



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**“SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS CON
REFINAMIENTO LOCAL EN POZOS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A :

ERICK RAFAEL MARTÍNEZ ANTÚNEZ



DIRECTOR DE TESIS:

DR. VÍCTOR HUGO ARANA ORTIZ

MÉXICO, DF.

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Rafael y Ma. Socorro por inculcarme la necesidad de “querer ser” y por brindarme, a pesar de todas las dificultades, todo lo necesario para poder haber llegado hasta este momento de mi vida. Este es sólo el primero de nuestros logros. Gracias.

A mis hermanas Madelein y Ayme. Les dedico este trabajo y espero que esto sirva de ejemplo para que logren alcanzar cualquier meta que se fijen en la vida. Las quiero mucho.

A mi abuela Ma. Luisa quien siempre estuvo al pie del cañón cuando más la necesité. No tengo como agradecerte.

A la familia Ruiz Antúnez y en especial a mi tío Alejandro[†] quienes siempre han sido un gran apoyo.

Al grupo de Simulación Numérica de Yacimientos de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Nacional Autónoma de México por el apoyo y facilidades brindadas para el desarrollo de este trabajo.

A mis amigos y a todos quienes de alguna forma han sido parte de mi vida y la han llenado de grandes experiencias.

*“¿Qué es la vida? Una ilusión, una sombra, un cuento, y el mayor bienestar es muy poco porque la vida es un sueño y los sueños sueños son”.
Pedro Calderón de la Barca*

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	¡Error! Marcador no definido.
RESUMEN	¡Error! Marcador no definido.
CONTENIDO	iii
Lista de figuras	v
Lista de tablas	vii

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	¡Error! Marcador no definido.
---------------------------------------	-------------------------------

CAPÍTULO 2. DEFINICIÓN Y ANÁLISIS DEL PROBLEMA. ...	¡Error! Marcador no definido.
--	-------------------------------

2.1 Refinamiento local.....	¡Error! Marcador no definido.
2.1.1 Tipos de refinamiento de una malla.	¡Error! Marcador no definido.
2.1.2 Geometría del refinamiento	¡Error! Marcador no definido.
2.1.3 Reglas para el uso del refinamiento local.....	¡Error! Marcador no definido.
2.2 Análisis del problema.	¡Error! Marcador no definido.
2.2.1 Flujo en la cercanía del pozo.	¡Error! Marcador no definido.
2.2.2 Representación de los pozos.....	¡Error! Marcador no definido.
2.2.3 Declaración del problema.....	¡Error! Marcador no definido.

CAPÍTULO 3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA	¡Error! Marcador no definido.
--	-------------------------------

3.1 Descripción del modelo físico.	¡Error! Marcador no definido.
3.2 Ecuaciones de flujo.....	¡Error! Marcador no definido.
3.2.1 Ecuación de Continuidad.....	¡Error! Marcador no definido.
3.2.2 Ecuación de Difusión.	¡Error! Marcador no definido.

CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA ..	¡Error! Marcador no definido.
---	-------------------------------

4.1 Aproximación numérica para la región del yacimiento.	¡Error! Marcador no definido.
4.1.1 Malla numérica.	¡Error! Marcador no definido.
4.1.2 Discretización de la ecuación de flujo.	¡Error! Marcador no definido.
4.2 Aproximación numérica para le región del pozo.	¡Error! Marcador no definido.
4.2.1 Malla numérica.	¡Error! Marcador no definido.
4.2.2 Discretización de la ecuación de flujo.	¡Error! Marcador no definido.
4.3 Acoplamiento de regiones.	¡Error! Marcador no definido.
4.4 Solución numérica del modelo.	¡Error! Marcador no definido.
4.4.1 Solución para la región del yacimiento.	¡Error! Marcador no definido.
4.4.1.1 Representación matricial de la solución.	¡Error! Marcador no definido.
4.4.2 Solución para la región del pozo.	¡Error! Marcador no definido.
4.4.2.1 Tratamiento del pozo.	¡Error! Marcador no definido.
4.4.2.2 Representación matricial de la solución.	¡Error! Marcador no definido.
4.4.3 Esquemas de solución.	¡Error! Marcador no definido.
4.4.3.1 Método directo.	¡Error! Marcador no definido.
4.4.3.2 Método indirecto (descomposición de dominio).	¡Error! Marcador no definido.
CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.	¡Error! Marcador no definido.
5.1 Caso de estudio 1.	¡Error! Marcador no definido.
5.2 Caso de estudio 2.	¡Error! Marcador no definido.
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.	¡Error! Marcador no definido.
Conclusiones.	¡Error! Marcador no definido.
Recomendaciones.	¡Error! Marcador no definido.
NOMENCLATURA	¡Error! Marcador no definido.
REFERENCIAS.	¡Error! Marcador no definido.
Apéndice A. Diagramas de flujo.	¡Error! Marcador no definido.

Método Directo.....	¡Error! Marcador no definido.
Método Indirecto	¡Error! Marcador no definido.
Apéndice B. Modelo de doble porosidad-una permeabilidad.	¡Error! Marcador no definido.
Solución numérica.	¡Error! Marcador no definido.
Solución analítica de Warren & Root.....	¡Error! Marcador no definido.
Apéndice C. Código del programa.....	¡Error! Marcador no definido.

Lista de figuras

	Pag.
Fig. 2.1	Refinamiento convencional. 6
Fig. 2.2	Refinamiento local. 7
Fig. 2.3	Refinamiento local dinámico. 7
Fig. 2.4	Geometría del refinamiento. 8
Fig. 2.5	Restricciones para el uso del refinamiento local. 10
Fig. 2.6	Representación del flujo en la cercanía al pozo. 12
Fig. 3.1	Representación del modelo físico. 16
Fig. 3.2	Medio poroso. 18
Fig. 3.3	Representación del volumen de control. 19
Fig. 3.4	Comportamiento de un fluido compresible. 24
Fig. 4.1	Malla cartesiana. 29
Fig. 4.2	Bloque en la región del yacimiento. 31
Fig. 4.3a	Convención de cálculo de coeficientes. 39
Fig. 4.3b	Sistema matriz-fractura. 40
Fig. 4.3c	Movimiento de fluidos en un Modelo de doble porosidad- una permeabilidad (idealización). 41
Fig. 4.3	Malla radial. 44
Fig. 4.4	Región del pozo. 51
Fig. 4.5	Bloque radial aparente. 53
Fig. 4.6	Bloque rectangular aparente. 54
Fig. 4.7	Transformación de los bloques irregulares para el cálculo de la transmisibilidad angular. 55
Fig. 4.8	Ejemplo de malla en la región del yacimiento. 57
Fig. 4.9	Ejemplo del sistema de ecuaciones en la región del yacimiento. 58
Fig. 4.10	Nodos en la cara del pozo. 59
Fig. 4.11	Gasto total compuesto por el flujo en la cara de cada bloque expuesto al pozo. 61
Fig. 4.12	Identificación de los nodos en la región del pozo. 61

Fig. 4.13	Sistema de ecuaciones en la región del pozo.	62
Fig. 4.14	Identificación de los bloques y estructura del sistema de ecuaciones cuando se desprecia el flujo angular en la región del pozo.	63
Fig. 4.15	Modelo completo.	64
Fig. 4.16	Matriz de coeficientes (dominio completo).	65
Fig. 4.17	Primer subdominio (región del pozo).	66
Fig. 4.18	Segundo subdominio (región del yacimiento).	67
Fig. 5.1	Modelo físico.	70
Fig. 5.2	Primera configuración del modelo.	71
Fig. 5.3	Esquema de distribución de presiones del caso 1 (región del pozo).	72
Fig. 5.4	Comparación para tres tipos de arreglo.	73
Fig. 5.5	Comparación para tres tipos de arreglo (escala semi-logarítmica).	73
Fig. 5.6	Efecto de frontera.	75
Fig. 5.7	Ajuste lineal.	76
Fig. 5.8	Segunda configuración del modelo.	77
Fig. 5.9	Comparativo de configuraciones.	78
Fig. 5.10	Representación (caso 2).	79
Fig. 5.11	Comparativo entre solución analítica y numérica.	81
Fig. 5.12	Esquema de distribución de presiones del caso 2 (región del pozo).	82

Lista de tablas

		Pag.
Tabla 1	Cálculo de la transmisibilidad en la región del yacimiento (coordenadas cartesianas).	50
Tabla 2	Cálculo de la transmisibilidad en la región del pozo (coordenadas cilíndricas).	50
Tabla 3	Características del yacimiento y del pozo Caso1.	70
Tabla 4	Características del yacimiento y del pozo Caso2.	80

RESUMEN

Los resultados de un estudio de simulación son de gran importancia para la toma de decisiones. En un escenario de explotación de un yacimiento a largo plazo, un dato importante en la elaboración de los análisis económicos es el pronóstico de los gastos de producción esto es, gastos de aceite y gas. Estos gastos dependen directamente de las caídas de presión entre la formación y los pozos. Para yacimientos naturalmente fracturados donde la permeabilidad del medio fracturado es normalmente grande, es muy importante determinar con mayor aproximación las caídas de presión que en el caso de yacimientos no fracturados.

En la mayoría de los métodos para modelar un pozo en coordenadas cartesianas se consideran la presión media del bloque donde se localiza el pozo y se propone ya sea el gasto o la presión de fondo fluyendo. Además, la presión dentro del bloque varía dependiendo del tamaño de la celda. Una forma de tratar este problema es mediante el refinamiento local en la celda que contiene el pozo, de tal manera que en su vecindad del pozo sea solucionada con una malla radial y en el resto del dominio con una malla cartesiana.

El objetivo de este trabajo es retomar el método de refinamiento híbrido y aplicarlo a un simulador numérico para yacimientos naturalmente fracturados. El análisis se realiza en una sola fase y tres dimensiones; su extensión a flujo multifásico es relativamente simple. En este método de coordenadas híbrido radiales-cartesianas el dominio físico del yacimiento se divide en dos tipos de regiones, en las cuales se deben de desarrollar las ecuaciones de flujo correspondientes a cada una de estas: región del pozo (radial) y región del yacimiento (cartesiana).

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: primero se muestra una breve introducción, seguido de la explicación de conceptos básicos de refinamiento local así como el análisis y definición del problema. En el capítulo tres y cuatro se desarrollan las expresiones matemáticas y numéricas así como la solución de estas. En el quinto capítulo se muestran los resultados de un simulador programado bajo el esquema de solución planteado y su validación. Finalmente se muestran las conclusiones y recomendaciones.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.

La necesidad de reproducir cualquier fenómeno físico dentro de la ingeniería ha llevado a desarrollar diferentes modelos, tanto físicos como matemáticos, que los representen lo mas fielmente posible. La Ingeniería Petrolera no es la excepción ya que dentro de esta existen varias especialidades que tratan con dicha necesidad, siendo la Simulación Numérica de Yacimientos una de las más sobresalientes.

La Simulación Numérica de Yacimientos puede ser definida como una herramienta que permite al ingeniero petrolero, a través de modelos matemáticos, reproducir y predecir el comportamiento del yacimiento sometido a cualquier esquema de explotación, ayudando a la toma de decisiones. Es decir, esta herramienta permite obtener el comportamiento virtual del yacimiento dadas ciertas condiciones y ante cualquier alteración que sufra el medio en el que este se encuentra, siendo esto su gran virtud, ya que cualquier error que en este se cometa será éste también sólo un error virtual.

Se debe tener en cuenta que el modelo utilizado para realizar la simulación debe adaptarse lo mas fielmente a la realidad, ya que si no se cumple dicha condición, los resultados que se obtuviesen pueden perder validez o utilidad; es decir, los resultados pueden ser solo basura.

Odeh A. S. (1969)⁽¹²⁾ propone una metodología o procedimiento para realizar un estudio de simulación: Elegir el tipo de simulador o modelo a emplear; Seleccionar la malla de simulación; Especificar las propiedades del sistema roca fluidos; Obtener el comportamiento del yacimiento simulado con la información disponible; Validar los resultados, Ajuste de historia y Predicción.

Es importante mencionar que cada estudio de simulación es único, por lo que algún paso de los citados anteriormente puede cobrar más importancia que el resto de los otros, es decir, no es lo mismo realizar la simulación de un yacimiento anticlinal que se encuentre naturalmente fracturado, en el cual la definición del modelo geológico resulta sobresaliente

a los otros pasos, que la simulación de un yacimiento cuyo diagrama de fases corresponda a un yacimiento de gas y condensado, en donde la especificación de las propiedades y comportamiento de los fluidos resulta de vital importancia

Hoy en día es difícil pensar en un estudio de simulación que no haya sido desarrollado a través de la utilización de computadoras muy poderosas. Dada esta condición es posible ahora realizar estudios cada vez más grandes y más complejos que en décadas pasadas; es decir, ahora es posible representar de manera mas real casi cualquier fenómeno que ocurre en el yacimiento, aunque cabe decir que esta gran capacidad no sólo es debido al uso de grandes computadores sino de también al desarrollo e implantación de técnicas matemáticas mas complejas. Sin embargo, debemos tomar en cuenta que la representación de dichos fenómenos estarán en función también de la cantidad y calidad de la información disponible y no sólo de los recursos computacionales.

Como se verá mas adelante, en la Simulación Numérica de Yacimientos intervienen ecuaciones fundamentales para reproducir el flujo de fluidos dentro del espacio poroso; sin embargo, la utilización y combinación de estas produce modelos matemáticos complejos, a los cuales se tendrá la necesidad de llevarlos de un dominio continuo a un dominio discreto.

La discretización de dichas ecuaciones de flujo genera modelos numéricos (que generalmente se encuentran en coordenadas cartesianas cuando se realizan estudios de simulación para el yacimiento completo) los cuales, para esta tesis, pueden proporcionar valores de presión en cada bloque y donde además los pozos son representados comúnmente sólo mediante un término fuente/sumidero; es decir, no son representados como una condición de frontera. Este tratamiento de los pozos puede tener una gran repercusión en los resultados que se obtengan, ya que expresiones desarrolladas (bajo el mismo sistema coordinado) para obtener parámetros importantes no consideran grandes cambios de presión en la cercanía al pozo. Por ejemplo en modelos de dos o tres dimensiones, la dimensión de un bloque de malla puede ser 100 o 1000 veces más grande que el diámetro del pozo, y hacer bloques del tamaño del diámetro del pozo resulta impráctico. **Peaceman (1977,1987)**^{(13) (14)} fue el primero en desarrollar una expresión para

obtener la presión de fondo del pozo utilizando la presión de bloque, tanto para bloques cuadrados como rectangulares. Por otra parte, **Williamson y Chappellear (1979)**⁽²²⁾ desarrollaron otras formas de tratamiento del pozo para una variedad de circunstancias y escenarios. Sin embargo, las ecuaciones o modelos analíticos tienen ciertas limitaciones, ya que no abarcan una generalidad del comportamiento del flujo hacia el pozo; es decir, contemplan flujo en una sola fase, medios homogéneos, etc. Por ejemplo, estas ecuaciones no son de gran ayuda en yacimientos que se encuentren naturalmente fracturados, debido a que éstas no contemplan las características del medio como son la alta permeabilidad y baja porosidad de las fracturas y a su vez la baja permeabilidad y alta porosidad de la matriz en relación con estas, siendo estos yacimientos los que contienen una gran parte de la reserva de aceite en nuestro país.

Por otra parte, algunos otros autores han llevado este problema a una solución un poco más robusta. La solución que autores como **Akbar (1974)**⁽¹⁾ y **Mrosovsky (1974)**⁽¹¹⁾ desarrollaron mallas radiales o cilíndricas con mallas rectangulares; sin embargo, **Pedrosa y Aziz (1984,1986)**⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾ proponen una aproximación más elaborada y completa, la cual es tomada como referencia para el desarrollo de esta tesis.

Además existe el problema de que el uso de coordenadas cartesianas puede modelar el flujo en distancias lejanas al pozo; sin embargo, no permite reproducir el movimiento real de los fluidos en la cercanía a este, el cual casi siempre resulta radial.

Las dos situaciones anteriores sugieren el uso de la técnica de refinamiento local de una malla. Esta técnica es ampliamente usada para reproducir en un gran nivel de detalle los cambios bruscos como pueden ser de temperatura, presión, saturación, etc. sólo en las zonas donde es necesario; sin embargo, la utilización de esta técnica requiere métodos o algoritmos más complejos para resolver de manera eficiente problemas en los que se implemente esta técnica.

Como se vio anteriormente, varios autores han incursionado en la combinación de sistemas coordenados para representar a los pozos. Entendiendo lo anterior, es fácil ver que si es

necesario aplicar la técnica del refinamiento local, esta debe tratarse de refinamiento local híbrido. **S. Ghosh (1998)**⁽⁸⁾ muestra varias ventajas dado el uso del refinamiento local siendo una de las principales la excelente manera de representar la frontera física real que representa el pozo en el yacimiento, además de que el error de los resultados obtenidos disminuye ya que el flujo, en prácticamente todo el yacimiento, es reproducido conforme a lo que puede suceder en la realidad. Sin embargo, también muestra algunas desventajas con respecto a los modelos en los que se emplean solo mallas rectangulares (coordenadas cartesianas) los cuales, como se verá mas adelante, se refieren a complicaciones numéricas y computacionales.

El objetivo de esta tesis es mostrar y aplicar un sistema de coordenadas híbrido en un simulador numérico de aceite negro a través de la técnica de refinamiento local, el cual permitirá solucionar las dos cuestiones mencionadas anteriormente: la representación y tratamiento del pozo y el flujo en la cercanía a éste, así como el comportamiento del yacimiento en toda su extensión.

CAPÍTULO 2. DEFINICIÓN Y ANÁLISIS DEL PROBLEMA.

Para poder comenzar con el entendimiento completo del problema es necesario primero definir y comprender que es el refinamiento local de una malla así como las características y aplicaciones de éste, poniendo especial atención el refinamiento local híbrido ya que es el punto de mayor interés para el desarrollo de la tesis.

2.1 Refinamiento local.

En ocasiones en la simulación numérica de yacimientos es necesario modelar y representar lo mas fielmente a la realidad no solo al yacimiento, sino también a los pozos y al mismo flujo o movimiento de los fluidos dentro de este y así obtener resultados mas precisos, por lo que es indispensable modificar la malla en ciertas regiones, por ejemplo, regiones cercanas a los pozos.

2.1.1 Tipos de refinamiento de una malla.

Una malla, para la simulación de yacimientos, corresponde a una división del yacimiento en diferentes partes o bloques, de los cuales cada uno poseerá una geometría propia así como propiedades de la roca (porosidad, permeabilidad, etc.) y de los fluidos que esta contenga. Las mallas que son mas comúnmente usadas en la simulación numérica de yacimientos son las mallas cartesianas ya que estas son fáciles de generar así como de manipular bajo un esquema de diferencias finitas.

Una vez que la malla ha sido generada es posible seleccionar alguna región o bloque para que este a su vez sea subdividido en otros, ocasionando que se generen zonas mas refinadas, es decir, los bloques en estas regiones poseerán un tamaño menor en comparación con los otros bloques existentes que no fueron subdivididos.

Dependiendo de cómo sea dicha subdivisión o refinamiento las mallas pueden ser clasificadas como:

Malla refinada convencionalmente. En este caso se ha refinado la zona de interés, sin embargo, la subdivisión o refinamiento se extiende hasta las fronteras del yacimiento (**Fig. 2.1**) ocasionando que en zonas sin importancia se generen bloques extras que no son tan útiles y que en ocasiones solo ocasionan el gasto innecesario de recursos computacionales en el momento de la simulación.

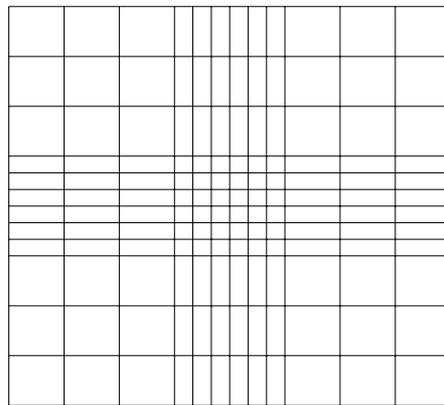


Fig. 2.1 Refinamiento convencional.

Malla con refinamiento local. En una malla como esta el refinamiento se logra solo en la zona de interés y no se extiende hasta las fronteras (**Fig. 2.2**), con lo que el número de bloques se reduce considerablemente.

El objetivo de utilizar el refinamiento local es el de obtener mayor precisión en la zona de interés con el menor número de bloques posible. Esto puede representar una ventaja ya que con este modelado el costo de los recursos computacionales es mucho menor, sin embargo, la programación implica más esfuerzo y tiempo.

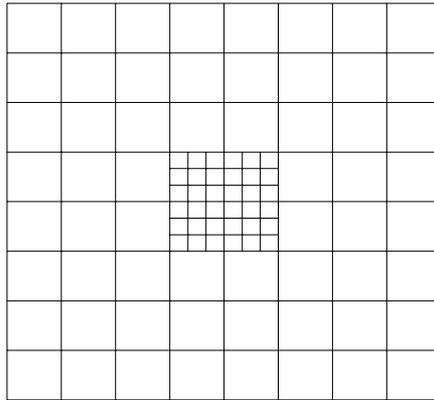


Fig. 2.2 Refinamiento local.

Por otra parte existen dos tipos de refinamiento local:

Si las regiones localmente refinadas cambian con el tiempo, se tratará de un refinamiento local dinámico (**Fig. 2.3**), por otra parte, si no cambia entonces será un refinamiento local estático.

El refinamiento dinámico es usado cuando las zonas con altos gradientes de presión, temperatura o saturaciones, no son conocidos por ejemplo en problemas de inyección de fluidos al yacimiento.

Por otra parte si lo que se desea es modelar conificación de agua o gas, fallas, fracturas o zonas heterogéneas lo recomendable es que se utilice un refinamiento estático.

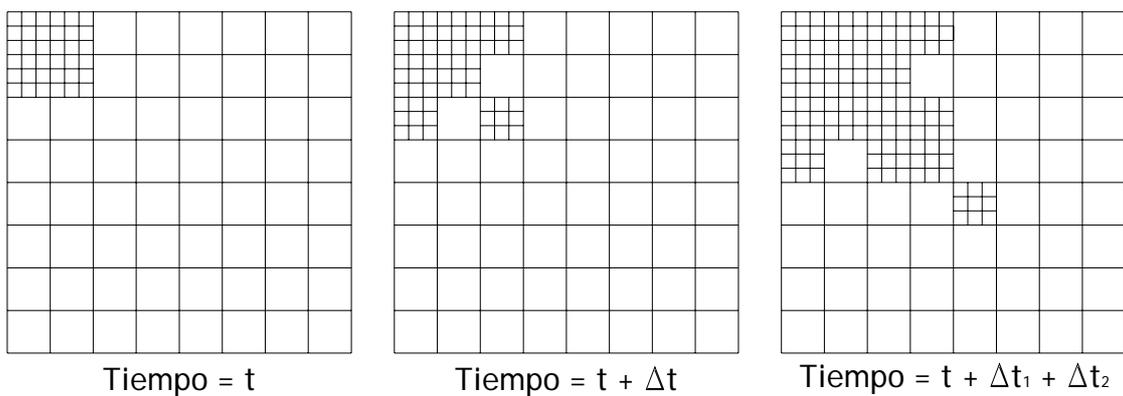


Fig. 2.3 Refinamiento local dinámico.

2.1.2 Geometría del refinamiento

Dependiendo del sistema de coordenadas empleado se pueden tener dos geometrías de refinamiento:

En un refinamiento local de coordenadas cartesianas en ambas regiones (la que ha sido refinada y la que no ha sido refinada) poseen el mismo sistema de coordenadas.

En un refinamiento local híbrido, la región refinada localmente tendrá un sistema de coordenadas curvilíneas (radial o elíptico) mientras que la otra región permanecerá con coordenadas cartesianas como se muestran en la **fig. 2.4**.

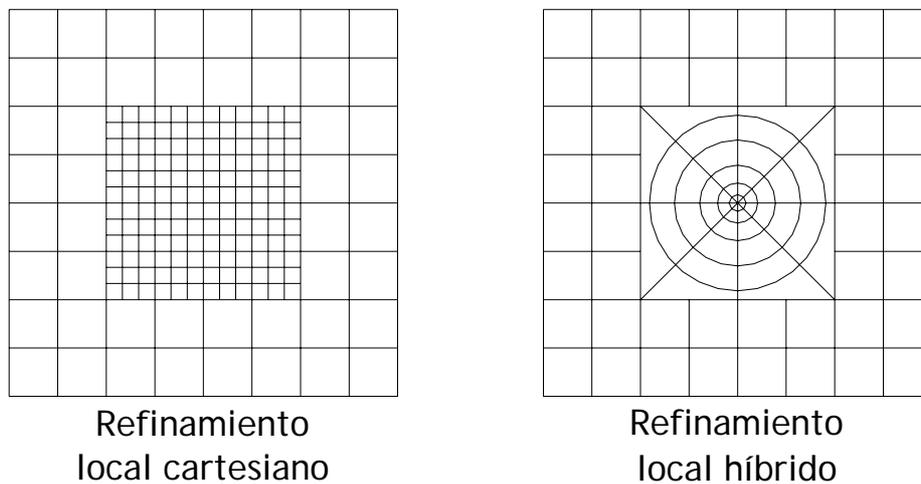


Fig. 2.4 Geometría del refinamiento.

Como se mencionó anteriormente, a veces es necesario modelar o reproducir el movimiento o flujo de los fluidos en el yacimiento por lo que el refinamiento híbrido posee algunas ventajas sobre el refinamiento cartesiano, por ejemplo, en la mayoría de los casos el flujo cercano al pozo es prácticamente radial y el uso de un refinamiento cartesiano no reproduciría el movimiento de los fluidos de una manera real por lo que un refinamiento con coordenadas elípticas o radiales resultaría mejor. Esta es solo una ventaja y existen otras mas, pero la discusión y análisis de estas se realizaran mas adelante.

Es importante también tomar en cuenta que el refinamiento se puede realizar en cualquier dirección horizontal o vertical (x, y ó z). Sin embargo es necesario tener cuidado en que zonas refinar y cómo refinar, ya que un refinamiento en dirección horizontal es relativamente fácil de implantar pero en un caso en el que el efecto gravitacional juegue un papel importante, por ejemplo cuando se trate de un yacimiento inclinado o que el yacimiento posea pozos horizontales, a veces se requiere de un tratamiento especial.

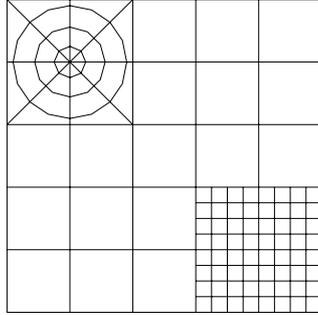
2.1.3 Reglas para el uso del refinamiento local.

De acuerdo con **Correa N. E. (1991)**⁽⁵⁾ antes de implementar la técnica de refinamiento local en cualquier estudio es necesario primero establecer reglas o condiciones bajo las cuales podrá funcionar esta.

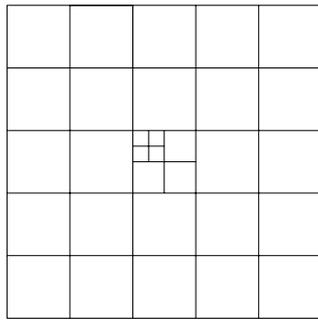
Para el desarrollo de la tesis se han adoptado y establecido las siguientes restricciones, explicadas también en la **fig. 2.5**:

- El refinamiento local será estático, es decir, permanecerá solo en la región seleccionada al inicio.
- Las regiones localmente refinadas son paralelepípedos y pueden tener cualquier número de bloques dentro de esta (**Fig. 2.5 a**).
- Solo puede existir un solo nivel de refinación, es decir, que una zona refinada previamente no podrá contener una nueva zona refinada dentro de si mismo. (**Fig. 2.5 b**).
- Las regiones localmente refinadas deben de estar completamente acopladas a la región contigua, es decir, que un bloque que se encuentre en los límites de la zona refinada solo puede estar conectado a un sólo bloque de la otra región, y en el caso del refinamiento local híbrido un solo bloque de la región no refinada puede estar conectado a un solo bloque de la región refinada; en el caso del refinamiento local

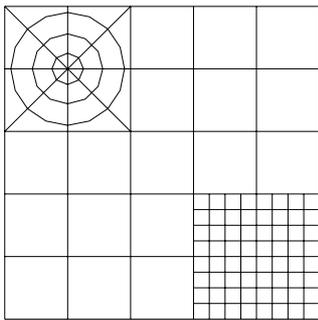
cartesiano un bloque de la región no refinada puede estar conectado a cualquier número de bloques de la región refinada (**Fig. 2.5 c-d**).



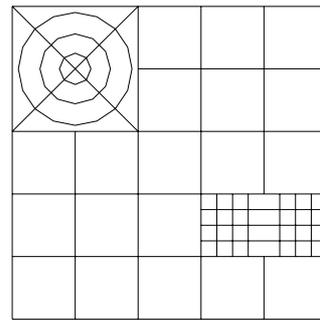
(a)



(b) No permitido



(c) Permitido



(d) No permitido

Fig. 2.5 Restricciones para el uso del refinamiento local.

2.2 Análisis del problema.

Como se ha mencionado anteriormente en ocasiones existe la necesidad de representar adecuadamente cualquier fenómeno físico y la simulación numérica de yacimientos no es la excepción.

Tradicionalmente la mayoría de los estudios de simulación de yacimientos se realizan basados en mallas con una geometría cartesiana, es decir, los bloques resultan cuadrados o rectángulos. Sin embargo el utilizar una malla de este tipo provoca ciertas limitaciones de las cuales, las dos más notables son:

1. La geometría del flujo se considera lineal en todo el yacimiento, lo cual no es cierto, ya que en la cercanía a los pozos se presenta un flujo netamente radial lo cual puede provocar ciertos errores. Además, este tipo de malla no permite obtener los cambios bruscos de presión o saturación en la vecindad del pozo.
2. Los pozos no son representados conforme a la realidad, es decir como se verá posteriormente, los pozos son representados solo en una ec. por un término fuente o sumidero y no como una frontera física del yacimiento.

2.2.1 Flujo en la cercanía del pozo.

Como se mencionó en el primer punto el flujo en la cercanía a los pozos es radial por lo que el uso de una malla cartesiana no representa el movimiento de los fluidos hacia el pozo de una manera real, ya que una malla de este tipo necesariamente reproduce un flujo lineal y por lo tanto, celdas que no se encuentren en dirección perpendicular a la celda en la cual está contenido el pozo no estarán siendo influenciadas por dicho bloque, siendo esto un error ya que si se localizan dichos puntos en un mapa real se observaría que sí se encuentran bajo la influencia del pozo.

Lo anterior se puede entender mejor en la **fig. 2.6**:

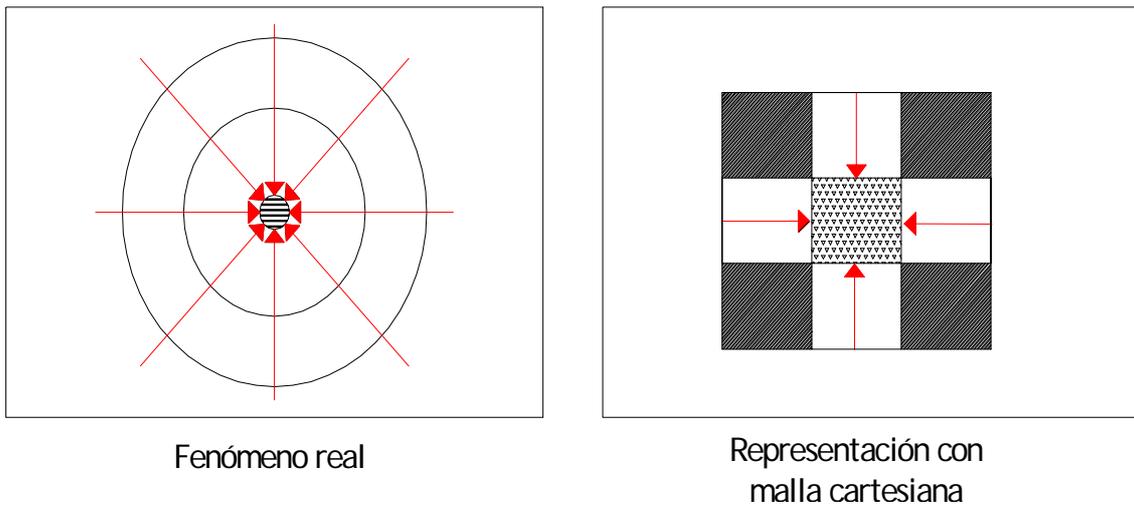


Fig. 2.6 Representación del flujo en la cercanía al pozo.

En la **fig. 2.6**, del lado izquierdo se tiene el flujo radial (representado por las líneas discontinuas) en la cercanía al pozo, y por otra parte, del lado derecho se puede ver de manera mas clara lo explicado en el párrafo anterior: en el bloque central se encuentra el pozo y las líneas rojas el flujo hacia este. Se puede observar que hay bloques (sombreados) que están cercanos al bloque que contiene al pozo, sin embargo no existe flujo de este hacia el pozo. Por otra parte la presión que se obtiene en este bloque no es la misma a la presión de fondo del pozo, es decir, $\bar{P}_{bloque} \neq P_{wf}$.

2.2.2 Representación de los pozos.

Se ha visto que en una malla cartesiana hay problemas para representar el flujo hacia el pozo pero también existe el problema de representar al pozo.

Si se analiza el problema desde una perspectiva física el pozo representa una frontera real para el yacimiento, es decir, en el punto en el que el o los fluidos que estaban en el yacimiento atraviesan la cara del pozo ya no existe mas yacimiento, por lo que no existe mas espacio poroso y es donde nuestros modelos matemáticos y numéricos dejan de funcionar. En pocas palabras el pozo es un simple hueco que no es parte del yacimiento y por lo tanto representa un límite físico para él.

Sin embargo, aunque el pozo no sea representado mas que por un termino fuente en los modelos matemático o numéricos, algunos autores han desarrollado varias técnicas o formulaciones para obtener parámetros que de primera mano no es posible o no es tan fácil obtener en un sistema de coordenadas cartesianas.

Un ejemplo de lo anterior es la obtención de la presión de fondo fluyendo que es un parámetro de gran importancia para el análisis del comportamiento de un yacimiento. Es decir, en un sistema de coordenadas cartesianas las dimensiones de los bloques que puedan ser generados pueden llegar a ser varias decenas de veces mas grandes que las dimensiones del que pueda llegar a tener el diámetro de un pozo, por lo tanto la presión en el bloque en el que se haya ubicado al pozo es diferente a la presión de este.

Peaceman (1977)⁽¹³⁾ desarrolló un modelo en el que se puede calcular una distancia o radio equivalente a la cual la presión obtenida del bloque donde se ubicaba al pozo es la misma a la presión del pozo (p_{wf}).

Para un yacimiento homogéneo el radio equivalente es:

$$r_o = 0.14\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \quad (2.1)$$

y la presión del pozo o sea la presión de fondo fluyendo es:

$$p_{wf} = p_b - \frac{q\mu}{2kh\pi} \ln\left(\frac{r_o}{r_w}\right) \quad (2.2)$$

Las **ecs. 2.1** y **2.2** son solo una forma de poder calcular la presión de fondo, sin en cambio, estas pueden variar si la geometría de las celdas no es un cuadrado, o si el yacimiento no es homogéneo. Además, solo resulta una aproximación, ya que al haber sido desarrollada en coordenadas cartesianas, no toma en cuenta los grandes cambios de presión en la vecindad del pozo.

Por otra parte también cabe mencionar que el modelo anterior no es único, ya que ha habido otros autores que han desarrollado sus propios modelos que funcionan bajo ciertas condiciones y restricciones.

Todo lo presentado anteriormente solo sirve como un ejemplo para ver cómo es que se da el tratamiento o representación de los pozos en un sistema de coordenadas cartesianas sin que esto sea el tema central de la tesis.

2.2.3 Declaración del problema.

Habiendo comprendido todo lo anterior se puede establecer las premisas sobre las cuales se desarrollará la tesis, entendiendo que los problemas que se presentan esencialmente son el del tratamiento del pozo y el movimiento de los fluidos hacia este.

Concretando, para poder resolver el problema se necesita:

- Generar una malla híbrida, es decir, una malla que posea un refinamiento local radial en la cercanía a los pozos para darles un mejor tratamiento a estos y una malla cartesiana para representar al resto del yacimiento.
- Ecuaciones que describan al flujo o movimiento de los fluidos en coordenada cartesianas en zonas alejadas del pozo y en coordenadas radiales para el caso en que el fluido se encuentre en la cercanía a este.

Un acoplamiento adecuado entre las dos regiones establecidas, es decir, un tratamiento especial en la frontera entre las dos regiones radial y cartesiana.

CAPÍTULO 3. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA.

Como se trató en el capítulo anterior, es necesario obtener un modelo que represente o reproduzca el movimiento de los fluidos dentro del yacimiento teniendo en cuenta la geometría de flujo que pueda presentarse en cualquier parte o región de este.

Sin embargo para realizar lo anterior es necesario primero definir las características físicas sobre las cuales se basará dicho modelo.

3.1 Descripción del modelo físico.

La configuración de arreglo híbrido consiste en dividir a todo el yacimiento en dos diferentes regiones como se muestra en la **fig. 3.1**. Esas regiones son:

- **Región del pozo:** Esta abarca desde el pozo hasta una distancia arbitraria a partir de este y un sistema de coordenadas cilíndricas o radiales, según sea el caso, es usado, permitiendo, como se ha mencionado con anterioridad, un mejor tratamiento en la representación del pozo y del flujo cercano a este. Otro aspecto importante de la geometría de esta región es que, como se verá posteriormente, permite una incorporación más real de las condiciones de frontera en el yacimiento.
- **Región del yacimiento:** Esta se localiza más alejada de los pozos y empieza en los límites entre esta región y la región del pozo. En esta región se puede considerar que las líneas de flujo son líneas rectas por lo que la aplicación de una malla con un sistema de coordenadas cartesianas podría resultar más apropiado.

El acoplamiento de estas dos regiones con geometrías diferentes producen bloques con una geometría irregular, sin embargo, el tratamiento de estos se hará posteriormente.

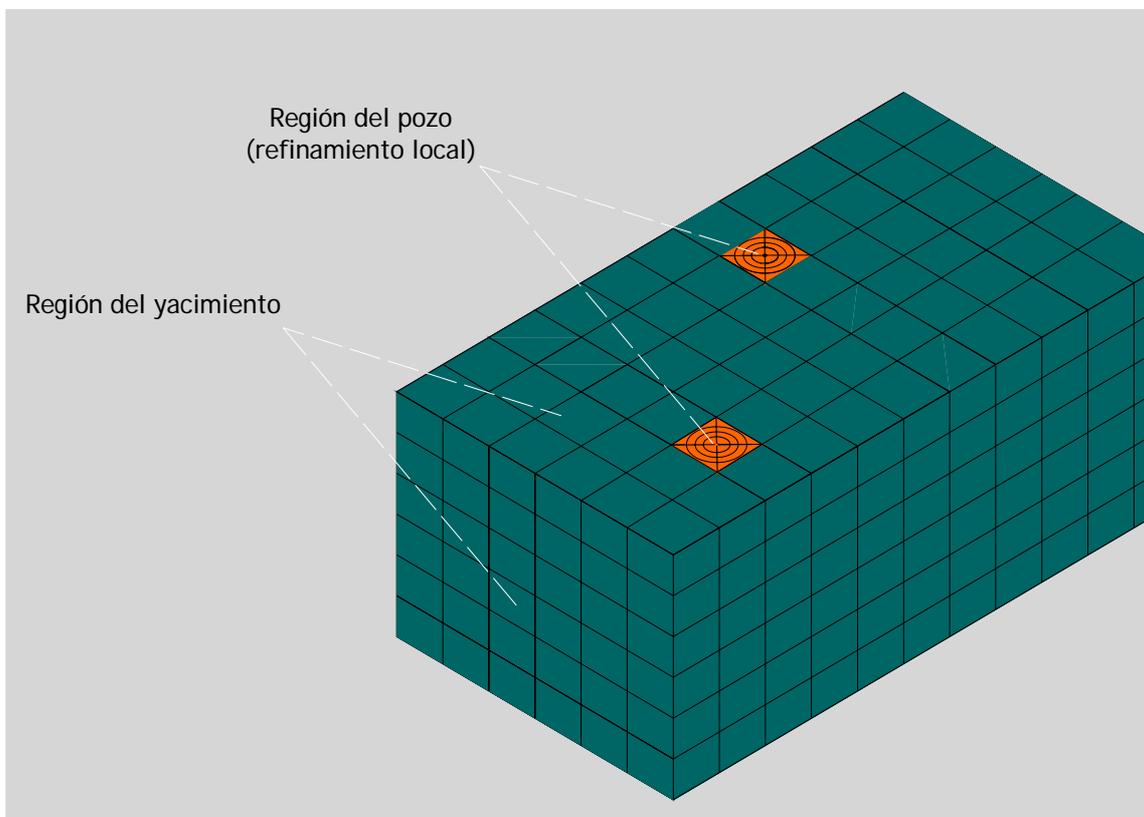


Fig. 3.1 Representación del modelo físico.

3.2 Ecuaciones de flujo.

En las diferentes ramas de la ingeniería en las que se involucre la mecánica fluidos se han desarrollado ecuaciones que permitan representar el comportamiento de estos en diferentes fenómenos físicos. Sin embargo son pocas las ecuaciones que puedan tener un carácter de general por lo que el uso de la mayoría de estas solo están restringidas para ciertas condiciones.

En la ingeniería petrolera y en específico en la ingeniería de yacimientos se tiene la necesidad de desarrollar ecuaciones que reproduzcan el comportamiento de los fluidos en el

espacio poroso bajo cualquier condición y como se ha visto anteriormente para el problema se necesita una ecuación de flujo para las dos regiones con geometrías diferentes generadas por el uso de un refinamiento local híbrido.

3.2.1 Ecuación de Continuidad.

Una de las ecuaciones más fundamentales utilizadas para modelar el comportamiento de un fluido es la de la Conservación de Masa (Ecuación de continuidad).

Esta ecuación establece que para un volumen de control definido la masa que se acumula en un intervalo de tiempo determinado es igual a la masa que entró al volumen de control menos la masa que salió del volumen de control en ese intervalo de tiempo. La demostración de dicha ecuación no es una parte esencial para el desarrollo de la tesis por lo que esta se omite.

La Ecuación de Continuidad expresada en su forma diferencial en coordenadas cartesianas es:

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (3.1)$$

Y en su forma integral:

$$\int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = -\int_v \frac{\partial\rho}{\partial t} \, dv \quad (3.2)$$

Como se puede apreciar las **ecs. 3.1** y **3.2** no representan una solución completa para nuestro problema, es decir, analícese la **fig. 3.2**

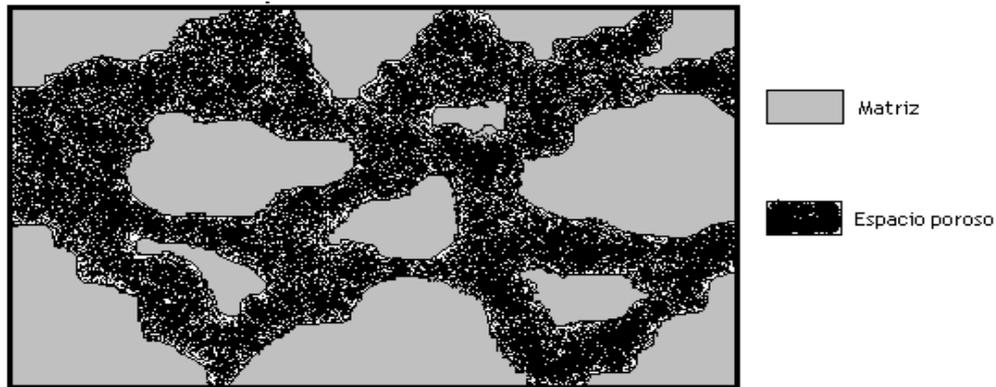


Fig. 3.2 Medio poroso.

La ecuación de flujo que nos ayude a resolver el problema debe contemplar que el movimiento de los fluidos se da en un medio poroso, por lo que la ecuación de continuidad mostrada anteriormente en sus dos formas no resulta una solución muy apropiada ya que:

1. La **ec. 3.1** (forma diferencial) nos exige conocer o tener una función en coordenadas cartesianas que nos permita establecer la trayectoria o posición del fluido en cualquier punto de nuestro medio poroso lo que en la realidad es prácticamente imposible.
2. La **ec. 3.2** (forma integral) tampoco es factible de utilizar ya que esta requiere un entendimiento preciso y completo de todo el espacio poroso, que también resulta imposible ya que este posee una geometría muy compleja e irregular.

Debido a las dos anteriores razones se debe obtener una ecuación la cual involucre de una forma más sencilla al medio poroso y sus características, además de las características del fluido, ya que el fenómeno que se desea reproducir involucra fluidos que son compresibles.

Por otra parte también se debe tener en cuenta que el movimiento de los fluidos en el yacimiento se origina principalmente por una diferencia de presión generada al poner o abrir a producción a los pozos, por lo que el modelo que se necesita también debe de involucrar el parámetro de la presión.

Con todo lo anterior es posible establecer entonces que se debe replantear la Ec. de Continuidad involucrando en ella ecuaciones que relacionen primero las propiedades de los fluidos por lo que una ecuación de estado resulta conveniente, y segundo que involucre el flujo de fluidos en un medio poroso con todo y sus características además del parámetro de la presión por lo que la Ley de Darcy (Ecuación de Momento) resulta también útil.

3.2.2 Ecuación de Difusión.

Como se mencionó anteriormente es necesario replantear la ecuación de continuidad ajustándola al movimiento en el medio poroso de una roca. Esta ecuación considerará el flujo de varias fases y en tres dimensiones (x, y, z) teniendo en cuenta que dichos fluidos se desplazaran bajo un flujo laminar en el medio poroso.

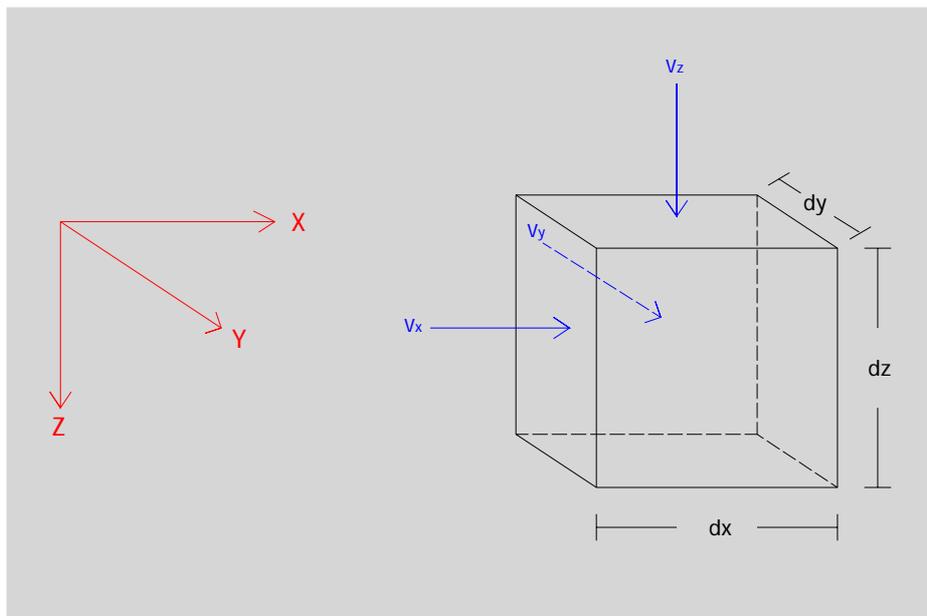


Fig. 3.3 Representación del volumen de control.

La **fig. 3.3** nos ayudará a replantear nuestra Ecuación de Continuidad.

Esta figura representa nuestro volumen de control donde V_x , V_y , V_z , son los componentes de la velocidad en las coordenadas x , y , z respectivamente,

Por una cara del volumen de control paralela al plano yz entra un fluido f de densidad ρ_f por lo que el gasto másico por unidad de área en esta cara está dado por:

$$(\bar{m}_f)_x = (\rho_f V)_x \quad (3.3)$$

Y el gasto másico saliendo por la otra cara paralela al plano yz es:

$$(\bar{m}_f)_{x+\Delta x} = (\rho_f V)_{x+\Delta x} \quad (3.4)$$

Ahora, el fluido f que se encuentra en los poros de nuestro volumen de control ocupa un volumen igual $S V_b \phi$, entonces la masa de correspondiente a este volumen es:

$$m_f = \rho_f S_f V_b \phi \quad (3.5)$$

Por lo tanto el cambio de la cantidad de masa de la fase o fluido f que exista en el volumen de control en un intervalo de tiempo será:

$$(\text{acumulación de masa})_f = \frac{[(S_f \rho_f \phi)_{t+\Delta t} - (S_f \rho_f \phi)_t] V_b}{\Delta t} \quad (3.6)$$

Ahora, estableciendo la “conservación de la masa” con las **ecs. 3.3, 3.5 y 3.6** de acuerdo con la definición de la Ecuación de Continuidad y manipulando el miembro izquierdo de la ecuación:

$$\frac{[(\bar{m}_f A)_x - (\bar{m}_f A)_{x+\Delta x}] \Delta x}{\Delta x} = \frac{[(S_f \rho_f \phi)_{t+\Delta t} - (S_f \rho_f \phi)_t] V_b}{\Delta t} \quad (3.7)$$

Considerando que A no cambia con la posición entonces:

$$(A)\Delta x = V_b \quad (3.8)$$

Sustituyendo las **ecs. 3.3, 3.4 y 3.8** en la **ec. 3.7**:

$$\frac{[(\rho_f V)_x - (\rho_f V)_{x+\Delta x}] V_b}{\Delta x} = \frac{[(S_f \rho_f \phi)_{t+\Delta t} - (S_f \rho_f \phi)_t] V_b}{\Delta t} \quad (3.9)$$

Reorganizando el miembro izquierdo de la ecuación anterior:

$$\frac{[(\rho_f V)_x - (\rho_f V)_{x+\Delta x}] V_b}{\Delta x} = - \frac{[(\rho_f V)_{x+\Delta x} + (\rho_f V)_x] V_b}{\Delta x} \quad (3.10)$$

Sustituyendo la **ec. 3.10** en la **ec. 3.9**, cancelando términos y realizando el límite de la ecuación cuando Δx y Δt tiende a cero se llega a:

$$\frac{\partial(\rho_f V)_x}{\partial x} = - \frac{\partial(S_f \rho_f \phi)}{\partial t} \quad (3.11)$$

Análogamente para las direcciones y y z se obtienen términos similares por lo que incorporándolos a la ecuación anterior:

$$\frac{\partial(\rho_f V)_x}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f V)_y}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f V)_z}{\partial z} = - \frac{\partial(S_f \rho_f \phi)}{\partial t} \quad (3.12)$$

Rescribiendo esta utilizando el operador nabla:

$$\nabla \cdot (\rho_f \vec{V}_f) = - \frac{\partial(S_f \rho_f \phi)}{\partial t} \quad (3.13)$$

La **ec. 3.13** es la **Ecuación de Continuidad** con los parámetros incorporados que son necesarios y si se analizan es fácil ver que puede ser adaptable a nuestro problema en cualquiera de las dos regiones con su respectiva geometría ya establecidas en el modelo físico (región del pozo y región del yacimiento) ya que el operador nabla nos permite utilizarla en cualquier sistema coordenado.

Para la región del yacimiento (sistema de coordenadas cartesianas):

$$\frac{\partial(\rho_f V)_x}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f V)_y}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f V)_z}{\partial z} = -\frac{\partial(S_f \rho_f \phi)}{\partial t} \quad (3.14)$$

Para la región del pozo (sistema de coordenadas cilíndricas)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_f V)_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho_f V)_\theta + \frac{\partial(\rho_f V)_z}{\partial z} = -\frac{\partial(S_f \rho_f \phi)}{\partial t} \quad (3.15)$$

Ahora, es necesario incorporar o combinar a la Ecuación. de Continuidad con otra que involucre las características petrofísicas del yacimiento además del parámetro de la presión siendo la **Ley de Darcy**, como ya se había mencionado, útil.

Dicha ley se expresa como:

$$\vec{V}_f = -\frac{kk_{rf}}{\mu_f} (\vec{\nabla} p_f - \gamma_f \vec{\nabla} D) \quad (3.16)$$

Considerando que el flujo en el yacimiento es un flujo laminar y sustituyendo la **ec. 3.16** en la **ec. 3.13** se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\rho_f kk_{rf}}{\mu_f} (\vec{\nabla} p_f - \gamma_f \vec{\nabla} D) \right) = -\frac{\partial(S_f \rho_f \phi)}{\partial t} \quad (3.17)$$

La **ec. 3.17** puede ser interpretada como una ecuación general que expresa el balance masa cuando se presenta el flujo multifásico a través de un medio poroso.

Como se estableció previamente es necesario involucrar en la **ec. 3.17** una ecuación de estado, ya que en el fenómeno de explotación de un yacimiento existen fluidos que son compresibles (aceite ó gas).

Puesto que el problema del comportamiento de las fases en el yacimiento no es parte del objetivo de la tesis sólo se considera involucrar una ecuación de estado la para fase líquida (aceite ó agua).

Se debe entender que para un fluido ligeramente compresible existe un relación entre las propiedades de este (densidad, volumen, etc.) con respecto a la presión. Para el caso del agua, debido a su naturaleza física, se puede considerar sus propiedades no cambian o sea, que se trata de un fluido incompresible, es decir:

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial p} = 0 \quad (3.18)$$

Para el caso del aceite, que a lo largo de todo el periodo de explotación de un yacimiento posee gas en solución provocando que se comporte como un fluido ligeramente compresible, es posible relacionarlo con el parámetro de la compresibilidad de un fluido:

$$c_f = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad (3.19)$$

o también:

$$c_f = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (3.20)$$

Cabe señalar que las ecuaciones anteriores funcionan solo si no existe un cambio en la composición del fluido, es decir, solo funcionan a presiones más altas que la presión de saturación (**fig. 3.4**).

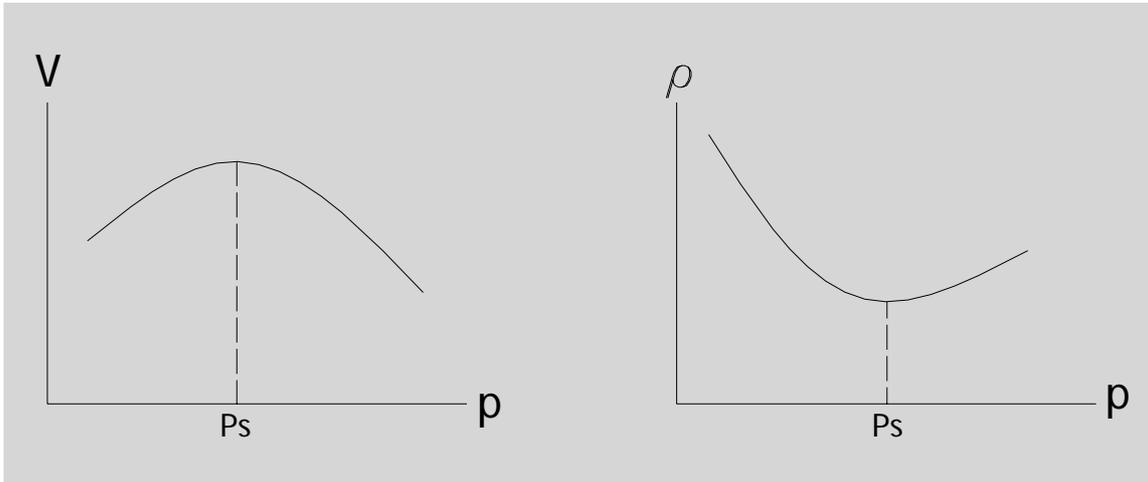


Fig. 3.4 Comportamiento de un fluido compresible.

Sin embargo, como se sabe, el espacio poroso también cambia o es función de la presión por lo que análogamente:

$$c_r = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)_T \quad (3.21)$$

También existe la compresibilidad total, la cual relaciona la compresibilidad de todos los elementos involucrados en el sistema roca fluidos la cual es:

$$c_t = c_r + c_f \quad (3.22)$$

Por último, regresando a la **ec. 3.17** si se considera flujo horizontal, en una sola dirección (x) y de una sola fase (líquida) se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k\rho_f}{\mu_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial(\phi\rho_f)}{\partial t} \quad (3.23)$$

Desarrollando la derivada en ambos miembros de la **ec. 3.23**:

$$\frac{k\rho_f}{\mu_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial\rho_f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = \phi \frac{\partial\rho_f}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (3.24)$$

Aplicando la regla de la cadena involucrando la variación de la presión:

$$\frac{k\rho_f}{\mu_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial\rho_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = \phi \frac{\partial\rho_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_f \frac{\partial\phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.25)$$

Agrupando y simplificando términos:

$$\frac{k\rho_f}{\mu_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial\rho_f}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 = \phi\rho_f \frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial\rho_f}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial p} \right) \quad (3.26)$$

Sustituyendo las **ecs. 3.20** y **3.21** en la **ec. 3.26**:

$$\frac{k\rho_f}{\mu_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial\rho_f}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 = \phi\rho_f \frac{\partial p}{\partial t} (c_f + c_r) \quad (3.27)$$

Debido a que los gradientes de presión en el yacimiento son muy pequeños en la **ec. 3.27** el término que está elevado al cuadrado puede ser considerado cero ya que resulta demasiado pequeño, así que simplificando y sustituyendo la **ec. 3.22** en **3.27**:

$$\frac{k\rho_f}{\mu_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \phi\rho_f c_i \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.28)$$

Realizando un desarrollo análogo en las dos direcciones restantes, simplificando y reordenando la ecuación anterior se llega a:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 p}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 p}{\partial^2 z} = \frac{\mu_f \phi c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.29)$$

La ecuación anterior se conoce como Ecuación de Difusión la cual reproduce el gradiente de presión (o transmisión de presión) en cualquier dirección al moverse o desplazarse un fluido a través de un medio poroso.

Nuevamente, analizando la **ec. 3.29** se observa que puede ser aplicada a la región del yacimiento en nuestro modelo físico del problema ya que fue desarrollada bajo el mismo sistema coordinado (x, y, z) , además de que resulta mas útil que la Ecuación de Continuidad vista con anterioridad ya que en esta ya se contempla el parámetro de la presión y las características petrofísicas de la roca así como de los fluidos.

Así también la ecuación anterior puede ser aplicada a la región del pozo del modelo, únicamente habría que transformarla coordenadas cilíndricas. Dicha transformación resulta en:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\mu_f \phi c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.30)$$

Ahora, aunque ya se poseen dos modelos matemáticos que pueden ser empleados en nuestras dos diferentes regiones el problema aun no ha terminado.

La **ecs. 3.29** y **3.30** son ecuaciones en derivadas parciales con una característica muy importante: son ecuaciones diferenciales muy complejas por lo que obtener soluciones analíticas de estas que representen el fenómeno de manera real y precisa no posible y como se verá mas adelante pueden convertirse hasta en un problema no lineal.

De estas ecuaciones existen soluciones analíticas que funcionan solo bajo ciertas restricciones (comportamiento de yacimiento infinito, flujo de una sola fase, etc.) por lo que su uso está muy restringido.

Debido a lo anterior es necesario el uso de algoritmos numéricos que permitan solucionar dichas ecuaciones, es decir, estas ecuaciones se deben llevar de su actual dominio continuo a un dominio discreto.

Existen varios métodos para discretizar una ecuación: Diferencias Finitas, Volumen Finito y Elemento Finito, sin embargo la solución a este problema se realizara más adelante en el capítulo cuatro.

CAPÍTULO 4. FORMULACIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA.

En el capítulo tres se obtuvo la ecuación de flujo (Ecuación de Difusión) para ambas regiones de nuestro problema donde esta ecuación resultó en derivadas parciales (con respecto a espacio y tiempo) y en la cual no era posible obtener una solución analítica que representará de manera real al fenómeno por lo que era necesario aplicar técnicas o algoritmos numéricos que permitieran un manejo más sencillo de esta así como su solución, y como bien se sabe los algoritmos numéricos funcionan sobre un dominio discreto.

Para el desarrollo de esta tesis, la discretización de la ecuación de flujo se hará mediante el método de Diferencias Finitas.

Este método consiste en, a partir de un truncamiento de la Serie de Taylor para aproximar las derivadas de una ecuación, generar valores de una función $f(a,b,\dots,z)$ en nodos de una malla que posee una geometría definida de acuerdo al dominio de la función (coordenadas cartesianas, esféricas o cilíndricas) y que cubre todo el dominio de dicha función. **Arana O. Víctor (1974)** El análisis y demostración de este método se omite ya que no es objetivo de la tesis.

Por otra parte, el hecho de obtener una solución en un dominio discreto exige formas más complejas de resolver el problema (que se tratarán más adelante) que el solo aplicar una simple ecuación o expresión analítica como en el caso de un dominio continuo.

4.1 Aproximación numérica para la región del yacimiento.

De manera similar a la obtención del modelo matemático obtenido en el capítulo anterior, es necesario plantear la solución numérica de acuerdo al sistema coordenado cartesiano elegido para esta región.

4.1.1 Malla numérica.

La malla cartesiana que se generará en esta región es, como ya se había mencionado, la más usada para los estudios de simulación ya que su implantación es relativamente sencilla.

Recordando, una malla es la subdivisión de una región en un determinado número de bloques, los cuales tienen una geometría definida y además contienen un nodo o punto de malla al cual se le asignan todas las propiedades características del bloque.

Existen dos tipos de malla en lo que a la posición de los nodos se refiere: malla de nodos distribuidos la cual permite un manejo más sencillo de las condiciones de frontera ya que en los bloques que se encuentran en la frontera los nodos pueden ser ubicados en los extremos de este; y malla de nodos centrados en la cual, como su nombre lo indica, los nodos se ubican exactamente en el centro del bloque. Para nuestro problema se utilizará la malla de nodos centrados ya que en la región del yacimiento no nos interesa obtener una solución en los límites o fronteras de esta.

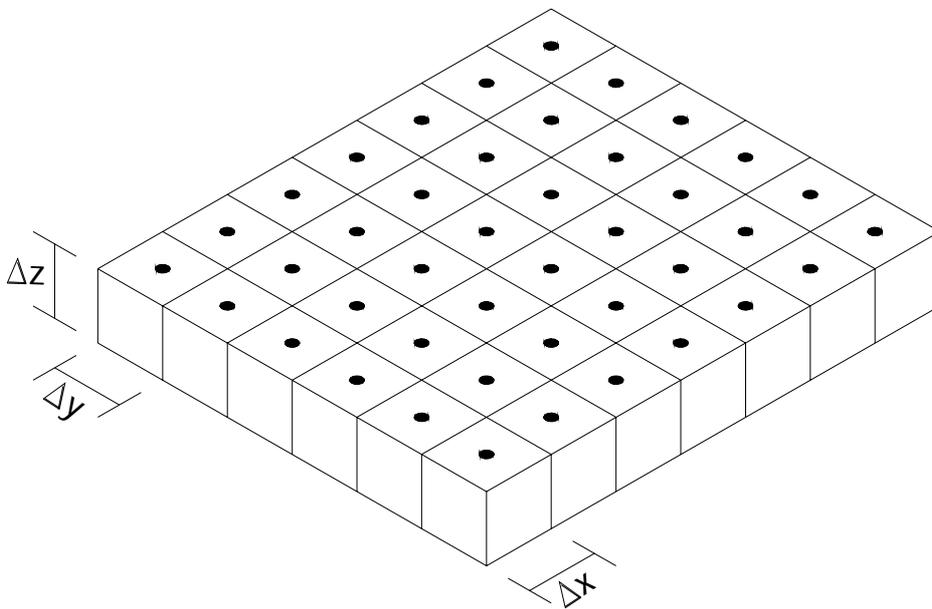


Fig. 4.1 Malla cartesiana.

De acuerdo con las **figs. 4.1** y **4.2** si la longitud en cada dirección es Lx , Ly y Lz , y el número de nodos en cada dirección son nx , ny y nz respectivamente, entonces;

El espaciamiento entre nodos y ancho del bloque en cada dirección es:

$$\Delta x_{i,j,k} = \frac{Lx}{nx} \quad (4.1a)$$

$$\Delta y_{i,j,k} = \frac{Ly}{ny} \quad (4.1b)$$

$$\Delta z_{i,j,k} = \frac{Lz}{nz} \quad (4.1c)$$

La posición del nodo en el bloque:

$$Pos_{i,j,k} = (x_i, y_j, z_k) \quad (4.2)$$

donde

$$x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x_{i,j,k} \quad (4.2a)$$

$$y_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta y_{i,j,k} \quad (4.2b)$$

$$z_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta z_{i,j,k} \quad (4.2c)$$

Los límites de cada bloque según la dirección:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = (i) \Delta x_{i,j,k} \quad (4.3a)$$

$$y_{j+\frac{1}{2}} = (j) \Delta y_{i,j,k} \quad (4.3b)$$

$$z_{k+\frac{1}{2}} = (k) \Delta z_{i,j,k} \quad (4.3c)$$

Y el volumen para cada bloque:

$$V_{r_{i,j,k}} = \Delta x_{i,j,k} (\Delta y_{i,j,k}) (\Delta z_{i,j,k}) \quad (4.4)$$

todo lo anterior para:

$$i = 1, 2, 3, \dots, nx$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, ny$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, nz$$

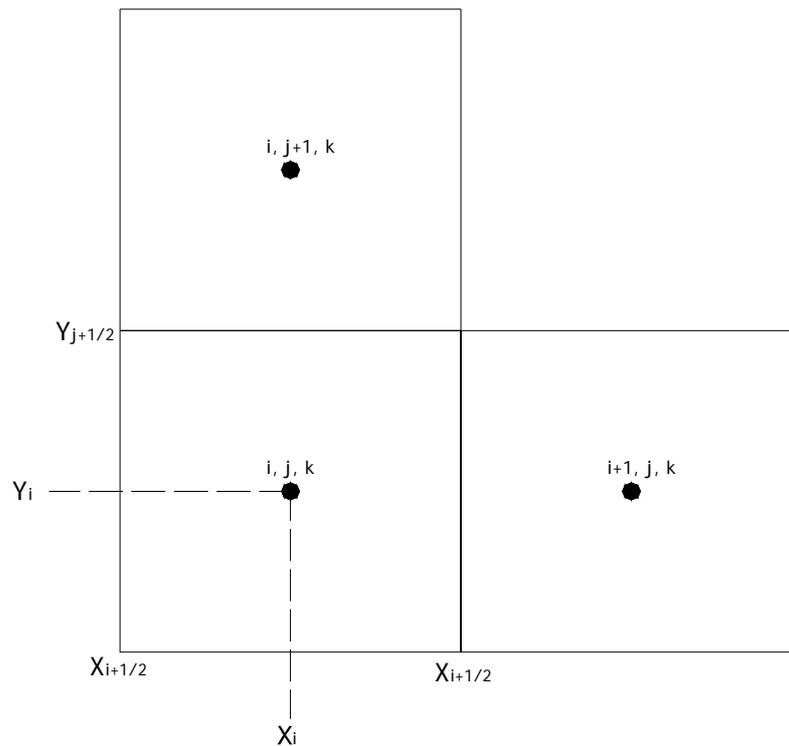


Fig. 4.2 Bloque en la región del yacimiento.

4.1.2 Discretización de la ecuación de flujo.

Previamente se había obtenido la Ecuación de Difusión para la región del yacimiento la cual, de acuerdo a nuestra definición del problema, necesariamente debía estar en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 p}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 (p + \gamma D)}{\partial^2 z} = \frac{\mu_f \phi c_i}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.5)$$

La ecuación anterior considera que las propiedades de la roca como de los fluidos no varían ni con la posición ni con el tiempo; sin embargo, si éstas son dependientes entonces, tomando como base la **ec. 3.23**, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial (p + \gamma D)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \quad (4.6)$$

donde:

$$B = \frac{\rho_{@cs}}{\rho} \quad (4.6a)$$

Según la **ec. 4.6** se debe aproximar una segunda derivada en el espacio y una primera derivada en el tiempo.

Para una sola dirección, expandiendo la Serie de Taylor de una función $f(x)$ en un punto $(x + \Delta x)$ en donde para el punto x la función f es conocida se tiene:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^n(x) \quad (4.7)$$

Truncando la **ec. 4.7** hasta el tercer termino y donde la función f será p la cual es nuestra función presión:

$$p_{i+1} = p_i + \frac{\Delta x}{1!} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)_i \quad (4.8)$$

Donde:

i se refiere a al punto x .

$i+1$ se refiere al punto $(x + \Delta x)$.

La **ec. 4.8** representa la expansión de la función p en un punto $(x + \Delta x)$ es decir fue expandida con una diferencia hacia delante. A este tipo de expansión se le llama *progresiva*.

Ahora si la función se expande de forma *regresiva*, es decir, ahora la función se expandirá en un punto $[x + (-\Delta x)]$:

$$p_{i-1} = p_i + \frac{-\Delta x}{1!} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_i + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right)_i \quad (4.9)$$

Restando la **ec. 4.9** a la **ec. 4.8** y despejando la primera derivada:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_i = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta x} \quad (4.12)$$

La ecuación anterior es la aproximación de la primera derivada de la función mediante *diferencias centrales*.

Si se aproxima la primera derivada utilizando diferencias centrales pero esta vez solo expandiendo en un $(\Delta x/2)$:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_i = \frac{p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} \quad (4.13)$$

Siguiendo el análisis en una sola dimensión, aplicando la **ec. 4.13** para la primera derivada en un punto (que para nosotros ese punto representa el nodo de un bloque en la malla) y expandiendo el *término de flujo* de la Ecuación de Difusión (miembro izquierdo de la **ec. 4.6**):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.14)$$

Aplicando nuevamente diferencias centrales para las derivadas en los puntos $i + 1/2$ y en $i - 1/2$, es decir, en los límites de la celda del bloque que contiene al nodo i , de acuerdo con la **ec. 4.13**:

$$\left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) \right) \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1}) \right) \quad (4.16)$$

Sustituyendo la **ec. 4.15** y **4.16** en la **ec. 4.14**:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) \right) - \frac{1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1}) \right) \right] \quad (4.17)$$

La ecuación anterior representa que el flujo que existe en las caras paralelas al plano yz del bloque que contiene al nodo i . Análogamente se aplica el mismo procedimiento para las demás direcciones.

Para la dirección y:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial y} \right)_j = \frac{1}{\Delta y_j} \left[\frac{1}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{j+\frac{1}{2}} (p_{j+1} - p_j) \right) - \frac{1}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{j-\frac{1}{2}} (p_j - p_{j-1}) \right) \right] \quad (4.18)$$

Para la dirección z:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial \{p + \gamma \mathcal{D}\}}{\partial z} \right)_k = \frac{1}{\Delta z_k} \left[\frac{1}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{k+\frac{1}{2}} (\{p + \gamma \mathcal{D}\}_{k+1} - \{p + \gamma \mathcal{D}\}_k) \right) - \frac{1}{\Delta z_{k-\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{k-\frac{1}{2}} (\{p + \gamma \mathcal{D}\}_k - \{p + \gamma \mathcal{D}\}_{k-1}) \right) \right] \quad (4.19)$$

Ahora, siguiendo con el desarrollo de la solución es necesario aproximar el **término de acumulación** de la **ec. 4.6**, el cual necesita ser modificado ya que este debe ser expandido en términos de presión.

Aplicando regla de la cadena al término de acumulación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi b) = \phi \frac{\partial b}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + b \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \phi b \frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \quad (4.20)$$

donde b es el factor de encogimiento y se define como:

$$b = \frac{1}{B} \quad (4.21)$$

Simplificando la **ec. 4.20**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) = \phi b c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.22)$$

Aplicando diferencias regresivas para aproximar la derivada de la **ec. 4.22**:

$$\left(\phi b c_t \frac{\partial p}{\partial t} \right)_i = (\phi b c_t)^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \quad (4.23)$$

Donde n representa el nivel de tiempo, es decir:

n se refiere a un tiempo t .

$n+1$ se refiere a un tiempo $(t + \Delta t)$.

Nuevamente, para una dimensión, sustituyendo las **ecs. 4.23** y **4.17** en la **ec. 4.6** y tomando en cuenta que el miembro izquierdo se encuentra en un nivel de tiempo igual a $n + 1$:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left[\frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i)^{n+1} \right) - \frac{1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \left(\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1})^{n+1} \right) \right] = (\phi b c_t)^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \quad (4.24)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el volumen de roca $Vr_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ de la celda i :

$$\frac{\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i}{\Delta x_i} \left[\left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{(p_{i+1} - p_i)^{n+1}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} \frac{(p_i - p_{i-1})^{n+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right] = Vr_i (\phi b c_t)^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \quad (4.25)$$

Simplificando:

$$A_i \left[\lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{(p_{i+1} - p_i)^{n+1}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{(p_i - p_{i-1})^{n+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right] = Vr_i (\phi b c_i)^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \quad (4.26)$$

donde:

$$A_i = \Delta y_i \Delta z_i$$

$$\lambda = \frac{k}{\mu B} \quad (4.27)$$

Sin embargo como se puede apreciar en el miembro izquierdo de la ecuación anterior la propiedades de la roca y los fluidos no se evalúan en el nodo sino en el limite del bloque por lo que el área A obtenida anteriormente representa el área expuesta al flujo en la dirección x .

Al producto del área expuesta al flujo A y la movilidad λ entre una distancia Δx se le conoce como transmisibilidad:

$$T = \frac{A \frac{k}{\mu B}}{\Delta x} = \frac{A}{\Delta x} \lambda = f_g \lambda \quad (4.28)$$

Donde f_g es el factor geométrico y se define como el cociente del área (o cara del bloque) expuesta al flujo y la distancia que existe entre los dos nodos que contenidos en los bloques que comparten dicha área.

Sustituyendo la **ec. 4.28** en la **ec. 4.26**:

$$(T)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} (p_{i+1} - p_i)^{n+1} - (T)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} (p_i - p_{i-1})^{n+1} = Vr_i (\phi b c_i)^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \quad (4.29)$$

Agrupando términos semejante:

$$T_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}(p_{i-1})^{n+1} - \left(T_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{Vr_i(\phi bc_t)^n}{\Delta t} \right) (p_i)^{n+1} + T_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}(p_{i+1})^{n+1} = -Vr_i(\phi bc_t)^n \frac{p_i^n}{\Delta t} \quad (4.30)$$

Aplicando un desarrollo similar para las otras dos direcciones y y z e incorporándolas a la ecuación anterior, tomando en cuenta la notación para cada dirección se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} p_{i,j,k-1}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} p_{i,j-1,k}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} p_{i-1,j,k}^{n+1} \\ & - \left[T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + T_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{Vr_{i,j,k}(\phi bc_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right] p_{i,j,k}^{n+1} \\ & + T_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} p_{i+1,j,k}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} p_{i,j+1,k}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} p_{i,j,k+1}^{n+1} = -\frac{Vr_{i,j,k}(\phi bc_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} p_{i,j,k}^n \\ & + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} \gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} (D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}) - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}} (D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sin embargo, para el desarrollo de esta tesis las transmisibilidades se evaluarán a un tiempo n (la razón de esto se muestra más adelante) por lo que la ecuación resulta en:

$$\begin{aligned} & T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n p_{i,j,k-1}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2},k}^n p_{i,j-1,k}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j,k}^n p_{i-1,j,k}^{n+1} \\ & - \left[T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n + T_{i,j-\frac{1}{2}}^n + T_{i-\frac{1}{2},j}^n + T_{i+\frac{1}{2},j}^n + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{Vr_{i,j,k}(\phi bc_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right] p_{i,j,k}^{n+1} \\ & + T_{i+\frac{1}{2},j,k}^n p_{i+1,j,k}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2},k}^n p_{i,j+1,k}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n p_{i,j,k+1}^{n+1} = -\frac{Vr_{i,j,k}(\phi bc_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} p_{i,j,k}^n \\ & + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} (D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}) - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}} (D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1}) \end{aligned} \quad (4.31a)$$

que de una forma mas simple resulta (**fig. 4.3a**):

$$\begin{aligned}
& S_{i,j,k} P_{i,j,k-1}^{n+1} + D_{i,j,k} P_{i,j-1,k}^{n+1} + O_{i,j,k} P_{i-1,j,k}^{n+1} + C_{i,j,k} P_{i,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k} P_{i+1,j,k}^{n+1} \\
& + U_{i,j,k} P_{i,j+1,k}^{n+1} + N_{i,j,k} P_{i,j,k+1}^{n+1} = B_{i,j,k}
\end{aligned} \tag{4.31b}$$

donde:

$$S_{i,j,k} = T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n$$

$$D_{i,j,k} = T_{i,j-\frac{1}{2},k}^n$$

$$O_{i,j,k} = T_{i-\frac{1}{2},j,k}^n$$

$$C_{i,j,k} = \left[T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n + T_{i,j-\frac{1}{2}}^n + T_{i-\frac{1}{2},j}^n + T_{i+\frac{1}{2},j}^n + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{Vr_{i,j,k} (\phi bc_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right]$$

$$E_{i,j,k} = T_{i+\frac{1}{2},j,k}^n$$

$$U_{i,j,k} = T_{i,j+\frac{1}{2},k}^n$$

$$N_{i,j,k} = T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n$$

$$B_{i,j,k} = - \frac{Vr_{i,j,k} (\phi bc_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} P_{i,j,k}^n$$

$$+ T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} (D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}) - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}} (D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1})$$

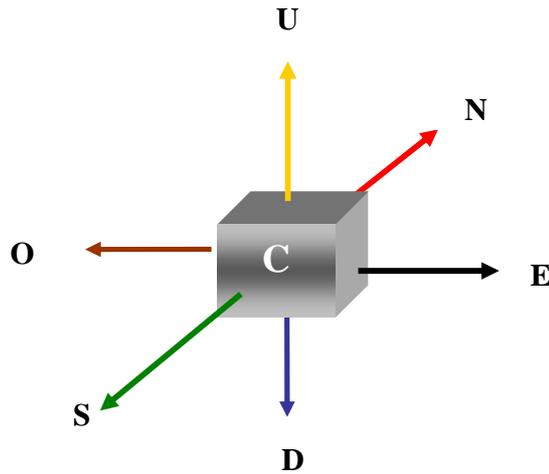


Fig. 4.3a Convención de cálculo de coeficientes.

Por otra parte, la **ec. 4.29** extendiéndola a tres dimensiones puede ser expresada mediante operadores diferenciales, es decir:

$$\Delta[T(\Delta p)]_i^{n+1} + \Delta[T(\Delta p)]_j^{n+1} + \Delta[T(\Delta p - \gamma D)]_k^{n+1} = \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t(\phi b)_{i,j,k} \quad (4.31c)$$

donde el operador diferencial Δ se define como:

$$\Delta \omega_i = \omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}$$

$$\Delta \omega_{i+\frac{1}{2}} = \omega_{i+1} - \omega_i$$

$$\Delta_t \omega = \omega^{n+1} - \omega^n$$

Por ejemplo para la dirección i , el término correspondiente a esta en la **ec. 4.31b** desarrollada resulta:

$$\Delta[T(\Delta p)]_i^{n+1} = T_{i+\frac{1}{2}}(\Delta p)_{i+\frac{1}{2}} - T_{i-\frac{1}{2}}(\Delta p)_{i-\frac{1}{2}} = T_{i+\frac{1}{2}}(p_{i+1} - p_i) - T_{i-\frac{1}{2}}(p_i - p_{i-1}) \quad (4.31d)$$

La cual resulta idéntica al miembro izquierdo de la **ec. 4.29**.

Por otra parte, en el capítulo cinco se realiza la aplicación de esta solución para un yacimiento fracturado donde las fracturas y la matriz almacenan fluidos. Las fracturas son consideradas como medio continuo y los bloques de matriz es el medio discontinuo, el cual recibe el nombre de modelo de doble porosidad-una permeabilidad (**fig. 4.3b y 4.3c**).

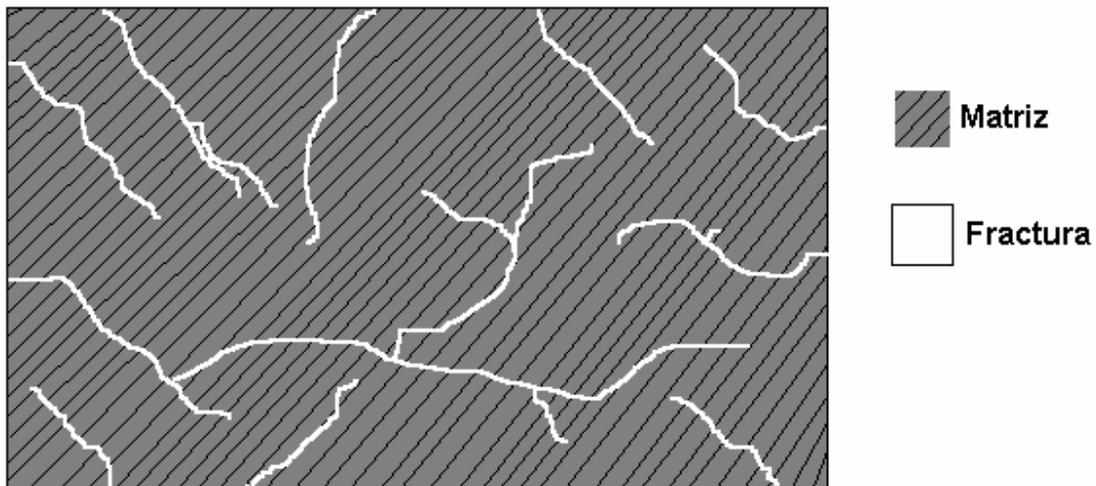


Fig. 4.3b Sistema matriz-fractura.

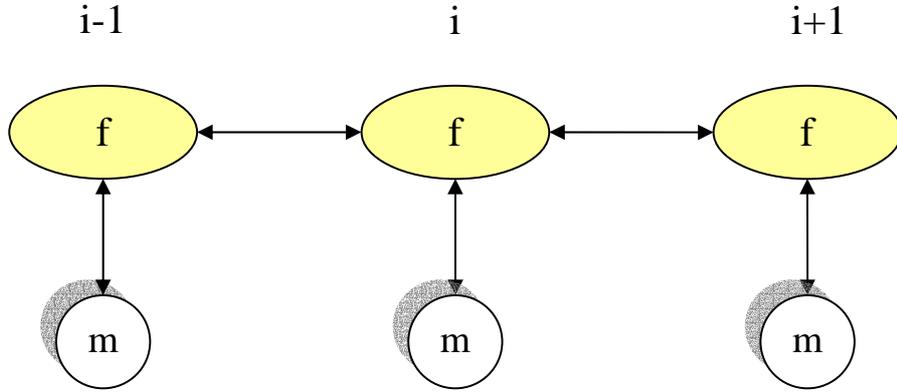


Fig. 4.3c Movimiento de fluidos en un Modelo de doble porosidad- una permeabilidad (idealización).

La ecuación para un sistema de estas características se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
& T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n p_{i,j,k-1}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2},k}^n p_{i,j-1,k}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j,k}^n p_{i-1,j,k}^{n+1} \\
& - \left[T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n + T_{i,j-\frac{1}{2}}^n + T_{i-\frac{1}{2},j}^n + T_{i+\frac{1}{2},j}^n + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{Vr_{i,j,k} (\phi b c_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} - \left[\frac{\omega_i^2}{\psi_i + \omega_i} - \omega_i \right] \right] p_{i,j,k}^{n+1} \\
& + T_{i+\frac{1}{2},j,k}^n p_{i+1,j,k}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2},k}^n p_{i,j+1,k}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n p_{i,j,k+1}^{n+1} = - \frac{Vr_{i,j,k} (\phi b c_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} p_{i,j,k}^n \\
& - \frac{\omega_i \psi_i p_m^n}{\psi_i + \omega_i} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} (D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}) - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}} (D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1})
\end{aligned} \tag{4.31e}$$

Esta ecuación es desarrollada en el Apéndice B y está basada en una idealización como la que se muestra en la **fig. 4.3c**.

Por otra parte, se debe hacer notar que las presiones que resultan incógnitas en la **ec. 4.31e** se refiere a la presión del fluido solo en la fractura. El cálculo para obtener la presión del fluido en la matriz también se muestra en el Apéndice B.

Como se puede ver en las **ecs. 4.31a** y **4.31b**, a pesar de que las ecuaciones son aplicables a dos medios distintos (homogéneo y fracturado), la estructura resulta la misma por lo que un mismo algoritmo de solución puede ser aplicado a ambas, Apéndice B. Por lo tanto, en el desarrollo se utilizará para simplificar la notación, la ecuación reducida **4.31a** sin mencionar el tipo de yacimiento.

4.2 Aproximación numérica para le región del pozo.

Ahora, es necesario obtener la solución para la región refinada localmente (región del pozo), la cual esta planteada para ser desarrollada en coordenadas cilíndricas. De igual manera a la región del yacimiento, es preciso discretizar la ecuación de flujo para la región del pozo así como obtener la malla numérica sobre la cual funcionará nuestra solución numérica.

4.2.1 Malla numérica.

La malla que se genera en esta región corresponde a una malla cilíndrica la cual, como se había mencionado anteriormente, representa de una manera más real al pozo y el flujo hacia este.

A diferencia de la forma y distribución de los bloques y sus respectivos nodos en la región del yacimiento que resultaba uniforme, en la región del pozo la geometría de los bloques así como la posición de los nodos siguen un patrón logarítmico desde el pozo hacia las fronteras o límites de esta región. Esto debido a que a distancias relativamente grandes del pozo, no se presentan grandes cambio de presión, saturación, etc., o resulta muy impractico tener un información precisa en estas posiciones. Sin embargo, resulta de gran interés reproducir y obtener con más exactitud los cambios cercanos al pozo y en la cara de este.

Por otra parte al igual que en la región del yacimiento se utilizará una malla de nodos centrados en esta región ubicando un nodo en el extremo del primer bloque que se

encuentra junto al pozo el cual nos permitirá obtener un parámetro muy importante el cual es el de la presión en la cara de este (p_{wf}).

Si el número de nodos en dirección radial es nr , en dirección angular $n\theta$ y en dirección vertical nz , además de que el límite o alcance de la región con esta geometría de malla se da hasta una distancia re :

Posición del nodo en dirección radial:

$$r_1 = r_w e^{\frac{\alpha}{2}} \quad (4.32)$$

$$r_i = r_1 e^{(i-1)\alpha} \quad \text{para} \quad i = 2, 3, \dots, nr \quad (4.32a)$$

Posición del nodo en dirección angular:

$$\theta_j = \frac{2\pi}{n\theta} \left(j - \frac{1}{2} \right) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots, n\theta \quad (4.32b)$$

Posición del nodo en dirección vertical:

$$z_k = \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta z_{i,j,k} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, nz \quad (4.32c)$$

Los límites del bloque según la dirección:

$$r_{i+\frac{1}{2}} = r_w e^{i\alpha} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, (nr-1) \quad (4.33a)$$

$$\theta_{j+\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{n\theta} (j) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots, n\theta \quad (4.33b)$$

$$z_{k+\frac{1}{2}} = (k) \Delta z_{i,j,k} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, nz \quad (4.33c)$$

Es importante notar que la ubicación de la frontera del último bloque no se encuentra contenida en la ec. 4.33a. Esto debido a que este bloque se encuentra en el extremo de la región del pozo y posee una geometría irregular por lo que merece un tratamiento especial, el cual se retomará más adelante.

Y finalmente para calcular el volumen de roca:

$$V_{r_{i,j,k}} = \frac{\left(r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) \Delta z_{i,j,k}}{n\theta} \quad (4.34)$$

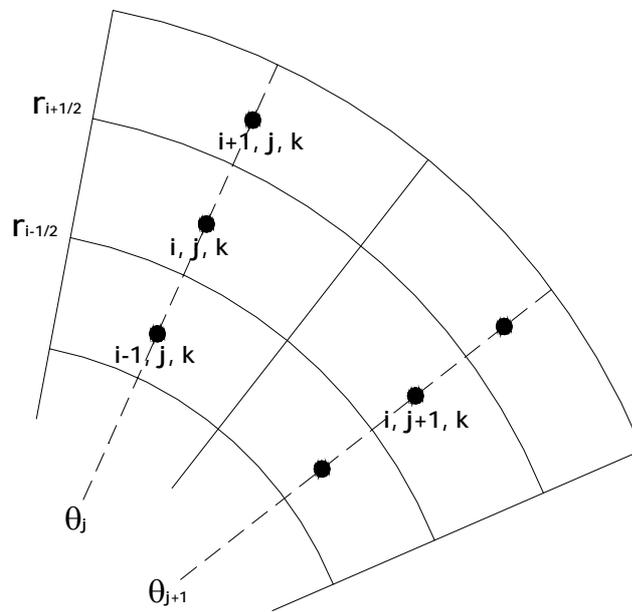


Fig. 4.3 Malla radial.

4.2.2 Discretización de la ecuación de flujo.

Para esta región, de acuerdo a lo obtenido en el capítulo anterior la ec. de flujo esta dado por la ec.:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\mu_f \phi c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.35)$$

Al igual que la ecuación de flujo para la región del yacimiento obtenida, la **ec. 4.35** no considera la variación de las propiedades de la roca y de los fluidos ni con la posición ni con el tiempo; sin embargo si éstas no resultan constantes entonces la ecuación de flujo, análogamente a la región del yacimiento, podría ser reordenada como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial (p + \gamma D)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \quad (4.36)$$

Ahora, siguiendo con el método de diferencias finitas para discretizar y obtener la solución numérica de la ecuación anterior, analizando para una dirección (radial):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \quad (4.37)$$

Realizando un cambio de variable y aplicando diferencias centrales para aproximar la derivada en el punto i en el *término de flujo* (miembro izquierdo) de la ecuación de difusión (**ec. 4.37**), es decir:

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} \right|_i = \frac{1}{r_i} \frac{a_{i+\frac{1}{2}} - a_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r_i} \quad (4.38)$$

donde:

$$a = \frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4.39)$$

Sustituyendo la **ec. 4.39** en **4.38**:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_i = \frac{1}{r_i} \frac{\left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r_i} \quad (4.40)$$

Ahora, aproximando las derivadas en los límites de los bloques, es decir, en $i + 1/2$ y en $i - 1/2$ utilizando nuevamente diferencias centrales:

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{i-\frac{1}{2}} = \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta r_{i-\frac{1}{2}}} \quad (4.42)$$

Sustituyéndolas ahora en la **ec. 4.40**:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_i = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r_i} \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r_i} \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta r_{i-\frac{1}{2}}} \quad (4.43)$$

La ecuación anterior representa el flujo solo en la dirección radial del sistema coordenado, por lo que realizando un procedimiento similar para las direcciones angular y vertical se tiene que:

Para la dirección angular θ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \Big|_j = \frac{1}{\Delta \theta_j} \left[\frac{1}{\Delta \theta_{j+\frac{1}{2}}} \left(\frac{k}{\mu B} (p_{j+1} - p_j) \right) \Big|_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta \theta_{j-\frac{1}{2}}} \left(\frac{k}{\mu B} (p_j - p_{j-1}) \right) \Big|_{j-\frac{1}{2}} \right]$$

Para la dirección vertical z:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial \{p + \gamma D\}}{\partial z} \right)_k = \frac{1}{\Delta z_k} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{k}{\mu B} (\{p + \gamma D\}_{k+1} - \{p + \gamma D\}_k) \right) \\ - \frac{1}{\Delta z_{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{k}{\mu B} (\{p + \gamma D\}_k - \{p + \gamma D\}_{k-1}) \right) \end{array} \right] \quad (4.45)$$

Ahora, siguiendo con el desarrollo de la solución, es necesario aproximar el **término de acumulación** (miembro derecho) de la **ec. 4.36**, sin embargo como se puede observar este término es independiente del sistema coordenado que se utilice ya que la variaciones de las propiedades involucradas son dependientes del tiempo y no de la posición, así que tomando lo desarrollado para la región del yacimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi b) = \phi \frac{\partial b}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + b \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \phi b \frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \quad (4.20)$$

$$\left(\phi b c_t \frac{\partial p}{\partial t} \right)_i = (\phi b c_t)^n \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \quad (4.23)$$

De igual manera a la región del yacimiento, se debe involucrar el volumen de roca de cada celda contenida en la región del pozo teniendo en cuenta que este volumen de roca se calcula para esta región de acuerdo a la **ec. 4.34**.

Así que aplicando el mismo desarrollo, es decir, sustituyendo las aproximaciones de los términos de flujo y de término de acumulación obtenidos en la Ecuación de Difusión (**ec. 4.36**) y aplicando el concepto de transmisibilidad como en el desarrollo para la región del yacimiento, se llega a:

$$\begin{aligned}
& T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} P_{i,j,k-1}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} P_{i,j-1,k}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} P_{i-1,j,k}^{n+1} \\
& - \left[T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} + T_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{Vr_{i,j,k} (\phi b c_t)^n}{\Delta t} \right] P_{i,j,k}^{n+1} \\
& + T_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} P_{i+1,j,k}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} P_{i,j+1,k}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} P_{i,j,k+1}^{n+1} = - \frac{Vr_{i,j,k} (\phi b c_t)^n}{\Delta t} P_{i,j,k}^n \\
& + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} \gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} (D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}) - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} \gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}} (D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1})
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Por otra parte, al igual que en la región del yacimiento, la **ec. 4.46** también puede ser expresada mediante operadores diferenciales:

$$\Delta [T(\Delta p)]_i^{n+1} + \Delta [T(\Delta p)]_j^{n+1} + \Delta [T(\Delta p - \gamma \mathcal{D})]_k^{n+1} = \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t (\phi b)_{i,j,k} \tag{4.46a}$$

Si se analiza dimensionalmente la **ec. 4.46a** se puede observar que cada término del miembro izquierdo de la ecuación corresponde al flujo volumétrico que hay en cada cara de un bloque y que mantiene el balance de materia de acuerdo a la ec. de continuidad por lo que expresándola en términos de gasto:

$$Q_{i+\frac{1}{2}} + Q_{i-\frac{1}{2}} + Q_{j+\frac{1}{2}} + Q_{j-\frac{1}{2}} + Q_{k+\frac{1}{2}} + Q_{k-\frac{1}{2}} = \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t (\phi b)_{i,j,k} \tag{4.46b}$$

Sin embargo, al igual que en la región del yacimiento, las transmisibilidades también serán evaluadas a un tiempo n por lo que la ecuación resulta (tomando la misma convención y nomenclatura que en la región del yacimiento):

$$\begin{aligned}
& S_{i,j,k} P_{i,j,k-1}^{n+1} + D_{i,j,k} P_{i,j-1,k}^{n+1} + O_{i,j,k} P_{i-1,j,k}^{n+1} + C_{i,j,k} P_{i,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k} P_{i+1,j,k}^{n+1} \\
& + U_{i,j,k} P_{i,j+1,k}^{n+1} + N_{i,j,k} P_{i,j,k+1}^{n+1} = B_{i,j,k}
\end{aligned} \tag{4.46c}$$

Asimismo, de acuerdo con el ejemplo de aplicación que se efectuará en el capítulo cinco, la ecuación resultante para un modelo de doble porosidad-una permeabilidad en esta región es:

$$\begin{aligned}
& T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n P_{i,j,k-1}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2},k}^n P_{i,j-1,k}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j,k}^n P_{i-1,j,k}^{n+1} \\
& - \left[T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n + T_{i,j-\frac{1}{2}}^n + T_{i-\frac{1}{2},j}^n + T_{i+\frac{1}{2},j}^n + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{V_{r,i,j,k} (\phi b c_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} - \left[\frac{\omega_i^2}{\psi_i + \omega_i} - \omega_i \right] \right] P_{i,j,k}^{n+1} \\
& + T_{i+\frac{1}{2},j,k}^n P_{i+1,j,k}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2},k}^n P_{i,j+1,k}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n P_{i,j,k+1}^{n+1} = - \frac{V_{r,i,j,k} (\phi b c_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} P_{i,j,k}^n \\
& - \frac{\omega_i \psi_i P_m^n}{\psi_i + \omega_i} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} (D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}) - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}} (D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1})
\end{aligned} \tag{4.46d}$$

Nótese que la **ec. 4.46c** y **4.46d** son idénticas a la **ec. 4.31b** y **4.31e** respectivamente, obtenidas para la región del yacimiento dada su nomenclatura, sin embargo debe notarse que los volúmenes de roca $V_{r,i,j,k}$ son diferentes dependiendo de la región así como el cálculo de las transmisibilidades T .

En las siguientes tablas (**tabla 1** y **2**) se muestra las ecuaciones para calcular la transmisibilidad de acuerdo a la región y la dirección:

Tabla 1 Cálculo de la transmisibilidad en la región del yacimiento (coordenadas cartesianas)	
<i>Dirección</i>	<i>Transmisibilidad</i>
X	$\frac{\Delta y_j \Delta z_k}{\Delta x_{i \pm \frac{1}{2}}} (\lambda)_{i \pm \frac{1}{2}}$
Y	$\frac{\Delta x_i \Delta z_k}{\Delta y_{j \pm \frac{1}{2}}} (\lambda)_{j \pm \frac{1}{2}}$
Z	$\frac{\Delta x_i \Delta y_j}{\Delta z_{k \pm \frac{1}{2}}} (\lambda)_{k \pm \frac{1}{2}}$

Tabla 2 Cálculo de la transmisibilidad en la región del pozo (coordenadas cilíndricas)	
<i>Dirección</i>	<i>Transmisibilidad</i>
Radial	$\frac{2\pi r_{i \pm \frac{1}{2}} \Delta z_k}{(n\theta) \Delta r_{i \pm \frac{1}{2}}} (\lambda)_{i \pm \frac{1}{2}}$
Angular	$\frac{\left(r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta z_k}{r_i \Delta \theta_{j \pm \frac{1}{2}}} (\lambda)_{j \pm \frac{1}{2}}$
Vertical	$\frac{\pi \left(r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2 \right)}{(n\theta) \Delta z_{k \pm \frac{1}{2}}} (\lambda)_{k \pm \frac{1}{2}}$

4.3 Acoplamiento de regiones.

Como ya se había mencionado anteriormente, la utilización de dos regiones con diferente geometría produce ciertas zonas las cuales se encuentran justo en el límite de la región del yacimiento y la región del pozo, y cuya forma resulta irregular (**fig. 4.4**) por lo que estas necesitan un tratamiento especial para el cálculo y manejo de las transmisibilidades. El manejo y tratamiento de estas zonas con bloques irregulares permitirá el acoplamiento de las dos regiones.

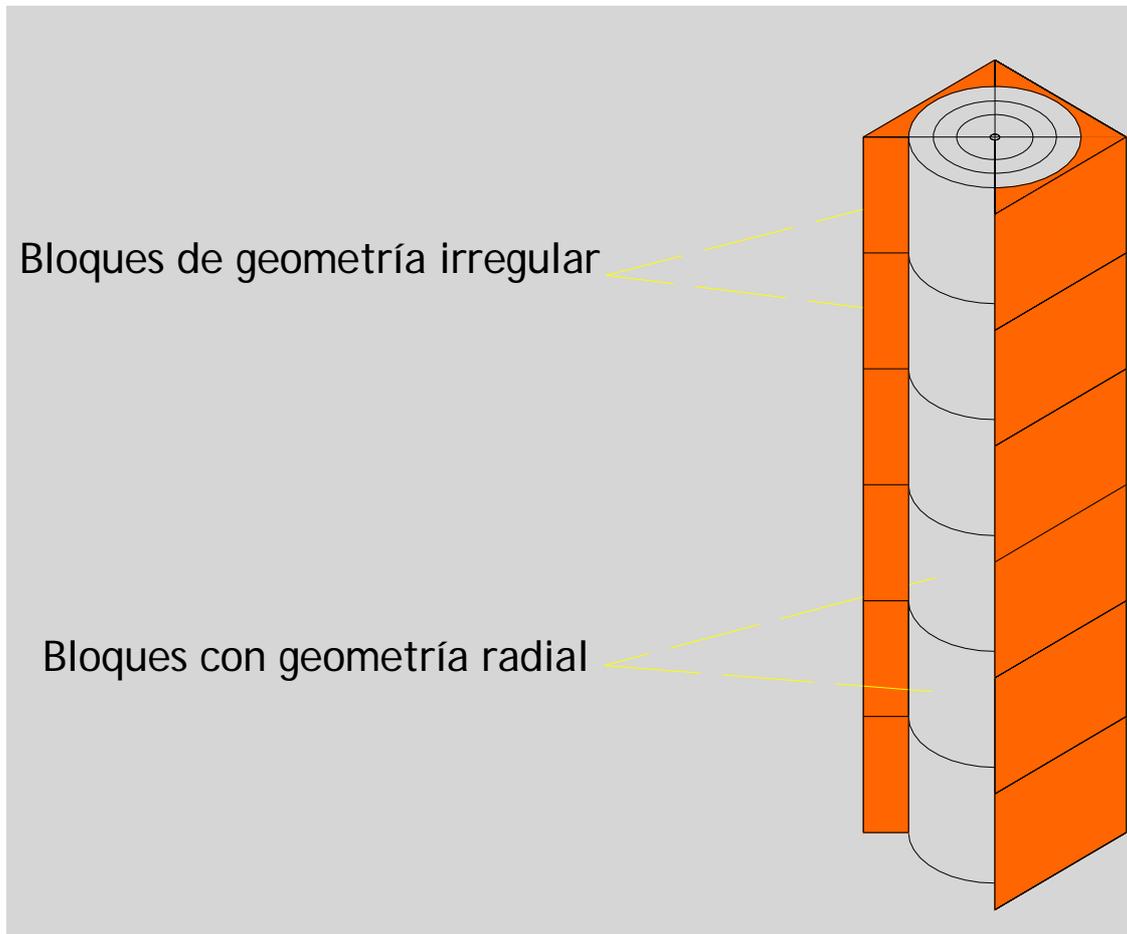


Fig. 4.4 Región del pozo.

La dificultad de estos bloques radica en que las dos geometrías de flujo (lineal y radial) están involucradas simultáneamente y además la misma forma de estos bloques, como se mencionó anteriormente, complica el cálculo de la transmisibilidad justo en el límite de las regiones ya que el factor geométrico, incluido en el cálculo de la transmisibilidad, involucra la distancia que existe entre dos nodos y esta distancia debe obedecer a una trayectoria de acuerdo al eje coordenado o dirección sobre la cual se este calculando la transmisibilidad por lo que en los bloques irregulares existe el problema de cómo obtener o calcular dicha distancia.

Pedrosa y Aziz (1984,1986)⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾ proponen un método que permite un tratamiento sencillo de estos bloques y lograr el acoplamiento de las dos regiones. Este consiste en adoptar dos posibles consideraciones, es decir, es factible manejar estos bloques de dos formas:

1. El flujo a través de toda la región del pozo es radial por lo que para determinar la transmisibilidad en los bloques irregulares estos pueden ser vistos o remplazados por bloques *pseudoradiales*, es decir, bloques radiales ficticios los cuales posean el mismo volumen de roca y las mismas propiedades como se muestra en la **fig. 4.5**. La posición del límite o radio externo de este bloque radial aparente, de acuerdo con estos autores, puede ser calculado como sigue (recordando que la **ec. 4.32a** no contempla el cálculo de este):

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2A_{i,j}}{\Delta\theta_j} + r_{i-\frac{1}{2}}^2} \quad (4.47)$$

donde $A_{i,j}$ se refiere al área original (de acuerdo al plano sobre el cual se está aplicando el refinamiento local) del bloque irregular en cuestión.

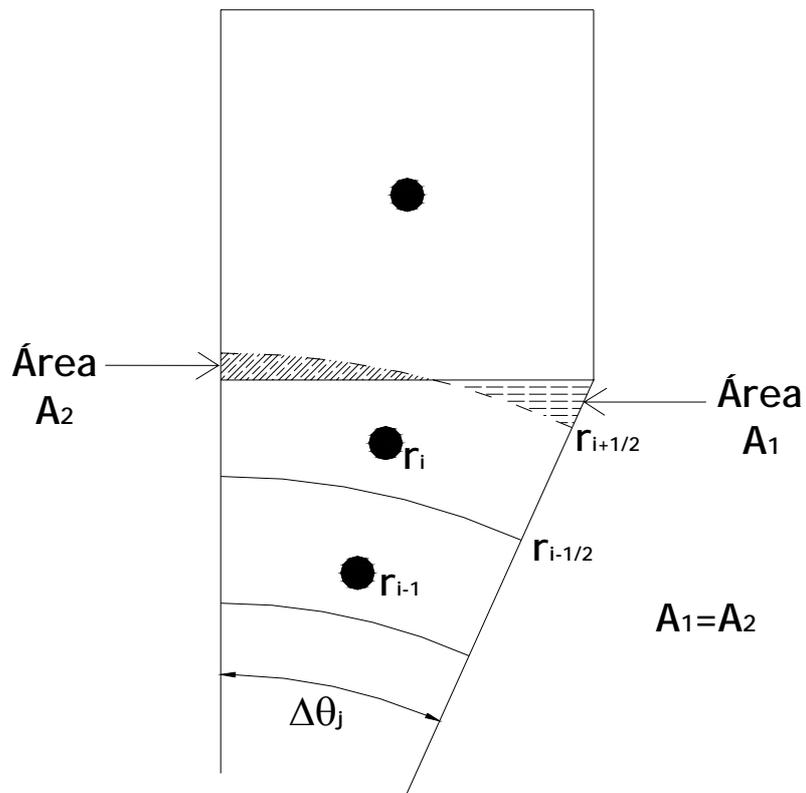


Fig. 4.5 Bloque radial aparente.

2. También, el flujo a través de todo el bloque irregular puede ser considerado lineal, así que este sería remplazado por otro bloque ficticio al igual que en el caso anterior, sin embargo en este, el remplazamiento esta dado por un bloque *pseudocartesiano* o un bloque rectangular ficticio el cual también posee el mismo volumen de roca y las mismas propiedades (fig. 4.6). Los autores mencionados proponen el calculo de la longitud de este bloque como sigue:

$$L_i = \frac{A_{i,j}}{\Delta x_i} \quad (4.48)$$

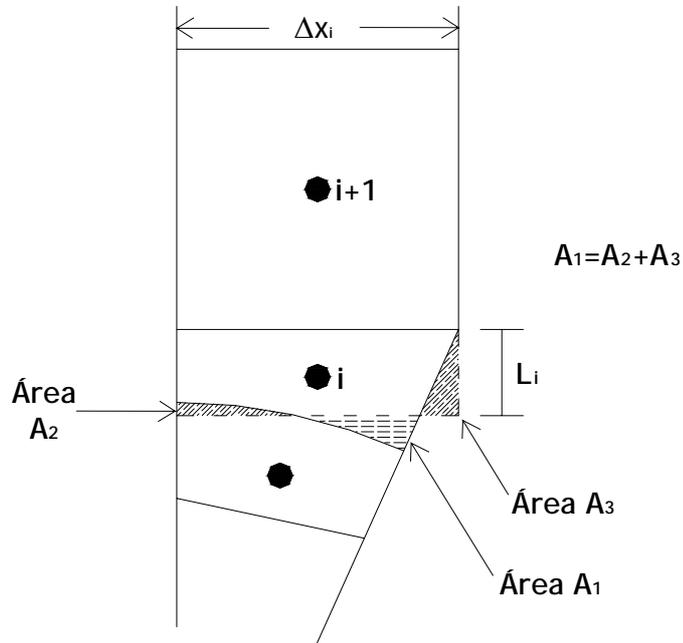


Fig. 4.6 Bloque rectangular aparente.

Por otra parte, el cálculo de la transmisibilidad entre dos bloques irregulares puede ser manejado como la primera forma propuesta por los autores. El ángulo de cada uno de los bloques mantiene su valor y estos son transformados en dos bloques pseudoradiales con el mismo volumen de roca y las mismas propiedades (**fig. 4.7**). Por lo tanto, el radio externo de estos bloques puede ser calculado utilizando la **ec. 4.47** teniendo en cuenta que el valor de $A_{i,j}$ corresponde al área total $A_{i,j} + A_{i,j+1}$ y de la misma manera, el ángulo $\Delta\theta_j$ se refiere al ángulo total $\Delta\theta_j + \Delta\theta_{j+1}$.

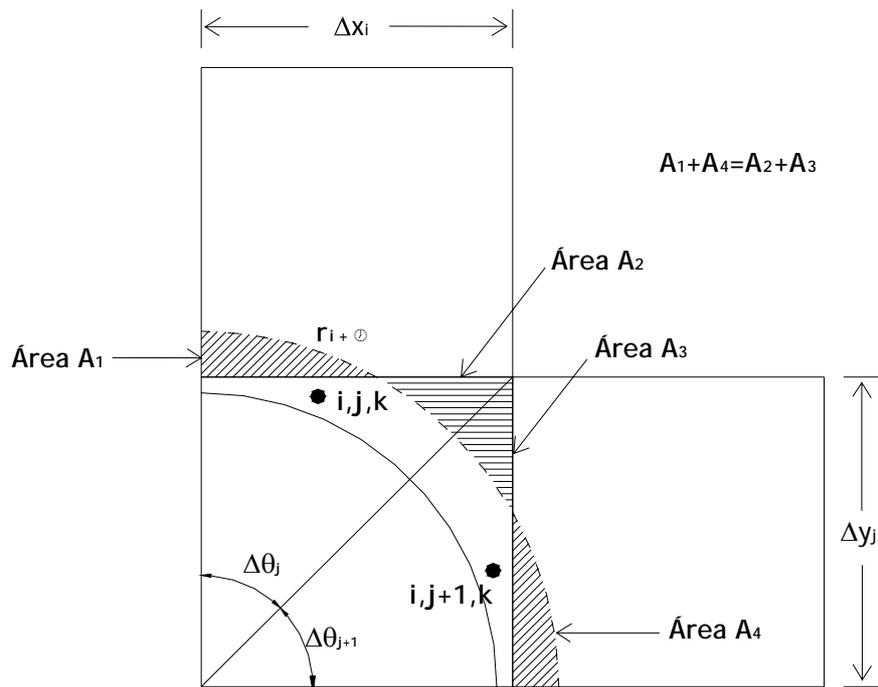


Fig. 4.7 Transformación de los bloques irregulares para el cálculo de la transmisibilidad angular.

Este método desarrollado para el cálculo de las transmisibilidades en los bloques irregulares mantiene el balance de masa ya que el volumen de poros en los bloques *pseudo* es el mismo que el de los bloques irregulares.

4.4 Solución numérica del modelo.

Ahora, se debe obtener la solución para el problema completo, es decir, al ya tener definida las aproximaciones tanto para la región del yacimiento como para la del pozo así como el acoplamiento de estas, es necesario plantear como utilizar dichas aproximaciones.

El resultado de llevar nuestras ecuaciones de flujo a un dominio discreto tiene ciertas implicaciones o maneras diferentes de aplicarlas que en el caso de un dominio continuo. Además, se debe tener en cuenta que las ecuaciones de flujo son función no sólo de presión, sino también de espacio y tiempo siendo el segundo un factor importante en la solución de estas.

4.4.1 Solución para la región del yacimiento.

La ecuación de flujo (ec. 4.31b) obtenida para esta región es

$$\Delta[T(\Delta p)]_i^{n+1} + \Delta[T(\Delta p)]_j^{n+1} + \Delta[T(\Delta p - \gamma D)]_k^{n+1} = \frac{Vr_{i,j,k}}{\Delta t} \Delta_t (\phi b)_{i,j,k} \quad (4.31c)$$

Como se puede observar, la ecuación anterior representa un problema no lineal ya que en los términos de flujo intervienen valores de presión en un nivel de tiempo $n+1$, es decir, son presiones no conocidas para un tiempo actual. Por otra parte también intervienen valores de transmisibilidad cuyas propiedades son función también de presión a un nivel $n+1$, es decir resultan también una incógnita por lo que el producto de estas transmisibilidades y las presiones (producto de dos incógnitas) resultan en un término no lineal.

Para desarrollo de esta tesis, dado que no es objetivo de ésta analizar que efectos provoca utilizar una solución implícita, las propiedades involucradas en las transmisibilidades se evalúan a un tiempo n , por lo que la única incógnita resultaría ser la presión. Si se desarrolla la ec. 4.31b con la consideración anterior y agrupando término semejante resultaría la ec. 4.31a:

$$\begin{aligned} & T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n P_{i,j,k-1}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2},k}^n P_{i,j-1,k}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j,k}^n P_{i-1,j,k}^{n+1} \\ & - \left[T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n + T_{i,j-\frac{1}{2}}^n + T_{i-\frac{1}{2},j}^n + T_{i+\frac{1}{2},j}^n + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{Vr_{i,j,k} (\phi b c_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right] P_{i,j,k}^{n+1} \\ & + T_{i+\frac{1}{2},j,k}^n P_{i+1,j,k}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2},k}^n P_{i,j+1,k}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n P_{i,j,k+1}^{n+1} = - \frac{Vr_{i,j,k} (\phi b c_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} P_{i,j,k}^n \\ & + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} (D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}) - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}} (D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1}) \end{aligned} \quad (4.31a)$$

Que como se mencionó anteriormente puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} & S_{i,j,k} P_{i,j,k-1}^{n+1} + D_{i,j,k} P_{i,j-1,k}^{n+1} + O_{i,j,k} P_{i-1,j,k}^{n+1} + C_{i,j,k} P_{i,j,k}^{n+1} + E_{i,j,k} P_{i+1,j,k}^{n+1} \\ & + U_{i,j,k} P_{i,j+1,k}^{n+1} + N_{i,j,k} P_{i,j,k+1}^{n+1} = B_{i,j,k} \end{aligned} \quad (4.31b)$$

4.4.1.1 Representación matricial de la solución.

Si se aplica la **ec. 4.31a** a cada bloque existente dentro de la región del yacimiento se podría observar que se genera un sistema de ecuaciones lineales. Este sistema de ecuaciones puede ser visto como un mapa de conexiones que existen para cada celda, es decir, indica el contacto que hay entre cada uno de los bloques, por ejemplo si se observa la **fig. 4.8** se puede observar que el bloque 2 está en contacto con los bloques 1, 3 y 11, y esta conexión está representada en el sistema de ecuaciones correspondiente (**fig. 4.9**). El orden de este sistema de ecuaciones dependerá directamente del número de bloques involucrados en el modelo.

Por otra parte, el sistema de ecuaciones para un problema de flujo en tres dimensiones corresponde a un sistema heptadiagonal, o sea, que en la matriz de coeficientes solo existirán valores diferentes de cero en ciertas regiones de esta, las cuales describen formas de diagonal (**fig. 4.9**).

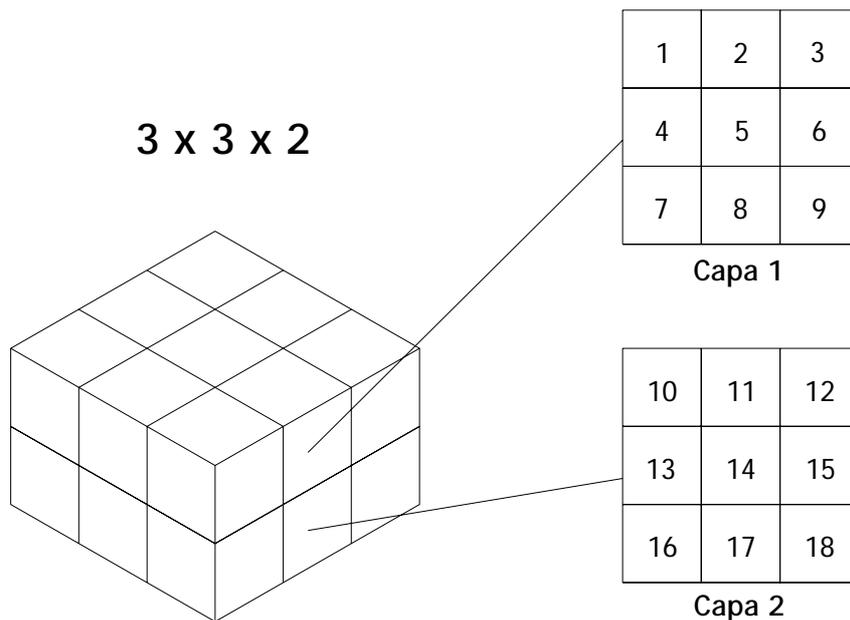


Fig. 4.8 Ejemplo de malla en la región del yacimiento.

En la figura anterior se observa una malla de 3x3x2 con lo que el sistema de ecuaciones generado a partir de este arreglo resultaría de un orden igual a 18 (**fig. 4.9**), el cual expresado en forma matricial resulta:

$$\mathbf{A}_{18 \times 18} \mathbf{X}_{18 \times 1} = \mathbf{b}_{18 \times 1}$$

Donde \mathbf{X} es el vector de incógnitas el cual para nosotros representa el vector solución de presión.

$$\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 1 & x & x & & x & & & & & & x & & & & & & & & & \\ 2 & x & x & x & & x & & & & & & x & & & & & & & & \\ 3 & & x & x & & & x & & & & & & x & & & & & & & \\ 4 & x & & & x & x & & x & & & & & & x & & & & & & \\ 5 & & x & & x & x & x & & x & & & & & & x & & & & & \\ 6 & & & x & & x & x & & & x & & & & & & x & & & & \\ 7 & & & & x & & & x & x & & & & & & & & x & & & \\ 8 & & & & & x & & x & x & x & & & & & & & & x & & \\ 9 & & & & & & x & & x & x & & & & & & & & & & x \\ 10 & x & & & & & & & & & x & x & & x & & & & & & \\ 11 & & x & & & & & & & & & x & x & x & & x & & & & \\ 12 & & & x & & & & & & & & & x & x & & & x & & & \\ 13 & & & & x & & & & & & x & & & x & x & & x & & & \\ 14 & & & & & x & & & & & & x & & x & x & x & & x & & \\ 15 & & & & & & x & & & & & & x & & x & x & & & x & \\ 16 & & & & & & & x & & & & & & x & & & x & x & & \\ 17 & & & & & & & & x & & & & & & x & & x & x & x & \\ 18 & & & & & & & & & x & & & & & & x & & x & x & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \\ p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{15} \\ p_{16} \\ p_{17} \\ p_{18} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{15} \\ b_{16} \\ b_{17} \\ b_{18} \end{bmatrix}$$

Fig. 4.9 Ejemplo del sistema de ecuaciones en la región del yacimiento.

4.4.2 Solución para la región del pozo.

Para esta región también se ha obtenido una solución para la región del yacimiento que corresponde a:

$$\Delta[T(\Delta p)]_i^{n+1} = T_{i+\frac{1}{2}}(\Delta p)_{i+\frac{1}{2}} - T_{i-\frac{1}{2}}(\Delta p)_{i-\frac{1}{2}} = T_{i+\frac{1}{2}}(p_{i+1} - p_i) - T_{i-\frac{1}{2}}(p_i - p_{i-1}) \quad (4.46a)$$

Y de igual manera a la región del yacimiento, las propiedades de la roca y los fluidos estarán evaluados a un nivel de tiempo n, así que desarrollando la **ec. 4.46a** y agrupando términos resulta:

$$\begin{aligned}
 & T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n P_{i,j,k-1}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2},k}^n P_{i,j-1,k}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j,k}^n P_{i-1,j,k}^{n+1} \\
 & - \left[T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n + T_{i,j-\frac{1}{2}}^n + T_{i-\frac{1}{2},j}^n + T_{i+\frac{1}{2},j}^n + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{Vr_{i,j,k}(\phi bc_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right] P_{i,j,k}^{n+1} \\
 & + T_{i+\frac{1}{2},j,k}^n P_{i+1,j,k}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2},k}^n P_{i,j+1,k}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n P_{i,j,k+1}^{n+1} = - \frac{Vr_{i,j,k}(\phi bc_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} P_{i,j,k}^n \\
 & + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} (D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}) - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}} (D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1})
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

4.4.2.1 Tratamiento del pozo.

Como se vio anteriormente, la ubicación de los nodos en la región del pozo corresponde a una ubicación logarítmica a partir de esta la cual permitía representar de mejor manera los grandes cambios de presión que existen en la cercanía al pozo, sin embargo a pesar de que algunos se encuentra muy cercanos a esta frontera física, no hay nodos que se ubiquen justo en esta posición lo cual, como ya se había mencionado, no se podrá representar de manera real la condición de frontera dentro de nuestra solución. Debido a lo anterior es necesario ubicar un nodo justo en la cara del pozo por cada bloque que esté conectado a este (**fig. 4.10**).

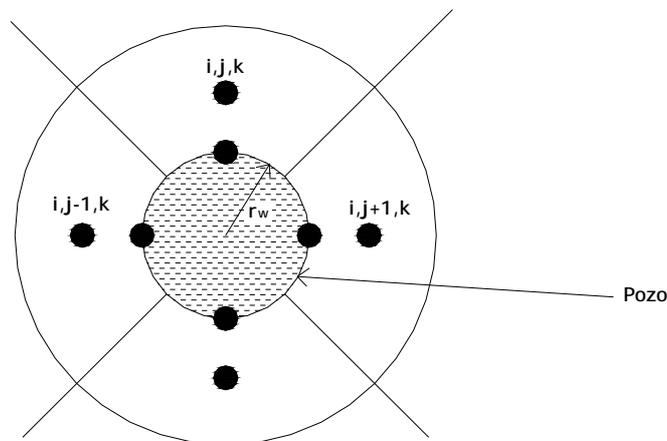


Fig. 4.10 Nodos en la cara del pozo.

Ahora se debe replantear la ecuación de flujo para los nodos que se encuentran justo en la cara del pozo.

A partir de la ecuación de Darcy en coordenadas radiales:

$$q = -\frac{2\pi r k \Delta z}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4.51)$$

Aproximando el valor de la derivada y discretizando la ecuación anterior a una distancia $r = r_w$ se tiene que:

$$r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r_w} = r_w \frac{p_1 - p_w}{r_1 - r_w} = \frac{r_w}{\Delta r_w} (p_1 - p_w) = -\left(\frac{q B \mu}{2\pi k \Delta z} \right)_{r_w} \quad (4.52)$$

donde r_1 se refiere a la posición del nodo inmediato (en dirección radial) al nodo que se encuentra justo en la pared del pozo (**fig. 4.10**).

Reorganizando la **ec. 4.52** se obtiene lo siguiente:

$$\frac{A}{\Delta r_w} \left(\frac{k}{\mu B} \right) = -T_{r_w} (p_1 - p_w) = q \quad (4.53)$$

La **ec. anterior** funciona en el caso de que no exista mas que un solo nodo en la cara del pozo, sin embargo, se ha visto que se necesitan tantos nodos en la cara del pozo como bloques haya en contacto con este, por lo que el gasto total en el pozo (**fig. 4.11**) esta dado por:

$$Q_t = -\left(\sum_{j=1}^{n\theta} \frac{A}{n\theta(\Delta r_{w_j})} \left(\frac{k}{\mu B} \right)_j \right) (p_{1,j} - p_w) \quad (4.54)$$

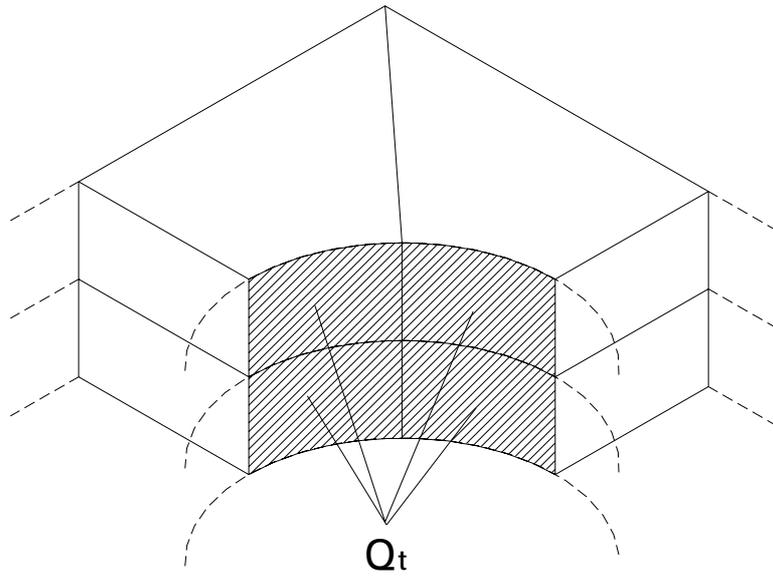
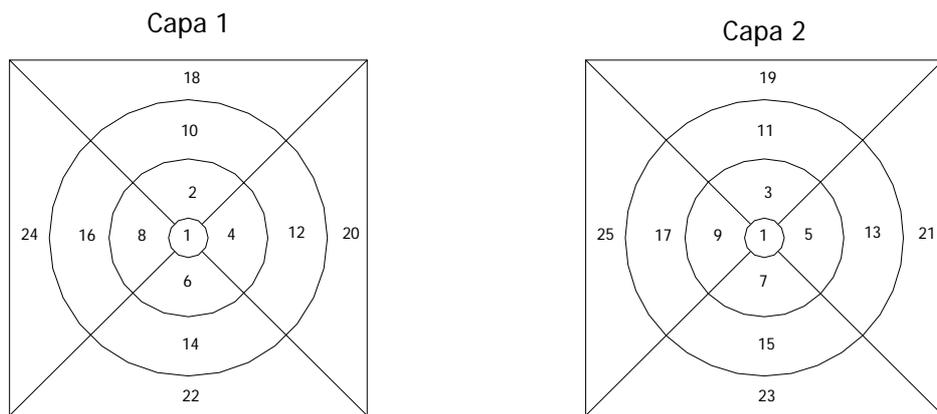


Fig. 4.11 Gasto total compuesto por el flujo en la cara de cada bloque expuesto al pozo.

4.4.2.2 Representación matricial de la solución.

Análogamente, si se aplica la ec. 4.50 a cada bloque de la región como en el caso anterior, se generaría un sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, a diferencia de la región del yacimiento, aquí la identificación de los bloques resulta diferente ya que el barrido o numeración de los bloques se realiza primero en dirección vertical y no en dirección horizontal por ejemplo la **fig. 4.12**.



Malla de 3x4x2

Fig. 4.12 Identificación de los nodos en la región del pozo.

4.4.3 Esquemas de solución.

Hasta ahora se ha visto como está planteada la solución para la región del yacimiento y del pozo, sin embargo, se debe recordar que estas pertenecen a un solo sistema por lo que es necesario incorporarlas a un solo proceso o procedimiento. Para el desarrollo de esta tesis se plantean dos tipos de solución.

4.4.3.1 Método directo.

Este método consiste en incorporar las dos soluciones en un solo sistemas de ecuaciones y solucionarlas simultáneamente. Por ejemplo, obsérvese la **fig. 4.15**.

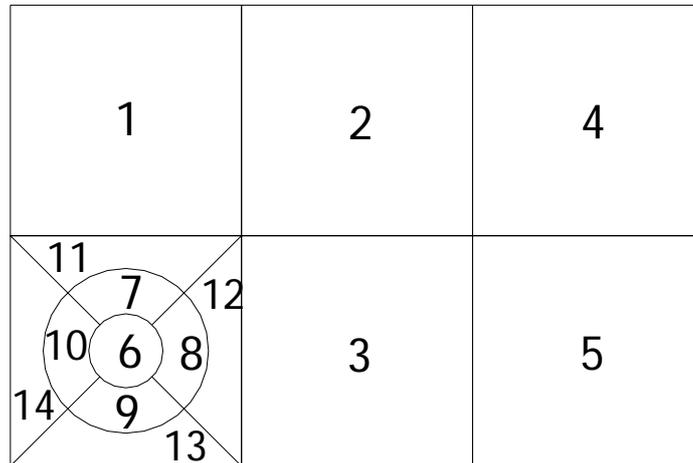


Fig. 4.15 Modelo completo.

En esta figura se puede observar como es que se acoplan y se identifican cada uno de los bloques en las dos regiones. En este ejemplo se empezó a numerar primero los bloques en la región de yacimiento y posteriormente los bloques en la región del pozo, sin embargo, esta no es la única manera de hacerlo, es decir, podría primero hacerse para la región del pozo y después para la región del yacimiento; puede hacerse indistintamente ya que el sistema de ecuaciones que se generaría para cualquier caso resultaría el mismo.

Ahora analizando la matriz de coeficientes (**fig. 4.16**) resultante para el ejemplo mostrado:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	x	x									x			
2	x	x	x	x										
3		x	x		x							x		
4		x		x	x									
5			x	x	x									
6						x	x	x	x	x				
7						x	x	x		x	x			
8						x	x	x	x			x		
9						x		x	x	x			x	
10						x	x		x	x				x
11	x						x				x	x		x
12			x					x			x	x	x	
13									x			x	x	x
14										x	x		x	x

Fig. 4.16 Matriz de coeficientes (dominio completo).

La matriz mostrada representa el *dominio* completo de nuestro sistema, es decir, se consideran todas las conexiones existentes dentro de este.

Como se observa, es posible identificar dentro de nuestro dominio las dos regiones existentes (delimitadas por líneas continuas en la **fig. 4.16**) dados los patrones mostrados y mencionados anteriormente, sin embargo, es posible identificar dos zonas mas dentro de nuestro sistema. Estas zonas corresponden al acoplamiento o interacción que existe entre las dos regiones.

Este tipo de esquema puede ser fácilmente resuelto por diferentes algoritmos como por ejemplo la eliminación gaussiana, sin embargo, existe la desventaja de que el resolver al sistema entero se realizan operaciones inútiles ya que la mayoría de los elementos de la matriz de coeficiente son cero haciendo un poco ineficiente este tipo de solución para arreglos grandes, pero por otra parte para arreglos pequeños puede ser muy útil.

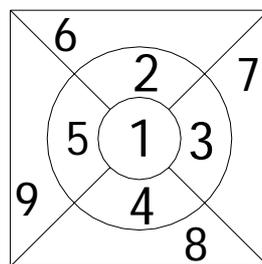
Por otra parte las zonas correspondientes al acoplamiento de regiones podría dificultar la programación de este tipo de solución ya que los elementos de esta siguen patrones diferentes a los vistos en las regiones.

Un diagrama de flujo que esquematiza este método es mostrado en el apéndice A.

4.4.3.2 Método indirecto (descomposición de dominio).

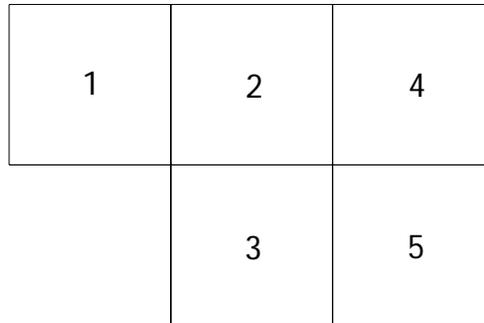
Este método consiste en dividir a todo nuestro sistema o dominio en otros mas pequeños haciéndolos hasta cierto punto independientes y los cuales conservan sus características. Con lo anterior se hace innecesario contemplar las zonas de acoplamiento de regiones en nuestro sistema de ecuaciones.

Siguiendo con el ejemplo de la **fig. 4.15**, este puede ser dividido en dos subdominios como se muestra a continuación:



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	x	x	x	x	x				
2	x	x	x		x	x			
3	x	x	x	x			x		
4	x		x	x	x			x	
5	x	x		x	x				x
6		x				x	x		x
7			x			x	x	x	
8				x			x	x	x
9					x	x			x

Fig. 4.17 Primer subdominio (región del pozo).



$$\begin{bmatrix}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 1 & x & x & & & \\
 2 & x & x & x & x & \\
 3 & & x & x & & x \\
 4 & & x & & x & x \\
 5 & & & x & x & x
 \end{bmatrix}$$

Fig. 4.18 Segundo subdominio (región del yacimiento).

Este problema puede ser resuelto estableciendo un procedimiento secuencial:

1. Se resuelve para el primer subdominio (**fig. 4.17**) utilizando los valores actuales de presión que existen en los bloques que se encuentran justo en el límite de región del yacimiento con la región del pozo.
2. Se resuelve para el segundo dominio (**fig. 4.18**) utilizando los valores de presión en los bloques irregulares de la región del pozo calculados en el paso anterior.
3. Se repiten los dos pasos anteriores (para el mismo intervalo de tiempo) hasta que la convergencia es alcanzada.

Es fácil ver que en este caso los pasos uno y dos son dos problemas independientes por lo tanto para este tipo de esquema resulta apropiado la utilización de la programación en

paralelo. Sin embargo no siempre es adecuada ya que se necesita mucho esfuerzo implementar un esquema de este tipo por lo que para arreglos pequeños podría resultar no tan eficiente.

Para un mayor entendimiento, en el apéndice A se muestra un diagrama de flujo que esquematiza este método de solución.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

En los capítulos anteriores se ha planteado como modelar el flujo hacia el pozo y también como representar la frontera física que este representa a través de las ecuaciones obtenidas. Ahora, es necesario validar nuestro modelo por lo que para esta tesis fue desarrollado un simulador de yacimientos (programado en FORTRAN) basado en el esquema presentado.

Este programa fue escrito bajo las consideraciones: flujo monofásico de un fluido ligeramente compresible (aceite o agua) de composición constante, las propiedades del fluido y roca (densidad, factor de volumen, viscosidad, compresibilidad de la roca y fluido, porosidad, permeabilidad) permanecen también constantes y gasto volumétrico constante en los pozos siendo un simulador semi-implícito, es decir, está basado en la utilización de las **ecs. 4.49** y **4.50**. Por otra parte en este simulador el flujo hacia el pozo (zona con refinamiento local) se considera netamente radial (en un plano horizontal) por lo que el movimiento tangencial o angular de los fluidos no se considera.

Las consideraciones mencionadas no representan una limitante ya que los resultados que arroje nuestro simulador estarán validados por expresiones analíticas que fueron desarrolladas bajo consideraciones muy parecidas al simulador programado.

En este capítulo se presentan dos casos de estudio en los cuales se analizan los resultados obtenidos en el simulador desarrollado.

5.1 Caso de estudio 1.

En este primer caso se plantea un pozo vertical a producción constante y el cual se encuentra justo en el centro de un yacimiento cuadrado donde este posee tres fronteras cerradas al flujo y una se encuentra abierta manteniéndose a presión constante durante el tiempo de explotación (**fig. 5.1**). Además posee propiedades de la roca constantes (porosidad y permeabilidad) en toda su extensión siendo este un yacimiento homogéneo. Las características del yacimiento así como del pozo se muestran en la **tabla 3**.

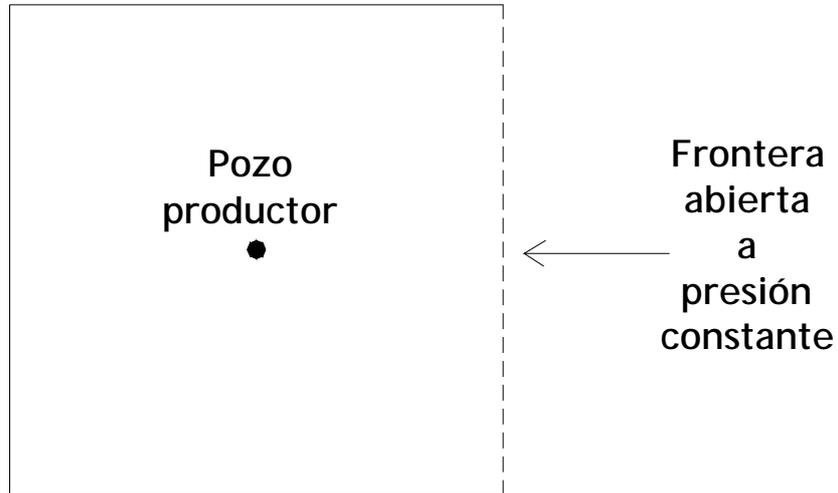


Fig. 5.1 Modelo físico.

Tabla 3 Características del yacimiento y del pozo.	
Caso 1	
Longitud del yacimiento cuadrado	2,000 [ft]
Espesor	50 [ft]
Permeabilidad horizontal	100 [mD]
Permeabilidad vertical.	0 [mD]
Porosidad	0.25
Viscosidad	1 [cp]
Factor de volumen	1.0
Densidad	10 ° API
Compresibilidad del fluido	12×10^{-6} [psi ⁻¹]
Presión inicial	5400 [psi]
Gasto de producción	500 [stb]
Radio del pozo	1 [ft]

La manera en la que es representada esta condición en el simulador programado es colocando dos pozos cuya distancia perpendicular a la frontera abierta es la misma, además la misma cantidad de fluido producido en un pozo será la misma cantidad de fluido inyectado en el otro. Esta condición permitirá reproducir el problema de la frontera abierta a presión constante (**fig. 5.2**).

Un primer escenario es como el que se plantea la **fig. 5.2**:

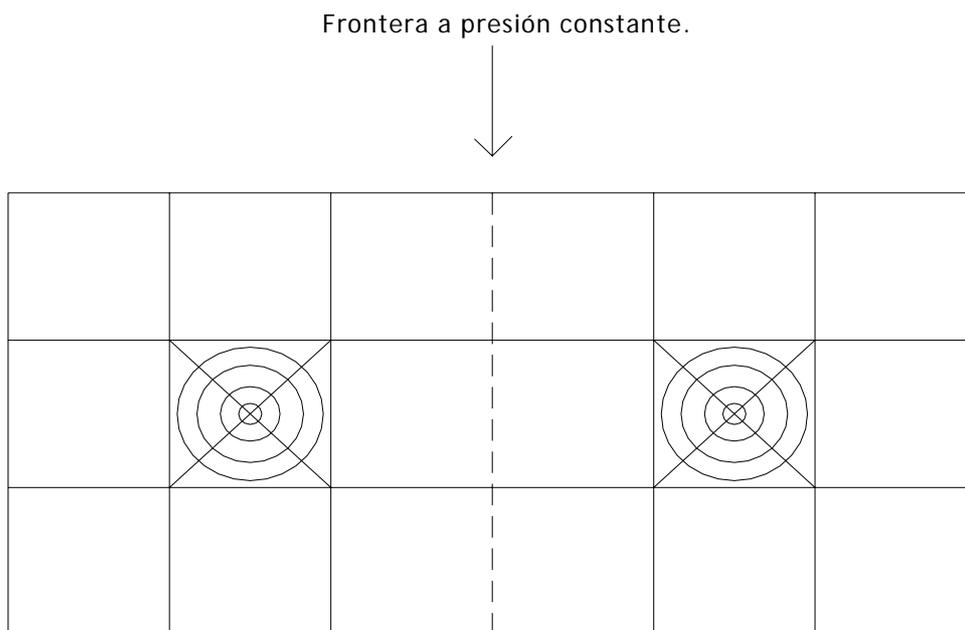


Fig. 5.2 Primera configuración del modelo.

En este primer escenario se propone una malla de $6 \times 3 \times 1$ en la región del yacimiento recordando que solo la mitad de esta corresponde al modelo físico. Sin embargo, para las regiones refinadas localmente se plantean tres tipos de arreglo: $3 \times 4 \times 1$, $6 \times 4 \times 1$, $8 \times 4 \times 1$.

Simulando para un tiempo de 15 y con los arreglos mencionados se obtiene las siguientes gráficas (fig. 5.4 y 5.5) y una distribución de presiones como se muestra en la fig. 5.3.

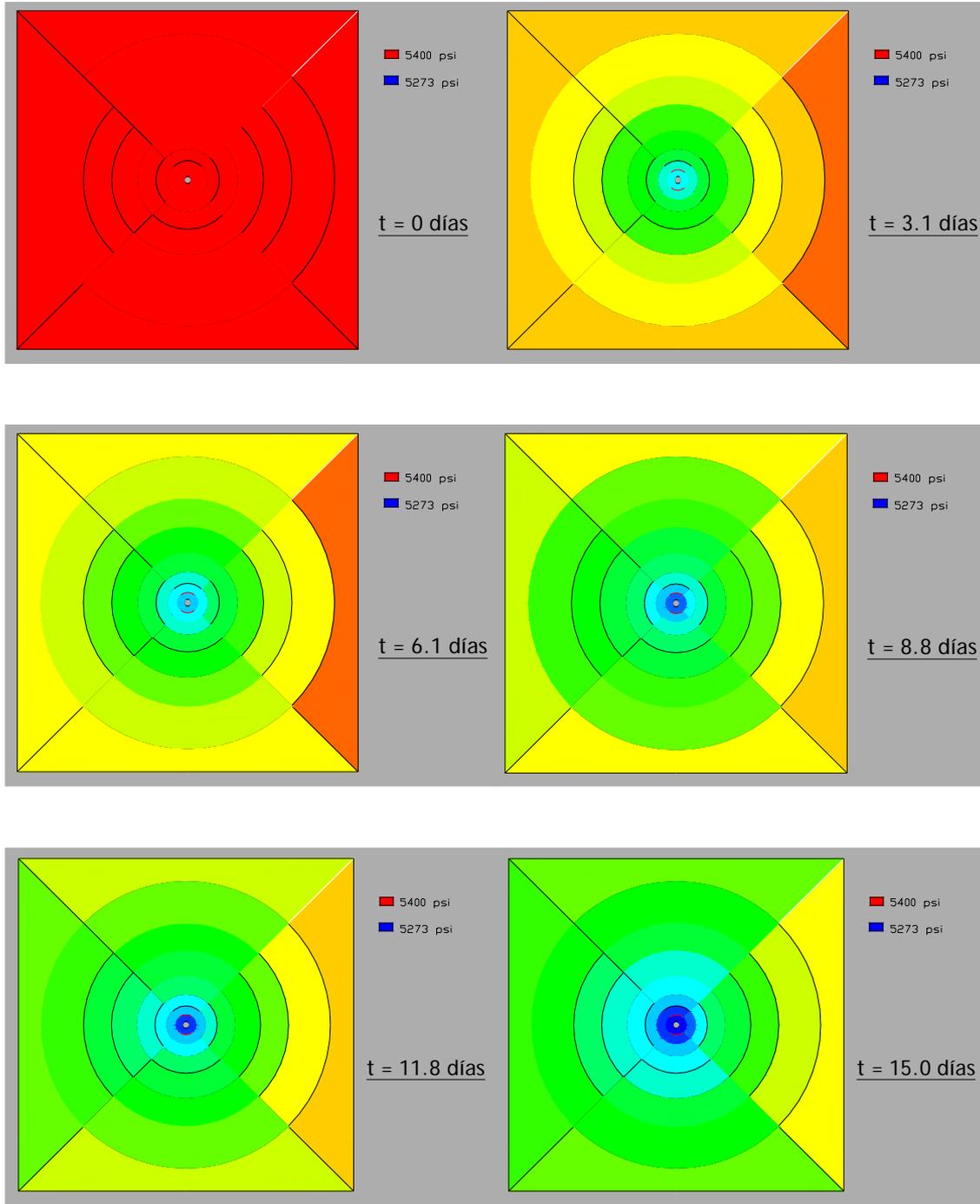


Fig. 5.3 Esquema de distribución de presiones del caso 1 (región del pozo).

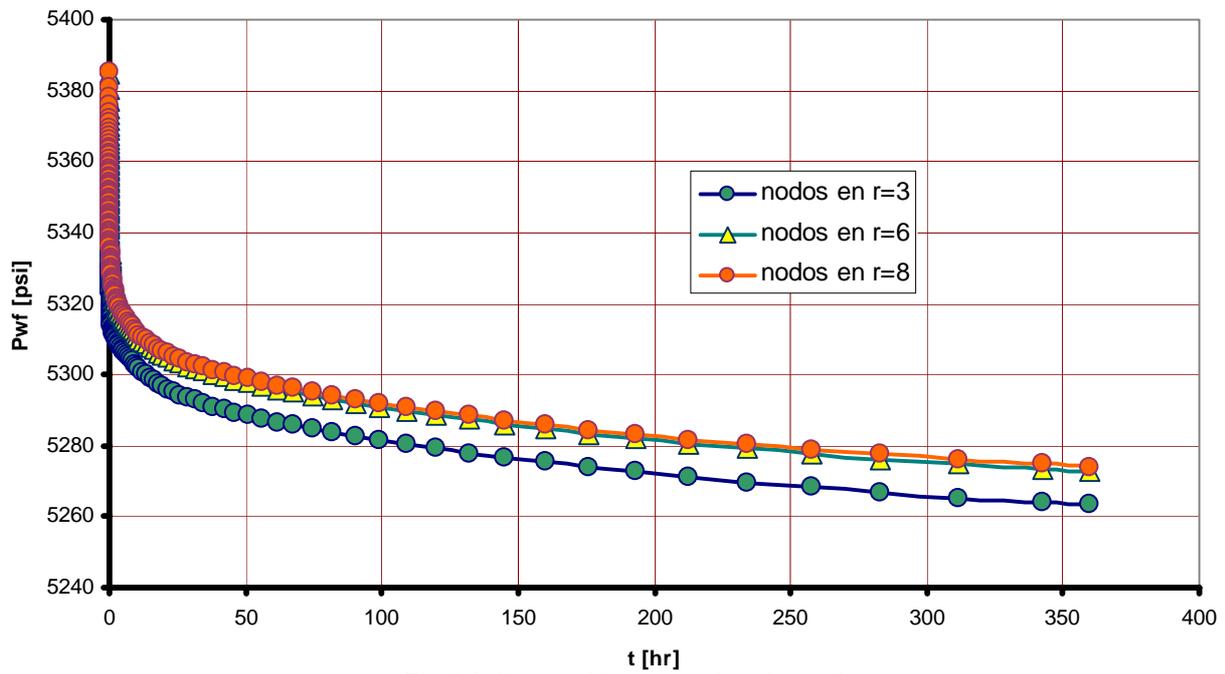


Fig. 5.4 Comparación para tres tipos de arreglo.

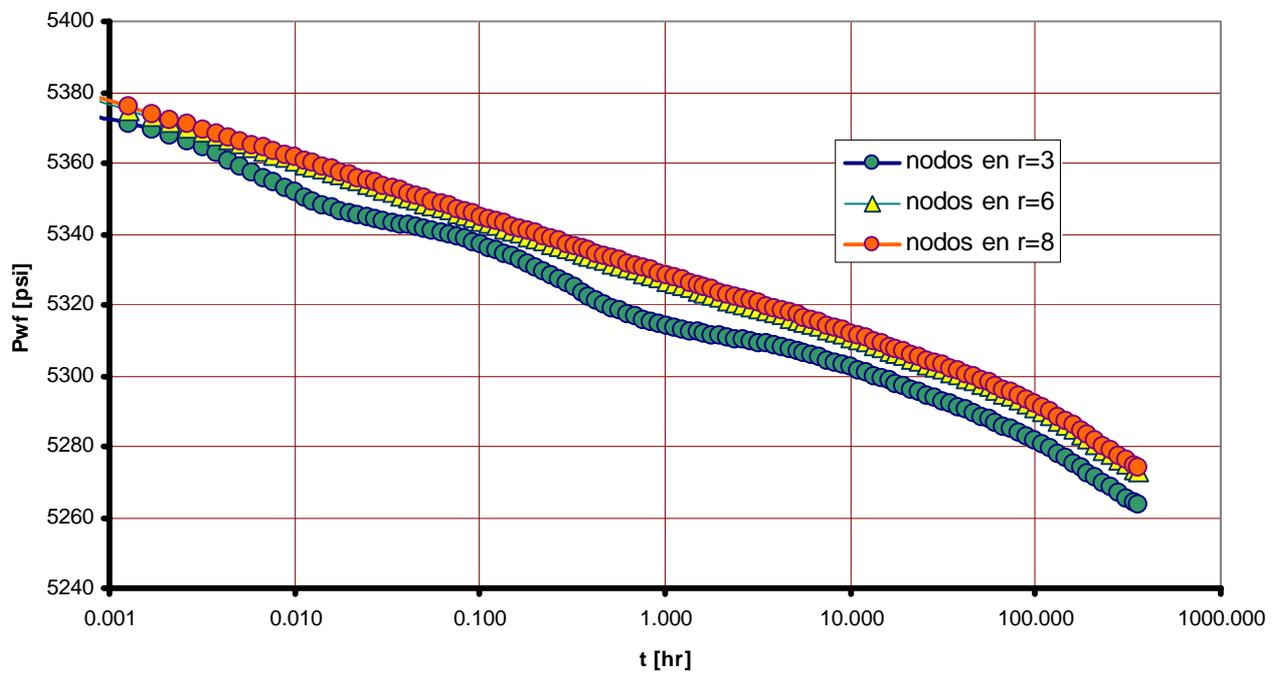


Fig. 5.5 Comparación para tres tipos de arreglo (escala semi-logarítmica).

En las **figs. 5.4 y 5.5** se observa el comportamiento de la presión de fondo fluyendo (P_{wf}) en el pozo productor para los tres diferentes tipos de arreglo en la región del pozo, sin embargo en la segunda se puede observar de mucho mejor manera debido a la escala empleada.

Se puede notar fácilmente que para un arreglo (en la región del pozo) con solo tres nodos en dirección radial (curva verde) la P_{wf} presenta un comportamiento oscilante. Esto puede entenderse ya que el sistema de ecuaciones resultante para este arreglo resulta muy inestable ya que los volúmenes de roca obtenidos para las celdas que se encuentran en la cercanía al pozo son muy pequeños en comparación con el resto de los bloques para ambas regiones ocasionando que existan valores muy grandes y muy pequeños en el sistema de ecuaciones haciéndolo muy sensible a cualquier cambio que en este se presente.

Por otra parte también se presenta el comportamiento de la P_{wf} para las otras dos configuraciones. Se puede ver que para un arreglo de 6 nodos en dirección radial (curva amarilla) el comportamiento resulta estable ya que la curva tiende a formar una recta en los dos periodos de flujo (yacimiento infinito y finito). Pero también se puede observar que existe una variación no solo en el comportamiento de las curvas sino también de los valores obtenidos para ambas configuraciones ya que estas resultan desplazadas una de otras. Este cambio es posible que se deba a que existe un menor error ya que la representación del flujo cercano al pozo se realiza a mayor detalle.

También se muestra la curva para 8 nodos en dirección radial (curva anaranjada) que también presenta un comportamiento estable sin embargo esta igualmente sufre un desplazamiento con respecto a la curva anterior pero este es de mucho menor escala haciéndolas prácticamente iguales. Con esto se puede inferir que con un arreglo de 8 nodos en dirección radial puede ser condición suficiente para obtener resultados correctos en lo que exactitud de estos se refiere.

Ahora, tomando como referencia la tercera curva es necesario validar la veracidad de los resultados obtenidos.

De acuerdo con **Arana O. V. (2005)**⁽³⁾ si se tiene la condición de yacimiento infinito, es decir, aun no se han hecho sentir las fronteras en la respuesta de presión medida en el pozo, la presión de fondo fluyendo puede ser calculada con la siguiente expresión analítica:

$$p(r = r_w, t) = p_i - \frac{q\mu B}{4\pi kh} E_i \left[\frac{r^2}{4\eta t} \right] \quad (5.1)$$

Y que aproximada logarítmicamente para una distancia igual $r = r_w$:

$$p_{wf} = p_i - \frac{162.6qB\mu}{kh} \left(\log[t] + \log \left[\frac{k}{\phi\mu cr_w^2} \right] \right) \quad (5.2)$$

Como se había mencionado anteriormente, es posible observar que los efectos de frontera se manifiestan cerca de las 20 horas (**fig. 5.6**) por lo que el siguiente análisis se realizara tomando valores solo menores a este tiempo.

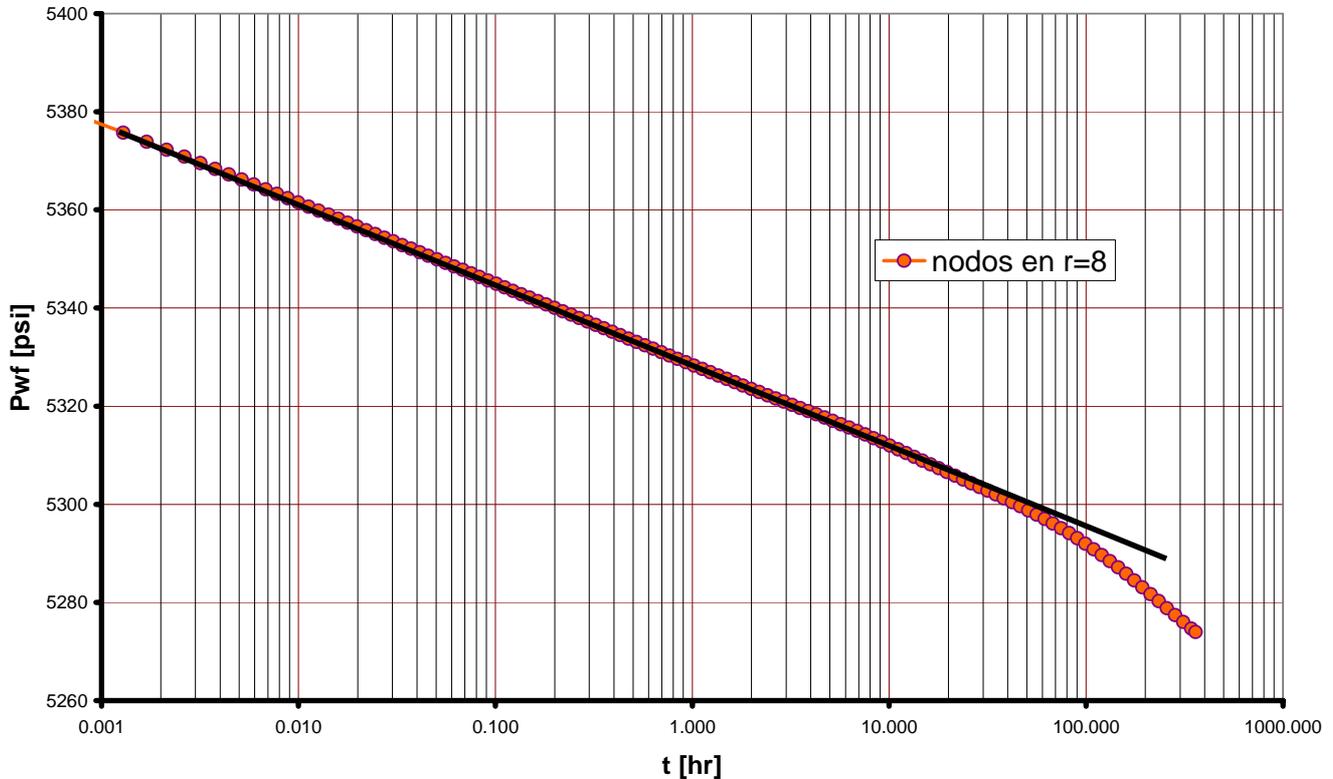


Fig. 5.6 Efecto de frontera.

Si se observa la **ec. 5.2** se puede notar que tiene la forma de la ecuación de una recta. Por otra parte si a nuestra gráfica se le ajusta una recta y calcula su pendiente (**fig. 5.7**).

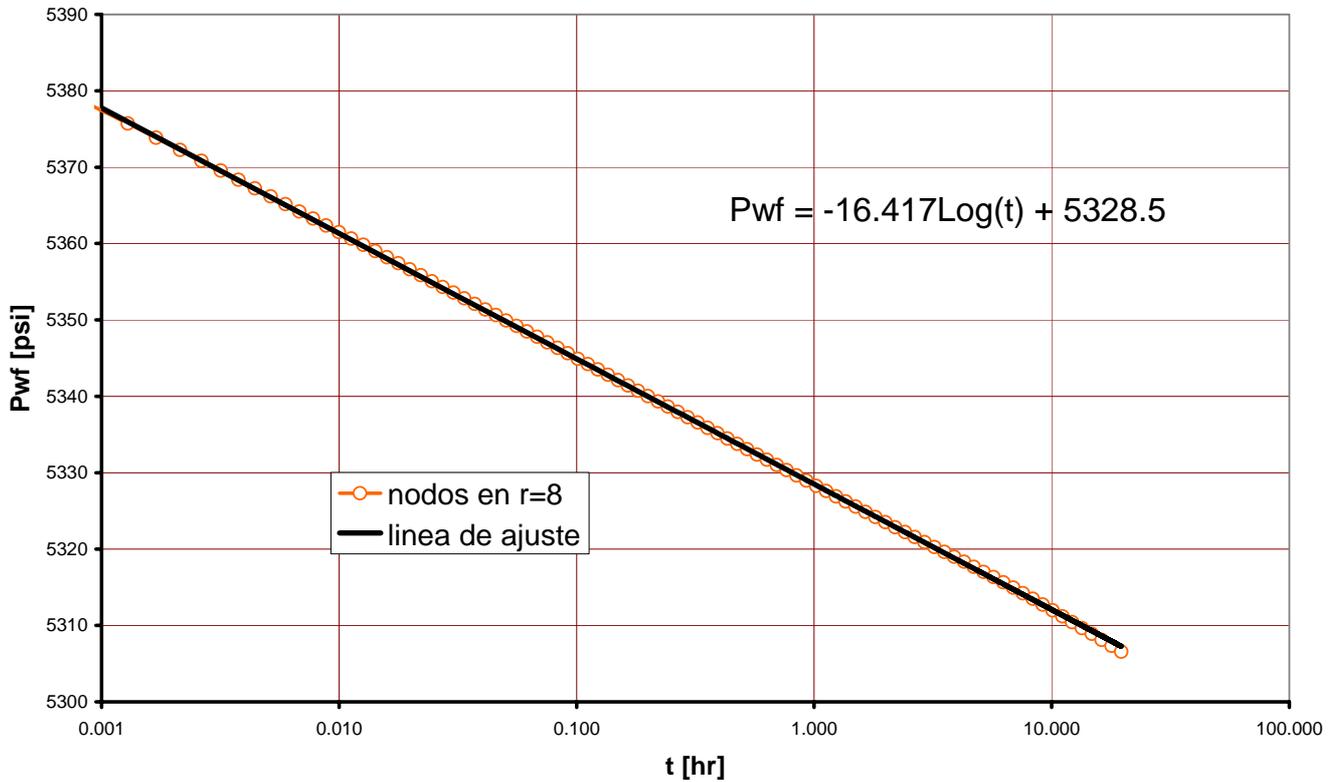


Fig. 5.7 Ajuste lineal.

Dado que nuestros valores son obtenidos bajo las condiciones bajo la cual fue desarrollada la **ec. 5.2**, entonces la pendiente obtenida de nuestro análisis debe ser la misma a la pendiente de dicha ecuación, así que:

$$16.417 = \frac{162.6qB\mu}{kh} \quad (5.3)$$

Despejando la permeabilidad de la ecuación anterior y si se calcula con los valores y datos de nuestro problema:

$$k = \frac{162.6(500)(1)(1)}{16.417(50)} = 99.0411[mD] \quad (5.4)$$

Si se compara este valor de permeabilidad obtenido con el valor de permeabilidad proporcionado como dato:

$$99.0411[mD] \approx 100.0[mD] \quad (5.5)$$

Se puede observar que el error cometido es menor al 1% por lo que es posible afirmar que para este caso el **simulador programado bajo este esquema proporciona valores confiables** al menos durante el periodo de yacimiento infinito. El error cometido tal vez pueda deberse a que la **ec. 5.2** fue desarrollada para yacimientos circulares y flujo radial, y nuestro modelo real corresponde a un yacimiento cuadrado en el cual el flujo radial solo se contempla en una región.

Ahora, para el mismo problema planteando una configuración diferente como el que se muestra en la **fig. 5.8**.

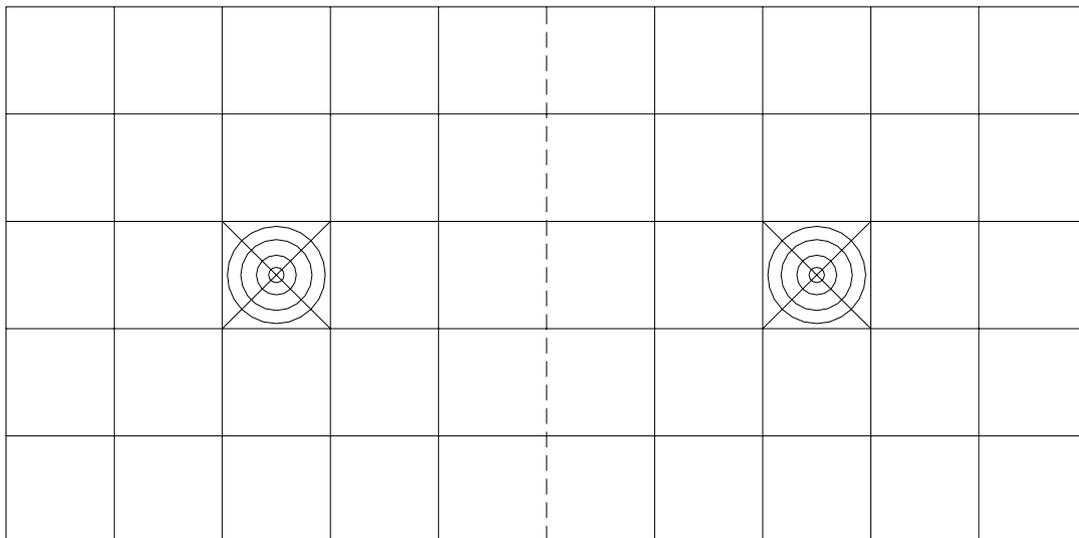


Fig. 5.8 Segunda configuración del modelo.

En esta configuración se plantea un arreglo de $10 \times 5 \times 1$ en la región del yacimiento. Para la región del pozo se tomará la configuración que mejor resultado mostró: $8 \times 4 \times 1$.

De igual manera con la misma información y simulando para un tiempo de 15 días se obtuvo la siguiente gráfica (**fig. 5.9**) en la cual se comparan los resultados obtenidos en ambas configuraciones.

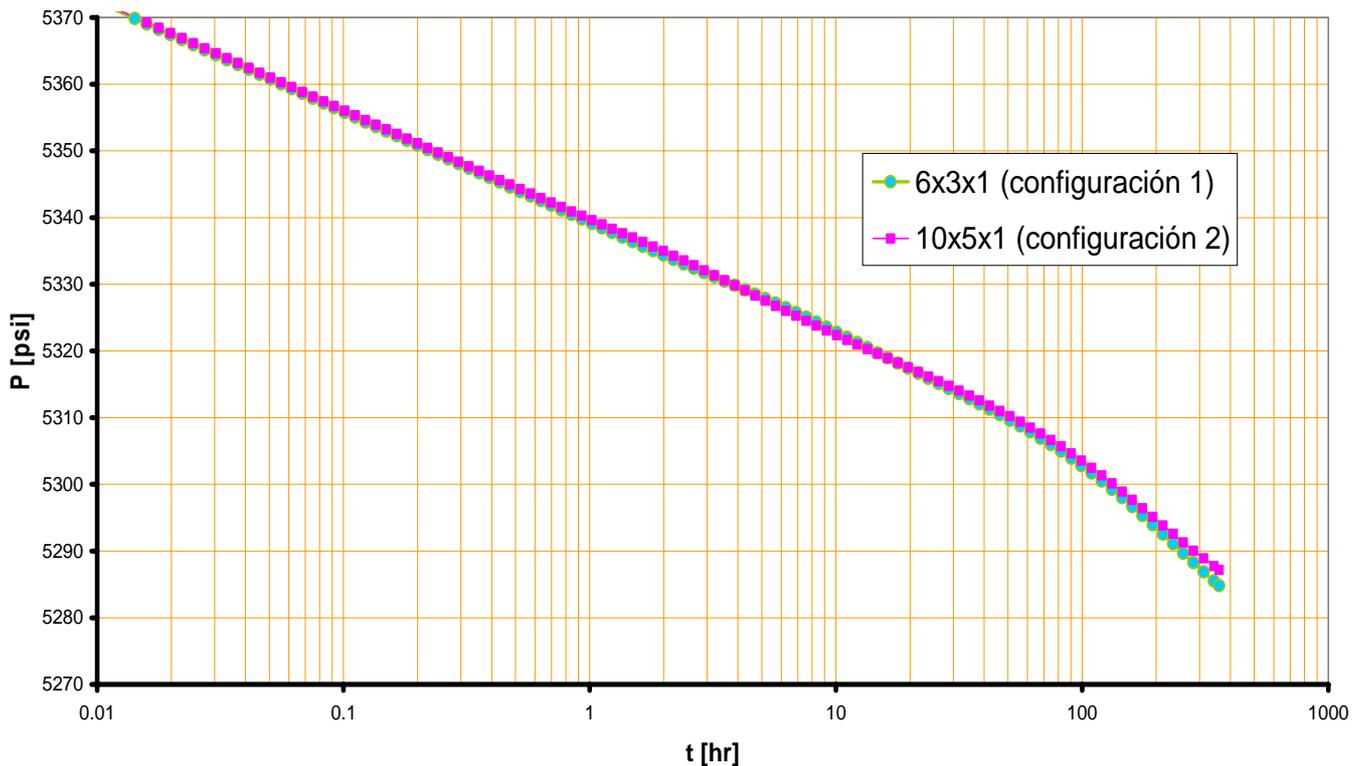


Fig. 5.9 Comparativo de configuraciones.

En esta gráfica se puede observar que el comportamiento de las dos curvas es prácticamente el mismo solo hasta que se alcanzan las condiciones de frontera. Para la configuración 1 se ve que los efectos de frontera se hacen sentir antes que en la configuración 2. Esta desviación que se observa entre estas curvas puede ser el resultado de que el refinamiento cercano a las fronteras es mayor en la configuración 2, es decir, hay más bloques entre la región del pozo y las fronteras del yacimiento con lo que la representación del flujo se realiza a más detalle. Con esto se puede inferir que a mayor número de bloques en la región del yacimiento menor es el error que se propaga hacia la región del pozo.

5.2 Caso de estudio 2.

En este caso se plantea un problema similar al anterior en el cual existe un pozo en producción que se encuentra justo en el centro de un yacimiento cuadrado pero este se encuentra completamente cerrado, es decir, no existe ninguna frontera abierta. Además este yacimiento se encuentra fracturado siendo las fracturas el único medio por el cual el fluido viaja hacia el pozo tratándose de un sistema de doble porosidad-una permeabilidad. Las características de este se muestran en la **tabla 4**.

Este problema se implanta en el simulador programado para esta tesis proponiendo una configuración de $5 \times 5 \times 1$ en la región del yacimiento y $8 \times 4 \times 1$ en la región del pozo (**fig. 5.10**). En los capítulos anteriores se obtuvieron las ecuaciones de flujo para un medio homogéneo; el desarrollo para un sistema de estas características (doble porosidad-una permeabilidad) se muestra en el Apéndice B de esta tesis.

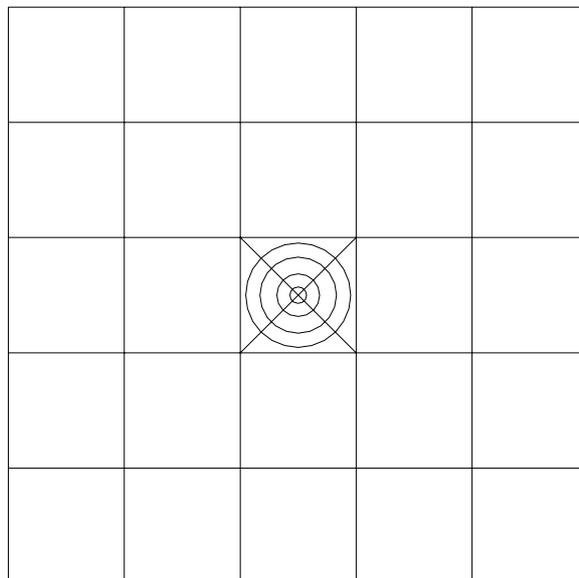


Fig. 5.10 Representación (caso 2).

Tabla 4 Características del yacimiento y del pozo.	
Caso 2	
Longitud del yacimiento cuadrado	2,000 [ft]
Espesor	30 [ft]
Permeabilidad fractura	250 [mD]
Permeabilidad matriz	5 [mD]
Porosidad fractura	0.02
Porosidad matriz	0.1
Factor de volumen	1.2
Viscosidad	0.72 [cp]
Compresibilidad fractura	15×10^{-6} [psi ⁻¹]
Compresibilidad matriz	15×10^{-6} [psi ⁻¹]
Factor de forma	1.0 [1/m ²]
Presión inicial	3000 [psi]
Gasto	200 [bpd]
Radio del pozo	0.401 [ft]

Dadas las características mostradas se realizó la simulación para un tiempo de 2 días en el cual se obtuvieron los resultados mostrados en la siguiente figura (**fig. 5.11**).

Por otra parte, en esta misma figura se muestran los resultados obtenidos al realizar la simulación del yacimiento con dichas características pero no utilizando el modelo numérico sino utilizando la solución analítica obtenida por **Warren & Root (1963)**⁽²¹⁾ para un sistema de estas características. Dicha solución se muestra en el Apéndice B de esta tesis.

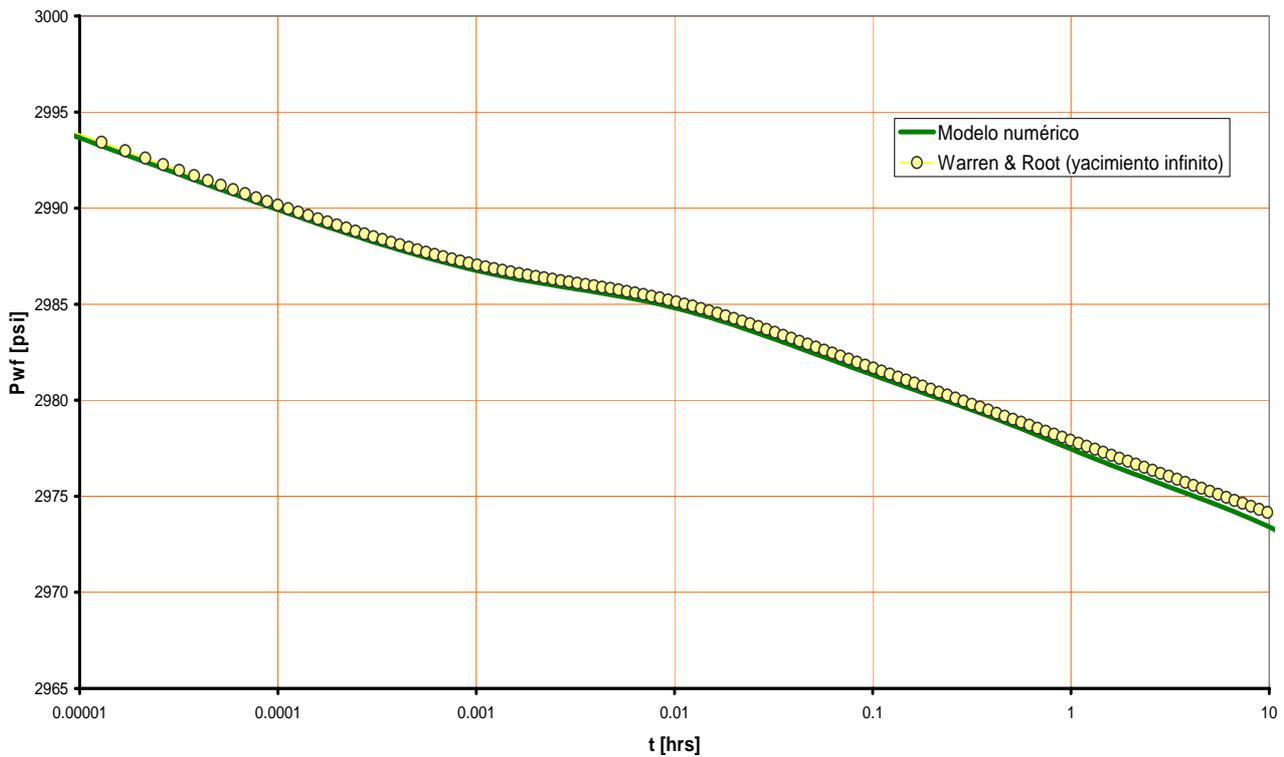


Fig. 5.11 Comparativo entre solución analítica y numérica.

Como se puede ver en la figura, el comportamiento para ambas soluciones es prácticamente el mismo (mostrando una pequeña diferencia) solo hasta que se hacen sentir los efectos de frontera aproximadamente a un tiempo de 1 hora ya que la curva de la solución numérica (curva verde) sufre una desviación con respecto a la otra.

Por otra parte, las curvas no empalman perfectamente mostrando el error antes mencionado. Esto puede deberse a la configuración empleada, es decir, si hubiesen empleado más bloques tanto en la región del pozo como la del yacimiento, el flujo podría haberse representado de mucho mejor manera arrojándose resultados más exactos. Sin embargo esto puede tener una implicación: a mayor número de bloques, el sistema de ecuaciones resultante resulta mayor, provocando que para resolverlo se utilicen más recursos computacionales y tiempo.

A continuación se muestra la distribución de presiones en la región del pozo (**fig. 5.12**).

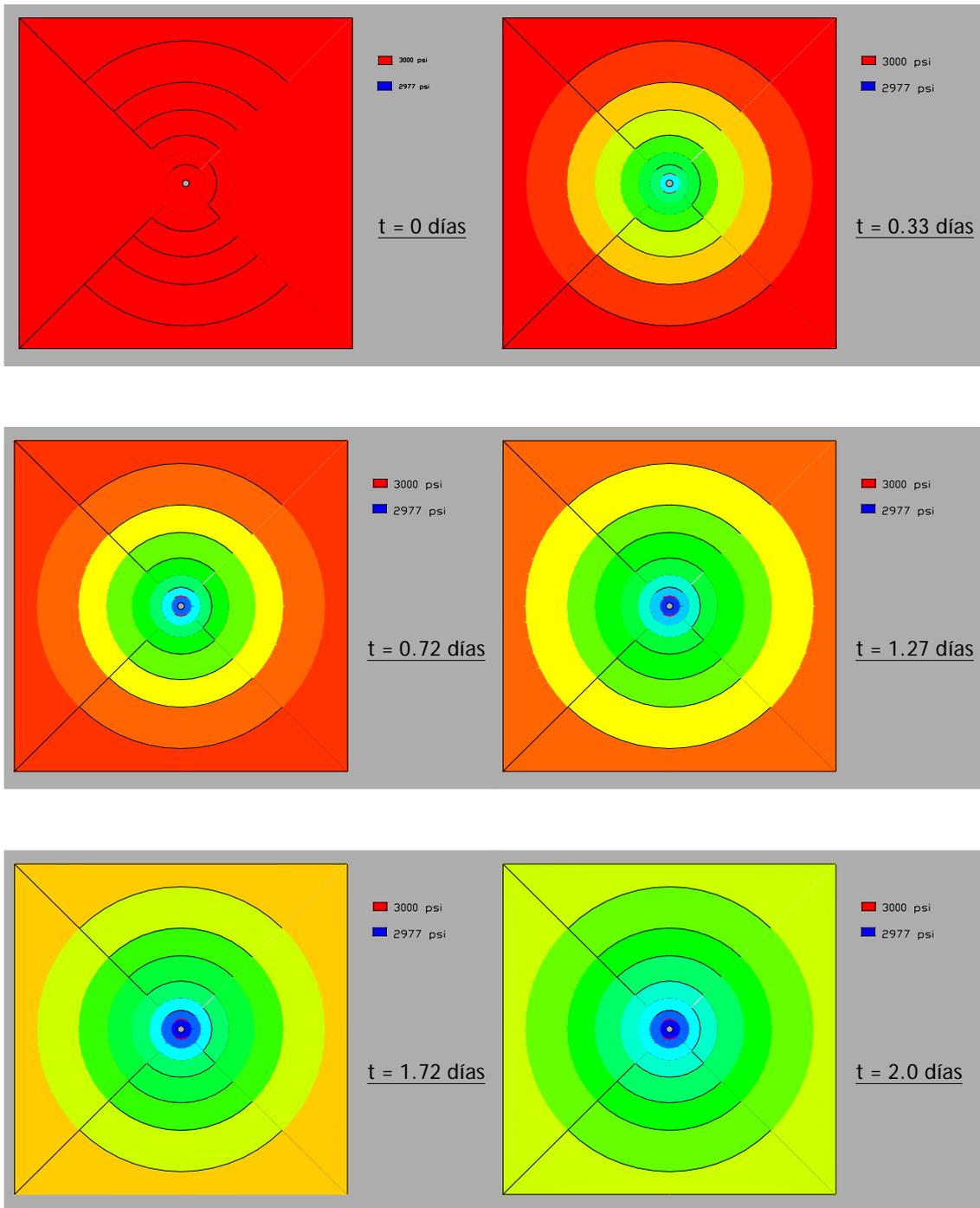


Fig. 5.12 Esquema de distribución de presiones del caso 2 (región del pozo).

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Conclusiones.

El trabajo desarrollado arroja las siguientes conclusiones,

1. El empleo de una malla híbrida a través de la técnica de refinamiento local permite un buen método para la representación del pozo así como del flujo hacia este, dada la naturaleza de la geometría resultante. Esto debido a que en la cercanía del pozo, donde los cambios de presión son bruscos, una malla radial con espaciamiento logarítmico refleja de una manera mas real dichos cambio; por otra parte a distancias grandes del pozo el flujo puede ser considerado como lineal.
2. La comparación de resultados obtenidos con modelos analíticos y con el modelo numérico desarrollado indican que el acoplamiento de dos mallas con diferentes geometrías es una buena técnica para reproducir el flujo a través de todo el yacimiento.
3. Es importante tomar buenas decisiones en cuanto a el detalle de refinamiento que se desee implementar en cualquiera de las dos zonas, ya que esto repercute directamente con el uso de recursos computaciones, es decir, a mayor detalle de refinamiento es mayor el número de bloques creados con lo que el sistema de ecuaciones resultante resulta mayor provocando que al emplearse un programa el uso de memoria sea mayor haciéndolo menos eficiente ya que se emplea mas tiempo para simular (tiempo de ejecución del programa).

Recomendaciones.

1. Es posible utilizar esta técnica para validar pruebas de presión o producción a un pozo, ya que como se observó en los casos de estudio, esta recrea fielmente el comportamiento de la presión de fondo. Es decir, se puede introducir la información obtenida de una prueba real e ingresarla al programa, comparar el comportamiento de la prueba real y la simulada y evaluar la validez de la información.
2. Dada la naturaleza de la geometría de la malla generada se recomienda utilizarla para simular pozos horizontales, ya que esta recrea perfectamente la frontera física que el pozo representa para el yacimiento sin importar la posición y dirección de este.
3. Es conveniente hacer un análisis del probable comportamiento del flujo en el yacimiento ya que, a diferencia de los casos de estudio realizados en esta tesis, no siempre es posible ignorar o despreciar el flujo en ciertas direcciones ya que este tiene un gran efecto en los resultados que puedan ser obtenidos.
4. Es necesario realizar un diagnóstico de la complejidad numérica del problema cuando se utilice esta técnica ya que es posible que las complicaciones computacionales que se presenten se deban al número de zonas refinadas y no al detalle del refinamiento. Con un problema como el mencionado resulta más conveniente utilizar el esquema de solución indirecto (descomposición de dominio) ya que este simplifica la programación del sistema matricial reduciéndolo a subsistemas menos complejos administrando mejor los recursos computacionales. Sin embargo también debe hacerse una evaluación de la aplicación de este esquema, ya que como se vio la solución resulta más eficiente, pero la implementación de esta es posible que no resulte no tan sencilla ya que la aplicación de este esquema generalmente se asocia con la aplicación de la programación en paralelo.

NOMENCLATURA

A	Área
B	Factor de volumen
b	Factor de encogimiento
c_f	Compresibilidad del fluido
c_r	Compresibilidad de la roca
c_t	Compresibilidad total
D	Profundidad
f_g	Factor geométrico
h	Espesor
k	Permeabilidad
k_r	Permeabilidad relativa
L	Longitud
m	Masa
\bar{m}	Gasto másico
\bar{n}	Vector normal
nx	Número de nodos en dirección x
q'	Gasto volumétrico por unidad de volumen de roca @ c.s.
q, Q	Gasto volumétrico @ c.s.
P	Presión
P_b	Presión de bloque
P_f	Presión en la fractura
P_{wf}	Presión de fondo fluyendo
r	Coordenada en dirección radial
r_o	Radio equivalente
r_w	Radio del pozo
S	Saturación
T	Transmisibilidad, Temperatura

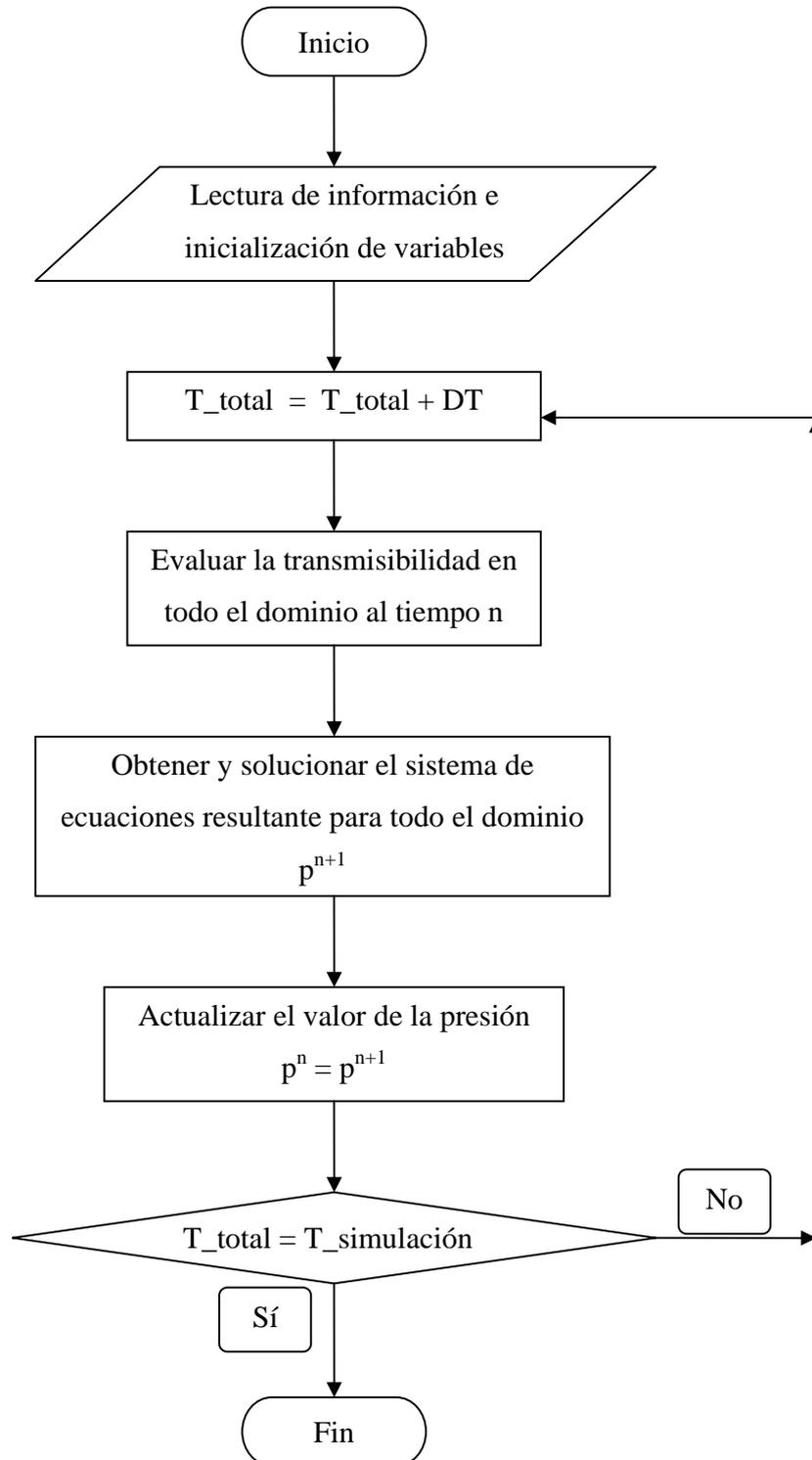
t	Tiempo
Δt	Intervalo de tiempo
Δ_t	Operador diferencial en tiempo
v	Volumen
V_b, V_r	Volumen de roca
\vec{V}	Velocidad
x	Dirección en coordenadas cartesianas
y	Dirección en coordenadas cartesianas
z	Dirección en coordenadas cartesianas
Δx	Ancho de celda en dirección x
Δy	Ancho de celda en dirección y
Δz	Ancho de celda en dirección z
Δ	Operador diferencial
ϕ	Porosidad
γ	Peso específico
λ	Movilidad
μ	Viscosidad
ρ	Densidad
σ	Factor de forma
θ	Coordenada en dirección angular

Subíndices y Superíndices

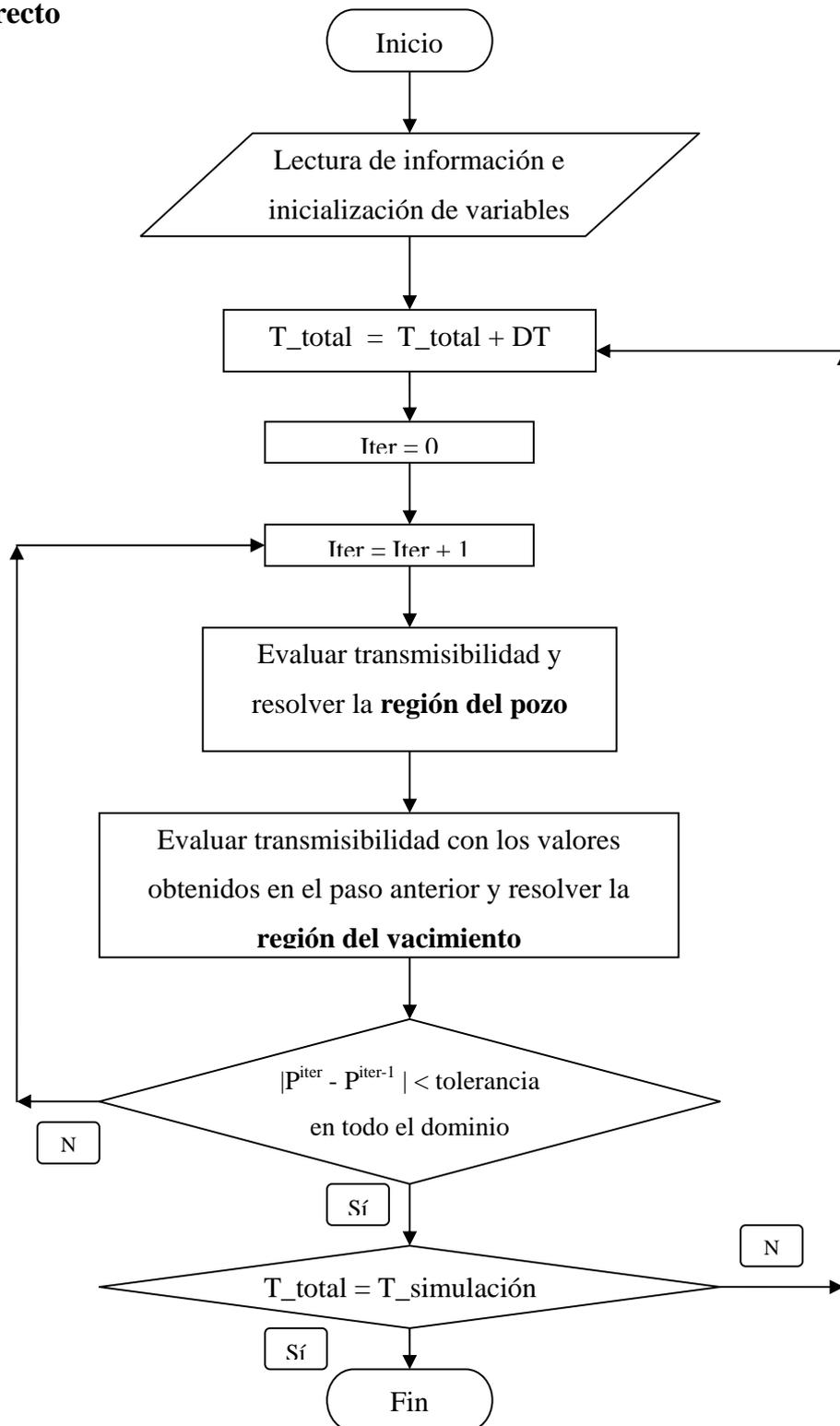
f	fase: gas, agua o aceite
w	agua
i	índice de bloque en dirección x ó r
j	índice de bloque en dirección y ó θ
z	índice de bloque en dirección z
m	matriz
mf	matriz-fractura
n	nivel de tiempo

Apéndice A. Diagramas de flujo.

Método Directo



Método Indirecto



Apéndice B. Modelo de doble porosidad-una permeabilidad.

Solución numérica.

Un sistema de doble porosidad es utilizado para representar los fluidos contenidos en un roca que posee fracturas, es decir, existen fluidos almacenados no solo en la matriz de la roca sino también en la fracturas. Por otra parte el calificativo de una permeabilidad se refiere a que solo un sistema (fracturas) transportan los fluidos hacia el pozo.

Cabe mencionar que existe un intercambio o aporte o flujo de fluidos entre la matriz y la fractura y de acuerdo con **Dixon y Pierson(1982)**⁽¹⁷⁾ esta se expresa como:

$$q_{mf} = \tau(P_f - P_m) \quad (\text{b.1})$$

donde τ es la transmisibilidad fractura/matriz y esta se define como:

$$\tau = \frac{\sigma V_r k_m}{\mu_m B_m} \quad (\text{b.2})$$

El parámetro σ en la ecuación anterior se refiere al factor de forma el cual se define como la relación entre el área expuesta al flujo entre los bloques de la matriz y las fracturas que lo rodean. **Warren & Root (1963)**⁽²¹⁾ y **Kazemi (1974)**⁽⁹⁾ proponen diferentes ecuaciones para calcular dicho parámetro en base a la información y condiciones que se tengan.

Ahora, planteando la ecuación de flujo para el medio continuo (fractura) y para una dirección (en coordenadas cartesianas) e incluyendo la transferencia de fluidos entre la matriz y la fractura (por unidad de volumen de roca) a través de un término fuente q_{mf} :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_f}{\mu_f B_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - q'_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right)_f \quad (\text{b.3})$$

Para el sistema de los bloques de matriz se tiene:

$$+ q'_{mf} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right)_m \quad (\text{b.4})$$

Discretizando la **ec. b.3** (y sustituyendo en esta **b.1**) así como la **ec. b.4** se tiene:

$$T_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} p_{f,i-1}^{n+1} - \left(T_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{Vr_i (\phi bc_t)_f^n}{\Delta t} \right) p_{f,i}^{n+1} + T_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} p_{f,i+1}^{n+1} - \left(\frac{\sigma V_r k_m}{\mu_m B_m} \right)_i (p_{f,i}^{n+1} - p_{m,i}^{n+1}) = - \frac{Vr_i (\phi bc_t)_f^n}{\Delta t} p_{f,i}^n \quad (\text{b.5})$$

$$q_{mf,i} = \frac{(V_r \phi bc_t)_{i,m}^n}{\Delta t} (p_{m,i}^{n+1} - p_{m,i}^n) \quad (\text{b.6})$$

Combinando las ecs. **b.1** y **b.5**:

$$\omega (p_{f,i}^{n+1} - p_{m,i}^{n+1}) = \psi (p_{m,i}^{n+1} - p_{m,i}^n) \quad (\text{b.7})$$

donde:

$$\omega = \left(\frac{\sigma V_r k_m}{\mu_m B_m} \right)_i$$

$$\psi = \frac{(\phi bc_t)_m^n}{\Delta t}$$

Despejando $p_{m,i}^{n+1}$ de la **ec. b.7**:

$$p_{m,i}^{n+1} = \frac{\omega_i p_{f,i}^{n+1} + \psi_i p_{m,i}^n}{\omega_i + \psi_i} \quad (\text{b.8})$$

Sustituyendo la **ec. b.8** en **b.5** y reorganizando se llega a:

$$\begin{aligned}
& T_{i-\frac{1}{2}} p_{f,i-1}^{n+1} - \left(T_{i+\frac{1}{2}} + T_{i-\frac{1}{2}} + \frac{Vr_i (\phi b c_t)_f^n}{\Delta t} - \left[\frac{\omega_i^2}{\psi_i + \omega_i} - \omega_i \right] \right) p_{f,i}^{n+1} + T_{i+\frac{1}{2}} p_{f,i+1}^{n+1} = \\
& - \frac{Vr_i (\phi b c_t)_f^n}{\Delta t} p_{f,i}^n - \frac{\omega_i \psi_i p_m^n}{\psi_i + \omega_i}
\end{aligned} \tag{b.9}$$

Extendiendo este análisis a tres dimensiones y evaluando las transmisibilidades a un tiempo n :

$$\begin{aligned}
& T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n p_{i,j,k-1}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2},k}^n p_{i,j-1,k}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2},j,k}^n p_{i-1,j,k}^{n+1} \\
& - \left[T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n + T_{i,j-\frac{1}{2}}^n + T_{i-\frac{1}{2},j}^n + T_{i+\frac{1}{2},j}^n + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \frac{Vr_{i,j,k} (\phi b c_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} - \left[\frac{\omega_i^2}{\psi_i + \omega_i} - \omega_i \right] \right] p_{i,j,k}^{n+1} \\
& + T_{i+\frac{1}{2},j,k}^n p_{i+1,j,k}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2},k}^n p_{i,j+1,k}^{n+1} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n p_{i,j,k+1}^{n+1} = - \frac{Vr_{i,j,k} (\phi b c_t)_{i,j,k}^n}{\Delta t} p_{i,j,k}^n \\
& - \frac{\omega_i \psi_i p_m^n}{\psi_i + \omega_i} + T_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} (D_{i,j,k+1} - D_{i,j,k}) - T_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n \gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}} (D_{i,j,k} - D_{i,j,k-1})
\end{aligned} \tag{b.10}$$

Como se puede observar las incógnitas en esta ecuación se reducen solo a la presión en la fractura simplificando la solución ya que se puede resolver primero la presión en para la fractura y después para la presión en la matriz a través de la **ec. b.8**.

La solución anterior es aplicable para la región del yacimiento sin embargo puede ser utilizada análogamente a la región del pozo teniendo cuidado en el cálculo de las transmisibilidades para cada región de acuerdo a las **tablas 1 y 2**.

Solución analítica de Warren & Root.

Warren & Root (1963)⁽²¹⁾ desarrollaron una solución analítica para flujo en una sola fase y flujo transitorio en yacimientos naturalmente fracturados e incorporaron el concepto de doble porosidad. Su trabajo asumió sistemas de fracturas continuas y uniformes paralelas a cada uno de los ejes de permeabilidad.

Presentaron dos soluciones:

-Yacimiento infinito:

$$P_{wD} = \frac{1}{2} \left[\text{Ln } t_D + 0.80908 + E_i \left(\frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right) - E_i \left(\frac{-\lambda t_D}{(1-\omega)} \right) \right] + S \quad (\text{b.11})$$

-Yacimiento finito:

$$P_{wD} = \left(\frac{2}{r_D^2 - 1} \right) \left[\frac{1}{4} + t_D + \frac{(1-\omega)^2}{\lambda} \left(1 - e^{\frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)}} \right) \right] - \frac{3r_D^4 - 4r_D^4 \text{Ln } r_D - 2r_D^2 - 1}{4(r_D^2 - 1)^2} \quad (\text{b.12})$$

donde (en unidades de campo):

$$\omega = \frac{(\phi c_t)_f}{(\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m}$$

$$\lambda = \sigma \frac{k_m}{k_f} r_w^2$$

$$P_D = \frac{k_f h [P_i - P(r, t)]}{141.2 q B \mu}$$

$$t_D = \frac{0.0002637 k_f t}{[(\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m] \mu r_w^2}$$

Apéndice C. Código del programa.

A continuación se muestra el código del programa realizado en esta tesis. Sólo se muestra el programa principal ya que en este se muestra a grandes rasgos la estructura del programa:

```
PROGRAM Completo

USE input_data

implicit none
INTEGER:: i,h
OPEN(UNIT=1000,FILE="pwf.xls",STATUS="unknown")

call lectura
call malla
call C_iniciales
call C_frontera

dt=1.0
T_acum=1.0D0

DO WHILE (T_acum <= Tiempo_t)
  call Coef_Reservoir
  call Coef_Well
  OPEN(UNIT=200,FILE="Matriz.xls",STATUS='Unknown')
  call sis_eqs_res
  call sis_eqs_well
  call Limits
  CLOSE(200)
  call Vec_B
  call GAUSS(A,B,orden_total,X)      !By Victor H. Arana

  do i=1,orden_total
    prs_new(i)=X(i)
  end do

  WRITE(1000,*)T_acum,Prs_old(nodes_re+nodes_we)/6894.7,Prs_new(nodes_re+nodes_we)/6894.7

  do i=1,orden_total
    Prs_old(i)=prs_new(i)
  end do

  DT=DT*1.1D0
  T_acum=T_acum+DT

  if (t_acum>Tiempo_t) then

    t_acum=t_acum-dt

    dt=Tiempo_t-t_acum

    t_acum=t_acum+dt
    h=h+1
  else
    dt=dt
    t_acum=t_acum
  end if
  if (h>1) exit
END DO
END PROGRAM Completo
```

REFERENCIAS.

1. **Akbar A. M y Arnold M. D;** Numerical Simulation of Individual Wells in a Field Simulation Model, Society of Petroleum Engineers Journal, 1974.
2. **Al-Mohannadi N., Ozkan E. y Kazemi H;** “Grid System Requirements in Numerical Modeling of Pressure-Transient Test in Horizontal Wells”, Artículo SPE 92041, 2004.
3. **Arana O. V. H;** Apuntes de Simulación Matemática de Yacimientos, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2005.
4. **Cedillo T. U. y Orantes L. R;** Descomposición de Dominio con Programación en Paralelo Aplicado a la Simulación Numérica de Yacimientos, Tesis de Licenciatura, UNAM, 2005.
5. **Correa N. E;** Use of Domain Decomposition and Local Grid Refinement in Reservoir Simulation, Tesis de Doctorado, Universidad de Stanford, 1991.
6. **Craft B. C. y Hawkins M. F. Jr ;** Applied Petroleum Reservoir Engineering, Prentice-Hall Inc., 1991.
7. **Emanuel G;** Analytical Fluid Dynamics, Universidad de Texas, 2001.
8. **Ghosh S;** “Curvilinear Local Grid Refinement”, Artículo SPE 50633, 1998.
9. **Kazemi H;** Numerical Simulation of Water-Oil Flow in Naturally Fractures Reservoir, Society of Petroleum Engineers Journal, 1976.

10. **Matthews C. S;** Transient, Semisteady-State and Steady-State, *Journal of Petroleum Technology*, 1986.
11. **Mrosovsky I;** Two Dimensional Radial Treatment of Wells within a Three-Dimensional Reservoir Model, *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1974.
12. **Odeh. A. S;** Reservoir Simulation...What is?, *Journal of Petroleum Technology*, 1969.
13. **Peaceman D. W;** “Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Simulation”, *Artículo SPE 6893*, 1977.
14. **Peaceman D. W;** “Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Simulation: Part 3—Off-Center and Multiple Wells within a Wellblock”, *Artículo SPE 16976*, 1987.
15. **Pedrosa O. A;** Use of Hybrid Grid in Reservoir Simulación, *Tesis de Doctorado*, Universidad de Stanford, 1984.
16. **Pedrosa O. A. y Aziz K;** “Use of Hybrid Grid in Reservoir Simulation”, *Artículo SPE 13507*, 1986.
17. **Pierson R. G. y Dixon T. N;** “Fractured Reservoir Simulation”, *Artículo SPE 9305*, 1982.
18. **Pozrikidis C;** *Numerical Computation in Science and Engineering*, Oxford University Press, 1998.
19. **Society Petroleum Engineers;** “SPE Reprint Series No. 20-Numerical Simulation II”, SPE, 1986.

20. **Streeter V. L. y Wylie F;** Mecánica de los Fluidos, Universidad de Michigan, 1998.
21. **Warren J. E. y Root P. J;** The Behavior of Naturally Fractured Reservoir, Society of Petroleum Engineers Journal, 1963.
22. **Williamson A. S. y Chappellear J. E;** “Representing Wells in Numerical Reservoir Simulation: Part 1-Theory”, Artículo SPE 7697, 1979.