UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONÓMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DERIVADAS Y TANGENTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

MARISOL SANDOVAL ROSAS

Directora: M. en C. Emma Lam Osnaya

México, D.F. 2006

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios Profesionales

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Derivadas y Tangentes"

realizado por **Sandoval Rosas Marisol,** con número de cuenta **09355252-5,** quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	M. en C.	Emma Lam Osnaya	Emma Lam O.
Propietario	M. en C.	Elena de Oteyza de Oteyza	
Propietario	Dr.	Fernando Brambila Paz	
Suplente	M. en C.	Alejandro Bravo Mojica	
Suplente	Mat.	Leticia Sánchez López	

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 6 de octubre del 2006.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Agradecimientos

A mis maestras

M. en C. Emma Lam Osnaya
M. en C. Elena de Oteyza de Oteyza
Por su dedicación y paciencia.

A mis padres

Guillermo Sandoval Flores
Soledad Rosas Castillo

y a mi amiga

Elvira González Torres
Por la fe que siempre tuvieron en mi.

A mi esposo

Gabriel González Osornio
Por su apoyo constante e incondicional.

Índice de Materias.

INTRODUCCIÓN.

Este trabajo está dedicado al estudio de la recta tangente a una curva en el plano, en un punto dado.

A lo largo de todo el trabajo, presentamos los conceptos que iremos utilizando, demostrando formalmente todos los resultados que posteriormente usaremos, tratando a su vez, de no omitir pasos importantes, a fin de lograr una mejor comprensión.

Deducimos la forma de la ecuación de la recta tangente a una curva dada en coordenadas cartesianas, paramétricas y polares.

Hemos puesto énfasis en la presentación de ejemplos y hemos acompañado cada uno de ellos con la gráfica correspondiente, con el fin de que el lector pueda verificar los resultados obtenidos y entender adecuadamente cada problema.

El trabajo está dividido en cuatro partes.

Iniciamos la primera parte, considerando curvas que son la gráfica de una función. Analizamos conceptos básicos como el de la pendiente de la recta tangente a una curva, relacionando éste con la derivada de la función en el punto. Mediante ejemplos, mostramos que la definición de recta tangente a una curva, como aquélla que la interseca en un solo punto, no es conveniente. Asimismo usamos derivación implícita para encontrar rectas tangentes a curvas que no corresponden a la gráfica de una función.

Usando los conceptos vistos en la primera parte, específicamente el método de derivación implícita, presentamos en la segunda varios ejemplos en los que encontramos la ecuación de la recta tangente a una cónica dada. En el desarrollo de dichos ejemplos, observamos que en todos ellos se sigue el mismo método, lo cual permite hacer la generalización para encontrar la ecuación de la recta tangente a una cónica a partir de la ecuación general de segundo grado. Dicha generalización se encuentra al final de esta sección.

Dedicamos la tercera parte a encontrar las ecuaciones paramétricas, primero de curvas simples, tales como rectas, circunferencias y cónicas, posteriormente, de otras también conocidas, como la cicloide, hipocicloide, epicicloide y la curva de Agnesi. De manera general, utilizando las ecuaciones paramétricas de una curva en el plano, encontramos la ecuación cartesiana de la recta tangente en un punto de la curva, usando nociones elementales de cálculo de funciones definidas en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^2$.

La última parte está dedicada a las curvas en coordenadas polares. Como en la sección anterior, encontramos la ecuaciones de rectas, circunferencias y cónicas, ahora en coordenadas polares. Asimismo mostramos curvas como caracoles, rosas, espirales, lemniscatas y concoides. Desarrollamos el método para encontrar las ecuaciones cartesiana y paramétrica de la recta tangente a una curva, considerando las ecuación paramétrica de la curva original.

Todas la gráficas aquí presentadas han sido generadas usando el programa Scientific Word Place y exportadas al programa Corel Draw, en el cual fueron retocadas.

Este trabajo fue desarrollado dentro de uno de los Seminarios de Titulación del Departamento de Matemáticas, organizados por el entonces coordinador de la carrera de matemáticas, el M. en C. Alejandro Bravo Mojica.

PARTE UNO . Definiciones

Cuando en un curso de geometría elemental trabajamos con la circunferencia y sus elementos, escuchamos el nombre de **recta tangente** asociado a aquella recta que toca a la circunferencia en un solo punto, posteriormente en un curso de geometría analítica se nos presentan métodos para obtener su pendiente y luego su ecuación.

Esta definición, suficiente para la circunferencia, es inadecuada para las curvas planas en general, por ejemplo en la figura 1, hemos dibujado una recta que pasa por el punto P y sólo tiene ese punto en común con ella, en la figura 2, la recta corta a la curva también en otros puntos, pero ninguna satisface la descripción de la tangente como la vemos en la circunferencia.

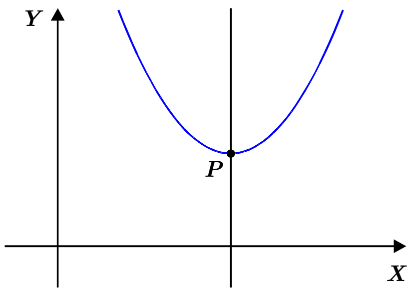


Figura 1

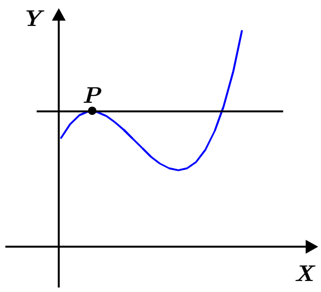


Figura 2

Nuestro objetivo es lograr una definición precisa de lo que es una recta tangente, para ello consideremos una función $f(x)$ y un punto $P(x_0, f(x_0))$; deseamos calcular la pendiente m de la tangente a la gráfica de f en el punto P. La dificultad es que sólo conocemos un punto mientras que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente de una recta. La observación clave es que si escogemos un punto $Q(x_1, f(x_1))$ cercano al punto P, entonces la pendiente M de la recta que pasa por P y Q será un valor próximo a m [*].

En la figura 3 a la recta que pasa por P y Q la llamaremos secante. Consideremos que P es un punto fijo mientras que Q se "mueve a lo largo de la curva" hacia P. En realidad cuando decimos que "Q se mueve a lo largo de la curva" lo que hacemos es considerar puntos que pertenecen a la curva y que cada vez están a menor distancia de P. Entonces, a medida que Q se aproxima a P, la secante obtenida tiende a una posición límite representada por la recta PT que se define como la **tangente a la curva *f* en el punto *P*** . [1],[5]

[*] Durante el trabajo aparecerán los números que señalan la bibliografía utilizada.

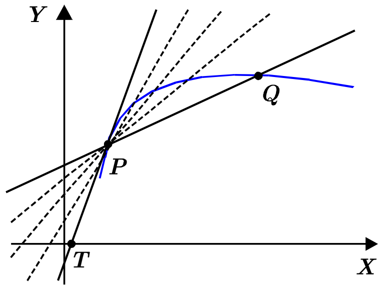


Figura 3

Denotemos con M a la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(x_0, f(x_0))$ y $Q(x_1, f(x_1))$:

$$M = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad x_1 \neq x_0$$

y sea $h = x_1 - x_0$, entonces $x_1 = x_0 + h$, de donde

$$M = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

El punto Q estará próximo a P si $|h|$ es pequeño por lo que la pendiente buscada es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definición.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f **en** $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ es :

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ siempre y cuando exista este límite, en cuyo caso lo denotamos como $f'(x_0)$

La **recta tangente a la gráfica de** $f(x)$ **en el punto** $P(x_0, f(x_0))$ es la recta que pasa por este punto y tiene pendiente $f'(x_0)$ y su ecuación puede obtenerse usando la forma punto –pendiente de la ecuación de una recta , es decir :

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) \text{..(I)}$$

Daremos algunos ejemplos que muestren cómo obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado.

Ejemplos.

1.-Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $P(2, f(2))$.

Solución:

Primero encontraremos la pendiente de la recta tangente :

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (4 + h) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Para obtener la ecuación de la recta tangente sustituiremos el punto y la pendiente en la ecuación (I)

$$\begin{aligned}
&y - f(x_0) = f'(x_0)\ (x - x_0)\\
&y - 4 = 4\ (x-2)\\
&y - 4 = 4x - 8\\
&4x - y - 4 = 0.
\end{aligned}$$

La recta anterior tiene una pendiente de valor 4 y corta a la curva en $(2, f(2))$, siendo éste el único punto en donde la gráfica de la función y la recta, se tocan.

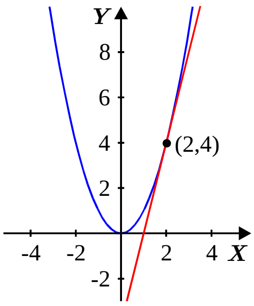


Figura 4

2.- Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva $f(x) = 2x - 1$ en el punto $(3, f(3))$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\\
f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(3+h) - 1 - [2(3)-1]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6 + 2h - 1 - 6 + 1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2.
\end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$
\begin{aligned}
&y - f(x_0) = f'(x_0)\ (x - x_0) \\
&y - 5 = 2(x - 3) \\
&y - 5 = 2x - 6 \\
&y = 2x - 1.
\end{aligned}
$$

Como se observa, la ecuación de la recta tangente es la misma que la de la curva y por tanto la corta en una infinidad de puntos.

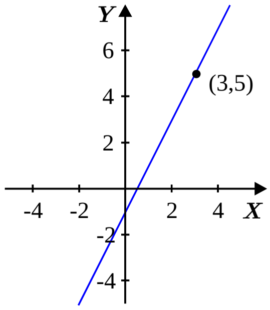


Figura 5

Los ejemplos anteriores son una muestra clara de que la definición de recta tangente como la recta que "toca" a la curva en un solo punto, funciona para algunos casos, pero no la podemos generalizar.

3.-Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el origen. [1]

Solución.

$$
\begin{aligned}
m = f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Como el límite no existe (es infinito), podríamos pensar que no hay recta tangente, pero si observamos la gráfica notaremos que la recta tangente debe ser vertical y como pasa por el origen su ecuación es $x = 0$, es decir, la tangente es el eje y. La gráfica se muestra en la figura 6.

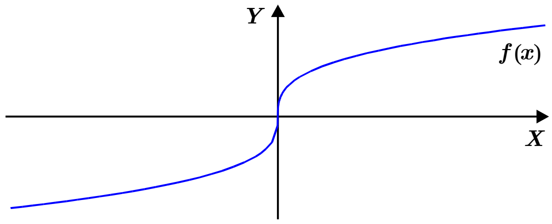


Figura 6

La **recta normal** a la gráfica de una función *f* en el punto $P(x_0, f(x_0))$ se define como la recta que pasa por *P* y que es perpendicular a la recta tangente. Se infiere que si $f'(x_0) \neq 0$ entonces la pendiente de esta recta es $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

4.-Encuentra las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x+1}$ en el punto $P(0,1)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
m = g'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+1} - \sqrt{1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+1} - \sqrt{1}}{h} \left(\frac{\sqrt{h+1} + \sqrt{1}}{\sqrt{h+1} + \sqrt{1}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{h+1}\right)^2 - \left(\sqrt{1}\right)^2}{h\left(\sqrt{h+1} + 1\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{h+1} + 1\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente la ecuación de la recta tangente es :

$y-1=\frac{1}{2}(x-0)$ la cual se escribe en su forma general como $x-2y+2=0$

Y la ecuación de la recta normal es:

$y-1=-2(x-0)$ que se escribe en su forma general como $2x+y-1=0$. Ver la figura 7.

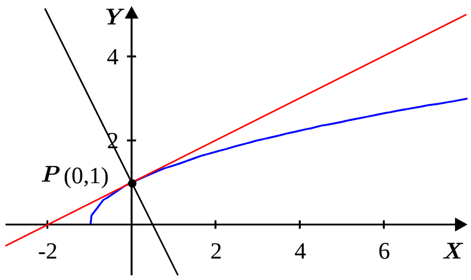


Figura 7

Recordemos la expresión que representa a la pendiente de la recta secante a la gráfica de una función que pasa por los puntos P y Q, figura 3.

Observemos que la expresión $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ la hemos visto aparecer al estudiar conceptos como :

A)Velocidad media. Sea $s(t)$ la función que describe el desplazamiento de una partícula a los t segundos, la velocidad media v_m en el intervalo de tiempo $[t_1,t_2]$ está dado por la siguiente expresión:

$$v_m=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1},$$

y si aplicamos el límite cuando t_2 se aproxima a t_1 estaremos hablando de velocidad instantánea, es decir,

$$v_{inst}=\lim_{t_2\to t_1}\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1},$$

este límite es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $s(t)$ en el punto $(t_1,s(t_1))$

B) Tiempo de una reacción química. Supongamos que una reacción química se lleva a cabo y que $f(t)$ designa la cantidad de una sustancia presente *t* unidades de tiempo después de que principia la reacción. Entonces el cambio en la cantidad de la sustancia desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 es :

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

y si a la expresión anterior le aplicamos el límite cuando t_2 se aproxime a t_1, es decir,

$$\lim_{t_2\to t_1}\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1},$$

obtendremos la razón de cambio instantánea de la cantidad de sustancia en el tiempo t_1.

En los ejemplos anteriores la primera expresión, que **no** lleva límite, se denomina **razón de cambio promedio** en el intervalo $[t_1,t_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante *PQ* de la figura 3. Cuando el límite se presenta se llama **razón instantánea de cambio** en $t=t_1$ y se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva en el punto $(t_1, f(t_1))$.
La velocidad de una partícula es la razón o tasa de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo, en Química el cambio en la cantidad de una sustancia es la razón o tasa de cambio de la concentración de algún reactivo con respecto al tiempo. En la fabricación del acero es importante la tasa de cambio del costo de producción de *x* toneladas diarias de acero con respecto a *x* (llamado costo marginal).En Biología es valioso conocer la razón de cambio de la población de la colonia de bacterias con respecto al tiempo.

Una de las razones principales para la invención del cálculo fue la necesidad de estudiar el comportamiento de los objetos en movimiento. El problema de obtener una definición satisfactoria de la velocidad o rapidez de un objeto en un instante dado nos llevó al concepto de **derivada.** [10]

Todas las razones de cambio instantáneas se pueden interpretar como pendientes de rectas tangentes. Dado que este tipo de límite se presenta con suma frecuencia, se le da un nombre y notación especiales.

Definición.

La **derivada de una función *f* en un número** x_0**, representada por** $f'(x_0)$**, es**

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si escribimos $x = x_0 + h$ la anterior expresión se convierte en

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En caso de que el límite exista, se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, sin embargo, si consideramos la derivada en cada punto x (en el que ella exista), obtenemos una función a la que llamamos la función derivada de *f*, que denotamos por :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La función f' se llama la derivada de f porque se ha "derivado" de *f* mediante la operación de límite . El dominio de f' es el conjunto $\{x / f'(x) \text{ existe}\}$ y está contenido en el dominio de *f*.

Ahora presentaremos ejemplos de la obtención de la derivada de una función mediante la definición dada.

Ejemplos.

1.- Encuentra la derivada de $f(x) = x^2 - 3x + 5$ en el punto cuya abscisa es $x = a$, usando la definición.
Solución:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - 3(a+h) + 5 - (a^2 - 3a + 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 3a - 3h + 5 - a^2 + 3a - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2a + h - 3)$$

$$= 2a - 3.$$

Es importante resaltar que la derivada es una función cuyo dominio está contenido en el dominio de la función f o es el mismo.

En el ejemplo 1, los dominios son iguales.

2.-Encuentra $f'(a)$ para $f(x)=\frac{1}{x}$, $a \neq 0$.

Solución:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{(a+h)a}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{ah(a+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}$$

$$=-\frac{1}{a^2}.$$

3.-Halla $f'(a)$ para $f(x)=\sqrt{x}$

Solución:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\right]\left[\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{a+h}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Observemos que en los ejemplos 1 y 2 la función derivada tiene el mismo dominio que la función original, para el tercero, el dominio de f son valores mayores o iguales que cero y el dominio de f' son valores estrictamente mayores que cero.

Otra notación para la derivada de f es $\frac{df(x)}{dx}$.

Es necesario decir que las distintas partes de la expresión anterior carecen de significado si se consideran por separado; las *d no* son números, no pueden simplificarse, y la expresión completa no es el cociente de otros dos números "$df(x)$" y "dx". Esta notación se debe a Leibniz y aunque parece complicada, en casos concretos puede ser más cómoda; por ejemplo, el símbolo $\frac{dx^2}{dx}$ designa la derivada de la función $f(x)=x^2$ con respecto a x.

Enunciaremos la derivada de expresiones que frecuentemente se utilizan, para formar un pequeño formulario.

$$\frac{dc}{dx}=0$$
$$\frac{dx}{dx}=1$$
$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$
$$\frac{dkf(x)}{dx}=k\frac{df(x)}{dx}$$
$$\frac{d\left[f(x)+g(x)\right]}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$$
$$\frac{d\left[(f\cdot g)(x)\right]}{dx}=\frac{df(x)}{dx}\cdot g(x)+\frac{dg(x)}{dx}\cdot f(x)$$
$$\frac{d\left[\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right]}{dx}=\frac{\frac{df(x)}{dx}\cdot g(x)-\frac{dg(x)}{dx}\cdot f(x)}{g^2(x)} \qquad \text{con} \quad g(x)\neq 0.$$

Demostraremos algunas de ellas. [11]

$$\begin{aligned}
\frac{dx^n}{dx}&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\ldots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right]}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\ldots(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\right]\\
&=x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x+\ldots+x\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\\
&=x^{n-1}+x^{n-1}+\ldots+x^{n-1}+x^{n-1} \qquad \text{observa que hay } n\text{-sumandos}\\
&=nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Para las siguientes demostraciones vamos a suponer que f y g son funciones derivables en x y por lo tanto continuas en x

$$\begin{aligned}
\frac{dkf(x)}{dx}&=\lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}k\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\\
&=k\frac{df(x)}{dx}.
\end{aligned}$$

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{g(x)[f(x+h)-f(x)]-f(x)[g(x+h)-g(x)]\}}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right].$$

Como g es derivable en x entonces g es continua en x de donde

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}=\frac{1}{g^2(x)} \text{ entonces}$$

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{dx}=\frac{1}{g^2(x)}\left[g(x)\frac{df(x)}{dx}-f(x)\frac{dg(x)}{dx}\right].$$

El objetivo de enunciar algunas fórmulas para derivar funciones, es simplemente lograr procedimientos más concretos ya que nuestra meta es enfocarnos en lo que son las rectas tangentes, por lo que volveremos a ejemplos sencillos que nos permitan apreciar el significado de la derivada y para esto es igualmente importante conocer ejemplos de funciones que **no** sean derivables. [3]

Consideremos a la función $f(x)=|x|$ y hallemos su derivada en $x=0$

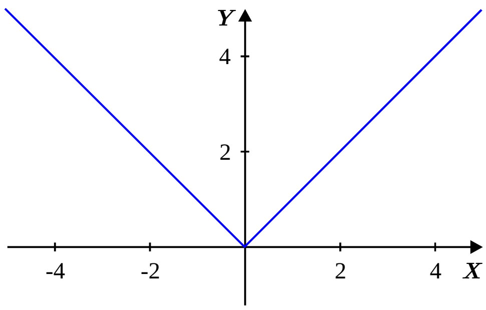


Figura 8

Veamos que pasa con el

$$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$

Como

$$\frac{|h|}{h}=\begin{cases}+1 & \text{si } h>0\\ -1 & \text{si } h<0\end{cases}.$$

Al calcular los límites laterales se tiene lo siguiente:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}(1)=1.$$

Puesto que los límites laterales son distintos, entonces el límite no existe y la función no es derivable en cero.

Para esta función no se podría encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en $x=0$, pues la pendiente de dicha recta $\left(f'(0)\right)$ no existe.

Para la función $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$ surge un problema parecido en $x=0$ ya que

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\begin{cases}\dfrac{h^2}{h}=h & h<0\\[2mm] \dfrac{h}{h}=1 & h>0\end{cases}$$

y por lo tanto

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0$$

y

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1.$$

Entonces $f'(0)$ no existe y nuevamente no es posible obtener la ecuación de la recta tangente.

En nuestro trabajo deseamos encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva que no es la gráfica de una función, por ejemplo una cónica, sin embargo, en estas ocasiones, casi siempre tenemos la ecuación que describe el lugar geométrico de estas relaciones en forma **implícita** por lo que será necesario explicar el método de **derivación implícita**. $[12]$

Si $y = f(x) = 3x^2 + 5x + 1$, entonces la ecuación define explícitamente a la función f. Pero no todas las funciones están definidas explícitamente.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$$

no es fácil despejar y en términos de x; no obstante, pueden existir una o más funciones f tales que $y = f(x)$, sea solución de la ecuación anterior, es decir,

$$x^6 - 2x = 3f^6(x) + f^5(x) - f^2(x)$$

en este caso la función f está definida **implícitamente.**

Suponiendo que la ecuación define a y como una función derivable, podemos encontrar la derivada de y con respecto a x usando la regla de la cadena:

$$6x^5 - 2 = 3(6)\, f^5(x)\, f'(x) + 5f^4(x)\, f'(x) - 2f(x)\, f'(x)$$
$$6x^5 - 2 = f'(x)\left[18f^5(x) + 5f^4(x) - 2f(x)\right]$$
$$f'(x) = \frac{6x^5 - 2}{18f^5(x) + 5f^4(x) - 2f(x)}$$
$$f'(x) = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$$

Obsérvese que al utilizar la diferenciación implícita se ha obtenido una expresión que comprende a las variables x, y.

Ejemplos.

1.-Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 9$ en el punto (1,2).

Solución:

Derivando implícitamente

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Por lo tanto, en el punto (1,2) la pendiente de la recta tangente es $m = -\frac{(1)^2}{(2)^2} = -\frac{1}{4}$

y la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$4y - 8 = -x + 1$$

$$x + 4y - 9 = 0.$$

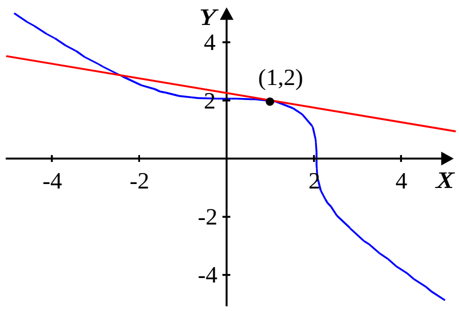


Figura 9

2.-Dada $3x^4 y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$ encuentra $\frac{dy}{dx}$.

Solución:

Recordando que *y* es una función derivable de *x*, y aplicando las reglas para la derivada de un producto, la derivada de una potencia, y la regla de la cadena se tiene:

$$12x^3y^2+3x^4\left(2y\frac{dy}{dx}\right)-7y^3-7x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right)=0-8\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(6x^4y-21xy^2+8\right)=7y^3-12x^3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{7y^3-12x^3y^2}{6x^4y-21xy^2+8}.$$

3.-Encuentra la $\frac{dy}{dx}$ para la ecuación $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$ donde $x, y\neq 0$.

Solución:

$$\frac{-2x}{x^4}+\frac{-2y\cdot\frac{dy}{dx}}{y^4}=0$$

$$\frac{-2y}{y^4}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^4}$$

$$\frac{1}{y^3}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^3}{x^3}.$$

3.-Halla la ecuación de la recta normal a la curva $x^2+xy+y^2-3y=10$ en el punto (2,3).

Solución:

Derivando implícitamente tenemos:

$$2x+x\frac{dy}{dx}+y+2y\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y-3)=-2x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y-3}$$

Sustituyendo el punto (2,3) obtendremos la pendiente de la recta tangente, m_T :

$$m_T=-\frac{2(2)+3}{2+2(3)-3}=-\frac{7}{5}.$$

Como la pendiente de la recta normal es $m = -\dfrac{1}{m_T} = \dfrac{5}{7}$ entonces la ecuación de la normal es:

$$y - 3 = \frac{5}{7}(x-2)$$
$$7y - 21 = 5x - 10$$
$$5x - 7y + 11 = 0.$$

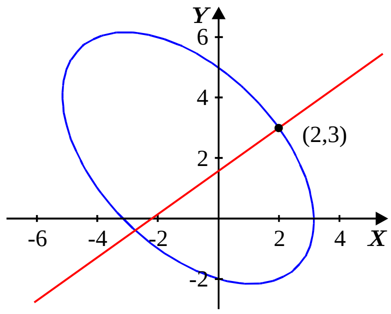
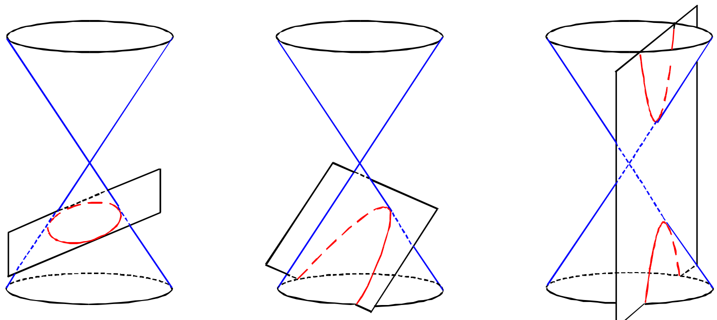


Figura 10

PARTE DOS. CÓNICAS. [4],[8]

Se conocen como **secciones cónicas** aquellas curvas que pueden obtenerse al cortar un cono de dos mantos con un plano, como se muestra en las figuras.



elipse parábola hipérbola

Las cónicas generales son : **elipse, parábola e hipérbola** .
La **circunferencia** es un caso particular de la elipse cuando el plano corta al cono horizontalmente pero sin pasar por el vértice.
Este tipo de curvas representan nuestro mayor campo de interés, y usando la derivación implícita encontraremos la ecuación de la recta tangente en un punto de la curva.
Debemos recordar que curvas como la circunferencia, la elipse, algunas parábolas e hipérbolas, no son funciones, por lo que al buscar la derivabilidad usaremos sólo una parte de la curva.

Comenzaremos con el caso de la circunferencia .

Una recta es tangente a una circunferencia sí toca a ésta en un sólo punto, además la recta tangente tiene la propiedad de que es perpendicular al radio que une al centro del círculo con el punto de tangencia. Esta propiedad es la que permite encontrar la ecuación de la recta tangente con herramienta de Geometría Analítica, pero usando Cálculo el proceso se simplifica de la siguiente forma:

Ejemplos
1.-Encuentra la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x-3)^2+(y-12)^2=100$ en el punto $P(-5,6)$.
Solución:
Derivando implícitamente

$$2(x-3)+2(y-12)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-x}{y-12}$$

entonces $m=\frac{3-(-5)}{6-12}=-\frac{4}{3}$ y la ecuación buscada es

$y-6=-\frac{4}{3}(x+5)$ la cual escrita en su forma general queda así: $4x+3y+2=0$.

En la gráfica de esta circunferencia la recta tangente está tocando a la curva en la sección que corresponde a la función:

$$f(x)=-\sqrt{100-(x-3)^2}+12,$$

es decir , gráficamente:

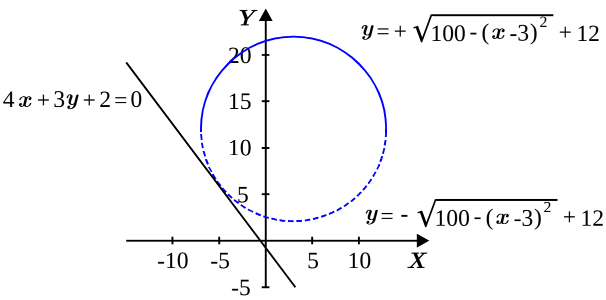


Figura 11

2.-Consideremos la ecuación $x^2+y^2=16$ de una circunferencia, y una función $y=f(x)$ derivable que la satisfaga. Encuentra la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función.

Solución:

Supongamos que $y=f(x)$ satisface la ecuación, entonces podemos escribir

$$x^2+f^2(x)=16$$

para todo *x* en el dominio de *f*.

Derivando implícitamente

$$2x+2f(x)\frac{df(x)}{dx}=0$$

$$\frac{df(x)}{dx}=-\frac{x}{f(x)} \qquad f(x)\neq 0.$$

Observemos que para este caso, podemos despejar a y para obtener:

$$y=f(x)=+\sqrt{16-x^2} \qquad \text{y} \qquad y=f(x)=-\sqrt{16-x^2}.$$

De esta forma:

$$\frac{d\sqrt{16-x^2}}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\left(-\sqrt{16-x^2}\right)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} \quad \text{con} \quad x \neq 4.$$

Afirmación: Todos los puntos de la recta tangente a la circunferencia, distintos del punto de tangencia, se encuentran en una sola de las dos regiones determinadas por la circunferencia, la exterior.

Demostración.

Para demostrar lo anterior consideremos a *P* como el punto de tangencia y *Q*, un punto distinto de *P*, que pertenezca a la recta tangente *L*.

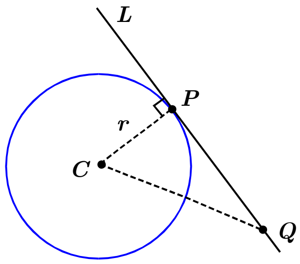


Figura 12

Como sabemos, el segmento que une al centro de la circunferencia con *P* es perpendicular a *L*, entonces el triángulo *CPQ* es rectángulo, esto implica que el segmento *CP* es un cateto y el segmento *CQ* es la hipotenusa, por lo que

$$r = d(C,P) < d(C,Q) \qquad \text{(distancia entre dos puntos)}$$

Lo anterior significa que el punto *Q* es un punto exterior a la circunferencia, con lo que queda demostrada la afirmación.

3.-Halla la ecuación de la recta normal a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el punto $(3,0)$.
Solución.

Derivando implícitamente tenemos que

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Sustituyendo las coordenadas del punto, obtenemos la pendiente de la recta tangente, m_T :

$$m_T = -\frac{3}{0}.$$

La pendiente de la recta tangente no está definida ya que se trata de una recta vertical $(x = 3)$ pero esto no impide que podamos encontrar la ecuación de la normal, recta que debe ser horizontal y pasar por el punto $(3,0)$, por lo que su ecuación será $y = 0$.

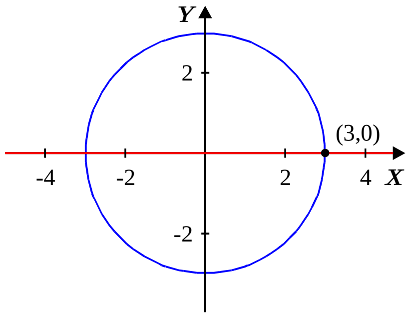


Figura 13

Los ejemplos anteriores nos muestran cómo encontrar la ecuación de la recta tangente a una circunferencia en un punto dado. Para las demás cónicas el proceso es muy parecido, por lo que se darán sólo algunos ejemplos.

1.- Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 10y - 8x + 9 = 0$ en el punto $Q\left(-\frac{3}{2},7\right)$.

Solución:

Derivando

$$2y\frac{dy}{dx} - 10\frac{dy}{dx} - 8 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{2y-10}$$

la pendiente m_T de la recta tangente es:

$$m_T = \frac{8}{2(7)-10} = 2$$

la ecuación buscada es

$$y-7=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$y-7=2x+3$$

$$2x-y+10=0.$$

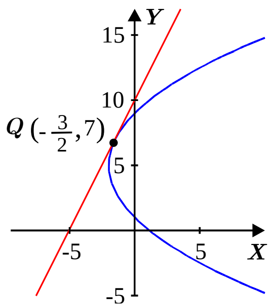


Figura 14

2.-Encuentra la ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2+y^2-8x+8y+16=0$ en el punto $P(2,-4)$.

Solución.
Derivando

$$8x+2y\frac{dy}{dx}-8+8\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8-8x}{2y+8}=\frac{4-4x}{y+4}$$

sustituyendo las coordenadas de P, obtenemos la pendiente m_T de la recta tangente:

$$m_T=\frac{4-4(2)}{-4+4}=\frac{4-8}{0}$$

como vemos, la pendiente no está definida, así que la recta tangente a la elipse en el punto $P(2,-4)$ es la recta vertical $x=2$.

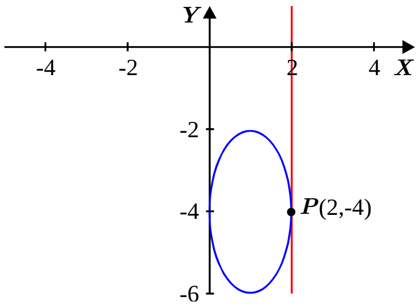


Figura 15

3.-Encuentra la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ en el punto $P\left(5,\frac{8}{3}\right)$.

Solución:

Derivando

$$\frac{2}{9}x-\frac{1}{2}y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x}{9y},$$

sustituyendo las coordenadas de P, obtenemos la pendiente m_T de la recta tangente:

$$m_T=\frac{4(5)}{9\left(\frac{8}{3}\right)}$$

$$m_T=\frac{20}{24}=\frac{5}{6},$$

la ecuación de la recta tangente es

$$y-\frac{8}{3}=\frac{5}{6}(x-5)$$

$$6y-16=5(x-5)$$

$$5x-6y-9=0.$$

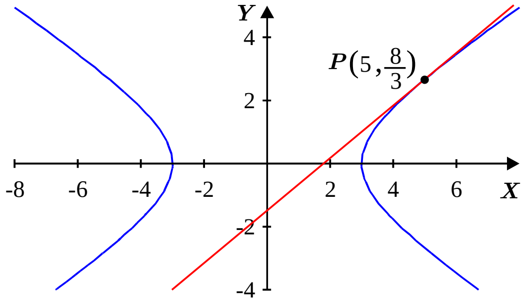


Figura 16

4.-Encuentra la ecuación de la recta tangente a la cónica $xy = 6$ en el punto $P\left(5,\dfrac{6}{5}\right)$.

Solución:
Se trata de una hipérbola con un ángulo de rotación de $45°$.

Derivando

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Sustituyendo las coordenadas de *P*, obtenemos la pendiente m_T de la recta tangente:

$$m_T = -\frac{\frac{6}{5}}{5} = -\frac{6}{25}$$

la ecuación buscada es

$$y - \frac{6}{5} = -\frac{6}{25}(x-5) \qquad \text{que simplificada queda } 6x + 25y - 60 = 0.$$

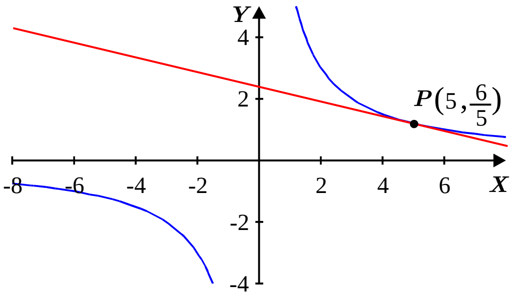


Figura 17

Como podemos observar, el procedimiento en cada ejemplo es muy parecido, por lo que lo vamos a generalizarlo para el caso de la parábola, la elipse y la hipérbola.

Sea $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ la ecuación general de segundo grado que representa cualquiera de las cónicas mencionadas en el párrafo anterior.

Queremos hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(x_1, y_1)$.

Derivando implícitamente:

$$2Ax+B\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+2Cy\frac{dy}{dx}+D+E\frac{dy}{dx}=0$$

$$(Bx+2Cy+E)\frac{dy}{dx}=-2Ax-By-D$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2Ax+By+D}{Bx+2Cy+E}.$$

Por lo que la pendiente m_T de la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$m_T=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}.$$

Así la ecuación de la recta tangente es

$$y-y_1=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}(x-x_1).$$

Apliquemos lo obtenido para el ejemplo 4.

Como la ecuación de la cónica es $xy = 6$ entonces $A = C = D = E = 0$, $B = 1$ y $F = -6$, además el punto a considerar es $P\left(5, \frac{6}{5}\right)$ por lo que el valor de la pendiente de la recta tangente es

$$m_T = -\frac{1\left(\frac{6}{5}\right)}{1(5)} = -\frac{6}{25}.$$

Y la ecuación de la recta tangente es

$y - \frac{6}{5} = -\frac{6}{25}(x - 5)$ que simplificada queda $6x + 25y - 60 = 0$, que coincide con el resultado del ejemplo 4.

PARTE TRES. ECUACIONES PARAMÉTRICAS. [4],[5],[6],[8]

Una curva plana puede interpretarse como el recorrido seguido en el plano por un móvil representado por un punto, esto implica que las coordenadas x y y de un punto de una curva se pueden expresar como funciones de una tercera variable t, llamada **parámetro** en la forma

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Así, cada valor de t da un valor de x y uno de y determinando un punto de la curva.

Las ecuaciones anteriores se llaman **ecuaciones paramétricas** de la curva. En ocasiones es posible modificar las ecuaciones con el uso de identidades de manera que la expresión resultante dependa sólo de las variables x y y, en ese caso obtenemos lo que llamamos la **ecuación cartesiana** o **rectangular**.

Ejemplo.

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \ \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

son ecuaciones paramétricas de una circunferencia con centro en el origen y radio r.

En efecto, si el parámetro t varía de 0 a 2π, entonces el punto $P(x, y)$ describe toda la circunferencia con centro en el origen y radio r.

Si eliminamos t elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumando los resultados, tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2\cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t \\ &= r^2\left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right) \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

que es la ecuación cartesiana de la circunferencia mencionada.

Hay varias maneras de describir una recta mediante ecuaciones paramétricas.

Si conocemos dos puntos de una recta $R(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$, entonces los puntos $P(t) = (x(t), y(t))$ de la forma

$$P(t) = R + t(Q - R)$$

pertenecen a la recta para cualquier valor de *t*, y todo punto de ella puede describirse de esta forma.
Si escribimos la abscisa y la ordenada de *P*, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y(t) = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}.$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de sistema de **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por ***R*** y ***Q***.

Si $0 < t < 1$ la ecuación describe el segmento $(\overline{RQ})$. Observemos que en particular si $t = 0$, entonces $P = R$. También si $t = 1$, entonces $P = Q$.
Los demás puntos de la recta corresponden a valores de *t* tales que $t < 0$ y $t > 1$.

Para el caso de una circunferencia de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ nos ayudaremos de la identidad trigonométrica

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

para escribir

$$\begin{aligned} x - h &= r\cos t \\ y - k &= r\operatorname{sen} t \end{aligned},$$

por lo que la parametrización de la circunferencia es

$$\begin{cases} x(t) = h + r\cos t \\ y(t) = k + r\ \operatorname{sen}\ t \end{cases}$$

con $t \in [0, 2\pi]$.

En el caso de una parábola de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$, como $y = f(x)$ se sugiere la siguiente parametrización

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) = At^2 + Bt + C. \end{cases}$$

Observamos que para cualquier función $y = f(x)$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}.$$

definen un sistema de ecuaciones paramétricas de la gráfica de *f*.
Para una parábola de la forma $x = Ay^2 + By + C$ una parametrización es

$$\begin{cases} y(t) = t \\ x(t) = At^2 + Bt + C. \end{cases}$$

Para la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ usamos la misma identidad que usamos en la circunferencia y escribimos:

$$\begin{aligned}\frac{x-h}{a}&=\cos t\\ \frac{y-k}{b}&=\operatorname{sen} t\end{aligned},$$

para obtener la siguiente parametrización

$$\begin{cases} x(t)=h+a\cos t\\ y(t)=k+b\operatorname{sen} t.\end{cases}$$

Es similar para el caso de una elipse vertical.
Pero para la hipérbola la identidad a usar es $\sec^2 t-\tan^2 t=1$. Así, si la ecuación a parametrizar es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

entonces escribimos

$$\begin{aligned}\frac{x-h}{a}&=\sec t\\ \frac{y-k}{b}&=\tan t\end{aligned}$$

lo cual, nos da la parametrización

$$\begin{cases} x(t)=h+a\sec t\\ y(t)=k+b\tan t.\end{cases}$$

Es similar para una hipérbola vertical.

Tratando nuevamente el tema de las rectas tangentes, si consideramos el sistema

$$\begin{cases} x(t)=f(t)\\ y(t)=g(t)\end{cases},$$

hemos dicho que para un valor de t, (x,y) representa un punto de una curva C. Es muy útil pensar en esa curva C como un conjunto de valores de una función $c(t)$ que manda un intervalo de números reales al plano, entonces la imagen de esa función corresponde a la curva C que vemos en el papel, es decir, que la parametrización que representa el sistema puede ser expresada como la función

$$\begin{gathered} c:[a,b]\subset R\to R\times R\\ c(t)=(x(t),y(t)).\end{gathered}$$

De esta forma, si queremos encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva C en el punto $c(t_0)$, entonces estamos buscando la recta que pase por $c(t_0)$ en la dirección del vector tangente $c'(t_0) \neq 0$, es decir, la ecuación paramétrica buscada es

$$L(t) = c(t_0) + tc'(t_0)$$

con $c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$. Aquí estamos suponiendo que tanto $x(t)$ como $y(t)$ son funciones derivables en t_0 y $c'(t) \neq 0$ (de otro modo no habría recta tangente).
Observemos que $c(t)$ se puede ver como un punto en el plano o como un vector apoyado en el origen. De la misma manera si $c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ se tiene :

A) Si $x'(t_0) = 0$ entonces $L(t)$ pasa por $c(t_0)$ en la dirección del eje y
B) Si $x'(t_0) \neq 0$ entonces $L(t)$ tiene pendiente $m(t_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ y la ecuación cartesiana de L es

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) \quad [2]$$

Ejemplos.

1.-Halla las ecuaciones cartesianas de las rectas tangente y normal a la elipse

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\,\text{sen } t \end{cases} \qquad a, b > 0$$

en el punto donde $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Solución:

Siendo t el parámetro, $\dfrac{dx}{dt} = -a\text{sen}t$ y $\dfrac{dy}{dt} = b\cos t$

por lo que la pendiente es:

$$m(t) = -\frac{b\cos t}{a\text{sen}t}$$
$$= -\frac{b}{a}\text{ctg } t$$

sustituyendo $t = \dfrac{\pi}{4}$ en las ecuaciones paramétricas de la elipse, sistema obtenemos como punto de contacto:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$
$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

y la pendiente m_T de la recta tangente es:

$$\begin{aligned} m_T &= -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

así la pendiente m_N de la recta normal es:

$$m_N = \frac{a}{b}$$

Por lo que las ecuaciones buscadas son

Recta tangente: $y - \frac{\sqrt{2}}{2}b = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ que simplificada es $2bx + 2ay - 2\sqrt{2}ab = 0$

Recta normal: $y - \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{a}{b}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ que simplificada es $2ax - 2by + \sqrt{2}\left(b^2 - a^2\right) = 0$.

2.- Una curva C en el plano pasa por el punto $(3,6)$ cuando $t = 0$ y su vector tangente es $c'(0) = (1,-1)$. Halla la ecuación de la recta tangente en su forma paramétrica.

Solución:

$$\begin{aligned} L(t) &= (3,6) + t(1,-1) \\ &= (3+t, 6-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= (3+t, 6-t) \\ x(t) &= 3+t \\ y(t) &= 6-t. \end{aligned}$$

3.-Halla las ecuaciones cartesianas de la rectas tangente y normal a la parábola

$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t+1 \end{cases}$ en $t = 1$.

Solución. La pendiente de la recta tangente en t es:

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

Sustituyendo $t=1$ en el sistema, obtenemos como punto de contacto $(1,3)$ y como pendientes de las rectas tangente y normal respectivamente:

$$m_T = 1 \quad \text{y} \quad m_N = -1$$

Ecuación de la recta tangente: $y-3=1(x-1)$ que simplificada es $x-y+2=0$

Ecuación de la recta normal: $y-3=-1(x-1)$ que simplificada es $x+y-4=0$.

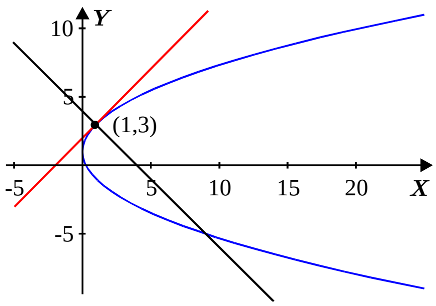


Figura 18

4.- Halla los puntos de contacto de las tangentes horizontales y verticales a la **cardioide,** dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = a\cos t - \frac{1}{2}a\cos 2t - \frac{1}{2}a \\ y = a\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}a\operatorname{sen} 2t \end{cases} \quad \text{...(1)}$$

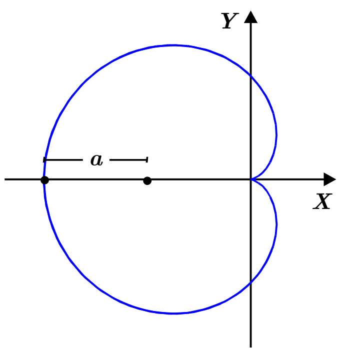


Figura 19

Solución.

Como $x'(t) = -a\operatorname{sen} t + a\operatorname{sen} 2t$, entonces

$$y'(t) = a\cos t - a\cos 2t$$

se tiene que la pendiente m_T de la recta tangente es:

$$m_T(t)=\frac{a\cos t-a\cos 2t}{-a\operatorname{sen} t+a\operatorname{sen} 2t}\ .$$

Para las rectas tangentes horizontales, buscamos que $m_T=0$, es decir,

$$\begin{aligned} a\cos t-a\cos 2t&=0\\ a\cos t-a\left(2\cos^2 t-1\right)&=0\\ 2a\cos^2 t-a\cos t-a&=0\\ a\left(2\cos^2 t-\cos t-1\right)&=0 \end{aligned}$$

y como sabemos que $a\neq 0$ la ecuación a resolver es:

$$2\cos^2 t-\cos t-1=0$$

resolviendo se tiene que

$$\cos t=\frac{1\pm\sqrt{1-4(2)(-1)}}{2(2)}$$

es decir,

$$\cos t=\frac{1\pm 3}{4},$$

de donde

$$\cos t=1\Rightarrow t=0$$

o bien,

$$\cos t=-\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\ ,$$

por lo que las puntos donde las tangentes son horizontales son:

$$t=0,\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\ .$$

Sustituyendo $t=0$ en el sistema (1) tenemos:

$$x=a\cos 0-\frac{1}{2}a\cos 0-\frac{1}{2}a=0$$

$$y=a\operatorname{sen} 0-\frac{1}{2}a\operatorname{sen} 0=0,$$

así, el punto de contacto es $O(0,0)$

Sustituyendo $t=\frac{2}{3}\pi$ en (1) se tiene:

$$x = a\cos\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}a\cos\frac{4}{3}\pi - \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}a = -\frac{3}{4}a$$
$$y = a\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}a\text{sen}\,\frac{4}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$$

por lo que el punto de contacto es $P\left(-\frac{3}{4}a, \frac{3\sqrt{3}}{4}a\right)$.

Sustituyendo $t = \frac{4}{3}\pi$ en (1) se obtiene $Q\left(-\frac{3}{4}a, -\frac{3\sqrt{3}}{4}a\right)$.

Para las tangentes verticales utilizaremos la pendiente recíproca e inversa, ya que hablamos de rectas perpendiculares.

$$m = \frac{-a\text{sen}\,t + a\text{sen}\,2t}{a\cos t - a\cos 2t} = 0$$

lo anterior implica

$$-a\text{sen}\,t + a\text{sen}\,2t = 0$$
$$-a\text{sen}\,t + 2a\text{sen}\,t\cos t = 0$$
$$\text{sen}\,t(-a + 2a\cos t) = 0$$

es decir, $\text{sen}\,t = 0$ o $\cos t = \frac{1}{2}$ de donde $t = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

Sustituyendo cada uno de estos valores excepto el cero, ya que antes fue analizado, en el sistema de ecuaciones paramétricas se tiene:

$R(-2a,0)$, $S\left(\frac{1}{4}a, -\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$ y $T\left(\frac{1}{4}a, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$ como puntos de contacto de rectas tangentes verticales.

El valor común $t = 0$ representa un punto de la curva donde $x'(t) = 0$ y $y'(t) = 0$, por lo que $(x'(t), y'(t)) = (0,0)$ y no existe la recta tangente.

Para $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{5}{3}\pi$ la recta tangente vertical es la misma.

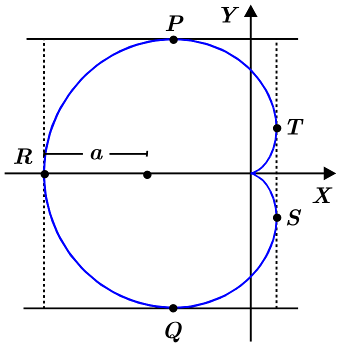


Figura 20

Cicloide. [6]

Si un círculo rueda sin resbalar, sobre una recta fija, la curva descrita por un punto de la circunferencia se llama **cicloide.**

Sea *a* el radio del círculo rodante y *C* su centro, *P* el punto que traza la curva y *M* el punto de contacto con la recta fija *OX*, (observemos que el segmento *CM* es perpendicular a la recta *OX*) que se llama base (*P* y *M* son puntos de la circunferencia). Considera también a *N* como la abscisa del punto *P*.

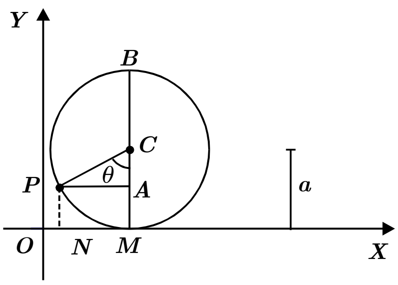


Figura 21

Si el arco *PM* es igual en longitud a *OM*, entonces, si el círculo se hace rodar hacia la izquierda *P* tocará en *O*.

Designando el ángulo *PCM* por θ y recordando que $\theta = \frac{s}{r}$ donde *s* es el arco del círculo, y *r* es el radio del mismo, tenemos

$$\theta = \frac{arcoPM}{a} \Rightarrow arcoPM = a\theta$$

y como el arco *PM* es igual en longitud a *OM* tenemos

$$OM = a\theta$$

Si trazamos una perpendicular *PA* a *CM* entonces para el triángulo rectángulo *PCA* se tiene

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{PA}{a} = \frac{NM}{a} \Rightarrow NM = a\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{AC}{a} \Rightarrow AC = a\cos\theta$$

así las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$x = ON = OM - NM = a\theta - a\operatorname{sen}\theta = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

$$y = NP = MC - AC = a - a\cos\theta = a(1-\cos\theta).$$

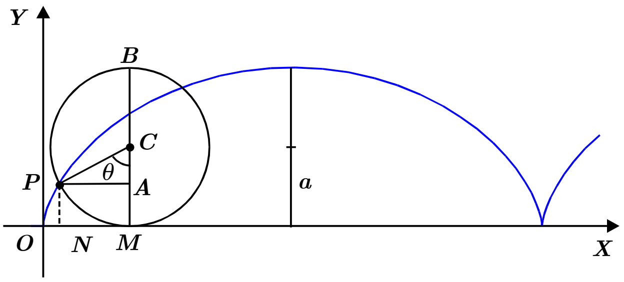


Figura 22

5.-Dadas las ecuaciones paramétricas de la cicloide

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\ \theta)$$

$$y = a(1-\cos\theta),$$

halla las ecuaciones cartesianas de las rectas tangente y normal en el punto $P(x_1, y_1)$ donde $\theta = \theta_1$

Solución.

Siendo θ el parámetro, se tiene:

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\operatorname{sen}\theta,$$

por lo que:

$$m(\theta) = \frac{a\operatorname{sen}\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$$

Cuando $\theta = \theta_1$:

$$x_1 = a(\theta_1 - \text{sen}\,\theta_1)$$
$$y_1 = a(1 - \cos\theta_1)\ ,$$

entonces las pendientes de las rectas tangente y normal son:

$$m_T = \frac{\text{sen}\,\theta_1}{1 - \cos\theta_1} \qquad \theta_1 \neq 2n\pi \qquad n \in Z$$

$$m_N = \frac{\cos\theta_1 - 1}{\text{sen}\,\theta_1}$$

Así las ecuaciones buscadas son:

Recta tangente: $y - a(1 - \cos\theta_1) = \dfrac{\text{sen}\,\theta_1}{1 - \cos\theta_1}\left(x - a(\theta_1 - \text{sen}\,\theta_1)\right)$

Recta normal: $y - a(1 - \cos\theta_1) = \dfrac{\cos\theta_1 - 1}{\text{sen}\,\theta_1}\left(x - a(\theta_1 - \text{sen}\,\theta_1)\right)$.

6.-Encuentra la ecuación cartesiana de la recta tangente a la cicloide cuyas ecuaciones son

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 2\,\text{sen}\,t \\ y(t) = 2 - 2\cos t \end{cases} \qquad \text{en} \quad t = \frac{\pi}{3}$$

Nota: Si $t = \dfrac{\pi}{3}$ es sustituido en el sistema anterior, entonces el punto de contacto entre la recta tangente y la curva es $P\left(\dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3}, 1\right)$.

Solución:

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente encontrada en la sección anterior, el valor de $t = \dfrac{\pi}{3}$, tenemos

$$y - \left(2 - 2\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}}{1 - \cos\dfrac{\pi}{3}}\left(x - \left(2\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$y - 1 = \sqrt{3}\left(x - \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right)$$

que simplificada se escribe $3\sqrt{3}x - 3y + 12 - 2\pi\sqrt{3} = 0$. Ver la figura 23.

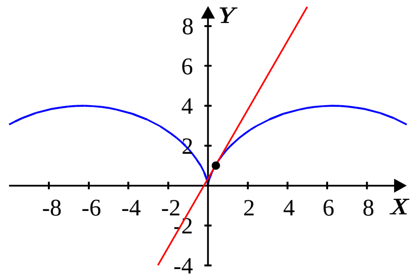


Figura 23

Epicicloide e Hipocicloide. [6]

Una **epicicloide** es el lugar geométrico descrito por un punto fijo cualquiera de una circunferencia que rueda exteriormente, sin resbalar, sobre una circunferencia fija.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico; a y b los radios de las circunferencias fija y rodante respectivamente y C el centro de la circunferencia rodante. Tomaremos como parámetro θ al ángulo que forma la línea de los centros con el eje x positivo. Sea B el punto de tangencia de las dos circunferencias; CD y PE perpendiculares al eje x y tracemos PF perpendicular a CD. Llamemos ϕ al ángulo OCP y β al ángulo PCF.

Como la circunferencia C rueda de A a B tenemos

$$\text{arco } AB = \text{arco } PB$$

o sea

$$a\theta = b\phi \Rightarrow \phi = \frac{a}{b}\theta \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \theta + \phi &= \theta + \frac{a}{b}\theta \\ &= \frac{a+b}{b}\theta. \end{aligned}$$

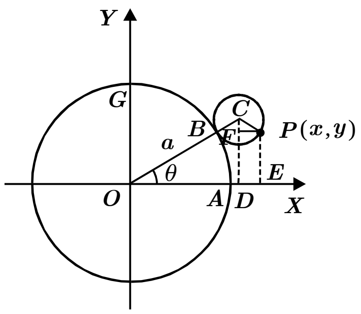


Figura 24

También:

$$\beta = \phi - \text{ángulo}\, OCD$$
$$= \phi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$= \phi + \theta - \frac{\pi}{2}$$

entonces

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\left(\phi + \theta - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\cos(\theta + \phi)$$
$$= -\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

y

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

Para la coordenada x tenemos

$$x = OE = OD + DE = OD + FP = OC\cos\theta + CP\operatorname{sen}\beta$$
$$x = (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

Para la coordenada y tenemos

$$y = EP = DF = DC - FC = OC\operatorname{sen}\theta - CP\cos\beta$$
$$y = (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{b}\theta\right).$$

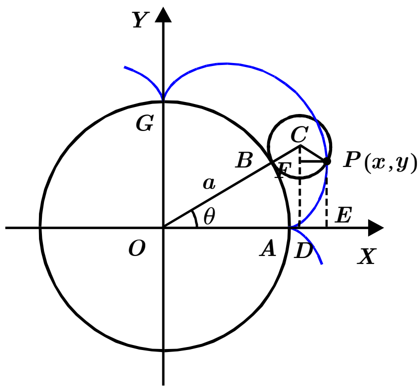


Figura 25

En los puntos como A y G que están sobre la circunferencia fija se forma un pico. El número de picos depende de la relación entre los radios; si $a = rb$ y r es un natural mayor o igual que 1, la epicicloide será una curva cerrada que tiene r picos.

Cuando $a = b$ y $r = 1$, tenemos la epicicloide de un pico o *cardioide.*

Una **hipocicloide** es el lugar geométrico de un punto fijo cualquiera de una circunferencia que rueda *interiormente*, sin resbalar, sobre otra circunferencia fija. Usando un procedimiento semejante al realizado en el caso de la epicicloide, podemos demostrar que las ecuaciones paramétricas son
$$\begin{cases} x = (a-b)\cos\theta + b\cos\dfrac{a-b}{b}\theta \\ y = (a-b)\ \text{sen}\ \theta - b\ \text{sen}\ \dfrac{a-b}{b}\theta \end{cases}$$

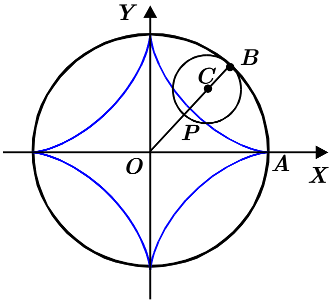


Figura 26

7.- Halla la ecuación cartesiana de la recta tangente a la hipocicliode
$$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\text{sen}t - \text{sen}2t \end{cases} \quad \text{para} \quad t = \frac{\pi}{4}.$$

Nota : Si sustituimos $t = \frac{\pi}{4}$ en el sistema anterior, observamos que deseamos encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipocicloide en el punto $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}-1\right)$

Solución:
$$x'(\theta) = -2\text{sen}t - 2\text{sen}2t$$
$$y'(\theta) = 2\cos t - 2\cos 2t$$
$$m_T(\theta) = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{2\cos t - 2\cos 2t}{-2\text{sen}t - 2\text{sen}2t}$$

Sustituyendo $t = \frac{\pi}{4}$ en el sistema de ecuaciones paramétricas y en la expresión de la pendiente, se tiene
$$x_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$
$$y_1 = 2\text{sen}\frac{\pi}{4} - \text{sen}\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = \sqrt{2} - 1$$

$$m_T = \frac{2\cos\frac{\pi}{4} - 2\cos\frac{\pi}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-2}.$$

Así la ecuación de la recta tangente queda

$y - \sqrt{2} + 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-2}\left(x - \sqrt{2}\right)$ simplificando, $\left(1-\sqrt{2}\right)x - y + 1 = 0.$

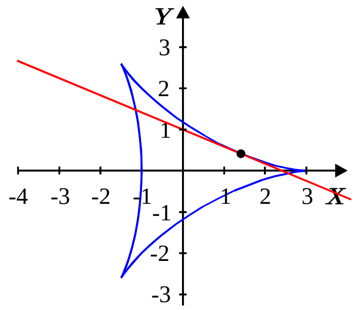


Figura 27

Igual que en la epicicloide si $a = rb$ y r es un número natural mayor o igual que 3, tenemos una hipocicloide de r picos. La hipocicloide de 4 picos está representada en la figura 22 y si consideramos $b = \dfrac{a}{4}$ las ecuaciones paramétricas se convierten en

$$\begin{cases} x = \dfrac{3a}{4}\cos\theta + \dfrac{a}{4}\cos 3\theta \\ y = \dfrac{3a}{4}\operatorname{sen}\theta - \dfrac{a}{4}\operatorname{sen}3\theta. \end{cases}$$

Si en estas ecuaciones usamos las identidades

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$$

obtenemos la forma simplificada de la hipocicloide de 4 picos

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\operatorname{sen}^3\theta. \end{cases}$$

8.-Halla las ecuaciones cartesianas de las rectas tangente y normal a la hipocicloide en $t = \dfrac{\pi}{4}$ dadas sus ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 4a\cos^3 t \\ y = 4a\operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$$

Nota: Nuevamente, para visualizar mejor a la recta tangente, el punto de contacto en coordenadas cartesianas es $P\left(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}\right)$.

Solución:

Se tiene $\frac{dx}{dt} = -12a\cos^2 t \operatorname{sen} t$ y $\frac{dy}{dt} = 12a\operatorname{sen}^2 t \cos t$ por lo que las pendientes m_T y m_N de las rectas tangente y normal son:

$$m_T(t) = -\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t \qquad \text{y} \qquad m_N(t) = \operatorname{ctg} t$$

así considerando $t = \frac{\pi}{4}$, tenemos

Ecuación de la recta tangente:

$$y - 4a\operatorname{sen}^3 \frac{\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4}\left(x - 4a\cos^3\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y - 4a\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\left(x - 4a\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$$

$$x + y - 2\sqrt{2}a = 0.$$

Ecuación de la recta normal:

$$y - 4a\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = x - 4a\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$x - y = 0.$$

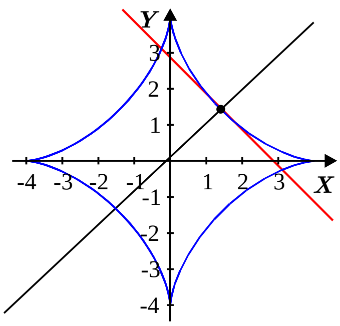


Figura 28

Curva de Agnesi (Bruja de Agnesi) [6]

Considere un círculo con diámetro *OA* a lo largo del eje *y*, siendo *O* el origen (ver la figura 25) y la recta *t* su tangente en *A*. Desde *O* tracemos una recta cualquiera *l* y sean *B* y *C* sus puntos de intersección con la circunferencia y la recta *t*. Por *B* tracemos una perpendicular a

OA que la corte en D y por C tracemos una recta paralela a OA que corte al eje x en E; sea P el punto de intersección de estas dos rectas. La curva de Agnesi es el lugar geométrico que describe el punto P a medida que l gira en torno de O.

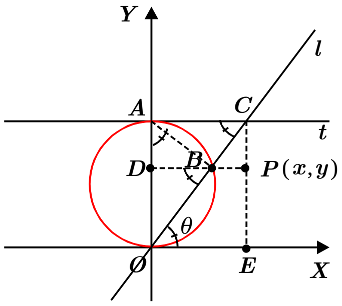


Figura 29

Sea θ el ángulo que l forma con la parte positiva del eje x. Como θ varía a medida que l gira alrededor de O, lo usaremos como parámetro.

Si trazamos el segmento AB se tiene $\angle DBO = \angle DAB = \theta$ ya que $\angle ABO$ es recto (ángulo inscrito que subtiende un diámetro). Sea a el radio del círculo.

Para el triángulo ACO se tiene $\operatorname{ctg}(\angle ACO) = \operatorname{ctg}\theta = \dfrac{AC}{OA} \Rightarrow AC = OA\operatorname{ctg}\theta$

Para el triángulo ABO se tiene $\operatorname{sen}\angle DAB = \operatorname{sen}\theta = \dfrac{OB}{OA} \Rightarrow OB = OA\operatorname{sen}\theta$

entonces las coordenadas del punto P serán:

$$x = OE = AC = OA\operatorname{ctg}\theta = 2a\operatorname{ctg}\theta$$

$$y = EP = OD = OB\operatorname{sen}\theta = OA\operatorname{sen}^2\theta = 2a\operatorname{sen}^2\theta.$$

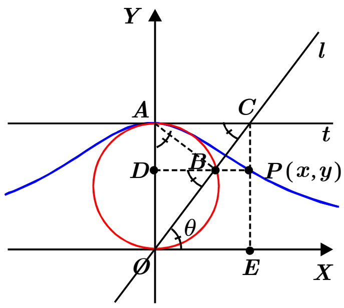


Figura 30

PARTE CUATRO. CURVAS EN COORDENADAS POLARES. [4],[5],[8],[9]

Recordemos que una curva en coordenadas polares es una expresión que depende de dos parámetros r y θ. Por ejemplo si *P* es un punto cualquiera en el plano cartesiano, a r lo conocemos como el **radio vector** y representa la longitud del segmento *OP*, donde *O* es el origen. A θ lo conocemos como el **ángulo polar** o **argumento de *P*** y representa el ángulo entre la recta horizontal que pasa por *O* (llamada **eje polar)** y el radio vector.

Una curva en coordenadas polares está dada por la ecuación

$$r = f(\theta)$$

donde *f* es una función.
Recordando que la relación en coordenadas polares establece:

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

podemos escribir:

$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = f(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

lo cual nos da las coordenadas paramétricas de la curva y consideramos a la gráfica de ella como la imagen de una función

$$\alpha(\theta) = \left(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\operatorname{sen}\theta\right).$$

De esta forma si queremos encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva α en el punto $\alpha(\theta_0)$, entonces la ecuación buscada es

Forma paramétrica $\quad \ell(t) = \alpha(\theta_0) + t\alpha'((\theta_0))$ con $\alpha'(\theta_0) \neq 0$ el vector tangente

Para la forma cartesiana es necesario encontrar la pendiente:

$$m(\theta_0) = \frac{y'(\theta_0)}{x'(\theta_0)} \qquad \text{con} \qquad x'(\theta_0) \neq 0$$

Como $x(\theta) = f(\theta)\cos\theta$ y $y(\theta) = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$ entonces

$$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$
$$y'(\theta) = f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta$$

de donde:

$$m(\theta) = \frac{f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta},$$

así, si $\cos\theta \neq 0$

$$m(\theta) = \frac{\dfrac{f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}.$$

Por lo tanto $$m(\theta)=\frac{f'(\theta)\tan\theta+f(\theta)}{f'(\theta)-f(\theta)\tan(\theta)}\text{...(1)}$$

Lo anterior permite que la ecuación cartesiana se escriba

$$y-f(\theta_0)\operatorname{sen}\theta_0=\frac{f'(\theta_0)\tan\theta_0+f(\theta_0)}{f'(\theta_0)-f(\theta_0)\tan(\theta_0)}(x-f(\theta_0)\cos\theta_0)\text{.....................................(2)}$$

Otra manera de determinar la pendiente $m(\theta)$ es usando el ángulo que forman el radio vector y la tangente. [5]

Sea $r=f(\theta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares; si ψ es el ángulo que forman el radio vector OP y la recta tangente a la curva en P , entonces demostraremos que

$$\tan\psi=\frac{r}{r'}\quad\text{siendo}\quad r'=\frac{dr}{d\theta}\text{..(3)}$$

Demostración.

Consideremos un punto $Q(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)$ cercano a *P*. Tracemos *PR* perpendicular a *OQ*(ver la figura 31).

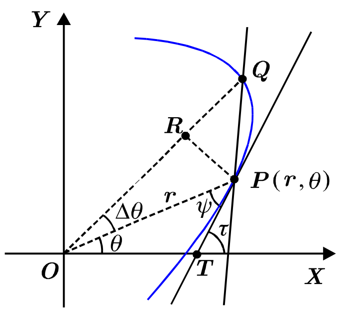


Figura 31

Entonces

$$\begin{aligned}OQ&=r+\Delta r\\ \angle POQ&=\Delta\theta\\ PR&=r\operatorname{sen}\Delta\theta\\ OR&=r\cos\Delta\theta\end{aligned},$$

lo cual implica que:

$$\tan(\angle PQR) = \frac{PR}{OQ - OR}$$
$$= \frac{r\,\mathrm{sen}\Delta\theta}{r + \Delta r - r\cos\Delta\theta}.$$

Si ahora $\Delta\theta$ tiende a cero, entonces, el ángulo *PQR* tenderá a ψ como límite, por lo que

$$\tan\psi = \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{r\,\mathrm{sen}\Delta\theta}{r + \Delta r - r\cos\Delta\theta}$$
$$= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{r\,\mathrm{sen}\Delta\theta}{r(1-\cos\Delta\theta) + \Delta r}$$
$$= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{r\,\mathrm{sen}\Delta\theta}{2r\,\mathrm{sen}^2\frac{\Delta\theta}{2} + \Delta r},$$

dividiendo numerador y denominador entre $\Delta\theta$

$$= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{r\dfrac{\mathrm{sen}\Delta\theta}{\Delta\theta}}{r\,\mathrm{sen}\dfrac{\Delta\theta}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{sen}\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} + \dfrac{\Delta r}{\Delta\theta}}$$

recordando que $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}x}{x} = 1$ y $\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\theta} = \frac{dr}{d\theta}$ se tiene

$$\tan\psi = \frac{r}{r'}.$$

Ahora, consideremos a τ como el ángulo de inclinación de la recta tangente a la curva en el punto *P*. Entonces, puesto que $\theta + \psi + \pi - \tau = \pi$, para el triángulo *OPT*, tenemos que

$\tau = \theta + \psi$, de donde:

$$\tan\tau = \tan(\theta + \psi) = \frac{\tan\theta + \tan\psi}{1 - \tan\theta\tan\psi} \quad\text{.....................}(4)$$

Ejemplo.

Halla la pendiente de la recta tangente a la cardioide $r = a(1-\cos\theta)$ en $\theta = \frac{2}{3}\pi$.

Solución:

Primero calculemos:

$$\tan\psi = \frac{r}{r'} = \frac{a(1-\cos\theta)}{a\operatorname{sen}\theta} = \frac{2a\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{2a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

esto implica que $\psi = \frac{\theta}{2}$ y usando la fórmula (4)

$$\begin{aligned} m(\theta) = \tan\tau = \tan(\theta+\psi) \\ &= \frac{\tan\theta + \tan\psi}{1+\tan\theta\tan\psi} \\ &= \frac{\tan\theta + \tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\theta\tan\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\tan\frac{2\pi}{3} + \tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{2\pi}{3}\tan\frac{\theta}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

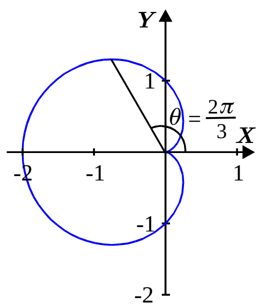


Figura 32

Ecuación de la recta en coordenadas polares.

Si la recta pasa por el origen su ecuación es

$$\theta = k \qquad \text{con } k \text{ constante}$$

Si la recta no pasa por el origen, tracemos desde el polo una perpendicular *ON* a la recta y sea $N(p,\omega)$, *p* positivo y $0 \le \omega < 2\pi$

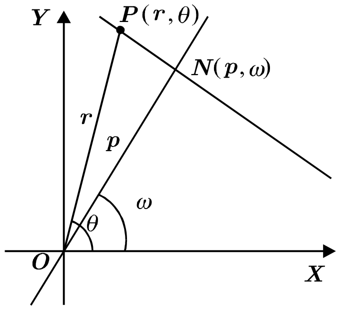


Figura 33

Consideremos $P(r,\theta)$ un punto cualquiera de la recta, entonces del triángulo *ONP* rectángulo, es de donde tenemos la ecuación en coordenadas polares

$$r\cos(\theta-\omega)=p\ .$$

- Si la recta es perpendicular al eje polar y está a *p* unidades del polo, su ecuación es

$$r\cos\theta = p \quad \text{ya que } \omega = 0\ .$$

- Si la recta es paralela al eje polar y está a *p* unidades de él, su ecuación es

$$r\,\mathrm{sen}\,\theta = p \quad \text{ya que } \omega = \frac{\pi}{2}\ .$$

Ecuación de la circunferencia en coordenadas polares.

Sea $C(c,\alpha)$ el centro de la circunferencia en coordenadas polares y $P(r,\theta)$ un punto cualquiera de la circunferencia con radio *a*.
Tracemos el radio *PC* y los radios vectores de *P* y *C* , formando así el triángulo *OPC*

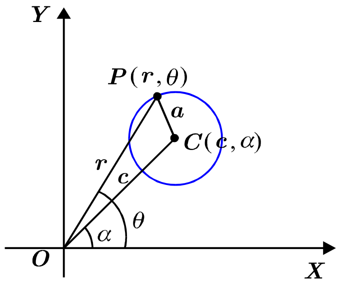


Figura 34

Usando la ley de los cosenos tenemos la ecuación de la circunferencia

$$a^2 = r^2 + c^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) \text{ , es decir, } r^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2$$

- Si su centro está en el polo, la ecuación es $r = a$, ya que $c = 0$.

- Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje polar, su ecuación es

$$r = 2a\cos\theta \text{ ya que } c = a \text{ y } \alpha = 0$$

- Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje a $\frac{\pi}{2}$, su ecuación es

$$r = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta \text{ ya que } c = a \text{ y } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Para la ecuación de las cónicas en coordenadas polares usaremos una definición geométrica de cónica.

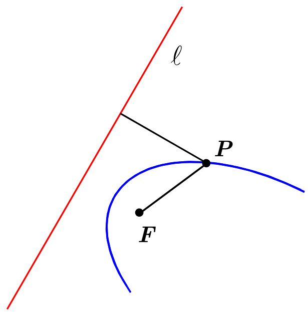


Figura 35

Dada una recta fija l y un punto fijo F que no esté contenido en esa recta, se llama **cónica** al lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de l y F de tal manera que la razón de su distancia de F a su distancia de l es siempre igual a una constante positiva denotada por e.
La recta fija se llama *directriz*, el punto fijo *foco*, y la constante positiva *excentricidad* de la cónica.
Entonces el punto P debe satisfacer la condición geométrica.

$$\frac{PF}{PA} = e$$

El lugar geométrico que describe el punto P es:

a) Una elipse si $0 < e < 1$
b) Una parábola si $e = 1$
c) Una hipérbola si $e > 1$

Usaremos la anterior definición, primero para el caso de :

Cónicas horizontales.

La ecuación polar de esta cónica puede ser obtenida de manera sencilla, si consideramos a uno de sus focos como el polo y el eje focal coincide con el eje polar. Sea l la directriz del foco O y sea D el punto de intersección con el eje polar.

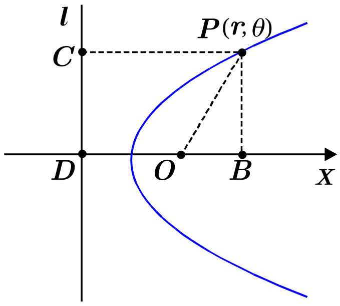


Figura 36

Sea $OD = p$ una constante positiva, y $P(r,\theta)$ un punto cualquiera de la cónica. Tracemos desde P las perpendiculares PB y PC al eje polar y directriz respectivamente.

Si usamos la definición geométrica anterior, P debe cumplir

$$\frac{PO}{PC} = e \quad \text{...(5)}$$

Pero $PO = r$ y

$$\begin{aligned} PC &= DB \\ &= DO + OB \\ &= p + r\cos\theta \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5)

$$\begin{aligned} \frac{r}{p + r\cos\theta} &= e \\ r &= ep + er\cos\theta \\ r - er\cos\theta &= ep \\ r(1 - e\cos\theta) &= ep \\ r &= \frac{ep}{1 - e\cos\theta}. \end{aligned}$$

la ecuación anterior se ha deducido suponiendo que la directriz se encuentra a la izquierda del polo y en el caso de encontrarse a la derecha se puede demostrar que la ecuación queda así:

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}.$$

Cónicas verticales.

De manera semejante si la cónica es de tipo vertical y la directriz es paralela al eje polar y se encuentra a p unidades de él, podemos demostrar que la ecuación es

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta}.$$

tomando el signo positivo o el negativo en caso de que la directriz se encuentre arriba o abajo del eje polar.

Ejemplo.

Identificar la cónica cuya ecuación polar es $r = \frac{4}{2+\cos\theta}$. Hallar las coordenadas polares de los vértices, y del centro en caso de que existan.

Solución:

Tratemos de llevar la ecuación a la forma $r = \frac{ep}{1+e\cos\theta}$ dividiendo numerador y denominador del segundo miembro entre dos.

$$r = \frac{2}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$$

comparando la última expresión con la ecuación polar de las cónicas, se tiene que la $e = \frac{1}{2}$ por lo que se trata de una elipse horizontal .

De la ecuación dada tenemos que si:

$$\theta = 0 \qquad r = \frac{4}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$\theta = \pi \qquad r = \frac{4}{2+(-1)} = 4$$

por lo que los vértices son $V\left(\frac{4}{3},0\right)$ y $V'(4,\pi)$. Como el centro está sobre el eje polar y es el punto medio del segmento que une estos vértices, sus coordenadas son $C\left(\frac{4}{3},\pi\right)$. Ver la figura 37.

Volviendo a las rectas tangentes, podemos utilizar la elipse anterior para el siguiente..

Ejemplo

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $r = \dfrac{4}{2+\cos\theta}$ en el punto $P\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Solución.

Veamos si *P* se encuentra sobre la curva.

Si $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ y lo sustituimos en la ecuación de la curva , tenemos

$$r = \frac{4}{2+\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{2+\frac{1}{2}} = \frac{8}{5}$$

lo anterior implica que *P* pertenece a la curva.

Ahora encontraremos la pendiente usando el ángulo entre el radio vector y la recta tangente, para lo cual usaremos la ecuación (3).

$$\begin{aligned}\tan\psi &= \frac{r}{r'}\\ &= \frac{\dfrac{4}{2+\cos\theta}}{\dfrac{4\operatorname{sen}\theta}{(2+\cos\theta)^2}}\\ &= \frac{2+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.\end{aligned}$$

sustituyendo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$:

$$\tan\psi = \frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Ahora podemos encontrar la pendiente de la recta tangente. Sea τ el ángulo de inclinación de la recta tangente, entonces usando la expresión (4)

$$\tan\tau = \tan(\psi+\theta) = \frac{\tan\psi + \tan\theta}{1-\tan\psi\tan\theta}$$

$$= \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}}{1-\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\left(\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}}{1-5}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Así la pendiente $m(\theta) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y el punto de tangencia en coordenadas cartesianas es

$$x_1 = r\cos\theta = \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$$

$$y_1 = r\ \operatorname{sen}\theta = \frac{8}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

Por lo que la ecuación cartesiana de la recta tangente es

$y - \frac{4\sqrt{3}}{5} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{4}{5}\right)$ la cual simplificada queda como $2x+\sqrt{3}y-4=0$. Ver la figura 37.

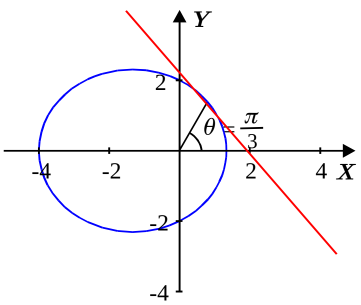


Figura 37

Recordemos que si

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\ \operatorname{sen}\theta$$

entonces la elipse puede verse como la gráfica de la función:

$$\alpha(\theta)=\left(\frac{4\cos\theta}{2+\cos\theta},\frac{4\ \mathrm{sen}\,\theta}{2+\cos\theta}\right)$$

y en ese caso, para encontrar la ecuación de la recta tangente, podemos usar la fórmula (1) para la pendiente, es decir:

$$m(\theta)=\frac{f'(\theta)\tan\theta+f(\theta)}{f'(\theta)-f(\theta)\tan(\theta)}.$$

Donde

$$f(\theta)=\frac{4}{2+\cos\theta}\Rightarrow f'(\theta)=\frac{4\,\mathrm{sen}\,\theta}{(2+\cos\theta)^2}$$

y como $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{8\sqrt{3}}{25}\qquad \text{y}\qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{8}{5}$$

de esta forma

$$m=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{25}\left(\sqrt{3}\right)+\frac{8}{5}}{\frac{8\sqrt{3}}{25}-\frac{8}{5}\left(\sqrt{3}\right)}=\frac{\frac{24}{25}+\frac{8}{5}}{\frac{8\sqrt{3}-40\sqrt{3}}{25}}=-\frac{64}{32\sqrt{3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

resultado que coincide con el obtenido mediante la fórmula (4).

Recordaremos las gráficas de algunas curvas en coordenadas polares, y obtendremos la ecuación de la recta tangente en un punto de la curva.

Lemniscatas. [9]

Las lemniscatas son curvas que tienen forma de aspa de hélice, tienen su centro en el origen y ecuación de alguna de las formas siguientes:

$$r^2=a^2\cos 2\theta \qquad r^2=-a^2\cos 2\theta$$

$$r^2=a^2\,\mathrm{sen}2\theta \qquad r^2=-a^2\,\mathrm{sen}2\theta$$

Por ejemplo la gráfica de

$$r^2=9\cos 2\theta$$

es:

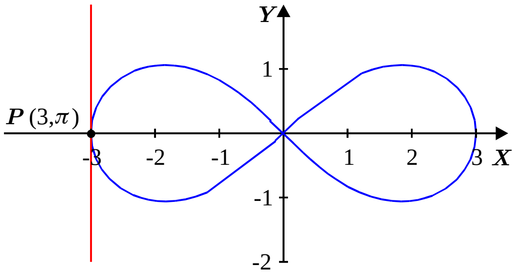


Figura 38

Ejemplo.

Encuentra la ecuación cartesiana de la recta tangente a la lemniscata $r^2 = 9\cos 2\theta$ en el punto $P(3,\pi)$.

Solución.

Empezaremos usando la fórmula (3), para lo cual necesitamos derivación implícita.
Si $r^2 = 9\cos 2\theta$ derivando se tiene

$$2r\frac{dr}{d\theta} = -18\,\mathrm{sen}2\theta$$

$$\mathrm{r}' = \frac{dr}{d\theta} = -\frac{9\,\mathrm{sen}2\theta}{r}$$

entonces

$$\begin{aligned}\tan\psi &= \frac{r}{r'}\\ &= \frac{r}{-\dfrac{9\,\mathrm{sen}2\theta}{\mathrm{r}}}\\ &= -\frac{r^2}{9\,\mathrm{sen}2\theta}\\ &= -\frac{9\cos 2\theta}{9\,\mathrm{sen}2\theta}\\ &= -\mathrm{ctg}2\theta\end{aligned}$$

de esta forma, si usamos la fórmula (4)

$$\tan\tau = \tan(\psi+\theta) = \frac{\tan\psi + \tan\theta}{1-\tan\psi\tan\theta}$$

$$\tan\tau = \frac{-\operatorname{ctg}2\theta + \tan\theta}{1+\operatorname{ctg}2\theta\tan\theta}$$

y como $\theta = \pi$

$$\begin{aligned}\tan\tau &= \frac{-\operatorname{ctg}2\pi + \tan\pi}{1+\operatorname{ctg}2\pi\tan\pi}\\ &= -\operatorname{ctg}2\pi\end{aligned}$$

lo anterior significa que la pendiente no está definida debido a que la $\operatorname{ctg}2\pi$ no está definida. Lo que nos lleva a que la recta tangente es vertical, y su ecuación cartesiana es: $x=-3$. Ver la figura 39.

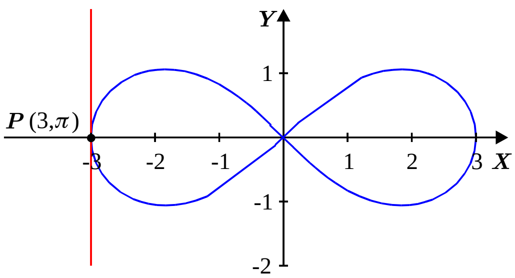


Figura 39

Caracoles. [9]

Los caracoles son curvas que como su nombre lo indica tienen forma de caracol, éstas tienen ecuación de alguna de las formas siguientes:

$$r = a + b\operatorname{sen}\theta \qquad r = a - b\operatorname{sen}\theta$$
$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a - b\cos\theta.$$

Graficaremos algunas de ellas.

Ejemplo.

Consideremos $r = a - b\cos\theta \qquad a,b>0$.
Si sustituimos θ por $-\theta$

$$\begin{aligned}r &= a - b\cos(-\theta)\\ &= a - b\cos\theta\end{aligned}$$

lo que implica que la curva es simétrica respecto al eje *X*.

Usaremos la gráfica de $r=-b\cos\theta$ en el plano θr para poder realizar la de $r=a-b\cos\theta$ en el plano *XY*.

La gráfica de $r=-b\cos\theta$ es:

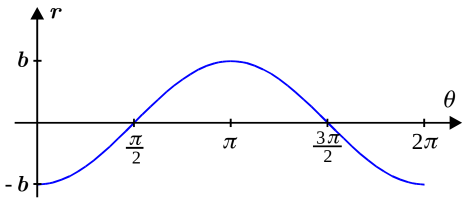


Figura 40

Ahora al trazar la gráfica de $r=a-b\cos\theta$ tendremos tres casos:

Si $a=b$, la grafica de $r=a-b\cos\theta$ quedaría así:

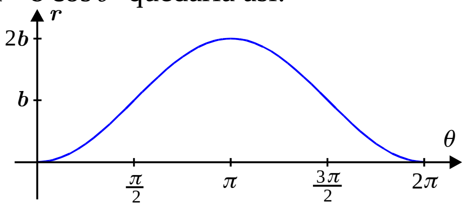


Figura 41

Como observamos en la figura 41, cuando $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, r crece de $r=0$ a $r=b$ y dicho comportamiento está representado en el primer cuadrante del plano *XY* de la gráfica de la figura 42.

Para $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$ r continúa creciendo de $r=b$ hasta $r=2b$, y dicho comportamiento está representado en el segundo cuadrante del plano *XY* de la gráfica de la figura 42.

La simetría de la curva nos permite completar la gráfica.

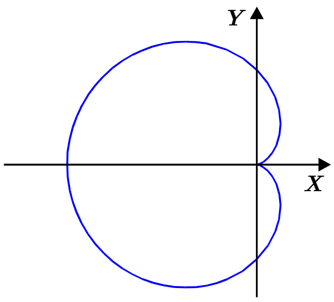


Figura 42

Por su forma a estos caracoles se les da el nombre de cardioides.

Si $a < b$, la gráfica de $r = a - b\cos\theta$ en el plano θr queda así:

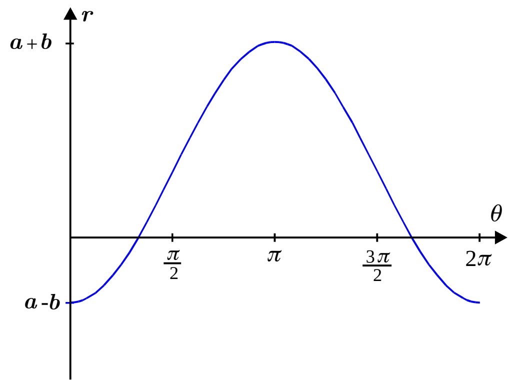


Figura 43

Consideremos θ_0 el punto donde la curva $r = a - b\cos\theta$ corta al eje θ antes de $\frac{\pi}{2}$.

Como observamos en la figura 43, cuando $0 \le \theta \le \theta_0$, r crece pero asume valores negativos, por lo que el comportamiento que describe la curva está ubicado en el tercer cuadrante del plano XY de la gráfica de la figura 44 en lo que corresponde a la mitad bajo el eje X del rizo de la curva.

Cuando $\theta_0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, r sigue creciendo hasta llegar a $r = a$ describiendo la parte de la gráfica de la figura 44 ubicada en el primer cuadrante.

Si $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ r crece en el intervalo $a \le r \le a + b$ describiendo la parte de la gráfica de la figura 44 correspondiente al segundo cuadrante.

Recordemos la simetría y entonces tendremos la gráfica completa.

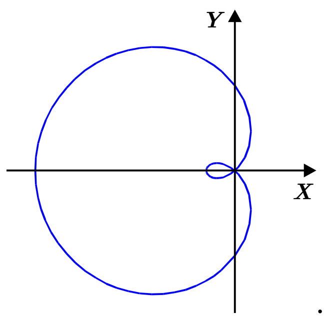


Figura 44

Si $a > b$ la gráfica de $r = a - b\cos\theta$ queda así:

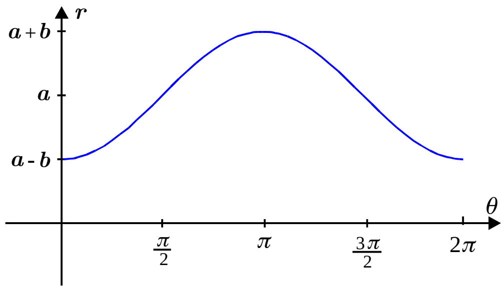


Figura 45

Como observamos en la figura 45, cuando $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, r crece del valor $r = a - b$ hasta $r = a$ describiendo la parte de la gráfica en el primer cuadrante de la figura 46.

Si $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, r sigue creciendo desde $r = a$ hasta $r = a + b$ describiendo la gráfica para el segundo cuadrante de la figura 46, y por la simetría la gráfica estaría completa.

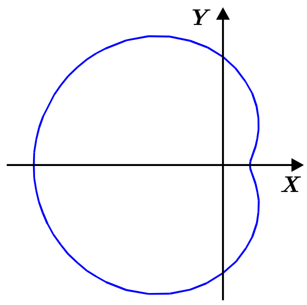


Figura 46

Resumiendo.

Si $a = b$, $r \in [0, 2b]$ y la gráfica corta a los ejes en el origen y en $r = 2b$.
Si $a < b$ existen intervalos en el eje θ donde r es negativa por lo que la gráfica describe un rizo.
Si $a > b$, r toma valores positivos pero no nulos, por lo que la gráfica no corta en el origen y corta en $r = a - b$ y $r = a + b$.

Ejemplos.

1.-Encuentra la ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva $r = 1 + \cos\theta$ en el punto $P\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Solución:

Primero observemos que P pertenece a la curva, ya que al sustituir $\theta = \frac{3\pi}{4}$ tenemos

$$r = 1 + \cos\frac{3\pi}{4}$$
$$r = 1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$r = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Ahora escribamos la función

$$\alpha(\theta) = (r\cos\theta . r\,\text{sen}\,\theta)$$
$$\alpha(\theta) = \left(\cos\theta + \cos^2\theta, \text{sen}\,\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta\right)$$

y encontremos al vector tangente

$$\alpha'(\theta) = \left(-\,\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta, \cos\theta + \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta\right)$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en su forma paramétrica es:

$$\ell(t) = \alpha(\theta_0) + t\alpha'(\theta_0)$$

con

$$\alpha(\theta_0) = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$$
$$\alpha'(\theta_0) = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

así

$$\ell(t) = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + t\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

es la ecuación de la recta tangente.

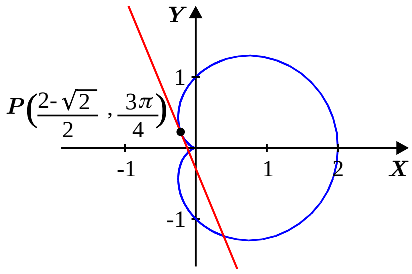


Figura 47

2.- Halla la ecuación cartesiana de la recta tangente a la curva $r = 1 - 2\,\text{sen}\,\theta$ en $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$.

Solución.

Considerando $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, el punto donde la recta tangente corta a la curva es

$$r = 1 - 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_1 = \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$y_1 = \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

Usaremos las fórmulas (3) y (4).

$$\tan\psi = \frac{r}{r'} = \frac{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}{-2\cos\theta}$$
$$= -\frac{1}{2}\sec\theta + \tan\theta$$

si sustituimos el valor de $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$ en la anterior expresión, se tendría:

$$\tan\psi = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right) + \left(-1\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

usando ahora la fórmula (4), tenemos:

$$m_\theta = \tan\left(\psi + \theta\right) = \frac{\tan\frac{7\pi}{4} + \tan\psi}{1 - \tan\frac{7\pi}{4}\cdot\tan\psi}$$

$$= \frac{-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = \frac{4 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 1$$

por lo que la ecuación de la recta tangente es

$$y+\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$$

$$y+\frac{\sqrt{2}}{2}+1=2\sqrt{2}x+x-2-\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}-1.$$

$$\left(2\sqrt{2}+1\right)x-y-4-3\sqrt{2}=0$$

Ver la figura 48.

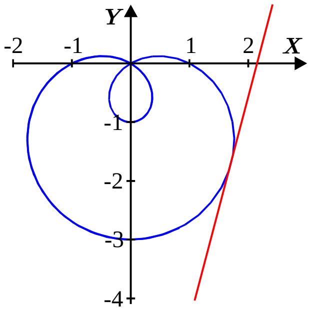


Figura 48

Rosas. [9]

Las rosas son curvas con forma de flor, las ecuaciones de éstas son de la forma:

$$r = a\,\mathrm{sen}\,n\theta$$
$$r = a\cos n\theta \qquad n \in Z \qquad a \in R$$

Si n es impar, la rosa tiene n pétalos, si por el contrario, n es par, tendrá $2n$ pétalos.

Ejemplo.

La gráfica de $r = 3\cos 3\theta$ es:

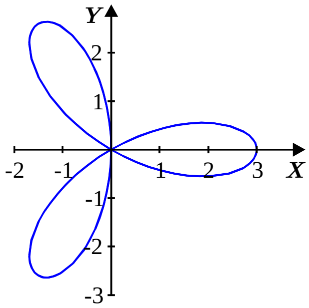


Figura 49

La gráfica de $r = 3 \text{ sen } 4\theta$ es:

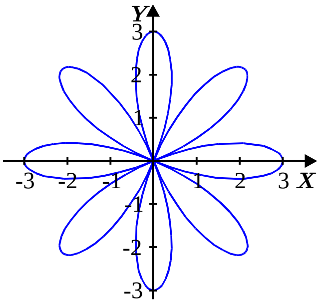


Figura 50

Ejemplo.

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $r = -2\cos 3\theta$ en el punto $P\left(1, \frac{4}{9}\pi\right)$.

Solución:

Observemos que P pertenece a la curva , ya que al sustituir $\theta = \frac{4}{9}\pi$ en la ecuación de la curva, se tiene

$$r = -2\cos 3\left(\frac{4}{9}\pi\right)$$

$$r = -2\cos\frac{4}{3}\pi$$

$$r = -2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Nuevamente usaremos las fórmulas (3) y (4) para encontrar la pendiente.

$$\tan\psi = \frac{r}{r'}$$
$$= \frac{-2\cos 3\theta}{6\,\mathrm{sen}3\theta}$$
$$= -\frac{1}{3}\cot 3\theta$$

la cual para $\theta = \frac{4}{9}\pi$, nos da como resultado

$$\tan\psi = -\frac{1}{3}\cot\frac{4}{3}\pi$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \approx -0.1925$$

y la $\tan\frac{4}{9}\pi \approx 5.6713$ por lo que al usar la fórmula (4) tenemos:

$$m_\theta = \tan(\psi + \theta) = \frac{\tan\frac{4}{9}\pi + \tan\psi}{1 - \tan\frac{4}{9}\pi(\tan\psi)}$$
$$\approx \frac{5.6713 - 0.1925}{1 - (5.6713)(-0.1925)}$$
$$\approx 2.6192$$

la coordenadas cartesianas del punto son aproximadamente

$$x = r\cos\theta = -2\cos\frac{4}{3}\pi\cos\frac{4}{9}\pi \approx 0.1736$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\theta = -2\cos\frac{4}{3}\pi\,\mathrm{sen}\frac{4}{9}\pi \approx 0.9848$$

por lo que la ecuación de la recta tangente es

$$y - 0.9848 = 2.6192(x - 0.1736)$$
$$y = 2.6192x + 0.5301.$$

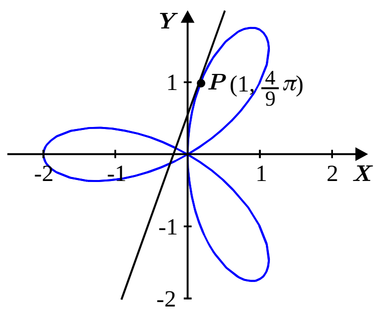


Figura 51

Espirales. [9]

Las espirales son curvas que se enrollan alrededor del origen un número infinito de veces, de tal manera que r aumenta (o disminuye) a medida que θ varía.

Espiral de Arquímedes.

Esta es una de las más conocidas y tiene por ecuación alguna de las formas siguientes:

$$r = a\theta \qquad \theta \geq 0, \qquad a > 0$$
$$r = a\theta \qquad \theta \leq 0, \qquad a > 0$$

la gráfica de $r = a\theta$ en el plano XY es: $\theta \geq 0$

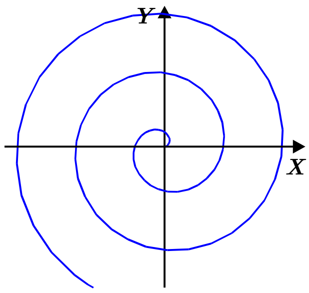


Figura 52

$\theta \leq 0$

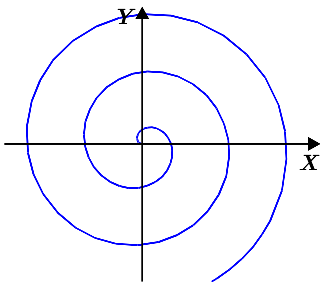


Figura 53

Ejemplo.
Encuentra la ecuación paramétrica de la recta tangente a la espiral de Arquímedes $r = 6\theta$ en el punto $P\left(2\pi, \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución:

Es fácil ver que el punto pertenece a la espiral, así que omitiremos ese proceso, empezaremos por escribir a la función $\alpha(\theta)$ cuya imagen es la gráfica de la espiral $r = 6\theta$.

$$\alpha(\theta) = (6\theta\cos\theta, 6\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) \Rightarrow \alpha'(\theta) = (-6\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + 6\cos\theta, 6\theta\cos\theta + 6\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Ahora si sustituimos el valor de $\theta = \frac{\pi}{3}$, el vector tangente a la curva en el punto P es:

$$\alpha'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(3 - \sqrt{3}\pi, 3\sqrt{3} + \pi\right)$$

al sustituir en $\alpha(\theta)$ tenemos

$$\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\pi, \sqrt{3}\pi\right)$$

así la ecuación buscada es:

$\alpha(t) = \left(\pi, \sqrt{3}\pi\right) + t\left(3 - \sqrt{3}\pi, 3\sqrt{3} + \pi\right)$. Ver la figura 54.

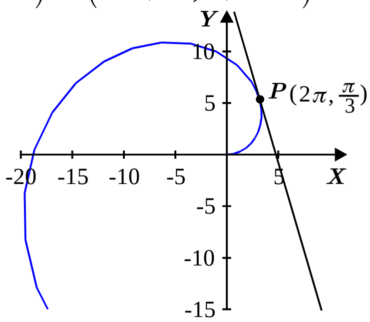


Figura 54

Concoides de Nicómedes. [9]

Nos referimos ahora a una familia de curvas que tienen por ecuación:

$$r = a + b\sec\theta \qquad a, b > 0.$$

Consideremos para la gráfica de esta curva su simetría respecto al eje X y dibujemos en el plano θr la gráfica de $r = b\sec\theta$.

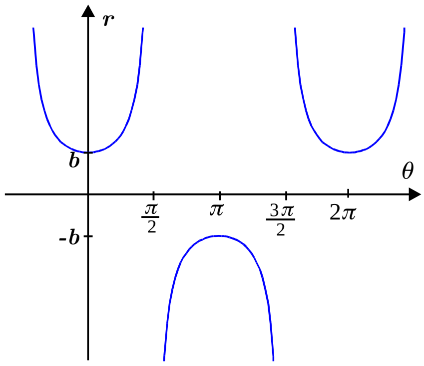


Figura 55

Ahora al trazar la gráfica de $r = a + b\sec\theta$ tendremos tres casos:

Si $a = b$, la gráfica de $r = a + b\sec\theta$ queda así:

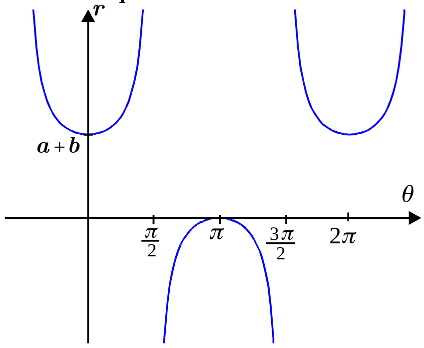


Figura 56

Observemos que si $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ entonces $r \in [a + b, \infty)$. Este comportamiento describe la parte de la gráfica derecha, ubicada en el primer cuadrante. Figura 57.

Si $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ entonces $r \in (-\infty, 0]$ y se describe la parte izquierda de la gráfica del cuarto cuadrante. Figura 57.

Si $\pi \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$ entonces $r \to -\infty$ por lo que la gráfica se ubica en el primer cuadrante (parte izquierda), ya que *r* toma valores negativos.

Finalmente, cuando $\dfrac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$ tenemos la parte derecha de la gráfica del cuarto cuadrante.

La gráfica correspondiente en el plano *XY*, es:

$$a = b$$

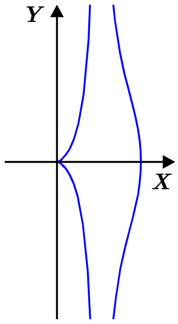


Figura 57

Para el caso de $a > b$ la gráfica de $r = a + b\sec\theta$ queda así:

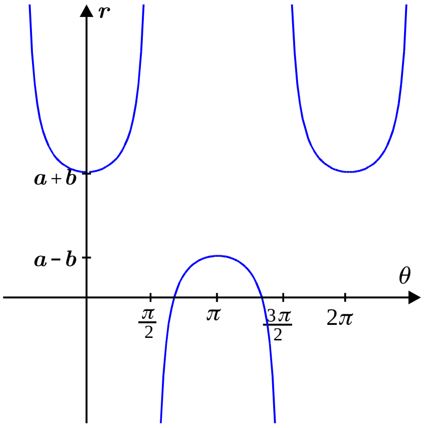


Figura 58

Observemos que cuando $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ r toma valores positivos y negativos, como sucedió en el caso de los caracoles, y esto produce que la gráfica describa un rizo. Vea la figura 59.

$a > b$

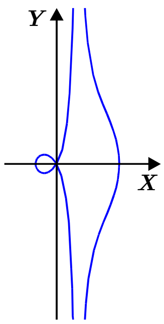


Figura 59

Para el caso $a < b$, la gráfica de $r = a + b\sec\theta$ queda así:

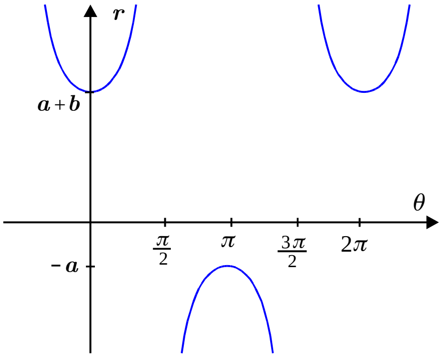


Figura 60

y observamos que r nunca toma el valor de cero, por lo que la gráfica no toca el origen. Vea la figura 61

$a < b$

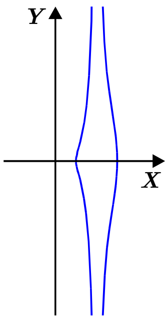


Figura 61

Ejemplo.
Dibuja la gráfica de la curva $r = 1 + \sec\theta$ y encuentra la ecuación cartesiana de la recta tangente a esta curva en $P(2,0)$.

Solución:
Nuevamente notemos que P pertenece a la concoide y procedamos a encontrar a la pendiente de la recta tangente mediante las fórmulas (3) y (4).

$$\tan\psi = \frac{r}{r'} = \frac{1+\sec\theta}{\sec\theta\tan\theta} = \frac{\dfrac{\cos\theta+1}{\cos\theta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\cos\theta+1}{\tan\theta}.$$

Recordemos que ψ representa el ángulo entre el radio vector del punto y la recta tangente, y de acuerdo a la expresión anterior, $\tan\psi$ no está definida para $\theta = 0$. Podemos concluir ayudándonos de la figura, que la recta tangente es vertical y su ecuación es:

$x = 2.$

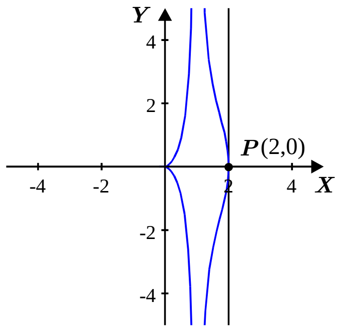


Figura 62

Referencias Bibliográficas.

[1] R. Johnson; *Cálculo con Geometría Analítica*, C.E.C.S.A. ,2ª edición.

[2] J. E. Marsden y A. Tromba; *Cálculo Vectorial*, Pearson, 4ª edición.

[3] M. Spivak; *Calculus. Cálculo Infinitesimal*, Reverté, S. A. 2ª edición

[4] E. De Oteyza y E Lam; *Geometría Analítica,* Pearson. Prentice may, 2ª edición.

[5] W.Granville; *Cálculo Diferencial e Integral*, Limusa, 6ª edición.

[6] CH. Lehmann; *Geometría Analítica*, U.T.E.H.A, 2ª edición.

[7] H. Arizmendi y M. Carrillo; *Cálculo*, C.E.C.S.A, 1ª edición.

[8] E. De Oteyza y E. Lam, *Geometría Analítica y Trigonometría,* Prentice Hall, 1ª edición.

[9] C. Hernández, E. Lam y E. de Oteyza, *Vínculos Matemáticos "Coordenadas Polares",* Publicaciones del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM, 1993.

[10] J. Stewart; *Cálculo de una variable,* Internacional Thomson Editores, 3ª edición.

[11] E. Swokowski; *Introducción al cálculo con geometría analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, 2ª edición.

[12] Leithold; *El cálculo con geometría analítica*, Harla, 5ª edición.