

Estudio de una clase de ecuaciones de  
Schrödinger con potencial y no-linealidades  
no-locales

María de los Ángeles Sandoval Romero  
Director de la Tesis: Dr. Ricardo Weder Zaninovich



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Gracias  
una palabra sencilla de pronunciar, pocas veces sinceramente,  
esta es una de esas pocas.

En primer lugar a mi madre, que poco a poco se ha convertido en amiga, en confidente, en ejemplo. Ángeles Romero Blancas gracias por que sin ti, sin tu amistad, sin tu cariño no hubiese llegado ni a la mitad del camino en que me encuentro hoy.

Antonio, no sé de que forma mostrarte el agradecimiento por todo lo que has hecho por mí. Por ser ante todo mi amigo, aún en los momentos críticos. Por las discusiones matemáticas, políticas, filosóficas entre otras muy interesantes. Por tus consejos tan sabios. Por ser una pareja realmente pareja. Por darme tanto amor, gracias.

Gracias a mis médicos: los doctores Rodrigo Corona y Manuel Rodríguez. Al igual que el doctorado fue un camino muy largo el que me tomó llegar a ustedes pero afortunadamente llegué. Gracias por devolverme la fe... y la salud.

Gracias a mi tutor académico, el Dr. Ricardo Weder Zaninovich, tutor académico por siete años. La experiencia de trabajar con él me hizo crecer mucho como profesional y como ser humano. Agradezco infinitamente esa oportunidad.

Gracias a todos mis sinodales, por su apoyo, sus atinados consejos y sugerencias. Gracias Dr. Carlos Villegas Blas, Dr. Javier Rosenblueth, Dr. Rafael Del Rio, Dr. Stephen Sontz, Dr. Pavel Naumnkin y Dr. Juan Hector Arredondo.

Gracias a mis hermanos: a la Dra. Rosario Sandoval Romero por su ayuda profesional y su amor incondicional, por sus consejos, por su perseverancia...por su paciencia. Al Dr. Sergio Sandoval Romero también mi enorme agradecimiento como médico y como amigo y por el reinicio de nuestra relación de hermanos después de muchos años de ausencia. Y gracias a Luisa Sandoval Romero por que a pesar de ser la mas pequeña de todos siempre esla mas grande en carácter.

A mi bisabuela Margarita, mi abuela Rosa y a mi tía Teresa que me han demostrado que la fortaleza de nuestra familia esta en el carácter de nuestras mujeres. Gracias.

A mis amigos, los mejores que he podido tener: a Leti, mi "hermana", por el apoyo incondicional, por ser una amiga-maravilla. A Rafael por la compa-

ña, por los consejos, por la amistad. A Miguel, el complicado hermano académico que tuve y que agradezco mucho haber tenido y a el que le auguro mucho éxito, gracias. A mi primo Ernesto que me ha enseñado, mediante el ejemplo, a seguir adelante aún cuando ya no quieras seguir. A Eunice, por esta recién llegada amistad llena de discusiones interesantes, gracias tambien por ser mi “headhunter”. A mis “comaitas”, muy en particular a Victoria, a Varish, a Perla, a Elliete y a Danna.

Gracias inconmensurables a mi amigo, mi colega, mi maestro, el Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga. Me considero muy afortunada por haber tenido la fortuna de trabajar con él compartiendo muchos momentos gratos.

Y finalmente, no puedo dejar de la lista a Sissi, a Galileo y al recién llegado Darwin que, con sus travesuras y compañía, me han enseñado que el amor no es un sentimiento exclusivamente humano.

A todos, muchas gracias.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Motivación del problema</b>	<b>5</b>
2.1. La motivación física . . . . .	5
2.2. La motivación química . . . . .	9
<b>3. Problema de Cauchy</b>	<b>13</b>
3.1. Problema local de Cauchy. Soluciones $L^2$ . . . . .	23
3.2. Problema local de Cauchy. Soluciones $\mathcal{H}_Q^1$ . . . . .	27
3.3. Problema local de Cauchy. Soluciones $\mathcal{H}_Q^2$ . . . . .	28
3.4. Regularidad . . . . .	30
3.5. Soluciones Globales . . . . .	32
<b>4. Problema de Dispersión</b>	<b>35</b>
4.1. Solución del problema de dispersión directo. Construcción del operador de dispersión. . . . .	45
4.2. Solución del problema inverso . . . . .	63

# Índice de figuras

2.1. Los enantiometros del bromoclorofluorometano. La figura a la derecha es la imagen original (la molécula del bromoclorofluorometano) y la figura a la izquierda es la imagen especular de la original. . . . .	10
4.1. Dinámica de un sistema de dispersión no lineal, lineal y libre.	65

## Resumen

En este trabajo consideraremos un estudio completo de una clase de ecuaciones de Schrödinger con potencial y con no linealidades no locales. Este tipo de ecuaciones tienen aplicaciones en la física mesoscópica y en modelos de estructura molecular. Estudiaremos con detalle el problema de Cauchy i.e. el problema de valores iniciales de este tipo de ecuaciones. En particular, estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones locales así como globales, la dependencia continua en los datos iniciales y el problema de regularidad. Para este tipo de problema no consideraremos restricciones en el crecimiento de la parte positiva del potencial.

También vamos a considerar el estudio del problema de dispersión en el caso en el que nuestros potenciales decrecen en el infinito. Construiremos entonces un operador de dispersión y más aún daremos un método para la reconstrucción única del potencial a partir de considerar el límite para amplitudes pequeñas del operador de dispersión. En el caso particular del capacitor cuántico, será posible recuperar todos los parámetros físicos que caracterizan al sistema.



# Capítulo 1

## Introducción

Las ecuaciones que Schrödinger con potencial y con no linealidades no locales concentradas en una región específica del espacio son utilizadas para modelar algunos interesantes problemas físicos, en particular en problemas de física mesoscópica. En [13], [12], [23], [22], [24] se introduce una ecuación de Schrödinger para modelar un capacitor cuántico. Haciendo varias consideraciones la ecuación a la que se llega, para describir el sistema, es:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \left[ -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + \alpha Q[u] \chi_{[b,c]} \right] u(x, t), \quad (1.1)$$

donde  $x, t \in \mathbb{R}$ ,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $m$  masa del electrón,  $\alpha$  es  $\frac{e^2}{C}$  ( $e$  es la carga del electrón y  $C$  define la capacidad del condensador),  $Q[u]$  es la carga total del condensador:

$$Q[u] = \int_b^c |u(x, t)|^2 dx, \quad (1.2)$$

y  $V(x)$  es el potencial exterior de la doble barrera  $V(x) = V_0(\chi_{[a,b]} + \chi_{[c,d]})$ ,  $a < b < c < d$  (para  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $\chi_A$  es la función característica de  $A$ ).

En [13], [23] los autores dan la descripción del sistema físico que describe la ecuación (1.1): este consiste en una nube de electrones moviéndose dentro de una doble barrera potencial electrónica. La región confinada entre estas barreras actúa como un condensador (capacitor) cuya energía cambia en función a la carga electrónica atrapada adentro. Los autores del artículo justifican la localización de la interacción por la existencia de estados de resonancia que permiten el confinamiento de la partícula en un tiempo largo dentro de la doble barrera y con ello se garantiza la acumulación de carga. En [13] los autores trabajan con la ecuación mediante una consideración adiabática que permite ver al modelo como un sistema de ecuaciones ordinarias y se presentan simulaciones numéricas.

En el caso que nosotros vamos a considerar tomaremos una generalización de (1.1) a saber:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + \lambda(V_1(x)u, u)V_2(x) \right] u(x, t), \quad (1.3)$$

donde  $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$ ,  $(\cdot, \cdot)$  es el producto interior en  $L^2$  y  $\lambda$  es una constante compleja. Consideraremos además que  $V, V_i \in \mathcal{Z}$ ,  $i = 1, 2$  (la determinación

de las  $\mathcal{Z}$  estará dada dependiendo del caso en el que estemos trabajando). La ecuación (1.1) se recupera de (1.3) considerando  $V(x) = V_0(\chi_{[a,b]} + \chi_{[c,d]})$ ,  $a < b < c < d$ ;  $V_1 = V_2 = \chi_{[b,c]} \in L^q$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  y  $\lambda = \alpha$ .

En el caso en el que  $V$  es una doble barrera,  $V_1 = V_2$  son potenciales reales y  $\lambda \in \mathbb{R}$  la ecuación ha sido bien estudiada como modelo de estructuras moleculares (por ejemplo: moléculas piramidales). Se puede consultar por ejemplo [7], [6], [11], [10], [29], [28], [27].

En el trabajo que se presenta a continuación se estudia de forma detallada a la ecuación (1.3). La forma en como se presenta es la siguiente:

- En la primera parte se abordará el estudio del problema de Cauchy de (1.3) para una clase de potenciales  $V$  cuya parte positiva puede diverger al infinito. Se considerará primero el problema de existencia y unicidad de soluciones locales y también el de dependencia continua para datos iniciales en  $L^2 =: \mathcal{H}^0$ ,  $\mathcal{H}_Q^1$  y en  $\mathcal{H}_Q^2$ . (Estos últimos dos espacios serán definidos en la sección 2) Más aún se resolverá el problema de regularidad de las soluciones y el de globalización de las soluciones locales.
- En una segunda parte se desarrollará el estudio del problema de dispersión directo e inverso de (1.3) esto es: se resuelve el problema de existencia y unicidad de las soluciones de (1.3) que cumplen un comportamiento asintótico específico y dado que con ello se garantiza la existencia del operador de dispersión (no lineal) se da un método para

reconstruir, a partir de él, el potencial y la constante de acoplamiento  $\lambda$ .

Todos los resultados originales contenidos en esta tesis fueron publicados en el artículo de Sandoval-Romero y Weder [\[30\]](#).

# Capítulo 2

## Motivación del problema

Antes de entrar de lleno al problema matemático vamos a ahondar, en esta sección, en torno a las aplicaciones de nuestra clase de ecuaciones (1.3).

### 2.1. La motivación física

Una descripción completa de esta motivación puede ser hallada en [13].

La interacción entre electrones puede jugar un papel crucial en las propiedades de transporte eléctrico en sistemas mesoscópicos. Como un ejemplo consideremos una nube de electrones moviéndose a lo largo de una estructura heterogénea de doble barrera en donde la región del espacio confinada dentro de las barreras actúa como un capacitor (condensador) cuya energía cambia de acuerdo a la carga electrónica confinada adentro. La localización de la interacción se encuentra justificada por la existencia de un estado de

resonancia que permite un tiempo (largo) de viaje de los electrones a lo largo de la doble barrera y por tanto permite la acumulación de carga.

La evolución del sistema puede ser escrita en términos del operador anti-conmutativo asociado a la nube electrónica:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) + \int \frac{e^2}{\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}', t) \hat{\Psi}(\vec{r}', t) d\vec{r}' \right] \hat{\Psi}(\vec{r}, t), \quad (2.1)$$

donde  $V(x) = V_0(\chi_{[a,b]} + \chi_{[c,d]})$ , con  $a < b < c < d \in \mathbb{R}$ , depende solo de la coordenada  $x$  ortogonal a las interfaces. En [13] se asume un desacoplamiento entre los grados de libertad paralelos y ortogonales a las interfaces y se establece una descripción aproximada en términos de la ecuación de Hartree para una función de onda de una partícula que depende solamente de la coordenada ortogonal. En un sentido más preciso, esto quiere decir que se factoriza el campo principal de una partícula de la siguiente forma:

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) \equiv \langle \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \rangle \simeq u(x, t) \phi(y, z) e^{\frac{i}{\hbar} E_{\parallel} t}, \quad (2.2)$$

en donde  $\langle \dots \rangle$  es el valor de expectación del estado del sistema de  $n$  cuerpos al tiempo  $t$ .  $\phi(y, z)$  es la solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre en el plano paralelo a las interfaces ( $yz$ ) y normalizada a uno. Solo se considera el término de interacción efectivo adentro de la doble barrera  $[b, c]$  y se aproxima mediante la expresión:

$$\int \frac{e^2}{\epsilon |\vec{r} - \vec{r}'|} |u(x', t)|^2 |\phi(y', z')|^2 d\vec{r}' \simeq \alpha Q[u] \chi_{[b,c]}. \quad (2.3)$$

la constante  $\alpha$  es  $\frac{e^2}{C}$  donde  $C$  es la constante que queda como resultado de integrar en el plano  $yz$  y de tomar el promedio del potencial en el ancho de las paredes de la doble barrera. Dimensionalmente hablando  $C$  es la capacidad de la doble barrera. Por otro lado,

$$Q[u] = \int_b^c |u(x, t)|^2 dx \quad (2.4)$$

es la carga adimensional atrapada en  $[b, c]$  al tiempo  $t$ . Con todas las consideraciones hechas anteriormente concluimos que (2.2) queda como,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \left[ -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + \alpha Q[u] \chi_{[b,c]} \right] u(x, t), \quad (2.5)$$

dicha ecuación describe la dinámica del capacitor. Se debe dar una condición inicial,  $u(x, 0)$ . En el caso del artículo de [13] la condición que se da es la de suponer que  $u(x, 0)$  es un paquete de onda Gaussiano moviéndose en la dirección de la doble barrera y originalmente colocado lejos de la barrera  $[b, c]$ , esto es  $Q \simeq 0$  en  $t = 0$ .

Debemos de notar que (2.5) tiene dos cantidades que se conservan, a saber:

- i) El número de partículas

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x, t)} u(x, t) dx, \quad (2.6)$$

- ii) La energía del sistema

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x, t)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] u(x, t) dx + \frac{1}{2} \alpha Q[u]^2. \quad (2.7)$$

La principal característica de la ecuación (2.5) es que la no linealidad está concentrada solo en la región donde el estado resonante del sistema está localizado. Este tipo de ecuaciones no lineales es el prototipo de ciertas ecuaciones no lineales que son utilizadas para modelar varias situaciones físicas comunes en la física mesoscópica.

En [13] se muestra que conforme se de la evolución de las soluciones en intervalos de tiempo finito es posible usar una teoría adiabática que simplifica enormemente el problema. De esta forma es posible reformular el problema en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias describiendo la evolución en regiones no lineales, acoplado (débilmente) a un sistema de ecuaciones de Schrödinger estándar de describe la propagación en las regiones lineales. De esta forma los autores de [13] se centran en dar simulaciones numéricas pero sin resolver el problema analítico.



## 2.2. La motivación química

Ahora hablaremos de otro caso particular de nuestra clase de ecuaciones (1.3) que tiene aplicaciones en modelos de estructura molecular. Para una descripción completa se pueden consultar [7], [6], [11], [10], [29], [28], [27].

Consideremos la siguiente ecuación de Schrödinger no lineal dependiente del tiempo,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x)\psi + \epsilon |\psi|^2 \psi \quad \epsilon \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

donde  $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ,  $d \geq 1$  y  $V$  es una doble barrera potencial. Esta ecuación ha tomado relevancia pues ha sido propuesta como modelo de moléculas chirales [28].

El término chiral esta asociado a un objeto que no puede superponerse a su imagen especular. La imagen especular de un objeto (bidimensional o tridimensional) es la imagen virtual formada por la reflexión de la imagen original en un espejo plano; se trata de una figura virtual del tamaño de la original. Matemáticamente hablando se trata de una transformación que lo que hace es cambiar el signo de uno de los ejes coordenados. Debemos mencionar, además, que la imagen especular de un objeto es la misma no importando la orientación del espejo pues en la definición de imagen especular se considera que dos imagenes especulares son equivalentes si existe una transformación afin que lleve a una en la otra. En química este término esta relacionado con estructuras moleculares y el estudio relacionado a este

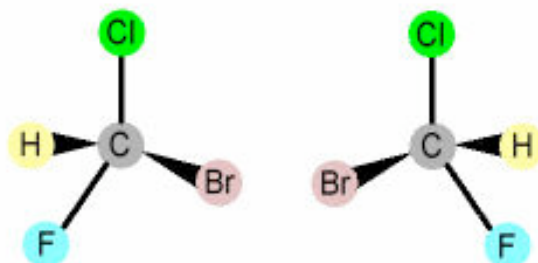


Figura 2.1: Los enantiomeros del bromoclorofluorometano. La figura a la derecha es la imagen original (la molécula del bromoclorofluorometano) y la figura a la izquierda es la imagen especular de la original.

fenómeno es un área muy activa.

Una molécula es quiral cuando no puede ser superpuesta con respecto a su imagen especular. (por superposición se entiende que la imagen original no puede transformarse en la especular únicamente mediante rotaciones y translaciones) (Ver figura 2.1). Cuando se tiene la imagen original y la especular de la molécula decimos que tenemos los enantiomeros de la molécula. La propiedad de quiralidad en las moléculas es de suma importancia pues tiene aplicaciones del estereoquímica, química orgánica e inorgánica, física química y en bioquímica.

El término de quiralidad se refiere a no poder superponer imágenes especulares y se distingue de aquellas imágenes especulares que si pueden ser superpuestas (e.g. la letra "A"). El ejemplo más común y sencillo de imágenes especulares que no se pueden superponer son nuestras manos izquierda y derecha: no importa como sean orientadas una con respecto a la otra no es

posible alinear la mano derecha con la izquierda.

Es la simetría de una molécula (o de cualquier otro objeto) lo que determina si es chiral o no. Una figura es achiral (no chiral) si y sólo si la figura es invariante bajo una isometría que invierte la orientación. (En geometría Euclidiana una isometría se puede escribir como  $v \rightarrow \mathbf{A}v + b$ , donde  $\mathbf{A}$  es una matriz ortogonal de determinante  $\pm 1$  y  $b$  es un vector en el espacio correspondiente. Si el determinante de  $\mathbf{A}$  es  $-1$  decimos que la isometría invierte orientación y si el determinante es  $+1$  entonces decimos que la orientación se preserva.)

Regresando al problema (2.8), en [28] considerando el límite semiclásico, asumiendo  $d = 1$  y otras generalidades la doble barrera potencial, se obtiene el comportamiento asintótico de la solución  $\psi$  con una estimación precisa del error. También en dicho trabajo el autor demuestra que el fenómeno pulsante entre las dos barreras de un estado inicialmente compuesto por los dos eigenestados mas bajos desaparece conforme la no linealidad incrementa.

Un estudio similar al que se desarrolló en [28] se puede encontrar en [10] en el que la parte no lineal esta dada por  $\epsilon(\psi, \psi)h\psi$  y  $h$  es una función impar dada. De forma explícita la ecuación de Schrödinger que se estudia es la siguiente:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x)\psi + \epsilon(\psi, h\psi)h\psi \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Debemos notar que nuestra clase de ecuaciones de Schrödinger (1.3) tiene

como caso particular el tipo de no linealidades considerados en (2.9) con la diferencia de que este trabajo se ha dedicado enteramente a estudiar las soluciones analíticas del problema.

## Capítulo 3

# Problema de Cauchy para potenciales localmente acotados. Problema de Regularidad y Problema de soluciones globales.

En esta sección abarcaremos el estudio de (1.3) y resolveremos el problema de existencia y unicidad de soluciones además de el de dependencia continua con respecto al valor inicial; pero aún mas consideraremos el problema de regularidad de las soluciones y el de globalización de las soluciones locales.

Consideremos la ecuación de Schrödinger no lineal con potencial (1.3), con condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= -\frac{d^2}{dx^2} u(x, t) + V(x)u(x, t) + (V_1(x)u, u)V_2(x)u, \\ &\text{con } u(x, 0) = \phi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

a donde hemos incorporado la constante  $\lambda$  en  $V_2$  pues en esta sección  $\lambda$  no es relevante. El potencial  $V(x)$  es independiente del tiempo; consideraremos potenciales del siguiente tipo:

$$V := V_3 + V_4 \text{ con } V_j \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \quad j = 3, 4, \quad V_3 \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} |V_4(y)| \, dy < \infty. \quad (3.3)$$

Designaremos  $Q := \sqrt{V_3}$  y a  $D(Q)$  como el dominio en  $L^2$  del operador de multiplicación  $Q$ .

La ecuación (3.3) implica que  $(V_4, \cdot)$  es una forma cuadrática relativamente acotada respecto a  $H_0$  con cota relativa cero de este modo,

$$|(V_4\phi, \phi)| \leq \epsilon \|\phi'\|_{L^2}^2 + K_\epsilon \|\phi\|_{L^2}^2. \quad (3.4)$$

Para la demostración de este resultado se utiliza primero lo siguiente:

para cualquier  $\phi \in \mathcal{H}^1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  y para toda  $x, y \in [n, n+1]$  se tiene que,

$$\begin{aligned} |\phi(x)|^2 - |\phi(y)|^2 &= \int_x^y (\phi(z)\overline{\phi(z)})' dz = 2 \operatorname{Re} \int_x^y \phi(z)\overline{\phi'(z)} dz \leq \\ &\int_x^y 2|\phi(z)||\phi'(z)| dz \leq \delta \int_n^{n+1} |\phi'(z)|^2 dz + \frac{1}{\delta} \int_n^{n+1} |\phi(z)|^2 dz, \end{aligned}$$

(En donde aplicamos la desigualdad  $2ab \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta} b^2$ ). Por el teorema del valor medio podemos escojer una  $y \in [n, n+1]$  tal que,

$$|\phi(y)|^2 \leq \int_n^{n+1} |\phi(z)|^2 dz,$$

de este modo,

$$|\phi(x)|^2 \leq \delta \int_n^{n+1} |\phi'(z)|^2 dz + (1 + \frac{1}{\delta}) \int_n^{n+1} |\phi(z)|^2 dz.$$

Multiplicando por  $|V_4(x)|^2$ , integrando (sobre  $x$ ) de  $n$  a  $n+1$  y considerando que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} |V_4(y)| dy = C$  se tiene que:

$$\int_n^{n+1} |V_4(x)||\phi(x)|^2 dx \leq C\delta \int_n^{n+1} |\phi'(z)|^2 dz + C(1 + \frac{1}{\delta}) \int_n^{n+1} |\phi(z)|^2 dz.$$

Tomando  $\delta$  lo suficientemente pequeña para que  $C\delta = \epsilon$  y dado que la recta real es la unión de intervalos de longitud 1, si consideramos la suma sobre todo  $\mathbb{Z}$  obtendremos el resultado.

Sabemos que la forma cuadrática,

$$h(\psi, \varphi) := \left( \frac{d}{dx} \psi, \frac{d}{dx} \varphi \right) + (V\psi, \varphi), \quad (3.5)$$

con dominio  $D(h) = \mathcal{H}^1 \cap D(Q)$ ,<sup>1</sup> es cerrada y acotada por debajo.

En efecto, sea  $\{\phi_n\}$  una sucesión en el dominio de  $h$ ,  $Dom(h)$ ,  $\{\phi_n\}$  es de Cauchy en la norma  $\|\cdot\|_{+1}^2 := h(\cdot, \cdot) + (M+1)\|\cdot\|^2$ , en donde  $M$  es la cota inferior dada por la condición de acotamiento de la forma cuadrática (el hecho de que la forma sea semiacotada es una consecuencia de la definición y de que  $V_4$  cumple (3.4)). Dado que  $\{\phi_n\}$  es de Cauchy en la norma  $\|\cdot\|_{+1}$  entonces  $\{\phi_n\}$  es de Cauchy en la norma  $\mathcal{H}^1$  y además  $\{\sqrt{V_3}\phi_n\}$  también es de Cauchy en la norma  $L^2$ . Con estos resultados y con (3.4) se tiene que  $h$  es cerrada.

Dado que en [25] tenemos el siguiente teorema:

**Teorema** Si  $h$  es una forma cuadrática semiacotada y cerrada, entonces  $h$  es la forma cuadrática de un único operador autoadjunto.

Denotamos entonces por  $H$  al operador (acotado por debajo y autoadjunto) asociado a la forma cuadrática  $h$ . De forma que,

$$H\phi = H_0\phi + V\phi, \text{ para } \phi \in D(H) := \{\phi \in D(h) : H_0\phi + V\phi \in L^2\}. \quad (3.6)$$

Consideremos  $N > 0$  tal que  $H + N > 1$  y denotemos,

---

<sup>1</sup> Denotaremos por  $\mathcal{W}_{j,k}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $1 \leq k \leq \infty$  al espacio de Sobolev [1] de todas las funciones en  $L^k$  tales que todas sus derivadas de orden menor o igual a  $j$  pertenecen a  $L^k$ . Por  $\mathcal{H}^j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  denotaremos al espacio de Sobolev  $\mathcal{W}_{j,2}$ .



$$D := \bigcap_{m=-\infty}^{\infty} D((H + N)^m).$$

Definiremos, para cualquier  $s \in \mathbb{R}$ , a  $\mathcal{H}_Q^s$  como la completación de  $D$  en la norma  $\|(H + N)^{\frac{s}{2}} \cdot\|_{L^2}$ . Entonces  $H_Q^0 = L^2$ ,  $H_Q^1 = D(\sqrt{H + N})$ ,  $H_Q^2 = D(H)$ .

El hecho de que  $\mathcal{H}_Q^0 = L^2$ , es consecuencia de que  $L^2$  es un espacio completo y de que  $D$  es denso en  $L^2$  bajo la norma en  $L^2$ . Esto último se demuestra de la siguiente forma: para cualquier  $x \in L^2$  consideremos la sucesión  $x_n = \chi_{[-n,n]}(H + N)x$ . Notemos que  $x_n \in D$  dado que  $\int \lambda^{2n} d(E(\lambda)x_n, x_n) = \int_{-n}^n \lambda^{2n} d(E(\lambda)x, x) \leq Cn^{2n} \|x\|_{L^2}^2 < \infty \forall n$ . Finalmente podemos concluir que  $x_n \rightarrow x$  en  $L^2$  como una consecuencia del teorema de convergencia dominada de Lebesgue en  $L^2$ .

Por otro lado  $\mathcal{H}_Q^1 = D(\sqrt{H + N})$  pues  $(D(\sqrt{H + N}), \|\sqrt{H + N} \cdot\|_{L^2})$  es completo ya que, si consideramos una sucesión de Cauchy  $\phi_n$  en la norma  $\|\sqrt{H + N}\|_{L^2}$  entonces  $\phi_n$  será una sucesión de Cauchy en  $L^2$  (pues  $\sqrt{H + N}$  es un operador positivo). Dado que  $L^2$  es un espacio completo la sucesión convergerá en  $L^2$ . Finalmente, dado que  $\sqrt{H + N}$  es un operador cerrado en  $L^2$  entonces existirá  $\phi \in D(\sqrt{H + N})$  tal que  $\sqrt{H + N}\phi_n \rightarrow \sqrt{H + N}\phi$  en  $L^2$ .

El hecho de que  $D$  sea denso en  $D(\sqrt{H + N})$  es consecuencia de que para todo  $x \in D(\sqrt{H + N})$  podemos exhibir una sucesión  $x_n$  tal que  $x_n \rightarrow x$  en la norma  $\|\sqrt{H + N}\|_{L^2}$ . La sucesión que se exhibe es la misma que en el caso anterior i.e.  $x_n = \chi_{[-n,n]}(H + N)x$ ; notemos que dicha sucesión

converge en la norma deseada puesto que para toda  $x \in D((H+N)^{\frac{s}{2}})$  tenemos que  $(H+N)^{\frac{s}{2}}(x-x_n) = \lambda^{\frac{s}{2}}\chi_{[-n,n]^c}(H+N)x$  por lo que  $\|(H+N)^{\frac{s}{2}}(x-x_n)\|_{L^2}^2 = \int \lambda^s \chi_{[-n,n]^c}(\lambda) d(E(\lambda)x, x)$  que converge a cero otra vez con un argumento de convergencia dominada (dado que  $\chi_{[-n,n]^c}|\lambda|^s \leq |\lambda|^s$  y dado que  $\int \lambda^s d(E(\lambda)x, x) < \infty$ ).

El último caso,  $\mathcal{H}_Q^2 = D(H)$ , se puede fácilmente demostrar en función de los resultados anteriores.

En los casos de  $\mathcal{H}_Q^1$  y  $\mathcal{H}_Q^2$  consideremos las normas equivalentes,

$$\|v\|_{\mathcal{H}_Q^1} \cong \max \left[ \|v\|_{\mathcal{H}^1}, \|Qv\|_{L^2} \right], \quad (3.7)$$

$$\|v\|_{\mathcal{H}_Q^2} \cong \max \left[ \|v\|_{\mathcal{H}_Q^1}, \left\| \left( -\frac{d^2}{dx^2} + V \right) v \right\|_{L^2} \right]. \quad (3.8)$$

En el caso en el que  $V_3 = 0$ ,  $(V, \cdot)$  es una forma cuadrática relativamente acotada respecto a  $H_0$  con cota relativa cero. Notemos además que en este caso  $\mathcal{H}_Q^1 = \mathcal{H}^1$ . De este modo las soluciones  $\mathcal{H}_Q^1$  son simplemente soluciones  $\mathcal{H}^1$ .

Debemos notar que si,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} |V(x)|^2 dx < \infty, \quad (3.9)$$

se sigue de (3.4),  $\|V\phi\|_{L^2}^2 = (V^2\phi, \phi)$  y de  $(\phi', \phi') \leq \|H_0\phi'\|^2 + \|\phi\|^2$  que  $V$  es relativamente acotado con respecto a  $H_0$  con cota relativa cero: esto es, para cualquier  $\epsilon > 0$  existe una constante  $K_\epsilon$  tal que,

$$\|V\phi\|_{L^2}^2 \leq \epsilon \|H_0\phi\|_{L^2}^2 + K_\epsilon \|\phi\|_{L^2}^2 \quad (3.10)$$

por lo que  $\mathcal{H}_Q^2 = \mathcal{H}^2$  ([15],[25] Vol. II) y de esta forma las soluciones  $\mathcal{H}_Q^2$  son soluciones  $\mathcal{H}^2$ .

Para aclarar el punto  $\mathcal{H}_Q^2 = \mathcal{H}^2$ , debemos de recordar las siguientes definiciones y el siguiente resultado fundamental.

**Definición** Sean  $A$  y  $B$  dos operadores lineales densamente definidos en un espacio de Hilbert  $X$ . Supongamos que:

- $D(A) \subset D(B)$ ,
- Para alguna  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$  y para toda  $\phi$  en  $D(A)$

$$\|B\phi\| \leq a\|A\phi\| + b\|\phi\|,$$

entonces  $B$  se dice que es  $A$ -acotado. Al ínfimo de las  $a$  que cumplen con la propiedad se le llama cota relativa de  $B$  con respecto a  $A$ . Si la cota relativa es cero, decimos que  $B$  es infinitesimalmente pequeño con respecto a  $A$  y escribimos  $B \ll A$ .

Algunas veces es conveniente reemplazar la segunda condición de nuestra definición por:

- Para alguna  $\tilde{a}$  y  $\tilde{b}$  en  $\mathbb{R}$  y para toda  $\phi$  en  $D(A)$

$$\|B\phi\|^2 \leq \tilde{a}^2 \|A\phi\|^2 + \tilde{b}^2 \|\phi\|^2.$$

**Teorema (El teorema de Kato-Rellich)** Supongamos que  $A$  es autoadjunto,  $B$  simétrico y  $B$  es  $A$ -acotado con cota relativa  $a < 1$ . Entonces  $A + B$  es autoadjunto en  $D(A)$  y esencialmente autoadjunto en cualquier núcleo (“core”) de  $A$ . Más aún si  $A$  es acotado por debajo por  $M$  entonces  $A + B$  es también acotado por debajo por la cota  $M - \max\{\frac{b}{1-a}, a|M| + b\}$  donde  $a$  y  $b$  estan dadas por la definición de  $A$ -acotado.

Para obtener nuestro resultado simplemente hay que hacer notar que por (3.10)  $V$  es  $H_0$ -acotado y que se puede aplicar el Teorema de Kato-Rellich.

Definamos al intervalo  $I$  como sigue:  $I := [0, T]$ , si  $T < \infty$  e  $I := [0, \infty)$ , si  $T = \infty$ . Se sigue de cálculo funcional para operadores autoadjuntos que  $H$  es un operador acotado de  $\mathcal{H}_Q^s$  a  $\mathcal{H}_Q^{s-2}$ , que además  $e^{-itH}$  es un grupo unitario fuertemente continuo en  $\mathcal{H}_Q^s$ , ( $s \in \mathbb{R}$ ) y que  $e^{-itH}$  es un operador acotado de  $\mathcal{H}_Q^s$  a  $C(I, \mathcal{H}_Q^s) \cap C^1(I, \mathcal{H}_Q^{s-2})$  con,

$$i \frac{\partial}{\partial t} e^{-itH} \phi = H e^{-itH} \phi = e^{-itH} H \phi. \quad (3.11)$$

Para demostrar esto último notemos lo siguiente: por el teorema espectral tenemos que:

$$e^{-itH}\phi = \int -e^{it\lambda}dE(\lambda)\phi, \quad (3.12)$$

y que

$$H\phi = \int \lambda dE(\lambda)\phi. \quad (3.13)$$

Notemos que  $H\phi \in \mathcal{H}_Q^{s-2}$  pues,

$$\begin{aligned} \|H\phi\|_{\mathcal{H}_Q^{s-2}}^2 &= \int (1 + \lambda^2)^{s-2} \lambda^2 d(E(\lambda)\phi, \phi) \leq \\ &\int (1 + \lambda^2)^s d(E(\lambda)\phi, \phi) = \|\phi\|_{\mathcal{H}_Q^s}^2 < \infty, \end{aligned} \quad (3.14)$$

ya que  $\phi \in \mathcal{H}_Q^s$ .

Finalmente observemos que,

$$\begin{aligned} \left\| i \frac{e^{-i(t+h)H}\phi - e^{-itH}\phi}{h} - e^{-itH}H\phi \right\|_{\mathcal{H}_Q^{s-2}} &= \\ \int \left| i \frac{e^{-ih\lambda} - 1}{h} - \lambda \right|^2 (1 + \lambda^2)^{s-2} d(E(\lambda)\phi, \phi). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dado que,

$$\lim_{h \rightarrow 0} i \frac{e^{-ih\lambda} - 1}{h} - \lambda = 0, \quad (3.16)$$

y dado que

$$\left| i \frac{e^{-ih\lambda} - 1}{h} - \lambda \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^{h\lambda} e^{-is} ds \right| \leq |\lambda|, \quad (3.17)$$

entonces tenemos que,

$$\left| i \frac{e^{-ih\lambda} - 1}{h} - \lambda \right|^2 (1 + \lambda^2)^{s-2} \leq (1 + \lambda^2)^s. \quad (3.18)$$

De este modo podemos considerar el teorema de convergencia dominada en (3.15) para así obtener que,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| i \frac{e^{-i(t+h)H} \phi - e^{-itH} \phi}{h} - e^{-itH} H \phi \right\|_{\mathcal{H}_Q^{s-2}} = 0. \quad (3.19)$$

Supongamos que  $V_1, V_2 \in L^\infty$ . Diremos que  $u$  es solución en  $L^2$  de (3.1) si  $u \in C(I, L^2) \cap C^1(I, \mathcal{H}_Q^{-2})$  y si satiface (3.1).

Multiplicando ambos lados de (3.1) (evaluados en  $\tau$ ) por  $e^{-itH}$  e integrando (en  $\tau$ ) de 0 a  $t$  tendremos que,

$$u(t) = e^{-itH} \phi + \frac{1}{i} G(F(u)), \quad \text{con } F(u) = (V_1 u, u) V_2 u, \quad (3.20)$$

donde hemos definido,

$$G(u) := \int_0^t e^{-i(t-\tau)H} u(\tau) dt. \quad (3.21)$$

Por otro lado, si  $F(u) \in L_{loc}^\infty(I, \mathcal{H}_Q^s)$  entonces  $G(F) \in C(I, \mathcal{H}_Q^s) \cap C^1(I, \mathcal{H}_Q^{s-2})$

y

$$i \frac{\partial}{\partial t} G F = H G F + F. \quad (3.22)$$

De ese modo si  $u \in C(I, L^2)$  es solución de (3.20) entonces se sigue que  $u \in C^1(I, \mathcal{H}^{-2})$  por lo que  $u$  es solución de (3.1) (tomando la derivada de ambos lados de (3.20)) y de este modo las ecuaciones (3.1),(3.20) son equivalentes.

En lo que sigue, vamos a trabajar con la ecuación (3.20).

### 3.1. Problema local de Cauchy. Soluciones $L^2$

Definimos los siguientes espacios:  $\mathcal{N} := C(I, L^2)$  y  $\mathcal{N}^j := C(I, \mathcal{H}_Q^j)$ . Denotaremos también por  $\mathcal{X}_R$  (para cualquier espacio de Banach  $\mathcal{X}$ ) a la bola unitaria con centro en el origen y radio  $R$ .

**Teorema 3.1.** [30] *Asumamos que  $V$  cumple (3.2),(3.3) y que  $V_1, V_2 \in L^\infty$ . Entonces, para cualquier  $\phi \in L^2$  existe una  $0 < T < \infty$  tal que (3.1) tiene una única solución  $u \in C(I, L^2)$  con  $u(x, 0) = \phi$ .  $T$  depende sólo de  $\|\phi\|_{L^2}$ .*

*Demostración.* Defina:

$$\Phi(u) = e^{-itH}\phi - iGF(u). \quad (3.23)$$

Dado que

$$F(u) - F(v) = (V_1u, u)V_2(u - v) + [(V_1(u - v), u) - (V_1v, v - u)]V_2v. \quad (3.24)$$

Y considerando  $u, v \in \mathcal{N}_R$  se tiene que,

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{N}} \leq \|V_1\|_{L^\infty} \|V_2\|_{L^\infty} (\|u\|_{\mathcal{N}} + \|v\|_{\mathcal{N}})^2 \|u - v\|_{\mathcal{N}} \leq 2CR^2 \|u - v\|_{\mathcal{N}}, \quad (3.25)$$

para toda  $u, v \in \mathcal{N}_R$ ; de este modo como  $e^{-itH}$  es unitario en  $L^2$ , se tiene que,

$$\|\Phi(u)\|_{\mathcal{N}} \leq \|\phi\|_{L^2} + CT\|u\|_{\mathcal{N}}^3 \leq \|\phi\|_{L^2} + CTR^3, \quad (3.26)$$

es decir,  $\Phi$  manda  $\mathcal{N}_R$  en  $\mathcal{N}_R$  tomando  $R, T$  tales que  $\|\phi\|_{L^2} + CTR^3 \leq R$ . Además se tiene que,

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\mathcal{N}} \leq 2CTR^2 \|u - v\|_{\mathcal{N}}, \text{ para } u, v \in \mathcal{N}_R, \quad (3.27)$$

por lo que  $\Phi$  es una contracción en  $\mathcal{N}_R$  (Si se toma  $\alpha = 2CTR^2 < 1$ ). De este modo, por el teorema de contracción [25],  $\Phi$  tiene un único punto fijo,  $u$ , que es solución de (3.1) en  $\mathcal{N}_R$ .

Supongamos que existe otra solución  $v \in \mathcal{N}$ . Por el argumento anterior tenemos que  $u(t) = v(t)$  para  $t \in [0, T_0]$  para algún  $T_0 \leq T$ . Iterando este argumento podemos concluir que  $v(t) = u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ .  $\square$

*Comentario 3.2.* [30] Sea  $T_m$  el tiempo de existencia maximal para que una solución  $u$  de (3.1) pueda ser extendida a una solución  $u \in C(T_m, L^2)$  con  $u(0) = \phi$ . Entonces si  $T_m$  es finito debe de pasar que  $\lim_{t \uparrow T_m} \|u\|_{L^2} = \infty$ .



En otras palabras, la solución debe existir para todo tiempo a menos de que la norma en  $L^2$  explote para un tiempo finito. Para probar este resultado supongamos que  $\|u\|_{L^2}$  permanece acotada conforme  $t \uparrow T_m$ . Entonces por el Teorema 3.1 podemos extender la solución de manera continua para  $T_m + \epsilon$  para alguna  $\epsilon > 0$ , contradiciendo la definición de  $T_m$ .

Como consecuencia del Teorema 3.1 podemos demostrar que (3.1) tiene una única solución en  $\mathcal{N}$  con  $u(x, 0) = \phi$ . Supongamos que existen dos soluciones  $u_1, u_2$  de (3.1) en  $C(I, L^2)$  entonces por el Teorema 3.1  $u_1(t) = u_2(t)$  para  $t \in [0, T_0]$   $0 < T_0 < T$ . Sea  $T_m$  el tiempo de existencia máximo para el cual esto sucede i.e  $u_1(t) = u_2(t)$   $t \in [0, T_m)$ . Si consideramos que  $T < \infty$  entonces  $T = T_m$  pues de otro modo si suponemos que  $T_m < T$  y como las soluciones son continuas se tendría que,  $u_1(t) = u_2(t)$   $t \in [0, T_m + \epsilon)$  con  $\epsilon > 0$ ; con lo que se contradice la definición de  $T_m$ . Ahora si,  $T_m = T$  se puede extender por continuidad la propiedad y entonces  $u_1(T) = u_2(T)$ . (En el caso en que  $T = \infty$  el razonamiento es igual.)

**Teorema 3.3.** [30] *Supongamos que  $V$  cumple (3.2), (3.3) y que  $V_1, V_2 \in L^\infty$ . Entonces, la solución (3.1),  $u \in C([0, T], L^2)$   $0 < T < \infty$ , con  $u(0) = \phi$  dada por el Teorema 3.1 depende continuamente en el valor inicial  $\phi$ . De manera precisa, si  $\phi_n \rightarrow \phi$  en  $L^2$  entonces, para  $n$  es suficientemente grande, la soluciones  $u_n \in C([0, T], L^2)$  de (3.1) con  $u_n(x, 0) = \phi_n$  existen para  $t \in [0, T]$  y además  $u_n \rightarrow u$  en  $C([0, T], L^2)$ .*

*Demostración.* Probaremos la versión local. Definamos las siguientes trans-

formaciones:

$\Phi_n(u) = e^{-itH}\phi_n + GF(u)$  con  $u \in \mathcal{N}(T_0) := C([0, T_0], L^2)$ . Debido a la acción de  $e^{-itH}$  en  $L^2$  tenemos que  $e^{-itH}\phi_n \rightarrow e^{-itH}\phi$  in  $\mathcal{N}(T_0)$ . Dado que  $\|\phi\|_{L^2} + CT_0R^3 \leq R$  se cumple para las  $\Phi_n$ , entonces, con la misma  $R$  y la misma  $T_0$  podemos demostrar que las  $\Phi_n$  son contracciones en  $\mathcal{N}_R$  con radio de contracción uniforme  $\rho < 1$  y por tanto cada  $\Phi_n$  tiene un punto fijo  $u_n \in \mathcal{N}_R$  los cuales existen en el intervalo común  $[0, T_0]$ . Entonces es fácil ver que  $u_n \rightarrow u \in \mathcal{N}(T_0)$  pues,  $u_n - u = \Phi_n(u_n) - \Phi_n(u) + \Phi_n(u) - \Phi(u)$  y por tanto:

$$\|u_n - u : \mathcal{N}(T_0)\| = \|\Phi_n(u_n) - \Phi(u) : \mathcal{N}(T_0)\| \leq \rho \|u_n - u : \mathcal{N}(T_0)\| + \|\phi_n - \phi\|_{L^2}.$$

Dado que  $\|\phi_n - \phi\|_{L^2} \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$  entonces,  $u_n \rightarrow u$  en  $\mathcal{N}(T_0)$ .

Para extender la solución de  $[0, T_0]$  a  $[0, T]$  notemos que la longitud del intervalo de existencia depende directamente de  $\|\phi\|_{L^2} = \|u(x, 0)\|_{L^2}$ . Ahora dado que  $u(x, t) \in \mathcal{N}$  entonces  $\|u(t)\|_{L^2} \leq M, \forall t \in [0, T]$ . De este modo la longitud del intervalo  $[0, T_0]$  estara determinada por la  $M$  que es uniforme para toda  $t \in [0, T]$ . Así las cosas, podemos avanzar paso a paso para construir la solución hasta alcanzar la  $T$  deseada (se puede dar también un argumento de compacidad).

□

### 3.2. Problema local de Cauchy. Soluciones $\mathcal{H}_Q^1$

**Teorema 3.4.** [30] *Asumamos que  $V$  cumple (3.2), (3.3), que  $V_1$  satisface la estimación (3.3) y que  $V_2 \in \mathcal{W}_{1,\infty}$ . Entonces, para cualquier  $\phi \in \mathcal{H}_Q^1$  existe una  $0 < T < \infty$  tal que (3.1) tiene una única solución  $u \in C(I, \mathcal{H}_Q^1)$  con  $u(x, 0) = \phi$ .  $T$  depende sólo de  $\|\phi\|_{\mathcal{H}_Q^1}$ .*

*Demostración.* Como  $V_1$  satisface (3.3) de (3.4) se tiene que:

$$|(V_1\phi, \phi)| \leq C\|\phi\|_{\mathcal{H}_Q^1}^2, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_Q^1. \quad (3.28)$$

Definimos  $\Phi$  como en (3.23), dado que  $V_2 \in \mathcal{W}_{1,\infty}$  se tiene que,

$$\|\Phi(u)\|_{\mathcal{N}^1} \leq \|\phi\|_{\mathcal{H}_Q^1} + CT\|u\|_{\mathcal{N}^1}^3, \quad (3.29)$$

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\mathcal{N}^1} \leq CT(\|u\|_{\mathcal{N}^1}^2 + \|v\|_{\mathcal{N}^1}^2)\|u - v\|_{\mathcal{N}^1}. \quad (3.30)$$

Considerando  $R, T$  tales que  $\|\phi\|_{\mathcal{H}_Q^1} + CTR^3 \leq R$  y definiendo  $\alpha := 2CTR^2 < 1$  en consecuencia de (3.29), (3.30) se tiene que  $\Phi$  es una contracción en  $\mathcal{N}_R^1$  con radio de contracción  $\alpha$ . Entonces, el único punto fijo  $u$  es una solución de (3.20).  $\square$

*Comentario 3.5.* [30] Como en el caso anterior se puede demostrar que la solución en  $\mathcal{H}_Q^1$  existe para todo tiempo  $t > 0$ , a menos que la norma  $\mathcal{H}_Q^1$  de dicha solución explote en un tiempo finito y que (3.1) tiene a lo mas una solución en  $C(I, \mathcal{H}_Q^1)$ .

**Teorema 3.6.** [30] Asumamos que  $V$  cumple (3.2),(3.3), que  $V_1$  satisface la estimación (3.3) y que  $V_2 \in \mathcal{W}_{1,\infty}$ . Entonces, la solución  $u \in C([0, T], \mathcal{H}_Q^1)$ ,  $0 < T < \infty$  de (3.1) con  $u(x, 0) = \phi$  dada por el Teorema 3.4 depende continuamente en el dato inicial  $\phi$ . De manera precisa, si  $\phi_n \rightarrow \phi$  en  $\mathcal{H}_Q^1$  entonces, para  $n$  es suficientemente grande, la soluciones  $u_n \in C([0, T], \mathcal{H}_Q^1)$  de (3.1) con  $u_n(x, 0) = \phi_n$  existen para  $t \in [0, T]$  y además  $u_n \rightarrow u$  en  $C([0, T], \mathcal{H}_Q^1)$ .

*Demostración.* La prueba es análoga a la del Teorema 3.3 considerando que la versión local se demuestra ahora en el espacio  $C([0, T_0], \mathcal{H}_Q^1)$ .  $\square$

### 3.3. Problema local de Cauchy. Soluciones $\mathcal{H}_Q^2$

**Teorema 3.7.** [30] Asumamos que  $V$  cumple (3.2),(3.3), que  $V_1$  satisface la estimación (3.3) y que  $V_2 \in \mathcal{W}_{2,\infty}$ . Entonces, para cada  $\phi \in \mathcal{H}_Q^2$ , existe  $0 < T < \infty$  tal que (3.1) tiene una única solución  $u \in C(I, \mathcal{H}_Q^2)$  con  $u(0) = \phi$ .  $T$  depende solo de  $\|\phi\|_{\mathcal{H}_Q^2}$ ,

*Demostración.* Como  $V_2 \in \mathcal{W}_{2,\infty}$  se tiene para alguna constante  $C$  que,

$$\|V_2\phi\|_{\mathcal{H}_Q^2} \leq C\|\phi\|_{\mathcal{H}_Q^2}, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_Q^2. \quad (3.31)$$

Tomando  $\Phi$  como en (3.23), se tiene que,

$$\|\Phi(u)\|_{\mathcal{N}^2} \leq \|\phi\|_{\mathcal{H}_Q^2} + CT\|u\|_{\mathcal{N}^2}^3, \quad (3.32)$$

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\mathcal{N}^2} \leq CT(\|u\|_{\mathcal{N}^2}^2 + \|v\|_{\mathcal{N}^2}^2)\|u - v\|_{\mathcal{N}^2}. \quad (3.33)$$

Considerando  $R, T$  tales que  $\|\phi\|_{\mathcal{H}_Q^2} + CTR^3 \leq R$  y definiendo  $\alpha := 2CTR^2 < 1$ , es consecuencia de (3.32), (3.33) que  $\Phi$  es una contracción en  $\mathcal{N}_R^2$  con radio de contracción  $\alpha$ . Entonces el único punto fijo,  $u$ , es una solución de (3.20).

□

*Comentario 3.8.* [30] Como en el caso anterior se puede demostrar que la solución en  $\mathcal{H}_Q^2$  existe para todo tiempo  $t > 0$ , a menos que la norma  $\mathcal{H}_Q^2$  de dicha solución explote en un tiempo finito y que (3.1) tiene a lo mas una solución en  $C(I, \mathcal{H}_Q^2)$ .

**Teorema 3.9.** [30] *Asumamos que  $V$  cumple (3.2), (3.3), que  $V_1$  satisface la estimación (3.3) y que  $V_2 \in \mathcal{W}_{2,\infty}$ . Entonces la solución  $u \in C([0, T], \mathcal{H}_Q^2)$ ,  $0 < T < \infty$  de (3.1) dada por el Teorema 3.7 depende continuamente en el dato inicial  $\phi$ . De manera precisa, si  $\phi_n \rightarrow \phi$  en  $\mathcal{H}_Q^2$  entonces, para  $n$  es suficientemente grande, la soluciones  $u_n \in C([0, T], \mathcal{H}_Q^2)$  de (3.1) con  $u_n(x, 0) = \phi_n$  existen para  $t \in [0, T]$  y además  $u_n \rightarrow u$  en  $C([0, T], \mathcal{H}_Q^2)$ .*

*Demostración.* La prueba es análoga a la del Teorema 3.3 considerando que la versión local se demuestra ahora en el espacio  $C([0, T_0], \mathcal{H}_Q^2)$ . □

### 3.4. Regularidad

Probaremos que es imposible que la solución en  $\mathcal{H}_Q^1$  ( $\mathcal{H}_Q^2$ ) explote antes de que la solución en  $L^2$  ( $\mathcal{H}_Q^1$ ) lo haga.

**Teorema 3.10.** (Regularidad en  $L^2 - \mathcal{H}_Q^1$ ) [30] Asumamos que  $V$  cumple (3.2), (3.3), que  $V_1 \in L^\infty$  y que  $V_2 \in \mathcal{W}_{1,\infty}$ . Entonces, si  $u \in C([0, T], L^2)$ ,  $0 < T < \infty$  es solución de (3.1) con  $u(0) = \phi \in \mathcal{H}_Q^1$ , tenemos que  $u \in C([0, T], \mathcal{H}_Q^1)$ .

*Demostración.* Por el Teorema 3.4 existe una  $0 < T_0 \leq T$  tal que  $u \in C([0, T_0], \mathcal{H}_Q^1)$ . Denotemos por  $v(t) := \sqrt{H + N}u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T_0$ . Multiplicando ambos lados de (3.20) por  $\sqrt{H + N}$  obtendremos que,

$$v(t) = e^{-itH}(\sqrt{H + N})\phi + \frac{1}{i}G(V_1u, u)[(H + N)^{\frac{1}{2}}V_2(H + N)^{-\frac{1}{2}}]v. \quad (3.34)$$

Notemos que como  $V_2 \in \mathcal{W}_{1,\infty}$ ,  $[(H + N)^{\frac{1}{2}}V_2(H + N)^{-\frac{1}{2}}]$  es un operador acotado de  $L^2$ . En efecto, notemos que si  $V_2 \in \mathcal{W}_{1,\infty}$  entonces  $V_2 : Dom((H + N)^{\frac{1}{2}}) \rightarrow Dom((H + N)^{\frac{1}{2}})$  es un operador bien definido puesto que si  $\phi \in Dom((H + N)^{\frac{1}{2}})$  entonces  $\phi \in \mathcal{H}^1$  y  $Q\phi \in L^2$ . Dado que  $\|V_2\phi\|_{L^2} \leq \|V_2\|_{L^\infty}\|\phi\|_{L^2}$  y que  $\|\partial(V_2\phi)\| \leq C\|V_2\|_{\mathcal{W}_{1,\infty}}\|\phi\|_{\mathcal{H}^1}$  sólo resta demostrar que  $QV_2\phi \in L^2$  pero ello es fácil ya que  $\|QV_2\phi\|_{L^2} \leq \|V_2\|_{L^\infty}\|Q\phi\|_{L^2} < \infty$ . Con estas últimas demostraciones hemos también demostrado que el operador  $V_2 : Dom((H + N)^{\frac{1}{2}}) \rightarrow Dom((H + N)^{\frac{1}{2}})$  es un operador acotado. El que los operadores  $(H + N)^{-\frac{1}{2}} : L^2 \rightarrow Dom((H + N)^{\frac{1}{2}})$  y  $(H + N)^{\frac{1}{2}} : Dom((H + N)^{\frac{1}{2}}) \rightarrow L^2$  sean acotados es fácil de demostrar.

La ecuación (3.34) es lineal con respecto a  $v$  y ahora  $u$  esta fija en  $\mathcal{N}$ . Resolviendo esta ecuación en un intervalo  $[T_0, T_0 + \Delta]$  con  $\Delta$  suficientemente pequeña se prueba que  $v \in L^2$  para  $T_0 \leq t \leq T_0 + \Delta$ . Nótese que el tamaño de  $\Delta$  depende únicamente de  $\|u\|_{\mathcal{N}}$ . Repitiendo el mismo argumento de paso en paso, que se mencionó en el Teorema 3.3, se prueba que  $v \in C([0, T], L^2)$  y por tanto  $u \in C([0, T], \mathcal{H}_Q^1)$ .  $\square$

**Teorema 3.11.** (Regularidad  $\mathcal{H}_Q^1 - \mathcal{H}_Q^2$ ) [30] Asumamos que  $V$  cumple (3.2), (3.3), que  $V_1$  cumple (3.9) y que  $V_2 \in \mathcal{W}_{2, \infty}$ . Si  $u \in C([0, T], \mathcal{H}_Q^1)$  es una solución de (3.1) con  $u(0) = \phi \in \mathcal{H}_Q^2$ , tenemos que  $u \in C([0, T_0], \mathcal{H}_Q^2)$ .

*Demostración.* Por el Teorema 3.7 existe una  $0 < T_0 \leq T$  tal que  $u \in C([0, T_0], \mathcal{H}_Q^2)$ . Tomando la derivada de  $u$  con respecto a  $t$  en (3.20) y denotando por  $v := \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $0 \leq t \leq T_0$  obtendremos que,

$$iv(t) = e^{-itH} [H\phi + F\phi] + G(2[\operatorname{Re}(v, V_1u)]V_2u + (V_1u, u)V_2v). \quad (3.35)$$

Resolviendo la ecuación (3.35) real-lineal con respecto a  $v$  y tomando  $u$  fija en  $\mathcal{N}^1$  en un intervalo  $[T_0, T_0 + \Delta]$  con  $\Delta$  suficientemente pequeña se prueba que  $v \in L^2$  para  $T_0 \leq t \leq T_0 + \Delta$ . Dado que  $V_1$  cumple (3.9) se tiene que  $\|V_1u(t)\|_{L^2}^2 = (V_1^2u, u) \leq C\|u\|_{\mathcal{N}^1}^2$  de este modo, el tamaño de  $\Delta$  depende únicamente de  $\|u\|_{\mathcal{N}^1}$ . Repitiendo el argumento de paso a paso, se prueba que  $v \in C([0, T], L^2)$  y por tanto  $u \in C([0, T], \mathcal{H}_Q^2)$ .  $\square$

### 3.5. Soluciones Globales

Probaremos primero que existe conservación de la norma en  $L^2$ .

**Lema 3.12.** [30] *Asumamos que  $V$  cumple (3.2), (3.3), que  $V_1 \in L^\infty$ , que  $V_2 \in \mathcal{W}_{1,\infty}$  y que  $V_1, V_2$  son a valores reales. Entonces la norma  $L^2$  de la solución de (3.1) dada por el Teorema 3.1 y la norma  $L^2$  de la solución  $\mathcal{H}_Q^1$  dada por el Teorema 3.4 son constantes.*

*Demostración.* Probaremos primero el Lema para la solución  $u \in C([0, T], \mathcal{H}_Q^1)$ .

De (3.20)  $u \in C^1([0, T], \mathcal{H}_Q^{-1})$  y entonces, por (3.1), se tiene que,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 = \operatorname{Re} \left( \frac{du}{dt}(t), u(t) \right) = \operatorname{Re} \frac{1}{i} [(Hu, u) + (V_1 u, u)(V_2 u, u)] = 0, \quad (3.36)$$

y por tanto  $\|u(t)\|_{L^2} = \|u(0)\|_{L^2}$ . El resultado para soluciones  $u \in C([0, T], L^2)$  se sigue de aproximar  $\phi$  en la norma  $L^2$  mediante  $\phi_n \in \mathcal{H}_Q^1$  y aplicando el Teorema 3.3.  $\square$

**Teorema 3.13.** [30] *Asumamos que  $V$  cumple (3.2), (3.3), que  $V_1 \in L^\infty$ , que  $V_2 \in \mathcal{W}_{1,\infty}$  y que además  $V_1, V_2$  son a valores reales. Entonces la solución en  $L^2$ ,  $u(t)$  de (3.1) dada por el Teorema 3.1 existe para todo tiempo y  $\|u(t)\|_{L^2} = \|u(0)\|_{L^2}$ ,  $t \in [0, \infty)$ .*

*Demostración.* El teorema se sigue del Comentario 3.2  $L^2$  y del Lema 3.12.  $\square$



Para  $u \in C(I, \mathcal{H}_Q^1)$  definimos la energía para todo tiempo como sigue:

$$E(u(t)) := (u'(t), u'(t)) + (Vu(t), u(t)) + \frac{1}{2}(V_1u(t), u(t))(V_2u(t), u(t)). \quad (3.37)$$

Donde denotamos  $u'(x, t) = u_x(x, t)$ .

**Lema 3.14.** [30] *Asumamos que  $V$  cumple (3.2), (3.3), que  $V_1 = \lambda V_2$  para algún real  $\lambda$ ,  $V_2 \in \mathcal{W}_{2,\infty}$  y que  $V_2$  es a valores reales. Entonces la energía de la solución  $\mathcal{H}_Q^1$  de (3.1) dada por el Teorema 3.4 y la energía de la solución  $\mathcal{H}_Q^2$  de (3.1) dada por el Teorema 3.7 son constantes en el tiempo.*

*Demostración.* Probaremos primero el Lema para soluciones en  $\mathcal{H}_Q^2$ . Se sigue de (3.20)  $u \in C^1([0, T], L^2)$ . Dado que  $\mathcal{H}_Q^2 = D(H)$  se puede reescribir a la energía como sigue (usando además integración por partes):

$$E(u(t)) := (u(t), Hu(t)) + \frac{\lambda}{2}(V_2u(t), u(t))^2. \quad (3.38)$$

Se sigue entonces que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(u(t)) &= 2 \operatorname{Re}[(\dot{u}(t), Hu(t)) + \lambda(V_2u(t), u(t))(V_2\dot{u}(t), u(t))] = \\ &= 2 \operatorname{Re} \frac{1}{i} [\|Hu\|_{L^2}^2 + \lambda(V_2u(t), u(t))[(V_2u(t), Hu(t)) + (Hu(t), V_2u(t))] ] = 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

en donde hemos denotado  $\dot{u}(x, t) = u_t(x, t)$ . Este cálculo se hace mas obvio con la siguiente consideración: vamos a calcular explícitamente  $\frac{d}{dt}(u'(t), u'(t))$ ,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(u'(t), u'(t)) = \\
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [u'(t+h) - u'(t), u'(t+h)] + (u'(t), u'(t+h) - u'(t)) = \quad (3.40) \\
& 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\partial}{\partial t} u(t), u''(t) \right)
\end{aligned}$$

en donde hemos integrado por partes antes de considerar el límite  $h \rightarrow 0$ .

El resultado para soluciones  $u \in C([0, T], \mathcal{H}_Q^1)$  se sigue de aproximar  $\phi$  en la norma  $\mathcal{H}_Q^1$  mediante  $\phi_n \in \mathcal{H}_Q^2$  y aplicando el Teorema 3.6.  $\square$

**Teorema 3.15.** [30] *Asumamos que  $V$  cumple (3.2), (3.3), que  $V_1 = \lambda V_2$  para algún real  $\lambda$ ,  $V_2 \in \mathcal{W}_{2, \infty}$  y que  $V_2$  es a valores reales. Entonces la solución  $\mathcal{H}_Q^1$  de (3.1) dada por el Teorema 3.4 y la solución  $\mathcal{H}_Q^2$  de (3.1) dada por el Teorema 3.7 existen para todo tiempo y la norma  $L^2$  y la energía de las soluciones son constantes en el tiempo.*

*Demostración.* Primero consideremos la solución  $u \in C(I, \mathcal{H}_Q^1)$ . Por los Lemmas 3.12 y 3.14 se tiene que,

$$\begin{aligned}
& (u'(t), u'(t)) + (V_0 u(t), u(t)) + N(u(t), u(t)) \leq \\
& E(u(0)) + N \|u(0)\|_{L^2}^2 + \frac{|\lambda|}{2} \|V_2\|_{L^\infty}^2 \|u(0)\|_{L^2}^4. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

De este modo por el Comentario 3.5, la  $u$  está definida para todo tiempo y la norma  $L^2$  y la energía son constantes. El resultado para soluciones  $\mathcal{H}_Q^2$  es consecuencia de la regularidad de las soluciones  $\mathcal{H}_Q^1$ - $\mathcal{H}_Q^2$ , Teorema 3.11.  $\square$

# Capítulo 4

## Problema de dispersión directo e inverso

Definamos (para  $q > 1$ )  $r := \frac{4q}{2q-1}$ ,  $p = \frac{q+1}{q-1}$  los siguientes espacios de Banach,

$$\mathcal{M} := C_B(\mathbb{R}, L^{p+1}) \cap L^r(\mathbb{R}, L^{p+1}), \quad (4.1)$$

donde  $C_B(\mathbb{R}, L^{p+1})$  es el espacio de funciones continuas y acotadas de  $\mathbb{R}$  a  $L^{p+1}$  y  $L^r(\mathbb{R}, L^{p+1}) =: L(P)$  (donde  $P := (\frac{1}{p+1}, \frac{1}{r})$ ), equipados con la norma,

$$\|\cdot\|_{\mathcal{M}} = \sup \{ \|\cdot\|_{C_B(\mathbb{R}, L^{p+1})}, \|\cdot\|_{L(P)} \}. \quad (4.2)$$

Definamos, para cualquier  $\gamma \in \mathbb{R}$ , a  $L_\gamma^1$  como el espacio de Banach de todas las funciones medibles, complejo-valuadas,  $\phi$ , definidas en  $\mathbb{R}$  tales que,

$$\|\phi\|_{L^\gamma_1} := \int |\phi(x)|(1+|x|)^\gamma dx < \infty. \quad (4.3)$$

Si  $V \in L^1_1$  entonces el operador  $\tau := \frac{d^2}{dx^2} + V$  es esencialmente auto-adjunto en el siguiente dominio,

$$D(\tau) := \left\{ \phi \in L^2_C : \phi \text{ y } \frac{d}{dx}\phi \text{ son absolutamente continuas y } \tau\phi \in L^2 \right\} \quad (4.4)$$

donde  $L^2_C$  denota el espacio de todas las funciones  $L^2$  con soporte compacto. Denotaremos por  $H$  a la realización autoadjunta de  $\tau$  y designaremos por  $H_0$  a la realización autoadjunta de  $-\frac{d^2}{dx^2}$  cuyo dominio es el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^2$ . Los operadores de onda estan dados por,

$$\mathbf{W}_\pm := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}. \quad (4.5)$$

Es un resultado conocido [31] que el límite de estos operadores existe en la topología fuerte de  $L^2$  y que el rango de los operadores de onda es el espacio de continuidad absoluta de  $H$ ,  $\mathcal{H}_{ac}$ .

Los operadores de onda adjuntos estan dados por,

$$\mathbf{W}_\pm^* := s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_0} e^{-itH} \mathbf{P}_{ac}, \quad (4.6)$$

donde  $\mathbf{P}_{ac}$  es la proyección en el espacio  $\mathcal{H}_{ac}$ . Definamos ahora, para cuales-

quiera dos soluciones  $u, v$  de la ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$-\frac{d^2}{dx^2}u + Vu = k^2 u, \quad u \quad k \in \mathbb{C}, \quad (4.7)$$

el Wronskiano, denotado por  $[u, v]$ , como,

$$[u, v] := \left(\frac{d}{dx}u\right)v - u\left(\frac{d}{dx}v\right). \quad (4.8)$$

Denotemos por  $f_j(x, k)$ ,  $j=1,2$   $\text{Im } k \geq 0$  a las soluciones de Jost de (4.7) que satisfacen  $f_1(x, k) \sim e^{ikx}$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $f_2(x, k) \sim e^{-ikx}$ ,  $x \rightarrow -\infty$ . Decimos que el potencial  $V$  es genérico si  $[f_1(x, 0), f_2(x, 0)] \neq 0$  y decimos que el potencial es excepcional si  $[f_1(x, 0), f_2(x, 0)] = 0$ . Notemos que el potencial trivial  $V = 0$  es excepcional. Para  $\ell = 0, 1, \dots$ , denotaremos por  $V^{(\ell)} := \frac{d^\ell}{dx^\ell}V(x)$ . Notemos que  $V^{(0)} = V$ .

Consideremos el siguiente resultado de [44],

**Teorema** Supongamos que  $V \in L^1_\gamma$ , donde en el caso genérico  $\gamma > 3/2$  y en el excepcional  $\gamma > 5/2$  y para algún  $j = 1, 2, \dots$ ,  $V^{(\ell)} \in L^1$  para  $\ell = 1, 2, \dots, j-1$ . Entonces los operadores de onda  $\mathbf{W}_\pm$  y  $\mathbf{W}_\pm^*$ , originalmente definidos en  $\mathcal{W}_{j,p} \cap L^2$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , tienen extensiones a operadores acotados definidos en  $\mathcal{W}_{j,p}$ . Más aún existen constantes  $C_p$ ,  $1 < p < \infty$  tales que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_\pm f\|_{j,p} &\leq C_p \|f\|_{j,p}; \quad \|\mathbf{W}_\pm^* f\|_{j,p} \leq C_p \|f\|_{j,p}, \\ f &\in \mathcal{W}_{j,p} \cap L^2, \quad 1 < p < \infty. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Además, si  $V$  es excepcional y  $a := \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x, 0) = 1$  entonces,  $\mathbf{W}_\pm$ ,  $\mathbf{W}_\pm^*$  tienen extensiones a operadores acotados definidos en  $\mathcal{W}_{j,1}$  y a operadores acotados definidos en  $\mathcal{W}_{j,\infty}$ , y existen constantes  $C_1$  y  $C_\infty$  tales que (4.9) se cumple para  $p = 1$  y para  $p = \infty$ .

Lo que podemos concluir de este resultado es que los operadores de onda  $\mathbf{W}_\pm$ ,  $\mathbf{W}_\pm^*$  son continuos en los espacios  $\mathcal{W}_{j,p}$ ,  $j = 0, 1$  y  $1 < p < \infty$ .

Por el Teorema 3 en la pagina 135 de [32]:

$$\|\mathcal{F}(1 + q^2)^{\frac{j}{2}}(\mathcal{F}f)(q)\|_{L^p} \quad (4.10)$$

es una norma equivalente a la norma de  $\mathcal{W}_{j,p}$ ,  $j = 0, 1$ ,  $1 < p < \infty$ . En (4.10)  $\mathcal{F}$  denota la transformada de Fourier.

Definimos a  $\mathcal{L}_\alpha^p(\mathbb{R})$  como el conjunto de todas las funciones  $f \in L^p(\mathbb{R})$  que pueden ser escritas de la forma  $f = (I - \Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}g$ , para alguna  $g \in L^p(\mathbb{R})$ . El teorema dice explícitamente:

Supongamos que  $j$  es un entero positivo y que  $1 < p < \infty$ . Entonces,

$$\mathcal{L}_j^p = \mathcal{W}_{j,p}, \quad (4.11)$$

en el sentido que  $f \in \mathcal{L}_j^p$  si y solo si  $f \in \mathcal{W}_{j,p}$  y que las normas de los espacios son equivalentes.

Si  $H$  no tiene eigenvalores entonces los operadores de onda son unitarios en  $L^2$ , pues en este caso  $\mathcal{H}_{ac}(H) = L^2$ .

De las relaciones de intercambio:

$$(I + H)^{\frac{j}{2}} = \mathbf{W}_{\pm}(I + H_0)^{\frac{j}{2}}\mathbf{W}_{\pm}^*, \quad (4.12)$$

y de (4.10) se tiene que la norma,

$$\|(I + H)^{\frac{j}{2}}f\|_{L^p}, \quad (4.13)$$

define una norma equivalente a la norma en  $\mathcal{W}_{j,p}$ ,  $j = 0, 1$ ,  $1 < p < \infty$ . Para ilustrar este resultado de equivalencia de normas vamos a dar una demostración sencilla en el caso  $p = 2$ .

Por la definición de  $\mathcal{W}_{j,2}$ , se tiene que:

$$\|f\|_{\mathcal{W}_{j,2}}^2 = \sum_{|\alpha| \leq j} \|D^{|\alpha|}f\|_{L^2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq j} \|(ik)^{|\alpha|}\hat{f}(k)\|_{L^2}^2$$

donde  $\hat{f}(k)$  es la transformada de Fourier de  $f(x)$ , definida en  $L^2$ .

Tenemos que:

$$\int_{|k| \leq 1} |ik|^{2|\alpha|} |\hat{f}(k)|^2 dk \leq \int_{|k| \leq 1} |\hat{f}(k)|^2 dk.$$

Por otra parte:

$$\int_{|k| \geq 1} |ik|^{2|\alpha|} |\hat{f}(k)|^2 dk \leq \int_{|k| \geq 1} (1 + |k|^2)^j |\hat{f}(k)|^2 dk,$$

con  $|\alpha| \leq j$ . Entonces,

$$\int |ik|^{2|\alpha|} |\hat{f}(k)|^2 dk \leq \|(1 + |k|^2)^{\frac{j}{2}} \hat{f}(k)\|_{L^2}^2, \quad |\alpha| \leq j.$$

De este modo se tiene que:

$$\|f\|_{\mathcal{W}_{j,2}}^2 = \sum_{|\alpha| \leq j} \| |\beta|^{|\alpha|} \hat{f}(k) \|_{L^2}^2 \leq C \|(1 + |k|^2)^{\frac{j}{2}} \hat{f}\|_{L^2}^2.$$

Dado que  $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2} = \|\check{f}\|_{L^2}$  se concluye entonces que:

$$\|f\|_{\mathcal{W}_{j,2}}^2 \leq C \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |k|^2)^{\frac{j}{2}} \mathcal{F}f(k)\|_{L^2}^2.$$

Ahora, para probar que:

$$\|\mathcal{F}^{-1}(1 + |k|^2)^{\frac{j}{2}} \mathcal{F}f\|_{L^2} \leq C \|f\|_{\mathcal{W}_{j,2}},$$

debemos observar que:

$$\|\mathcal{F}^{-1}(1 + |k|^2)^{\frac{j}{2}} \mathcal{F}f\|_{L^2}^2 = \|(1 + |k|^2)^{\frac{j}{2}} \mathcal{F}f\|_{L^2}^2 =$$

$$\int (1 + |k|^2)^j |\hat{f}|^2 dk.$$

Tomando dos casos ( $|k| \leq 1$  y  $|k| \geq 1$ ) se tiene que:

(i)  $|k| \leq 1$

$$(1 + |k|^2)^j \leq 2^j,$$



y por lo tanto:

$$\int_{|k|\leq 1} (1 + |k|^2)^j |\hat{f}|^2 dk \leq \int_{|k|\leq 1} 2^j |\hat{f}|^2 dk.$$

(ii)  $|k| \geq 1$

$$(1 + |k|^2)^j \leq 2^j k^{2j},$$

y por lo tanto:

$$\int_{|k|\geq 1} (1 + |k|^2)^j |\hat{f}|^2 dk \leq \int_{|k|\geq 1} 2^j k^{2j} |\hat{f}|^2 dk.$$

De esta manera concluiremos que:

$$\|\mathcal{F}^{-1}(1 + k^2)^{\frac{j}{2}} \mathcal{F}f\|_{L^2}^2 \leq \int_{|k|\leq 1} 2^j |\hat{f}|^2 dk + \int_{|k|\geq 1} 2^j k^{2j} |\hat{f}|^2 dk.$$

De esta manera hemos demostrado que,

$$\|\mathcal{F}^{-1}(1 + |k|^2)^{\frac{j}{2}} \mathcal{F}f\|_{L^2} \leq C \|f\|_{\mathcal{W}_{j,2}},$$

por lo que la equivalencia de normas está establecida para el caso en que  $p = 2$ .

Finalmente, dentro de los resultados preliminares de este capítulo mencionaremos uno fundamental que es conocido como la estimación  $L^p - L^{p'}$ . Empezaremos con una discusión al respecto.

Consideremos la ecuación de Schrödinger siguiente:

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -\frac{d^2}{dx^2} u(x, t), \quad u(x, 0) = f(x), \quad (4.14)$$

la solución a este problema esta dada por  $e^{-itH_0}$ . Supongamos que  $\alpha \in \mathbb{C}$  y que  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  entonces  $e^{-k^2\alpha} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$  y por tanto

$$(e^{-iH_0\alpha}\phi)(x) = \left(\frac{1}{4\pi\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \int e^{\frac{-|x-y|^2}{4\alpha}} \phi(y) dy, \quad (4.15)$$

dado que  $e^{-H_0\alpha} = \mathcal{F}^{-1}e^{-k^2\alpha}\mathcal{F}$  y dado que  $\mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2\alpha}) = (2\alpha)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$ . Supongamos que  $\phi \in L^1 \cap L^2$ . Dado que  $e^{-i(t-i\epsilon)H_0}\phi \rightarrow e^{itH_0}\phi$  en  $L^2$  conforme  $\epsilon \downarrow 0$  podemos hallar una subsucesión que converge puntualmente en casi todo punto. De este modo,

$$\begin{aligned} (e^{-itH_0}\phi)(x) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} (e^{-i(t-i\epsilon)H_0}\phi)(x) = \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} (4\pi i(t-i\epsilon))^{-\frac{1}{2}} \int e^{\frac{-|x-y|^2}{4i(t-i\epsilon)}} \phi(y) dy = \\ &= (4\pi i t)^{-\frac{1}{2}} \int e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} \phi(y) dy, \end{aligned} \quad (4.16)$$

en donde, en el último paso aplicamos el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Para  $\phi \in L^2$  se utiliza el argumento de definir la función (mediante funciones características) solo en bolas de radio  $R$  y centradas en el origen y con ello se obtiene,

$$(e^{-itH_0}\phi)(x) = s - \lim (4\pi i t)^{-\frac{1}{2}} \int e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} \phi(y) dy, \quad (4.17)$$

donde  $s - \text{lím}$  significa límite en la norma  $L^2$ . Dado que  $e^{-itH_0}$  es unitario en  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $\|e^{-itH_0}\phi\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}$  y dado que si  $\phi \in L^1 \cap L^2$  se sigue de (4.17) que  $\|e^{-itH_0}\phi\|_{L^\infty} \leq (4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\|\phi\|_{L^1}$ . Entonces considerando que  $2 \leq p' \leq \infty$  y que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  podemos aplicar el teorema de Riesz-Thorin [25] y extender a  $e^{-itH_0}$  en una transformación de  $L^p$  a  $L^{p'}$  que cumple la siguiente estimación,

$$\|e^{-itH_0}\phi\|_{L^{p'}} \leq t^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\|\phi\|_{L^p}, \quad t > 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (4.18)$$

Este último resultado es la estimación  $L^p - L^{p'}$ . Las consideraciones siguientes fueron tomadas de [38]. La estimación  $L^p - L^{p'}$  es interesante pues expresa la naturaleza dispersiva de la ecuación de Schrödinger. Esta expresión da un significado cuantitativo de la propagación del paquete de onda bajo la evolución libre del sistema  $e^{-itH_0}\phi$ . En las aplicaciones prácticas, la no linealidad,  $F$ , de la ecuación de Schrödinger no lineal general, denotada por siglas como ESNL, (considerar (1.3) con una no linealidad general es decir,  $F$ ) se toma como una potencia suficientemente grande de  $u$ . Este tipo de no linealidades hacen que las soluciones de la ESNL (con  $V=0$ ) sean grandes donde ya lo son. Por otro lado, la propagación de la ecuación lineal asociada (4.14) evita que la solución sea demasiado grande siempre que los datos iniciales sean lo suficientemente pequeños. Es en el balance de estos dos tipos de comportamiento lo que explica la teoría de dispersión para amplitudes pequeñas. Eventualmente, la propagación evita que la solución explote en un

tiempo finito y para tiempos largos la evolución es dominada por la parte lineal, en el sentido de que la solución es asintótica a las solución de (4.14).

En el caso en el que se pretende generalizar este tipo de estimaciones para ecuaciones de Schrödinger con potencial  $V \neq 0$  se debe proceder con cuidado pues en general  $e^{-itH}$  no cumple con una relación análoga a (4.17); considere por ejemplo que  $H = -\Delta + V$  tiene un eigenvalor  $\lambda$  con eigenvector  $\psi$ . Entonces la solución de la ecuación de Schrödinger lineal,

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -(\Delta + V)u(x, t), \quad u(x, 0) = f(x), \quad (4.19)$$

con  $f = \psi$  estará dada por  $u(x, t) = e^{-i\lambda t}\psi$  que se trata de una onda estacionaria. Es por ello que se esperará que haya es  $L^p - L^{p'}$  para  $H$  si restringimos los estados iniciales al subespacio de continuidad de  $H$ ,  $\mathcal{H}_c$  (recordemos que este espacio es el complemento ortogonal en  $L^2$  de la cerradura del conjunto generado por todas las combinaciones lineales de eigenvectores de  $H$ ).

De este modo en [38] se demuestra la siguiente estimación  $L^p - L^{p'}$  que será fundamental para la demostración de nuestros resultados.

**Teorema** (La estimación  $L^p - L^{p'}$ ) [38] Supongamos que  $V \in L^1_\gamma$ , donde en el caso genérico  $\gamma > 3/2$  y en el excepcional  $\gamma > 5/2$ . Entonces para  $1 \leq p \leq 2$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,

$$\|e^{-itH} \mathbf{P}_c\|_{\mathcal{B}(L^p, L^{p'})} \leq C \frac{1}{|t|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}} \quad t > 0, \quad (4.20)$$

en donde hemos denotado por  $\mathbf{P}_c$  al proyector sobre el espacio de continuidad de  $H$ ,  $\mathcal{H}_c$  y donde para cualesquiera dos espacios de Banach  $X, Y$

hemos denotado por  $\mathcal{B}(X, Y)$  al espacio de Banach de todos los operadores lineales acotados de  $X$  en  $Y$ . En el caso en el que  $X = Y$  simplemente lo denotaremos por  $\mathcal{B}(X)$ . Cabe destacar que en nuestro caso  $\mathbf{P}_c = \mathbf{P}_{ac}$ .

Como consecuencia de este último teorema tenemos la siguiente estimación “ $\mathcal{W}_{1,p} - \mathcal{W}_{1,p'}$ ” ,

$$\|e^{-itH}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{W}_{1,p}, \mathcal{W}_{1,p'})} \leq C \frac{1}{|t|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}} \quad t > 0. \quad (4.21)$$

para  $1 \leq p \leq 2$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

## 4.1. Solución del problema de dispersión directo. Construcción del operador de dispersión.

En el siguiente teorema se resuelve el problema de dispersión directo de la ecuación (1.3).

**Teorema 4.1.** [30] *Supongamos que  $V \in L^1_\gamma$  donde, en el caso genérico  $\gamma > \frac{3}{2}$  y en el caso exceptional  $\gamma > \frac{5}{2}$ . Supongamos que  $H$  no tiene eigenvalores negativos, y que  $V_i \in L^q$   $i = 1, 2$  para  $q$ ,  $1 < q < \frac{3}{2}$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $\forall \phi_- \in \mathcal{H}^1 \cap L^{1+\frac{1}{p}}$  con  $\|\phi_-\|_{\mathcal{H}^1} + \|\phi_-\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} \leq \delta$  existe una única solución  $u(x, t)$  de (1.3) con  $u \in \mathcal{M} \cap C_B(\mathbb{R}, L^2)$  y*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t) - e^{-itH} \phi_-\|_{L^2} = 0, \quad (4.22)$$

más aún, existe una única  $\phi_+ \in L^2$  tal que,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - e^{-itH} \phi_+\|_{L^2} = 0. \quad (4.23)$$

El operador de dispersión  $S_{NL} : \phi_- \mapsto \phi_+$  es inyectivo en  $L^2$  y

$$\|(S_{NL} - I)(\phi_-)\|_{L^2} = O(\|\phi_-\|_{\mathcal{H}^1} + \|\phi_-\|_{L^{1+\frac{1}{p}}})^3. \quad (4.24)$$

$$\|u(t) - e^{-itH} \phi_\pm\|_{\mathcal{M}} = O(\|e^{-itH} \phi_\pm\|_{\mathcal{M}}^3). \quad (4.25)$$

*Demostración.* Definamos  $F(u) := \lambda(V_1(x)u, u)V_2u$ . Entonces,  $u \in C(\mathbb{R}, L^2) \cap M$  es solución de (1.3) con  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t) - e^{-itH} \phi\|_{L^2} = 0$  para algún  $\phi \in \mathcal{H}^1$  si y sólo si  $u$  es solución de la ecuación integral

$$u(t) = e^{-itH} \phi + \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} F(x, u(\tau)) d\tau. \quad (4.26)$$

Esto pues,

$$iu_\tau = Hu + F(u), \quad \Leftrightarrow$$

$$ie^{-i(t-\tau)H} u_\tau = e^{-i(t-\tau)H} (Hu + F(u(\tau))) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& i \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} u_\tau d\tau = \\
& \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} H u d\tau + \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} F(u(\tau)) d\tau \Leftrightarrow \\
& \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} u_\tau d\tau = \\
& \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} H u d\tau + \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} F(u(\tau)) d\tau \Leftrightarrow \\
& \int_{-\infty}^t \partial_\tau (e^{-i(t-\tau)H} u) d\tau - i \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} H u d\tau = \\
& \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} H u d\tau + \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} F(u(\tau)) d\tau \Leftrightarrow \\
& u(t) - e^{-itH} \phi = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} F(u(\tau)) d\tau,
\end{aligned}$$

dado que se tiene la condición asintótica  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|u(t) - e^{-itH} \phi\|_{L^2} = 0$  para algún  $\phi \in \mathcal{H}^1$ .

Vamos a probar que la integral del lado derecho de (4.26) converge en  $L^2$  y en  $\mathcal{M}$ . Para  $u \in \mathcal{M}$  denotemos,

$$\mathbf{P}u(t) := \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} F(x, u(\tau)) d\tau. \quad (4.27)$$

Primero probaremos la convergencia en  $\mathcal{M}$ . Considerando la definición de la norma en  $\mathcal{M}$  (4.2) vamos a acotar primero la norma de  $\mathbf{P}$  en  $L^{p+1}$ ,

$$\begin{aligned}
\|Pu(t)\|_{L^{p+1}} &= \left\| \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} F(x, u(\tau)) \, d\tau \right\|_{L^{p+1}} \leq \\
&\int_{-\infty}^t \|e^{-i(t-\tau)H} F(x, u(\tau))\|_{L^{p+1}} \, d\tau \leq \quad (4.28) \\
&C \int_{-\infty}^t \frac{1}{|t-\tau|^d} \|F(x, u(\tau))\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \, d\tau,
\end{aligned}$$

en donde en la última desigualdad hemos aplicado la estimación  $L^p - L^{p'}$ , antes mencionada y que es probada en [38], considerando  $p' = p + 1$  y  $d = \frac{1}{2} \frac{p-1}{p+1}$ . Por otro lado, dado que  $F(x, u(\tau)) = (V_1(x)u, u)V_2(x)u(x, \tau)$  entonces,

$$\begin{aligned}
\|F(x, u(\tau))\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} &\leq \|(V_1(x)u, u)\| \|V_2(x)u(x, \tau)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \leq \\
&\|V_1(x)u(x, \tau)\|_{L^{p_1}} \|u(x, \tau)\|_{L^{p+1}} \|V_2(x)\|_{L^{q_2}} \|u(x, \tau)\|_{L^{p+1}} \leq \\
&\|V_1(x)\|_{L^{q_1}} \|V_2(x)\|_{L^{q_2}} \|u(x, \tau)\|_{L^{p+1}}^3 \quad (4.29)
\end{aligned}$$

donde  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p+1} = 1$ ,  $\frac{1}{q_2} + \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}$ ,  $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p+1}$  por lo que  $q_1 = q_2 = \frac{p+1}{p-1}$ . Por las condiciones de la estimación  $L^p - L^{p'}$  tenemos que  $p > 5$ ; como la función  $f(p) = \frac{p+1}{p-1}$  es decreciente (su derivada es  $f'(p) = -\frac{2}{(p-1)^2} \leq 0$ ) entonces  $f(p) < f(5) = \frac{3}{2}$  por lo que  $1 < q_1 = q_2 < \frac{3}{2}$ . De este modo hemos llegado a la siguiente desigualdad,

$$\|Pu(t)\|_{L^{p+1}} \leq C \int_{-\infty}^t \frac{1}{|t-\tau|^d} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 \, d\tau. \quad (4.30)$$



Notemos que:

$$\left\| \int_{-\infty}^t \frac{1}{|t-\tau|^d} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 d\tau \right\|_{L^r} \leq C \|u : L(P)\|^3. \quad (4.31)$$

Esto es debido a que estamos aplicando la desigualdad generalizada de Young: Consideremos el espacio de medida  $(\mathbb{R}, \lambda)$ , donde  $\lambda$  es la medida de Lebesgue. Sean  $f, g$  funciones medibles y consideremos que  $1 < p, q, r < \infty$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$  entonces,

$$\|f * g\|_{L^r} \leq C_{pq} \|f\|_{L^p} \|g\|_{q,w}, \quad (4.32)$$

donde estamos definiendo  $\|g\|_{q,w} := \sup_t \{t^q \mu\{x/|g(x)| > t\}\}$ . Dado que en este caso estamos considerando que  $f(\tau) = \|u(\cdot, \tau)\|_{L^{p+1}}^3$  y que  $g(\tau) = \frac{1}{|\tau|^d}$  con  $p = \frac{r}{3}$  y  $q = \frac{1}{d}$  con  $\frac{3}{r} + d = 1 + \frac{1}{r}$  ( $p, q$  son números mayores que 1 pues  $r > 3$ ) por lo que:

$$\|f\|_{L^p} = \|u : L(P)\|^3, \quad (4.33)$$

y por otro lado, tenemos que  $\|g\|_{q,w} = 2$  de modo que,

$$\left\| \int_{-\infty}^t \frac{1}{|t-\tau|^d} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 d\tau \right\|_{L^r} \leq C \|u : L(P)\|^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.34)$$

y (4.31) esta demostrada. Por (4.30) y (4.31),

$$\|Pu : L(P)\| \leq C\|u : L(P)\|^3, \quad (4.35)$$

Por otra parte, partiremos la integral de (4.30) como sigue,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t \frac{1}{|t-\tau|^d} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 d\tau \leq \\ & \int_{(-\infty, t] \cap [t-1, t]} \frac{1}{|t-\tau|^d} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 d\tau + \\ & \int_{(-\infty, t] \sim [t-1, t]} \frac{1}{|t-\tau|^d} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 d\tau. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Acotando el primer término

$$\begin{aligned} & \int_{(-\infty, t] \cap [t-1, t]} \frac{1}{|t-\tau|^d} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 d\tau \leq \\ & \|u\|_M^3 \int_{(-\infty, t] \cap [t-1, t]} \frac{1}{|t-\tau|^d} d\tau \leq \\ & C\|u\|_M^3. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Acotando el segundo término,

$$\begin{aligned} & \int_{(-\infty, t] \sim [t-1, t]} \frac{1}{|t-\tau|^d} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 d\tau \leq \\ & C \left( \int_{(-\infty, t] \sim [t-1, t]} \frac{1}{|t-\tau|^{d\alpha}} d\tau \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left( \int_{(-\infty, t] \sim [t-1, t]} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^{3\beta} d\tau \right)^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

con  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . Para nuestra conveniencia tomemos  $\beta = \frac{r}{3}$ . Dado que

queremos que la primera integral del lado derecho de (4.38) sea finita tenemos que garantizar que  $d\alpha > 1$ ; pero como  $\alpha = \frac{r}{r-3}$  y como  $1 + \frac{1}{r} = d + \frac{3}{r}$  entonces,  $d\alpha = 1 + \frac{1}{r-3} > 1$  y por tanto,

$$\left( \int_{(-\infty, t] \sim [t-1, t]} \frac{1}{|t - \tau|^{d\alpha}} d\tau \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty, \quad (4.39)$$

con lo que,

$$\int_{(-\infty, t] \sim [t-1, t]} \frac{1}{|t - \tau|^d} \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 d\tau \leq C \|u\|_{\mathcal{M}}^3. \quad (4.40)$$

De este modo,

$$\|Pu(t)\|_{L^{p+1}} \leq C \|u\|_{\mathcal{M}}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.41)$$

concluyendo que,

$$\|Pu\|_{C_B(\mathbb{R}, L^{p+1})} \leq C \|u\|_{\mathcal{M}}^3. \quad (4.42)$$

Entonces, de (4.35) y de (4.42) tenemos que,

$$\|\mathbf{P}u\|_{\mathcal{M}} \leq C \|u\|_{\mathcal{M}}^3. \quad (4.43)$$

Esto prueba la convergencia en  $\mathcal{M}$ . La convergencia en  $L^2$  es consecuencia de,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}u(\tau)\|_{L^2}^2 &= \left( \mathbf{P}u(\tau), \mathbf{P}u(\tau') \right)_{L^2} = \\
&\left( \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau)H} F(x, u(\tau)) d\tau, \int_{-\infty}^t e^{-i(t-\tau')H} F(x, u(\tau')) d\tau' \right) = \\
&\int_{-\infty}^t d\tau \left( F(x, u(\tau)), \int_{-\infty}^t e^{-i(\tau-\tau')H} F(x, u(\tau')) d\tau' \right) = \\
&\int_{-\infty}^t d\tau \left( F(x, u(\tau)), \int_{-\infty}^{\tau} e^{-i(\tau-\tau')H} F(x, u(\tau')) d\tau' \right) + \\
&\int_{-\infty}^t d\tau \left( F(x, u(\tau)), \int_{\tau}^t e^{-i(\tau-\tau')H} F(x, u(\tau')) d\tau' \right) = \\
&\int_{-\infty}^t d\tau' \left( F(x, u(\tau)), \int_{-\infty}^{\tau'} e^{-i(\tau-\tau')H} F(x, u(\tau')) d\tau \right) + \\
&\int_{-\infty}^t d\tau \left( F(x, u(\tau)), \mathbf{P}(u(\tau)) \right) = \\
&\int_{-\infty}^t d\tau' \left( \int_{-\infty}^{\tau'} e^{-i(\tau'-\tau)H} F(x, u(\tau)) d\tau, F(x, u(\tau')) \right) + \\
&\int_{-\infty}^t d\tau \left( F(x, u(\tau)), \mathbf{P}(u(\tau)) \right) + \\
&\int_{-\infty}^t d\tau' \left( \mathbf{P}(u(\tau')), F(x, u(\tau')) \right) + \int_{-\infty}^t d\tau \left( F(x, u(\tau)), \mathbf{P}(u(\tau)) \right) = \\
2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^t (F(x, u(\tau)), \mathbf{P}u(\tau)) d\tau &\leq C \int_{-\infty}^t \|F(x, u(\tau))\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \|\mathbf{P}u(\tau)\|_{L^{p+1}} d\tau \\
&\leq C \int_{-\infty}^t \left( \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{|\tau-\rho|^d} \|F(x, u(\rho))\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} d\rho \right) d\tau \leq \\
&\int_{-\infty}^t \left( \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^3 d\tau \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{|\tau-\rho|^d} \|u(\rho)\|_{L^{p+1}}^3 d\rho \right) d\tau \leq \\
C \|u\|_{\mathcal{M}}^3 \left( \int_{-\infty}^t \|u(\tau)\|_{L^{p+1}}^{\frac{3r}{r-1}} d\tau \right)^{\frac{r-1}{r}} &\leq C \|u\|_{\mathcal{M}}^3 \|u\|_{\mathcal{M}}^{4-r} \left[ \int_{-\infty}^t \|u(\tau)\|_{p+1}^r d\tau \right]^{\frac{r-1}{r}} \\
&\leq C \|u\|_{\mathcal{M}}^6.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Dado que  $e^{-itH}$  es un grupo unitario el  $L^2$  que conmuta con  $\sqrt{I+H}$  tenemos que  $e^{-itH}$  es un operador acotado de  $\mathcal{H}^1$  a  $C_B(\mathbb{R}, \mathcal{H}^1)$ . Por el teorema de encaje de Sobolev [1] y por interpolación,  $\mathcal{H}^1$  esta continuamente encajado en  $L^{p+1}$  y de este modo  $e^{-itH}$  es un operador acotado de  $\mathcal{H}^1$  a  $C_B(\mathbb{R}, L^{p+1})$ .

Por otro lado, como consecuencia de la estimación  $L^p - L^{p'}$ ,  $e^{-itH} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1 \cap L^{1+\frac{1}{p}}, L^r(\mathbb{R}, L^{p+1}))$ . (Con  $r$  y  $p$  como se definieron en un principio de la sección.) Combinando todos los resultados se tiene entonces que  $\forall \phi \in \mathcal{H}^1 \cap L^{1+\frac{1}{p}}$ ,

$$\|e^{-itH}\phi\|_{\mathcal{M}} \leq \tilde{C}(\|\phi\|_{\mathcal{H}^1} + \|\phi\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}). \quad (4.45)$$

Daremos con detalle la demostración de que  $\forall \phi \in \mathcal{H}^1 \cap L^{1+\frac{1}{p}}$ ,  $e^{-itH}\phi \in L^r(\mathbb{R}, L^{p+1})$ . Tenemos que considerar lo siguiente:

$$\|e^{-itH}\phi\|_{L(P)} \leq \|e^{-itH}\phi\chi_{[-1,1]}\|_{L(P)} + \|e^{-itH}\phi\chi_{\mathbb{R}^{\sim}[-1,1]}\|_{L(P)}.$$

Dado que:

$$\|e^{-itH}\phi\chi_{[-1,1]}\|_{L(P)}^r = \int \chi_{[-1,1]} \|e^{-itH}\phi\|_{L^{p+1}}^r dt$$

y que  $\mathcal{H}^1$  esta encajado continuamente en  $L^{p+1}$  (por el teorema de encaje de Sobolev [1] ) se tendrá que:

$$\|e^{-itH}\phi\chi_{[-1,1]}\|_{L(P)} \leq C\|\phi\|_{\mathcal{H}^1}.$$

Por otro lado, para  $1 \leq q \leq \frac{3}{2}$  y para  $p = \frac{q+1}{q-1}$  y  $r = \frac{4(p+1)}{p+3}$  se tiene la estimación  $L^p - L^{p'}$  i.e:

$$\|e^{-itH}\phi\|_{L^{p+1}} \leq \frac{C}{|t|^d} \|\phi\|_{L^{1+\frac{1}{p}}},$$

por lo que:

$$\|e^{-itH}\phi\chi_{\mathbb{R} \sim [-1,1]}\|_{L(P)}^r \leq \int \chi_{\mathbb{R} \sim [-1,1]} \frac{1}{|t|^{dr}} \|\phi\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}^r dt \leq C \|\phi\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}^r,$$

ya que en este caso  $rd > 1$  (pues  $p > 5$  y  $d = \frac{p-1}{2(p+1)}$ ) concluyendo así que,

$$\|e^{-itH}\phi\chi_{\mathbb{R} \sim [-1,1]}\|_{L(P)} \leq \|\phi\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}.$$

Combinando los resultados se obtiene que  $\forall \phi \in \mathcal{H}^1 \cap L^{1+\frac{1}{p}}$ ,  $e^{-itH}\phi \in L^r(\mathbb{R}, L^{p+1})$ .

Mostraremos primero la unicidad de la solución. Consideremos dos soluciones  $u, v$  de (1.3) que satisfacen (4.22). Tenemos que,

$$u(t) - v(t) = \mathbf{P}u(t) - \mathbf{P}v(t). \quad (4.46)$$

Denotemos  $u_T := \chi_{(-\infty, T]}(t)u(t)$ , donde  $\chi_{(-\infty, T]}(t)$  es la función característica en  $(-\infty, T]$ ,  $T \in \mathbb{R}$  y  $v_T$  estará definida de forma análoga. De este modo,

$$\begin{aligned} \|u_T(t) - v_T(t)\|_{p+1} &\leq \int_{-\infty}^t \left\| e^{-i(t-\tau)H} (F(u_T) - F(v_T)) \right\|_{p+1} d\tau \leq \\ &\int_{-\infty}^t \frac{1}{|t-\tau|^d} \|F(u_T) - F(v_T)\|_{\frac{p+1}{p}} d\tau. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ahora como,

$$\begin{aligned} F(u_T) - F(v_T) &= \\ (V_1 u_T, u_T) V_2 (u_T - v_T) &+ [(V_1 (u_T - v_T), u_T) - (V_1 v_T, v_T - u_T)] V_2 v_T, \end{aligned} \quad (4.48)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \|F(u_T(t)) - F(v_T(t))\|_{\frac{p+1}{p}} &= \\ \|(V_1 u(t)_T, u_T(t)) V_2 (u_T(t) - v_T(t))\|_{\frac{p+1}{p}} &+ \\ \|(V_1 (u_T(t) - v_T(t)), u_T(t)) V_2 v_T(t)\|_{\frac{p+1}{p}} &+ \\ \|(V_1 v_T(t), v_T(t) - u_T(t)) V_2 v_T(t)\|_{\frac{p+1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Acotando el primer término del lado derecho,

$$\begin{aligned} \|(V_1 u_T(t), u_T(t)) V_2 (u_T(t) - v_T(t))\|_{\frac{p+1}{p}} &\leq \\ \|V_1\|_{q_1} \|V_2\|_{q_2} \|u_T(t)\|_{p+1}^2 \|u_T(t) - v_T(t)\|_{p+1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

el segundo,

$$\begin{aligned} & \|(V_1(u_T(t) - v_T(t)), u_T(t))V_2u_T(t)\|_{\frac{p+1}{p}} \leq \\ & \|V_1\|_{q_1}\|V_2\|_{q_2}\|u_T(t)\|_{p+1}\|v_T(t)\|_{p+1}\|u_T(t) - v_T(t)\|_{p+1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

y el tercero,

$$\begin{aligned} & \|(V_1v_T(t), v_T(t) - u_T(t))V_2v_T(t)\|_{\frac{p+1}{p}} \leq \\ & \|V_1\|_{q_1}\|V_2\|_{q_2}\|v_T(t)\|_{p+1}^2\|u_T(t) - v_T(t)\|_{p+1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

con  $q_1 = q_2 = \frac{p+1}{p-1}$ . Si acotamos a las normas  $\|\cdot\|_{p+1}$  mediante normas  $\|\cdot\| : L(P)$  entonces lo que podemos concluir que,

$$\begin{aligned} & \|u_T(t) - v_T(t)\|_{p+1} \leq \\ & C \int_{-\infty}^t \frac{1}{|t - \tau|^d} \left( \|u_T : L(P)\|^2 + \|u_T : L(P)\| \|v_T : L(P)\| + \|v_T : L(P)\|^2 \right) \\ & \|u_T(t) - v_T(t)\|_{p+1} d\tau \leq C_T \|u_T - v_T : L(P)\| \end{aligned} \quad (4.53)$$

en donde a la última desigualdad le hemos aplicado: la desigualdad generalizada de Young, el hecho de que para toda  $k > k' > 0$  tenemos que  $\|u_T : L(P)\|^k \leq C_T \|u_T : L(P)\|^{k'}$  con  $\|u_T : L(P)\|^k \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow -\infty$  y además que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \left( \|u_T : L(P)\|^2 + \|v_T : L(P)\|^2 \right) = 0$ . Entonces podemos hacer  $C_T > 0$  tan pequeña como nos convenga y de este modo,



$$\|u_T - v_T : L(P)\| \leq \frac{1}{2} \|u_T - v_T : L(P)\|, \quad (4.54)$$

para  $T$  suficientemente negativa. Se sigue entonces que  $u(t) = v(t)$  para  $t \leq T$ . El resultado del Teorema 3.1 implica entonces que,  $u = v$ .

La unicidad de  $\phi_+$  se sigue de lo siguiente; dado que,

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - e^{-itH} \phi_+\|_{L^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{itH} u(t) - \phi_+\|_{L^2}, \quad (4.55)$$

entonces si existe  $\hat{\phi}_+$  tal que,

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - e^{-itH} \hat{\phi}_+\|_{L^2} \quad (4.56)$$

se tendría

$$\begin{aligned} \|\phi_+ - \hat{\phi}_+\|_{L^2} &= \|-(e^{itH} u(t) - \phi_+) + e^{itH} u(t) - \hat{\phi}_+\|_{L^2} \leq \\ &\|e^{itH} u(t) - \phi_+\|_{L^2} + \|e^{itH} u(t) - \hat{\phi}_+\|_{L^2} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

si  $t \rightarrow \infty$ ,

por lo que  $\phi_+ = \hat{\phi}_+$ .

De (4.26)(4.45) se tiene que,

$$\|u\|_{\mathcal{M}} \leq \|e^{-itH} \phi_-\|_{\mathcal{M}} + \|\mathbf{P}u(t)\|_{\mathcal{M}} \leq C[\|\phi_-\|_{\mathcal{H}^1} + \|\phi_-\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} + \|u\|_{\mathcal{M}}^3]. \quad (4.58)$$

Denotemos:  $\mathcal{M}_R := \{u \in \mathcal{M} \mid \|u\|_{\mathcal{M}} \leq R, R > 0\}$  y tomemos  $R$  tal que  $C(2R)^2 \leq \frac{1}{2}$  donde  $C$  se toma como en (4.43) y  $\delta > 0$  tal que  $\tilde{C}\delta \leq \frac{R}{2}$ , con  $\tilde{C}$  como en (4.45). Con estas condiciones se puede probar que  $T(u) := e^{-itH}\phi - \mathbf{P}u$  define una contracción de  $\mathcal{M}_R$  a  $\mathcal{M}_R$  para todo  $\phi_- \in \mathcal{H}^1 \cap L^{1+\frac{1}{p}}$  con  $\|\phi_-\|_{\mathcal{H}^1} + \|\phi_-\|_{L^{1+\frac{1}{p}}} \leq \delta$ . El teorema de contracción implica que  $T$  tiene un punto fijo en  $\mathcal{M}_R$ . Este punto fijo es solución de (1.3), más aún,

$$\|u\|_{\mathcal{M}} \leq \|e^{-itH}\phi_-\|_{\mathcal{M}} + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{\mathcal{M}}, \quad (4.59)$$

por lo que,

$$\|u\|_{\mathcal{M}} \leq 2\|e^{-itH}\phi_-\|_{\mathcal{M}}, \quad (4.60)$$

entonces,

$$\|u\|_{\mathcal{M}} \leq \tilde{C}(\|\phi_-\|_{\mathcal{H}^1} + \|\phi_-\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}). \quad (4.61)$$

De este modo obtenemos,

$$\|u - e^{-itH}\phi_-\|_{\mathcal{M}} = \|\mathbf{P}(u)\|_{\mathcal{M}} \leq C\|u\|_{\mathcal{M}}^3 \leq C[\|\phi_-\|_{\mathcal{H}^1} + \|\phi_-\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}]^3. \quad (4.62)$$

Como otro resultado, dado que  $u$  converge en  $L^2$  y dado que

$$\|u\|_{L^2} \leq \|e^{-itH}\phi_-\|_{L^2} + \|\mathbf{P}(u)\|_{L^2} \leq C[\|\phi_-\|_{L^2} + \|u\|_{\mathcal{M}}^3], \quad (4.63)$$

tenemos que  $u \in C_B(\mathbb{R}, L^2)$ . La continuidad de la función en  $L^2$  es una consecuencia de que  $\mathbf{P}(u) \in L^2$  dado que si definimos,

$$v(t) := \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{i\tau H} F(u(\tau)) d\tau,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \|u(t_1) - u(t_2)\|_{L^2}^2 &= \|v(t_1) - v(t_2)\|_{L^2}^2 = \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{i\tau H} F(u(\tau)) d\tau \right\|_{L^2}^2 = \\ &= \left( \int_{t_1}^{t_2} e^{i\tau H} F(u(\tau)) d\tau, \int_{t_1}^{t_2} e^{i\tau' H} F(u(\tau')) d\tau' \right) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left( F(u(\tau)), \int_{t_1}^{t_2} e^{-i(\tau-\tau')H} F(u(\tau')) d\tau' \right) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left( F(u(\tau)), \int_{t_1}^{\tau} e^{-i(\tau-\tau')H} F(u(\tau')) d\tau' \right) + \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left( F(u(\tau)), \int_{\tau}^{t_2} e^{-i(\tau-\tau')H} F(u(\tau')) d\tau' \right). \end{aligned}$$

Si definimos ahora:

$$\mathcal{P}_{t_1} u(\tau) := \int_{t_1}^{\tau} e^{-i(\tau-\tau')H} F(u(\tau')) d\tau',$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 & \|u(t_1) - u(t_2)\|_{L^2}^2 = \\
 & \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left( F(u(\tau)), \mathcal{P}_{t_1} u(\tau) \right) + \\
 & \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left( \int_{\tau}^{t_2} e^{-i(\tau'-\tau)H} F(u(\tau)) d\tau', F(u(\tau')) \right) = \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left( F(u(\tau)), \mathcal{P}_{t_1} u(\tau) \right) + \\
 & \int_{t_1}^{t_2} d\tau' \left( \int_{t_1}^{\tau'} e^{-i(\tau'-\tau)H} F(u(\tau)) d\tau, F(u(\tau')) \right) = \\
 & 2 \operatorname{Re} \int_{t_1}^{t_2} (F(u), \mathcal{P}_{t_1} u) d\tau \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

si  $t_1 \rightarrow t_2$ .

La ecuación (4.25) para  $\phi_-$  se sigue de lo siguiente:

$$\|u(t) - e^{-itH} \phi_-\|_{\mathcal{M}} \leq C \|u\|_{\mathcal{M}}^3 \leq C (\|e^{-itH} \phi_-\|_{\mathcal{M}}^3), \quad (4.64)$$

como consecuencia de las ecuaciones (4.26), (4.43) y (4.60). Definamos  $\phi_+$  como,

$$\phi_+ := \phi_- + \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau H} F(x, u(\tau)) d\tau. \quad (4.65)$$

Haciendo un cálculo análogo al de (4.41) se concluye que  $\phi_+$  está en  $L^{p+1}$  y haciendo un cálculo análogo al de (4.44) se prueba que  $\phi_+$  está en  $L^2$ . De

esta forma obtenemos que,

$$\|\phi_+ - \phi_-\|_{L^2} \leq \|u\|_{\mathcal{M}}^3 \leq C \|e^{-itH}\phi\|_{\mathcal{M}}^3 \leq \tilde{C}(\|\phi\|_{\mathcal{H}^1} + \|\phi\|_{L^{1+\frac{1}{p}}})^3, \quad (4.66)$$

como consecuencia de (4.45) por lo que (4.24) queda demostrada pues hemos considerado  $S_{NL}\phi_- = \phi_+$ .

Usando (4.26) y (4.65) podemos escribir a  $u$  como,

$$u(t) = e^{-itH}\phi_+ - \frac{1}{i} \int_t^\infty e^{-i(t-\tau)H} F(x, u(\tau)) d\tau, \quad (4.67)$$

y entonces podemos probar la condición asintótica de nuestra solución para tiempos grandes ((4.23) con  $\phi_+$ ) como en (4.44) simplemente haciendo un cambio en los límites de integración.

Estimando como en la prueba del resultado (4.43) obtenemos que:

$$\left\| \int_t^\infty e^{-i(t-\tau)H} F(x, u(\tau)) d\tau \right\|_{L^2} \leq C \|u\|_{\mathcal{M}}^3, \quad (4.68)$$

Multiplicando ambos lados de (4.65) y volviendo a estimar como en (4.43) también tenemos que  $e^{-itH}\phi_+ \in \mathcal{M}$ . Notemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{M}} &\leq \|e^{-itH}\phi_+\|_{\mathcal{M}} + \left\| \frac{1}{i} \int_t^\infty e^{-i(t-\tau)H} F(x, u(\tau)) \, d\tau \right\|_{\mathcal{M}} \leq \\
&\|e^{-itH}\phi_+\|_{\mathcal{M}} + \|u(t)\|_{\mathcal{M}}^3 \leq \\
&\|e^{-itH}\phi_+\|_{\mathcal{M}} + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{\mathcal{M}},
\end{aligned} \tag{4.69}$$

por lo que,

$$\|u\|_{\mathcal{M}} \leq 2\|e^{-itH}\phi_+\|_{\mathcal{M}} \tag{4.70}$$

de modo que podemos concluir,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - e^{-itH}\phi_+\|_{\mathcal{M}} &\leq \left\| \frac{1}{i} \int_t^\infty e^{-i(t-\tau)H} F(x, u(\tau)) \, d\tau \right\|_{\mathcal{M}} \leq \\
&C\|u\|_{\mathcal{M}}^3 \leq C(\|e^{-itH}\phi_+\|_{\mathcal{M}}^3),
\end{aligned} \tag{4.71}$$

y con ello queda demostrada la estimación (4.25), para  $\phi_+$ .

Para probar que  $S_{NL} : \phi_- \hookrightarrow \phi$  es inyectivo notemos que si  $\phi_+ = S_{NL}\phi_- = 0$  se sigue de (4.67) que,

$$u(t) = -\frac{1}{i} \int_t^\infty e^{-i(t-\tau)H} F(x, u(\tau)) \, d\tau. \tag{4.72}$$

Denotamos  $u_T := \chi_{(T, \infty]}(t)u(t)$  y como en (4.54) se tiene que,

$$\|u_T(t); L(P)\| \leq \frac{1}{2} \|u_T(t); L(P)\|, \tag{4.73}$$

para  $T$  suficientemente positiva, entonces  $u(t) = 0 \forall t \geq T$ . Dado que  $u \in$

$C(\mathbb{R}, L^2)$  y es única lo podemos concluir para toda  $t$ . Si tomamos la definición de  $u$  como en (4.26) obtendremos que  $\phi_- = 0$ .

□

## 4.2. Solución del problema inverso

Para la reconstrucción del potencial  $V$  vamos a definir el siguiente operador  $S$ .

$$S := \mathbf{W}_+^* S_{NL} \mathbf{W}_-. \quad (4.74)$$

La justificación del por que estamos considerando este operador y no simplemente  $S_{NL}$  es la siguiente. En la Figura 1 estamos mostrando esquemáticamente las dinámicas de un sistema de dispersión no lineal (línea verde), sistema de dispersión lineal (línea morada) y un sistema libre (líneas azules). De nuestras condiciones asintóticas (4.25) podemos notar que el operador de dispersión  $S_{NL}$  esta asociando estados asintóticos remotos  $\phi_-$ , en el sistema lineal, con estados futuros  $\phi_+$  también en el sistema de dispersión lineal; de ahí que la diferencia en las dinámicas sea sólo el comportamiento no lineal y que por ello no sea posible recuperar, de  $S_{NL}$ , el potencial,  $V$ . El problema de solución si en lugar de tomar sólo el operador de dispersión no lineal,  $S_{NL}$ , consideremos la composición de él con los operadores de onda clásicos  $\mathbf{W}_\pm$ . La composición que se propone tiene justificación de la definición de los

operadores de onda  $\mathbf{W}_-$  y  $\mathbf{W}_+^*$  tal y como lo muestra la Figura 1. De esta forma, con este nuevo operador, llamado  $S$ , será posible recuperar toda la información del sistema pues estamos comparando la dinámica del sistema de dispersión no lineal con un sistema libre.



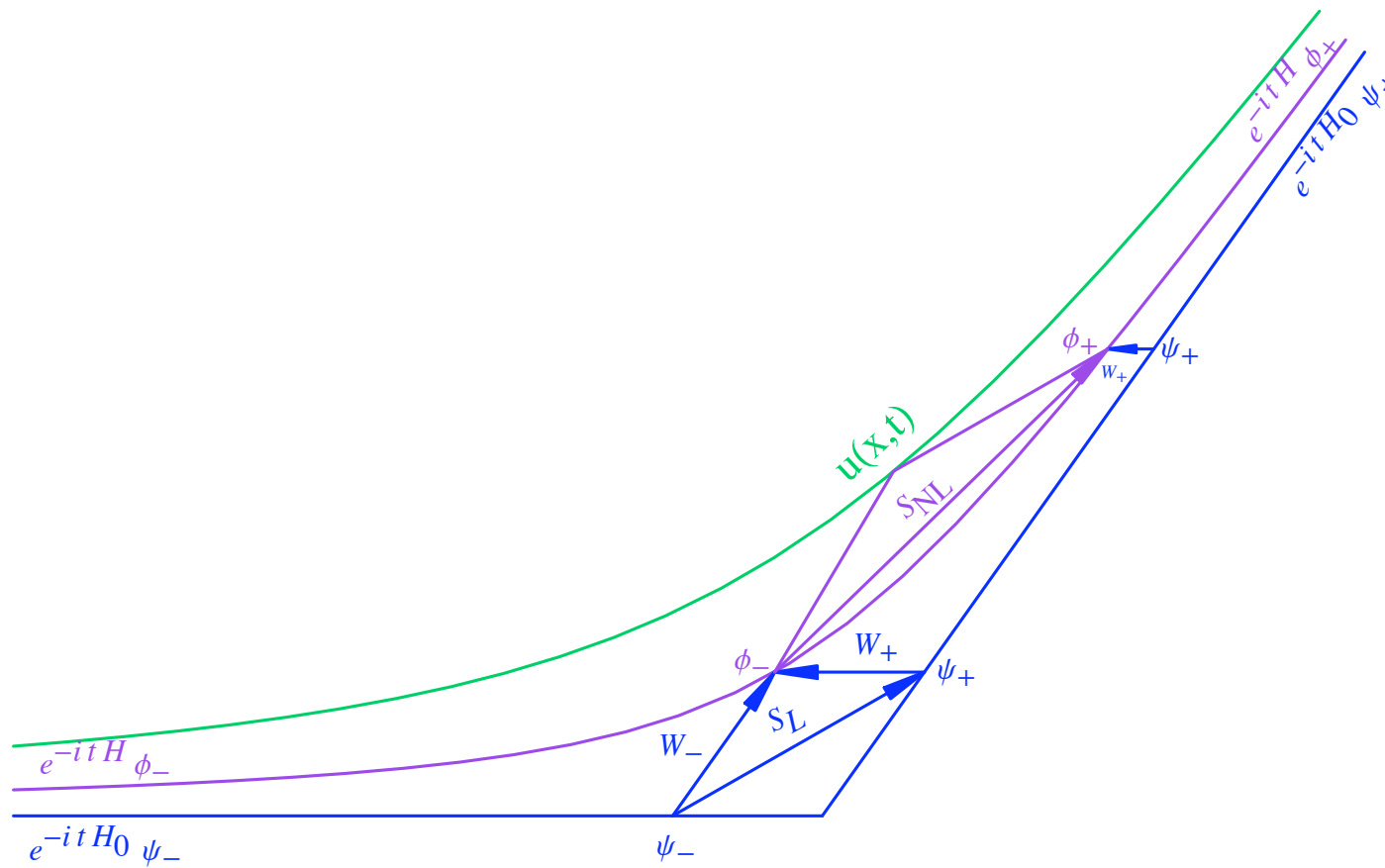


Figura 4.1: Dinámica de un sistema de dispersión no lineal, lineal y libre.

En el siguiente resultado, reconstruiremos el operador de dispersión de la ecuación de Schrödinger lineal ((1.3) con  $V = 0$ ),  $S_L$ , de  $S$ .

**Teorema 4.2.** [30] *Supongamos que las hipótesis del Teorema 4.1 están dadas. Entonces, para cada  $\phi \in \mathcal{H}^1 \cap L^{1+\frac{1}{p}}$  tenemos que,*

$$\frac{d}{d\epsilon} S(\epsilon\phi) \Big|_{\epsilon=0} = S_L(\phi), \quad (4.75)$$

donde la derivada de (4.75) existe en la topología fuerte de  $L^2$ .

*Demostración.* Dado que  $S(0) = 0$ , pues  $S_{NL}(0) = 0$ , y dado que los operadores de onda  $\mathbf{W}_\pm$  son acotados en  $\mathcal{H}^1$ . Es suficiente probar que

$$s - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (S_{NL}(\epsilon\psi) - \epsilon\psi) = 0, \quad (4.76)$$

pues,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} S(\epsilon\phi) \Big|_{\epsilon=0} = S_L\phi &\Leftrightarrow \\ s - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W_+^* S_{NL} W_-(\epsilon\phi) - S(0)}{\epsilon} - W_+^* W_-\phi &= 0 \Leftrightarrow \\ s - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W_+^* S_{NL} W_-(\epsilon\phi) - \epsilon W_+^* W_-\phi}{\epsilon} &= 0 \Leftrightarrow \\ s - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_+^* \left[ \frac{S_{NL} W_-(\epsilon\phi) - W_-\phi\epsilon}{\epsilon} \right] &= 0 \Leftrightarrow \\ s - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{S_{NL} W_-(\epsilon\phi) - W_-\epsilon\phi}{\epsilon} \right] &= 0 \Leftrightarrow \\ s - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{S_{NL}(\epsilon\psi) - \epsilon\psi}{\epsilon} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (4.77)$$

donde  $W_-\phi = \psi$  y donde hemos denotado  $\epsilon\psi = \phi_-$ , de modo que (4.76) es,

$$s - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\phi_+ - \phi_-}{\epsilon} \right] = 0, \quad (4.78)$$

pero como,

$$\begin{aligned} \|\phi_+ - \phi_-\|_{L^2} &\leq C \|u\|_{\mathcal{M}}^3 \leq C \|e^{-itH} \phi_-\|_{\mathcal{M}}^3 \leq \\ &\leq C (\|\phi_-\|_{\mathcal{H}^1} + \|\phi_-\|_{L^{1+\frac{1}{p}}})^3 \leq C \epsilon^3 (\|\psi\|_{\mathcal{H}^1} + \|\psi\|_{L^{1+\frac{1}{p}}})^3 \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.79)$$

si  $\epsilon \rightarrow 0$ . □

Ahora reconstruiremos  $V$  de  $S$ .

**Corolario 4.3.** [30] *Bajo las condiciones del Teorema 4.1  $S$  determina de manera unívoca a  $V$ .*

*Demostración.* Como consecuencia del Teorema 4.2,  $S$  determina  $S_L$ . De  $S_L$  se pueden obtener los coeficientes de reflexión para dispersión de Schrödinger lineal [21]. Como  $H$  no tiene estados acotados podemos reconstruir  $V$  de uno de los coeficientes de reflexión usando métodos estandar. Ver [3], [5], [19], [20]. □

Finalmente reconstruiremos  $F$  de  $S_{NL}$ .

**Teorema 4.4.** [30] *Bajo las hipótesis del Teorema 4.1 tenemos que, para cada  $\phi \in \mathcal{H}^1 \cap L^{1+\frac{1}{p}}$ .*

$$\begin{aligned}
& i(S_{NL} - I)(\epsilon\phi, \phi) = \\
& \epsilon^3 \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (V_1 e^{-itH} \phi, e^{-itH} \phi)(V_2 e^{-itH} \phi, e^{-itH} \phi) dt + O(\epsilon^5).
\end{aligned} \tag{4.80}$$

*Demostración.* Como consecuencia del teorema de contracción se tiene que:

$$u(x, t) = e^{-itH} \epsilon\phi + v(t), \tag{4.81}$$

donde,

$$v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}^j(e^{-itH} \epsilon\phi). \tag{4.82}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{\mathcal{M}} &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}^j(e^{-itH} \epsilon\phi) \right\|_{\mathcal{M}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{P}^j(e^{-itH} \epsilon\phi)\|_{\mathcal{M}} \leq \\
& \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^{3j} \|\mathbf{P}^j(e^{-itH} \phi)\|_{\mathcal{M}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} C^{3j} \epsilon^{3j} \|e^{-itH} \phi\|_{\mathcal{M}} \leq \\
& \sum_{j=1}^{\infty} C^{3j} \epsilon^{3j} (\|\phi\|_{\mathcal{H}_1} + \|\phi\|_{L^{p+1}})^{3j} \leq \\
& (C\epsilon(\|\phi\|_{\mathcal{H}_1} + \|\phi\|_{L^{p+1}}))^3 \sum_{j=1}^{\infty} (C\epsilon(\|\phi\|_{\mathcal{H}_1} + \|\phi\|_{L^{p+1}}))^{3j-1} \leq \\
& (C\epsilon(\|\phi\|_{\mathcal{H}_1} + \|\phi\|_{L^{p+1}}))^3 \sum_{j=0}^{\infty} (C\epsilon(\|\phi\|_{\mathcal{H}_1} + \|\phi\|_{L^{p+1}}))^{3j},
\end{aligned} \tag{4.83}$$

entonces si escogemos  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño para que  $|C\epsilon(\|\phi\|_{\mathcal{H}_1} + \|\phi\|_{L^{p+1}})| < 1$  tendremos que,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (C\epsilon(\|\phi\|_{\mathcal{H}_1} + \|\phi\|_{L^{p+1}}))^{3j} < \infty, \quad (4.84)$$

y por tanto  $\|v(t)\|_{\mathcal{M}} \leq \tilde{C}\epsilon^3$ .

Ahora calculemos  $\int_{-\infty}^{\infty} (V_1 u, u)(V_2 u, e^{-itH}\phi) dt$ . Dado que,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 u, u)(V_2 u, e^{-itH}\phi) dt = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1(e^{-itH}\epsilon\phi + v(t)), e^{-itH}\epsilon\phi + v(t))(V_2(e^{-itH}\epsilon\phi + v(t)), e^{-itH}\phi) dt \leq \\ & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 e^{-itH}\epsilon\phi, e^{-itH}\epsilon\phi)(V_2 e^{-itH}\epsilon\phi, e^{-itH}\phi) dt + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 v(t), e^{-itH}\epsilon\phi)(V_2 e^{-itH}\epsilon\phi, e^{-itH}\phi) dt + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 e^{-itH}\epsilon\phi, v(t))(V_2 e^{-itH}\epsilon\phi, e^{-itH}\phi) dt + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 v(t), v(t))(V_2 e^{-itH}\epsilon\phi, e^{-itH}\phi) dt + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 e^{-itH}\epsilon\phi, e^{-itH}\epsilon\phi)(V_2 v(t), e^{-itH}\phi) dt + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 v(t), e^{-itH}\epsilon\phi)(V_2 v(t), e^{-itH}\phi) dt + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 e^{-itH}\epsilon\phi, v(t))(V_2 v(t), e^{-itH}\phi) dt + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 v(t), v(t))(V_2 e^{-itH}\epsilon\phi, e^{-itH}\phi) dt. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Vamos a empezar acotando los primeros dos términos para ejemplificar el proceso y a continuación generalizaremos el razonamiento para el resto de los términos.

Como,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 e^{-itH} \epsilon \phi, e^{-itH} \epsilon \phi) (V_2 e^{-itH} \epsilon \phi, e^{-itH} \phi) dt \leq \\
 & \epsilon^3 \|V_1\|_{L^q} \|V_2\|_{L^q} \int_{-\infty}^{\infty} \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^2 \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^2 dt \leq \\
 & C_{V_1, V_2} \epsilon^3 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^{2\hat{r}} dt \right)^{\frac{1}{\hat{r}}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^{2\tilde{r}} dt \right)^{\frac{1}{\tilde{r}}},
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

donde  $C_{V_1, V_2} = \|V_1\|_{L^q} \|V_2\|_{L^q}$  y  $\frac{1}{\hat{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} = 1$ . Consideremos  $\hat{r} = \frac{r}{2}$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 e^{-itH} \epsilon \phi, e^{-itH} \epsilon \phi) (V_2 e^{-itH} \epsilon \phi, e^{-itH} \phi) dt \leq \\
 & C_{V_1, V_2} \epsilon^3 \|e^{-itH} \phi\|_{L(P)}^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^{2\tilde{r}} dt \right)^{\frac{1}{\tilde{r}}} \leq \\
 & C_{V_1, V_2} \epsilon^3 \|e^{-itH} \phi\|_{L(P)}^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^{\frac{2r}{r-2}-r} \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^r dt \right)^{\frac{r-2}{r}} \leq \\
 & C_{V_1, V_2} \epsilon^3 \|e^{-itH} \phi\|_M^2 \|e^{-itH} \phi\|_M^{\left(\frac{2r}{r-2}-r\right)\frac{r-2}{r}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^r dt \right)^{\frac{r-2}{r}} \\
 & C_{V_1, V_2} \epsilon^3 \|e^{-itH} \phi\|_M^2 \|e^{-itH} \phi\|_M^{\left(\frac{2r}{r-2}-r\right)\frac{r-2}{r}} \|e^{-itH} \phi\|_{L(P)}^{r-2} \leq \\
 & C_{V_1, V_2} \epsilon^3 \|e^{-itH} \phi\|_M^4 \leq C_{V_1, V_2} \epsilon^3 (\|\phi\|_{\mathcal{H}^1} + \|\phi\|_{L^{p+1}})^4 < \infty.
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

Ahora consideremos el siguiente término,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (V_1 v(t), e^{-itH} \epsilon \phi) (V_2 e^{-itH} \epsilon \phi, e^{-itH} \phi) dt. \quad (4.88)$$

Dado que,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 v(t), e^{-itH} \epsilon \phi) (V_2 e^{-itH} \epsilon \phi, e^{-itH} \phi) dt \leq \\ & C_{V_1, V_2} \epsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|_{L^{p+1}} \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^3 dt \leq \\ & C_{V_1, V_2} \epsilon^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|_{L^{p+1}}^{\hat{r}} dt \right)^{\frac{1}{\hat{r}}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^{3\hat{r}} dt \right)^{\frac{1}{\hat{r}}} \end{aligned} \quad (4.89)$$

con  $\frac{1}{\hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}} = 1$ . Considerando ahora que  $\hat{r} = r$  tendremos entonces que,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 v(t), e^{-itH} \epsilon \phi) (V_2 e^{-itH} \epsilon \phi, e^{-itH} \phi) dt \leq \\ & C_{V_1, V_2} \epsilon^2 \|v\|_M \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|e^{-itH} \phi\|_{L^{p+1}}^{\frac{3r}{r-1}} dt \right)^{\frac{r-1}{r}} \leq \\ & C_{V_1, V_2} \epsilon^2 \|v\|_M \|e^{-itH} \phi\|_M^{\left(\frac{3r}{r-1}-r\right)\frac{r-1}{r}} \|e^{-itH} \phi\|_M^{r-1} \leq \\ & C_{V_1, V_2} \epsilon^2 \|v\|_M \|e^{-itH} \phi\|_M^3 \leq \hat{C}_{V_1, V_2} \epsilon^5 (\|\phi\|_{\mathcal{H}_1} + \|\phi\|_{L^{p+1}})^3 < \infty. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Notemos que los términos tercero y quinto del lado derecho de (4.85) tendrán es análogas, mientras que los términos cuarto, sexto, séptimo y octavo tendrán (con argumentos similares) es del tipo,

$$\hat{C}_{V_1, V_2} \epsilon^7 (\|\phi\|_{\mathcal{H}_1} + \|\phi\|_{L^{p+1}})^3 < \infty.$$

Dado que todos los términos del lado derecho de (4.85) tienen es con potencias de  $\epsilon$  mayores a 3 y son finitos, entonces al tomar,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i\epsilon^3} \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 u, u)(V_2 u, e^{-itH} \phi) dt,$$

sólo sobrevive el primer término y de este modo,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda}{i\epsilon^3} \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 u, u)(V_2 u, e^{-itH} \phi) dt = \\ \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (V_1 e^{-itH} \phi, e^{-itH} \phi)(V_2 e^{-itH} \phi, e^{-itH} \phi) dt. \end{aligned} \quad (4.91)$$

□

**Corolario 4.5.** [30] *Supongamos que las condiciones del Teorema 4.1 están dadas y que  $V_1, V_2$  son a valores reales que no son idénticamente cero. Asumamos que  $V_1 = V_2$  o que  $V_j$ ,  $j = 1, 2$ . no cambian de signo y que además  $V_1 V_2 \neq 0$  en un conjunto de medida positiva. Entonces el operador de dispersión  $S$  y  $V_j$ ,  $j = 1, 2$ . determinan de forma única a  $\lambda$ .*

*Demostración.* De (4.80) se tiene que,

$$\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3} \frac{i(S_{NL} - I)(\epsilon\phi), \phi)}{\int_{-\infty}^{\infty} (V_1 e^{-itH} \phi, e^{-itH} \phi)(V_2 e^{-itH} \phi, e^{-itH} \phi) dt}. \quad (4.92)$$

Por el Corolario 4.3  $V$  es conocido y entonces  $H := H_0 + V$  es conocido. Por otro lado  $\mathbf{W}_{\pm}$  y  $S$  determinan de forma única a  $S_{NL}$ . De este modo el la-



do derecho de la ecuación (4.92) es determinado por nuestros datos. Notemos que, bajo las condiciones impuestas, siempre es posible encontrar una  $\phi \in \mathcal{H}^1$  tal que el denominador del lado derecho de la ecuación (4.92) no es cero. Puesto que si suponemos que  $V_1 = V_2$  o que  $V_1 V_2$  no cambian de signo y que  $V_1 V_2 \neq 0$  en un conjunto de medida positiva entonces siempre es posible exhibir una  $\phi \neq 0$  tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} (V_1 e^{-itH} \phi, e^{-itH} \phi)(V_2 e^{-itH} \phi, e^{-itH} \phi) dt \neq 0$  (notemos que en  $t = 0$  siempre existe una  $\phi \in \mathcal{H}_1 \cap L^{p+1}$ , tal que  $(V_1 \phi, \phi)(V_2 \phi, \phi) \neq 0$ ).

□

En el caso particular de la ecuación del capacitor cuántico (2.5) se pueden recuperar todos los parámetros físicos de el mismo dado que de  $S$  es posible recuperar  $V$  y de esta forma se obtiene  $V_0$ . De hecho podemos considerar una generalización del potencial  $V$  de (2.5), que es la siguiente:

$$V(x) = [\beta_1 \chi_{[a,b]}(x) + \beta_2 \chi_{[c,d]}(x)], \quad (4.93)$$

donde  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\beta_1, \beta_2, a, b$  y  $d$  se ueden reconstruir unívocamente. Además, por el Cololario 4.5 podemos reconstruir unívocamente a  $\lambda$ .

# Bibliografía

- [1] Adams, R.A. Sobolev Spaces. Academic Press. New York. 1975.
- [2] Altshuler, B.L., Lee, P.A., and Webb, R.A. (Eds.) Mesoscopic Phenomena in Solids. Elsevier, New York. 1991.
- [3] Atkosun, T., Klaus, M. Chapter 2.2.4 Inverse theory: problem on the line. Pike, E.R., Sabatier, P.C. (Eds.) Scattering, Academic Press, London, 2001, 777-785.
- [4] Bourgain, J. Global solutions of nonlinear Schrödinger equations. Colloquium Publications 46 AMS, Providence, 1999.
- [5] Chadan, K. Sabatier, P.C. Inverse problems in Quantum Scattering Theory. 2nd ed., Springer, New York, 1989.
- [6] Davies. E.B. Nonlinear Schrödinger operator and molecular structure. J.Phys. A **28** (1995) 4025-4041.
- [7] Davies, E.B. Symmetry breaking for a nonlinear Schrödinger operator. Comm. Math. Phys. **64** (1979) 191-210.

- [8] Deift, P., Trubowitz, E. Inverse scattering on the line. *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979) 121-151.
- [9] Faddeev, L.D. Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation. *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **73** (1964) 314-336.  
[AMS Translation (Ser.2) **65** (1967) 139-166.
- [10] Grecchi, V., Martinez, A., Sachetti, A. Destruction of the beating effect for a nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.* **227** (2002) 191-209.
- [11] Grecchi, V., Martinez, A. Non linear Strak effect and molecular localization. *Comm. Math. Phys.* **166** (1995) 533-548.
- [12] Jona-Lasinio G. Stationary solutions and invariant tori for a class of non-linear non-local Schrödinger equations. *Adv. in Dynamical Systems and Quantum Physics*. Figari, R., Albeverio, S., Dell'Antonio, G. (eds.) Word Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, 142-146.
- [13] Jona-Laisinio G., Presilla, C., Sjöstrand J. On Schrödinger equations with concentrated non-linearities. *Ann. Physics* **240** (1995) 1-21.
- [14] Kato, T. Nonlinear Schrödinger equations. In *Schrödinger Operators, Lecture Notes in Physics* **345**, Holden H, Jensen A (eds.). Springer, Berlin,, 1989, 218-263.
- [15] Kato, T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag. Second Edition .New York, USA, 1976.

- [16] Keel, M. Tao, T. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.* **120** (1998) 955-980.
- [17] Le Guennec, P. On the concept of chirality. *J. Math. Chem.* **23** (1998) 429 – 439.
- [18] Levitan, B.M. *Inverse Sturm-Liouville Problems*, VNU Science Press, Utrech, 1987.
- [19] Marchenko, V.A. *Sturm-Liouville Operators and Applications*. Birkhäuser, Basel. 1986.
- [20] Melin, A. Operator methods for inverse scattering on the real line, *Comm. Partial Differential Equations.* **10** (1985) 77-766.
- [21] Pearson, D.B. *Quantum Mechanics and Spectral Theory*. Academic Press, New York, 1988.
- [22] Presilla, C., Jona-Laisinio G. and Capaso, F. Chaotic quantum phenomena without classical counterpart. *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 2269–2272.
- [23] Presilla, C., Jona-Laisinio G., and Capaso, F., Non-linear feedback oscillations in resonant tunneling through double barriers. *Phys. Rev. B* **43** (1991) 5200-5203.
- [24] Presilla, C., Sjöstrand, J., Transport properties in resonant tunneling. *J. Math. Phys.* **37** (1996) 4816-4844.

- [25] Reed, M. Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics I,II,III.* Academic Press. New York. USA, 1972.
- [26] Royden, H.L. *Real Analysis.* Macmillan. 2nd Ed. 1970.
- [27] Sachetti, A. Nonlinear double well Schrödinger equation in the semiclassical limit. *J. Stat. Phys.* **119** (2004) 1347-1381.
- [28] Sachetti, A. Nonlinear Time-dependent Schrödinger equation with double well potential. *Multiscale Methods in Quantum Mechanics.* Blanchard, P., Dell'Antonio, G. (eds.) Basel, Birkhäuser, 2004.
- [29] Sachetti, A. Tunneling destruction for a nonlinear Schrödinger equation. *Mathematical Results in Quantum mechanics, Contemporary Mathematics.* **307** Grebert, B., Exner, P., Weder, R. (eds.) Amer. Math. Soc., Providence, 2002, 275-279.
- [30] Sandoval-Romero A., Weder R. The Initial Value Problem, Scattering and Inverse Scattering, for Non-linear Schrödinger Equations with a Potential and a Non-local Non-linearity. *J.Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 11461-11478.
- [31] Schechter, M. *Operator Methods in Quantum Mechanics.* North Holland, New York, 1981.
- [32] Stein, E.M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, Princeton, 1970.

- [33] Strauss, W. Nonlinear scattering theory at low energy. *J. Funct. Anal.* **41** (1981) 110-133.
- [34] Strauss, W. Nonlinear scattering theory at low energy: sequel. *J. Funct. Anal.* **43** (1981) 281-293.
- [35] Weder, R. Inverse scattering on the line for the nonlinear Klein-Gordon equation with a potential. *J. Math. Anal. Appl.* **252** (2000) 102 – 123.
- [36] Weder, R. Inverse scattering for the non-linear Schrödinger equation. Reconstruction of the potential and the nonlinearity. *Math. Methods Appl. Sci.* **24** (2001) 245 – 254.
- [37] Weder, R. Inverse Scattering for the non-linear Schrödinger equation II: Reconstruction of the potential and the nonlinearity in the multidimensional case. *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001) 3637 – 3647.
- [38] Weder, R.  $L^p - L^{p'}$  Estimates for the Schrödinger equation and inverse scattering. *Differential Equations and Mathematical Physics*, R. Weikard and G. Weinstein (eds), Amer. Math. Soc. and International Press, USA, 2000, 435 – 448.
- [39] Weder, R.  $L^p - L^{p'}$  Estimates for the Schrödinger equation on the line and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential. *J. Funct. Anal.* **170** (2000), 37 – 68.
- [40] Weder, R. The  $L^p - L^{p'}$  Estimate for the Schrödinger equation on the half-line. *J. Math. Anal. Appl.* **281** (2003) 233 – 243.

- [41] Weder, R. Multidimensional inverse scattering for the nonlinear Klein-Gordon equation with a potential. *J. Differential Equations*. **184** (2002) 62 – 77.
- [42] Weder, R. Scattering for the forced non-linear Schrödinger equation with a potential on the half-line. *Math. Methods Appl. Sci.* **28** (2005) 1219 – 1236.
- [43] Weder, R. The forced non-linear Schrödinger equation with a potential on the half-line. *Math. Methods Appl. Sci.* **28** (2005) 1237 – 1255.
- [44] Weder, R. The  $W_{k,p}$ -continuity of the Schrödinger wave operators on the line. *Comm. Math. Phys.*, **208** (1999) 507 – 520.