UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"TEORÍA DE SELECCIONES DE MICHAEL Y SUS APLICACIONES"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

NATALIA JONARD PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGEY ANTONYAN

2006

Teoría de Selecciones de Michael y sus Aplicaciones

Natalia Jonard Pérez

9 de noviembre de 2006

Índice general

Capítulo 0

Introducción

La teoría de selecciones de funciones multivaluadas fue introducida alrededor de 1950 por el matemático estadounidense Ernest Michael, quien a su vez demostró los resultados fundamentales de esta área de las matemáticas. Desde entonces, esta teoría se ha ido desarrollando ampliamente y se ha aplicado a otras áreas de las matemáticas, como son, el análisis funcional y convexo, topología general, topología geométrica, teoría del punto fijo y la teoría de extensión de funciones, entre muchas otras.

Sin entrar en detalles, la teoría de selecciones trata básicamente de lo siguiente: si X y Y son dos espacios topológicos y ϕ es una función inferiormenete semicontinua de X a los conjuntos no vacíos de Y, se pregunta qué condiciones se debe pedir a X, a Y y a $\phi(x)$, para poder encontrar una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in \phi(x)$. Esta función f es lo que llamaremos una selección de ϕ

Cuando empezamos a estudiar los teoremas clásicos de Michael, notamos que en todos ellos, el rango de la función multivaluada, siempre es un espacio metrizable. Este detalle llamó nuestra atención y nos hizo preguntarnos por la existencia de un teorema de selección en el cual el rango de la función multivaluada no sea metrizable. Despues de algunos intentos fallidos por encontrarlo, encontramos un artículo de Corson y Lindenstrauss, [1], en el cual se da un ejemplo de que esa conjetura es falsa. Sin embargo, en ese mismo artículo, así como en algunos otros que nos encontramos en el camino, se dan parejas muy particulares de espacios X y Y (con Y no metrizable) y se establece para este caso un teorema de selección. Si bien, estos resultados son muy importantes e interesantes, no nos aportaban el teorema de selección que estabamos buscando: uno que nos brindara una nueva demostración del teorema de extensión de Dugundji.

En [7], J. van Mill da una demostración de una versión más débil del teorema de Dugundji a partir de uno de los teoremas de selección clásicos de Michael. Para encontrar una demostración de la versión general del teorema de Dugundji, rehicimos la demostración habitual de dicho teorema y a partir de ésta, extrajimos las hipótesis necesarias para encontrar el teorema de selección buscado (teorema 2.4.1). Sin embargo, este teorema no generaliza a ninguno de los teoremas de Michael.

Poco tiempo después, ahora con la ayuda del teorema de Dugundji, encontramos un teorema de selección (teorema 2.4.2) el cual sí nos brinda una pequeña, pero importante, generalización de los teoremas clásicos de Michael, concretamente, de los teoremas 2.1.1 y 2.2.2.

Por otro lado, respecto a las características de los conjuntos $\phi(x)$ (donde ϕ es una función multivaluada entre dos espacios topológicos X y Y), cabe mencionar que centraremos nuestra atención en aquellos teoremas de selección en los cuales Y es un espacio topológico vectorial localmente convexo y ϕ toma valores convexos. La otra parte de la teoría ya ha sido estudiada por varios matemáticos. Entre ellos, podemos destacar el artículo de T. Dobrowolski y J. van Mill, *Selections and near selections in linear spaces without local convexity*. Sin embargo, consideramos que adentrarnos en el estudio de este tipo de seleciones, desbordaba los fines de este trabajo y por otro lado, nos alejaba de las aplicaciones a las que queríamos llegar. Así, para no dejar totalmente excluido el tema, incluimos únicamente un teorema de selección en el cual el rango de la función multivaluda no es ni siquiera un espacio vectorial (teorema 2.3.2).

Finalmente, con este texto queremos dar una pequeña visión de los teoremas clásicos de la teoría de selecciones, así como algunas de las aplicaciones que dichos teoremas tienen.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos los conceptos y resultados básicos que usaremos a lo largo del texto. Para ello, es conveniente establecer desde ahora alguna de la notación que se usará, así como hacer algunas aclaraciones sobre lo que trabajaremos.

Todos los espacios topológicos con los que trabajaremos serán espacios T_1, a menos que se especifique lo contrario. Por otro lado, cuando trabajemos con un espacio vectorial, daremos por entendido que los signos $+$ y $\sum$ denotan la suma de vectores en dicho espacio. Como usaremos el mismo signo en diferentes espacios, esperamos que no haya confusiones al respecto.

El conjunto potencia de un conjunto arbitrario X, será denotado por 2^X. En lo sucesivo introduciremos más notación para resaltar ciertas colecciones especiales en este conjunto.

Si X es un espacio topológico y A un subconjunto arbitrario de X, denotaremos por $\overline{A}$ a la cerradura de A en X; es decir, el conjunto formado por todos los puntos de adherencia de A.

Si X es un espacio métrico, con la métrica d, usaremos el signo $B(x, r)$ para denotar la bola abierta con centro en el punto x y radio r; esto es,

$$B(x, r) = \{z \in X | d(x, z) < r\}.$$

El resto de la notación será introducida a lo largo del texto.

1.1. Portadores

Consideremos dos espacios topológicos X y Y. Un **portador** o **función multivaluada** es una función de X a los subconjuntos no vacíos de Y.

Se dice que un portador $\phi : X \to 2^Y$ es **inferiormente semicontinuo** (y lo denotaremos por i.s.c.), si para cualquier abierto U de Y el conjunto

$$\{x \in X | \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

es abierto en X.

Ejemplo 1.1.1. *Sean X, Y dos espacios topológicos. Consideremos una función $g : Y \to X$ suprayectiva, y definamos $\phi : X \to 2^Y$ por*

$$\phi(x) = g^{-1}(x).$$

En estas condiciones, ϕ es i.s.c. si y sólo si g es una función abierta.

Demostración. Sea $U \subset Y$ un subconjunto abierto y

$$V = \{x \in X|\ \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} V =&\{x \in X|\ g^{-1}(x) \cap U \neq \emptyset\} = \{x \in X|\ \text{existe } u \in U \cap g^{-1}(x)\} \\ =&\{x \in X|\ \text{existe } u \in U,\ g(u) = x\} = \{x \in X|\ x = g(u),\ u \in U\} \\ =&g(U). \end{aligned}$$

Así, ϕ es i.s.c. si y sólo si V es abierto, pero esto sucede si y sólo si g es una función abierta, como se quería demostrar. □

La siguiente proposición es una herramienta útil para identificar portadores i.s.c..

Proposición 1.1.2. *Sean X y Y espacios topológicos. Si $\phi : X \to 2^Y$ es un portador, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *ϕ es i.s.c.*

(b) *ϕ es continuo con respecto a la topología en 2^Y generada por los abiertos sub-básicos de la forma $\mathcal{V} = \{A \in 2^Y|\ A \cap V \neq \emptyset\}$, donde V es abierto en Y.*

(c) Si $x \in X$, $y \in \phi(x)$ y V es una vecindad de y en Y, entonces existe una vecindad U de x, tal que para todo $z \in U$, $\phi(z) \cap V \neq \emptyset$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $x_0 \in X$ y $\mathcal{V} \subset 2^Y$ una vecindad sub-básica de $\phi(x_0)$ de la forma
$$\mathcal{V} = \{A \in 2^Y |\ A \cap V \neq \emptyset\},$$
donde V es un abierto arbitrario de Y. Como ϕ es i.s.c., el conjunto
$$U = \{x \in X |\ \phi(x) \cap V \neq \emptyset\},$$
es abierto en X. Más aún, como $\phi(x_0) \in \mathcal{V}$, tenemos que $\phi(x_0) \cap V \neq \emptyset$ y por tanto $x_0 \in U$. Luego,
$$\phi(U) = \{\phi(x) |\ x \in U\} = \{\phi(x) |\ \phi(x) \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathcal{V}.$$
De este modo, hemos encontrado una vecindad U de x_0, tal que $\phi(U) \subset \mathcal{V}$. Así queda demostrada la implicación $(a) \Rightarrow (b)$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Sea $x \in X$, $y \in \phi(x)$ y V una vecindad arbitraria de y en Y. Entonces,
$$\mathcal{V} = \{A \in 2^Y |\ A \cap V \neq \emptyset\}$$
es una vecindad de $\phi(x) \in 2^Y$. Por la continuidad de ϕ, existe una vecindad U de x tal que
$$\phi(U) \subset \mathcal{V}.$$
Así, si $z \in U$, tenemos que $\phi(z) \cap V \neq \emptyset$ para toda $z \in U$, lo cual prueba $(b) \Rightarrow (c)$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Sea $V \subset Y$ un subconjunto abierto y
$$U = \{x \in X |\ \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$
Consideremos $x_0 \in U$ y $y_0 \in \phi(x_0) \cap V$. Como V es una vecindad de y_0, podemos aplicar (c) para encontrar una vecindad W de x_0, tal que para toda $x \in W$ se cumpla que
$$\phi(x) \cap V \neq \emptyset.$$
Así, $W \subset U$ y por lo tanto U es abierto en X. Consecuentemente, ϕ es i.s.c., como se quería demostrar. □

Consideremos dos espacios topológicos, X y Y, y $\phi : X \to 2^Y$ un portador. Una **selección** de ϕ es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(x) \in \phi(x)$ para toda $x \in X$.

Lema 1.1.3. *Sean X y Y espacios topológicos y $\psi : X \to 2^Y$ un portador i.s.c.. Si A es un subconjunto cerrado de X y g es una selección para $\psi|_A$, entonces, el portador $\phi : X \to 2^Y$ dado por*

$$\phi(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in A, \\ \psi(x) & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

es i.s.c..

Demostración. Sean $U \subset Y$ un conjunto abierto, y

$$V = \{x \in X |\ \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Consideremos $x_0 \in V$.

Caso 1. Si $x_0 \in A$, como g es continua, existe una vecindad W_1 de x_0 tal que

$$g(W_1 \cap A) \subset U.$$

Por otro lado, como ψ es i.s.c., existe una vecindad W_2 de x_0, tal que para toda $x \in W_2$, se cumple que

$$\psi(x) \cap U \neq \emptyset.$$

Entonces, si $W = W_1 \cap W_2$ se tiene que para toda $x \in W$, $\phi(x) \cap U \neq \emptyset$. Consecuentemente,

$$x_0 \in W \subset V,$$

por lo que x_0 es punto interior de V.

Caso 2. Si $x_0 \notin A$, como ψ es i.s.c., existe una vecindad W_0 de x_0, tal que para toda $x \in W_0$ se cumpla que

$$\psi(x) \cap U \neq \emptyset.$$

Como A es cerrado, $W = (X \setminus A) \cap W_0$ es una vecindad de x_0. Además, para cualquier $x \in W$, se tiene que

$$\phi(x) \cap U = \psi(x) \cap U \neq \emptyset.$$

De esta manera, tenemos que $W \subset V$ y por lo tanto x_0 es punto interior de V.

En ambos casos podemos concluir que V es un subconjunto abierto de X y por lo tanto ϕ es i.s.c..

□

Proposición 1.1.4. *Sean X y Y espacios topológicos y $\mathcal{S} \subset 2^Y$, tal que $\mathcal{S}$ contiene todos los subconjuntos de un sólo punto de Y. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) Todo portador i.s.c., $\phi : X \to \mathcal{S}$, admite una selección.

(b) Si $\phi : X \to \mathcal{S}$ es un portador i.s.c., $A \subset X$ es un subconjunto cerrado, y f es una selección de $\phi|_A$, entonces existe una selección $F : X \to Y$ de ϕ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Sean $\psi : X \to \mathcal{S}$ un portador i.s.c., $A \subset X$ un subconjunto cerrado y $f : A \to Y$ una selección para $\psi|_A$. Definamos el portador $\phi : X \to \mathcal{S}$ de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ \psi(x) & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Aplicando el lemma 1.1.3, tenemos que ϕ es i.s.c. y por (a), ϕ admite una selección F. Claramente, F es la extensión buscada de f.

$(b) \Rightarrow (a)$. Fijemos un punto $x_0 \in X$, y escojamos $y_0 \in \phi(x_0)$. Si $A = \{x_0\}$, podemos definir $f : A \to Y$ por

$$f(x_0) = y_0.$$

Entonces f es una selección para $\phi|_A$. Por (b), existe F, una selección continua de ϕ, que extiende a f. F es la selección buscada. □

Consideremos dos espacios topológicos X y Y. Se dice que Y es **extensor absoluto para** X (y se denota por $Y \in AE(X)$), si para cualquier subespacio cerrado $A \subset X$ y para cualquier función continua $f : A \to Y$, existe una función continua $F : X \to Y$ que hace al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

En este caso, se dice que la función F es **extensión** de f o **extiende a** f.

En la siguiente proposición se empieza a ver la relación que existe entre la teoría de selecciones y la teoría de extensión de funciones.

Proposición 1.1.5. *Sean X y Y espacios topológicos, y $\mathcal{S} \subset 2^Y$ tal que $\mathcal{S}$ contiene a Y y a todos los subconjuntos de un sólo punto de Y. Si todo portador i.s.c., $\phi(x) \to \mathcal{S}$, admite una selección, entonces $Y \in AE(X)$.*

Demostración. Consideremos $A \subset X$ un subconjunto cerrado, y $f : A \to Y$ una función continua. Definamos $\phi : X \to \mathcal{S}$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ Y & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Por el lema 1.1.3, ϕ es i.s.c.. Además, $\phi(x) \in \mathcal{S}$, para toda $x \in X$. En estas condiciones, podemos aplicar la hipótesis, para encontrar una selección, F, de ϕ. Así, la función F es la extensión buscada. □

Proposición 1.1.6. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $\phi : X \to 2^Y$ un portador. Supongamos que para cada $x_0 \in X$ y para cada $y_0 \in \phi(x_0)$ existe una vecindad U de x_0 y una selección f de $\phi|_U$, tal que $f(x_0) = y_0$. Entonces ϕ es i.s.c..*

Demostración. Sea $V \subset Y$ un subconjunto abierto. Llamemos

$$W = \{x \in X |\ \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

y consideremos $x_0 \in W$. Elijamos $y_0 \in \phi(x_0) \cap V$ y apliquemos la hipótesis para encontrar una vecindad U de x_0 y una selección $f : U \to Y$ para $\phi|_U$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Por la continuidad de f, $f^{-1}(V)$ es abierto en U y por lo tanto en X, de donde

$$U' = U \cap (f^{-1}(V))$$

es una vecindad de x_0. Además, $U' \subset W$, por lo que x_0 es punto interior de W, y por lo tanto, W es abierto en X. Consecuentemente, ϕ es i.s.c., como se quería demostrar. □

Proposición 1.1.7. *Si $\phi : X \to 2^Y$ es un portador i.s.c. y $\psi : X \to 2^Y$ es un portador con la propiedad de que para cualquier $x \in X$,*

$$\overline{\psi(x)} = \overline{\phi(x)},$$

entonces ψ es i.s.c..

Demostración. Sea $U \subset Y$ un subconjunto abierto, y definamos

$$V = \{x \in X |\ \psi(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Como para cualquier conjunto $A \subset Y$, se cumple que $A \cap U \neq \emptyset$ si y sólo si $\overline{A} \cap U \neq \emptyset$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} V &= \{x \in X |\ \psi(x) \cap U \neq \emptyset\} = \{x \in X |\ \overline{\psi(x)} \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X |\ \overline{\phi(x)} \cap U \neq \emptyset\} = \{x \in X |\ \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Como ϕ i.s.c., V es abierto en X. Consecuentemente, ψ es i.s.c. como se quería demostrar. □

Corolario 1.1.8. *Si $\phi : X \to 2^Y$ es un portador i.s.c., entonces el portador $\psi : X \to 2^Y$, dado por*

$$\psi(x) = \overline{\phi(x)},$$

es i.s.c..

Demostración. Simplemente notemos que

$$\overline{\psi(x)} = \overline{\overline{\phi(x)}} = \overline{\phi(x)}$$

y apliquemos la proposición 1.1.7 □

Proposición 1.1.9. *Sean $\phi : X \to 2^Y$ i.s.c. y $U \subset Y$ un subconjunto abierto de Y. Supongamos que $\phi(x) \cap U \neq \emptyset$ para toda $x \in X$. Entonces $\psi : X \to 2^Y$ definido por*

$$\psi(x) = \phi(x) \cap U$$

es i.s.c..

Demostración. Sea $W \subset Y$ un subconjunto abierto. Entonces

$$\begin{aligned} V &= \{x \in X |\ \psi(x) \cap W \neq \emptyset\} = \{x \in X |\ (\phi(x) \cap U) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X |\ \phi(x) \cap (U \cap W)\}, \end{aligned}$$

es un conjunto abierto en X por ser $U \cap W$ abierto en Y y ϕ i.s.c.. Consecuentemente, ψ es i.s.c., como se quería demostrar. □

Proposición 1.1.10. *Sean* $f : X \to Y$ *una función continua entre dos espacios topológicos y* $r > 0$*. Supongamos que* Y *admite una métrica* d *que define su topología y que* $\phi : X \to 2^Y$ *es un portador i.s.c. tal que para cada* $x \in X$*,*

$$d(f(x), \phi(x)) < r.$$

Entonces $\psi : X \to 2^Y$ *dada por*

$$\psi(x) = \phi(x) \cap B(f(x), r)$$

es i.s.c..

Demostración. Consideremos un conjunto abierto $V \subset Y$. Demostraremos que el conjunto

$$U = \{x \in X | \psi(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

es abierto en X. Sea $x \in U$. Entonces existe $y \in Y$ tal que

$$y \in \psi(x) \cap V = (\phi(x) \cap B(f(x), r)) \cap V.$$

Evidentemente $d(y, f(x)) < r$, por lo que $\varepsilon = r - d(y, f(x)) > 0$. Escojamos $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ y

$$B(y, \delta) \subset B(f(x), r) \cap V.$$

Como ϕ es i.s.c., el conjunto

$$W_1 = \{z \in X | \phi(z) \cap B(y, \delta/2) \neq \emptyset\}$$

es abierto en X. Más aún, como $y \in \phi(x)$, podemos garantizar que W_1 es una vecindad de x. Por otro lado, como f es continua, la preimagen

$$W_2 = f^{-1}(B(f(x), \delta/2))$$

es una vecindad de x. Sea $O = W_1 \cap W_2$. Entonces O es una vecindad de x. Consideremos $x' \in O$, entonces $f(x') \in B(f(x), \delta/2)$. Además, $x' \in W_1$, por lo que existe un punto $y' \in \phi(x') \cap B(y, \delta/2) \subset V$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} d(y', f(x')) &\leq d(y', y) + d(y, f(x)) + d(f(x), f(x')) \\ &< \delta/2 + (r - \varepsilon) + \delta/2 \\ &< \delta/2 + (r - \delta) + \delta/2 \\ &= r. \end{aligned}$$

Así, podemos concluir que $y' \in \phi(x') \cap B(f(x'), r) \cap V = \psi(x') \cap V$ y por lo tanto $O \subset U$. De lo anterior, se sigue inmediatamente que U es un conjunto abierto y por lo tanto ψ es i.s.c.. $\square$

1.2. Conjuntos convexos

Uno de los conceptos que más usaremos a lo largo de este trabajo es el de *conjunto convexo*. Por ello, es conveniente repasar esta definición así como algunos resultados básicos al respecto.

Consideremos un espacio topológico lineal Y. Diremos que un conjunto $A \subset Y$ es **convexo**, si para cualesquiera dos puntos a y b de A, el segmento

$$T = \{y \in Y|\ y = (1-t)a + tb,\ t \in [0,1]\}$$

está contenido en A.

Si A es un subconjunto arbitrario del espacio lineal Y, llamaremos **casco convexo** de A (y lo denotaremos por $\mathrm{Conv}(A)$) al conjunto convexo más pequeño que contenga a A. Esto es

$$\mathrm{Conv}(A) = \bigcap\{K|K\text{es convexo y } A \subset K\}.$$

Por otro lado diremos que un vector $v \in Y$ es una **combinación convexa** de elementos de A, si

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,$$

donde $a_i \in A$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \in [0,1]$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto $\mathrm{conv}_k(A)$ de la siguiente forma:

$$\mathrm{conv}_k(A) = \{v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i|\ a_i \in A,\ \lambda_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}.$$

Proposición 1.2.1. *Sea Y un espacio topológico lineal y A un subconjunto de Y. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

1. *$Conv(A) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} conv_n(A)$,*

2. *Si A es finito, entonces $Conv(A)$ es compacto.*

Demostración. 1. Se sigue de la definición que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{conv}_n(A)$ es un conjunto convexo. Además, es claro que $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{conv}_n(A)$, por lo que

$$\mathrm{Conv}(A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{conv}_n(A).$$

Demostraremos por inducción sobre n que $\operatorname{conv}_n(A) \subset$Conv$(A)$.

Si $n = 1$, entonces

$$\operatorname{conv}_1(A) = A \subset \operatorname{Conv}(A).$$

Supongamos que para toda $k \leq n$, $\operatorname{conv}_k(A) \subset$Conv$(A)$. Sea $y \in \operatorname{conv}_{n+1}(A)$, entonces existen puntos $a_1, \ldots, a_{n+1}$ en A, y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$, tales que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i.$$

Consideremos $\lambda = 1/\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$. Entonces, $\mu_i = \lambda \cdot \lambda_i \in [0, 1]$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot \lambda_i = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i} = 1,$$

por lo que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i \in \operatorname{conv}_n(A).$$

Aplicando la hipótesis de inducción, podemos afirmar que $v \in$Conv(A). Como Conv(A) es un conjunto convexo, el punto

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) v + \lambda_{n+1} a_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) v + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) a_{n+1}$$

pertenece a Conv(A). Pero

$$\begin{aligned}
y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) + \lambda_{n+1} a_{n+1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) + \lambda_{n+1} a_{n+1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) v + \lambda_{n+1} a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que $y \in$Conv(A). Así, queda demostrado que Conv$(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}_n(A)$.

2. Ahora supongamos que A es finito y demostremos que Conv(A) es compacto. Sea $n = |A|$. Entonces Conv(A) =conv$_n(A)$. Consideremos el simplejo estándar

$$\triangle_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n | \lambda_i \in [0,1], \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Consideremos el cubo unitario $I^n \subset \mathbb{R}^n$. Sabemos que I^n es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. Como $\triangle_n \subset I^n$, $\triangle_n$ también es acotado. Por otro lado, $\triangle_n = f^{-1}(\{1\}) \cap I^n$, donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función continua dada por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Como $\{1\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, la continuidad de f nos garantiza que $f^{-1}(\{1\})$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. Así, $\triangle_n = f^{-1}(\{1\}) \cap I^n$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. De esta manera, podemos conluir que $\triangle_n$ es compacto.

Como A es finito, A es compacto y por lo tanto A^n también. Consecuentemente, el producto $X = \triangle_n \times A^n$ es un espacio compacto. Definamos $g : X \to$Conv(A) de la siguiente manera:

$$g((\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (a_1, \ldots a_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i.$$

Es claro que g está bien definida y es continua. Además, se sigue de la definición de conv$_n(A)$, que g es una función suprayectiva. Entonces

$$g(X) = \text{conv}_n(A) = \text{Conv}(A)$$

es un espacio compacto, como se quería demostrar. □

1.3. Colecciones punto finitas y localmente finitas

Consideremos un espacio topológico X. Diremos que una familia $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de subconjuntos de X es **punto finita** si para cualquier $x \in X$, el conjunto $\{\alpha \in \mathcal{A} \mid x \in B_\alpha\}$ es finito.

Por otro lado diremos que la familia $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es **localmente finita**, si para cualquier $x \in X$ existe una vecindad V de x, tal que

$$\{B \in \mathcal{B} \mid V \cap B \neq \emptyset\}$$

es un conjunto finito.

Observemos que una familia localmente finita es punto finita, pero no necesariamente sucede la otra implicación.

Las familias localmente finitas juegan un papel de gran utilidad en la teoría de selecciones, es por ello que dedicaremos estas páginas a estudiar algunas propiedades de este tipo de familias.

Proposición 1.3.1. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de subconjuntos de X localmente finita. Entonces*

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{B_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha}.$$

Demostración. Sabemos que $B_\beta \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$ para toda $\beta \in \mathcal{A}$, de manera que $\overline{B_\beta} \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha}$, y por lo tanto tenemos la inclusión

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{B_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha}.$$

Para demostrar la otra inclusión considermos $x \in \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha}$. Como $\mathcal{B}$ es localmente finita, existe una vecindad V de x tal que V intersecta sólo un número finito de elementos de $\mathcal{B}$. Sean $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \ldots, B_{\alpha_n}$ dichos elementos, y sea $\mathcal{A}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathcal{A}$. Como $V \cap B_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1$, podemos afirmar que

$$x \notin \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_1} B_\alpha}.$$

Pero sabíamos que

$$x \in \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha} = \overline{(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_1} B_\alpha) \cup \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_1} B_\alpha} = \overline{(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_1} B_\alpha)} \cup \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_1} B_\alpha},$$

de manera que

$$x \in \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_1} B_\alpha}.$$

Recordemos que $\mathcal{A}_1$ es un conjunto finito, entonces

$$x \in \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_1} B_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_1} \overline{B_\alpha} \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{B_\alpha}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{B_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha},$$

como se quería demostrar. $\square$

Diremos que una familia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es una **cubierta** de X si

$$X = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha.$$

Cuando cada elemento U_α sea un conjunto abierto, diremos que $\mathcal{U}$ es una **cubierta abierta**.

Supongamos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cubiertas del espacio topológico X. Si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subset V$, diremos que $\mathcal{U}$ es un **refinamiento** de $\mathcal{V}$ (o $\mathcal{U}$ **refina** a $\mathcal{V}$).

Teorema 1.3.2. *Sean (X,τ) un espacio topológico normal, y $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ una cubierta abierta de X. Si $\mathcal{U}$ es punto finita podemos encontrar una cubierta abierta $\{V_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ de X, de manera que $\overline{V_s} \subset U_s$, para cualquier $s \in \mathcal{S}$.*

Demostración. Consideremos X y $\mathcal{U}$ como en las hipótesis del teorema. Denotemos por $\mathcal{G}$ la siguiente familia de funciones:

$$\mathcal{G} = \{G : \mathcal{S} \to \tau \mid \cup_{s\in\mathcal{S}} G(s) = X \text{ y } G(s) = U_s \text{ ó } \overline{G(s)} \subset U_s\}.$$

Definamos la relación $\preceq$ en $\mathcal{G}$ de la siguiente manera: $G_1 \preceq G_2$ si para toda $s \in \mathcal{S}$ tal que $G_1(s) \neq U_s$, se tiene que $G_1(s) = G_2(s)$. Afirmamos que $(\mathcal{G}, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

(1) Como toda $G \in \mathcal{G}$ es una función bien definida, es claro que $\preceq$ define una relación reflexiva.

(2) Sean $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ con la propiedad de que $G_1 \preceq G_2$ y $G_2 \preceq G_1$. Sea $s \in \mathcal{S}$. Si $G_1(s) \neq U_s$, se sigue que

$$G_1(s) = G_2(s).$$

Supongamos que $G_1(s) = U_s$. Como $G_2 \preceq G_1$, tenemos que

$$G_2(s) = U_s \text{ ó } G_2(s) = G_1(s).$$

En ambos casos, tenemos que $G_1(s) = G_2(s)$; es decir, $\preceq$ es antisimétrica.

(3) Consideremos $G_1, G_2, G_3 \in \mathcal{G}$ de manera que $G_1 \preceq G_2$ y $G_2 \preceq G_3$. Sea $s \in \mathcal{S}$ tal que $G_1(s) \neq U_s$. Como $G_1 \preceq G_2$, tenemos que

$$G_1(s) = G_2(s) \neq U_s.$$

Pero también $G_2 \preceq G_3$, por lo que

$$G_3(s) = G_2(s) = G_1(s).$$

Consecuentemente, $\preceq$ define una relación transitiva.

De (1), (2) y (3), podemos concluir que $\preceq$ define un orden parcial y por lo tanto el par $(\mathcal{G}, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ahora consideremos una subcolección linealmente ordenada, $\mathcal{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \mathcal{G}$, y demostremos que está acotada superiormente en $\mathcal{G}$. Para ello, definamos la función $H : \mathcal{S} \to \tau$ por

$$H(s) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} H_\alpha(s).$$

Demostraremos paralelamente que H está bien definida (es decir, que $H(s) \in \tau$ para cualquier $s \in \mathcal{S}$) y que $H \in \mathcal{G}$.

Sea $s \in \mathcal{S}$. Si sucediera que para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, $H_\alpha(s) = U_s$, automáticamente tendríamos que $H(s) = U_s \in \tau$. Supongamos que existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, tal que $H_{\alpha_0}(s) \neq U_s$. Tenemos entonces que para cualquier $\beta \in \mathcal{A}$ tal que $H_{\alpha_0} \preceq H_\beta$, se cumple que

$$H_{\alpha_0}(s) = H_\beta(s) \in \tau.$$

Llamemos $W = H_{\alpha_0}(s)$. Por definición de H, se tiene que

$$H(s) \subset W \subset \overline{W} \subset U_s.$$

Supongamos ahora que existe $H_\alpha \in \mathcal{H}$ tal que $H_\alpha(s) \neq W$. Como $\mathcal{H}$ es linealmente ordenada y $H_\alpha(s) \neq W = H_{\alpha_0}(s)$, necesariamente tenemos que $H_\alpha \preceq H_{\alpha_0}$. Esto obliga a que

$$H_\alpha(s) = U_s \;\text{ ó }\; H_\alpha(s) = H_{\alpha_0}(s).$$

Como lo segundo no sucede, entonces $H_\alpha(s) = U_s$. Así, para toda $\alpha \in \mathcal{A}$ $H_\alpha(s) = U_s$ ó $H_\alpha(s) = W$. Consecuentemente,

$$H(s) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} H_\alpha(s) = W \in \tau.$$

Además, como $\overline{H_{\alpha_0}(s)} \subset U_s$, se cumple que $\overline{H(s)} \subset U_s$.

Ahora tomemos un punto $x \in X$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta punto finita de X, existe un conjunto finito $\mathcal{S}_1 = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset \mathcal{S}$, con la propiedad de que $x \in U_s$ si y sólo si $s \in \mathcal{S}_1$.

Si $H(s_i) = U_{s_i}$ para algún $s_i \in \mathcal{S}_1$, tendríamos que

$$x \in H(s_i) \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} H(s).$$

Supongamos que para todo $s_i \in \mathcal{S}_1$, $H(s_i) \neq U_{s_i}$. De este modo debe existir por cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ una función $H_{\alpha_i} \in \mathcal{H}$ con la propiedad de que $H_{\alpha_i}(s_i) \neq U_{s_i}$. Como $\mathcal{H}$ es linealmente ordenada, podemos encontrar un $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $H_{\alpha_i} \preceq H_{\alpha_j}$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Pero $H_{\alpha_j} \in \mathcal{H}$, de modo que

$$x \in \bigcup_{s \in \mathcal{S}} H_j(s).$$

Por lo que existe $\hat{s} \in \mathcal{S}$ tal que

$$x \in H_{\alpha_j}(\hat{s}) \subset U_{\hat{s}}.$$

De aquí que $\hat{s} \in \mathcal{S}_1$. Esto es, existe $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $\hat{s} = s_m$. Así, recordando que $H_{\alpha_m} \preceq H_{\alpha_j}$ y que $H_{\alpha_m}(s_m) \neq U_{s_m}$, podemos aplicar el mismo argumento que utilizamos anteriormente cuando demostramos que $H(s) \in \tau$, para concluir que

$$x \in H_{\alpha_m}(s_m) = H_{\alpha_j}(s_m) = H(s_m) \subset \bigcup_{s \in \mathcal{S}} H(s),$$

demostrando así lo que se quería.

Claramente H es una cota superior para los elementos de $\mathcal{H}$. De esta manera, hemos probado que toda subfamilia linealmente ordenada de $\mathcal{G}$, tiene una cota superior. Ahora estamos en condiciones de aplicar el Lema de Zorn para encontrar un elemento maximal en $\mathcal{G}$. Sea G dicho elemento.

Demostraremos por contradicción que $\overline{G(s)} \subset U_s$ para todos los elementos $s \in \mathcal{S}$. Supongamos que existe $s_0 \in \mathcal{S}$ tal que $\overline{G(s_0)} \not\subset U_{s_0}$. Entonces, tendríamos que $G(s_0) = U_{s_0}$ y que $\overline{G(s_0)} \setminus U_{s_0} \neq \emptyset$.

Sea

$$A = X \setminus \bigcup_{s \in \mathcal{S} \setminus \{s_0\}} G(s).$$

Notemos que $A \subset G(s_0)$. En efecto, si $a \in A$, entonces $a \notin G(s)$ para todo $s \in \mathcal{S} \setminus \{s_0\}$. Pero

$$a \in X = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} G(s).$$

Por lo que la única posibilidad es que $a \in G(s_0)$. Como A es un conjunto cerrado (pues es complemento de un conjunto abierto) y X es un espacio normal, existe un abierto U con la propiedad de que

$$A \subset U \subset \overline{U} \subset G(s_0) = U_{s_0}.$$

Como $\overline{G(s_0)} \not\subset U_{s_0}$, podemos garantizar que $U \neq U_{s_0}$.

Construyamos la función $F : \mathcal{S} \to \tau$ dada por

$$F(s) = \begin{cases} U & si\ s = s_0, \\ G(s) & si\ s \neq s_0. \end{cases}$$

Para garantizar que $F \in \mathcal{G}$ nos faltaría demostrar que $\{F(s)\}_{s \in \mathcal{S}}$ es una cubierta para X. Pero esto es claro, pues si $x \in X$ y $x \notin G(s)$ para toda $s \in \mathcal{S} \setminus \{s_0\}$, entonces $x \in A \subset U = G(s_0)$.

Notemos que $G \preceq F$. Para ello tomemos $s \in \mathcal{S}$ tal que $G(s) \neq U_s$. Como $G(s_0) = U_{s_0}$, se tiene que $s_0 \neq s$. Así, de la definición de F, se sigue que $F(s) = G(s)$, y por lo tanto $G \preceq F$. Pero $F(s_0) = U \neq G(s_0)$, por lo que las funciones F y G son diferentes. Como G es un elemento maximal, lo anterior es una contradicción que viene de suponer que existe $s_0 \in \mathcal{S}$, tal que $\overline{G(s_0)} \not\subset U_{s_0}$. Consecuentemente, podemos afirmar que

$$\overline{G(s)} \subset U_s, \quad \text{para toda } s \in \mathcal{S}.$$

Así, la cubierta buscada es $\{V_s\}_{s \in \mathcal{S}}$, donde $V_s = G(s)$. $\square$

Consideremos un espacio topológico X y un espacio vectorial Y. Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta localmente finita de X y que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, existe una función continua $p_\alpha : X \to [0,1]$ tal que

$$p_\alpha^{-1}((0,1]) \subset V_\alpha.$$

Como $\mathcal{U}$ es una cubierta localmente finita, para cada $x \in X$, existe una vecindad V_x de x y un conjunto finito de índices $\mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}$ tales que $V_x \cap U_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_x$. Así, si $z \in V_x$, se cumple que

$$p_\alpha(z) = 0$$

para todo $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_x$.

Supongamos que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, f_α define una función continua de X en Y. Entonces, la función $S : X \to Y$ dada por

$$S(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_x} p_\alpha(x) f_\alpha(x)$$

denota una suma finita. Notemos que para toda $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_x$, $p_\alpha(x) = 0$, por lo que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_x} p_\alpha(x) f_\alpha(x) = 0.$$

Consecuentemente, la función S la podemos escribir de la siguiente forma:

$$S(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha(x) f_\alpha(x). \tag{1.1}$$

Lema 1.3.3. *La función $S : X \to Y$ definida por (1.1) es una función continua.*

Demostración. Consideremos la notación usada anteriormente. Sea $x_0 \in X$. Para demostrar la continuidad de S, es suficiente demostrar que S es continua en una vecindad de x_0. Para ello, consideremos una vecindad V_{x_0} y un conjunto de índices $\mathcal{A}_{x_0}$ como los descritos en los párrafos anteriores. Entonces, para todo $z \in V_{x_0}$ y para todo $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{x_0}$, su cumple que

$$p_\alpha(z) = 0.$$

Así, podemos expresar $S(z)$ de la siguiente manera

$$S(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_z} p_\alpha(z) f_\alpha(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{x_0}} p_\alpha(z) f_\alpha(z).$$

Consecuentemente, para todo $z \in V_{x_0}$, $S(z)$ es en realidad una suma finita de funciones continuas y por tanto, S es continua en todo V_{x_0}, como se quería demostrar. $\square$

Proposición 1.3.4. *Sean X un espacio topológico normal y $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta localmente finita. Entonces existe una familia de funciones continuas $p_\alpha : X \to [0,1]$ tales que:*

1. *Si $x \in X \setminus V_\alpha$, entonces $p_\alpha(x) = 0$.*
2. *Para todo $x \in X$, $\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha(x) = 1$.*

Demostración. Como la familia $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es localmente finita, y el espacio X es normal, por 1.3.2, existe $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta de X tal que $\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha$, para toda $\alpha \in \mathcal{A}$.

Usando nuevamente la normalidad de X, podemos aplicar el lema de Urysohn para encontrar, por cada $\alpha \in \mathcal{A}$, una función continua $q_\alpha : X \to [0,1]$ tal que

(a) $q_\alpha(x) = 1$ si $x \in \overline{W_\alpha}$,

(b) $q_\alpha(x) = 0$ si $x \in X \setminus V_\alpha$.

Sea $S : X \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$S(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} q_\alpha(x).$$

Por el lema 1.3.3, la función S es continua. Además, para todo $x \in X$, existe $\gamma \in \mathcal{A}$ tal que $x \in W_\gamma \subset \overline{W_\gamma}$. Consecuentemente, $q_\gamma(x) = 1$ y por lo tanto

$$S(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} q_\alpha(x) > 0.$$

Ahora definamos, para cada $\beta \in \mathcal{A}$, la función $p_\beta : X \to [0,1]$ de la siguiente manera,

$$p_{\beta(x)} = \frac{q_\beta(x)}{S(x)}.$$

Como p_β es un cociente de funciones continuas, se sigue que p_β es una función continua. Además, como

$$0 \leq q_\beta(x) \leq \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} q_\alpha(x) = S(x),$$

se sigue que

$$0 \leq p_\beta(x) = \frac{q_\beta(x)}{S(x)} \leq 1,$$

y por lo tanto $p_\beta(x) \in [0,1]$ para todo $x \in X$ y para todo $\beta \in \mathcal{A}$.

Para terminar, verifiquemos que p_β satisface las condiciones deseadas. Sea $x \in X \setminus V_\beta$, entonces $q_\beta(x) = 0$, y por lo tanto

$$p_\beta(x) = \frac{q_\beta(x)}{S(x)} = 0$$

Por último, para cualquier $x \in X$,

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \frac{q_\alpha(x)}{S(x)} = \frac{1}{S(x)} \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} q_\alpha(x) = \frac{S(x)}{S(x)} = 1.$$

Así, $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es la familia de funciones buscada. □

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de funciones continuas, cuyo dominio es el espacio X y su rango es el intervalo $[0,1]$. $\mathcal{P}$ recibe el nombre de **partición de la unidad** si $\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha(x) = 1$ para toda $x \in X$. Esto significa que para cada punto $x \in X$, $p_\alpha(x) = 0$, para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, salvo una cantidad numerable de índices α.

Diremos que $\mathcal{P}$ es una **partición de la unidad localmente finita** si la cubierta abierta, $\{p_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, es localmente finita. Notemos que este hecho implica que para cada $x \in X$, existe una vecindad $U_x \subset X$ que intersecta sólo a un número finito de elementos de $\{p_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de un espacio topológico X, y $\mathcal{P}$ es una partición de la unidad para X, diremos que $\mathcal{P}$ está subordinada a $\mathcal{U}$ si para cada $p \in \mathcal{P}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $p(x) = 0$, para toda $x \in X \setminus U$. Así, en la proposición 1.3.4, la familia $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ constituye una partición de la unidad localmente finita subordinada a la cubierta $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

1.4. Paracompacidad

Diremos que un espacio topológico X es **paracompacto** si se cumplen los siguientes dos enunciados.

1. X es de Hausdorff

2. Cualquier cubierta abierta de X posee un refinamiento localmente finito.

Lema 1.4.1. *Sean X un espacio paracompacto y A y B dos subconjuntos cerrados de X. Supongamos que para cada punto $x \in B$, existen dos vecindades V_x y U_x, de x y de A, respectivamente, tales que $V_x \cap U_x = \emptyset$. Entonces, podemos encontrar dos abiertos ajenos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Demostración. Para cada $x \in B$, consideremos las vecindades V_x y U_x como en las hipótesis del lema. Notemos que la familia

$$\mathcal{V} = \{V_x\}_{x \in B} \cup \{X \setminus B\}$$

es una cubierta abierta del espacio paracompacto X. Consecuentemente, existe un refinamiento localmente finito $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{A} | B \cap W_\alpha \neq \emptyset\}.$$

De esta manera, tenemos que

$$B \subset V = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} W_\alpha.$$

Por otro lado, afirmamos que $A \cap \overline{W_\alpha} = \emptyset$ para cualquier $\alpha \in \mathcal{B}$. Para convencernos de ello, supongamos lo contrario; es decir, que existe $\beta \in \mathcal{B}$, tal que $A \cap \overline{W_\beta} \neq \emptyset$. Como $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es refinamiento de $\mathcal{V}$, existe un punto $x \in B$, tal que $W_\beta \subset V_x$. Por hipótesis, también existe una vecindad U_x de A tal que $V_x \cap U_x = \emptyset$. Como $A \subset U_x$, se tiene que

$$U_x \cap \overline{V_x} \neq \emptyset.$$

Pero esto último sólo sucede si y sólo si $U_x \cap V_x \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Consecuentemente, $A \cap W_\alpha = \emptyset$ para toda $\alpha \in \mathcal{B}$. Sea

$$U = X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} \overline{W}_\alpha.$$

Entonces $A \subset U$. Además, por la proposición 1.3.1, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} \overline{W}_\alpha = \overline{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} W_\alpha}$, por lo que U es un conjunto abierto. Como $U \cap V = \emptyset$, U y V son las vecindades buscadas. $\square$

Proposición 1.4.2. *Todo espacio paracompacto es regular*

Demostración. Sean A un subconjunto cerrado de un espacio paracompacto X, y $x \in X \backslash A$. Como X es Hausdorff, para cada $a \in A$ existen dos vecindades ajenas U_a y V_a de a y de x, respectivamente. Aplicando el lema 1.4.1, podemos encontrar dos vecindades ajenas U y V, de A y de x, lo cual demuestra que X es regular. □

Proposición 1.4.3. *Todo espacio paracompacto es normal.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de un espacio paracompacto X. Por la proposición 1.4.2, para cada punto $x \in B$, podemos encontrar dos vecindades U_x y V_x de A y de x, respectivamente, tales que $U_x \cap V_x = \emptyset$. En estas condiciones, podemos aplicar el lema 1.4.1 para encontrar dos vecindades ajenas de A y de B, U y V. Consecuentemente, X es un espacio normal, como se quería demostrar. □

Teorema 1.4.4 (Teorema de Stone). *Todo espacio métrico es paracompacto.*

Para la demostración de este teorema clásico, se puede consultar ([3], pag. 280).

Proposición 1.4.5. *Sea X un espacio paracompacto y $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cubierta abierta numerable de X. Entonces, existe un refinamiento numerable y localmente finito, $\mathcal{W} = \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de $\mathcal{U}$, tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$W_n \subset U_n.$$

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cubierta abierta de un espacio paracompacto X. Entonces, existe un refinamiento localmente finito, $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, de $\mathcal{U}$. Consideremos los siguientes subconjuntos de índices:

$$\mathcal{A}_1 = \{\alpha \in \mathcal{A} | V_\alpha \subset U_1\},$$

y

$$\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A} | V_\alpha \subset U_n\} \setminus \mathcal{A}_{n-1}.$$

Así, los conjuntos de la forma

$$W_n = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_n} V_\alpha,$$

forman una familia de subconjuntos abiertos. Veamos que dicha familia es la cubierta buscada. Notemos que para cada $x \in X$, existe $\alpha \in \mathcal{A}$, tal que $x \in V_\alpha$. Como $\mathcal{V}$ refina a $\mathcal{U}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_\alpha \subset U_n$. Sea

$$n_0 = \min_{n \in \mathbb{N}} \{n | V_\alpha \subset U_n\}.$$

Entonces, $n_0 \in \mathcal{A}_{n_0}$, por lo que $V_\alpha \subset W_{n_0}$. Consecuentemente, $x \in W_{n_0}$, lo cual prueba que $\mathcal{W} = \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de X. Además, es claro que $W_n \subset U_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Para terminar la prueba, sólo restaría probar que $\mathcal{W}$ es localmente finita.

Sea $x \in X$. Entonces existe una vecindad O de x tal que O intersecta sólo un número finito de elementos de $\mathcal{V}$, digamos $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}$. Para cada uno de estos conjuntos, existe un único elemento $W_{n_i} \in \mathcal{W}$, tal que

$$V_{\alpha_i} \subset W_{n_i}.$$

Sea $n_0 = \max\{n_i | i = 1, \ldots k\}$. Entonces, si $n > n_0$, se tiene que

$$W_n \cap O = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_n} V_\alpha \cap O = \emptyset.$$

Consecuentemente, $\mathcal{W}$ es localmente finita, lo cual completa la demostración. □

Lema 1.4.6. *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de un espacio topológico X. Supongamos que existe una partición de la unidad $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ subordinada a $\mathcal{U}$. Entonces, $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento localmente finito.*

Demostración. Primero observemos que si $g : X \to [0, 1]$ es una función continua, y $x \in X$ es un punto tal que $g(x) > 0$, entonces existe una vecindad U de x y un subconjunto finito de índices $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, tal que

$$p_\alpha(z) < g(z), \quad \text{para todo } z \in U \text{ y para todo } \alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}. \tag{1.2}$$

En efecto, dado $x \in X$, podemos encontrar un conjunto finito

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subset \mathcal{A},$$

tal que

$$1 - \sum_{i=1}^{k} p_{\alpha_i}(x) < g(x).$$

Por la continuidad de la función $h = g + \sum\limits_{i=1}^{k} p_{\alpha_i}$, el conjunto

$$U = \{z \in X | h(z) > 1\}$$

es una vecindad de x. Para ver que U es la vecindad buscada, supongamos lo contrario. Entonces existe $z \in U$ y $\alpha_0 \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, tal que

$$1 - \sum_{i=1}^{k} p_{\alpha_i}(z) < g(z) \leq p_{\alpha_0}(z).$$

Entonces,

$$1 < g(z) + \sum_{i=1}^{k} p_{\alpha_i}(z) \leq p_{\alpha_0}(z) + \sum_{i=1}^{k} p_{\alpha_i}(z) \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha(z),$$

de donde

$$1 < \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha(z).$$

Pero esta última desigualdad es una contradicción, porque $\mathcal{P}$ es una partición de unidad. Así, queda demostrado (1.2).

Para cada $x \in X$, consideremos un índice $\alpha_x \in \mathcal{A}$, tal que $p_{\alpha_x}(x) > 0$. Sea $p : X \to (0, 1]$, la función dada por

$$p(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \quad p_\alpha(x).$$

Observemos que p es una función continua. En efecto, dada $x \in X$, sustituyamos g por p_{α_x} en (1.2). Entonces existe una vecindad U de x, y un conjunto finito $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, tal que para todo punto $z \in U$ y para todo $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, se tiene que

$$p_\alpha(z) < p_{\alpha_x}(z).$$

Así, para todo punto $z \in U$, se cumple que

$$p(z) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \quad p_\alpha(z) = \text{máx}\{p_\alpha(z) | \alpha \in \mathcal{B} \cup \{\alpha_x\}\},$$

y por lo tanto, p es continua en x. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, el conjunto

$$V_\alpha = \{x \in X | p_\alpha(x) - \frac{1}{2} p(x) > 0\}$$

es abierto en X. Además, de la definición de p, se sigue que para cada $x \in X$, existe un índice $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, tal que

$$p_{\alpha_0}(x) > \frac{1}{2}p(x).$$

Consecuentemente, $x \in V_{\alpha_0}$, y por lo tanto $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una cubierta abierta de X.

Veamos que $\mathcal{V}$ es el refinamiento buscado. Para ello, consideremos $\alpha \in \mathcal{A}$. Entonces existe $U_0 \in \mathcal{U}$, tal que $p_\alpha^{-1}((0,1]) \subset U_0$. Consecuentemente,

$$V_\alpha \subset p_\alpha^{-1}((0,1]) \subset U_0,$$

lo cual demuestra que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Para demostrar que es localmente finito, consideremos $x \in X$ y sutituyamos g por $\frac{1}{2}p$ en (1.2). Entonces existe una vecindad W de x y un conjunto finito de índices $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, tal que

$$p_\alpha(z) < \frac{1}{2}p(z), \quad \text{para todo } z \in W, \text{ y para todo } \alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}.$$

Así, si $V_\beta \cap W \neq \emptyset$, entonces $\beta \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$, lo cual completa la demostración. $\square$

Teorema 1.4.7. *Sea X un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) X es paracompacto

(b) Cualquier cubierta abierta de X admite una partición de la unidad localmente finita subordinada a ella.

(c) Cualquier cubierta abierta de X admite una partición de la unidad subordinada a ella.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea X paracompacto y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe un refinamiento localmente finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Como X es normal (proposición 1.4.3), podemos aplicar la proposición 1.3.4 para encontrar una partición de la unidad localmente finita subordinada a $\mathcal{V}$ y por lo tanto a $\mathcal{U}$. Esto completa la prueba de $(a) \Rightarrow (b)$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Es evidente.

$(c) \Rightarrow (a)$. Utilizando el lema 1.4.6, podemos concluir de (c) que cualquier cubierta abierta de X posee un refinamiento localmene finito. Para completar la prueba, faltaría demostrar que X es un espacio de Hausdorff. Para ello, consideremos dos puntos distintos $x_1, x_2 \in X$. Entonces $\mathcal{U} = \{X \setminus \{x_1\}, X \setminus \{x_2\}\}$, es una cubierta abierta de X. Por (c), existe una partición de unidad, $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, subordinada a $\mathcal{U}$.

Sea $\alpha_1 \in \mathcal{A}$, tal que $p_{\alpha_1}(x_1) = a > 0$. Evidentemente

$$p_{\alpha_1}^{-1}((0,1]) \subset X \setminus \{x_2\},$$

por lo que $p_{\alpha_1}(x_2) = 0$. Así, los abiertos $U = p_{\alpha_1}^{-1}((a/2,1])$ y $V = p_{\alpha_1}^{-1}([0,a/2))$, son vecindades ajenas de x_1 y de x_2, respectivamente. Lo anterior prueba que el espacio X es de Hausdorff, y por lo tanto la demostración está completa.

□

1.5. Espacios cero dimensionales

Diremos que un espacio topológico X es **cero dimensional** ($\dim X = 0$) si toda cubierta abierta finita de X tiene un refinamiento abierto disjunto.

Proposición 1.5.1. *Sea X un espacio topológico normal. Las siguientes tres propiedades son equivalentes:*

(a) X es cero dimensional.

(b) Si A y V son dos subespacios de X tales que $A \subset V$, A es cerrado y V es abierto, entonces existe un conjunto abierto y cerrado W tal que $A \subset W \subset V$.

(c) Toda cubierta abierta localmente finita de X tiene un refinamiento abierto y disjunto.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Sean A y V como en las hipótesis. El conjunto $\mathcal{V} = \{V, X \setminus A\}$ es una cubierta abierta finita de X. Por ser X cero dimensional, podemos encontrar un refinamiento abierto y disjunto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Sea

$$W = \bigcup_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ U\alpha \subset V}} U_\alpha.$$

Demostremos que W es el conjunto buscado. Claramente $W \subset V$. Ahora bien, tomemos $a \in A$, como $\mathcal{U}$ es cubierta de X, existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que $a \in U_{\alpha_0}$. Como $\mathcal{U}$ es refinamiento de $\mathcal{V}$ se tiene que

$$U_{\alpha_0} \subset V \text{ ó } U_{\alpha_0} \subset X \setminus A.$$

Pero esto último no puede ser, ya que $a \in A \cap U_{\alpha_0}$. Así, tenemos que $U_{\alpha_0} \subset V$, y por tanto $A \subset W$.

Por construcción, W es abierto, de modo que para completar la prueba, faltaría demostrar que W es cerrado. Para ello recordemos que $\mathcal{U}$ es una cubierta disjunta, y por lo tanto

$$X \setminus W = \bigcup_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ U_\alpha \not\subset V}} U_\alpha$$

es un conjunto abierto. Así, podemos concluir que W es un conjunto cerrado y por lo tanto W es el conjunto buscado.

$(b) \Rightarrow (c)$. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta abierta localmente finita de X. Por el teorema 1.3.2, podemos encontrar una cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ tal que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$.

Aplicando el inciso 2, podemos encontrar para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, un conjunto abierto y cerrado W_α, tal que $\overline{V_\alpha} \subset W_\alpha \subset U_\alpha$. Sea $\prec$ un buen orden para el conjunto $\mathcal{A}$, y definamos

$$R_\alpha = W_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \prec \alpha} W_\beta$$

Por construcción, $W_\alpha = \overline{W_\alpha}$, y como la cubierta $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una cubierta localmente finita podemos aplicar la proposición 1.3.1, para garantizar que

$$\bigcup_{\beta \prec \alpha} W_\beta$$

es cerrado para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Consecuentemente, R_α es abierto para toda $\alpha \in \mathcal{A}$.

Por otro lado, como $R_\alpha \subset W_\alpha \subset U_\alpha$, la familia $\mathcal{R} = \{R_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$. Para completar la prueba solo faltaría verificar que los elementos de $\mathcal{R}$ son disjuntos. Para ello, consideremos $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ tal que $\alpha \neq \beta$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha \prec \beta$. Como $R_\beta = W_\beta \setminus \bigcup\limits_{\gamma \prec \beta} W_\gamma$, entonces

$$R_\alpha \subset W_\alpha \subset X \setminus R_\beta.$$

Así, $R_\alpha \cap R_\beta \neq \emptyset$, lo cual demuestra lo que se quería.

$(c) \Rightarrow (a)$. Es evidente. $\square$

Capítulo 2

Teoría de Michael

En este capítulo revisaremos algunos de los resultados clásicos de la teoría de selecciones que Michael demuestra en sus artículos [5] y [6]. Sin embargo, haciendo uso de la técnica que J. van Mill usa en [7], haremos unas pequeñas generalizaciones a la versión original de Michael.

La idea central de la teoría de Michael se trata de la siguiente pregunta: dados dos espacios topológicos X y Y y un portador i.s.c., $\phi : X \to 2^Y$ ¿bajo qué condiciones de X, de Y y de ϕ es posible encontrar una selección para ϕ? Como veremos en las primeras dos secciones, en algunos casos la existencia de dicha selección nos brindará información sobre el dominio del portador.

Antes de comenzar, introduciremos la siguiente notación que usaremos a lo largo del capítulo. Si Y es un espacio lineal topológico, entonces

$$\mathcal{K}(Y) = \{S \in 2^Y | S \text{ es convexo}\},$$

$$\mathcal{F}(Y) = \{S \in \mathcal{K}(Y) | S \text{ es cerrado}\},$$

$$\mathcal{Q}(Y) = \{S \in \mathcal{F}(Y) | S \text{ es compacto}\}.$$

Además, si Y es un espacio métrico, entonces

$$\mathcal{C}(Y) = \{S \in \mathcal{F}(Y) | S \text{ es completo}\}.$$

2.1. Portadores con dominio paracompacto

El primer caso que revisaremos es cuando el espacio X es paracompacto.

Teorema 2.1.1. *Sea X un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) X es paracompacto.

(b) Si Y es un espacio lineal, localmente convexo y metrizable, y $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ es un portador i.s.c., entonces ϕ admite una selección.

Antes de probar este teorema, necesitamos un par de resultados que serán usados en la demostración. El primero es un resultado clásico de análisis matemático.

Teorema 2.1.2. *Sea X un espacio topológico y Y un espacio métrico con métrica d. Denotemos por $C(X, Y)$ al espacio de todas las funciones continuas de X en Y. Consideremos la función $\tilde{d} : C(X, Y) \times C(X, Y) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, dada por*

$$\tilde{d}(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X, Y)$, tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ de manera que si $n, m \geq N_0$, entonces $\tilde{d}(f_n, f_m) < \varepsilon$ (a este tipo de sucesiones les llamaremos sucesiones de Cauchy respecto a $\tilde{d}$). Supongamos que para cada $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe. Si definimos $f : X \to Y$ por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \textit{para cada } x \in X,$$

entonces f es una función continua.

Demostración. Afirmamos que para cada $r > 0$, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que para toda $x \in X$ y para toda $m \geq N_0$ se cumple

$$d(f(x), f_m(x)) \leq r \tag{2.1}$$

En efecto, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m, n \geq N_0$,

$$\tilde{d}(f_m, f_n) < r/2.$$

Así, obtenemos que $d(f_m(x), f_n(x)) < r/2$ para cualesquiera $n, m \geq N_0$ y para toda $x \in X$. Pero $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, por lo que para toda $m \geq N_0$ y para toda $x \in X$, se tiene que

$$d(f_m(x), f(x)) \leq r/2 < r,$$

con lo cual queda demostrada nuestra afirmación.

Ahora demostraremos la continuidad de f. Consideremos $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por lo anterior, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f(x), f_m(x)) \leq \varepsilon/3 \tag{2.2}$$

para toda $x \in X$ y para toda $m \leq N_0$. Como f_{N_0} es una función continua, existe una vecindad U de x_0 tal que si $z \in U$, entonces

$$d(f_{N_0}(x_0), f_{N_0}(z)) \leq \varepsilon/3. \tag{2.3}$$

Así, de las desigualdades (2.2) y (2.3), se sigue que si $z \in U$, entonces

$$\begin{aligned} d(f(x_0), f(z)) &\leq d(f(x_0), f_{N_0}(x_0)) + d(f_{N_0}(x_0), f_{N_0}(z)) + d(f_{N_0}(z), f(z)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es una función continua como se quería demostrar. □

Lema 2.1.3. *Sea X un espacio paracompacto y Y un espacio topológico vectorial. Si V es una vecindad convexa del origen de Y y $\psi : X \to \mathcal{K}(Y)$ es un portador i.s.c., entonces existe una función continua $f : X \to Y$, tal que*

$$f(x) \in \psi(x) + V, \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Demostración. Para cada $y \in Y$, definamos el conjunto

$$U_y = \{x \in X | y \in \psi(x) + V\}.$$

Observemos que si $x \in U_y$, entonces existen $z \in \psi(x)$ y $v \in V$, tal que $y = z + v$. Consecuentemente, $z = y - v$ por lo que $z \in (y - V)$. Así $\psi(x) \cap (y - V) \neq \emptyset$, de donde podemos concluir que

$$U_y \subset \{x \in X \mid \psi(x) \cap (y - V) \neq \emptyset\}.$$

Recíprocamente, si $x \in \{x \in X \mid \psi(x) \cap (y - V) \neq \emptyset\}$, entonces existen $z \in \psi(x)$ y $v \in V$ tales que $z = y - v$. Luego, $y = z + v$, por lo que $y \in \psi(x) + V$. De esta manera podemos concluir que

$$U_y = \{x \in X \mid \psi(x) \cap (y - V) \neq \emptyset\}.$$

Como V es un conjunto abierto, su traslación $(y - V)$ también lo es. Así, aplicando el hecho de que ψ es i.s.c., tenemos que U_y es abierto para cada $y \in Y$. Entonces $\mathcal{U} = \{U_y\}_{y\in Y}$ es una cubierta abierta de X y por la paracompacidad de X podemos encontrar un refinamiento abierto localmente finito, $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, en donde $V_\alpha \neq V_\beta$ si $\alpha \neq \beta$. Por la proposición 1.3.4, podemos encontrar una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{V}$. Como $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, podemos asignar a cada $\alpha \in \mathcal{A}$ un punto $y(\alpha) \in Y$ de manera que $V_\alpha \subset U_{y(\alpha)}$. Definamos

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha(x)y(\alpha).$$

Aplicando el lema 1.3.3, se puede ver que f es una función continua.

Como V y $\psi(x)$ son conjuntos convexos, $\psi(x)+V$ es un conjunto convexo. Por otro lado, $f(x)$ es una combinación convexa de un número finito de puntos $y(\alpha) \in Y$, donde cada $y(\alpha) \in \psi(x) + V$. Así, podemos concluir que $f(x)$ pertenece a $\psi(x) + V$ y por lo tanto f es la función buscada. □

Demostración del Teorema 2.1.1. $(a) \Rightarrow (b)$. Sea d una métrica en Y y $\tilde{d}$ la función en $C(X, Y)$ descrita en el teorema 2.1.2. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que las bolas abiertas son conjuntos convexos y que $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ para cualesquiera puntos $x, y, z \in Y$ (véase [8], pag 18). Construiremos por inducción una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X, Y)$, que cumpla las siguientes dos propiedades

(I) $\tilde{d}(f_n, f_{n+1}) < 2^{-(n-1)}$,

(II) $d(f_n(x), \phi(x)) < 2^{-n}$, para toda $x \in X$.

Para cada n, consideremos $V_n = B(\bar{0}, 2^{-n})$, la bola con centro en el origen de Y y radio 2^{-n}. Ahora, si $n = 1$, apliquemos el lema 2.1.3 para encontrar una función $f_1 : X \to Y$ tal que $f_1(x) \in \phi(x) + V_1$, para toda $x \in X$. Evidentemente f_1 satisface la propiedad (II).

Supongamos que hemos construido funciones $f_1, f_2, \ldots f_n \in C(X, Y)$, que satisfacen las propiedades (I) y (II). Definamos una función $\phi_n : X \to 2^Y$ por

$$\phi_n(x) = \overline{\phi(x) \cap B(f_n(x), 2^{-n})}.$$

Por la proposición 1.1.10 y por el corolario 1.1.8, la función ϕ_n es i.s.c. Además, observemos que $\phi_n(x) \in \mathcal{K}(Y)$. Así, podemos utilizar nuevamente el lema 2.1.3, para encontrar una función $f_{n+1} : X \to Y$ tal que

$$f_{n+1}(x) \in \phi_n(x) + V_{n+1}, \quad \text{para toda } x \in X.$$

Como $\phi_n(x) \subset \overline{\phi(x)} = \phi(x)$, es claro que f_{n+1} satisface la propiedad (II). Veamos que también satisface la propiedad (I). Para esto, primero notemos que

$$\phi_n(x) \subset \overline{B(f_n(x), 2^{-n})} \subset \{z \in Y | d(z, f_n(x)) \leq 2^{-n}\} \quad \text{para toda } x \in X,$$

por lo que

$$f_{n+1}(x) \in \phi_n(x) + V_{n+1} \subset \overline{B(f_n(x), 2^{-n})} + V_{n+1}.$$

Así, podemos garantizar que

$$d(f_n(x), f_{n+1}(x)) < 2^{-n} + 2^{-(n+1)}, \quad \text{para toda } x \in X,$$

por lo que

$$\tilde{d}(f_n, f_{n+1}) \leq 2^{-n} + 2^{-(n+1)} < 2^{-(n-1)}.$$

Consecuentemente, f_{n+1} satisface la propiedad (I), lo cual completa la construción por inducción.

Notemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C(X, Y)$ respecto a $\tilde{d}$. En efecto, dada $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon.$$

Así, si $n, m > N_0$ y suponiendo sin pérdida de generalidad que $n > m$, se tiene que

$$\tilde{d}(f_n, f_m) \leq \sum_{i=0}^{n-m-1} \tilde{d}(f_{m+i}, f_{m+i+1}) < \sum_{i=0}^{n-m-1} 2^{-(m+i-1)} < \varepsilon,$$

por lo que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Afirmamos que para toda $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe y pertenece a $\phi(x)$. En efecto, por (II), para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $a_n \in \phi(x)$, tal que $d(a_n, f_n(x)) < 2^{-n}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(a_n, a_{n+1}) &\leq d(a_n, f_n(x)) + d(f_n(x), f_{n+1}(x)) + d(f_{n+1}(x), a_{n+1}) \\ &< 2^{-n} + 2^{-(n-1)} + 2^{-(n+1)} < 2^{-(n-2)}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el subespacio completo $\phi(x)$ y por lo tanto, existe $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \phi(x)$. Pero $d(f_n(x), a_n) < 2^{-n}$, por lo que la suceción $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a a.

Hemos demostrado que para cada punto $x \in X$, la sucesión de Cauchy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto de $\phi(x)$. Definamos $f : X \to Y$, por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Aplicando el teorema 2.1.2, podemos concluir que f es una función continua, de donde se desprende directamente que f es la selección buscada.

$(b) \Rightarrow (a)$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. En virtud del teorema 1.4.7, (c), es suficiente encontrar una partición de unidad subordinada a $\mathcal{U}$. Consideremos el espacio de Banach $Y = l_1(\mathcal{U})$ (en el siguiente capítulo se dará una descripción más detallada de los espacios l_1) esto es

$$Y = \left\{ y : \mathcal{U} \to \mathbb{R} | \sum_{U\in\mathcal{U}} |y(U)| < \infty \right\},$$

en donde Y tiene la topología generada por la norma

$$\|y\| = \sum_{U\in\mathcal{U}} |y(U)|.$$

Sea

$$C = \{y \in Y | y(U) \geq 0 \text{ para toda } U \in \mathcal{U} \text{ y } \sum_{U\in\mathcal{U}} y(U) = 1\}.$$

Para cada $x \in X$, definamos el portador $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ por

$$\phi(x) = C \cap \{y \in Y | y(U) = 0 \text{ para toda } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } x \notin U\}.$$

Demostremos que $\phi(x) \in \mathcal{C}(Y)$ para cada $x \in X$. Para ello, basta demostrar que $\phi(x)$ es convexo y cerrado. Consideremos una combinación convexa de elementos de $\phi(x)$, digamos

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i,$$

donde $y_i \in \phi(x)$, $\lambda_i \geq 0$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Entonces, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para toda $U \in \mathcal{U}$ se tiene que

$$\lambda_i y_i(U) \geq 0.$$

De aquí se ve que $y(U) \geq 0$ para toda $U \in \mathcal{U}$. Por otro lado, como $\sum\limits_{U \in \mathcal{U}} y_i(U) = 1$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} y(U) = \sum_{U \in \mathcal{U}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i(U) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{U \in \mathcal{U}} y_i(U) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Ahora, si $U \in \mathcal{U}$ es tal que $x \notin U$, entonces $y_i(U) = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, y por lo tanto $y(U) = 0$. Consecuentemente, $y \in \phi(x)$ y por lo tanto $\phi(x)$ es convexo.

Para ver que $\phi(x)$ es cerrado, consideremos $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, una sucesión convergente contenida en $\phi(x)$. Supongamos que $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$. Si existiera $z \in X$, tal que $y(z) < 0$, existiría $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n > N$,

$$-y(z) > \|y_n - y\| \geq |y_n(z) - y(z)| = y_n(z) - y(z) \geq -y(z).$$

Esta contradicción nos permite concluir que $y(z) \geq 0$ para toda $z \in Z$.

Para demostrar que $\sum\limits_{U \in \mathcal{U}} y(U) = 1$, consideremos la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \sum_{U \in \mathcal{U}} (y(U) - y_n(U)) = \sum_{U \in \mathcal{U}} y(U) - \sum_{U \in \mathcal{U}} y_n(U) = \sum_{U \in \mathcal{U}} y(U) - 1$$

Como $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y, es claro que la suceción constante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 y por lo tanto podemos concluir que

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} y(U) = 1.$$

Por último, supongamos que existe $U_0 \in \mathcal{U}$, tal que $x \notin U_0$ y $y(U_0) = \varepsilon > 0$. Entonces, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \geq N_0$ se cumple que

$$\|y - y_n\| < \varepsilon.$$

En otras palabras, si $n \geq N_0$, sucede lo siguiente

$$y(U_0) = |y(U_0) - y_n(U_0)| \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} |y(U) - y_n(U)| = \|y - y_n\| < \varepsilon.$$

Como lo anterior contradice la elección de ε, podemos concluir que $y(U) = 0$ para toda $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin U$. Consecuentemente, $y \in \phi(x)$, y por lo tanto $\phi(x) \in \mathcal{C}(Y)$ para toda $x \in X$.

Afirmamos que para cada $y \in C$ y para cada $\varepsilon > 0$, existen $y' \in C$ y un subconjunto finito $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$, tales que $\|y - y'\| < \varepsilon$ y $y'(U) > 0$ si y sólo si U pertenece a $\{U_1, \ldots, U_n\}$.

Para demostrar esta afirmación escojamos una colección finita $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} y(U_i) = \delta > 1 - \varepsilon/2.$$

Definamos $y' \in Y$ de la siguiente manera

$$y'(U) = \begin{cases} 0, & \text{si } U \notin \{U_1 \ldots U_n\}, \\ y(U_1) + (1 - \delta), & \text{si } U = U_1, \\ y(U_i), & \text{si } U = U_i,\ i = 2, 3, \ldots n. \end{cases}$$

Se sigue de la definición que $y(U) = 0$ para toda U menos un número finito. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|y - y'\| &= \sum_{U \in \mathcal{U}} |y(U) - y'(U)| \\ &= \sum_{U \notin \{U_1, \ldots, U_n\}} |y(U)| + \sum_{U \in \{U_1, \ldots, U_n\}} |y(U) - y'(U)| \\ &= \sum_{U \notin \{U_1, \ldots, U_n\}} y(U) \ + (1 - \delta) \\ &. \end{aligned}$$

Pero $\sum\limits_{U \in \mathcal{U}} y(U) = 1$ y $\sum_{i=1}^{n} y(U_i) = \delta$, por lo que

$$\|y - y'\| = 2(1 - \delta) < \varepsilon,$$

de donde queda demostrada la afirmación.

Para demostrar que ϕ es i.s.c., aplicando la proposición 1.1.2 (c), es suficiente demostrar que para cada $x \in X$, $y \in Y$ y $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de x, tal que para cualquier $x' \in U$, existe $y' \in \phi(x')$, que satisfaga $\|y - y'\| < \varepsilon$.

Así, dadas $\varepsilon > 0$ y $y \in \phi(x)$, escojamos $y' \in C$ y vecindades $U_1, \ldots, U_n$ como en la afirmación anterior. Como $y(U_i) > 0$ para toda $i = \{1, \ldots, n\}$, se sigue que

$$x \in U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i.$$

Consecuentemente, U es una vecindad de x. Además, si $x' \in U$, entonces $y' \in \phi(x')$, por lo que U es la vecindad buscada. Luego, ϕ es i.s.c.. Por (b), existe una selección $f : X \to Y$ de ϕ. Definamos para cada $U \in \mathcal{U}$, la función $P_U : X \to [0, 1]$, por

$$P_U(x) = [f(x)](U).$$

Como $f(x) \in C$ para cada $x \in X$, se sigue que $P_U(x) \in [0, 1]$ y

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} P_U(x) = 1.$$

Para demostrar que $\{P_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ es partición de unidad, sólo resta verificar que cada P_U es continua.

Sean $V \in \mathcal{U}$, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como f es una función continua, existe una vecindad W de x tal que para cada $z \in W$, se cumple que

$$\|f(x) - f(z)\| < \varepsilon.$$

Así, si $z \in W$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|P_V(x) - P_V(z)| &= |[f(x)](V) - [f(z)](V)| \\
&\leq \sum_{U \in \mathcal{U}} |[f(x)](U) - [f(z)](U)| \\
&= \|f(x) - f(z)\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, P_V es una función continua, como se quería demostrar. $\square$

2.2. Portadores con dominio normal

El teorema de selección para espacios normales que propone Michael se demuestra de manera similar al teorema anterior.

Lema 2.2.1. *Si X es un espacio normal y Y un espacio vectorial métrico separable, entonces para cualquier portador i.s.c. $\phi : X \to \mathcal{Q}(Y)$ y para cualquier vecindad V convexa del origen, existe una función $f : X \to Y$ tal que*

$$f(x) \in V + \phi(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración. Consideremos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso y numerable de Y. Entonces $\{y_n - V\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta para el espacio métrico Y. Por el teorema de Stone, Y es paracompacto, por lo que podemos aplicar la proposición 1.4.5 para encontrar un refinamiento de $\{y_n - V\}_{n\in\mathbb{N}}$ numerable y localmente finito, digamos $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de manera que se cumpla la siguiente inclusión:

$$W_n \subset y_n - V, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto

$$U_n = \{x \in X | \phi(x) \cap W_n \neq \emptyset\}.$$

Como ϕ es i.s.c., U_n es un conjunto abierto. Así, la colección $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de X. Demostremos que es punto finita.

Sea $x_0 \in X$. Consideremos el conjunto $\mathcal{U}_0 = \{U \in \mathcal{U} | x_0 \in U\}$. Basta demostrar que $\mathcal{U}_0$ es un conjunto finito. Para ello, recordemos que $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente finita. Entonces, para cada $z \in \phi(x_0)$, existe una vecindad V_z de z, tal que V_z intersecta únicamente una cantidad finita de elementos de la cubierta $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $W^z_{n_1}, \ldots, W^z_{n_{r(z)}}$.

Así, $\{V_z\}_{z\in\phi(x_0)}$ es una cubierta abierta para el subespacio compacto $\phi(x_0)$. Entonces, existe una subcubierta finita, digamos $\{V_{z_1}, \ldots, V_{z_n}\}$. Consecuentemente, si $U_m \in \mathcal{U}_0$ se tiene que $\phi(x_0) \cap W_m \neq \emptyset$ por lo que

$$W_m \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{z_i} \neq \emptyset.$$

Luego, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $W_m \cap V_{z_i} \neq \emptyset$, y por lo tanto $W_m \in \{W^{z_i}_{n_1}, \ldots W^{z_i}_{n_{r(z_i)}}\}$. Para cada $W^{z_i}_{n_j}$, consideremos el respectivo

$$U^{z_i}_{n_j} = \{x \in X | \phi(x) \cap W^{z_i}_{n_j} \neq \emptyset\}.$$

De esta manera, podemos concluir que

$$\mathcal{U}_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{U_{n_1}^{z_i}, \dots U_{n_{r_{z_i}}}^{z_i}\}.$$

Como esta última colección es finita, $\mathcal{U}_0$ también es una colección finita. Así, podemos concluir que $\mathcal{U}$ es una familia punto finita.

Aplicando el teorema 1.3.2, podemos encontrar un refinamiento $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$V_n \subset \overline{V}_n \subset U_n.$$

Definamos O_n de la siguiente manera:

$$O_1 = U_1$$

y

$$O_n = U_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{V}_i \right).$$

Evidentemente O_n es abierto. Además, si $x \in X$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in O_n$ y n es mínimo con esa propiedad. Consecuentemente $x \in O_n$ y por lo tanto $\mathcal{O} = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de X. Además, $\mathcal{O}$ es localmente finita. En efecto, para cada $x \in X$, existe un elemento $V_m \in \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x \in V_m$. Ahora simplemente observemos que

$$V_m \cap O_n = \emptyset \text{ si } n > m.$$

Este hecho nos garantiza que $\mathcal{O}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$.

Apliquemos la proposición 1.3.4 para encontrar una partición de unidad subordinada a $\mathcal{O}$, digamos $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es decir, $p_n^{-1}((0,1]) \subset O_n \subset U_n$. Definamos $f : X \to Y$, por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_n(x) y_n.$$

Copiando los argumentos explicados en la demostración del lema 2.1.3, podemos concluir que f es la función buscada. $\square$

Teorema 2.2.2. *Si X es un espacio topológico, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) X es normal.

(b) Todo portador i.s.c., $\phi : X \to \mathcal{Q}(\mathbb{R})$, admite una selección.

(c) Si Y es un espacio lineal, localmente convexo, metrizable y separable, y $\phi : X \to \mathcal{Q}(Y)$ es un portador i.s.c., entonces ϕ admite una selección.

Demostración. $(a) \Rightarrow (c)$. Como $\phi(x)$ es un subespacio compacto, tenemos que $\phi(x)$ es un subespacio completo, para cada $x \in X$. En estas condicciones, la demostración se sigue del lema 2.2.1, así como el teorema 2.1.1, se sigue del lema 2.1.3.

$(c) \Rightarrow (b)$. Es evidente.

$(b) \Rightarrow (a)$. Sean A y B dos subespacios cerrados del espacio topológico X. Definamos $\phi : X \to \mathcal{Q}(\mathbb{R})$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \in B, \\ [0,1], & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por el lema 1.1.3, ϕ es un portador i.s.c. y por (b), existe una selección $f : X \to \mathbb{R}$, de ϕ. Sea

$$V = f^{-1}([0,1/2)) \text{ y } U = f^{-1}((1/2,1]).$$

Entonces $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$, lo cual prueba que X es normal. □

2.3. Portadores con dominio cero dimensional

En los dos teoremas anteriores, la convexidad ha jugado un papel escencial. Ahora veremos que cuando el dominio del portador es además de paracompacto, cero dimensional, es posible debilitar las hipótesis del rango para obtener un teorema de selección en el cual no es necesario que $\phi(x)$ sea convexo.

Si X es un espacio métrico, con métrica d, y $B \subset X$ un subconjunto arbitrario de X, denotaremos por $S_r(B)$ al siguiente conjunto

$$S_r(B) = \{x \in X | d(x,B) < r\}.$$

Lema 2.3.1. *Sean X un espacio topológico paracompacto y cero dimensional, Y un espacio métrico, ψ un portador i.s.c. a los subconjuntos no vacíos de Y. Si $r > 0$, podemos encontrar una función continua $f : X \to Y$ con la propiedad de que $f(x) \in S_r(\psi(x))$ para cualquier punto $x \in X$.*

Demostración. Sea $U_y = \{x \in X \mid y \in S_r(\psi(x))\}$. Entonces

$$U_y = \{x \in X \mid \psi(x) \cap S_r(y) \neq \emptyset\}.$$

Como ψ es i.s.c., $\{U_y\}_{y \in Y}$ es una cubierta abierta de X. Por ser X paracompacto, existe un refinamiento $\mathcal{R}$, localmente finito. Como X es cero dimensional, podemos aplicar la proposición 1.5.1 para encontrar un refinamiento disjunto $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de $\mathcal{R}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, escojamos un punto $y(\alpha) \in Y$, tal que $W_\alpha \subset U_{y(\alpha)}$ y definamos $f : X \to Y$ de la siguiente manera

$$f(x) = y(\alpha), \quad \text{si } x \in W_\alpha.$$

Como $\mathcal{W}$ es una cubierta disjunta, cada punto $x \in X$ pertenece a un único elemento de $\mathcal{W}$ y por tanto f está bien definida. Por otro lado, si $x \in X$, entonces existe $y(\alpha) \in Y$ tal que

$$x \in W_\alpha \subset U_{y(\alpha)}$$

y por lo tanto

$$f(x) = y(\alpha) \in S_r(\psi(x)).$$

Para finalizar la prueba, demostremos que f es continua.

Sea $x \in X$, y V una vecindad de $f(x) = y(\alpha)$. Entonces W_α es una vecindad de x tal que

$$f(W_\alpha) = \{y(\alpha)\} \subset V,$$

de donde se concluye que f es una función continua.

□

Teorema 2.3.2. *Sean X un espacio paracompacto y cero dimensional, y Y un espacio métrico. Entonces todo portador i.s.c. ϕ de X a los subconjuntos completos no vacíos de Y admite una selección.*

Demostración. Al igual que el teorema 2.2.2 la demostración se sigue del lema 2.3.1, así como el teorema 2.1.1, se sigue del lema 2.1.3. □

De este teorema se siguen los siguientes dos corolarios.

Corolario 2.3.3. *Sean X un espacio cero dimensional, y Y un espacio métrico completo. Si $T : Y \to X$ es una función continua, abierta y suprayectiva, entonces existe una función continua $f : X \to Y$ tal que $T(f(x)) = x$ para toda $x \in X$.*

Demostración. Definamos ϕ de X en los subconjuntos cerrados de Y por

$$\phi(x) = T^{-1}(x).$$

Así, para cualquier abierto $U \subset Y$, se tiene que

$$T(U) = \{x \in X \mid \phi(x) \cap U\}$$

es abierto por la hipótesis del corolario. Consecuentemente ϕ es i.s.c. y por lo tanto podemos aplicar el teorema 2.3.2 para encontrar una selección $f : X \to Y$ de ϕ. De la construcción de f se sigue que $T(f(x)) = x$. □

Corolario 2.3.4. *Sean X un espacio paracompacto, y cero dimensional, $\mathbb{C}$ el espacio de los números complejos, y $g : X \to \mathbb{C}$ una función continua. Si $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función continua y abierta (en particular si w es una función analítica) con la propiedad de que $g(X) \subset w(\mathbb{C})$, entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{C}$ que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "f"'] & \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Definamos ϕ de X a los conjuntos cerrados no vacíos de $\mathbb{C}$ por

$$\phi(x) = w^{-1}(g(x)).$$

La continuidad de w nos garantiza que $\phi(x)$ es cerrado para toda $x \in X$. Demostremos que ϕ es i.s.c.. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y

$$V = \{x \in X | \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Entonces $V = g^{-1}(w(U))$, y como w es abierta y g es continua, se sigue que V es un conjunto abierto y por lo tanto ϕ es i.s.c..

Así, podemos aplicar el teorema 2.3.2, para encontrar una selección f de ϕ. Claramente f satisface $w(f(x)) = g(x)$, y por lo tanto el corolario está demostrado. □

2.4. Portadores con rango no metrizable

La metrizabilidad del rango en los teoremas anteriores la hemos usado para poder construir una sucesión de funciones que convergen a la selección buscada. En él siguiente capítulo, daremos un ejemplo de un portador i.s.c. entre un espacio metrizable y los subconjuntos compactos y convexos de un espacio vectorial localmente convexo no metrizable, el cual no admitirá ninguna selección posible. Éste ejemplo, elimina la posibilidad de que existiese un teorema general de selección, para el caso de un portador i.s.c. entre un espacio metrizable y un espacio vectorial localmente convexo. Entonces surge una pregunta natural: bajo qué condiciones del rango y del dominio, es posible dar un teorema de selección en el cual el rango no sea metrizable.

La busqueda de un teorema tal, está motivada por la demostración del teorema de Dugundji: la existencia de un teorema de selección entre un espacio metrizable y un espacio vectorial localmente convexo nos proporcionaría una nueva demostración del teorema de Dugundji a partir de un teorema de selección.

En el artículo [1] se demuestran dos teoremas que resuelven el caso en que el dominio es paracompacto y el rango son los subconjuntos compactos, convexos y no vacíos, de el espacio $C_0(\Gamma)$, esto es, el espacio de todas las funciones casi nulas definidas en un espacio discreto Γ.

En esta sección expondremos dos teoremas de selección para portadores con rango no metrizable. La prueba es muy sencilla y requiere técnicas diferentes a las usadas anteriormente.

Teorema 2.4.1. *Sea X un espacio topológico paracompacto y Y un espacio vectorial de Hausdorff localmente convexo. Consideremos un portador $\phi : X \to 2^Y$ i.s.c.. Supongamos que para todo $x \in X$, existe una vecindad $U_x \subset X$ y un conjunto finito de puntos $A_x = \{a_1 \dots a_n\} \subset Y$, tal que para todo $z \in U_x$,*

$$\phi(z) = Conv\{a_{i_1} \dots a_{i_m}\} \subset Conv\{a_1 \dots a_n\},$$

donde $\{a_{i_1} \dots a_{i_m}\} \subset A_x$. Entonces ϕ admite una selección.

Demostración. Llamemos $A = \bigcup_{x \in X} A_x$. Para cada $a \in A$, definamos el conjunto

$$U_a = \{x \in X |\ a \in \phi(x)\}.$$

Afirmamos que U_a es abierto. En efecto, supongamos que $x \in U_a$. Consideremos una vecindad U_x y un conjunto $A_x = \{a_1 \ldots a_n\} \subset A$ como en las hipótesis del teorema.

Sea $\mathcal{C} = \{\mathrm{Conv}(C)|\ a \notin \mathrm{Conv}(C),\ C \subset A_x\}$. Como A_x es un conjunto finito, la colección $\mathcal{C}$ es finita. Así, el conjunto

$$Q = \bigcup_{K \in \mathcal{C}} K$$

es unión finita de conjuntos compactos, y por lo tanto, Q es compacto. Como el espacio Y es Hausdorff, Q es un conjunto cerrado que no contiene a a. Así, podemos encontrar una vecindad W de a tal que $W \cap Q = \emptyset$.

Como ϕ es i.s.c., el conjunto

$$V = \{z \in X | \phi(z) \cap W \neq \emptyset\}$$

es abierto en X. Sea $O = V \cap U_x$. Así O es una vecindad de x. Demostremos que $O \subset U_a$. Para ello consideremos $z \in O$ y probemos que $a \in \phi(z)$. Supongamos lo contrario, entonces $\phi(z) = \mathrm{Conv}(C)$, $C \subset A_x$ y $a \notin \phi(z)$. Consecuentemente $\phi(z) \in \mathcal{C}$ y por lo tanto $\phi(z) \cap W = \emptyset$. Luego, $z \notin V$ y por tanto $z \notin O$. Esta contradicción nos permite concluir que $z \in U_a$.

Así, $O \subset U_a$ y por lo tanto x es punto interior del conjunto U_a. Esto prueba que U_a es un conjunto abierto, como queríamos demostrar.

La colección $\{U_a\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta para X y por la paracompacidad de este espacio, podemos encontrar un refinamiento localmente finito $\mathcal{V} = \{V_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ de $\{U_a\}_{a \in A}$. Sea $\{p_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{V}$ y escojamos para cada $\mu \in \mathcal{M}$, un punto $a_\mu \in A$, tal que

$$V_\mu \subset U_{a_\mu}.$$

Así, podemos definir la función $f : X \to Y$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} p_\mu(x) a_\mu.$$

Por el lema 1.3.3, f es una función continua. Además, si $x \in X$, entonces existen índices $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathcal{M}$, tal que para todo $\mu \neq \mu_i$ (con $i \in \{1, \ldots, n\}$), $p_\mu(x) = 0$. Así, podemos ver a $f(x)$ de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{\mu_i}(x) a_{\mu_i}.$$

Pero para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple que

$$x \in V_{\mu_i} \subset U_{a_{\mu_i}},$$

de donde $a_{\mu_i} \in \phi(x)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $f(x)$ es una suma convexa de elementos de $\phi(x)$ y aplicando la convexidad de este último conjunto, podemos concluir que $f(x) \in \phi(x)$, lo cual prueba que f es la selección buscada. $\square$

El segundo teorema que enunciaremos tiene la desventaja de que el dominio es metrizable y no paracompacto contrariamente al teorema 2.4.1, que acabamos de demostrar. Sin embargo, este hecho nos permite ganar mucha generalidad en cuando al rango y el comportamiento del portador.

Para el segundo teorema de selección haremos uso del teorema de Dugundji, que enunciaremos a continuación.

Teorema (Teorema de Dugundji). *Sean X un espacio métrico y Y un espacio lineal localmente convexo. Supongamos que $A \subset X$ es un subconjunto cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. Entonces f tiene una extensión continua; es decir, existe una función continua $F : X \to Conv(f(A)) \subset Y$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Para la demostración de este teorema se puede consultar [4].

Teorema 2.4.2. *Sea X un espacio métrico, Y un espacio localmente convexo y $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ un portador i.s.c. Supongamos que para cada $x \in X$, existe una vecindad U_x de x y un subespacio lineal y metrizable $M_x \subset Y$ tal que para todo $z \in U_x$ se cumpla que $\phi(z) \subset M_x$. Entonces ϕ admite una selección.*

Demostración. Para cada $x \in X$, consideremos la vecindad U_x como en las hipótesis del teorema. Entonces $\{U_x\}_{x \in X}$ es una cubierta abierta para X. Como X es paracompacto y haciendo uso de la proposición 1.3.2 podemos encontrar un refinamiento localmente finito, $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, tal que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, exista un punto $x_\alpha \in X$ con

$$V_\alpha \subset \overline{V}_\alpha \subset U_{x_\alpha}.$$

Así, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, consideremos el portador i.s.c. $\phi|_{\overline{V}_\alpha} \to 2^{M_{x_\alpha}}$. Por la descripción de M_{x_α}, podemos aplicar el teorema 2.1.1 y encontrar una selección $f_\alpha : \overline{V}_\alpha \to M_{x_\alpha} \subset Y$, para $\phi|_{\overline{V}_\alpha}$

Como $\overline{V}_\alpha$ es un subespacio cerrado del espacio métrico X, podemos aplicar el teorema de Dugundji para encontrar una función $g_\alpha : X \to Y$ que extienda continuamente a f_α.

Consideremos $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una partición de unidad subordinada a $\mathcal{V}$ y definamos $f : X \to Y$ de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha(x) g_\alpha(x).$$

Por el lema 1.3.3, f es una función continua. Para terminar la demostración, falta verificar que $f(x) \in \phi(x)$, para cada $x \in X$. Para esto, considermos un punto arbitrario $x \in X$. Entonces, existe un número finito de índices, $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ tal que para todo $\alpha \neq \alpha_i$ (con $i = 1, \ldots, n$), $x \notin V_\alpha$ y por lo tanto $p_\alpha(x) = 0$. Así, podemos reescribir $f(x)$ de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}(x) g_{\alpha_i}(x).$$

Como $\sum\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} p_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}(x) = 1$, se sigue que $f(x)$ es una suma convexa de los puntos $g_{\alpha_i}(x)$. Esto es

$$f(x) \in \mathrm{Conv}\{g_{\alpha_1}(x), \ldots g_{\alpha_n}(x)\}.$$

Ahora notemos que $x \in V_{\alpha_i}$ y por lo tanto $g_{\alpha_i}(x) = f_{\alpha_i}(x) \in \phi(x)$. De esta manera, podemos concluir que cada punto $g_{\alpha_i}(x)$ pertenece al conjunto convexo $\phi(x)$. Consecuentemente

$$f(x) \in \mathrm{Conv}\{g_{\alpha_1}(x), \ldots g_{\alpha_n}(x)\} \subset \phi(x),$$

como se quería demostrar. $\square$

Capítulo 3

Contraejemplos

El propósito de este capítulo es mostrar que algunas de las hipótesis de los teoremas del capítulo anterior son esenciales. Para ello, nos gustaría hablar un poco sobre el espacio $l_1(A)$ el cual ya ha sido brevemente introducido en la demostración del teorema 2.1.1, $(b) \Rightarrow (a)$. Consideremos un conjunto A arbitrario y definamos

$$l_1(A) = \{y : A \to \mathbb{R} | \sum_{a \in A} |y(a)| < \infty\}.$$

Para que la expresión $\sum\limits_{a \in A} |y(a)| < \infty$ tenga sentido, necesitamos que $y(a) = 0$ para toda $a \in A$ salvo una cantidad a lo más numerable. Con la suma y la multiplicación por escalares reales, el conjunto $l_1(A)$ se convierte en un espacio vectorial.

Además podemos definir la función $\| \cdot \| : l_1(A) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|y\| = \sum_{a \in A} |y(a)|,$$

la cual define una norma en $l_1(A)$. Así, el espacio $(l_1(A), \| \cdot \|)$ es un espacio de Banach (ver [2]).

3.1. La completitud

El primer ejemplo que veremos nos mostrará que la completitud es una condición esencial en los teoremas 2.1.1 y 2.2.2, como lo veremos en el siguiente contraejemplo.

Sea $X = [0,1]$ y $Z = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Como Z es un conjunto numerable, podemos suponer que los elementos de Z están numerados de la siguiente manera:

$$Z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Consideremos el siguiente subespacio de $l_1(Z)$,

$$Y = \{y \in l_1(Z) | y(z) = 0 \text{ para todo } z \in Z \text{ salvo una cantidad finita}\}.$$

Sea C el conjunto definido por

$$C = \{y \in Y | y(z) \geq 0 \text{ para toda } z \in Z\},$$

y construyamos $\phi : X \to 2^Y$ de la siguiente forma:

$$\phi(x) = \begin{cases} C, & \text{si } x \in X \setminus Z, \\ C \cap \{y \in Y | y(z_n) \geq \frac{1}{n}\}, & \text{si } x = z_n. \end{cases}$$

Primero verifiquemos que ϕ es i.s.c.. Sean $x \in X$, $y \in \phi(x)$ y V una vecindad arbitraria de y. En virtud de la proposición 1.1.2, basta encontrar una vecindad U de x tal que para toda $x' \in U$, $\phi(x') \cap V \neq \emptyset$. Consideremos $\varepsilon > 0$, tal que

$$B(y, \varepsilon) \subset V.$$

Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Definamos U de la siguiente forma:

$$U = X \setminus \{z_1, \ldots, z_{n_0}\}.$$

Veamos que U es la vecindad buscada. Sea $x' \in U$. Si $x' \in X \setminus Z$, entonces $\phi(x') = C$. Como $y \in C$, es claro que $y \in \phi(x')$. Consecuentemente, $y \in \phi(x') \cap V$. Por otro lado, si $x' \in Z$, entonces $x' = z_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de U, $n > n_0$. Consideremos $\tilde{y} \in Y$, dada por

$$\tilde{y}(z) = \begin{cases} y(z) + \frac{1}{n} & \text{si } z = z_n \\ y(z) & \text{si } z \neq z_n \end{cases}$$

Es claro que $\tilde{y} \in \phi(x')$. Además

$$\|y - \tilde{y}\| = \sum_{z\in Z} |y(z) - \tilde{y}(z)| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\tilde{y} \in \phi(x') \cap B(y, \varepsilon) \subset \phi(x') \cap V$. De esta manera queda demostrado que ϕ es i.s.c.

Ahora notemos que para cada $x \in X$, $\phi(x)$ es un conjunto cerrado. Copiando algunos de los argumentos descritos en la demostración del teorema 2.1.1 $(b) \Rightarrow (a)$, se verifica que C es un subconjunto cerrado y convexo y por lo tanto $\phi(x) \in \mathcal{F}(Y)$ para todo $x \in X \setminus Z$.

Nos faltaría demostrar que el conjunto

$$G_k = \{y \in Y | y(z_k) \geq \frac{1}{k}\}$$

es cerrado y convexo. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en G_k. Supongamos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $y \in Y$. Si $y(z_k) < \frac{1}{k}$ podemos encontrar una $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > M$ se cumpla que

$$\frac{1}{k} - y(z_k) > \|y_n - y\|.$$

En este caso, tendríamos que

$$\frac{1}{k} - y(z_k) > |y_n(z_k) - y(z_k)| = y_n(z_k) - y(z_k) \geq \frac{1}{k} - y(z_k).$$

Esta contradicción nos garantiza que $y(z_k) \geq \frac{1}{k}$ y por lo tanto $y \in G_k$. Así, G_k es un conjunto cerrado para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Entonces, si $x \in Z$, $x = z_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, $\phi(x) = \phi(z_n) = C \cap G_n$ es la intersección de dos subconjuntos cerrados y por lo tanto es cerrado.

Ahora demostremos que G_k es convexo para cada $k \in \mathbb{N}$. Sea $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ una combinación convexa de elementos de G_k. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Además, para cada i, $y_i(z_k) \geq \frac{1}{k}$. Así,

$$y(z_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i(z_k) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1}{k}.$$

Así, podemos concluir que $y \in G_k$ y por lo tanto éste conjunto es convexo. De esta manera, si $x \in Z$, entonces $x = z_n$, para algun natural n. Entonces

$\phi(x) = C \cap G_n$ es la intersección de dos subconjuntos convexos y por lo tanto es convexo.

Sin embargo $\phi(x)$ no es completo. Para ver esto, basta demostrar que C no es completo. Consideremos la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$y_n(z_m) = \begin{cases} \frac{1}{2^m} & \text{si } m \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que

$$\|y_n - y_{n-1}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |y_n(z_i) - y_{n-1}(z_i)| = \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^i}\right| + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Así, (y_n) es una sucesión de Cauchy. El límite de esta sucesión, sería la función definida por $y(z_n) = \frac{1}{2^n}$. Pero y no pertenece ni siquiera a Y, puesto que es mayor que cero para toda $z \in Z$. Así, C no es un conjunto completo. Este hecho, nos trae una consecuencia importante: ϕ no posee ninguna selección. Veamos porqué.

Supongamos que ϕ posee una selección $f : X \to Y$. Notemos que para cada $z_n \in Z$, y para cada $y \in \phi(z_n)$, se tiene que $\|y\| \geq |y(z_n)| \geq \frac{1}{n}$. Así,

$$\|f(z_n)\| > [f(z_n)](z_n) \geq \frac{1}{n}.$$

Por la continuidad de f, existe una vecindad U_n de z_n, tal que si $x \in U_n$ entonces $\|f(x) - f(z_n)\| < \frac{1}{n}$. De este modo,

$$\frac{1}{n} > \|f(x) - f(z_n)\| \geq |[f(x)](z_n) - [f(z_n)](z_n)|.$$

Pero $[f(z_n)](z_n) \geq \frac{1}{n}$, por lo que

$$[f(x)](z_n) > 0, \quad \text{para toda } x \in U_n. \tag{3.1}$$

Como X es un espacio regular, para cada $n \in N$, podemos encontrar una vecindad V_n de z_n, tal que

$$z_n \in V_n \subset \overline{V_n} \subset U_n.$$

Construyamos inductivamente una subsucesión $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que cumpla con la siguiente propiedad:

$$z_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^{k-1} V_{n_i} \ \setminus \{z_{n_1}, \ldots, z_{n_k}\}. \tag{3.2}$$

Para $k = 1$ tomemos $n_k = 1$. Para $k = 2$, podemos escoger un punto $z_{n_2} \in (V_1 \cap Z) \setminus \{z_{n_1}\}$. Supongamos que existen puntos $z_{n_1}, \ldots z_{n_k}$, los cuales satisfacen (3.2). Entonces, por hipótesis de inducción

$$z_{n_k} \in \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} V_{n_i} \right) \cap V_{n_k},$$

por lo que $\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_{n_i}$ es un conjunto abierto no vacío y por tanto podemos encontrar un racional $z_{n_{k+1}}$ que verifique (3.2).

Consecuentemente, $\{\overline{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia centrada de subconjuntos cerrados y como $[0, 1]$ es compacto, existe un punto x_0 tal que

$$x_0 \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{V}_n.$$

Por 3.1, $[f(x_0)](z_{n_k}) > 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Pero esto es una contradicción, ya que sólo existe un número finito de puntos $z \in Z$, para los cuales $[f(x_0)](z) > 0$. Así, podemos concluir que ϕ no posee ninguna selección.

De este modo, podemos concluir que la completitud de los conjuntos $\phi(x)$ es una condición esencial en el teorema 2.1.1.

3.2. La metrizabilidad del rango

En esta sección presentaremos un ejemplo de un portador ϕ cuyo dominio es metrizable y su rango son los subconjuntos compactos y convexos de un espacio lineal no metrizable, pero de manera que ϕ no admita selección alguna.

El propósito será mostrar lo esencial de la metrizabilidad del contradominio en los teoremas de Michael.

Antes de construir nuestro ejemplo revisaremos algunos conceptos y resultados de análisis que nos serán de gran ayuda.

Sea L un espacio lineal. Se dice que una función $T : L \to \mathbb{R}$ es una **funcional** si es una función lineal. Denotaremos por L^* al conjunto de todas las funcionales definidas en L. L^* es un espacio vectorial que recibe el nombre de **espacio conjugado**. Denotemos por Γ al siguiente conjunto:

$$\Gamma = \{T^{-1}(U) | T \in L^*,\ U \text{ es abierto en } \mathbb{R}\}.$$

Sea w la topología generada por Γ como sub-base. Esta topología recibe el nombre de topología **débil** o w-topología y es la topología más débil que hace continuas a todas las funcionales $T \in L^*$.

Proposición 3.2.1. *Sea X es un espacio topológico y $h : X \to (L, w)$ una función cualquiera a un espacio lineal provisto de la topología débil. Entonces h es continua si y sólo si $T \circ h : X \to \mathbb{R}$ es continua para toda $T \in L^*$.*

Demostración. Evidentemente, si h es continua, para cualquier $T \in L^*$, la composición $T \circ h$ es continua.

Supongamos que h es una función tal que $T \circ h$ es continua para toda $T \in L^*$. Consideremos $G \subset L_1$ un abierto sub-básico. Entonces $G = T_0^{-1}(U_0)$ para algún abierto $U_0 \subset \mathbb{R}$ y para alguna funcional $T_0 \in L^*$. Entonces

$$h^{-1}(G) = h^{-1}(T_0^{-1}(U_0)) = (T_0 \circ h)^{-1}(U).$$

Por la hipótesis del enunciado, $T_0 \circ h$ es continua. Así, $h^{-1}(G) = (T_0 \circ h)^{-1}(U)$ es abierto en X y por lo tanto h es una función continua, como se quería demostrar. □

Teorema 3.2.2. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico vectorial L. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto x_0 en la topología débil de L si y sólo si la sucesión $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(x_0)$ en $\mathbb{R}$, para toda $T \in L^*$.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $x_0 \in L$ tal que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. Sea $T \in L^*$. Como la topología débil hace continua a la función T, podemos garantizar que $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(x_0)$.

Ahora supongamos que $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(x_0)$ para toda $T \in L^*$. Sea W una vecindad de x_0 en la topología débil de L. Entonces existen funciones $T_1, \dots T_k \in L^*$ y abiertos $U_1, \dots U_k$ de $\mathbb{R}$, tales que

$$x_0 \in V = \bigcap_{i=1}^{k} T_i^{-1}(U_i) \subset W.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe un número natural N_i, tal que para todo $n > N_i$, se tiene que $T_i(x_n) \in U_i$. Consideremos

$$N_0 = \text{máx}\{N_i |\ i = 1, \ldots k\}.$$

Entonces, si $n > N_0$ se tiene que, $T_i(x_n) \in U_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Consecuentemente,

$$x_n \in T_i^{-1}(U_i), \quad \text{para toda } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

De este modo, podemos concluir que si $n > N_0$, entonces $x_n \in V \subset W$. Por lo tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0 como se quería demostrar. $\square$

Cuando L es un espacio normado (con norma $\|\cdot\|$) diremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente a $x_0 \in L$, si

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0.$$

Por otro lado, diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a x_0, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0 en la topología débil de L.

Es fácil ver que la convergencia fuerte siempre implica la convergencia débil. Aunque el recíproco no siempre es verdad, hay ciertos casos en los que sí ocurre.

Ahora estamos en condiciones de construir nuestro contraejemplo. Consideremos

$$Y = l_1(\mathbb{N}) = \{y = (y_1, y_2 \ldots)|y_i \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| < \infty\}$$

provisto de la topología débil. Este espacio es un espacio lineal localmente convexo y no metrizable, pero en el cual la convergencia débil sí implica la convergencia fuerte (ver [2]).

Llamaremos l_∞, al espacio vectorial de las sucesiones acotadas, esto es

$$l_\infty = \{x = (x_1, x_2, \ldots)|\text{existe } M \text{ tal que } x_n \leq M_x \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

En este caso, para cualquier $T \in Y^*$, existe un vector $w \in l_\infty$, con la propiedad de que

$$T(y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n y_n, \quad \text{para todo } y \in Y,$$

donde $w = (w_1, w_2, \dots)$ y $y = (y_1, y_2, \dots)$.

Sea $\alpha\mathbb{N}$ la compactación de Alexsandroff de los naturales y denotemos por ∞ al residuo. Entonces $\alpha\mathbb{N}$ es un espacio metrizable y cero dimensional.

Consideremos $\phi : \alpha\mathbb{N} :\to 2^Y$ el portador dado por

$$\phi(z) = \begin{cases} \{y = (y_1, \dots, y_n, 1/2, 0, 0, \dots) | \sum_{i=1}^n |y_i| \leq 1/2\}, & \text{si } z = n, \\ \{0 = (0, 0, \dots)\}, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Notemos que para todo $z \in \alpha\mathbb{N}$, $\phi(z)$ es convexo. En efecto, si $z = \infty$, es evidente que $\{0\}$ es un conjunto convexo. Por otro lado, si $z = n$, y $y = \sum_{i=1}^m \lambda_i y^i$ es una suma convexa de elementos de $\phi(n)$, donde

$$y^i = (y_1^i, \dots, y_n^i, 1/2, 0, 0, \dots) \text{ y } y = (y_1, \dots, y_n, \dots),$$

entonces,

$$\sum_{j=1}^n y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_i y_j^i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i y_j^i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^n y_j^i \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, como la cordenada $n+1$-ésima de cada y^i es $1/2$, se tiene que

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_{n+1}^i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Así, el punto y es de la forma $y = (y_1, y_2 \dots y_n, 1/2, 0, 0 \dots)$ con $\sum\limits_{j=1}^n y_j \leq 1/2$, y por lo tanto $y \in \phi(n)$.

Además $\phi(n)$ es compacto. Para percatarnos de ello, notemos que el conjunto

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x = (x_1, \dots, x_n, 1/2), \ \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1/3\},$$

es compacto por ser cerrado y acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos la función $h : B_n \to Y$ dada por

$$h((x_1, \dots, x_n, 1/2)) = (x_1, \dots, x_n, 1/2, 0, 0 \dots).$$

Notemos que la función h es continua. En efecto, si $T \in Y^*$, entonces existe $w = (w_1, w_2, \dots) \in l_\infty$, tal que

$$T((y_1, y_2, \dots)) = \sum_{n=1}^\infty w_n y_n.$$

De este modo, la función $T \circ h : B_n \to \mathbb{R}$ está dada por

$$h((x_1, \dots x_n, 1/2)) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \ + \ \frac{w_{n+1}}{2},$$

la cual es una función continua. En estas condiciones, podemos aplicar la proposición 3.2.1 y concluir que h es continua. Consecuentemente,

$$\phi(n) = h(B_n),$$

es un subconjunto compacto, como queríamos demostrar.

Probemos que ϕ es un portador i.s.c.. Sea $z \in \alpha\mathbb{N}$, $y \in \phi(z)$, y $V \subset Y$ una vecindad de y en la topología débil de Y. Por la proposición 1.1.2, es suficiente encontrar una vecindad U de z tal que para todo $x \in U$, $\phi(x) \cap V \neq \emptyset$.

Si $z \neq \infty$, entonces $y \neq 0$, por lo que podemos encontrar una vecindad de y, $W \subset Y$, tal que $W \subset V$ y $0 \notin W$. Así, el conjunto

$$U = \{x \in \alpha\mathbb{N} | \phi(x) \cap W \neq \emptyset\}$$

no contiene al punto ∞ y por lo tanto es una vecindad abierta de z en $\alpha\mathbb{N}$. De este modo, para todo $x \in U$,

$$\phi(x) \cap V \neq \emptyset.$$

Si $z = \infty$, entonces V es una vecindad de 0 en la topología débil de Y. Por esto, existe $\varepsilon > 0$ y funcionales $T_1, \dots T_k \in Y^*$, tales que

$$W = \bigcap_{i=1}^{k} T_i^{-1}\big((-\varepsilon, \varepsilon)\big) \subset V.$$

Sabemos que para cada T_i, existen un vector $w_i = (w_1^i, w_2^i, \dots,) \in l_\infty$, tal que

$$T_i(y) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j^i y_j, \quad y = (y_1, y_2, \dots) \in Y.$$

Consideremos la función $Q : Y \to \mathbb{R}^k$ dada por

$$Q = \triangle_{i=1}^{k} T_i.$$

Entonces Q es el producto diagonal de funciones continuas y por lo tanto Q también es continua. Sea C_n el siguiente conjunto

$$C_n = \{y \in Y | y = (y_1, \dots, y_n, 0, 0 \dots), \ \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leq 1/2\}.$$

Es claro que $Q(C_n) \subset Q(C_m)$, si $n < m$. Ahora consideremos el conjunto

$$K = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q(C_n)} \subset \mathbb{R}^k.$$

K es un subconjunto cerrado del espacio euclideano $\mathbb{R}^k$. Además, si

$$u = \max_{i \in \{1, \dots k\}} \{\sup_{j \in \mathbb{N}} |u_j^i|\},$$

para cada $y \in C_n$, se cumple que

$$|T_i(y)| = |\sum_{j=1}^{n} w_j^i y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |w_j^i y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} u|y_j| \leq \frac{u}{2}, \quad y = (y_1, y_2, \dots) \in Y.$$

Así, si $B = \prod_{i=1}^{k} [-u/2, u/2] \subset \mathbb{R}^k$, es evidente que $Q(C_n) \subset B$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$K \subset \overline{B} = B,$$

de donde podemos concluir que K es un subconjunto cerrado y acotado del el espacio euclidiano $\mathbb{R}^k$, y por lo tanto K es compacto. Consecuentemente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_0$ y para cada $y \in C_n$, existe $y_0 \in C_{n_0}$ que satisface la siguiente desigualdad

$$|T_i(y) - T_i(y_0)| < \varepsilon, \quad \text{para toda } i \in \{1, \dots k\}. \tag{3.3}$$

Sea $U = \{n \in \mathbb{N} | n > n_0\} \cup \{\infty\}$. Entonces U es una vecindad de ∞ en $\alpha\mathbb{N}$. Veamos que U es la vecindad buscada. Sea $n \in U$. Consideremos el punto

$$y = (0, \dots, 0, 1/2, 0, 0 \dots) \in Y,$$

donde $1/2$ se encuentra en la $n+1$-ésima coordenada. Entonces existe $y_0 \in C_{n_0}$ de manera que se satisface la desigualdad (3.3). Definamos $\tilde{y} = y - y_0$. Entonces $\tilde{y}_{n+1} = 1/2$; además,

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_{0i} \leq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\tilde{y} \in \phi(n)$. Además, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que

$$|T_i(\tilde{y})| = |T_i(y - y_0)| = |T_i(y) - T_i(y_0)| < \varepsilon.$$

Consecuentemente, $\tilde{y} \in T_i^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto

$$\tilde{y} \in W \cap \phi(n) \subset V \cap \phi(n).$$

Así, queda demostrado que ϕ es i.s.c..

Para concluir nuestro ejemplo, veamos que ϕ no admite ninguna selección. Supongamos lo contrario, entonces existe $f : \alpha\mathbb{N} \to Y$ una función continua tal que $f(z) \in \phi(z)$ para todo $z \in \alpha\mathbb{N} \to Y$.

Como la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ∞ en $\alpha\mathbb{N}$, por la continuidad de f se tiene que $f(n)$ converge débilmente a $f(\infty) = 0$. Pero en Y la convergencia débil implica la convergencia fuerte, por lo que $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norma a 0. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \|f(n)\| = 0.$$

Pero cada $f(n) \in \phi(n)$, de donde podemos observar que $f(n)$ es de la forma

$$f(n) = (y_1^n, \ldots y_n^n, 1/2, 0, 0 \ldots), \quad \text{con} \ \sum_{i=1}^{n} |y_i^n| \leq 1/2.$$

Consecuentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\|f(n)\| = \sum_{i=1}^{n} |y_i^n| \ + \ 1/2 \geq 1/2.$$

Así, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f(n)\| \geq 1/2 > 0$. Esta contradicción nos permite concluir que ϕ no admite ninguna selección, y por lo tanto los teoremas 2.1.1, 2.2.2 y 2.3.2 son falso si les quitamos la hipótesis de que el rango sea metrizable.

Capítulo 4

Aplicaciones

Como el título indica, en este capítulo expondremos algunas de las aplicaciones de los teoremas de selecciones.

4.1. Teorema de Bartle-Graves

La primera aplicación que veremos, es la demostración del Teorema de Bartle-Graves con ayuda del teorema 2.1.1 y del teorema de la función abierta el cual expondremos en breve.

Diremos que un espacio topológico X es un **espacio de Baire** siempre y cuando se satisfaga la siguiente propiedad:

(1) Si $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de subconjuntos cerrados de X tal que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ tiene interior no vacío, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que B_m tiene interior no vacío.

Existen muchas equivalencias a la propiedad (1). Por ejemplo,

(2) Cualquier unión numerable de subconjuntos cerrados con interior vacío tiene interior vacío.

(3) La intersección numerable de subconjuntos abiertos y densos en X es densa en X.

Hay muchos ejemplos de espacios de Baire, para conocer algunos conviene enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1 (Teorema de la categoría de Baire). *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

Para su demostración, se puede consultar [8].

Como consecuencia de este importante teorema, tenemos que todos los espacios de Banach son espacios de Baire. Este hecho jugará en papel fundamental en el teorema de la función abierta, como veremos a continuación.

Teorema 4.1.2 (Teorema de la función abierta de Banach-Schauder). *Sean X y Y espacios de Banach. Si $T : X \to Y$ es una función continua, lineal y suprayectiva, entonces T es abierta.*

Demostración. Definamos

$$D_r(y) = \{z \in Y| \ \parallel z - y \parallel \leq r\},$$

y

$$B_\alpha = \{x \in X| \ \|x\| \leq \alpha\}.$$

Afirmación 1: Existe $\alpha > 0$ tal que

$$D_1(\bar{0}) \subset \overline{T(B_\alpha)},$$

donde $\bar{0}$ denota el origen de Y.

Como T es una función suprayectiva, tenemos que

$$Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{T(B_i)}.$$

Además, como Y es de Banach, por el teorema 4.1.1, Y es un espacio de Baire. En estas condiciones, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T(B_m)}$ tiene interior no vacío.

Por otro lado, como T es lineal y B_m es convexo, se tiene que $T(B_m)$ es convexo y por lo tanto $\overline{T(B_m)}$ también lo es. Además, observemos que B_m es un subconjunto simétrico, esto es, $B_m = -B_m$. Así,

$$T(B_m) = T(-B_m) = -T(B_m),$$

por lo que $T(B_m)$ es un subconjunto simétrico y consecuentemente $\overline{T(B_m)}$ también lo es.

Escojamos $y \in Y$ y $\beta > 0$ tales que

$$D_\beta(y) \subset \overline{T(B_m)}.$$

Sea $z \in Y$ tal que $\| z \| \leq \beta$. Entonces $\| (z+y) - y \| \leq \beta$ y por tanto

$$z + y \in \overline{T(B_m)}.$$

Análogamente, $\| (y-z) - y \| \leq \beta$, por lo que

$$y - z \in \overline{T(B_m)}.$$

Aplicando la simetría de $\overline{T(B_m)}$, podemos concluir que $z - y \in \overline{T(B_m)}$. Ahora bien, como $\overline{T(B_m)}$ es convexo, tenemos que

$$z = \frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2} \in \overline{T(B_m)},$$

demostrando así que $D_\beta(\bar{0}) \subset \overline{T(B_m)}$. Tomemos $\alpha = m/\beta$. Entonces, si $y \in D_1(\bar{0})$, tenemos que

$$\|\beta y\| = \beta \|y\| \in D_\beta(\bar{0}),$$

por lo que $\beta y \in \overline{T(B_m)} = \overline{T(B_{\beta\alpha})}$. Consecuentemente, por la linealidad de la función T se tiene que $y \in \overline{T(B_\alpha)}$ y por lo tanto

$$D_1(\bar{0}) \subset \overline{T(B_\alpha)}.$$

<u>Afirmación 2</u>: $D_1(\bar{0}) \subset T(B_{2\alpha})$. Sea $y \in Y$. Construiremos inductivamente una suceción $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $T(B_\alpha)$, tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumpla que

$$\| y - \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} y_k \| \leq 2^{-n}.$$

Sea $y \in D_1(\bar{0})$. Por la afirmación 1, sabemos que $y \in \overline{T(B_\alpha)}$. Así, podemos asegurar que $B(y, \frac{1}{2}) \cap T(B_\alpha) \neq \emptyset$. En otras palabras, existe $y_1 \in T(B_\alpha)$, tal que $\| y - y_1 \| \leq \frac{1}{2}$. Supongamos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ han sido construidas. Entonces

$$\| 2^n (y - \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} y_k) \| \leq 1,$$

por lo que $2^n(y - \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)}y_k) \in D_1(\bar{0}) \subset \overline{T(B_\alpha)}$. De esta manera, existe $y_{n+1} \in T(B_\alpha)$, tal que

$$\| 2^n(y - \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)}y_k) - y_{n+1} \| \leq \frac{1}{2}.$$

Pero

$$\| 2^n(y - \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)}y_k) - y_{n+1} \| = \| 2^n(y - \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-(k-1)}y_k \|,$$

por lo que el punto y_{n+1} es el punto buscado, lo cual completa la construcción por inducción.

Ahora bien, por la continuidad de la norma,

$$\lim_{n\to\infty} \| y - \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)}y_k \| = \| y - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)}y_k \| .$$

Sin embargo,

$$\| y - \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)}y_k \| \leq 2^{-n},$$

por lo que

$$\| y - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)}y_k \| = \| y - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)}y_k \| \leq \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0.$$

Así, $y = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)}y_k$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos $x_n \in B_\alpha$, tal que $T(x_n) = y_n$. Como $\| x_n \| \leq \alpha$, tenemos que

$$\| 2^{-(n-1)}x_n \| \leq 2^{-(n-1)}\alpha,$$

y por el criterio de Waierstrass, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n-1)}x_n$ converge a un punto que llamaremos x. Aplicando nuevamente la continuidad de la norma, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\| x \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(n-1)} \| x_n \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(n-1)}\alpha = 2\alpha.$$

Como T es una función lineal,

$$T(\sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} x_k) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} T(x_k) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} y_k.$$

Y como T es una función continua, tenemos que

$$y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} y_k = T(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} x_k) = T(x).$$

Pero $x \in B_{2\alpha}$, por lo que $y \in T(B_{2\alpha})$, como se quería demostrar.

Afirmación 3: T es una función abierta.

Sea U un subconjunto abierto y no vacío de X. Si $y \in T(U)$, existe $x \in U$ y $\varepsilon > 0$, tal que $T(x) = y$ y

$$\{z \in X |\ \|z - x\| \leq \varepsilon\} \subset U.$$

De esta forma, $B_\varepsilon \subset U - x$, y por lo tanto

$$T(B_\varepsilon) \subset T(U - x) = T(U) - T(x).$$

Aplicando la afirmación 2, podemos asegurar que

$$D_{\frac{\varepsilon}{2\alpha}}(\bar{0}) \subset T(B_\varepsilon) \subset T(U) - T(x).$$

Consecuentemente,

$$D_{\frac{\varepsilon}{2\alpha}}(\bar{0}) + T(x) = D_{\frac{\varepsilon}{2\alpha}}(T(x)) \subset T(U).$$

Así, podemos ver que $T(x)$ es punto interior de $T(U)$ y por lo tanto $T(U)$ es un conjunto abierto, como se quería demostrar. □

Corolario 4.1.3 (Teorema de Bartle-Graves). *Sean X y Y espacios de Banach, y $T : Y \to X$ una función continua, lineal y suprayectiva. Entonces, podemos encontrar una función continua $f : X \to Y$ tal que*

$$T \circ f(x) = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración. Definamos $\phi : X \to 2^Y$ por

$$\phi(x) = T^{-1}(x.)$$

Como T es una función continua, $\phi(x)$ es cerrado para todo $x \in X$. Por otro lado como T es una función lineal, $\phi(x)$ es un subconjunto convexo para todo $x \in X$.

Por el teorema 4.1.2, la función T es abierta. Consecuentemente, si $U \subset Y$ es abierto en Y, entonces $T(U)$ es abierto en X. Sea

$$V = \{x \in X | \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Así, $x \in T(U)$ si y sólo si existe un punto $y \in U$ tal que $T(y) = x$, lo cual sucede si y sólo si

$$T^{-1}(x) \cap U \neq \emptyset.$$

De este modo, podemos concluir que $V = T(U)$ es abierto en X, y por lo tanto ϕ es i.s.c.. Como X es un espacio de Banach, X es paracompacto. Así, aplicando el teorema 2.1.1, podemos encontrar una seleción de ϕ, $f : X \to Y$. Como $f(x) \in T^{-1}(x)$, tenemos que $T(f(x)) = x$, por lo que f es la función buscada. □

4.2. Caracterización de la paracompacidad

El enunciado del teorema 2.1.1 lleva consigo una caracterización de la paracompacidad interesante. Ahora usaremos nuevamente este teorema para dar otra caracterización de la paracompacidad: mostraremos que un espacio es paracompacto si tiene *suficientes* subespacios cerrados paracompactos.

Sea X un espacio topológico. Diremos que una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos cerrados de X **domina** a X, si cubre a X y se cumple la siguiente propiedad:

P1 : Un conjunto $A \subset X$ es cerrado en X si existe una subcolección $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tal que

1. $A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B$,
2. $A \cap B$ es cerrado para todo $B \in \mathcal{B}_1$.

Si $\mathcal{B}$ domina a X y $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ es una subcolección arbitraria, entonces las siguientes dos propiedades son consecuencia de la definición:

Propiedad 1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B$ es cerrado.

En efecto, si hacemos $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B$, claramente $\mathcal{B}_1$ cubre a A, y $A \cap B = B$ es cerrado para todo $B \in \mathcal{B}_1$. Luego, como $\mathcal{B}$ domina a X, por **P1** podemos concluir que A es cerrado en X.

Propiedad 2. Si Y es un espacio topológico y $f : \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \to Y$ es una función tal que $f|_B$ es continua para cada $B \in \mathcal{B}_1$ entonces f es continua.

Para ver esto, tomemos $C \subset Y$ un subconjunto cerrado. Entonces

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} f^{-1}(C) \cap B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} f^{-1}|_B(C).$$

Como $f|_B^{-1}(C)$ es cerrado para todo $B \in \mathcal{B}_1$, se sigue de **P1** que $f^{-1}(C)$ es cerrado, y por lo tanto, f es continua.

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema principal de ésta sección.

Teorema 4.2.1. *Sea X un espacio topológico. Entonces los siguientes dos enunciados son equivalentes:*

(a) X es paracompacto.

(b) X es dominado por una colección de subconjuntos paracompactos.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Si X es un espacio paracompacto, entonces la colección $\mathcal{B} = \{X\}$ domina a X y su único elemento es un subconjunto paracompacto.

$(b) \Rightarrow (a)$. Sea $\mathcal{B}$ una colección de conjuntos paracompactos que domina a X. Consideremos cualquier espacio de Banach Y y sea $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ cualquier portador i.s.c.. En virtud del teorema 2.1.1, para demostrar que X es paracompacto basta demostrar que ϕ admite una selección.

Sea $\mathfrak{C}$ la clase de todas las parejas $(\mathcal{C}, h)$, donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ y h es una selección para $\phi|_{\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C}$. Diremos que $(\mathcal{C}, h) \preceq (\mathcal{D}, g)$ si

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \text{ y } g|_{\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C} = h.$$

Es fácil ver que $\preceq$ es una relación de orden en $\mathfrak{C}$, por lo que $(\mathfrak{C}, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Consideremos $\mathfrak{G} = \{(\mathcal{G}_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cadena en $\mathfrak{C}$ y demostremos que $\mathfrak{G}$ tiene cota superior. Sea

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{G}_\alpha.$$

Es claro que $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{H}$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Ahora definamos $h : \bigcup\limits_{H\in\mathcal{H}} H \to Y$ por

$$h(x) = h_\alpha(x) \ \text{ si } \ x \in G \in \mathcal{G}_\alpha \ \text{ para alguna } \ \alpha \in \mathcal{A}.$$

Como $\mathfrak{G}$ es un conjunto linealmente ordenado, la función h está bien definida. Además, por la propiedad 2, h es continua. Así, $(\mathcal{H}, h)$ es una cota superior de $\mathfrak{G}$.

En estas condiciones podemos aplicar el Lema de Zorn para encontrar un elemento maximal $(\mathcal{C}_0, h_0)$ de $\mathfrak{C}$. Para completar la demostración, basta demostrar que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{B}$. Supongamos que no, entonces existe un conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \notin \mathcal{C}_0$. Consideremos el siguiente conjunto

$$B' = B \cap \left(\bigcap_{C\in\mathcal{C}_0} C \right).$$

Entonces $h_0|_{B'}$ es una selección para $\phi|_{B'}$. Como B es paracompacto, podemos aplicar el teorema 2.1.1 y la proposición 1.1.4, para encontrar una selección g de $\phi|_B$ tal que $g|_{B'} = h_0|_{B'}$.

Así, podemos formar la familia $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0 \cup \{B\}$ y la función $h_1 : \bigcup\limits_{C\in\mathcal{C}_1} C \to Y$ definida por

$$h_1(x) = \begin{cases} h_0(x), & \text{si } x \in \bigcup\limits_{C\in\mathcal{C}_0} C, \\ g(x), & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Evidentemente $(\mathcal{C}_0, h_0) \preceq (\mathcal{C}_1, h_1)$ pero $(\mathcal{C}_1, h_1) \not\preceq (\mathcal{C}_0, h_0)$. Como lo anterior contradice el hecho de que $(\mathcal{C}_0, h_0)$ es un elemento maximal de $\mathfrak{C}$, podemos concluir que $\mathcal{C}_0 = \mathcal{B}$, y por lo tanto h_0 es selección para $\phi|_{\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B} = \phi$. $\square$

Un corolario importante de este teorema es el hecho de que todos los complejos simpliciales son paracompactos. Antes de demostrarlo, recordemos brevemente cómo está constituido un complejo simplicial.

Un conjunto de puntos de la forma

$$\Delta^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x_i \geq 0,\ y\ \sum_{i=1}^{n=1} x_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

recibe el nombre de **simplejo estándar** (o en posición estándar) de dimensión n. El simplejo Δ^n puede ser considerado como un espacio topológico si se le asigna la topología inducida de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Si S es un espacio homeomorfo a un simplejo estándar, lo llamaremos simplemente, **simplejo**.

Diremos que X es un **complejo simplicial** si existe una colección $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, tal que

1. $X = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$.
2. S_α es un simplejo para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.
3. Para cualesquiera dos conjuntos S_{α_1}, $S_{\alpha_2} \in \{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se tiene que
$$S_{\alpha_1} \cap S_{\alpha_2} \in \{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}.$$

Hay varias formas de topologizar a un complejo simplicial. A nosotros nos interesa la **topología débil** o **topología CW**, la cual está constituida por la siguiente colección

$$\{U \subset X | U \cap S_\alpha \ \text{ es abierto en } S_\alpha \ \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Con esta topología, un subconjunto $A \subset X$ es cerrado en X si y sólo si $A \cap S_\alpha$ es cerrado para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.

Corolario 4.2.2. *Todo complejo simplicial provisto de la topología CW es un espacio paracompacto.*

Demostración. Sea X un complejo simplicial. Entonces existe una colección $\mathcal{S} = \{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de simplejos, tales que $X = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$, y de manera que la intersección de cualesquiera dos elementos de $\mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{S}$.

Notemos que para todo $S_\alpha \in \mathcal{S}$, S es homeomorfo a un subconjunto de algún espacio euclidiano. De este modo, S_α es metrizable y por lo tanto es paracompacto.

Además, la topología CW en X nos garantiza que la familia $\mathcal{S}$ domina a X. Así, podemos aplicar el teorema 4.2.1 y concluir que X es un espacio paracompacto. $\square$

4.3. El teorema de Extensión de Dugundji

Esta sección representa el motivo original de esta tesis: la demostración del teorema de extensión continua de Dugundji a partir de un teorema de selección. Haciendo uso del teorema 2.1.1, probaremos dos teoremas de extensión, uno de los cuales constituye un caso particular del teorema de Dugundji. Después usaremos el teorema 2.4.1 para mostrar que es posible dar una demostración del teorema de Dugundji en su forma más general a partir de un teorema de selección.

Teorema 4.3.1. *Sea X un espacio paracompacto y Y un espacio de Banach. Entonces $Y \in AE(X)$.*

Demostración. Sea $A \subset X$ un subconjunto cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. Por el teorema 2.1.1, cualquier portador i.s.c. $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ admite una selección. Pero Y es de Banach, por lo que que $Y \in \mathcal{C}(Y)$. Además, $\mathcal{C}(Y)$ contiene a todos los subconjuntos de un sólo punto. Así, podemos aplicar la proposición 1.1.5 y concluir que $Y \in AE(X)$. □

Sea X un espacio topológico y $G \subset X$ un subconjunto abierto. Consideremos una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\mu\}_{\mu\in\mathcal{M}}$ de G. Se dice que $\mathcal{U}$ es una **cubierta canónica** de G si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. $\mathcal{U}$ es localmente finita en G.

2. Para todo $a \in X \setminus G$, y para cualquier vecindad abierta V de a, existe una vecindad W de a, con $W \subset V$, tal que si $U_\mu \cap W \neq \emptyset$, entonces $U_\mu \subset V$.

Haremos uso del teorema de Stone, para demostrar la siguiente propiedad de los espacios métricos.

Teorema 4.3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Para cualquier subconjunto abierto G, existe una cubierta canónica $\mathcal{U} = \{U_\mu\}_{\mu\in\mathcal{M}}$ de G. Más aún, podemos encontrar puntos $a_\mu \in X \setminus G$, tal que para todo $x \in U_\mu$*

$$d(x, a_\mu) \leq 2(x, X \setminus G).$$

*El par $(\{U_\mu\}, \{a_\mu\})_{\mu\in\mathcal{M}}$ recibe el nombre de **sistema de Dugundji**.*

Demostración. Si $X = G$, cualquier cubierta localmente finita de X será una cubierta canónica. Supongamos entonces que

$$A = X \setminus G \neq \emptyset.$$

Para cada $x \in G$, llamemos B_x a la bola de centro en x y radio $\frac{1}{4}d(x, A)$. Claramente $B_x \subset G$; además, $\{B_x\}_{x \in G}$ es una cubierta abierta de G, el cual es un subespacio métrico. Por el teorema 1.4.4, podemos encontrar un refinamiento localmente finito, $\mathcal{U} = \{U_\mu\}_{\mu \in \mathcal{M}}$, de $\{B_x\}_{x \in G}$.

Demostremos que $\mathcal{U}$ es una cubierta canónica. Sea $a \in A$ y V una vecindad abierta de a. Como X es métrico, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(a, \delta) \subset V.$$

Necesitamos encontrar una vecindad W de a, tal que si $W \cap U_\mu \neq \emptyset$, entonces $U_\mu \subset V$. Propongamos $W = B(a, \frac{3\delta}{5})$

Sea $\mu \in \mathcal{M}$ tal que $U_\mu \cap W \neq \emptyset$ y $x \in U_\mu \cap W$. Sabemos que existe $y \in G$ tal que $U_\mu \subset B_y$. Aplicando la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} d(a, y) &\leq d(a, x) + d(x, y) < \frac{3\delta}{5} + \frac{1}{4}d(A, y) \\ &\leq \frac{3\delta}{5} + \frac{1}{4}d(a, y). \end{aligned}$$

Así, podemos concluir que

$$d(a, y) < \frac{4\delta}{5}.$$

Por otro lado, si $z \in U_\mu$, entonces $z \in B_y$. De este modo,

$$\begin{aligned} d(a, z) &\leq d(a, y) + d(y, z) < \frac{4\delta}{5} + \frac{1}{4}d(y, A) \\ &\leq \frac{4\delta}{5} + \frac{1}{4}d(y, a) < \frac{4\delta}{5} + \frac{\delta}{5} = \delta. \end{aligned}$$

Es decir, $z \in B_\delta(a) \subset V$. En otras palabras, $U_\mu \subset V$ para todo U_μ tal que $U_\mu \cap W \neq \emptyset$.

Para completar la prueba, debemos encontrar puntos $a_\mu \in A$, tal que $d(x, a_\mu) < 2d(x, A)$ para todo $x \in U_\mu$. Sabemos que para cada $\mu \in \mathcal{M}$, exite un $y_\mu \in G$, tal que $U_\mu \subset B_{y_\mu}$. Sea $a_\mu \in A$, cualquier punto que satisfaga la siguiente desigualdad

$$d(a_\mu, y_\mu) \leq \frac{5}{4} d(A, y_\mu).$$

Tomemos $x \in U_\mu$. Por desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x, a_\mu) &\leq d(x, y_\mu) + d(y_\mu, a_\mu) \\ &\leq \frac{1}{4} d(A, y_\mu) + \frac{5}{4} d(A, y_\mu) \\ &= \frac{3}{2} d(A, y_\mu). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$d(A, y_\mu) \leq d(A, x) + d(x, y_\mu) \leq d(A, x) + \frac{1}{4} d(A, y_\mu).$$

Es decir, $d(A, y_\mu) \leq \frac{4}{3} d(A, x)$. Uniendo estas dos desigualdades, obtenemos que

$$d(x, a_\mu) \leq \frac{3}{2} d(A, y_\mu) \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} d(A, x) = 2d(A, x),$$

que es lo que se quería demostrar. □

Teorema 4.3.3. *Sea X un espacio métrico y Y un espacio topológico lineal, localmente convexo y metrizable. Entonces $Y \in AE(X)$.*

Demostración. Sea $A \subset X$ un subconjunto cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. Por el teorema 4.3.2 podemos encontrar un sistema de Dugundji, $(\{U_\mu\}, \{a_\mu\})_{\mu \in \mathcal{M}}$, asociado a $X \setminus A$. Para cada $x \in X \setminus A$, consideremos el conjunto

$$Q(x) = \{\mu \in \mathcal{M} | x \in U_\mu\},$$

y definamos $\phi : X \to \mathcal{C}(Y)$ de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \begin{cases} \{f(x)\} & \text{si } x \in A, \\ \mathrm{Conv}(\{f(a_\mu) | \mu \in Q(x)\}) & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Como $\{U_\mu\}_{\mu\in\mathcal{M}}$ es una cubierta localmente finita de $X \setminus A$, para cada $x \in X \setminus A$, el conjunto de índices $Q(x)$ es un conjunto finito. Así, por la proposición 1.2.1, $\phi(x)$ es un subconjunto compacto de Y y por lo tanto es completo. Además, se sigue de la definición de ϕ que $\phi(x)$ es convexo para todo $x \in X$.

Demostremos que ϕ es i.s.c.. Sea $U \subset Y$ un subconjunto abierto. Llamemos V al conjunto $\{x \in X | \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ y veamos que V es un conjunto abierto. Consideremos $x \in V$.

Caso 1. Si $x \in X \setminus A$, definamos

$$W = \bigcap_{\mu\in Q(x)} U_\mu.$$

Así W es una vecindad de x. Además, si $y \in W$, entonces $Q(x) \subset Q(y)$, por lo que $\phi(x) \subset \phi(y)$. Consecuentemente, como $\phi(x) \cap U \neq \emptyset$, tenemos que

$$\phi(y) \cap U \neq \emptyset.$$

Así $y \in V$ y por lo tanto $W \subset V$.

Caso 2. Si $x \in A$, entonces $\phi(x) = f(x) \in U$. Como Y es localmente convexo, existe una vecindad convexa O de $f(x)$, contenida en U. Por otro lado, como f es continua, podemos encontrar $\varepsilon > 0$, tal que

$$f(B(x, \varepsilon) \cap A) \subset O.$$

Como $\mathcal{U}$ es una cubierta canónica, existe una vecindad W de x, tal que si $U_\mu \cap W \neq \emptyset$, entonces $U_\mu \subset B(x, \frac{\varepsilon}{3})$. Observemos que

$$f(W \cap A) \subset f(B(x, \varepsilon) \cap A) \subset O.$$

Ahora consideremos $y \in W \cap (X \setminus A)$ y demostremos que $a_\mu \in B(x, \varepsilon)$ para todo $\mu \in Q(y)$. En efecto, si $\mu \in Q(y)$, entonces $U_\mu \subset B(x, \frac{\varepsilon}{3})$, por lo que

$$d(y, x) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.1}$$

Además, como $x \in A$, tenemos que

$$d(y, A) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.2}$$

Consecuentemente, las desigualdades (4.1) y (4.2), junto con la desigualdad del triángulo y el hecho de que $(\{U_\mu\},\{a_\mu\})_{\mu\in\mathcal{M}}$ constituyen un sistema de Dugundji nos brindan la siguiente desigualdad:

$$d(a_\mu,x)\le d(a_\mu,y)+d(y,x)<2d(y,A)+\frac{\varepsilon}{3}<2\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Así, para toda $\mu\in Q(y)$, $a_\mu\in B(x,\varepsilon)\cap A$. Como consecuencia

$$f(a_\mu)\in O \ \text{ para toda } \ \mu\in Q(y).$$

Pero O es un conjunto convexo, entonces

$$\phi(y)=\mathrm{Conv}\{f(a_\mu)|\mu\in Q(y)\}\subset O\subset U.$$

Por lo tanto, W es una vecindad de x contenida en V. De esta manera podemos concluir que V es abierto y por lo tanto, ϕ es i.s.c..

Como X es paracompacto, estamos en condiciones de aplicar el teorema 2.1.1 para encontrar una selección F de ϕ. Claramente F extiende a f, por lo que $Y\in AE(X)$, como se quería demostrar.

□

Ahora modificaremos la demostración anterior, para dar una prueba del teorema de Dugundji en el caso general.

Teorema 4.3.4. *Si X es un espacio métrico y Y un espacio vectorial localmente convexo, entonces $Y\in AE(X)$.*

Demostración. Sea $A\subset X$ un subconjunto cerrado y $f:A\to Y$ una función continua. Consideremos un sistema de Dugundji $(\{U_\mu\},a_\mu)_{\mu\in\mathcal{M}}$ para $X\setminus A$, y definamos el portador $\phi:X\setminus A\to 2^Y$ por

$$\phi(x)=\mathrm{Conv}(\{f(a_\mu)|\mu\in Q(x)\}),$$

donde $Q(x)$ es el conjunto de índices definido en la demostración del teorema 4.3.3. Como se demostró en ese mismo teorema, ϕ es i.s.c. y $\phi(x)\in\mathcal{C}(Y)$ para todo $x\in X\setminus A$.

Observemos que la cubierta $\{U_\mu\}_{\mu\in\mathcal{M}}$ es localmente finita, por lo que para cada $x\in X\setminus A$, existe una vecindad U_x y un conjunto de índices $\mathcal{M}_x=\{\mu_1,\dots,\mu_n\}$ tal que para todo $z\in U_x$, $Q(z)\subset\mathcal{M}_x$. Consecuentemente, para todo $z\in\mathcal{U}_x$, se cumple que

$$\phi(z)\subset\mathrm{Conv}(\mathcal{M}_x).$$

Además, como $X \setminus A$ es métrico, por el teorema de Stone, también es paracompacto. Así, estamos en condiciones de aplicar el teorema 2.4.1 y obtener una selección g de ϕ.

Sea $F : X \to Y$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ g(x), & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Claramente F extiende a f. Por lo que únicamente nos faltaría demostrar que F es continua. Como g es continua en el abierto $X \setminus A$, es claro que F es continua en ese conjunto. Demostremos la continuidad de F en A. Para ello, consideremos $a \in A$ y $U \subset Y$ una vecindad de $F(a) = f(a)$. De este modo, si elegimos $W \subset X$ como en la demostración del teorema 4.3.3, se tiene que

$$F(W) \subset U.$$

Esta última contención nos garantiza que F es continua y por lo tanto es la extensión buscada. $\square$

Bibliografía

[1] H. H. Corson and J. L. Lindenstrauss, *Continuos selections with non-metrizable range*, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 492-504.

[2] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear operators*, Part I, Interscience, New York (1958).

[3] R. Engelking, *General Topology*, Sigma series in pure Mathematics, Vol. 6, Berlín (1989).

[4] S. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit. (1965)

[5] E. Michael, *Continuous selections. I*, Ann. of Math. 63 (1956), 361-382.

[6] E. Michael, *Selected selection theorems*, Amer. Math. Monthly 63, (1956), 223-238.

[7] J. van Mill: *Infinite-dimensional Topology:prerequisites and Introduction*, North-Holland Math. Library 43, Amsterdam 1989.

[8] W. Rudin: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, USA (1973).

[9] D. Repovs and P.V. Semenov: *Continuos Selections of Multivalued Mappings*, Kluwer Academic Publishes, Netherlannds (1998).