UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

GRUPOS NIL TORCIDOS EN TEORÍA K ALGEBRAICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

RAFAEL ROBERTO RAMOS FIGUEROA

DIRECTOR DE TESIS: DR. DANIEL JUAN PINEDA

MÉXICO D.F. SEPTIEMBRE 2006

A la memoria de mi querida hermana Betzy.

Agradecimientos

Agradezco a mis sinodales quienes pacientemente revisaron este trabajo, cada uno de ellos me dió valiosas sugerencias que me permitieron mejorarlo bastante. De entre mis sinodales quiero enfatizar mi gratitud a mi asesor el doctor Daniel Juan Pineda por su paciencia, comprensión y apoyo durante mis estudios de doctorado y a los doctores José Luis Cisneros del IMATE Cuernavaca, F. Thomas Farrell de la Universidad de Binghamton y Efstratios Prassidis del Colegio Canisius por la hospitalidad que me ofrecieron cuando fui a visitarlos.

Doy también mi mas sincero agradecimiento a mis amigos del IMATE campus Morelia y del IMATE de la ciudad de México quienes me apoyaron de una u otra manera.

Pero sobre todo doy las gracias a mi familia, en especial a mis padres que en todo momento me brindaron su gran apoyo incondicional y que siempre estuvieron pendientes de mi, aún en tiempos de enorme adversidad para ellos.

Índice

Introducción

Dado un anillo R con 1 denotaremos por $K_i(R)$ a los grupos de teoría K de R para i en $\mathbb{Z}$. Definimos $NK_i(R)$ como el $Núcleo(K_i(R[t]) \xrightarrow{\epsilon_*} K_i(R))$ donde ϵ es la evaluación $\epsilon(t) = 0$. Si $\alpha : R \longrightarrow R$ es un automorfismo de anillos definimos el anillo torcido $R_\alpha[t]$ como el anillo $R[t]$ aditivamente pero con producto torcido definido por la regla $rt^i st^j = r\alpha^{-i}(s)t^{i+j}$ para r, s en R. Entonces definimos $NK_i^\alpha(R)$ como el $Núcleo(K_i(R_\alpha[t]) \xrightarrow{\epsilon_*} K_i(R))$.

Farrell [10] demostró que si $NK_1(R) \neq 0$ **entonces** $NK_1(R)$ **no es finitamente generado como grupo abeliano** para un anillo R con 1 en general. En el capítulo 2, teorema 2.4.5 de este trabajo probamos que **si** G **es un grupo finito,** $\alpha : G \longrightarrow G$ **es un automorfismo de grupos y** $NK_1^\alpha(\mathbb{Z}G) \neq 0$ **entonces** $NK_1^\alpha(\mathbb{Z}G)$ **no es finitamente generado como grupo abeliano**. Aunque seguimos las ideas de Farrell para la demostración del teorema 2.4.5, en el caso torcido ($\alpha \neq id$) aparecen ciertas complicaciones las cuales hacen que no obtengamos la demostración como una reproducción directa de la prueba del caso no torcido ($\alpha = id$) que da Farrell.

Por otra parte Martin [18] demostró que **si** G **es un grupo finito abeliano cuyo orden es libre de cuadrados entonces** $NK_1(\mathbb{Z}G) = 0$ y Harmon [15] demostró que esto también es verdad cuando G es no abeliano. En el capítulo 3, teorema 3.6.1 probamos que **si el orden de un grupo** G **es un primo o el producto de dos primos distintos entonces** $NK_i^\alpha(\mathbb{Z}G) = 0$ **para cualquier automorfismo** $\alpha : G \longrightarrow G$ **y para todo** $i \leq 1$.

En el capítulo 4 retomamos las ideas de Davis-Lück [8] para enunciar la **Conjetura del Isomorfismo** [12], para esto es necesario introducir el concepto de grupo virtualmente cíclico, un grupo se define virtualmente cíclico si es finito o contiene un grupo cíclico infinito de índice finito. La importancia del estudio de estos grupos surge a raíz de dicha conjetura la cual afirma que este tipo de grupos son los que determinan la teoría K algebraica del anillo RG para cualquier grupo discreto G. Más precisamente sea $\mathcal{O}(G)$ la categoría de órbitas introducida por Bredon cuyos objetos son espacios homogéneos G/H vistos como $G-$espacios y sus morfismos son $G-$homomorfismos. Sea $\mathcal{O}(G,\mathcal{F}) \subset \mathcal{O}(G)$ a la subcategoría plena cuyos objetos son de la forma G/H tal que H pertenece a $\mathcal{F}$ donde $\mathcal{F}$ es una familia de subgrupos de G cerrada bajo inclusión y conjugación. Sea $\mathbb{K} : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \Omega - ESPECTROS$ el $\mathcal{O}(G) - \Omega - espectro$ definido por Davis-Lück [8] el cual tiene la propiedad $\pi_n(\mathbb{K}(G/H)) \cong K_n(\mathbb{Z}H)$. Y denotemos por $\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F})}{hocolim}\ \mathbb{K}$ al colímite homotópico del funtor $\mathbb{K}$ sobre la categoría $\mathcal{O}(G,\mathcal{F})$.

Entonces dadas dos familias $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{'}$ de subgrupos de G, la inclusión de categorías
$$I : \mathcal{O}(G,\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{O}(G,\mathcal{F}^{'})$$
induce una aplicación de ensamble
$$I_* : \underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K} \longrightarrow \underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}^{'})}{hocolim}\ \mathbb{K}.$$
Aplicando grupos de homotopía a la aplicación de $\Omega-$espectros anterior I_* obtenemos el homomorfismo de grupos inducido
$$\mathcal{A}_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}^{'})}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big)$$
El cual se llama homomorfismo de ensamble.

Si hacemos $\mathcal{F}^{'} = \mathcal{F}_T$, donde $\mathcal{F}_T$ es la familia de todos los subgrupos de G entonces $\mathcal{O}(G,\mathcal{F}^{'}) = \mathcal{O}(G)$ y dado que G/G es objeto final tenemos
$$\pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}_T)}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big) \cong K_n(\mathbb{Z}G)$$

Usando la notación y observaciones anteriores la **Conjetura del Isomorfismo de Farrell-Jones** afirma que el homomorfismo de ensamble
$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{vc},\mathcal{F}_T} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}_{vc})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G)}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big) \cong K_n(\mathbb{Z}G)$$
es un isomorfismo para todo n en $\mathbb{Z}$, donde $\mathcal{F}_{vc}$ la familia de subgrupos virtualmente cíclicos de G.

En [12] Farrell y Jones demostraron la conjetura del isomorfismo para $n \leq 1$ para subgrupos de grupos discretos cocompactos contenidos en grupos de Lie virtualmente conexos, y para ciertos grupos discretos cocompactos actuando de manera propiamente discontinua por isometrías en una variedad Riemanniana simétrica simplemente conexa de curvatura no positiva. También en [5] la conjetura ha sido demostrada para grupos actuando de manera propiamente discontinua vía isometrías en un n-espacio hiperbólico real $\mathbb{H}^n$ con espacio de órbitas de volúmen finito. Y en [3] y [4] la conjetura ha sido demostrada para grupos de la forma $G = \pi_1(M)$ donde M es una variedad compacta Riemanniana con curvatura seccional estrictamente negativa para todo n en $\mathbb{Z}$ y para cualquier anillo R con 1.

Como aplicación del teorema 3.6.1 obtenemos el teorema 4.9.2 el cual afirma que **si la conjetura del isomorfismo se cumple para un grupo G tal que todos sus subgrupos finitos no triviales son de orden un primo o un producto de dos primos distintos entonces tenemos un isomorfismo**

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{fin},\mathcal{F}_T} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}_{fin})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G)}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big) \cong K_n(\mathbb{Z}G)$$

para todo $n \leq 1$, **donde $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{fin}$ es la familia de subgrupos finitos de G**. Es decir, para toda $n \leq 1$, $K_n(\mathbb{Z}G)$ está determinado por los subgrupos finitos de G para un grupo G de este tipo.

CAPÍTULO 1

Preliminares

A través de este trabajo utilizaremos las definiciones, notación y resultados de este capítulo.

1.1 Notación.

Sea R anillo con 1. G un grupo. Entonces $R[G]$ denota al anillo de grupo R de G.

Definición 1.1.1. *Sea $\alpha : G \longrightarrow G$ un automorfismo de grupos. Entonces α denotará también el automorfismo inducido en $R[G]$ definido por*

$$\alpha(\sum_{g\in G} r_g g) = \sum_{g\in G} r_g \alpha(g) \quad r_g \in R,\ g \in G.$$

Definición 1.1.2. *Sea $\alpha : R \longrightarrow R$ un automorfismo de anillos. Definimos el anillo $R_\alpha[t]$ de la siguiente manera: aditivamente, $R_\alpha[t] = R[t]$ y la multiplicación está definida por la condición*

$$(rt^i)(st^j) = r\alpha^{-i}(s)t^{i+j} \quad r, s \in R.$$

Observación 1.1.3. *Note que tenemos un automorfismo de anillos en $R_\alpha[t]$ inducido por α, el cual también denotaremos por α definido por la condición*

$$\alpha(rt^i) = \alpha(r)t^i, \text{ donde } r \in R.$$

1.2 K_0 y K_1 de anillos.

En esta sección introducimos los conceptos y notación que nos permiten definir los grupos K_0 y K_1 para anillos, además veremos algunos resultados de K_1 que utilizaremos posteriormente.

Definición 1.2.1. *Sea $M_n(R)$ el conjunto de matrices $n \times n$ sobre el anillo R y sea $GL_n(R)$ el grupo de matrices invertibles sobre R. Consideremos el sistema dirigido de anillos dado por los monomorfismos de anillos*

$$M_n(R) \longrightarrow M_{n+1}(R)$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definimos

$$M(R) = \underset{n\to\infty}{colim}\ M_n(R).$$

Consideremos el sistema dirigido de grupos dado por los monomorfismos de grupos

$$GL_n(R) \longrightarrow GL_{n+1}(R)$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definimos

$$GL(R) = \underset{n\to\infty}{colim}\ GL_n(R).$$

Es decir, en la definición 1.2.1 encajamos $M_n(R)$ en $M_{n+1}(R)$ ($GL_n(R)$ en $GL_{n+1}(R)$) y entonces podemos pensar a $M(R)$ ($GL(R)$) como una unión infinita de los conjuntos $M_n(R)$ ($GL_n(R)$). Donde cada matriz en $M(R)$ ($GL(R)$) tiene tamaño finito. *Note que $M(R)$ es un anillo sin unidad y $GL(R)$ es un grupo.*

Definición 1.2.2. *Sea $a \in R$ y sea $i \neq j$ para $1 \leq i, j \leq n$, definimos la matriz $e_{ij}(a) \in GL_n(R)$ como la matriz con puros unos en la diagonal, con a en la entrada i, j, y ceros en todas las demás entradas. Llamaremos a esta clase de matrices matrices elementales.*

Definición 1.2.3. *Denotaremos por $E_n(R)$ al subgrupo de $GL_n(R)$ generado por el conjunto de matrices elementales. Denotaremos por $E(R)$ a $\underset{n\to\infty}{colim}\, E_n(R)$. Llamaremos a $E(R)$ grupo de matrices elementales.*

Lema 1.2.4. *Las matrices elementales sobre un anillo R satisfacen las siguientes relaciones*

(1.) $e_{ij}(a)e_{ij}(b) = e_{ij}(a+b)$
(2.) $e_{ij}(a)e_{kl}(b) = e_{kl}(b)e_{ij}(a)$, *para $j \neq k$ y $i \neq l$*
(3.) $e_{ij}(a)e_{jk}(b)e_{ij}(a)^{-1}e_{jk}(b)^{-1} = e_{ik}(ab)$ *para i, j, k distintos*
(4.) $e_{ij}(a)e_{ki}(b)e_{ij}(a)^{-1}e_{ki}(b)^{-1} = e_{kj}(-ba)$ *para i, j, k distintos*

Además cualquier matriz triangular superior o triangular inferior con puros unos en la diagonal pertenece a $E(R)$.

Demostración: ([24], lema 2.1.2.) $\square$

Corolario 1.2.5. . *Sea $A \in GL_n(R)$ entonces $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in E_{2n}$.*

Demostración: tenemos que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por el lema 1.2.4 las primeras tres matrices del producto están en $E_{2n}(R)$.

Además

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_{2n}(R) \text{ nuevamente}$$

por el lema 1.2.4. $\square$

Proposición 1.2.6. *(***Lema de Whitehead***) Sea R un anillo con 1. Entonces los subgrupos conmutadores de $GL(R)$ y de $E(R)$ coinciden con $E(R)$. En particular $E(R)$ es un subgrupo normal de $GL(R)$ y el grupo cociente $GL(R)/E(R)$ es el grupo abelianizado $GL(R)_{ab}$ de $GL(R)$.*

Demostración: [24], Proposición 2.1.4. $\square$

Definición 1.2.7. *Sea R un anillo con 1. Definimos $K_1(R)$ como $GL(R)_{ab} = GL(R)/E(R)$.*

Nota: Tenemos un funtor covariante de la categoría $\mathcal{R}$ de anillos con 1 en la categoría $\mathcal{A}b$ de grupos abelianos

$$K_1(\ ) : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi"'] & K_1(R) \arrow[d, "\varphi_*"] \\ S \arrow[r, mapsto] & K_1(S) \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_*([(a_{ij})]) = [(\varphi(a_{ij}))]$ para $A = (a_{ij}) \in GL_n(R)$. ([24], pág 61). $\square$

Observación 1.2.8. *Sean A, $B \in GL(R)$ entonces el producto de las clases correspondientes $[A][B]$ en $K_1(R)$ puede representarse de dos maneras:*

$[A][B] = [AB]$ o $[A][B] = [A \oplus B]$ donde $A \oplus B$ es la matriz $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Demostración:
$$\begin{aligned} AB &\sim \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ por el corolario 1.2.5.} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = A \oplus B. \end{aligned}$$
$\square$

Nota: Sea $A \in M_n(R)$ entonces $e_{ij}(a)A$ es la matriz que se obtiene a partir de A por sumar a veces el renglón $j-$ésimo al renglón $i-$ésimo y $Ae_{ij}(a)$ es la matriz que se obtiene a partir de A por sumar a veces la $i-$ésima columna a la $j-$ésima columna. Entonces $K_1(R)$ puede interpretarse como el grupo de formas canónicas para matrices invertibles sobre R bajo operaciones elementales por renglón o por columna en el sentido del álgebra lineal.

Definición 1.2.9. *Sea R un anillo con unidad. Entonces $K_0(R)$ es el grupo de Grothendieck del semigrupo $Proj\ R$ de clases de isomorfismo de R-módulos proyectivos derechos finitamente generados.*

Nota: No utilizaremos la definición 1.2.9 en este trabajo, más bien utilizaremos su versión categórica (definición 1.3.3) que daremos un poco más adelante. Para ver mas detalles acerca de la definición 1.2.9 consultar [24], páginas 1 a la 7.

1.3 K_0 y K_1 de categorías.

En esta sección definiremos los grupos K_0 y K_1 para categorías y veremos que estas definiciones generalizan las definiciones que dimos para K_0 y K_1 en la sección 1.2. Aún más, todas estas definiciones coinciden con la definición de Quillen lo cual nos permitirá introducir el concepto de grupo Nil torcido para todo i en $\mathbb{Z}$.

Definición 1.3.1. *Se dice que una categoría $\mathcal{P}$ tiene esqueleto pequeño $\mathcal{P}_0$ si las clases de isomorfismo de objetos forman un conjunto $\mathcal{P}_0$.*

La siguiente definición generaliza la definición 1.2.7 de K_1:

Definición 1.3.2. *Sea $\mathcal{P}$ una categoría con sucesiones exactas con esqueleto pequeño $\mathcal{P}_0$. Definimos $K_1(\mathcal{P})$ como el grupo abeliano libre en los pares (P, α), donde $P \in \mathcal{O}bj\mathcal{P}_0$ y α es un automorfismo para un representante de P, módulo las siguientes relaciones*

(i) $[(P, \alpha)] + [(P, \beta)] = [(P, \alpha\beta)]$

(ii)Si existe un diagrama conmutativo en $\mathcal{P}$ con renglones exactos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\iota"] & P \arrow[r, "\pi"] & P_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $\alpha \in AutP$, $\alpha_1 \in AutP_1$ y $\alpha_2 \in AutP_2$, entonces

$$[(P, \alpha)] = [(P_1, \alpha_1)] + [(P_2, \alpha_2)].$$

La siguiente definición generaliza la definición 1.2.9 de K_0:

Definición 1.3.3. *Sea $\mathcal{P}$ una categoría con sucesiones exactas con esqueleto pequeño $\mathcal{P}_0$. Definimos $K_0(\mathcal{P})$ como el grupo abeliano libre generado por el conjunto $Ob(\mathcal{P}_0)$ módulo las siguientes relaciones:*

(i) $[P] = [P']$ *si existe un isomorfismo* $P \xrightarrow{\cong} P'$ *en* $\mathcal{P}$.

(ii) $[P] = [P_1] + [P_2]$ *si existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0$$

en $\mathcal{P}$.

El siguiente teorema muestra que efectivamente la definición 1.3.2 generaliza a la definición 1.2.7 de K_1 y que la definición 1.3.3 generaliza a la definición 1.2.9 de K_0.

Teorema 1.3.4. *Sea R anillo con 1. Sea* **Proj** *R la categoría de $R-$módulos derechos proyectivos finitamente generados. Entonces tenemos un isomorfismo*

$$K_1(R) \xrightarrow{\cong} K_1(\mathbf{Proj}\ R)$$
$$[A] \longmapsto [(R^n, A)]$$

(donde $A \in GL_n(R)$ para algún n). Donde del lado izquierdo hemos usado la definición 1.2.7 y del lado derecho la definición 1.3.2 para $K_1(\ )$. También tenemos un isomorfismo $K_0(R) \cong K_0(\mathbf{Proj}\ R)$.

Demostración: ([24], teorema 3.1.7). □

Nota: Quillen [23] logró definir los grupos $K_i(R)\ \forall\ i \in \mathbb{Z}$. Él consideró el espacio clasificante $BGL(R)$ del grupo $GL(R)$ y después aplicó su *construcción plus* para obtener el espectro $BGL(R)^+$ y definió $K_i(R) = \pi_i(BGL(R)^+)\ \forall\ i \in \mathbb{Z}$. Las definiciones 1.2.7 y 1.3.2 que dimos para K_1 y las definiciones 1.2.9 y 1.3.3 que dimos para K_0 coinciden con la definición de Quillen.

Ahora tenemos todos los elementos para definir los grupos Nil torcidos NK_i^α los cuales son nuestro principal objeto de estudio en este trabajo:

Definición 1.3.5. *Sea $\alpha : R \longrightarrow R$ un automorfismo de anillos. Sea $R_\alpha[t] \xrightarrow{\epsilon} R$ la aumentación definida por la condición $\epsilon(t) = 0$. Definimos*

$$NK_i^\alpha(R) = Núcleo(\ K_i(R_\alpha[t]) \xrightarrow{\epsilon_*} K_i(R)\ ) \quad \forall\ i \in \mathbb{Z}.$$

Nota: A lo largo de este trabajo utilizaremos únicamente (excepto al final del capítulo 3) las definiciones 1.2.7 y 1.3.2 para K_1. Pasaremos de una definición a la otra utilizando el teorema 1.3.4 cuando sea conveniente. En cuanto a la definicion de Quillen para K_i se utiliza solamente en la prueba del teorema 3.4.1 y en la prueba del teorema 3.6.1 en el capítulo 3.

CAPÍTULO 2

NK_1^α no es finitamente generado.

El teorema principal de este capítulo es el Teorema 2.4.5 el cual afirma que si G es un grupo finito y $NK_1^\alpha(\mathbb{Z}G) \neq 0$ entonces $NK_1^\alpha(\mathbb{Z}G)$ no es finitamente generado. El caso $\alpha = id$ fue probado por Farrell [10] para un anillo R con 1 en general. Aunque seguimos las ideas de Farrell para la demostración del teorema 2.4.5, en el caso torcido ($\alpha \neq id$) aparecen ciertas complicaciones las cuales hacen que la prueba no se obtenga como una reproducción directa de la prueba del caso no torcido ($\alpha = id$) que da Farrell. Para lograr nuestro objetivo introducimos algunos resultados y definiciones y concluímos el capítulo con la prueba del Teorema 2.4.5.

2.1 Una caracterización para los elementos de NK_1^α.

El objetivo principal de esta sección es probar el lema 2.1.4, el cual nos da una caracterización para los elementos de NK_1^α. Además con los resultados obtenidos en esta sección demostramos el ya conocido teorema 2.1.5 que aplicaremos mas adelante en la prueba del lema 2.4.4.

Definición 2.1.1. *Sea $\alpha : R \longrightarrow R$ un automorfismo de anillos. Sean M_1,*

M_2 $R-$módulos derechos. Una función aditiva $f : M_1 \longrightarrow M_2$ se llama $\alpha-$lineal si $f(mr) = f(m)\alpha(r)$ $\forall m \in M$, $\forall r \in R$.

Denotaremos por $M(m,n,R)$ a el conjunto de matrices de $m \times n$ con coeficientes en R. Sea $a \in M(m,n,R)$ y sean V, $V^{'}$ $R-$módulos libres derechos con bases ordenadas $e = (e_1, \ldots, e_n)$ y $e^{'} = (e_1{}^{'}, \ldots, e_m{}^{'})$. Entonces el homomorfismo $\alpha-$lineal $f : V \longrightarrow V^{'}$ asociado a a con respecto a e y $e^{'}$ está definido por la siguiente fórmula:

$$f(\sum_{i=1}^{n} e_i r_i) = \sum_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m} e_j a_{ji} \alpha(r_i)$$

donde $r_i \in R$

En términos de la base canónica para $V = V^{'} = R^n$:

$$\varphi_a(r_1, \ldots, r_n) = a \begin{pmatrix} \alpha(r_1) \\ \vdots \\ \alpha(r_n) \end{pmatrix}$$

Sea $f^{'}$ un homomorfismo $\alpha^{'}-$lineal de $V^{'}$ a un tercer $R-$módulo libre $V^{''}$ correspondiente a $a^{'} \in M(k,m,R)$ con respecto a $e^{'}$ y a una base ordenada $e^{''} = (e_1{}^{''}, \ldots, e_k{}^{''})$ para $V^{''}$.

Lema 2.1.2. *$f^{'}f$ es el homomorfismo $\alpha^{'}\alpha-$lineal correspondiente a $a^{'}\alpha^{'}(a)$ con respecto a e y $e^{''}$.*

Demostración: [11], lema 1. □

Nota: El lema 2.1.3, el lema 2.1.4, y el teorema 2.1.5 que daremos a continuación son generalizaciones directas del lema y teorema de Bass-Heller-Swan ([24], lema 3.2.21, teorema 3.2.22).

Lema 2.1.3. *Sea $B \in GL(R_\alpha[t])$. Entonces B puede reducirse módulo $GL(R)$ y $E(R_\alpha[t])$ a una matriz de la forma $I + At$ donde A es una matriz con entradas en R tal que la transformación $\alpha^{-1}-$lineal asociada a A φ_A es nilpotente, es decir, $\exists r \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_A{}^r \equiv 0$.*

Demostración: Sea $B \in GL(R_\alpha[t]) \Rightarrow B = B_0 + B_1 t + \cdots + B_d t^d$ (note que $B_i t^i = t^i \alpha^i(B_i)$). Demostraremos por inducción que B puede reducirse a una matriz de grado $d \leq 1$. (Aquí nos referimos al grado de una matriz como el máximo de los grados de los polinomios que aparecen en las entradas de la matriz).

$B \sim \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pues $B \in GL(R_\alpha[t])$

$\sim \begin{pmatrix} B & B_d t^{d-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mutiplicando por $B_d t^{d-1}$ por la izquierda al segundo renglón y sumándolo al primer renglón (lo cual equivale a multiplicar por matrices elementales de $E(R_\alpha[t])$)

$\sim \begin{pmatrix} B - B_d t^d & B_d t^{d-1} \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ multiplicando por la derecha a la segunda columna por t y restándola a la primera columna.

$= B'$

Dado que $B - B_d t^d = B_0 + B_1 t + \cdots + B_{d-1} t^{d-1}$ la matriz obtenida B' tiene grado $\leq d-1$. Repetimos este proceso con B', entonces:

$$B' \sim \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B' & {B'}_{d-1} t^{d-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B' - {B'}_{d-1} t^{d-1} & {B'}_{d-1} t^{d-2} \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

hasta obtener una matriz de grado $d \leq 1$.
Si podemos reducir B a una matriz de grado cero en $GL(R_\alpha[t])$ entonces el lema es obvio pues $B \sim BB^{-1} = I + 0t$ y $A = 0$ es tal que $\varphi_A \equiv 0$ es nilpotente.
(Note que $B \in GL(R_\alpha[t])$ y de grado cero $\Rightarrow B \in GL(R)$:
pues $I = B(C_0 + C_1 t + \cdots + C_d t^d) = BC_0 + BC_1 t + \cdots + BC_d t^d \Rightarrow I = BC_0$ con $C_0 \in M(R)$.
$I = (C_0 + C_1 t + \cdots + C_d t^d)B = C_0 B + C_1 \alpha^{-1}(B)t + \cdots + C_d \alpha^{-d}(B)t^d \Rightarrow$ $I = C_0 B$. Por tanto $B \in GL(R)$).

- *Caso* $d = 1$ Es decir, $B = B_0 + B_1 t$, B_0, $B_1 \in M(R)$.

Dado que $B \in GL(R_\alpha[t])$ entonces $B_0 \in GL(R)$ pues:
Sea $C \in GL(R_\alpha[t])$ tal que $C = B^{-1} \Rightarrow C = C_0 + C_1 t + \cdots + C_k t^k$. $\Rightarrow$
$I = CB = (C_0 + C_1 t + \cdots + C_k t^k)(B_0 + B_1 t)$
$= (C_0 B_0 + C_1 t B_0 + \cdots + C_k t^k B_0) + (C_0 B_1 t + C_1 t B_1 t + \cdots + C_k t^k B_1 t)$
$= (C_0 B_0 + C_1 \alpha^{-1}(B_0)t + \cdots + C_k \alpha^{-k}(B_0)t^k)$
$+ (C_0 B_1 t + C_1 \alpha^{-1}(B_1)t^2 + \cdots + C_k \alpha^{-k}(B_1)t^{k+1})$
$= C_0 B_0 + (\ C_1 \alpha^{-1}(B_0) + C_0 B_1\ )t + \cdots + C_k \alpha^{-k}(B_1)t^{k+1}$
$\Rightarrow I = C_0 B_0$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
I &= BC = (B_0 + B_1 t)(C_0 + C_1 t + \cdots + C_k t^k)\\
&= (B_0C_0 + B_0C_1t + \cdots + B_0C_kt^k) + (B_1tC_0 + B_1tC_1t + \cdots + B_1tC_kt^k)\\
&= (B_0C_0 + B_0C_1t + \cdots + B_0C_kt^k)\\
&\quad + (B_1\alpha^{-1}(C_0)t + B_1\alpha^{-1}(C_1)t^2 + \cdots + B_1\alpha^{-1}(C_k)t^{k+1})\\
&= B_0C_0 + (\ B_0C_1 + B_1\alpha^{-1}(C_0)\ )t + \cdots + B_1\alpha^{-1}(C_k)t^{k+1}\\
&\Rightarrow I = B_0C_0
\end{aligned}
$$

Por tanto $B_0 \in GL(R)$.

Entonces $B = B_0(I + {B_0}^{-1}B_1t) \Rightarrow {B_0}^{-1}B = I + {B_0}^{-1}B_1t$.
Sea $A = {B_0}^{-1}B_1 \Rightarrow B \sim I + At$ pues ${B_0}^{-1} \in GL(R)$.
Por lo que podemos suponer que $B = I + At \in GL(R_\alpha[t])$.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow B^{-1} = C_0 + C_1t + \cdots + C_rt^r,\ C_i \in M(R) \Rightarrow\\
&I = (I + At)(C_0 + C_1t + \cdots + C_rt^r)\\
&= (C_0 + C_1t + \cdots + C_rt^r) + (AtC_0 + AtC_1t + \cdots + AtC_rt^r)\\
&= (C_0 + C_1t + \cdots + C_rt^r) + (A\alpha^{-1}(C_0)t + A\alpha^{-1}(C_1)t^2 + \cdots + A\alpha^{-1}(C_r)t^{r+1})\\
&= C_0 + (C_1 + A\alpha^{-1}(C_0))t + (C_2 + A\alpha^{-1}(C_1))t^2\\
&+ \cdots + (C_r + A\alpha^{-1}(C_{r-1}))t^r + A\alpha^{-1}(C_r)t^{r+1}\\
&\Rightarrow C_0 = I,\ A\alpha^{-1}(C_r) = 0,\\
&0 = C_1 + A\alpha^{-1}(C_0) = C_1 + A\alpha^{-1}(I) = C_1 + A \ \Rightarrow\ C_1 = -A\\
&0 = C_2 + A\alpha^{-1}(C_1) = C_2 + A\alpha^{-1}(-A) \ \Rightarrow\ C_2 = -A\alpha^{-1}(-A)\\
&0 = C_3 + A\alpha^{-1}(C_2) = C_3 + A\alpha^{-1}(-A\alpha^{-1}(-A)) = C_3 + A\alpha^{-1}(-A)\alpha^{-2}(-A)\\
&\Rightarrow C_3 = -A\alpha^{-1}(-A)\alpha^{-2}(-A).\\
&0 = C_4 + A\alpha^{-1}(C_3) = C_4 + A\alpha^{-1}(-A\alpha^{-1}(-A)\alpha^{-2}(-A))\\
&\quad = C_4 + A\alpha^{-1}(-A)\alpha^{-2}(-A)\alpha^{-3}(-A)\\
&\Rightarrow C_4 = -A\alpha^{-1}(-A)\alpha^{-2}(-A)\alpha^{-3}(-A)\\
&\ \vdots\\
&0 = C_r + A\alpha^{-1}(C_{r-1})\\
&\Rightarrow C_r = -A\alpha^{-1}(-A)\alpha^{-2}(-A)\cdots\alpha^{-(r-1)}(-A)\\
&\Rightarrow 0 = A\alpha^{-1}(C_r) = A\alpha^{-1}(\ -A\alpha^{-1}(-A)\alpha^{-2}(-A)\cdots\alpha^{-(r-1)}(-A)\ )\\
&= A\alpha^{-1}(-A)\alpha^{-2}(-A)\alpha^{-3}(-A)\cdots\alpha^{-r}(-A)\\
&\Rightarrow 0 = (-1)^r A\alpha^{-1}(A)\alpha^{-2}(A)\cdots\alpha^{-r}(A)\\
&\Rightarrow 0 = A\alpha^{-1}(A)\alpha^{-2}(A)\cdots\alpha^{-r}(A)\\
&\qquad = \underbrace{A\alpha^{-1}(\ A\alpha^{-1}(\ A\alpha^{-1}(\ \ldots A\alpha^{-1}(A)\ )\ )\ )}_{r-veces}
\end{aligned}
$$

Lo cual significa que la transformación $\alpha^{-1}-$lineal asociada a A, $\varphi_A : R^n \longrightarrow R^n$ es tal que ${\varphi_A}^{r+1} = 0$ por el lema 2.1.2 anterior. $\square$

Ahora demostraremos nuestro lema de caracterización para los elementos de $NK_1^{\alpha}(R)$.

Lema 2.1.4.
$NK_1^{\alpha}(R)$
$= \{\ [I+At] \in K_1(R_\alpha[t]) \mid A \in M(R)$ *y* $\varphi_A^r \equiv 0$ *para algún* $r\ \in \mathbb{Z}\ \}$ *donde* φ_A *es el homomorfismo* $\varphi_A : R^n \longrightarrow R^n$ $\alpha^{-1}-$*lineal asociado a* A *en la base canónica.*

Demostración:
($\supseteq$) Sea $[I+At] \in K_1(R_\alpha[t])$ tal que $\varphi_A^r \equiv 0$.

$$\Rightarrow A\alpha^{-1}(A)\cdots\alpha^{-r}(A) = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (I+At)^{-1} &= I - At + A\alpha^{-1}(A)t^2 + \cdots + (-1)^r A\alpha^{-1}(A)\alpha^{-2}(A)\cdots\alpha^{-(r-1)}(A) \\ &= I - At + AtAt + \cdots + (-1)^r \underbrace{At\cdots At}_{r-veces}\end{aligned}$$

$\Rightarrow I + At \in GL(R_\alpha[t])$.
Además

$$K_1(R_\alpha[t]) \xrightarrow{\epsilon_*} K_1(R)$$

$$[I+At] \longmapsto [I]$$

Por tanto $[I+At] \in NK_1^{\alpha}(R)$.

($\subseteq$) Sea $[B] \in NK_1^{\alpha}(R) \leq K_1(R_\alpha[t])$. Tenemos una sucesión exacta que se escinde

$$0 \to NK_1^{\alpha}(R) \equiv Núcleo(\epsilon_*) \hookrightarrow K_1(R_\alpha[t]) \underset{\epsilon_*}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}} K_1(R) \to 0$$

$\Rightarrow$ tenemos un isomorfismo

$$NK_1^{\alpha}(R) \xrightarrow{\cong} \frac{K_1(R_\alpha[t])}{Im(i_*)}$$

$$[B] \longmapsto \overline{[B]}$$

Note que

$$\begin{aligned}Im(i_*) &= \{\ i_*[A] \in K_1(R_\alpha[t]) \mid [A] \in K_1(R)\ \} \\ &= \{\ [A] \in K_1(R_\alpha[t]) \mid A \in GL(R)\ \} \\ &= \{\ A\ E(R_\alpha[t]) \in \tfrac{GL(R_\alpha[t])}{E(R_\alpha[t])} \mid A \in GL(R)\ \}\end{aligned}$$

$= \frac{GL(R)\ E(R_\alpha[t])}{E(R_\alpha[t])}$

donde

$$GL(R)\ E(R_\alpha[t]) = \{\ AE \in GL(R_\alpha[t]) \mid A \in GL(R),\ E \in E(R_\alpha[t])\ \}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} K_1(R_\alpha[t]) \geq NK_1^\alpha(R) & \xrightarrow{\cong} & \left(\frac{GL(R_\alpha[t])}{E(R_\alpha[t])}\right) \Big/ \left(\frac{GL(R)\ E(R_\alpha[t])}{E(R_\alpha[t])}\right) & \xrightarrow{\cong} & \frac{GL(R_\alpha[t])}{GL(R)\ E(R_\alpha[t])} \\ [B] & \longrightarrow & \overline{[B]} & \longrightarrow & \overline{B} \end{array}$$

donde el segundo isomorfismo es por el segundo teorema del isomorfismo de grupos.
Por tanto tenemos un isomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} NK_1^\alpha(R) & \xrightarrow{\pi} & \dfrac{GL(R_\alpha[t])}{GL(R)\ E(R_\alpha[t])} \\ [B] & \longrightarrow & \overline{B} \end{array}$$

Dado que $\frac{GL(R_\alpha[t])}{GL(R)\ E(R_\alpha[t])}$ es un grupo entonces cualquier clase lateral izquierda es una clase lateral derecha, es decir, $B\ GL(R)E(R_\alpha[t]) = GL(R)E(R_\alpha[t])\ B$ Esto significa que si multiplicamos por la derecha o por la izquierda a la matriz B por una matriz en $GL(R)$ o en $E(R_\alpha[t])$ obtenemos una matriz que está en la clase lateral $B\ GL(R)E(R_\alpha[t]) = GL(R)E(R_\alpha[t])\ B$. Entonces por el lema 2.1.3 $\overline{B} = \overline{I + At}$ con ${\varphi_A}^r \equiv 0$ para algún $r \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} NK_1^\alpha(R) & \xrightarrow{\pi} & \dfrac{GL(R_\alpha[t])}{GL(R)\ E(R_\alpha[t])} \\ [B] & \longrightarrow & \overline{B} = \overline{I + At} \end{array}$$

Por otra parte note que $[I + At] \in NK_1^\alpha(R)$ pues

$$K_1(R_\alpha[t]) \xrightarrow{\epsilon_*} K_1(R)$$

$$[I + At] \longmapsto [I]$$

y note que

$$\begin{array}{ccc} NK_1^\alpha(R) & \xrightarrow{\pi} & \dfrac{GL(R_\alpha[t])}{GL(R)\ E(R_\alpha[t])} \\ [I + At] & \longrightarrow & \overline{I + At} = \overline{B} \end{array}$$

$\Rightarrow [I + At] = [B]$ en $NK_1^\alpha(R)$ pues π es isomorfismo. $\square$

El siguiente resultado es conocido ([14], theorem 2.1.c.):

Teorema 2.1.5. *Sea R un anillo con 1. Sea $Nil_\alpha(R)$ la categoría cuyos objetos son pares (R^n, φ), $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\varphi : R^n \longrightarrow R^n$ un endomorfismo $\alpha^{-1}-$lineal nilpotente de R-módulos derechos y los morfismos están definidos como sigue:*

Dados dos objetos (R^n, φ_1), (R^m, φ_2) un morfismo entre ellos es un homomorfismo $g : R^n \longrightarrow R^m$ $R-$ lineal de $R-$módulos derechos tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "g"'] & R^n \arrow[d, "g"'] \\ R^m \arrow[r, "\varphi_2"] & R^m \end{tikzcd}$$

conmuta.

Note que $Nil_\alpha(R)$ es una categoría con sucesiones exactas y $K_0(Nil_\alpha(R))$ contiene una imágen obvia de $\mathbb{Z}$ que viene de la subcategoría plena de objetos de la forma $(R^n, 0)$. Denotaremos por $\widetilde{K_0}(Nil_\alpha(R))$ al cociente de $K_0(Nil_\alpha(R))$ por la imágen de $\mathbb{Z}$.

Entonces

(a) $K_1(R_\alpha[t]) \cong K_1(R) \oplus NK_1^\alpha(R)$

(b) $NK_1^\alpha(R) \cong \widetilde{K_0}(Nil_{\alpha^{-1}}(R))$.

Demostración:

(a) Tenemos la aumentación $R_\alpha[t] \overset{i}{\underset{\epsilon}{\rightleftarrows}} R$ que induce $K_1(R_\alpha[t]) \overset{i_*}{\underset{\epsilon_*}{\rightleftarrows}} K_1(R)$. Por tanto tenemos una sucesión exacta corta que se escinde

$$0 \rightarrow NK_1^\alpha(R) \equiv Núcleo(\epsilon_*) \hookrightarrow K_1(R_\alpha[t]) \overset{i_*}{\underset{\epsilon_*}{\rightleftarrows}} K_1(R) \rightarrow 0$$

Por tanto $K_1(R_\alpha[t]) \cong NK_1^\alpha(R) \oplus K_1(R)$.

(b) Usando el lema 2.1.4 definimos

$$\varphi : NK_1^\alpha(R) \longrightarrow \widetilde{K_0}(Nil_{\alpha^{-1}}(R))$$

$$[I + At] \longrightarrow [(R^n, \varphi_A)].$$

• *φ está bien definida:*

Recordemos que tenemos el isomorfismo (teorema 1.3.4)

$$f : K_1(R_\alpha[t]) \xrightarrow{\cong} K_1(Proj(R_\alpha[t]))$$
$$[I + At] \mapsto [((R_\alpha[t])^n, I + At)].$$

Note que φ está dada por la composición

$$K_1(R_\alpha[t]) \geq NK_1^\alpha(R) \xrightarrow{\cong} f(NK_1^\alpha(R)) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \widetilde{K_0}(Nil_\alpha(R))$$
$$[I + At] \mapsto [((R_\alpha[t])^n, I + At)] \mapsto [(R^n, \varphi_A)].$$

Supongamos que $[I + A't] = [I + At]$ en $NK_1^\alpha(R) \leq K_1(R_\alpha[t])$
$\Rightarrow [((R_\alpha[t])^m, I + A't)] = [((R_\alpha[t])^n, I + At)]$
en $f(NK_1^\alpha(R)) \leq K_1(Proj(R_\alpha[t]))$
$\Rightarrow ((R_\alpha[t])^m, I + A't) \cong ((R_\alpha[t])^n, I + At)$
$\Rightarrow$ tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(R_\alpha[t])^m \arrow[r, "B(t)", "\cong"'] \arrow[d, "I+A't"', "\cong"] & (R_\alpha[t])^n \arrow[d, "I+At"', "\cong"] \\
(R_\alpha[t])^m \arrow[r, "B(t)", "\cong"'] & (R_\alpha[t])^n
\end{tikzcd}$$

donde $B(t)$ es un isomorfismo $R_\alpha[t]-$lineal, por tanto $n = m$
entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(R_\alpha[t])^n \arrow[r, "B(t)", "\cong"'] \arrow[d, "I+A't"', "\cong"] & (R_\alpha[t])^n \arrow[d, "I+At"', "\cong"] \\
(R_\alpha[t])^n \arrow[r, "B(t)", "\cong"'] & (R_\alpha[t])^n
\end{tikzcd}$$

donde $B(t) \in GL_n(R_\alpha[t])$.
$\Rightarrow I + A't = B(t)^{-1}(I + At)B(t)$, es decir, $I + At$ es conjugada a $I + A't$ por una matriz $B(t) \in GL_n(R_\alpha[t])$.
$\Rightarrow (B(t)^{-1}I + B(t)^{-1}At)B(t) = I + A't$
$\Rightarrow B(t)^{-1}IB(t) + B(t)^{-1}At\ B(t) = I + A't$
$\Rightarrow I + B(t)^{-1}At\ B(t) = I + A't$
$\Rightarrow I + B(t)^{-1}A\ \alpha^{-1}(B(t))t = I + A't$
donde la última implicación se tiene ya que $B(t) = B_0 + B_1t + \cdots + B_pt^p$

entonces

$$\begin{aligned} tB(t) &= t(B_0 + B_1t + \cdots + B_pt^p) \\ &= \alpha^{-1}(B_0)t + \alpha^{-1}(B_1)t^2 + \cdots + \alpha^{-1}(B_p)t^{p+1} \\ &= (\alpha^{-1}(B_0) + \alpha^{-1}(B_1)t + \cdots + \alpha^{-1}(B_p)t^p)t \\ &= \alpha^{-1}(B_0 + B_1t + \cdots + B_pt^p)t \\ &= \alpha^{-1}(B(t))t \end{aligned}$$

Valuando en $t = 1$:
$\Rightarrow I + B(1)^{-1}A\,\alpha^{-1}(B(1)) = I + A'$
$\Rightarrow A\,\alpha^{-1}(B(1)) = B(1)IA'$.
Sea $B = B(1)$.
Por el lema 2.1.2 $A\,\alpha^{-1}(B) = BIA' \Rightarrow \varphi_A\,\varphi_B = \varphi_B\,\varphi_{A'}$ que son $\alpha^{-1}-$lineales.
Note también que $\varphi_{B^{-1}} = B^{-1}$ y $\varphi_B\,\varphi_{B^{-1}} = \varphi_{B^{-1}}\,\varphi_B = Id$
$\Rightarrow \varphi_{B^{-1}}\,\varphi_A = \varphi_{A'}\,\varphi_{B^{-1}}$ que son $\alpha^{-1}-$lineales.
entonces $(R^n, \varphi_A) \cong (R^n, \varphi_{A'})$ pues tomando $g = \varphi_{B^{-1}}$, $g' = \varphi_B$ obtenemos

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "g"', "\cong"] & R^n \arrow[d, "g"', "\cong"] \\ R^n \arrow[r, "\varphi_{A'}"] & R^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\varphi_{A'}"] \arrow[d, "g'"', "\cong"] & R^n \arrow[d, "g'"', "\cong"] \\ R^n \arrow[r, "\varphi_A"] & R^n \end{tikzcd}$$

con $gg' = Id$ y $g'g = Id$. Por tanto $[(R^n, \varphi_A)] = [(R^n, \varphi_{A'})]$
Además si reemplazamos $I_n + At$ por la matriz $(n+k)\times(n+k)$ $(I_n + At) \oplus I_k$

$$\Rightarrow (I_n + At) \oplus I_k = \begin{pmatrix} I_n + At & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t$$

$$\longmapsto [(R^n \oplus R^k, \varphi_{A\oplus 0_k})] = [(R^n, \varphi_A)] + [(R^k, \varphi_{0_k})]$$

donde la última igualdad se cumple pues tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to (R^n, \varphi_A) \xrightarrow{i} (R^n \oplus R^k, \varphi_{A\oplus 0_k}) \xrightarrow{\pi} (R^k, \varphi_{0_k}) \to 0$$

Es decir, tenemos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi_A"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & R^n \oplus R^k \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_{A\oplus 0_k}"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & R^k \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{0_k}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & R^n \arrow[r, "i"] & R^n \oplus R^k \arrow[r, "\pi"] & R^k \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Claramente los renglones son exactos, veamos que (1) y (2) conmutan:
Recordemos que $\varphi_A(r) = A\alpha^{-1}(r)$ entonces:

(1) $R^n \xrightarrow{i} R^n \oplus R^k \xrightarrow{\varphi_{A\oplus 0_k}} R^n \oplus R^k$

$$r \longmapsto \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(r) \\ \alpha^{-1}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\alpha^{-1}(r) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$R^n \xrightarrow{\varphi_A} R^n \xrightarrow{i} R^n \oplus R^k$

$$r \longmapsto A\alpha^{-1}(r) \longmapsto \begin{pmatrix} A\alpha^{-1}(r) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto (1) conmuta.

(2) $R^n \oplus R^k \xrightarrow{\pi} R^k \xrightarrow{\varphi_{0_k}} R^n \oplus R^k$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \longmapsto r_2 \longmapsto 0_k\alpha^{-1}(r_2) = 0$$

Por otra parte,

$$R^n \oplus R^k \xrightarrow{\qquad\varphi_{A\oplus 0_k}\qquad} R^n \oplus R^k \xrightarrow{\qquad\pi\qquad} R^k$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(r_1) \\ \alpha^{-1}(r_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\alpha^{-1}(r_1) \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto 0$$

Por tanto (2) conmuta.

Por tanto $[(R^n \oplus R^k, \varphi_{A\oplus 0_k})] = [(R^n, \varphi_A)] + [(R^k, \varphi_{0_k})]$
Dado que $[(R^k, \varphi_{0_k})]$ es cero en $\widetilde{K_0}(Nil_{\alpha^{-1}}(R))$, φ está bien definida.

• φ *es homomorfismo*:

$$\begin{aligned}
&\varphi(\ [I + At] + [I + A't]\ ) \\
&= \varphi(\ [(I + At) \oplus (I + A't)]\ ) \\
&= \varphi\left(\ \left[\begin{pmatrix} I + At & 0 \\ 0 & I + A't \end{pmatrix}\right]\ \right) \\
&= \varphi\left(\ \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} t\right]\ \right) \\
&= \varphi(\ [I + (A \oplus A')t]\ ) \\
&= [(R^{n+m}, \varphi_{A\oplus A'}]
\end{aligned}$$

$= [(R^n, \varphi_A)] + [(R^m, \varphi_{A'})]$

donde la última igualdad es porque tenemos la sucesión exacta

$$0 \to (R^n, \varphi_A) \xrightarrow{i} (R^n \oplus R^m, \varphi_{A\oplus A'}) \xrightarrow{\pi} (R^m, \varphi_{A'}) \to 0$$

es decir, tenemos el siguiente diagrama con renglones exactos tal que (3) y (4) conmutan:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi_A"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & R^n \oplus R^m \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_{A\oplus A'}"'] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & R^m \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{A'}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^n \arrow[r, "i"] & R^n \oplus R^m \arrow[r, "\pi"] & R^m \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(3) $R^n \xrightarrow{i} R^n \oplus R^m \xrightarrow{\varphi_{A\oplus A'}} R^n \oplus R^m$

$$r \longmapsto \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(r) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\alpha^{-1}(r) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$R^n \xrightarrow{\varphi_A} R^n \xrightarrow{i} R^n \oplus R^m$

$r \longmapsto A\alpha^{-1}(r) \longmapsto \begin{pmatrix} A\alpha^{-1}(r) \\ 0 \end{pmatrix}$

Por tanto (3) conmuta.

(4) $R^n \oplus R^m \xrightarrow{\pi} R^m \xrightarrow{\varphi_{A'}} R^m$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \longmapsto r_2 \longmapsto A'\alpha^{-1}(r_2)$$

Por otra parte,

$$R^n \oplus R^m \xrightarrow{\varphi_{A\oplus A'}} R^n \oplus R^m \xrightarrow{\pi} R^m$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(r_1) \\ \alpha^{-1}(r_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\alpha^{-1}(r_1) \\ A'\alpha^{-1}(r_2) \end{pmatrix} \longmapsto A'\alpha^{-1}(r_2)$$

Por tanto (4) conmuta.

• φ *es isomorfismo*:

Definimos el inverso de φ por

$$\phi : \widetilde{K_0}(Nil_{\alpha^{-1}}(R)) \longrightarrow NK_1^\alpha(R)$$

$$[(R^n,\varphi_A)] \longmapsto [I+At]$$

Es claro que ϕ es la inversa de φ.

- ϕ *está bien definida:*

  Ya probamos arriba que $[(R^n,\varphi_A)]+[(R^k,\varphi_{0_k})]=[(R^n\oplus R^k,\varphi_{A\oplus 0_k})]$ donde $[(R^k,\varphi_{0_k})]$ es cero en $\widetilde{K_0}(Nil_{\alpha^{-1}}(R))$. Entonces

  $$\phi(\ [(R^n,\varphi_A)]+[(R^k,\varphi_{0_k})]\ )=\phi(\ [(R^n\oplus R^k,\varphi_{A\oplus 0_k})]\ )=[I_{n+k}+(A\oplus 0_k)t]$$

  $$=\left[\begin{pmatrix} I_n & 0\\ 0 & I_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 0_k\end{pmatrix}t\right]=\left[\begin{pmatrix} I_n & 0\\ 0 & I_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} At & 0\\ 0 & 0_k\end{pmatrix}\right]$$

  $$=\left[\begin{pmatrix} I_n+At & 0\\ 0 & I_k+0_k\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix} I_n+At & 0\\ 0 & I_k\end{pmatrix}\right]$$

  $$=[(I_n+At)\oplus I_k]=[(I_n+At)]+[I_k]=[(I_n+At)]$$

  Por tanto $\phi(\ [(R^n,\varphi_A)]+[(R^k,\varphi_{0_k})]\ )=\phi(\ [(R^n,\varphi_A)]\ )$

  Concluímos que ϕ está bien definida.

- ϕ *es aditiva en sucesiones exactas*:

  Supongamos que

  $$[(R^{n_2},\varphi_{A_2})]=[(R^{n_1},\varphi_{A_1})]+[(R^{n_3},\varphi_{A_3})]$$

  entonces tenemos una sucesión exacta corta de $R-$módulos libres derechos:

  $$0\to(R^{n_1},\varphi_{A_1})\to(R^{n_2},\varphi_{A_2})\to(R^{n_3},\varphi_{A_3})\to 0$$

  es decir, tenemos un diagrama conmutativo con renglones exactos

  $$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^{n_1} \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\varphi_{A_1}"'] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & R^{n_2} \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\varphi_{A_2}"'] \arrow[dr, phantom, "(6)"] & R^{n_3} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{A_3}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^{n_1} \arrow[r, "\beta_1"] & R^{n_2} \arrow[r, "\beta_2"] & R^{n_3} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

  (5) $\Rightarrow \varphi_{A_2}\beta_1=\beta_1\varphi_{A_1}\Rightarrow (A_2\alpha^{-1}(B_1))\alpha^{-1}=(B_1IA_1)\alpha^{-1}$
  $\Rightarrow A_2\alpha^{-1}(B_1)=B_1A_1$

  (6) $\Rightarrow \varphi_{A_3}\beta_2=\beta_2\varphi_{A_2}\Rightarrow (A_3\alpha^{-1}(B_2))\alpha^{-1}=(B_2IA_2)\alpha^{-1}$
  $\Rightarrow A_3\alpha^{-1}(B_2)=B_2A_2$

  Expresando lo anterior en términos de matrices tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^{n_1} \arrow[r, "\alpha^{-1}(B_1)"] \arrow[d, "A_1"'] \arrow[dr, phantom, "(7)"] & R^{n_2} \arrow[r, "\alpha^{-1}(B_2)"] \arrow[d, "A_2"'] \arrow[dr, phantom, "(8)"] & R^{n_3} \arrow[r] \arrow[d, "A_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^{n_1} \arrow[r, "B_1"] & R^{n_2} \arrow[r, "B_2"] & R^{n_3} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

el diagrama conmutativo anterior implica que tenemos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (R_\alpha[t])^{n_1} \arrow[r, "B_1"] \arrow[d, "I+A_1t"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "(9)"] & (R_\alpha[t])^{n_2} \arrow[r, "B_2"] \arrow[d, "I+A_2t"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "(10)"] & (R_\alpha[t])^{n_3} \arrow[r] \arrow[d, "I+A_3t"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (R_\alpha[t])^{n_1} \arrow[r, "B_1"] & (R_\alpha[t])^{n_2} \arrow[r, "B_2"] & (R_\alpha[t])^{n_3} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En efecto,

- (9) *conmuta*:

$$\begin{aligned}(I + A_2t)B_1 &= B_1 + A_2tB_1\\ &= B_1 + A_2\alpha^{-1}(B_1)t\\ &= B_1 + B_1A_1t \text{ pues (7) conmuta}\\ &= B_1(I + A_1t)\end{aligned}$$

Por tanto (9) conmuta.

- (10) *conmuta*:

$$\begin{aligned}(I + A_3t)B_2 &= B_2 + A_3tB_2\\ &= B_2 + A_3\alpha^{-1}(B_2)t\\ &= B_2 + B_2A_2t \text{ pues (8) conmuta}\\ &= B_2(I + A_2t)\end{aligned}$$

Por tanto (10) conmuta.

el diagrama anterior y la definición de $K_1(Proj(R_\alpha[t]))$ (ver Definición 1.3.2) implican que

$$[((R_\alpha[t])^{n_2}, I + A_2t)] = [((R_\alpha[t])^{n_1}, I + A_1t)] + [((R_\alpha[t])^{n_3}, I + A_3t)]$$

y dado que tenemos el isomorfismo (ver Teorema 1.3.4)

$$K_1(R_\alpha[t]) \xrightarrow{\cong} K_1(Proj(R_\alpha[t]))$$

$$[I + A_jt] \longmapsto [((R_\alpha[t])^{n_j}, I + A_jt)]$$

para $j = 1, 2, 3$
$\Rightarrow [I + A_2 t] = [I + A_1 t] + [I + A_3 t]$ en $K_1(R_\alpha[t])$
Por tanto
$\phi(\ [(R^{n_1}, \varphi_{A_1})] + [(R^{n_3}, \varphi_{A_3})]\ )$

$= \phi(\ [(R^{n_2}, \varphi_{A_2})]\ )$

$= [I + A_2 t]$

$= [I + A_1 t] + [I + A_3 t]$

$= \phi(\ [(R^{n_1}, \varphi_{A_1})]\ ) + \phi(\ [(R^{n_3}, \varphi_{A_3})]\ )$
Por tanto ϕ es aditiva en sucesiones exactas y concluímos que φ es isomorfismo. □

2.2 El homomorfismo de transferencia ι_n^*.

Si n es un número natural fijo y $\iota_n : R_\alpha[t^n] \longrightarrow R_\alpha[t]$ denota la inclusión de anillos entonces tenemos el homomorfismo inducido $(\iota_n)_* : K_1(R_\alpha[t^n]) \longrightarrow K_1(R_\alpha[t])$. El propósito de esta sección es construir un homomorfismo de transferencia $\iota_n^* : K_1(R_\alpha[t]) \longrightarrow K_1(R_\alpha[t^n])$ para cada número natural n. Veremos más adelante que dicho homomorfismo de transferencia tiene ciertas propiedades que nos serán útiles para probar el teorema principal de este capítulo.

Observación 2.2.1. *Dado $n \in \mathbb{N}$ y dado un polinomio cualquiera $p(t) \in R_\alpha[t]$ siempre es posible completar $p(t)$ con ceros y suponer que es de la forma $p(t) = \sum_{i=0}^{kn} a_i t^i$ para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Además $p(t)$ puede descomponerse en la siguiente sumatoria:*

$p(t) = \sum_{i=0}^{kn} a_i t^i$

$= a_{0n} t^{0n} + a_{1n} t^{1n} + a_{2n} t^{2n} + \cdots a_{(k-1)n} t^{(k-1)n} + a_{k,n} t^{kn}$

$+ a_{0n+1} t^{0n+1} + a_{1n+1} t^{1n+1} + a_{2n+1} t^{2n+1} + \cdots + a_{(k-1)n+1} t^{(k-1)n+1}$

$+ a_{0n+2} t^{0n+2} + a_{1n+2} t^{1n+2} + a_{2n+2} t^{2n+2} + \cdots + a_{(k-1)n+2} t^{(k-1)n+2}$

$\vdots$

$+ a_{0n+(n-1)} t^{0n+(n-1)} + a_{1n+(n-1)} t^{1n+(n-1)} + a_{2n+(n-1)} t^{2n+(n-1)}$

$+ \cdots + a_{(k-1)n+(n-1)} t^{(k-1)n+(n-1)}$

$= a_{0n} t^{0n} + a_{1n} t^{1n} + a_{2n} t^{2n} + \cdots a_{(k-1)n} t^{(k-1)n} + a_{kn} t^{kn}$

$$+(a_{0n+1}t^{0n} + a_{1n+1}t^{1n} + a_{2n+1}t^{2n} + \cdots + a_{(k-1)n+1}t^{(k-1)n})t$$
$$+(a_{0n+2}t^{0n} + a_{1n+2}t^{1n} + a_{2n+2}t^{2n} + \cdots + a_{(k-1)n+2}t^{(k-1)n})t^2$$
$$\vdots$$
$$+(a_{0n+(n-1)}t^{0n} + a_{1n+(n-1)}t^{1n} + a_{2n+(n-1)}t^{2n}$$
$$+ \cdots + a_{(k-1)n+(n-1)}t^{(k-1)n})t^{n-1}$$

Es decir,

$$p(t) = \sum_{i=0}^{kn} a_i t^i$$
$$= (\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn}) + (\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in})t + \cdots \ +(\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})t^{n-1}.$$

$\square$

Usando la observación 2.2.1 probaremos el siguiente

Lema 2.2.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces $R_\alpha[t]$ es un $R_\alpha[t^n]-$módulo izquierdo libre de rango n, es decir, $R_\alpha[t] \cong \underbrace{R_\alpha[t^n] \oplus \cdots \oplus R_\alpha[t^n]}_{n-veces}$ donde $R_\alpha[t]$ tiene por base a $1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^{n-1}$.*

Demostración: Definimos

$$R_\alpha[t] \xrightarrow{\varphi} R_\alpha[t^n] \oplus \cdots \oplus R_\alpha[t^n] \text{ por}$$
$$\sum_{i=0}^{kn} a_i t^i$$
$$\mapsto (\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in},\ \ldots,\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})$$

• *φ es homomorfismo de $R_\alpha[t^n]-$módulos izquierdos:*

$$\varphi(\sum_{i=0}^{kn} a_i t^i + \sum_{i=0}^{kn} b_i t^i) = \varphi(\sum_{i=0}^{kn}(a_i + b_i)t^i)$$
$$= (\sum_{i=0}^{k-1}(a_{in} + b_{in})t^{in} + (a_{kn} + b_{kn})t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1}(a_{in+1} + b_{in+1})t^{in},$$
$$\sum_{i=0}^{k-1}(a_{in+2} + b_{in+2})t^{in}, \ldots, \sum_{i=0}^{k-1}(a_{in+(n-1)} + b_{in+(n-1)})t^{in})$$

Por otra parte,

$$\varphi(\sum_{i=0}^{kn} a_i t^i) + \varphi(\sum_{i=0}^{kn} b_i t^i)$$
$$=$$
$$(\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+2}t^{in}, \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})$$
$$+$$

$$
\begin{aligned}
&(\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} b_{in}t^{in} + b_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} b_{in+1}t^{in},\ \sum_{i=0}^{k-1} b_{in+2}t^{in}, \dots, \sum_{i=0}^{k-1} b_{in+(n-1)}t^{in})\\
=&\\
&(\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn} + \sum_{i=0}^{k-1} b_{in}t^{in} + b_{kn}t^{kn}\ ,\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in} + \sum_{i=0}^{k-1} b_{in+1}t^{in},\\
&\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+2}t^{in} + \sum_{i=0}^{k-1} b_{in+2}t^{in}, \dots, \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in} + \sum_{i=0}^{k-1} b_{in+(n-1)}t^{in})
\end{aligned}
$$

Por tanto φ es aditiva.

Ahora,

$$
\begin{aligned}
&rt^{nm}\varphi(\textstyle\sum_{i=0}^{kn} a_i t^i)\\
&= rt^{nm}(\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+2}t^{in}, \dots,\\
&\qquad \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})\\
&= (rt^{nm}(\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn}),\ rt^{nm}\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in},\ rt^{nm}\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+2}t^{in}, \dots,\\
&\quad rt^{nm}\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})\\
&= (\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} rt^{nm}a_{in}t^{in} + rt^{nm}a_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} rt^{nm}a_{in+1}t^{in},\ \sum_{i=0}^{k-1} rt^{nm}a_{in+2}t^{in}, \dots,\\
&\quad \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} rt^{nm}a_{in+(n-1)}t^{in})\\
&= (\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in})t^{nm+in} + r\alpha^{-nm}(a_{kn})t^{nm+kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in+1})t^{nm+in},\\
&\quad \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in+2})t^{nm+in},\ \dots,\ \sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in+(n-1)})t^{nm+in})
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$\varphi(rt^{nm}\textstyle\sum_{i=0}^{kn} a_i t^i) = \varphi(\sum_{i=0}^{kn} rt^{nm}a_i t^i) = \varphi(\sum_{i=0}^{kn} r\alpha^{-nm}(a_i)t^{nm+i})$$

Note que si $p(t) = c_0t^{nm} + c_1t^{nm+1} + \cdots + c_{kn}t^{nm+kn}$ entonces podemos escribir $p(t)$ como

$$
\begin{aligned}
p(t) = {} & (c_{0n}t^{nm+0n} + c_{1n}t^{nm+1n} + \cdots + c_{kn}t^{nm+kn})\\
& +(c_{0n+1}t^{nm+0n+1} + c_{1n+1}t^{nm+1n+1} + \cdots + c_{(k-1)n+1}t^{nm+(k-1)n+1})\\
& +\\
& \vdots\\
& +(c_{0n+(n-1)}t^{nm+0n+(n-1)} + c_{1n+(n-1)}t^{nm+1n+(n-1)}\\
& \quad + \cdots + c_{(k-1)n+(n-1)}t^{nm+(k-1)n+(n-1)})
\end{aligned}
$$

Es decir, si $p(t) = \sum_{i=0}^{kn} c_i t^{nm+i}$ entonces

$$p(t) = \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} c_{in}t^{nm+in} + c_{kn}t^{mn+kn} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{in+1}t^{nm+in+1}$$

$$+\cdots+\sum_{i=0}^{k-1} c_{in+(n-1)}t^{nm+in+(n-1)}$$

Lo cual implica que

$$\varphi(p(t))=\varphi(\sum_{i=0}^{kn} c_i t^{nm+i})$$
$$=(\sum_{i=0}^{k-1} c_{in}t^{nm+in}+c_{kn}t^{mn+kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} c_{in+1}t^{nm+in},\ \ldots,\ \sum_{i=0}^{k-1} c_{in+(n-1)}t^{nm+in})$$

por tanto,

$$\varphi(\sum_{i=0}^{kn} r\alpha^{-nm}(a_i)t^{nm+i})$$
$$=(\sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in})t^{nm+in}+r\alpha^{-nm}(a_{kn})t^{nm+kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in+1})t^{nm+in},$$
$$\sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in+2})t^{nm+in},\ \ldots,\ \sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in+(n-1)})t^{nm+in})$$

Hemos probado que φ es homomorfismo de $R_\alpha[t^n]-$módulos izquierdos.

Definimos el inverso

$$R_\alpha[t^n]\oplus\cdots\oplus R_\alpha[t^n]\xrightarrow{\phi} R_\alpha[t]$$
$$x=(\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in}+a_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in},\ \ldots,\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})$$
$$\mapsto$$
$$(\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in}+a_{kn}t^{kn})+(\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in})t+\cdots+(\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})t^{n-1}$$
$$=\sum_{i=0}^{kn} a_i t^i$$

(Note que cualquier elemento $x\in R_\alpha[t^n]\oplus\cdots\oplus R_\alpha[t^n]$ puede escribirse en dicha forma).

- *ϕ es homomorfismo de $R_\alpha[t^n]-$módulos izquierdos.*

$$\phi(x_1+x_2)$$
$$=$$
$$\phi(\ (\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in}+a_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in},\ \ldots,\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})$$
$$+$$
$$(\sum_{i=0}^{k-1} b_{in}t^{in}+b_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} b_{in+1}t^{in},\ \ldots,\sum_{i=0}^{k-1} b_{in+(n-1)}t^{in})\ )$$
$$=\phi(\ (\sum_{i=0}^{k-1}(a_{in}+b_{in})t^{in}+(a_{kn}+b_{kn})t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1}(a_{in+1}+b_{in+1})t^{in},$$
$$\ldots,\sum_{i=0}^{k-1}(a_{in+(n-1)}+b_{in+(n-1)})t^{in})\ )$$
$$=\sum_{i=0}^{k-1}(a_{in}+b_{in})t^{in}+(a_{kn}+b_{kn})t^{kn}+(\sum_{i=0}^{k-1}(a_{in+1}+b_{in+1})t^{in})t$$
$$+\cdots+(\sum_{i=0}^{k-1}(a_{in+(n-1)}+b_{in+(n-1)})t^{in})t^{n-1}$$

$= \sum_{i=0}^{kn}(a_i + b_i)t^i = \phi(x_1) + \phi(x_2)$.

Por tanto ϕ es aditiva.

Ahora,

$$rt^{nm}\phi(x)$$
$$= rt^{nm}(\ (\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn}) + (\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in})t + (\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+2}t^{in})t^2 + \cdots + (\sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})t^{n-1}\ )$$

Por otra parte,

$$\phi(rt^{nm}x)$$
$$= \phi(\ rt^{nm}(\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in},\ \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})\ )$$
$$= \phi(\ (\sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in})t^{nm+in} + r\alpha^{-nm}(a_{kn})t^{nm+kn},$$
$$\sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in+1})t^{nm+in},\ \ldots,\ \sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in+(n-1)})t^{nm+in})\ )$$
$$= (\sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in})t^{nm+in} + r\alpha^{-nm}(a_{kn})t^{nm+kn} + \sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in+1})t^{nm+in+1} + \cdots + \sum_{i=0}^{k-1} r\alpha^{-nm}(a_{in+(n-1)})t^{nm+in+(n-1)})$$
$$= (\sum_{i=0}^{k-1} rt^{nm}a_{in}t^{in} + rt^{nm}a_{kn}t^{kn} + \sum_{i=0}^{k-1} rt^{nm}a_{in+1}t^{in+1} + \cdots + \sum_{i=0}^{k-1} rt^{nm}a_{in+(n-1)}t^{in+(n-1)})$$

Por tanto ϕ es homomorfismo de $R_\alpha[t^n]-$módulos izquierdos.

- $\varphi\phi = id$, $\phi\varphi = id$:

$$\varphi\phi\ (\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in},\ \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})$$
$$= \varphi(\sum_{i=0}^{kn} a_i t^i)$$
$$= (\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in},\ \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})$$

Por tanto $\varphi\phi = id$

$$\phi\varphi(\sum_{i=0}^{kn} a_i t^i)$$
$$= \phi(\sum_{i=0}^{k-1} a_{in}t^{in} + a_{kn}t^{kn},\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+1}t^{in},\ \ldots, \sum_{i=0}^{k-1} a_{in+(n-1)}t^{in})$$
$$= \sum_{i=0}^{kn} a_i t^i$$

Por tanto $\phi\varphi = id$.

Hemos probado que dado $n \in \mathbb{N}$, $R_\alpha[t] \cong R_\alpha[t^n] \oplus \cdots \oplus R_\alpha[t^n]$ como

$R_\alpha[t^n]-$módulos izquierdos. $\square$

Sea $\iota_n : R_\alpha[t^n] \longrightarrow R_\alpha[t]$ la inclusión. Entonces como mencionamos al principio de esta sección tenemos el homomorfismo inducido

$$(\iota_n)_* : K_1(R_\alpha[t^n]) \longrightarrow K_1(R_\alpha[t]).$$

Ahora definiremos un homomorfismo de transferencia

$$\iota_n^* : K_1(R_\alpha[t]) \longrightarrow K_1(R_\alpha[t^n]).$$

Para esto primero definiremos un homomorfismo de grupos

$$\iota_n^* : GL_r(R_\alpha[t]) \longrightarrow GL_r(R_\alpha[t^n])$$

de la siguiente manera:

Definición 2.2.3. *Sea $B \in GL_r(R_\alpha[t])$. Entonces definimos $\iota_n^*(B) = \bar{B}$ donde $\bar{B}$ es la matriz asociada a la composición siguiente con respecto a la base canónica:*

$$(R_\alpha[t^n]\oplus\cdots\oplus R_\alpha[t^n])^r \xrightarrow{(\varphi^{-1})^r} (R_\alpha[t])^r \xrightarrow{(\,)B} (R_\alpha[t])^r \xrightarrow{\varphi^r} (R_\alpha[t^n]\oplus\cdots\oplus R_\alpha[t^n])^r$$

donde $(\varphi^{-1})^r = \varphi^{-1} \times \cdots \times \varphi^{-1}$ $r-$veces y $\varphi^r = \varphi \times \cdots \times \varphi$ $r-$veces.

Lema 2.2.4. $\iota_n^* : GL_r(R_\alpha[t]) \longrightarrow GL_r(R_\alpha[t^n])$ *es homomorfismo de grupos.*

Demostración:
$\bullet \bar{B} \in M_r(R_\alpha[t^n])$:

Para demostrarlo debemos probar que la composición anterior es una transformación $R_\alpha[t^n]-$lineal:

Sean $(\bar{x_1}, ..., \bar{x_r})$, $(\bar{y_1}, ..., \bar{y_r}) \in (R_\alpha[t^n] \oplus \cdots \oplus R_\alpha[t^n])^r$, sea $y \in R_\alpha[t^n]$.

$\varphi^r(\ [\ (\varphi^{-1})^r(\ (\bar{x_1}, ..., \bar{x_r}) + y(\bar{y_1}, ..., \bar{y_r}) \ ) \ ]B \ )$

$= \varphi^r(\ [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1}, ..., \bar{x_r}) + y(\varphi^{-1})^r(\bar{y_1}, ..., \bar{y_r}) \ ]B \ )$

pues $(\varphi^{-1})^r$ es $R_\alpha[t^n]-$lineal.

$= \varphi^r(\ [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1}, ..., \bar{x_r}) \ ]B + y[\ (\varphi^{-1})^r(\bar{y_1}, ..., \bar{y_r}) \ ]B \ )$

$= \varphi^r(\ [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1},...,\bar{x_r}) \ ]B) + y\{ \ \varphi^r(\ [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{y_1},...,\bar{y_r}) \ ]B \ ) \ \}$

pues φ^r es $R_\alpha[t^n]-$lineal.

Por tanto $\bar{B} \in M_r(R_\alpha[t^n])$.

- $\bar{B} \in GL_r(R_\alpha[t^n])$:

  Probaremos que $\overline{B^{-1}}$ es tal que $\bar{B}\overline{B^{-1}} = id$, $\overline{B^{-1}}\bar{B} = id$

$$\varphi^r(\ [\ \underbrace{(\varphi^{-1})^r(\qquad \varphi^r}_{id}(\ [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1},...,\bar{x_r}) \ ]B^{-1} \ ) \qquad) \ ]B \ )$$

$= \varphi^r(\quad [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1},...,\bar{x_r}) \ ]B^{-1}B \ )$

$= \varphi^r(\quad [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1},...,\bar{x_r}) \ ] \ )$

$= (\bar{x_1},...,\bar{x_r})$. Por tanto, $\bar{B}\overline{B^{-1}} = id.$

$$\varphi^r(\ [\ \underbrace{(\varphi^{-1})^r(\qquad \varphi^r}_{id}(\ [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1},...,\bar{x_r}) \ ]B \ ) \qquad) \ ]B^{-1} \ )$$

$= \varphi^r(\quad [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1},...,\bar{x_r}) \ ]BB^{-1} \ )$

$= \varphi^r(\quad [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1},...,\bar{x_r}) \ ] \ )$

$= (\bar{x_1},...,\bar{x_r})$. Por tanto, $\overline{B^{-1}}\bar{B} = id.$

  Por tanto $\iota^*(B) = \bar{B} \in GL_r(R_\alpha[t^n])$.

- $\iota_n^* : GL_r(R_\alpha[t]) \longrightarrow GL_r(R_\alpha[t^n])$ *es homomorfismo de grupos* :

  Sean A, $B \in GL_r(R_\alpha[t])$. Dado que $\iota_n^*(AB) = \overline{AB}$ y $\iota_n^*(A)\iota_n^*(B) = \bar{A}\bar{B}$ basta probar que las transformaciones $R_\alpha[t^n]-$lineales asociadas coinciden.
  La transformación $R_\alpha[t^n]-$lineal asociada a $\overline{AB}$ es

$$\varphi^r(\quad [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1},...,\bar{x_r}) \ ]AB \ )$$

  La transformación $R_\alpha[t^n]-$lineal asociada a $\bar{A}\bar{B}$ es

$$\varphi^r(\ [\ \underbrace{(\varphi^{-1})^r(\qquad \varphi^r}_{id}(\ [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1},...,\bar{x_r}) \ ]A \ ) \qquad) \ ]B \ )$$

$= \varphi^r(\quad [\ (\varphi^{-1})^r(\bar{x_1},...,\bar{x_r}) \ ]AB \ )$

Por tanto ι_n^* es homomorfismo de grupos. □

• *Observación:*

Sea $B \in GL_r(R_\alpha[t]) \Rightarrow \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{r+1}(R_\alpha[t])$

$$\Rightarrow \varphi^{r+1}(\quad [\ (\varphi^{-1})^{r+1}(\bar{x_1}, ..., \bar{x_r}, \bar{x}_{r+1}) \ ] \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ )$$

$$= \varphi^{r+1}(\ (\varphi^{-1}(\bar{x_1}), ..., \varphi^{-1}(\bar{x_r}), \varphi^{-1}(\bar{x}_{r+1})) \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ )$$

$$= \varphi^{r+1}(\ (\varphi^{-1}(\bar{x_1}), ..., \varphi^{-1}(\bar{x_r}))B, \varphi^{-1}(\bar{x}_{r+1}) \ )$$

$$= \varphi^{r}(\ ((\varphi^{-1})^{r}(\bar{x_1}, ..., \bar{x_r}))B, \varphi\varphi^{-1}(\bar{x}_{r+1}) \ )$$

$$= \varphi^{r}(\ ((\varphi^{-1})^{r}(\bar{x_1}, ..., \bar{x_r}))B, \bar{x}_{r+1} \ )$$

$$\Rightarrow (\ \bar{x_1}, ..., \bar{x_r}, \bar{x}_{r+1} \ ) \mapsto (\ (\bar{x_1}, ..., \bar{x_r})\bar{B}, \bar{x}_{r+1} \ )$$

$$= (\ \bar{x_1}, ..., \bar{x_r}, \bar{x}_{r+1} \ ) \begin{pmatrix} \bar{B} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\iota_n^* \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{B} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Teorema 2.2.5. *$\iota_n^* : K_1(R_\alpha[t]) \longrightarrow K_1(R_\alpha[t^n])$ está bien definido:*

Demostración: Dado que $\iota_n^* : GL_r(R_\alpha[t]) \longrightarrow GL_r(R_\alpha[t^n])$ es homomorfismo de grupos basta probar que $\iota_n^*(e_{ij}(p(t)))$ es producto de matrices elementales, donde $p(t) \in R_\alpha[t]$.

Primero demostraremos que dado $a \in R$, $\iota_n^*(e_{ij}(a))$ es elemental:

Sea $[\ (x_{11}, \ ...., \ x_{1n}), \ ..., \ (x_{r1}, \ ...., \ x_{rn}) \ ] \in (R_\alpha[t^n] \oplus \cdots \oplus R_\alpha[t^n])^r$ (donde $x_{ij} \in R_\alpha[t^n]$) entonces

$$[\ (x_{11}, \ ...., \ x_{1n}), \ ..., \ (x_{r1}, \ ...., \ x_{rn}) \ ]$$

$$\xrightarrow{(\varphi^{-1})^r}$$

$$[\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}), \ ..., \ (x_{r1} + x_{r2}t + \cdots + x_{rn}t^{n-1}) \ ]$$

$$\xrightarrow{(\ )e_{ij}(a)}$$

$$[\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}),$$

$$
\begin{aligned}
&\quad ..., \underbrace{(x_{j1}+x_{j2}t+\cdots+x_{jn}t^{n-1})+(x_{i1}+x_{i2}t+\cdots+x_{in}t^{n-1})a}_{entrada\ j-\acute{e}sima},\\
&\quad ...,\ (x_{r1}+x_{r2}t+\cdots+x_{rn}t^{n-1})\ ]\\
&= [\ (x_{11}+x_{12}t+\cdots+x_{1n}t^{n-1}),\\
&\quad ..., (x_{j1}+x_{j2}t+\cdots+x_{jn}t^{n-1})+(x_{i1}a+x_{i2}\alpha^{-1}(a)t+\cdots+x_{in}\alpha^{-(n-1)}(a)t^{n-1}),\\
&\quad ...,\ (x_{r1}+x_{r2}t+\cdots+x_{rn}t^{n-1})\ ]\\
&= [\ (x_{11}+x_{12}t+\cdots+x_{1n}t^{n-1}),\\
&\quad ..., (\ (x_{j1}+x_{i1}a)+(x_{j2}+x_{i2}\alpha^{-1}(a))t+\cdots+(x_{jn}+x_{in}\alpha^{-(n-1)}(a))t^{n-1}\ ),\\
&\quad ...,\ (x_{r1}+x_{r2}t+\cdots+x_{rn}t^{n-1})\ ]\\
&\quad \xrightarrow{\varphi^r}\\
&\quad [\ (x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n}),\\
&\quad ...,\ (x_{j1}+x_{i1}a,\ x_{j2}+x_{i2}\alpha^{-1}(a),\ ...,\ x_{jn}+x_{in}\alpha^{-(n-1)}(a)\ ),\\
&\quad ...,\ (x_{r1},\ x_{r2},\ ...,\ x_{rn})\ ]
\end{aligned}
$$

Sea C la matriz estrictamente triangular superior definida por

$$
\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} & & & & & 0 \\
 & \ddots & & & & \\
 & & \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & \alpha^{-1}(a) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha^{-(n-1)}(a) \end{pmatrix} & \\
 & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} & \\
 & & & & & \ddots \\
0 & & & & & \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}
$$

Entonces

$[\ (x_{11},\ ....,\ x_{1n}),...,(x_{i1},x_{i2},\ ....,\ x_{in}),...,(x_{j1},\ x_{j2},....,\ x_{jn}),...,(x_{r1},\ ....,\ x_{rn})\ ]C$

$=$

$[\ (x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n}),\ ...,\ (x_{j1}+x_{i1}a,\ x_{j2}+x_{i2}\alpha^{-1}(a),\ ...,\ x_{jn}+x_{in}\alpha^{-(n-1)}(a)\ ),$
$...,\ (x_{r1},\ x_{r2},\ ...,\ x_{rn})\ ]$

Por tanto $\iota_n^*(e_{ij}(a)) = C$ con C una matriz elemental.

Ahora demostraremos que $\iota_n^*(e_{ij}(t))$ es matriz elemental:

Sea $[\ (x_{11},\ ....,\ x_{1n}),\ ...,\ (x_{r1},\ ....,\ x_{rn})\ ] \in (R_\alpha[t^n] \oplus \cdots \oplus R_\alpha[t^n])^r$ (donde $x_{ij} \in R_\alpha[t^n]$) entonces

$$[\ (x_{11},\ ....,\ x_{1n}),\ ...,\ (x_{r1},\ ....,\ x_{rn})\ ]$$

$$\xrightarrow{(\varphi^{-1})^r}$$

$$[\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}),\ ...,\ (x_{r1} + x_{r2}t + \cdots + x_{rn}t^{n-1})\ ]$$

$$\xrightarrow{(\ )e_{ij}(t)}$$

$$\begin{aligned}
&[\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}),\\
&\ ..., \underbrace{(x_{j1} + x_{j2}t + \cdots + x_{jn}t^{n-1}) + (x_{i1}t + x_{i2}t^2 + \cdots + x_{in}t^n)}_{entrada\ j-\acute{e}sima},\\
&\ ...,\ (x_{r1} + x_{r2}t + \cdots + x_{rn}t^{n-1})\ ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= &[\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}),\\
&\ ...,(\ (x_{j1} + x_{in}t^n) + (x_{j2} + x_{i1})t + \cdots + (x_{jn} + x_{i,n-1})t^{n-1}\ ),\\
&\ ...,\ (x_{r1} + x_{r2}t + \cdots + x_{rn}t^{n-1})\ ]
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\varphi^r}$$

$$\begin{aligned}
= &[\ (x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n}),\ ...,(\ x_{j1} + x_{in}t^n,\ x_{j2} + x_{i1},\ \cdots,\ x_{jn} + x_{i,n-1}\ ),\\
&\ ...,\ (x_{r1},\ x_{r2},\ ...,\ x_{rn})\ ]
\end{aligned}$$

Sea D la matriz estrictamente triangular superior definida por

$$\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} & & & & & & 0\\
& \ddots & & & & & \\
& & \begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ t^n & & & 0\end{pmatrix} & & \\
& & & \ddots & \vdots & & \\
& & & & \begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix} & & \\
& & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

Entonces
$[\ (x_{11},\ ....,\ x_{1n}), ..., (x_{i1}, x_{i2},\ ....,\ x_{in}), ..., (x_{j1},\ x_{j2}, ...,\ x_{jn}), ..., (x_{r1},\ ....,\ x_{rn})\ ]D$
$=$
$[\ (x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n}),\ ..., (\ x_{j1} + x_{in}t^n,\ x_{j2} + x_{i1},\ \cdots,\ x_{jn} + x_{i,n-1}\ ),$
$\quad ...,\ (x_{r1},\ x_{r2},\ ...,\ x_{rn})\ ]$

Por tanto $\iota_n^*(e_{ij}(t)) = D$ con D matriz elemental.

Ahora veamos que $\iota_n^*(e_{ij}(p(t)))$ es producto de matrices elementales donde $p(t) \in R_\alpha[t]$:

$\iota_n^*(e_{ij}(p(t))) = \iota_n^*(e_{ij}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_q t^q)) = \iota_n^*(e_{ij}(a_0) e_{ij}(a_1 t) \cdots e_{ij}(a_q t^q))$
y dado que $e_{ik}(at^l) = e_{ij}(a) e_{jk}(t^l) e_{ij}(a)^{-1} e_{jk}(t^l)^{-1}$ para $k \neq i$ y $k \neq j$
y $e_{ik}(t^l) = e_{ik}(t^{l-1}t) = e_{ij}(t^{l-1}) e_{jk}(t) e_{ij}(t^{l-1})^{-1} e_{jk}(t)^{-1}$ para $k \neq i$ y $k \neq j$
y ι_n^* es homomorfismo de grupos, concluímos que $\iota_n^*(e_{ij}(p(t)))$ es producto de matrices elementales.

Por tanto $\iota_n^* : K_1(R_\alpha[t]) \longrightarrow K_1(R_\alpha[t^n])$ está bien definido. $\square$

2.3 Propiedades del homomorfismo ι_n^*.

En esta sección demostramos dos lemas relacionados con el homomorfismo de transferencia ι_n^* definido en la sección 2.2. Estos lemas serán utilizados para demostrar el teorema principal de este capítulo en la siguiente sección.

Lema 2.3.1. *Sea* $B \in GL_r(R_\alpha[t^n])$.
Entonces $\iota_n^* \circ (\iota_n)_*([B]) = [B \oplus \alpha^{-1}(B) \oplus \cdots \oplus \alpha^{-(n-1)}(B)]$.

Demostración:
Note que $B = B_0 + B_1 t^n + B_2 (t^n)^2 + \cdots + B_p (t^n)^p$

Sea $[\ (x_{11},\ ....,\ x_{1n}),\ ...,\ (x_{r1},\ ....,\ x_{rn})\ ] \in (R_\alpha[t^n] \oplus \cdots \oplus R_\alpha[t^n])^r$
(donde $x_{ij} \in R_\alpha[t^n]$) entonces

$$[\ (x_{11},\ ....,\ x_{1n}),\ ...,\ (x_{r1},\ ....,\ x_{rn})\ ]$$

$$\xrightarrow{(\varphi^{-1})^r}$$

$$[\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}),\ ...,\ (x_{r1} + x_{r2}t + \cdots + x_{rn}t^{n-1})\ ]$$

$$\xrightarrow{(\ )B}$$

$$[\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}),\ ...,\ (x_{r1} + x_{r2}t + \cdots + x_{rn}t^{n-1})\ ]B$$

$$= (\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1}) + (x_{12},\ ...,\ x_{r2})t + \cdots + (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})t^{n-1}\ )B$$

$$= (x_{11},\ ...,\ x_{r1})B + (x_{12},\ ...,\ x_{r2})tB + \cdots + (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})t^{n-1}B$$

$$= (x_{11},\ ...,\ x_{r1})B + (x_{12},\ ...,\ x_{r2})\alpha^{-1}(B)t + \cdots + (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})\alpha^{-(n-1)}(B)t^{n-1}$$

Llamemos x a la última igualdad.

Note que
$$\alpha^{-i}(B) = \alpha^{-i}(B_0 + B_1 t^n + B_2 (t^n)^2 + \cdots + B_p (t^n)^p)$$
$$= \alpha^{-i}(B_0) + \alpha^{-i}(B_1)t^n + \alpha^{-i}(B_2)(t^n)^2 + \cdots + \alpha^{-i}(B_p)(t^n)^p)$$
Entonces $\alpha^{-i}(B) \in M_r(R_\alpha[t^n])$.
Por tanto
$(x_{11},\ ...,\ x_{r1})B \in (R_\alpha[t^n])^r$, $(x_{12},\ ...,\ x_{r2})\alpha^{-1}(B) \in (R_\alpha[t^n])^r$, ...,
$(x_{1n},\ ...,\ x_{rn})\alpha^{-(n-1)}(B) \in (R_\alpha[t^n])^r$.
Entonces

$$\varphi^r(x)$$
$$= [\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1})B,\ (x_{12},\ ...,\ x_{r2})\alpha^{-1}(B),\ \ldots,\ (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})\alpha^{-(n-1)}(B)\ ]$$

Sea $\bar{x}_j = (x_{1j},\ ...,\ x_{rj})\ \forall\ j = 1,\ 2,\ ,\ldots,\ n$.
Entonces

$$(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n)\begin{pmatrix} B & & & 0 \\ & \alpha^{-1}(B) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha^{-(n-1)}(B) \end{pmatrix}$$

$$= (\bar{x}_1 B,\ \bar{x}_2\alpha^{-1}(B),\ \ldots,\ \bar{x}_n\alpha^{-(n-1)}(B))$$

Por tanto

$$\iota_n^* \circ (\iota_n)_*([B]) = \left[\begin{pmatrix} B & & & 0 \\ & \alpha^{-1}(B) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha^{-(n-1)}(B) \end{pmatrix}\right]$$

$$= [B \oplus \alpha^{-1}(B) \oplus \cdots \oplus \alpha^{-(n-1)}(B)] \text{ para } [B] \in K_1(R_\alpha[t^n]). \quad \square$$

Lema 2.3.2. *Sea $x \in NK_1^\alpha(R)$ un elemento fijo. Por el lema 2.1.4 tenemos que $x = [I + Nt]$ con $N \in M_r(R)$ para algún $r \in \mathbb{N}$ y $\varphi_N^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

(a) $\iota_n^*([I + Nt]) = M$ donde M es la matriz de bloques siguiente

$$M = \begin{pmatrix} 1 & N & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^{-1}(N) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \alpha^{-(n-2)}(N) \\ \alpha^{-(n-1)}(N)t^n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Sea A la matriz de bloques estrictamente triangular inferior (y por tanto elemental) dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & N & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^{-1}(N) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \alpha^{-(n-2)}(N) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces MA^{-1} es estrictamente triangular inferior y por tanto elemental.

Demostración:
(a)

Sea $[\ (x_{11},\ ....,\ x_{1n}),\ ...,\ (x_{r1},\ ....,\ x_{rn})\ ] \in (R_\alpha[t^n] \oplus \cdots \oplus R_\alpha[t^n])^r$ (donde $x_{ij} \in R_\alpha[t^n]$) entonces

$$[\ (x_{11},\ ....,\ x_{1n}),\ ...,\ (x_{r1},\ ....,\ x_{rn})\ ]$$

$$\xrightarrow{(\varphi^{-1})^r}$$

$$[\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}),\ ...,\ (x_{r1} + x_{r2}t + \cdots + x_{rn}t^{n-1})\ ]$$

$$\xrightarrow{(\ )(I+Nt)}$$

$$[\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}),\ ...,\ (x_{r1} + x_{r2}t + \cdots + x_{rn}t^{n-1})\ ](I + Nt)$$

$$= [\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}),\ ...,\ (x_{r1} + x_{r2}t + \cdots + x_{rn}t^{n-1})\ ] + \\ [\ (x_{11} + x_{12}t + \cdots + x_{1n}t^{n-1}),\ ...,\ (x_{r1} + x_{r2}t + \cdots + x_{rn}t^{n-1})\ ]Nt$$

$$= (\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1}) + (x_{12},\ ...,\ x_{r2})t + \cdots + (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})t^{n-1}\ ) + \\ (\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1}) + (x_{12},\ ...,\ x_{r2})t + \cdots + (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})t^{n-1}\ )Nt$$

$$= (\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1}) + (x_{12},\ ...,\ x_{r2})t + \cdots + (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})t^{n-1}\ ) + \\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1})Nt + (x_{12},\ ...,\ x_{r2})tNt + \cdots + (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})t^{n-1}Nt$$

$$= (\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1}) + (x_{12},\ ...,\ x_{r2})t + \cdots + (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})t^{n-1}\ ) + \\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1})Nt + (x_{12},\ ...,\ x_{r2})\alpha^{-1}(N)t^2 + \cdots + (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})\alpha^{-(n-1)}(N)t^n$$

$$= (\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1}) + (x_{1n},\ ...,\ x_{rn})\alpha^{-(n-1)}(N)t^n\ ) \\ + ((x_{12},\ ...,\ x_{r2}) + (x_{11},\ ...,\ x_{r1})N)t$$

$+\cdots+((x_{1n},\ ...,\ x_{rn})+(x_{1,n-1},\ ...,\ x_{r,n-1})\alpha^{-(n-2)}(N))t^{n-1}$

$\xrightarrow{\varphi^r}$

$(\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1})+(x_{1n},\ ...,\ x_{rn})\alpha^{-(n-1)}(N)t^n\ ,$

$(x_{12},\ ...,\ x_{r2})+(x_{11},\ ...,\ x_{r1})N,$

$\ldots,(x_{1n},\ ...,\ x_{rn})+(x_{1,n-1},\ ...,\ x_{r,n-1})\alpha^{-(n-2)}(N)\ )$

Sea $\bar{x}_j=(x_{1j},\ ...,\ x_{rj})\ \forall\ j=1,\ 2,\ ,\ldots,\ n.$

Entonces

$$(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ \ldots,\ \bar{x}_{n-1}\ \bar{x}_n)\begin{pmatrix} 1 & N & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^{-1}(N) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \alpha^{-(n-2)}(N) \\ \alpha^{-(n-1)}(N)t^n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$=(\ (x_{11},\ ...,\ x_{r1})+(x_{1n},\ ...,\ x_{rn})\alpha^{-(n-1)}(N)t^n\ ,$

$(x_{12},\ ...,\ x_{r2})+(x_{11},\ ...,\ x_{r1})N,$

$\ldots,(x_{1n},\ ...,\ x_{rn})+(x_{1,n-1},\ ...,\ x_{r,n-1})\alpha^{-(n-2)}(N)\ )$

(b) Sean $\bar{N}$, B las matrices de n bloques

$$\bar{N}=\begin{pmatrix} 0 & N & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1}(N) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \alpha^{-(n-2)}(N) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \alpha^{-(n-1)}(N)t^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que $\bar{N}^n = 0$, $A = I + \bar{N}$ y $M = I + \bar{N} + B$.
Dado que $A = I + \bar{N} \Rightarrow A^{-1} = I - \bar{N} + \bar{N}^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\bar{N}^{n-1}$
$\Rightarrow MA^{-1} = (\ I + \bar{N} + B\ )(\ I - \bar{N} + \bar{N}^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\bar{N}^{n-1}\ )$
$\qquad = I + BI - B\bar{N} + B\bar{N}^2 + \cdots + (-1)^{n-1}B\bar{N}^{n-1}$

Tenemos

$$B\bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-(n-1)}(N)t^nN & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & N\alpha^{-1}(N) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-1}(N)\alpha^{-2}(N) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \alpha^{-(n-3)}(N)\alpha^{-(n-2)}(N) \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$B\bar{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-(n-1)}(N)t^nN\alpha^{-1}(N) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\bar{N}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & N\alpha^{-1}(N)\cdots\alpha^{-(n-2)}(N) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$B\bar{N}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha^{-(n-1)}(N)t^nN\alpha^{-1}(N)\cdots\alpha^{-(n-2)}(N) \end{pmatrix}$$

Entonces

$$MA^{-1} = I + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha^{-(n-1)}(N)t^n & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \alpha^{-(n-1)}(N)t^n N & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha^{-(n-1)}(N)t^n N\alpha^{-1}(N) & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-(n-1)}(N)t^n N\alpha^{-1}(N)\alpha^{-2}(N) & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha^{-(n-1)}(N)t^n N\alpha^{-1}(N)\cdots\alpha^{-(n-2)}(N) \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$MA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

donde
$a_1 = \alpha^{-(n-1)}(N)t^n$
$a_2 = -\alpha^{-(n-1)}(N)t^n N$
$a_3 = \alpha^{-(n-1)}(N)t^n N\alpha^{-1}(N)$

$a_n = 1 + (-1)^{n-1} b$
y donde
$b = \alpha^{-(n-1)}(N)t^n N\alpha^{-1}(N)\cdots\alpha^{-(n-2)}(N)$

Pero

$$\begin{aligned} b &= \alpha^{-(n-1)}(N)t^n\ N\alpha^{-1}(N)\cdots\alpha^{-(n-2)}(N) \\ &= \alpha^{-(n-1)}(N)\alpha^{-n}(N)\alpha^{-(n+1)}(N)\cdots\alpha^{-(n+(n-2))}(N)t^n \\ &= \alpha^{-(n-1)}(\ N\alpha^{-1}(N)\alpha^{-2}(N)\cdots\alpha^{-(n-1)}(N)\ ) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto MA^{-1} es estrictamente triangular inferior. □

2.4 Demostración del teorema principal.

En esta sección aplicaremos los resultados de las secciones anteriores para por fin concluír con la demostración del teorema 2.4.5, el principal teorema de este capítulo.

Usando el lema 2.3.2 de la sección 2.3 probamos la siguiente

Proposición 2.4.1. *Si $NK_1^\alpha(R)$ es finitamente generado entonces existe un entero n_0 tal que $\iota_n^*(NK_1^\alpha(R)) \equiv 0\ \forall n \geq n_0$.*

Demostración:
Usando (a) y (b) del lema 2.3.2 tenemos que $\iota_n^*([I+Nt]) = [M] = [MA^{-1}][A] = 0$ para N tal que $\varphi_N^n = 0$. Suponga que $NK_1^\alpha(R)$ es finitamente generado como grupo abeliano.
Sea $\{\ [I+N_1t],\ \ldots,\ [I+N_st]\ \}$ un conjunto de generadores de $NK_1^\alpha(R)$.
$\Rightarrow \exists\ n_1,\ \ldots,\ ,n_s$ tales que $\varphi_{N_1}^{n_1} = \cdots = \varphi_{N_s}^{n_s} = 0$
$\Rightarrow \iota_{n_1}^*([I+N_1t]) = \cdots = \iota_{n_s}^*([I+N_st]) = 0$. Sea $n_0 = máx\{\ n_1,\ \ldots,\ ,n_s\ \}$.
Note que $n \geq n_0 \Rightarrow \varphi_{N_1}^n = \cdots = \varphi_{N_s}^n = 0$ (pues la composición de cualquier homomorfismo $\alpha^{-r}-$lineal con el homomorfismo cero es cero).
$\Rightarrow \iota_n^*([I+N_it]) = 0\ \forall\ i = 1,\ \ldots,\ s$ y $\forall\ n \geq n_0$.
Por tanto existe un entero n_0 tal que $\iota_n^*(NK_1^\alpha(R)) \equiv 0\ \forall\ n \geq n_0$. □

Definición 2.4.2. *Sea R anillo con 1. $\alpha : R \longrightarrow R$ un automorfismo de anillos. Sea M un $R-$módulo derecho. Entonces definimos $\alpha(M)$ como el $R-$módulo derecho tal que aditivamente $\alpha(M) = M$ y la multiplicación escalar está definida por $m * r = m\alpha(r)\ \forall m \in M,\ \forall r \in R$.*

Lema 2.4.3. *Sea $\varphi_A : R^n \longrightarrow R^n$ un homomorfismo $\alpha^{-1}-$lineal. φ_A define un nuevo homomorphismo $\alpha^{-1}-$lineal de $\alpha^{-1}(R^n)$ en $\alpha^{-1}(R^n)$ el cual denotaremos de nuevo por φ_A. Entonces tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{-1}(R^n) & \xrightarrow{\varphi_A} & \alpha^{-1}(R^n) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ R^n & \xrightarrow{\varphi_{\alpha(A)}} & R^n \end{array}$$

(entonces $[\alpha^{-1}(R^n), \varphi_A] = [(R^n, \varphi_{\alpha(A)})]$ en $K_0(Nil_{\alpha^{-1}}(R))$)

Demostración: Sea ψ la composición determinada por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{-1}(R^n) & \xrightarrow{\varphi_A} & \alpha^{-1}(R^n) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ R^n & \xrightarrow{\psi} & R^n \end{array}$$

Note que $\alpha^{-1} : R^n \xrightarrow{\cong} \alpha^{-1}(R^n)$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(r_1) \\ \vdots \\ \alpha^{-1}(r_n) \end{pmatrix}$$

$$\alpha : \alpha^{-1}(R^n) \xrightarrow{\cong} R^n$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(r_1) \\ \vdots \\ \alpha(r_n) \end{pmatrix}$$

son isomorfismos $R-$lineales y recuerde que φ_A, $\varphi_{\alpha(A)}$ son $\alpha^{-1}-$lineales.

y $\varphi_A : \alpha^{-1}(R^n) \longrightarrow \alpha^{-1}(R^n)$ es tal que

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mapsto A\alpha^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(r_1) \\ \vdots \\ \alpha^{-1}(r_n) \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\alpha \circ \varphi_A \circ \alpha^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \alpha\varphi_A \begin{pmatrix} \alpha^{-1}(r_1) \\ \vdots \\ \alpha^{-1}(r_n) \end{pmatrix} = \alpha \left(A \begin{pmatrix} \alpha^{-2}(r_1) \\ \vdots \\ \alpha^{-2}(r_n) \end{pmatrix} \right)$$

$$= \alpha(A)\alpha \begin{pmatrix} \alpha^{-2}(r_1) \\ \vdots \\ \alpha^{-2}(r_n) \end{pmatrix} = \alpha(A)\alpha^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz asociada a la composición $\psi = \alpha \circ \varphi_A \circ \alpha^{-1}$ es $\alpha(A)$, es decir, $\psi = \varphi_{\alpha(A)}$. □

Usando el lema 2.4.3 obtenemos el siguiente resultado el cual es la versión algebraica del teorema de Mather [19].

Lema 2.4.4. *Sea R anillo con* 1. *Entonces* $(NK_1^\alpha(R))^{\alpha_*} = NK_1^\alpha(R)$.

Demostración: Por el lema 2.4.3 y el teorema 2.1.5 (b) el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{K_0}(Nil_{\alpha^{-1}}(R)) & \xrightarrow{\cong} & NK_1^\alpha(R) \\ {\scriptstyle \alpha_*^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} \\ \widetilde{K_0}(Nil_{\alpha^{-1}}(R)) & \xrightarrow{\cong} & NK_1^\alpha(R) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} [(R^n, \varphi_A)] & \xrightarrow{\cong} & [I + At] \\ {\scriptstyle \alpha_*^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} \\ [(\alpha^{-1}(R^n), \varphi_A)] = [(R^n, \varphi_{\alpha(A)})] & \xrightarrow{\cong} & [I + \alpha(A)t] \end{array}$$

(la igualdad en el diagrama está dada por el lema 2.4.3 y los isomorfismos de los renglones están dados por el teorema 2.1.5 (b).)

Ahora por [11], Proposición 10, pág. 202. tenemos que

$$(\ \widetilde{K_0}(Nil_{\alpha^{-1}}(R))\ )^{\alpha_*^{-1}} = \widetilde{K_0}(Nil_{\alpha^{-1}}(R)).$$

Por tanto $\alpha_*([I + At]) = [I + At]$ en $NK_1^\alpha(R)$. □

Nota: Aún no sabemos si el siguiente teorema es cierto para cualquier anillo R con 1. Farrell [10] demostró que el teorema 2.4.5 es cierto para cualquier anillo R con 1 en el caso $\alpha = Id$. Ahora procedemos con la demostración del teorema principal de este capítulo:

Teorema 2.4.5. *Sea $R = \mathbb{Z}G$ donde G es grupo finito. Sea $\alpha : G \longrightarrow G$ automorfismo de grupos.*
Si $NK_1^{\alpha}(R) \neq 0$ entonces $NK_1^{\alpha}(R)$ no es finitamente generado.

Demostración: Suponga que $NK_1^{\alpha}(R) \neq 0$ y que $NK_1^{\alpha}(R)$ es finitamente generado. Por la proposición 2.4.1 existe un entero n_0 tal que $\iota_n^* \equiv 0$ en $NK_1^{\alpha}(R)$ $\forall n \geq n_0$.
Dado que $R = \mathbb{Z}G$ con G finito $\Rightarrow Aut(G)$ es finito y como $\alpha \in Aut(G)$ $\Rightarrow \exists\, m_0 \neq 0$ tal que $\alpha^{m_0} = id \Rightarrow \alpha^{km_0} = id\ \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Entonces tenemos un isomorfismo de anillos

$$R_\alpha[t] = R_{\alpha^{km_0+1}}[t] \xrightarrow{\cong} R_\alpha[t^{km_0+1}]\ \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Ahora usamos el siguiente teorema debido a Dirichlet ([26], teorema 4.5):

Teorema: *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a, b) = 1$. Entonces $\{a+kb\}_{k=1}^{\infty}$ contiene una $infinidad$ de primos.* □

Por tanto $\{km_0 + 1\}_{k=1}^{\infty}$ contiene una infinidad de primos.

Como estamos suponiendo que $NK_1^{\alpha}(R) \neq 0$ y es finitamente generado como grupo abeliano, dado cualquier primo p que no aparezca en la descomposición de $NK_1^{\alpha}(R)$ dada por el **Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados** ([13], teorema 9.3, pág. 92.) tiene la propiedad de que la multiplicación por p es inyectiva en $NK_1^{\alpha}(R)$. (Salvo un número finito de primos, todos tienen la propiedad anterior).

Entonces existe un primo p con las siguientes propiedades:

- La multiplicación por p, $p(\ ) : NK_1^{\alpha}(R) \to NK_1^{\alpha}(R)$ es inyectiva.
- $p = km_0 + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$.
- $p > n_0$

Sea $[I + Nt] \neq 0$ en $K_1(R_\alpha[t])$. Dado que por el lema 2.4.4 α_* es invariante en $NK_1^{\alpha}(R)$ y $p(\ ) : NK_1^{\alpha}(R) \to NK_1^{\alpha}(R)$ es inyectiva, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\neq p(\ [I + Nt]\ ) \\ &= [\ (I + Nt) \oplus \alpha^{-1}(I + Nt) \oplus \cdots \oplus \alpha^{-(p-1)}(I + Nt)\ ] \\ &= [\ (I + Nt) \oplus I + \alpha^{-1}(N)t \oplus \cdots \oplus I + \alpha^{-(p-1)}(N)t\ ] \end{aligned}$$

$$= \left[I + \begin{pmatrix} N & & & 0 \\ & \alpha^{-1}(N) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha^{-(p-1)}(N) \end{pmatrix} t \right] \in NK_1^\alpha(R) \leq K_1(R_\alpha[t])$$

$$\cong \left[I + \begin{pmatrix} N & & & 0 \\ & \alpha^{-1}(N) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha^{-(p-1)}(N) \end{pmatrix} t^p \right] \in K_1(R_\alpha[t^p])$$

$$= \left[\begin{pmatrix} I + Nt^p & & & 0 \\ & \alpha^{-1}(I + Nt^p) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha^{-(p-1)}(I + Nt^p) \end{pmatrix} \right]$$

$= [\ (I + Nt^p) \oplus \alpha^{-1}(I + Nt^p) \oplus \cdots \oplus \alpha^{-(p-1)}(I + Nt^p)\ ]$
$= \iota_p^* \circ (\iota_p)_*(\ [I + Nt^p]\ )$ por el lema 2.3.1.
Por tanto $\iota_p^* \circ (\iota_p)_*(\ [I + Nt^p]\ ) \neq 0$ con $p > n_0$, por otra parte

$$(\iota_p)_*(\ [I + Nt^p]\ ) = [I + Nt^p] \in NK_1^\alpha(R)$$

(pues si $\epsilon_* : K_1(R_\alpha[t]) \longrightarrow K_1(R)$ es el homomorfismo inducido por la aumentación $\epsilon(t) = 0$ entonces $\epsilon_*([I + Nt^p]) = [I]$ para $[I + Nt^p] \in K_1(R_\alpha[t])$). Y por la proposición 2.4.1 esto es una contradicción. ☐

Nota: Vale la pena mencionar que con los argumentos de la prueba del teorema 2.4.5 podemos fácilmente obtener un resultado más general que es el siguiente:

Teorema 2.4.6. *Sea R cualquier anillo con 1 y sea $\alpha : R \longrightarrow R$ cualquier automorfismo de anillos de orden finito. Si $NK_1^\alpha(R) \neq 0$ entonces $NK_1^\alpha(R)$ no es finitamente generado como grupo abeliano.* ☐

CAPÍTULO 3

$NK_i^\alpha(\ \mathbb{Z}(C_p \rtimes_\beta C_q)\ )$ es trivial, $i \leq 1$.

El objetivo principal de este capítulo es probar el teorema 3.6.1 que afirma que **si el orden de un grupo G es un primo o el producto de dos primos distintos entonces $NK_i^\alpha(\mathbb{Z}G) = 0$ para cualquier automorfismo $\alpha : G \longrightarrow G$ y para todo $i \leq 1$.**

3.1 Notación.

En esta sección damos algunas definiciones y observaciones que necesitaremos a lo largo de este capítulo.

Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros.

Sean C_p, C_q los grupos cíclicos de orden p y q respectivamente con p y q primos distintos. C_p es generado por σ, C_q es generado por τ.

Observación 3.1.1. *Note que* $\mathbb{Z}C_p = \mathbb{Z}[x]/(x^p - 1)$. $\square$

Sea ζ_p raíz primitiva $p-$ésima de la unidad.

Sea $\mathbb{Z}\zeta_p$ el anillo de enteros en $\mathbb{Q}[\zeta_p]$. (Entonces $\mathbb{Z}\zeta_p$ está definido por el cociente $\mathbb{Z}[x]/(1 + x + \cdots + x^{p-1})$).

Sea $G \rtimes_\beta C_q$ el producto semidirecto de los grupos G y C_q respecto a un automorfismo de grupos $\beta : G \longrightarrow G$, a veces también denotaremos al producto semidirecto por $G \rtimes_\varphi C_q$, donde φ es el homomorfismo de grupos

$$\varphi : C_q \longrightarrow Aut(G)$$
$$\tau \longmapsto \beta : G \xrightarrow{\cong} G$$

Definición 3.1.2. *Sea $\beta : G \longrightarrow G$ un automorfismo de grupos. Definimos el anillo torcido de grupo del anillo $\mathbb{Z}G$ en el grupo cíclico C_q, $(\mathbb{Z}G)_\beta[C_q]$, de la siguiente manera: aditivamente, $(\mathbb{Z}G)_\beta[C_q] = (\mathbb{Z}G)[C_q]$ y la multiplicación en $(\mathbb{Z}G)_\beta[C_q]$ está definida por la condición*

$$(g_i\tau^r)(g_j\tau^s) = g_i\beta^{-r}(g_j)\tau^{r+s} \quad g_i,\ g_j \in G;\ \tau^r,\ \tau^s \in C_q.$$

Observación 3.1.3. *Note que tenemos un isomorfismo de anillos*

$$\mathbb{Z}(G \rtimes_\beta C_q) \cong (\mathbb{Z}G)_\beta[C_q]$$
$$(g, \tau^i) \longmapsto g\tau^i$$

$\square$

3.2 Cuadrado de Rim.

El siguiente resultado es clásico, al cuadrado cartesiano del enunciado del lema 3.2.1 se le conoce como cuadrado de Rim ([20], pág. 29). Las técnicas utilizadas para probar el lema 3.2.1 serán generalizadas para obtener nuevos cuadrados cartesianos en las secciones 3.3 y 3.5. Estos cuadrados cartesianos tienen una sucesión de Mayer-Vietoris asociada a ellos, lo cual será el punto clave para demostrar el teorema principal de este capítulo.

Lema 3.2.1. *El siguiente es un cuadrado cartesiano*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}C_p \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \mathbb{Z}\zeta_p \arrow[d, "\varphi_4"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi_3"] & \mathbb{F}_p \end{tikzcd} \quad \text{donde} \quad \begin{tikzcd} \sigma \arrow[r, mapsto, "\varphi_1"] \arrow[d, mapsto, "\varphi_2"'] & \zeta_p \arrow[d, mapsto, "\varphi_4"] \\ 1 \arrow[r, mapsto, "\varphi_3"] & \overline{1} \end{tikzcd} \quad \text{es decir,} \quad \begin{tikzcd} f(\sigma) \arrow[r, mapsto, "\varphi_1"] \arrow[d, mapsto, "\varphi_2"'] & f(\zeta_p) \arrow[d, mapsto, "\varphi_4"] \\ f(1) \arrow[r, mapsto, "\varphi_3"] & \overline{f(1)} \end{tikzcd}$$

donde estamos suponiendo que $f(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + \cdots + a_{p-1}\sigma^{p-1}$, es decir, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{p-1}x^{p-1}$, es decir, $f(x)$ es tal que $0 \leq deg f(x) < p$. (note que tenemos el homomorfismo $\Phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}C_p$).
$$f(x) \mapsto f(\sigma)$$

Demostración:

• $\varphi_1 : \mathbb{Z}C_p \longrightarrow \mathbb{Z}\zeta_p$ es homomorfismo de anillos.

Sean $f(\sigma) = a_0 + a_1\sigma + \cdots + a_{p-1}\sigma^{p-1}$, $g(\sigma) = b_0 + b_1\sigma + \cdots + b_{p-1}\sigma^{p-1}$

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(f(\sigma) + g(\sigma)) \\
&= \varphi_1(\ (a_0 + a_1\sigma + \cdots + a_{p-1}\sigma^{p-1}) + (b_0 + b_1\sigma + \cdots + b_{p-1}\sigma^{p-1})\ ) \\
&= \varphi_1(\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\sigma + \cdots + (a_{p-1} + b_{p-1})\sigma^{p-1}\ ) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\zeta_p + \cdots + (a_{p-1} + b_{p-1}){\zeta_p}^{p-1}
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(f(\sigma)) + \varphi_1(g(\sigma)) \\
&= (a_0 + a_1\zeta_p + \cdots + a_{p-1}{\zeta_p}^{p-1}) + (b_0 + b_1\zeta_p + \cdots + b_{p-1}{\zeta_p}^{p-1}) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\zeta_p + \cdots + (a_{p-1} + b_{p-1}){\zeta_p}^{p-1}
\end{aligned}$$

Por tanto φ_1 es aditiva.

Ahora,

$\varphi_1(\ (a_i\sigma^i)(b_j\sigma^j)\ ) = \varphi_1(a_ib_j\sigma^{i+j})$. Sea $k = i + j \Rightarrow k = pm + r$ con $0 \leq r \leq p - 1$ entonces $\sigma^{i+j} = \sigma^r$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_1(a_ib_j\sigma^r) \\
&= a_ib_j{\zeta_p}^r
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$\varphi_1(a_i\sigma^i)\varphi_1(b_j\sigma^j) = a_i{\zeta_p}^i\ b_j{\zeta_p}^j = a_ib_j{\zeta_p}^{i+j} = a_ib_j{\zeta_p}^r$ pues recuerde que tenemos un isomorfismo de grupos $< \zeta_p > \xrightarrow{\cong} C_p$

$$\zeta_p \mapsto \sigma$$

Por tanto φ_1 es homomorfismo de anillos.

• $\varphi_2 : \mathbb{Z}C_p \longrightarrow \mathbb{Z}$ es homomorfismo de anillos.

$$\begin{aligned}
&\varphi_2(\ f(\sigma) + g(\sigma)\ ) \\
&= \varphi_2(\ (a_0 + a_1\sigma + \cdots + a_{p-1}\sigma^{p-1}) + (b_0 + b_1\sigma + \cdots + b_{p-1}\sigma^{p-1})\ ) \\
&= \varphi_2(\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\sigma + \cdots + (a_{p-1} + b_{p-1})\sigma^{p-1}\ ) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \cdots + (a_{p-1} + b_{p-1})
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$\varphi_2(\ f(\sigma)\ ) + \varphi_2(\ g(\sigma)\ ) = (a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1}) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1})$

Por tanto φ_2 es aditiva.

Ahora,

$\varphi_2(\ (a_i\sigma^i)(b_j\sigma^j)\ ) = \varphi_2(a_ib_j\sigma^{i+j}) = \varphi_2(a_ib_j\sigma^r) = a_ib_j$

Por otra parte

$\varphi_2(a_i\sigma^i)\varphi(b_j\sigma^j) = a_ib_j$

Por tanto φ_2 es homomorfismo de anillos.

- $\varphi_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ es homomorfismo de anillos:
  $\varphi_3(z_1 + z_2) = \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \varphi_3(z_1) + \varphi_3(z_2)$
  $\varphi_3(z_1 z_2) = \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 = \varphi_3(z_1)\varphi_3(z_2)$
  Por tanto φ_3 es homomorfismo de anillos.

- $\varphi_4 : \mathbb{Z}\zeta_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ es homomorfismo de anillos:
  Primero veamos que φ_4 está bien definida como función:
  Supongamos que $f(\zeta_p) = g(\zeta_p)$ donde
  $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-1}x^{p-1}$, $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{p-1}x^{p-1}$
  $\Rightarrow f(\zeta_p) - g(\zeta_p) = 0 \Rightarrow p(x) = f(x) - g(x)$ tiene a ζ_p como raíz y
  $grado(p(x)) \leq p-1 \Rightarrow (1+x+\cdots+x^{p-1})|p(x) \Rightarrow p(x) = c(1+x+\cdots+x^{p-1})$
  donde c es constante y $p(x) = (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+\cdots+(a_{p-1}-b_{p-1})x^{p-1}$
  $\Rightarrow c = (a_0 - b_0) = (a_1 - b_1) = \cdots (a_{p-1} - b_{p-1})$
  $\Rightarrow a_0 = b_0 + c,\ a_1 = b_1 + c, \ldots\ a_{p-1} = b_{p-1} + c.$
  $\Rightarrow \varphi_4(\ f(\zeta_p)\ ) = \overline{a_0 + a_1 + \cdots a_{p-1}} = \overline{(b_0 + c) + (b_1 + c) + \cdots + (b_{p-1} + c)}$
  $= \overline{b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1} + pc} = \overline{b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1}} = \varphi_4(\ g(\zeta_p)\ )$
  Por tanto φ_4 está bien definida como función.

  Veamos que $\varphi_4 : \mathbb{Z}\zeta_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ es homomorfismo de anillos:
  $\varphi_4(\ f(\zeta_p) + g(\zeta_p)\ )$
  $= \varphi_4(\ (a_0 + a_1\zeta_p + \cdots + a_{p-1}{\zeta_p}^{p-1}) + (b_0 + b_1\zeta_p + \cdots + b_{p-1}{\zeta_p}^{p-1})\ )$
  $= \varphi_4(\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\zeta_p + \cdots + (a_{p-1} + b_{p-1}){\zeta_p}^{p-1})$
  $= \overline{(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \cdots + (a_{p-1} + b_{p-1})}$
  Por otra parte,
  $\varphi_4(\ f(\zeta_p)\ ) + \varphi_4(\ g(\zeta_p)\ ) = \overline{(a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1})} + \overline{(b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1})}$
  por tanto φ_4 es aditiva.
  Ahora,
  $\varphi_4(\ a_i{\zeta_p}^i\ b_j{\zeta_p}^j\ ) = \varphi_4(a_i b_j {\zeta_p}^{i+j}) = \varphi_4(a_i b_j {\zeta_p}^r) = \overline{a_i b_j}$
  $\varphi_4(a_i{\zeta_p}^i)\varphi_4(b_j{\zeta_p}^j) = \bar{a}_i\bar{b}_j = \overline{a_i b_j}$
  Por tanto φ_4 es homomorfismo de anillos.

  Claramente el cuadrado conmuta.
  El producto fibrado de anillos del diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{Z}\zeta_p \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_4} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_3} & \mathbb{F}_p \end{array}$$

  está definido por

$$
\begin{aligned}
P &= \{ \ (z, f(\zeta_p)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\zeta_p \mid \bar{z} = \overline{f(1)} \ en \ \mathbb{F}_p \ \} \\
&= \{ \ (z, f(\zeta_p)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\zeta_p \mid z = f(1) + kp \ para \ alg\acute{u}n \ k \in \mathbb{Z} \ \} \\
&= \{ \ (f(1){+}kp, f(\zeta_p)) \in \mathbb{Z}{\times}\mathbb{Z}\zeta_p \mid k \in \mathbb{Z}, f(x) \in \mathbb{Z}[x], \ grado \ f(x) \leq p{-}1 \ \}
\end{aligned}
$$

Entonces existe un único homomorfismo de anillos $\psi : \mathbb{Z}C_p \longrightarrow P$ que hace conmutar el diagrama siguiente

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}C_p \arrow[dr, dotted, "\psi"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & \mathbb{Z}\zeta_p \arrow[d, "\varphi_4"] \\
& \mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi_3"] & \mathbb{F}_p
\end{tikzcd}
$$

Es decir $\psi : \mathbb{Z}C_p \longrightarrow P$ está dada por

$$f(\sigma) \longmapsto (\ \varphi_2(f(\sigma)), \ \varphi_1(f(\sigma)) \ ) = (\ f(1), \ f(\zeta_p) \ )$$

- $\psi : \mathbb{Z}C_p \longrightarrow P$ es isomorfismo de anillos:

  - $\psi : \mathbb{Z}C_p \longrightarrow P$ es inyectiva:

  Suponga que $\psi(f(\sigma)) = 0$ donde $f(x) = a_0 + a_1 + \cdots a_{p-1}x^{p-1}$
  $\Rightarrow 0 = \psi(f(\sigma)) = (\ \varphi_2(f(\sigma)), \ \varphi_1(f(\sigma)) \ ) = (\ f(1), \ f(\zeta_p) \ )$
  $\Rightarrow 0 = f(1) = f(\zeta_p) \Rightarrow \zeta_p$ es raíz de $f(x)$ con grado $f(x) \leq p-1$
  $\Rightarrow (1 + x + \cdots + x^{p-1}) | f(x) \Rightarrow f(x) = c(1 + x + \cdots + x^{p-1})$ donde c es constante. $\Rightarrow f(1) = cp \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(\sigma) = 0$
  Por tanto ψ es inyectiva.

  - $\psi : \mathbb{Z}C_p \longrightarrow P$ es sobre:

  Sea $(\ f(1){+}kp, f(\zeta_p) \ ) \in P$. Definimos $F(x) = f(x){+}k(1{+}x{+}\cdots{+}x^{p-1})$
  $\Rightarrow F(\sigma) = f(\sigma) + k(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})$ aplicando el homomorfismo Φ.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \psi(\ F(\sigma) \ ) = (\ \varphi_2(F(\sigma)), \ \varphi_1(F(\sigma)) \ ) \\
&= (\ \varphi_2(f(\sigma) + k(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})), \ \varphi_1(f(\sigma) + k(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})) \ ) \\
&= (\ \varphi_2(f(\sigma)) + \varphi_2(k)\varphi_2(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})), \\
&\quad \ \varphi_1(f(\sigma)) + \varphi_1(k)\varphi_1(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})) \ ) \\
&= (\ f(1) + kp, \ f(\zeta_p) + k(1 + \zeta_p + \cdots + {\zeta_p}^{p-1} \ ) \\
&= (\ f(1) + kp, \ f(\zeta_p) \ )
\end{aligned}
$$

  Por tanto ψ es sobre.

Entonces ψ es isomorfismo de anillos y concluímos que el cuadrado es cartesiano. $\square$

3.3 Primera generalización del cuadrado de Rim.

En esta sección generalizaremos el cuadrado de Rim del lema 3.2.1 de la sección anterior.

Sea $C_p \xrightarrow{\alpha} C_p$ un automorfismo de grupos.
$\sigma \longmapsto \sigma^\alpha$

Entonces α^{-1} está dado por $C_p \xrightarrow{\alpha^{-1}} C_p$ donde γ es tal que $(\sigma^\gamma)^\alpha = \sigma$
$\sigma \longmapsto \sigma^\gamma$

α induce un automorfismo de grupos $<\zeta_p> \xrightarrow{\alpha} <\zeta_p>$
$\zeta_p \longmapsto {\zeta_p}^\alpha$

Entonces α^{-1} está dado por $<\zeta_p> \xrightarrow{\alpha^{-1}} <\zeta_p>$
$\zeta_p \longmapsto {\zeta_p}^\gamma$

donde $1 \leq \alpha,\ \gamma \leq p-1$.

Lema 3.3.1. *Con la notación anterior α induce un automorfismo de anillos:*

$$\mathbb{Z}\zeta_p \xrightarrow{\qquad \alpha \qquad} \mathbb{Z}\zeta_p$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} z_i {\zeta_p}^i \longmapsto \sum_{i=0}^{p-1} z_i {\zeta_p}^{\alpha i}$$

Demostración:

• *α está bien definido:*

Suponga que $\sum_{i=0}^{p-1} z_i {\zeta_p}^i = \sum_{i=0}^{p-1} {z_i}' {\zeta_p}^i$ demostraremos que
$\alpha(\sum_{i=0}^{p-1} z_i {\zeta_p}^i) = \alpha(\sum_{i=0}^{p-1} {z_i}' {\zeta_p}^i)$.
$\sum_{i=0}^{p-1} z_i {\zeta_p}^i = \sum_{i=0}^{p-1} {z_i}' {\zeta_p}^i \Rightarrow \sum_{i=0}^{p-1} (z_i - {z_i}'){\zeta_p}^i = 0$. Sea $a_i = z_i - {z_i}'$
$\Rightarrow \sum_{i=0}^{p-1} a_i {\zeta_p}^i = 0 \Rightarrow$ el polinomio $\sum_{i=0}^{p-1} a_i x^i$ tiene a ζ_p como raíz.
$\Rightarrow (1 + x + \cdots + x^{p-1}) \mid \sum_{i=0}^{p-1} a_i x^i$
$\Rightarrow a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-1} x^{p-1} = c(1 + x + \cdots + x^{p-1})$ donde c es constante.
$\Rightarrow c = a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$
$\Rightarrow \sum_{i=0}^{p-1} a_i {\zeta_p}^{\alpha i} = c \sum_{i=0}^{p-1} {\zeta_p}^{\alpha i}$
$= c \sum_{i=0}^{p-1} {\zeta_p}^i$ pues $<\zeta_p> \xrightarrow{\alpha} <\zeta_p>$ es isomorfismo.

$= c0 = 0$
Por tanto
$0 = \sum_{i=0}^{p-1} a_i {\zeta_p}^{\alpha i} = \sum_{i=0}^{p-1} (z_i - {z_i}') {\zeta_p}^{\alpha i} = \sum_{i=0}^{p-1} z_i {\zeta_p}^{i} - \sum_{i=0}^{p-1} {z_i}' {\zeta_p}^{i}$
$= \alpha(\sum_{i=0}^{p-1} z_i {\zeta_p}^{i}) - \alpha(\sum_{i=0}^{p-1} {z_i}' {\zeta_p}^{i}).$
Por tanto α está bien definida como función.

- α *es homomorfismo de anillos*:
$\alpha(\ f(\zeta_p) + g(\zeta_p)\ )$
$= \alpha(\ (a_0 + a_1\zeta_p + \cdots + a_{p-1}{\zeta_p}^{p-1}) + (b_0 + b_1\zeta_p + \cdots + b_{p-1}{\zeta_p}^{p-1})\ )$
$= \alpha(\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\zeta_p + \cdots + (a_{p-1} + b_{p-1}){\zeta_p}^{p-1}\ )$
$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1){\zeta_p}^{\alpha} + \cdots + (a_{p-1} + b_{p-1}){\zeta_p}^{(p-1)\alpha}$
Por otra parte,
$\alpha(\ f(\zeta_p)\ ) + \alpha(\ g(\zeta_p)\ )$
$= (a_0 + a_1{\zeta_p}^{\alpha} + \cdots + a_{p-1}{\zeta_p}^{(p-1)\alpha}) + (b_0 + b_1{\zeta_p}^{\alpha} + \cdots + b_{p-1}{\zeta_p}^{(p-1)\alpha})$
$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1){\zeta_p}^{\alpha} + \cdots + (a_{p-1} + b_{p-1}){\zeta_p}^{(p-1)\alpha}$
Por tanto α es aditiva.
Ahora,
$\alpha(\ (a_i{\zeta_p}^{i})(b_j{\zeta_p}^{j})\ )$
$= \alpha(\ a_ib_j{\zeta_p}^{i+j}\ )$. sea $k = i + j \Rightarrow k = pm + r$ con $0 \leq r \leq p-1$
$\Rightarrow {\zeta_p}^{i+j} = {\zeta_p}^{pm+r} = {\zeta_p}^{pm}{\zeta_p}^{r} = {\zeta_p}^{r}.$
$= \alpha(\ a_ib_j{\zeta_p}^{r}\ ) = a_ib_j{\zeta_p}^{r\alpha}$
Por otra parte,
$\alpha(\ a_i{\zeta_p}^{i}\ )\alpha(\ b_j{\zeta_p}^{j}\ ) = (\ a_i{\zeta_p}^{i\alpha}\ )(\ b_j{\zeta_p}^{j\alpha}\ ) = a_ib_j{\zeta_p}^{(i+j)\alpha} = a_ib_j{\zeta_p}^{(pm+r)\alpha}$
$= a_ib_j{\zeta_p}^{pm\alpha}{\zeta_p}^{r\alpha} = a_ib_j{\zeta_p}^{r\alpha}$
Por tanto α es homomorfismo de anillos.

- α *es sobre:*
Sea $\sum_{i=0}^{p-1} z_i{\zeta_p}^{i} \in \mathbb{Z}\zeta_p$ entonces $\alpha(\ \sum_{i=0}^{p-1} z_i{\zeta_p}^{i\gamma}\ ) = \sum_{i=0}^{p-1} z_i{\zeta_p}^{i}$
Por tanto α es sobre.

- α *es inyectiva*:
supongamos que $\alpha(\ a_0{\zeta_p}^{0} + \cdots + a_{p-1}{\zeta_p}^{p-1}\ ) = 0$, reordenando índices tenemos que $0 = \sum_{i=0}^{p-1} a_i{\zeta_p}^{i\alpha} = \sum_{j=0}^{p-1} b_j{\zeta_p}^{j}$
$\Rightarrow b_0 + b_1x + \cdots + b_{p-1}x^{p-1}$ tiene a ζ_p como raíz
$\Rightarrow (1 + x + \cdots + x^{p-1})c = b_0 + b_1x + \cdots + b_{p-1}x^{p-1}$ donde c es constante.
$\Rightarrow c = b_0 = b_1 = \cdots = b_{p-1} \Rightarrow c = a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$
$\Rightarrow a_0{\zeta_p}^{0} + a_1{\zeta_p}^{1} + \cdots + a_{p-1}{\zeta_p}^{p-1} = c(1 + {\zeta_p}^{1} + \cdots + {\zeta_p}^{p-1}) = c0 = 0$
Por tanto α es inyectiva.

Concluímos que α es isomorfismo de anillos. $\square$

Ahora procedemos con la generalización del cuadrado de Rim:

Lema 3.3.2. *El siguiente cuadrado es cartesiano*

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathbb{Z}C_p)_\alpha[t] & \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} & (\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t] & \quad & \sum_i f_i(\sigma)t^i & \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} & \sum_i f_i(\zeta_p)t^i \\
{\scriptstyle \bar{\varphi}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\varphi}_4} & & {\scriptstyle \bar{\varphi}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\varphi}_4} \\
\mathbb{Z}[t] & \xrightarrow{\bar{\varphi}_3} & \mathbb{F}_p[t] & & \sum_i f_i(1)t^i & \xrightarrow{\bar{\varphi}_3} & \sum_i \overline{f_i(1)}t^i
\end{array}$$

Es decir, tenemos

$(\mathbb{Z}C_p)_\alpha[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} (\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t]$
$\sum_i f_i(\sigma)t^i \longmapsto \sum_i \varphi_1(f_i(\sigma))t^i$

$(\mathbb{Z}C_p)_\alpha[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_2} \mathbb{Z}[t]$
$\sum_i f_i(\sigma)t^i \longmapsto \sum_i \varphi_2(f_i(\sigma))t^i$

$\mathbb{Z}[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_3} \mathbb{F}_p[t]$
$\sum_i z_i t^i \longmapsto \sum_i \varphi_3(z_i)t^i$

$(\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_4} \mathbb{F}_p[t]$
$\sum_i f_i(\zeta_p)t^i \longmapsto \sum_i \varphi_4(f_i(\zeta_p))t^i$

Demostración:

- $(\mathbb{Z}C_p)_\alpha[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} (\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t]$ *es homomorfismo de anillos.*

  $\bar{\varphi}_1(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i + \sum_i g_i(\sigma)t^i\ ) = \bar{\varphi}_1(\ \sum_i(\ f_i(\sigma) + g_i(\sigma)\ )t^i\ )$
  $= \sum_i \varphi_1(\ f_i(\sigma) + g_i(\sigma)\ )t^i = \sum_i(\ \varphi_1(f_i(\sigma)) + \varphi_1(g_i(\sigma))\ )t^i$
  $= \sum_i(\ f_i(\zeta_p) + g_i(\zeta_p)\ )t^i = \sum_i f_i(\zeta_p)t^i + \sum_i g_i(\zeta_p)t^i$

  Por otra parte,

  $\bar{\varphi}_1(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i\ ) + \bar{\varphi}_1(\ \sum_i g_i(\sigma)t^i\ ) = \sum_i \varphi_1(f_i(\sigma))t^i + \sum_i \varphi_1(g_i(\sigma))t^i$
  $= \sum_i f_i(\zeta_p)t^i + \sum_i g_i(\zeta_p)t^i$

  Por tanto φ_1 es aditiva.

  Ahora,
  $\bar{\varphi}_1(\ f_i(\sigma)t^i\ g_j(\sigma)t^j\ ) = \bar{\varphi}_1(\ f_i(\sigma)\ \alpha^{-i}(g_j(\sigma))t^{i+j}\ )$

$= \varphi_1(\ f_i(\sigma)\ \alpha^{-i}(g_j(\sigma))\ )t^{i+j} = \varphi_1(\ f_i(\sigma)\ )\ \varphi_1(\ \alpha^{-i}(g_j(\sigma))\ )t^{i+j}$

Si $g_j(\sigma) = b_0\sigma^0 + b_1\sigma^1 + \cdots + b_{p-1}\sigma^{p-1}$ entonces
$\varphi_1(\ \alpha^{-i}(g_j(\sigma))\ ) = \varphi_1(\ b_0\sigma^{0\gamma^i} + b_1\sigma^{1\gamma^i} + \cdots + b_{p-1}\sigma^{(p-1)\gamma^i}\ )$
$= b_0{\zeta_p}^{0\gamma^i} + b_1{\zeta_p}^{1\gamma^i} + \cdots + b_{p-1}{\zeta_p}^{(p-1)\gamma^i}$

donde la última igualdad tiene sentido pues si tenemos que $\sigma^{s\gamma^i}$ con $0 \leq s \leq p-1$, sea $k = s\gamma^i \Rightarrow k = pm + r_s$ con $0 \leq r_s \leq p-1$
$\Rightarrow \sigma^{s\gamma^i} = \sigma^{r_s} \Rightarrow \varphi_1(\ \sigma^{s\gamma^i}\ ) = \varphi_1(\ \sigma^{r_s}\ ) = {\zeta_p}^{r_s} = {\zeta_p}^{pm+r_s} = {\zeta_p}^{s\gamma^i}$

Por otra parte
$\alpha^{-i}(\ \varphi_1(g_j(\sigma))\ ) = \alpha^{-i}(\ g_j(\zeta_p)\ ) = g_j(\zeta_p^{\gamma^i})$
$= b_0{\zeta_p}^{0\gamma^i} + b_1{\zeta_p}^{1\gamma^i} + \cdots + b_{p-1}{\zeta_p}^{(p-1)\gamma^i}$

Por tanto, $\varphi_1(\ \alpha^{-i}(g_j(\sigma))\ ) = \alpha^{-i}(\ \varphi_1(\ g_j(\sigma)\ )\ )$

Por otra parte,
$\bar{\varphi}_1(\ f_i(\sigma)t^i\ )\ \bar{\varphi}_1(\ g_j(\sigma)t^j\ ) = \varphi_1(\ f_i(\sigma)\ )t^i\ \varphi_1(\ g_j(\sigma)\ )t^j$
$= \varphi_1(\ f_i(\sigma)\ )\ \alpha^{-i}(\ \varphi_1(\ g_j(\sigma)\ )\ )t^{i+j}$
Por tanto $\bar{\varphi}_1$ es homomorfismo de anillos.

- $(\mathbb{Z}C_p)_\alpha[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_2} \mathbb{Z}[t]$ *es homomorfismo de anillos*:

$\bar{\varphi}_2(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i + \sum_i g_i(\sigma)t^i\ ) = \bar{\varphi}_2(\ \sum_i(\ f_i(\sigma) + g_i(\sigma)\ )t^i\ )$

$= \sum_i \varphi_2(\ f_i(\sigma) + g_i(\sigma)\ )t^i = \sum_i(\ \varphi_2(f_i(\sigma)) + \varphi_2(g_i(\sigma))\ )t^i$

$= \sum_i \varphi_2(f_i(\sigma))t^i + \sum_i \varphi_2(g_i(\sigma))t^i$

$\bar{\varphi}_2(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i\ ) + \bar{\varphi}_2(\ \sum_i g_i(\sigma)t^i\ )$

Por tanto $\bar{\varphi}_2$ es aditiva.
Ahora,
$\bar{\varphi}_2(\ f_i(\sigma)t^i\ g_j(\sigma)t^j\ ) = \bar{\varphi}_2(\ f_i(\sigma)\ \alpha^{-i}(g_j(\sigma))t^{i+j}\ )$
$= \varphi_2(\ f_i(\sigma)\ \alpha^{-i}(g_j(\sigma))\ )t^{i+j} = \varphi_2(\ f_i(\sigma)\ )\ \varphi_2(\ \alpha^{-i}(g_j(\sigma))\ )t^{i+j}$

Note que $\varphi_2(\ \alpha^{-i}(g_j(\sigma))\ ) = \varphi_2(\ \alpha^{-i}(b_0 + b_1\sigma + \cdots + b_{p-1}\sigma^{p-1})\ )$
$= \varphi_2(\ b_0 + b_1\sigma^{\gamma^i} + \cdots + b_{p-1}\sigma^{(p-1)\gamma^i}\ ) = b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1}$
$= g_j(1) = \varphi_2(\ g_j(\sigma)\ )$

Por otra parte,
$\bar{\varphi}_2(\ f_i(\sigma)t^i\ )\ \bar{\varphi}_2(\ g_j(\sigma)t^j\ ) = \varphi_2(\ f_i(\sigma)\ )t^i\ \varphi_2(\ g_j(\sigma)\ )t^j$
$= \varphi_2(\ f_i(\sigma)\ )\ \varphi_2(\ g_j(\sigma)\ )t^{i+j}$
Por tanto, $\bar{\varphi}_2$ es homomorfismo de anillos.

- $\mathbb{Z}[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_3} \mathbb{F}_p[t]$ *es homomorfismo de anillos*:

  $\bar{\varphi}_3(\ \sum_i z_i t^i + \sum_i z_i^{'} t^i\ ) = \bar{\varphi}_3(\ \sum_i (z_i + z_i^{'}) t^i\ ) = \sum_i \varphi_3(z_i + z_i^{'}) t^i$

  $= \sum_i (\ \varphi_3(z_i) + \varphi_3(z_i^{'})\ ) t^i = \sum_i \varphi_3(z_i) t^i + \sum_i \varphi_3(z_i^{'}) t^i$

  $= \bar{\varphi}_3(\ \sum_i z_i t^i\ ) + \bar{\varphi}_3(\ \sum_i z_i^{'} t^i\ )$

  Por tanto $\bar{\varphi}_3$ es aditiva.

  Ahora,
  $\bar{\varphi}_3(\ (z_i t^i)(z_j t^j)\ ) = \bar{\varphi}_3(\ z_i z_j t^{i+j}\ ) = \varphi_3(z_i z_j) t^{i+j} = \varphi_3(z_i)\ \varphi_3(z_j) t^{i+j}$
  $= \varphi_3(z_i) t^i\ \varphi_3(z_j) t^j = \bar{\varphi}_3(z_i t^i) \bar{\varphi}_3(z_j t^j)$
  Por tanto φ_3 es homomorfismo de anillos.

- $(\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_4} \mathbb{F}_p[t]$ *es homomorfismo de anillos*:

  $\bar{\varphi}_4(\ \sum_i f_i(\zeta_p) t^i + \sum_i g_i(\zeta_p) t^i\ ) = \bar{\varphi}_4(\ \sum_i (\ f_i(\zeta_p) + g_i(\zeta_p)\ ) t^i\ )$

  $= \sum_i \varphi_4(\ f_i(\zeta_p) + g_i(\zeta_p)\ ) t^i = \sum_i (\ \varphi_4(f_i(\zeta_p)) + \varphi_4(g_i(\zeta_p))\ ) t^i$

  $= \sum_i \varphi_4(f_i(\zeta_p)) t^i + \sum_i \varphi_4(g_i(\zeta_p)) t^i$

  $= \bar{\varphi}_4(\ \sum_i f_i(\zeta_p) t^i\ ) + \bar{\varphi}_4(\ \sum_i g_i(\zeta_p) t^i\ )$

  Por tanto $\bar{\varphi}_4$ es aditiva.

  Ahora,
  $\bar{\varphi}_4(\ f_i(\zeta_p) t^i\ g_j(\zeta_p) t^j\ ) = \bar{\varphi}_4(\ f_i(\zeta_p)\ \alpha^{-i}(g_j(\zeta_p)) t^{i+j}\ )$
  $= \varphi_4(\ f_i(\zeta_p)\ )\ \varphi_4(\alpha^{-i}(g_j(\zeta_p))\ ) t^{i+j}$

  Note que
  $\varphi_4(\alpha^{-i}(g_j(\zeta_p))\ ) = \varphi_4(\ \alpha^{-i}(b_0 + b_1\zeta_p + \cdots + b_{p-1}{\zeta_p}^{p-1})\ )$
  $= \varphi_4(\ b_0 + b_1 {\zeta_p}^{\gamma^i} + \cdots + b_{p-1} {\zeta_p}^{(p-1)\gamma^i}\ ) = \overline{b_0 + b_1 + \cdots + b_{p-1}}$
  $= \varphi_4(\ b_0 + b_1\zeta_p + \cdots + b_{p-1}{\zeta_p}^{p-1}\ ) = \varphi_4(\ g(\zeta_p)\ )$

  Por otra parte,
  $\bar{\varphi}_4(\ f_i(\zeta_p) t^i\ )\ \bar{\varphi}_4(\ g_j(\zeta_p) t^j\ ) = \varphi_4(\ f_i(\zeta_p)\ ) t^i\ \varphi_4(\ g_j(\zeta_p)\ ) t^j$
  $= \varphi_4(\ f_i(\zeta_p)\ )\ \varphi_4(\ g_j(\zeta_p)\ ) t^{i+j}$
  Por tanto $\bar{\varphi}_4$ es homomorfismo de anillos.

- *El cuadrado es cartesiano*:

  Por la propiedad universal del producto fibrado tenemos que existe un único homomorfismo de anillos

  $$\bar{\psi} : (\mathbb{Z}C_p)_\alpha[t] \longrightarrow P^{'}$$

que hace conmutar el siguiente diagrama donde $P^{'}$ es el producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}C_p)_\alpha[t] \arrow[dr, dotted, "\bar{\psi}"] \arrow[drr, bend left, "\bar{\varphi}_1"] \arrow[ddr, bend right, "\bar{\varphi}_2"'] & & \\
& P^{'} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & (\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t] \arrow[d, "\bar{\varphi}_4"] \\
& \mathbb{Z}[t] \arrow[r, "\bar{\varphi}_3"] & \mathbb{F}_p[t]
\end{tikzcd}$$

y donde $\bar{\psi} : (\mathbb{Z}C_p)_\alpha[t] \longrightarrow P^{'}$ está definida por

$$\textstyle\sum_i f_i(\sigma)t^i \longmapsto (\ \bar{\varphi}_2(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i\ ),\ \bar{\varphi}_1(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i\ )\ )$$

Note que

$P^{'} = \{\ (\ \sum_i z_i t^i,\ \sum_i f_i(\zeta_p)t^i\ ) \in \mathbb{Z}[t] \times (\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t]$
$\quad \mid \bar{\varphi}_3(\ \sum_i z_i t^i\ ) = \bar{\varphi}_4(\ \sum_i f_i(\zeta_p)t^i\ )\ \}$

$= \{\ (\ \sum_i z_i t^i,\ \sum_i f_i(\zeta_p)t^i\ ) \in \mathbb{Z}[t] \times (\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t]$
$\quad \mid \sum_i \varphi_3(\ z_i\ )t^i = \sum_i \varphi_4(\ f_i(\zeta_p)\ )t^i\ \}$

$= \{(\ \sum_i z_i t^i,\ \sum_i f_i(\zeta_p)t^i\ ) \in \mathbb{Z}[t] \times (\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t]$
$\quad \mid \bar{z}_i \equiv \varphi_3(z_i) = \varphi_4(f_i(\zeta_p)) \equiv \overline{f_i(1)}\ \forall\ i\ \}$

- $\bar{\psi}$ *es inyectiva*:

  $0 \equiv \bar{\psi}(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i\ ) = (\ \bar{\varphi}_2(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i\ ),\ \bar{\varphi}_1(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i\ )\ )$
  $\Rightarrow 0 = \bar{\varphi}_2(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i\ ) = \sum_i \varphi_2(f_i(\sigma))t^i$
  y $0 = \bar{\varphi}_1(\ \sum_i f_i(\sigma)t^i\ ) = \sum_i \varphi_1(f_i(\sigma))t^i$
  $\Rightarrow \varphi_2(f_i(\sigma)) = 0$ y $\varphi_1(f_i(\sigma)) = 0\ \forall\ i$
  $\Rightarrow 0 = (\ \varphi_2(f_i(\sigma)),\ \varphi_1(f_i(\sigma))\ ) = \psi(f_i(\sigma))\ \forall\ i$ donde $\psi : \mathbb{Z}C_p \longrightarrow P$ es el isomorfismo de la prueba del lema 3.2.1.
  $\Rightarrow f_i(\sigma) = 0\ \forall\ i$ pues ψ es isomorfismo.
  $\Rightarrow \sum_i f_i(\sigma)t^i = 0$.
  Por tanto $\bar{\psi}$ es inyectiva.

- $\bar{\psi}$ es sobre.

  Sea $(\ \sum_i z_i t^i,\ \sum_i f_i(\zeta_p)t^i\ ) \in P^{'} \Rightarrow \varphi_3(z_i) = \varphi_4(\ f_i(\zeta_p)\ )\ \forall\ i$
  $\Rightarrow \bar{z}_i = \overline{f_i(1)}$ en $\mathbb{F}_p\ \forall\ i \Rightarrow \exists\ k_i \in \mathbb{Z}$ tal que $z_i = f_i(1) + k_i p\ \forall\ i$
  $\Rightarrow (\ \sum_i z_i t^i,\ \sum_i f_i(\zeta_p)t^i\ ) = (\ \sum_i(\ f_i(1) + k_i p\ )t^i,\ \sum_i f_i(\zeta_p)t^i\ )$

Definimos $F_i(x) = f_i(x) + k_i(1 + x + \cdots + x^{p-1}) \in \mathbb{Z}[x]$
$\Rightarrow F_i(\sigma) = f_i(\sigma) + k_i(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1}) \in \mathbb{Z}C_p$
$\Rightarrow \bar{\psi}(\ \sum_i F_i(\sigma)t^i\ )$
$= (\ \bar{\varphi}_2(\ \sum_i F_i(\sigma)t^i\ ),\ \bar{\varphi}_1(\ \sum_i F_i(\sigma)t^i\ )\ )$
$= (\ \sum_i \varphi_2(\ F_i(\sigma)\ )t^i,\ \sum_i \varphi_1(\ F_i(\sigma)\ )t^i\ )$
$= (\ \sum_i \varphi_2(\ f_i(\sigma) + k_i(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})\ )t^i,$
$\quad \sum_i \varphi_1(\ f_i(\sigma) + k_i(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})\ )t^i\ )$
$= (\ \sum_i(\ \varphi_2(\ f_i(\sigma)\ ) + \varphi_2(k_i)\ \varphi_2(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})\ )t^i,$
$\quad \sum_i(\ \varphi_1(\ f_i(\sigma)\ ) + \varphi_1(k_i)\ \varphi_1(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{p-1})\ )t^i\ )$
$= (\ \sum_i(\ f_i(1) + k_i p\ )t^i,\ \sum_i(\ f_i(\zeta_p) + k_i(1 + \zeta_p + \cdots + {\zeta_p}^{p-1})\ )t^i\ )$
$= (\ \sum_i(\ f_i(1) + k_i p\ )t^i,\ \sum_i f_i(\zeta_p)t^i\ )$
Por tanto $\bar{\psi}$ es sobre.
Entonces $\bar{\psi}$ es isomorfismo y concluímos que el cuadrado es cartesiano.
□

3.4 $NK_i^{\alpha}(\ \mathbb{Z}C_p\ )$ es trivial, $\forall\ i \leq 1$.

Aplicando los lemas 3.3.1 y 3.3.2 de la sección 3.3 obtenemos el siguiente:

Teorema 3.4.1. *Sea C_p un grupo cíclico de orden p con p primo. Entonces $NK_i^{\alpha}(\ \mathbb{Z}C_p\ ) = 0\ \forall$ automorfismo de grupos $\alpha : C_p \longrightarrow C_p$ y $\forall\ i \leq 1$.*

Demostración:

Note que en el lema 3.3.2 $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\bar{\varphi}_3$, $\bar{\varphi}_4$ son epimorfismos.

Entonces por el lema 3.3.2 y [20], teorema 6.4, pág. 55, tenemos una sucesión exacta

$$K_2(\ \mathbb{F}_p[t]\ ) \to K_1(\ (\mathbb{Z}C_p)_\alpha[t]\ ) \to K_1(\ \mathbb{Z}[t]\ ) \oplus K_1(\ (\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t]\ ) \to K_1(\ \mathbb{F}_p[t]\ ) \to$$

que induce una sucesión exacta en los núcleos de las aumentaciones:

$$NK_2(\ \mathbb{F}_p\ ) \to NK_1^{\alpha}(\ \mathbb{Z}C_p\ ) \to NK_1(\ \mathbb{Z}\ ) \oplus NK_1^{\alpha}(\ \mathbb{Z}\zeta_p\ ) \to NK_1(\ \mathbb{F}_p\ ) \to \cdots$$

Dado que $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\zeta_p$ son anillos regulares entonces

$0 = NK_{i+1}(\ \mathbb{F}_p\ ) = NK_i(\ \mathbb{Z}\ ) \oplus NK_i^{\alpha}(\ \mathbb{Z}\zeta_p\ ) = NK_i(\ \mathbb{F}_p\ )\ \forall\ i \leq 1$ ([23], pág.114). Por tanto $NK_i^{\alpha}(\ \mathbb{Z}C_p\ ) = 0\ \forall\ i \leq 1$. □

3.5 Segunda generalización del cuadrado de Rim.

Para proceder a generalizar el lema 3.3.2 y de ahí generalizar el teorema 3.4.1 necesitamos el lema 3.5.1 y la observación 3.5.2 siguientes:

Lema 3.5.1. *Sea* $\alpha : C_p \rtimes_\varphi C_q \xrightarrow{\cong} C_p \rtimes_\varphi C_q$ *un automorfismo. Entonces* $\alpha(\ C_p \times \{e\}\ ) = C_p \times \{e\}$.

Demostración:

Caso $q > p$. En este caso siempre tenemos un producto directo:
$\varphi : C_q \longrightarrow Aut(C_p) \Rightarrow Núcleo(\varphi) = 0$ o $Núcleo(\varphi) = C_q$
Si $Núcleo(\varphi) = C_q$ entonces el producto semidirecto es el producto directo $C_p \times C_q$ y entonces $\alpha(\ C_p \times \{e\}\ ) = C_p \times \{e\}$.
Si $Núcleo(\varphi) = C_q$ entonces C_q es un subgrupo de $Aut(C_p) \Rightarrow q \mid (p-1)$ lo cual no es posible pues $q > p-1$.

Caso $p > q$.
Usaremos el

Tercer teorema de Sylow

Sea G *grupo finito y* $p \mid |G|$ *entonces el número de* $p-$ *subgrupos de Sylow* η_p *es tal que* $\eta_p \equiv 1(modp)$ *y* $\eta_p \mid |G|$. ☐

Note que si $|G| = pq$ entonces los $p-$subgrupos de Sylow son precisamente los subgrupos de orden p.
Entonces $\eta_p \equiv 1(modp) \Rightarrow p \mid (\eta_p - 1) \Rightarrow \eta_p = pk+1$ con $k \geq 0$ y $\eta_p \mid pq$.
Suponga que $k > 0$ entonces $\eta_p = (pk+1) \nmid p$ y $(pk+1) \nmid q$ (pues $p > q \Rightarrow pk+1 > q$). Por tanto $k = 0 \Rightarrow \eta_p = 1$. Por tanto hay solo un único $p-$subgrupo de Sylow $\Rightarrow$ solo hay un único subgrupo de orden p y debe ser $C_p \times \{e\}$. ☐

Observación 3.5.2. *Sea* $\alpha : C_p \rtimes_\beta C_q \xrightarrow{\cong} C_p \rtimes_\beta C_q$ *un automorfismo de grupos, donde*

$$\psi : C_q \longrightarrow Aut(C_p)$$
$$\tau \longmapsto \beta : C_p \xrightarrow{\cong} C_p$$
$$\sigma \longmapsto \sigma^\beta$$

Si $\alpha^{-1}(e,\tau) = (\sigma^k, \tau^l)$ *para algún* $k,\ l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *definimos*

$$\begin{aligned}(\bar{\alpha})^{-1} : C_q &\longrightarrow C_q\\ \tau &\longmapsto \tau^l\end{aligned}$$

Note que siempre tenemos que $\tau^l \neq e$, *así* $<\tau^l>= C_q$. *Por tanto* $(\bar{\alpha})^{-1}$ *es automorfismo de grupos.* □

Aplicando el lema 3.5.1 y la observación 3.5.2 obtenemos la siguiente:

Proposición 3.5.3. *las funciones que definimos a continuación son epimorfismos de anillos bien definidos y hacen conmutar al siguiente cuadrado:*

$$\begin{array}{ccc} ((\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] & \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} & ((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \\ {\scriptstyle \bar{\varphi}_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \bar{\varphi}_4} \\ (\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t] & \xrightarrow{\bar{\varphi}_3} & (\mathbb{F}_p[C_q])_{\bar{\alpha}}[t] \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_1 : ((\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \longrightarrow ((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t]\\
&\qquad \textstyle\sum_i (f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i\\
&\longmapsto \textstyle\sum_i(\ \varphi_1(f_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_1(f_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}\ )t^i\\
&\quad = \textstyle\sum_i (f_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_2 : ((\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \longrightarrow (\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t]\\
&\qquad \textstyle\sum_i (f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i\\
&\longmapsto \textstyle\sum_i(\ \varphi_2(f_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_2(f_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}\ )t^i\\
&\quad = \textstyle\sum_i (f_{0,\,i}(1)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(1)\tau^{q-1})t^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_3 : (\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t] \longrightarrow (\mathbb{F}_p[C_q])_{\bar{\alpha}}[t]\\
&\qquad \textstyle\sum_i (z_{0,\,i}\tau^0 + \cdots + z_{q-1,\,i}\tau^{q-1})t^i\\
&\longmapsto \textstyle\sum_i(\ \varphi_3(z_{0,\,i})\tau^0 + \cdots + \varphi_3(z_{q-1,\,i})\tau^{q-1}\ )t^i\\
&\quad = \textstyle\sum_i(\ \overline{z_{0,\,i}}\ \tau^0 + \cdots + \overline{z_{q-1,\,i}}\ \tau^{q-1}\ )t^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_4 : ((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \longrightarrow (\mathbb{F}_p[C_q])_{\bar{\alpha}}[t]\\
&\qquad \textstyle\sum_i (f_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i\\
&\longmapsto \textstyle\sum_i(\ \varphi_4(f_{0,\,i}(\zeta_p))\tau^0 + \cdots + \varphi_4(f_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1}\ )t^i\\
&\quad = \textstyle\sum_i(\ \overline{f_{0,\,i}(1)}\ \tau^0 + \cdots + \overline{f_{q-1,\,i}(1)}\ \tau^{q-1}\ )t^i
\end{aligned}$$

Demostración:

Sean $\alpha(\sigma,\tau^0)=(\sigma^\alpha,\tau^0)$

$\alpha^{-1}(\sigma,\tau^0)=(\sigma^\gamma,\tau^0)$ donde $(\sigma^\gamma)^\alpha=\sigma$

$\beta(\sigma)=\sigma^\beta$

$\beta^{-1}(\sigma)=\sigma^\delta$ donde $(\sigma^\delta)^\beta=\sigma$

Sea $\alpha^{-1}(\sigma^0,\tau)=(\sigma^k,\tau^l)$ para algún par k, l

$$\begin{aligned}\Rightarrow \alpha^{-1}(\sigma^0,\tau^2) &= (\alpha^{-1}(\sigma^0,\tau))^2=(\sigma^k,\tau^l)(\sigma^k,\tau^l)=(\sigma^k\beta^{-l}(\sigma^k),\tau^{2l})\\ &= (\sigma^k\sigma^{k\delta^l},\tau^{2l})=(\sigma^{k(1+\delta^l)},\tau^{2l})\\ &\vdots\\ \alpha^{-1}(\sigma^0,\tau^i) &= (\alpha^{-1}(\sigma^0,\tau))^i=(\sigma^{k(\delta^{0l}+\delta^{1l}+\cdots+\delta^{(i-1)l})},\tau^{il})\\ &\vdots\\ \alpha^{-1}(\sigma^0,\tau^{q-1}) &= (\alpha^{-1}(\sigma^0,\tau))^{q-1}=(\sigma^{k(\delta^{0l}+\delta^{1l}+\cdots+\delta^{(q-2)l})},\tau^{(q-1)l})\end{aligned}$$

Sea $\delta_i=\delta^{0l}+\delta^{1l}+\cdots+\delta^{(i-1)l}$. Así $\alpha^{-1}(\sigma^0,\tau^i)=(\sigma^{k\delta_i},\tau^{il})$.

Antes de continuar con la prueba de la Proposición 3.5.3 necesitamos los dos lemas técnicos siguientes:

Lema 3.5.4. *la composición $\phi\,\alpha^{-1}\phi^{-1}$*

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}(C_p\rtimes_\beta C_q) & \xrightarrow[\cong]{\alpha^{-1}} & \mathbb{Z}(C_p\rtimes_\beta C_q)\\ \cong\big\downarrow\phi & & \cong\big\downarrow\phi\\ (\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q] & \xrightarrow{\phi\,\alpha^{-1}\phi^{-1}} & (\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q]\end{array}$$

está dada por

$$(\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q]\xrightarrow{\cong}(\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q]$$

$$\begin{aligned}&f_0(\sigma)\tau^0+\cdots+f_i(\sigma)\tau^i+\cdots+f_{q-1}(\sigma)\tau^{q-1}\\ \longmapsto\ &f_0(\sigma^\gamma)\tau^0+\cdots+f_i(\sigma^\gamma)(\sigma^{k\delta_i})\tau^{il}+\cdots+f_{q-1}(\sigma^\gamma)(\sigma^{k\delta_{q-1}})\tau^{(q-1)l}\end{aligned}$$

Demostración del lema 3.5.4:

Sean $f_0(\sigma)=\sum_{i=0}^{p-1}a_{i,0}\sigma^i,\ldots,\ f_{q-1}(\sigma)=\sum_{i=0}^{p-1}a_{i,q-1}\sigma^i$ entonces

$$\begin{aligned}&\phi\,\alpha^{-1}\phi^{-1}(\ (\textstyle\sum_{i=0}^{p-1}a_{i,0}\sigma^i)\tau^0+\cdots+(\sum_{i=0}^{p-1}a_{i,q-1}\sigma^i)\tau^{q-1}\ )\\ &=\phi\,\alpha^{-1}(\ \textstyle\sum_{i=0}^{p-1}a_{i,0}(\sigma^i,\tau^0)+\cdots+\sum_{i=0}^{p-1}a_{i,q-1}(\sigma^i,\tau^{q-1})\ )\\ &=\phi\,(\ \textstyle\sum_{i=0}^{p-1}a_{i,0}\alpha^{-1}(\sigma^i,\tau^0)+\cdots+\sum_{i=0}^{p-1}a_{i,q-1}\alpha^{-1}(\sigma^i,\tau^{q-1})\ )\\ &=\phi\,(\ \textstyle\sum_{i=0}^{p-1}a_{i,0}(\sigma^{i\gamma},\tau^0)+\cdots+\sum_{i=0}^{p-1}a_{i,q-1}\alpha^{-1}(\sigma^i,\tau^0)\alpha^{-1}(\sigma^0,\tau^{q-1})\ )\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi\ (\ \textstyle\sum_{i=0}^{p-1} a_{i,0}(\sigma^{i\gamma}, \tau^0) + \cdots + \sum_{i=0}^{p-1} a_{i,q-1}(\sigma^{i\gamma}, \tau^0)(\sigma^{k\delta_{q-1}}, \tau^{(q-1)l})\ )\\
&= \phi\ (\ \textstyle\sum_{i=0}^{p-1} a_{i,0}(\sigma^{i\gamma}, \tau^0) + \cdots + \sum_{i=0}^{p-1} a_{i,q-1}(\sigma^{i\gamma}\sigma^{k\delta_{q-1}}, \tau^{(q-1)l})\ )\\
&= \phi\ (\ \textstyle\sum_{i=0}^{p-1} a_{i,0}(\sigma^{i\gamma}, \tau^0) + \cdots + \sum_{i=0}^{p-1} a_{i,q-1}(\sigma^{i\gamma+k\delta_{q-1}}, \tau^{(q-1)l})\ )\\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{p-1} a_{i,0}\ \sigma^{i\gamma}\ \tau^0 + \cdots + \sum_{i=0}^{p-1} a_{i,q-1}\ \sigma^{i\gamma+k\delta_{q-1}}\ \tau^{(q-1)l}\\
&= (\textstyle\sum_{i=0}^{p-1} a_{i,0}\ \sigma^{i\gamma})\tau^0 + \cdots + (\sum_{i=0}^{p-1} a_{i,q-1}\ \sigma^{i\gamma+k\delta_{q-1}})\tau^{(q-1)l}\\
&= (\textstyle\sum_{i=0}^{p-1} a_{i,0}\ \sigma^{i\gamma})\tau^0 + \cdots + (\sum_{i=0}^{p-1} a_{i,q-1}\ \sigma^{i\gamma})(\sigma^{k\delta_{q-1}})\tau^{(q-1)l}\\
&= f_0(\sigma^\gamma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1}(\sigma^\gamma)(\sigma^{k\delta_{q-1}})\tau^{(q-1)l}
\end{aligned}$$

□

Denotaremos de nuevo por α^{-1} al isomorfismo

$$(\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q] \xrightarrow{\phi\ \alpha^{-1}\ \phi^{-1}} (\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q]$$

del lema 3.5.4.

Lema 3.5.5. *Sea* $g_j(\sigma)\tau^j \in (\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q]$. *Entonces*

$$\alpha^{-r}(\ g_j(\sigma)\tau^j\ ) = g_j(\sigma^{\gamma^r})(\sigma^{kz(r)})\tau^{jl^r}$$

donde $z(r)$ *es un entero que depende de* r.

Demostración del lema 3.5.5: Aplicaremos repetidamente el lema 3.5.4.

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}(\ g_j(\sigma)\tau^j\ ) &= g_j(\sigma^\gamma)(\sigma^{k\delta_j})\tau^{jl}\\
\alpha^{-2}(\ g_j(\sigma)\tau^j\ ) &= \alpha^{-1}(\ g_j(\sigma^\gamma)(\sigma^{k\delta_j})\tau^{jl}\ )\\
&= g_j(\sigma^{\gamma^2})(\sigma^{k\delta_j\gamma})(\sigma^{k\delta_{jl}})\tau^{jl^2}\\
&= g_j(\sigma^{\gamma^2})(\sigma^{k(\delta_j\gamma+\delta_{jl})})\tau^{jl^2}\\
\alpha^{-3}(\ g_j(\sigma)\tau^j\ ) &= \alpha^{-1}(\ g_j(\sigma^{\gamma^2})(\sigma^{k(\delta_j\gamma+\delta_{jl})})\tau^{jl^2}\ )\\
&= g_j(\sigma^{\gamma^3})(\sigma^{k(\delta_j\gamma+\delta_{jl})\gamma})(\sigma^{k\delta_{jl^2}})\tau^{jl^3}\\
&= g_j(\sigma^{\gamma^3})(\sigma^{k(\delta_j\gamma^2+\delta_{jl}\gamma+)\gamma+\delta_{jl^2})})\tau^{jl^3}\\
\alpha^{-4}(\ g_j(\sigma)\tau^j\ ) &= \alpha^{-1}(\ g_j(\sigma^{\gamma^3})(\sigma^{k(\delta_j\gamma^2+\delta_{jl}\gamma+\delta_{jl^2})})\tau^{jl^3}\ )\\
&= g_j(\sigma^{\gamma^4})(\sigma^{k(\delta_j\gamma^2+\delta_{jl}\gamma+\delta_{jl^2})\gamma})(\sigma^{k\delta_{jl^3}})\tau^{jl^4}\\
&= g_j(\sigma^{\gamma^4})(\sigma^{k(\delta_j\gamma^3+\delta_{jl}\gamma^2+\delta_{jl^2}\gamma+\delta_{jl^3})})\tau^{jl^4}
\end{aligned}$$

$\vdots$

$$\alpha^{-r}(\ g_j(\sigma)\tau^j\ )$$
$$= g_j(\sigma^{\gamma^r})(\sigma^{k(\delta_{jl^{(1-1)}}\gamma^{r-1}+\delta_{jl^{(2-1)}}\gamma^{r-2}+\cdots+\delta_{jl^{(r-1)-1}}\gamma^{r-(r-1)}+\delta_{jl^{(r-1)}}\gamma^{r-r})})\tau^{jl^r}$$

Sea $z(r) = \delta_{jl^{(1-1)}}\gamma^{r-1} + \delta_{jl^{(2-1)}}\gamma^{r-2} + \cdots + \delta_{jl^{(r-1)-1}}\gamma^{r-(r-1)} + \delta_{jl^{(r-1)}}\gamma^{r-r}$
Entonces $\alpha^{-r}(\ g_j(\sigma)\tau^j\ ) = g_j(\sigma^{\gamma^r})(\sigma^{kz(r)})\tau^{jl^r}$ □

Ahora continuamos con la prueba de la Proposición 3.5.3:

- $((\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_2} (\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t]$ *es homomorfismo de anillos*:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_2(\ \textstyle\sum_i(f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i \\
&\quad + \textstyle\sum_i(g_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + g_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i\ ) \\
&= \bar{\varphi}_2(\ \textstyle\sum_i(\ (f_{0,\,i}(\sigma) + g_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + (f_{q-1,\,i}(\sigma) + g_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1})t^i\ )\ ) \\
&= \textstyle\sum_i(\ \varphi_2(f_{0,\,i}(\sigma) + g_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_2(f_{q-1,\,i}(\sigma) + g_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}\ )t^i \\
&= \textstyle\sum_i(\ (\ \varphi_2(f_{0,\,i}(\sigma)) + \varphi_2(g_{0,\,i}(\sigma))\ )\tau^0 \\
&\qquad + \cdots + (\ \varphi_2(f_{q-1,\,i}(\sigma)) + \varphi_2(g_{q-1,\,i}(\sigma))\ )\tau^{q-1}\ )t^i \\
&= \textstyle\sum_i(\ \varphi_2(f_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_2(f_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}\ )t^i \\
&+ \textstyle\sum_i(\ \varphi_2(g_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_2(g_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}\ )t^i \\
&= \bar{\varphi}_2(\ \textstyle\sum_i(f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i\ ) \\
&+ \bar{\varphi}_2(\ \textstyle\sum_i(g_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + g_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i\ )
\end{aligned}$$

Por tanto $\bar{\varphi}_2$ es aditiva.

Ahora,

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_2(\ (f_i(\sigma)\tau^i)t^r\ (g_j(\sigma)\tau^j)t^s\ ) \\
&= \bar{\varphi}_2(\ f_i(\sigma)\tau^i\ \alpha^{-r}(g_j(\sigma)\tau^j)t^{r+s}\ ) \\
&= \bar{\varphi}_2(\ f_i(\sigma)\tau^i\ g_j(\sigma^{\gamma^r})(\sigma^{kz(r)})\tau^{jl^r}t^{r+s}\ ) \text{ por el lema 3.5.5.} \\
&= \bar{\varphi}_2(\ f_i(\sigma)\ \beta^{-i}(\ g_j(\sigma^{\gamma^r})(\sigma^{kz(r)})\ )\tau^{i+jl^r}t^{r+s}\ ) \\
&= \bar{\varphi}_2(\ f_i(\sigma)\ g_j(\sigma^{\gamma^r\delta^i})(\sigma^{kz(r)\delta^i})\tau^{i+jl^r}t^{r+s}\ ) \text{ pues } \beta^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}C_p & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}C_p \\ f(\sigma) & \longmapsto & f(\sigma^\delta) \end{array} \text{ es} \\
&\quad \text{homomorfismo de anillos.} \\
&= \varphi_2(f_i(\sigma))\ \varphi_2(g_j(\sigma^{\gamma^r\delta^i}))\ \varphi_2(\sigma^{kz(r)\delta^i})\tau^{i+jl^r}t^{r+s} \\
&= f_i(1)\ g_j(1)\ 1\ \tau^{i+jl^r}t^{r+s} \\
&= f_i(1)\ g_j(1)\ \tau^{i+jl^r}t^{r+s}
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_2(\ f_i(\sigma)\tau^i t^r\ )\ \bar{\varphi}_2(\ g_j(\sigma)\tau^j t^s\ ) \\
&= (\ \varphi_2(f_i(\sigma))\tau^i t^r\ )\ (\ \varphi_2(g_j(\sigma))\tau^j t^s\ ) \\
&= (\ f_i(1)\tau^i t^r\ )\ (\ g_j(1)\tau^j t^s\ ) \\
&= f_i(1)\tau^i\ \bar{\alpha}^{-r}(\ g_j(1)\tau^j\ )t^{r+s} \\
&= f_i(1)\tau^i\ g_j(1)\ \bar{\alpha}^{-r}(\tau^j)t^{r+s} \\
&= f_i(1)\tau^i\ g_j(1)\ \tau^{jl^r}t^{r+s} \\
&= f_i(1)\ g_j(1)\ \tau^{i+jl^r}t^{r+s}
\end{aligned}$$

Por tanto $\bar{\varphi}_2$ es homomorfismo de anillos.

• *Tenemos un isomorfismo de anillos*

$$(\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q] \xrightarrow{\alpha^{-1}} (\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q]$$

$$f_0(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_i(\zeta_p)\tau^i + \cdots + f_{q-1}(\zeta_p)\tau^{q-1}$$
$$\longmapsto f_0({\zeta_p}^{\gamma})\tau^0 + \cdots + f_i({\zeta_p}^{\gamma})({\zeta_p}^{k\delta_i})\tau^{il} + \cdots + f_{q-1}({\zeta_p}^{\gamma})({\zeta_p}^{k\delta_{q-1}})\tau^{(q-1)l}$$

Note que está bien definido pues $\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}\zeta_p & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & \mathbb{Z}\zeta_p \\ f(\zeta_p) & \longmapsto & f({\zeta_p}^{\gamma})\end{array}$ es homomorfismo de anillos.

Veamos que $(\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q] \xrightarrow{\alpha^{-1}} (\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q]$ es homomorfismo de anillos:

$\alpha^{-1}(\ (f_i(\zeta_p)\tau^i)\ (g_j(\zeta_p)\tau^j)\ )$
$= \alpha^{-1}(\ f_i(\zeta_p)\ \beta^{-i}(g_j(\zeta_p))\tau^{i+j}\ )$
$= \alpha^{-1}(\ f_i(\zeta_p)\ g_j({\zeta_p}^{\delta^i})\tau^{i+j}\ )$
$= f_i({\zeta_p}^{\gamma})\ g_j({\zeta_p}^{\delta^i\gamma})\ ({\zeta_p}^{k\delta_{i+j}})\tau^{(i+j)l}$ pues $\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}\zeta_p & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & \mathbb{Z}\zeta_p \\ f(\zeta_p) & \longmapsto & f({\zeta_p}^{\gamma})\end{array}$ es homomorfismo de anillos.

Por otra parte,

$\alpha^{-1}(\ f_i(\zeta_p)\tau^i\ )\ \alpha^{-1}(\ g_j(\zeta_p)\tau^j\ ) = (\ f_i({\zeta_p}^{\gamma})({\zeta_p}^{k\delta_i})\tau^{il}\ )(\ g_j({\zeta_p}^{\gamma})({\zeta_p}^{k\delta_j})\tau^{jl}\ )$
$= f_i({\zeta_p}^{\gamma})({\zeta_p}^{k\delta_i})\ \beta^{-il}(\ g_j({\zeta_p}^{\gamma})({\zeta_p}^{k\delta_j})\ )\tau^{i+jl}$
$= f_i({\zeta_p}^{\gamma})({\zeta_p}^{k\delta_i})\ g_j({\zeta_p}^{\gamma\delta^{il}})({\zeta_p}^{k\delta_j\delta^{il}})\tau^{(i+j)l}$ pues $\begin{array}{ccc}\beta^{-1}: \mathbb{Z}\zeta_p & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}\zeta_p \\ f(\zeta_p) & \longmapsto & f({\zeta_p}^{\delta})\end{array}$ es isomorfismo de anillos
$= f_i({\zeta_p}^{\gamma})g_j({\zeta_p}^{\gamma\delta^{il}})({\zeta_p}^{k\delta_i})({\zeta_p}^{k\delta_j\delta^{il}})\tau^{(i+j)l}$
$= f_i({\zeta_p}^{\gamma})g_j({\zeta_p}^{\gamma\delta^{il}})({\zeta_p}^{k(\delta_i+\delta_j\delta^{il})})\tau^{(i+j)l}$
$= f_i({\zeta_p}^{\gamma})g_j({\zeta_p}^{\gamma\delta^{il}})({\zeta_p}^{k\delta_{i+j}})\tau^{(i+j)l}$ pues

$$\begin{aligned}\delta_i + \delta_j\delta^{il} &= \delta^{0l} + \delta^{1l} + \cdots + \delta^{(i-1)l} + (\delta^{0l} + \delta^{1l} + \cdots + \delta^{(j-1)l})\delta^{il} \\ &= \delta^{0l} + \delta^{1l} + \cdots + \delta^{(i-1)l} + \delta^{il} + \delta^{(i+1)l} + \cdots + \delta^{(i+j-1)l} \\ &= \delta_{i+j}\end{aligned}$$

Afirmamos que ${\zeta_p}^{\delta^{jl}} = {\zeta_p}^{\delta^j}\ \forall\ j = 0, \ldots, q-1$ entonces tendríamos la igualdad. Lo cual se deduce de lo siguiente:

Considere

$\alpha^{-1} : C_p \rtimes_\beta C_q \xrightarrow{\cong} C_p \rtimes_\beta C_q$. Sean (σ^i, τ^j), $(\sigma^m, \tau^n) \in C_p \rtimes_\beta C_q$

$\alpha^{-1}(\ (\sigma^i, \tau^j)(\sigma^m, \tau^n)\ )$
$= \alpha^{-1}(\ \sigma^i\beta^{-j}(\sigma^m), \tau^{j+n}\ )$
$= \alpha^{-1}(\ \sigma^i\sigma^{m\delta^j}, \tau^{j+n}\ )$
$= \alpha^{-1}(\ \sigma^{i+m\delta^j}, \tau^{j+n}\ )$
$= \alpha^{-1}(\ (\ \sigma^{i+m\delta^j}, \tau^0\ )(\ \sigma^0, \tau^{j+n}\ )\ )$
$= \alpha^{-1}(\ \sigma^{i+m\delta^j}, \tau^0\ )\ \alpha^{-1}(\ \sigma^0, \tau^{j+n}\ )$
$= (\ \sigma^{(i+m\delta^j)\gamma}, \tau^0\ )\ (\ \sigma^{k\delta_{j+n}}, \tau^{(j+n)l}\ )$

$= (\ \sigma^{(i+m\delta^j)\gamma+k\delta_{j+n}}, \tau^{(j+n)l}\ )$
$= (\ \sigma^{i\gamma+m\delta^j\gamma+k\delta_{j+n}}, \tau^{(j+n)l}\ )$

Por otra parte,
$\alpha^{-1}(\ \sigma^i, \tau^j\ )\alpha^{-1}(\ \sigma^m, \tau^n\ )$
$= \alpha^{-1}(\ (\ \sigma^i, \tau^0\ )(\ \sigma^0, \tau^j\ )\ )\ \alpha^{-1}(\ (\ \sigma^m, \tau^0\ )(\ \sigma^0, \tau^n\ )\ )$
$= (\ \alpha^{-1}(\ \sigma^i, \tau^0\ )\alpha^{-1}(\ \sigma^0, \tau^j\ )\ )\ (\ \alpha^{-1}(\ \sigma^m, \tau^0\ )\alpha^{-1}(\ \sigma^0, \tau^n\ )\ )$
$= (\ (\ \sigma^{i\gamma}, \tau^0\ )(\ \sigma^{k\delta_j}, \tau^{jl}\ )\ )\ (\ (\ \sigma^{m\gamma}, \tau^0\ )(\ \sigma^{k\delta_n}, \tau^{nl}\ )\ )$
$= (\ \sigma^{i\gamma}\sigma^{k\delta_j}, \tau^{jl}\ )\ (\ \sigma^{m\gamma}\sigma^{k\delta_n}, \tau^{nl}\ )$
$= (\ \sigma^{i\gamma+k\delta_j}, \tau^{jl}\ )\ (\ \sigma^{m\gamma+k\delta_n}, \tau^{nl}\ )$
$= (\ \sigma^{i\gamma+k\delta_j}\ \beta^{-jl}(\ \sigma^{m\gamma+k\delta_n}\ ), \tau^{(j+n)l}\ )$
$= (\ \sigma^{i\gamma+k\delta_j}\ \sigma^{(m\gamma+k\delta_n)\delta^{jl}}, \tau^{(j+n)l}\ )$
$= (\ \sigma^{i\gamma+k\delta_j+(m\gamma+k\delta_n)\delta^{jl}}, \tau^{(j+n)l}\ )$
$= (\ \sigma^{i\gamma+k(\delta_j+\delta_n\delta^{jl})+m\gamma\delta^{jl}}, \tau^{(j+n)l}\ )$
$= (\ \sigma^{i\gamma+k\delta_{j+n}+m\gamma\delta^{jl}}, \tau^{(j+n)l}\ )$ pues probamos antes que $\delta_i + \delta_j\delta^{il} = \delta_{i+j}$
Entonces debemos tener que
$(\ \sigma^{i\gamma+m\delta^j\gamma+k\delta_{j+n}}, \tau^{(j+n)l}\ ) = (\ \sigma^{i\gamma+k\delta_{j+n}+m\gamma\delta^{jl}}, \tau^{(j+n)l}\ )$
$\Rightarrow \sigma^{i\gamma+m\delta^j\gamma+k\delta_{j+n}} = \sigma^{i\gamma+k\delta_{j+n}+m\gamma\delta^{jl}}$
$\Rightarrow \sigma^{m\delta^j\gamma} = \sigma^{m\gamma\delta^{jl}}$
$\Rightarrow (\sigma^{m\gamma})^{\delta^j} = (\sigma^{m\gamma})^{\delta^{jl}}\ \forall\ m = 0, \ldots, p-1,\ \forall j = 0, \ldots, q-1$
$\Rightarrow \sigma^{\delta^j} = \sigma^{\delta^{jl}}\ \forall\ j = 0, \ldots, q-1$
y dado que tenemos un isomorfismo de grupos $\begin{array}{rcl} C_p & \xrightarrow{\cong} & <\zeta_p> \\ \sigma & \longmapsto & \zeta_p \end{array}$
$\Rightarrow {\zeta_p}^{\delta^j} = {\zeta_p}^{\delta^{jl}}\ \forall\ j = 0, \ldots, q-1$
Por tanto $(\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q] \xrightarrow{\alpha^{-1}} (\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q]$ es homomorfismo de anillos.

- α^{-1} *es automorfismo de anillos*:
  α^{-1} es inyectiva:
  Suponga que
  $0 \equiv f_0({\zeta_p}^\gamma)\tau^0 + \cdots + f_i({\zeta_p}^\gamma)({\zeta_p}^{k\delta_i})\tau^{il} + \cdots + f_{q-1}({\zeta_p}^\gamma)({\zeta_p}^{k\delta_{q-1}})\tau^{(q-1)l}$
  $\Rightarrow 0 = f_0({\zeta_p}^\gamma) = \cdots = f_i({\zeta_p}^\gamma)({\zeta_p}^{k\delta_i}) = \cdots = f_{q-1}({\zeta_p}^\gamma)({\zeta_p}^{k\delta_{q-1}})$
  pues $\begin{array}{rcl} \bar{\alpha}^{-1} : C_q & \longrightarrow & C_q \\ \tau & \longmapsto & \tau^l \end{array}$ es un automorfismo
  Dado que ${\zeta_p}^{k\delta_i} \neq 0\ \forall\ i = 0, \ldots, q-1$
  $\Rightarrow 0 = f_0({\zeta_p}^\gamma) = \cdots = f_i({\zeta_p}^\gamma) = \cdots = f_{q-1}({\zeta_p}^\gamma)$
  $\Rightarrow 0 = f_0(\zeta_p) = \cdots = f_i(\zeta_p) = \cdots = f_{q-1}(\zeta_p)$ pues $\begin{array}{rcl} \alpha^{-1} : \mathbb{Z}\zeta_p & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}\zeta_p \\ f(\zeta_p) & \mapsto & f({\zeta_p}^\gamma) \end{array}$ es isomorfismo de anillos.

Por tanto α^{-1} es inyectiva.

α^{-1} es sobre:
Sea $f_0(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_{q-1}(\zeta_p)\tau^{q-1} \in (\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q]$.
Considere el elemento $f_0(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1}(\sigma)\tau^{q-1} \in (\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q]$.
Dado que $\alpha^{-1} : (\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q] \longrightarrow (\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q]$ es sobre
$\Rightarrow \exists\ g_0(\sigma)\tau^0 + \cdots + g_{q-1}(\sigma)\tau^{q-1} \in (\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q]$ tal que
$\alpha^{-1}(\ g_0(\sigma)\tau^0 + \cdots + g_{q-1}(\sigma)\tau^{q-1}\ ) = f_0(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1}(\sigma)\tau^{q-1}$
Entonces
$\alpha^{-1}(\ g_0(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + g_{q-1}(\zeta_p)\tau^{q-1}\ ) = f_0(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_{q-1}(\zeta_p)\tau^{q-1}$
Por tanto α^{-1} es sobre.
Por tanto $(\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q] \xrightarrow{\alpha^{-1}} (\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q]$ es isomorfismo de anillos.

Note también que para $(\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q] \xrightarrow{\alpha^{-1}} (\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q]$
$\alpha^{-r}(\ g_j(\zeta_p)\tau^j\ ) = g_j({\zeta_p}^{\gamma^r})({\zeta_p}^{kz(r)})\tau^{jl^r}$
y note que para $\bar{\alpha}^{-1} : \begin{array}{l} C_q \longrightarrow C_q \\ \tau \longmapsto \tau^l \end{array}$ tenemos automorfismos inducidos
$\bar{\alpha}^{-1} : \mathbb{Z}C_q \longrightarrow \mathbb{Z}C_q$
$z_0\tau^0 + \cdots z_{q-1}\tau^{q-1} \mapsto z_0\tau^{0l} + \cdots z_{q-1}\tau^{(q-1)l}$

$\bar{\alpha}^{-1} : \mathbb{F}_pC_q \longrightarrow \mathbb{F}_pC_q$
$\overline{z_0}\ \tau^0 + \cdots \overline{z_{q-1}}\ \tau^{q-1} \mapsto \overline{z_0}\ \tau^{0l} + \cdots \overline{z_{q-1}}\ \tau^{(q-1)l}$

- $((\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} ((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t]$ *es homomorfismo de anillos*:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_1(\ \textstyle\sum_i(f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i \\
&\quad + \textstyle\sum_i(g_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + g_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i\ ) \\
&= \bar{\varphi}_1(\ \textstyle\sum_i(\ (f_{0,\,i}(\sigma) + g_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + (f_{q-1,\,i}(\sigma) + g_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1})t^i\ )\ ) \\
&= \textstyle\sum_i(\ \varphi_1(f_{0,\,i}(\sigma) + g_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_1(f_{q-1,\,i}(\sigma) + g_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}\ )t^i \\
&= \textstyle\sum_i(\ (\ \varphi_1(f_{0,\,i}(\sigma)) + \varphi_1(g_{0,\,i}(\sigma))\ )\tau^0 \\
&\qquad + \cdots + (\ \varphi_1(f_{q-1,\,i}(\sigma)) + \varphi_1(g_{q-1,\,i}(\sigma))\ )\tau^{q-1}\ )t^i \\
&= \textstyle\sum_i(\ \varphi_1(f_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_1(f_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}\ )t^i \\
&+ \textstyle\sum_i(\ \varphi_1(g_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_1(g_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}\ )t^i \\
&= \bar{\varphi}_1(\ \textstyle\sum_i(f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i\ ) \\
&+ \bar{\varphi}_1(\ \textstyle\sum_i(g_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + g_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i\ )
\end{aligned}$$

Por tanto $\bar{\varphi}_1$ es aditiva.

Ahora,
$\bar{\varphi}_1(\ (f_i(\sigma)\tau^i)t^r\ (g_j(\sigma)\tau^j)t^s\ )$

$= \bar{\varphi}_1(\ f_i(\sigma)\ g_j(\sigma^{\gamma^r\delta^i})(\sigma^{kz(r)\delta^i})\tau^{i+jl^r}t^{r+s}\ )$ pues lo vimos en la prueba de que $\bar{\varphi}_2$ es homomorfismo de anillos.
$= \varphi_1(\ f_i(\sigma)\ )\varphi_1(\ g_j(\sigma^{\gamma^r\delta^i})\ )\varphi_1(\sigma^{kz(r)\delta^i})\tau^{i+jl^r}t^{r+s}$
$= f_i(\zeta_p)\ g_j(\zeta_p{}^{\gamma^r\delta^i})(\zeta_p{}^{kz(r)\delta^i})\tau^{i+jl^r}t^{r+s}$
$= (f_i(\zeta_p)\tau^i t^r)\ (g_j(\zeta_p)\tau^j t^s)$
$= \bar{\varphi}_1(\ (f_i(\sigma)\tau^i)t^r\ )\bar{\varphi}_1(\ g_j(\sigma)\tau^j)t^s\ )$
Por tanto $\bar{\varphi}_1$ es homomorfismo de anillos.

- $(\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_3} (\mathbb{F}_p[C_q])_{\bar{\alpha}}[t]$ *es homomorfismo de anillos*:

$\bar{\varphi}_3(\ \sum_i(z_{0,\,i}\tau^0 + \cdots + z_{q-1,\,i}\tau^{q-1})t^i + \sum_i(w_{0,\,i}\tau^0 + \cdots + w_{q-1,\,i}\tau^{q-1})t^i\ )$
$= \bar{\varphi}_3(\ \ \sum_i(\ (z_{0,\,i} + w_{0,\,i})\tau^0 + \cdots + (z_{q-1,\,i} + w_{q-1,\,i})\tau^{q-1})t^i\ )\ \ )$
$= \sum_i(\ \varphi_3(z_{0,\,i} + w_{0,\,i})\tau^0 + \cdots + \varphi_3(z_{q-1,\,i} + w_{q-1,\,i})\tau^{q-1}\ )t^i$
$= \sum_i(\ (\ \varphi_3(z_{0,\,i}) + \varphi_3(w_{0,\,i})\ )\tau^0 + \cdots + (\ \varphi_3(z_{q-1,\,i}) + \varphi_3(w_{q-1,\,i})\ )\tau^{q-1}\ )t^i$
$= \sum_i(\ \varphi_3(z_{0,\,i})\tau^0 + \cdots + \varphi_3(z_{q-1,\,i})\tau^{q-1}\ )t^i$
$+ \sum_i(\ \varphi_3(w_{0,\,i})\tau^0 + \cdots + \varphi_3(w_{q-1,\,i})\tau^{q-1}\ )t^i$
$= \bar{\varphi}_3(\ \sum_i(z_{0,\,i}\tau^0 + \cdots + z_{q-1,\,i}\tau^{q-1})t^i\ )$
$+ \bar{\varphi}_3(\ \sum_i(w_{0,\,i}\tau^0 + \cdots + w_{q-1,\,i}\tau^{q-1})t^i\ )$
Por tanto $\bar{\varphi}_3$ es aditiva.

Ahora,
$\bar{\varphi}_3(\ (z_i\tau^i t^r)(z_j\tau^j t^s)\ )$
$= \bar{\varphi}_3(\ (z_i\tau^i\ \bar{\alpha}^{-r}(z_j\tau^j)t^{r+s}\ )$
$= \bar{\varphi}_3(\ z_i\tau^i\ z_j\tau^{jl^r}t^{r+s}\ )$
$= \bar{\varphi}_3(\ z_i z_j\tau^{i+jl^r}t^{r+s}\ )$
$= \varphi_3(\ z_i z_j\ )\tau^{i+jl^r}t^{r+s}$
$= \varphi_3(z_i)\varphi_3(z_j)\tau^{i+jl^r}t^{r+s}$
Por otra parte,
$\bar{\varphi}_3(\ z_i\tau^i t^r\ )\bar{\varphi}_3(\ z_j\tau^j t^s\ )$
$= \varphi_3(z_i)\tau^i t^r\ \varphi_3(z_j)\tau^j t^s$
$= \varphi_3(z_i)\tau^i\ \bar{\alpha}^{-r}(\ \varphi_3(z_j)\tau^j\ )t^{r+s}$
$= \varphi_3(z_i)\tau^i\ \varphi_3(z_j)\tau^{jl^r}t^{r+s}$
$= \varphi_3(z_i)\ \varphi_3(z_j)\tau^{i+jl^r}t^{r+s}$
Por tanto $\bar{\varphi}_3$ es homomorfismo de anillos.

- $((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \xrightarrow{\bar{\varphi}_4} (\mathbb{F}_p[C_q])_{\bar{\alpha}}[t]$ *es homomorfismo de anillos*:

$\bar{\varphi}_4(\ \sum_i(f_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \textstyle\sum_i (g_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + g_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i\ ) \\
&= \bar{\varphi}_4(\ \textstyle\sum_i(\ (f_{0,\,i}(\zeta_p)+g_{0,\,i}(\zeta_p))\tau^0+\cdots+(f_{q-1,\,i}(\zeta_p)+g_{q-1,\,i}(\zeta_p))\tau^{q-1})t^i\ )\ ) \\
&= \textstyle\sum_i(\ \varphi_4(f_{0,\,i}(\zeta_p) + g_{0,\,i}(\zeta_p))\tau^0 + \cdots + \varphi_4(f_{q-1,\,i}(\zeta_p) + g_{q-1,\,i}(\zeta_p))\tau^{q-1}\ )t^i \\
&= \textstyle\sum_i(\ (\ \varphi_4(f_{0,\,i}(\zeta_p)) + \varphi_4(g_{0,\,i}(\zeta_p))\ )\tau^0 \\
&\qquad + \cdots + (\ \varphi_4(f_{q-1,\,i}(\zeta_p)) + \varphi_4(g_{q-1,\,i}(\zeta_p))\ )\tau^{q-1}\ )t^i \\
&= \textstyle\sum_i(\ \varphi_4(f_{0,\,i}(\zeta_p))\tau^0 + \cdots + \varphi_4(f_{q-1,\,i}(\zeta_p))\tau^{q-1}\ )t^i \\
&+ \textstyle\sum_i(\ \varphi_4(g_{0,\,i}(\zeta_p))\tau^0 + \cdots + \varphi_4(g_{q-1,\,i}(\zeta_p))\tau^{q-1}\ )t^i \\
&= \bar{\varphi}_4(\ \textstyle\sum_i(f_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i\ ) \\
&+ \bar{\varphi}_4(\ \textstyle\sum_i(g_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + g_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i\ )
\end{aligned}
$$

Por tanto $\bar{\varphi}_4$ es aditiva.

Ahora,

$$
\begin{aligned}
&\quad \bar{\varphi}_4(\ (f_i(\zeta_p)\tau^i)t^r\ (g_j(\zeta_p)\tau^j)t^s\ ) \\
&= \bar{\varphi}_4(\ f_i(\zeta_p)\tau^i\ \alpha^{-r}(g_j(\zeta_p)\tau^j)t^{r+s}\ ) \\
&= \bar{\varphi}_4(\ f_i(\zeta_p)\tau^i\ g_j({\zeta_p}^{\gamma^r})({\zeta_p}^{kz(r)})\tau^{jl^r}t^{r+s}\ ) \\
&= \bar{\varphi}_4(\ f_i(\zeta_p)\ \beta^{-i}(\ g_j({\zeta_p}^{\gamma^r})({\zeta_p}^{kz(r)})\ )\tau^{i+jl^r}t^{r+s}\ ) \\
&= \bar{\varphi}_4(\ f_i(\zeta_p)\ g_j({\zeta_p}^{\gamma^r\delta^i})({\zeta_p}^{kz(r)\delta^i})\tau^{i+jl^r}t^{r+s}\ ) \text{ pues } \beta^{-1} : \mathbb{Z}\zeta_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}\zeta_p \text{ es} \\
&\quad \text{homomorfismo de anillos.} \qquad\qquad\qquad\qquad f(\zeta_p) \longmapsto f({\zeta_p}^{\delta}) \\
&= \varphi_4(f_i(\zeta_p))\ \varphi_4(g_j({\zeta_p}^{\gamma^r\delta^i}))\ \varphi_4({\zeta_p}^{kz(r)\delta^i})\tau^{i+jl^r}t^{r+s} \\
&= \overline{f_i(1)}\ \overline{g_j(1)}\ \bar{1}\ \tau^{i+jl^r}t^{r+s} \\
&= \overline{f_i(1)}\ \overline{g_j(1)}\ \tau^{i+jl^r}t^{r+s}
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
&\quad \bar{\varphi}_4(\ f_i(\zeta_p)\tau^i t^r\ )\ \bar{\varphi}_4(\ g_j(\zeta_p)\tau^j t^s\ ) \\
&= (\ \overline{f_i(1)}\ \tau^i t^r\ )(\ \overline{g_j(1)}\ \tau^j t^s\ ) \\
&= \overline{f_i(1)}\ \tau^i\ \bar{\alpha}^{-r}(\ \overline{g_j(1)}\ \tau^j\ )t^{r+s} \\
&= \overline{f_i(1)}\ \tau^i\ \overline{g_j(1)}\ \tau^{jl^r}t^{r+s} \\
&= \overline{f_i(1)}\ \overline{g_j(1)}\ \tau^{i+jl^r}t^{r+s}
\end{aligned}
$$

Por tanto $\bar{\varphi}_4$ es homomorfismo de anillos.

Además el siguiente cuadrado conmuta:

$$
\begin{array}{ccc}
((\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] & \xrightarrow{\bar{\varphi}_1} & ((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \\
{\scriptstyle \bar{\varphi}_2}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar{\varphi}_4} \\
(\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t] & \xrightarrow{\bar{\varphi}_3} & (\mathbb{F}_p[C_q])_{\bar{\alpha}}[t]
\end{array}
$$

en efecto;

$$\begin{tikzcd}
\sum_i(f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0+\cdots+f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i \arrow[r, "\bar{\varphi}_1"] \arrow[d, "\bar{\varphi}_2"'] & \sum_i(f_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0+\cdots+f_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i \arrow[d, "\bar{\varphi}_4"] \\
\sum_i(f_{0,\,i}(1)\tau^0+\cdots+f_{q-1,\,i}(1)\tau^{q-1})t^i \arrow[r, "\bar{\varphi}_3"] & \sum_i(\,\overline{f_{0,\,i}(1)}\,\tau^0+\cdots+\overline{f_{q-1,\,i}(1)}\,\tau^{q-1}\,)t^i
\end{tikzcd}$$

y claramente $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\bar{\varphi}_3$, $\bar{\varphi}_4$ son epimorfismos. □

Ahora procedemos con la generalización del cuadrado cartesiano del lema 3.3.2:

Teorema 3.5.6. *el cuadrado de la Proposición 3.5.3 es cartesiano.*

Demostración: Por la propiedad universal del producto fibrado existe un único homomorfismo de anillos $\bar{\psi}$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
((\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \arrow[drr, bend left, "\bar{\varphi}_1"] \arrow[dr, dotted, "\bar{\psi}"] \arrow[ddr, bend right, "\bar{\varphi}_2"'] & & \\
& P' \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & ((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \arrow[d, "\bar{\varphi}_4"] \\
& (\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t] \arrow[r, "\bar{\varphi}_3"] & (\mathbb{F}_p[C_q])_{\bar{\alpha}}[t]
\end{tikzcd}$$

donde P' es el producto fibrado. Es decir,
$P' = \{\ (x,y) \in (\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t] \times ((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \mid \bar{\varphi}_3(x) = \bar{\varphi}_4(y)\}$
donde
$x = \sum_i(z_{0,\,i}\tau^0 + \cdots + z_{q-1,\,i}\tau^{q-1})t^i$,
$y = \sum_i(f_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i$
Tenemos que

$\bar{\varphi}_3(x) = \bar{\varphi}_4(y)$

$\Leftrightarrow \bar{\varphi}_3(\sum_i(z_{0,\,i}\tau^0 + \cdots + z_{q-1,\,i}\tau^{q-1})t^i)$
$= \bar{\varphi}_4(\sum_i(f_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i)$

$\Leftrightarrow \quad \sum_i(\varphi_3(z_{0,\,i})\tau^0 + \cdots + \varphi_3(z_{q-1,\,i})\tau^{q-1})t^i$
$= \sum_i(\varphi_4(f_{0,\,i}(\zeta_p))\tau^0 + \cdots + \varphi_4(f_{q-1,\,i}(\zeta_p))\tau^{q-1})t^i$

$\Leftrightarrow \varphi_3(z_{0,\,i})\tau^0 + \cdots + \varphi_3(z_{q-1,\,i})\tau^{q-1}$
$= \varphi_4(f_{0,\,i}(\zeta_p))\tau^0 + \cdots + \varphi_4(f_{q-1,\,i}(\zeta_p))\tau^{q-1}\ \forall\ i$

$\Leftrightarrow \varphi_3(z_{0,\,i}) = \varphi_4(f_{0,\,i}(\zeta_p)), \ldots, \varphi_3(z_{q-1,\,i}) = \varphi_4(f_{q-1,\,i}(\zeta_p))\ \forall\ i$

$\Leftrightarrow \overline{z_{0,\,i}} = \overline{f_{0,\,i}(1)}, \ldots, \overline{z_{q-1,\,i}} = \overline{f_{q-1,\,i}(1)}$ en $\mathbb{F}_p\ \forall\ i$.

$\Leftrightarrow z_{0,\,i} = f_{0,\,i}(1) + p\ k_{0,\,i}, \ldots, z_{q-1,\,i} = f_{q-1,\,i}(1) + p\ k_{q-1,\,i}\ \forall\ i$
Por tanto,

$$P' = \{\ (\ \textstyle\sum_i((f_{0,\,i}(1) + p\ k_{0,\,i})\tau^0 + \cdots + (f_{q-1,\,i}(1) + p\ k_{q-1,\,i})\tau^{q-1})t^i,$$
$$\textstyle\sum_i(f_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i\ ) \in (\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t] \times ((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t]\ \}$$

Note que $\bar{\psi} : ((\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \longrightarrow P'$ está definida por
$$x \longmapsto (\ \bar{\varphi}_2(x),\ \bar{\varphi}_1(x)\ )$$

donde $x = \sum_i(f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i$

- $\bar{\psi}$ *es inyectiva*:
  Suponga que $\bar{\psi}(\ \sum_i(f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i\ ) = 0$

  $\Rightarrow \bar{\varphi}_2(\sum_i(f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i) = 0,$
  $\bar{\varphi}_1(\sum_i(f_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1})t^i) = 0$

  $\Rightarrow \sum_i(\ \varphi_2(f_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_2(f_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}\ )t^i = 0,$
  $\sum_i(\ \varphi_1(f_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_1(f_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}\ )t^i = 0$

  $\Rightarrow 0 = \varphi_2(f_{0,\,i}(\sigma)) = \cdots = \varphi_2(f_{q-1,\,i}(\sigma)),$
  $0 = \varphi_1(f_{0,\,i}(\sigma)) = \cdots = \varphi_1(f_{q-1,\,i}(\sigma))\ \forall\ i$

  $0 = (\ \varphi_2(\ f_{0,\,i}(\sigma)\ ),\ \varphi_1(\ f_{0,\,i}(\sigma)\ )\ ) = \psi(\ f_{0,\,i}(\sigma)\ )\ , \ldots,$
  $0 = (\ \varphi_2(\ f_{q-1,\,i}(\sigma)\ ),\ \varphi_1(\ f_{q-1,\,i}(\sigma)\ )\ ) = \psi(\ f_{q-1,\,i}(\sigma)\ )\ \forall\ i$

  Dado que ψ: $\mathbb{Z}C_p \longrightarrow P$ es isomorfismo por la prueba del lema 3.2.1

  $\Rightarrow 0 = f_{0,\,i}(\sigma) = \cdots = f_{q-1,\,i}(\sigma)\ \forall\ i$
  Por tanto $\bar{\psi}$ es inyectiva.

- $\bar{\psi}$ *es sobre*:
  Sea
  $x = (\ \sum_i((f_{0,\,i}(1) + p\ k_{0,\,i})\tau^0 + \cdots + (f_{q-1,\,i}(1) + p\ k_{q-1,\,i})\tau^{q-1})t^i,$
  $\sum_i(f_{0,\,i}(\zeta_p)\tau^0 + \cdots + f_{q-1,\,i}(\zeta_p)\tau^{q-1})t^i\ ) \in P'$

  Definimos $F_{0,\,i}(x) = f_{0,\,i}(x) + k_{0,\,i}(\ 1 + x + \cdots + x^{p-1}\ )$
  $\vdots$
  $F_{q-1,\,i}(x) = f_{q-1,\,i}(x) + k_{q-1,\,i}(\ 1 + x + \cdots + x^{p-1}\ )$

Entonces
$\bar{\psi}(\sum_i (F_{0,\,i}(\sigma)\tau^0 + \cdots + F_{q-1,\,i}(\sigma)\tau^{q-1}) t^i)$
$= (\sum_i (\varphi_2(F_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_2(F_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}) t^i,$
$\sum_i (\varphi_1(F_{0,\,i}(\sigma))\tau^0 + \cdots + \varphi_1(F_{q-1,\,i}(\sigma))\tau^{q-1}) t^i)$
$= x$

pues ya habíamos probado en el lema 3.2.1 que:

$\varphi_2(F_{0,\,i}(\sigma)) = f_{0,\,i}(1) + p\, k_{0,\,i}, \ldots, \varphi_2(F_{q-1,\,i}(\sigma)) = f_{q-1,\,i}(1) + p\, k_{q-1,\,i}$
$\varphi_1(F_{0,\,i}(\sigma)) = f_{0,\,i}(\zeta_p), \ldots \varphi_1(F_{q-1,\,i}(\sigma)) = f_{q-1,\,i}(\zeta_p)$

Por tanto el cuadrado de la Proposición 3.5.3 es cartesiano. □

3.6 Demostración del teorema principal.

Usando los resultados obtenidos en las secciones anteriores procedemos ahora a demostrar el teorema principal de este capítulo:

Teorema 3.6.1. *Sea* $G = C_p \rtimes_\beta C_q$. *Entonces* $NK_i^\alpha(\mathbb{Z}G) = 0$ $\forall$ *automorfismo de grupos* $\alpha : C_p \rtimes_\beta C_q \longrightarrow C_p \rtimes_\beta C_q$ *y* $\forall\ i \leq 1$.

Demostración: Recordemos que β es el automorfismo definido por el homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : C_q &\longrightarrow Aut(C_p) \\ \tau &\longmapsto \beta : C_p \xrightarrow{\cong} C_p \\ &\qquad\qquad \sigma \longmapsto \sigma^\beta \end{aligned}$$

donde C_p es un grupo cíclico de orden p, C_q es un grupo cíclico de orden q con p y q primos distintos.

• Caso $Núcleo(\varphi) = 0$. (Caso torcido).
Por la proposición 3.5.6 el siguiente cuadrado es cartesiano

$$\begin{tikzcd} ((\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \arrow[r, "\bar{\varphi}_1"] \arrow[d, "\bar{\varphi}_2"'] & ((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t] \arrow[d, "\bar{\varphi}_4"] \\ (\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t] \arrow[r, "\bar{\varphi}_3"] & (\mathbb{F}_p[C_q])_{\bar{\alpha}}[t] \end{tikzcd}$$

con $\bar{\varphi}_i$ epimorfismo $\forall\ i = 1, 2, 3, 4$. Por [20], teorema 6.4, pág. 55, tenemos una sucesión exacta

$K_2(\ (\mathbb{F}_p[C_q])_{\bar{\alpha}}[t]\ ) \to K_1(\ ((\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q])_\alpha[t]\ )$
$\to K_1(\ (\mathbb{Z}C_q)_{\bar{\alpha}}[t]\ ) \oplus K_1(\ ((\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q])_\alpha[t]\ ) \to K_1(\ \mathbb{F}_p[C_q])_{\bar{\alpha}}[t]\ ) \to \cdots$

que induce una sucesión exacta en los núcleos de las aumentaciones:

$$NK_2^{\bar{\alpha}}(\ \mathbb{F}_p[C_q]\ ) \to NK_1^{\alpha}(\ (\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q]\ ) \to NK_1^{\bar{\alpha}}(\ \mathbb{Z}C_q\ ) \oplus NK_1^{\alpha}(\ (\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q]\ )$$

$$\to NK_1^{\bar{\alpha}}(\ \mathbb{F}_p[C_q]\ ) \to \cdots$$

tenemos que
$NK_i^{\bar{\alpha}}(\ \mathbb{F}_p[C_q]\ ) = 0\ \forall\ i \leq 2$ pues $\mathbb{F}_p[C_q]$ es un álgebra semisimple ([6], pág 13, teorema 4 (Maschke) y pág. 23.) y por tanto es un anillo regular.
$NK_i^{\bar{\alpha}}(\ \mathbb{Z}C_q\ ) = 0\ \forall\ i \leq 1$ por el teorema 3.4.1.
$NK_i^{\alpha}(\ (\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q]\ ) = 0\ \forall\ i \leq 1$ pues $(\mathbb{Z}\zeta_p)_\beta[C_q]$ es un anillo regular ([15], pág. 231).
Por tanto $NK_i^{\alpha}(\ (\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q]\ ) = 0\ \forall\ i \leq 1$ y dado que $(\mathbb{Z}C_p)_\beta[C_q] \cong \mathbb{Z}(C_p \rtimes_\beta C_q)$ como anillos (observación 3.1.3) entonces

$$NK_i^{\alpha}(\ \mathbb{Z}(C_p \rtimes_\beta C_q)\ ) = 0\ \forall\ i \leq 1.$$

• Caso $Núcleo(\varphi) = C_q$. $(G = C_p \times C_q)$.
El argumento es exactamente el mismo que en el caso torcido excepto que hay que notar que también para el anillo $(\mathbb{Z}\zeta_p)[C_q]$ en el cuadrado cartesiano anterior tenemos que

$$NK_i^{\alpha}((\mathbb{Z}\zeta_p)[C_q]) = 0\ \forall\ i \leq 1$$

pero esto es consecuencia de que tenemos el siguiente cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd}
((\mathbb{Z}\zeta_p)[C_q])_\alpha[t] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\epsilon"'] & (\mathbb{Z}\zeta_{pq})_\alpha[t] \arrow[d] \\
(\mathbb{Z}\zeta_p)_\alpha[t] \arrow[r] & ((\mathbb{Z}\zeta_p)/(q))_\alpha[t]
\end{tikzcd}$$

donde ϵ y ϕ son tales que $\epsilon(\tau) = 1$, $\phi(\tau) = \zeta_q$. Note que los anillos $\mathbb{Z}\zeta_{pq}$ y $\mathbb{Z}\zeta_p$ son regulares y dado que p y q son primos distintos tenemos que $(\mathbb{Z}\zeta_p)/(q)$ es un producto de campos [16], por tanto también es regular. Tomando la sucesión exacta correspondiente obtenemos que

$$NK_i^{\alpha}((\mathbb{Z}\zeta_p)[C_q]) = 0\ \forall\ i \leq 1.$$

□

CAPÍTULO 4

Funciones de ensamble y teoría K.

En este capítulo dado un grupo G y dadas dos familias $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{'}$ de subgrupos de G retomaremos la construcción de Davis-Lück [8] para establecer un homomorfismo de ensamble

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}')}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big)$$

donde $\mathbb{K}$ es el funtor de Davis-Lück [8]. (Todos los resultados que se discuten en este capítulo hasta llegar a la construcción del homomorfismo de ensamble se encuentran en el artículo de Davis-Lück [8]). Una vez hecho esto tomando $\mathcal{F}^{'} = \mathcal{F}_T$, donde $\mathcal{F}_T$ es la familia de todos los subgrupos de G y tomando $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{vc}$ la familia de subgrupos virtualmente cíclicos de G podremos enunciar la conjetura del isomorfismo [12] la cual afirma que el homomorfismo de ensamble

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{vc},\mathcal{F}_{all}} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}_{vc})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G)}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big) = K_n(\mathbb{Z}G)$$

es un isomorfismo.

Una vez establecido todo esto, como aplicación del teorema 3.6.1 obtenemos el teorema 4.9.2 el cual afirma que **si la conjetura del isomorfismo se cumple para un grupo G tal que todos sus subgrupos finitos**

no triviales son de orden un primo o un producto de dos primos distintos entonces tenemos un isomorfismo

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{fin},\mathcal{F}_T} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}_{fin})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G)}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big) \cong K_n(\mathbb{Z}G)$$

para todo $n \leq 1$, **donde $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{fin}$ es la familia de subgrupos finitos de** G . Es decir, para toda $n \leq 1$, $K_n(\mathbb{Z}G)$ está determinado por los subgrupos finitos de G para un grupo G de este tipo.

4.1 Espacios y espectros sobre una categoría.

En esta sección damos las definiciones básicas de espacios y espectros sobre una categoría pequeña $\mathcal{C}$, definimos también el producto tensorial y damos algunas propiedades sobre estos conceptos.

Definición 4.1.1. *Un espacio X covariante (contravariante) sobre la categoría $\mathcal{C}$ es un funtor covariante (contravariante)*

$$X : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS$$

de $\mathcal{C}$ en la categoría $ESPACIOS$ de espacios compactamente generados.

Definición 4.1.2. *Una aplicación entre dos $\mathcal{C}-$espacios X, Y covariantes (contravariantes) es una transformación natural $\varphi : X \longrightarrow Y$.*

Definición 4.1.3. *Sean X, Y $\mathcal{C}-$espacios. Denotaremos por $hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ al conjunto de aplicaciones de $\mathcal{C}-$espacios de X en Y.*

Observación 4.1.4.

$$hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \subseteq \prod_{c\in Ob(\mathcal{C})} M(X(c),Y(c))$$

Demostración: Si X, $Y : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS$ son funtores covariantes, una transformación natural $\varphi : X \longrightarrow Y$ es por definición una colección

$$\{\varphi(c) : X(c) \longrightarrow Y(c)\}_{c\in Ob(\mathcal{C})}$$

tal que para cada par de objetos c, $c^{'}$ en $\mathcal{C}$ y cada morfismo $f : c \longrightarrow c^{'}$ el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{array}{ccc}
X(c) & \xrightarrow{\varphi(c)} & Y(c) \\
{\scriptstyle X(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Y(f)} \\
X(c^{'}) & \xrightarrow{\varphi(c^{'})} & Y(c^{'})
\end{array}
$$

es decir φ es una función

$$\varphi : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow \bigcup_{c\in Ob(\mathcal{C})} M(X(c), Y(c))$$

tal que $\varphi(c) \in M(X(c), Y(c))$ para cada objeto c en $\mathcal{C}$, esto es,

$$\varphi \in \prod_{c\in Ob(\mathcal{C})} M(X(c), Y(c))$$

por tanto

$$hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \subseteq \prod_{c\in Ob(\mathcal{C})} M(X(c), Y(c))$$

□

Definición 4.1.5. *Damos a $hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ la estructura de espacio topológico dándole la topología inducida como subespacio de*

$$\prod_{c\in Ob(\mathcal{C})} M(X(c), Y(c))$$

donde $M(X(c), Y(c))$ tiene la topología compacto-abierta para cada objeto c en $\mathcal{C}$.

Definición 4.1.6. *Sea X un $\mathcal{C}-$espacio contravariante y Y un $\mathcal{C}-$espacio covariante. Definimos su producto tensorial como el espacio topológico*

$$X \otimes_{\mathcal{C}} Y = \Big(\coprod_{c\in Ob(\mathcal{C})} X(c) \times Y(c)\Big) \Big/ \sim$$

donde $(X(\phi)(x), y) \in X(c) \times Y(c)$ se identifica con $(x, Y(\phi)(y)) \in X(d) \times Y(d)$ para todo morfismo $\phi : c \longrightarrow d$ en $\mathcal{C}$ y para todos los puntos $x \in X(d)$, $y \in Y(c)$ tal como lo sugiere el siguiente diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
c & \longrightarrow & X(c) \times Y(c) \\
\phi \big\downarrow & & \big\uparrow X(\phi) \quad \big\downarrow Y(\phi) \\
d & \longrightarrow & X(d) \times Y(d)
\end{array}
$$

La propiedad principal del producto tensorial está dada por el siguiente

Lema 4.1.7. *Sea X un $\mathcal{C}-$espacio contravariante, Y un $\mathcal{C}-$espacio covariante y Z un espacio topológico. Sea $M(Y,Z)$ el $\mathcal{C}-$espacio contravariante cuyo valor en el objeto c es el espacio de funciones $M(Y(c),Z)$. Entonces hay un homeomorfismo natural en X, Y y Z*

$$T = T(X,Y,Z) : M(X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z) \longrightarrow hom_{\mathcal{C}}(X, M(Y,Z))$$

Demostración: Solo probaremos que T es una biyección:

T se define de la siguiente manera:

Dada una aplicación $g : X \otimes_{\mathcal{C}} Y \longrightarrow Z$, para cada objeto c en $\mathcal{C}$ debemos definir una transformación natural $T(g)_c : X(c) \longrightarrow M(Y(c),Z)$ lo cual equivale, por el **teorema de la aplicación exponencial** ([1], teorema 1.3.2, pág. 5), a definir una aplicación $X(c) \times Y(c) \longrightarrow Z$ la cual se obtiene como la composición

$$X(c) \times Y(c) \longrightarrow X \otimes_{\mathcal{C}} Y \xrightarrow{g} Z$$

más precisamente,

$$T : M(X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z) \longrightarrow hom_{\mathcal{C}}(X, M(Y,Z))$$

$$(g : X \otimes_{\mathcal{C}} Y \longrightarrow Z) \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} X(c) & \xrightarrow{T(g)_c} & M(Y(c),Z) \\ x & \mapsto & g \circ \pi_c \circ i_c(x, \_) : Y(c) \longrightarrow Z \end{array} \right\}_{c \in Ob(\mathcal{C})}$$

donde $g \circ \pi_c \circ i_c : X(c) \times Y(c) \longrightarrow Z$ es la composición de aplicaciones

$$X(c) \times Y(c) \xrightarrow{i_c} \coprod_{c \in Ob(\mathcal{C})} X(c) \times Y(c) \xrightarrow{\pi_c} \Big(\coprod_{c \in Ob(\mathcal{C})} X(c) \times Y(c) \Big) \Big/ \sim \equiv X \otimes_{\mathcal{C}} Y \xrightarrow{g} Z$$

Veamos que $T(g) : X \longrightarrow M(Y,Z)$ es una transformación natural, es decir, probaremos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X(c) & \xrightarrow{T(g)_c} & M(Y(c),Z) \\ {\scriptstyle X(f)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (\ )\circ Y(f)} \\ X(c^{'}) & \xrightarrow{T(g)_{c^{'}}} & M(Y(c^{'}),Z) \end{array}$$

donde $f : c \longrightarrow c^{'}$ es un morfismo en $\mathcal{C}$.

$$T(g)_c \circ (X(f)(x)) = g \circ \pi_c \circ i_c(X(f)(x), \_\_) = g(\overline{X(f)(x), \_\_})$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} T(g)_{c'} \circ Y(f) &= (g \circ \pi_{c'} \circ i_{c'}(x, \_\_)) \circ Y(f) = g \circ \pi_{c'} \circ i_{c'}(x, Y(f)(\_\_)) \\ &= g(\overline{x, Y(f)(\_\_)}) \end{aligned}$$

pero $g(X(f)(x), y) = g(x, Y(f)(y))\ \forall\ y \in Y(c)$ pues $(X(f)(x), y)$ $\sim (x, Y(f)(y))$ en $X \otimes_{\mathcal{C}} Y$. Por tanto el diagrama conmuta, así $T(g)$ es una transformación natural.
Ahora definimos

$$T^{-1} = T^{-1}(X, Y, Z) : hom_{\mathcal{C}}(X, M(Y, Z)) \longrightarrow M(X \otimes_{\mathcal{C}} Y, Z)$$

$$\{X(c) \xrightarrow{S_c} M(Y(c), Z)\}_{c \in Ob(\mathcal{C})} \mapsto \begin{pmatrix} g_s : X \otimes_{\mathcal{C}} Y & \longrightarrow & Z \\ \overline{(x, y)} & \mapsto & S_c(x)(y) \end{pmatrix}$$

para $(x, y) \in X(c) \times Y(c)$.

Veamos que g_s está bien definida:
Sea $f : c \longrightarrow c^{'}$ un morfismo en $\mathcal{C}$.
Entonces $(x, Y(f)(y)) \in X(c^{'}) \times Y(c^{'})$ se identifica con $(X(f)(x), y) \in X(c) \times Y(c)$ como sugiere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & X(c) \times Y(c) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle X(f)} \quad \downarrow{\scriptstyle Y(f)} \\ c^{'} & \longrightarrow & X(c^{'}) \times Y(c^{'}) \end{array}$$

donde $x \in X(c^{'})$, $y \in Y(c)$.
Entonces $g_s(x, Y(f)(y)) = S_{c'}(x)(Y(f)(y))$
Por otra parte,

$g_s(X(f)(x), y) = S_c(X(f)(x))(y)$
Dado que el siguiente diagrama conmuta por ser S una transformación natural

$$\begin{array}{ccc} X(c) & \xrightarrow{S_c} & M(Y(c), Z) \\ {\scriptstyle X(f)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (\ )\circ Y(f)} \\ X(c^{'}) & \xrightarrow{S_{c^{'}}} & M(Y(c^{'}), Z) \end{array}$$

Concluímos que $g_s(x, Y(f)(y)) = g_s(X(f)(x), y)$. Por tanto g_s está bien definida.
Claramente T y T^{-1} así definidas es una inversa de la otra, por tanto es una biyección. $\square$

De manera análoga tenemos el siguiente

Lema 4.1.8. *Sea X un espacio topológico y sean Y y Z $\mathcal{C}-$espacios covariantes (contravariantes). Sea $X \times Y$ el $\mathcal{C}-$espacio covariante (contravariante) definido de manera obvia. Entonces tenemos un homeomorfismo natural T en X, Y y Z*

$$T(X, Y, Z) : hom_{\mathcal{C}}(X \times Y, Z) \longrightarrow M(X, hom_{\mathcal{C}}(Y, Z))$$

Demostración: Solo diremos como se define T y su inversa:
Definimos T por

$$\{X \times Y(c) \xrightarrow{\varphi_c} Z(c)\}_{c \in Ob(\mathcal{C})} \mapsto \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \\ x & \mapsto & \{Y(c) \xrightarrow{\varphi_c(x, \_)} Z(c)\}_{c \in Ob(\mathcal{C})} \end{array} \right)$$

Definimos T^{-1} por

$$(X \xrightarrow{\phi} hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)) \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} X \times Y(c) & \longrightarrow & Z(c) \\ (x, y) & \mapsto & \phi(x)_c(y) \end{array} \right\}_{c \in Ob(\mathcal{C})}$$

$\square$

Sea $ESPACIOS_+$ la categoría de espacios punteados. Recordemos que los objetos en $ESPACIOS_+$ son espacios compactamente generados con punto base tales que la inclusión del punto base es una cofibración y los morfismos son aplicaciones punteadas.

Definición 4.1.9. *Un espectro* $\mathbf{E}=\{(E(n),\sigma(n)) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *es una sucesión de espacios punteados* $\{E(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *con aplicaciones punteadas llamadas aplicaciones estructurales* $\sigma(n) : E(n) \wedge S^1 \longrightarrow E(n+1)$*. Una aplicación de espectros* $f : E \longrightarrow E^{'}$ *es una sucesión de aplicaciones punteadas* $f(n) : E(n) \longrightarrow E^{'}(n)$ *tal que el siguiente diagrama conmuta* $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} E(n) \wedge S^1 \arrow[r, "\sigma(n)"] \arrow[d, "f(n)\wedge Id_{S^1}"'] & E(n+1) \arrow[d, "f(n+1)"] \\ E^{'}(n) \wedge S^1 \arrow[r, "\sigma^{'}(n)"] & E^{'}(n+1) \end{tikzcd}$$

Definición 4.1.10. *Los grupos de homotopía de un espectro* $\mathbf{E}$ *se definen como el límite directo*

$$\pi_i(\mathbf{E}) = \underset{k\to\infty}{colim}\ \pi_{i+k}(E(k))$$

donde el sistema $\pi_{i+k}(E(k))$ *está dado por la composición*

$$\pi_{i+k}(E(k)) \xrightarrow{s} \pi_{i+k+1}(E(k) \wedge S^1) \xrightarrow{\sigma(k)_*} \pi_{i+k+1}(E(k+1))$$

donde s *es el homomorfismo inducido por la suspensión* $E(k) \longrightarrow E(k) \wedge S^1$*.*

Definición 4.1.11. *Una equivalencia homotópica débil de espectros es una aplicación de espectros* $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ *que induce un isomorfismo en todos los grupos de homotopía.*

Definición 4.1.12. *Un espectro* $\mathbf{E}$ *es llamado* $\Omega-espectro$*, si para cada aplicación estructural* $\sigma(n) : E(n) \wedge S^1 \longrightarrow E(n+1)$ *su adjunta* $E(n) \longrightarrow \Omega E(n+1) \equiv M(S^1, E(n+1))$ *es una equivalencia homotópica débil de espacios topológicos.*

Definición 4.1.13. *Un* $\mathcal{C}-espectro$ *(*$\mathcal{C}-\Omega-espectro$*) es un funtor de* $\mathcal{C}$ *a la categoría* $ESPECTROS$ *(*$\Omega - ESPECTROS$*) donde* $ESPECTROS$ *(*$\Omega - ESPECTROS$*) es la categoría de espectros (*$\Omega - espectros$*).*

Nota: Las nociones de producto tensorial y de aplicaciones entre $\mathcal{C}-$ *espacios* que definimos anteriormente se extienden a $\mathcal{C} - ESPACIOS_+$ de manera natural, solo hay que reemplazar uniones ajenas $\coprod$ y productos cartesianos por productos $\wedge$ y productos $\vee$ y aplicaciones por aplicaciones punteadas. Todas las propiedades de adjunción se siguen cumpliendo.

Observación 4.1.14. *Un $\mathcal{C}-$ espectro* $\mathbf{E}$ *puede interpretarse como una sucesión* $\{(E(n), \sigma(n)) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *donde* $E(n)$ *es un* $\mathcal{C}-$*espacio punteado y* $\sigma(n) : E(n) \longrightarrow E(n+1)$ *es una aplicacion de* $\mathcal{C}-$*espacios punteados.*

Demostración: Por definición de $\mathcal{C}-$espectro $\mathbf{E} : \mathcal{C} \longrightarrow ESPECTROS$ es un funtor

$$\mathbf{E} : \mathcal{C} \longrightarrow ESPECTROS$$

$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & \mathbf{E}(c) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{E}(f)} \\ c' & \longrightarrow & \mathbf{E}(c') \end{array}$$

donde $\mathbf{E}(c) = \{E(c)(n) \in ESPACIOS_+ \mid n \in \mathbb{Z}\}$,
$\{E(c)(n) \wedge S^1 \xrightarrow{\sigma(c)(n)} E(c)(n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ son las aplicaciones estructurales y donde $\mathbf{E}(f)$ tiene la siguiente propiedad respecto a $\sigma(c)(n)$:

$$\begin{array}{ccc} E(c)(n) \wedge S^1 & \xrightarrow{\sigma(c)(n)} & E(c)(n+1) \\ {\scriptstyle \mathbf{E}(f)(n)\wedge Id_{S^1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{E}(f)(n+1)} \\ \mathbf{E}(c')(n) \wedge S^1 & \xrightarrow{\sigma(c')(n+1)} & \mathbf{E}(c')(n+1) \end{array}$$

si fijamos n y hacemos variar $c \in Ob(\mathcal{C})$ notamos que podemos interpretar al $\mathcal{C}-$espectro $\mathbf{E}$ como una sucesión $\{E(\ )(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathcal{C}-$espacios y a las aplicaciones estructurales
$\{E(\ )(n) \wedge S^1 \xrightarrow{\sigma(\ )(n)} E(\ )(n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ como transformaciones naturales, esto es, aplicaciones de $\mathcal{C}-$espacios. Denotando por E(n) a E( )(n) y por $\sigma(n)$ a $\sigma(\ )(n)$ el diagrama conmutativo anterior se traduce en el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} E(n)(c) \wedge S^1 & \xrightarrow{\sigma(n)_c} & E(n+1)(c) \\ {\scriptstyle \mathbf{E}(n)(f)\wedge Id_{S^1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{E}(n+1)(f)} \\ \mathbf{E}(n)(c') \wedge S^1 & \xrightarrow{\sigma(n+1)_{c'}} & \mathbf{E}(n+1)(c') \end{array}$$

□

Usando la observación 4.1.14 podemos definir el espectro producto tensorial.

Definición 4.1.15. *Sea X un $\mathcal{C}-$espacio contravariante y sea* $\mathbf{E}$ *un $\mathcal{C}-$espectro covariante. Definimos el espectro producto tensorial $X \otimes_{\mathcal{C}} E$ por*

$$(X \otimes_{\mathcal{C}} E)(n) = X \otimes_{\mathcal{C}} E(n)$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$
con aplicaciones estructurales definidas por la composición

$$(X \otimes_{\mathcal{C}} E)(n) \wedge S^1 \equiv (X \otimes_{\mathcal{C}} E(n)) \wedge S^1 \longrightarrow X \otimes_{\mathcal{C}} (E(n) \wedge S^1)$$

$$\xrightarrow{Id \otimes \sigma(n)} X \otimes_{\mathcal{C}} E(n+1) \equiv (X \otimes_{\mathcal{C}} E)(n+1)$$

donde la primera aplicación está definida por

$$(x \otimes e) \wedge s \mapsto x \otimes (e \wedge s)$$

Observación 4.1.16. *Note que $Id \otimes \sigma(n)$ es continua en la definición 4.1.15 porque el producto tensorial es funtorial y la primera composición es un homeomorfismo por lo siguiente:*
Tenemos la siguiente composición de homeomorfismos naturales que vienen de las varias adjunciones donde Z es un espacio punteado:

$M((X \otimes_{\mathcal{C}} E(n)) \wedge S^1, Z)$

$\xrightarrow{\cong} M(X \otimes_{\mathcal{C}} E(n), M(S^1, Z))$ *por ser $X \otimes_{\mathcal{C}} E(n)$, S^1, Z espacios.*

$\xrightarrow{\cong} hom_{\mathcal{C}}(X, M(E(n), M(S^1, Z)))$ *por el lema 4.1.7*

$\xrightarrow{\cong} hom_{\mathcal{C}}(X, M(E(n) \wedge S^1, Z))$ *donde aplicamos que $M(E(n), M(S^1, Z))$ $\cong M(E(n) \wedge S^1, Z)$ por ser $E(n)$, S^1, Z espacios y por el* **Teorema de la aplicación exponencial**.

$\xrightarrow{\cong} M(X \otimes_{\mathcal{C}} (E(n) \wedge S^1), Z)$ *por el lema 4.1.7*

llamemos φ a la composición de estos homeomorfismos.
Sea $Z = (X \otimes_{\mathcal{C}} E(n)) \wedge S^1$ entonces

$$\begin{array}{rcl} Id : (X \otimes_{\mathcal{C}} E(n)) \wedge S^1 & \longrightarrow & Z \\ (x \otimes e) \wedge s & \mapsto & (x \otimes e) \wedge s \end{array}$$

es continua en $M((X \otimes_{\mathcal{C}} E(n)) \wedge S^1, Z)$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl}\varphi(Id) : X \otimes_{\mathcal{C}} (E(n) \wedge S^1) & \longrightarrow & (X \otimes_{\mathcal{C}} E(n)) \wedge S^1 \\ x \otimes (e \wedge s) & \mapsto & (x \otimes e) \wedge s\end{array}$$

es continua.

Ahora hacemos $Z = X \otimes_{\mathcal{C}} (E(n) \wedge S^1)$ entonces

$$Id : X \otimes_{\mathcal{C}} (E(n) \wedge S^1) \longrightarrow Z$$

es continua en $M(X \otimes_{\mathcal{C}} (E(n) \wedge S^1), Z)$

por tanto

$$\begin{array}{rcl}\varphi^{-1}(Id) : (X \otimes_{\mathcal{C}} E(n)) \wedge S^1 & \longrightarrow & X \otimes_{\mathcal{C}} (E(n) \wedge S^1) \\ (x \otimes e) \wedge s & \mapsto & x \otimes (e \wedge s)\end{array}$$

es continua.

Por tanto la primera composición es un homeomorfismo. □

4.2 La inducción F_*X y la restricción F^*Y.

Dado un $\mathcal{C}-$espacio X covariante (contravariante) y un funtor covariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ construiremos un nuevo $\mathcal{D}-$espacio covariante (contravariante) llamado la inducción de X con F, F_*X. También dado un $\mathcal{D}-$espacio covariante (contravariante) Y y un funtor covariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ construiremos un nuevo $\mathcal{C}-$espacio covariante llamado la restricción de Y con F, F^*Y.

El objetivo principal de esta sección es demostrar el lema 4.2.14 el cual afirma que tenemos un homeomorfismo natural de adjunción de espacios topológicos

$$F_*X \otimes_{\mathcal{D}} Y \longrightarrow X \otimes_{\mathcal{C}} F^*Y.$$

Dicho lema será el primer ingrediente para construír el homomorfismo de ensamble mencionado al principio de este capítulo.

Definición 4.2.1. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías un $\mathcal{C}-\mathcal{D}-$espacio es un $\mathcal{C}\times\mathcal{D}^{op}-$espacio covariante donde $\mathcal{D}^{op}$ es la categoría opuesta de $\mathcal{D}$.*

Definición 4.2.2. *Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor covariante. Definimos el $\mathcal{D}-\mathcal{C}$-espacio*

$$mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??) : \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{op} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} (d,c) & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(F(c),d) \\ \varphi \Big\downarrow \Big\uparrow \psi & & \Big\downarrow \varphi\circ(\ )\circ F(\psi) \\ (d',c') & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(F(c'),d') \end{array}$$

donde $? \in Ob(\mathcal{C})$, $?? \in Ob(\mathcal{D})$ y hemos dado al conjunto de morfismos la topología discreta.

Observación 4.2.3. *Si fijamos $d_0 \in Ob(\mathcal{D})$ obtenemos el funtor contravariante*

$$mor_{\mathcal{D}}(F(?), d_0) : \{d_0\} \times \mathcal{C}^{op} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} (d_0,c) & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(F(c),d_0) \\ Id \Big\downarrow \Big\uparrow \psi & & \Big\downarrow Id\circ(\ )\circ F(\psi) \\ (d_0,c') & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(F(c'),d_0) \end{array}$$

Es decir, obtenemos

$$mor_{\mathcal{D}}(F(?), d_0) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r] & mor_{\mathcal{D}}(F(c),d_0) \arrow[d, "(\ )\circ F(\psi)"] \\ c' \arrow[r] \arrow[u, "\psi"] & mor_{\mathcal{D}}(F(c'),d_0) \end{tikzcd}$$

□

Observación 4.2.4. *Si hacemos variar $d_0 \in Ob(\mathcal{D})$ obtenemos el $\mathcal{D}-$espacio covariante*

$$mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??) \otimes_{\mathcal{C}} X : \mathcal{D} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{tikzcd} d_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & mor_{\mathcal{D}}(F(?),d_0) \otimes_{\mathcal{C}} X \arrow[d, "\varphi(\ )\otimes Id"] \\ d_0' \arrow[r] & mor_{\mathcal{D}}(F(?),d_0') \otimes_{\mathcal{C}} X \end{tikzcd}$$

Note que

$$mor_{\mathcal{D}}(F(?),d_0)\otimes_{\mathcal{C}} X \xrightarrow{\varphi(\ )\otimes Id} mor_{\mathcal{D}}(F(?),d_0^{'})\otimes_{\mathcal{C}} X$$

está bien definida:

Tenemos que

$$mor_{\mathcal{D}}(F(?),d_0)\otimes_{\mathcal{C}} X = \Big(\coprod_{c\in Ob(\mathcal{C})} mor_{\mathcal{D}}(F(c),d_0)\times X(c)\Big)\Big/\sim$$

donde $(x, X(\psi)(y)) \in mor_{\mathcal{D}}(F(c),d_0)\times X(c)$ *se identifica con* $(mor_{\mathcal{D}}(F(?),d_0)(\psi)(x), y) = (x\circ F(\psi)(y)) \in mor_{\mathcal{D}}(F(c^{'}),d_0)\times X(c^{'})$ *tal como lo sugiere el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} c & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(F(c),d_0) & \times & X(c) \\ \psi\Big\uparrow & & \Big\downarrow Id\circ(\ )\circ F(\psi) & & \Big\uparrow X(\psi) \\ c^{'} & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(F(c^{'}),d_0) & \times & X(c^{'}) \end{array}$$

$x\in mor_{\mathcal{D}}(F(c),d_0)$, $y\in X(c^{'})$.

Entonces $(\varphi(\ )\otimes Id)(x, X(\psi)(y)) = (\varphi\circ x, X(\psi)(y))$
Por otra parte, $(\varphi(\ )\otimes Id)(x\circ F(\psi), y) = (\varphi\circ x\circ F(\psi), y) = ((\varphi\circ x)\circ F(\psi), y)$
Por tanto $\varphi(\ )\otimes Id$ *está bien definida.* ☐

Ahora tenemos los elementos para dar la siguiente

Definición 4.2.5. *Dado un* $\mathcal{C}-$*espacio covariante* X *y un funtor covariante* $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ *definimos la inducción de* X *con* F *como el* $\mathcal{D}$*-espacio covariante de la observación 4.2.4*

$$F_*X = mor_{\mathcal{D}}(F(?),??)\otimes_{\mathcal{C}} X$$

Definición 4.2.6. *Definimos el* $\mathcal{C}-\mathcal{D}-$*espacio*

$$mor_{\mathcal{D}}(??,F(?)) : \mathcal{C}\times\mathcal{D}^{op}\longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} (c,d) & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(d,F(c)) \\ \varphi\Big\downarrow\ \Big\uparrow\psi & & \Big\downarrow F(\varphi)\circ(\ )\circ\psi \\ (c^{'},d^{'}) & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(d^{'},F(c^{'})) \end{array}$$

donde $?\in Ob(\mathcal{C})$, $??\in Ob(\mathcal{D})$ *y hemos dado al conjunto de morfismos la topología discreta.*

Observación 4.2.7. *Si fijamos* $d_0 \in Ob(\mathcal{D})$ *obtenemos el* $\mathcal{C}-$*espacio covariante*

$$mor_{\mathcal{D}}(d_0, F(?)) : \mathcal{C} \times \{d_0\}^{op} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} (c, d_0) & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(d_0, F(c)) \\ \varphi \Big\downarrow \Big\uparrow Id & & \Big\downarrow F(\varphi)\circ(\ )\circ Id \\ (c', d_0) & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(d_0, F(c')) \end{array}$$

Sea X *un* $\mathcal{C}-$*espacio contravariante. Entonces análogamente al caso covariante (Observación 4.2.4) obtenemos un* $\mathcal{D}-$*espacio contravariante*

$$X \otimes_{\mathcal{C}} mor_{\mathcal{D}}(??, F(?)) : \mathcal{D} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} d_0 & \longrightarrow & X \otimes_{\mathcal{C}} mor_{\mathcal{D}}(d_0, F(?)) \\ \psi \Big\downarrow & & \Big\uparrow Id\otimes((\ )\circ\psi) \\ d_0' & \longrightarrow & X \otimes_{\mathcal{C}} mor_{\mathcal{D}}(d_0', F(?)) \end{array}$$

Definición 4.2.8. *Dado un* $\mathcal{C}-$*espacio contravariante* X *y un funtor covariante* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *definimos la inducción de* X *con* F *como el* $\mathcal{D}-$*espacio covariante*

$$F_*X = X \otimes_{\mathcal{C}} mor_{\mathcal{D}}(??, F(?))$$

Definición 4.2.9. *Dado un* $\mathcal{D}-$*espacio* Y *covariante (contravariante) y un funtor covariante* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *definimos la restricción de* Y *con* F *como el* $\mathcal{C}-$*espacio covariante (contravariante)* $F^*Y = Y \circ F$.

Observación 4.2.10. *Si fijamos* $c_0 \in Ob(\mathcal{C})$ *obtenemos un* $\mathcal{D}-$*espacio contravariante*

$$mor_{\mathcal{D}}(??, F(c_0)) : \{c_0\} \times \mathcal{D}^{op} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} (c_0, d) & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0)) \\ Id \Big\downarrow \Big\uparrow \psi & & \Big\downarrow F(Id)\circ(\ )\circ\psi \\ (c_0, d') & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(d', F(c_0)) \end{array}$$

Es decir, obtenemos el $\mathcal{D}-$espacio contravariante

$$mor_{\mathcal{D}}(??, F(c_0)) : \mathcal{D} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} d & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0)) \\ {\scriptstyle\psi}\Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\ )\circ\psi} \\ d^{'} & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(d^{'}, F(c_0)) \end{array}$$

Sea Y un $\mathcal{D}-$espacio contravariante. Entonces obtenemos el $\mathcal{C}-$espacio covariante

$$mor_{\mathcal{D}}(??, F(?)) \otimes_{\mathcal{D}} Y : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(??, F(c_0)) \otimes_{\mathcal{D}} Y \\ {\scriptstyle\varphi}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle (F(\varphi)\circ(\ ))\otimes Id} \\ {c_0}^{'} & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(??, F({c_0}^{'})) \otimes_{\mathcal{D}} Y \end{array}$$

$\square$

Lema 4.2.11. *Sea Y un $\mathcal{D}-$espacio covariante. Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor covariante. Entonces tenemos un homeomorfismo natural de $\mathcal{C}-$espacios*

$$mor_{\mathcal{D}}(??, F(?)) \otimes_{\mathcal{D}} Y \longrightarrow F^{*}Y$$

Demostración: Debemos probar que dados c_0, ${c_0}^{'} \in Ob(\mathcal{C})$ cualesquiera, el siguiente diagrama conmuta donde los renglones son homeomorfismos de espacios topológicos

$$\begin{array}{ccc} (mor_{\mathcal{D}}(??, F(?)) \otimes_{\mathcal{D}} Y)(c_0) & \underset{\cong}{\xrightarrow{H_{c_0}}} & F^{*}Y(c_0) \\ {\scriptstyle (F(\varphi)\circ(\ ))\otimes Id}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle F^{*}Y(\varphi)} \\ (mor_{\mathcal{D}}(??, F(?)) \otimes_{\mathcal{D}} Y)({c_0}^{'}) & \underset{\cong}{\xrightarrow{H_{{c_0}^{'}}}} & F^{*}Y({c_0}^{'}) \end{array}$$

y donde $\varphi : c_0 \longrightarrow {c_0}^{'}$ es un morfismo en $\mathcal{C}$.

Es decir demostraremos que el siguiente diagrama conmuta donde los renglones son homeomorfismos de espacios topológicos

$$\begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(??, F(c_0)) \otimes_{\mathcal{D}} Y & \underset{\cong}{\xrightarrow{H_{c_0}}} & Y \circ F(c_0) \\ {\scriptstyle (F(\varphi)\circ(\ ))\otimes Id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Y\circ F(\varphi)} \\ mor_{\mathcal{D}}(??, F({c_0}')) \otimes_{\mathcal{D}} Y & \underset{\cong}{\xrightarrow{H_{{c_0}'}}} & Y \circ F({c_0}') \end{array}$$

Primero probaremos que H_{c_0} es un homeomorfismo para cada objeto c_0 en $\mathcal{C}$:
Tenemos que

$$mor_{\mathcal{D}}(??, F(c_0)) \otimes_{\mathcal{D}} Y \equiv \Big(\coprod_{d \in Ob(\mathcal{D})} mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0)) \times Y(d) \Big) \Big/ \sim$$

Entonces definimos

$$\begin{array}{ccc} \Big(\coprod_{d \in Ob(\mathcal{D})} mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0)) \times Y(d) \Big) \Big/ \sim & \xrightarrow{H} & Y \circ F(c_0) \\ (d \xrightarrow{f} F(c_0), y) & \mapsto & Y(f)(y) \end{array}$$

donde $Y(f) : Y(d) \longrightarrow Y(F(c_0))$.

Y definimos

$$\begin{array}{ccc} Y \circ F(c_0) & \xrightarrow{J} & \Big(\coprod_{d \in Ob(\mathcal{D})} mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0)) \times Y(d) \Big) \Big/ \sim \\ y & \mapsto & (F(c_0) \xrightarrow{Id} F(c_0), y) \end{array}$$

• *H está bien definida:*
Tenemos que $(mor_{\mathcal{D}}(??, F(c_0))(\psi)(x), y) = (x \circ \psi, y) \sim (x, Y(\psi)(y))$.
Entonces

$$H(x \circ \psi, y) = Y(x \circ \psi)(y) = (Y(x) \circ Y(\psi))(y) = Y(x)(Y(\psi)(y))$$

donde la última igualdad es porque tenemos una composición de funciones entre espacios topológicos.
Por otra parte,

$$H(x, Y(\psi)(y)) = Y(x)(Y(\psi)(y))$$

por tanto H está bien definida.

- *J es continua:*
  J es continua pues J es la composición de funciones continuas

$$\begin{array}{ccccc} Y \circ F(c_0) & \xrightarrow{i} & \coprod_{d \in Ob(\mathcal{D})} mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0)) \times Y(d) & \xrightarrow{\pi} & \Big(\coprod_{d \in Ob(\mathcal{D})} mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0)) \times Y(d) \Big) \Big/ \sim \\ y & \mapsto & (F(c_0) \xrightarrow{Id} F(c_0), y) & \mapsto & \overline{(F(c_0) \xrightarrow{Id} F(c_0), y)} \end{array}$$

  (i es continua pues en general para W y Z espacios topológicos $i : Z \longrightarrow W \times Z$, $z \mapsto (w_0, z)$ es continua).

- *H es continua:*
  Utilizaremos la siguiente

Proposición 4.2.12. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. Sea Y un espacio topológico. Entonces la topología compacto-abierta en $M(X,Y)$ es admisible. (Es decir, la función evaluación $e : M(X,Y) \times X \longrightarrow Y$, $(f : X \longrightarrow Y, x) \mapsto f(x)$ es continua.)* $\square$

Sea $H^{'}$ la composición

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{d \in Ob(\mathcal{D})} mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0)) \times Y(d) & \xrightarrow{\coprod s \times Id} & \coprod_{d \in Ob(\mathcal{D})} M(Y(d), Y(F(c_0))) \times Y(d) & \xrightarrow{e} & Y(F(c_0)) \\ (d \xrightarrow{f} F(c_0), y) & \longmapsto & (Y(d) \xrightarrow{Y(f)} Y(F(c_0)), y) & & \end{array}$$

entonces e es continua por la proposición 4.2.12 y $s : mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0)) \longrightarrow M(Y(d), Y(F(c_0)))$, $f \mapsto Y(f)$, es continua pues $mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0))$ tiene la topología discreta para cada $d \in Ob(\mathcal{D})$.
Entonces

$$\begin{array}{rccc} H^{'} : & \coprod_{d \in Ob(\mathcal{D})} mor_{\mathcal{D}}(d, F(c_0)) \times Y(d) & \longrightarrow & Y(F(c_0)) \\ & (d \xrightarrow{f} F(c_0), y) & \mapsto & Y(f)(y) \end{array}$$

es continua.
Dado que $H^{'}$ es 1-valuada al pasar al cociente bajo $\sim$, concluímos que H es continua.

- $HJ = Id$:
  $HJ(y) = H(F(c_0) \xrightarrow{Id} F(c_0), y) = Y(Id)(y) = y$, por tanto $HJ = Id$.

- $JH = Id$:
  $JH(d \xrightarrow{f} F(c_0), y) = J(Y(f)(y)) = (F(c_0) \xrightarrow{Id} F(c_0), Y(f)(y))$
  $\sim (mor_{\mathcal{D}}(??, F(c_0))(f)(F(c_0) \xrightarrow{Id} F(c_0)), y) = ((F(c_0) \xrightarrow{Id} F(c_0)) \circ f, y)$
  $= (d \xrightarrow{f} F(c_0), y)$, por tanto $JH = Id$.
  Concluímos que H_{c_0} es homemomorfismo de espacios topológicos para cada objeto c_0 en $\mathcal{C}$.

  Ahora probaremos que el diagrama que enunciamos al principio de la prueba conmuta:
  $(Y \circ F(\varphi)) \circ H_{c_0}(\ (d \xrightarrow{f} F(c_0)) \otimes y\ ) = (Y \circ F(\varphi))(Y(f)(y))$
  Por otra parte,
  $H_{c_0{}'} \circ ((F(\varphi) \circ (\ )) \otimes Id)(\ (d \xrightarrow{f} F(c_0)) \otimes y\ )$
  $= H_{c_0{}'}(\ (F(\varphi) \circ (d \xrightarrow{f} F(c_0))) \otimes y\ )$
  $= Y(F(\varphi) \circ f)(y)$
  $= (Y \circ F(\varphi))(Y(f)(y))$ pues Y es un funtor.
  Por tanto el diagrama conmuta. $\square$

Lema 4.2.13. *Sean X, X' $\mathcal{C}-$espacios covariantes. Sea $F : X \longrightarrow X'$ una aplicación de $\mathcal{C}-$espacios y sea Y un $\mathcal{C}-$espacio contravariante. Entonces F induce una aplicación continua entre los espacios topológicos*

$$Y \otimes_{\mathcal{C}} X \xrightarrow{\widetilde{F}} Y \otimes_{\mathcal{C}} X'$$

Demostración: Dados c, d objetos en $\mathcal{C}$ y $f : c \longrightarrow d$ un morfismo en $\mathcal{C}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X(c) \arrow[r, "F_c"] \arrow[d, "X(f)"'] & X'(c) \arrow[d, "X'(f)"] \\ X(d) \arrow[r, "F_d"] & X'(d) \end{tikzcd}$$

también tenemos los siguientes diagramas que nos determinan los productos tensoriales $Y \otimes_{\mathcal{C}} X$ y $Y \otimes_{\mathcal{C}} X'$ respectivamente:

$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & Y(c) \times X(c) \\ f \big\downarrow & & \big\uparrow Y(f) \quad \big\downarrow X(f) \\ d & \longrightarrow & Y(d) \times X(d) \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccc}
c & \longrightarrow & Y(c) \times X^{'}(c) \\
f \big\downarrow & & \big\uparrow Y(f) \quad \big\downarrow X^{'}(f) \\
d & \longrightarrow & Y(d) \times X^{'}(d)
\end{array}
$$

Definimos

$$
Y \otimes_{\mathcal{C}} X \equiv \Big(\coprod_{c \in Ob(\mathcal{C})} Y(c) \times X(c) \Big) \Big/ \sim \xrightarrow{\widetilde{F}} \Big(\coprod_{c \in Ob(\mathcal{C})} Y(c) \times X^{'}(c) \Big) \Big/ \sim \equiv Y \otimes_{\mathcal{C}} X^{'}
$$

$$
\overline{(y,x)} \longmapsto \overline{(y, F_c(x))}
$$

para ver que $\widetilde{F}$ es continua, basta probar que $\widetilde{F}$ está bien definida:
Tenemos que $(Y(f)(y), x) \sim (y, X(f)(x))$
entonces $\widetilde{F}(Y(f)(y), x) = (Y(f)(y), F_c(x))$
Por otra parte,
$\widetilde{F}(y, X(f)(x)) = (y, F_d(X(f)(x))) = (y, X^{'}(f)(F_c(x)))$ donde la última igualdad es porque el diagrama anterior conmuta.
Dado que $(Y(f)(y), F_c(x)) \sim (y, X^{'}(f)(F_c(x)))$ concluímos que $\widetilde{F}$ está bien definida y por tanto es continua. □

Ahora ya tenemos todos los elementos para enunciar y demostrar el lema principal de esta sección:

Lema 4.2.14. *Tenemos un homeomorfismo natural de adjunción de espacios topológicos*

$$
F_* X \otimes_{\mathcal{D}} Y \longrightarrow X \otimes_{\mathcal{C}} F^* Y
$$

Demostración: Por el lema 4.2.11 tenemos un homeomorfismo H de $\mathcal{C}-$espacios covariantes

$$
mor_{\mathcal{D}}(??, F(?)) \otimes_{\mathcal{D}} Y \xrightarrow{H} F^* Y
$$

aplicando el lema 4.2.13 a H obtenemos un homeomorfismo inducido $\widetilde{H}$ de espacios topológicos, componiendo $\widetilde{H}$ con el homeomorfismo que hace al producto tensorial asociativo obtenemos el resultado:

$$
F_* X \otimes_{\mathcal{D}} Y \equiv (\ X \otimes_{\mathcal{C}} mor_{\mathcal{D}}(??, F(?))\ ) \otimes_{\mathcal{D}} Y \xrightarrow{\cong} X \otimes_{\mathcal{C}} (\ mor_{\mathcal{D}}(??, F(?)) \otimes_{\mathcal{D}} Y\ ) \xrightarrow{\widetilde{H}} X \otimes_{\mathcal{C}} F^* Y
$$

□

4.3 El homeomorfismo de adjunción.

El objetivo de esta sección es demostrar el lema 4.3.3 el cual afirma que dados $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor covariante, X un $\mathcal{C}-$espacio covariante y Y un $\mathcal{D}-$espacio covariante entonces tenemos un homeomorfismo de espacios topológicos

$$hom_{\mathcal{C}}(X, F^{*}Y) \longrightarrow hom_{\mathcal{D}}(F_{*}X, Y)$$

Este es el segundo ingrediente para construír nuestro homomorfismo de ensamble.

Recordemos que según la definición 4.2.3 dado $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor covariante tenemos el $\mathcal{D} - \mathcal{C}$-espacio covariante

$$mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??) : \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{op} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} (d, c) & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(F(c), d) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow \; \uparrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi\circ(\ )\circ F(\psi)} \\ (d', c') & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(F(c'), d') \end{array}$$

si fijamos un objeto c_0 en $\mathcal{C}$ obtenemos el $\mathcal{D}-$espacio covariante

$$mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), ??) : \mathcal{D} \times \{c_0\}^{op} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} (d, c_0) & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow \; \uparrow{\scriptstyle Id} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi\circ(\ )} \\ (d', c_0) & \longrightarrow & mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d') \end{array}$$

Definición 4.3.1. *Sea Y un $\mathcal{D}-$espacio covariante. Usaremos el $\mathcal{D}-\mathcal{C}-$espacio $mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??)$ anterior para definir el $\mathcal{C}-$espacio covariante*

$$hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??), Y\ ) : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \longrightarrow & hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), ??), Y\ ) \\ {\scriptstyle\psi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(?),??),Y\ )(\psi)} \\ {c_0}' & \longrightarrow & hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F({c_0}'), ??), Y\ ) \end{array}$$

donde

$$hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0{}'), ??), Y\ ) \xrightarrow{hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??), Y\ )(\psi)} hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), ??), Y\ )$$

$$\begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c_0{}'), d) & \xrightarrow{T_d} & Y(d) \\ \varphi(\ )\downarrow & & \downarrow Y(\varphi) \\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0{}'), d') & \xrightarrow{T_{d'}} & Y(d') \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) & \xrightarrow{T_d((\ )\circ F(\psi))} & Y(d) \\ \varphi(\ )\downarrow & & \downarrow Y(\varphi) \\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d') & \xrightarrow{T_{d'}((\ )\circ F(\psi))} & Y(d') \end{array}$$

con $\varphi : d \longrightarrow d'$ morfismo en $\mathcal{D}$.

Lema 4.3.2. *Sea Y un $\mathcal{D}-$espacio covariante. Entonces tenemos un homeomorfismo natural entre $\mathcal{C}-$espacios covariantes*

$$F^*Y \longrightarrow hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??), Y\ )$$

Demostración: Sea c_0 un objeto en $\mathcal{C}$. Definimos

$$\begin{array}{ccc} F^*Y(c_0) \equiv Y \circ F(c_0) & \xrightarrow{\varphi} & hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), ??), Y\ ) \\ y & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) & \xrightarrow{T_d} & Y(d) \\ (F(c_0) \xrightarrow{g} d) & \mapsto & Y(g)(y) \end{array} \right\}_{d \in Ob(\mathcal{D})} \end{array}$$

y definimos

$$\begin{array}{ccc} hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), ??), Y\ ) & \xrightarrow{\phi} & F^*Y(c_0) \equiv Y \circ F(c_0) \\ \{mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) \xrightarrow{T_d} Y(d)\}_{d \in Ob(\mathcal{D})} & \mapsto & T_{F(c_0)}(F(c_0) \xrightarrow{Id} F(c_0)) \end{array}$$

donde $T_{F(c_0)} : mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), F(c_0)) \longrightarrow Y(F(c_0))$.

- $\phi\varphi = Id$: Sea $y \in Y \circ F(c_0)$ entonces

$$\begin{aligned} \phi\varphi(y) &= \phi\left(\left\{ \begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) & \xrightarrow{T_d} & Y(d) \\ (F(c_0) \xrightarrow{g} d) & \mapsto & Y(g)(y) \end{array} \right\}_{d \in Ob(\mathcal{D})}\right) \\ &= T_{F(c_0)}(F(c_0) \xrightarrow{Id} F(C_0)) = Y(F(c_0) \xrightarrow{Id} F(C_0))(y) \\ &= Id(y) = y \end{aligned}$$

- $\varphi\phi = Id$:

  Sea $\{mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) \xrightarrow{S_d} Y(d)\}_{d \in Ob(\mathcal{D})}$ una aplicación de $\mathcal{D}$-espacios en $hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??), Y\ )$.

$\varphi\phi(\ \{mor_{\mathcal{D}}(F(c_0),d) \xrightarrow{S_d} Y(d)\}_{d\in Ob(\mathcal{D})}\ )$
$= \varphi(\ S_{F(c_0)}(F(c_0) \xrightarrow{Id} F(C_0))\ )$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c_0),d) & \xrightarrow{T_d} & Y(d) \\ (F(c_0) \xrightarrow{g} d) & \mapsto & Y(g)(\ S_{F(c_0)}(F(c_0) \xrightarrow{Id} F(C_0))\ ) \end{array} \right\}_{d\in Ob(\mathcal{D})}$$

Afirmamos que $T_d = S_d$; en efecto, dado que S es una transformación natural el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} mor_{\mathcal{D}}(F(c_0),d) \arrow[r, "S_d"] & Y(d) \\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0),F(c_0)) \arrow[u, "g(\ )"] \arrow[r, "S_{F(c_0)}"] & Y(F(c_0)) \arrow[u, "Y(g)"'] \end{tikzcd}$$

Entonces
$T_d(F(c_0) \xrightarrow{g} d)$
$= Y(g)(\ S_{F(c_0)}(F(c_0) \xrightarrow{Id} F(c_0))\ )$
$= S_d \circ (\ g(F(c_0) \xrightarrow{Id} F(c_0))\ )$ pues el diagrama conmuta.
$= S_d(g : F(c_0) \longrightarrow d)$
Por tanto $T_d = S_d$ para todo objeto d en $\mathcal{D}$ y así $T = S$.

- *φ está bien definida, es decir, $Im\varphi \subseteq hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(?),??),Y\ )$:*
Probaremos que

$$\varphi(y) \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c_0),d) & \xrightarrow{T_d} & Y(d) \\ (F(c_0) \xrightarrow{g} d) & \mapsto & Y(g)(y) \end{array} \right\}_{d\in Ob(\mathcal{D})}$$

es una transformación natural, es decir debemos probar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} mor_{\mathcal{D}}(F(c_0),d) \arrow[r, "T_d"] \arrow[d, "\varphi(\ )"'] & Y(d) \arrow[d, "Y(\varphi)"] \\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0),d') \arrow[r, "T_{d'}"] & Y(d') \end{tikzcd}$$

con $\varphi : d \longrightarrow d'$ un morfismo en $\mathcal{D}$.
Sea $(\ g : F(c_0) \longrightarrow d\ ) \in mor_{\mathcal{D}}(F(c_0),d)$ entonces
$Y(\varphi) \circ T_d(g) = Y(\varphi) \circ Y(g)(y)$

Por otra parte,
$T_{d'}(\varphi \circ g) = Y(\varphi \circ g)(y) = (Y(\varphi) \circ Y(g))(y)$ pues Y es un funtor.
$= (Y(\varphi)) \circ Y(g)(y)$ pues es una composición de funciones.
Por tanto el diagrama conmuta y así, φ está bien definida.

- *φ es una $\mathcal{C}-$biyección natural:*
Es decir, debemos demostrar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Y \circ F(c) & \xrightarrow{\varphi_c} & hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c), ??), Y\ ) \\ {\scriptstyle Y\circ F(h)}\big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(?),??),Y\ )(h)} \\ Y \circ F(c^{'}) & \xrightarrow{\varphi_{c'}} & hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c^{'}), ??), Y\ ) \end{array}$$

con $h : c \longrightarrow c^{'}$ un morfismo en $\mathcal{C}$ y con

$$(\ hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??), Y\ )(h)\ )(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c), d) \xrightarrow{T_d} Y(d)\ )$$
$$= (\ mor_{\mathcal{D}}(F(c^{'}), d) \xrightarrow{T_d((\ )\circ F(h))} Y(d)\ ).$$

Tenemos que
$(\ hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??), Y\ )(h)\ ) \circ \varphi_c(y) =$

$$(\ hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(?), ??), Y\ )(h)\ ) \left(\left\{ \begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c), d) & \xrightarrow{T_d} & Y(d) \\ (F(c) \xrightarrow{g} d) & \mapsto & Y(g)(y) \end{array} \right\}_{d \in Ob(\mathcal{D})} \right)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c^{'}), d) & \xrightarrow{T_d((\ )\circ F(h))} & Y(d) \\ (F(c^{'}) \xrightarrow{g^{'}} d) & \mapsto & Y(g^{'} \circ F(h))(y) \end{array} \right\}_{d \in Ob(\mathcal{D})}$$

Por otra parte,

$\varphi_{c'} \circ (Y \circ F(h))(y) = \varphi_{c'}(\ Y \circ F(h)(y)\ )$

$$= \left\{ \begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c^{'}), d) & \xrightarrow{S_d} & Y(d) \\ (F(c^{'}) \xrightarrow{g^{'}} d) & \mapsto & Y(g^{'})(\ Y \circ F(h)(y)\ ) \end{array} \right\}_{d \in Ob(\mathcal{D})}$$

Pero $Y(g^{'})(\ Y \circ F(h)(y)\ ) = (\ Y(g^{'})Y \circ F(h)\ )(y) = Y(\ g^{'} \circ F(h)\ )(y)$

Por tanto $T = S$ y así el diagrama conmuta, por tanto φ es $\mathcal{C}-$biyección natural.

- *φ_{c_0} es continua para cada objeto c_0 en $\mathcal{C}$:*

Primero demostraremos que dados $c_0 \in Ob(\mathcal{C})$, $d \in Ob(\mathcal{D})$

$$\begin{array}{rcl} Y(F(c_0)) \times mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) & \longrightarrow & Y(d) \\ (y, g) & \mapsto & Y(g)(y) \end{array}$$

es continua, lo cual se tiene porque es la siguiente composición de aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} Y(F(c_0)) \times mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) & \xrightarrow{Id \times s} & Y(F(c_0)) \times M(Y(F(c_0)), Y(d)) \\ (y, g) & \mapsto & (y, Y(g)) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & M(Y(F(c_0)), Y(d)) \times Y(F(c_0)) & \stackrel{e}{\rightarrow} & Y(d) \\ \mapsto & (Y(g), y) & \mapsto & Y(g)(y) \end{array}$$

Usando el **teorema de la aplicación exponencial** tenemos el homeomorfismo

$$M(\ Y(F(c_0)) \times mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d), Y(d)\ ) \stackrel{\cong}{\longrightarrow} M(\ Y(F(c_0)), M(mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d), Y(d))\ )$$

Dado por

$$\left(\begin{array}{ccc} Y(F(c_0)) \times mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) & \longrightarrow & Y(d) \\ (y, g) & \mapsto & Y(g)(y) \end{array} \right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc} Y(F(c_0)) & \longrightarrow & M(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d), Y(d)\ ) \\ y & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) & \xrightarrow{T_d} & Y(d) \\ g & \mapsto & Y(g)(y) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

y obtenemos que

$$Y(F(c_0)) \longrightarrow M(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d), Y(d)\ )$$

es continua. Entonces

$$Y(F(c_0)) \longrightarrow \prod_{d \in Ob(\mathcal{D})} M(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d), Y(d)\ )$$

$$y \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) & \xrightarrow{T_d} & Y(d) \\ (g : F(c_0) \longrightarrow d) & \mapsto & Y(g)(y) \end{array} \right\}_{d \in Ob(\mathcal{D})}$$

es continua pues cada entrada es continua.

Por tanto la restricción

$$Y(F(c_0)) \xrightarrow{\varphi_{c_0}} hom_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), ??), Y\ )$$

es continua para cada objeto c_0 en $\mathcal{C}$.

- ϕ_{c_0} *es continua para cada objeto* c_0 *en* $\mathcal{C}$:
  Debemos probar que

  $\prod_{d\in Ob(\mathcal{D})} M(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d), Y(d)\ ) \longrightarrow Y(F(c_0))$

  $$\{mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) \xrightarrow{T_d} Y(d)\}_{d\in Ob(\mathcal{D})} \ \mapsto\ T_{F(c_0)}(Id : F(c_0) \longrightarrow F(c_0))$$

  es continua, lo cual se obtiene de notar que es la composición de aplicaciones

  $\prod_{d\in Ob(\mathcal{D})} M(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d), Y(d)\ )$

  $$\xrightarrow{\pi_{F(c_0)}} M(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), F(c_0)), Y(F(c_0))\ ) \times \{Id : F(c_0) \xrightarrow{F} (c_0)\}$$

  $$\xrightarrow{\ \ i\ \ } M(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), F(c_0)), Y(F(c_0))\ ) \times mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), F(c_0))$$
  $$\xrightarrow{\ \ e\ \ } Y(F(c_0))$$

  donde i es la inclusión, e es la aplicación valuación y $\pi_{F(c_0)}$ está definida por

  $$\pi_{F(c_0)}(\ \{mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), d) \xrightarrow{T_d} Y(d)\}_{d\in Ob(\mathcal{D})}\ )$$
  $$= (\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), F(c_0)) \xrightarrow{T_{F(c_0)}} Y(F(c_0)), Id\ )$$

  Por tanto la restricción

  $$\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(\ mor_{\mathcal{D}}(F(c_0), ??), Y\ ) \xrightarrow{\phi_{c_0}} F^*Y$$

  es continua. □

Lema 4.3.3. *Sea* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *un funtor covariante. Sean* X *un* $\mathcal{C}-$*espacio covariante y* Y *un* $\mathcal{D}-$*espacio covariante. Entonces tenemos un homeomorfismo de espacios topológicos*

$$hom_{\mathcal{C}}(X, F^*Y) \longrightarrow hom_{\mathcal{D}}(F_*X, Y)$$

Demostración: Aplicar el lema 4.3.2. □

4.4 Aproximaciones $\mathcal{C}-CW$, colímite y colímite homotópico.

En esta sección introducimos el concepto de $\mathcal{C} - CW$ complejo libre y aproximación $\mathcal{C} - CW$ lo cual nos permitirá definir el $\mathcal{C} - CW$ complejo libre contraíble $E\mathcal{C}$. Demostraremos que $E\mathcal{C}$ existe y es único salvo homotopía.

Después dado un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ covariante, demostraremos que existe una aplicación de $\mathcal{C}-$espacios $E\mathcal{C} \longrightarrow F^*E\mathcal{D}$ la cual es única salvo homotopía.

Y por otra parte, utilizando la definición de $E\mathcal{C}$ podremos definir el concepto de colímite homotópico de un $\mathcal{C}-$espacio y de un $\mathcal{C}-$espectro. También definiremos el concepto de colímite, discutiremos las propiedades universales del colímite y del colímite homotópico y veremos cuando coinciden estos dos conceptos.

Observación 4.4.1. *Las nociones de producto, coproducto, límite y colímite existen en la categoría de $\mathcal{C}-$espacios. Por ejemplo el coproducto de un diagrama de $\mathcal{C}-$espacios covariantes*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Z \\ Y & \end{tikzcd}$$

(donde ψ φ son aplicaciones de $\mathcal{C}-$espacios) está definido como el funtor $P : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS$ cuyo valor en un objeto c en $\mathcal{C}$ es el coproducto $P(c)$ del siguiente diagrama de espacios topológicos

$$\begin{tikzcd} X(c) \arrow[r, "\psi(c)"] \arrow[d, "\varphi(c)"'] & Z(c) \arrow[d, "p_2(c)"] \\ Y(c) \arrow[r, "p_1(c)"] & P(c) \end{tikzcd}$$

Veamos como se define P en morfismos.

El diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} (X : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & (Z : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS) \arrow[d, "p_2"] \\ (Y : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS) \arrow[r, "p_1"] & (P : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS) \end{tikzcd}$$

Se traduce en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & X(c) \arrow[r, "\psi(c)"] \arrow[dll, "X(f)"'] \arrow[d, "\varphi(c)"'] & Z(c) \arrow[d, "p_2(c)"] \arrow[dll, "Z(f)"] \\
X(d) \arrow[r, "\psi(d)"] \arrow[d, "\varphi(d)"'] & Z(d) \arrow[d, "p_2(d)"] & Y(c) \arrow[r, "p_1(c)"'] \arrow[dll, "Y(f)"'] & P(c) \arrow[dll, dotted, "P(f)"] \\
Y(d) \arrow[r, "p_1(d)"'] & P(d) & &
\end{tikzcd}$$

donde $f : c \longrightarrow d$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ y donde $P(f) : P(c) \longrightarrow P(d)$ se define de la siguiente manera:

Dado que el cubo anterior conmuta y $P(c)$ es un coproducto entonces existe un único morfismo $P(f)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X(c) \arrow[r, "\psi(c)"] \arrow[d, "\varphi(c)"'] & Z(c) \arrow[d, "p_2(c)"'] \arrow[ddr, bend left, "p_2(d)\circ Z(f)"] & \\
Y(c) \arrow[r, "p_1(c)"] \arrow[drr, bend right, "p_1(d)\circ Y(f)"'] & P(c) \arrow[dr, dotted, "P(f)"] & \\
 & & P(d)
\end{tikzcd}$$

Esta definición de $P(f)$ implica que los diagramas siguientes conmutan

$$\begin{tikzcd}
Y(c) \arrow[r, "p_1(c)"] \arrow[d, "Y(f)"'] & P(c) \arrow[d, "P(f)"] \\
Y(d) \arrow[r, "p_1(d)"] & P(d)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z(c) \arrow[r, "p_2(c)"] \arrow[d, "Z(f)"'] & P(c) \arrow[d, "P(f)"] \\
Z(d) \arrow[r, "p_2(d)"] & P(d)
\end{tikzcd}$$

Por tanto $p_1 : Y \longrightarrow P$ y $p_2 : Z \longrightarrow P$ son transformaciones naturales, es decir, aplicaciones de $\mathcal{C}-$espacios. El hecho de que $P : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS$ es funtor y coproducto es consecuencia de nuestras definiciones. $\square$

Definición 4.4.2. *Un $\mathcal{C}-CW-$complejo libre contravariante X es un $\mathcal{C}-$espacio contravariante junto con una filtración de $\mathcal{C}-$espacios*

$$\phi = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X = \bigcup_{n\geq 0} X_n$$

tal que $X = colim_{n\to\infty} X_n$ *(es decir,* $X(c) = \bigcup_{n\geq 0} X_n(c)$ *para cada objeto* $c \in \mathcal{C}$*) y para cada* $n \geq 0$ *el* $n-$*esqueleto* X_n *se obtiene del* $(n-1)-$*esqueleto* X_{n-1} *identificando* $\mathcal{C} - n-$*celdas libres contravariantes, es decir, existe un coproducto de* $\mathcal{C}-$*espacios de la forma*

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i\in I_n} mor_{\mathcal{C}}(\_\_\, , c_i) \times S^{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i\in I_n} mor_{\mathcal{C}}(\_\_\, , c_i) \times D^{n} & \longrightarrow & X_{n} \end{array}$$

donde las flechas verticales son inclusiones, I_n *es un conjunto de índices y los* c_i *son objetos en* $\mathcal{C}$*.*

Llamaremos a la aplicación inclusion de $\mathcal{C}-$*espacios*

$$\coprod_{i\in I_n} mor_{\mathcal{C}}(\_\_\, , c_i) \times \ int\ D^n \longrightarrow X$$

$\mathcal{C} - n-$*celda libre basada en* c_i*.*

Un $\mathcal{C}-CW-$*complejo libre tiene dimensión* $\leq n$ *si* $X = X_n$*. La definición de un* $\mathcal{C} - CW-$*complejo libre covariante es análoga.*

Observación 4.4.3. *Note que el* $\mathcal{C}-$*espacio contravariante (covariante) que envía todo objeto a un punto no es en general un* $\mathcal{C} - CW-$*complejo libre, pero lo es cuando la categoría* $\mathcal{C}$ *tiene un objeto final (inicial).*

Definición 4.4.4. *Una aplicación* $f : X \longrightarrow Y$ *de* $\mathcal{C}-$*espacios es* $n-$*conexa (una equivalencia homotópica débil) si para cada objeto* c *en* $\mathcal{C}$ *la aplicación de espacios* $f(c) : X(c) \longrightarrow Y(c)$ *es* $n-$*conexa (una equivalencia homotópica débil).*

Definición 4.4.5. *Sea* (X, A) *un par de* $\mathcal{C}-$*espacios (esto es, para cada* $c \in \mathcal{C}$, $A(c) \subseteq X(c)$*). Una* $\mathcal{C} - CW-$*aproximación*

$$(u, v) : (X^{'}, A^{'}) \longrightarrow (X, A)$$

es un $\mathcal{C} - CW-$*par libre* $(X^{'}, A^{'})$ *junto con aplicaciones de* $\mathcal{C}-$*espacios.*

$$u : X^{'} \longrightarrow X$$

$$v : A^{'} \longrightarrow A$$

tal que u *y* v *son equivalencias homotópicas débiles de* $\mathcal{C}-$*espacios.*

Definición 4.4.6. *Una $\mathcal{C}-CW-$aproximación de un $\mathcal{C}-$espacio X es una $\mathcal{C}-CW-$aproximación del par (X,ϕ).*

Usaremos el siguiente

Teorema 4.4.7. *Sea (X,A) un par de $\mathcal{C}-$espacios.*
1.(Existencia) Existe una $\mathcal{C}-CW-$aproximación de (X,A).
2.(Unicidad) Dada una aplicación de pares de $\mathcal{C}-$espacios $(f,g):(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ y dadas $\mathcal{C}-CW-$aproximaciones $(u,v):(X^{'},A^{'})\longrightarrow(X,A)$ y $(a,b):(Y^{'},B^{'})\longrightarrow(Y,B)$ entonces existe una aplicación de pares $(f^{'},g^{'}):(X^{'},A^{'})\longrightarrow(Y^{'},B^{'})$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (X^{'},A^{'}) & \xrightarrow{(u,v)} & (X,A) \\ {\scriptstyle (f^{'},g^{'})}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (f,g)} \\ (Y^{'},B^{'}) & \xrightarrow{(a,b)} & (Y,B) \end{array}$$

conmuta salvo homotopía. Además la aplicación de $\mathcal{C}-$espacios $(f^{'},g^{'})$ es única salvo homotopía.

Demostración: [8], Teorema 3.7. □

Observación 4.4.8. *Tomando $(f,g)=(Id,Id)$ en el teorema 4.4.7 tenemos que las $\mathcal{C}-CW-$aproximaciones de una pareja de $\mathcal{C}-$espacios existen y son únicas salvo homotopía.* □

Definición 4.4.9. *El $\mathcal{C}-$espacio trivial $\{*\}$ se define como el funtor*

$$\{*\}:\mathcal{C}\longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} c & \longrightarrow & \{*\} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle Id} \\ d & \longrightarrow & \{*\} \end{array}$$

para cada morfismo $f:c\longrightarrow d$, con c, d objetos en $\mathcal{C}$.

Definición 4.4.10. *Sea $E\mathcal{C}$ cualquier $\mathcal{C}-CW-$complejo libre tal que $E\mathcal{C}(c)$ es contraíble para cada objeto c en $\mathcal{C}$.*

Observación 4.4.11. *Note que dada una categoría $\mathcal{C}$, $E\mathcal{C}$ existe y es único salvo homotopía por le teorema 4.4.7.*

Demostración: Observe que $E\mathcal{C}$ es una $\mathcal{C}-CW-$aproximación para $\{*\}$:

$$(E\mathcal{C},\phi) \xrightarrow{(u,Id)} (\{*\},\phi)$$

$$\begin{array}{ccc} E\mathcal{C}(c) & \xrightarrow{E\mathcal{C}(f)} & E\mathcal{C}(d) \\ {\scriptstyle u(c)=u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u(d)=u} \\ \{*\}(c)=\{*\} & \longrightarrow & \{*\}(d)=\{*\} \end{array}$$

por tanto $E\mathcal{C}$ es una $\mathcal{C}-CW-$aproximación para el $\mathcal{C}-$espacio trivial y podemos aplicar el teorema 4.4.7. □

Dado un funtor $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ covariante, el siguiente teorema nos permitirá demostrar que existe una aplicación de $\mathcal{C}-$espacios

$$E\mathcal{C}\longrightarrow F^*E\mathcal{D}$$

la cual es única salvo homotopía.

Teorema 4.4.12. *Sea $f:Y\longrightarrow Z$ una aplicación de $\mathcal{C}-$espacios y sea X un $\mathcal{C}-$espacio. Denotemos por*

$$f_*:[X,Y]^{\mathcal{C}}\longrightarrow[X,Z]^{\mathcal{C}}$$

a la aplicación entre clases de homotopía de aplicaciones entre $\mathcal{C}-$espacios inducida por la composición con f.

(1) Entonces f es $n-$conexa si y sólo si f_* es biyectiva para cada $\mathcal{C}-CW$ complejo libre X con dim(X) $<n$ y sobreyectiva para cada $\mathcal{C}-CW$ complejo libre X con dim(X) $\leq n$.

(2) Entonces f es una equivalencia homotópica débil si y sólo si f_* es biyectiva para cada $\mathcal{C}-CW$ complejo libre X.

Demostración: [8], teorema 3.4, página 23. □

Observación 4.4.13. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías pequeñas. Sea $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ un funtor covariante. Aplicando el teorema 4.4.12* (2) *a la equivalencia homotópica débil de $\mathcal{C}-$espacios*

$$F^*E\mathcal{D}\xrightarrow{f}\{*\}$$

obtenemos una biyección

$$f_* : [E\mathcal{C}, F^*E\mathcal{D}]^{\mathcal{C}} \longrightarrow [E\mathcal{C}, \{*\}]^{\mathcal{C}}$$

Dado que $[E\mathcal{C}, \{*\}]^{\mathcal{C}}$ *tiene una sola clase de homotopía concluímos que existe una aplicación de* $\mathcal{C}-$*espacios*

$$E\mathcal{C} \longrightarrow F^*E\mathcal{D}$$

y además es única salvo homotopía.

Nota: En la seccion 4.5 construiremos un modelo para $E\mathcal{C}$ que denotaremos por $E^{bar}\mathcal{C}$, después en la sección 4.6 construiremos una aplicación de de $\mathcal{C}-$espacios $E\mathcal{C} \longrightarrow F^*E\mathcal{D}$ **funtorial**.

Definición 4.4.14. *Sea* X *un* $\mathcal{C}-$*espacio covariante. Definimos el colímite homotópico de* X *sobre* $\mathcal{C}$ *como el espacio topológico*

$$\underset{\mathcal{C}}{hocolim}\ X = E\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}} X$$

Definición 4.4.15. *Sea* $\mathbf{E}$ *un* $\mathcal{C}-$*espectro covariante. Definimos el colímite homotópico de* $\mathbf{E}$ *sobre* $\mathcal{C}$ *como el espectro*

$$\underset{\mathcal{C}}{hocolim}\ \mathbf{E} = E\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}} \mathbf{E}$$

Nota: La propiedad mas importante del colímite homotópico es que si $X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica débil entre $\mathcal{C}-$espacios covariantes entonces también lo es la aplicación inducida $\underset{\mathcal{C}}{hocolim} X \longrightarrow \underset{\mathcal{C}}{hocolim} Y$ lo cual es consecuencia del siguiente

Teorema 4.4.16. *Sea* $f : X \longrightarrow Z$ *una equivalencia homotópica débil de* $\mathcal{C}-$*espacios covariantes. Sea* X *un* $\mathcal{C}-CW-$*complejo libre contravariante. Entonces la aplicación inducida*

$$Id \otimes_{\mathcal{C}} f : X \otimes_{\mathcal{C}} Y \longrightarrow X \otimes_{\mathcal{C}} Z$$

es una equivalencia homotópica débil.

Demostración: [8], Teorema 3.11. □

Ahora definiremos el colímite para un $\mathcal{C}-$espacio ($\mathcal{C}-$espectro) contravariante y compararemos su propiedad universal con la propiedad universal del colímite homotópico.

Definición 4.4.17. *Sea X un $\mathcal{C}-$espacio covariante. Definimos el colímite de X sobre $\mathcal{C}$ como el espacio topológico*

$$\underset{\mathcal{C}}{colim}\ X = \{*\} \otimes_{\mathcal{C}} X$$

Definición 4.4.18. *Sea $\mathbf{E}$ un $\mathcal{C}-$espectro covariante. Definimos el colímite de $\mathbf{E}$ sobre $\mathcal{C}$ como el espectro*

$$\underset{\mathcal{C}}{colim}\ \mathbf{E} = \{*\} \otimes_{\mathcal{C}} \mathbf{E}$$

Propiedad Universal del Colímite para $\mathcal{C}-$espacios.

Sea X un $\mathcal{C}-$espacio covariante. Definimos $\underset{\mathcal{C}}{colim}\ X$ como una pareja $(C, \{\varphi_c\}_{c\in Ob(\mathcal{C})})$ donde C es un espacio topológico y $\varphi_c : X(c) \to C$ es una colección de aplicaciones con las siguientes propiedades:

Para cada par de objetos c, d en $\mathcal{C}$ y cada morfismo $f : c \to d$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X(c) \arrow[rr, "X(f)"] \arrow[dr, "\varphi_c"'] & & X(d) \arrow[dl, "\varphi_d"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Dado cualquier par $(N, \{\psi_c\}_{c\in Ob(\mathcal{C})})$ donde N es un espacio topológico y $\psi_c : X(c) \to C$ es una colección de aplicaciones con la propiedad de que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X(c) \arrow[rr, "X(f)"] \arrow[dr, "\psi_c"'] & & X(d) \arrow[dl, "\psi_d"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

conmuta, existe una única aplicación $u : C \longrightarrow N$ tal que los tres triángulos en el diagrama siguiente conmutan

$$\begin{tikzcd}
X(c) \arrow[rr, "X(f)"] \arrow[dr, "\varphi_c"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_c"'] & & X(d) \arrow[dl, "\varphi_d"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_d"] \\
& C \arrow[d, dotted, "u"] & \\
& N &
\end{tikzcd}$$

Usando la propiedad universal del colímite es fácil checar que un modelo para el colímite está dado por el de la definición 4.4.17.

La propiedad universal del colímite para $\mathcal{C}-$espectros es análoga.

Propiedad universal del colímite homotópico.

Aunque tenemos definidas aplicaciones ψ_c, ψ_d que hacen conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X(c) \arrow[rr, "X(f)"] \arrow[dr, "\psi_c"'] & & X(d) \arrow[dl, "\psi_d"] \\
& E\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}} X &
\end{tikzcd}$$

(para $X : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS_+$), la propiedad universal del colímite homotópico no se enuncia en términos tan directos como la propiedad universal del colímite.

Veamos el siguiente ejemplo: Sea $\mathcal{D}$ la categoría $\{a \leftarrow b \rightarrow c\}$ y sea $\mathcal{B}^{\mathcal{D}}$ la categoría de funtores $\mathcal{D} \longrightarrow C$, donde $\mathcal{B}$ es una categoría modelo ([9] página 12.) (En nuestro caso tomamos $\mathcal{B} = ESPACIOS_+$). Entonces un objeto de $\mathcal{B}^{\mathcal{D}}$ se interpreta como un diagrama

$$X(a) \leftarrow X(b) \rightarrow X(c).$$

Es posible que el colímite de este diagrama no tenga la "propiedad homotópica correcta" y para corregir este problema en vez de tomar el colímite de ese diagrama debemos reemplazar a $X(b)$ por un objeto cofibrante y a las aplicaciones $X(a) \leftarrow X(b)$ y $X(b) \rightarrow X(c)$ por cofibraciones y entonces tomar el colímite del nuevo diagrama. Llamamos a este colímite colímite homotópico. La propiedad universal del colímite homotópico es enunciada con precisión en [9] páginas 46, 47, 48 y 49.

Nota: Tenemos una aplicación entre espacios topológicos

$$\underset{\mathcal{C}}{hocolim}\ X \longrightarrow \underset{\mathcal{C}}{colim}\ X$$

la cual no es en general una equivalencia homotópica débil, sin embargo tenemos la siguiente

Observación 4.4.19. *Por la observación 4.4.3 cuando $\mathcal{C}$ tiene un objeto final F podemos tomar $E\mathcal{C} = \{*\}$ y entonces tenemos una equivalencia homotópica entre $\underset{\mathcal{C}}{hocolim}\ X$ y $\underset{\mathcal{C}}{colim}\ X$. Además usando la propiedad universal del colímite es fácil checar que $\underset{\mathcal{C}}{colim}\ X \cong X(F)$. Por tanto en este caso tenemos que $\underset{\mathcal{C}}{hocolim}\ X$ es homotópicamente equivalente a $X(F)$.*

4.5 El $\mathcal{C}-$espacio $E^{bar}\mathcal{C}$.

En esta sección construíremos funtorialmente un modelo para el $\mathcal{C}-$espacio $E\mathcal{C}$ definido en la sección 4.4. Denotaremos a dicho modelo por $E^{bar}\mathcal{C}$.

Lema 4.5.1. *Sean X, X' $\mathcal{C}-$espacios contravariantes. Sea $F : X \longrightarrow X'$ una aplicación de $\mathcal{C}-$espacios. Sea Y un $\mathcal{C}-$espacio covariante. Entonces tenemos una aplicación de espacios topológicos inducida por F*

$$X \otimes_{\mathcal{C}} Y \xrightarrow{\widetilde{F}} X' \otimes_{\mathcal{C}} Y$$

Demostración: Solo daremos la definición de $\widetilde{F}$, la prueba es totalmente análoga a la prueba del lema 4.2.13.

$$\widetilde{F}(x \otimes y) = F_c(x) \otimes y$$

para $(x, y) \in X(c) \times Y(c)$ □

Definición 4.5.2. *Sea Δ la categoría cuyos objetos son conjuntos finitos ordenados, es decir, para cada entero no negativo p tenemos un objeto $[p] = \{0, 1, \ldots, p\}$ y un morfismo entre dos objetos $[p]$ y $[q]$ es una función $[p] \xrightarrow{f} [q]$ tal que $i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)\ \forall\ i,\ j \in [p]$.*

Definición 4.5.3. *Un espacio simplicial X es un $\Delta-$espacio contravariante.*

Definición 4.5.4. *Un conjunto simplicial X es un $\Delta-$conjunto contravariante. Puede considerarse como un espacio simplicial usando la topología discreta.*

Definición 4.5.5. *Definimos un $\Delta-$espacio*

$$\triangle : \Delta \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{array}{ccc} [p] & \longrightarrow & \triangle_p \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \triangle(f)} \\ [q] & \longrightarrow & \triangle_q \end{array}$$

donde $\triangle_p$, $\triangle_q$ son el $p-$simplejo estándar y el $q-$simplejo estándar respectivamente y $\triangle(f)$ es la obvia aplicación simplicial asociada a f.

Definición 4.5.6. *La realización geométrica $|X|$ de un espacio simplicial X es el espacio topológico $X \otimes_{\Delta} \triangle$.*

Nota: La realización geométrica de un conjunto simplicial tiene la estructura de un complejo CW donde cada $p-$simplejo no degenerado corresponde a una $p-$celda.

Observación 4.5.7. *Podemos pensar al conjunto ordenado $[p] = \{0, 1, 2, \ldots, p\}$ como una categoría, donde los objetos son los enteros $0, 1, 2, \ldots, p$ y dados i, $j \in [p]$ existe un único morfismo $i \to j$ si y sólo si $i \leq j$.*

Así podemos definir un funtor covariante

$$[\ ] : \Delta \longrightarrow CAT$$

de la categoría de conjuntos finitos ordenados Δ en la categoría de categorías pequeñas CAT.

Definición 4.5.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña. El nervio de $\mathcal{C}$ es el conjunto simplicial*

$$N(\mathcal{C}) : \Delta \longrightarrow CONJUNTOS$$

$$\begin{array}{ccc} [p] & \longrightarrow & Hom_{CAT}([p], \mathcal{C}) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle (\ )\circ f} \\ [q] & \longrightarrow & Hom_{CAT}([q], \mathcal{C}) \end{array}$$

donde $f : [p] \longrightarrow [q]$ es un morfismo en Δ y $Hom_{CAT}([p], \mathcal{C})$ es el conjunto de morfismos (funtores en este caso) de la categoría $[p]$ en la categoría $\mathcal{C}$.

Siendo más explícitos, dado un funtor $\sigma : [p] \longrightarrow \mathcal{C}$ en $Hom_{CAT}([p], \mathcal{C}) \equiv N\mathcal{C}[p]$ podemos pensar a σ como un diagrama en $\mathcal{C}$ de la forma

$$\sigma(0) \xrightarrow{\alpha_0} \sigma(1) \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{p-1}} \sigma(p)$$

Definición 4.5.9. *Dado un funtor covariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ definimos el funtor covariante*

$$N(\ ) : CAT \longrightarrow \Delta - CONJUNTOS$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & N\mathcal{C} \arrow[d, "N(F)"] \\ \mathcal{D} \arrow[r] & N\mathcal{D} \end{tikzcd}$$

donde $N(F)$ es la transformación natural natural definida por

$$N(F)_{[p]} = F \circ (\ )\ \forall p \geq 0$$

Es decir, $N(F)$ está dada por

$$\begin{tikzcd} Hom_{CAT}([p], \mathcal{C}) \equiv N\mathcal{C}([p]) \arrow[r, "F(\ )"] & N\mathcal{D}([p]) \equiv Hom_{CAT}([p], \mathcal{D}) \\ Hom_{CAT}([q], \mathcal{C}) \equiv N\mathcal{C}([q]) \arrow[r, "F(\ )"] \arrow[u, "(\ )\circ f"] & N\mathcal{D}([q]) \equiv Hom_{CAT}([q], \mathcal{D}) \arrow[u, "(\ )\circ f"'] \end{tikzcd}$$

donde $f : [p] \longrightarrow [q]$ es un morfismo en Δ.

Definición 4.5.10. *La construcción $B^{bar}\mathcal{C}$ para el espacio clasificante de una categoría $\mathcal{C}$ es el espacio topológico definido como la realización geométrica $|N\mathcal{C}|$ del nervio de la categoría $\mathcal{C}$. Donde damos al conjunto simplicial $N\mathcal{C}$ la estructura de espacio simplicial usando la topología discreta.*

Algunas propiedades de la construcción B^{bar} están dadas por el siguiente lema el cual enunciamos sin demostración:

Lema 4.5.11. *La construcción B^{bar} tiene las siguientes propiedades:*
1) Es funtorial.
2) $B^{bar}\mathcal{C} \times \mathcal{D} = B^{bar}(\mathcal{C}) \times B^{bar}(\mathcal{D})$.
3) $B^{bar}(\mathcal{C}) = B^{bar}(\mathcal{C}^{op})$.
4) Una transformación natural de un funtor F_0 a un funtor F_1 induce una homotopía entre las aplicaciones $B^{bar}F_0$ y $B^{bar}F_1$. $\square$

Observación 4.5.12. *De la definición 4.5.9 y del lema 4.5.1 se sigue que si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor covariante tenemos la aplicación inducida*

$$B^{bar}(\mathcal{C}) \equiv N\mathcal{C} \otimes_{\Delta} \triangle \xrightarrow{F(\ )\otimes Id} N\mathcal{D} \otimes_{\Delta} \triangle \equiv B^{bar}(\mathcal{D})$$

$$\sigma \otimes [p] \mapsto F(\sigma) \otimes [p]$$

Denotaremos a $F(\ ) \otimes Id$ por $B^{bar}(F)$.

Definición 4.5.13. *Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$ y dado un objeto $?$ en $\mathcal{C}$, sea $? \downarrow \mathcal{C}$ la categoría definida de la siguiente manera:*

Un objeto en $? \downarrow \mathcal{C}$ es un morfismo $\phi : ? \longrightarrow c$. Un morfismo en $? \downarrow \mathcal{C}$ de $\phi_0 : ? \longrightarrow c_0$ a $\phi_1 : ? \longrightarrow c_1$ es un morfismo $h : c_0 \longrightarrow c_1$ en $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & c_0 \arrow[d, "h"] \\ & c_1 \end{tikzcd}$$

Definición 4.5.14. *Sea $\psi : c \longrightarrow d$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Definimos el funtor covariante*

$$\psi \downarrow \mathcal{C} : \quad d \downarrow \mathcal{C} \longrightarrow c \downarrow \mathcal{C}$$

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & c_0 \arrow[d, "h"] \\ & c_1 \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\phi_0\psi"] \arrow[dr, "\phi_1\psi"'] & c_0 \arrow[d, "h"] \\ & c_1 \end{tikzcd}$$

Definición 4.5.15. *Definimos el $\mathcal{C}-$espacio contravariante*

$$E^{bar}\mathcal{C} : \mathcal{C} \longrightarrow ESPACIOS$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & B^{bar}(c \downarrow \mathcal{C}) \\ d \arrow[r] & B^{bar}(d \downarrow \mathcal{C}) \arrow[u, "B^{bar}(\psi\downarrow\mathcal{C})"'] \end{tikzcd}$$

Lema 4.5.16. *$E^{bar}\mathcal{C}$ tiene las siguientes propiedades:*

1. *$E^{bar}\mathcal{C}$ es una $\mathcal{C} - CW-$aproximación del $\mathcal{C}-$espacio trivial $\{*\}$. Es decir, $E^{bar}\mathcal{C}$ es un $E\mathcal{C}$ (definición 4.4.10).*

2. *$E^{bar}\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}} \{*\} = B^{bar}\mathcal{C}$*

Demostración: [8], Consultar Lema 3.19, páginas 31 y 32. $\square$

4.6 La aplicación $E^{bar}\mathcal{C} \longrightarrow F^{*}E^{bar}\mathcal{D}$.

En esta sección dado un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ covariante construiremos una aplicación **funtorial** de $\mathcal{C}-$espacios

$$E^{bar}\mathcal{C} \longrightarrow F^{*}E^{bar}\mathcal{D}$$

La cual como demostramos en la sección 4.4 es única salvo homotopía. Esta aplicación será el tercer ingrediente en la construcción de nuestro homomorfismo de ensamble.

Necesitaremos la siguiente definición y observaciones

Definición 4.6.1. *Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor covariante. Sea $?$ un objeto en $\mathcal{C}$. Entonces F induce un funtor covariante $F^{?}$ definido por*

$$F^{?}: \quad ? \downarrow \mathcal{C} \longrightarrow F(?) \downarrow \mathcal{D}$$

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & c_0 \arrow[d, "h"] \\ & c_1 \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} F(?) \arrow[r, "F(\phi_0)"] \arrow[dr, "F(\phi_1)"'] & F(c_0) \arrow[d, "F(h)"] \\ & F(c_1) \end{tikzcd}$$

Observación 4.6.2. *El siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} c \downarrow \mathcal{C} \arrow[r, "F^c"] & F(c) \downarrow \mathcal{D} \\ d \downarrow \mathcal{C} \arrow[u, "\psi\downarrow\mathcal{C}"] \arrow[r, "F^d"] & F(d) \downarrow \mathcal{D} \arrow[u, "(F\circ\psi)\downarrow\mathcal{D}"'] \end{tikzcd}$$

donde $\psi : c \longrightarrow d$ es un morfismo en $\mathcal{C}$

Demostración:

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & c_0 \arrow[d, "h"] \\ & c_1 \end{tikzcd} \xrightarrow{\psi\downarrow\mathcal{C}} \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\phi_0\psi"] \arrow[dr, "\phi_1\psi"'] & c_0 \arrow[d, "h"] \\ & c_1 \end{tikzcd} \xrightarrow{F^c} \begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "F(\phi_0\psi)"] \arrow[dr, "F(\phi_1\psi)"'] & F(c_0) \arrow[d, "F(h)"] \\ & F(c_1) \end{tikzcd}$$

por otra parte,

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & c_0 \arrow[d, "h"] \\ & c_1 \end{tikzcd} \xrightarrow{F^d} \begin{tikzcd} F(d) \arrow[r, "F(\phi_0)"] \arrow[dr, "F(\phi_1)"'] & F(c_0) \arrow[d, "F(h)"] \\ & F(c_1) \end{tikzcd} \xrightarrow{(F\circ\psi)\downarrow\mathcal{D}} \begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "F(\phi_0)F(\psi)"] \arrow[dr, "F(\phi_1)F(\psi)"'] & F(c_0) \arrow[d, "F(h)"] \\ & F(c_1) \end{tikzcd}$$

y la igualdad se obtiene porque F es un funtor covariante. Por tanto el diagrama conmuta. $\square$

Aplicando el funtor covariante $N : CAT \longrightarrow \Delta - ESPACIOS$ al diagrama conmutativo de la observación 4.6.2 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N(c\downarrow\mathcal{C}) \arrow[r, "N(F^c)"] & N(F(c)\downarrow\mathcal{D}) \\ N(d\downarrow\mathcal{C}) \arrow[u, "N(\psi\downarrow\mathcal{C})"] \arrow[r, "N(F^d)"] & N(F(d)\downarrow\mathcal{D}) \arrow[u, "N((F\circ\psi)\downarrow\mathcal{D})"'] \end{tikzcd}$$

donde las todas las flechas son aplicaciones de Δ-espacios contravariantes.

Aplicando el lema 4.5.1 al diagrama anterior obtenemos el siguiente diagrama donde todas las flechas son aplicaciones entre espacios topológicos.

$$\begin{tikzcd} N(c\downarrow\mathcal{C})\otimes_\Delta \triangle \arrow[r, "F^c(\ )\otimes Id"] & N(F(c)\downarrow\mathcal{D})\otimes_\Delta \triangle \\ N(d\downarrow\mathcal{C})\otimes_\Delta \triangle \arrow[u, "(\psi\downarrow\mathcal{C})(\ )\otimes Id"] \arrow[r, "F^d(\ )\otimes Id"] & N(F(d)\downarrow\mathcal{D})\otimes_\Delta \triangle \arrow[u, "((F\circ\psi)\downarrow\mathcal{D})(\ )\otimes Id"'] \end{tikzcd}$$

Veamos que el diagrama anterior conmuta:

$(F^c(\ ) \otimes Id) \circ ((\psi \downarrow \mathcal{C})(\ ) \otimes Id)(x \otimes y)$
$= (F^c(\ ) \otimes Id)((\psi \downarrow \mathcal{C})(x) \otimes y)$
$= F^c((\psi \downarrow \mathcal{C})(x)) \otimes y$

por otra parte,

$(((F\circ\psi) \downarrow \mathcal{D})(\ ) \otimes Id) \circ (F^d(\ ) \otimes Id)(x \otimes y)$
$= (((F\circ\psi) \downarrow \mathcal{D})(\ ) \otimes Id)(F^d(x) \otimes y)$
$= (((F\circ\psi) \downarrow \mathcal{D})(F^d(x))) \otimes y$

Por lo que basta checar que $F^c((\psi\downarrow\mathcal{C})(x)) = ((F\circ\psi)\downarrow\mathcal{D})(F^d(x))$ pero esta igualdad se cumple por la observación 4.6.2, por tanto el diagrama anterior conmuta.

Por último el diagrama conmutativo anterior es por definición el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B^{bar}(c\downarrow\mathcal{C}) \arrow[r, "B^{bar}(F^c)"] & B^{bar}(F(c)\downarrow\mathcal{D}) \\ B^{bar}(d\downarrow\mathcal{C}) \arrow[u, "B^{bar}(\psi\downarrow\mathcal{C})"] \arrow[r, "B^{bar}(F^d)"] & B^{bar}(F(d)\downarrow\mathcal{D}) \arrow[u, "B^{bar}((F\circ\psi)\downarrow\mathcal{D})"'] \end{tikzcd}$$

el cual a su vez es por definición el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd}
E^{bar}\mathcal{C}(c) \arrow[r, "B^{bar}(F^c)"] & E^{bar}\mathcal{D}(F(c)) \\
E^{bar}\mathcal{C}(d) \arrow[r, "B^{bar}(F^d)"] \arrow[u, "E^{bar}\mathcal{C}(\psi)"] & E^{bar}\mathcal{D}(F(d)) \arrow[u, "E^{bar}\mathcal{D}(F\circ\psi)"']
\end{tikzcd}$$

dado que por definicion

$E^{bar}\mathcal{D}(F(c)) = (E^{bar}\mathcal{D} \circ F)(c) = F^* E^{bar}\mathcal{D}(c),$

$E^{bar}\mathcal{D}(F \circ \psi) = (E^{bar}\mathcal{D}) \circ F(\psi) = F^* E^{bar}\mathcal{D}(\psi),$

$E^{bar}\mathcal{D}(F(d)) = (E^{bar}\mathcal{D} \circ F)(d) = F^* E^{bar}\mathcal{D}(d)$

Concluímos que hemos construído una aplicación de $\mathcal{C}-$espacios

$$E^{bar}\mathcal{C} \xrightarrow{B^{bar}(F^?)} F^* E^{bar}\mathcal{D}$$

4.7 Construcción de la aplicación de ensamble.

Sea X un $\mathcal{D}-$espacio covariante. Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor covariante. Utilizando los resultados de las secciones pasadas de este capítulo construíremos una *aplicación de ensamble*

$$F_* : \underset{\mathcal{C}}{hocolim}\ F^* X \longrightarrow \underset{\mathcal{D}}{hocolim}\ X$$

Procedamos:

Aplicando el lema 4.3.3 a la aplicación de $\mathcal{C}-$espacios construída en la sección 4.6

$$E^{bar}\mathcal{C} \longrightarrow F^* E^{bar}\mathcal{D}$$

obtenemos una aplicación de $\mathcal{D}$-espacios

$$f : F_* E^{bar}\mathcal{C} \longrightarrow E^{bar}\mathcal{D}$$

Por otra parte, por el lema 4.2.14 tenemos un homeomorfismo de espacios topológicos

$$g : E^{bar}\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}} F^* X \xrightarrow{\cong} F_* E^{bar}\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{D}} X$$

Entonces definimos la *aplicación de ensamble* F_* como la siguiente composición

$$\underset{\mathcal{C}}{hocolim}\ F^*X \equiv E^{bar}\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}} F^*X \xrightarrow{g} F_*E^{bar}\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{D}} X \xrightarrow{f\otimes Id_X} E^{bar}\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{D}} X \equiv \underset{\mathcal{D}}{hocolim}\ X$$

note que esta es una aplicación entre *espacios topológicos.*

También tenemos una aplicación de ensamble si el $\mathcal{D}-$espacio covariante X es reemplazado por un $\mathcal{D}-$espectro covariante $\mathbf{E}$:

$$F_* : \underset{\mathcal{C}}{hocolim}\ F^*\mathbf{E} \longrightarrow \underset{\mathcal{D}}{hocolim}\ \mathbf{E}$$

note que la aplicación obtenida es una aplicación entre *espectros.*

4.8 La Conjetura del Isomorfismo.

En esta sección enunciaremos la *Conjetura del isomorfismo.*

Definición 4.8.1. *Sea G un grupo. Definimos la categoría de órbitas $\mathcal{O}(G)$ como la categoría que tiene como objetos a los $G-$espacios homogéneos G/H, donde H es un subgrupo de G y como morfismos $G-$funciones, es decir, dados G/H, G/K objetos en $\mathcal{O}(G)$ un morfismo $r_g : G/H \longrightarrow G/K$ está definido por multiplicación derecha por g, $r_g(g^{'}H) = g^{'}gK$.*

Observación 4.8.2. *Note que el morfismo $r_g : G/H \longrightarrow G/K$ de la definición 4.8.1 está definido si y sólo si $g^{-1}Hg \subseteq K$.* □

Definición 4.8.3. *Sea G un grupo y sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de G, es decir, $\mathcal{F}$ es un conjunto no vacío de subgrupos de G cerrado bajo conjugación y bajo subgrupos. Definimos la subcategoría plena $\mathcal{O}(G,\mathcal{F})$ de la categoría $\mathcal{O}(G)$ como la subcategoría cuyos objetos G/H son tales que $H \in \mathcal{F}$.*

Dado un grupo G tenemos los siguientes ejemplos de familias
$\mathcal{F}_e$ la familia que contiene únicamente al elemento trivial e de G.
$\mathcal{F}_T$ la familia de todos los subgrupos de G.
$\mathcal{F}_{fin}$ la familia de los subgrupos finitos de G.
La familia de los p-subgrupos de G unión el elemento identidad $\{e\}$ de G.

Otro ejemplo importante de una familia de subgrupos de un grupo G se obtiene a partir de la siguiente

Definición 4.8.4. *Un grupo Γ se llama virtualmente cíclico si es finito o contiene un grupo cíclico infinito de índice finito.*

Así dado un grupo G tenemos la familia $\mathcal{F}_{vc}$ de subgrupos virtualmente cíclicos de G.

Sea $\mathbb{K} : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \Omega - ESPECTROS$ el $\mathcal{O}(G) - \Omega-$espectro definido por Davis-Lück [8]. Este $\mathcal{O}(G) - \Omega-$espectro tiene la siguiente propiedad clave:

$$\pi_n(\mathbb{K}(G/H)) \cong K_n(\mathbb{Z}H) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Entonces aplicando nuestra construcción anterior a $\mathbb{K}$, dadas dos familias $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{'}$ de subgrupos de G, la inclusión de categorías

$$I : \mathcal{O}(G, \mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{O}(G, \mathcal{F}^{'})$$

induce una aplicación de ensamble

$$I_* : \underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K} \longrightarrow \underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}^{'})}{hocolim}\ \mathbb{K}$$

Entonces aplicando grupos de homotopía a la aplicación de $\Omega-$espectros anterior I_* obtenemos el homomorfismo de grupos inducido

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F},\mathcal{F}^{'}} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}^{'})}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big)$$

Si hacemos $\mathcal{F}^{'} = \mathcal{F}_T$, donde $\mathcal{F}_T$ es la familia de todos los subgrupos de G entonces $\mathcal{O}(G, \mathcal{F}^{'}) = \mathcal{O}(G)$ y dado que G/G es objeto final en $\mathcal{O}(G)$, tenemos por la observación 4.4.19 que

$$\pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}_T)}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big) \cong \mathbb{K}(G/G) \cong K_n(\mathbb{Z}G)$$

Ahora tenemos todos los elementos para enunciar la

Conjetura del Isomorfismo. *Sea $\mathcal{F}_{vc}$ la familia de subgrupos virtualmente cíclicos de G. Entonces el homomorfismo de ensamble*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{vc},\mathcal{F}_T} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}_{vc})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G)}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big) \cong K_n(\mathbb{Z}G)$$

es un isomorfismo $\forall n \in \mathbb{Z}$. $\square$

4.9 Aplicación.

En esta sección daremos una aplicación el teorema 3.6.1 obtenido en esta tesis, usando los conceptos desarrollados a lo largo de este capítulo.

Una caracterización para los grupos virtualmente cíclicos infinitos [25] está dada por el siguiente

Teorema 4.9.1. *Los grupos virtualmente cíclicos infinitos son de dos tipos*

$$(1)\ \Gamma \cong H \rtimes \mathbb{Z}$$

donde H es un grupo finito, o

$$(2)\ \Gamma \cong G_0 *_H G_1$$

donde G_0, G_1 y H son grupos finitos y $|G_0 : H| = 2 = |G_1 : H|$.

□

Ejemplos de grupos virtualmente cíclicos infinitos son $\mathbb{Z}$, $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Como aplicación del teorema 3.6.1 tenemos el siguiente resultado

Teorema 4.9.2. *Supongamos que la* **conjetura del isomorfismo** *se cumple para un grupo G tal que todos sus subgrupos finitos no triviales son de orden un primo o un producto de dos primos distintos. Tomando en la discusión anterior $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{fin}$, la familia de subgrupos finitos de G, y $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_T$, la familia de todos los subgrupos de G, obtenemos un isomorfismo*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{fin},\mathcal{F}_T} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}_{fin})}{hocolim}\ I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G)}{hocolim}\ \mathbb{K}\Big) \cong K_n(\mathbb{Z}G)$$

$\forall n \leq 1$

Demostración: Por el teorema 3.6.1 tenemos que $NK_i^\alpha(\mathbb{Z}H) = 0$ para todo grupo $H \in \mathcal{F}_{fin}$, para todo automorfismo de grupos $\alpha : H \longrightarrow H$ y $\forall$ $i \leq 1$. Por otra parte, los únicos subgrupos virtualmentes cíclicos del tipo (2) refiriéndonos al teorema 4.9.1 son $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ y de la forma $\Gamma = G_0 *_{C_p} G_1$ donde G_0 y G_1 son dos grupos que contienen a C_p como un subgrupo de índice 2. Pero según la notación de Munkholm - Prassidis [21] tenemos que $NK_j(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2], \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]) = 0$ para $j \leq 0$ ([5] pág. 5700) y $NK_j(\mathbb{Z}C_p, \mathbb{Z}[G_0 -$

$C_p], \mathbb{Z}[G_1 - C_p]) = 0$ para $j \leq 0$ por [21]. Es decir, D_∞ y Γ tienen *grupos Nil de Waldhausen* [17] triviales.

Por otra parte si Γ es cualquier subgrupo virtualmente cíclico infinito de G definimos la siguiente familia de subgrupos de Γ

$$(\mathcal{F}_{fin})_\Gamma = \{\Gamma \cap F \mid F \in \mathcal{F}_{fin}\}.$$

Aplicando el lema 3.8 de [7] y usando el hecho de que los grupos $Nils$ se anulan obtenemos que el homomorfismo de ensamble

$$\mathcal{A}_{(\mathcal{F}_{fin})_\Gamma} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(\Gamma,\ (\mathcal{F}_{fin})_\Gamma)}{hocolim} I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow K_n(\mathbb{Z}\Gamma)$$

es un isomorfismo $\forall n \leq 1$ y para cualquier $\Gamma \in \mathcal{F}_{vc} - \mathcal{F}_{fin}$.

Entonces por el Teorema 2.2 de [22] el homomorfismo de ensamble

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{fin},\mathcal{F}_{vc}} : \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}_{fin})}{hocolim} I^*\mathbb{K}\Big) \longrightarrow \pi_n\Big(\underset{\mathcal{O}(G,\mathcal{F}_{vc})}{hocolim} \mathbb{K}\Big)$$

es un isomorfismo $\forall\ n < 1$ y es sobreyectivo para $n = 1$. Pero Bartels [2] demostró que en general el homomorfismo anterior es un monomorfismo que se escinde, por tanto para $n = 1$ también es un isomorfismo.
Ahora el teorema se sigue del hecho de que los homomorfismos de ensamble tienen la propiedad

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^{'} \subseteq \mathcal{F}^{''} \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{F}',\mathcal{F}''} \circ \mathcal{A}_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} = \mathcal{A}_{\mathcal{F},\mathcal{F}''}.$$

Es decir, $\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{fin},\mathcal{F}_T}$ está dado por la composición de isomorfismos

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}_{fin},\mathcal{F}_T} = \mathcal{A}_{\mathcal{F}_{vc},\mathcal{F}_T} \circ \mathcal{A}_{\mathcal{F}_{fin},\mathcal{F}_{vc}}$$

$\square$

Bibliografía

[1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Algebraic Topology from an Homotopical Viewpoint*, Springer-Verlag, (2002).

[2] A. C. Bartels, *On the domain of the assembly map in algebraic K-theory*, Algebraic Geometric Topology. Vol 3. (2003), 1037-1050.

[3] A.C Bartels, T. Farrell, L. Jones and H. Reich, *On the Isomorphism Conjecture in algebraic K-theory*, Topology **43** (2004) 157-213.

[4] A.C Bartels and H. Reich, *On the Farrell-Jones conjecture for higher algebraic K-theory*, preprint Münster 2004.

[5] E. Berkove, F.T Farrell, D. Juan-Pineda and K. Pearson, *The Farrell-Jones isomorphism conjecture for finite covolume hyperbolic actions and the algebraic K-theory of Bianchi Groups*, Transactions of the mathematical society, Vol.352, Number 12, Pag. 5689-5702.

[6] M. J. Collins, *Representations and characters of finite groups*, Cambridge University Press, (1990).

[7] F. X. Connolly and S. Prassidis, *On the exponent of the cokernel of the forget-control map on K_0-groups*, Fundamenta Mathematicae, Vol. 172, Pag. 201-216 (2002).

[8] J. F. Davis, W. Lück, *Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in K- and L-theory*, K-Theory **15** (1998), 201-252.

[9] W.G. Dwyer and J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, 1995, Elsevier Sciencie.

[10] F. T. Farrell, *the nonfiniteness of Nil*, Proc. Amer. Math. Soc. **65** (1977), 215-216.

[11] F. T. Farrell, W. C. Hsiang, *A formula for* $K_1R_\alpha[T]$, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 17, Applications of Categorical Algebra, American Mathematical Society, Providence, 1970.

[12] F. T. Farrell, L. Jones, *Isomorphism conjectures in algebraic K-theory*, J. Amer. Math. Soc. **6** no 2 (1993), 249-298.

[13] J. Fraleigh, *Álgebra abstracta*, Addison-Wesley Iberoamericana, (1987).

[14] D. R. Grayson, *The K-theory of semilinear endomorphisms*, J. Algebra, 113(2): 358-372, 1988.

[15] D. R. Harmon, NK_1 *of finite groups*, Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 100, no 2 (1987), 229-232.

[16] K. Ireland and M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Springer, GTM 84, (1990).

[17] D. Juan-Pineda and S. Prassidis, *On the lower Nil-groups of Waldhausen*, Forum Mathematicum, Vol. 13, (2001), 261-285.

[18] R. Martin, Ph. D. dissertation, Columbia University, 1975.

[19] M. Mather, *Counting homotopy types of manifolds* Topology, Vol. 4, (1965), 93-94.

[20] J. Milnor, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Princeton University Press, (1971).

[21] H. J. Munkholm and S. Prassidis, *On the vanishing of certain K-theory Nil-groups*, Progrees in Mathematics, Vol. 196, (2001), 307-321.

[22] K. Pearson, *Algebraic $K-$Theory of Two-Dimensional Crystallographic Groups*, $K-$Theory, **14:** 265-280, (1998).

[23] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory: I*, 85-147.

[24] J. Rosenberg, *Algebraic K-Theory and Its Applications*, Springer-Verlag (1996).

[25] P. Scott and T. Wall, *Topological methods in group theory. Homological group theory*, LMS. 36, 1979.

[26] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Springer-Verlag, Second Edition, (1997).