UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“Descripción de experiencias en el diseño de material didáctico”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA

DORIS GUADALUPE DEL CARMEN CETINA VADILLO

DIRECTOR DE TESIS
DRA. MARÍA DE LA PAZ ÁLVAREZ SCHERER

México D.F. 2006

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
   Cetina
   Vadillo
   Doris Guadalupe del Carmen
   56 59 32 34
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   071553429

2. Datos del tutor
   Dra
   María de la Paz
   Álvarez
   Scherer

3. Datos del sinodal 1
   M en C
   Francisco de Jesús
   Struck
   Chávez

4. Datos del sinodal 2
   M en C
   Luz María
   Marván
   Garduño

5. Datos del sinodal 3
   Mat
   Leobardo
   Fernández
   Román

6. Datos del sinodal 4
   Mat
   Anne Marie Pierre
   Alberro
   Semerena

7. Datos del trabajo escrito
   Descripción de experiencias en el diseño de material didáctico
   104 p
   2006

A la memoria de mis padres

Índice

Introducción

Es un hecho que la enseñanza de las matemáticas en México es deficiente, no tenemos más que ver los altos índices de reprobación en cualquier nivel de la educación básica y media superior. Para muestra un botón. ANEXO 1.

En las últimas dos décadas, la SEP ha tomado una serie de medidas con intención de resolver este problema, entre otras:

a) La Reforma educativa del 93

b) La creación del Programa Nacional de Carrera Magisterial cuyos objetivos generales son, coadyuvar a elevar la calidad de la educación nacional, estimular a los profesores de educación básica que obtienen mejores logros en su desempeño y mejorar las condiciones de vida, laborales y sociales de los docentes de educación básica.

c) Se dio un gran impulso a las escuelas Telesecundarias. Fueron creadas en 1968, ubicándose principalmente en zonas rurales, buscando que los egresados de las primarias puedan cursar el siguiente nivel de la educación básica, sin tener que recorrer grandes distancias. Actualmente en todo el país se cuenta con casi 16 mil centros educativos de esta modalidad que son atendidos por más de 55 mil maestros y atiende a más de un millón de alumnos.

d) A partir de 1997 la SEP tomó la decisión de que la revisión de los libros de texto para secundaria se hiciera por especialistas, dando como resultado una mejor calidad en los materiales para maestros y alumnos.

e) Se han hecho múltiples publicaciones para apoyar la enseñanza de las matemáticas: Libro para el Maestro, Ficheros de actividades didácticas, la serie EMAT (Enseñanza de las matemáticas con tecnología), la Biblioteca para la Actualización del maestro, las Guías de estudio y lecturas para el Programa Nacional de Actualización Permanente, entre otras.

Otras instituciones han puesto en práctica programas encaminados a mejorar la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo:

f) Programa coordinado por la Academia Mexicana de Ciencias, “La ciencia en tu escuela”: Su objetivo es mejorar la actitud de los profesores de educación básica y media hacia las matemáticas y las ciencias, así como la actualización de los conocimientos en estas disciplinas con el apoyo de la Secretaría de Educación Pública.

g) La Sociedad Matemática Mexicana ha impulsado varias acciones en este sentido. Por ejemplo, los Concursos de Diseño de Problemas para secundaria y bachillerato, así como publicaciones de diversa índole.

h) El Instituto de Matemáticas, la Sociedad Matemática Mexicana, la Academia Mexicana de Ciencias y prácticamente la mayoría de las universidades tienen en su portal electrónico una sección de apoyo a maestros de nivel básico.

i) Se ha dado a las olimpiadas de matemáticas un impulso con la publicación de diversos materiales al respecto.

A pesar de esto no se ha podido mejorar la enseñanza de las matemáticas. Las razones son muchas y diversas. Ser maestro es una profesión mal pagada y son pocas las personas que pudiendo elegir una profesión mejor renumerada y con más prestigio social, eligen ser maestros. Es una profesión difícil y la preparación que se da a los aspirantes a maestros suele ser deficiente (ver ANEXO 2 con el porcentaje de docentes de preescolar y primaria que cumplen con el estándar de escolaridad en el país). Por otro lado las prácticas malsanas en la dinámica de cursos y diplomados que se imparten a maestros para que puedan acreditar la carrera magisterial es otro de los factores que propician la falta de preparación en los maestros; es común que en dichos cursos se le dé un peso desproporcionado a la asistencia, cursos que los maestros terminan acreditando a pesar de no haber adquirido los conocimientos requeridos.

Ante la imposibilidad de resolver estas cuestiones, porque no está en nuestras manos hacerlo, de lo que sí estamos convencidos es que los que desempeñamos el papel central en la enseñanza de las matemáticas somos los profesores, es nuestra la responsabilidad de diseñar situaciones didácticas que pongan en juego los recursos de los niños, de imaginar qué tipo de situaciones favorecerán la reflexión de los alumnos en relación con el tema que queremos abordar. No se puede pretender que cada maestro haga sus propios materiales por lo que es necesario proporcionar modelos de trabajo y materiales que permitan realizar un trabajo creativo en el aula y que se puedan adaptar a las situaciones concretas de cada uno. Creo que una forma de mejorar la enseñanza de las matemáticas es compartir las experiencias y materiales que se han diseñado y aplicado para apoyar el trabajo en el aula.

A continuación presento el trabajo que un grupo de maestros hemos desarrollado desde hace varios años en diseño y aplicación de materiales, así como los resultados obtenidos en cada caso.

CAPÍTULO 1
Primera aproximación

Laboratorio de matemáticas:

Antes de la Reforma educativa del 93, el programa de matemáticas además de ser muy extenso y estar dividido en aritmética, álgebra, geometría y trigonometría como entes aislados e independientes uno del otro, tenía como marco de referencia la enseñanza tradicional, con esto entendemos que las matemáticas se planteaban como disciplina cerrada de conocimientos que el alumno debía adquirir a través de la repetición de algoritmos y mecanismos estructurados por el docente. La resolución de problemas, desde esta perspectiva, se presentaba al alumno al terminar determinado tema, de tal manera, que las operaciones que se requerían para su solución estaban indicadas en el texto del problema y eran en general las que previamente se habían trabajado en clase. Generalmente el docente planteaba y resolvía los problemas y validaba la solución de la misma. Como resultado de esto los estudiantes, en general, aprendían los contenidos en forma memorística, repetían y aplicaban mecánicamente, sin entender lo que estaban haciendo. De alguna manera, este es el esquema con el que nos formamos y modificarlo no fue tarea fácil.

Dentro de este esquema, en 1988, iniciamos bajo mi coordinación, un proyecto para establecer un Laboratorio de Matemáticas en la secundaria del Colegio Madrid, en él se desarrollaron actividades desde una perspectiva más lúdica que la que habitualmente se podía desarrollar en el salón de clases. El material producido para el laboratorio fue de cuatro tipos:

PRIMERO DE SECUNDARIA

PARA INTRODUCIR UN TEMA	APOYO A UN TEMA YA VISTO EN CLASE	RECREATIVAS	INTERDISCIPLINARIAS
◦ Numeros enteros ◦ Coordenadas rectangulares ◦ Relaciones y producto cartesiano	◦ Mínimo común múltiplo ◦ Representación gráfica de racionales ◦ Suma de racionales ◦ Fracciones equivalentes ◦ Operaciones con números enteros	◦ Carrera a 20 ◦ Cuadrado mágico ◦ Proyección de la película *Donald en el país de las matemáticas* ◦ Construcción de poliedros regulares	◦ Números mayas ◦ Representación e interpretación de datos

SEGUNDO DE SECUNDARIA

PARA INTRODUCIR UN TEMA	APOYO A UN TEMA	RECREATIVAS	INTERDISCIPLINARIAS
◦ Teorema de Pitágoras ◦ Simetría ◦ Lenguaje algebraico ◦ Suma y resta de polinomios ◦ Ecuaciones de 1er grado ◦ Rectas en el plano	◦ Dominó de fracciones equivalentes ◦ Operaciones con polinomios (Fichas Eduke) ◦ Lenguaje algebraico y valor numérico de una expresión algebraica (Fichas Eduke)	◦ Pentominós ◦ Mensajes en clave ◦ Hexaflexágono	◦ Modelo matemático de crecimiento de poblaciones

Uno de los logros más importantes fue facilitar la comprensión de los temas del programa que eran abordados en el laboratorio. Sin embargo, cabe mencionar que las condiciones en las que se impartió el laboratorio de matemáticas eran difíciles de repetir en otro ámbito, ya que el apoyo del Colegio Madrid para este proyecto fue inusitado. Se aumentó una hora más a las 5 horas obligadas por la SEP y contamos con un salón acondicionado especialmente para que los alumnos trabajaran en equipo. Las sesiones de laboratorio se impartían a medio grupo con lo cual se facilitaba enormemente el desarrollo de las prácticas.

El laboratorio funcionó para los tres grados de secundaria. Elaboramos dos manuales de Prácticas para 1° y 2° de secundaria y algunas prácticas aisladas para 3°, ya que en general el trabajo de laboratorio para este grado se llevó a cabo en la computadora con el programa Math Blaster Mystery™ que abarcaba diferentes temas de aritmética, álgebra y geometría correspondientes a los temas de tercero.

Ya con el laboratorio funcionando para los tres grados, vino la Reforma Educativa del 93, en el *CAPÍTULO 2. Segunda aproximación*, se describe lo que se hizo para abordarla.
El laboratorio de matemáticas funcionaba ya en los tres grados de secundaria y el trabajo realizado consistía en la creación de nuevo material o en el rediseño de aquellas actividades cuyo funcionamiento se detectaba deficiente. El objetivo de éstas, como ya se mencionó, era principalmente apoyar el aprendizaje de los contenidos del programa. Cada profesor llevaba una bitácora de cada práctica con cada grupo, cosa que hacía relativamente fácil esta labor. La creación de nuevas actividades, su puesta en práctica, su análisis y rediseño fue una constante a lo largo de esos años (1988-1993).

A continuación presento dos ejemplos de las actividades diseñadas en los manuales: Cuadrados mágicos para 1° de secundaria y Productos notables para 3°.

Laboratorio de Matemáticas
Primero de secundaria
CUADRADOS MÁGICOS

NOMBRE:_______________________________ GRUPO:________
SECCIÓN:___________ N° LISTA:_____

PROFESOR:____
FECHA:___________

TOTAL DE ACIERTOS: 30 ACIERTOS OBTENIDOS: _______ CALIFICACIÓN:_____

OBJETIVO: El alumno aprenderá a construir cuadros mágicos y algunas propiedades de estos.

I.- NOTACIÓN.

Diagonal izquierda

1er Renglón

2do Renglón

3er Renglón

Diagonal derecha

1ª columna | 2ª columna | 3ª columna

II.- Suma los números de cada renglón, columna y diagonal del siguiente cuadrado y anota los resultados en el lugar correspondiente.

103	19	79
43	67	91
55	115	31

Suma del primer renglón.__________
Suma del segundo renglón _________
Suma del tercer renglón.___________
Suma de la primera columna._______
Suma de la segunda columna._______
Suma de la tercera columna._________
Suma de la diagonal derecha.________
Suma de la diagonal izquierda._______

Llamaremos **Cuadrado Mágico** a aquel cuya suma de todos los renglones, columnas y diagonales sea la misma.

III.- Verifica si los siguientes son cuadrados mágicos. En caso afirmativo escribe la suma debajo de cada uno.

7	2	16	9
12	13	3	6
1	8	10	15
14	11	5	4

____

13	6	11
8	10	12
9	14	7

____

48	6	36
18	30	42
24	54	12

____

IV.- Método para construir cuadrados mágicos que tengan un número impar de cuadrados:
Construiremos un cuadrado mágico con los números del 1 al 25.
Escribe el primer número en la casilla central del primer renglón

		1		

Llenaremos los siguientes espacios, moviéndonos en diagonal hacia la derecha y hacia arriba, excepto en los siguientes casos:

1) Si al moverte en diagonal te sales del cuadrado puedes quedar en una de las siguientes dos posiciones:

    a) Arriba de una columna, en cuyo caso debes colocar el número en el extremo opuesto de la misma (en el siguiente cuadrado el número 2 ejemplifica este caso)
    b) A la derecha de un renglón, en cuyo caso debes colocar el número en el extremo opuesto de dicho renglón (en el siguiente cuadrado el número 4 ejemplifica este caso).

		1		
4				
				3
			2	

2) Continua trabajando en diagonal hacía la derecha y hacia arriba. Cuando llegues a una posición que ya ha sido ocupada, escribe exactamente abajo del último número que escribiste, como se hizo en el caso de los números 6 y 11.

		1	8	
	5	7		
4	6			
10				3
11			2	9

3) Continuando con este proceso, llegamos con el número 15 a la esquina superior derecha del cuadrado. En este caso debemos escribir el número 16 exactamente abajo del 15 como lo indica la siguiente figura.

17		1	8	15
	5	7	14	16
4	6	13		
10	12			3
11			2	9

4) Continuando con el proceso llegamos al siguiente cuadrado:

17		1	8	15
	5	7	14	16
4	6	13	20	
10	12	19	21	3
11	18		2	9

5) Así, finalmente obtenemos el cuadrado:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Verifica que es un cuadrado mágico. ¿Cuál es su suma?_________________

V.- Verificando el proceso anterior, completa los siguientes cuadrados y verifica que sean mágicos. Escribe la suma debajo de cada uno.

	1	
3		
		2

____

		8		
				10
			9	

____

VI.- El siguiente cuadrado mágico A de 3 x 3 se ha formado con los números naturales del 1 al 9. La suma de cada uno de sus renglones, columnas y diagonales es 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Cuadrado A

A partir de este cuadrado A se pueden construir otros cuadrados (sin utilizar el método que aprendiste en las páginas anteriores) tales que la suma de sus renglones, columnas y diagonales sea 15. Estos nuevos cuadrados tienen la propiedad de tener los mismos números, en cada renglón y en cada columna, que al cuadrado A. (Los números pueden estar en desorden.

Completa los siguientes cuadrados fijándote en las columnas y renglones del cuadrado A: **No utilices el método que aprendiste en páginas anteriores**

6		
2		4

	3	
6		2

		8
		1
	7	

		2
8	3	

		2
	5	
	1	

		3
	1	8

Conclusión: Dado un cuadrado mágico cualquiera podemos construir, a partir de este, otros cuadrados mágicos alterando el orden de los elementos de sus renglones y columnas

VII.- Construye un cuadrado mágico de 3 x 3 del 15 al 23.

Con base a la información dada en el párrafo anterior construye otros tres cuadrados mágicos con las cifras del 15 al 23

VIII.- Construye un cuadrado mágico de 3 x 3 utilizando los números del 3 al 11

Cuadro B

1) Llena cada uno de los siguientes cuadrados sumando el numero que se indica **a cada uno de los elementos del cuadrado mágico B**

Suma 10

Suma 4

Suma 5

¿Los cuadrados anteriores son mágicos? ____________________

2) Llena cada uno de los siguientes cuadrados, efectuando la operación que se indica en negritas a cada uno de los elementos del cuadrado B

Multiplica por 2

Restar 6

Restar 10

¿Los cuadrados anteriores son mágicos? ____________________

Conclusión: Sí tenemos un cuadrado mágico cualquiera, y a cada uno de sus elementos le sumamos, restamos o multiplicamos por un mismo número, obtendremos otro cuadrado mágico.

LABORATORIO DE MATEMÁTICAS
Tercero de secundaria

PRODUCTOS NOTABLES

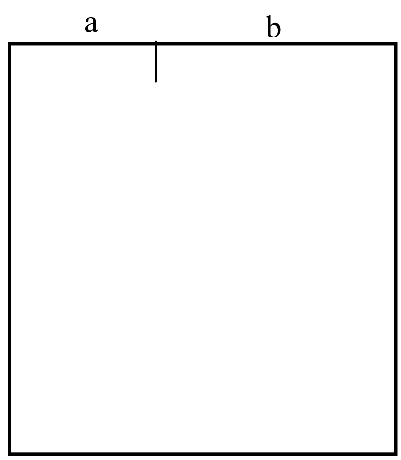
Nombre_________________________________ Grupo_____ Sección_____
Profesor_________________________________ Fecha______
Total de aciertos: 30 Aciertos obtenidos_____________ Calificación_____

OBJETIVO: Introducir el conocimiento de los productos $(a+b)^2$ y $(a+b)(a-b)$ con un modelo geométrico

MATERIAL: escuadras, tijeras, pegamento y colores

CUADRADO DE UN BINOMIO $(a+b)^2$

1. El siguiente cuadrado mide de lado $a+b$. Para fines prácticos consideramos $a=3\ cm$ y $b=5\ cm$



Cuadrado 1

En una hoja cuadriculada dibuja, recorta e ilumina de diferentes colores las siguientes figuras geométricas:

a) Un cuadrado de lado $a=3\ cm$

b) Un cuadrado de lado $b=5\ cm$

c) Dos rectángulos de ancho $a=3\ cm$ y largo igual a $b=5\ cm$

Pega estas figuras sobre el Cuadrado 1 de manera que lo cubran perfectamente.

Conclusión: El área del Cuadrado 1 es la misma que la suma de las áreas de las cuatro figuras que recortaste y pegaste.

Traduce a lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

a) Área del cuadrado cuyo lado es $a+b$ _________________

b) Área del cuadrado cuyo lado es a ___________________

c) Área del cuadrado cuyo lado es b ___________________

d) Área del rectángulo de ancho a y largo b ______________

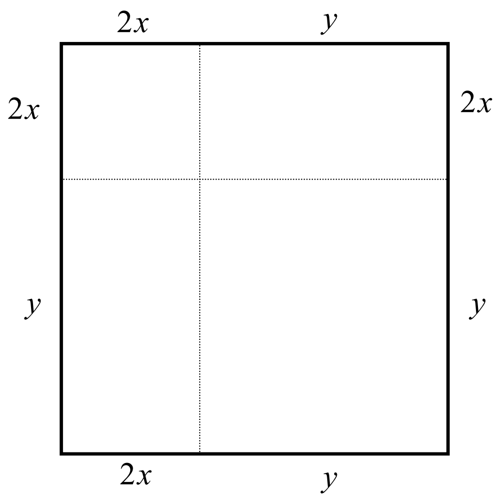
Por lo tanto la igualdad de las áreas la podemos expresar como:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

y reduciendo términos semejantes obtenemos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Consideremos ahora un cuadrado cuyo lado es $2x+y$. Su área es $(2x+y)^2$ y la ilustramos a continuación:



Cuadrado 2

Ilumina de colores distintos cada parte del cuadrado 2. Este cuadrado está formado por:

Un cuadrado de lado_____ cuya área es_____

Un cuadrado de lado_____ cuya área es_____

Dos rectángulos de largo____ y de ancho_____ dónde el área de cada uno es_______

Por lo tanto: $(2x+y)^2 = 4x^2 + 2xy + 2xy + y^2$

Reduciendo términos semejantes obtenemos:

$(2x+y)^2 =$ _____________________

Recuerda que el área de una figura geométrica es igual a la suma de las áreas de las figuras geométricas que lo conforman.

3. $(3x+2y)^2$ es el área de un cuadrado cuyo lado es $3x+2y$. Represéntalo a continuación:

Por lo tanto $(3x+2y)^2 =$ _______________

4. $(5+4y)^2$ representa el área de un cuadrado cuyo lado es________. Iliústralo a continuación:

Por lo tanto $(5+4y)^2 =$ _______________

5. Representa geométricamente el área de los siguientes cuadrados:

a) $(2a+3b)^2 =$

b) $(x+5a)^2 =$

c) $(2y+b)^2 =$

d) $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2 =$

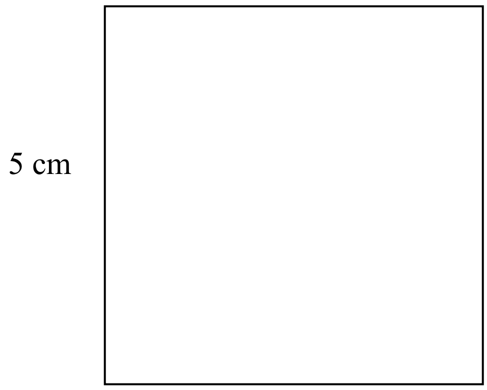
e) $\left(\frac{3}{4}m+\frac{1}{3}\right)^2 =$

Estos productos se conocen como **Cuadrado de un binomio**.

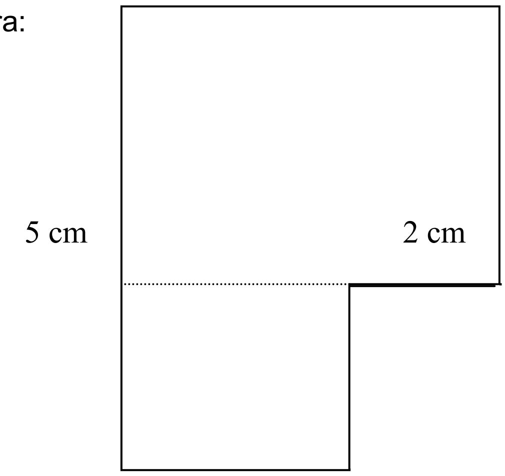
Regla: El cuadrado de un binomio $(a+b)^2$ es igual a $a^2+2ab+b^2$

PRODUCTO DE BINOMIOS CONJUGADOS $(a+b)(a-b)$

6. El siguiente cuadrado tiene $5cm$ de lado. ¿Cuál es su área? _____________



Si en una esquina de este cuadrado recortamos un cuadrado de $2cm$ obtenemos la siguiente figura:



¿Cuál es el área del cuadrado que se recortó? ___________

¿Cuál es el área de la figura que queda? ________________

Observa que el área de la figura anterior es la del cuadrado grande de lado $5cm$ menos las del cuadrado pequeño de lado $2cm$.

7. En una hoja cuadriculada recorta un cuadrado de lado x (supongamos $x=8cm$). El área de este cuadrado es x^2.

En una esquina recórtale un cuadrado de lado y ($y=3\ cm$).

El área de este cuadrado es y^2.

La figura que quedó tiene la siguiente forma:

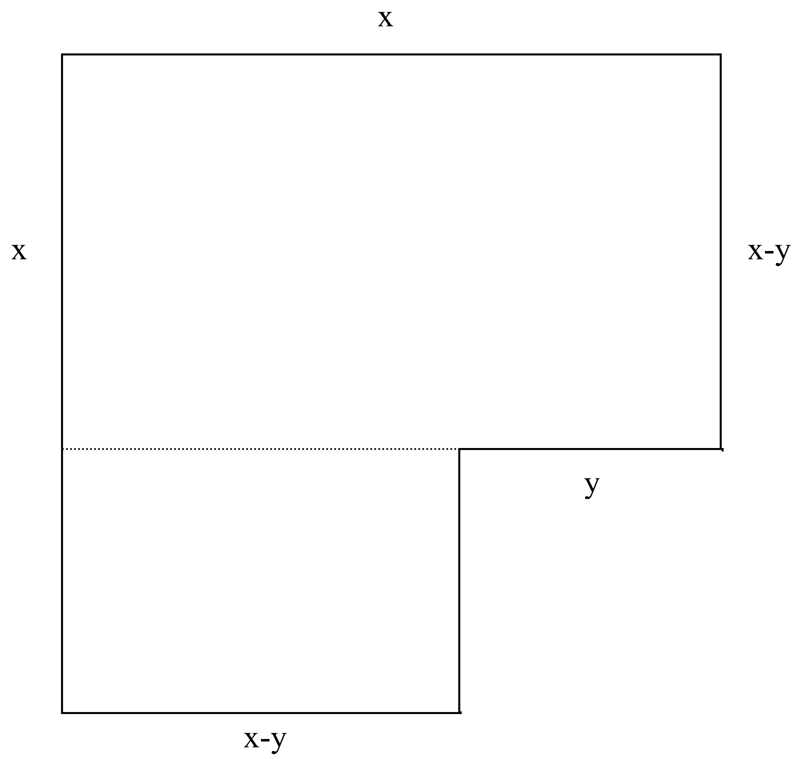
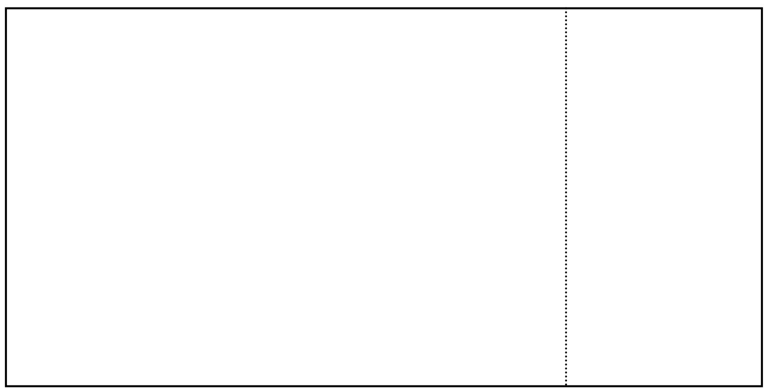


Figura 1

y su área es $x^2 - y^2$.

De la figura que obtuviste recorta el rectángulo de menor área (sobre la línea punteada) y pégalos ambos sobre el siguiente rectángulo de manera que lo cubra perfectamente:



Las medidas de los lados de este rectángulo son:

Largo: $x + y$; Ancho: $x - y$

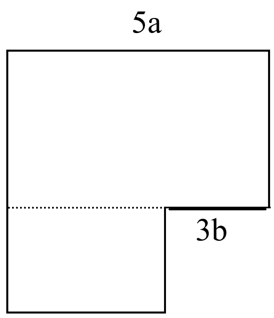
Observa que las figuras 1 y 2 están formadas por las mismas figuras geométricas y, por lo tanto, tienen la misma área.

¿Cuál es el área de la figura 1? _______________

¿Cuál es el área de la figura 2? _______________

Por consiguiente: $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

8. Veamos otro ejemplo: El área de la siguiente figura es $25a^2-9b^2$ lo que significa geométricamente que a un cuadrado cuyo lado es $5a$ se le quita otro cuadrado cuyo lado es $3b$.



Si cortamos por la línea punteada y pegamos como en el ejemplo anterior. Obtenemos el siguiente rectángulo cuyos lados miden $5a+3b$ de largo por $5a-3b$ de ancho.

El área de este rectángulo es _________________.

Como las dos figuras anteriores están constituídas por las mismas figuras, sus áreas son iguales, por lo tanto $(5a+3b)(5a-3b)=25a^2-9b^2$

Regla: El producto de binomios conjugados $(x+y)(x-y)$ **es igual a** x^2-y^2

9. Escribe el resultado de los siguientes productos:

a) $(a+b)(a-b)=$

b) $(2x+3y)(2x-3y)=$

c) $(a+\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2})=$

d) $(4a+\frac{2}{3}b)(4a-\frac{2}{3}b)=$

e) $(x+6y)(x-6y)=$

CAPÍTULO 2
Segunda aproximación

A partir de 1993 los programas de estudio diseñados para la educación básica y bachillerato rompen con la enseñanza tradicional y se plantea en ellos que el aprendizaje de las matemáticas no puede reducirse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas ni a la aplicación mecánica de técnicas y procedimientos, en ellos se señala la necesidad de desarrollar habilidades de descubrimiento.

Para lograr lo anterior, se sugiere, como posible estrategia didáctica, basar el curso en la resolución de problemas que permitan al estudiante explorar y descubrir.

La experiencia del laboratorio de Matemáticas (independiente de las clases "tradicionales") estaba lo suficientemente consolidada y decidimos extenderla al salón de clases. Se seleccionó un grupo de primero de secundaria. Nuestra propuesta partió de la conformación de grupos operativos de trabajo. El grupo de 40 alumnos aproximadamente, se dividió en equipos de 4 integrantes. En cada sesión de clase se entregaba a cada equipo un problema que habrían de resolver discutiendo entre ellos. Posteriormente se pasaba a una etapa de "socialización" en la que cada equipo proponía su solución al resto del grupo. La resolución de problemas así planteada, tenía el objetivo de crear en el alumno la necesidad de adquirir conocimientos nuevos, cuando al enfrentarse a un problema, que le resultase significativo, descubriera que los que tenía, no le eran suficientes.

Esta propuesta no contemplaba solamente la adquisición de habilidades básicas habitualmente reconocidas para la enseñanza de las matemáticas, sino además, algunas otras de carácter general y formativo como:

- Aprender a argumentar en forma oral y escrita de manera clara y concisa.
- Aprender a escuchar los argumentos ajenos.
- Contrastar con espíritu crítico los argumentos ajenos con los propios.

Estas tres últimas habilidades que así escritas parecen sencillas, se fueron logrando gracias a la práctica diaria y a varias dinámicas que se establecieron con el grupo durante la primera semana de clases con el objetivo de la conformación de un *contrato de trabajo*, construido y discutido en cada uno de sus puntos por todo el grupo (ANEXO 3).

Diseñamos también una serie de actividades que se trabajaron en todo el grupo en forma individual, que si bien estaban a un nivel de ejercitación, la forma novedosa como se presentaban las hacía atrayentes para los estudiantes (ANEXO 4).

La diferencia entre problema y ejercicio fue punto de mucha discusión, en esta propuesta entendemos por problema una situación significativa para el estudiante, que le represente un reto intelectual y que implica necesariamente una reestructuración conceptual, mientras que un ejercicio es esencialmente un procedimiento necesario para la apropiación por parte del alumno de ciertas técnicas o habilidades que en un momento dado tendrá que usar de manera automática. Buscamos desarrollar en el alumno una actitud reflexiva ante la aplicación de dichas técnicas, es decir, ante una situación determinada en la que hay varias opciones, que reconociera de alguna manera cuál era la técnica que le resultara más adecuada.

Partimos de la premisa de que el alumno es capaz de construir su conocimiento en un proceso de búsqueda e interacción con sus iguales, siempre y cuando el profesor seleccione y oriente adecuadamente la actividad, sin embargo hay contenidos que por su dificultad, o simplemente porque a nosotros como docentes no se nos ocurrió como, no los pudimos presentar con esta metodología. En estos casos, para optimizar algunos procedimientos los presentamos en forma expositiva. Por ejemplo: Cómo efectuar ciertos trazos geométricos (paralela a una recta que pase por un punto dado, perpendicular a una recta que pase por un punto dado…)

El trabajo estuvo encaminado a cumplir tres objetivos.

a) Recopilar problemas que cubrieran en su totalidad los temas de 1° de secundaria (ANEXO 5)
b) Buscar la manera de transmitir la propuesta a otros maestros de la secundaria. Ante la imposibilidad de describir el trabajo realizado en 200 horas de clase, lo que hicimos fue discutir los objetivos que se perseguían con la presentación de un problema, de manera que, con una lista amplia y variada de éstos y con la descripción detallada de algunas dinámicas, cada profesor pudiese seleccionar los problemas que le convinieran según los objetivos que tuviera en mente.
c) Buscar que los alumnos, a través de la resolución de problemas, adquirieran las habilidades básicas necesarias para el aprendizaje de las matemáticas y algunas otras de carácter general y formativo como las mencionadas anteriormente.

El curso escolar completo se trabajó con esta dinámica. El verdadero problema fue seleccionar o inventar los problemas que cumplieran con las características que necesitábamos, a saber: una situación significativa para el estudiante, que le represente un reto intelectual y que implica necesariamente una reestructuración conceptual y que además cubriera los temas del programa de 1° de secundaria.

Visto a la distancia puedo decir que la experiencia fue muy enriquecedora, a pesar de la enorme cantidad de trabajo que representó para el maestro que estaba a cargo del grupo y para todo el equipo de trabajo que acompañábamos haciendo observaciones de por lo menos tres de las cinco clases de la semana. Puedo decir que entre los logros de esta etapa está el haber creado en los alumnos una gran disposición a resolver problemas, una capacidad para transmitir sus resultados tanto en forma oral como escrita y la consolidación de un grupo de discusión académica. El curso de 2° de secundaria con este grupo siguió con la misma dinámica, aunque el cambio de profesor influyó notablemente en el espíritu de trabajo que ya se había logrado. Con lo cual nos dimos cuenta que una propuesta metodológica como ésta, aún cuando se proporcionara todo el material para llevarla adelante, no era suficiente para mejorar el aprendizaje de las matemáticas ya que a pesar de haber logrado objetivos importantes con los alumnos, el profesor era pieza clave fundamental para llevarla adelante y transmitir la experiencia no fue fácil.

A continuación presento algunas de las actividades que fueron diseñados para este grupo piloto.

—

PRÁCTICA N°

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE

Suma y resta de números naturales

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aplicar las operaciones elementales a la resolución de problemas
- Comprender y comunicar las estrategias de solución
- Escuchar, comprender y respetar los fundamentos ajenos

PROBLEMA

Martín compró un caballo en $700. Al poco de caminar pudo percibir miradas que lo seguían, y pensó que no había reparado mucho en lo que debía de comer ese animal y que se vería en serios problemas para alimentarlo con su magro sueldo.

Con esta preocupación en la cabeza dio marcha atrás y se encaminó a la casa de otro amigo que tenía caballos y se lo vendió en $800.

Sin embargo se arrepintió de haberlo vendido y volvió a comprarlo, esta vez en $900. Contento de la compra llegó a casa con su equino en donde le esperaba la argumentación de la familia de que no cabía el caballo en el departamento, por lo que tuvo que volver a venderlo, ahora en $1,000.

¿Puedes ayudar a Martín a saber si al final ganó o perdió dinero y en cualquiera de los casos, cuánto?

PRÁCTICA N°

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE

Suma y resta de números naturales

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aplicar las operaciones elementales a la resolución de problemas
- Comprender y comunicar las estrategias de solución
- Escuchar, comprender y respetar los argumentos ajenos

PROBLEMA

Un vendedor de leche tiene además de un gran recipiente sin graduar donde lleva toda su leche, dos recipientes uno de 3 litros y otro de 5 litros pero sin graduaciones intermedias. ¿Cómo puede hacer para despachar de 1 a 10 litros?

PRÁCTICA N°

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE

Múltiplos y divisores

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Comprender y aplicar los conceptos de múltiplo y divisor
- Comprender y comunicar las estrategias de solución
- Escuchar, comprender y respetar los argumentos ajenos

PROBLEMA

1. De 5 números enteros, ¿cuántos deben ser impares si el producto de los cinco es impar?
2. ¿Cuál es el menor número natural que tiene exactamente 5 divisores distintos?
3. ¿Cuál es el menor número que multiplicado por 60 da un cuadrado perfecto?

PRÁCTICA N°

Se trabajará a lo largo de una semana.

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE

Propiedades de los números naturales

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Comprender y aplicar los conceptos de múltiplo y divisor
- Aplicar las operaciones elementales a la resolución de problemas
- Comprender y comunicar las estrategias de solución
- Escuchar, comprender y respetar los argumentos ajenos

PROBLEMAS

1. ¿Cuál es la cifra de menor valor absoluto que hay que añadir a 161 para que la suma sea un múltiplo de 9?
2. ¿Cuál sería un criterio de divisibilidad entre 15?
3. Pedro presume que todavía es joven. Si se divide su edad entre 2, 3, 4, 5 o 6, el residuo es 1. ¿Cuál es la edad de Pedro?
4. ¿Cuánto vale la suma de los factores primos de 170?
5. Para enumerar las páginas de un libro, un tipógrafo ha empleado 207 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?
6. ¿Cuál es el mayor factor primo de 532?
7. ¿Cuál es la cifra de las unidades del resultado de la suma $1989^9 + 1989$?
8. ¿Cuántos números de los primeros 100 enteros positivos son divisibles entre 2, 3, 4 y 5 simultáneamente?
9. Mi abuela cumplió x años en el año x y todavía está viva, ¿en qué año nació?

10. Si sabes que el cuadrado de un número x termina en 6, ¿en cuáles cifras puede terminar x?

PRÁCTICA N°

Se trabajará a lo largo de una semana.

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE

Múltiplos, divisores y minimo común múltiplo.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Comprender y aplicar los conceptos de múltiplo y divisor
- Aplicar las operaciones elementales a la resolución de problemas
- Comprender y comunicar las estrategias de solución
- Escuchar, comprender y respetar los fundamentos ajenos

PROBLEMAS

1. Tres péndulos tienen por período de oscilación 2, 3 y 4 segundos respectivamente. Si se les suelta simultáneamente desde una misma posición, ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que recuperen todos al mismo tiempo la posición inicial?
2. Una campana suena con 10 segundos de intervalo entre dos repiques, otra con 20 y otra con 24 segundos de intervalo. Si dan el primer golpe simultáneamente, ¿después de cuántos segundos volverán a coincidir los repiques?
3. Encuentra tres números que tengan al 72 como mínimo común múltiplo.

PRÁCTICA N°

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE

Proporcionalidad

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Comprender y aplicar el concepto de proporcionalidad
- Aplicar las operaciones elementales a la resolución de problemas
- Comprender y comunicar las estrategias de solución
- Escuchar, comprender y respetar los fundamentos ajenos

PROBLEMAS

1. En un envase de harina para hacer hot cakes se ve el siguiente recuadro:

INSTRUCCIONES

	6 hot cakes	12 hot cakes	18 hot cakes
Harina	1 taza	2 tazas	3 tazas
Leche	$\frac{3}{4}$ taza	$1\frac{1}{2}$ tazas	$2\frac{1}{4}$ tazas
Huevos	1	2	3
Mantequilla derretida	1 cucharada	2 cucharadas	3 cucharadas

a. ¿Cuántos huevos se necesitan para preparar 12 hot cakes?
b. ¿Cuántas cucharadas de mantequilla se necesitan para preparar 18 hot cakes?
c. ¿Qué razón existe entre la cantidad de hot cakes que se pueden preparar y la cantidad de huevos necesarios?
d. ¿Qué cantidad de ingredientes son necesarios para preparar 24 hot cakes?
e. ¿Qué cantidad de ingredientes son necesarios para preparar 9 hot cakes?
f. ¿Qué cantidad de ingredientes son necesarios para preparar x hot cakes?

2. Un germicida para desinfectar agua, frutas y verduras dice en su instructivo:

INSTRUCCIONES DE USO

PURIFICACIÓN DE AGUA
a. Agréguense 5 gotas por cada litro de agua que se vaya a consumir.
b. Deje pasar 20 minutos antes de tomarla.

DESINFECCIÓN DE VERDURAS
a. Lávense con agua corriente y detergente en forma usual
b. Poner en un recipiente con agua hasta cubrirlas
c. Agréguense 15 gotas por cada litro de agua
d. Déjense reposar 40 minutos antes de consumirlas

DESINFECCIÓN DE FRUTAS
a. Siga las instrucciones anteriores y déjese reposar 10 minutos únicamente.

a. ¿Cuántas gotas de germicida son necesarias para desinfectar 3 litros de agua?
b. ¿Cuántas gotas de germicida son necesarias según el instructivo para purificar verduras si se utilizan 3 litros de agua?
c. ¿Cuántas gotas de germicida son necesarias según el instructivo si se usan 3 litros de agua?
d. ¿Cuánto tiempo hay que dejar reposar para purificar 3 litros de agua, según el instructivo?

3. Busca 5 ejemplos de proporcionalidad diferentes a los usados en clase.

____

PRÁCTICA N°

Se trabajará a lo largo de una semana.

CONTENIDOS DE APRENDIZAJE

Trazos geométricos. Triángulos

MATERIALES

Juego de geometría, hojas de papel blanco

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Utilizar con precisión los instrumentos de geometría
- Clasificar los triángulos y reconocer sus propiedades
- Aprender a seguir instrucciones

DEFINICIONES

Mediatriz de un segmento. Recta perpendicular al segmento en su punto medio.

¿Cuántas mediatrices tiene un triángulo?

Circuncentro. Llamamos circuncentro al punto donde se intersectan las mediatrices de un triángulo.

Bisectriz de un ángulo. Semirrecta que partiendo del vértice del ángulo lo divide en dos ángulos iguales.

¿Cuántas bisectrices tiene un triángulo?

Incentro. Llamamos incentro al punto donde se intersectan las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

PROBLEMAS

1. Traza un triángulo de lados $\overline{AB} = 8.2\ cm$, $\overline{BC} = 6.1\ cm$, $\overline{AC} = 7.3\ cm$. Localiza el circuncentro. Verifica que el circuncentro equidista de los vértices (es decir, que se puede trazar una circunferencia con centro en el circuncentro que pase por los tres vértices del triángulo).
2. Traza un triángulo de lados $\overline{AB} = 6\ cm$, $\overline{BC} = 8\ cm$, $\overline{AC} = 10\ cm$. Localiza el circuncentro. Compara tu trazo con el de tus compañeros. ¿Se encuentra en un lugar en particular? ¿A qué puede deberse?
3. Traza un triángulo cuyos lados iguales formen un ángulo de 120°, $\overline{AB} = 5\ cm$ $\overline{AC} = 5\ cm$. Localiza el circuncentro. Compara tu trazo con el de tus compañeros ¿Se encuentra en un lugar en particular? ¿A qué puede deberse?
4. Traza un triángulo de lados $\overline{AB} = 7.3\ cm$, $\overline{BC} = 6.4\ cm$, $\overline{AC} = 8.2\ cm$. Localiza el incentro. Verifica que el incentro equidista de los lados, es decir, que se puede trazar una circunferencia con centro en el incentro y que sea tangente a los tres lados.

5. Traza un triángulo equilátero de $6cm$ de lado. Localiza el circuncentro y el incentro. Compara con tus compañeros ¿Se encuentran en un lugar en particular? ¿A qué puede deberse?

CAPÍTULO 3
Tercera aproximación

Después de esta experiencia, en la que la participación del profesor era clave para llevar a cabo la metodología planteada y ante la imposibilidad de transmitirla cabalmente, el siguiente paso fue elaborar material que tuviera dos versiones, la del alumno y la del maestro, ésta última con algunas indicaciones que orientaran al maestro en el desarrollo de la sesión. En esta propuesta seguimos considerando el trabajo en equipo como eje del trabajo en clase y se elaboró material para cada uno de los temas del programa.

Las ventajas de estos manuales son a mi juicio las siguientes:

1. Contienen una secuencia estructurada y progresiva de ejercicios que permiten al estudiante llevar un curso ordenado, así como apuntes completos y personales.
2. Se obliga al estudiante a jugar un papel activo en el aprendizaje de los temas.
3. Requiere de trabajo en equipo, lo cual activa las habilidades de comunicación, incluyendo la de explicarse y apoyarse mutuamente.
4. Guía al profesor en el contenido y profundidad de sus intervenciones y le permite entender el sentido de las actividades.

Las desventajas:

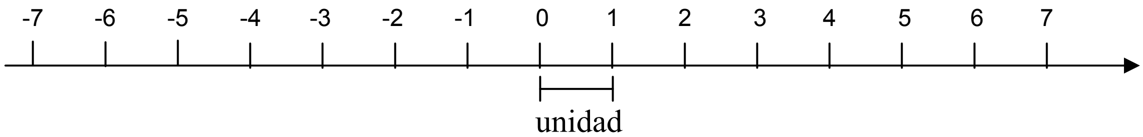
1. Están pensados para que el profesor intervenga en momentos específicos y esto no forzosamente se adapta al estilo de todos.
2. Los estudiantes no diseñan sus propias estrategias para enfrentar los problemas.
3. El aprendizaje se circunscribe estrictamente a los temas del programa sin relacionarse entre sí y con otras disciplinas.
4. Si no se complementan con problemas los estudiantes no desarrollan el dominio del lenguaje matemático.

A continuación incluyo una muestra de tres lecciones de estos manuales:

LECCIÓN 1.1
USO, ORDEN, REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA

Escribe situaciones que conozcas en las que se utilicen números positivos y negativos:

Para representar a los números enteros en la recta numérica, escogemos una unidad y el cero (origen). A partir de él repetimos la unidad sucesivamente a la derecha y a la izquierda de la siguiente manera:



El conjunto de los números enteros se representa con la letra Z.

EJERCICIO 1.1.1
Para cada uno de los siguientes incisos traza una recta numérica y localiza en ella los puntos correspondientes a los números que se te indican:

a) –4, -9, 5, 7, -1, 2, 8
b) –30, 80, -100, 60, -40, 0, 90
c) –24, -12, 16, 32, 4, -8, -16

Nota al profesor
Discutir sobre la selección de una escala adecuada. Hacer en grupo el inciso b)

Localizarlos en la recta nos ayuda a establecer el orden entre ellos, por ejemplo, en el inciso a) podemos ver que: $-9 < -4 < -1 < 2 < 5 < 7 < 8$, es decir, el número menor es -9 y el mayor es 8.

EJERCICIO 1.1.2
Escribe los números de los incisos b) y c) de mayor a menor. Recuerda que el símbolo $<$ significa “es menor que” y $>$ significa “es mayor que”

EJERCICIO 1.1.3
Escribe el símbolo $<$ ó $>$ según corresponda:

a) -3 ____ -4

b) 25 ____ -2

c) -8 ____ -3

d) 14 ____ -15

e) -16 ____ -20

f) -9 ____ -4

h) 10 ____ -22

i) -18 ____ -33

j) 24 ____ -5

k) -1 ____ -20

Nota al profesor
Revisión y cierre de: Uso, orden y representación en la recta

LECCIÓN 1.2
OPERACIONES BÁSICAS, LEYES DE LOS SIGNOS

Valor Absoluto

El valor absoluto de un número es la distancia del origen al número. Hay un símbolo especial para representarlo. El valor absoluto de n se representa como $|n|$.

¿Cuántos números hay cuyo valor absoluto sea 7? ________________________

¿Cuántos números hay cuyo valor absoluto sea 6?________________________

¿Cuántos números hay cuyo valor absoluto sea 2?________________________

Nota al profesor
Estos números cuya distancia al origen es la misma, juegan un papel importante en las reglas para operar con números enteros. Explicar que se va a utilizar en las reglas de los signos para restar.

EJERCICIO 1.2.1
Indica el valor absoluto (la distancia al origen) de los siguientes números. Recuerda que no hay distancias negativas.

a) $|-23| =$

b) $|23| =$

c) $|-2.75| =$

d) $|13.7| =$

e) $|-243| =$

f) $|243| =$

g) $|-5| =$

h) $|-249.3| =$

i) $|7| =$

j) $\left|-\frac{13}{5}\right| =$

k) $|1297.43| =$

l) $|733| =$

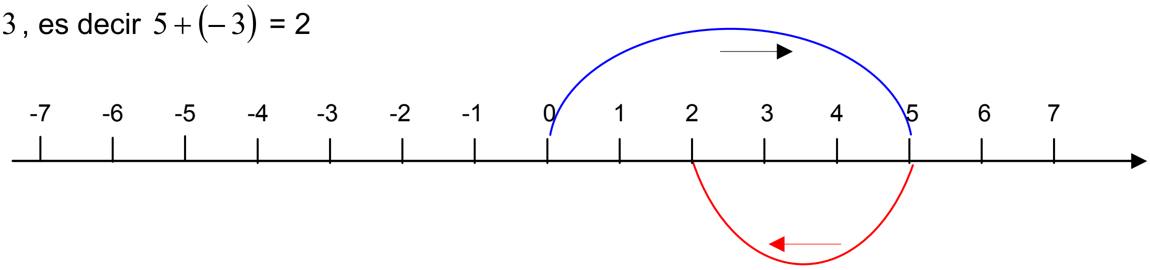
EJERCICIO 1.2.2
Completa la siguiente tabla:

a	b	¿$a = b$ $a < b$ $a > b$?	¿$\lvert a \rvert = \lvert b \rvert$ $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$ $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$?
- 8	-3		
-6	12		
-9	4		
5	-7		
-12	$\frac{60}{5}$		

Nota al profesor
Recalcar la diferencia entre el orden entre los números y el orden entre sus valores absolutos para su posterior aplicación en la resta de números enteros.

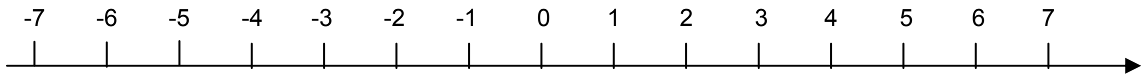
I. Suma

La suma $5+(-3)$ se representa en la recta como un salto de 5 seguido de otro de -3, es decir $5+(-3)$ = 2

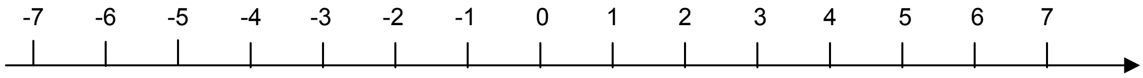


Representa en la recta las siguientes sumas:

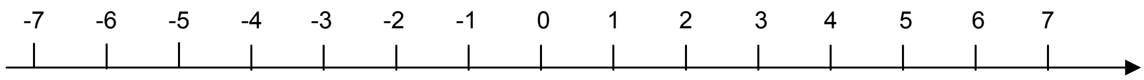
4+(-3) =



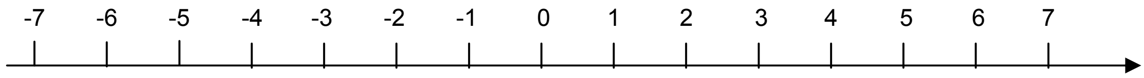
(-2) + (-5) =



(-4)+ (3) =



1 + 5 =



Completa las siguientes reglas para sumar sin hacer uso de la recta. Escribe un ejemplo para cada caso:

1. Para sumar dos números positivos se suman sus valores absolutos y el resultado tiene signo ________________________ Ejemplo: _______________

2. Para sumar dos números negativos se suman sus valores absolutos y el resultado tiene signo ________________________ Ejemplo: ________________

3. Para sumar un número positivo y un número negativo, ____________________ ____

Ejemplo: _________________________

Nota al profesor
Mostrar que las reglas 1 y 2 se pueden enunciar como una sola.

II. Resta

¿Qué número sumado con 6 da cero? $6+\_\_\_=0$
¿Qué número sumado con -8 da cero? $-8+\_\_\_=0$

El número que al sumarse con un entero n cualquiera da cero se llama **inverso aditivo** de n.

Escribe el inverso aditivo de los siguientes números:

El inverso aditivo de –4 es ______

El inverso aditivo de 17 es ______

Restar es sumar con el inverso aditivo, por lo tanto, para restar dos números enteros, procedemos de la siguiente manera:

$-8-(5)=$ -8 + (inverso aditivo de 5) = $-8+(-5)=-13$
$-12-(-10)=$ -12 + (inverso aditivo de ___) = -12 + (___) = ___

Nota al profesor

1. Reglas para restar.
2. Mostrar que $8+(-5)$ *es los mismo que* $8-5$ *y también que* $(-5)+8$ *(conmutatividad de la suma)*
3. Mostrar que $8-5$ *y* $5-8$ *no son iguales (no conmutatividad de la resta)*

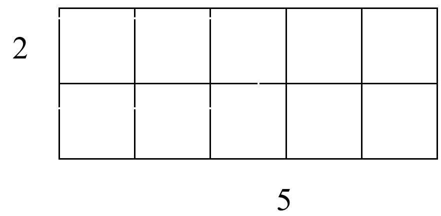
EJERCICIO 1.2.3
BASTA
REGLAS:

1. Para seleccionar los números a y b, un jugador cuenta mentalmente desde –20 hasta 20 y debe decir el número en el que va su cuenta cuando otro jugador le dice BASTA. Este proceso se repite hasta tener los valores de a y b para las cuatro filas.
2. El juego consiste en llenar la tabla. Cuando algún jugador acabe, dice: BASTA. En ese momento todos suspenden el juego. Se anotan 5 puntos por cada respuesta correcta.

a	b	c	$a+b+c$	$-a+b-c$	$a-b-c$	¿$a=b$ $a<b$ $a>b$?	¿$a=c$ $a<c$ $a>c$?	¿$b=c$ $b<c$ $b>c$?	Orden de menor a mayor	PUNTOS
-5	3	-5								
7	-7	3								
-4	-9	2								
-2	-1	-10								
									TOTAL	

III. Multiplicación

Observa la siguiente figura y responde:



a) ¿Cuánto mide el largo del rectángulo? ___________
b) ¿Cuánto mide el ancho? __________
c) ¿Cuánto mide el área? ___________
d) ¿Cuántos cuadrados hay en la figura?___________
e) ¿Qué relación hay entre el número de cuadrados y el área del rectángulo?_____________

Nota al profesor

1. Área del rectángulo para la interpretación geométrica de la multiplicación de enteros y fracciones.
2. Conmutatividad de la multiplicación.

Cuando los números son de diferente signo, el modelo de las áreas para multiplicar no nos sirve. ¿Por qué? ___________________________________

Nota al profesor

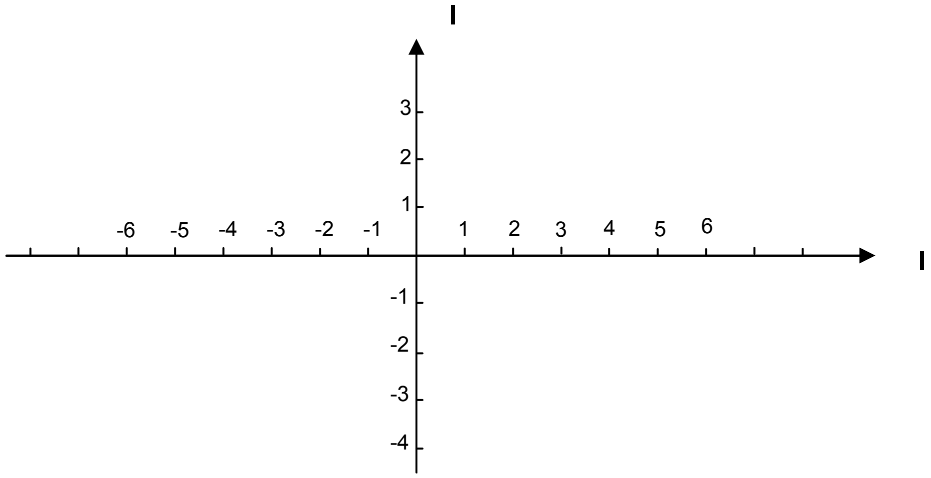
Revisar el hecho de que no existen longitudes negativas

Veamos una interpretación para este caso:

USA TUS ESCUADRAS PARA LOS TRAZOS. Vamos a multiplicar $(2)(-3)=$

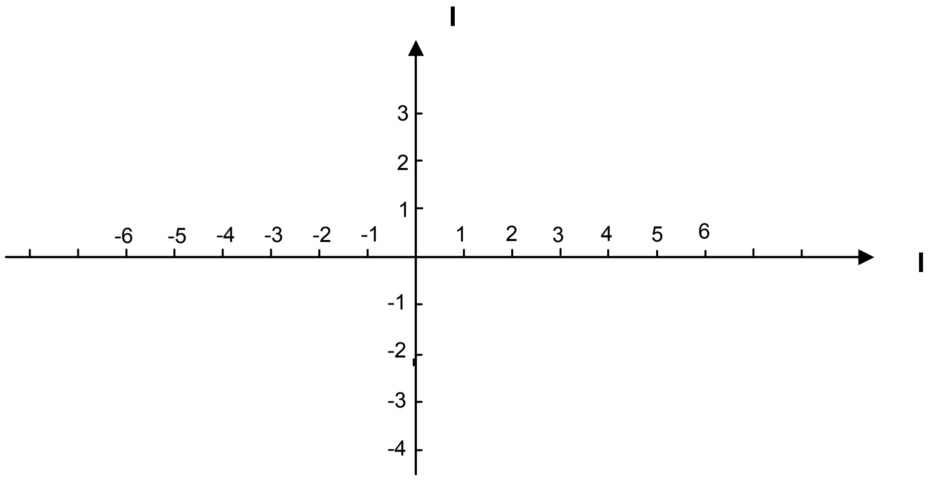
1. En un plano cartesiano localiza el 2 sobre el eje X y –3 sobre el eje Y
2. Traza un segmento de recta del 2 del eje X hacia el 1 del eje Y

   3.Traza una paralela a esa recta partiendo del –3 del eje Y. ¿En qué punto esta última recta corta al eje X? ____________

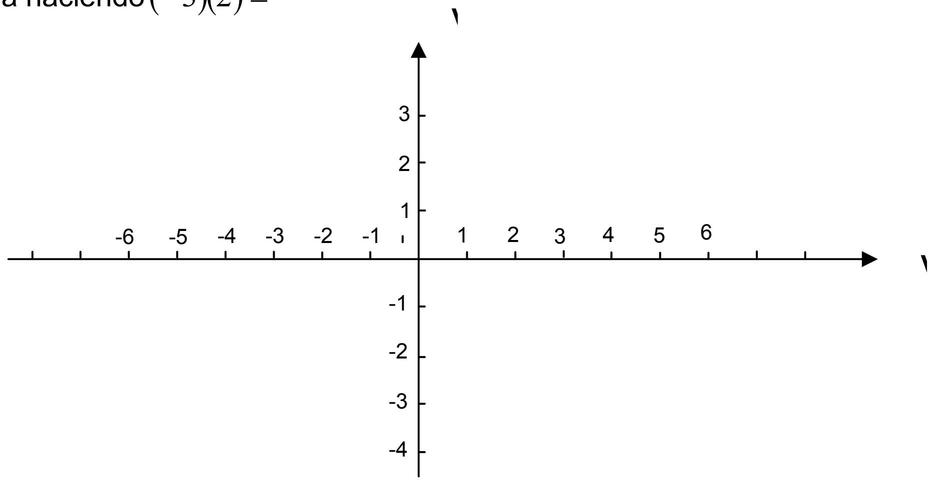


Por lo tanto $(2)(-3)=$ ______

Haz lo mismo para obtener el resultado de $(-2)(-3)=$



Prueba ahora haciendo $(-3)(2) =$



Escribe las leyes de los signos para multiplicar:

(+) (+) =
(-) (-) =
(+) (-) =
(-) (+) =

Es decir:
Si los números tienen el mismo signo el resultado es ________
Si los números tienen diferente signo el resultado es _________

Nota al profesor
1. La justificación del procedimiento puede platicarse para retomarlo cuando se vea semejanza de triángulos.
2. Conmutatividad de la multiplicación

IV. División

Para dividir dos números enteros se siguen las mismas reglas que para la multiplicación. ¿Por qué? ____________

Nota al profesor
Definir inverso multiplicativo

V. EJERCICIO 1.2.4

Escribe el resultado de:

a) $(-8)(-6)=$

b) $\frac{-120}{4}=$

c) $(-1)(-2)(-5)=$

d) $\frac{-72}{-8}=$

e) $(-12)(-12)=$

g) $(-6)(7)(-10)(2)=$

h) $\frac{36}{-9}=$

i) $(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)= \ =$

j) $\frac{-63}{21}=$

k) $=(-4)(-6)(2)(-1)(-3)=$

Nota al profesor Regla para multiplicar un número impar de factores con signo negativo.

Lección 1.3
PRIORIDAD DE OPERACIONES

EJERCICIO 1.3.1

a) Con 4 cuatros y las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, expresa los números del 0 al 10. Puedes usar paréntesis si los necesitas.

Ejemplo: $0=\frac{4}{4}-\frac{4}{4}$

b) Usando 5 veces el número 2, es posible expresar todos los números dígitos del 0 al 9 usando las operaciones $+,\ -, \times\ y\ \div$

Ejemplo: $0=2-\frac{2}{2}-\frac{2}{2}$ Escribe los demás

Nota al profesor

Seguramente aparecerán en los dos ejercicios anteriores varias formas de escribir los números violando la prioridad de operaciones. Retomar los casos que se presenten para la discusión.

Para efectuar operaciones combinadas, por ejemplo: $4\times[3+(10\div 2)]$ *se comienza resolviendo las operaciones que se indican dentro de los paréntesis internos. Los paréntesis indican, por lo tanto, el orden en que deben hacerse las operaciones.*

EJERCICIO 1.3.2

Coloca paréntesis en $4\times 3+10\div 2=$ de forma que el resultado sea:

a) 17 b) 11 c) 26 d) 32

Nota al profesor

Se obtienen resultados diferentes según cómo se coloquen los paréntesis, por lo que, cuando no los hay, una serie de reglas nos permiten llevar a cabo las operaciones de este tipo de manera única:

1° se resuelven potencias y raíces (si las hay)
2° Multiplicaciones y divisiones (si las hay)
3° Las sumas y restas (si las hay)

EJERCICIO 1.3.3

Siguiendo estas reglas efectúa de nuevo la operación anterior: $4\times 3+10\div 2=$

EJERCICIO 1.3.4

Haz las siguientes operaciones siguiendo las reglas de prioridad de operaciones

a) $20+5\times 3=$

b) $8\times 5-25\div 5=$

c) $\frac{50}{10}\times\sqrt{25}-6\times 3-2$

d) $4+3^2-\sqrt{81}=$

e) $(8+2)^2-2^3\times 40=$

f) $\frac{8\times 4-5\times 3}{12}$

g) $12\div 3-5+4\div 2+3^3$

h) $\sqrt{49}\times 6-40\div 5+6^2\div 18+18=$

i) $\sqrt{5\times 20+23\times 3}=$

j) $2(4^3-4\div 2)=$

k) $72\div 2+18\div 3-5^3+18\div 9=$

l) $\sqrt{-18\div 9+17\times 2}$

Nota al profesor

¿Qué pasa con incisos h, f y l. Señalar que algunos operadores funcionan como paréntesis.

TAREA 1.3.1

Coloca los paréntesis en las siguientes operaciones para obtener el resultado que se indica:

a) $4^2-3^2\times\sqrt{81}=$ -65

b) $6\times 5-25\div 4=$ -30

c) $10\times(-40)\div 4+(8+2)^2=$ 0

d) $12\div 3-5+4\div 2-3=$ -6

e) $-20+4\div 3=$ -8

f) $\sqrt{49}\times 6-40\div 6-6^2=-\frac{1}{15}$

g) $\sqrt{5\times 2+3\times 3}=\sqrt{75}$

j) $-4^2-4\div 2=$ 6

4		-12	-5	2

6	13		-3	4

Nota al profesor

Respuestas

a) $4^2-(3^2\times\sqrt{81})=16-81=-65$

b) $[6\times(5-25)]\div 4=[6\times(-20)]\div 4=-120\div 4=-30$

c) $10\times(-40)\div 4+(8+2)^2=10\times[(-40)\div 4)]+(8+2)^2=10\times(-10)+100=0$

d) $12\div 3-5+4\div 2-3=[12\div(3-5+4)]\div(2-3)=[12\div 2]\div(-1)=-6$

e) $-20+4\div 3=-(20+4)\div 3=-8$

f)

$$\sqrt{49}\times 6-40\div 6-6^2=(\sqrt{49}\times 6)-40\div(6-36)=42-40\div(-30)=2\div(-30)=-\frac{2}{30}=-\frac{1}{15}$$

g) $\sqrt{5\times 2+3\times 3}=\sqrt{5\times(2+3)\times 3}=\sqrt{5\times 5\times 3}=\sqrt{75}$

h) $-4^2-4\div 2=[(-4)^2-4]\div 2=(16-4)\div 2=12\div 2=6$

EJERCICIO 1.3.5

BASTA

a	b	c	d	$a-b+c-d$	$a-(b+c-d)$	$(a-b)+c-d$	PUNTOS
1	2	3	4				
-1	-2	-3	-4				
2	-2	3	-3				
90	-20	10	-2				

TAREA 1.3.6

1. De 5 números enteros ¿Cuántos deben ser impares si el producto de los cinco es impar.?
2. Para enumerar las páginas de un libro, un tipógrafo ha empleado 207 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?
3. Un caracol sube por una pared vertical de 5 metros de altura; durante el día el caracol sube 3 metros, pero durante la noche se queda dormido y resbala 2 metros. ¿En cuántos días subirá la pared?
4. Cuadrados mágicos: Completa los siguientes cuadrados de manera que cada fila, cada renglón y cada diagonal, sumen los mismo.

-2		-6
-9		
-4		-8

	-8	-6	1	3
-9	-7	0		9
-3			8	
	5	12	-11	-4

12	-6	-4		5
-7	-5		9	11
-1		8	10	
0	7		-9	-2

5. Martín compró un caballo por $1000. Camino a su casa pensó que su departamento era demasiado pequeño para tener un caballo, así que decidió venderlo en $2000. Se arrepintió de la venta pensando en cuánto deseaba cabalgar por las mañanas, así que regresó nuevamente a comprarlo, esta vez en $3000. Al llegar a casa, el caballo ni siquiera cupo por la puerta, así que tuvo que deshacerse de él vendiéndolo nuevamente, ahora en $4000. ¿En estas transacciones Martín ganó o perdió? ¿Cuánto?

CAPÍTULO 4

Y última aproximación (por el momento).

La idea que a continuación presento cristalizó en un libro de trabajo con problemas más parecidos a investigaciones, donde después de que el maestro revisara varios temas en clase, se planteara la resolución de algún problema del libro de trabajo. Los problemas planteados, en general no tienen respuesta única ni cerrada, para resolverlos es necesario que el alumno busque información, domine ciertas herramientas matemáticas, haga estimaciones, tome decisiones, plantée hipótesis, las descarte, es decir, problemas en cuyo desarrollo es tan importante el proceso como el resultado.

A continuación incluyo un fragmento de la introducción de dicho libro de trabajo:

"Introducción

El libro que tienes en tus manos es un libro *de trabajo,* no un libro *de texto.* Dicho de otra forma, es un libro con el que se pretende hacer pensar a quien lo lea y resuelva las actividades que en él se plantean. Ahora bien, la expresión "hacer pensar" es tan amplia que perderíamos claridad si no nos detenemos un momento a tratar de precisarla. Reconocemos que hay múltiples formas de "hacer pensar"(con la ciencia, la literatura, la filosofía, la pintura, entre otras), pero no echamos mano de las mismas habilidades o competencias en cada uno de esos casos o contenidos. Es por ello que "hacer pensar", en el contexto de este libro de trabajo, se referirá a las dos componentes de una misma actividad: por una parte, nos llevará, por supuesto, a pensar las matemáticas y su contenido, y por la otra a promover el desarrollo de las habilidades particulares que se activan cada vez que trabajas con matemáticas, es decir, lo que llamaremos las *competencias matemáticas*,.

En este libro tomaremos como competencias las ocho identificadas en el marco del programa internacional PISA . Éstas son:

1. *Pensar y razonar (matemáticamente):* ¿Qué clase de preguntas matemáticas planteas al explorar las posibles soluciones de un problema?
2. *Argumentación:* ¿Puedes seguir secuencias de razonamientos matemáticos o construirlos tú mismo?
3. *Comunicación:* ¿Puedes expresar con claridad tus razonamientos y explicar tus procedimientos de cálculo? ¿Comprendes los razonamientos y explicaciones de otros?
4. *Construcción de modelos:* ¿Sabes "traducir" aspectos de la realidad a conceptos u objetos matemáticos y viceversa?
5. *Formulación y resolución de problemas:* ¿Eres capaz de encontrar o extraer problemas

matemáticos de la realidad? ¿Qué estrategias empleas para resolverlos?
6. *Representación:* ¿Cómo ilustrarías alguna situación problemática para poder abordarla mejor? ¿Qué tipos de gráficas sabes interpretar?
7. *Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico:* ¿Hasta qué punto conoces la simbología matemática? ¿Eres capaz de expresar determinados enunciados como fórmulas?
8. *Empleo de soportes y herramientas:* ¿De qué recursos materiales sabes valerte para comprender y resolver un problema?"

En la versión del maestro se incluyen varias secciones. Antes de cada actividad se encuentra la lista de competencias asociadas a esa actividad, incluido el *nivel* de uso de cada competencia. Aquí se nos presenta el mayor desafío didáctico: ¿Cómo saber que un estudiante ha adquirido o desarrollado las competencias listadas en la actividad? La respuesta a esta pregunta requiere de un análisis cuidadoso. Por un lado reconocemos que las competencias son habilidades y que no existe el maestro que pueda transmitir sus habilidades a algún estudiante. Ningún futbolista, ningún escritor y ningún matemático puede hacer hábil a su estudiante; es el trabajo de éste el único camino que lo llevará a la destreza. Por otro lado debemos admitir que, como maestros, no sabemos qué sucede en el interior del estudiante cuando se le explica algo o se le narra una experiencia o se le muestra cómo se realiza una tarea. Así, el único recurso que nos queda para verificar que se adquiere una competencia —una habilidad—, es comprobar el resultado de una acción del estudiante. En nuestro caso lo que debemos comprobar tiene dos componentes: que el estudiante realice correctamente una tarea asociada con lo que la actividad le pide y que dicha actividad haya sido realizada de tal manera que la competencia señalada se haya "puesto en juego". Lo problemático del asunto consiste en que haber "puesto en juego" una sola vez alguna competencia no es garantía de que el estudiante haya incorporado la competencia a su estructura cognitiva. Pero debemos reconocer que no podemos hacer más que exponer a ese estudiante ante varias situaciones, programadas y sistemáticas, donde tal competencia se "ponga en juego" y apostar a que la continua exposición del estudiante a estas tareas provocará que finalmente desarrolle la habilidad que buscamos.

El modelo de PISA presupone tres niveles de desarrollo para las competencias matemáticas; éstos son, en orden ascendente de dificultad, el nivel de reproducción, el nivel de conexión y el nivel de reflexión. Pretender que con los *problemas* incluidos en esta serie todos los estudiantes conseguirán el nivel de reflexión en las ocho competencias resultaría una meta de tan altos vuelos que correríamos el riesgo de caer en la decepción. Preferimos, ante la imposibilidad de obtener garantías de un éxito tan elevado, defender la utilidad de los *problemas* por la innegable posibilidad que ofrecen de generar competencia matemática. El nivel de desarrollo dependerá del estudiante en particular, de su nivel de conocimiento y de habilidad en el área matemática requerida para resolver el *problema*, y dependerá también de su motivación y de su gusto por el trabajo matemático. Dependerá, en fin, de su personalidad y su individualidad. Debemos garantizar entonces, como maestros, que las relaciones en el grupo sean las adecuadas para poner todos estos elementos a favor del estudiante.

El programa internacional PISA examina la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y transmitir ideas matemáticas de un modo efectivo al plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones. Este tipo de resolución exige que los estudiantes se valgan de las destrezas y competencias que han adquirido a lo largo de su escolarización y sus experiencias vitales. A este proceso se le denomina *matematización* y en este libro lo agrupamos en tres fases:

Fase I. *Exploración del problema y elección de la herramienta matemática.*
Se inicia con un problema enmarcado en la realidad. Se organiza la información de acuerdo con los datos del problema y se identifican los elementos matemáticos pertinentes. Se formulan hipótesis, se generaliza y se formaliza, es decir, se transforma el problema real en un problema matemático que lo representa fielmente. Esta fase incluye actividades como:

• Representar el problema de un modo diferente, organizándolo de acuerdo a conceptos matemáticos y realizando suposiciones adecuadas.
• Comprender y establecer las relaciones entre el lenguaje utilizado para describir el problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para entenderlo matemáticamente.
• Localizar regularidades, relaciones y recurrencias.

Fase II. *Solución matemática.*
Cuando el estudiante ha traducido el problema real a un problema matemático, el procedimiento continúa dentro de las matemáticas. Esta parte del proceso incluye actividades como:

• Utilizar diferentes representaciones e ir cambiando entre ellas.

• Utilizar operaciones y lenguaje simbólico, formal y técnico.
• Pulir y adaptar los modelos matemáticos, combinando e integrando modelos.
• Argumentar.
• Generalizar.

Fase III. *Solución del problema real y visión retrospectiva.*
Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución. Este último paso conlleva una reflexión del proceso matemático y de los resultados obtenidos. En este punto los estudiantes deben interpretar los resultados con una actitud crítica y validar todo el proceso. Este proceso de validación y reflexión incluye:

• La comprensión del alcance y los límites de los conceptos matemáticos.
• La reflexión sobre los argumentos matemáticos y la explicación y justificación de los resultados.
• La comunicación del proceso y de la solución.
• La crítica del modelo y de sus límites.

Agregamos para el maestro gran cantidad de notas y sugerencias, soluciones alternativas y puntos de vista diferentes. Todo ello para que el profesor esté preparado ante cualquier camino que al alumno se le ocurra para resolver el *problema* y guiarlo adecuadamente cuando lo necesite, tarea que no es fácil si, como esperamos, la creatividad del alumno nos rebasa.

A continuación presento cuatro lecciones de este libro de trabajo en la versión para el maestro que incluye notas dirigidas al profesor y todas las respuestas, las cuales aparecen en color rosa:

- Sumando de uno en uno
- El abuelo es adivino
- ¿Quién es normal?
- Anorexia a escala

1. Sumando de uno en uno

TEMAS

Utilizar procedimientos informales y algoritmos de adición y sustracción de números con signo en diversas situaciones.

Construir sucesiones de números a partir de una regla dada

Situación-problema

Piensa en una nueva operación que no sea ninguna de las que conoces $(+, -, \times, \div)$.

Vamos a denotarla con * y a definirla de la siguiente manera: $a*b = 2a - b$ con a y b positivos.

De esta manera, por ejemplo,

$10*11 = 2(10) - 11 = 20 - 11 = 9$.

Competencias: nivel

Empleo de operaciones: reproducción

Calcula:

3*10= $\underline{2(3) - 10 = 6 - 10 = -4}$

6*5 = $\underline{2(6) - 5 = 12 - 5 = 7}$

8*11 = $\underline{2(8) - 11 = 16 - 11 = 5}$

11*8 = $\underline{2(11) - 8 = 22 - 8 = 14}$

Misión

Tu misión a lo largo de las siguientes actividades es averiguar el resultado de la suma siguiente:

$$1*2 \;+\; 2*3 \;+\; 3*4 \;+\; 4*5 \;+ \ldots +\; 999*1000$$

Fase I: Exploración del problema y elección de la herramienta matemática

Competencias: nivel

Comunicar: conexión

Pensar y razonar: conexión

1. Lo primero será averiguar los primeros sumandos. (El alumno debe poner la respuesta)

$$1*2 = 2(1)-2 = 2-2 = 0$$

$$2*3 = 2(2)-3 = 4-3 = 1$$

$$3*4 = 2(3)-4 = 6-4 = 2$$

$$4*5 = 2(4)-5 = 8-5 = 3$$

Competencias: nivel

Comunicar: conexión

Pensar y razonar: conexión

2. ¿Notas algún patrón que te permita hacer la operación * con mayor fluidez? Sí.
¿Cuál? Que el resultado siempre es igual a uno menos que el primer término de la operación.

Ahora sin hacer la operación escribe el resultado de:

$997*998 =$ 996

$998*999 =$ 997

$999*1000 =$ 998

Es decir, $1*2 \; + \; 2*3 \; + \; 3*4 \; + \; 4*5 \; + ... + \; 999*1000$ es equivalente a la suma 0 + 1+ 2 + 3 + 4 +....+ 997 + 998.

Una manera de calcular la suma sería escribir todos los sumandos y efectuar la suma. Es una manera, pero tendríamos 999 sumandos. ¿Crees que sea la forma más práctica? No.

Discútelo con tus compañeros y escribe qué otras estrategias puedes seguir para hacer la suma.

Antes de proseguir con la búsqueda de la solución, lee la siguiente conexión histórica.

Conexión histórica

Karl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Hace 228 años nació en Götingen, Alemania, Karl Friedrich Gauss. Hay una historia sobre él que dice que cuando contaba con 8 años de edad, su profesor, para ocupar a sus alumnos, les pidió encontrar la suma de los 100 primeros números naturales: $1+2+3+4+...+100$. El profesor se disponía a tomarse un buen tiempo para trabajar en otras cosas, cuando Karl se levantó de su pupitre y le enseñó la solución: 5 050. Dejemos aquí la historia y veamos qué fue lo que hizo Karl. Él se dio cuenta que sumando los números del 1 al 100 de la siguiente manera, obtenía siempre el mismo resultado:

$$100+1=101$$
$$99+2=101$$
$$98+3=101$$
$$97+4=101$$
.
.
.
$$51+50=101$$

¿Cuántas parejas que suman 101 tenemos? 50.

Es decir, que podemos escribir la suma del 1 al 100 como otra suma equivalente:

$$\underbrace{101+101+101+...+101}_{50 veces}.$$

Lo que es lo mismo que 50 veces 101, o bien $50 \times 101 = 5050$.

La familia de Karl Friedrich Gauss vivía pobremente, su padre apenas tenía los medios para mandar a estudiar a su hijo la primaria, pero los maestros hicieron saber al duque de Brunswick del talento del niño; él se hizo su protector y se encargó de enviarlo a la Universidad. Karl estudió, investigó y demostró una gran cantidad de teoremas. Además, fue uno de los primeros en pensar en la geometría no euclidiana, llamada así para diferenciarla de la geometría plana de Euclides (que es la que se enseña en la escuela). Hoy, a partir del trabajo de Einstein sobre la relatividad general, tenemos bases para pensar que la geometría no euclidiana es la que mejor describe al espacio y al tiempo.

Su obra fue tan importante, que ha sido reconocida como una de las contribuciones mayores al campo de la ciencia durante los siglos XVIII y XIX, y por esta razón se le conoce como el “Príncipe de las matemáticas”.

<Fase 2: Solución matemática>

Competencias: nivel

Pensar y razonar: conexión

3. Volvamos al problema de calcular la suma

$0+1+2+3+4+...+997+998$. Para empezar podemos prescindir del primer sumando, ¿por qué? Porque es cero. Por lo tanto, la suma que debemos hacer es $1+2+3+4+...+997+998$

Si procedemos de la misma forma que hizo Gauss de niño, debemos obtener las sumas de:

$$998+1=999$$
$$997+2=999$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$499+500=999$$

¿Cuántas parejas que suman 999 tenemos? 500.

Por lo que $1+2+3+4+...+997+998 = \underbrace{999+999+999+...+999}_{500\ veces}$

Fase 3: Solución del problema real y visión retrospectiva>

Competencias: nivel

Empleo de operaciones: conexión

Pensar y razonar: conexión

4. Escribe ahora el resultado de:

$1*2 \ + \ 2*3 \ + \ 3*4 \ + \ 4*5 \ + \ldots + \ 999*1000 =$

$1+2+3+4+\ldots+997+998 = 500\times 999 = 499\,500$

Competencias: nivel

Argumentación: reflexión

5. Tras haber llegado a una solución, conviene repasar lo que has hecho con el fin de que tengas un panorama claro de los pasos que seguiste para resolver el problema. Regresa, pues, al punto número **1.** Describe lo que hiciste en cada punto.

Fase I. Exploración del problema y elección de la herramienta matemática

1. Averiguamos el resultado de los primeros sumandos.

2. Vimos que los resultados siguen un patrón que nos permite escribir el resultado de a*b sin necesidad de hacer la operación y vimos que la suma que nos piden es 0+1+2+3+...+997+998.

Leímos cómo Gauss hizo el cálculo de la suma de los primeros 100 números.

Fase 2. Solución matemática

3. Aplicamos el mismo método que siguió Gauss para calcular el resultado de la suma.

Fase 3. Solución del problema real

4. Escribimos el resultado de la suma que se nos pide.

5. Revisamos el proceso.

Fíjate que el método que acabamos de revisar sirve si sumamos un número par de sumandos, ¿qué pasaría si el número de sumandos es impar?

Veamos: Encuentra la suma del 1 al 99.

RESPUESTA MODELO. Se hace la suma del 1 al 98 como ya sabemos y al resultado se le suma el 99.

Más problemas I

A continuación se muestran cuatro arreglos de cuadrados que llamaremos figuras 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

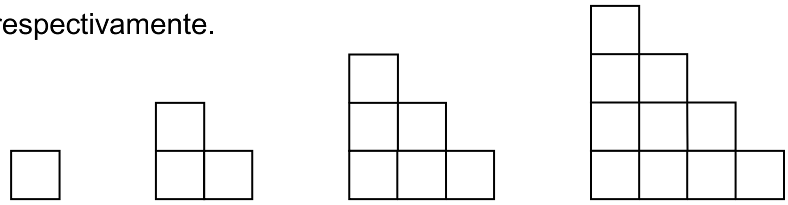
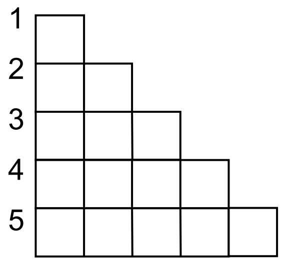


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Competencias: nivel

Representación: reproducción

1. Dibuja el arreglo que corresponde a la figura 5. Señala en la figura cuántos cuadrados hay en cada fila.



Competencias: nivel

Empleo de soportes y herramientas: reproducción

Representación: conexión

2. ¿Cuál es el área de las cinco figuras anteriores? Completa la tabla. Nota que, como los cuadrados tienen un centímetro de lado, entonces el área de cada uno es $1\ cm^2$. Parar hallar el área de cada figura basta contar cuántos cuadrados hay en cada arreglo.

Figura	Número de cuadrados	Área
1	1	$1\ cm^2$
2	1+2 = 3	$3\ cm^2$
3	1+2+3 = 6	$6\ cm^2$
4	1+2+3+4 = 10	$10\ cm^2$
5	1+2+3+4+5 = 15	$15\ cm^2$

3. Si un arreglo tiene 500 cuadrados en la fila de abajo, ¿cuántos cuadrados hay en total?

1+2+3+…+499+500 = 250×501 = 125,250

¿Cuál es su área? 125,250 cm^2 = 12.525 m^2

Más problemas II

Competencias: nivel

Empleo de operaciones: reproducción

Pensar y razonar: reproducción

Cuadrados mágicos: Completa los siguientes cuadrados de manera que cada fila, cada renglón y cada diagonal sumen lo mismo.

-2		-6
-9		
-4		-8

4		-12	-5	2
	-8	-6	1	3
-9	-7	0		9
-3		6	8	
	5		-11	-4

2. El abuelo es adivino

Temas

Resolver problemas que impliquen el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado.

Situación-problema

Como muchas otras tardes después de jugar nos reunimos en el porche de la casa del abuelo. Ya nos parecía natural encontrar la jarra de limonada helada para saciar la sed que traíamos después de tanto correr y también nos parecía natural ver aparecer al abuelo con algún truco nuevo para enseñarnos. Esta vez traía una cartulina donde estaban todas las letras del alfabeto asociadas a números:

a-1	f-6	k-11	o-16	t-21	y-26
b-2	g-7	l-12	p-17	u-22	z-27
c-3	h-8	m-13	q-18	v-23	
d-4	i-9	n-14	r-19	w-24	
e-5	j-10	ñ-15	s-20	x-25	

y nos pidió a todos:

ABUELO

Piensen en los dos últimos dígitos de su teléfono

Réstenle 1

Multiplíquenlo por dos

Súmenle 15

Réstenle 3

Réstenle el doble del número que pensaron

Súmenle 12

Ahora busquen qué letra le corresponde al número que obtuvieron y piensen en una fruta que empiece con esa letra.

TODOS PENSARÁN LA MISMA FRUTA.

Y así fue!! ¿Cómo le hizo el abuelo si no conoce el número telefónico de todos mis amigos?
Sin recuperarnos todavía del asombro dijo:

ABUELO

Piensen un número cualquiera

Multiplíquenlo por 9

Réstenle el número que pensaron

Divídanlo entre 8

El resultado será el número que pensaron.

Todos hicimos nuestra cuenta a partir de números distintos y todos obtuvimos el número original!

El siguiente acertijo del abuelo fue aún más asombroso, después de seguir sus instruciones, cada una de nosotras le decía el resultado y él adivinaba el número que habíamos pensado!

ABUELO

Piensa un número

Súmale 5

Multiplica el resultado por 2

Réstale 3

¿Cuál es el resultado?

Pensaste el número …

<Misión>
Tu misión a lo largo de las siguientes actividades es averiguar ¿cómo le hace el abuelo para adivinarlo todo?

Fase 1: Exploración del problema y elección de la herramienta matemática

Competencias: nivel

Empleo de operaciones: reproducción.

Empleo de soportes y herramientas: reproducción.

1. Comprueba si es verdad lo que el abuelo dice:

INSTRUCCIONES	OPERACIONES
Dos últimos dígitos de tú teléfono	34
Réstale 1	34-1=33
Multiplícalo por 2	33x2=66
Súmale 15	66+15=81
Réstale 3	81-3=78
Réstale el doble del número que pensaste	78-68=10
Súmale 12	10+12=22

Compara este resultado con tus compañeros. ¿Qué resultado obtuvieron los demás? El mismo

Por lo tanto todos escogieron la letra U. Si pensamos en frutas que empiecen con U, es altísima la probabilidad de que se nos ocurra como primera opción la uva.

Competencias: nivel

Empleo de operaciones: reproducción.

Empleo de soportes y herramientas: reproducción.

2. Comprueba ahora el segundo acertijo:

INSTRUCCIONES	OPERACIONES
Piensa un número	14
Multiplícalo por 9	14x9=126
Réstale el número que pensaste	126-14=112
Divídelo entre 8	112÷8=14

Compara los resultados con tus compañeros. ¿Qué número obtuvieron El número que pensaron

Fase 2: Solución matemática

Competencias: nivel

Empleo de operaciones, lenguaje simbólico formal y técnico: reproducción.>

Empleo de soportes y herramientas: reproducción.>

3. Antes de pasar al tercer acertijo, vamos a analizar lo que está pasando. Los trucos del abuelo se pueden explicar muy fácilmente a través del álgebra. Vamos a numerar los pasos para referirnos a ellos con facilidad.

Vamos a llamar x al número formado por los dos últimos dígitos de cualquier teléfono y a seguir los pasos que marca el abuelo:

INSTRUCCIONES	REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA
i. Dos últimos dígitos de tú teléfono	i. x
ii. Réstale 1	i. x-1
iii. Multiplícalo por 2	i. 2(x-1)=2x-2
iv. Súmale 15	v. 2x-2+15=2x+13
v. Réstale 3	v. 2x+13-3=2x-10
vi. Réstale el doble del número que pensaste	i. 2x+10-2x=10
vii. Súmale 12	i. 10+12=22

Competencias: nivel

Pensar y razonar: reproducción.>

4. Explica qué se hace en el paso ii.

Se multiplica el número x-1 por dos y se obtiene 2x-2

Explica qué se hace en el paso vi

Se resta al número que llevamos el doble del número x, es decir, 2x,

Si en el número iii. tenemos 2x y en el paso vi. restamos 2x, qué se obtiene?

Al hacer esta operación se obtiene 2x-2x=0

Competencias: nivel

Pensar y razonar: conexión.

Comunicar: conexión.

5. Explica qué hace el abuelo

Competencias: nivel

Construcción de modelos: reproducción.

6. Construye un acertijo donde el resultado sea siempre 5, 6, 9.

Respuesta modelo para que el resultado sea siempre 5

Piensa un número

Multiplícalo por tres

Réstale 7

Súmale 12

Resta el triple del número que pensaste

Competencias: nivel

Empleo de operaciones, lenguaje simbólico formal y técnico: reproducción.

Empleo de soportes y herramientas: reproducción.

7. Analicemos ahora el segundo acertijo de la misma forma que el anterior, es decir, llamemos x al número que pensaste

INSTRUCCIONES	REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA
Piensa un número	x
Multiplícalo por 9	$9x$
Réstale el número que pensaste	$9x-x=8x$
Divídelo entre 8	$\frac{8x}{8}=x$

Competencias: nivel

Pensar y razonar: conexión.

Comunicar: conexión.

8. Explica qué pasa

Respuesta modelo

Que al multiplicar por 9 y restarle el número que pensamos obtenemos un número divisible entre 8

Competencias: nivel

Construcción de modelos: reproducción.

9. Construye un acertijo donde el resultado sea siempre el número que se piensa al principio

Respuesta modelo

Piensa un número

Multiplícalo por cinco

Réstale el número que pensaste

Divídelo entre 4

Competencias: nivel

Empleo de operaciones, lenguaje simbólico formal y técnico: reproducción.>

Empleo de soportes y herramientas: reproducción.>

10. Veamos ahora el tercer acertijo:

INSTRUCCIONES	OPERACIONES	REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA
Piensa un número	8	x
Súmale 5	8+5 = 13	$x+5$
Multiplica el resultado por 2	13 x 2 = 26	$2(x+5)= 2x+10$
Réstale 3	26-3= 23	$2x+10-3=2x+7$
¿Cuál es el resultado?	23	$2x+7$

En este caso el abuelo pide el resultado. ¿Qué hace para saber qué número se pensó al principio?

Competencias: nivel

Pensar y razonar: conexión.

11. Explícalo con el número que tú pensaste

Respuesta modelo

Se resuelve la ecuación $2x + 7 = 23$

$2x = 23 – 7$

$2x = 16$

$x = 16/2$

$x = 8$

Cuando se le dice el resultado al abuelo, lo único que hace es restar 7 y dividir entre 2

Comprueba con los números que obtuvieron tus compañeros

Competencias: nivel

Construcción de modelos: reproducción.

12. Construye un acertijo donde puedas “adivinar” el número que alguien pensó a partir de conocer el resultado.

<Fase 3: Solución al problema real y visión retrospectiva:

Competencias: nivel

Pensar y razonar: conexión.

14. Entonces, ¿cómo le hace el abuelo para adivinarlo todo?

Respuesta modelo

No adivina nada, lo que hace es construir ecuaciones de primer grado de tal forma que cumplan condiciones que él mismo determina.

Competencias: nivel

Comunicar: reflexión.

Argumetar: reflexión

15. Tras haber llegado a una solución, conviene repasar lo que has hecho con el fin de que tengas un panorama claro de los pasos que seguiste para resolver el problema. Regresa, pues, al punto número **1.** y haz una descripción de lo que hiciste en cada punto.

Fase 1. Exploración del problema y elección de la herramienta matemática

1. Comprobamos si se cumple el acertijo 1
2. Comprobamos si se cumple el acertijo 2

Fase 2. Solución matemática

3. Representamos algebraicamente el acertijo 1
4. Analizamos la representación algebraica del acertijo 1
5. Explicamos cómo se llega al resultado
6. Construimos un acertijo que nos lleve siempre a obtener el mismo número
7. Analizamos la representación algebraica del acertijo 2
8. Explicamos cómo se llega al resultado
9. Construimos un acertijo que nos lleve siempre a obtener el número original
10. Analizamos la representación algebraica del acertijo 3
11. Explicamos que en este caso se debe resolver una ecuación
12. Construimos un acertijo análogo al 3

Fase 3. Solución del problema real y visión retrospectiva

13. Explicamos cómo le hace el abuelo para adivinarlo todo
14. Describimos el proceso

OTRO ACERTIJO

En esta ocasión el abuelo nos pidió:

Piensa en un número de tres cifras que no empiece en cero	731
Escribe el número con los dígitos en orden inverso	137
Resta el número menor al mayor	731 - 137
Tacha un dígito cualquiera del resultado obtenido	~~5~~ 9 4
Dime qué dígitos te quedaron y te diré cuál tachaste	Quedaron 9 y 4
Tachaste un 5	

Desarrolla las siguientes actividades y al final explica qué hace el abuelo.

Vamos a llamar abc al número que pensaste. ¿Cómo lo escribes en orden inverso?

cba

Competencias: nivel>

Argumemtación: conexión.

15. Describe qué se está haciendo en cada uno de los siguientes pasos:

abc = 100a +10b +c	Se está escribiendo la notación desarrollada de abc.
cba = 100c + 10b + a	Se está escribiendo la notación desarrollada de cba.
100a +10b + c – (100c +10b + a)	Se van a restar las expresiones desarrolladas de ambos números
100a - a + 10b – 10b + c -100c	Se están agrupando términos semejantes
99a - 99c	Se escribió el resultado de la resta de términos semejantes.
99 (a – c)	Se sacó 99 de factor común
9 x 11 (a – c)	Se descompuso el 99 en dos factores.

¿Qué se puede deducir de la última expresión? Que el número que se obtiene al restar abc – cba es un múltiplo de 9

¿Qué propiedad tienen los números que son múltiplos de nueve?

Que al sumar sus cifras el resultado es un múltiplo de 9

Explica ahora con el ejemplo que pusiste al principio, qué hace el abuelo para saber qué número tachaste

La información que le doy al abuelo es que los números que no taché son 9 y 4. El abuelo hace mentalmente la suma 9+4=13 y calcula cuánto falta para 18 (el múltiplo de 9 que sigue de 13). Faltan 5, que es el número que taché.

3. ¿Quién es normal?

Temas

Comparar el comportamiento de dos o más conjuntos de datos referidos a una misma situación o fenómeno a partir de sus medidas de tendencia central.

<Situación-problema>

Georgina se había levantado a las 6 a.m. como todos los días cuando iba a la escuela. En la primera hora de clase la orientadora –una joven psicóloga de la UNAM– habló de la violencia familiar; decía que en dos de cada tres hogares había violencia explícita y que eso era considerado "normal" para muchas familias en México… Es común –afirmó la maestra– que los esposos les peguen a las esposas y/o que los padres les den tundas a los hijos. Georgina recordaba que eso nunca pasó en su casa cuando su papá vivía con ella y con su mamá y, por otro lado, también tenía presente que en el edificio donde vivía, con mucha frecuencia se escuchaban las riñas familiares que invariablemente terminaban en golpes. No sabía a qué se refería la maestra con "normal" ni qué era lo "normal". A la salida de la escuela la esperaba su mamá. Abordaron un taxi y el ruletero venía escuchando un noticiero. El locutor estaba entrevistando telefónicamente a un funcionario de la Secretaría de Hacienda.

El locutor –incrédulo– le preguntaba: "¿Cómo es posible que el ingreso promedio en el Distrito Federal sea $41 000?

—Sí, así es. Es un dato duro. Es decir que se calcula con base en los impuestos que recauda la Secretaría.- Contestó el funcionario.

—No, no es posible.

—Son cálculos aproximados pero correctos.

—Ahora resulta que un albañil o un maestro de escuela ganan 41 mil pesos al mes, ¿no?

- No, por supuesto que no, yo no dije eso. Dije que el ingreso promedio es de 41 000 pesos…

En el taxi los tres radioescuchas tampoco lo podían creer. Quizá esa fue la razón por la que Georgina interrumpió preguntando y por ello ya no se pudo escuchar la explicación del funcionario de Hacienda.

—Mamá, ¿Tú cuánto ganas?

—Más o menos $5 000 al mes.

—Sr. Taxista, ¿podría decirme cuánto gana?

—Sí, mucho menos de 41 mil pesos al mes. Fíjate, quitando lo de “la cuenta” que tengo que entregar al dueño y lo de la gasolina, me quedan como $300 al día, más o menos. Y conste que le doy duro a la chamba. Así que haz tus cuentas; trabajo seis días porque el taxi no circula los jueves.

No parecía tener sentido lo que se afirmaba en la radio. Cierto, eso no era lo que le sorprendía a Georgina porque sabía que muchas veces en los noticieros no se dice la verdad, sino que el dato era del gobierno y, ¿por qué habrían de mentir en este caso?

Georgina se sintió intrigada por los 41 mil pesos y decidió que investigaría sobre la veracidad del dato y sobre su significado.

<Misión>

Tu misión consta de dos partes. En primer lugar tienes que determinar si tiene sentido (“si tiene lógica”) lo que se dijo en la radio y, en segundo lugar, que de ser cierto lo que aseguró el funcionario de la Secretaría de Hacienda en la entrevista radiofónica, debes hacer un resumen de las implicaciones de un dato como ése.

Fase 1: Exploración del problema y elección de la herramienta matemática

Para comenzar es importante decidir qué herramienta matemática emplearemos para analizar el problema. Usaremos la estadística, una de las ramas más nuevas de las matemáticas que se emplea en muchos ámbitos de nuestra vida.

Competencias: nivel

Pensar y razonar: reproducción

Nota para el maestro

Es muy importante no hacer una apologética de la estadística. Se trata, en principio, de que los estudiantes se den cuenta de que habitualmente hacen uso de ella y, al final, que reconozcan que la estadística les ofrece criterios consistentes para entender mejor su mundo y, muy particularmente, que con ella obtienen un método para no ser engañados. Es inútil que sea el profesor quien elabore la lista de ejemplos que se pide pues no se trata de convencer a los estudiantes a priori*.*

1. ¿Dónde escuchas de estadísticas? En las transmisiones del futbol, en encuestas sobre política o sobre productos comerciales, cuando se habla de datos sobre educación, salud…

¿A qué se refieren estas estadísticas? En el caso de “las estadísticas del medio tiempo” del futbol, por ejemplo, se hace una lista del número de faltas, tiros de esquina, tiros a gol, del tiempo de posesión, entre otras. En el caso de encuestas se hace mención del porcentaje de preferencias de un candidato en particular o de la preferencia sobre un determinado producto. En el caso de la salud se hace mención al número de mexicanos que padecen tal o cual enfermedad, a cuántos mueren o cuántos tienen seguro y atención médica.

Decimos que la estadística es el área de las matemáticas cuyo propósito es la recolección, clasificación, descripción e interpretación de datos numéricos. Con base en esta definición, ¿son los ejemplos a los que te referiste arriba objeto de estudio de la estadística? Sí.

Nota para el maestro

La estadística se puede dividir en tres áreas básicas, éstas son: la que trata de la recolección de datos, la que trata de la descripción de los datos y, la que elabora proyecciones generales con base en los datos. En este reto el interés se centra en la segunda área; por cierto, se la denomina Estadística Descriptiva, por razones obvias.

Competencias: nivel

Pensar y razonar: reproducción

Nota para el maestro

En caso de que éstas no sean las respuestas que los estudiantes den será necesario poner ejemplos numéricos (con cinco datos es el modelo más simple, ilustrativo y demostrativo).

2. Conviene definir qué es el promedio, la moda y la mediana y analizar sus características:

Escribe con tus propias palabras:

¿Qué es el promedio? Es igual a la media aritmética y es el resultado de la suma de los valores de los datos del conjunto dividido entre el número de datos de la muestra. Esto es: $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n$.

¿Qué es la moda? Es el dato que más se repite. Es importante mencionar que para un conjunto de datos puede haber más de una moda (bimodal o multimodal).

¿Qué es la mediana? Una vez que el conjunto de datos está ordenado de forma creciente o decreciente, la mediana será el dato que divide al conjunto en dos partes iguales. Si el conjunto tiene un número impar de datos el valor de la mediana es inmediato, por ejemplo, sea $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ un conjunto de cinco datos acomodados en orden creciente, entonces X_3 es la mediana. Si el conjunto tiene un número par de datos, la mediana es el promedio de los dos valores intermedios; por ejemplo, sea $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ un conjunto con seis datos ordenados, la mediana es el promedio entre X_3 y X_4. Es decir $\frac{x_3 + x_4}{2}$.

El promedio es una de las medidas que son útiles para describir un conjunto de datos y aunque no es la única manera de representar a dicho conjunto, su cálculo es fácil e históricamente fue la primera de las medidas de tendencia central.

Finalmente, antes de pasar al siguiente punto, investiga qué es una muestra de datos. A continuación escribe con tus palabras qué es: Dado un conjunto de individuos u objetos que definimos como población, como es difícil estudiar a todos y cada uno de los elementos de la población (sobre todo si el conjunto tiene muchos elementos), se escoge para el estudio un subconjunto que se espera sea representativo de la población. Por ejemplo. Sea la población el conjunto de todos los jóvenes entre 11 y 15 años del país, tomamos una muestra de 500 individuos –para fijar ideas– que debería representar a "escala" a la población. La muestra también puede consistir en un subconjunto con una característica particular que se elige expresamente.

Escribe algunos ejemplos de población y muestra de dicha población. Respuesta abierta. Un ejemplo. Población: Todas las mujeres del país. Muestra: 1000 mujeres tomadas al azar a lo largo y ancho del país. Muestra: Las mujeres que tienen más de dos hijos.

Competencias: nivel

Empleo de operaciones: reproducción

Representación: reproducción

Empleo de soportes y herramientas: reproducción

Pensar y razonar: reproducción

Nota para el maestro

En este ejercicio en particular se decidió dar orden creciente a los datos. En la práctica es más conveniente usar este orden porque los estudiantes en futuros cursos elaborarán ojivas y para ello éste es el orden necesario.

3. A continuación aparece una tabla con una muestra de 25 datos que corresponden al tiempo de espera en un banco medido en minutos.

19	21	20	16	8
12	17	16	25	11
13	15	15	16	19
21	12	10	27	20
30	21	16	28	29

Conviene hacer otra tabla y acomodar los valores de menor a mayor (o de mayor a menor). Llena la que aparece a continuación con los valores que conforman muestra y marca aquel dato que corresponda a la mediana. Recuerda que la mediana es el valor con el cual la muestra de datos queda dividida en dos partes, cada una de las cuales tiene la misma cantidad de datos.

¿Cuál es el valor de la mediana? 17 minutos.

8	10	11	12	12	13	15	15	16	16	16	16	17
19	19	20	20	21	21	21	25	27	28	29	30	

¿Cuál es el promedio? 18.28 minutos.

¿Cuál es la moda? 16 minutos, que corresponden al valor que más se repite.

¿Coincide el promedio con alguno de los valores de la muestra de datos? No. ¿Tiene que coincidir? No.

¿Coinciden el valor del promedio, la mediana y la moda? No. ¿Cuál es la mayor? El promedio.

Competencias: nivel

Empleo de operaciones: reproducción

Pensar y razonar: conexión

4. Cambia los últimos dos valores de la tabla anterior por 80 y 90.

8	10	11	12	12	13	15	15	16	16	16	16	|7
19	19	20	20	21	21	21	25	27	28	80	90	

¿Cuánto vale el nuevo promedio? 22.72 minutos. ¿Cuánto vale la nueva moda? Igual que antes de cambiar los datos, 16 minutos. ¿Cuánto vale la nueva mediana? Igual que antes de cambiar los datos, 17 minutos.

Ahora modifica solamente el último dato y el penúltimo déjalo como al principio. El último dato tendrá un valor de 380 minutos.

8	10	11	12	12	13	15	15	16	16	16	16	|7
19	19	20	20	21	21	21	25	27	28	29	380	

¿Cuánto vale el nuevo promedio? 32.28 minutos. ¿Cuánto vale la nueva moda? Igual que antes de cambiar los datos, 16 minutos. ¿Cuánto vale la nueva mediana? Igual que antes de cambiar los datos, 17 minutos.

¿Qué puedes decir de estos resultados? Que cambiando un valor o un par de valores, sobre todo valores extremos de la muestra y dejando al resto inalterado, se puede modificar el promedio sin producir cambios en la moda y en la mediana. En este caso aumenta el promedio porque el valor o los valores de los datos aumentan.

En el último caso, cuando sólo cambió el dato final, ¿cuántos datos de la tabla son mayores que el promedio? Sólo uno, 380. ¿Cuántos son menores? Los 24 restantes. Entonces, ¿qué tan representativa resulta la media aritmética? Muy poco. ¿Por qué? Porque 24 de los 25 datos son menores y sólo uno mayor, asimismo el promedio es diferente a cualquiera de los datos de la muestra.

¿Cuántas veces es más grande el nuevo promedio respecto al valor con los datos originales? 32.28 ÷ 18.28 = 1.7 veces.

¿Qué puedes decir de esto? Que con sólo un dato lo suficientemente grande el promedio aumentó a casi el doble.

¿Podría aumentarse el valor del promedio tanto como se desee cambiando el valor de un único dato? Sí. ¿Cómo? Aumentando mucho un dato.

Aún falta considerar el caso en que los valores extremos más pequeños son alterados. En nuestro ejemplo no puede haber valores negativos porque los datos se refieren al tiempo de espera en un banco para una muestra de 25 personas y, como bien sabes, no hay tiempos negativos.

Considera que los dos nuevos valores extremos menores son de 1 y 2 minutos respectivamente:

1	2	11	12	12	13	15	15	16	16	16	16	|7
19	19	20	20	21	21	21	25	27	28	29	30	

¿Cuánto vale el nuevo promedio? 17.68 minutos. ¿Cuánto vale la nueva moda? Igual que antes de cambiar los datos, 16 minutos. ¿Cuánto vale la nueva mediana? Igual que antes de cambiar los datos, 17 minutos.

Competencias: nivel

Pensar y razonar: conexión

Empleo de operaciones: reproducción

Empleo de soportes y herramientas: reproducción

Nota para el maestro

Este es un resultado que siempre se cumple bajo las condiciones planteadas en el ejercicio (que son bastante generales), sin embargo, no es una demostración de esta regla. La demostarción formal está fuera del alcance de los estudiantes de este nivel.

5. Con base en los resultados obtenidos al variar los valores extremos de una muestra de datos, ¿qué podemos concluir con relación a la variación de la media aritmética, la mediana y la moda? Que el valor de la media o promedio se ve afectada por el valor de los datos extremos, que ni la mediana ni la moda cambian cuando cambian los valores extremos.

Tanto el promedio como la moda como la mediana son medidas de tendencia central que nos auxilian a describir conjuntos de datos. ¿Cuál es mejor? Ninguno y todos. Resulta que en muchos casos sólo conociendo el valor de los tres parámetros es que podemos tener una idea adecuada del conjunto de datos, en otros casos ni siquiera conociendo el valor de los tres parámetros podemos distinguir entre dos muestras.

Considera, por ejemplo, las siguientes series, A y B, de siete datos cada una.

A.

4	12	8	8	10	6	8

B.

21	13	8	8	1	2	3

Evidentemente son dos series de datos diferentes.

Ordénalos de forma creciente.

A.

4	6	8	8	8	10	12

B.

1	2	3	8	8	13	21

¿Cuál es el promedio de la serie A? 8.

¿Cuál es la moda de la serie A? 8.

¿Cuál es la mediana de la serie A? 8.

¿Cuál es el promedio de la serie B? 8.

¿Cuál es la moda de la serie B? 8.

¿Cuál es la mediana de la serie B? 8.

¿Qué puedes concluir?

a) Que en una muestra el valor de la media, la mediana y la moda pueden ser iguales.
b) Que dos muestras de datos diferentes pueden tener el mismo promedio, la misma mediana y moda.

La Estadística Descriptiva, además de tratar de representar conjuntos de datos con base en las medidas de tendencia central, de una manera resumida que permite tener una idea general de los datos, también estudia cuán dispersos están las series de datos por medio de la desviación estándar que no usaremos en este reto.

Competencias: nivel

Comunicación: conexión

6. Antes de seguir adelante es pertinente que elabores una lista de las conclusiones más importantes a las que hemos llegado hasta aquí. En equipos, discute con tus compañeros y escriban la lista con al menos tres conclusiones. Compara los resultados de tu equipo con los del resto del grupo.

A) Que existen medidas que sirven para representar conjuntos de datos.

B) Que el promedio de los datos está influido por los valores extremos de la muestra; cuando estos valores cambian, el promedio cambia y, al mismo tiempo, ni la moda ni la mediana cambian bajo estas condiciones.

C) Que ninguna de las medidas de tendencia central por sí sola es suficiente para describir a los datos.

D) Que hay muestras de datos en donde coinciden los valores del promedio, la moda y la mediana.

E) Que hay muestras de datos diferentes entre sí que pueden tener los mismos valores de estos parámetros y que por ello, incluso, dichos valores son insuficientes para describir adecuadamente a los conjuntos de datos.

Fase 2: Solución matemática>

Con la herramienta matemática que tenemos vamos a abordar la primera parte de la misión, ¿tiene sentido lo que se dijo en la radio respecto al ingreso promedio cuando Georgina viajaba en el taxi? Para analizar esto es necesario que investigues el monto que representa el salario mínimo y el porcentaje de la gente que tiene este ingreso; además, dado que no podemos saber el salario de los ocho millones de personas que viven en la Ciudad de México (y, en todo caso, calcular el promedio sería una labor extenuante), construiremos un ejemplo que nos servirá de modelo de la situación real.

Competencias: nivel

Empleo de operaciones: reproducción

Empleo de soportes y herramientas: reproducción

Pensar y razonar: reproducción

7. Construye una muestra de 10 datos cuyo promedio sea $41 000 con las siguientes condiciones:

a) Que el valor de cinco de los 10 datos sea igual a $1 500 (poco más que el salario mínimo vigente).

b) Que el valor de otros cuatro datos lo obtengas preguntando a cuatro personas cuál es su ingreso mensual.

c) Que el último de los datos necesariamente se ajuste para que resuelvas el problema correctamente, esto es, que el promedio equivalga a $41 000.

Las soluciones son una infinidad, sin embargo el décimo dato quedará determinado por los otros nueve datos. A continuación aparece una tabla con una posible solución verosímil.

1 500	1 500	1 500	1 500	1500
6 000	8 000	15 000	35 000	

Una vez que tienes los nueve datos –los de tu pequeña encuesta y los que corresponden a las personas que ganan el mínimo— ¿cómo obtienes el valor del décimo dato? Se aplica la definición de promedio, esto es:

$$41{,}000 = \frac{5 \times 1{,}500 + 6{,}000 + 8{,}000 + 15{,}000 + 35{,}000 + x}{10}$$

y se despeja x para encontrar su valor.

$$41{,}000 = \frac{71{,}500 + x}{10}$$

$$41{,}000 \times 10 = 71{,}500 + x$$

$$410{,}000 = 71{,}500 + x$$

$$410{,}000 - 71{,}500 = x$$

$$x = 338{,}500$$

1 500	1 500	1 500	1 500	1 500
6 000	8 000	15 000	35 000	338 500

¿El décimo valor es mayor que la media? Sí. ¿Qué puedes decir de un valor así desde el punto de vista del ingreso? Que es mucho dinero. ¿Cuántas personas conoces que ganen tanto? Muy pocas o ninguna.

¿Habrá muchas personas que tengan un ingreso de $41,000? No.

¿Por qué se pide que pongas en los datos de la tabla una moda de $1 500? Porque hay más personas que ganan el salario mínimo que cualesquiera otras.

¿Qué implica que haya muchas personas que ganan poco dinero y, sin embargo, el promedio es grande? Que hay muy pocas personas que ganan mucho dinero.

El ejercicio que acabas de llevar al cabo, ¿es verosímil?

Respuesta abierta. Se supone que concluyan que el ejercicio es verosímil, aunque se pueden hacer variaciones del mismo.

Discute con tus compañeros y escriban sus conclusiones. ¿Cómo le explicarían a Georgina la declaración del funcionario que escuchó en la radio? Respuesta abierta.

Fase 3: Solución al problema real y visión retrospectiva

Nota para el maestro

No sería extraño que los estudiantes contestaran con un "no" a esta pregunta. Sin embargo, si los datos no han sido falseados, el ejercicio es verosímil, por más que el resultado correspondiente al último salario sea mucho mayor que los otros.

¿Tiene sentido lo que escucharon Georgina, su mamá y el taxista en la radio? Sí, estadísticamente el promedio se modifica si los valores extremos cambian. En este caso el ingreso de los más ricos debe ser muy, muy grande.

¿Qué significa esto para el país? Que en México, como en la mayoría de los países, hay riqueza pero está muy mal distribuida.

Competencias: nivel

Comunicación: conexión

Empleo de soportes y herramientas: reproducción

Pensar y razonar: reflexión

8. En su afán por investigar más sobre la veracidad de lo que se dijo en la radio, Georgina encontró en el periódico los siguientes datos sobre los ingresos de los mexicanos.

Tabla I. Distribución del ingreso por hogares en México.

Concepto	**1963**	**1968**	**1977**	**1984**	**1989**	**1992**	**1994**	**1996**
40% más pobre	7.5	8.1	10.4	14.3	12.8	13.8	12.4	13.2
50% intermedio	42.3	43.6	49.5	52.9	49.2	47.7	48.5	48.9
10% más rico	50.2	48.3	40.1	32.8	38.0	38.5	39.1	37.9
%Total de la población	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Tabla II. Condiciones de pobreza en porcentaje de población.

Concepto	**1963**	**1968**	**1977**	**1984**	**1989**	**1996**
Pobreza extrema	63.3	53.7	30.2	23.8	21.7	24.5
Pobreza no extrema	14.8	17.7	29.0	36.1	38.5	28.3
Población no pobre	21.9	28.5	40.8	40.1	39.8	47.2
%Total de la población.	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Puedes investigar datos más recientes acerca de la distribución del ingreso en el país, pues con ellos, es posible efectuar una mejor valoración. Sin embargo, con los datos que investigó Georgina es suficiente.

Observa en la primera tabla la columna correspondiente al año 1977 por ejemplo. Discute con tus compañeros y contesta las siguientes preguntas.

¿Cuál es el porcentaje, respecto al total, del ingreso del sector más pobre de los hogares en México? 10.4%.

¿Y del sector de los hogares más ricos? 40.1%.

¿Qué significa esto? Que los hogares de la gente más rica –que sólo es 10% de la población– de cada peso en el país reciben casi 41 centavos, y que la gente de los hogares más pobres –que constituyen 40% de la población– de cada peso, reciben poco más de 10 centavos.

¿Qué puedes decir para el año 1996? Que mejoró un poco la situación para los hogares más pobres, en ese año, de cada peso, el conjunto de los hogares más pobres recibían ahora poco más de 13 centavos. La brecha entre ricos y pobres disminuyó muy poco.

Ahora observa la segunda tabla. Si suponemos que la población de México en 1989 era de 95 millones, ¿cuánta gente pobre había en el país? Tienes que considerar a los pobres y a los muy pobres. 57 millones.

Si en el año 1996 había en México 100 millones, ¿cuántos pobres o muy pobres había en el país? 52 millones.

¿Qué puedes concluir de esto?

Que hay muchos pobres y pocos ricos y, además, que el ingreso de los más pobres en su conjunto es mucho menor que el de todos los más ricos.

Competencias: nivel

Comunicar: reflexión

9. Tras haber llegado a una solución, conviene repasar lo que has hecho con el fin de que tengas un panorama claro de los pasos que seguiste para resolver el problema. Regresa, pues, al punto número **1** y haz una descripción de lo que hiciste en cada punto.

1) Señalamos en qué tipo de eventos se utilizan las estadísticas.

2) Definimos las medidas de tendencia central: media, mediana y moda.

3) Analizamos mediante un ejemplo las características de las medidas de tendencia central.

4) Calculamos los parámetros para una muestra y estudiamos cómo cambiaban sus valores al cambiar los valores extremos de la muestra.
5) Observamos que puede haber dos muestras de datos diferentes para los cuales la media, mediana y moda sean iguales.
6) Elaboramos una lista con las conclusiones generales sobre las medidas de tendencia central.
7) Construimos una muestra de 10 datos que cumpliera con determinadas condiciones para concluir que sí tenía sentido la noticia escuchada en la radio.
8) Se investigaron datos sobre el ingreso y la distribución del ingreso en nuestro país. Analizamos los datos y llegamos a una conclusión.

Haz una revisión del proceso para decidir si lo hecho es correcto y las conclusiones adecuadas según la información que tienes. Respuesta libre. Se espera que concluyan que todo el proceso es consistente, los cálculos correctos y las conclusiones adecuadas.

4. Anorexia a escala

Temas

Relación funcional. Relaciones de proporcionalidad. Representación de la información. Promedio y variabilidad.

Situación-problema

Las tres niñas se entretenían con sus muñecas. Los chicos jugaban al futbol. Juan, Luis y Emeterio habían perdido la *reta* y tenían tiempo para descansar y refrescarse. Ellos justificaron su derrota argumentando que la causa del segundo gol que les metieron fue el cansancio. La verdad era otra: entre Luis y Juan hubo un error de comunicación, cada uno supuso que el otro tomaría la pelota y ese instante de indecisión lo aprovechó Pepe, "el zurdo", para anotar.

Mientras se reponían, advirtieron el juego de las niñas. Las pequeñas jugaban a que sus muñecas iban a trabajar: una era maestra, otra era cantante de rock y la tercera conducía un taxi. Parecía un juego entretenido y los tres notaron con especial atención a una muñeca que era alta, muy espigada y pelirroja. Juan le pidió a su hermana Carla que se la prestara un momento.

—¿Ya vieron esta muñeca?— dijo.

—¡Claro!, es una Barbie— afirmó Emeterio.

—¿A poco tú juegas con muñecas?

—No, pero a las niñas les gusta mucho. Mi hermana siempre ha querido una y…

En ese momento Luis —con malicia, al ver que se acercaba Fernanda y que sus dos amigos no la habían visto— interrumpió y afirmó:

—La verdad es que es la más bonita, ¡imagínense a una mujer así!

—Sí, sería guapísima.

—Sí, estaría…

Fernanda, que ya estaba junto a ellos, irrumpió en la plática y les preguntó:

—¿De qué hablan? ¿Quién está guapa?

—De la muñeca, por supuesto— contestó Luis.

—A mí me parece que está muy flaca y que las mujeres no son así.

—Estás celosa— dijo Juan, sin creerlo sinceramente, pues Fernanda, además de jugar bien futbol, era inteligente, muy diferente a la Barbie y realmente bonita.

—No sé, ¿quién sabe cómo sería la vida de una chica de 20 años que midiera 1.70 metros y que fuese el modelo a escala real de esta muñeca?

Misión

Tu misión a lo largo de las siguientes actividades, es decidir cómo sería la vida de una mujer, que sea un modelo a escala de la Barbie.

Fase I: Exploración del problema y elección de la herramienta matemática

Antes de empezar a hacer cuentas sin sentido, haremos un plan de trabajo y construiremos las herramientas matemáticas que nos serán útiles.

Nota al profesor

Hay varias maneras de enfrentar esta investigación; todos los análisis conducen a conclusiones semejantes. El primero es la proporcionalidad de las medidas; el segundo, usando el cálculo de volúmenes; y el tercero, mediante la razón fuerza–peso. Aquí abordaremos el enfoque relativo a la proporcionalidad.

Con la intención de saber cómo sería la vida de una joven así, los cuatro chicos le tomaron las medidas a la famosa muñeca Barbie.

En la tabla que aparece a continuación están las medidas en centímetros de un modelo de dicha muñeca.

Competencias: nivel

Representación: reproducción

Nota al profesor

Es probable que los estudiantes no tengan acceso a la muñeca y por ello se les otorgan los datos. No obstante se recomienda que ellos mismos tomen las medidas.

Cabe mencionar que existen varios modelos del juguete con distintas dimensiones y estilos. Las conclusiones a las que se llega en este reto, son válidas para cualquiera de ellas.

Para simplificar, se está suponiendo que las extremidades son cilindros y se presenta el valor del perímetro de la parte más ancha de dichos miembros. Ninguna de estas partes del cuerpo es un cilindro. En consecuencia, no existe un único valor del *contorno. En todo el análisis, lo importante es el cambio en las dimensiones y no las dimensiones en sí. Recuerde que medir la parte más ancha, la estimación arrojará resultados excedidos.*

1. Considera estas medidas o, mejor aún, tómalas tú mismo de una muñeca. Los datos están en centímetros.

Medidas de la muñeca Barbie (cm)				
Estatura	35.4		**Longitud del muslo**	9.7
Busto	15.0		**Longitud de la pantorrilla**	8.8
Cintura	9.8		**Perímetro del cuello**	4.7
Cadera	15.9		**Longitud del tronco (de la cervical al cóccix)**	10.8
Perímetro del brazo	4.5		**Perímetro del antebrazo**	2.7
Perímetro de la pantorrilla	5.8		**Perímetro del muslo**	9.1
Longitud del brazo	4.7		**Longitud del cuello**	2.4
Longitud del antebrazo	5.1			

Tabla 1. Medidas de la muñeca Barbie.

Competencias: nivel

Comunicación: conexión.

Nota al profesor

Aunque es tentador escoger a individuos de la clase, es muy importante tener presente las consecuencias emocionales negativas para algunos estudiantes. Considérese que podrían realizar bromas muy fuertes entre ellos sin medir sus repercusiones

Se sugiere que el voto sea secreto. Asimismo, dependiendo de quiénes constituyan la lista de elegibles, la secrecía del voto será imperativa.

Sugerencia didáctica

Aunque el texto señala que este apartado deberá realizarse como una discusión en grupo, existen formas de llevarlo a cabo sin la necesidad de usar mucho tiempo en clase. Una posible técnica consiste en que el estudiante escoja los seis personajes y haga una encuesta. El tamaño de la muestra dependerá del tiempo que se le quiera dedicar.

2. Haz lo que se pide y discute con tus compañeros de grupo las siguientes cuestiones.

Entre todo el grupo escogerán a seis personas que consideren bellas. Es indispensable no lastimar a nadie. Se aconseja elegir figuras públicas o artistas.

Todos emitirán dos votos. El primero es por aquél personaje, de los seis, que consideren sea el más guapo o la más guapa, puede haber abstenciones. El segundo voto será por aquél o aquélla, dentro de los seis, que consideren el menos agraciado o agraciada, también puede haber abstenciones.

Se contarán los votos, tanto para quien resulte el personaje más atractivo, como para la figura pública que resulte menos atractiva.

Nota al profesor

Lo importante de esta actividad es la discusión y no tanto las conclusiones. En todo caso, la única resolución sobre la que habría que poner énfasis es el valor del desacuerdo.

Hagan las siguientes preguntas al grupo: A) ¿Fue unánime la elección del personaje más atractivo? B) ¿Fue unánime la votación para la figura menos atractiva? C) ¿Hubo abstenciones? D) ¿Aquellos que se abstuvieron podrían explicarnos por qué lo hicieron? E) ¿La persona más encantadora obtuvo tantos votos como la menos atractiva? F) ¿Hay algún atributo que todos consideren que es necesario tomar en cuenta para que alguien resulte bello o bella? G) ¿Hay algún criterio con el que todos estén de acuerdo para definir qué es lo bello?

Competencias: nivel

<Pensar y razonar: reflexión>

3. De regreso al asunto de la Barbie, piensa y escribe qué herramientas matemáticas necesitarás para abordar este problema. Puedes discutirlo con tu equipo.

Razones y proporciones y regla de tres.

Para abordar el problema, Juan, Luis, Emeterio y Fernanda decidieron que lo mejor era pensar en una muñeca de estatura real y acordaron: —Vamos a hacer crecer a la muñeca Barbie®. Supusieron que el modelo a escala mide 170 centímetros y que esta mujer fantástica (no porque sea un modelo a seguir, sino porque no es real) guarda las mismas proporciones que la muñeca.

Competencias: nivel

Comunicación: reproducción

Construcción de modelos: conexión

Nota al profesor

< Dirija la discusión con el propósito de que los estudiantes aborden el problema desde las relaciones de proporcionalidad.>*

4. Explica cómo obtendrías las medidas de la nueva joven virtual.

Respuesta modelo. Para calcular cada una de las medidas de la chica de 170 cm de estatura, se parte del hecho de que dos longitudes homólogas de objetos a escala guardan una relación, que es constante al considerar las demás relaciones. Es decir, son proporcionales. La constante de proporcionalidad es el factor de escala. En este caso usaremos la estatura y tenemos la siguiente proporción:

$$\frac{\text{Estatura de la joven virtual}}{\text{Estatura de la muñeca Barbie}_{®}}.$$

Competencias: nivel

Comunicación: reproducción

Empleo de operaciones: reproducción

5. Explica cómo obtener la medida del busto y encuéntrala.

Se establece una proporción con el cociente de las estaturas y el de los bustos, se encuentra el valor de la incógnita a partir de:

$$\frac{\text{Estatura joven virtual}}{\text{Estatura mu–eca Barbie}_{ø}} = \frac{\text{Busto joven}}{\text{Busto mu–eca}}$$

Entonces $\frac{170}{35.4} = \frac{x}{15.0}$, o bien $x = \frac{170 \times 15.0}{35.4}$ =72.03 ≈ 72.

Competencias: nivel

Comunicación: reproducción

Empleo de operaciones: reproducción

6. Usando la misma técnica ahora calcula la medida de la cintura.

$\frac{170}{35.4} = \frac{x}{9.8}$; o bien $x = \frac{170 \times 9.8}{35.4}$ =47.06≈47.0.

Competencias: nivel

Comunicación: reproducción

Empleo de operaciones: reproducción

7. Antes de seguir calcula los cocientes escritos a continuación. Llena los espacios vacíos.

$$\frac{\text{Estatura de la joven virtual}}{\text{Estatura de la muñeca}} = \frac{170}{35.4} = 4.8$$

$$\frac{\text{Busto joven}}{\text{Busto muñeca}} = \frac{\boxed{72.0}}{15.0} = 4.8$$

$$\frac{\text{Cintura joven}}{\text{Cintura muñeca}} = \frac{\boxed{47.04}}{\boxed{9.8}} = 4.8$$

Competencias: nivel

Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico: conexión

8. Contesta.

¿Encuentras algún valor que se repite, es decir, alguna regularidad?

Respuesta modelo. El cociente es el mismo en los tres casos.

Explica cómo puedes usar este hallazgo para hacer los cálculos.
Respuesta modelo. Multiplicando las medidas de la muñeca por el 4.8, se obtienen las medidas de la joven.

Prueba tu conjetura. Cintura de la muñeca × 4.8 = 47.06, que es la misma cifra que obtuviste antes para la cintura de la joven virtual. Realiza más intentos, usando ambos métodos, y revisa si obtienes las mismas cantidades.

CONCLUSIÓN. Cuando calculamos la razón de la estatura de la joven virtual entre la estatura de la muñeca, y luego lo hicimos con ambos bustos y ambas cinturas, obtuvimos una constante: 4.8. A este cociente/número se le llama **factor de escala**. El uso de este factor de escala simplifica las operaciones.

Fase 2: solución matemática

Ahora tenemos un plan de trabajo y la herramienta matemática adecuada para llevarlo a cabo. Lo que sigue es usar dicha herramienta.

Competencias: nivel
Empleo de operaciones: reproducción
Nota al profesor
Se decidió redondear las medidas finales a un decimal para mantener la concordancia con los criterios de medición en ciencias. empero, para los cálculos es mejor usar dos o tres cifras decimales y redondear al final.

9. Completa la tabla con las medidas a escala de la joven virtual.

	Medidas de la joven virtual (cm)
Altura	170
Busto	72.0
Cintura	47.0
Cadera	76.3
Perímetro del brazo	21.6
Perímetro del muslo	43.7

	Medidas de la joven virtual (cm)
Perímetro de la pantorrilla	27.8
Longitud del brazo	22.6
Longitud del antebrazo	24.5
Longitud de la pierna (muslo)	46.6
Longitud de la pantorrilla	42.2
Longitud del cuello	11.5
Perímetro del cuello	22.6
Longitud del tronco (completo)	51.8
Perímetro del antebrazo	13.0

Tabla 2. Medidas de la joven virtual.

—Ahora hagamos algunas comparaciones con las medidas correspondientes a las chicas reales— dijo Emeterio.

Competencias: nivel

Empleo de soportes y herramientas: reproducción.

Construcción de modelos: reproducción.

Nota al profesor

Se presentan dos sucesiones de datos para ampliar la gama de resultados posibles, aunque los estudiantes trabajarán con una sola sucesión.

10. Completa la siguiente tabla con los promedios de las medidas de tus compañeras.

Tabla 3. Medidas de muchachas reales.

Medidas promedio de compañeras (cm)				
Estatura	163 170		**Longitud del muslo**	46 48
Busto	87 96		**Longitud de la pantorrilla**	40 45.3

Cintura	74 85		**Perímetro del cuello**	29.3 35
Cadera	100 109		**Longitud del tronco (de la cervical al cóccix)**	39 39
Perímetro del brazo	29.5 32		**Perímetro del antebrazo**	25 25
Perímetro de la pantorrilla	36 40		**Perímetro del muslo**	46 51
Longitud del brazo	35 34		**Longitud del cuello**	9 10
Longitud del antebrazo	24 24.6			

Competencias: nivel

Empleo de lenguaje técnico: conexión

Representación: conexión

11. Compara las tablas 1, 2 y 3. ¿Existen algunas diferencias entre los valores de las tablas? ¿Cuáles?

Cuatro importantes, dos de las cuales resultan evidentes. La longitud del brazo de la chica Barbie no es proporcional a la del antebrazo: la longitud del antebrazo de los humanos es menor, en general, que la del brazo, y esta chica inventada tiene apreciablemente más largo el antebrazo. El segundo hecho que llama la atención es la medida de la cintura; se trata de una chica excepcionalmente delgada. Por último, debe considerarse el reducido volumen del tronco, por un lado, la medida del busto corresponde al tórax con los senos incluidos. Si restamos la parte correspondiente a los senos, el volumen del tórax se reduce aún más. Por otro lado, la pequeñez de la cintura contribuye todavía más a la reducción del volumen del tronco. En el caso de la modelo a escala, también destaca la longitud del cuello; éste es muy desproporcionado.

Para tener otro punto de comparación, Juan, Fernanda, Luis y Emeterio investigaron las medidas normales de las chicas que participan en concursos de belleza. Encontraron que en agosto de 2005, se efectuó el concurso Miss México. Todas las concursantes eran altas y bastante delgadas. La menor medida de cintura de entre todas las jóvenes fue de 58 centímetros.

Competencias: nivel

Pensar y razonar: reproducción

12. Contesta.

¿Cómo es la chica Barbie con relación a esta concursante?

Todavía más delgada.

—Hicimos los cálculos haciendo crecer la muñeca a una altura de 170 cm, pero este valor es alto respecto la estatura de la mayoría de las mujeres del país— indicó Fernanda.

Competencias: nivel

Empleo de operaciones: reproducción

13. Completa la tabla y observa cómo serían las medidas si la joven Barbie® fuera más menuda, digamos de 1.60 m de estatura.

	Muñeca Barbie®	**Joven virtual 1. Estatura: 170 cm.**	**Joven virtual 2. Estatura: 160 cm.**
Altura	35.4	170	160
Busto	15.0	72.0	67.8
Cintura	9.8	47.0	44.3
Cadera	15.9	76.3	71.9
Perímetro del brazo	4.5	21.6	20.3
Perímetro del muslo	9.1	43.7	41.1
Perímetro de la pantorrilla	5.8	27.8	26.2
Longitud del brazo	4.7	22.6	21.2
Longitud del antebrazo	5.1	24.5	23.1
Longitud de la pierna	9.7	46.6	43.8
Longitud de la pantorrilla	8.8	42.2	39.8
Longitud del cuello	2.4	11.5	10.8
Perímetro de cuello	4.7	22.6	21.2
Longitud del tronco	10.8	51.8	48.8
Perímetro del antebrazo	2.7	13.0	12.2

Tabla 4. Medidas de una nueva joven virtual (2) con estatura de 1.60 m.

¿Cómo son las medidas de la nueva joven Barbie comparadas con la primera joven?

Aún menores.

Fase 3: Solución del problema real y visión retrospectiva

Ahora, en esta tercera fase, podemos responder las preguntas de la misión y recapacitar en lo que hemos descubierto.

Competencias: nivel

Comunicación: reproducción

Pensar y razonar: conexión

14. Contesta

¿Qué problemas podría tener una chica con un tronco tan delgado? Explica tu respuesta con base en los cálculos hechos.

Respuesta modelo. Para caber dentro de un cuerpo con una medida de volumen tan pequeño, necesariamente los órganos estarían reducidos.

Fernanda formuló las siguientes preguntas: suponiendo que la joven Barbie comiera bien, ¿qué consecuencias tendría esta excesiva delgadez para su vida? ¿Podría realizar sus funciones fisiológicas de manera normal? ¿Cómo sería su temperatura? ¿Podría hacer todo lo que hacemos nosotros, como jugar al futbol, estudiar, cargar cosas?

Competencias: nivel

Comunicación: reflexión

Pensar y razonar: reflexión

Nota al profesor

La Barbie está diseñada para que resulte atractiva o agradable como muñeca a su tamaño. Sin embargo, al escalarla resulta una entidad anatómicamente monstruosa y fisiológicamente no funcional. Por ejemplo, una "Chica Barbie" estaría obligada a comer todo el día para mantener una temperatura normal.

Es verdad que varias de las conclusiones que se incluyen en la respuesta se derivan de un análisis de volúmenes y de masa que no hacemos en este capítulo. Estamos suponiendo, sin embargo, que la intuición o una buena plática puede guiar a los estudiantes hasta ellas.

15. Anota tus respuestas a las preguntas de Fernanda y después compáralas con las de tus compañeros.

Respuesta modelo. El volumen del tronco sería tan reducido que los órganos internos no tendrían el tamaño suficiente para ser funcionales. El calor corporal, que se genera por unidad de volumen, sería insuficiente para mantener las funciones vitales y, eventualmente, moriría de frío. Los músculos, al ser tan delgados, no tendrían la fuerza suficiente como para sostener ni los miembros ni el cuerpo mismo de la joven. Por otro lado, si sus órganos no funcionan bien, no podría, por ejemplo, producir la glucosa suficiente para darle energía a sus músculos, ni a su cerebro, por tanto tendría serios problemas para jugar o estudiar.

Es probable que conozcas a alguien que sea médico. Pregúntale si tus conclusiones son adecuadas y cualquier otra duda que te haya surgido a partir de este estudio en relación con una delgadez excesiva.

Competencias: nivel

Representación: reproducción

16. Compara la medida del cuello de las dos jóvenes virtuales con la medida de la compañera. ¿Cómo es el cuello de las Barbies comparado con el de tu compañera?

Demasiado largo.

Ahora compara la medida de la longitud del brazo. ¿Cómo es la de las Barbies?

Demasiado corta.

¿Y la del perímetro del busto?

Muy pequeña.

Si yo te dijera que conozco una chica con cuerpo de anguila, cuello de jirafa, brazos de orangután y piernas de palillo, ¿pensarías que es atractiva?

No.

¿Puedes explicar por qué le parecía atractiva la muñeca a Luis? Usa las conclusiones a las que llegaste en el punto **2.** para tu respuesta.

Aquí se espera una opinión del estudiante, donde quede claro que si la muñeca le pareció atractiva a Luis, fue por razones personales, pero no porque sea un modelo a seguir. También podría introducirse la idea de que la muñeca fue creada para agradar la vista en el tamaño que tiene, pero no representan medidas reales.

Ahora es tiempo de concluir, revisar el proceso que seguimos, validar los modelos usados y de discutir las soluciones reales y los límites de los modelos usados.

Competencias: nivel

Comunicación: reflexión

Argumentación: reflexión

17. Contesta.

Fíjate cómo son las patas de los elefantes, las vacas y las jirafas. ¿Cuáles son más anchas? ¿Es mucha la diferencia en lo ancho? ¿Por qué?

Respuesta modelo. Las más anchas son las de los elefantes, seguidas por las de las jirafas y las de las vacas. La diferencia de anchuras entre las patas de los elefantes y las otras dos especies es mucha. Pero la diferencia entre las patas de las vacas y las jirafas no es tanta. La razón es el peso: entre más pesado es un ser, mayor anchura requieren sus patas para poder sostenerlo.

Fíjate en un par de árboles de la misma especie. Si uno es joven y el otro viejo, ¿cómo son los troncos?

El tronco del viejo es más ancho.

¿De qué tamaño es la mosca más grande que hayas visto? ¿Cuál sería su masa?

Un moscardón. La masa es de unos pocos gramos.

¿Cuál es el arácnido, insecto o gusano más grande que has visto?

Una mariposa negra, una mantis, una tarántula o un escorpión.

¿Cuál es el mayor organismo vivo conocido que existe o ha existido?

La secuoya gigante (un árbol que aún crece en la costa oeste de Norteamérica).

¿Cuál es el animal más grande que ha existido?

La ballena azul.

¿En dónde vive ese animal?

En el mar.

¿Por qué un animal tan grande sólo puede vivir ahí?

Porque en el agua “se pesa” menos y así es posible sostener su gran masa. Una ballena no podría vivir en tierra, pues su estructura ósea se colapsaría por el enorme peso.

¿Cuál es el mayor crustáceo?

El cangrejo araña (que también vive en el mar).

¿Los padecimientos que sufre la chica virtual tipo Barbie al aumentar su escala los sufrirían otros organismos?

Sí. La cuestión es la misma siempre: el grosor de las piernas o extremidades no sería suficiente para sostener al organismo crecido. Así también con los demás padecimientos.

Ahora, ¿podrías explicar por qué no hay hormigas gigantes? Discútelo con tus compañeros y escribe tus conclusiones.

Respuesta modelo. Porque necesitarían tener patas desproporcionadamente más anchas, de lo contrario se quebrarían.

Competencias: nivel

Argumentación: reflexión

Pensar y razonar: reflexión

18. Considera las siguientes preguntas. Puedes compartir tus opiniones con tus compañeros. Anota al final tu opinión y comentarios.

¿Te has puesto a reflexionar sobre la veracidad de las declaraciones que escuchas? ¿Puedes juzgar dichas declaraciones si se habla de un gusto personal? ¿Cuándo puedes juzgar una declaración? ¿Puede la ciencia, la matemática en particular, otorgar algunos criterios para orientar nuestras opiniones? En concreto, ¿las matemáticas sirven para auxiliarnos en la valoración de lo que consideramos estético? Con base en lo que tú sabes de matemáticas, ¿es posible medir cuán deseable, funcional o pertinente es aquello que la mayoría considera bello?

Conclusiones.

Con mucha frecuencia oímos declaraciones generales y no nos detenemos a reflexionar sobre su veracidad y sobre las consecuencias, en caso de que dichos decretos fuesen ciertos. Lo importante es que tenemos criterios para determinar si tales opiniones son falsas. Por ejemplo, Rocío afirma que “el volumen de un cubo es igual a la longitud de alguna de sus aristas elevada al cubo” y Pepe dice que “México es el país más extenso del mundo”.

También es común que las personas hablen sobre lo que les gusta y lo que les disgusta. En estos casos nadie puede asegurar que tu opinión sea cierta o falsa. Por ejemplo, que tú prefieras el helado de vainilla o que tal persona de tu clase te parezca más atractiva aunque, por cierto, sea otra a quien la mayoría considere más guapa o guapo.

Nos referimos al primer tipo de aseveraciones, como conocimientos y al segundo, como opiniones. Es competencia de la ciencia analizar el primer tipo de aseveraciones.

Sin embargo, debes tener presente que a veces declaramos ideas que no son fáciles clasificar como conocimiento o como opinión. Este hecho es el origen de muchas discusiones y desacuerdos –que ocasionalmente pueden conducir a conflictos– pero que en definitiva también hacen la interacción entre las personas muy interesante. Éste es el campo natural de la filosofía o de las ciencias sociales, aunque también las creencias que surgen de la religión y de los deportes caben en este conjunto.

En estas líneas el estudiante puede escribir sus pensamientos, ideas, comentarios y opiniones de manera libre.

ANEXO 1

PORCENTAJE DE ALUMNOS CON NIVEL ALTO EN MATEMÁTICAS.

Porcentaje de alumnos de 3° de secundaria con logro educativo alto en matemáticas por entidad federativa según modalidad, 2002/2003

Entidad federativa	Estatal	Secundaria	
		General	Técnica
Aguascalientes	19.0	25.0	18.6
Baja California	17.3	16.0	16.3
Baja California Sur	26.8	28.3	26.1
Campeche	14.7	20.0	16.6
Coahuila	13.1	13.5	8.6
Colima	24.0	23.6	23.2
Chiapas	6.4	9.5	12.6
Chihuahua	15.3	14.5	18.1
Distrito Federal	29.7	22.5	34.9
Durango	23.7	16.3	23.5
Guanajuato	17.7	16.4	18.9
Guerrero	13.0	21.7	6.3
Hidalgo	12.5	21.1	12.4
Jalisco	19.6	16.5	24.8
México	14.0	11.8	15.5
Michoacán	21.8	16.5	19.1
Morelos	20.1	20.8	17.5
Nayarit	18.8	19.3	21.3
Nuevo León	18.1	16.1	11.0
Oaxaca	9.6	9.7	16.2
Puebla	19.4	14.4	18.4
Querétaro	17.6	17.9	14.6
Quintana Roo	19.3	16.6	15.3
San Luis Potosí	17.1	14.9	15.7
Sinaloa	15.9	17.6	12.6
Sonora	11.3	13.4	11.7
Tabasco	12.9	9.1	10.7
Tamaulipas	16.3	16.0	9.5
Tlaxcala	14.2	16.8	17.2
Veracruz	18.9	24.6	13.1
Yucatán	14.2	12.8	9.8
Zacatecas	13.3	20.6	19.7
Nacional	**17.2**	**16.4**	**17.2**

Fuente: INEE, Dirección de Pruebas y Medición, Pruebas Nacionales-2003.

ANEXO 2
REZAGO EDUCATIVO EN PROFESORES

Porcentaje de docentes de preescolar y primaria que cumplen con el estándar de escolaridad por entidad federativa según modalidad, 2002

Entidad federativa	Preescolar		Primaria	
	General	Indígena	General	Indígena
Aguascalientes	49.3		51.0	
Baja California	55.5	65.1	47.4	73.5
Baja California Sur	54.0		48.3	
Campeche	43.8	50.3	51.5	63.9
Coahuila	47.4		44.0	
Colima	47.7		45.8	
Chiapas	60.3	62.9	51.6	44.3
Chihuahua	50.0	38.8	50.4	38.9
Distrito Federal	37.5	60.0	29.6	61.9
Durango	52.6	40.0	36.7	66.2
Guanajuato	32.4	0.0	32.5	30.8
Guerrero	42.1	50.5	31.3	44.4
Hidalgo	45.6	32.5	36.7	30.9
Jalisco	60.7	78.8	51.7	65.6
México	51.0	73.7	38.2	68.4
Michoacán	51.4	66.8	41.6	55.7
Morelos	42.2	58.8	32.4	44.7
Nayarit	43.3	57.7	35.2	38.3
Nuevo León	46.0	22.2	52.5	77.1
Oaxaca	58.8	31.3	41.7	29.1
Puebla	45.4	61.1	38.9	53.6
Querétaro	47.3	53.9	41.6	59.6
Quintana Roo	60.9	67.4	50.0	59.2
San Luis Potosí	27.6	47.4	34.1	40.4
Sinaloa	49.9	69.7	54.6	59.4
Sonora	65.5	62.1	58.6	65.4
Tabasco	64.3	69.8	53.0	58.5
Tamaulipas	43.6		50.4	
Tlaxcala	43.2	67.3	33.1	54.8
Veracruz	50.2	42.9	32.2	37.8
Yucatán	47.8	44.7	43.3	44.2
Zacatecas	47.9		39.4	
Nacional	**47.6**	**50.9**	**40.7**	**42.7**

Fuente: INEE, estimaciones a partir de las bases de datos de la Coordinación Nacional de Carrera Magisterial.

ANEXO 3
CONTRATO

Toda relación humana se basa en la aceptación de determinadas reglas, la enseñanza-aprendizaje no es una excepción. Muchas veces, sin embargo, las reglas implícitas suelen ser más fuertes y determinantes que las explícitas. En este proyecto funcionó muy bien el establecer las reglas explícitamente bajo la forma de un contrato elaborado y discutido entre el docente y los estudiantes. Ponemos a consideración de cada docente este instrumento como un elemento más de relación. Es el mismo grupo (docente y alumnos) quienes mejor pueden decidir si puede funcionar o no. Evidentemente los puntos aquí transcritos tiene que ver con el curso particular impartido en el año 1993-1994 y no puede ser trasladado a cualquier otro, ni aún en le mismo colegio ni con el mismo docente.

CONTRATO

1° Cuando trabajamos en equipo respetamos el tiempo y la necesidad de aclaraciones de los otros, esperando nuestra oportunidad.

2° Cuando trabajamos “sociabilizando” guardamos silencio y pedimos la palabra esperando que sea dada.

3° Los chistes son aceptados siempre y cuando no boicoteen la clase. Deben ser explícitos, para toda la clase.

4° De ninguna manera se permite burlarse de la opinión o comentario de un compañero

5° En todo momento nuestro comportamiento será responsable

6° Todos tenemos derecho a que nuestras dudas sean aclaradas completamente

7° Todos los trabajos deberán ser presentados con limpieza y guardados después de ser corregidos para presentarlos juntos a final del curso.

ANEXO 4

"Basta" (juego de habilidad y rapidez aritmética con elementos de pre-álgebra)

"Lotería" (juego de estructuración e integración de conceptos y problemas aritméticos)

BASTA

REGLAS:

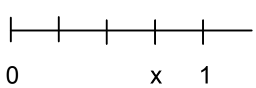
Para seleccionar los números a y b, un jugador cuenta mentalmente desde –20 hasta 20 y debe decir el número en el que va su cuenta cuando otro jugador le dice BASTA. Este proceso se repite hasta tener los valores de a y b para las cuatro filas.

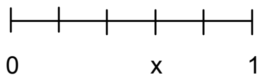
El juego consiste en llenar la tabla. Cuando algún jugador acabe, dice: BASTA. En ese momento todos suspenden el juego. Se anotan 5 puntos por cada respuesta correcta.

a	b	$a+b$	$a-b$	¿$a=b$ $a<b$ $a>b$?	PUNTOS
-5	3				
-7	7				
-4	9				
-2	-1				
				TOTAL	

LOTERÍA

42 cartones distintos de este estilo, conteniendo en total N ejercicios distintos

Operación $1-\frac{3}{7}$	Recta numérica $x=$ 	Operación $\frac{(-2)(-5)}{13-11}$	Tenía $10,000 y gasté sus $\frac{3}{5}$. ¿Cuánto dinero me quedó?
Operación $(4-7)^4$	Operación $2.19 \div 0.3$	Operación $0.27-0.3$	Hallar el MCD de 28 y 42

Operación $1-\frac{4}{9}$	Recta numérica $x=$ 	Operación $\frac{(-3)(-4)}{15-11}$	Tenía $5,000 y gasté sus $\frac{4}{5}$. ¿Cuánto dinero me quedó?
Operación $(5-7)^3$	Operación $3.48 \div 0.4$	Operación $0.18-0.2$	Hallar el MCD de 21 y 42

N tarjetas con las respuestas

ANEXO 5

PROBLEMAS 1° de secundaria

1. El reloj de un taxímetro por un viaje de 4 Km. marcó $6. Al hacer un viaje de 8 Km. yo esperaba que me cobrasen $12, pero para mi sorpresa el taxímetro marcó solo $10! Por lo que sin decir nada pague lo que indicaba el reloj, Sin embargo me quede pensativo… yo sabía que el primer reloj marcaba bien, ya que es un viaje que hago habitualmente y siempre me cobran lo mismo. ¿Estaría mal el segundo taxímetro?
2. ¿Cuál es el menor número natural que tiene exactamente cinco divisores distintos?
3. Un niño que nace con 3 Kg. de peso, al mes pesa 4 Kg. ¿Cuánto pesara a los 20 años?
4. Sabiendo que el radio de la Tierra es de aproximadamente 6370 km, ¿qué largo debe tener una cinta para rodear la Tierra por el Ecuador? ¿cuántas personas se necesitan para rodear la Tierra dándose la mano, si cada una ocupa en promedio un metro de ancho? ¿Alcanzaría la población de México?
5. Expresa con 4 cuatros y las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división) los números del cero al diez (puedes usar paréntesis si lo necesitas).
6. ¿Puede haber un porcentaje mayor al 100 %? Justifica tu respuesta, y en caso de ser afirmativa inventa un ejemplo.
7. ¿Puede haber un porcentaje menor al 0%? Justifica tu respuesta y en caso de ser afirmativa inventa un ejemplo.
8. ¿Cuál sería un criterio de divisibilidad por 15?
9. Un enfermo debe tomar una aspirina cada media hora ¿En cuanto tiempo se tomara cuatro aspirinas con letra?
10. Sí has entrado 3 veces a un lugar, ¿Cuántas veces has tenido obligadamente que salir?
11. Una campana suena con 10 segundos de intervalo entre dos repiques, otra con 20 y otra con 24 segundos de intervalo. Si dan el primer golpe simultáneamente, ¿Después de cuántos segundos volverán a coincidir los repiques?
12. ¿Cual es el menor número que multiplicado por 60 da un cuadrado perfecto?
13. ¿Cuánto es $1\frac{2}{3}$ de 12? Explica como lo hallaste.
14. ¿Cuántas cifras tiene un número que contiene hasta centenas de millón?
15. Sí el primer día de un mes fue sábado y el último día también fue sábado, ¿De qué mes se trata?
16. El producto de 5 números enteros positivos y consecutivos es 2520. ¿En cuántas unidades difiere el primer número del último?
17. Si sabes que el cuadrado de un número "x" termina en 6. ¿En cuáles cifras puede terminar "x"?
18. Un ladrillo pesa 1kg más medio ladrillo. ¿Cuánto pesa el ladrillo?

19. Con una lupa que aumenta 4 veces, se observa un ángulo que mide dos grados. ¿Con qué medida se ve el ángulo?
20. ¿Cuánto vale la suma de los factores primos de 170?
21. ¿Cuántas cifras tiene un número que contiene hasta centenas de millón?
22. Un sastre corta transversalmente de una pieza de tela, un metro cada día. ¿Cuántos días tardara en cortar en cortar una tela de 10 metros de largo?
23. Pedro presume que todavía es joven. Si se divide su edad por 2, 3, 4, 5 ó 6, el residuo es uno. ¿Cuál es la edad de Pedro?
24. ¿Cuánto cuestan 5.5 metros de tela a $ 12 el metro?
25. Una cartulina cuadrada de un metro de lado se recorta totalmente en cuadritos de 1 milímetro de lado. Si se colocan estos cuadritos en fila unos tras otros, lado a lado, ¿Cuál es la longitud de la fila?
26. Si A, B, C son dígitos, ¿Cuál es el valor de C en el siguiente producto?

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ & 1 & C \\ \hline 1 & A & 5 \\ A & B & \\ \hline 3 & 7 & 5 \end{array}$$

27. Un caracol sube por una pared vertical de 5 metros de altura; Durante las horas diurnas el caracol sube 3 metros, pero durante las horas nocturnas, se queda dormido y resbala 2 metros. ¿En cuantos días subirá la pared?
28. Un número esta compuesto por cinco cifras distintas entre 1 y 9 de las cuales una sola es impar. La primera cifra es igual al producto de la segunda por la tercera y la suma de la primera y la última es igual a la suma de la segunda y la cuarta. ¿Puedes descubrir de qué número se trata?
29. Un vendedor de leche tiene además de un gran recipiente sin graduar donde lleva toda su leche, dos recipientes uno de 3 litros y otro de 5 litros pero sin graduaciones intermedias. ¿Cómo puede hacer para despachar de 1 a 10 litros?
30. Una botella y un tapón cuestan $1.10. La botella cuesta $1 más que el tapón. ¿Cuánto cuesta la botella?
31. De 5 números enteros, ¿Cuántos deben ser impares si el producto de los cinco es impar?
32. ¿Cuál es el número que sigue en la siguiente sucesión? 2, 3, 5, 9, 14,…

33. Pedro le dice a Pablo: “Mi padre es el suegro de tu mamá” ¿Cuál es la relación familiar entre Pedro y Pablo?

34. Sí un bote lleno de mermelada pesa 280gr, pero lleno hasta la mitad de la misma mermelada pesa 155 gr, ¿Cuál es el peso del bote vacío? Explica cómo lo resolviste?
35. En una isla habitada solamente por un pequeño grupo de personas funcionan cuatro clubes. Observando la lista de socios se verifica que:
    - Cada persona es socio de exactamente dos clubes
    - Cada dos clubes tiene exactamente un socio en común.
    - ¿Cuantas personas hay en la isla?
36. Del pueblo A, parte cada hora un tren que va al pueblo B en 7 horas e inmediatamente regresa. Una persona que viaja desde B hacia A en uno de esos trenes, ¿Con cuantos trenes se cruza en el camino?
37. Un tren rojo parte de una estación a 50 km/h. Un rato mas tarde parte un tren idéntico, pero de color azul de la misma estación y sobre una vía paralela a 80 km/h desde el momento en que empiezan a cruzarse el último vagón furgón rojo y la locomotora azul, hasta el punto en que dejan de cruzarse la locomotora roja y el último furgón azul, transcurre un minuto. ¿Qué longitud tenía cada tren?
38. Gilberto fue capturado por una feroz civilización que está dispuesta a sacrificarlo. Esta extraña gente tiene una rareza: la mitad es veraz e invariablemente dice siempre la verdad, la otra mitad es falaz y siempre miente. Martín está prisionero en una habitación sin ventanas y con dos puertas, una que conduce a la salida y otra al cadalso. En cada puerta hay un carcelero, uno veraz y otro falaz, sin que Martín sepa cual está en la puerta salvadora. A Martín le han dado la oportunidad de salvarle si acierta la puerta adecuada. ¿Cómo puede conocer Martín inequívocamente cuál es la puerta haciendo solamente una pregunta a uno de los carceleros?
39. ¿Aproximadamente cuántos cabellos tienes en la cabeza?
40. ¿Cuál es el área de la superficie total de un cubo cuyo volumen es de 1 metro cubico?
41. Miro el reloj. A partir de ese momento la aguja de las horas (horario) va a tardar justo el doble de tiempo que la aguja de los minutos (minutero) en llegar al número 6. ¿Qué hora es?
42. Sí entre padres e hijos hay 20 años de distanciamiento ¿Cuántos antepasados a tenido una persona en 80 años anteriores a su nacimiento? (contando sólo padres e hijos)
43. ¿Cuántos años bisiestos hubo entre 1800 y 1993 ambos inclusive?
44. ¿Cuál es el área del mayor triangulo que se puede inscribir en un semicirculo de radio 2 cm.
45. La suma de10 números impares consecutivos es de 100, ¿Cuál es el menor de los números?

46. Un reloj adelanta 16 segundos durante el día y retrasa 10 segundos durante la noche. Si en la mañana del día 1° de abril de pone el reloj en hora exacta, ¿Qué día marcara tres minutos de adelanto? (Hay dos soluciones)
47. 78 jugadores de tenis se inscribieron en un torneo individual. Si un jugador queda eliminado cuando pierde un partido, ¿Cuántos partidos son necesarios jugar para determinar el ganador?
48. ¿Cuál es la cifra de menor valor absoluto que hay que añadir a 161 para que la suma sea múltiplo de 9?
49. Para llenar una piscina pueden usarse tres grifos: el primero tarda 30 horas en llenarla, el segundo 40 horas y el tercero 5 días. ¿En cuanto tiempo la llenaran los tres juntos.
50. Para enumerar las páginas de un libro, un tipógrafo ha empleado 207 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?
51. Mi abuela cumplió x años en el año x, y todavía esta viva. ¿En qué año nació?
52. ¿Cuántos pares son tres moscas?
53. La suma de tres números impares consecutivos es 27¿Cuál es el menor?
54. ¿Cuál es el mayor factor primo de 532?
55. El reloj de una iglesia dio una campanada hace una hora, otra campanada hace media hora, y acaba de dar otra campanada. ¿Cuántas campanadas dará dentro de media hora?
56. El famoso cuadro Las Meninas fue pintado por Velásquez en 1656, a los 57años de edad, después de vivir 34 años en Madrid, dónde se había instalado a los 4 años de casado. ¿A qué edad se casó?
57. El lado de un octágono regular mide 3.5 dm. ¿Cuánto mide el perímetro?
58. ¿Cuántos partidos de béisbol se realizan entre seis equipos, si cada equipo juega 13 veces con cada uno de los otros equipos?
59. Si me das una naranja tendré el doble de las tuyas; si te doy una de las mías tendremos igual cantidad, ¿cuántas naranjas tengo yo?
60. Con cada bolsa de detergente la casa fabricante incluye un cupón de regalo. Una vez reunidos 10cupones el cliente puede cambiarlos por una nueva bolsa de detergente con su cupón. ¿Cuántos cupones vale una bolsa de detergente?
61. ¿Cuál es la cifra de las unidades al hacer $1989^9 + 1989$?
62. El símbolo 25 representa un número de dos dígitos en la base x. Sí el número 52 es el doble del número 25, en esa misma base, ¿Cuál es la base?
63. ¿Cuántos minutos faltan para el medio día, sabiendo que hace 8 minutos faltaban los 9/5 de lo que falta ahora?
64. ¿Cuántos días son los 2/3 de los ¾ de un año de 360 días?
65. ¿Cuáles números de los primeros 100 enteros positivos son divisibles entre 2, 3, 4, 5, simultáneamente?

66. En la inauguración de los juegos Olímpicos, 16 muchachas se colocan formando un cuadrado, ¿Cuántas muchachas hay en cada lado del cuadrado?
67. En un torneo de tenis, de cada partido jugado únicamente clasifica el ganador para la siguiente ronda, si el campeón jugo un total de 7 partidos, ¿Cuántos participantes había en el torneo?
68. En una gaveta hay 10 pares de guantes blancos y 10 pares de guantes negros. Es de noche y no hay luz, ¿Cuántos guantes es preciso sacar de la gaveta para estar seguro de obtener un par de guantes del mismo color?
69. Si se tiene que A > B y que B = C ¿Qué puedes deducir?
70. ¿Cuántos ladrillos de 1 decímetro cuadrado serán necesarios para cubrir una superficie de tres metros cuadrados?
71. Se desea pintar un cubo de tal manera que dos caras adyacentes no tengan el mismo color, ¿Cuál es el menor número de colores que deben usarse?
72. A una fiesta asistieron veinte personas. Maria bailó con 7 muchachos, Olga con 8, Vera con 9 así hasta llegar a Nina que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había en la fiesta?
73. Pedro es mayor que Antonio, y Juan es mayor que Ángel. Se sabe que Antonio y Juan son mellizos. ¿Quién es mayor entre Pedro y Ángel?
74. En un conjunto de vacas y pollos, el número de patas es 14 más que el doble del número de cabezas. ¿Cuántas vacas hay en el conjunto?
75. Los parentescos son curiosos, observó a Alberto. Jaime tiene el mismo parentesco con tigo que yo tengo con tu hijo. Así es respondió Carlos. Y tu tienes el mismo parentesco conmigo que Jaime contigo ¿Cuál es el parentesco entre Carlos y Jaime?
76. Tres péndulos tienes por periodo de oscilación 2, 3 y 4 segundos respectivamente. Si se les suelta simultáneamente desde una misma posición ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que recuperen todos, al mismo tiempo la posición inicial?
77. En una tribu india del Amazonas, donde aun subsiste el trueque, se tienen las siguientes equivalencias de cambio:
    - Un collar y una lanza se cambian por un escudo.
    - Una lanza se cambia por un collar y un cuchillo.
    - Dos escudos se cambian por tres cuchillos.

    ¿A cuantos collares equivale una lanza?
78. Cuatro atletas disputan una carrera y una vez cruzada la meta intercambien entre ellos los siguientes comentarios:
    - Antonio: Yo no llegue primero.
    - Bernardo: Carlos llegó tercero.
    - Carlos: Antonio llego detrás de Bernardo.

- Daniel: Bernardo llegó segundo.

¿Quién ganó la carrera?

79. Un reloj adelanta un minuto cada cinco horas. Sí a las 6 am marca las 8am ¿Qué hora indicara cuando sean las 11 am?
80. A un recipiente que contiene $\frac{2}{5}$ litros de alcohol puro se le agrega un litro de agua. ¿Cuánta agua es necesario verter a otro recipiente que contiene $\frac{3}{4}$ litros de alcohol para que las mezclas sean iguales?
81. Un comerciante, nada confiable por cierto, ha agregado un litro de agua a un botellón que contenía $\frac{5}{3}$ litros de vino. En otra ocasión ha mezclado $\frac{1}{2}$ litro de agua con $\frac{3}{4}$ litros de vino del mismo tipo. ¿En cuál de las dos ocasiones el vino quedó más aguado?
82. El lado de un octágono regular mide 3.5 dm, ¿cuánto mide el perímetro?
83. Un hombre cercó un jardín y la cerca formó un cuadrado. Cuando terminó había seis postes distribuídos uniformemente en cada lado. ¿Cuántos postes utilizó?
84. Traza una paralela a la recta l que pase por el punto P.
85. Traza una perpendicular a la recta l que pase por el punto P.
86. Traza la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.
87. Traza una circunferencia de radio 3.5 cm
88. Traza la bisectriz de $\angle AOB$ y verifica que lo divide a la mitad.
89. Traza un triángulo de lados $\overline{AB} = 3\ cm$, $\overline{BC} = 4\ cm$, $\overline{AC} = 5\ cm$. ¿Notas alguna particularidad? ¿recuerdas el teorema de Pitágoras?
90. Traza un triángulo de lados $\overline{AB} = 3\ cm$, $\overline{BC} = 3\ cm$, $\overline{AC} = 6\ cm$. ¿Qué ocurrió? Enuncia la propiedad de los lados del triángulo que se hizo evidente en este caso. ¿es general?
91. Traza una circunferencia de radio 2.5 cm. Traza un diámetro y llama A y B a los extremos. Localiza cualquier otro punto de la circunferencia y llámalo C. Une los tres puntos para formar el $\Delta\ ABC$. Clasifica dicho triángulo de acuerdo a sus ángulos. Compara con los ángulos de tus compañeros. Toma cualquier otro punto de la circunferencia y llámalo D. Traza el triángulo $\Delta\ ABD$. ¿Entra en la misma clasificación? ¿Existe alguna propiedad general? Si es así, enúnciala.
92. En la tienda de Guillermo quedan 48 cantimploras para bicicleta. El lunes etiquetó las cantimploras a $15 y vendió la mitad. El martes etiquetó las que quedaban a $12 y vendió la mitad. El miércoles las etiquetó a $9 y vendió la tercera parte. El jueves etiquetó las que tenía a $6 y las vendió todas. ¿Cuántas cantimploras vendió cada día? ¿Cuánto dinero obtuvo en la semana con la venta de las cantimploras? Si Guillermo compró cada

cantimplora a $12, ¿ganó o perdió dinero en la venta de las 48 cantimploras? ¿Cuánto ganó o perdió? Explica tu procedimiento.

93. Cristina tiene tres blusas: verde, amarilla y azul; tres faldas: roja, azul y café. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse Cristina?
94. ¿Cuántos ochos escribirías si escribieras todos los números enteros del 1 al 100? ¿Cómo podrías hallar la respuesta sin necesidad de escribirlos todos?