UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS

SOBRE LAS NOCIONES DE POSIBILIDAD EN TRES ENFOQUES DE LA TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

P R E S E N T A :

MARCO ANTONIO HERNÁNDEZ RAMÍREZ

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. ATOCHA ALISEDA LLERA.

Ciudad de México a 9 de junio de 2006.

Agradecimientos

Este trabajo representa el fin de mis estudios de maestría en Filosofía de la Ciencia, los cuales curse en el programa del Posgrado en Filosofía de la Ciencia que tiene su cede en el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM. Estos estudios los llevé a cabo gracias a una beca económica otorgada por el CONACYT durante los dos años que dura el programa y una beca complemento, durante el primer año, otorgada por la DGEP de la UNAM. El Instituto de Investigaciones Filosóficas también me otorgó una beca bajo la figura de Estudiante Asociado. Mi agradecimiento al CONACYT, la DGEP y el IIF's.

Agradezco también la amistad de Adriana Elisa Espinosa y los matemáticos Juan Carlos, Noé, Efraín, y los computólogos Marco y Rafael. No olvido mi deuda con la Dra. Salma Saab quien me indicó el camino a seguir y la manera amable de andarlo. Mi gratitud de manera especial al Dr. Johan van Benthem por su gentileza, toda la lógica modal que he aprendido leyéndolo, y por la generosa invitación y apoyo para asistir al ESSLLI-2006[*]. Gracias a él tuve la experiencia lógica más interesante de mi vida.

Este trabajo fue dictaminado por un grupo de académicos e investigadores a quienes agradezco su disposición. El maestro Ricardo Velásquez leyó y comentó conmigo muchos de los pasajes que mi distracción había dejado sumamente oscuros, en particular la relación de mi tema con el problema de la inducción. El Dr. Alfonso Arroyo hizo observaciones que ayudaron a mejorar la presentación y coherencia del mismo, sobre todo sus observaciones en torno a la clara distinción de los tres enfoques de probabilidad que presento. El Dr. Silvio Pinto hizo agudas observaciones y sugerencias valiosas al borrador; su lectura detenida y detallada me llamó la atención sobre la debilidad de algunos de mis argumentos y la necesidad de replantear muchos pasajes y fórmulas; estoy agradecido con él por el tiempo que dedicó a mi trabajo. El Dr. Alejandro Garcíadiego también leyó y sugirió cambios importantes, en particular sus observaciones sobre el teorema de los grandes números de Bernoulli, la sugerencia de bibliografía relevante y cuestiones estilísticas que yo había dejado de lado. A Alejandro le agradezco además, la oportunidad de colaborar con él en el Dpto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Siguiendo una extraña tradición, he dejado para el final lo que debiera expresar primero: mi gratitud a mi directora de tesis la Dra. Atocha Aliseda Llera; mi gratitud por el tiempo que dedicó para discutir todos los borradores previos, pues soy conciente del enorme esfuerzo que le representa estar al frente de la coordinación del Posgrado en Filosofía de la Ciencia y al mismo tiempo estar siempre dispuesta a discutir conmigo, y con cualquier otro estudiante, temas relacionados con lógica, en mi caso particular la lógica modal; mi gratitud por su confianza y su generosidad al permitirme trabajar en su cubículo de investigadora durante todo el invierno del 2005 y la primavera del 2006; ese lugar es una fuente inagotable de saber lógico; mi gratitud también por el apoyo para asistir al ESSLLI-2006; mi gratitud por la guía para concluir este trabajo, por la solidez y seriedad que le imprimió, y sobre todo, por los proyectos futuros. En suma, mi deuda con Atocha es de esas que difícilmente se pueden pagar.

[*] 18th European Summer School in Logic Language and Information.

Para Cecilia

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Antecedentes

La segunda mitad del siglo XIX fue testigo de un renacimiento de la lógica; esta ciencia a la cual Kant[1] acusó de estar completamente terminada por no haber sufrido progreso alguno durante más de dos mil años, recibió un fuerte impulso proveniente de las matemáticas. Las publicaciones de Boole, de De Morgan y de Peano, por mencionar tan sólo algunas de las más destacadas, vinieron no sólo a revivir la ciencia del pensamiento puro, sino que además la dotaron de nuevas herramientas. De acuerdo con van Heijenoort: "A great epoch in the history of logic did open in 1879, when Gottlob Frege's *Begriffsschrift* was published. This book freed logic from artificial connection with mathematics but at the same time prepared a deeper interrelation between these two sciences."[2] Sin embargo, no todas las áreas de la lógica fueron iluminadas por la luz de esa época de esplendor, pues hubo algunas nociones que ahora conocemos como modales que fueron relegadas y dejadas al margen del desarrollo axiomático que se comenzó a gestar a finales del siglo XIX, y alcanzó su apogeo a principios del siglo XX.

Frege mismo en su *Conceptografía* calificó de irrelevantes para su trabajo las distinciones modales. [3] De acuerdo con él, 'posible' y 'necesariamente,' 'puede' y 'debe,' tienen más que ver con consideraciones acerca del conocimiento humano que con la lógica pura, es decir, son nociones epistémicas. De haber estado Frege en lo cierto, entonces, Aristóteles se habría equivocado en pensar que forma parte de la tarea de los lógicos buscar reglas de inferencia aplicables sólo a las proposiciones modales. Sin embargo, ahora nos es

[1] [Kant 1781, b VIII].
[2] [van Heijenoort 1967, p. vi].
[3] [Frege 1988, p. 16].

más claro que las nociones modales de necesidad y posibilidad no pertenecen a la epistemología (por lo menos no exclusivamente), ni a ninguna otra ciencia en especial, que no sea la lógica misma.

Ahora bien, en el rechazo de los lógicos del siglo a XIX a considerar los aspectos modales, podemos encontrar una buena explicación del éxito que alcanzó lo que hemos considerado, siguiendo a Niiniluoto,[4] el programa rival de las modalidades, a saber: la teoría matemática de las probabilidades.

Niiniluoto, subraya que en contraste a los grandes avances de la lógica clásica formal, la teoría de las modalidades permaneció en un estado de oscuridad durante todo el siglo XIX, y agrega:

> No technical innovations were introduced for the formal treatment of possibility and necessity. At the end of the century, modal logic was practically speaking dead. Of the great logicians of the age, only the American pragmatist Peirce kept alive the interest in the logic of modalities, and also understood that the scholastic logicians in the thirteenth and fourteenth centuries and G.W. Leibniz in the late century had done in this field significant work which gave promise for a –so far unrealized– brighter future. [Niiniluoto 1988: 276]

Esto nos puede dar indicios de por qué el nacimiento de una lógica modal tuvo que esperar más de sesenta años después de que Boole publicara, en 1854, lo que se considera su obra maestra: *Una investigación de las leyes del pensamiento sobre las cuales son fundadas las teorías matemáticas de las probabilidades y la lógica*.

Es otra obra maestra del pensamiento lógico la que dio la pauta para el surgimiento de la moderna lógica modal: los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, durante mucho tiempo, la referencia ineludible para cualquier trabajo que se quisiera realizar en el campo de la lógica. En esa obra se redefinen gran parte de los conceptos lógicos, se

---

[4] [Niiniluoto 1988].

introduce una simbolización novedosa debida a Peano, y se ponen de manifiesto las reglas lógicas que se han de seguir para dar por válida una demostración.

Sin embargo, algunos conceptos de los *Principia* fueron discutidos ampliamente por los lógicos de la época; en particular, C. I. Lewis estuvo en desacuerdo con el tratamiento que Russell y Whitehead le dieron a la implicación material. En los *Principia Matemática* leemos:

> The most convenient interpretation of implication is to say, conversely, that if either p is false or q is false, *i.e.* then "p implies q" to be is true. Hence "p implies q" is to be defined to mean: "Either p is false or q is true." Hence we put: $p \supset q . = . \sim p \vee q$. [Whitehead & Russell, p. 94]

Esta interpretación que considera una implicación material verdadera, si y sólo si no se da el caso de que su antecedente sea verdadero y su consecuente falso, da lugar a las siguientes tesis conocidas como paradojas de la implicación material:

a) Una proposición falsa implica materialmente cualquier proposición:

$(p = 0) \rightarrow (p \rightarrow q)$
$\therefore 0 \rightarrow q$

b) Una proposición verdadera es implicada materialmente por cualquier proposición:

$(q = 1) \rightarrow (p \rightarrow q)$
$\therefore p \rightarrow 1$

c) Dadas dos proposiciones cualesquiera, y dado que una implicación material sólo es falsa cuando el consecuente es falso y el antecedente verdadero, entonces la primera implica materialmente a la segunda o la segunda implica materialmente a la primera:

$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$; $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$; $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Si $\neg(p \rightarrow q)$, entonces $p = 1$ y $q = 0$
Si $p = 1$, $\neg p = 0$, y si $q = 0$, entonces $\neg q = 1$
Si $\neg p = 0$, entonces $\neg p = 0$ y $\neg p \rightarrow \neg q$
Si $\neg q = 1$, entonces $p \rightarrow \neg q$

Lewis argumentó que algunas de las propiedades de la implicación material se deben al hecho de que el álgebra de relaciones fue originalmente vista como representado el sistema de la lógica de clases. Sin embargo, Lewis se percató de que:

> [c] exhibits properties of material implication which have no analogy amongst the relations of classes. [c] is a consequence of the additional postulate, $p = (p = 1)$. For classes, $\subset$ represents "is contained in": but if a is no contained in b, it does not follow that a is contained in not-b $-a$ may be partly in and partly outside of b. [Lewis 1918: 230]

Para solucionar ese problema, Lewis remplazó la implicación material, que fue introducida por Peirce al álgebra booleana en 1867, por la implicación estricta $\prec$, donde $p \prec q$, significa intuitivamente que p & $\neg q$ es imposible. De esta manera, Lewis definió[5] la fórmula 'es posible que p' o 'p es auto-consistente' por

$$\Diamond p =_{\text{df}} \neg (p \prec \neg p).$$

Reflexionando sobre las razones de la demora para la invención de un tratamiento sintáctico de la modalidad como el anterior, Niiniluoto escribe que:

> It is clear that this historical puzzle cannot be answered simply by accusing logicians of a lack of imagination : after all the formal systems of extensional logic, develop for Boole, Peirce, Schröder, Frege, Russell, Hilbert, and others, have been technically more complex than the relatively simple frameworks of intensional logic. [Niiniluoto 1988:277]

La respuesta buscada por Niiniluoto se encontró en los supuestos filosóficos más profundos que prevalecieron entre los lógicos del siglo XIX.

El problema de la modalidad no fue exclusivo de los lógicos del siglo XIX. Si consideramos el problema de la modalidad relacionado con la teoría de las probabilidades, descubriremos, en primer lugar, que los matemáticos del siglo XIX emprendieron una lucha contra el determinismo Laplaciano y su concepción epistémica de la probabilidad defendiendo la idea de que la probabilidad debe ser una noción enteramente matemática, es

[5] [Lewis 1918, p. 294].

decir, ésta debe prescindir de todo elemento extramatemático en su formulación. De esta manera, la definición clásica de las probabilidades fue considerada como circular e inadecuada debido a que en ella figura un elemento modal no definido matemáticamente y que está estrechamente relacionado con aspectos intencionales y subjetivos.

En segundo lugar, encontrar una definición no circular, objetiva y no intencional, de las probabilidades fue la tarea a la que se avocaron los matemáticos del siglo XIX. La definición frecuencialista de las probabilidades se erigió como la definición extensional buscada, es decir la definición que no apelaba más a posibilidades para su formulación.

El programa frecuencialista de las probabilidades tuvo mucha aceptación entre los lógicos extensionales del siglo XIX debido a que al parecer prescindía del incómodo elemento modal para definir la probabilidad de un evento cualquiera; de esta forma creyeron posible dar cuenta de eventos futuros sin necesidad de recurrir a nociones modales como posiblemente o necesariamente. Sin embargo, nuestro propósito en este trabajo es demostrar que alguna noción de posibilidad se encuentra presupuesta, tácita o explícitamente, en cualquier enfoque matemático de las probabilidades. En otras palabras, nuestro propósito es mostrar que la noción de posibilidad es mucho más persistente de lo que en un principio aparentó.

Objetivo de la investigación

En orden a demostrar nuestra tesis, en el primer capítulo presentamos tres enfoques matemáticos de la teoría de las probabilidades en los cuales tratamos de destacar los elementos más sobresalientes de sus definiciones. En el capítulo segundo, presentamos algunas nociones de posibilidad con la intención de distinguir en el capítulo tercero qué nociones de posibilidad son las que se encuentran presupuestas dentro de las definiciones de probabilidad dadas en el capítulo primero.

En este trabajo privilegiamos la estrategia de Hacking para establecer la distinción de al menos dos nociones de posibilidad. Con ésta y otras distinciones de las nociones de posibilidad en mente, nos preguntamos cuáles de estas nociones son las que se encuentran implícitas dentro de cada uno de los enfoques de probabilidades que consideramos. La respuesta será nuestra tesis débil: en diferentes enfoques de probabilidad hay diferentes nociones de posibilidad presupuestas, esquemáticamente, si se quiere:

$$P_{\mathrm{c}}(A) \rightarrow p^{i}$$
$$P_{\mathrm{f}}(A) \rightarrow p^{j}$$
$$P_{\mathrm{a}}(A) \rightarrow p^{k},$$

Donde $i,\ j,\ k \in \{lógica, epistémica, física, metafísica\}$, con $i \neq j \neq k$; es decir, cada una de ellas representa una noción diferente de posibilidad. $P_c(A)$, $P_f(A)$ y $P_a(A)$ simbolizan los enfoques de probabilidades clásico, frecuencialista y axiomático, respectivamente. Nótese que lo que sostenemos es que cada una de esas nociones de posibilidad es supuesta por cada uno de los enfoques de probabilidad correspondiente. Cada una de las nociones de posibilidad es una condición necesaria de cierto enfoque probabilístico.

Como señalamos, ésta es nuestra tesis débil. Una tesis fuerte, sería que aún dentro de un mismo enfoque de la teoría de las probabilidades, se encuentran diferentes nociones de posibilidad:

$$P_j(A) \rightarrow \begin{cases} p^{i} \\ p^{i} \\ P^{i} \end{cases}$$

Esto último implicaría que toda definición de probabilidad que se ha ensayado hasta ahora presupone al menos una noción de posibilidad, lo cual nos lleva a concluir que la definición de probabilidad sigue siendo circular, a menos que las nociones de posibilidad puedan ser definidas independientemente por la lógica modal. Sin embargo, esta última tesis, la tesis fuerte, no será defendida en este trabajo.

Si éste es el caso, entonces, la noción de posibilidad no es reducible a la de probabilidad. La posibilidad es condición necesaria para las probabilidades. Esto muestra que, más que una reducción, por el contrario la noción de posibilidad sigue siendo primitiva y sólo explicable a partir de un análisis lógico y filosófico, y no como han pensado otros autores, como Niiniluoto, quienes buscan un análisis de las posibilidades en términos de probabilidades. Una cuestión interesante que puede dar origen a posteriores investigaciones es la de saber de manera precisa por qué cada una de estas nociones de posibilidad varía con cada nuevo enfoque de probabilidad.

La teoría de las probabilidades ocupa un lugar privilegiado en la Filosofía de la Ciencia gracias a sus múltiples interpretaciones. De entre todas las teorías matemáticas, sólo la teoría de conjuntos rivalizaría con ella en riqueza de problemas filosóficos. Nosotros aquí estamos intentando abordar lo que creemos uno de esos problemas, por lo que respecta a la teoría de las probabilidades. Una razón más por la cual ésta ocupa un lugar central en la Filosofía de la Ciencia, es su relación con la lógica inductiva[6] y el problema de la inducción. Este último, representa uno de los mayores problemas, no sólo de la filosofía de la ciencia, sino de la filosofía en general, desde Hume hasta Simon. Para el primero, el problema de la inducción era irresoluble[7] debido a que no hay manera de probar que el curso de la naturaleza será uniforme y el mismo en el futuro; para el segundo el problema

[6] Véase [Aliseda 2006], para una discusión sobre el problema de la demarcación, distinguir entre sistemas lógicos y sistemas no lógicos, además de la contraposición de la lógica inductiva con la lógica clásica y la lógica abductiva.

[7] [Hume 1739., p. 133].

de la inducción se desvanecía ante una teoría normativa del descubrimiento científico[8] que busca patrones de explicación en los datos de que se dispone sin aventurar hipótesis inductivas. Otros autores, como Carnap, trataron de solucionar el problema de la inducción recurriendo a la teoría de las probabilidades, pero a nuestro parecer el problema persistió pues su propuesta de una lógica inductiva encontró muchas criticas[9] y generó problemas insuperables.

Lo que nosotros hemos propuesto es un análisis de tres enfoques matemáticos de la teoría de las probabilidades en relación con la moderna lógica modal. Los tres enfoques analizados no son los únicos que se han propuesto en la historia de las matemáticas,[10] pero creemos que son los más representativos y los hemos elegido ciñéndonos a consideraciones puramente históricas del desarrollo de la disciplina matemática de las probabilidades. Esa es una de las razones por la cual el lector no encontrará aquí referencias profundas a interpretaciones filosóficas de las probabilidades como las de Rammsey, Jefrey, Carnap o Popper. Esa es una de las razones por lo cual hemos dejado de lado bibliografía sumamente importante sobre la filosofía de las probabilidades. Hemos decido hacer esto para mantenernos al margen, hasta donde fue posible, de los enfoques filosóficos de las probabilidades y las críticas a ellos, con el afán de ensayar una nueva manera de apreciar el problema desde la perspectiva de la moderna lógica modal.

---

8 [Simon 1981, p. 21].

9 [Aliseda 2006, p. 56].

10 Huygens resolvió los mismos problemas que dieron origen a la teoría matemática de las probabilidades mediante métodos distintos a los de Fermat y Pascal, sólo que él no recurrió en ningún momento a probabilidades de eventos. Las soluciones de Huygens “están basadas en el cálculo de esperanzas, lo cual hacía ver ya que este concepto podía tomarse como primario, previo incluso al de probabilidad de un evento, y a partir de él desarrollar la nueva disciplina. La historia no fue de ese modo pues el concepto que prevaleció como primario fue el de probabilidad.” [García 2005, p. 311]

Por último queremos señalar que en este trabajo, siguiendo a Łukasiewicz,[11] entendemos por proposición modal la que ha sido construida sobre el modelo de una de las cuatro expresiones siguientes:

Es posible que *p*	Simbólicamente $\Diamond p$
No es posible que *p*	Simbólicamente $\neg\Diamond p$
Es posible que no *p*	Simbólicamente $\Diamond\neg p$
No es posible que no *p*	Simbólicamente $\neg\Diamond\neg p$

Donde la letra *p* designa cualquier proposición. Creemos pertinente esta acotación debido a que la lógica modal engloba muchas otras lógicas, no sólo la de la necesidad y la posibilidad. También son lógicas modales: la lógica deóntica, la lógica temporal, la lógica epistémica. En este trabajo cuando nos refiramos a lógica modal, estaremos haciendo referencia a la lógica también llamada alética.

[11] [Łuckasiewics 1970, p. 62].

Capítulo 1

TRES ENFOQUES MATEMÁTICOS DE LA TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

1.1 Introducción

En este capítulo presentamos tres definiciones diferentes de probabilidad desde tres enfoques matemáticos. En primer lugar exponemos la definición clásica de las probabilidades, definición que es atribuida a Pascal y Fermat, pero de la cual la formulación más conocida es la de Laplace. En segundo lugar, presentamos la definición frecuencialista de las probabilidades; ésta es un intento de definición no circular de probabilidad y de solución a algunos de los problemas que se originaron con la definición clásica de las probabilidades. En tercer lugar, presentamos la definición axiomática de las probabilidades que formuló Kolmogorov; esta definición es a nuestro parecer la más acabada, y en la actualidad es la que goza de mayor aceptación en el ámbito matemático. Al final del capítulo presentamos brevemente algunas críticas que se han formulado a las dos primeras definiciones en la literatura filosófica.

Como preámbulo a nuestra exposición de las teorías matemáticas de las probabilidades nos permitiremos primero caracterizar dos tipos de experimentos:

a) *Experimentos determinísticos*, son aquellos que siempre que se repiten bajo las mismas condiciones, su resultado es el mismo.

b) *Experimentos aleatorios*, siempre que se repiten bajo las mismas condiciones, no es posible determinar de manera certera el resultado que se obtendrá.

Los experimentos aleatorios son la materia de estudio de la teoría matemática de las probabilidades. Es en experimentos de este tipo donde el científico encuentra cierto grado de incertidumbre. Esta incertidumbre está estrechamente relacionada con conceptos como los de *azar* y *determinismo*. Una acotación pertinente, que no queremos dejar pasar de lado antes de seguir, es que la probabilidad como aquí la expondremos es la que se aplica a experimentos aleatorios. En otras palabras, la probabilidad como aquí la entendemos estudia la forma de medir la incertidumbre de los resultados de un experimento aleatorio.

Los siguientes son algunos ejemplos sencillos de experimentos aleatorios que nos serán útiles en nuestra exposición de los diferentes enfoques matemáticos de la probabilidad:

i) Lanzar una moneda o un dado; y,

ii) hacer girar una ruleta.

Como características a resaltar de estos experimentos tenemos en primer lugar que (a) son repetibles, (b) no son determinísticos, son azarosos; y, (c) el espacio muestral de sus posibles salidas es finito y representable.[1]

Ahora introduciremos algunas definiciones previas que nos permitirán representar de manera matemáticas nuestros experimentos.

[1] Esta no es una condición necesaria de los experimentos aleatorios, nosotros la asumimos en este estadio de nuestra investigación con vistas a tratar de hacer intuitiva la representación del espacio muestral que representaremos por Ω, pero como más adelante señalamos, el problema de la finitud o infinitud representará ciertas limitantes para algunas teorías, en particular, la teoría clásica.

Permítasenos considerar entonces un experimento aleatorio *E*, y ciertos eventos *a*, *b* y *c* relacionados con él. Al realizar tal experimento, no podemos decidir de manera *a priori* si cada uno de esos eventos ocurrirá o no. Pero, supongamos que podemos realizarlo en forma repetitiva. Entonces podemos observar que la frecuencia con que ocurre cada uno de los eventos no es la misma para todos. Por ejemplo, al arrojar un conjunto de diez dados, un evento muy raro sería obtener un uno en cada dado, pero el evento en que la suma de los números que se obtiene es mayor que diez ocurre casi siempre.[2]

Esta propiedad de los eventos de ocurrir de esa manera se puede expresar diciendo que algunos eventos ocurren más fácilmente que otros. Más adelante veremos que de acuerdo al principio de regularidad de las frecuencias, en un número relativamente grande de realizaciones de E_A, la frecuencia con que ocurren los eventos se mantiene constante. Esa constante se puede interpretar como una medida de qué tan fácilmente el evento *a* o *b* o *c* puede ocurrir. El problema que se plantea en teoría de las probabilidades es el de encontrar métodos que nos permitan ver qué tan fácilmente ocurrirá un evento en futuras realizaciones de E_A. Ese número que mide la facilidad con que ocurre el evento e_i al realizar E_A, es lo que llamaremos la probabilidad del evento correspondiente. Consideremos entonces las siguientes definiciones.

Definición 1): **La probabilidad de un evento** relativo a un experimento aleatorio es un número que mide la facilidad con que el evento ocurre al realizar el experimento.[3]

[2] Este ejemplo parece un poco engañoso, pues en realidad lo que se plantea es que obtener un uno en cada dado es un evento muy raro, y eso es lo que permite que el complemento tenga lugar con mucho más facilidad. Es en realidad un ejemplo que recurre a extremos. Un ejemplo que ya no es tan intuitivo sería decidir con que facilidad ocurre el evento en el que la suma de todos los dados sea mayor que 21.

[3] [García 2005, p. 40].

Definición 2): **El espacio muestral** de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados *posibles* del experimento.

Definición 3): **Un evento** es un subconjunto del espacio muestral. Característica que pueden tener o no tener las salidas del experimento.

Notación:

Espacio muestral: Ω

Evento: ε_1

Ejemplificaremos las definiciones anteriores con nuestros ejemplos de experimentos aleatorios;

i) Lanzar una moneda o un dado:

Espacio muestral:

Ω_m = {águila, sol} Ω_d = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Eventos:

ε_1 = "cae águila" ε_1 = "sale 1" , ε_2 = "sale 2"

ε_2 = "cae sol" ε_3 = "sale par", ε_4 = "sale impar"

ε_5 = "sale primo"[4]

ii) Hacer girar una ruleta de 9 puntos

[4] En este caso sólo los dos primeros eventos son elementales, mientras que los restantes son compuestos; es decir, los primeros eventos son elementos del espacio muestral Ω, mientras que los otros eventos son subconjuntos de Ω.

Espacio muestral:

$\Omega_r = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Eventos:

ε_1 = “cae en 1”, ε_2 = “cae en 2”, ε_3 = “cae en 3”, ε_4 = “cae en 4”, ε_5 = “cae en primo”

Los eventos serán subconjuntos del espacio muestral:

$$\varepsilon_i \subseteq \Omega$$

Con estas definiciones en mente pasemos ahora a considerar las formulaciones de los enfoques matemáticos de las probabilidades.

1.1 Enfoque clásico de la teoría de las probabilidades

Este enfoque de la teoría matemática de las probabilidades es el mejor conocido y fue, cronológicamente, el primero en ser formulado de manera precisa. En este enfoque se define la probabilidad de un evento ε_i como el cociente de los casos favorables a ε_i sobre la totalidad de los casos igualmente posibles –o equiposibles− dentro de un espacio muestral Ω. Pensemos en un dado perfectamente simétrico.[5] La probabilidad de obtener un número par al ser arrojado el dado se puede ver como el evento ‘se obtiene un número par’, y su probabilidad, $P(\varepsilon_i)$, es un medio. La forma de calcular esto es muy sencilla una vez que hemos aprendido algunos métodos combinatorios y hemos asumido algunos supuestos. En primer lugar, asignamos a cada una de las posibles salidas, {1, 2, 3, 4, 5, 6}, la misma probabilidad, sumamos entonces los casos favorables a la salida ‘número par’ y la

[5] Las simetrías juegan un papel fundamental dentro de la asignación de probabilidades de igual peso a los eventos dentro de un experimento. Para ser precisos, si no hay simetría dentro del espacio muestral a la hora de asignar probabilidades, difícilmente podremos asumir que el espacio muestral es equiprobable.

dividimos entre el total de los casos posibles. Asignar iguales probabilidades a cada una de las salidas es algo que podemos llevar a cabo ya que un rasgo característico de la definición clásica de las probabilidades es que nos brinda una definición de probabilidad "por medio del *principio de* indiferencia. Este principio establece que dos posibilidades son igualmente probables pues no hay razón para preferir una sobre otra."[6]

No debe sorprendernos que detrás de la teoría clásica de las probabilidades se encuentre un principio como el de indiferencia, pues debemos tener presente que la teoría clásica de las probabilidades fue producto del pensamiento de la ilustración europea[7] y como tal, está empapada de muchas de las ideas características de la ilustración. En particular, la idea de determinismo, de la cual el ensayo que Laplace publicó con el título de *Ensayo filosófico de las probabilidades* en 1814 da la más famosa formulación.

El determinismo nos sugiere la idea de que las probabilidades no pueden ser inherentes a la naturaleza de los objetos sino que deben estar relacionadas con la ignorancia humana. Supongamos que tenemos una situación compuesta por tres posibles eventos, *A*, *B*, y *C*. Si nos ceñimos a la idea del determinismo universal, uno de ellos −digamos que B− debe ocurrir. Pero dada nuestra condición humana, nosotros no sabemos cuál de ellos ocurrirá. Nos encontramos en la situación en la cual debemos recurrir al cálculo de probabilidades. Esta situación es la que llevó a Laplace a afirmar que

> La probabilidad es relativa, en parte a nuestra ignorancia, en parte a nuestro conocimiento. Sabemos que de tres o de un número mayor de eventos, sólo uno de ellos debe ocurrir; pero nada nos induce a creer que uno de ellos ocurrirá en mayor medida que los otros. En este estado de indecisión, es imposible para nosotros anunciar la ocurrencia con certeza. [Laplace 1814: p. 6]

[6] [Salmon 1984, p. 65].
[7] [Gillies 2000, p. 14].

En una situación como ésta, en la cual "nada nos induce a creer que uno de ellos ocurrirá en mayor medida que los otros," Laplace recomienda considerar todos los eventos con la misma posibilidad de ocurrir, es decir, considerarlos como eventos equiposibles. De esta manera encontramos que la teoría clásica de las probabilidades sólo puede ser aplicada donde tengamos un número finito de casos igualmente posibles:

> Suppose there are *n* such cases, and *m* of them are favorable to the outcome A. Then the probability of A[prob(A)] is defined to be Prob(A) = m/n. There is the famous classical definition of probability based on equally possible cases. [Gillies 2000, p. 17]

Esta idea que ahora nos parece muy natural, a saber, que la probabilidad de un evento aleatorio *A*, bajo ciertas condiciones conocidas,[8] admite una evaluación cuantitativa por medio de un número $p = Prob(A)$, fue elaborada en forma sistemática por primera vez en el siglo XVII en los trabajos de Fermat (11601-1665), Pascal (11623-1662), Huygens (1629-1695), y en particular James Bernoulli (1654-1705). La teoría de las probabilidades de Pascal y de Fermat estuvo asociada desde sus inicios a los juegos de azar; como afirma Guilles:

> A simple example of the classical definition is afforded by a regular die, for which we have six equally possible cases 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Of these three (1, 3, 5) are favorable to the outcome 'odd', whose probability is thus 3/6=1/2. [Gillies 2000, p. 17]

El dado, las monedas y la baraja son los juegos que brindaron a Pascal y Fermat los problemas cuya investigación culminaría en la primera formulación sistemática de la teoría de las probabilidades. La teoría de las probabilidades ha tenido que ver desde sus inicios con eventos azarosos. La elección al azar, en nuestra manera actual de entenderla, está

[8] Una de esas condiciones es que nuestro evento sea realmente un evento aleatorio –azaroso, si se quiere- donde se satisfagan los axiomas que más abajo señalaremos.

relacionada con experimentos aleatorios en los cuales disponemos de un conjunto de objetos, y un experimento aleatorio se define como la elección al azar de uno o varios objetos del conjunto. En este sentido, elección al azar es elegir objetos sin preferencia de uno sobre otros. Al elegir uno o varios elementos del conjunto, estos deberán tener asignada la misma probabilidad. Esto nuevamente desemboca en lo que Laplace solía llamar equiprobabilidad o equiposibilidad: "De aquí que, en realidad, el término 'elección al azar' es sinónimo de equiposibilidad de los posibles resultados de la elección."[9] En otras palabras:

> Esté método de encontrar probabilidades, basándose en la equiprobabilidad de los posibles resultados, es conocido como la definición clásica de probabilidad. Según esta definición, la probabilidad de un evento A se calcula de la siguiente manera:
>
> $$P(A) = \frac{\text{\# de eventos elementales que producen la ocurrencia de A}}{\text{\# total de eventos elementales}}$$
>
> [García 2005, p. 54.]

Se debe tener presente que calcular probabilidades de esta manera es solamente factible cuando ha sido posible determinar que los resultados de nuestro experimento aleatorio son equiposibles y finitos.

Tratemos de formular esta definición clásica en nuestra notación moderna. Definir la probabilidad de un evento en el enfoque clásico es sencillo y se sigue de manera natural a partir de las consideraciones que enseguida enumeramos.

Si un espacio muestral Ω consiste de n eventos elementales equiposibles y ε_1 es un evento contenido en Ω, $\varepsilon_1 \subseteq \Omega$, con n_ε resultados favorables a ε_1, entonces la probabilidad de ε_1 estará dada por la fórmula

[9] [García 2005, p. 54].

$$P(A) = n_{\varepsilon} \big/ n$$

Esta probabilidad cumple con algunas de las propiedades que Laplace llamó principios en su *Ensayo filosófico de las probabilidades*, tales como la propiedad de aditividad finita. Nosotros no haremos referencia a estos principios –a los cuales llamamos propiedades, para distinguirlos de principios implícitos en la teoría, como el de indiferencia y el de equiposibilidad–, debido a que nuestro interés primordial se encuentra en la definición misma de probabilidad, más que en sus propiedades aritméticas.

La definición clásica de las probabilidades fue muy útil durante un periodo prolongado. Sin embargo, hoy en día, hay algo de consternación cuando nos percatamos de que por lo regular los resultados posibles de un experimento aleatorio no son equiposibles. Pero, si resultaran equiposibles, entonces tendríamos una manera sencilla de calcular sus probabilidades, pues con base en la propiedad de que $P(\Omega)= 1$ de la teoría de las probabilidades y en la propiedad de la aditividad finita, sabemos que la suma de las probabilidades de los eventos elementales debe ser igual a 1. Es decir, si son N los posibles resultados del experimento y todos ellos tienen asignada la misma probabilidad, entonces cada una de esas probabilidades debe ser igual a $1/N$. Supongamos entonces que $\Omega = \{\omega_{1,} \omega_{2,} \omega_{3,\ldots,} \omega_{N}\}$ es el espacio muestral del experimento y que $A = \{\omega_{j1,\ldots,} \omega_{jn}\}$ es un evento cualquiera. Por la propiedad que expresa que si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(A \text{U} B) = P(A) + P(B)$; por lo tanto $P(A) = n_A/N$, donde n_A representa el número de eventos elementales favorables a A, y se cumple que $n_A + n_B = N$. Esto subraya el hecho de que para calcular la probabilidad de un evento A, es necesario conocer el número de eventos elementales que lo componen y dividirlos entre el número total de eventos que componen Ω.

1.2 El enfoque frecuencialista de la teoría de las probabilidades

Todo experimento aleatorio repetible, a pesar de su naturaleza intrínseca, presenta una regularidad. Esta propiedad de los experimentos aleatorios se hace patente en la concepción frecuencialista de la teoría de las probabilidades. Esta naturaleza parece ser capturada por el concepto de frecuencia relativa.

La frecuencia relativa está relacionada con el posible resultado de un evento relativo a un experimento en cuestión, y es una fracción que resulta de dividir el número de ocasiones en que un evento se ve favorecido, al realizar una serie de experimentos, entre el total de experimentos de los que consta la serie. La definición frecuencialista de las probabilidades se encuentra también sustentada en un principio:

> A esta propiedad de regularidad de la frecuencia relativa con que ocurre cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio repetible o, en general, cada evento relativo al experimento, lo llamaremos principio de regularidad de las frecuencias. [García 2005: p. 38]

Este principio requiere de una cuidadosa interpretación. En sentido estricto, expresa que la frecuencia con que se presenta cada posible resultado en un experimento aleatorio, converge hacia una constante cuando la serie de realizaciones es relativamente grande. Esta idea se puede representar matemáticamente por un límite que tiende a la constante que antes se ha señalado. Sin embargo, aquí la desviación de esa constante, aunque es algo que ocurre en contadas ocasiones, es aceptable dentro de la teoría. Por ese motivo es que este límite no es en realidad un límite en sentido matemático, sino la representación matemática que, dependiendo de la metodología de la investigación, mejor recoge y representa los datos.

En la teoría frecuencialista, las probabilidades son asociadas con colecciones de eventos que son considerados como objetivos e independientes de los individuos de la misma manera que la masa de un cuerpo es considerada independiente de quien la mide cuando se hace mecánica.

Es en la teoría frecuencialista donde por primera vez se introdujo el concepto de espacio de eventos, sólo que referido a atributos, y se le debe a Von Mises.[10] Este término es el que más tarde será conocido en los libros sobre probabilidades como *espacio* muestral.

El intento de Von Mises, y todos aquellos que compartieron la idea de que el enfoque frecuencialista era el adecuado para considerar las probabilidades, consistió en "presentar la teoría de las probabilidades como una ciencia matemática como la mecánica".[11] La definición de probabilidad frecuencialista se puede formular de la siguiente manera:

> Let A be an arbitrary attribute associated with a particular collective. If Ω is the attribute space of the collective, then $A \subseteq \Omega$. Suppose that in the first n members of the collective A occurs $m(A)$ times, then its relative frequency is $m(A)/n$. The Law of Stability of Statistical Frequencies is that as n increases $m(A)/n$ gets closer and closer to a fixed value. [Gillies 2002: p. 92]

Este enfoque asume que si un experimento se repite n veces, de las cuales n_A veces ocurre el evento *A,* entonces la probabilidad se define como el límite de la frecuencia relativa n_A / n, lo cual quiere decir que:

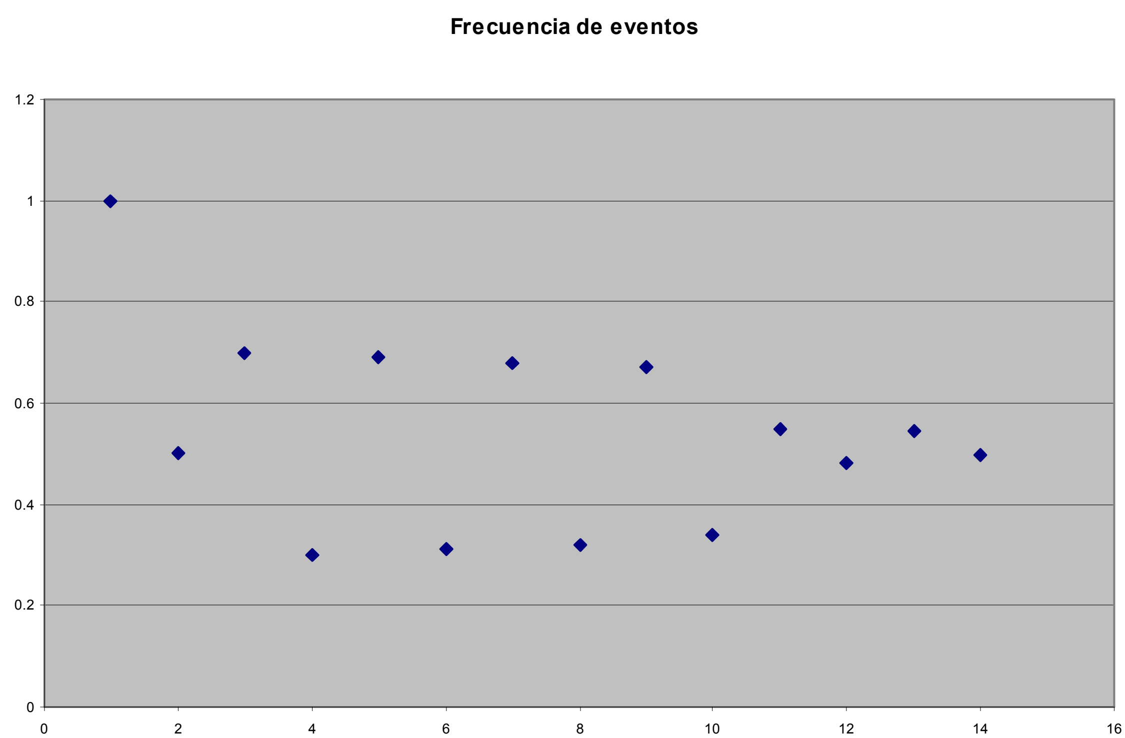
[10] [Gillies 2002, p. 89].
[11] [Gillies 2002, p. 90].

$$n_A \big/ n \longrightarrow P(A)$$

La peculiaridad de este enfoque consiste en que fundamenta la teoría sobre una sólida base experimental. Sin embargo, este enfoque presupone, además del principio de frecuencia relativa, una ley que Von Mises llamó empírica:

> It is essential for the theory of probability that experience has shown that in the game of dice, as in all the other mass phenomena which we have mentioned, the relative frequencies of certain attributes become more and more stable as the number of observation is increased. [Von Mises 1928: p. 12; citado en Gillies 2002, p. 92]

En otras palabras, lo que Von Mises sugiere es que, por ejemplo, cuando nosotros arrojamos una moneda al aire n veces, los resultados de este experimento tenderán a estabilizarse en torno a un valor que él llama $m(A)/n$, a medida que la n tiende al infinito. Gráficamente:



De datos como estos, los teóricos frecuencialistas como Von Mises formulan el siguiente axioma:

> Axioma de convergencia: Sea A un atributo arbitrario (salir número par, por ejemplo, al arrojar un dado n veces) de una colección de C, entonces
>
> $$\mathrm{Lim}_{n \to \infty}\, m(A) \Big/ n \quad \text{existe}$$

Ahora, la probabilidad de A dado C, $P(A \mid C)$, se define de manera general como el límite: $\mathrm{Lim}_{n \to \infty}\, m(A) \big/ n$ y ésta es la definición de probabilidad apelando al límite de la frecuencia relativa. Este enfoque sobre las probabilidades hizo su aparición en 1692 cuando Jacob Bernoulli probó un importante teorema sobre cualquier conjunto infinito contable de salidas aleatorias. La formulación del teorema es:

> For any small error ε, and any small difference x, there is a number of trials N, such that for any $n>N$, $\Pr[(p-\varepsilon) \leq k/n \leq (p+\varepsilon)] > (1-x)$. This is […] the most fundamental connection between probability and frequency in a long run. [Hacking 2001, p. 198]

Bernoulli probó que si n crece sin cota, la probabilidad de que k/n se estabilice en torno a un valor fijo es 1. Este resultado es conocido como el teorema del límite de Bernoulli o, más coloquialmente, como ley de los grandes números. [12]

Esta definición, la de probabilidad apelando al límite de la frecuencia relativa, establece que las probabilidades en la teoría frecuencialista son condicionales, pero no relativas a una evidencia particular o a un conjunto de creencias, sino a una colección de datos particulares de los cuales el atributo A es tomado como una salida o evento.

---

[12] [Cohen 1999, p. 22]. Una presentación de la prueba se encuentra en [Kneale 1949, p. 136].

Un punto importante a resaltar de esta teoría, es el que Von Mises subrayó de la siguiente manera: "Our probability theory has nothing to do with questions such as: 'Is there a probability of Germany being at some time in the future involved in a war with Liberia?'"[13]

La teoría frecuencialista sólo introduce probabilidades en sentido matemático o cuantitativo cuando disponemos de un conjunto considerable de eventos uniformes que son el fruto de una cuidadosa observación. Nuevamente, dejamos de lado las propiedades de este enfoque, ya que como antes señalamos, nuestro interés está en la definición.

1.3 El enfoque axiomático de la teoría de las probabilidades

El siglo XX fue rico en construcciones axiomáticas para varias ramas de las matemáticas: el análisis, la teoría de los conjuntos, la geometría y el álgebra. El cálculo de probabilidades no fue la excepción ya que varias axiomatizaciones fueron construidas, como las de Fineti, Popper y Kolmogorov, por mencionar las más importantes, con la intención de axiomatizar la definición de probabilidad. Las construcciones axiomáticas pueden ser consideradas como sistemas formales matemáticos. De hecho, algunos autores sugieren que podemos definir un sistema formal como un conjunto de fórmulas entre las cuales habrá algunas que serán consideradas como primitivas (los axiomas), mientras que las fórmulas restantes del sistema (los teoremas) serán deducidas de los axiomas.[14] Disentimos sutilmente de esta caracterización, ya que a nuestro juicio lo que realmente está caracterizando es un lenguaje formal, puesto que "un lenguaje formal puede ser identificado con el conjunto de sus

---

[13] [Von Mises 1928, p. 9], citado en [Gillies 2002, p. 97].
[14] [Salmon 1984, p. 57].

fórmulas bien formadas (también llamadas Fórmulas o fbf).”[15] Sin embargo, lo que ahora queremos precisar, es lo que se entiende por un sistema formal:

> A formal system S is a formal language L together with a deductive apparatus given by
> (1) Laying down by fiat that certain formulas of L are to be axioms of S.
> (2) Laying down by fiat a set of transformation rules (also called rules of inference) that determines which relations between formulas of L are relations of immediate consequence in S. (Intuitively, the transformations rules license the derivations of some formulas from others.) [Hunter 1971, p. 7.]

Ahora bien, como señalamos, un lenguaje formal se puede identificar con el conjunto de todas sus fórmulas bien formadas, pero un sistema formal no se puede comparar con el conjunto de todos sus teoremas puesto que en este último caso hay una noción más en juego, esa noción es la de interpretación. Más tarde volveremos sobre este asunto.

El cálculo de probabilidades puede ser considerado como un sistema formal en el cual el único término primitivo es ‘probabilidad.’ Todos los otros términos en el cálculo tienen significados bien establecidos en otras ramas de las matemáticas y la lógica, los cuales proveen, por decirlo así, el aparato lógico que nos permite la deducción de teoremas a partir de axiomas y ciertas reglas de derivación.

Los sistemas formales están sujetos, como ya hemos señalado, a interpretación. Una interpretación consiste en una asignación de significados a todos los términos. Para autores como Salmon son posibles dos clases de interpretaciones:

> An abstract interpretation is one that renders the system meaningful by reference to some other branch of mathematics or logic, and it makes the formulas into statements about the abstract entities in that domain. [Salmon 1984, p. 57]

[15] [Hunter 1971, p. 4].

Una interpretación física, en contraste, da a los términos primitivos, y consecuentemente al sistema completo, significado a través de la referencia a alguna parte del mundo físico.[16] Ya sea que la interpretación sea física o abstracta, la especificación del significado transforma las fórmulas del sistema en enunciados que son o bien verdaderos o bien falsos, pero relativos a cierto dominio especifico de interpretación.

Las condiciones para la axiomatización de la teoría de las probabilidades se encontraban dadas desde finales del siglo XIX. La teoría de los conjuntos que fue creada por Cantor y las herramientas lógicas que fueron desarrolladas por Boole, Frege, Peano y De Morgan, fueron utilizadas para la axiomatización de la teoría de las probabilidades por Kolmogorov.

El propósito de Kolmogorov fue dar un fundamento axiomático a la teoría de las probabilidades. Como él mismo lo señaló en el prefacio de su monografía, se dio a la tarea de colocar los conceptos básicos de la teoría de las probabilidades en su lugar natural. La tarea que él emprendió, como señala, no pudo haberse dado de manera tan natural, antes de la introducción de las teorías de la medida y la integración de Lebesgue. Para Kolmogorov, después de la publicación de las investigaciones de Lebesgue, la analogía entre medida de un conjunto y probabilidad de un evento, y entre integral de una función y esperanza matemática de una variable aleatoria se hizo patente.[17]

La monografía de Kolmogorov fue presentada en seis apartados, de los cuales a nosotros sólo nos interesa abordar los dos primeros. En el capítulo inicial, se define la

[16] [Salmon 1984, p. 58].

[17] Para que tal analogía fuese válida, fue necesario que la teoría de la medida y de la integración se independizasen de los elementos geométricos que se encontraban en Lebesgue. Ese trabajo fue llevado a cabo por Fréchet en su tesis doctoral de 1906, en la cual intentó unificar, en términos abstractos las ideas contenidas en los trabajos de Cantor, Volterra, Hadamar y otros, en lo que llamó cálculo funcional.

teoría elemental de las probabilidades como la parte de la teoría en la cual tratamos con probabilidades de un número finito de eventos.[18] Aunque los teoremas que Kolmogorov presentó ahí también pueden ser aplicados a problemas con un número infinito de eventos aleatorios. El axioma VI, que tiene que ver con el caso de un número infinito de eventos aleatorios, es introducido en el segundo capítulo de la monografía.

Kolmogorov partió de la intuición de que la teoría de las probabilidades podía ser susceptible de axiomatización, en la misma forma en que lo fue la geometría y el álgebra. En su propios términos:

> This means that after we have defined the elements to be studied an their basic relations, and have stated the axioms by which these relations are to be governed, all further exposition must be based exclusively on these axioms, independent of the usual concrete meaning of these elements and their relations [Kolmogorov 1933, p. 1]

Kolmogorov define uno de los conceptos capitales de su sistema, el de campo o espacio de probabilidades, como un sistema de conjuntos los cuales satisfacen ciertas condiciones. Lo que representen esos conjuntos no será de importancia para el desarrollo de la matemática de la teoría de las probabilidades. Kolmogorov está pensado en el punto de vista formalista, tal como lo representa Hilbert en la esfera de los números y la geometría, el cual consiste en dejar sin definir los enteros y los puntos pero afirmando respecto a ellos axiomas tales que hagan posible la deducción de las proposiciones usuales de la aritmética. En otras palabras, Hilbert no atribuye significado a los símbolos “0”, “1”, “2”, “3”,..., “n”, excepto que deben tener ciertas propiedades que enumeran los axiomas. De esta manera, los números se consideran como variables. Esto se debe a que tradicionalmente se ha pensado que a los matemáticos no les incumbe la esencia de los números:

[18] [Kolmogorov 1933, p. 1].

> Lo que importa son las relaciones y operaciones que se aplican a los objetos, en particular la igualdad y el orden entre ellos –de la misma manera en que los jugadores de ajedrez no se interesan por lo que es un alfil sino en cómo funciona. [Fraenkel 1976, p. 22]

Kolmogorov fue conciente de que cualquier teoría axiomática es susceptible de un ilimitado número de interpretaciones paralelas a aquella que se tuvo en mente al proponerla. Pero, ese es un problema sobre el que nosotros no nos interesaremos en este lugar. La característica que a nosotros nos conviene señalar es que puede haber diferentes conjuntos de axiomas, es decir, diferentes sistemas formales de la teoría de las probabilidades, "en particular aquellos en los cuales el concepto de probabilidad no es tratado como un concepto básico, sino que él mismo es expresado mediante otros conceptos."[19] Kolmogorov se refiere implícitamente al sistema propuesto por Von Mises, quien brindó los siguientes axiomas para la teoría frecuencialista

> Dado un espacio muestral S y una cierta familia de eventos en $F \subseteq S$, la probabilidad se define como una función que a cada evento A en F, le asocia el real $P(A)$ que satisface las siguientes propiedades:
>
> P1. $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo evento A en F.
>
> P2. $P(S) = 1$.
>
> P3. Si A_1, A_2, ..., A_n son eventos en S, ajenos[20] entre sí, entonces:
>
> $$P(A_1 \mathrm{U}\, A_2\, \mathrm{U} \ldots \mathrm{U}\, A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

La variante del tercer principio, aplicada a colecciones infinitas numerables[21] de eventos ajenos, A_1, A_2, ..., es lo que distingue a la teoría de las probabilidades axiomática de

[19] [Kolmogorov 1933, p. 2].

[20] En teoría de conjuntos decimos que dos conjuntos, A y B, son ajenos sii $A \cup B = \varnothing$.

[21] Una colección infinita numerable, es aquella que se puede poner en correspondencia uno a uno, con los números naturales N. Las colecciones infinitas numerables se distinguen de las colecciones infinitas no numerables en que

Kolmogorov de la axiomática propuesta por Von Mises. De hecho, se puede demostrar[22] que de los axiomas de Von Mises, y asumiendo el axioma de convergencia, se pueden derivar los axiomas de Kolmogorov. Sin embargo, la aditividad contable infinita no se sigue de los axiomas de Von Mises.

Una dificultad con que se enfrenta la teoría de Von Mises es que cualquier colección del espacio de atributos empírica, será finita.[23] Un acierto de la teoría de Kolmogorov es precisamente que se puede extender a casos en los cuales los conjuntos de eventos son infinitos. Para tal efecto, Kolmogorov introduce el axioma VI de su sistema llamado Axioma de continuidad. Sobre él nos dice que:

> Is essential for infinite fields of probability only, it is almost impossible to elucidate its empirical meaning [...]. For, in describing any observable random process we can obtain only finite fields of probability. Infinity fields of probability occur only as idealized models of real random processes. [Kolmogorov 1933, p. 15]

Komogorov se refiere a todos los campos de probabilidad que satisfacen el axioma VI, como 'campos de probabilidad'; los campos definidos sobre la misma axiomática, pero sin el axioma VI, son para él un campo generalizado de probabilidad.

Veamos entonces cómo Kolmogorov presenta su teoría. En lo que sigue nos basamos *in extenso* en la monografía de 1933:

1. Axiomas

---

la *cardinalidad* de estas últimas es estrictamente mayor que la cardinalidad de los naturales. Un conjunto infinito no numerable lo constituyen los números reales $\Re$, por lo cual cualquier conjunto infinito no numerable, asumiendo la Hipótesis de Continuo, será mayor que los naturales. En particular, $|N|<|\Re|$.

[22] [Gillies 2000, p. 109].

[23] [Gillies 2000, p. 110].

Sea E una colección de elementos ξ, η, ζ, ..., los cuales llamaremos eventos elementales, y sea $\Im$ un conjunto de subconjuntos de E. Los elementos del conjunto $\Im$ serán llamados eventos aleatorios.

I. $\Im$ es un campo (espacio de Hausdorff);

II. $\Im$ contiene al conjunto E, ($E \subseteq \Im$);

III. A cada conjunto A en $\Im$ le es asignado un número real no negativo $P(A)$. Este numero $P(A)$ será llamado la probabilidad del evento A;

IV. P(E) es igual a 1;

V. Si A y B no tiene elementos en común entonces $P(A \wedge B) = P(A) + P(B)$;

Un sistema de conjuntos, $\Im$, junto con una asignación definida de números P(A) que satisface los axiomas I-V, es lo que Kolmogorov llamó un campo de probabilidad.

Ahora bien, Kolmogorov afirmó que su sistema daba cuenta incluso de los casos límite donde un evento A puede tener $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$. Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $E = \{\xi\}$, es decir un conjunto consistente de un solo elemento y sea $\Im = \{E, \varnothing\}$ un campo, luego $P(E) = 1$ y $P(\varnothing) = 0$.

Para hacer más intuitivo este ejemplo que Kolmogorov presenta para argumentar las propiedades de su sistema, analicémoslo detalladamente. En primer lugar, la asignación $P(E) = 1$ y $P(\varnothing) = 0$ no es arbitraria; se sigue de las propiedades de construcción de un espacio o campo de probabilidades. Para la construcción del campo, consideremos primero un conjunto finito arbitrario $E = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3,..., \xi_k\}$ de eventos elementales y un conjunto arbitrario $p_1, p_2, p_3,..., p_k$, tales que $p_1, p_2, p_3,..., p_k \in \Re^+$ y tales que $p_1+ p_2+ p_3+...+ p_k = 1$. Ahora debemos considerar la noción capital de la construcción: $\Im$ será considerado como el conjunto de todos los subconjuntos de *E*. Ahora, se estipula que:

$$P\{\xi_{i1} \cup \xi_{i2} \cup \xi_{i3} \cup ... \cup \xi_{i\lambda}\} = p_{i1}+ p_{i2}+ p_{i3}+...+ p_{i\lambda}$$

Por otro lado, $p_1, p_2, p_3,..., p_k$, son llamadas las probabilidades de los eventos elementales $\xi_1, \xi_2, \xi_3,..., \xi_k$ o simplemente probabilidades elementales. De esta manera se construye un campo o espacio de probabilidad. Pero, no es todo:

> In this way are derived all possible *finite* fields of probability in which $\Im$ consists of the set of all subsets of *E*. (The field of probability is called *finite* if the set *E* is finite. [Kolmogorov 1933, p. 3]

De esta última cita, hay varias ideas que vale la pena destacar. En primer lugar, la cardinalidad del espacio de probabilidades viene dada por la cardinalidad del conjunto de eventos *E*. No importa que tan grande sea *E*, si éste es finito, la cardinalidad del espacio será finita, en particular si $|E|= n$, entonces $|\Im| = 2^n$. Hemos dicho que el axioma VI que es el que permite al sistema de Kolmogorov tratar conjuntos de cardinalidad infinita numerable, es decir conjuntos con cardinalidad $\aleph_0$, que es la cardinalidad de los naturales.[24] Por otra parte, la afirmación de Kolmogorov de que "estaremos derivando todos los campos posibles finitos de probabilidad en el cual $\Im$ consiste de los conjuntos de todos los subconjuntos de *E*", varía con el axioma VI a "estaremos derivando todos los campos posibles finitos o infinitos de probabilidad en el cual $\Im$ consiste de los conjuntos de todos los subconjuntos de *E*." Lo que nos interesa destacar en la construcción del espacio de

[24] En la actualidad, la teoría de las probabilidades tiene una amplia gama de aplicaciones que van desde la industria a la ciencia. Las demandas de la ciencia natural exigieron el desarrollo de la teoría de la probabilidad y con esto el uso de aparatos más analíticos y más poderosos. La teoría de las probabilidades ha extendido su influencia y aplicación práctica a muchos otras esferas, al tiempo que la teoría se ha visto enriquecida con muchos otros resultados.

probabilidades es la noción que proviene de la teoría de los conjuntos, a saber, la noción de conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado, es decir, la de conjunto potencia. En esta noción basaremos nuestro análisis de la noción de posibilidad en la teoría axiomática de probabilidades en el tercer capítulo. Ahora regresemos a afinar algunos detalles de nuestra exposición de la teoría de Kolmogorov.

Hay otro concepto implícito en la presentación de Kolmogorov que no hemos precisado de manera rigurosa, a saber, el de campo o espacio de Hausdorff:

Un campo o espacio de Hausdorff es todo aquel sistema de conjuntos en el que se cumplen las siguientes condiciones:

a) Para cualesquier $\xi_i, \xi_j \in \Im$, $\xi_i \bigcup \xi_j \in \Im$.

b) Para cualesquier $\xi_i, \xi_j \in \Im$, $\xi_i \bigcap \xi_j \in \Im$.

c) Para cualesquier $\xi_i, \xi_j \in \Im$, $\xi_i \backslash \xi_j \in \Im$.

d) Si $\Im \neq \varnothing$, entonces $\varnothing \in \Im$.

Si regresamos al ejemplo anterior, donde se planteaba las propiedades del sistema, entonces podremos ver que $\Im = \{E, \varnothing\}$, es un espacio de Hausdorff ya que:

Si $E = \{\xi\}$, entonces $\wp(E) = \Im = \{E, \varnothing\}$

a) $E, \varnothing \in \Im$, $E \bigcup \varnothing = E \in \Im$.

b) $E, \varnothing \in \Im$, $E \bigcap \varnothing = \varnothing \in \Im$.

c) $E, \varnothing \in \Im$, $E \backslash \varnothing = E \in \Im$ y $\varnothing \backslash E = \varnothing \in \Im$.

d) Y $\Im \neq \varnothing$, $\varnothing \in \Im$.

$E = \{\xi_1\}$ y tenemos un conjunto arbitrario p_1 tal que $p_1 \in \Re^+$ y tal que $p_1 = 1$. Y como se ha establecido que $P(\xi_1)= p_1$, entonces, $P(E) = 1$ y $P(\varnothing) = 0$.

Omitiremos, como en los casos anteriores, hablar de las propiedades de esta teoría. Nuestros cuestionamientos están dirigidos a conceptos que se encuentran en lo que acabamos de presentar.

1.4 Limitaciones de las teorías clásica y frecuencialista

Ahora procederemos al análisis de las teorías citadas. En primer lugar, revisaremos algunas de las criticas que se han ofrecido en la literatura, y que tocan de manera tangencial los tópicos de nuestro interés. Los señalamientos que destacamos están en relación con el uso del principio de indiferencia, es decir, con la equiposibilidad, y no con la cuestión matemática de las probabilidades en un espacio finito para el caso de la teoría clásica. Para el caso de la teoría frecuencialista nuestras objeciones están dirigidas a la posibilidad de realizar un numero infinito de experimentos para que tenga sentido el teorema del límite y no con la pertinencia de hablar de límite en series definidas de manera no matemática. Nuestro problema con la teoría axiomática es mayor, dado que en ella, por su presentación formal, no es sencillo ver en dónde se encuentra la noción de posibilidad que sostenemos se encuentra implícita en ella.

a) Limitaciones de la probabilidad clásica.

Esta definición es la más simple e intuitiva de las tres que presentamos, pero su sencillez no la exime de serios problemas tales como el que a menudo le ha sido señalado: es una definición circular, basada en la suposición de que cada uno de los resultados posibles del experimento son igualmente probables. En este contexto podríamos preguntarnos si no es en sí mismo el concepto de equiprobabilidad o equiposibilidad lo que se busca definir.

El tratamiento de las probabilidades clásicas fue definido de manera precisa por Galileo, [25] tal definición es frecuentemente atribuida a Laplace en los siguientes términos:

> La teoría del azar consiste en reducir todos los acontecimientos del mismo tipo a un cierto número de casos igualmente posibles. La proporción entre este número y el de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad, que no es, pues, más que una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el de todos los casos posibles. [Laplace 1814, p. 28]

El enfoque Laplaciano de las probabilidades, que nosotros hemos llamado clásico, fue el predominante durante todo el siglo XIX. Sin embargo, tal definición presentaba como limitante inmediata que sólo podía ser aplicada a casos en los cuales cada uno de los eventos elementales fuese igualmente posible a cada uno de los otros. En otras palabras, calcular la probabilidad de un evento A consiste únicamente en encontrar el número de eventos elementales que lo componen y dividirlo entre el número total de eventos. Pero la inmediata dificultad con esta interpretación es que 'igualmente posible' parece decir lo mismo que 'igualmente probable.' Así la definición parece ser flagrantemente circular. Sin embargo, algunos autores piensan que:

> But the apparent circularity can be overcome if a definition of "equally probable" can be given which is independent of the definition of "probable" itself. The classical theorists attempted to offer such a definition by means of the *principle of indifference*. This principle states that two possibilities are equally probable if there is no reason to prefer one to the other. [Salmon 1984, p. 65]

[25] [Cohen 1999, p. 14]. De acuerdo con Cohen, Galileo tomó interés en el problema de calcular el número de permutaciones diferentes en las cuales tres dados puedan ser arrojados de manera que los numerales en sus caras superiores sumen un número particular.

Sin embargo, el principio de indiferencia no es menos cuestionable que la aparente circularidad. Varias objeciones han sido esgrimidas contra éste. Primero, éste implica probabilidad en el sentido de alternativas igualmente probables. Esto presupone que cada instancia de probabilidad puede ser analizada en términos de casos igualmente probables.

Otra objeción que tiene que ver con el aspecto epistemológico de la teoría es que cualquier filósofo o matemático debe rechazar toda regla que pretenda transformar ignorancia automáticamente en conocimiento. El conocimiento de probabilidades es conocimiento concreto de eventos; de esta manera, éste resulta ser útil para la predicción y la acción. De acuerdo al principio de indiferencia, esta clase de conocimiento puede resultar inmediato de nuestra ignorancia para considerar una ocurrencia más probable que otra. Esto, para Salmon, es magia epistémica.[26]

b) Limitaciones de la probabilidad frecuencialista:

La teoría de las probabilidades tomó su camino inicialmente a partir de Pascal, pero, más tarde, otro camino matemático fue abierto. En el siglo XVII, Jacob Bernoulli dio algunos pasos exploratorios en otra dirección. De acuerdo con el modelo aleatorio, las probabilidades son complementarias o aditivas; así fue declarado canónicamente por Abraham de Moivre en 1718. Éste escribió que: "If the probability of Happening and Failing are added together, the Sum will always be equal to unity."[27] En términos matemáticos:

$$P(A)+P(B)=1, \text{ donde '}A\text{' denota acertar y '}B\text{' fallar.}$$

[26] Por supuesto, hay maneras de transformar la ignorancia en conocimiento: por medio de la investigación y la acumulación de más información.

[27] Citado en [Cohen 1989, p. 18].

Pero podría ser peligroso considerar esta tesis como incuestionable.[28] Hay algunos autores que han dudado de que este principio se conserve en la teoría frecuencialista. De hecho, resulta difícil pensar que de acuerdo a la interpretación corriente de la teoría frecuencialista, en donde la probabilidad es definida en términos del límite de la frecuencia relativa de las ocurrencias de un atributo en una secuencia infinita de eventos, la suma de las probabilidades sea uno. Veamos esto con nuestro experimento que consiste en arrojar una moneda al aire. En este caso, decir que la probabilidad de obtener cara al arrojar la moneda es un medio, significa que en una secuencia potencialmente infinita de lanzamientos de la moneda en cuestión, la frecuencia relativa con la cual las caras ocurren converge al valor de un medio. Utilicemos, por un momento, la notación de Salmon[29] para esquematizar esto. Podemos pensar en tres secuencias coordinadas: La secuencia *F* de lanzamientos de la moneda, que es la que tiende a infinito, la secuencia de resultados (sol *S* o águila *A*) y la secuencia de fracciones representando la frecuencia relativa de soles hacia arriba que se colocan en su lugar en la secuencia. Aquí están los resultados para la sección inicial de una secuencia real de lanzamientos:

F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*...[30]
S	*A*	*S*	*S*	*S*	*A*	*S*	*A*	*S*	*S*...
1/1	½	2/3	¾	4/5	4/6	5/7	5/8	6/9	7/10...

Aquí el término 'límite' es usado en su sentido matemático estándar:

[28] [Cohen 1999, p. 18].
[29] [Salmon 1984, p. 83].
[30] Esta tabla muestra en el tercer renglón la frecuencia con que ocurre "cae sol" al arrogar una moneda: el denominador es el número de lanzamientos totales hasta *n*, mientras que el numerador, no es otra cosa que los casos favorables, a la ocurrencia, "cae sol", hasta ese momento.

> La secuencia f_n (n = 1, 2, 3, ...) tiene el límite L cuando n tiende a infinito si y sólo si, para toda $\varepsilon > 0$, no importa que tan pequeña sea, existe un número N tal que , $n > N$, $|f_n - L| < \varepsilon$.

Esta definición expresa que las frecuencias relativas permanecen tan cerca de L como se desee para números suficientemente grandes de elementos, pero como se puede observar con los datos que disponemos, difícilmente P(S) = 1/2. De hecho, en la práctica siempre resulta que P(A) $\neq$ P(B); aunque P(A) + P(B) es siempre igual a uno, resulta un gran reto establecer cuando P(A) $\leq$ P(B).

Otro punto que se considera problemático de la teoría frecuencialista es el siguiente. En matemáticas, la definición de límite es usualmente aplicada a secuencias que son generadas de acuerdo a una regla matemática. Por ejemplo, $1/n$ o $1/n^2$, donde n corre sobre los números naturales. Esas secuencias tienen, por supuesto, como límite el cero. La crítica se puede resumir diciendo que "la secuencia de lanzamientos de monedas y la secuencia asociada de frecuencias relativas no son dadas por una regla matemática; de hecho, ellas son generadas por un conjunto de eventos físicos dados."[31] Esto da lugar a un sin fin de controversias sobre el significado de hablar de limites en secuencias de esta suerte, "porque no hay conocimiento ni regla conocida a partir de la cual deducir que la secuencia tiene o no tiene límite."[32] De esta manera, como no hay garantía de que las frecuencias relativas converjan a algún límite del todo, siempre será posible definir secuencias de eventos para los cuales la frecuencia relativa no converja y no se pueda asegurar que tal secuencia no ocurra en la naturaleza.

---

[31] [Salmon 1984, p. 84].
[32] [Salmon 1984, p. 84].

1.5 Conclusiones

En este capítulo hemos presentado tres enfoques sobre la teoría de las probabilidades. Cada uno de esos enfoques, como hemos subrayado, tiene ciertas propiedades que lo distinguen de los otros dos. Sin embargo, para nuestros propósitos, nos es suficiente con concentrarnos en ciertos rasgos de las definiciones, que en las propiedades específicas de cada definición de probabilidad. La apelación a sus propiedades ha sido brindada con el fin de que quede establecido que en realidad son tres enfoques y no uno sólo con diferente definición.

La definición clásica de las probabilidades define entonces la probabilidad de un evento como la razón de los casos favorables al evento en cuestión entre la totalidad de los casos posibles; en este enfoque los casos deben ser equiposibles. La definición frecuencialista ya no apela a casos equiposibles y en su lugar introduce la noción de frecuencia; ésta está relacionada con una serie de experimentos aleatorios los cuales brindan los datos para el cálculo de la probabilidad. Esto permite dotar a la teoría de una sólida base experimental. La teoría axiomática de las probabilidades formula la definición más acabada de probabilidad. Esta definición nos es dada términos de conjuntos y espacios de Hausdorff. Esta última teoría puede dar cuenta de la probabilidad de un evento en un espacio no finito, algo imposible para la teoría clásica y la frecuencialista.

En el siguiente capítulo abordaremos la noción de posibilidad con la intención de establecer más tarde cuál es la relación entre estas nociones y las definiciones expuestas de probabilidad.

Capítulo 2

NOCIONES DE POSIBILIDAD

2.1 Introducción

De manera análoga a los enfoques de las probabilidades y en orden a demostrar que la noción de posibilidad es igual de variada que la noción de probabilidad, en este capítulo trataremos de distinguir diferentes nociones de posibilidad con la intención de poder establecer en el tercer capítulo, cuál es la noción de posibilidad que está explícita en la teoría clásica de las probabilidades, e implícita en las teorías axiomática y frecuencialista. Esta tarea no es sencilla, dado que como Hacking ha señalado,[1] la posibilidad tiene muy mala fama porque los rasgos que la han caracterizado son siempre negativos, a saber: es indefinible y no parece haber criterios claros para distinguir cuando dos posibilidades aparentemente diferentes son, en realidad, iguales y cuando dos posibilidades aparentemente iguales, son diferentes. En la primera parte de este capítulo presentamos la semántica y la sintaxis de la lógica modal, así como algunos de los sistemas más importantes que formalizan las nociones modales de posibilidad y necesidad. Después de introducir los sistemas de lógica modal presentamos una discusión en torno a la manera de distinguir entre diferentes nociones de posibilidad. Finalmente nos concentramos en dos nociones de posibilidad que resultan ser de importancia en el discurso científico y filosófico: las nociones de posibilidad lógica y posibilidad epistémica. Todo esto va precedido por el establecimiento de al menos un criterio para distinguir posibilidades.

[1] [Hacking 1967] y [Hacking 1975].

Examinar en detalle todos los intentos que se han hecho para poder distinguir entre diferentes nociones de posibilidad escapa al alcance de esta investigación; y aunque, sería suficiente para nuestros propósitos mostrar que existe una distinción y que ésta está ampliamente reconocida y que es reiteradamente citada en la literatura, mencionamos dos estrategias para establecer criterios de distinción entre diferentes conceptos de posibilidad.

El primero criterio, debido a Hacking,[2] está basado en una distinción gramatical de dos construcciones en las cuales ocurre el adjetivo 'posible,' dejando de lado las ocurrencias de 'posible' como nombre o como sustantivo.[3] Hay, sin embargo, autores como Łukasiewics, quienes intentaron construir una definición del concepto de posibilidad que permitiera establecer todos los teoremas de la lógica modal tradicional sin incurrir en contradicción. Łukasiewics se encontró con que la siguiente definición de lo que el llama 'posibilidad pura':

$$Mp = AEpNp\Pi qNCpKpNq$$ [4]

Es decir, "es posible que p" significa que "o bien p y $\neg p$ son equivalentes entre sí, o no hay ningún par de proposiciones contradictoria implicadas por p."[5] Más tarde, Łukasiewics se convenció de que "el concepto más amplio de posibilidad en *general* era preferible al concepto más restringido de posibilidad *pura*." El proyecto de Łukasiewics, sin embargo,

[2] [Hacking 1967] y [Hacking 1975].

[3] Nosotros, al igual que Hacking, dirigimos nuestro análisis al adjetivo o adverbio y no al sustantivo 'posible.' Es decir, estamos interesados en el cambio de significado que tiene lugar cuando un sustantivo o un verbo es modificado por 'posible' o 'posiblemente.' Una pregunta sobre qué es lo posible, análoga a la pregunta '¿qué es el ser?', no tiene ningún sentido ni importancia para nosotros.

[4] Esta fórmula está escrita en notación polaca; su traducción a nuestra notación convencional se sigue de la definición de A, que es el signo de alternación y E, el símbolo de equivalencia material. Los demás símbolos son los acostumbrados $M =_{\text{def.}} \Diamond$, $C =_{\text{def.}} \supset$, $N =_{\text{def.}} \neg$, $K =_{\text{def.}} \wedge$ y $\Pi =_{\text{def.}} \forall$. De acuerdo a esto, $Apq = CCpqq$ y $E = KCpqCqp$.

[5] [Łukasiewics 1970, p. 74].

produce consecuencias indeseables, admitir como posible todo es una de ellas, si no se adoptaba un sistema de lógica trivalente.

El segundo método para establecer criterios de distinción entre posibilidades es de Rinaldi.[6] Este último método ofrece un ejemplo de cada una de las posibilidades que estemos considerando para que el lector intuya las diferencias. Esta última estrategia es frecuentemente infructuosa debido a que los ejemplos sobre posibilidades suelen ser a menudo tan contra intuitivos que lo menos que sugieren en el lector es una distinción. Ejemplos clásicos sobre modalidades son los siguientes: "es posible que mañana haya o no haya una batalla naval"[7]; "es posible que una barra de hierro flote en el agua"[8]; "No es posible que el agua no sea H_2O"[9]. Pero, tal vez hay un motivo más fuerte por el cual la estrategia no brinda los frutos que se espera de ella: Ciertas nociones de posibilidad a menudo vienen incluidas en otras nociones de posibilidad o ciertas nociones tienen una intersección que es no vacía.

Consideraremos las nociones de posibilidad que nos son más familiares en nuestro quehacer científico y filosófico, pero pondremos especial cuidado en aquellas que tienen un uso particular en la filosofía de la ciencia, a saber: posibilidad lógica, posibilidad física y posibilidad metafísica. Al contar con un criterio que nos permita distinguir entre estas posibilidades, intentaremos ver en el capítulo tercero qué es lo que tiene en mente el teórico de las probabilidades cuando habla de la totalidad de los casos posibles o de la totalidad de los casos equiposibles.

---

[6] [Rinaldi 1967].
[7] [Aristóteles 1988, p. 50].
[8] [Rinaldi 1967, p. 82].
[9] [Kripke 1981, p. 134].

Antes de que intentemos clarificar esta noción tan persistente en la filosofía y en la teoría matemática de las probabilidades, debemos aclarar que las nociones de posibilidad tienen diversas interpretaciones dentro de diferentes contextos de aplicación. De ahí la importancia de caracterizar brevemente esas nociones. Esperamos que éstas se tornen más intuitivas después de la presentación de la sintaxis y semántica de la lógica modal.

2.1 Sistemas de lógica modal.

Los problemas que entrañan las modalidades de necesidad y posibilidad quedan por primera vez señalados en el tratado *Sobre la interpretación* de Aristóteles. Ahí se analizan las relaciones de implicación y equivalencia entre nociones modales, además de la forma de negar proposiciones modales, lo cual presupone el conocimiento de ciertas leyes lógicas dado que la negación de una proposición modal no es directa. En efecto, Aristóteles observa que la negación de $\Diamond p$ −donde '$\Diamond$' representa el operador modal 'es posible que' y 'p' representa una proposición cualquiera− no es $\Diamond\neg p$. Las dos proposiciones son conjuntamente posibles; a cualquier persona le es posible leer o le es posible no leer. Por tanto $\Diamond p$ y $\Diamond\neg p$, no son contradictorias. La contradictoria de $\Diamond p$ es $\neg\Diamond p$. La negación no se obtiene negando el *dictum p*, sino negando el *modo* $\Diamond$.[10] Lo que Aristóteles elaboró fue una teoría de las proposiciones modales. Una proposición modal es una que contiene la palabra 'necesario' o 'posible', o alguna equivalente a esas dos. Algunos autores como Hacking[11] sostienen que hay contextos en los cuales 'posible' y 'probable' pueden ser sinónimos. Nuestro propósito en este capítulo es clarificar, hasta donde nos sea posible, la noción de posibilidad.

---

[10] [Aristóteles 1988, p. 53].
[11] [Hacking 1975, p. 324].

Como hemos señalando, el estudio lógico de las modalidades data desde Aristóteles, pero:

> The immediate cause for the birth of modern "modal logic" was more special, springing from dissatisfaction with the Frege-Russell truth table treatment of implication. Where propositional logic makes $\varphi \rightarrow \psi$ equivalent to $\neg(\varphi \wedge \neg \psi)$ (φ does not occur with *not*-ψ), C. Lewis thought it had at least the modal force $\neg\Diamond(\varphi \wedge \neg \psi)$ (φ *cannot* occur with *not*-ψ), or equivalently $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$, ($\varphi$ *necessarily* implies ψ materially). [van Benthem 1988, p. 13]

La insatisfacción de C. I. Lewis lo llevó a elaborar[12] el primer tratamiento sintáctico de las modalidades. Más tarde, de acuerdo con van Benthem, el estudio de $\Diamond$ y $\Box$ llegó a ser dominante en la lógica modal cuando los estudios sobre la implicación material se constituyeron como una materia aparte.[13] Podemos considerar a la lógica modal como el intento por representar los argumentos lógicos que involucran esencialmente los conceptos de necesidad y posibilidad.[14] Como muestra el ejemplo anterior de Aristóteles, hay una larga tradición filosófica de distinguir entre verdades necesarias y contingentes, además de las posibles. La distinción suele ser explicada en los siguientes términos:

> A necessary truth is one which could not be otherwise, a contingent truth one which could; or, the negation of a necessary truth is impossible or contradictory, the negation of a contingent truth possible or consistent; or, a necessary truth is true in all possible worlds, a contingent is true in all possible worlds, a contingent truth is truth in the actual but no in all possible worlds. [Haack 1975, p. 172]

Es natural que tales tesis no sean suficientemente claras, pues para explicar la necesidad se apela a otra noción modal, tan oscura como la anterior, a saber: posibilidad. Por otro lado, hay ahí algunas nociones entrelazadas que debemos intentar distinguir, como lo afirma Haack:

---

[12] [Lewis 1918].
[13] [van Benthem 1988, p. 13].
[14] [Haack 1978, p. 170].

> The distinction between necessary and contingent truths is a *metaphysical* one; it should be distinguished from the *epistemological* distinction between *a priori* an *a posteriori* truths. An *a priori* truth is one which can be know independently of experience, an *a posteriori* truth is one which cannot. These –the metaphysical and the epistemological– are certainly different distinctions. But it is controversial whether they coincide in extension, whether, that is, all and only necessary truths are *a priori* and all an only contingent truths *a posteriori.* [Haack 1975, p. 172]

La última de estas cuestiones ha quedado al parecer resuelta por Kripke.[15] Él ha señalado que justamente esas son dos nociones diferentes, que no todas las verdades necesarias son a priori y no todas las verdades contingentes son a posteriori.

Antes de comenzar a clarificar nuestras nociones de posibilidad, comenzaremos caracterizando las modalidades sintácticamente. Esto fue, después de todo, lo que históricamente sucedió, pues aunque la primera axiomatización de la lógica proposicional modal fue dada por Lewis en 1918 y la extensión a la lógica de predicados, dada por Marcus en 1946,[16] no fue hasta 1963 que Kripke propuso una semántica apropiada para la lógica modal. Veamos entonces en qué consiste la lógica modal. De acuerdo con ciertos autores, la lógica modal ya no es una lógica clásica, pero en otras clasificaciones la lógica modal es una extensión de la lógica clásica:

> Extensions (*e*) are formal logical systems, which extend the system of classical logic (*Lc*) in three respects: their language, axioms and rules of inference ($Lc \subseteq Le$, $Ac \subseteq Ae$, $Rc \subseteq Re$). These systems preserve all valid formula of the classical system, and therefore all previous valid formula remain as well. So, for instance, modal logic extends classical systems by the modal operators of necessity and possibility together with axioms and rules for them. [Aliseda 2005, p. 58]

De acuerdo con Aliseda, la lógica modal adiciona al vocabulario de la lógica clásica los operadores monádicos $\Diamond$ y $\Box$, que se leen como 'posible' y 'necesariamente.' Otra de las

---

[15] Véase [Kripke 1982], en especial la primer conferencia. "El agua es H_2O," es para Kripke un enunciado necesario, pero la manera en que adquirimos ese conocimiento es a posteriori. El caso de un enunciado a priori y contingente es más polémico; para ilustrarlo, Kripke recurre al ejemplo de Wittgenstein sobre el 'metro patrón de Paris': Sabemos a priori que un metro mide un metro, pero ¿es necesario que el metro de Paris mida lo que mide?

[16] [Haack 1975, p. 176].

lógicas extendidas, a las que hace referencia Aliseda, es la lógica epistémica la cual adicionan el operador ‘K’ que se lee como ‘x sabe que ...’. Consideremos algunos sistemas de lógica modal y su semántica.

a) Semántica de la lógica modal

Podemos considerar al menos cuatro sistemas modales. Simbolizaremos con las primeras letras mayúsculas del abecedario (*A, B, C, D, ...*) las fórmulas del lenguaje objeto; con las letras mayúsculas de la segunda mitad (*P, Q, R, S,...*) representaremos las fórmulas atómicas. Como antes, nuestro lenguaje básico es el de la lógica proposicional o de predicados, enriquecida con los operadores modales ◊ y □. La estructura semántica para el caso proposicional, es:

$$M= <W, R, V>,$$

Donde *W* es un conjunto de mundos posibles, *R* una relación de accesibilidad entre los mundos de *W*, y *V* una valuación sobre los mundos de W. Para ilustrar esto:

> A simple example is the “chessboard”: worlds are all possible configurations of pieces on the board; in any of these, the accessibility worlds are those that can still be obtained by further play within the rules of the game. [van Benthem 1988, p. 15]

De acuerdo con esto, *R* impone ciertas restricciones sobre nuestras opciones modales, tales como la relación ‘menor o igual que’ lo hace para el tiempo en la lógica temporal, o para el orden numérico en la recta real. De acuerdo a lo anterior, las cláusulas cruciales en la definición de verdad para nuestra semántica son:

$M \models \Box\, \varphi[w]$ si y sólo si para todo v con Rwv, $M \models \varphi\,[\,v]$

$M \models \Diamond \varphi[w]$ si y sólo si para algún v con Rwv, $M \models \varphi\ [v]$.[17]

La primera cláusula, donde w y v son mundos y Rwv significa que w está relacionado con v, retoma la idea de verdad necesaria como verdad en todos los mundos posibles. Esta idea de necesidad, como verdad en todos los mundos posibles, de acuerdo con van Benthem,[18] tiene una prehistoria conceptual que viene de Leibniz.

b) Lógica modal mínima *K*

Si añadimos a los axiomas, reglas de inferencia y lenguaje de la lógica clásica la noción ‘p es demostrable’, simbolizada como *Bp*, junto con los tres axiomas siguientes:

1. $Bp \rightarrow p$
2. $Bp \rightarrow (B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq)$
3. $Bp \rightarrow BBp$

Lo que obtenemos es el sistema axiomático Σ que Gödel[19] construyó para interpretar la lógica conectiva de Heyting. Gödel afirmó que “el sistema Σ es equivalente al sistema de implicación estricta de Lewis, si *Bp* se traduce por $\Box\, p$ y si el sistema de Lewis se complementa con el siguiente axioma de Becker: $\Box\, p \rightarrow \Box\Box\, p$.”[20] Esta práctica gödeliana de construir sistemas modales como extensiones de la lógica clásica terminó por imponerse dentro de la tradición lógica. Está es la razón por la cual prácticamente todo sistema de la lógica modal se define como una extensión de la lógica clásica. De acuerdo a lo anterior, definimos el sistema K, que es el sistema mínimo de lógica modal, de la siguiente manera:

a. Todas las tautologías proposicionales,

[17] [van Benthem 1988, p. 15].
[18] [van Benthem 1988, p. 15].
[19] [Gödel 1933].
[20] [Gödel 1933, p. 139].

b. La definición de $\Diamond \varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg \varphi$
c. $\Box (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \psi)$,

R1. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi$ *modus ponens*

R2. $\vdash \varphi / \Box \varphi$ *necesitación* o regla de Gödel

Siendo K una extensión de la lógica clásica es natural que incluya todos los teoremas de la lógica clásica proposicional,[21] esto es lo que expresa (a). La definición de necesidad en términos de posibilidad, (b), nos permite traducir las nociones de manera que podamos considerar a alguna de ellas como primitiva. En el inciso (c), tenemos un axioma que nos dice que una proposición implicada necesariamente por una proposición necesaria es ella misma necesaria. La regla de necesitación nos permite pasar de la afirmación 'φ es un teorema, o axioma de la lógica clásica,' a '$\Box$ φ,' es decir, 'φ es una proposición necesaria.'

Más allá de *K*, las opiniones han divergido sobre los supuestos razonables a considerar para hacer un uso práctico de las modalidades. Usualmente estos han tomado la forma de 'principios de reducción,' relacionando una modalidad a otra.[22]

Si le anexamos a *K* los siguientes axiomas, tendremos como resultado el sistema S4 de C.I. Lewis:

S4.1 $\Box \varphi \rightarrow \varphi$
S4.2 $\Box \varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

S4.1 afirma que toda proposición necesaria es una proposición verdadera, mientras que S4.2 afirma que toda proposición necesaria es necesariamente necesaria. De estos axiomas

---

[21] El desarrollo de sistemas de lógica modal cuantificada constituye la segunda etapa del desarrollo de la lógica modal contemporánea. En la lógica modal cuantificada se combinan los operadores modales con los cuantificadores universal y existencial ($\forall, \exists$).

[22] [van Benthem 1988, p. 14].

se puede deducir que no es el caso que una proposición sea necesaria y falsa al mismo tiempo: $\neg(\Box A \wedge \neg A)$.

Si añadimos a *K* el siguiente axioma, en lugar del anterior, obtendremos lo que se conoce como el sistema brouweriano:

$$\text{B.1 } \varphi \rightarrow \Box\Diamond \varphi.$$

Este axioma se denomina brouweriano porque es equivalente a una fórmula válida dentro del sistema de lógica intuicionista de Brouwer:[23] $A \rightarrow \neg\neg A$. La conversa de esta fórmula, $\neg\neg A \rightarrow A$, no es válida dentro del sistema de Brouwer. Interpretemos la negación intuicionista de la primera fórmula como 'no es posible que' para obtener: $A \rightarrow \neg\Diamond\neg\Diamond A$. Esta última fórmula, por (c), equivale a: $A \rightarrow \Box\Diamond A$.

Si añadimos el siguiente axioma a S4, entonces obtendremos el sistema S5 de Lewis:

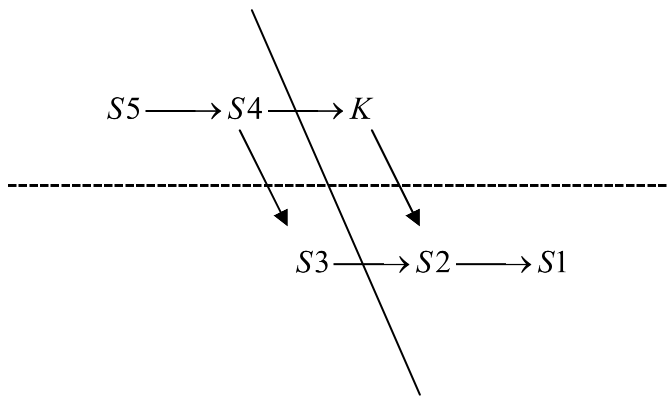
$$\text{S5.1 } \Diamond\Box \varphi \rightarrow \varphi$$

c) Relaciones entre los sistemas modales

S5 es el sistema más fuerte de lógica modal en el sentido de que éste incluye todos los teoremas y axiomas de los sistemas más débiles. El siguiente esquema de Hughes y Cresswell[24] representa la relación de S5 con otros sistemas de lógica modal:

[23] La fórmula $\neg\neg A \rightarrow A$ no es derivable en el cálculo intuicionista; $\neg\neg A$ significa en la lógica intuicionista que si suponemos que *A* es falsa, entonces ello lleva a una contradicción. Sin embargo, el no tener certeza de refutar *A* no es suficiente para afirmar *A*. La fórmula conversa, $A \rightarrow \neg\neg A$, si es derivable en la lógica intuicionista: una demostración de *A* es una demostración de que *A* es imposible de ser refutada. En el cálculo intuicionista la introducción de la doble negación es válida; la eliminación de la doble negación es invalida.

[24] [Hughes & Cresswell 1968, p. 211].



La relación $A \to B$, significa que todo teorema de B es también un teorema A (pero no a la inversa). S5, S4 y K están por arriba de la línea horizontal, eso significa que poseen la regla de necesitación de Gödel; Los sistemas que aparecen a la izquierda de la diagonal poseen un número finito de modalidades distintas. Veamos a detalle S5.

La proliferación de sistemas modales nos orilla a decidir entre alguno de ellos, esto origina la cuestión de saber cuál elegir, es decir, cuál de ellos es el más adecuado para capturar la noción de posibilidad que en un momento dado consideremos.[25] Para ello, es necesario saber antes que noción de necesidad y posibilidad se está estudiando. De acuerdo con Haack,[26] Lemmon argumentó que cada sistema modal puede ser visto como formalizando una idea diferente de necesidad: si lo que se entiende por necesidad es demostrabilidad, entonces S4 es el sistema adecuado; si necesidad se entiende como tautologicidad, entonces el sistema adecuado es SO5; necesidad como analiticidad es capturada por S5. Esto nos sugiere que los distintos sistemas modales no necesariamente son rivales.

---

[25] [Haack 1975, p. 178].
[26] [Haack 1975, p. 178].

Las nociones modales son nociones lógicas, no nociones psicológicas como Frege[27] y Kant[28] pensaron. Por otra parte, la inspiración filosófica para el desarrollo de la lógica modal, de acuerdo con van Benthem, tiene tanto inspiraciones locales −análisis de argumentos modales particulares provenientes de la tradición− como más globales: "intentar (re)construir puntos de vista filosóficamente coherentes de la modalidad."[29] Esto es una razón más por la cual las nociones de necesidad y posibilidad que encierran cada uno de esos sistemas deben ser previamente aclaradas. Gabbay afirma[30] que aunque los sistemas de Lewis llegaron a ser celebres dentro de la lógica modal, él nunca se preocupó por clarificar lo que entendió por necesidad y posibilidad. Como veremos más adelante, tenemos diferentes nociones de posibilidad por lo cual no es razonable dar una respuesta a priori a la cuestión: ¿Qué sistema modal es el que nos conviene utilizar? A este respecto, Chihara afirma que aunque hay muchos sistemas de lógica modal "el tipo de sistema que es generalmente aceptado como la formalización correcta de los rasgos lógicos de la necesidad lógica es S5."[31]

2.2 Todas las posibilidades

Si hacemos un recuento de toda la clase de nociones de posibilidad que ha considerado la tradición filosófica, inmediatamente caeremos en la cuenta de que ha considerado muchas más de las que uno puede a primera vista distinguir. Otro ámbito donde la aparición del término es recurrente es precisamente el discurso científico. Con todo y lo dicho anteriormente, la primera lista de posibilidades que rebasa la concepción tradicional (la cual

[27] [Frege 1879, p. 16].
[28] [Kant 1781, B VIII].
[29] [van Benthem 1988, p. 14].
[30] [Gabbay 2003, p. 3].
[31] [Chihara 1998, p. 7].

sólo considera tres posibilidades: lógica, empírica y metafísica) es la que aparece en Hacking.[32] Ahí encontramos el siguiente recuento de posibilidades: lógica, física, *de re*, *de dicto*, epistémica, técnica, humana, teórica, económica, metafísica. En otros autores encontramos términos como 'posibilidad lógicamente empírica'[33] y 'posibilidad real.'[34] Ahora bien, al vernos frente a una lista tan variada de nociones de posibilidad, debemos contar con un buen criterio.

Hay diferentes maneras de establecer un criterio de identidad para posibilidades. El criterio de Hacking que consiste en un simple método gramatical, es considerado por su autor como el único medio con que contamos para auxiliarnos en la tarea de colocar a cada una de las posibilidades en su lugar.[35]

La elaboración de sistemas de lógica modal cuantificada también provocó un fuerte ataque a la empresa por lógicos de orientación extensionalista. En efecto, la lógica modal se caracteriza por ser intensional, es decir, en ella no rige el principio de extensionalidad según el cual el valor de verdad de una oración compuesta está determinado por el valor de verdad de las oraciones componentes. Ni siquiera en el caso de las proposiciones atómicas se conserva tal principio extensional, ya que si tenemos la proposición modal $\Diamond p$, esta puede ser verdadera tanto si p es falsa como si p es verdadera. En términos de la semántica de la lógica modal contemporánea:

> A formula $\neg\Phi$, for example , will receive the truth value 1 in a given context just in case the formula Φ receives the truth value 0 in that context. In fact, the set K of all context only comes into play when we start evaluating sentences of the form $\mathbf{O}\Phi$ in a given context k. For the truth of any such formula in a context k is made to depend on the truth of Φ, no only on that same context k but also in

[32] [Hacking 1975, p. 321].
[33] [Rinaldi 1967, p. 83].
[34] [Deutsch 1990, p. 751].
[35] [Hacking 1975, p. 321].

> other contexts k' in K. This is what makes the system intensional. [Gamut 1991, p. 17]

Otra de las virtudes que Hacking destaca de su método es que permite dirimir la vieja disputa entre las posibilidades *de re* y *de dicto*. En opinión de Hacking, la gramática termina con una controversia, porque la definición de la posibilidad *de re* es referencialmente trasparente, y los problemas de opacidad que se originan en las construcciones *de dicto,* no tienen nada que ver con modalidad.[36]

Más adelante se aclararán estas nociones de posibilidad. Veamos entonces en qué consiste el método gramatical.

En su intento de distinguir dos clases de posibilidad, Hacking señala que hay dos construcciones gramaticales en donde ocurre 'posible' de manera natural y gramaticalmente correcta:

L: Es posible que *p*

M: Es posible para $A \to x$ [37]

Para la primera ocurrencia, Hacking llama la atención sobre *p*, la cual será sustituida por sentencias en modo indicativo y de ningún otro tipo; las ocurrencias de oraciones en subjuntivo, imperativas e interrogativas se excluyen. Es natural que las interrogaciones y las oraciones imperativas se excluyan; en el idioma español algo como 'Es posible que ¿vendrá usted a la reunión?' y 'Es posible que debe usted venir a la reunión' no tienen sentido y son incorrectas tanto desde el punto de vista gramatical como desde el punto de

[36] [Hacking 1975, p. 321].

[37] $A\to x$, simboliza algo así como el "el agente *A* realiza la acción *x*", es decir, *x* es un verbo transitivo en indicativo. L es una construcción lógica, el operador tiene como alcance una proposición; mientras que M es una construcción moral, aquí las acciones del agente son el alcance del operador.

vista lógico. El caso de las oraciones en subjuntivo es dramáticamente diferente. En, por ejemplo, ‘Es posible que usted hubiese asistido a la reunión’ no hay algo fuera del orden gramatical. Desde el punto de vista lógico, lo que tenemos es algo así como “es posible que usted haya asistido a la reunión” es equivalente a “pareciera que usted asistió a la reunión.” Por lo tanto “Es posible que usted hubiese asistido a la reunión” es equivalente a “posiblemente es posible que usted haya asistido a la reunión,” lo cual refleja que el subjuntivo, dado su carácter hipotético, en cierto sentido tiene implícito cierto grado de modalidad. De ahí el rechazo de Hacking a tratar las oraciones en subjuntivo como instancias de p en la L construcción. Una consideración de otro orden, como más tarde veremos, es que si formalizamos esa oración, nos aparecerán operadores modales iterados, lo cual presenta dificultades en ciertos sistemas de lógica modal, en particular aquellos sistemas donde □□ $p \rightarrow$ p o □□ $p \rightarrow$ □ p no sean teoremas.

En el caso de la segunda ocurrencia de ‘posible’, la representación $A \rightarrow x$ lo único que pretende capturar es el caso de un agente realizando una acción en indicativo, por ejemplo ‘Alejandra llega en bicicleta a su facultad en pocos minutos.’ Si tenemos la M construcción, $\Diamond A \rightarrow x$, entonces la fórmula se traduce como: ‘es posible para Alejandra llegar en bicicleta a su facultad en pocos minutos.’ En este caso se excluyen oraciones como ‘es posible para este lápiz durar hasta la próxima primavera’ o ‘e*s* posible para el hombre llegar a habitar Marte.’ También se excluyen oraciones como ‘es posible para él ser bondadoso’ o ‘es posible para ella dudar metódicamente.’ Con estas aclaraciones, pondremos atención en un agente que hace algo; eso es lo que se simbolizará por $A \rightarrow x$.

Ahora debemos mostrar que L no implica a M, lo cual nos permitiría afirmar que nos encontramos ante un criterio para distinguir entre dos tipos de posibilidades.

Intuitivamente, cierto conocimiento de la lógica modal nos puede indicar que *L* implica *M*, pero que no es el caso que *M* implique *L*. Lo que se quiere demostrar es que las modalidades *de re* y *de dicto* no son equivalentes. En las *Refutaciones sofísticas*, Aristóteles se preguntó[38] si es siempre contradictorio decir que un hombre es capaz de escribir mientras no esté escribiendo. Aristóteles se percató de que hay dos interpretaciones posibles de la modalidad y que la respuesta depende de cuál sea la que consideremos. Si ese enunciado se interpreta en el sentido de composición −es decir, como en la oración 'un hombre es capaz de escribir mientras-no-está-escribiendo'− el enunciado comporta una modalidad *de dicto*. Se afirma que la oración 'un hombre que no está escribiendo es capaz de escribir' es posible. Interpretada en sentido de división, 'un hombre que no está escribiendo es-capaz-de-escribir,' comporta una modalidad *de re*: Se afirma que la propiedad modal 'ser-capaz-de-escribir' se aplica a cierta cosa.

Las modalidades *de re/ de dicto* medievales no son equivalentes; aunque la primera pueda implicar la segunda, la segunda no implica la primera. La cuestión de fondo tiene que ver con algo que se ha llamado fórmula Barcan, en dónde se afirma que la *L* construcción implica la *M* construcción:

$$[\mathrm{BF}]\ (x)\Box Fx \rightarrow \Box(x)Fx$$

y su conversa, donde la *M* construcción implica la *L* construcción:

$$[\mathrm{CBF}]\ \Box(x)Fx \rightarrow (x)\Box Fx$$

[38] [Aristóteles 1982, p. 315].

La fórmula Barcan es intuitivamente discutible. Del supuesto de que es posible que algo no tenga la propiedad *F*, no se sigue que existe algo que posiblemente no tiene la propiedad *F*, y la fórmula Barcan afirma justo eso:

$$\Diamond(\exists x)\neg Fx \rightarrow (\exists x)\Diamond\neg Fx$$

Una semántica adecuada de la lógica modal debe garantizar que la fórmula Barcan no sea un teorema del sistema. Hay una sutileza más que es importante señalar, y es que hay más de dos interpretaciones de [BF]. Veamos el siguiente ejemplo de van Benthem que hemos adaptado: "Los matemáticos son [posiblemente] racionales, pero no necesariamente bípedos."[39] Ahora pongamos atención en la primera aserción y vemos como ésta puede tener de tres lecturas distintas:

(a) $\forall x(\mathit{matem\acute{a}tico}(x) \rightarrow \Diamond \mathit{racional}(x))$

(b) $\Diamond\forall x(\mathit{matem\acute{a}tico}(x) \rightarrow \mathit{racional}(x))$

(c) $\forall x\Diamond(\mathit{matem\acute{a}tico}(x) \rightarrow \mathit{racional}(x))$ [40]

El ejemplo (a) adscribe la posibilidad de ser racional a un matemático, lo cual coincide con la modalidad *de re*. El ejemplo (b) es la modalidad *de dicto* corresponde a la proposición de que los matemáticos son racionales; mientras que (c) es una interpretación intermedia. Ejemplos como éste nos orillan a considerar la necesidad de un formalismo en el que suficientes formas sintácticas justifiquen las diferentes lecturas del operador de posibilidad.

Sin embargo, Hacking ensaya una manera diferente de establecer la distinción *de re/ de dicto*, a partir de otras consideraciones como la siguiente: *L* toma la operación booleana

[39] [van Benthem 1988, p. 14].
[40] [van Benthem 1988, p. 15]

usual mientras *M* no lo hace. El ejemplo de Hacking para ilustrar esto es el siguiente: ‘Es posible que Hecuba ría y que Hecuba llore’ es una construcción gramaticalmente apropiada (es una ocurrencia *L*, es decir *de dicto*); pero ‘es posible para Hecuba llorar y reír,’ no es una construcción *L*, ni *M*. Es ambiguo el alcance del operador y si se afirmara que es una ocurrencia *M*, no es claro si Hecuba es capas de ambas cosas al mismo tiempo. Finalmente, la clase de adjetivos que contrastan con los dos *posibles* son diferentes. La *L* construcción toma cierto, dudoso, verdadero, creíble, plausible: ninguno de ellos encaja con la construcción *M*. Los adjetivos que encajan con la construcción *M* se dividen en dos clases. Algunos encajan tanto en *M* como en ‘$es \ldots de \ A \rightarrow x$’, tales como: imprudente, placentero, novedoso. Nótese que ‘posible’ no encaja en ese espacio. Entonces hay otra clase de adjetivos más relacionados a ‘posible’ y los cuales, al igual que éste, no encajan en ese espacio, a saber: obligatorio, esencial. Hacking afirma que los miembros de esta última clase contrastan con ‘posible’ en *M*.[41]

De esta manera, con el simple análisis basado en el contraste entre adjetivos, el método de Hacking indica cuando una construcción arbitraria en la cual hay una ocurrencia de la palabra ‘posible’ está relacionada directamente con una *L* o *M* ocurrencia, o ambas:

> In addition to the examples just cited note that *probable* may replace *possible* in *L*, and *permissible* characteristically contrast in *M* […] I contend that for any grammatical construction in which the word *possible* occurs, there are just three cases. (a) Only *probable* fits. (b) Only *permissible* fits. (c) Both fit. [Hacking 1975, p. 324]

Hacking piensa que cuando ninguno de ellos ajusta, es porque ‘posible’ está precedido por un adverbio cuyo sentido excluye ambas palabras, entonces, para clasificar la ocurrencia de ‘posible’ es necesario suprimir el adverbio. De acuerdo con la cita anterior, si se da (a),

---

[41] [Hacking 1975, p. 323].

entonces la construcción es una ocurrencia *L*; si se da (b), entonces tenemos un caso de *M* ocurrencia; si (b) es el caso, entonces tenemos una ambigüedad gramatical.

Asumiremos que el anterior es un criterio suficiente para la distinción entre posible *de re* y *de dicto*. Ahora pasemos a ver que es lo característico de cada una de esas posibilidades.

2.2 Posibilidad epistémica y lo lógicamente posible.

Hemos visto que de acuerdo al criterio de Hacking, las *L* ocurrencias de posible son *de dicto*, mientras que las *M* ocurrencias son *de re*. Hay, sin embargo, otro rasgo de las posibilidades que es importante destacar, a saber, su carácter epistémico: "Decir que es posible que tal y tal, es decir que tal y tal es consistente con todo nuestro conocimiento."[42] En el artículo que estamos refiriendo, Hacking afirma que la *M* posibilidad es inmensamente más importante que la mera posibilidad epistémica. Pero para poder ver la diferencia entre la posibilidad epistémica y la posibilidad en la *M* ocurrencia, debemos considerar lo siguiente:

> *M* occurrences of possible can be modified by many adverbs of the form Φ-ly: technically, economically, medically, metaphysically, humanly. It is perhaps significant that the Φ tend to be academic disciplines [...]. The "disciplinary" adverbs, for most of which there is an adjective Φ-al, must readily fit into any scheme explaining possibility. [Hacking 1975, p. 325]

La razón por la cual Hacking exige que la Φ tienda a ser una disciplina académica está en que de esa manera evita compromisos con términos tales como 'perfectamente posible' o ' 'idealmente posible'. Los adverbios 'disciplinarios' a los que hace alusión Hacking tienen su par con algún adjetivo Φ, el cual debe ajustarse fácilmente dentro de cualquier esquema explicativo de la posibilidad, En otras palabras, Si es Φ-mente posible para $A \rightarrow x$,

---

[42] [Hacking 1975, p. 325].

entonces *A* tiene una cierta habilidad o poder Φ para realizar *x*. Pero cuando decimos que es teóricamente posible vivir en Marte no es muy claro que significa ese 'poder o habilidad teórica.' Sin embargo 'una habilidad metafísica' puede ser un sin sentido para Hacking.[43]

Hacking observa que si procedemos positivamente, como hasta ahora, esto nos conduce al sin sentido de considerar las posibilidades como poderes en las cosas o los agentes. La vía negativa parece más fructífera:

> It is impossible for *A* to *x* if something absolutely prevents *A* from *x*-ing. It is possible to for *A* to *x* if nothing absolutely prevents *A* from *x*-ing. *It is* Φ*-ly possible for A to x if there is nothing of* Φ*-al* sort that absolutely prevents *A from x-ing.* [Hacking 1975, p. 326]

Esta estrategia resulta ser un antídoto contra el punto de vista común que considera a las posibilidades como poderes positivos de las cosas y los agentes. De esta manera queda establecido que la posibilidad epistémica es *L* posibilidad, es una posibilidad *de dicto* y el *dictum* es objeto de creencia o conocimiento. Mientras que la técnica, humana, económica, médica y toda esa suerte de posibilidades[44] son especies de *M* posibilidad, es decir son capacidades de un agente para realizar acciones dentro de un contexto dado, son posibilidades *de re*.

De acuerdo con Hacking,[45] Moore afirmó que la posibilidad lógica podía ser expresada por un subjuntivo.[46] Si Moore está en lo correcto, entonces la posibilidad lógica es una *M* posibilidad. Es decir, la proposición 'es lógicamente posible para $A \rightarrow x$' es gramaticalmente correcta, y esto significaría qué al menos una posibilidad lógica encaja dentro de la categoría *M*.

---

[43] [Hacking 1975, p. 325].
[44] Esta caracterización excluye adverbios como 'afortunadamente' o 'perfectamente,' los cuales no son disciplinarios y contraen ambigüedades indeseables que ahora queremos evitar.
[45] [Hacking 1975, p. 332].
[46] [Hacking 1975, p. 332].

Lo que el análisis de Hacking muestra, es que la posibilidad lógica es en última instancia una posibilidad *de re*.[47] En el recuento de lo Φ-mente posible para Hacking, es lógicamente posible para $A \rightarrow x$ si no hay nada de una suerte lógica que prevenga absolutamente a A de llevar a cabo x. Pero, falta además considerar que en "el caso de una posibilidad no lógica, es *posible para* $A \rightarrow x$ es *de re* cuando A es un designador rígido."[48]

En este punto la pregunta obligada es la siguiente: ¿qué hay sobre la posibilidad lógica *de dicto*? Hacking sostiene que debemos rechazar cualquier concepto de posibilidad lógica *de dicto*. Estamos claramente en libertad de decir de un enunciado, el cual no implica una contradicción, que es lógicamente posible y también somos libres de afirmar el enunciado 'es lógicamente posible que p' en el modo indicativo, para expresar ese hecho.[49] Sin embargo, no siempre es sencillo establecer que *p* no implica una contradicción lógica o que *p* implica una contradicción lógica. ¿Cuál será entonces el motivo por el cuál Hacking rechaza la posibilidad lógica *de dicto*? Los lógicos tradicionalmente han defendido que "cualquier cosa que no es lógicamente imposible es lógicamente posible; algo que es lógicamente posible pero no lógicamente necesario es contingente."[50] De esto se sigue que la posibilidad lógica puede entonces ser subdividida, pues "algunos estados de cosas lógicamente posibles son causalmente posibles –esto es, compatibles con las leyes regulativas del universo."[51] Sin embargo, esas elegantes subdivisiones van inevitablemente acompañadas por la imagen que heredamos de Leibniz sobre los mundos posibles:

---

[47] Cuando Hacking llegó a esa conclusión, pensó que nadie creería en ella, pero entonces apareció una publicación de Kripke, *El nombrar y la necesidad*, que cambió la percepción de las cosas. Hacking piensa que a partir de esa publicación, ya podemos contar con una explicación viable de las modalidades lógicas *de re*, en las cuales no profundizaremos ya que nos desviarían de nuestro objetivo central.
[48] [Hacking 1975, p. 333].
[49] [Hacking 1975, p. 335].
[50] [Hacking 1967, p. 143].
[51] [Hacking 1967, p. 143].

> What is necessary obtains in every possible world, while the logically impossible is found in none; the logically possible holds in some possible world. It is well known how this family of notions moves in a rather tight circle. Russell observes […] that "it would seem that necessity is ultimate and indefinable. We may say, if we choose, that a necessary proposition is one whose contradictory is impossible; but the impossible can only be defined by the necessary, so this account would give no information as to necessity. [Hacking 1967, p. 144]

Lo anterior no muestra que el concepto de necesidad sea ocioso. Este se puede circunscribir por axiomas. En nuestro caso y en orden a precisar la posibilidad lógica debemos también considerar otra concepción de posibilidad y es la que está estrechamente ligada con el auxiliar 'puede.' Bajo esta concepción, Hacking sostiene, que si algo es posible en el sentido que yo tengo en mente, entonces esto puede ser el caso: "That is a necessary, though perhaps not a sufficient, condition for something to be possible."[52] Observemos cómo la aplicación de 'podría haber sido' es al parecer una condición necesaria para la aplicación 'lógicamente posible.' Si algo no pudiera haber sido, entonces no sería lógicamente posible. Pensemos en una equivalencia que se ha citado tradicionalmente: una proposición falsa es lógicamente posible si ésta pudiera haber sido verdadera. De esta manera encontramos que lo lógicamente posible, no siempre es posible, es decir:

> This historical connection of logical possibility and "might have been" is enough in itself to show that there is a conception of possibility less expansive that old logical possibility. Plainly, "may" is no synonym for "might have been," and, plainly, there is some sense of the word "possible" associated with the word "may." [Hacking 1967, p. 146]

Russel estaría de acuerdo en que una proposición falsa es posible si ésta pudiera haber sido verdadera; pero al parecer rechazó las ideas de posibilidad lógica y necesidad parcialmente, porque al parece no hay proposición verdadera de la cual no haga sentido decir que podría haber sido falsa, y no parece haber proposición falsa de la cual no se pueda decir con sentido que podría haber sido verdadera.

---

[52] [Hacking 1967, p. 145].

2.3 Conclusiones

Hemos analizado la noción de posibilidad y mediante el método de Hacking establecimos la distinción de dos construcciones gramaticales donde ocurre el adjetivo posible. La primera, la ocurrencia *L* del adjetivo 'posible', está relacionada con la posibilidad epistémica; mientras que la segunda, *M* construcción, es unan noción lógica de posibilidad. La *L* construcción es *de dicto*; la *M* construcción es *de re*. La noción epistémica de la posibilidad es la noción más sencilla de intuir dado que lo que es posible epistémicamente no entra en conflicto con nuestro conocimiento. La posibilidad lógica es la noción más difícil de explicar y, sin embargo, es la más frecuente en nuestro discurso científico y filosófico. Otra forma de posibilidad , la posibilidad física, se puede entender en términos de la posibilidad lógica: es una verdad 'físicamente' necesaria aquella que físicamente no pueden ser de otra manera. La lógica modal se creó teniendo en mente las modalidades lógicas, por eso es que ahora sólo mencionamos la posibilidad física. Tener una noción clara de la posibilidad física supone tener en mente que lo físicamente posible no debe estar en conflicto con las verdades de la física. En palabras de Peirce: "*Logical* necessity and possibility presuppose only distinct 'understanding of the meaning of the words", *physical* modalities 'only what a knowledge of certain principles of physics does or does not exclude'"[53]

[53] [Niiniluoto 1988, p. 304].

Capítulo 3

POSIBILIDAD EN LA TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

3.1 Introducción

En este capítulo proponemos un análisis de las relaciones que guardan las definiciones de probabilidad que discutimos en el primer capítulo con las nociones de posibilidad que presentamos en el capítulo anterior. Nuestro interés se centra, en primer lugar, en señalar que dentro de cada una de esas definiciones hay alguna noción de posibilidad, explícita o implícita; en segundo lugar, recalcar el sentido que tiene cada una esas nociones de posibilidad en cada una de las definiciones que hemos expuesto. El caso de la teoría de las probabilidades clásica no es problemático, dado que como constatamos, el término 'posibilidad' es explícito en la definición. Sin embargo, en los otros dos enfoques, el frecuencialista y el axiomático, no es explícita la ocurrencia de alguna noción de posibilidad. De hecho, no es del todo claro que tal ocurrencia tenga lugar; pero, si tal ocurrencia tiene lugar, entonces las definiciones de los enfoques frecuencialista y axiomático son también circulares.

Lo que tratamos de mostrar es que hay alguna noción de posibilidad relacionada con la teoría frecuencialista y la teoría axiomática de las probabilidades. Esto es algo que aparenta ir en contra de nuestras intuiciones ya que autores como Hacking señalaron su perplejidad de que una definición 'tan monstruosa' como la definición clásica de probabilidad tuviese tanto éxito y estuviese vigente durante mucho tiempo. Lo que se esperaba de una definición que viniera a sustituir a la definición clásica de las probabilidades es que ésta abandonara aquel elemento monstruoso al que Hacking se refería: la noción de posibilidad. Lo que hace monstruosa la definición clásica de probabilidad es precisamente la recurrencia a una noción tan oscura como puede ser la de posibilidad. Lo que aquí sostenemos es que las definiciones que siguieron a la definición clásica también tienen una conexión con la noción de posibilidad.

3.1 Posibilidad en la teoría clásica de las probabilidades

La definición clásica de la teoría de las probabilidades hace uso explícito de una noción de posibilidad:

> Suppose there are *n* such cases, and *m* of them are favorable to the outcome A. Then the probability of A[prob(A)] is defined to be Prob(A) = m/n. There is the famous classical definition of probability based on equally possible cases. [Gillies 2000, p. 17]

Al respecto, Hacking se pregunta: "¿cómo pudo una definición tan monstruosa haber tenido tanta viabilidad?"[1] Esta definición es acusada de ser una definición circular, y sólo es defendible si se argumenta suficientemente la imposibilidad de dar una definición no circular. Sin embargo, la definición clásica de las probabilidades es considerada una definición matemática. Pero, a pesar de considerar a la definición clásica de la probabilidad como meramente matemática, no deja de surgir ante nosotros:

> la dualidad esencial de la probabilidad, que es tanto epistémica como aleatoria. Las probabilidades aleatorias tienen que ver con el estado físico de las monedas o con los humanos mortales. Las probabilidades epistémicas se vinculan con nuestro conocimiento. [Hacking 1975, p. 153]

[1] [Hacking 1975, p. 152].

La primera definición de probabilidad que apareció en la historia de la matemática se encontró en la correspondencia entre Pascal y Fermat en el siglo XVII, y fue inmediatamente relacionada con un concepto aleatorio y otro epistemológico:

> La probabilidad estaba evolucionando como algo conjuntamente físico y epistemológico. La posibilidad ya era dual de un modo similar (aunque no idéntico). La definición de probabilidad en términos de posibilidad no es un capricho histórico sino un rasgo bastante esencial en el desarrollo de ambos conceptos. [Hacking 1975, p. 153]

Después de esto, no es de sorprender que el concepto epistemológico de probabilidad se haga corresponder con el concepto epistémico de posibilidad, mientras que el concepto aleatorio de probabilidad se hizo corresponder con un concepto de posibilidad física. Estas correspondencias se pueden precisar de la siguiente manera. Si Hacking tiene razón, entonces el lado aleatorio de la probabilidad se puede poner en correspondencia con la posibilidad *de re*, puesto que ésta tiene que ver con las características físicas de las cosas, mientras que, por otro lado, el aspecto epistémico de la probabilidad se hace corresponder con la posibilidad *de dicto*. En otras palabras, se puede poner en correspondencia con lo que sabemos y se puede expresar por proposiciones (*dictum*).

Sin embargo, esas dos interpretaciones de la teoría de las probabilidades no fueron distinguidas una de la otra en una forma clara y sistemática, dados los problemas que implicaba el establecer de manera convincente la distinción entre las dos nociones de posibilidad que ahí se encontraban explícitas. De hecho, el cálculo de probabilidades estuvo basado sobre la llamada definición clásica de probabilidad por más de un siglo. Veamos otra definición de probabilidad dentro del mismo enfoque clásico, pero cuya formulación se la debemos a De Moivre:

> If we constitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denomenator the number of all the

> Chances whereby it may happen or fail. That Fraction will be a proper designation of the Probability of happening. [Niiniluoto 1988, p. 278]

Si concentramos nuestra atención en esta otra formulación de la probabilidad, observaremos no sólo que contiene el operador modal 'puede', sino que también algo de lo que Leibniz se percató perfectamente, y es que las alternativas de elección tenían que ser iguales. Con todo y que esto es muy parecido a lo que antes ya habíamos señalado, esta cita nos da pie a proponer nuestra lectura de la definición clásica. Esta lectura no es muy lejana de la que el propio Hacking ya propuso y que de alguna manera explica por qué los teóricos de las probabilidades en el siglo XVIII, incluyendo Laplace, titubearon entre las interpretaciones física y epistemológica de la equiposibilidad.[2] De acuerdo a lo anterior, lo que realmente hicieron Laplace y sus seguidores fue concluir a partir del determinismo un punto de vista epistemológico de la probabilidad:

> La probabilidad es relativa, en parte a nuestra ignorancia, en parte a nuestro conocimiento. Sabemos que de tres o de un número mayor de eventos, sólo uno de ellos debe ocurrir; pero nada nos induce a creer que uno de ellos ocurrirá en mayor medida que los otros. En este estado de indecisión, es imposible para nosotros anunciar la ocurrencia con certeza. [Laplace 1814, p. 6]

El rasgo sobresaliente de la teoría de las probabilidades clásica es la inmediata y explícita asociación de probabilidad con posibilidad. Leibniz afirmó que probabilidad es un grado de posibilidad, igualando entonces probabilidad con grados de posibilidad.[3] Pero la definición clásica de probabilidad va más allá, puesto que también sugiere que la teoría de las probabilidades es de hecho reducible a una teoría que dé cuenta de las modalidades, es decir, a una lógica modal. Sin embargo, fue la inversa lo que sedujo a los lógicos del siglo XIX; de esta forma tenemos que si las nociones de necesidad y posibilidad no son

[2] [Niiniluoto 1988, p. 278].
[3] [Niiniluoto 1988, p. 278].

primitivas, entonces una noción matemática de probabilidad puede muy bien ayudar a definirlas.

> This is, indeed, the strategy followed by most German text books on logic in the nineteenth century: the chapter on Modality contains a small section on Probability, where probability is defined as a ratio associated with a necessary disjunctive judgment with a finite number of possible disjuncts, and we don't have any reason to regard one of these disjuncts more possible than another. [Niiniluoto 1988, p. 279]

La aplicación del concepto de probabilidad a situaciones donde tales juicios disyuntivos no pudieron ser formulados completamente, es lo que usualmente se consideró como ejemplos de probabilidades filosóficas, las cuales no son cuantitativas, como las probabilidades matemáticas. El mismo Boole sugirió que la teoría de las proposiciones hipotéticas podría ser tratada como una parte de la teoría de las probabilidades; en sus *Leyes del pensamiento* dedicó muchas páginas a la aplicación de su nueva álgebra a las probabilidades:

> Another interpretation of the calculus according to which the letter stands for the probability of the proposition X in relation to all the available information, say K. Adapting and simplifying Boole's symbolism we have: $\mathrm{Prob}_K(X \text{ and } Y) = xy$ if X and Y are independent, given K, and $\mathrm{Prob}_K(X \text{ or } Y) = x + y$ if X and Y are mutually exclusive. [Kneale & Kneale 1962, p. 414]

Esta interpretación claramente no satisface el principio mediante el cual Boole transforma su álgebra en un sistema bivalente: 'o bien $x = 0$, o bien $x = 1$'. En el caso de las probabilidades no podemos sostener que toda probabilidad es 'o bien Prob(X) = 0, o bien Prob(X) =1.' De está forma se pensó que las probabilidades filosóficas no podrían ser cuantitativas. Por otro lado:

> Los matemáticos abusaron mucho de la probabilidad, tratando de aplicar el cálculo a las cuestiones que surgen en la vida práctica, tales como, por ejemplo, valuar la veracidad de un testigo. Fue un gran error, en asuntos de este género, dada la complejidad y la variabilidad de los fenómenos respectivos, toda tentativa de evaluación numérica es imposible [...]. Más provecho sacamos del conocimiento de la persona que de saber, cualquiera que sea el medio empleado, que su veracidad es 1/3. [Parra 1903, p. 411]

Esto muestra que al menos hay un ámbito que no era competencia de la teoría matemática de las probabilidades y que, sin embargo, se consideró parte de su dominio pues no era claro si la teoría de las posibilidades era menos o más general que la teoría matemática de las probabilidades. Lo determinante en esta disputa fue quizás lo siguiente:

> To those philosophers, who were not satisfied whit the state of the theory of modality, the reduction of probability to possibility could not seem at all appealing. Probability calculus had a clearly formulated and well understood mathematical structure, while modal syllogistic had fallen into "neglect, if not contempt" –as Thomas Reid wrote just before the heydays of Laplace. [Niiniluoto 1988, p. 279]

Las razones de ese desprecio se han esbozado en la introducción, y se pueden encontrar en la obra de los lógicos más prominentes de fines del siglo XIX y principios del XX. En particular destaca el desdén que de la modalidad hizo Frege en su *Conceptografía:*

> Cuando designo una proposición como necesaria, con ello doy una indicación sobre mis fundamentos de juicio. Pero, puesto que con esto no se toca el contenido conceptual del juicio, la forma del juicio apodíctico no tiene para nosotros importancia alguna. [Frege 1879, p. 16]

El rechazo de los lógicos por las cuestiones modales, llevó a plantearse otra alternativa, en apariencia mucho más prometedora, pero en muchos sentidos contra intuitiva: reducir la lógica modal a la teoría de las probabilidades. Veamos que dice Niiniluoto al respecto:

> IF we could analyse the truth conditions for probability statements without employing modal concepts, then *necessity* could be defined by *probability one*, *impossibility* by *probability zero*, and *possibility* by *non-zero probability*. This strategy would mean in effect that probability theory is taken to be a research

> programme that is rival to the traditional logical account of modality. [Niiniluoto 1988, p. 279]

Esta estrategia nos parece en principio inapropiada para el caso de la definición clásica de las probabilidades. En primer lugar, la relación de la posibilidad con la probabilidad clásica no es, como Hacking y otros quieren, una relación entre una probabilidad epistémica y una noción *de dicto* de la posibilidad. La manera correcta de apreciar esto, a nuestro parecer, es la siguiente: la noción de posibilidad que está explícita en la probabilidad clásica es una noción de la forma es posible que *p*, donde *p* evidentemente es la proposición que hace referencia a nuestro evento ε. De acuerdo con las caracterizaciones de posibilidad expuestas en el segundo capítulo, ésta es una posibilidad epistémica, no una posibilidad lógica. De acuerdo al criterio que hemos expuesto, tampoco cabe una interpretación física de la posibilidad; para serlo debiera ser una posibilidad *de re*, pero ésta no es la noción que está inmersa en la definición clásica.

En segundo lugar, parece que la reducción de la modalidad a las probabilidades pasó por alto el hecho de que, como Parra hizo patente, no todos los ámbitos de aplicación de las modalidades son accesibles a las probabilidades. En otras palabras, hoy nos es intuitivamente verdadero que todo lo probable es posible. Sin embargo, la inversa rara vez es el caso.

Hay otros aspectos de la definición clásica que dejaremos de lado, como por ejemplo el de la equiposibilidad. La razón de esta decisión es que si bien contamos con criterios claros de distinción entre posibilidades, no es así para el caso de la identidad.

Además, el problema de la identidad es en sí mismo un tema controvertido, que nos desviaría de nuestro propósito.[4]

3.2 Posibilidad en la teoría Frecuencialista de las probabilidades

Jacques Bernoulli demostró un famoso teorema en el cual muestra que la probabilidad tiene una interesante conexión con frecuencias relativas. Éste fue el primer paso en dirección a abandonar la definición leibniziana de probabilidades basada en casos equiposibles a favor de una definición en términos de frecuencias:

> Let A be an arbitrary attribute associated with a particular collective. If Ω is the attribute space of the collective, then $A \subseteq \Omega$. Suppose that in the first n members of the collective A occurs $m(A)$ times, then its relative frequency is $m(A)/n$. The Law of Stability of Statistical Frequencies is that n increases $m(A)/n$ gets closer and closer to a fixed value. [Gillies 2002, p.92]

Si nosotros no estamos dispuestos a aplicar la definición clásica para asignar probabilidades a un evento, ya sea porque nuestros eventos no son equiposibles, ya sea porque no tenemos un conocimiento a priori de los casos favorables y de la totalidad de los casos posibles,

[4] De acuerdo a Aristóteles lo idéntico se dice de tres formas diferentes: solemos dar la designación de *idéntico*, bien por el número, bien por la especie, bien por género[Aristóteles 1988, 103a6.]. Estas manera de considerar la identidad pueden dar pauta a ambigüedades. El símbolo de identidad (=) es un símbolo de las matemáticas, pero también forma parte del lenguaje cotidiano. En este sentido, viene a coincidir con algunos de los sentidos del verbo 'ser,' aunque no con los más comunes. "Todos los griegos *son* europeos" ejemplifica la inclusión de una clase en otra que ya aparece en la definición de Aristóteles, y "Sócrates *es* griego" indica la pertenencia de un elemento o individuo a una clase. Éstas son relaciones inequívocas de una parte con el todo. Pero "todo triangulo es un polígono de tres lados" y "Sócrates es el maestro de Platón" son casos muy particulares; el último en especial viene a coincidir con la manera en que en esta tesis consideraríamos el signo "=". Este sentido no dista mucho del que tiene en matemáticas y que se distingue del filosófico, por su precisión. Sin embargo, de acuerdo con Quine, a pesar de que la verdad lógica se ve amenazada por el predicado de identidad, '=', ya que las verdades de la teoría de la identidad ('x=x', o '$\neg(x = y \wedge \neg(y = x))$') no serían verdades lógicas, pues al sustituir '=' por otros predicados estás se falsean; a pesar de ello: "la teoría de la identidad parece más próxima a la lógica que a la matemática, por ejemplo, porque es, como la lógica pura, una teoría completa[...] En cambio, el más célebre de los teoremas de Gödel (1931) muestra que, por el contrario, la teoría elemental de los números no es susceptible de ningún procedimiento completo de demostración."[Quine 1970, p 112] Sin embargo, Kripke sostiene que: "Los enunciados de identidad deberían ser muy sencillos, pero de alguna manera resultan muy desconcertantes para los filósofos [...] De manera que algunos filósofos, incluso Frege en una etapa temprana de sus escritos, han considerado que la identidad es una relación entre nombres. La identidad, dicen ellos, no es la relación entre un objeto y sí mismo, sino la relación que se da entre nombres cuando estos designan el mismo objeto." [Kripke1972, p. 114]

Bernoulli sugirió que la manera de realizar esto es tratando de determinar a partir de los resultados observados en numerosos ensayos similares, aquel valor que no tenemos a priori. Este consejo de Bernoulli tuvo frutos, pues:

> The *frequency interpretation* of probability was born in 1843, when Robert Lesli Ellis, John Stuart Mill, and A. A. Cournot independently of each other conceived this a posteriori test of probability to be an a priori valid definition of probability. For example, to say that heads and tails in coin tossing are equipossible *means*, on this interpretation, that they occur equally often in a long series of tosses. [Niiniluoto 1988, p. 292]

Aunque muchos de los autores que habían reaccionado contra la definición clásica, finalmente terminaron por adoptarla. Tal es el caso de Mill quien, a pesar de su definición de frecuencia en las últimas ediciones de su *Sistema de Lógica*, finalmente regresó a una interpretación epistémica Laplaciana de la misma:

> De todos modos en el cálculo de probabilidades es preciso recordar que entre todos los sucesos posibles uno, nada más, ocurrirá, y que no tenemos razón alguna para creer que será uno más bien que otro; se ha dicho que además se necesita, para realizar el cálculo de probabilidades, que estemos convencidos, ya inductiva, ya deductivamente, de que los diversos sucesos posibles son igualmente probables. [Mill 1897, p. 169]

El de Mill no fue un caso aislado, pues de acuerdo con Niiniluoto, Boole también adoptó en *Las leyes del pensamiento* la definición clásica.[5] Aunque Boole no tardó en considerar que la probabilidad había sido expresada de manera satisfactoria a partir del conocimiento de las frecuencias relativas de ocurrencias de eventos.

La definición más satisfactoria de la probabilidad frecuencialista se la debemos a Venn. Uno de sus aciertos fue que llamó la atención sobre el fenómeno que aquí se está tratando de resaltar, a saber: había un ámbito del razonamiento que las interpretaciones de

---

[5] [Niiniluoto 1988, p. 292].

las probabilidades habían venido a cubrir. Los lógicos de la época recurrían a la teoría de las probabilidades, con la idea errónea de que ésta nada tenía que ver con modalidades.

La cuestión ahora es mostrar cómo este nuevo enfoque matemático de las probabilidades, cuyo primer intento sistemático por desarrollar la interpretación de la probabilidad como frecuencias en series de eventos fue dado por John Venn en la *Lógica de probabilidades*,[6] puede presuponer una noción modal si de acuerdo con la reseña que Peirce publicó en el *The North American Review* (1867), nos encontramos ante una definición nominalista. Dice Niiniluoto: "Venn's definition of probability is *extensional* rather than *modal* in the sense that it refers only to one *world.* This is the external world of facts, continuing indefinitely to past and future directions in time."[7]

Al parecer, Peirce estuvo bien informado de la dificultad que origina asignar probabilidades objetivas a ciertas proposiciones cuando nos vemos en la necesidad de apelar a frecuencias relativas de mundos posibles. En realidad Peirce nunca aceptó la idea de Leibniz de que todo mundo posible tiene una propensión a ser real. Aunque en definitiva, el núcleo intuitivo de toda la semántica de lo lógica modal es la idea leibniziana de verdad necesaria como verdad en todo mundo posible. Un teorema menos conocido es el citado por Leibniz en la *Theodicée*:[8]

Unumquodque, quqndo est, oportet esse.[9]

En nuestra simbología contemporánea, Leibniz está formulando una versión de la regla de necesitación de Gödel: $\vdash \varphi / \Box\varphi$.

---

[6] Publicado en el año de 1866.
[7] [Niiniluoto 1988, p. 293].
[8] [Łukasiewicz 1970, p. 62].
[9] "Todo lo que es, *cuando* es, es necesario"

En esta postura leibniziana, se comenzó a vislumbrar otra interpretación de la teoría de las probabilidades, que no es estrictamente matemática, y que por tal motivo no fue tomada en consideración en nuestro primer capítulo: la teoría propensitivista, en la cual:

> Probability is a numerical disposition of a physical device or set-up to produce certain outcomes in a single trial. Probability statements about such dispositional tendencies are testable through the consequences that they have about statistical frequences through Laws of Large Numbers (like the Bernoulli's theorem). The propensity interpretation thus makes respectable the classical idea of probability as a degree of physical possibility. [Niiniluoto 1988, p. 295]

El señalamiento a esta interpretación se hace con la intención de mostrar que la discusión sobre las modalidades no quedó del todo terminada con la definición frecuencialista y que si hay alguna relación entre los enfoques frecuencialista y el propensitivista, ésta debe estar ligada a alguna noción de posibilidad física y no epistémica como quería Laplace. Sin embargo, esto es más sencillo de ver si tomamos el intento de Niiniluoto por demostrar que:

> Not even A.A. Cournot, who in 1843 supported the existence of objective chance in nature, and interpreted objective probability as a "limit of physical possibility" (*possibilité physique*), cannot be regarded as a propensitist in the sense of indeterminism. [Niiniluoto 1988, pp. 295-296]

Con autores como Cournot y Venn nos encontramos que, si bien la posibilidad epistémica asociada a la probabilidad clásica se encontraba en el olvido y superada, otra noción de posibilidad ocupa el lugar de la noción relegada en la nueva definición matemática de las probabilidades. Esta noción se encuentra a tono con la postura nominalista de los lógicos de la época, pero estos, al igual que los lógicos anteriores, no alcanzaron a ver la significación e importancia de esto. La siguiente cita de Niiniluoto es clarificadora al respecto:

> But among physical facts and among realities with which the senses deal, in which contrary events may happen, and actually do hapeen, as a result of the fortuitous combination of certain causes which are variable and independent

> from one trial to another, along whit other unchanging causes or condition which govern the whole group of experiences, it is natural to regard each event as having a stronger tendency to occur, or as being more possible in fact or physically, in proportion as it is produced more often in a large number of cases. Mathematical probability becomes, then, the limit of *physical possibility*, and the two expressions may be used interchangeably. [Cournot 1956, pp. 39-48][10]

Concordamos con esta idea, pues como fruto de nuestro análisis hemos llegado a concluir que esas definiciones pueden ser equivalentes; la probabilidad frecuencialista, de acuerdo a nuestro análisis presupone la posibilidad física. Sin embargo, y aunque es indudable el éxito que tuvo a finales del siglo XIX la interpretación física y frecuencialista de la probabilidad; este éxito se desarrolló a la par con el progreso de las ciencias naturales y sociales. Y aunque la época del determinismo Laplaciano había sido ya superada, una noción de posibilidad persistió. Sin embargo, todavía hacía falta ver si alguna de nuestras nociones de posibilidad sobreviviría a la axiomatización de la teoría de las probabilidades.

Antes de considerar la teoría axiomática, permítasenos presentar una prueba en la que Niiniluoto relaciona la probabilidad y el principio de plenitud. En primer lugar, Niiniluoto define la posibilidad así:

> Definición: El evento A es posible si y sólo si la probabilidad $P(A)$ de A no es cero.

Ahora bien, de lo que se trata ahora es de saber que interpretaciones de $P(A)$, clásica o frecuencialista, implican el principio de plenitud (Π):

> Principio Π: Si el evento A es posible, hay un tiempo t tal que A es realizado en t.

[10] Citado en [Niiniluoto 1988, p. 296]. La cursiva es nuestra.

Niiniluoto observa que una caracterización epistémica de la probabilidad no implica Π, y "que en el mejor de los casos un grado de creencia no cero en la ocurrencia de *A* garantiza que la oración '*A* ocurre' no es autocontradictoria."[11]

En segundo lugar, Niiniluoto destaca que la definición de frecuencia de Venn invariablemente lo compromete con el Principio de Plenitud.

> Let $f(A, s_n)$ be the frequency of event *A* in a series of length *n*, where s_n is a subsequence of an infinite series *s*. Then, by Venn, the probability of *A* relative to *s* is
>
> $$P(A, s) = \lim_{n\to\infty} f(A, s_n)/n$$
>
> Assuming $P(A, s)>0$, it follows that, for some *n*, $f(A, s_n)>0$, i. e., *A* occurs in the finite series s_n. [Niiniluoto 1988, p. 297]

En otras palabras, lo que se quiere decir con esto es que si *A* ocurre en la serie finita s_n, *A* es físicamente posible. Aún hoy, resulta sorprendente que se olvide el carácter distintivo de la teoría frecuencialista: en principio nuestro experimento debe ser físicamente posible, esto es, un experimento realizable.

3.3 Posibilidad en la teoría Axiomática de las probabilidades

Kolmogorov fue conciente de que cualquier teoría axiomática es susceptible de un ilimitado número de interpretaciones paralelas a aquella de la cual fue originalmente derivada. Como antes señalamos, ese es un problema en el que nosotros no estamos interesados. La característica que a nosotros nos conviene señalar es que puede haber diferentes conjuntos de axiomas, pero la axiomática de Kolmogorov es en la que nos concentraremos.

Para comenzar, recordemos que en este momento nos encontramos ya en un ámbito en el cual la posibilidad epistémica y física no tienen ninguna relevancia. Sin embargo, la

[11] [Niiniluoto 1988, p. 297].

manera como se asigna probabilidades en el espacio de probabilidades de la teoría axiomática viene restringida por otras nociones. En particular, nuestra tesis es que las posibilidades de ocurrencia de ciertos eventos compuestos están caracterizadas por la posibilidad lógica de tener tales eventos como subconjuntos del conjunto de los eventos elementales, esto es, del conjunto potencia. Para esto, analicemos primeramente la definición de conjunto potencia:

> *For any X exists a set Y* = P(X):
> $\forall X \exists Y \forall u\ (u \in Y \leftrightarrow u \subset X)$
> *A set U* is a *subset* of X, $U \subset X$, if
> $\forall z\ (z \in U \rightarrow z \in X)$
> If $U \subset X$ and $U \neq X$, then U is a *proper subset* of X
> The set of all subsets of X,
> $P(X) = \{ u: u \subset X\}$
> Is call the power set of X. [Jech 2002, p. 9]

La definición de conjunto potencia muestra que la manera en que los eventos compuestos de un experimento se dan no es arbitraria, ni está sujeta a condiciones físicas, o a nuestro conocimiento. Contamos con una herramienta matemática poderosa que nos puede señalar cuáles y cuántas son las posibilidades lógicas de la ocurrencia de tales eventos. Esta noción de posibilidad se puede intuir a través de un ejemplo como el siguiente.

Supongamos que tenemos un conjunto $E = \{a, b, c\}$ de eventos elementales independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que se dé el evento consistente en $\{a, c\}$?

1) Si $E = \{a, b, c\}$, entonces $\wp(E) = \Im = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}, \varnothing\}$

2) a') Para cualesquier $x, y \in \Im$, $x \cdot y = z \in \Im$.

b') Para cualesquiera $x, y \in \Im$, $x \mathrm{U} y = z \in \Im$.

c') Para cualesquier $x, y \in \Im$, $x - y = z \in \Im$.

d') Y $\Im \neq \varnothing$, $\varnothing \in \Im$

3) E= $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8\}$ y tenemos un conjunto arbitrario de $\{p_n\}$ tal que $p_n \in \Re^+$ y tal que $\Sigma p_n = 1$

Ahora bien, supongamos que alguien nos pregunta porqué nuestro espacio muestral relativo a $\{a, b, c\}$ es $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}, \varnothing\}$ y no $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}, \{\varnothing\}, \varnothing\}$

Nos encontramos en condiciones de afirmar que eso no es lógicamente posible. Supongamos que tenemos un conjunto $E = \{a, b, c\}$ de eventos elementales independientes. Ahora, asumamos que $\wp(E) = \Im = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c, b\}, \{a, b, c\}, \{\varnothing\}, \varnothing\}$. Si éste es el caso, podemos obtener $U(\wp(E)) = \{a, b, c, \{\}\} = \{a, b, c, \varnothing\}$, lo cual es una contradicción, pues habíamos supuesto que $U(\wp(E)) = \{a, b, c\}$.

Lo anterior nos muestra que con el aparato axiomático nos encontramos en condiciones de saber cuándo tal evento compuesto tiene alguna posibilidad lógica de ocurrir dado cierto conjunto de eventos elementales. Las posibilidades de ocurrencia de los eventos compuestos están acotados y están en relación con la cardinalidad del conjunto de eventos elementales. Esto es lo que llevo a Cantor a afirmar que;

> Every aggregate M has a definite "power," which we will also call its "cardinal number." We will call by the name "power" or "cardinal number" of M the general concept which, by means of our active faculty of thought, arises from the aggregate M when we make abstraction of the nature of its various elements *m* and of the order in which they are given. [Cantor 1895: 86]

Para considerar las ocurrencias lógicas de los eventos elementales, debemos entonces abstraer la naturaleza de lo que estamos considerando, además del orden en que estos se manifiestan. Recordemos que Kolmogorov dio una lectura ahora convencional de las nociones conjuntistas:

> Disjointness of sets is read as (so many) incompatible events, intersection as the simultaneous realization of the members events, and complements as nonoccurrence of the event (set) complemented. The empty set is an impossible event, the whole space a necessary event. The subset relation $A \subset B$ says that from the occurrence of A the occurrence of B follows. [von Plato 1994, p. 226]

Pero hay una noción más en Kolmogorov: la de partición finita $A_1+A_2+...+A_n = E$ del espacio. En términos de la teoría de las probabilidades un experimento E_A consiste en determinar cuáles de los eventos $A_1, A_2, ...,A_n$ ocurrirán. Pero, $A_1, A_2, ...,A_n$ son todos los posibles resultados de E_A. La teoría de Kolmogorov ignora el dominio de aplicación, es decir, el conjunto de los procesos aleatorios para los cuales se ha implementado el modelo; ignora también los procedimientos mediante los cuales la datos han sido obtenidos. La carencia de contenido de esta teoría[12] le permite tener un campo amplio de aplicación que va desde la física hasta las teorías de la conducta. Pero no provee una guía para la aplicación de las probabilidades ni un procedimiento para interpretar la naturaleza de los fenómenos aleatorios. Es decir, es una teoría abstracta en donde la única noción de posibilidad que vale, es la de posibilidad lógica.

3. 4 Conclusiones

Las tres nociones de probabilidad que hemos presentado en el capítulo primero supone alguna noción de posibilidad. La definición clásica de las probabilidades supone la noción de posibilidad epistémica. La noción de posibilidad física se encuentra plenamente relacionada con la definición frecuencialista de las probabilidades. La definición axiomática de las probabilidades, dada su naturaleza abstracta, supone una noción de

[12] [Fine 1973, p. 83].

posibilidad lógica. Si tenemos razón, en este capítulo ha quedado de manifiesto que la teoría de las probabilidades no puede dar cuenta de las nociones modales, salvo aceptando definiciones circulares de la probabilidad.

Una manera indirecta de apreciar las consecuencias de esta conclusión es la siguiente: La teoría axiomática se consolido en el siglo XX como la teoría que daba cuenta de todos los fenómenos de los que daba cuenta la teoría frecuencialista y la teoría clásica de la probabilidad. ¿Cuál es la relación de la posibilidad lógica con la posibilidad epistémica y la posibilidad física? Señalamos que la posibilidad física no debe entrar en conflicto con las verdades de la física y que las posibilidad epistémicas no deben de entrar en conflicto con nuestro conocimiento. Es decir, si una posibilidad epistémica o física contradice lógicamente nuestro conjunto de conocimientos o las leyes de la física, entonces no es una posibilidad ni epistémica ni física. La noción de posibilidad lógica se muestra como esencial para adquirir las nociones de posibilidad epistémica y física. Es ese sentido es más general y esa generalidad se hace patente, de manera indirecta, en la definición axiomática de las probabilidades.

CONCLUSIONES

La teoría de las probabilidades y la teoría de las modalidades fueron concebidas como dos programas rivales en la segunda mitad del siglo XIX. Ambos programas se disputaron como materia de estudio lo que Aristóteles llamó futuros contingentes: proposiciones cuyo valor de verdad es incierto porque refieren a acontecimientos que no han sucedido; de ellas sólo podemos limitarnos a decir que son posibles o imposibles.[1] En esta disputa, la teoría de las probabilidades tomó cierta ventaja sobre la teoría de las modalidades. Esto se debió en gran parte a que la teoría de las probabilidades contó con una formulación y cálculos bien definidos y precisos. Hubo, sin embargo, un elemento extraño en la formulación de la primera definición cronológica de las probabilidades; nos referimos a la definición que fue formulada por primera vez en la correspondencia entre Pascal y Fermat. A tal formulación se le conoce como la definición clásica de las probabilidades: la razón de los casos favorables sobre la totalidad de los casos equiposibles. Esta definición que Laplace inmortalizó en su *Tratado filosófico sobre las probabilidades* fue censurada debido a que en ella figura un elemento extraño a las matemáticas, a saber: la noción de posibilidad.

Más tarde, y en el afán de encontrar una definición matemáticamente más rigurosa, y sobre todo en la que la oscura noción no figurara, Bernoulli trazó el camino para llegar a lo que ahora conocemos como la definición frecuencialista de las probabilidades. Esta definición no apela más a los tan discutidos casos equiposibles, de hecho no apela más a la noción de posibilidad, por lo menos no explícitamente.

[1] Las proposiciones contingentes tienen la característica de señalar un suceso que es el caso. Sin embargo, cabe siempre la posibilidad de que tal evento no hubiese ocurrido. No estamos en estricto sentido hablando del futuro, de lo que posiblemente será, sino de lo que es y lo que posiblemente pudo haber sido.

El éxito que logró alcanzar la definición frecuencialista se debió en gran medida a que parte de una sólida base experimental, pero sobre todo al hecho de que en tal definición no figuró más el elemento extraño y extramatemático que aparecía en la definición predecesora. Lo anterior fue motivo de júbilo no sólo para los matemáticos del siglo XIX, sino también para los lógicos más sobresalientes de la época. Esto se puede constatar en el hecho de que todos los lógicos de la época, con excepción de Peirce,[2] recurrieron a las probabilidades para explicar los futuros contingentes ya que al parecer se encontraban en un terreno no meramente extensional. La lógica modal y la teoría de las probabilidades devienen entonces en programas rivales. Considerarlas como tales implica que cada una de ellas trata de dar cuenta del mismo fenómeno. Sin embargo, a pesar de que la teoría de las probabilidades fue en un principio explicada en términos de posibilidad, ésta última noción quedó finalmente superada por el programa frecuencialista, y así fue como cada uno de estos enfoques se distanció uno del otro.

Para que la noción de posibilidad en el sentido epistémico fuese dejada atrás, hubo entonces que formular una nueva definición de probabilidad en la que no fuera necesario considerar los casos equiposibles. Pero, como hemos mostrado, aún así esta noción de probabilidad presupuso una nueva noción de posibilidad, a saber: la noción de posibilidad física.

A la noción de posibilidad epistémica explícita en la definición clásica se vino a sumar una nueva noción de posibilidad, la noción de posibilidad física implícita en la definición frecuencialista.

---

[2] [Niiniluoto 1988, p. 276].

El éxito que tuvo a finales del siglo XIX la interpretación física y frecuencialista de las probabilidades se desarrolló a la par con el progreso de las ciencias naturales y sociales. Con todo y que la época del determinismo Laplaciano había sido ya superada, nuestra tesis es que una noción de posibilidad persistió. Esta noción es la noción de posibilidad física. Como señalamos en el capitulo primero, esta definición tiene una sólida base experimental, y todos los datos con los cuales trabaja esta definición provienen de la observación y la experimentación, de manera que no hay lugar para un cálculo *a priori*. Ésta es su característica primordial.

Con respecto a la definición axiomática de las probabilidades, señalamos que la pretensión de Kolmogorov con respecto a ella fue el dar una definición de probabilidad que no estuviera basada en otros conceptos. Eso no es algo que nosotros pongamos en duda. Lo que discutimos es que aún cuando la noción de probabilidad ha sido definida en forma axiomática, hay un elemento constituyente de esta nueva definición que nosotros podemos caracterizar como una noción de posibilidad lógica. Es decir, nuestra herramienta matemática no sólo nos dice cuáles, sino además, cuántos eventos compuestos podemos tener a partir de ciertos eventos elementales. Ese número y esas combinaciones, como hemos mostrado, están caracterizadas por la noción de conjunto potencia. Posibilidad en la teoría axiomática de las probabilidades es potencialidad, es decir, ninguna posibilidad de ocurrencia de eventos compuestos va más allá de los eventos comprendidos en la potencia del conjunto.

Lo cierto es que si nosotros tenemos razón, nos encontramos con que diferentes enfoques de la teoría matemática de las probabilidades presuponen diferentes nociones de posibilidad. Si éste es el caso, entonces la noción de posibilidad no es del todo reducible a la de probabilidad por lo tanto, esto muestra que la noción de posibilidad sigue siendo primitiva y sólo explicable a partir de un análisis lógico y, quizá, metafísico, y no como lo piensan otros autores, como Niiniluoto, quienes buscan un análisis de las posibilidades en términos de probabilidades.

Creemos que a pesar del olvido al que se condenaron las nociones de posibilidad, y en general todas las modalidades, nuestro conocimiento de ellas y toda nuestra lógica modal, son suficientes para explicar la noción de posibilidad. Luego, la definición de probabilidad ya no será más circular.

Para Niiniluoto, lo que nos enseña el análisis de las posibilidades a partir de las probabilidades es que ciertos principios metafísicos como el de plenitud son falsos. Nuestra propuesta en este trabajo consiste en analizar bajo una nueva luz las nociones de probabilidad a partir de los marcos de la lógica modal. La investigación sobre la posibilidad muestra que hay lugar para una definición de la probabilidad que no sea circular y sobre todo reivindica el potencial de la lógica para dar cuenta de hechos que van más haya del ámbito meramente extensional.

Bibliografía

ALISEDA, Atocha (2005) *Abductive Reasoning: Logical Investigations into Discovery and Explanation.* Synthese Library, Vol. 330. Springer-Kluwer Academic Publishers.

ARISTÓTELES (1982) *Tratados de lógica*. (I Tomos.), Editorial Gredos, Madrid, 390 pp.

______________ (1988) *Tratados de lógica*. (II Tomos.), Editorial Gredos, Madrid, 1995 , 460 pp.

Van BENTHEM, Johan (1988) *A manual of intensional logic;* 2ª edición, Ed. CSLI/Stanford, 135 pp.

CHIHARA, Charles S (1998) *The Worlds of Possibility: Modal realism and the semantics of modal logic*, Oxford, Great Britain, 342, pp.

COHEN, Jonathan (1989) *The Philosophy of Induction and Probability;* Claredon Press, Oxford, 215 pp.

DEUTSCH, Harry (1990) "Real possibility", en *Noûs*, vol. 24, No. 5 (Dec. 1990), pp. 751-755.

FINE, Terrence (1973) *Theories of Probability*, Academic Press, USA, 263 pp.

FRAENKEL, Abraham (1976) *Teoría de los conjuntos y lógica*, UNAM, 143 pp.

FREGE, Gottlob (1879) *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos.* 1972, UNAM-IIF, México, 270 pp.

GABBAY, D. M. *et alt* (2003) *Many-Dimensional modal logics: Theory and applications*, El Sevier, Studies In Logic and Foundations of Mathematics Vol. 148; The Netherlands, 737 pp.

GAMUT, L.T.F. (1991) *Logic, Language, and Meaning, volume II: Intensional Logic and Logic Grammar*. The University of Chicago Press, United States of America, 349 pp.

GARCÍA Álvarez Miguel Á. (2005) *Introducción a la teoría de la probabilidad.* Primer curso, México, FCE, 454 pp.

GILLIES, Donald (2000); *Philosophical Theories of probability*; Routledge, N. Y., 223 pp.

GNEDENKO, B.V.(1969) *The Theory of Probability,* translated from the Russian by George Yankovsky, Mir Publishers, Moscow (1976) , 392pp.

HAACK, Susan (1978) *Philosophy of Logics*, Cambridge University Press, U.S.A., 276 pp.

HACKING, Ian (1975) *El surgimiento de la probabilidad;* Gedisa; Barcelona, 258 pp.

_____________ (2001) *Probability and Inductive Logic*; Cambridge University Press, USA, 302 pp.

_____________(1975) "All kinds of possibility" en *The Philosophical review*, vol 84, No. 3 (Jul.) pp. 321-337

_____________(1967) "Possibility" en *The Philosophical review*, vol. 76, No. 2 (Abril) pp. 143-168.

HEIJENOORT, Jean van (editor)(1971) *From Frege to Gödel*; Harvard University Press, Cambridge, Mass., 664 pp.

HUGHES, G. E. y M. J. Cresswell (1968) *A new introduction to Modal Logic*; Routledge, Great Britain, 313 pp.

HUME, David (1739) *Tratado de la naturaleza humana,* Paidos B. Aires 1974, 407 pp.

JECH, Thomas (2002) *Set Theory*, 3ª edición, Springer , Berlin-N.Y., 769 pp.

KANT, Immanuel (1781) *Crítiça de la razón pura,* Alfaguara 1978, Madrid, 690 pp.

KOLMOGOROV, A. N.(1933) *Foundations of Probability*, Chelsea Publish, USA, 1956.

KNEALE, William and Martha Kneale (1962) *The development of Logic*, Oxford University Press.

KRIPKE, Saul (1985); *El nombrar y la necesidad.* UNAM-IIF, México, 180 pp.

LAPLACE, Pierre Simon (1814) *Ensayo sobre las probabilidades;* 1974, Editorial Espasa Calpe, Argentina, 225 pp.

ŁUKASIEWICZ, Jan (1970) *Estudios de Lógica y Filosofía*, Biblioteca de la Revista de Occidente, Madrid, 143 pp.

LEWIS, C. I. (1918) *A Survey of Simbolic Logic;* Berkeley, 406 pp.

LONG, Peter (1972) "Possibility and actuality" en *Mind*, *new series*, Vol. 81, No. 324 (Oct.) pp. 187-200.

MADDY, Penolope (1997) *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press.

MEINONG, Alexius (1981) *Teoría del objeto*. Cuadernos de Crítica #13, UNAM-IIF, México, 57 pp.

MILL, John Stuart (1897) *Resumen sintético del sistema de lógico*, Ed. de la Vda. De Bouret, Paris.

NIINILUOTO, Ilkka;(1988) "From possibility to probability: British discussions on modality in the nineteenth century", en Knuuttila, S.(ed.) *Modern Modalitys*, 275-309. Kluwer Academic Publishers.

von PLATO, Jan; (1994) *Creating Modern Probability*, Cambridge University Press, USA, 323 pp.

QUINE, W.V.O (1956) *From a Logical point of view: nine Logico-Philosophical essays*.(2ª edi.) 2001; Harvard University Press,Cambridge, Mass., 184 pp.

______________(1970) *Filosofía de la lógica*, 1973, Alianza Universidad, col. Filosofía y Pensamiento, Madrid, 187 pp.

REINDHARDT; Lloyd (1978); "Metaphisical possibility" en *Mind, new series*, Vol. 87, No.346 (abril), pp. 210-229.

RINALDI, F (1967); "Logical possibility" en *Philosophical and phenomenical research*; vol. 28, No. 1 (sep.) pp. 81-99.

RUSSELL, Bertrand (1960);" *Obras completas: ciencia y filosofía. 1917-1920*, tomo II. Aguilar, Madrid, 1398 pp.

SALMON, Wesley (1984); *The Foundations of Scientific Inference,* University of Pittsburgh Press.

SIMON, Hebert *et alt* (1981) 'Scientific Reasoning as Problem Solving'. *Synthese 47* pp. 1-27.

WHITEHEAD, Alfred North & Bertrand Russell (1910), *Principia Mathematica to *56*; Cambridge Mathematical Library 1999, United Kingdom, 410 pp.