|}, \lambda_i)\})$ y $(b_2, \{(v_j^{|b_2|}, \mu_j)\}))$ tales que $V((b_1, \{(v_i^{|b_1|}, \lambda_i)\})) = V((b_2, \{(v_j^{|b_2|}, \mu_j)\}))$. Entonces

$$\{(\mathrm{con}_{b_1}(v_i^{|b_1|}), \lambda_i) \mid \lambda_i \neq 0\} = \{(\mathrm{con}_{b_2}(v_j^{|b_2|}, \mu_j) \mid \mu_j \neq 0\}.$$

Así que

$$\{(f(\mathrm{con}_{b_1}(v_i^{|b_1|})), \lambda_i) \mid \lambda_i \neq 0\} = \{(f(\mathrm{con}_{b_2}(v_j^{|b_2|})), \mu_j) \mid \mu_j \neq 0\}.$$

entonces

$$\{(\mathrm{con}_{f[b_1]}(\mathrm{con}_{f[b_1]}^{-1}(f(\mathrm{con}_{b_1}(v_i^{|b_1|})))), \lambda_i) \mid \lambda_i \neq 0\} = \{(\mathrm{con}_{f[b_2]}(\mathrm{con}_{f[b_2]}^{-1}(f(\mathrm{con}_{b_2}(v_j^{|b_2|})))), \mu_j) \mid \mu_j \neq 0\}.$$

Pero esta última expresión es precisamente

$$V(\lceil f \rceil((b_1, \{(v_i^{|b_1|}, \lambda_i)\}))) = V(\lceil f \rceil((b_2, \{(v_j^{|b_2|}, \mu_j)\}))).$$

Estas igualdades quieren decir que $\lceil f \rceil$ efectivamente induce una función $|f|$ del poliedro de K en sí mismo y que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\bigcup\{\{b\} \times \lambda^{|b|}\} \arrow[r, "\lceil f \rceil"] \arrow[d] & \bigcup\{\{b\} \times \lambda^{|b|}\} \arrow[d] \\
|K| \arrow[r, "|f|"] & |K|
\end{tikzcd}$$

por lo cual $|f|$ es una función continua. $\square$

Definición 3.32. *Sea K un complejo simplicial etiquetado. Diremos que K es* conectable por trayectorias por aristas *si para cualesquiera $a, b \in K$ existe un trayectoria por aristas en K tal que su primer vértice es a y su último vértice es b.*

Lema 3.3. *Sean K un complejo simplicial etiquetado finito conectable por trayectorias por aristas, $a_0 \in K$ y $\Gamma : G \times K \to K$ una acción simplicial. Si $\tilde{K}$ denota al complejo simplicial etiquetado que triangula al cubriente universal de $|K|$ (véase [Hilton] §6,8), entonces la asignación*

$$m : \pi_1(|\Gamma|, |a_0|) \times \tilde{K} \to \tilde{K}, ([\sigma; \gamma], [a_0 a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_r}]_\equiv) \mapsto [s\gamma a_0 \gamma a_{i_1} \gamma a_{i_2} ... \gamma a_{i_r}]_\equiv$$

(donde s es una trayectoria por aristas en K tal que $|s| \simeq_T^t \sigma$) es una acción simplicial.

DEMOSTRACIÓN. La asignación es una función ya que si $\sigma \simeq_T^t \sigma'$ entonces $|s| \simeq_T^t |s'|$ y esto implica que $s \equiv s'$. Además si $a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r} \equiv a_0a_{k_1}a_{k_2}...a_{k_s}$ entonces $s\gamma a_0\gamma a_{i_1}\gamma a_{i_2}...\gamma a_{i_r} \equiv s\gamma a_0\gamma a_{k_1}\gamma a_{k_2}...\gamma a_{k_s}$. La restricción de la función m a $\{[\,|s|;\gamma]\} \times \tilde{K}$ es una función inyectiva porque si $s\gamma a_0\gamma a_{i_1}\gamma a_{i_2}...\gamma a_{i_r} \equiv s\gamma a_0\gamma a_{k_1}\gamma a_{k_2}...\gamma a_{k_s}$ entonces $a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r} \equiv a_0a_{k_1}a_{k_2}...a_{k_s}$; es suprayectiva porque un $[a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r}]_\equiv \in \tilde{K}$, se tiene que

$$[\gamma^{-1}\bar{s}\gamma^{-1}a_0\gamma^{-1}a_{i_1}\gamma^{-1}a_{i_2}...\gamma^{-1}a_{i_r}]_\equiv$$

es su preimagen. Veamos que m es una acción de grupos:

$$([\kappa_{a_0};e],[a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r}]_\equiv) \mapsto [a_0ea_0ea_{i_1}ea_{i_2}...ea_{i_r}]_\equiv = [a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r}]_\equiv$$

y

$$\begin{aligned}([\sigma;\gamma][\sigma';\gamma'])[a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r}]_\equiv) &= ([\sigma\cdot\gamma\sigma';\gamma\gamma'])[a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r}]_\equiv \\ &= [s\gamma s'\gamma\gamma' a_0\gamma\gamma' a_{i_1}\gamma\gamma' a_{i_2}...\gamma\gamma' a_{i_r}]_\equiv\end{aligned}$$

Sea $\{[a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r}]_\equiv, ..., [a_0a_{k_1}a_{k_2}...a_{k_s}]_\equiv\}$ un simplejo de $\tilde{K}$ entonces para un elemento $[\,|s|;\gamma] \in \pi_1(|\Gamma|,|a_0|)$ tenemos que $q([\,|s|;\gamma][a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r}]_\equiv) = \gamma a_{i_r}$ y como G es un grupo de transformaciones simpliciales si llamamos m' a la restricción de la función m a $\{[|s|;\gamma]\} \times \tilde{K}$ entonces

$$m'(\{[a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r}]_\equiv, ..., [a_0a_{k_1}a_{k_2}...a_{k_s}]_\equiv\})$$

cumple (i) de [Hilton]. Cumple (ii) porque si $a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r}a_{i_r}a_{k_s} \equiv a_0a_{k_1}a_{k_2}...a_{k_s}$ entonces $\gamma a_0\gamma a_{i_1}\gamma a_{i_2}...\gamma a_{i_r}\gamma a_{i_r}\gamma a_{k_s} \equiv \gamma a_0\gamma a_{k_1}\gamma a_{k_2}...\gamma a_{k_s}$ porque γ es una transformación simplicial de manera que todas las operaciones admisibles que llevan de $a_0a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_r}a_{i_r}a_{k_s}$ a $a_0a_{k_1}a_{k_2}...a_{k_s}$ son operaciones admisibles de

$$\gamma a_0\gamma a_{i_1}\gamma a_{i_2}...\gamma a_{i_r}\gamma a_{i_r} \text{ a } \gamma a_0\gamma a_{k_1}\gamma a_{k_2}...\gamma a_{k_s}$$

(recordemos que una operación admisible es quitar un vértice repetido o quitar de tres seguidos el de en medio si los tres son un simplejo, esta última operación es admisible porque si $a_ia_{i+1}a_{i+2}$ es un simplejo de K entonces por ser γ una transformación simplicial, $\gamma a_i\gamma a_{i+1}\gamma a_{i+2}$ es un simplejo de K). Por lo tanto la acción es simplicial. □

LEMA 3.4. *Sean K un complejo simplicial etiquetado finito conectable por trayectorias por aristas, $\Gamma : G \times K \to K$ una acción simplicial y $\tilde{K}$ el* *complejo simplicial etiquetado que triangula al cubriente universal de $|K|$ (véase [Hilton] §6,8). Entonces la asignación*

$$f : orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_0 a_{k_{i_1}} a_{k_{i_2}} ... a_{k_{is_i}}]_{\equiv}) \mapsto orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{k_{is_i}})$$

es una función biyectiva y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} |\tilde{K}| \arrow[r, "\tilde{q}"] \arrow[d] & |K| \arrow[d] \\ |\tilde{K}|/\pi_1(|\Gamma|, |a_0|) \arrow[r, "f"] & |K|/G \end{tikzcd}$$

Demostración. La asignación f es una función porque

$$orb([\,|s|;\gamma] \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_0 a_{k_{i_1}} a_{k_{i_2}} ... a_{k_{is_i}}]_{\equiv}) = orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [s\gamma a_0 \gamma a_{k_{i_1}} \gamma a_{k_{i_2}} ... \gamma a_{k_{is_i}}]_{\equiv})$$

$$orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [s\gamma a_0 \gamma a_{k_{i_1}} \gamma a_{k_{i_2}} ... \gamma a_{k_{is_i}}]_{\equiv}) \mapsto orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma a_{k_{is_i}})$$

y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma a_{k_{is_i}} = \gamma \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{k_{is_i}}$. Esta función es inyectiva porque si

$$f(orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_0 a_{k_{i_1}} a_{k_{i_2}} ... a_{k_{is_i}}]_{\equiv})) = f(orb(\sum_{j=1}^{m} \mu_j [a_0 a_{k_{j_1}} a_{k_{j_2}} ... a_{k_{jr_i}}]_{\equiv}))$$

entonces

$$orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{k_{is_i}}) = orb(\sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{k_{jr_i}})$$

o sea que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{k_{is_i}} = \gamma \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{k_{jr_i}} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \gamma a_{k_{jr_j}}$ para algún $\gamma \in G$ y esto implica tres cosas: $m = n$, $\{a_{k_{is_i}}\} = \{\gamma a_{k_{jr_j}}\}$ y $\{\lambda_i \mid i = 1, ..., n\} = \{\mu_j \mid j = 1, ..., m\}$. Entonces por (*ii*) de [Hilton] y un reordenamiento de los índices podemos decir que

$$[\,|a_0 a_{k_{i_1}} a_{k_{i_2}} ... a_{k_{is_i}} \gamma . a_{k_{jr_i}} ... \gamma a_{k_{j_2}} \gamma a_{k_{j_1}} \gamma a_0|;\gamma] \sum_{j=1}^{m} \mu_j [a_0 a_{k_{j_1}} a_{k_{j_2}} ... a_{k_{jr_i}}]_{\equiv}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_0 a_{k_{i_1}} a_{k_{i_2}} ... a_{k_{is_i}}]_{\equiv}$$

y entonces

$$orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_0 a_{k_{i_1}} a_{k_{i_2}} ... a_{k_{is_i}}]_{\equiv}) = orb(\sum_{j=1}^{m} \mu_j [a_0 a_{k_{j_1}} a_{k_{j_2}} ... a_{k_{jr_i}}]_{\equiv}).$$

La función f es suprayectiva ya que dado un $orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{r_i}) \in |K|/G$ podemos tomar una trayectoria por aristas s de a_0 a a_{r_1}, por la propiedad (ii) de [Hilton] $\{[sa_{r_i}]_{\equiv}\}$ es un simplejo de $\tilde{K}$ y entonces $f(orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [sa_{r_i}]_{\equiv})) = orb(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{r_i})$. El diagrama conmuta porque para cualquier

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_0 a_{k_{i_1}} a_{k_{i_2}} ... a_{k_{i_{s_i}}}]_{\equiv} \in \tilde{K}$$

tenemos que

$$\tilde{q}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_0 a_{k_{i_1}} a_{k_{i_2}} ... a_{k_{i_{s_i}}}]_{\equiv}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{k_{i_{s_i}}}$$

□

TEOREMA 3.4. *(Armstrong) Sean X un poliedro simplemente conexo, $x_0 \in X$, G un grupo que actúa en X simplicialmente y H el subgrupo normal de G generado por los elementos de G cuyo conjunto de puntos fijos es no vacío. Entonces*

$$\pi_1(X/G, \hat{x}_0) \cong G/H.$$

TEOREMA 3.5. *Sean K un complejo simplicial etiquetado finito y $\Gamma : G \times K \to K$ una acción simplicial. Entonces para un vértice dado $a_0 \in K$ se tiene que $\pi_1(|K|/G, \hat{a}_0) \cong \tilde{\pi}_1(|\Gamma|, |a_0|)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que hay $[a_0...a_r]_{\equiv} \in |\tilde{K}|$ y $[\sigma;\gamma] \in \pi_1(|\Gamma|, |a_0|)$ tales que $|\tilde{\Gamma}|([\sigma;\gamma], [a_0...a_r]_{\equiv} = [a_0...a_r]_{\equiv}$, es decir, que hay un elemento de $\pi_1(|\Gamma|, |a_0|)$ cuyo conjunto de puntos fijos es no vacío. Esto ocurre si y sólo si $s \equiv a_0...a_r\gamma a_r...\gamma a_0$ (donde s es una trayectoria por aristas tal que $|s| \simeq_T^t \sigma$) es decir si y solo si $[\sigma;\gamma] = [|s|;\gamma] \in N(|K|, a_0)$. Entonces por el teorema de Armstrong $\pi_1(|\tilde{K}|/\pi_1(|\Gamma|, |a_0|), [a_0]_{\equiv}) \cong \tilde{\pi}_1(|\Gamma|, |a_0|)$ pero por el lema 3.4 $|\tilde{K}|/\pi_1(|\Gamma|, |a_0|)$ es homeomorfo a $|K|/G$. □

EJEMPLO 3.9. *Tomemos una raíz n-ésima primitiva de la unidad en $\mathbb{S}^1$ y sea Γ la acción dada por rotar $\mathbb{S}^1$ multiplicando por esta raíz n-ésima. Entonces el grupo reducido de esta acción es trivial porque podemos triangular la circunferencia de manera que estas rotaciones sean transformaciones simpliciales y entonces $\tilde{\pi}_1(\Gamma, (1,0)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1/G, (1,0))$ pero $\mathbb{S}^1/G$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ y por lo tanto $\tilde{\pi}_1(\Gamma, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$.*

3.3. Acciones de grupos libres

En esta sección veremos que dada una acción semicontinua, podemos extenderla a una acción semicontinua de un grupo libre y demostraremos que dicha extensión no afecta al grupo reducido de Rhodes. Recordemos algunos teoremas importantes de teoría de grupos primero. Su demostración puede revisarse en [Rotman].

Teorema 3.6. *(Primer teorema de isomorfismo) Sean G, H grupos y $f : G \to H$ un homomorfismo con núcleo K. Entonces K es un subgrupo normal de G y $G/K \cong f[G]$.*

Teorema 3.7. *(Tercer teorema de isomorfismo) Sean G un grupo y K, H subgrupos normales de G tales que $K \leq H$. Entonces H/K es un subgrupo normal de G/K y $(G/K)/(H/K) \cong G/H$.*

Proposición 3.18. *Sea $\Gamma : G \times X \to X$ una acción semicontinua. Sea H un grupo y $\psi : H \to G$ un homomorfismo de grupos. Entonces la asignación*

$$\Psi : H \times X \to X, \quad \langle \xi, x \rangle \mapsto \psi(\xi)x.$$

es una acción semicontinua de H en X.

Demostración. Sean $\xi_1, \xi_2 \in H$ y $x \in X$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Psi(\langle \xi_1, \Psi(\langle \xi_2, x \rangle) \rangle) &= \psi(\xi_1)(\psi(\xi_2)x) \\
&= (\psi(\xi_1)\psi(\xi_2))x \\
&= \psi(\xi_1\xi_2)x \\
&= \Psi(\langle \xi_1\xi_2, x \rangle)
\end{aligned}$$

También por ser ψ un homomorfismo de grupos $\psi(e_H) = e_G$ (el neutro de H va a dar al neutro de G) y entonces $\Psi(\langle e_H, x \rangle) = \psi(e_H)x = e_G x = x$. Así que Ψ es una acción de H en X. Ψ es una acción semicontinua porque $\psi(\xi_1) \in G$ y para cualquier $\gamma \in G$, como G actúa semicontinuamente en X, se tiene que $x \mapsto \gamma x$ es una función continua de X en X, en particular $x \mapsto \psi(\xi_1)x$ es una función continua de X en X. $\square$

Definición 3.33. *Sean F un grupo y A un subconjunto del conjunto subyacente de F. Diremos que F es un* grupo libre con base A *si para todo grupo G y toda función $f : A \to G$ existe un único homomorfismo $\psi : F \to G$ que extiende a f.*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\ A \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

El siguiente es un teorema que enunciamos sin demostración. Su demostración se puede revisar en [Rotman].

Teorema 3.8. *Sea X un conjunto. Entonces existe un grupo libre con base X.*

Corolario 3.1. *Sea G un grupo. Entonces G es isomorfo a un cociente de un grupo libre.*

Demostración. Basta tomar un conjunto X tal que exista una función suprayectiva de X a G (G mismo podría funcionar), ya que por el teorema anterior para X hay un grupo libre con base X y entonces por la definición de grupo libre tenemos un homomorfismo (único) del grupo libre en G que extiende a la función suprayectiva de X en G. Entonces dicha extensión es suprayectiva y por el primer teorema de isomorfismo concluimos que G es isomorfo al grupo libre módulo el núcleo del morfismo que extiende a la función suprayectiva. $\square$

Corolario 3.2. *Si $\Gamma : G \times X \to X$ es una acción semicontinua entonces hay una acción semicontinua $\Psi : F \times X \to X$ donde F es un grupo libre.*

Demostración. Por el corolario 3.1 sabemos que hay un epimorfismo de un grupo libre F a G; y por la proposición 3.18 tenemos una acción semicontinua de F en X. $\square$

En lo que resta de esta sección $\Gamma : G \times X \to X$ denotará una acción semicontinua, si $\Theta : M \times Z \to Z$ es una acción semicontinua entonces será conveniente denotar por i_M, j_M y p_M a las funciones

$$M_{z_0} \to \pi_1(\Theta, z_0), \quad \nu \mapsto [\kappa_{z_0}; \nu]$$

$$\pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(\Theta, z_0), \quad [\sigma] \mapsto [\sigma; e]$$

$$\pi_1(\Theta, z_0) \to M, \quad [\sigma; \nu] \mapsto \nu.$$

respectivamente. F denotará un grupo libre (del cual hay un epimorfismo a G), f denotará un epimorfismo de F en G, F_0 denotará al núcleo de dicho epimorfismo y Φ denotará a la acción semicontinua de F en X dada por $(\phi, x) \mapsto \Gamma(f(\phi), x)$.

Lema 3.5.

$$\pi_1(\Phi, x_0)/i_F[F_0] \cong \pi_1(\Gamma, x_0).$$

Demostración. Consideremos el homomorfismo inducido por la identidad en X y el morfismo f, es decir,

$$(id_X, f)_* : \pi_1(\Phi, x_0) \to \pi_1(\Gamma, x_0), \quad [\sigma; \phi] \mapsto [id_X\sigma; f\phi].$$

Entonces como f es suprayectiva, para cualquier $\gamma \in G$ existe un $\phi \in F$ de modo que $f(\phi) = \gamma$ son las mismas así que (id_X, f) es suprayectiva. El núcleo de este homomorfismo es el subgrupo de los elementos de la forma $[\kappa_{x_0}; \phi]$ tales que $f(\phi) = e$, pero dicho subgrupo es precisamente $i_F[F_0]$ porque F_0 es el núcleo de f; entonces por el primer teorema de isomorfismo $\pi_1(\Phi, x_0)/i_F[F_0] \cong \pi_1(\Gamma, x_0)$. □

Lema 3.6. *La función*

$$j_G : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(\Gamma, x_0), \quad [\sigma] \mapsto [\sigma; e]$$

es un monomorfismo, la función

$$p_G : \pi_1(\Gamma, x_0) \to G, \quad [\sigma; \gamma] \mapsto \gamma$$

es un epimorfismo, y estos dos homomorfismos dan origen a una sucesión exacta corta. También hay una sucesión exacta corta para $\pi_1(\Phi, x_0)$ y estas encajan en el siguiente diagrama que es conmutativo y donde las sucesiones de arriba a abajo también son exactas (las funciones sin nombre son inclusiones u homomorfismos únicos):

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & & F_0 \arrow[dl, "i_F"'] \arrow[dr] & & \\
 & & \pi_1(\Phi, x_0) \arrow[rr, "p_F"] \arrow[dd, "(id_X, f)_*"] & & F \arrow[r] \arrow[dd, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "j_F"] \arrow[dr, "j_G"'] & & & & \\
 & & \pi_1(\Gamma, x_0) \arrow[rr, "p_G"] \arrow[d] & & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración. La sucesión de arriba a abajo de la izquierda es exacta por el lema anterior, la de la derecha por definición de F_0 y porque f es suprayectiva. Las de izquierda a derecha lo son ya que por ejemplo, $p_F \circ j_F([\sigma]) = p_F([\sigma; e]) = e$ y solamente estos elementos están en el núcleo de p_F porque si tomamos la clase de una trayectoria de orden γ con $\gamma \neq e$, su imagen es precisamente γ. $\square$

Lema 3.7. *El homomorfismo $(id_X, \epsilon)_*$ restringido al subgrupo $\pi_1'(\Phi, x_0)$ es un epimorfismo sobre $\pi_1'(\Gamma, x_0)$, cuyo núcleo es $i_F[F_0]$ y los grupos $\pi_1(\Phi, x_0)$ y $\pi_1(\Gamma, x_0)$ encajan en un diagrama conmutativo de sucesiones exactas donde los homomorfismos sin nombre son inclusiones de subgrupos y proyecciones sobre grupos cocientes u homomorfismos únicos.*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & & \\
 & & F_0 \arrow[dl, "i_F"'] \arrow[dr, "i_F"] & & & \\
0 \arrow[r] & \pi_1'(\Phi, x_0) \arrow[rr] \arrow[d, "(id_X,f)_*"] & & \pi_1(\Phi, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "(id_X,f)_*"] & \tilde{\pi}_1(\Phi, x_0) \arrow[r] \arrow[d, "(id_X,f)_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_1'(\Gamma, x_0) \arrow[rr] \arrow[d] & & \pi_1(\Gamma, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Las sucesiones horizontales son exactas por definición de grupo reducido y lo visto en secciones anteriores. La de la derecha de arriba a abajo es exacta por el lema anterior. La de la izquierda de arriba a abajo es exacta: Es suprayectiva también porque f es suprayectiva y el núcleo es el núcleo de la función $(id_X, f)_*$ intersección $\pi_1'(\Phi, x_0)$, simplemente hay que ver que el núcleo está contenido en dicho subgrupo normal y esto ocurre ya que cada elemento $[\kappa_{x_0}; \phi]$ con ϕ tal que $f(\phi) = e$ lo podemos expresar como un generador de $\pi_1'(\Phi, x_0)$ de la siguiente manera: $[\kappa_{x_0} \cdot \phi\kappa_{x_0}; \phi]$. $\square$

Teorema 3.9. $\tilde{\pi}_1(\Phi, x_0) \cong \tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0)$.

Demostración. Por el lema anterior se tiene que $\pi_1(\Phi, x_0)/i_F[F_0] \cong \pi_1(\Gamma, x_0)$ y que $\pi_1'(\Phi, x_0)/i_F[F_0] \cong \pi_1'(\Gamma, x_0)$ entonces

$$(\pi_1(\Phi, x_0)/i_F[F_0])/(\pi_1'(\Phi, x_0)/i_F[F_0]) \cong \pi_1(\Gamma, x_0)/\pi_1'(\Gamma, x_0).$$

El lado derecho es $\tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0)$ y por el tercer teorema de isomorfismo de grupos, el lado izquierdo de la fórmula anterior es isomorfo a $\pi_1(\Phi, x_0)/\pi_1'(\Phi, x_0)$ que es igual a $\tilde{\pi}_1(\Phi, x_0)$. $\square$

3.4. Representaciones de $\pi_1(\Gamma, x_0)$ en términos de $\pi_1(X, x_0)$

DEFINICIÓN 3.34. *Sean X un espacio topológico no vacío, $x_0 \in X$ y $\Gamma : G \times X \to X$ una acción semicontinua. Diremos que k es una* función de trayectorias selectas para Γ basada en x_0 *si k es una función $k : G \to C(I, X)$ tal que*

1. $\forall \gamma \in G,\ k(\gamma) : \gamma x_0 \rightsquigarrow x_0$.
2. $k(e) = \kappa_{x_0}$.
3. $\forall \langle \gamma, \delta \rangle \in G \times G,\ k(\gamma\delta) \simeq^t_T \gamma k(\delta) \cdot k(\gamma)$.

NOTACIÓN 3.22. *A veces usaremos los símbolos k_γ para denotar a $k(\gamma)$.*

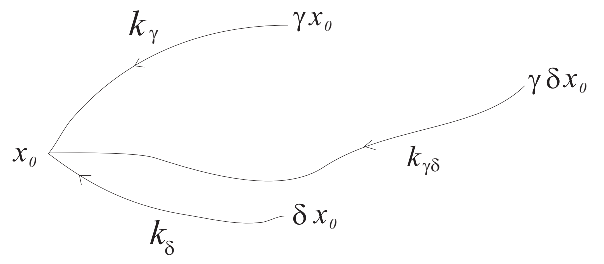

FIGURA 7. Las trayectorias selectas $k(\gamma)$, $k(\delta)$, $k(\gamma\delta)$.

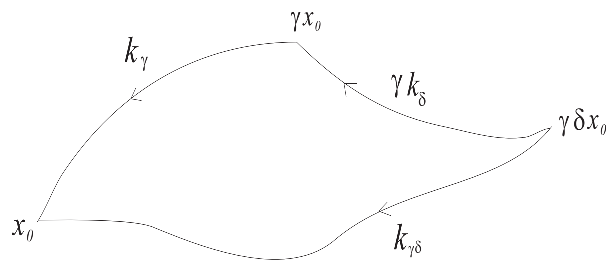

FIGURA 8. $k(\gamma\delta) \simeq^t_T \gamma k(\delta) \cdot k(\gamma)$.

PROPOSICIÓN 3.19. *Sean X un espacio topológico no vacío, $x_0 \in X$, $\Gamma : G \times X \to X$ una acción semicontinua y k una función de trayectorias selectas para Γ basada en x_0. Entonces para cada elemento $\gamma \in G$, la trayectoria $k(\gamma) : \gamma x_0 \rightsquigarrow x_0$ induce un automorfismo*

$$K_\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0), [\sigma] \mapsto [\bar{k}(\gamma) \cdot \gamma\sigma \cdot k(\gamma)]$$

y la familia k induce un homomorfismo

$$K : G \to Aut(\pi_1(X, x_0)), \gamma \mapsto K_\gamma.$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada par de elementos $\gamma, \delta \in G$, los tres automorfismos $K_\gamma, K_\delta, K_{\gamma\delta}$ asociados a γ, δ y $\gamma\delta$ respectivamente están relacionados mediante la ecuación

$$K_\gamma K_\delta = K_{\gamma\delta}.$$

$\square$

DEFINICIÓN 3.35. *Dados* $([\sigma_1], \gamma_1)$ *y* $([\sigma_2], \gamma_2) \in \pi_1(X, x_0) \times G$ *definimos el producto* $\star_K$ *de estos dos elementos con la ecuación*

$$([\sigma_1], \gamma_1) \star_K ([\sigma_2], \gamma_2) = ([\sigma_1 \cdot K_{\gamma_1}\sigma_2], \gamma_1\gamma_2)$$

PROPOSICIÓN 3.20. *El producto cartesiano de* $\pi_1(X, x_0)$ *y* G *con la regla de multiplicación mencionada es un grupo cuyo elemento neutro es* $([\kappa_{x_0}], e)$ *y donde el inverso de* $([\sigma], \gamma)$ *es* $([\gamma^{-1}(k(\gamma) \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{k}(\gamma))], \gamma^{-1})$.

La función k *también induce una función*

$$k_\flat : \pi_1(\Gamma, x_0) \to (\pi_1(X, x_0) \times G, \star_K), \quad [\sigma; \gamma] \mapsto ([\sigma \cdot k(\gamma)], \gamma).$$

que es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. La operación está bien definida.

(Asociatividad)

$$\begin{aligned}
([\sigma_1], \gamma_1) \star_K (([\sigma_2], \gamma_2) \star_K ([\sigma_3], \gamma_3)) &= (\sigma_1, \gamma_1) \star_K ([\sigma_2 \cdot K_{\gamma_2}\sigma_3], \gamma_2\gamma_3) \\
&= ([\sigma_1 \cdot K_{\gamma_1}(\sigma_2 \cdot K_{\gamma_2}\sigma_3)], \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)) \\
&= ([\sigma_1 \cdot K_{\gamma_1}(\sigma_2 \cdot \bar{k}_{\gamma_2} \cdot \gamma_2\sigma_3 \cdot k_{\gamma_2})], \gamma_1\gamma_2\gamma_3) \\
&= ([\sigma_1 \cdot \bar{k}_{\gamma_1} \cdot \gamma_1\sigma_2 \cdot \gamma_1\bar{k}_{\gamma_2} \cdot \gamma_1\gamma_2\sigma_3 \cdot \gamma_1 k_{\gamma_2} \cdot k_{\gamma_1}], \gamma_1\gamma_2\gamma_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(([\sigma_1], \gamma_1) \star_K ([\sigma_2], \gamma_2)) \star_K ([\sigma_3], \gamma_3) &= ([\sigma_1 \cdot K_{\gamma_1}\sigma_2], \gamma_1\gamma_2) \star_K ([\sigma_3], \gamma_3) \\
&= ([\sigma_1 K_{\gamma_1}\sigma_2 \cdot K_{\gamma_1\gamma_2}\sigma_3], (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3) \\
&= ([\sigma_1 \cdot \bar{k}_{\gamma_1} \cdot \gamma_1\sigma_2 k_{\gamma_1} \cdot \bar{k}_{\gamma_1\gamma_2}\gamma_1\gamma_2\sigma_3 \cdot k_{\gamma_1\gamma_2}], \gamma_1\gamma_2\gamma_3) \\
&= ([\sigma_1 \cdot \bar{k}_{\gamma_1} \cdot \gamma_1\sigma_2 \cdot k_{\gamma_1} \cdot \bar{k}_{\gamma_1}\gamma_1\bar{k}_{\gamma_2} \cdot \gamma_1\gamma_2\sigma_3 \cdot \gamma_1 k_{\gamma_2} \cdot k_{\gamma_1}], \gamma_1\gamma_2\gamma_3)
\end{aligned}$$

(Neutro)

$$
\begin{aligned}
([\sigma],\gamma)\star_K([\kappa_{x_0}],e) &= ([\sigma\cdot K_\gamma\kappa_{x_0}],\gamma e)\\
&= ([\sigma\cdot\bar{k}(\gamma)\cdot\gamma\kappa_{x_0}\cdot k(\gamma)],\gamma)\\
&= ([\sigma\cdot\bar{k}(\gamma)\cdot(\kappa_{\gamma x_0}\cdot k(\gamma))],\gamma)\\
&= ([\sigma\cdot\bar{k}(\gamma)\cdot k(\gamma)],\gamma)\\
&= ([\sigma],\gamma)
\end{aligned}
$$

(Inversos)

$$
\begin{aligned}
([\sigma],\gamma)\star_K([\gamma^{-1}(k(\gamma)\cdot\bar{\sigma}\cdot\bar{k}(\gamma))],\gamma^{-1}) &= ([\sigma\cdot k(\gamma)(\gamma^{-1}(k(\gamma)\cdot\bar{\sigma}\cdot\bar{k}(\gamma)))],\gamma\gamma^{-1})\\
&= ([\sigma\cdot\bar{k}(\gamma)\cdot\gamma(\gamma^{-1}(k(\gamma)\cdot\bar{\sigma}\cdot\bar{k}(\gamma)))\cdot k(\gamma)],e)\\
&= ([\sigma\cdot\bar{k}(\gamma)\cdot\gamma\gamma^{-1}k(\gamma)\cdot\gamma\gamma^{-1}\bar{\sigma}\cdot\gamma\gamma^{-1}\bar{k}(\gamma)\cdot k(\gamma)],e)\\
&= ([\kappa_{x_0}],e)
\end{aligned}
$$

Veamos que $k_\flat$ es un isomorfismo. Es una función bien definida porque si $[\sigma;\gamma]=[\mu;\delta]$ entonces $\sigma\simeq^t_T\mu$ y $\gamma=\delta$ por lo que $\sigma\cdot k(\gamma)\simeq^t_T\mu\cdot k(\gamma)=\mu\cdot k(\delta)$, es decir, $([\sigma\cdot k(\gamma)],\gamma)=([\mu\cdot k(\delta)],\delta)$. Es suprayectiva porque dado $([\sigma],\gamma)\in\pi_1(X,x_0)\times G$ el elemento $[\sigma\cdot\bar{k}(\gamma);\gamma]$ es su imagen inversa. Es inyectiva porque la trayectoria selecta de x_0 a x_0 es κ_{x_0} entonces si $\sigma\cdot\kappa_{x_0}\simeq^t_T\kappa_{x_0}$ es porque $\sigma\simeq^t_T\kappa_{x_0}$. Es un homomorfismo porque

$$
\begin{aligned}
k_\flat([\sigma;\gamma][\mu;\delta]) &= k_\flat([\sigma\cdot\gamma\mu;\gamma\delta])\\
&= ([\sigma\cdot\gamma\mu\cdot k_{\gamma\delta}],\gamma\delta)
\end{aligned}
$$

por otro lado

$$
\begin{aligned}
k_\flat([\sigma;\gamma])\star_K k_\flat([\mu;\delta]) &= ([\sigma\cdot k(\gamma)],\gamma)\star_K([\mu\cdot k(\delta)],\delta)\\
&= ([\sigma\cdot k(\gamma)\cdot K_\gamma\mu\cdot k(\delta)],\gamma\delta)\\
&= ([\sigma\cdot k(\gamma)\cdot\bar{k}(\gamma)\cdot\gamma\mu\cdot\gamma k(\delta)\cdot k(\gamma)],\gamma\delta)\\
&= ([\sigma\cdot\gamma\mu\cdot\gamma k(\delta)\cdot k(\gamma)],\gamma\delta)
\end{aligned}
$$

Los últimos renglones son iguales porque $k_{\gamma\delta}\simeq^t_T\gamma k_\delta\cdot k_\gamma$. □

Los homomorfismos $k_\flat$ y K sólo dependen de las clases de homotopía de las trayectorias $k(\gamma)$. Si $\tilde{k}$ es otra función de trayectorias selectas para Γ basada en x_0, entonces para cada $\gamma\in G,[\tilde{k}(\gamma)\rho\cdot k(\gamma)]\in\pi_1(X,x_0)$ y el automorfismo interno $[\tilde{k}(\gamma)\rho\cdot k(\gamma)]_*$, manda $[\sigma]$ a $[k(\gamma)\rho\cdot\tilde{k}(\gamma)][\sigma][\tilde{k}(\gamma)\rho\cdot k(\gamma)]$; por lo tanto $K_\gamma=[\tilde{k}(\gamma)\rho\cdot k(\gamma)]_*\tilde{K}_\gamma$.
Si $\lambda:x_0\rightsquigarrow x_1$ entonces la función de trayectorias selectas k para Γ basada

en x_0 da origen a una función l de trayectorias selectas para Γ basada en x_1, siendo $\ell_1 : \gamma x_1 \rightsquigarrow x_1\, \gamma\bar{\lambda} \cdot k(\gamma) \cdot \lambda$. Si G es abeliano y $\gamma x_0 = x_1$ entonces γk es una familia de trayectorias selectas en x_1, siendo $\gamma k(\gamma)$ la trayectoria selecta de γx_1 a x_1. Los isomorfismos λ_* y $\gamma_\flat$ restringidos a clases de homotopía de orden e son isomorfismos de $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$ que inducen funciones

$$\lambda_\natural : (\pi_1(X, x_0) \times G, \star_K) \to \langle(\pi_1(X, x_1) \times G, \star_L),$$
$$([\sigma], \gamma) \mapsto ([\bar{\lambda} \cdot \sigma \cdot \lambda], \gamma)$$

y

$$\gamma_\natural : (\pi_1(X, x_0) \times G, \star_K) \to (\pi_1(X, x_1) \times G, \star_{\gamma K}),$$
$$([\sigma], \gamma) \mapsto ([\gamma\sigma], \gamma)$$

La representación es natural con respecto a cambio de punto básico en el sentido de que los siguientes dos diagramas son conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\Gamma, x_0) \arrow[r, "\lambda_*"] \arrow[d, "k_\flat"] & \pi_1(\Gamma, x_1) \arrow[d, "l_\flat"] \\
(\pi_1(X, x_0) \times G), \star_K) \arrow[r, "\lambda_\natural"] & (\pi_1(X, x_1) \times G, \star_L)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\Gamma, x_0) \arrow[r, "\gamma_\flat"] \arrow[d, "k_\flat"] & \pi_1(\Gamma, x_1) \arrow[d, "(\gamma k)_\flat"] \\
(\pi_1(X, x_0) \times G, \star_K) \arrow[r, "\gamma_\natural"] & (\pi_1(X, x_1) \times G, \star_{\gamma K})
\end{tikzcd}$$

Sin embargo, la representación no es categórica. Es posible que para alguna flecha en la categoría de acciones semicontinuas $\{\varphi, \psi \times \varphi\} : \Gamma \to \Psi$ entre acciones semicontinuas para las cuales se tengan fucniones de trayectorias selectas, exista $\gamma \in$kerψ tal que $\varphi k(\gamma)$ no sea homotópica a cero en Y, y que por tanto la composición de k y φ no sea una función de trayectorias selectas para Ψ basada en $\varphi(x_0)$.

Ejemplo 3.10. *Sean X el toro y sea $p : I \times I \to X$ la proyección natural. Sea G el grupo cíclico de orden 4 generado por el homeomorfismo T de X que es inducido por la rotación de $I \times I$ un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ con la topología discreta. Sean $x_0 = p((0, 0)), \ell_1 : I \to X, t \mapsto p(\langle t, 0\rangle)$ y $\ell_2 : I \to X, t \mapsto p(\langle 0, t\rangle)$. Entonces $T \circ \ell_1 = \ell_2$ y $T \circ \ell_2 = \ell_1 \circ \rho$. Como x_0 es un punto fijo de T, hay una función de trayectorias selectas para ev basada en x_0: para cada elemento $T^i \in G$ la trayectoria selecta k_i es κ_{x_0}. Los automorfismos K_1, K_2, K_3 de*

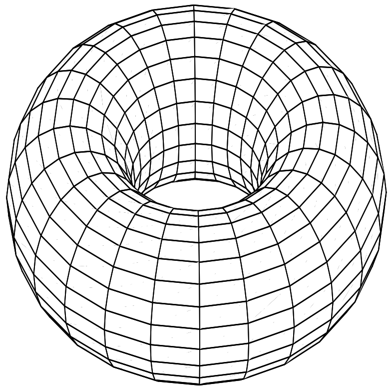

FIGURA 9. Toro en $\mathbb{R}^3$.

$\pi_1(X, x_0)$ asociados con los homeomorfismos T, T^2, T^3 están definidos en los generadores de $\pi_1(X, x_0)$ por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} K_1[\ell_1] &= [\ell_2] & K_1[\ell_2] &= [\ell_1\rho], \\ K_2[\ell_1] &= [\ell_1\rho] & K_2[\ell_2] &= [\ell_2\rho], \\ K_3[\ell_1] &= [\ell_2\rho] & K_3[\ell_2] &= [\ell_1] \end{aligned}$$

El grupo $\pi_1(ev, x_0)$ está generado por los ocho elementos $[\ell_i; T^j], i = 0, 1; j = 0, 1, 2, 3$. Este grupo no es abeliano, ya que $[\ell_1; T][\ell_2; T] = [\kappa_{x_0}; T^2]$ y $[\ell_2; T][\ell_1; T] = [\ell_2 \cdot \ell_2; T^2]$. El espacio se puede triangular de manera que G actúe como un grupo de transformaciones simpliciales; así, en este caso $\tilde{\pi_1}(ev, x_0) \cong$

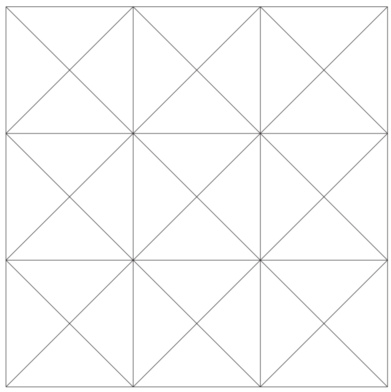

FIGURA 10. Triangulación del toro.

$\pi_1(X/G, \hat{x_0})$ que es trivial porque el cociente X/G es la 2-esfera. $p((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ es un punto fijo de T y por lo tanto $\pi_1'(ev, x_0)$ contiene a los elementos

$[\ell_1;T], [\ell_2;T], [\ell_1\cdot\ell_2;T^2], [\ell_1;T^3]$ y $[\ell_2;T^3]$. $p((0,\frac{1}{2}))$ y $p((\frac{1}{2},0))$ son puntos fijos de T^2 y por lo tanto $\pi_1'(ev,x_0)$ contiene a los elementos $[\ell_1;T^2]$ y $[\ell_2;T^2]$. Por tanto $[\ell_1\cdot\ell_2;T^2][\ell_2;T^2]=[\ell_1;e]\in\pi_1'(ev,x_0)$ y también $[\ell_2;e]\in\pi_1'(ev,x_0)$. Así que $\pi_1'(ev,x_0)\cong\pi_1(ev,x_0)$ y entonces $\tilde{\pi}_1(ev,x_0)$ es trivial.

EJEMPLO 3.11. *Sea X como en el ejemplo anterior. Entonces el homeomorfismo inducido por la reflexión de $I\times I$ sobre la línea $y=\frac{1}{2}$ nos da una acción en X y como vimos en el ejemplo anterior el grupo fundamental equivariante de Rhodes está generado por los elementos $[\ell_i;j], i=0,1; j=0,1$. Como X se puede triangular de manera que esta acción sea simplicial tenemos que el grupo reducido $\tilde{\pi}_1(ev,x_0)$ es $\pi_1(X/\mathbb{Z}_2,\tilde{x}_0)=\mathbb{Z}$, ya que el espacio de órbitas es homeomorfo a un anillo.*

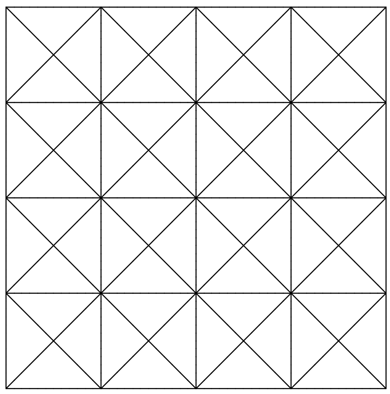

FIGURA 11. Triangulación del toro para la reflexión.

En el ejemplo 3.10 G es discreto y el grupo $(\pi_1(X,x_0)\times G,\star_K)$ no es simplemente el producto directo $\pi_1(X,x_0)\times G$. Para muchas acciones semicontinuas, el grupo fundamental equivariante de Rhodes $\pi_1(\Gamma,x_0)$ es solamente el producto directo del grupo fundamental con el grupo que actúa en el espacio. Supongamos que $\langle G,\circledast\rangle$ es un grupo topológico de homeomorfismos de X que actúa continuamente en X, i.e., la función $(\gamma,x)\mapsto\gamma x$ es continua en $G\times X$; entonces, como G actúa en sí mismo de modo que $\circledast: G\times G\to G$ es una acción semicontinua, se tiene que una función h de trayectorias selectas para $\circledast$ basada en e induce una familia k de trayectorias selectas para $ev: G\times X\to X$ basada en x_0 definida por la ecuación

$$k(\gamma)(t)=(h(\gamma)(t))(x_0).$$

Hay una función de trayectorias selectas para la suma de los números reales basada en 0; si este grupo actúa continuamente en X, entonces hay una función de trayectorias selectas para dicha acción basada en x_0; la trayectoria selecta de rx_0 a x_0 es la trayectoria $k(r): I \to X$, $t \mapsto (r(1-t))x_0$.

TEOREMA 3.10. *Sean X un espacio topológico $x_0 \in X$ y $\langle G, \circledast \rangle$ un grupo topológico de homeomorfismos de X en X que actúa continuamente en X, supongamos además que $\circledast : G \times G \to G$ admite una familia de trayectorias selectas en e. Entonces el grupo de Rhodes de (ev, x_0) es isomorfo al producto directo del grupo fundamental de X y G, en símbolos,*

$$\pi_1(ev, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) \times G.$$

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar que para cada elemento $\gamma \in G$, el correspondiente automorfismo K_γ de $\pi_1(X, x_0)$ es la identidad. Sean h_γ la trayectoria selecta en G de γ al neutro e, $k(\gamma)$ la trayectoria selecta en X de γx_0 a x_0 (dada por $k(\gamma)(t) = (h(\gamma)(t))(x_0)$) y λ un lazo en X basado en x_0. Entonces la función $H_0 : I \times I \to G, (s,t) \mapsto (h(\gamma)(t))(\lambda(s))$ es una homotopía en Top entre el lazo $\gamma\lambda$ basado en γx_0 y el lazo λ, tal que para toda $t \in I$, $H_0((0,t)) = H_0((1,t)) \in k(\gamma)[I]$. Entonces la función H_1 dada por

$$H_1((s,t)) = \begin{cases} \bar{k}(\gamma)(3st) & 0 \le s \le \frac{1}{3} \\ H_0((3s-1, 1-t)) & \frac{1}{3} \le s \le \frac{2}{3} \\ k(\gamma)(\rho(t\rho(3s-2))) & \frac{2}{3} \le s \le 1 \end{cases}$$

es una homotopía en Top de trayectorias que muestra que $\lambda \simeq_T^t \bar{k}(\gamma) \cdot \gamma\lambda \cdot k(\gamma)$ ya que para toda $t \in I$ se tiene $H_1((0,t)) = H_1((1,t)) = x_0$, lo cual quiere decir que $K_\gamma([\lambda]) = [\bar{k}(\gamma) \cdot \gamma\lambda \cdot k(\gamma)] = [\lambda]$, es decir, K_γ es la identidad de $\pi_1(X, x_0)$. □

3.5. Productos

Definición 3.36. *Si* $\Gamma : G \times X \to X$ *y* $\Xi : H \times Y \to Y$ *son acciones semicontinuas definimos*

$$\Gamma \times \Xi : (G \times H) \times (X \times Y) \to X \times Y, \quad ((\gamma, \xi), (x, y)) \mapsto (\gamma x, \xi y).$$

Proposición 3.21. *Si* Γ *y* Ξ *son acciones semicontinuas entonces* $\Gamma \times \Xi$ *es una acción semicontinua en el producto topológico* $X \times Y$*.*

Definición 3.37. *Sean* X *y* Y *espacios topológicos,* $\sigma_x : x_1 \rightsquigarrow x_2$ *y* $\sigma_y : y_1 \rightsquigarrow y_2$ *trayectorias en* X *y en* Y *respectivamente. Definimos la función* $\urcorner(\sigma_x, \sigma_y) : I \to X \times Y$ *mediante la ecuación:*

$$\urcorner(\sigma_x, \sigma_y)(t) = \begin{cases} (\sigma_x(2t), y_1) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x_2, \sigma_y(2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

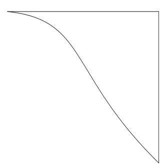

Figura 12. $\urcorner$ de las proyecciones de una curva en el plano.

Lema 3.8. *Sean* X, Y *espacios topológicos, y* $\sigma : I \to X \times Y$ *una función continua. Entonces si* p_X, p_Y *denotan a las proyecciones de* $X \times Y$ *en cada factor, se tiene que* $\urcorner(p_X \circ \sigma, p_Y \circ \sigma) \simeq^t_T \sigma$*.*

Demostración. La función

$$F((s,t)) = \begin{cases} (p_X(\sigma(3s)), p_Y(\sigma(0))) & 0 \leq s \leq \frac{t}{3} \\ (p_X(\sigma(t), p_Y(\sigma(3(s - \frac{t}{3})))) & \frac{t}{3} \leq s \leq \frac{2t}{3} \\ \sigma(t + \frac{1-t}{1-\frac{2t}{3}}(s - \frac{2t}{3})) & \frac{2}{3}t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

muestra que $\urcorner(p_X \circ \sigma, p_Y \circ \sigma) \simeq^t_T \sigma$. $\square$

Lema 3.9. *Sean* $\sigma_x : x_1 \rightsquigarrow x_2$ *y* $\sigma'_x : x_2 \rightsquigarrow x_3$ *trayectorias en* X *y sean* $\sigma_y : y_1 \rightsquigarrow y_2$ *y* $\sigma'_y : y_2 \rightsquigarrow y_3$ *trayectorias en* Y*. Entonces*

$$\urcorner(\sigma_x \cdot \sigma'_x, \sigma_y \cdot \sigma'_y) \simeq^t_T \urcorner(\sigma_x, \sigma_y) \cdot \urcorner(\sigma'_x, \sigma'_y).$$

Demostración. En vista del lema anterior es suficiente demostrar que sus imágenes bajo las proyecciones $p_X : X \times Y \to X$ y $p_Y : X \times Y \to Y$ son homotópicas. Tenemos que

$$p_X \urcorner(\sigma_x \cdot \sigma'_x, \sigma_y \cdot \sigma'_y)(t) = \begin{cases} \sigma_x(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \sigma'_x(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ x_3 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

mientras que

$$p_X(\urcorner(\sigma_x, \sigma_y) \cdot \urcorner(\sigma'_x, \sigma'_y))(t) = \begin{cases} \sigma_x(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ x_2 & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma'_x(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ x_3 & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por tanto, estas trayectorias son homotópicas. Análogamente las proyecciones en Y son homotópicas. □

Teorema 3.11. *Sean $\Gamma : G \times X \to X$ y $\Xi : H \times Y \to Y$ acciones semicontinuas. Entonces la función $\urcorner_*$ dada por*

$$\begin{aligned} \urcorner_* : \pi_1(\Gamma, x_0) \times \pi_1(\Xi, y_0) &\to \pi_1(\Gamma \times \Xi, (x_0, y_0)), \\ ([\sigma_x; \gamma], [\sigma_y; \xi]) &\mapsto [\urcorner(\sigma_x, \sigma_y); (\gamma, \xi)] \end{aligned}$$

es un isomorfismo, y su restricción a $\pi'_1(\Gamma, x_0) \times \pi'_1(\Xi, y_0)$ es un isomorfismo sobre $\pi'_1(\Gamma \times \Xi, (x_0, y_0))$. La función

$$\begin{aligned} \urcorner_\flat : \tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0) \times \tilde{\pi}_1(\Xi, y_0) &\to \tilde{\pi}_1(\Gamma \times \Xi, (x_0, y_0)), \\ (\pi'[\sigma_x; \gamma], \pi'[\sigma_y; \xi]) &\mapsto \pi'[\urcorner(\sigma_x, \sigma_y); (\gamma, \xi)] \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sean $[\sigma_x; \gamma], [\sigma'_x; \gamma'] \in \pi_1(\Gamma, x_0)$ y $[\sigma_y; \xi], [\sigma'_y; \xi'] \in \pi_1(\Xi, y_0)$ entonces

$$\begin{aligned} \urcorner_*(([\sigma_x; \gamma], [\sigma_y; \xi]) \cdot ([\sigma'_x; \gamma'], [\sigma'_y; \xi'])) &= \urcorner_*(([\sigma_x \cdot \gamma\sigma'_x; \gamma\gamma'], [\sigma_y \cdot \xi\sigma'_y; \xi\xi'])) \\ &= [\urcorner(\sigma_x \cdot \gamma\sigma'_x, \sigma_y \cdot \xi\sigma'_y); (\gamma\gamma', \xi\xi')] \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \urcorner_*(([\sigma_x; \gamma], [\sigma_y; \xi])) \cdot \urcorner_*(([\sigma'_x; \gamma'], [\sigma'_y; \xi'])) &= [\urcorner(\sigma_x, \sigma_y); (\gamma, \xi)][\urcorner(\sigma'_x, \sigma'_y); (\gamma', \xi')] \\ &= [\urcorner(\sigma_x, \sigma_y)(\gamma, \xi)\urcorner(\sigma'_x, \sigma'_y); (\gamma, \xi)(\gamma', \xi')] \\ &= [\urcorner(\sigma_x; \sigma_y) \cdot \urcorner(\gamma\sigma'_x, \xi\sigma'_y); (\gamma\gamma', \xi\xi')] \end{aligned}$$

El lema anterior aplicado a las trayectorias $\sigma_x, \gamma\sigma'_x, \sigma_y, \xi\sigma'_y$ muestra que estos dos elementos son iguales y por lo tanto $\urcorner_*$ es un homomorfismo. Más aún, como una trayectoria $\sigma : (x_0, y_0) \rightsquigarrow (\gamma x_0, \xi y_0)$ es homotópica a la trayectoria $\urcorner(p_x\sigma, p_y\sigma)$, se sigue que $\urcorner_*$ es inyectiva y biyectiva y en consecuencia un isomorfismo. Dados generadores $[\lambda_x \cdot \gamma\bar{\lambda}_x; \gamma] \in N(\Gamma, x_0)$ y $[\lambda_y \cdot \xi\bar{\lambda}_y; \xi] \in N(\Xi, y_0)$

$$\begin{aligned}\urcorner_*(([\lambda_x \cdot \gamma\bar{\lambda}_x; \gamma], [\lambda_y \cdot \xi\bar{\lambda}_y; \xi])) &= [\urcorner((\lambda_x \cdot g\bar{\lambda}_x, [\lambda_y \cdot \gamma\bar{\lambda}_y)); (\gamma, \xi)] \\ &= [\urcorner((\lambda_x, \lambda_y)) \cdot (\gamma, \xi)\overline{\urcorner(\lambda_x, \lambda_y)}; (\gamma, \xi)]\end{aligned}$$

que es un elemento de $N(\Gamma\times\Xi, (x_0, y_0))$. Recíprocamente, si $[\lambda\cdot(\gamma, \xi)\bar{\lambda}; (\gamma, \xi)] \in N(\Gamma \times \Xi, (x_0, y_0)), [p_x(\lambda \cdot (\gamma, \xi)\bar{\lambda}); \gamma] = [p_x\lambda \cdot \gamma p_x\bar{\lambda}; \gamma] \in N(\Gamma, x_0)$ y $[p_y\lambda \cdot \xi p_y\bar{\lambda}; \xi] \in N(\Xi, y_0)$. Así

$$\urcorner_* : \pi'_1(\Gamma, x_0) \times \pi'_1(\Xi, y_0) \to \pi'_1(\Gamma \times \Xi, (x_0, y_0))$$

es también un isomorfismo de lo cual se sigue que

$$\urcorner_\flat : \tilde{\pi}_1(\Gamma, x_0) \times \tilde{\pi}_1(\Xi, y_0) \to \tilde{\pi}_1(\Gamma \times \Xi, (x_0, y_0))$$

es un isomorfismo. □

APÉNDICE A

Proposición A.1. *Sean X, Y espacios topológicos con topologías τ y σ respectivamente y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces son equivalentes:*

a. $\forall A \in \sigma$, $f^{-1}[A] \in \tau$.
b. *Existe β base de σ tal que para toda $B \in \beta$, $f^{-1}[B] \in \tau$.*
c. *Existe γ subbase de σ tal que para toda $G \in \gamma$, $f^{-1}[G] \in \tau$.*
d. *Para todo $B \subseteq Y$, $f^{-1}[IntB] \subseteq Intf^{-1}[B]$.*
e. *Para todo $C \subseteq Y$ cerrado en Y, $f^{-1}[C]$ es cerrado.*
f. *Para todo $A \subseteq X$, $f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.*
g. *Para todo $B \subseteq Y$, $\overline{f^{-1}[B]} \subseteq f^{-1}[\bar{B}]$.*
h. *Para todo $B \subseteq Y$, $Fr(f^{-1}[B]) \subseteq f^{-1}[Fr\,B]$.*
i. *Para toda $x \in X$ y para toda M vecindad de $f(x)$, existe una vecindad N de x tal que $f[N] \subseteq M$.*

Demostración. Veamos una implicación a la vez:

(a. $\Rightarrow$ b.) σ es base de σ.

(b. $\Rightarrow$ c.) Toda base es subbase.

(c. $\Rightarrow$ d.) Si $f^{-1}[IntB] = \varnothing$ la contención se da por vacuidad. Sean $f^{-1}[IntB] \neq \varnothing$ y $x \in f^{-1}[IntB]$, i.e., $f(x) \in IntB$, esto quiere decir que hay un abierto al que pertenece x contenido en $IntB$, y en consecuencia hay un abierto básico contenido en $IntB$ al que pertenece x. Como γ es subbase todo abierto básico es la intersección finita de algunos elementos de γ, i.e., existen $G_i \in \gamma\,(i = 1, ..., n)$ tales que $f(x) \in \cap G_i \subseteq IntB \subseteq B \Rightarrow x \in \cap f^{-1}(G_i)$ y por c. $\cap f^{-1}[G_i] \in \tau$, además $\cap f^{-1}[G_i] \subseteq f^{-1}[B]$ por lo tanto $x \in Intf^{-1}[B]$.

(d. $\Rightarrow$ a.) $W \in \sigma \Rightarrow W = IntW \Rightarrow f^{-1}[W] = f^{-1}[IntW] \subseteq Intf^{-1}[W] \Rightarrow f^{-1}[W] = Intf^{-1}[W]$ y entonces $f^{-1}[W] \in \tau$.

(a. $\Rightarrow$ e.) Sea $C \subseteq Y$ cerrado, entonces $(Y \setminus C) \in \sigma \Rightarrow f^{-1}[Y \setminus C] \in \tau$ pero $(X \setminus f^{-1}[C]) = f^{-1}[Y \setminus C]$ entonces $f^{-1}[C]$ es cerrado.

(e. $\Rightarrow$ a.) Sea $A \in \sigma$, entonces $f^{-1}[Y \setminus A]$ es cerrado pero como $f^{-1}[Y \setminus A] = (X \setminus (f^{-1}[A]))$, $f^{-1}[A]$ es abierto.

(e. $\Rightarrow$ f.) Sea $A \subseteq X \Rightarrow A \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$. Por e. $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ es cerrado, entonces

$$\bar{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$$

es decir $f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

(f. $\Rightarrow$ g.) Sea $B \subseteq Y$. Por f. $f[\overline{f^{-1}[B]}] \subseteq \overline{f[f^{-1}[B]]} \subseteq \overline{B} \Rightarrow \overline{f^{-1}[B]} \subseteq f^{-1}[\overline{B}]$.

(g.$\Rightarrow$ h.) Si $B \subseteq Y, Fr(f^{-1}[B]) = \overline{f^{-1}[B]} \cap \overline{X \setminus f^{-1}[B]} = \overline{f^{-1}[B]} \cap \overline{f^{-1}[Y \setminus B]} \subseteq f^{-1}[\bar{B}] \cap f^{-1}[\overline{Y \setminus B}] = f^{-1}[\bar{B} \cap \overline{Y \setminus B}] = f^{-1}[Fr(B)]$.

(h. $\Rightarrow$ e.) Sea C cerrado en $Y \Rightarrow Fr(C) \subseteq C$. Por h. $Fr(f^{-1}[C]) \subseteq f^{-1}[Fr(C)] \subseteq f^{-1}[C]$, por lo tanto $f^{-1}[C]$ es cerrado.

(a. $\Rightarrow$ i.) Sean $x \in X$ y M una vecindad de $f(x)$, entonces existe $W \in \sigma$ tal que $f(x) \in W \subseteq M \Rightarrow x \in f^{-1}[W] \subseteq f^{-1}[M]$. Por a. $f^{-1}[W] \in \tau \Rightarrow f^{-1}[M]$ es una vecindad de x y $f[f^{-1}[M]] \subseteq M$.

(i. $\Rightarrow$ a.) Sean $W \in \sigma$ y $x \in f^{-1}[W] \Rightarrow f(x) \in W$ entonces existe N_x una vecindad de x tal que $f[N_x] \subseteq W \Rightarrow N_x \subseteq f^{-1}[W] \Rightarrow f^{-1}[W] \in \tau$.

□

Proposición A.2. *I es compacto y conexo.*

DEM.- Sea U una cubierta abierta de I, consideremos el siguiente subconjunto de I:

$$A = \{x \in I \mid [0, x] \text{ está cubierto por un número finito de elementos de } U\}$$

Este subconjunto es no vacío ya que por ser U cubierta algún elemento de U debe contener a cero y entonces contiene un intervalo $[0, x]$. El supremo α de A pertenece a A porque α pertenece a un elemento de U (1 es cota superior de A) y entonces hay un β tal que $[\beta, \alpha]$ es subconjunto de ese elemento digamos W de U pero para todo $x < \alpha$ el intervalo $[0, x]$ está cubierto por un número finito de elementos de U, entonces en particular $[0, \beta]$ está cubierto por un número finito de elementos de U y en consecuencia agregando el abierto W tenemos que el intervalo $[0, \alpha]$ está cubierto por un número finito de elementos de U. $\alpha = 1$ porque de ser menor habría un intervalo $[\alpha - k, \alpha + k] \subseteq W$ pero entonces para cualquier punto x en $(\alpha, \alpha + k]$ tendríamos que $[0, x]$ estaría cubierto por un número finito de elementos de U lo cual contradiría el hecho de que α es el supremo de A. Ahora veamos de manera similar que I es conexo. Supongamos que hay dos abiertos ajenos, no vacíos A y B tales que $\bigcup\{A, B\} = I$. Entonces sin pérdida de generalidad, $0 \in A$ y por ser A abierto en I debe haber un número $a > 0$ tal que $[0, a) \subseteq A$, esto quiere decir que el conjunto

$$M = \{x \in I | \, x > 0 \text{ y } [0, x) \subseteq A \}$$

es no vacío y por tanto existe su supremo, llamémosle μ. Hay dos casos $\mu \in A$ o bien $\mu \in B$. Si $\mu \in B$ entonces habría un intervalo de la forma $(x, \mu]$ contenido en B y por ser μ el supremo de M tendríamos un punto de M en dicho intervalo lo cual contradice que A y B son ajenos. Si $\mu \in A$ entonces o bien $\mu = 1$ y $B = \varnothing$ o $\mu < 1$ y hay un intervalo de la forma $[\mu, y) \subseteq A$ contradiciendo que μ es el supremo de M.

PROPOSICIÓN A.3. *Sean X un espacio topológico, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo, $f, g : X \to A$ dos funciones continuas. Entonces la función $F : X \times I \to A, (x, t) \mapsto (1 - t)f(x) + tg(x)$ es continua.*

DEM.- Sean $x \in X$, $t \in I$, $\varepsilon > 0$. Entonces existen vecindades de x y de t tales que si (y, s) está en el producto de estas vecindades se tiene que

$$\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{8(1 + \|f(x)\| + \|g(x)\|)},$$
$$\|g(x) - g(y)\| < \varepsilon/4$$

y

$$|s - t| < \frac{\varepsilon}{4(1 + \|f(x)\| + \|g(x)\|)}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
&\|(1-t)f(x)+tg(x)-((1-s)f(y)+sg(y))\| \leq \|(1-t)f(x)-(1-s)f(y)\|+\|sg(y)-tg(x)\| \\
&\qquad = \|f(x) - f(y) + sf(y) - tf(x)\| + \|sg(y) - sg(x) + sg(x) - tg(x)\| \\
&\leq \|f(x) - f(y)\| + \|sf(y) - sf(x) + sf(x) - tf(x)\| + s\|g(x) - g(y)\| + |t - s|\|g(x)\| \\
&\leq \|f(x) - f(y)\| + s\|f(y) - f(x)\| + |s - t|\|f(x)\| + s\|g(x) - g(y)\| + |s - t|\|g(x)\| \\
&\qquad \leq 2\|f(x) - f(y)\| + |s - t|\|f(x)\| + \|g(x) - g(y)\| + |s - t|\|g(x)\| \\
&\qquad < \varepsilon.
\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN A.4. *Sean X un espacio topológico, K un espacio topológico compacto y $f : K \to X$ una función continua. Entonces $f[K]$ es compacto.*

DEM.- Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \beta}$ una cubierta abierta de $f[K]$, entonces $\{f^{-1}[U_\alpha]\}_{\alpha \in \beta}$ es una cubierta abierta de K. Tomemos una subcubierta finita de $\{f^{-1}[U_\alpha]\}_{\alpha \in \beta}$, entonces las respectivas U_α son una cubierta de $f[K]$.

PROPOSICIÓN A.5. *Sean K un espacio topológico compacto y H un espacio topológico Hausdorff. Si $f : K \to H$ es una función biyectiva y continua entonces f es un homeomorfismo.*

Proposición A.6. *Sean W, X, Y, Z conjuntos $U \subseteq Y, V \subseteq Z$, $f : W \to Y, g : X \to Z$ funciones. Entonces si $f \times g : W \times X \to Y \times Z$ es la función tal que $f \times g((w, x)) = (f(w), g(x))$ entonces $(f \times g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$.*

Demostración. Sea $(w, x) \in (f \times g)^{-1}(U \times V)$ entonces $(f \times g)((w, x)) \in U \times V$ pero como $(f \times g)((w, x)) = (f(w), g(x))$ tenemos que $f(w) \in U$ y $g(x) \in V$ por lo que $(w, x) \in f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$. Recíprocamente, si $(w, x) \in f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$ tenemos que $f(w) \in U, g(x) \in V$ por lo que $(f(w), g(x)) \in U \times V$ y como $(f \times g)((w, x)) = (f(w), g(x))$ se sigue que $(w, x) \in (f \times g)^{-1}(U \times V)$. □

Corolario A.1. *Sean W, X, Y, Z espacios topológicos, $f : W \to Y, g : X \to Z$ funciones continuas. Entonces $f \times g : W \times X \to Y \times Z, (w, x) \mapsto (f(w), g(x))$ es una función continua.*

Demostración. Por la proposición A.1 basta ver que dado cualquier abierto básico de $Y \times Z$, su imagen inversa bajo $f \times g$ es abierto. Sea $U \times V$ un abierto básico de $Y \times Z$, entonces por la proposición anterior, su imagen inversa es $f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$ que es abierto en $W \times X$. □

Proposición A.7. *Sean X, Y dos espacios topológicos. Si $\Theta : X \times Y \to Y$ es una función continua, entonces para toda $x \in X$*

$$\theta_x : Y \to Y,\ y \mapsto \Theta(x, y)$$

es una función continua.

Demostración. Sea $x_0 \in X$; la restricción de Θ a $\{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$ es una función continua en $\{x_0\} \times Y$ que es homeomorfo a Y $(y \mapsto (x_0, y))$.

$$Y \to \{x_0\} \times Y \to Y$$

□

Proposición A.8. *Sean X, Y, Z espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ y $g : X \to Z$ son funciones continuas entonces la función $f \times g : X \to Y \times Z, x \mapsto (f(x), g(x))$ es una función continua.*

Lema A.1. *(Lema de pegadura) Sean X, Y espacios topológicos, A, B subconjuntos cerrados de X y $f : A \to Y, g : B \to Y$ dos funciones continuas tales que $\forall x \in A \cap B$, $f(x) = g(x)$; entonces $f \cup g$ es una función continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $C \subseteq Y$ cerrado, entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y $g^{-1}(C)$ es cerrado en B. Es decir, existen dos cerrados de X, M y N tales que $f^{-1}(C) = M \cap A$ y $g^{-1}(C) = N \cap B$, pero como A y B son cerrados en X entonces $M \cap A$ y $N \cap B$ también son cerrados en X. Entonces tenemos que $(f \cup g)^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) = (M \cap A) \cup (N \cap B)$ es cerrado en X y es un subconjunto de $A \cup B$, por lo tanto es cerrado en $A \cup B$. Por la proposición A.1 tenemos que la función $f \cup g$ es continua en $A \cup B$. $\square$

LEMA A.2. *(Número de Lebesgue) Sean (X, d) un espacio métrico y A una cubierta abierta de X. Si X es compacto, existe un número real $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto de X con diámetro menor que δ, existe un elemento de A que lo contiene.*

DEM.- Si X es un elemento de A, entonces el resultado se sigue para cualquier $\delta > 0$. Por tanto, supongamos que X no es un elemento de A. Elijamos una subcubierta finita $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de A. Para cada i tomamos $C_i = X \setminus A_i$ y consideremos la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$$

$f(x) > 0$ para todo x porque si $x \in X$, podemos escoger un i tal que $x \in A_i$ y entonces hay un ε tal que la bola de radio ε con centro en x está contenida en A_i, así que $\varepsilon \leq d(x, C_i)$ y entonces $\frac{\varepsilon}{n} \leq f(x)$. Como f es continua, tiene un valor mínimo y este es la δ que buscábamos: Sea B un subconjunto de X cuyo diámetro sea menor que δ. Elijamos un punto $x_0 \in B$, entonces B está contenido en la bola de radio δ con centro x_0. Ahora bien,

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m)$$

donde $d(x_0, C_m)$ es el mayor de los números $d(x_0, C_i)$. Entonces la bola de radio δ y centro x_0 está contenida en el elemento $A_m = X \setminus C_m$ de la cubierta A.

PROPOSICIÓN A.9. *Sea D un conjunto no vacío de espacios topológicos ajenos dos a dos. Entonces*

$$\tau = \{u \in \mathcal{P}(\cup D) \mid \forall x \in D((u \cap x) \in \tau_x)\}$$

es una topología en $\bigcup D$ (τ_x es la topología de x).

DEMOSTRACIÓN. $\bigcup D \in \tau$ porque $(\bigcup D) \cap x = x$ para cualquier $x \in D$. En palabras, el total intersectado con los totales es abierto porque cada total es abierto en sí mismo. El vacío intersección lo que sea es vacío y está en todas las topologías. Sean $A \subseteq \tau$ y $x \in D$. Entonces $(\bigcup A) \cap x = \bigcup\{y \cap x \mid y \in A\}$, y entonces como cada $y \cap x$ es abierto en x, pues la unión es abierto en x, y como x era arbitrario $\bigcup A \in \tau$. Sean $u, w \in \tau$ y $x \in D$, entonces $(u \cap w) \cap x = (u \cap x) \cap (w \cap x)$. $\square$

Proposición A.10. *Sean (V_K, K) un complejo simplicial y*

$$A = \{\alpha : V_K \to I \mid \alpha^{-1}[(0,1]] \in K \wedge \sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1\}.$$

Entonces la función $d : A \times A \to \mathbb{R}$ definida por la ecuación:

$$d(\langle \alpha, \beta \rangle) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}$$

es una métrica para A.

Demostración. $d(\langle \alpha, \beta \rangle) \leq d(\langle \alpha, \gamma \rangle) + d(\langle \beta, \gamma \rangle)$ porque
$2(\alpha(v) - \gamma(v))(\gamma(v) - \beta(v))(\alpha(u) - \gamma(u))(\gamma(u) - \beta(u)) \leq$
$(\alpha(v) - \gamma(v))^2(\gamma(u) - \beta(u))^2 + (\alpha(u) - \gamma(u))^2(\gamma(v) - \beta(v))^2$.
y
$(\sum(\alpha(v)-\gamma(v))(\gamma(v)-\beta(v)))^2 = (\sum(\alpha(v)-\gamma(v))^2(\gamma(v)-\beta(v))^2)+2(\sum(\alpha(v)-\gamma(v))(\gamma(v) - \beta(v))(\alpha(u) - \gamma(u))(\gamma(u) - \beta(u)))$
entonces
$(\sum(\alpha(v) - \gamma(v))^2)(\sum(\gamma(v) - \beta(v))^2) - (\sum(\alpha(v) - \gamma(v))(\gamma(v) - \beta(v)))^2 = \sum(\alpha(v)-\gamma(v))^2(\gamma(u)-\beta(u))^2-2(\alpha(v)-\gamma(v))(\gamma(v)-\beta(v))(\alpha(u)-\gamma(u))(\gamma(u)-\beta(u)) + (\alpha(u) - \gamma(u))^2(\gamma(v) - \beta(v))^2$
Por lo tanto
$(\sum(\alpha(v) - \gamma(v))^2)(\sum(\gamma(v) - \beta(v))^2) \geq (\sum(\alpha(v) - \gamma(v))(\gamma(v) - \beta(v)))^2$
pero como ambos lados de la desigualdad son no negativos tenemos que
$\sqrt{(\sum(\alpha(v) - \gamma(v))(\gamma(v) - \beta(v)))^2} \leq \sqrt{(\sum(\alpha(v) - \gamma(v))^2)(\sum(\gamma(v) - \beta(v))^2)}$
y entonces
$\sum(\alpha(v) - \gamma(v))(\gamma(v) - \beta(v)) \leq \sqrt{(\sum(\alpha(v) - \gamma(v))(\gamma(v) - \beta(v)))^2} \leq \sqrt{(\sum(\alpha(v) - \gamma(v))^2)(\sum(\gamma(v) - \beta(v))^2)}$
lo cual implica que
$\sum_{v \in V_K} 2(\alpha(v)-\gamma(v))(\gamma(v)-\beta(v)) \leq 2\sqrt{\sum_{v \in V_K}(\alpha(v) - \gamma(v))^2}\sqrt{\sum_{v \in V_K}(\beta(v) - \gamma(v))^2}$
Y de este modo, al sumar a ambos lados de esta desigualdad $\sum(\alpha(v) - \gamma(v))^2 + \sum(\gamma(v) - \beta(v))^2$
obtenemos que

$\sum_{v\in V_K}(\alpha(v)-\gamma(v))^2+2(\alpha(v)-\gamma(v))(\gamma(v)-\beta(v))+(\gamma(v)-\beta(v))^2\leq$ $(\sum(\alpha(v)-\gamma(v))^2)+2\sqrt{\sum_{v\in V_K}(\alpha(v)-\gamma(v))^2}\sqrt{\sum_{v\in V_K}(\beta(v)-\gamma(v))^2}+\sum(\gamma(v)-\beta(v))^2$

pero el lado izquierdo de esta desigualdad es igual a

$$\sum_{v\in V_K}(\alpha(v)-\beta(v))^2$$

y el lado derecho es igual a

$$(\sqrt{\sum_{v\in V_K}(\alpha(v)-\gamma(v))^2}+\sqrt{\sum_{v\in V_K}(\beta(v)-\gamma(v))^2})^2$$

y como ambos lados de la desigualdad son no negativos, tomando raices cuadradas obtenemos que

$$\sqrt{\sum_{v\in V_K}(\alpha(v)-\beta(v))^2}\leq\sqrt{\sum_{v\in V_K}(\alpha(v)-\gamma(v))^2}+\sqrt{\sum_{v\in V_K}(\beta(v)-\gamma(v))^2}$$

□

PROPOSICIÓN A.11. *Sea (V_K,K) un complejo simplicial y sea*

$$A=\{\alpha:V_K\to I\mid \alpha^{-1}[(0,1]]\in K\wedge\sum_{v\in V_K}\alpha(v)=1\}$$

con la métrica

$$d(\langle\alpha,\beta\rangle)=\sqrt{\sum_{v\in V_K}(\alpha(v)-\beta(v))^2}.$$

Entonces cada función $\hat{f}:\Delta^n\to|s_k|$ es una isometría.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\sum\lambda_i v_i,\sum\mu_i v_i\in\Delta^n$, entonces su distancia usual es

$$\sqrt{\sum(\lambda_i-\mu_i)^2}.$$

Ahora, sus imágenes bajo $\hat{f}$ son $\alpha=\{\langle x,y\rangle\in V_K\times I\mid(x=f(v_i)\wedge y=\lambda_i)\vee(x\notin f[vert(\Delta^n)]\wedge y=0)\}$ y $\beta=\{\langle x,y\rangle\in V_K\times I\mid(x=f(v_i)\wedge y=\mu_i)\vee(x\notin f[vert(\Delta^n)]\wedge y=0)\}$ entonces

$$d(\langle\alpha,\beta\rangle)=\sqrt{\sum_{v\in V_K}(\alpha(v)-\beta(v))^2}$$

pero esto es igual a

$$\sqrt{\sum(\lambda_i-\mu_i)^2}.$$

□

Bibliografía

[Rhodes] Rhodes, Frank., *On the fundamental group of a transformation group* Proc. London Math. Soc. (**3**) 16 (1966), págs. 635–650, 1965.

[Munkres] Munkres, J. R., *Topología* (2ª ed.), Prentice Hall, págs 321–392, 2000.

[Hilton] Hilton, P. J., *Homology Theory*, págs. 111–321, 1978.

[Armstrong] Armstrong, G. P., *On the fundamental group of an orbit space* Proc. Camb. Phil. Soc. (1965), **61**, págs. 639–646..

[AGP] Aguilar, M., Gitler, S., Prieto, C., *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer Verlag, 2001.

[Rotman] Rotman, Joseph, *An Introduction to the Theory of Groups* (2ª ed.), Springer Verlag.

[Bredon] Bredon, *Compact transformation groups*, Academic Press, págs 435-439, 1972.

[Carlos] Prieto, Carlos, *Topología Básica*, Fondo de Cultura Económica, págs. 263-291, 2003.

[Salicrup] Salicrup Graciela, *Introducción a la Topología* Aportaciones Matemáticas.

[Spivak] Spivak Michael, *Calculus*, Editorial Reverté.

[Spanier] Spanier, Edwin H., *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1921.

[Noé] Bárcenas Torres Noé, *Grupos de Homotopía equivariantes de Rhodes* Tesis de Licenciatura, UNAM.