

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
CUAUTITLÁN

**“TERMODINÁMICA IRREVERSIBLE
SU SIMULACIÓN VÍA ELEMENTOS FINITOS”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
P R E S E N T A :
GILBERTO ATILANO AMAYA VENTURA

ASESORA: DRA. SUEMI RODRÍGUEZ ROMO



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

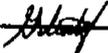
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: GILBERTO ATILANO

AMAYA VENTURA

FECHA: 15 - FEBRERO 2005

FIRMA: 



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
CUAUTITLAN UNAM
DIRECCION

OFICIO/FES-C/D/0132/01/2005.

ASUNTO: Designación de Jurado.

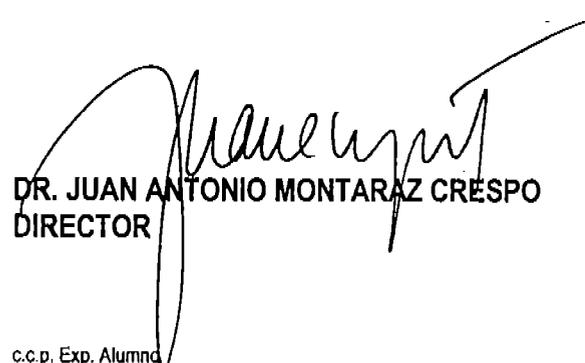
BIOL. FRANCISCO J. INCERA UGALDE
JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN DE POSGRADO
DE LA DIRECCIÓN GENERAL DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
Presente.

La Dirección de esta Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, autoriza al alumno **AMAYA VENTURA GILBERTO ATILANO**, con número de expediente **100911021** y número de cuenta **7600275-7**, para presentar su examen de grado de la **Maestría en Físicoquímica (Métodos y Metrología)** con la tesis titulada **"TERMODINÁMICA IRREVERSIBLE: SU SIMULACIÓN VÍA ELEMENTOS FINITOS"**, a quien se le ha designado el siguiente jurado:

Presidente: DR. VLADIMIR TCHIOV
Vocal: DRA. SUEMI RODRÍGUEZ ROMO
Secretario: DR. VLADISLAV KHARTCHENKO
Primer Suplente: DR. VÍCTOR MANUEL CASTAÑO MENESES
Segundo Suplente: M. en C. GUILLERMO VÁZQUEZ COUTIÑO

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPÍRITU"
Cuautitlán Izcalli, Méx., a 28 de enero del 2005.


DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO
DIRECTOR

c.c.p. Exp. Alumno
c.c.p. Archivo
JAMC/PRN/sgu



Dedicatorias

A mi papá y a mi mamá: Capitán del Ejército Mexicano Atilano Amaya Pérez y mi jefa Hilaria Ventura. Muchas gracias por todo.

A mis hermanos: Quique, Miguel, Hilda, Paty, Lulú, Rosa y Manuel.

A mis sobrinos: Alma Rosa, Luis Enrique y Liliana.

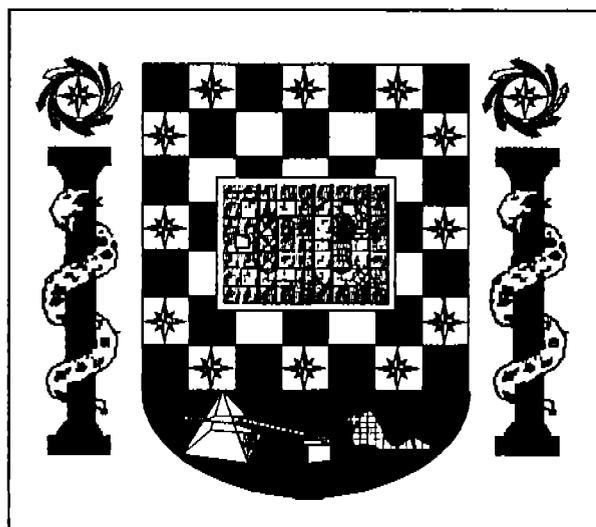
A mis amigos: Claudia Loaiza Escutia, Rafael Fernández, Evangelina Sánchez Ramírez, José Luis Velázquez Ortega, Ricardo Paramount Hernández, Héctor Coss, Juan Chiú, Mary Carmen Valderrama, Victoria Hernández, María Eugenia Posadas, Laura Patricia Martínez, Rosy, Triny, Toño, Ana María López, Blanca Lilia, Blanca Isabel, Paty Ramírez, Rafa de posgrado. Gracias por su amistad.

A mi asesora, amiga y compañera de generación: Dra. Suemi Rodríguez Romo.

Con admiración y respeto a los miembros de mi jurado, doctores: Vladimir Tchijov, Suemi Rodríguez Romo, Vladislav Khartchenko, Víctor Manuel Castaño Meneses, Guillermo Vázquez Coutiño.

Con cariño a Alejandra Daza y a Eva González.

Hace 5 años ganamos el torneo de futbol,: El último minuto también tiene 60 segundos (Fernando Marcos).



Índice

Objetivos.	i
Introducción.	ii
Capítulo 1. Termodinámica de Procesos Irreversibles.	1
Capítulo 2. Elementos Finitos ✓	5
2.1. Introducción	5
2.2. Notas Históricas	6
2.3. Descripción.	8
2.4. Clasificación de los Métodos de Elementos Finitos	7
2.5. Métodos del Principio Variacional	9
2.5.1. Ecuación de Euler-Lagrange	9
2.6. Fundamentos de los Métodos de Residuos Ponderados	11
2.6.1. Características de los Métodos de Residuos Ponderados	13
2.6.2. Ejemplos de Aplicación de los Métodos de Residuos Ponderados	14
2.7. Ensamblaje del Sistema de Ecuaciones.	18
Capítulo 3. Formulación Unidimensional del Método de Elementos Finitos.	19
3.1. Introducción.	19
3.2. Interpolación Lineal	19
3.3. Interpolación Cuadrática	24
3.4. Formulación del Método de Galerkin Unidimensional en Estado Transitorio	26
3.5. Ejemplo de Aplicación del Método de Galerkin a la Transferencia de Calor Unidimensional en Estado Estacionario	27
Capítulo 4. Formulación Bidimensional. Mecánica de Sólidos ✓	35
4.1. Introducción	35
4.2. Principios Básicos de la Aplicación del Método de Elementos Finitos en la Mecánica de Sólidos.	35
4.3. Aplicación de la Formulación Bidimensional en Mecánica de Sólidos	39
4.4. Algoritmo para Diseño de Pavimentos Flexibles	40
4.5. Listado del Programa Dispavl.Bas	45
4.6. Resultados de la Ejecución del Programa Dispavl.Bas	58
Capítulo 5. Transferencia Bidimensional de Calor ✓ en Estado Estacionario.	65
5.1. Introducción	65
5.2. Formulación Variacional	66
5.3. Matrices de Elemento y Matrices Frontera	67
5.4. Ejemplo de Aplicación	69
5.5. Programa para Determinar la Distribución de Temperaturas en un Proceso de Transferencia de Calor Bidimensional en Estado Estacionario	70
5.5.1 Resultados de la Simulación Computacional	76
5.6. Transporte Bidimensional de Calor en Estado Estacionario a Través de Aletas de Enfriamiento	78

5.6.1. Diagrama de Bloques del Programa Alepar.Bas	82
5.6.2. Algoritmo de Cómputo del Programa Alepar.Bas	91
5.6.3. Resultados de la Simulación de Transferencia de Calor Bidimensional en Aletas de Enfriamiento	101
Capítulo 6. Análisis Axisimétrico.	110
6.1. Introducción	110
6.2. Conducción Unidimensional de Calor a Través de un Cilindro	110
6.3. Solución Analítica para Transporte Unidireccional de Calor en Coordenadas Cilíndricas y Estado Estacionario.	113
6.3.1. Conducción de Calor a Través de un Cilindro Hueco	113
6.3.2. Transferencia de Calor por Conducción Unidireccional con Generación Interna de Calor por Radiación.	114
6.4. Algoritmo Computacional para Transferencia Unidimensional de Calor en Coordenadas Cilíndricas.	114
6.5. Transferencia de Calor Bidimensional Axisimétrica en Estado Estacionario.	116
6.6. Algoritmo Computacional para Transferencia de Calor Bidimensional Axisimétrica en Coordenadas Cilíndricas.	116
6.7 Resultados de la Simulación de Transferencia de Calor Bidimensional en Coordenadas Cilíndricas.	121
Capítulo 7. Transferencia de Masa Bidimensional.	126
7.1. Introducción.	126
7.2. Soluciones Analíticas.	127
7.3. Procesos Electrofíticos Controlados por Transporte de Carga en Soluciones Diluidas Isotérmicas en estado Estacionario.	132
7.4. Solución Analítica de la Ecuación de Laplace.	134
7.5. Algoritmo Computacional para la Caracterización de Procesos de Electrodeposición por el Método de los Elementos Finitos.	139
7.5.1. Descripción del Algoritmo Computacional.	139
7.5.2. Ciclo para Dimensionamiento de Arreglos Matriciales	139
7.5.3. Ciclo para la Representación Gráfica de la Topología del Sistema	140
7.5.4. Ciclo para la Formulación de las Ecuaciones Locales y Ensamblaje del sistema de Ecuaciones Global.	142
7.5.5. Ciclo para la Resolución del Sistema de Ecuaciones Simultáneas lineales	143
7.5.6. Ciclo para la Representación Gráfica de los Resultados.	143
7.5.7. Aplicación a Diferentes Configuraciones Geométricas de los Electrodo	145
7.5.8. Aplicación a Diferentes Condiciones de Frontera.	145
7.6. Diagrama de Bloques del programa Femelect. Bas	146
7.7. Resultados y Análisis de Resultados	147
Capítulo 8. Dinámica de Fluidos.	149
8.1. Introducción.	149
8.2. Flujo Laminar Viscoso a Través de un Canal Rectangular	151
8.3. Flujo Tangencial Laminar entre Cilindros Concéntricos Rotatorios En Estado Estacionario.	153
8.4. Determinación Analítica de la Distribución de Velocidades en un Extrusor de Tornillo Sencillo.	156

8.5. Algoritmo Computacional para el Flujo Laminar de Fluidos Newtonianos en Estado Estacionario a Través del Canal de un Extrusor de Tornillo Sencillo de Diferentes Geometrías.	157
8.6. Flujo de Potencial Bidimensional.	163
8.6.1. Algoritmo Computacional para Flujo Potencial Bidimensional de Fluidos Incompresibles en Estado Estacionario.	164
8.6.2. Resultados de la Simulación de Flujo Potencial Bidimensional	166
Capítulo 9. Análisis Transitorio. Ejemplos Unidimensionales.	170
9.1. Introducción.	170
9.2. Métodos para Integración Temporal.	171
9.2.1. El Método de Integración de Euler	171
9.2.2. Diagonalización de Matrices para Soluciones Transitorias	173
9.3. Transferencia de Calor Transitoria.	174
9.4. Solución Analítica para la Transferencia de Calor por Conducción en Estado Transitorio.	177
9.5. Algoritmo Computacional para la Transferencia de Calor en Estado Transitorio 1-D	181
9.6. Resultados de la Simulación de la Transferencia de Calor en Estado Transitorio 1-D.	184
Conclusiones.	187
Bibliografía.	188

OBJETIVOS

Objetivo General.

Llevar a cabo la caracterización de algunos procesos de la Termodinámica Irreversible mediante el método de los elementos finitos en la resolución de las ecuaciones diferenciales de transferencia de calor, masa y momentum, considerando condiciones de estado estacionario para problemas de geometría irregular en una y dos dimensiones, así como en sistemas tridimensionales con simetría axial, utilizando formulaciones en coordenadas cartesianas y cilíndricas, respectivamente. Y elaborar un algoritmo computacional híbrido combinando con el método de diferencias finitas para problemas de Termodinámica Irreversible unidimensionales en régimen transitorio.

Los algoritmos computacionales propuestos en esta tesis, basados en principios variacionales y en residuos ponderados, deberán ser versátiles para manejar con facilidad diferentes configuraciones geométricas de los sistemas de interés así como distintas condiciones de frontera, y proveer de resultados de gran exactitud.

Objetivos Particulares.

- Llevar a cabo la caracterización de algunos procesos de la Termodinámica Irreversible calculando flujos y potenciales generalizados, sin perder de vista las aplicaciones prácticas en ingeniería, y tratando que los algoritmos computacionales sean lo suficientemente versátiles para manejar diferentes geometrías y condiciones de frontera.
- Explicar de la manera más clara posible el fundamento del método de elementos finitos variacionales y de residuos ponderados, así como los pasos generales en la construcción de algoritmos computacionales de este tipo.
- Aplicar los fundamentos del cálculo variacional en la resolución de las ecuaciones de Laplace y Poisson, para construir una serie de algoritmos computacionales que permitan caracterizar procesos de la termodinámica irreversible en condiciones de estado estacionario.
- Aplicar los fundamentos de los métodos de residuos ponderados en la formulación de algoritmos computacionales que permitan resolver problemas de fenómenos de transporte en condiciones de estado estacionario.
- Aplicar los algoritmos mencionados en los objetivos anteriores en la resolución de problemas de aplicación práctica en las áreas de transferencia de calor, difusión molecular y dinámica de fluidos.
- Construir un algoritmo híbrido combinando elementos finitos con diferencias finitas para el transporte unidireccional en régimen transitorio.
- Comparar las soluciones analíticas para casos integrables con los resultados que se obtienen al aplicar los métodos de elementos finitos, con el fin de evaluar cuantitativamente la exactitud de estos últimos y poder utilizar con cierto grado de confianza el método numérico para resolver las ecuaciones diferenciales en los casos en que no se disponga de una solución analítica.

INTRODUCCIÓN

Desde que en 1931 el físico noruego Lars Onsager asentó las bases de la termodinámica de los procesos irreversibles con sus tres postulados en los que incluía su célebre principio de reciprocidad por el cual le otorgaron el premio Nobel, hasta los primeros años de este nuevo milenio, la teoría de la termodinámica irreversible se ha desarrollado en diferentes direcciones.

La formulación original de Onsager junto con los conceptos de divergencia de un campo vectorial, permiten realizar los balances de las cantidades físicas que fluyen en un sistema termodinámico y obtener los correspondientes principios de conservación. Con tal procedimiento se obtienen, de manera sistemática, los modelos fenomenológicos para los procesos de transferencia de calor, masa y momentum, obtenidos anteriormente por Fourier, Fick y Navier y Stokes. Dichos modelos corresponden a ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, que representan las variaciones espaciales y temporales de los campos de los potenciales termodinámicos responsables del flujo de las cantidades físicas de interés.

La integración de tales ecuaciones diferenciales puede lograrse de manera relativamente fácil aplicando métodos estándar que datan desde el siglo XVIII, para geometrías regulares ya sea en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas. El problema surge cuando se intenta caracterizar procesos de la termodinámica irreversible en sistemas con geometría irregular. En estos casos, el clásico método de desarrollo de la solución en series de potencias (que da lugar, por ejemplo, a las funciones de Bessel en coordenadas cilíndricas), así como el de la eliminación de las componentes ortogonales, que no forman parte de la solución de la ecuación diferencial, en el desarrollo de las series de Fourier (para coordenadas cartesianas), se complican demasiado como para intentar proceder a la integración por métodos analíticos.

El método de **diferencias finitas** es el que se utiliza el principio de L'Hopital para reformular la ecuación diferencial en términos de incrementos finitos de las variables de interés, es una aproximación a la solución del problema, pero adolece de versatilidad y exactitud. Cuando se desea resolver un problema en el que la geometría varíe ligeramente, es necesario reconstruir el algoritmo de cómputo, y lo mismo sucede al modificarse las condiciones de frontera. La exactitud

del método depende de forma inversamente proporcional al tamaño de la malla de las diferencias finitas, como es lógico esperar en base a la definición de la derivada de una función.

La alternativa más viable parece ser la aplicación del método de **elementos finitos**, originalmente desarrollado en el campo de la ingeniería aeronáutica.

Al igual que en el método de diferencias finitas, se procede a discretizar el espacio de solución, pero los fundamentos matemáticos son mucho más firmes, por lo que la exactitud es mayor.

Además, el método de elementos finitos es más versátil, ya que un buen algoritmo computacional basado en este método, debe permitir modificar fácilmente la ubicación de los puntos nodales de la malla discreta para poder ser aplicado a diferentes geometrías.

Este trabajo de tesis tiene como finalidad **construir algoritmos de cómputo** para la resolución de las ecuaciones diferenciales que caracterizan algunos fenómenos de la termodinámica de procesos irreversibles. Dichos algoritmos deben ser lo más exactos y versátiles posibles, y permitir la caracterización de algunos fenómenos de:

- **transporte de calor,**
- **difusión de una sustancia en una mezcla.**
- **y de dinámica de fluidos.**

Tales procesos se conocen genéricamente como "**Fenómenos de transporte**", término que frecuentemente es interpretado como sinónimo de "**Procesos de la Termodinámica Irreversible**".

La **exactitud** de los modelos computacionales presentados aquí, se evalúa comparando con las **soluciones analíticas** para los casos integrables (que también se desarrollan a lo largo del texto), con la finalidad de aplicarlos con confianza a los casos no integrables.

La organización de este trabajo es como sigue:

En el **capítulo 1** se da una breve explicación de lo que es el campo de estudio de la termodinámica de procesos irreversibles según la formulación clásica de Lars Onsager. Se citan los modelos fenomenológicos de

Fourier, Fick y Navier-Stokes y se explica su relación con los conceptos de flujos y afinidades propios de la teoría de Onsager.

En el **capítulo 2** se establecen los fundamentos de los métodos de elementos finitos, tanto en su formulación variacional como en sus versiones de residuos ponderados.

- Se aprovecha para presentar una breve reseña histórica.
- Se explican las características del método, poniendo especial énfasis en el proceso de ensamblaje de las ecuaciones locales y en la introducción de condiciones de frontera, que son la base de su versatilidad.
- Se presentan los fundamentos de los métodos variacionales que subyacen en la ecuación de Euler-Lagrange.
- Se explican las bases de las soluciones aproximadas por residuos ponderados.
- Se ejemplifica la forma en que operan los métodos de residuos ponderados considerando la solución del modelo matemático conocido como ley de Newton para el enfriamiento y se hace una comparación de la exactitud de ellos.

En el **capítulo tres** se presentan los fundamentos matemáticos de la formulación de las ecuaciones locales para la construcción, vía ensamblaje, del método de elementos finitos. Además, se explica la forma en que se obtienen las funciones de interpolación para diferentes geometrías (elementos finitos triangulares y cuadrados) y distintas funciones de aproximación (lineales y cuadráticas). También se presenta un primer algoritmo de cómputo que corresponde a la aplicación del Método de Galerkin en la resolución de la ecuación de Fourier para transporte unidireccional de calor en régimen estacionario, lo cual da nombre al capítulo.

El **cuarto capítulo** está dedicado a la aplicación de la formulación variacional del método de elementos finitos al campo de la mecánica de sólidos, concretamente al diseño de pavimentos flexibles. Al abordar este tema se ejemplifican las características de la aplicación de uno de los principios variacionales más conocidos en el ámbito científico, el principio de los trabajos virtuales. También se muestra como el método se aplica para calcular la distribución de más de una variable dependiente, y como manejar de manera versátil la geometría del sistema. En el algoritmo

presentado en este capítulo se utiliza el método de Gauss Seidel con relajación como subrutina para resolver el sistema de ecuaciones simultáneo lineal resultante.

En el **capítulo cinco** se analiza la transferencia bidimensional de calor por conducción en coordenadas cartesianas, y se construye un par de algoritmos para el cálculo del perfil de temperaturas en estado estacionario en una placa cuadrada con generación interna de calor, y a lo largo y ancho de una aleta de enfriamiento de geometría irregular, mostrándose la versatilidad en el manejo de la configuración geométrica del sistema y de las condiciones de frontera, adiabáticas, isotérmicas y convectivas. El tipo de ecuación gobernante es la ecuación de Poisson.

En el **capítulo seis** se formula el principio variacional de la ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas obteniéndose un algoritmo computacional para aplicaciones de transferencia de calor por conducción en estado estacionario a través de cuerpos con geometría axisimétrica. La versatilidad del método permite considerar diferentes geometrías.

En el **séptimo capítulo** se aborda el problema de la transferencia de masa bidimensional en procesos de difusión molecular, gobernados por la ecuación de Fick, y que al simplificarse para el estado estacionario 2-D se convierte en la ecuación de Laplace. Se aplica el método de elementos finitos para determinar la distribución de potencial eléctrico en procesos de electrodeposición controlados por transferencia de carga. El algoritmo que se presenta es versátil y permite cambiar fácilmente la geometría de los electrodos.

En el **capítulo ocho** se utiliza la formulación variacional de la ecuación de Laplace para el cálculo de los perfiles de velocidad en una máquina de extrusión para fluidos Newtonianos y para flujos de potencial bidimensional en coordenadas cartesianas.

La formulación original de los métodos de elementos finitos aplica a sistemas en estado transitorio, así que finalmente, en el **capítulo nueve** se presentan las bases de la formulación de algoritmos híbridos de diferencias finitas y elementos finitos para problemas de conducción unidimensional de calor en estado estacionario, y se construye un algoritmo de cómputo cuyos resultados se comparan con la solución analítica que se obtiene mediante series de Fourier.

1

Termodinámica de Procesos Irreversibles

Una de las áreas más importantes de la Física es la **Termodinámica**, que está dedicada al estudio de las interconversiones entre la energía térmica y la energía mecánica en sistemas de diferente naturaleza, incluyendo los sistemas químicos.

El estudio de la termodinámica empezó en el siglo XIX, y en su versión clásica analiza el comportamiento de los sistemas desde un punto de vista macroscópico y en condiciones de equilibrio, tratando por lo tanto con procesos reversibles. Las contribuciones a este campo por parte de Joule, Thompson, Carnot, Gibbs, Helmholtz y Maxwell, entre otros, han permitido caracterizar una gran cantidad de procesos y obtener conclusiones prácticas para la ciencia e ingeniería.

A finales del siglo XIX, los trabajos de Gibbs, Boltzmann y Maxwell, permitieron establecer un nuevo enfoque de la termodinámica. Bajo esta nueva formulación se visualizan los fenómenos desde un punto de vista microscópico, se consideran las interacciones entre un conjunto de partículas, se promedian estadísticamente y se trata de calcular las consecuencias de dichas interacciones a escala macroscópica. Mediante este enfoque, denominado **Termodinámica estadística**, se pretende correlacionar las propiedades macroscópicas de los sistemas con las de sus microestados, conservando la condición de equilibrio y, consecuentemente, la reversibilidad como condición fundamental.

Sin embargo, la mayoría de los procesos que ocurren en la naturaleza son espontáneos y necesariamente irreversibles. La gran mayoría de los fenómenos que ocurren en el Universo se realizan por etapas en los que los sistemas se encuentran fuera del equilibrio con sus alrededores. Casi todas las estrellas durante su larga vida nunca llegan siquiera a acercarse a las condiciones de equilibrio termodinámico. La meteorología y la biología estudian sistemas claramente fuera de equilibrio, tanto dinámico como térmico y difusional. Los fenómenos de transferencia de calor, masa y el movimiento de fluidos, necesarios para el funcionamiento de plantas industriales, también son irreversibles.

A pesar de que bajo ciertas circunstancias, la irreversibilidad de algunos sistemas puede caracterizarse mediante la termodinámica clásica, introduciendo factores tales como la eficiencia de los procesos, el trabajo perdido, etc., fue necesario la apertura de una nueva área de estudio dentro de la termodinámica, la actualmente conocida como **Termodinámica de Procesos Irreversibles** o **Termodinámica Fuera del Equilibrio**.

El origen de la Termodinámica Irreversible, generalmente se sitúa en los trabajos del químico noruego Lars Onsager publicados en 1931, aunque en realidad se pueden rastrear antecedentes en los trabajos de Lorentz, Gorter y Bridgeman, quienes intentaron describir los procesos irreversibles en función de variables macroscópicas y postulados termodinámicos. Sin embargo, su estructura carecía de consistencia y por ello, los especialistas la han denominado semiperoyativamente termodinámica seudoirreversible.

Existen varios tipos de análisis de sistemas termodinámicamente irreversibles. El primero de ellos basado en la ecuación de balance de energía mecánica de Bernoulli, considera un sistema en flujo estacionario, con procesos irreversibles independientes del tiempo que ocurren dentro de una superficie gaussiana sin especificación de su estructura interna. Tanto el fluido que entra a dicho elemento de volumen como el que sale, se encuentran en equilibrio y poseen propiedades bien definidas y directamente medibles. Por lo tanto, los procesos irreversibles se analizan examinando los cambios en los estados de equilibrio. Este procedimiento es correcto en su aplicación a una gran cantidad de sistemas, pero frecuentemente falla en proveer detalles de interés acerca de lo que sucede dentro de la superficie gaussiana que se visualiza como una caja negra.

El segundo enfoque, atribuido a Onsager, intenta extender las ecuaciones de la termostática a sistemas fuera del equilibrio. Se hacen varias consideraciones, pero no todas son universalmente válidas o libres de objeción. Sin embargo, ha tenido mucho éxito y quizá sea el más ampliamente extendido entre los investigadores.

La tercera formulación, correspondiente a la mecánica continua, trata con cantidades termodinámicas adecuadamente definidas que se incluyen dentro de ecuaciones diferenciales que representan variaciones temporales de sistemas homogéneos simples y extienden el análisis hasta incluir sistemas no homogéneos.

Desde principios del siglo XIX en que el Ingeniero Militar del Ejército Francés y Secretario de Hacienda del Imperio Napoleónico, Jean Baptiste Fourier, publicó su célebre tratado intitulado "Teoría Analítica del Calor". El estudio fenomenológico de los procesos fuera del equilibrio ha sido de vital importancia para comprender fenómenos que ocurren en la naturaleza. Actualmente las ecuaciones diferenciales vectoriales que caracterizan los flujos moleculares de calor, masa y *momentum*, son conocidas por cualquier estudiante de ciencias o ingeniería:

Flujo de calor por conducción, ecuación de Fourier:

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} = \rho C_p \partial T / \partial t \quad (1.1)$$

Difusión molecular de una especie A en una mezcla, ecuación de Fick:

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_A = D_{A\Sigma} \partial C_A / \partial t \quad (1.2)$$

Flujo molecular de *momentum* en un fluido, formulación Euleriana de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho g - \nabla P - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \partial (\rho \mathbf{v}) / \partial t \quad (1.3)$$

Tanto la ecuación de Fourier para la conducción de calor, como el modelo matemático de Fick para la difusión molecular y la ecuación de Navier-Stokes para la dinámica de fluidos, incluyen las divergencias de los campos vectoriales correspondientes, es decir, los flujos de alguna entidad física, promovidos por alguna fuerza impulsora que se puede identificar con el gradiente de algún potencial termodinámico.

En su trabajo original de 1931, Onsager postuló la siguiente expresión para la rapidez de generación de entropía:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{X}_i \quad (1.4)$$

en la cual:

- J_i representa el flujo de alguna cantidad física como masa, calor o *momentum*, y que por lo tanto está definido como:

$$J_i = \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.5)$$

- Al término X_i se le denomina afinidad y corresponde a una fuerza o potencial que promueve el flujo, como resultado del gradiente de alguna propiedad de estado.

A todo flujo J_i le corresponde una afinidad conjugada X_i , que está asociada al gradiente de una propiedad de estado. Dicho gradiente es responsable del alejamiento de las condiciones de equilibrio. El flujo de la entidad física asociada reduce progresivamente el gradiente, bajando la intensidad de la fuerza promotora, lo cual a su vez disminuye gradualmente el flujo hasta que se alcanza la condición de equilibrio, momento en el cual cesa el transporte. En varios textos se utilizan los términos de trabajo y potencial generalizados, visualizándose a los flujos de calor, masa, *momentum* y carga eléctrica, como si fuesen trabajos realizados en virtud de la existencia de un potencial impulsor, siendo este un gradiente de temperaturas, un gradiente de concentraciones, un gradiente de velocidad o un gradiente de potencial eléctrico, respectivamente.

Bajo este enfoque de Onsager, se pueden agrupar los modelos fenomenológicos de Fourier, Fick y Navier-Stokes. Dicha propuesta fue presentada formalmente a principios de la década de los 60's por Bird, Stewart y Lightfoot en su libro "Fenómenos de Transporte", citando las analogías entre las conocidas como primera ley de Fourier, primera ley de Fick y ley de Newton de la viscosidad, y que para el transporte tridimensional corresponden a:

$$\mathbf{J}_q = \mathbf{q} = -k \nabla T \quad (1.6)$$

$$\mathbf{J}_{A\Sigma} = -D_{A\Sigma} \nabla C \quad (1.7)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu \nabla \mathbf{v} \quad (1.8)$$

Sin embargo, una gran cantidad de fenómenos no pueden explicarse por la única acción de una fuerza conjugada a su flujo tradicionalmente conjugado. Como ejemplo se puede citar el efecto Soret, muy conocido en el ámbito de las extracciones químicas, y que corresponde al flujo de masa promovido por la existencia de un gradiente de temperaturas, o el efecto Dufour que consta del flujo de calor asociado a gradientes de concentración. En estos casos a las afinidades se les denomina acopladas.

Efecto Soret:

$$J_{A\Sigma} = -\rho \alpha \nabla \ln T \quad (1.9)$$

Efecto Dufour:

$$J_q = -(T^2/\rho) D_{A\Sigma} \nabla C \quad (1.10)$$

Si la rapidez de generación de entropía dada por la ecuación (1.4) es diferente de cero, el sistema se encontrará fuera del estado de equilibrio (térmico o dinámico o difusional), y se llevará a cabo una serie de procesos que tiendan a hacer que el sistema alcance el equilibrio.

En un segundo postulado, Onsager estableció que si el gradiente causante de un flujo es relativamente pequeño, la proporcionalidad entre dicho flujo y el correspondiente gradiente puede ser considerada como lineal, y lo mismo ocurrirá con la relación entre la rapidez de generación de entropía y afinidad.

Consecuentemente, al disminuir la afinidad, disminuye la rapidez de producción de entropía, lo cual conduce a un principio equivalente al de Le Chatelier-Braun. Dicho principio, formulado por Ilia Prigogine en 1947, establece que un sistema fuera del equilibrio e imposibilitado a alcanzarlo, se acercará a un estado estacionario en el que la función de disipación sea mínima. Tal función de disipación de energía corresponde al producto de la temperatura por la rapidez de producción de entropía, es decir:

$$F_D = -T \Sigma J_i X_i \quad (1.11)$$

En un tercer postulado (conocido también como principio de reciprocidad, y por el cual le dieron el premio Nobel de 1968) Onsager introdujo un coeficiente fenomenológico L_{ij} , en el cual incluía los efectos asociados ($i = j$) y contemplaba la posibilidad de efectos acoplados ($i \neq j$). Escribiendo en forma generalizada:

$$J_i = \Sigma L_{ij} X_j \quad (1.12)$$

de donde provienen las ecuaciones (1.6) a (1.10)

Los tres postulados de Onsager combinados con los principios de conservación que describen la evolución temporal de las variables de estado locales, permiten deducir un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que en principio pueden resolverse si se conoce la situación inicial del sistema y sus condiciones a la frontera, que dependen de la geometría. En la práctica, la resolución analítica de

dichas ecuaciones diferenciales puede complicarse por las características geométricas del sistema, y frecuentemente se utilizan métodos numéricos como el de diferencias finitas, elementos finitos y elementos frontera.

El análisis de los procesos de la termodinámica irreversible, desde el punto de vista fenomenológico, ha sido abordado por una gran cantidad de científicos, desde Newton y Fourier, hasta los de las últimas épocas. Matemáticamente la tarea es resolver ecuaciones diferenciales parciales como (1.1) a (1.3).

El análisis más detallado de la termodinámica irreversible también se ha desarrollado a partir de los trabajos de Onsager y Prigogine, y se han abierto varios campos como:

- **La termodinámica irreversible lineal** (basada en los postulados de Onsager).
- **La termodinámica irreversible extendida.** Surgida del deseo de reemplazar las ecuaciones parabólicas de la termodinámica ordinaria por ecuaciones hiperbólicas de manera que se puedan obtener velocidades de propagación finitas. Para ello se tienen que hacer una serie de consideraciones: el principio de equilibrio local tiene que ser olvidado, el flujo de entropía deja de ser igual al flujo de calor dividido entre la temperatura, y el principio de objetividad material solamente se considera como aproximado. La forma original de la termodinámica extendida expande la lista de 5 campos clásicos independientes (densidad, velocidad y temperatura) con 8 adicionales (las densidades de flujo de momentum y de energía). En 1958 Landau y Lifshitz demostraron que las ecuaciones fenomenológicas de la termodinámica extendida fuera del equilibrio, incluyendo el principio de reciprocidad, pueden ser formuladas en forma Lagrangiana.
- **La termodinámica endorreversible.** En esta subárea de la termodinámica irreversible se describen sistemas fuera del equilibrio donde se crea entropía continuamente y que sin embargo permanecen en estado estacionario, dejando fuera efectos transitorios, oscilaciones y fenómenos semejantes. En la termodinámica endorreversible se visualizan los sistemas irreversibles como una red de subsistemas internamente reversibles intercambiando energía de manera irreversible, es decir, todas las irreversibilidades se confinan en las

interacciones entre los subsistemas; esta subárea es adecuada para el estudio de conversión de energía solar, energía nuclear, climatología, economía y hardware computacional. Un subconjunto de esta subárea, la termodinámica de tiempo finito se dedica a investigar el control óptimo de sistemas endorreversibles.

- **termodinámica irreversible no lineal.** Esta área se dedica a la modelación racional del comportamiento termodinámico de materiales complejos.; tiene que ver con procesos de producción de entropía no lineal, entre otras las formas bilineal y cuadrática. Se aplica a varios sistemas, entre ellos el flujo de fluidos viscoelásticos, fenómenos con ciclos de histéresis, difusión molecular no lineal, transiciones de fase, etc.

En muchos sistemas parece que después de varios estados posibles que perduran un tiempo t_0 , la función de distribución de N partículas llega a ser esencialmente independiente del tiempo; esto se evidencia debido a que las propiedades macroscópicas del sistema se relajan hasta valores promedio bien definidos. Es natural pensar que tal comportamiento ergódico sucede en sistemas en equilibrio, pero también ocurre en varios sistemas fuera del equilibrio, en los denominados estados estacionarios fuera del equilibrio. En este trabajo se considerarán principalmente sistemas fuera del equilibrio ergódicos. En tales sistemas el promedio temporal de cualquier función de fase $A(q, p)$ es igual al promedio en los microestados. En los últimos años, Jean Bricmont ha colaborado apreciablemente en el desarrollo de la **termodinámica irreversible estadística**, profundizando en la contrastación del teorema ergódico.

La mecánica estadística de gases atómicos diluidos es un problema prácticamente resuelto. La teoría empezó a desarrollarse desde 1870 por Maxwell y Boltzmann, quienes establecieron los fundamentos de la teoría cinético molecular de los gases; con dicha teoría es posible calcular los coeficientes de transporte. Sin embargo, los intentos de extender la teoría cinético molecular a sistemas de alta densidad, se ha tropezado con serios problemas. En un principio se pensaba que una expansión en series de potencias de los coeficientes de transporte daría buenos resultados, tal como se obtiene al aplicar dicha expansión a una ecuación de estado, dando como resultado una expresión en términos de los denominados coeficientes viriales. Sin embargo, en 1965 Cohen y Dorfmann demostraron que tal expansión no existe. Los coeficientes de transporte (μ , K y D_{AE}) son funciones no analíticas de la densidad.

En 1957 Kubo demostró que los coeficientes de transporte lineales pueden calcularse a partir de las fluctuaciones de la densidad de flujo al equilibrio. Por ejemplo, la viscosidad cinemática se define como el cociente del esfuerzo cortante τ_{xy} entre la rapidez de deformación $\gamma = \partial u_x / \partial y$ (ecuación 1.8 unidimensional). La relación de Kubo predice que la viscosidad límite para pequeños esfuerzos cortantes está dada por:

$$\eta = \frac{V}{K_B T} \int_0^{\infty} \langle \tau_{xy}(0) \tau_{xy}(s) \rangle ds \quad (1.13)$$

donde K_B es la constante de Boltzmann, T la temperatura absoluta, V el volumen, y el término entre corchetes angulares denotan un ensamble promedio al equilibrio. De acuerdo a esta expresión, la viscosidad es la integral a tiempo infinito de la función de autocorrelación del esfuerzo cortante. Expresiones similares a (1.13) son válidas para los demás coeficientes de transporte. Para efectos de este trabajo se considerarán valores constantes de los coeficientes de transporte.

La termodinámica lineal de procesos irreversibles en sus aplicaciones a materiales sólidos lleva al establecimiento de las relaciones esfuerzos-deformación, semejantes a la que ocurren en fluidos. La mayoría de los sistemas sólidos sometidos a esfuerzos mecánicos suelen ser ergódicos bajo condiciones de estado estacionario, desde el punto de vista de la mecánica estadística. La producción de entropía es no negativa y sirve como base para la descripción sistemática de los procesos irreversibles que ocurren en un sólido. Cemal Basaran y Shihua Nie hacen un análisis de la mecánica de materiales sólidos bajo el enfoque de la termodinámica de procesos irreversibles.

En esta tesis se aborda la **termodinámica irreversible lineal** en sus aplicaciones prácticas correspondientes a las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) a sistemas ergódicos. Los logros de dicha teoría son tan amplios que han permitido la caracterización de los denominados **fenómenos de transporte**, base fundamental para entender gran cantidad de fenómenos físicos, químicos y biológicos, así como llevar a cabo el diseño de equipos y plantas industriales.

2

ELEMENTOS FINITOS

2.1. INTRODUCCIÓN

La mayor parte de los fenómenos que ocurren en la naturaleza son de tal grado de complejidad que resulta difícil para la mente humana captarlos como una sola operación global. Por ello, una forma natural para intentar caracterizarlos consiste en separar los sistemas en sus componentes individuales o "elementos", cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes. En la termodinámica estadística por ejemplo, se toma un conjunto constituido por un pequeño número de partículas; se determinan las interacciones físicas entre ellas; y enseguida se buscan relaciones de escalamiento de la función de partición del sistema, para finalmente obtener la caracterización matemática de las variables termodinámicas a escalas cada vez mayores hasta llegar al tamaño macroscópico.

En muchos casos se obtiene un modelo matemático adecuado utilizando un número finito de componentes bien definidos, a tales modelos se les denomina discretos. En otras situaciones la subdivisión prosigue indefinidamente y el problema solo se puede definir haciendo uso de la ficción matemática conocida como infinitésimo. Ello nos conduce a ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes con un número infinito de elementos implicados.

A finales del siglo XVII, el científico británico Isaac Newton y el matemático alemán Gottfried Leibniz, establecieron los fundamentos del cálculo diferencial e integral, que ha sido desde entonces la herramienta matemática más utilizada en la construcción de modelos cuantitativos que permiten predecir la evolución de los procesos físicos que ocurren en nuestro alrededor. El cálculo diferencial e integral hace uso de la hipótesis de continuidad del universo.

La mayoría de los modelos matemáticos que encontramos en el ámbito de la termodinámica

irreversible corresponden a ecuaciones diferenciales (ordinarias, parciales en espacio y tiempo, sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas, lineales o no lineales, etc). Sin embargo, muy frecuentemente el proceso de integración resulta complicado. En ocasiones la complicación resulta de la no linealidad de la ecuación diferencial o del conjunto de ecuaciones diferenciales, y en otros casos, de la diversidad y complejidad de las condiciones de frontera. Las técnicas analíticas disponibles suelen limitar las posibilidades de resolución a casos extremadamente simplificados de geometría regular, y es necesario proceder mediante métodos numéricos en los otros casos.

Para resolver problemas continuos reales, se han ido proponiendo a través de los años, diversos métodos de discretización. La aplicación de estos métodos hace necesario efectuar alguna aproximación de tal manera que quepa esperar que la misma se acerque, tan estrechamente como se desee, a la solución continua verdadera a medida que crezca el número de subdominios discretos.

El método de los elementos finitos permite aproximar la solución de ecuaciones diferenciales con valores a la frontera mediante la discretización del dominio de la solución en subdominios finitos y la utilización de funciones de aproximación a la solución de la ecuación diferencial, imponiendo condiciones de continuidad de dicha función en las fronteras entre elementos vecinos.

La idea fundamental del método de los elementos finitos es el reemplazo de funciones continuas (la variable dependiente de una ecuación diferencial) por funciones de aproximación por subdominios, comúnmente de naturaleza polinomial, y la subsecuente optimización de los parámetros de dicha función de aproximación para minimizar el error respecto a la solución exacta de la ecuación diferencial con sus condiciones de frontera.

2.2. NOTAS HISTÓRICAS.

A pesar de que el método de elementos finitos es relativamente reciente, la idea de aproximación por segmentos es antigua. Los geómetras griegos utilizaron "elementos finitos" para la determinación del valor de π . Ellos dibujaban un círculo con polígonos adscritos y circunscritos. El promedio del perímetro de cada pareja de polígonos correspondían a aproximaciones por elementos finitos al perímetro de la circunferencia. De esta forma fueron capaces de obtener valores para π cada vez más exactos a medida que se consideraban polígonos de mayor número de lados. Arquímedes utilizó estas ideas para determinar las áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos, a pesar de que, por supuesto, él no manejaba un concepto preciso de procedimiento límite. En sí fue solamente este hecho lo que impidió el descubrimiento del cálculo diferencial e integral en la cultura helénica unos 2000 años antes de Newton y Leibniz. El punto curioso aquí es que la mayoría de los problemas de matemáticas aplicadas son formulados en términos de ecuaciones diferenciales y la solución por elementos finitos de tales ecuaciones, utiliza ideas mucho más antiguas que las que se usan para formular dichos modelos.

El uso moderno de los elementos finitos realmente empezó en el campo de la **ingeniería estructural**. Probablemente los primeros intentos fueron hechos por Hrennikoff (1941) y McHenry (1943) quienes desarrollaron analogías entre elementos discretos reales (barras y vigas) y las correspondientes porciones de un sólido continuo. Estos métodos pertenecen a una clase de **técnicas semianalíticas** que se usaron en los años 40's para diseño estructural de aeronaves. Con el desarrollo de naves aéreas de velocidad relativamente alta, como el avión Jet, su método resultó ser inadecuado y se inició la búsqueda de una mejor técnica para una aproximación más confiable. Una aproximación directa basada en el **principio de trabajo virtual**, fue propuesta por Argyris (Argyris y Kelsey, 1960), y en una serie de artículos, él y sus colegas desarrollaron un algoritmo para resolver problemas muy complejos usando técnicas computacionales. Aproximadamente en esa misma época, Turner (1956) presentó la formulación de la **matriz de rigidez local**, basada en consideraciones de desplazamiento para un elemento triangular, junto con el **procedimiento de ensamblaje** para obtener la **matriz de rigidez global**.

El término "Elemento Finito" fue introducido por Clough (1960) en un documento que describe las aplicaciones en el campo de la **elasticidad plana**.

Los ingenieros habían catalogado al método de los elementos finitos como una técnica práctica para resolver problemas de elasticidad, y aunque no se habían desarrollado sus bases matemáticas rigurosamente, en pocos años el mundo científico fue testigo de la expansión del método para resolver una gran variedad de problemas estructurales.

La resolución de **problemas tridimensionales** requirió solamente de extensiones "simples" de la teoría básica bidimensional (Argyris, 1964). El problema obvio a considerar después de los problemas planos era el de la placa doblada; fue ahí donde los investigadores encontraron las primeras dificultades serias y los primeros intentos no fueron para nada satisfactorios. Fue hasta algunos años después en que los problemas de compatibilidad de las **geometrías plana y curva** pudieron ser parcialmente resueltos (Bazely *et al*, 1965).

Un campo de aplicación de los elementos planos bidimensionales era el de la modelación de **corazas delgadas**. Clough y Johnson (1968) lograron algunos éxitos en esta área. Sin embargo, la representación de una pequeña coraza delgada mediante una superficie poliédrica compuesta por placas planas puede provocar serios problemas cuando la curvatura de la coraza es muy pronunciada y pronto llegó a quedar claro que era necesario el desarrollo de elementos curvos.

Los elementos finitos planos bidimensionales presentan ciertas dificultades para los investigadores, pero son pequeñas comparadas con los problemas asociados con elementos curvos. Los primeros elementos curvos reales desarrollados fueron **elementos axisimétricos** (Grafton y Strome, 1963), y a ellos les siguió una secuencia completa de elementos cilíndricos, elípticos, parabólicos, y otras geometrías curvas (Gallagher, 1969). El rápido desarrollo del análisis lineal en la década de los 80's ha permitido resolver casi todos los problemas prácticos de mecánica de sólidos y fenómenos de transporte relacionados con geometrías curvas.

Los investigadores de los años 60's pronto fijaron su atención en la solución de **problemas no lineales**. Turner (1960) mostró como usar una técnica incremental para resolver problemas no lineales. Es decir, problemas en los cuales la deformación permanece pequeña pero los desplazamientos son grandes. El **análisis de la estabilidad** también cae dentro de esta categoría y fue abordado por Martin et

al en 1965. Los **problemas de plasticidad**, que involucran el comportamiento no lineal de algunos materiales (sólidos no Hookianos) fueron modelados en esa época (Gallagher 1962), y el método fue aplicado también a la solución de problemas de **viscoelasticidad** (Zienkiewicz *et al.*, 1968).

Finalmente, al lado del análisis de problemas de estática descrito anteriormente, también han sido abordados **problemas de dinámica**. Archer (1963) introdujo el concepto de **matriz de masa consistente**. Zienkiewicz *et al.* (1966) consideraron problemas de **vibración**, mientras que Koenig y Davids (1969) resolvieron problemas en **estado transitorio**. Entonces, desde la época de su nacimiento en los primeros años de la década de los 50's, su desarrollo a mediados de los 60's y su maduración a principios de los 80's, el método ha sido aplicado extensamente por la comunidad de ingeniería.

Simultáneamente los **matemáticos** han desarrollado los **teoremas** que soportan el método. Cada grupo aparentemente independientemente del trabajo de otros. A finales de los años 40's Synge y sus colaboradores desarrollaron el **método de Hiperciclos** que utiliza muchas de las ideas del método de los elementos finitos. Previamente, Courant (1943) dio una solución al problema de torsión, utilizando aproximaciones lineales por **segmentos** dentro del dominio de la ecuación diferencial dividido en un mallado triangular y formulando el problema a partir del **principio de mínima energía potencial**. Artículos similares fueron reportados por Polya (1952) y Weinberger (1956). Greenstadt (1959) presentó la idea de considerar una región continua como un ensamblaje de varias partes discretas, y hacer consideraciones de continuidad de las variables en cada región, utilizando el **principio variacional** para encontrar los valores de dichas variables.

En 1968, Birkhoff y Zlamal publicaron independientemente una **prueba de convergencia y error** para los métodos de elementos finitos que apareció en la literatura de matemáticas aplicadas. Sin embargo, la primera prueba de convergencia en publicaciones de ingeniería fue reportada por Melosh (1963) quien utilizó el principio de mínima energía potencial y su trabajo fue extendido por Jones (1964) utilizando el principio variacional de Reissner. Una vez que los investigadores se dieron cuenta de que la técnica podría ser interpretada en términos de métodos variacionales, las ideas de matemáticos e ingenieros hallaron convergencia y pronto se desarrollaron muchas extensiones del método a nuevas áreas. En particular, se dieron cuenta de que el

concepto de **aproximación polinomial por segmentos** ofrece un procedimiento simple y eficiente para la aplicación del **método clásico de Rayleigh-Ritz**. Desde el punto de vista físico, ello significa que el método de los elementos finitos es aplicable a cualquier problema de campo que pueda ser formulado en base a un **principio variacional**. Eso fue lo que justamente hicieron Zienkiewicz y Cheung en 1965, al aplicar el método en la solución de la ecuación de Poisson, y por Doctors en 1970 para resolver problemas de flujo de potencial. Similarmente los problemas de conducción de calor en régimen transitorio fueron considerados por Wilson y Nickell en 1966.

Posteriormente el método fue extendido ajustándolo al bien conocido **método de residuos ponderados** (Szabo y Lee, 1969). Este desarrollo ha permitido la solución de problemas para los cuales no existe un principio variacional, o cuando dicho principio es difícil de encontrar, por ejemplo en el flujo de fluidos viscosos (Connor y Brebbia, 1976) o problemas de campo no lineales en teoría electromagnética (Zienkiewicz *et al.*, 1977).

Debe mencionarse que hay mucho trabajo por realizar en el área de problemas no lineales. Por ejemplo, el problema de **difusión-convección** involucrado en la solución de la **ecuación de Navier-Stokes** está lejos de tener una solución satisfactoria desde el punto de vista de elementos finitos. Los problemas que actualmente se intentan resolver por este método cubren el espectro completo de ciencias físicas, incluyendo tanto fenómenos estacionarios como no estacionarios. También ha encontrado campo de aplicación en la **ingeniería bioquímica** (Gould, 1976), donde los problemas exhiben todas las dificultades relacionadas a la **geometría compleja y a la no linealidad** en el comportamiento de los materiales. El texto de Zienkiewicz y Taylor (1994) ofrece una serie de formulaciones para problemas lineales, no lineales, acoplados y en régimen transitorio en las áreas de mecánica de sólidos, dinámica de fluidos, transferencia de calor (tanto conducción como convección), biomecánica, etc. Por otra parte Ayappa *et al.* (1991) han aplicado el método en la resolución de problemas de radiación de alimentos en hornos de microondas.

El método del elemento finito ofrece muchos retos interesantes para ingenieros, físicos, matemáticos teóricos y aplicados, y analistas numéricos. Todos estos grupos de científicos han hecho contribuciones importantes en el pasado y seguramente seguirán haciéndolo para contribuir en su evolución.

2.3. DESCRIPCIÓN.

Para la implementación de este método se empieza dividiendo la región de interés, es decir, el dominio de la solución de la ecuación diferencial, en "subregiones" o elementos. A continuación se ensaya una función de aproximación a la solución de la ecuación diferencial dentro de cada elemento. En seguida se minimiza el error respecto a la solución exacta por algún método como la aplicación de un principio variacional o por mínimos cuadrados. En esta etapa se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales locales, que se ensamblan para obtener el sistema de ecuaciones global. El siguiente paso consiste en introducir las condiciones límite, lo cual puede modificar el sistema global de ecuaciones lineales. Por último se resuelve el sistema modificado de ecuaciones simultáneas, obteniéndose la solución de la ecuación diferencial en cada punto nodal. La solución, sin embargo, es válida para todo el dominio del elemento.

Los nodos en los cuales se desea hallar el valor de la variable de interés no tienen que descansar en un arreglo rígido sino que pueden formar parte de una malla flexible, lo cual permite el manejo de geometrías irregulares y fronteras móviles.

El algoritmo para el cálculo vía elementos finitos puede ser tan versátil que al hacer un cambio de las coordenadas nodales o de las condiciones límite, el programa reconstruya automáticamente el sistema de ecuaciones y permita resolver la ecuación diferencial para otras geometrías sin tener que reprogramar.

Las condiciones de frontera también se manejan de manera flexible, de forma tal que un algoritmo computacional estándar puede ser fácilmente modificado para incluir otras condiciones límite.

2.4. CLASIFICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS.

Como se mencionó en el inciso anterior, el principio de este método consiste en sustituir la variable dependiente (y) de la ecuación diferencial parcial por una función de aproximación continua ($V_{\text{aprox}} = \sum N_i a_i$) con parámetros incógnita (a_i) en cada uno de los elementos. Al introducir las condiciones de continuidad entre elementos vecinos y las condiciones de frontera, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas lineales, cuya forma depende de las funciones N_i , expresadas en términos de las variables independientes, y que al ser resuelto permite hallar los valores de los parámetros de la función de aproximación que corresponden al mejor ajuste de la variable dependiente a la solución exacta de la ecuación diferencial en cada una de las coordenadas espaciales.

Existen varios procedimientos que permiten optimizar los parámetros de la función de aproximación para disminuir el error con respecto a la solución exacta. Dichos procedimientos pueden ser

clasificados en dos categorías, aquellos que utilizan funcionales variacionales buscándose valores estacionarios que minimizan el error de la aproximación y los denominados métodos de residuos ponderados:

- Principio Variacional.
- Residuos Ponderados.
 - Método de colocación por puntos.
 - Método de colocación por subdominios.
 - Método de mínimos cuadrados.
 - Método de Galerkin (Bubnov-Galerkin).

Para utilizar los métodos variacionales es condición necesaria que la ecuación diferencial cumpla con la ecuación de Euler-Lagrange, en cambio, a cualquier ecuación diferencial se le pueden aplicar los métodos de residuos ponderados, como se ejemplifica un poco más adelante en la sección 2.6

2.5 MÉTODO DEL PRINCIPIO VARIACIONAL.

Para comprender el fundamento de los métodos variacionales es conveniente definir el concepto de funcional. Una funcional es una función que depende de la variable independiente, la variable dependiente, las derivadas de la variable dependiente y de una serie de parámetros, matemáticamente:

$$I = I [x, y(x), y'(x), y''(x), k], \quad (2.1)$$

ecuación en la cual la función argumento es $y(x)$.

El cálculo variacional es una rama de las matemáticas que se puede definir como una teoría general sobre los valores extremos (mínimos y máximos) de una funcional. En virtud de ello, los métodos variacionales proponen técnicas para la optimización de funcionales, que eventualmente podrían ser las funciones de aproximación a la solución de una ecuación diferencial.

El problema general que se plantea es hallar los extremales de una funcional.

Para el cálculo variacional es de relevante interés el caso en que la funcional (2.1) corresponde a una expresión integral:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} [y(x), y'(x), y''(x), x] dx \quad (2.2)$$

El problema es encontrar los parámetros de una función f que hagan que la funcional I alcance valores máximos y mínimos.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x)] dx \quad (2.3)$$

donde I es una función que depende de la función argumento y la variable independiente; Si al aproximar la solución de una ecuación diferencial se establece que la funcional sea la función de error, se minimizará dicho error.

Se desea calcular los valores máximos y mínimos de I para lo cual se deberá encontrar la forma particular de $y(x)$ que optimice I .

En un dominio dado de funciones que pueden ser de diferentes tipos (polinomiales, sinusoidales, parabólicas, etc.), deben hallarse los parámetros de f para los cuales la funcional I alcance un valor óptimo con respecto a la función argumento.

Si la función bajo estudio depende explícitamente de ciertos parámetros además de la función argumento, también se debe determinar el óptimo tomando en cuenta el valor de estos parámetros.

En general:

$$I[y(x, z)] = \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} F\left[x, z, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}\right] dx dz$$

$$I[y(x, z, k)] = \int_{k_1}^{k_2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} F\left[x, z, k, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial k}\right] dx dz dk \quad (2.4)$$

Para el primer caso se debe determinar la función óptima $y^*(x, z)$, mientras que en el segundo el objetivo es obtener la función óptima $y^*(x, z, k)$, en donde k es un parámetro.

2.5.1. ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE.

Los principios variacionales representan con frecuencia algún aspecto físico del problema en consideración. Teoremas como el de la minimización de la energía potencial total para el equilibrio de los sistemas mecánicos, el principio de mínima disipación de la energía en fluidos viscosos, La minimización de la energía interna como condición del equilibrio termodinámico, etc., son conocidos y

considerados por muchos como las bases de la formulación.

Los principios variacionales de esta clase se llaman "naturales", pero no existen para todos los problemas de medios continuos, mientras que si pueden formularse siempre ecuaciones diferenciales perfectamente definidas.

Hay otra categoría de principios variacionales que podríamos denominar "ad hoc". Tales principios ad hoc se pueden construir siempre para cualquier problema expresado por ecuaciones diferenciales, ya sea aumentando el número de funciones incógnita, mediante las variables adicionales conocidas como multiplicadores de Lagrange, o bien por procedimientos que impongan un mayor grado de continuidad, como en los problemas de mínimos cuadrados que se ejemplificarán más adelante.

Considérese una función continua y diferenciable $y(x)$, en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$ y una función F , tal que cada valor de x dependa explícitamente del valor de $y(x)$ y de su derivada $y'(x)$, esto es :

$$F = F(y, y', x). \quad (2.5)$$

El problema a estudiar es el de minimizar la integral:

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[y, y', x] dx. \quad (2.6)$$

donde $y(x_0)$ y $y(x_1)$ son funciones conocidas.

Supóngase que se conoce la función óptima $y(x)$ que minimiza $I[y(x)]$. Esto es, supóngase que en una cercanía (h) de $y(x)$, la integral es mínima.

Considérese además una función cualquiera $\eta(x)$ continua y diferenciable en el intervalo $x_0 \leq x \leq x_1$, con $\eta(x_1) = 0$ y $\eta(x_0) = 0$, que corresponden a las condiciones de frontera ya conocidas. η , la desviación en dichos puntos, consecuentemente es cero.

Constrúyase la nueva función:

$$y^*(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x). \quad (2.7)$$

Es decir, la nueva función es igual a la óptima más una desviación cualquiera multiplicada por un escalar ε . Donde ε es un parámetro que se puede hacer tan pequeño como se desee, es decir la nueva función, $y^*(x)$, es una función en las cercanías de $y(x)$.

$$I[y^*(x)] = \phi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F[y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x] dx \quad (2.8)$$

Todos los valores posibles de la función $y(x)$ están en la cercanía, por lo tanto la integral se puede considerar como una función ordinaria de ε . Ya que ε especificaría el valor de $\phi(\varepsilon)$, entonces se debe hacer

que $\partial\phi(\varepsilon)/\partial\varepsilon = 0$. También el mínimo de $\phi(\varepsilon)$ ocurre en $\varepsilon = 0$; por definición

$$\phi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F[y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x] dx = \int_{x_0}^{x_1} F[y^*, y'^*, x] dx \quad (2.9)$$

Derivando el funcional $\phi(\varepsilon)$, con respecto a ε , se obtiene:

$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F[y^*, y'^*, x] dx \quad (2.10)$$

Si se diferencia $F[y, y'', x]$ tenemos:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial y^*} dy^* + \frac{\partial F}{\partial y'^*} dy'^* + \frac{\partial F}{\partial x} dx \quad (2.11)$$

Al derivarlo con respecto a ε se obtiene:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'^*} \frac{\partial y'^*}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}. \quad (2.12)$$

donde $dx/d\varepsilon = 0$, ya que x se considera como una constante debido a que se buscan los cambios desde una curva a otra para valores constantes en x .

Para evaluar la integral de la ecuación (2.9) se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [y + \varepsilon\eta(x)] = \eta(x) \quad (2.13.a \text{ y } b)$$

$$\frac{\partial y'^*}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [y' + \varepsilon\eta'(x)] = \eta'(x)$$

Sustituyendo las consideraciones anteriores en la ecuación (2.12) se obtiene por resultado:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial y^*} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'^*} \eta'(x) \quad (2.14)$$

Tomando como límites para la ecuación anterior el hecho de que a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$, $y^* \rightarrow y$, $y'^* \rightarrow y'$, e igualando el resultado a cero para minimizar, se obtiene:

$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y^*} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'^*} \eta'(x) \right] dx = 0 \quad (2.15)$$

Sustituyendo $F_y = \partial F / \partial y^*$, $F_{y'} = \partial F / \partial y'^*$ además de separar en dos integrales se obtiene:

$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} F_y \eta(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \eta'(x) dx = 0 \quad (2.16)$$

Al integrar el segundo término por partes se obtiene una forma más conveniente.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \eta'(x) dx &= F_{y'} \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} dx \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ya que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, por definición.

Sustituyendo este resultado en las integrales se obtiene:

$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} F_y \eta(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{dF_{y'}}{dx} dx = 0 \quad (2.18)$$

Así que finalmente la ecuación diferencial queda de la siguiente forma:

$$\frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right] dx = 0 \quad (2.19)$$

Para resolver esta integral es necesario hacer uso del siguiente lema:

Lema: Si $x_1, x_2 (> x_1)$ son constantes fijas y $g(x)$ es una función continua en el intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$, y si:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) g(x) dx = 0 \quad (2.20)$$

para cualquier $\eta(x)$ continua y diferenciable con:

$$\eta(x_1) + \eta(x_2) = 0,$$

entonces se cumple que $g(x) = 0$, en el intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$.

Aplicando este lema en la ecuación 2.9, se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} F_y - \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{dF}{dy} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y'} &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

La cual está asociada con el principio de Cálculo Variacional y corresponde a una condición necesaria, pero raramente suficiente, que una funcional debe satisfacer para maximizar o minimizar una integral con los límites definidos.

Cuando una ecuación diferencial satisface la ecuación de Euler - Lagrange, entonces es posible escribir un Principio Variacional. Al resolver las ecuaciones resultantes, se optimiza la funcional; hallándose la mejor solución a la ecuación diferencial, por minimización del acercamiento. Sin embargo no para todas las ecuaciones diferenciales existe un Principio Variacional, y en esos casos se procede a la aplicación de otros métodos, tal como es el caso de los métodos de Residuos Ponderados que se explican a continuación.

2.6 FUNDAMENTO DE LOS MÉTODOS DE RESIDUOS PONDERADOS

La idea fundamental de los métodos de elementos finitos, ya sea en su versión variacional o por residuos ponderados, es proponer una función de aproximación a la solución de la ecuación diferencial, por ejemplo un polinomio cuadrático. En seguida se discretiza el espacio de solución, dividiéndolo en subregiones. Para cada subregión (elemento) se optimizan los parámetros ajustables de la función de aproximación por minimización del cuadrado del error, imponiendo condiciones de continuidad en las fronteras de cada elemento. Esto da lugar a un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución permite obtener los valores de la variable de interés en los puntos

nodales, así como los parámetros de ajuste en cada subregión. El siguiente ejemplo da una idea más clara de esta técnica numérica:

Consideremos la ecuación diferencial:

$$y'' - 4x = 0, \text{ con condiciones de frontera:}$$

$$\text{C.F. 1 : } y(0) = -2$$

$$\text{C.F. 2 : } y(1) = 1,$$

cuya solución analítica es : $y = 2/3 x^3 + 7x/3 - 2$

El primer paso es proponer una función de aproximación, por ejemplo:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ un polinomio cuadrático.}$$

Luego se determinan la primera y segunda derivadas:

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

La sustitución de las condiciones de frontera conducen a: $c = -2$; $b = 3 - a$,

es decir, c es una constante y b ha sido escrita como una función de a .

La primera y segunda derivadas se sustituyen en la ecuación diferencial, dando:

$$2a - 4x = 0.$$

Si la función de aproximación coincidiera con la solución exacta de la ecuación diferencial, el lado derecho de esta última ecuación sería idénticamente igual a cero, pero como el polinomio cuadrático es en realidad una aproximación a la solución exacta, debe haber algún error o residuo, R , por lo tanto

$$2a - 4x = R.$$

El objetivo es minimizar dicho error. La función residuo, R , se presenta en todo el intervalo de solución, dando desviaciones positivas en algunos puntos de dicho intervalo y negativas en otros. Para minimizar el error, primero se elevan al cuadrado los residuos para eliminar el signo, luego se suman en todo el intervalo mediante una integración con límites definidos, y finalmente se minimiza la suma de errores mediante el procedimiento de obtener la primera derivada e igualarla a cero. como el único parámetro de la función de aproximación es a (ya que b es función de a , y $c = -2$):

$$\frac{d}{da} \int_0^1 R^2 dx = \int_0^1 \frac{d}{da} R^2 dx = \int_0^1 2R \frac{dR}{da} dx = 0$$

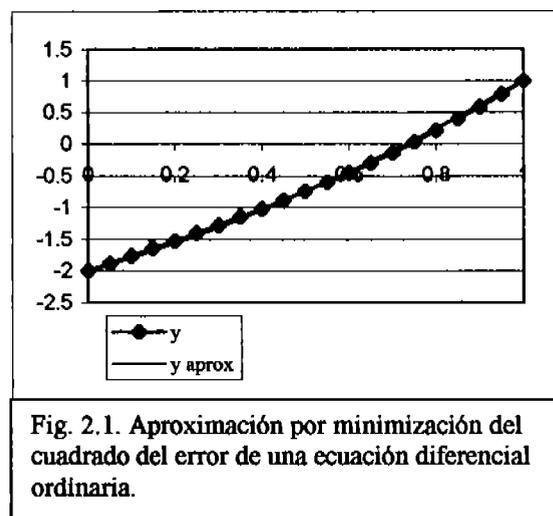
$$\int_0^1 4(2a - 4x) dx = 0; \quad [ax - x^2]_0^1 = 0$$

De donde $a = 1$.

Por lo tanto, la mejor solución cuadrática que resuelve la ecuación diferencial en el intervalo (elemento) de 0 a 1, es :

$$y = x^2 + 2x - 2.$$

El resultado se presenta en la siguiente gráfica. Nótese la coincidencia casi total de la solución aproximada con la solución exacta.



Si el dominio de la solución se divide en subregiones, en cada una de las cuales se procediera a plantear las ecuaciones con las que se optimizan los parámetros de la función de aproximación, imponiendo condiciones de continuidad en las fronteras de cada intervalo en un proceso de globalización, habríamos desarrollado una de las modalidades del método de los elementos finitos, denominada residuos ponderados por minimización del error cuadrático. Normalmente cuando se globalizan las ecuaciones que definen los valores óptimos de las funciones de aproximación, se obtiene un conjunto de ecuaciones simultáneas lineales, cuya solución da el valor más cercano de los parámetros de las funciones de ajuste en cada uno de las subregiones. El resultado obtenido es una función que es válida para todo el subdominio dentro de cada elemento y no nada más en los vértices de una red nodal como en el método de las diferencias finitas.

Un mismo algoritmo, escrito para una geometría determinada de la región de solución puede ser fácilmente adaptada a otra, simplemente redefiniendo las coordenadas nodales. Las condiciones de frontera, también se pueden manejar de una manera muy flexible. En cambio, por diferencias finitas, normalmente es necesario reescribir el programa completo.

2.6.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS MÉTODOS DE RESIDUOS PONDERADOS.

La expresión matemática que representa la minimización del cuadrado del error a lo largo del subdominio puede ser expresada también como:

$$\int_0^1 R \frac{\partial R}{\partial a} dx = \int_0^1 RW dx = 0 \tag{2.22}$$

donde W es una función de ponderación. En la formulación previa W es igual a la derivada parcial del residuo con respecto al parámetro a. Desde el punto de vista del análisis matemático, pueden hacerse diversas elecciones para la función de ponderación. Las alternativas más comunes conducen a los métodos de:

- **Colocación por puntos.** En este método se seleccionan tantos puntos dentro del dominio como grados de libertad de la función de aproximación, y se define la función de ponderación como la delta de Dirac: $W = \delta(x_0)$. Gracias a que $\int f(x) \delta(x_0) dx = f(x_0)$, la sustitución de las coordenadas de los puntos seleccionados en la función residuo, permite obtener un conjunto de ecuaciones simultáneas lineales de las cuales se obtienen directamente los valores de los parámetros de la función de aproximación. Para que este método dé resultados confiables se requiere bastante experiencia para seleccionar los puntos dentro del dominio. Entonces si se utilizan funciones de aproximación polinomiales:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N \tag{2.23}$$

Para cada parámetro no determinado a_i seleccionado para un punto x_i en el dominio, se fuerza que el residuo en cada x_i sea exactamente igual a cero.

$$\begin{aligned} R(x_1, a_1) &= 0 \\ R(x_2, a_2) &= 0 \\ &\vdots \\ R(x_N, a_N) &= 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Para una función de ponderación con n parámetros, se obtiene un sistema con n ecuaciones residuales. Los puntos x_i se denominan entonces puntos de colocación. Estos pueden estar localizados en cualquier lugar del dominio y en la frontera, pero no necesariamente en algún arreglo en particular.

- **Colocación por Subdominios.** Para aplicar este método se divide el dominio en un número de subdominios igual al de los grados de libertad. Por lo tanto se requiere que la $\int R dx = 0$ en cada subdominio. Consecuentemente $W = 1$. Para cada parámetro no determinado a_i ; seleccionado para un intervalo Δx dentro del dominio se fuerza a que el término del residuo sea cero dentro de cada subintervalo:

$$\frac{1}{\Delta x_1} \int_{\Delta x_1} R(x_1; a_1) dx = 0 \tag{2.25}$$

$$\frac{1}{\Delta x_2} \int_{\Delta x_2} R(x_2; a_2) dx = 0$$

(2.26)

$$\frac{1}{\Delta x_n} \int_{\Delta x_n} R(x_n; a_n) dx = 0$$

Nuevamente, para una función de ponderación con n parámetros se tiene un sistema de N ecuaciones residuales. El intervalo Δx es llamado subdominio. Los subdominios pueden ser escogidos en alguna forma que se adapte a la geometría del sistema. Incluso superponiéndose o de manera que exista separación entre ellos.

- **Minimización del cuadrado del error.** Este método corresponde al procedimiento tratado en el ejemplo de la sección 2.6, y como ya se mencionó: $W = \partial R / \partial x$. Con este criterio se minimiza, con respecto a cada a_i , la suma sobre el dominio entero del cuadrado del error residual, es decir, se trata de un criterio de mínimos cuadrados. La integral del cuadrado del residuo es una función de los a_i . Para su minimización se requiere igualar a cero las derivadas parciales con respecto a cada a_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} \int_1^2 R^2(x_1, a_1) dx &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_2} \int_1^2 R^2(x_2, a_2) dx &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_N} \int_1^2 R^2(x_N, a_N) dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Aplicando las propiedades de linealidad de los operadores derivada e integral, es posible introducir la derivación parcial dentro de la suma.

$$\begin{aligned} \int_1^2 R(x_1; a_1) \frac{\partial R(x_1; a_1)}{\partial a_1} dx &= 0 \\ \int_1^2 R(x_2; a_2) \frac{\partial R(x_2; a_2)}{\partial a_2} dx &= 0 \\ \vdots & \\ \int_1^2 R(x_N; a_N) \frac{\partial R(x_N; a_N)}{\partial a_N} dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

- **Galerkin.** La función de ponderación es igual a la función de forma N_i .

Para cada parámetro a_i , se requiere que el promedio ponderado del residuo $R(x_i, a_i)$ dentro del dominio sea cero. Las funciones de ponderación son funciones de aproximación $\phi_i(x)$ asociadas a cada a_i

$$\begin{aligned} \int_1^2 R(x_1; a_1) \phi_1(x) dx &= 0 \\ \int_1^2 R(x_{21}; a_2) \phi_2(x) dx &= 0 \\ \vdots & \\ \int_1^2 R(x_N; a_N) \phi_N(x) dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

resultando una función de aproximación con N parámetros de campo y un sistema de N ecuaciones residuales.

2.6.2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE RESIDUOS PONDERADOS.

Para ilustrar la forma en que operan los métodos de residuos ponderados se considera un ejemplo sencillo en el área de la transferencia de calor. Una de las expresiones matemáticas más conocidas es la ley de Newton para el enfriamiento de un cuerpo en contacto con un medio ambiente a una temperatura menor. Dicho modelo fenomenológico corresponde a la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden lineal:

$$-\frac{dT}{dt} = m(T - T_{amb})$$

donde el coeficiente de proporcionalidad, m , está relacionado con el coeficiente convectivo, h . Entonces, la rapidez con la que se enfría el cuerpo es linealmente proporcional a la diferencia de las temperaturas entre el cuerpo y el medio ambiente.

Definiendo las variables adimensionales :

$$y = (T - T_{amb}) / (T_0 - T_{amb}), \quad y:$$

$$x = h T, \quad \text{con:}$$

$$dy = dT / (T_0 - T_{amb})$$

$$dx = h dt,$$

se obtiene la ecuación diferencial:

$$- dy / dx = y, \quad \text{cuya solución analítica es:}$$

$$y = c_1 \exp(-ht)$$

por lo tanto la solución general para la evolución de la temperatura del cuerpo es:

$$\frac{T - T_{amb}}{T_0 - T_{amb}} = c_1 \exp(-ht)$$

Introduciendo la condición inicial de que la temperatura del cuerpo es T_0 en el tiempo $t=0$, se obtiene la siguiente expresión matemática que representa la progresión exponencial decreciente de la temperatura del cuerpo hacia el equilibrio térmico con el medio ambiente:

$$T = T_{amb} + (T_0 - T_{amb}) \exp(-ht)$$

Esta es la solución exacta contra la que compararemos las predicciones de los métodos de residuos ponderados.

a) La **minimización del cuadrado del error residual**. Ya ha sido discutida en páginas anteriores para el caso de una función unidimensional. En este ejemplo veremos como se lleva a cabo la minimización del cuadrado del error cuando existen más de dos parámetros a optimizar.

Utilizaremos una función de aproximación cuadrática:

$$y = a x^2 + b x + c$$

Por lo tanto el error es:

$$R = a + b(1+x) + c(2x+x^2)$$

La condición inicial indica que $a = 1$. Por lo que la función residuo es biparamétrica (tiene 2 grados de libertad).

Los valores óptimos de b y c para este polinomio de ajuste se obtienen al minimizar el cuadrado del error inducido por cada parámetro individual. Como se mencionó antes, la función de ponderación en este método es la parcial del error con respecto a cada uno de dichos parámetros individuales, entonces, resolviendo para el intervalo de x de 0 a 1:

$$\int_0^1 R \frac{\partial R}{\partial b} dx = 0 = \int_0^1 (1+x)(1+bx+cx^2) dx$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{7}{3}b + \frac{9}{4}c = 0$$

$$\int_0^1 R \frac{\partial R}{\partial c} dx = 0 = \int_0^1 (2x+x^2)(1+bx+cx^2) dx$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{9}{4}b + \frac{38}{15}c = 0$$

Resolviendo este par de ecuaciones simultáneas lineales, cuyos coeficientes conforman una matriz simétrica, se obtienen los valores de los parámetros b y c que minimizan el cuadrado del error residual:

$$y = 1 - (4032/4277)x + (190/611)x^2$$

En la figura 2.2 se representa la solución exacta y las aproximaciones mediante los métodos de residuos ponderados. Obsérvese que se está trabajando con un solo elemento.

b) Para ejemplificar la aplicación del **método de colocación por subdominios**, se seleccionan dos subregiones debido a que existen dos parámetros a evaluar. Ante la falta de información adicional, los dos subdominios se consideran del mismo tamaño. Entonces, recordando que la función de ponderación para el método de subdominios es $W=1$:

$$\int_0^{1/2} R dx = \int_0^{1/2} [1+b(1+x)+c(2x+x^2)] dx = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}b + \frac{7}{24}c = 0$$

$$\int_{1/2}^1 R dx = \int_{1/2}^1 [1+b(1+x)+c(2x+x^2)] dx = \frac{1}{2} + \frac{7}{8}b + \frac{25}{24}c = 0$$

La resolución de este par de ecuaciones simultáneas lineales (que conforman una matriz de coeficientes no simétrica) da como resultado:

$$y = 1 - 0.9474x + 0.3518x^2$$

c) Para el método de **colocación por puntos**, se requeriría información adicional para ubicar los puntos, probablemente a partir de criterios heurísticos; ante la ausencia de dicha información, ubicaremos los dos puntos que se necesitan (debido a que hay dos parámetros a evaluar) en $x_1 = 1/3$ y $x_2 = 2/3$, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones no lineales, que ensamblan una matriz de coeficientes no simétrica:

$$R = a + b(1+x) + c(2x+x^2)$$

$$R(x_1) = 1 + (4/3)b + (7/9)c = 0$$

$$R(x_2) = 1 + (5/3)b + (16/9)c = 0$$

La resolución de este sistema de ecuaciones lleva a la función de aproximación:

$$y = 1 - (27/29)x + (9/29)x^2$$

d) Finalmente, para aplicar el **método de Galerkin**, reescribimos la función de aproximación como:

$$y = 1 + b g_1(x) + c g_2(x)$$

donde $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son las funciones ortogonales a las componentes del polinomio de ajuste, es decir:

$$g_1(x) = x, \quad y$$

$$g_2(x) = x^2$$

Entonces, podemos escribir:

$$\int_0^1 R_{g_1}(x) dx = 0 = \int_0^1 [1 + b(1+x) + c(2x+x^2)] dx = 0$$

$$\int_0^1 R_{g_2}(x) dx = 0 = \int_0^1 [1 + b(1+x) + c(2x+x^2)]^2 dx = 0$$

Al integrar se obtiene:

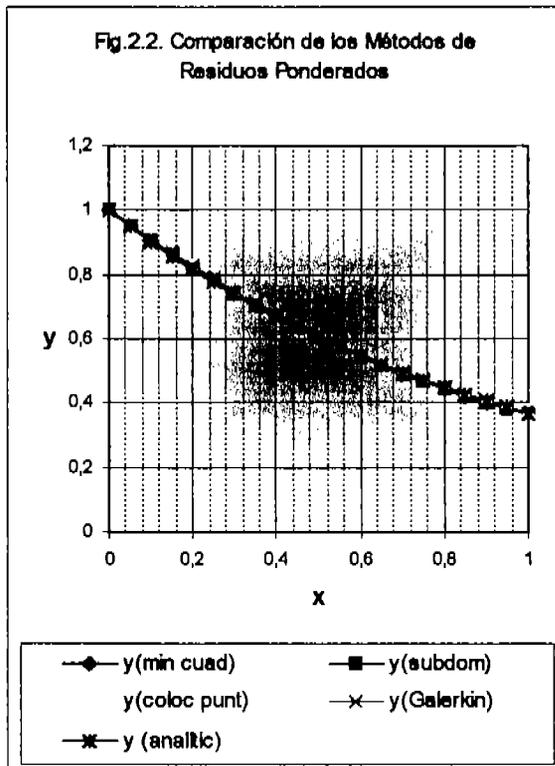
$$(1/2) + (5/6)b + (11/12)c = 0$$

$$(1/3) + (7/12)b + (7/10)c = 0$$

dando como resultado:

$$y = 1 - (32/35)x + (2/7)x^2$$

En la figura siguiente se presenta la comparación gráfica de los resultados. Nótese que la aproximación mediante la función de ajuste cuadrática, resulta muy buena en todos los casos.

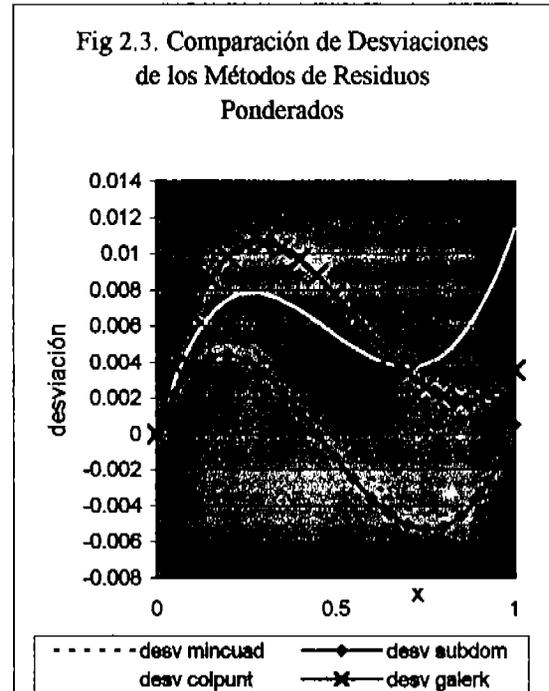


El error promedio de cada método se puede estimar en base a la expresión:

$$\langle \text{error} \rangle = \frac{\sqrt{\int_0^1 (y_{\text{ajuste}} - y_{\text{exacta}})^2 dx}}{\int_0^1 dx} \quad (2.30)$$

Los promedios de los errores calculados de esta manera son:

- Minimización cuadrática : 0.000738872
- Colocación por subdominios: 0.000747585
- Colocación por puntos: 0.001366762
- Galerkin: 0.001452824



Hay dos observaciones que hacer respecto a este ejemplo:

- En los métodos de colocación por puntos y por subdominios se consideraron dos elementos, respetando la condición de continuidad de la solución en el punto de conexión de dichos elementos, mientras que en los métodos de Galerkin y minimización cuadrática solo se tomó en cuenta un elemento.
- La ecuación diferencial contenía al tiempo como variable independiente. La mayor parte de las aplicaciones de los métodos de elementos finitos conciernen con la resolución de ecuaciones diferenciales donde las variables independientes son las coordenadas espaciales.

La transferencia de calor por conducción a lo largo de la dirección radial en una aleta circular requiere de la resolución de la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dT}{dr} \right] - \frac{2h}{bk} (T - T_\infty) = 0$$

considerando las variables adimensionales:

$$r^* = x = \sqrt{\frac{2h}{bk}} r \quad T^* = y = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$$

la ecuación anterior puede reformularse como una ecuación de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - x^2 y = 0$$

Suponiendo condiciones de frontera isotérmicas en ambos extremos de la aleta, es decir:

$$T = T_0 \quad \text{en} \quad r = R_0$$

$$T = T_1 \quad \text{en} \quad r = R_1$$

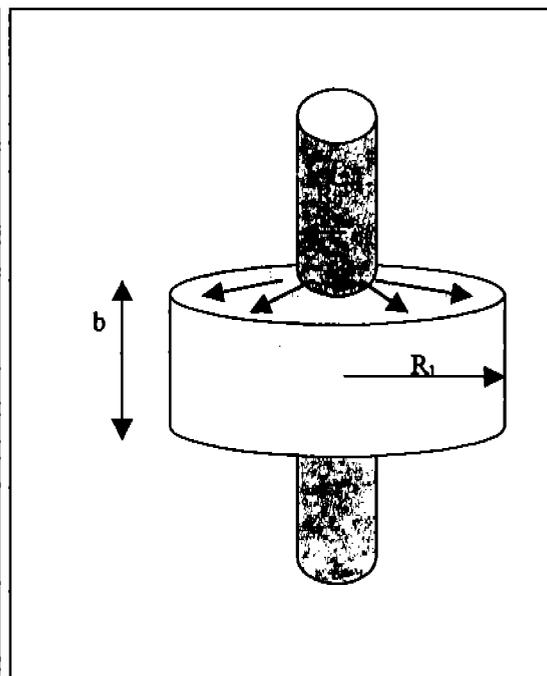
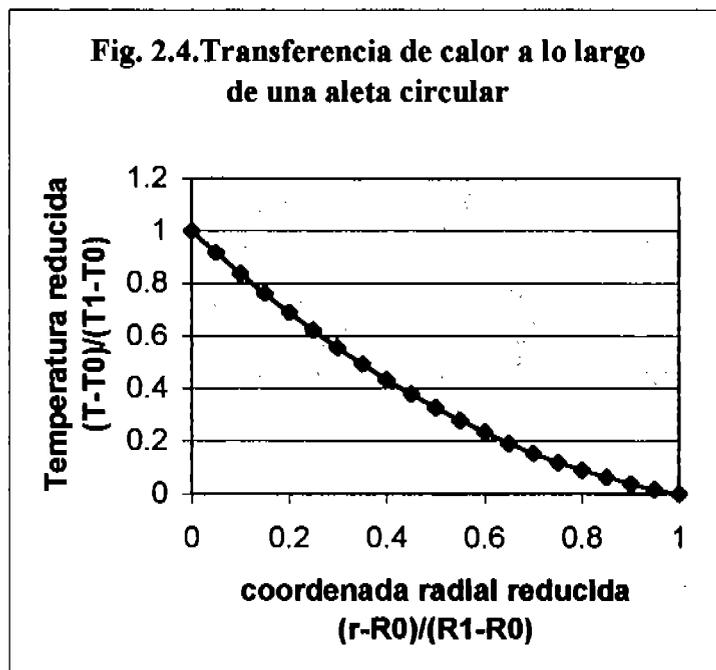
Y resolviendo mediante el método de Frobenius, se obtiene:

$$y = a_0 \left[1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right] + b_0 \left\{ \ln x \left[1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right] \right\} + \left[-\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{5}{2} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right]$$

La solución aproximada por mínimos cuadrados, utilizando un polinomio cuadrático como función de ajuste y suponiendo que $T_1 = T_A$, da:

$$T = 0.6916 * x^2 - 1.6916 * x + 1$$

La gráfica siguiente muestra la comparación entre la solución analítica (línea continua) y la numérica (puntos), para un solo elemento (nótese la exactitud de la solución por elementos finitos):



2.7. ENSAMBLAJE DEL SISTEMA DE ECUACIONES.

En el inciso anterior se llevó a cabo la implementación del método de elementos finitos siguiendo las formulaciones de residuos ponderados para uno o dos elementos. Cuando se construye un algoritmo computacional ya sea por principio variacional o por residuos ponderados, se elige una gran cantidad de elementos para darle mayor precisión a la solución ante cualquier tipo de condición de frontera, y entonces resulta necesario darle continuidad a las funciones de aproximación en todo su dominio, por lo que el proceso de ensamblaje de las ecuaciones locales que se escriben para cada elemento es esencial para el éxito en la resolución de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

Entonces el procedimiento general es:

- Discretizar el espacio de solución en subregiones (elementos), especificando las coordenadas nodales de los puntos de interconexión.
- Especificar la topología del sistema, es decir, las conectividades entre nodos y elementos primeros vecinos más cercanos.

- Escribir las ecuaciones de principio variacional o residuos ponderados para cada elemento en términos de las coordenadas (x_i, y_i) de cada nodo, y de los parámetros correspondientes de la función de aproximación ϕ_i , obteniendo un conjunto de ecuaciones por elemento.
- Ensamblar el conjunto de ecuaciones obtenidas por elemento para conformar el sistema de ecuaciones simultáneas lineales correspondiente al dominio completo. Esto se logra construyendo la matriz global de dimensión $[n \times n]$, para luego ir sumando los coeficientes de cada ecuación en cada nodo común a dos o más elementos (ver figura 2.5)
- Modificar el sistema de ecuaciones global introduciendo las condiciones de frontera.
- Resolver el sistema de ecuaciones resultante.

En la figura que se presenta a continuación se muestra la forma en que se lleva a cabo el ensamblaje.

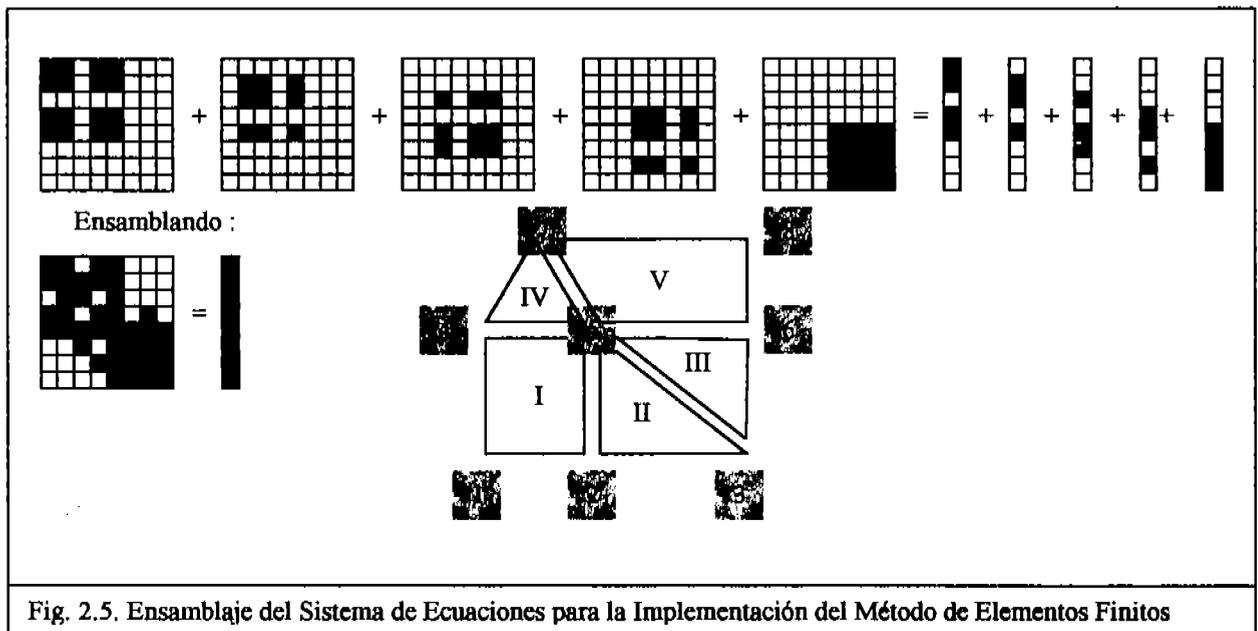


Fig. 2.5. Ensamblaje del Sistema de Ecuaciones para la Implementación del Método de Elementos Finitos

Para un sistema con n elementos, primero se especifican n matrices locales de dimensión igual al número de nodos. En seguida se construyen las ecuaciones locales por elemento, las cuales hacen referencia a los valores de las variables en los nodos que tiene como vértices, y se ubican los coeficientes de dichas variables en las casillas de los arreglos

matriciales correspondientes. Esto se representa en las matrices numeradas de I a V en la figura. Luego Se empalman las cinco matrices sumando los coeficientes que se repitan en cada casilla. Posteriormente se introducen las condiciones de frontera y finalmente se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas lineales.

3

Formulación Unidimensional del Método de Elementos Finitos

3.1. INTRODUCCIÓN.

En el capítulo anterior se explicaron los fundamentos de los métodos variacionales y de residuos ponderados utilizando uno o dos elementos en la formulación. Ahora se empezarán a construir algoritmos computacionales donde se aplique toda la maquinaria de los métodos de elementos finitos, tomando como ejemplo uno de los casos más simples, problemas unidimensionales en estado estacionario en la termodinámica irreversible, específicamente el método de Galerkin en conducción de calor.

La definición y adecuado uso de las funciones de interpolación son de vital importancia en el desarrollo de los algoritmos computacionales basados en la técnica de elementos finitos. En la primera parte de este capítulo se explica el procedimiento para obtener funciones de interpolación lineales y de grado

superior en el espacio unidimensional, y se dan como referencia las expresiones correspondientes a las funciones de interpolación en espacios bi y tridimensionales. Simultáneamente se introduce el concepto de coordenadas locales adimensionales que permiten simplificar el álgebra y automatizar los procedimientos de integración de las ecuaciones diferenciales gobernantes.

Una vez especificado el marco de referencia, en la segunda parte de este capítulo se construyen algoritmos basados en el método de Galerkin para la transferencia de calor unidimensional en estado estacionario utilizando tanto funciones de aproximación lineales como cuadráticas.

3.2. INTERPOLACIÓN LINEAL.

La siguiente figura representa el procedimiento de ajuste lineal de la variable $u(x)$ en el dominio de un elemento de longitud L^e acotado en sus extremos por las coordenadas x_1^e y x_2^e .

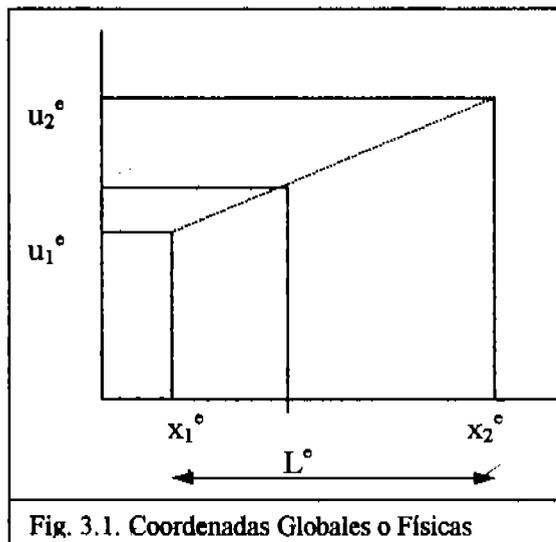


Fig. 3.1. Coordenadas Globales o Físicas

El ajuste lineal de la función de interés $u(x)$ que corresponde a la solución de la ecuación diferencial, lleva a la siguiente expresión:

$$[u(x)^e] = b + mx = c_1^e + c_2^e x$$

$$[u(x)^e] = [P(x)] [c^e] = [1 \quad x] [c_1^e \quad c_2^e]^T \quad (3.1)$$

donde la matriz renglón $[P(x)]$ contiene los elementos funcionales de $[u(x)^e]$ que al ser multiplicados por la matriz columna $[c^e]$ del elemento, dan como resultado la ecuación de ajuste lineal. Al vector $[c^e]$ se le denomina matriz de parámetros polinomiales y se puede identificar a su primer componente c_1^e con la ordenada al origen, mientras que la pendiente es c_2^e .

Para facilitar la elaboración de los algoritmos computacionales de elementos finitos variacionales o de residuos ponderados, conviene definir una matriz, que multiplicada por $[c^e]$, dé como resultado la aproximación lineal de $u(x)$ en el elemento. A dicho arreglo matricial se le denomina matriz geométrica, y en este caso particular es:

$$[G^e] = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

de manera tal que: $[u^e] = [G^e] [c^e]$, es decir:

$$[u^e] = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 x_1^e \\ c_1 + c_2 x_2^e \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Asegurándose que el ajuste lineal sea válido también en los nodos del elemento. La evaluación de los parámetros polinomiales puede llevarse a cabo al despejar $[c^e]$ de esta última ecuación:

$$[c^e] = [G^e]^{-1} [u^e] \quad (3.4)$$

En este caso la matriz geométrica puede invertirse fácilmente para dar:

$$[G^e]^{-1} = \frac{1}{x_2^e - x_1^e} \begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Al introducir este resultado en la función de ajuste original (3.1), es posible escribir $[u(x)^e]$ directamente en términos de $[u^e]$ como:

$$[u(x)^e] = [P(x)] [G^e]^{-1} [u^e], \quad (3.6)$$

es decir:

$$[u(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_2^e - x}{L^e} & \frac{x - x_1^e}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} \quad (3.6.a)$$

o simplemente:

$$[u(x)^e] = [H(x)^e] [u^e], \quad (3.7)$$

donde a $[H^e]$ se le denomina matriz de interpolación del elemento.

Evidentemente:

$$[H(x)^e] = [P(x)] [G^e]^{-1} \quad (3.8)$$

A partir de la ecuación (3.6) puede verse que el valor aproximado $[u(x)^e]$, depende de:

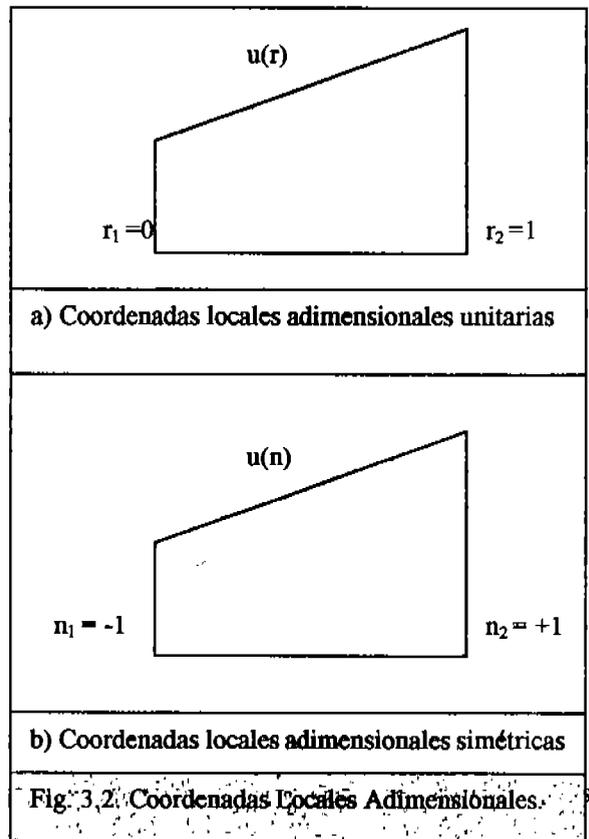
- El comportamiento asumido en el dominio del elemento, vía $[P(x)]$.
- La geometría del elemento, $[G^e]$.

- Los valores de la función en los nodos del elemento $[u^e]$

Esta observación también es válida para dos y tres dimensiones.

Debido a que el proceso de interpolación fue definido para un sistema de coordenadas global, las matrices $[G^e]$ y por lo tanto $[H^e]$, serán diferentes para cada elemento. Por supuesto, la forma algebraica sería común pero los valores numéricos variarían de un elemento a otro.

Sin embargo, cuando se utilizan coordenadas locales adimensionales, se puede lograr que la matriz $[H^e]$ sea única, para un tipo geométrico de elemento dado. Lo cual reduce notablemente la cantidad de operaciones aritméticas que deben hacerse para resolver la ecuación diferencial gobernante. Las coordenadas locales se seleccionan comúnmente en el intervalo de 0 a 1, o de -1 a +1. Estas dos opciones se ilustran en la figura siguiente:



$$[u(r)^e] = [P(r)] [G^e]^{-1} [u^e] \quad (3.9)$$

donde las componentes del polinomio lineal ahora son: $[P] = [1 \quad r]$.

Repitiendo los pasos previos, se obtiene:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{con } [G]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo las funciones de interpolación en coordenadas locales unitarias:

$$[H(r)] = [P] [G]^{-1} = \begin{bmatrix} (1-r) & r \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Cumplíndose:

$$[u(r)^e] = [H(r)] [u^e], \quad (3.11)$$

que al desarrollarse a su forma escalar da como resultado:

$$\begin{aligned} [u(r)^e] &= H_1(r) u_1^e + H_2(r) u_2^e = (1-r) u_1^e + r u_2^e \\ &= u_1^e + r (u_2^e - u_1^e) \end{aligned}$$

de manera que en $r = 0$, $u^e(0) = u_1^e$ y en $r = 1$, $u^e(1) = u_2^e$, como debe ser.

Es fácil demostrar que para este tipo de elemento la relación entre las coordenadas locales y las coordenadas globales es:

$$x(r)^e = [H(r)] [x^e] = (1-r) x_1^e + r x_2^e. \quad (3.12)$$

A elementos como el que se consideró en este desarrollo se les denomina elementos isoparamétricos y su nombre significa que un pequeño conjunto de relaciones paramétricas simples ($[H(r)]$) es suficiente para definir tanto la geometría, $x(r)$, como las incógnitas nodales $u(r)$.

Como se puede observar en la figura 3.3, también se pueden definir un conjunto de elementos isoparamétricos en el espacio bi o tridimensional.

Si se eligen coordenadas locales simétricas o Gaussianas tales que $-1 < n < 1$, entonces se obtiene un conjunto similar de funciones de interpolación:

$$[u(n)^e] = [H(n)] [u^e],$$

con:

$$H_1(n) = (1-n)/2$$

$$H_2(n) = (1+n)/2$$

o, generalizando:

$$H_i(n) = (1 + n_i n) / 2 \quad (3.13)$$

donde n_i es la coordenada local del nodo i . Este sistema de coordenadas se conoce como "sistema de coordenadas naturales". Nuevamente la relación con el sistema de coordenadas global es:

$$x(n)^e = [H(n)] [x^e] = (1-n) x_1^e / 2 + (1+n) x_2^e / 2 \quad (3.14)$$

Mientras que la relación entre las coordenadas locales unitarias y Gaussianas es:

$$r = (1 + n) / 2,$$

expresión matemática que es útil para convertir coordenadas locales de un sistema a otro.

El cálculo de las derivadas espaciales para cualquiera de los dos sistemas de coordenadas locales es sencillo y directo. Por ejemplo, a partir de la ecuación (3.10), para coordenadas locales unitarias:

$$\frac{du^e}{dr} = \frac{d[H(r)]}{dr} [u^e], \quad (3.15)$$

y a partir de la ecuación (3.12):

$$\frac{dx^e}{dr} = \frac{dH_1}{dr} x_1^e + \frac{dH_2}{dr} x_2^e = -x_1^e + x_2^e = L^e,$$

mientras que si se utiliza un sistema de coordenadas local Gaussiano:

$$\frac{dx^e}{dn} = \frac{dH_1}{dn} x_1^e + \frac{dH_2}{dn} x_2^e = \frac{-x_1^e + x_2^e}{2} = \frac{L^e}{2} \quad (3.16)$$

El uso de coordenadas locales unitarias es más popular con elementos simplex, donde el número de nodos es mayor que la dimensión del espacio.

La generalización de las coordenadas unitarias para los elementos simplex más comunes se ilustra en la siguiente serie de figuras.

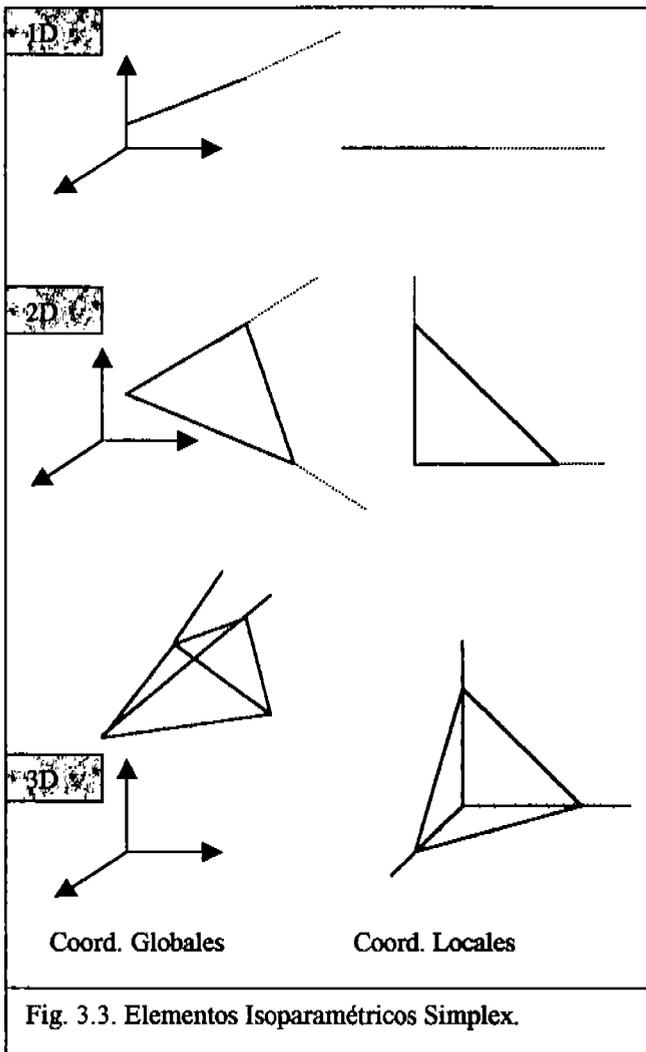


Fig. 3.3. Elementos Isoparamétricos Simplex.

La discretización en el espacio global (espacio físico real) puede requerir la utilización de elementos trapezoidales en el espacio bidimensional o prismoidales en el espacio tridimensional. Dichas figuras geométricas se convierten en cuadrados y cubos cuando se trasladan al espacio de las coordenadas locales unitarias o naturales, tal como se puede observar en la figura 3.4.

La elección de elementos isoparamétricos simplex trianguloidales o trapezoidales para la elaboración de un algoritmo computacional se hace considerando:

- La adaptabilidad de la malla de elementos finitos a las fronteras.
- La disponibilidad de memoria de almacenamiento para conformar y resolver el sistema de ecuaciones simultáneas lineales.
- La exactitud deseada.

En este trabajo solo se utilizan elementos simples triangulares para los problemas bidimensionales (capítulo 4) y no se abordan problemas tridimensionales más que en el caso de geometría axisimétrica (capítulo 6).

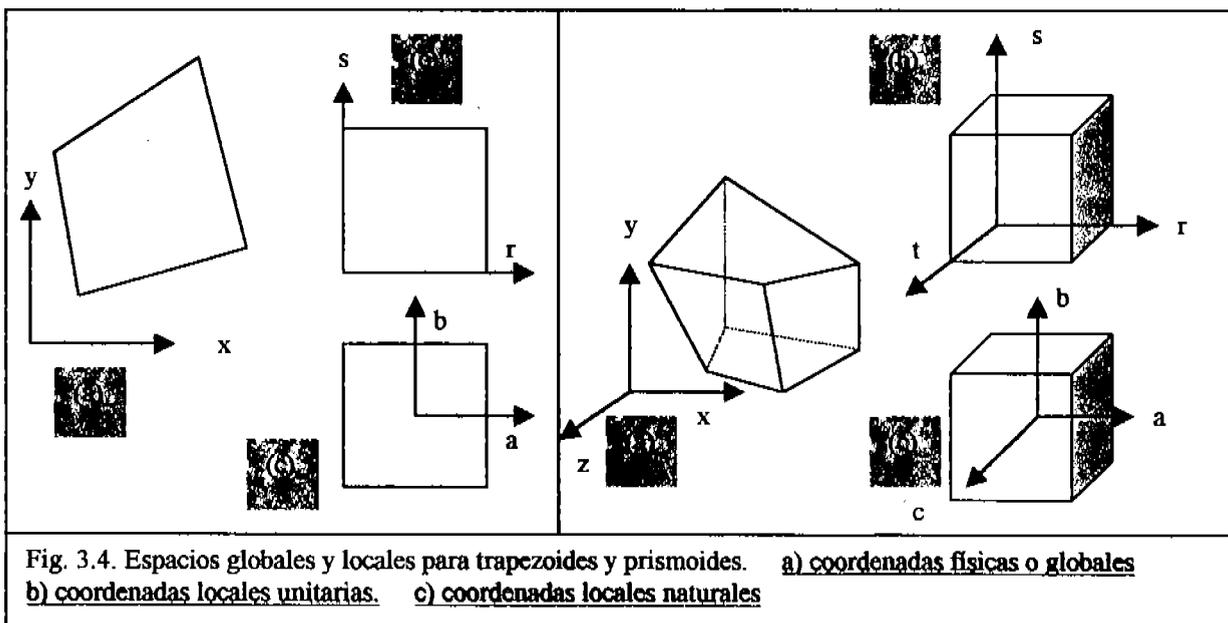


Fig. 3.4. Espacios globales y locales para trapezoides y prismoides. a) coordenadas físicas o globales b) coordenadas locales unitarias. c) coordenadas locales naturales

En dos dimensiones la interpolación bilineal, con tres parámetros ajustables, es la función de aproximación más simple. Dicha aproximación para coordenadas generalizadas puede ser expresada como:

$$u^e(r,s) = g_1^e + g_2^e r + g_3^e s = P(r,s) g^e \quad (3.17)$$

Expresión que es válida tanto en los nodos como en todo el dominio del elemento. Substituyendo las coordenadas locales de los nodos en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1^e \\ g_2^e \\ g_3^e \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

o, matricialmente:

$$[u^e] = [G] [g^e] \quad (3.19)$$

Esta ecuación puede resolverse para obtener los parámetros de ajuste de la función de interpolación:

$$[g^e] = [G]^{-1} [u^e] \quad (3.20)$$

y:

$$u^e(r,s) = P(r,s) [G]^{-1} [u^e] = [H(r,s)] [u^e] \quad (3.21)$$

de ahí que la matriz geométrica esté dada por:

$$[G]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

y:

$$\begin{aligned} H_1(r,s) &= 1 - r - s \\ H_2(r,s) &= r \\ H_3(r,s) &= s \end{aligned} \quad (3.23)$$

Similarmente, para un cuadrilátero unitario como el de la figura 3.4:

$$u^e(r,s) = g_1^e + g_2^e r + g_3^e s + g_4^e rs \quad (3.24)$$

de manera que:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Y las funciones de interpolación son:

$$\begin{aligned} H_1(r,s) &= 1 - r - s + rs \\ H_2(r,s) &= r - rs \\ H_3(r,s) &= s + rs \\ H_4(r,s) &= -rs \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sin embargo, para elementos trapezoidales es más común el uso de coordenadas naturales como las mostradas en la figura 3.4. En dicho sistema de coordenadas:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Y las funciones de aproximación son:

$$H_i(a,b) = (1 + a a_i) (1 + b b_i) / 4, \quad 1 \leq i \leq 4$$

Donde (a_i, b_i) son las coordenadas naturales del nodo i en el elemento.

Hasta este momento solo se han mencionado las funciones de interpolación para coordenadas locales en el espacio bidimensional y por lo tanto las matrices geométricas $[G]$ solo dependen del tipo de elemento y no de su ubicación. Si se utilizan coordenadas globales la matriz geométrica $[G^e]$ depende de la posición del elemento. Por ejemplo, si la ecuación (3.17) se escribe para coordenadas físicas, entonces:

$$u^e(x,y) = g_1^e + g_2^e x + g_3^e y \quad (3.27)$$

De manera que cuando se evalúan las variables en cada nodo el resultado es:

$$[G^e] = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Invirtiéndola esta matriz y realizando el álgebra se llega finalmente a las funciones de aproximación equivalentes a la ecuación (3.23) para el sistema de coordenadas global:

$$H_i^e(x,y) = (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y) / 2 A^e \quad (3.29) \\ 1 \leq i \leq 3.$$

Donde las constantes algebraicas relacionadas a las coordenadas nodales son:

$$\begin{aligned} a_1^c &= x_2^c y_3^c - x_3^c y_2^c \\ a_2^c &= x_3^c y_1^c - x_1^c y_3^c \\ a_3^c &= x_1^c y_2^c - x_2^c y_1^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1^c &= y_2^c - y_3^c \\ b_2^c &= y_3^c - y_1^c \\ b_3^c &= y_1^c - y_2^c \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} c_1^c &= x_3^c - x_2^c \\ c_2^c &= x_1^c - x_3^c \\ c_3^c &= x_2^c - x_1^c \end{aligned}$$

A^c corresponde al área del elemento y es:

$$A^c = (a_1^c + a_2^c + a_3^c) / 2 \quad (3.31)$$

$$A^c = [x_1^c(y_2^c - y_3^c) + x_2^c(y_3^c - y_1^c) + x_3^c(y_1^c - y_2^c)] / 2$$

Estas expresiones algebraicas son válidas cuando los nodos se numeran en el orden en que rotan las manecillas del reloj. Si la topología se definiera en sentido horario sin cambiar las expresiones algebraicas, el área A^c sería negativa.

Cuando se intenta utilizar un procedimiento similar para definir la matriz Geométrica para un elemento trapezoidal, se llega al problema de que la inversa de $[G]$ puede no existir. Esto significa que la interpolación en coordenadas globales es muy sensible a la orientación del elemento en el espacio global, lo cual es indeseable. Esta desventaja solo es superable cuando los elementos de cuatro nodos son rectangulares. Por eso se prefiere utilizar coordenadas locales para elementos trapezoidales.

La extensión de las coordenadas unitarias locales a elementos tetraédricos como los representados en la figura 3.3, es directa, y da como resultado:

$$\begin{aligned} H_1(r,s,t) &= 1 - r - s - t \\ H_2(r,s,t) &= r \\ H_3(r,s,t) &= s \\ H_4(r,s,t) &= t \end{aligned}$$

3.3. INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA.

La siguiente función de aproximación en orden de complejidad es el polinomio cuadrático. Para implementar un polinomio de ajuste de segundo grado se requiere dividir cada frontera de los elementos en dos subregiones con tres puntos nodales. Normalmente los dos puntos nodales que se seleccionan por default son los extremos de la línea, mientras que el tercer nodo casi siempre se ubica a medio recorrido entre los dos puntos. Entonces, para coordenadas locales unitarias:

$$r_1 = 0; r_2 = 1/2; y r_3 = 1 \quad (3.19)$$

y también es deseable, por simplificación del método, considerar x_2 a la mitad del elemento en coordenadas globales.

Si se repite el procedimiento previo utilizando como función de ajuste para coordenadas locales unitarias:

$$u(r) = c_2 + c_2 r + c_3 r^2, \quad (3.20)$$

entonces la matriz de parámetros de las funciones de interpolación que se obtienen se describen como:

$$H_1(r) = 1 - 3r + 2r^2 \quad (3.21)$$

$$H_2(r) = -r + 2r^2 \quad (3.22)$$

$$H_3(r) = 4r - 4r^2 \quad (3.23)$$

Nótese que la suma de estas funciones da la unidad. Estas tres funciones se grafican en la figura siguiente. Tal figura ilustra otra característica general de las funciones de interpolación, su valor es igual a la unidad en uno de los nodos e igual a cero en los demás. Matemáticamente:

$$H_i(r_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.24)$$

Si estas funciones se expresan en coordenadas naturales, entonces:

$$n_1 = -1; n_2 = 1; n_3 = 0$$

consecuentemente, las funciones de interpolación son:

$$H_1(n) = n(n-1)/2$$

$$H_2(n) = n(n+1)/2 \tag{3.25}$$

$$H_3(n) = 1 - n^2$$

Estas funciones de interpolación se pueden sustituir por las de ajuste lineal en los programas de elementos finitos, con la previa ubicación de un tercer nodo en cada elemento y el algoritmo computacional en principio debe mejorar en cuanto a exactitud.

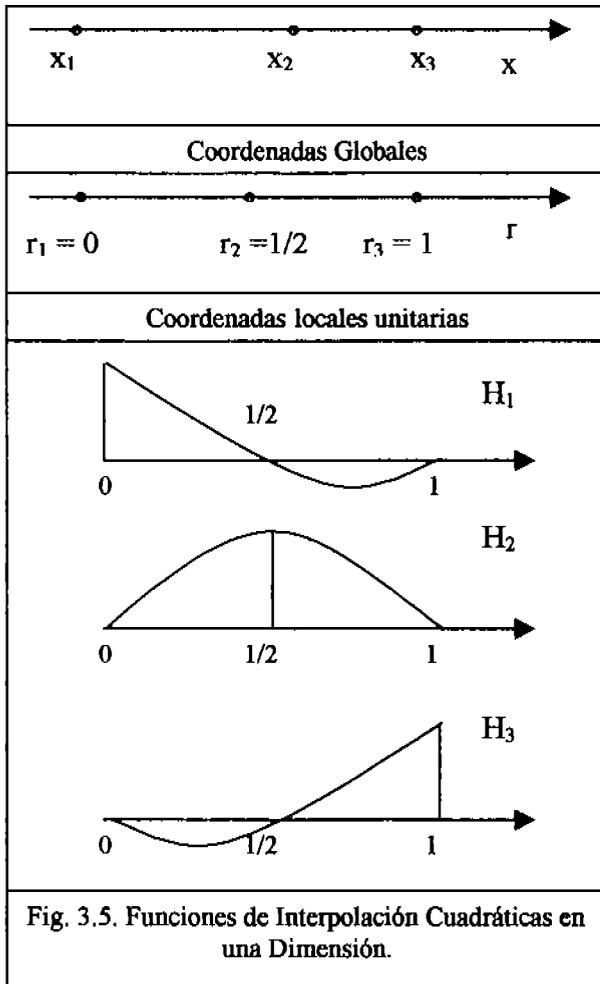


Fig. 3.5. Funciones de Interpolación Cuadráticas en una Dimensión.

Las funciones de interpolación para un triángulo cuadrático son:

$$\begin{aligned} H_1(r,s) &= 1 - 3r + 2r^2 - 3s + 4rs + 2s^2 \\ H_2(r,s) &= -r + 2r^2 \\ H_3(r,s) &= -s + 2s^2 \\ H_4(r,s) &= 4r - 4r^2 - 4rs \\ H_5(r,s) &= 4rs \\ H_6(r,s) &= 4s - 4rs - 4s^2 \end{aligned}$$

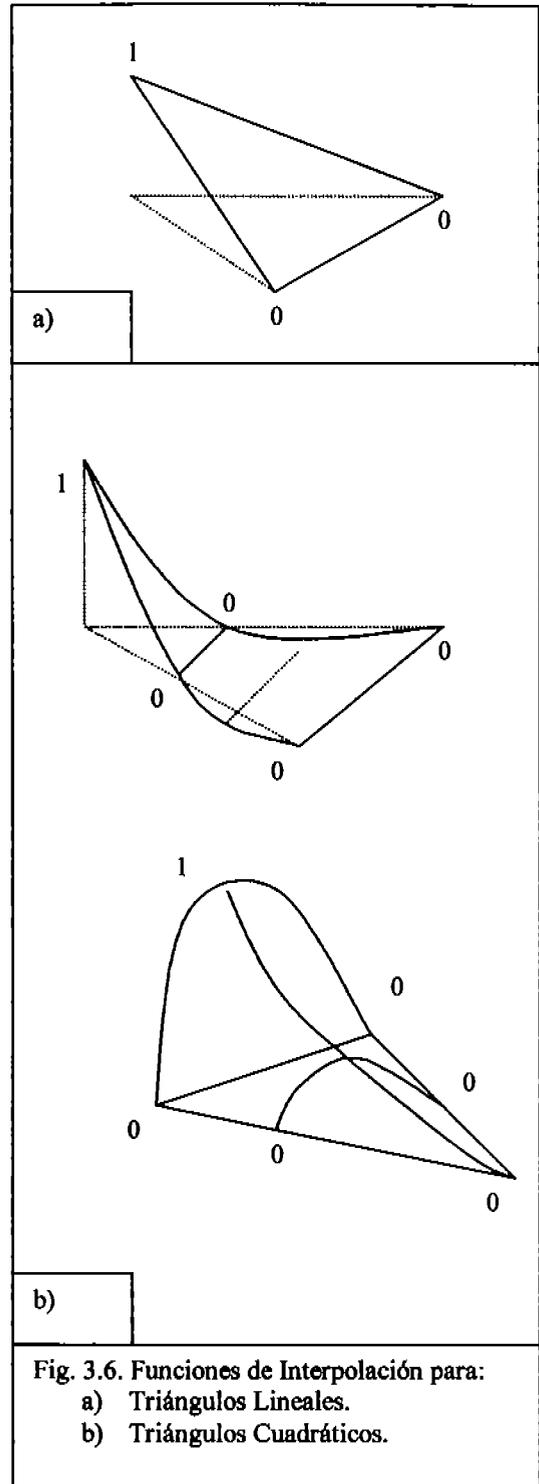


Fig. 3.6. Funciones de Interpolación para:
a) Triángulos Lineales.
b) Triángulos Cuadráticos.

3.4. FORMULACIÓN DEL MÉTODO DE GALERKIN UNIDIMENSIONAL EN ESTADO ESTACIONARIO.

Los ejemplos que se han considerado hasta ahora corresponden a la utilización de un solo elemento en los cálculos. Enseguida se explicará la forma en que se lleva a cabo el ensamblaje de las ecuaciones locales cuando se divide el dominio de la solución en un conjunto de elementos finitos.

Para ejemplificar la construcción de un modelo de varios elementos, considérese un elemento típico con sus correspondientes grados de libertad, $[y^e]$. Dentro de este elemento el valor de $y(x)^e$ se aproxima mediante el uso de alguna función de interpolación, cuyos parámetros se acomodan en una matriz renglón, $[H(x)^e]$, obteniéndose la siguiente formulación matricial:

$$y(x)^e = [H(x)^e] [y^e] \quad x \in L^e \quad (3.26)$$

donde L^e denota el dominio del elemento. La substitución de tal aproximación en la ecuación diferencial define la función error residual local $R(x)$, dentro del elemento, y si se utiliza el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados, también define la función de ponderación local W^e .

Si se considera el uso de una función de interpolación lineal, la aproximación a la solución de la ecuación diferencial varía linealmente entre los valores nodales (y_1^e , y_2^e), y entonces la ecuación matricial anterior da como resultado:

$$y(x)^e = y_1^e H_1(x)^e + y_2^e H_2(x)^e = [H(x)^e] [y^e] \quad (3.27)$$

correspondientemente:

$$\begin{aligned} \frac{dy^e}{dx} &= y_1^e \frac{dH_1^e}{dx} + y_2^e \frac{dH_2^e}{dx} = \frac{d[H^e]}{dx} [y^e] \quad , \\ \frac{d^2 y^e}{dx^2} &= y_1^e \frac{d^2 H_1^e}{dx^2} + y_2^e \frac{d^2 H_2^e}{dx^2} = \frac{d^2 [H^e]}{dx^2} [y^e] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Si x_1 y x_2 denotan las coordenadas nodales del elemento entonces las funciones de interpolación corresponden a :

$$H_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad , \quad H_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3.29)$$

donde $x_2 - x_1 = L^e$.

Para automatizar los cálculos de los métodos de residuos ponderados es necesario llevar a cabo el ensamblaje del conjunto de ecuaciones locales para obtener el sistema global de ecuaciones simultáneas lineales, que toma la forma:

$$\sum_e \int_{L^e} R^e [W^e] dx = 0 \quad (3.30)$$

donde para el procedimiento de minimización del cuadrado del error:

$$[W^e] = \partial R^e / \partial y \quad , \quad (3.31)$$

y para el método de Galerkin:

$$[W^e] = [H^e]^T \quad (3.32)$$

Para el método de colocación por subdominios $[W^e] = [I]$, mientras que para el de colocación por puntos $[W^e] = [\delta]$.

Para lograr el ensamblaje es necesario asegurar que:

$$\int_L R^e [W^e] dx = \sum_e \int_{L^e} R^e [W^e] dx \quad (3.33)$$

Lo cual solo es válido si el integrando satisface alguna condición de continuidad a lo largo de las fronteras en que se unen los elementos L^e . Tal condición es que si el integrando contiene derivadas de orden n , es decir, $d^n y / dx^n$, entonces la función de aproximación y todas sus derivadas de orden $(n-1)$ deben ser continuas.

En la termodinámica de procesos irreversibles es frecuente encontrar ecuaciones diferenciales de segundo y cuarto orden. Cuando se aplica el procedimiento de mínimos cuadrados a una ecuación diferencial de segundo orden, la función de ponderación, $[H^e]$, contiene derivadas del mismo orden que la función error residual, $d[W^e] / d[y^e]$, por lo tanto en este caso, el método de mínimos cuadrados requiere que tanto y^e como dy^e/dx sean continuas en las fronteras. A esta condición se le denomina continuidad de orden 1 o simplemente continuidad C^1 .

En el método de Galerkin, $[W^e] = [H^e]^T$, y debido a que $[H^e]$ está relacionado directamente a $[H^e]$, no involucra derivadas, consecuentemente el producto $R^e[W^e]$ incluye una función con derivadas de segundo orden y otra sin derivadas. Si este producto pudiera ser modificado para reducir el orden de las más altas derivadas, entonces se lograría reducir el requerimiento de continuidad, lo cual sería

deseable. Afortunadamente la reducción de orden es factible mediante una integración por partes, y entonces, en lugar de un requerimiento de continuidad de orden 1 se tendría un requerimiento de orden cero, o simplemente C^0 , como veremos en el siguiente ejemplo de aplicación práctica:

3.5. EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL MÉTODO DE GALERKIN A LA TRANSFERENCIA DE CALOR UNIDIMENSIONAL EN ESTADO ESTACIONARIO.

Una placa de longitud $L = 1\text{m}$, con coeficiente de conductividad térmica igual a uno y área transversal unitaria, produce calor en su mitad izquierda en una cantidad igual a 100 unidades de energía en el sistema internacional, mientras que en su mitad derecha no genera energía térmica. La temperatura en ambos extremos se mantiene estable e igual a cero, se desea determinar la distribución de temperatura a lo largo de la placa en condiciones de estado estacionario.

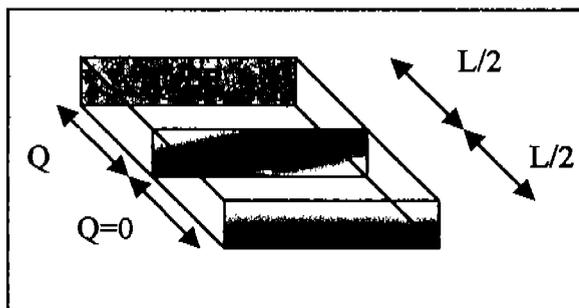


Fig. 3.7. Transferencia de calor 1-D en una lámina en estado estacionario, con fuente interna de calor.

La ecuación diferencial que caracteriza la transferencia de calor unidimensional que se lleva a cabo a largo de la placa es la ecuación de Poisson:

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + Q = 0 \quad (3.34)$$

Las condiciones de frontera son $T = 0$ en $x = 0$ y $x = L$.

La formulación de la solución por el método de residuos ponderados es:

$$\int_0^L W_j \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\sum H_i T_i \right) + Q \right] dx = 0 \quad (3.35)$$

$$\int_0^L W_j \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\sum H_i T_i \right) dx \right] + \int_0^L W_j Q dx = 0$$

Al realizar la integración por partes de la primera integral, considerando: $u = W_j$, $dv = [] dx$, se obtiene:

$$\left[W_j \frac{d}{dx} \sum H_i T_i \right]_0^L - \int_0^L \left[\frac{d}{dx} W_j \frac{d}{dx} \sum H_i T_i \right] dx + \int_0^L W_j Q dx = 0 \quad (3.36)$$

donde el primer término se elimina debido a que W_j es igual a cero en ambos extremos de la placa, obteniéndose finalmente:

$$\int_0^L \left[\frac{dW_j}{dx} \frac{d}{dx} \sum H_i T_i - W_j Q \right] dx = 0 \quad (3.37)$$

Esta última ecuación puede escribirse en formulación vectorial como:

$$[K] [T] + [F] = [0], \quad (3.38)$$

donde para cada elemento de longitud L^e :

$$K_{ij} = \int_0^{L^e} \frac{dW_j}{dx} \frac{dH_i}{dx} dx ; F_j^e = - \int_0^{L^e} W_j Q dx \quad (3.39)$$

Para este cálculo utilizaremos las componentes ortogonales de H_i como funciones de ponderación, es decir, el método de Galerkin. Entonces $W_j = H_j$ y como consecuencia la matriz de conductividad será simétrica, o sea, $K_{ij} = K_{ji}$, independientemente del número de grados de libertad por elemento, como puede comprobarse fácilmente.

Puesto que las funciones de interpolación solo necesitan que se cumpla una condición de continuidad de orden cero, C^0 , es conveniente buscar una solución aproximada lineal por intervalos, tal como la que se especificó líneas arriba. La siguiente gráfica muestra dicho ajuste lineal en un elemento típico ij :

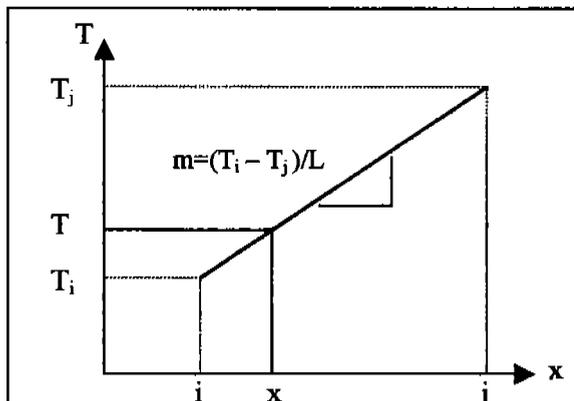


Fig. 3.8. Interpolación Lineal para el algoritmo de Elementos Finitos Unidimensional.

Entonces, mediante interpolación lineal se puede conocer la Temperatura T_x :

$$T_x = (1 - x/L) T_i + (x/L) T_j, \quad (3.40)$$

o, en forma matricial:

$$T_x = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} = [H^e] [T^e] \quad (3.41)$$

Es decir, considerando un elemento típico ij y trasladando el origen del eje x al nodo i , se puede escribir:

$$H_j = x/L^e ; H_i = (L^e - x)/L^e \quad (3.42)$$

Obtendiéndose para un elemento cualquiera:

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e = -1/L^e \quad (3.43)$$

$$K_{ii}^e = K_{jj}^e = +1/L^e \quad (3.44)$$

$$F_j^e = -Q L^e / 2 = F_i^e \quad (3.45)$$

El paso que sigue es llevar a cabo el ensamblaje del sistema de ecuaciones simultáneo lineal que al ser resuelto permite obtener las temperaturas en cada nodo.

El algoritmo computacional que se presenta a continuación utiliza funciones de aproximación lineales para la aplicación el método de Galerkin y grafica el perfil de temperaturas a lo largo de la placa.

```

PRINT "*****"
PRINT "**          MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN          **"
PRINT "**          TRANSFERENCIA DE CALOR                  **"
PRINT "*****"
PRINT "**          MÉTODO DE BUBNOV-GALERKIN                **"
PRINT "*****"
PRINT "*****"
PRINT "          CONDUCCION 1-D EN ESTADO ESTACIONARIO      **"
PRINT "** * POLINOMIOS DE APROXIMACIÓN LINEALES ***** **"
PRINT "*****"
PRINT "  DETERMINACION DEL PERFIL DE TEMPERATURA EN UNA     **"
PRINT "  PLACA CON GENERACION DE CALOR EN SU PRIMERA MITAD **"
PRINT "          Y TEMPERATURA CERO EN AMBOS EXTREMOS.      **"
PRINT "*****"
PRINT "*****"

```

REM SUBROUTINA PARA DATOS DE ENTRADA Y DIMENSIONAMIENTO DE MATRICES

SCREEN 12:

LINE (0, 0)-(640, 480), 3, BF

LOCATE 16, 1

INPUT "NUMERO DE DIVISIONES="; N

L = 1: Q = 100

LE = L / (N - 1)

- Se especifica el número de nodos a lo largo de la barra (N)
- El número de elementos es igual a N-1
- Se define la longitud de la barra y el calor total producido (Joules)
- Se calcula la longitud de los elementos (LE)

Se dimensionan los arreglos matriciales:

- Una matriz cuadrada de dimensión (2,2) donde se almacenarán los elementos de la matriz local de conductancia [K]
- Una matriz cuadrada [KG] de dimensión (N,N) donde se guardan los elementos de la matriz global de conductancia
- Una matriz bidimensional [F], de dimensión (N,2) donde se almacenarán los términos independientes de cada uno de los N-1 elementos.
- Un vector [FG] de dimensión N, donde se guardan los términos independientes del sistema ensamblado.
- Un vector [X] de dimensión N, para implementar la subrutina de eliminación Gaussiana.

DIM K(2, 2), KG(N, N), F(N, 2), FG(N)

DIM X(N), y(N), xn(N), yn(N), DIVX(N ^ 2), DIVY(N ^ 2)

REM SUBROUTINA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ LOCAL DE CONDUCTANCIA

K(1,1) = 1 / LE

K(2,2) = 1 / LE

K(1,2) = - 1 / LE

K(2,1) = - 1 / LE

Se construye la matriz de conductancia:

$$[K] = \frac{1}{LE} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

PRINT "MATRIZ DE CONDUCTIVIDAD PARA TODOS LOS ELEMENTOS: [K]"

FOR i = 1 TO 2: FOR J = 1 TO 2

PRINT K(i, J);

NEXT J: PRINT : NEXT i

REM SUBROUTINA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL VECTOR DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES

FOR i = 1 TO (N - 1) / 2

F(i, 1) = Q * LE / 2

F(i, 2) = F(i, 1)

PRINT "VECTOR LOCAL DE TERMINOS INDEPENDIENTES DEL ELEMENTO"; i

PRINT F(i, 1, 1)

PRINT F(i, 2, 1)

NEXT i

A cada uno de los nodos de los elementos correspondientes a la mitad izquierda se les asigna una producción de calor igual al 50% de la que se

$$\begin{bmatrix} Q(LE)/2 \\ Q(LE)/2 \end{bmatrix}$$

```
FOR i = (N - 1) / 2 + 1 TO N - 1
```

```
  F(i, 1) = 0
```

```
  F(i, 2) = 0
```

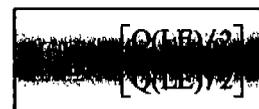
A cada uno de los nodos de los elementos correspondientes a la mitad derecha se les asigna una producción de calor igual a cero

```
PRINT "VECTOR LOCAL DE TERMINOS INDEPENDIENTES DEL ELEMENTO"; i
```

```
  PRINT F(i, 1, 1)
```

```
  PRINT F(i, 2, 1)
```

```
NEXT i
```



```
REM SUBROUTINA DE ENSAMBLAJE DEL SISTEMA DE ECUACIONES
```

```
REM CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ GLOBAL DE COEFICIENTES
```

```
FOR R = 1 TO N - 1
```

```
  IF R = 1 THEN
```

```
    KG(R, R) = K(1, 1)
```

```
    KG(R, R + 1) = K(1, 2)
```

```
    KG(R + 1, R) = K(2, 1)
```

```
    KG(R + 1, R + 1) = K(2, 2) + K(1, 1)
```

```
  ELSE
```

```
    KG(R, R + 1) = K(1, 2)
```

```
    KG(R + 1, R) = K(2, 1)
```

```
    KG(R + 1, R + 1) = K(2, 2) + K(1, 1)
```

```
  END IF
```

```
NEXT R
```

```
KG(N, N) = K(1, 1)
```

```
PRINT "KG"; N; N; "="; KG(N, N)
```

```
REM GLOBALIZACIÓN DE LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES
```

```
FOR K = 1 TO N
```

```
  IF K = 1 THEN
```

```
    FG(K) = F(K, 1, 1)
```

```
  ELSE
```

```
    FG(K) = F(K - 1, 2, 1) + F(K, 1, 1)
```

```
  END IF
```

```
NEXT K
```

```
REM SUBROUTINA PARA INTRODUCCIÓN DE CONDICIONES DE FRONTERA:
```

```
KG(1, 2) = 0: KG(2, 1) = 0
```

```
KG(N - 1, N) = 0: KG(N, N - 1) = 0:
```

```
FG(1) = 0: FG(N) = 0
```

```
REM SUBROUTINA PARA ESPECIFICACIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES A RESOLVER
```

```
'PRINT "SISTEMA DE ECUACIONES A RESOLVER:"
```

```
DIM A1(N, N + 1)
```

```
FOR i = 1 TO N
```

```
  FOR J = 1 TO N
```

```
    A1(i, J) = KG(i, J)
```

```
  'PRINT A1(i, J); " ";
```

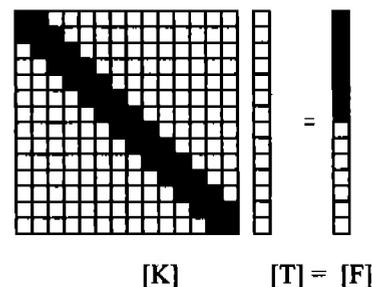
```
  NEXT J
```

```
  REM TÉRMINO INDEPENDIENTE
```

```
    A1(i, N + 1) = FG(i)
```

```
  'PRINT "="; A1(i, N + 1)
```

```
NEXT i
```



```

REM SUBROUTINA PARA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS
REM ***** ELIMINACION GAUSSIANA *****
LOOP WHILE INKEY$ = ""
GOSUB 1000
FOR i = 1 TO N
COLOR 14
PRINT "y"; i; "="; y(i)
NEXT i
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
600
END
1000 FOR R = 1 TO N - 1
PRINT
FOR i = R + 1 TO N
qt = A1(i, R) / A1(R, R)
FOR J = R + 1 TO N + 1
A1(i, J) = A1(i, J) - qt * A1(R, J)
NEXT J
NEXT i
FOR i = R + 1 TO N
A1(i, R) = 0
NEXT i
NEXT R
X(N) = A1(N, N + 1) / A1(N, N)
FOR NX = 1 TO N - 1
SUM = 0
i = N - NX
FOR J = i + 1 TO N
SUM = SUM + A1(i, J) * X(J)
NEXT J
X(i) = (A1(i, N + 1) - SUM) / A1(i, i)
NEXT NX

FOR i = 1 TO N
y(i) = X(i)
NEXT i

REM SUBROUTINA DE GRAFICACIÓN
xmin = 1: xmax = N
DELTAX = (xmax - xmin) / (N - 1)
X(0) = xmin - DELTAX
REM CÁLCULO DE LOS VALORES DE LA FUNCIÓN
FOR i = 1 TO N
X(i) = X(i - 1) + DELTAX
NEXT i
REM OBTENCIÓN DE VALORES EXTREMOS DE LA FUNCIÓN
YMIN = y(1): ymax = y(1)
FOR i = 2 TO N
IF YMIN > y(i) THEN YMIN = y(i)
IF ymax < y(i) THEN ymax = y(i)
NEXT i
xmingraf = 0: xmaxgraf = xmax: ymingraf = 0: ymaxgraf = ymax
scalex = 1: scaley = 10
SCREEN 12: CLS
LINE (0, 0)-(639, 440), 15, BF: COLOR 9

```

```

LINE (80, 30)-(80, 399)
LINE (80, 30)-(559, 30)
LINE (80, 399)-(559, 399)
LINE (559, 30)-(559, 399)
PASX = xmaxgraf + ABS(xmingraf)
PASY = ymaxgraf + ABS(ymingraf)
EJEY = 80 + (559 - 80) / PASX * ABS(xmingraf)
EJEX = 30 + (399 - 30) / PASY * ymaxgraf
COLOR 4
LINE (EJEY, 30)-(EJEY, 399)
LINE (80, EJEX)-(559, EJEX)
REM normalizacion de escala
NY = INT(PASY / scaley)
NX = INT(PASX / scalex)
DIVX(1) = 80: DIVY(1) = 399
FOR i = 2 TO NX
DIVX(i) = DIVX(i - 1) + scalex * (559 - 80) / PASX
COLOR 7
LINE (DIVX(i), EJEX - 2)-(DIVX(i), EJEX + 2)
LINE (DIVX(i), 30)-(DIVX(i), 32)
LINE (DIVX(i), 397)-(DIVX(i), 399)
NEXT i
FOR J = 2 TO NY
DIVY(J) = DIVY(J - 1) - scaley * (399 - 30) / PASY
LINE (EJEY - 3, DIVY(J))-(EJEY + 3, DIVY(J))
LINE (80, DIVY(J))-(83, DIVY(J))
LINE (556, DIVY(J))-(559, DIVY(J))
NEXT J
FOR i = 1 TO N
xn(i) = X(i) * (559 - 80) / PASX + EJEY
yn(i) = -y(i) * (399 - 30) / PASY + EJEX
COLOR 2
PSET (xn(i) - 1, yn(i) + 1)
PSET (xn(i) - 1, yn(i))
PSET (xn(i) - 1, yn(i) - 1)
PSET (xn(i), yn(i) + 1)
PSET (xn(i), yn(i))
PSET (xn(i), yn(i) - 1)
PSET (xn(i) + 1, yn(i) + 1)
PSET (xn(i) + 1, yn(i))
PSET (xn(i) + 1, yn(i) - 1)
NEXT i
FOR J = 1 TO N - 1
COLOR 5
LINE (xn(J), yn(J))-(xn(J + 1), yn(J + 1))
NEXT J
LOCATE 27, 10: PRINT "XGRAF="; xmingraf: LOCATE 25, 1: PRINT "Temp="; ymingraf
LOCATE 3, 1: PRINT "Temp="; ymaxgraf: LOCATE 27, 63: PRINT "Xmax="; xmaxgraf: LOCATE 1, 1
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""

RETURN

```

La siguiente tabla comparativa muestra los resultados de la solución analítica frente a los de la solución numérica:

Coordenada	Sol. Numérica	Sol. Analítica
0	0	0
0.05	1.75	1.75
0.10	3.25	3.25
0.15	4.50	4.50
0.20	5.50	5.50
0.25	6.25	6.25
0.30	6.75	6.75
0.35	7.00	7.00
0.40	7.00	7.00
0.45	6.75	6.75
0.50	6.25	6.25
0.55	5.625	5.625
0.60	5.00	5.00
0.65	4.375	4.375
0.70	3.75	3.75
0.75	3.125	3.125
0.80	2.50	2.50
0.85	1.875	1.875
0.90	1.25	1.25
0.95	0.625	0.625
1.00	0	0

La solución analítica se obtiene por integración directa de la ecuación diferencial de segundo grado:

$$T'' = -Q/k$$

$$\text{Con } T' = (-Q/k)x + C_1, y$$

$$T = (-Q/k)x^2/2 + C_1x + C_2$$

En la mitad izquierda, la condición a la frontera:

$$T = 0 \text{ en } x = 0, \text{ da } C_2 = 0, \text{ y entonces:}$$

$$T_{IZQ} = (-Q/k)x^2/2 + C_1x$$

Mientras que en el lado derecho, como $Q = 0$:

$$T_{DER} = C_3x + C_5, \text{ y debido a que } T = 0 \text{ en } x = L:$$

$$T_{DER} = C_3(x - L)$$

La distribución de temperatura debe ser una función continua en el intervalo de x , por lo tanto en $x = L/2$, tanto T como su primera derivada deben ser la misma en ambos lados, consecuentemente:

$$T_{DER} = T_{IZQ} \text{ en } x = L/2$$

$$T'_{DER} = T'_{IZQ} \text{ en } x = L/2$$

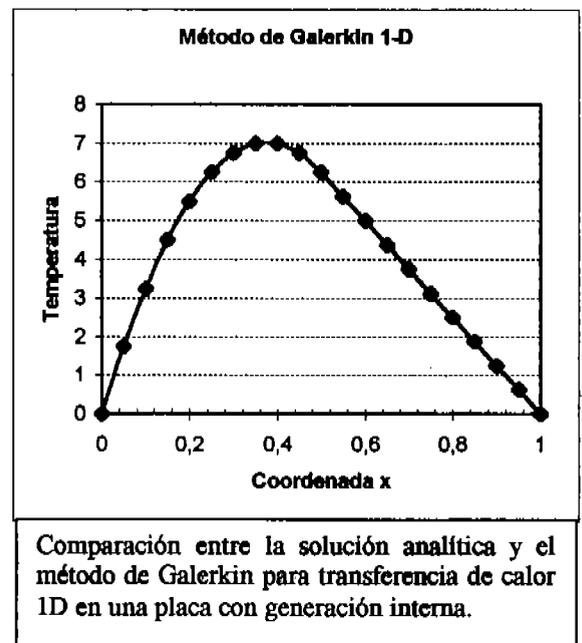
Al sustituir estas condiciones de frontera, resulta fácil evaluar las constantes de integración, llegándose finalmente a:

$$T_{IZQ} = (3QL/8k)x - (Q/2k)x^2, y$$

$$T_{DER} = (QL/8k)(L - x)$$

Estas son las expresiones matemáticas que se utilizaron en la solución analítica reportada en la tabla anterior.

La gráfica que se muestra a continuación exhibe la distribución de temperatura a lo largo de la placa. Los valores calculados por el método de Galerkin coinciden por completo con los de la solución analítica exacta para los 20 elementos considerados, pero también para 2 o 4, como puede comprobarse al ejecutar el programa con 3 o 5 nodos, respectivamente.



Para mostrar la versatilidad del método, se utilizará el mismo programa para resolver un problema ligeramente diferente. Considérese la misma barra con generación interna de energía térmica en su mitad izquierda y sin generación en la otra mitad, pero con un extremo derecho por el cual se pierde calor a razón constante de 20 Joules / seg. El sistema se encuentra en estado estacionario así que la ecuación diferencial gobernante es la misma.

La solución analítica ahora es:

$$T_{IZQ} = -(Q/2k)x^2 + (L/k)(Q/2 + Q_2)x$$

$$T_{DER} = (QL^2/8k) + (Q_2L/k)x$$

donde Q_2 es la potencia del sumidero de calor en el extremo derecho y se le ha asignado un valor de -20 para efectos de este ejemplo.

El programa de elemento finito se modifica simplemente cambiando un par de instrucciones en el bloque de especificación de condiciones de frontera. Dichas instrucciones son:

$$\text{KG}(\text{N}-1, \text{N}) = 0; \text{KG}(\text{N}, \text{N}-1) = 0$$

$$\text{FG}(1) = 0; \text{FG}(\text{N}) = 0$$

A la primera de estas dos líneas se le coloca una comilla para anularla y en la segunda se especifica el valor de Q_2 , quedando:

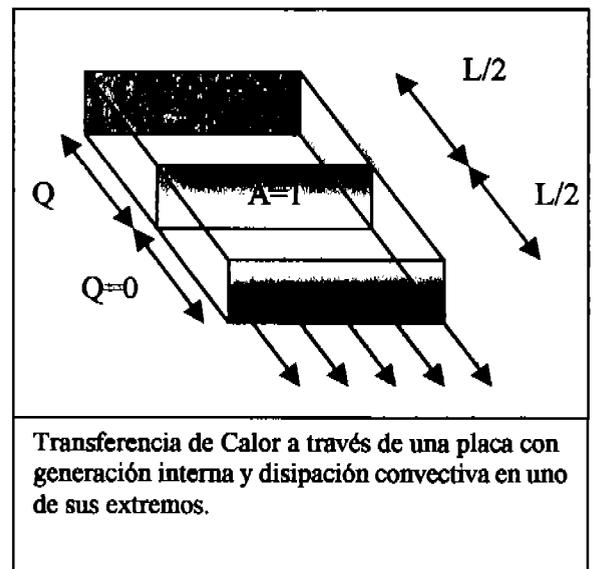
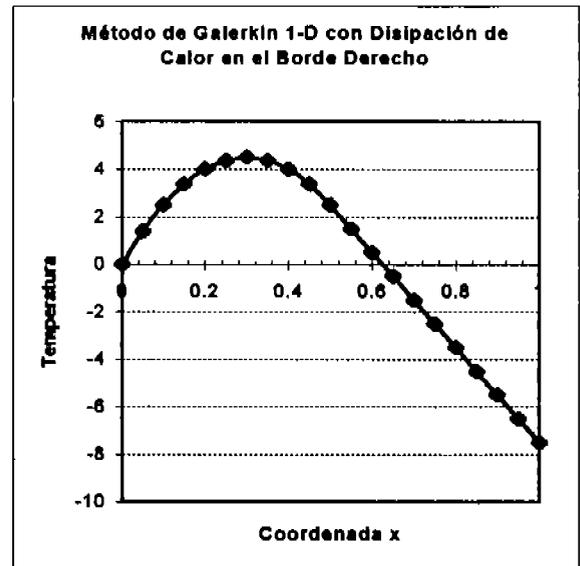
$$'\text{KG}(\text{N}-1, \text{N}) = 0; \text{KG}(\text{N}, \text{N}-1) = 0$$

$$\text{FG}(1) = 0; \text{FG}(\text{N}) = -20$$

Al ejecutar el programa se obtiene el perfil de temperaturas en la placa. La siguiente tabla muestra los resultados y su comparación con la solución analítica:

Coordenada	Sol. Analítica	Sol. Numérica
0	0	0
0.05	1.375	1.375
0.10	2.5	2.5
0.15	3.375	3.375
0.20	4	4
0.25	4.375	4.375
0.30	4.5	4.5
0.35	4.375	4.375
0.40	4	4
0.45	3.375	3.375
0.50	2.5	2.5
0.55	1.5	1.5
0.60	0.5	0.5
0.65	-0.5	-0.5
0.70	-1.5	-1.5
0.75	-2.5	-2.5
0.80	-3.5	-3.5
0.85	-4.5	-4.5
0.90	-5.5	-5.5
0.95	-6.5	-6.5
1.00	-7.5	-7.5

La siguiente gráfica muestra la distribución de temperaturas en la placa. Nuevamente el método de Galerkin coincide 100 % con la solución exacta.



4

Formulación Bidimensional Mecánica de Sólidos

4.1. INTRODUCCIÓN.

La producción de entropía es una cantidad no negativa fundamentada por la termodinámica irreversible, y por lo tanto sirve como base para la descripción sistemática de los procesos irreversibles que ocurren durante la deformación geométrica de un sólido sometido a esfuerzos mecánicos. Desde el punto de vista termodinámico, la producción de entropía es la única medida de la evolución de la deformación del sistema. Liu, Hayakawa y Murakami (1998) presentan un análisis del daño mecánico en materiales elastoplásticos desde el punto de vista de la termodinámica irreversible. Un análisis semejante puede hallarse en el trabajo de Basaran y Shihua (2004).

A lo largo del desarrollo que aquí se presenta, se introducen varios conceptos que serán útiles para explicar algunos efectos mecánicos colaterales sobre otros procesos termodinámicos irreversibles tales como

la transferencia de calor y la transferencia de masa. Por ejemplo, cuando se lleva a cabo la congelación de un material por deshidratación, junto a la transferencia de calor y masa simultáneas, también ocurren esfuerzos mecánicos que deforman la estructura del cuerpo. En este capítulo se establecen los principios fundamentales de la aplicación de los métodos variacionales de elementos finitos en la mecánica de sólidos, y se aborda como ejemplo un problema de distribución de esfuerzos y deformaciones en un plano. También se aprovecha para introducir un primer algoritmo para aplicación del método en un espacio bidimensional. Dicho programa exhibe todas las características que hacen a los métodos de elementos finitos tan versátiles, como la flexibilidad para manejar diferentes geometrías y condiciones de frontera, así como el manejo de materiales con propiedades anisotrópicas y heterogéneas.

4.2 PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN LA MECÁNICA DE SÓLIDOS

El Método de los Elementos Finitos es un procedimiento semianalítico que permite evaluar de manera versátil las relaciones entre esfuerzos y deformaciones en medios continuos de diferentes geometrías sometidos a distintas distribuciones de fuerzas. Consiste básicamente en discretizar la región de interés en un número finito de elementos de formas arbitrarias, interconectados en sus fronteras por nodos comunes a dos o más elementos y proponer una solución aproximada a las ecuaciones diferenciales correspondientes, utilizando el principio de trabajo virtual para optimizar los parámetros ajustables de los polinomios de aproximación dentro de cada elemento.

Por medio de una función de aproximación polinomial se interpola la solución de la ecuación

diferencial dentro del campo de desplazamientos para obtener la matriz de rigidez local. Enseguida se ensamblan las matrices de rigidez locales para obtener la matriz de rigidez global. Por otra parte, se especifica el vector de cargas en los puntos nodales y se resuelven las ecuaciones de equilibrio para los desplazamientos en los nodos. Por último, se calculan los esfuerzos y deformaciones de cada elemento a partir de dichos desplazamientos.

El método de los elementos finitos obtuvo sus primeros éxitos en su aplicación a problemas bidimensionales, concretamente a la resolución de problemas de esfuerzos y deformación plana. En ambos casos el campo de desplazamientos viene expresado unívocamente en función de los desplazamientos u y v

en dirección de los ejes cartesianos x e y , respectivamente.

Además las únicas tensiones y deformaciones que se han de considerar en ambas situaciones son las tres componentes en el plano xy (ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} , σ_1 , σ_2 , σ_3).

Considerando un elemento triangular típico como el de la siguiente figura, con los nodos i , j , k , ordenados alfabéticamente en sentido antihorario, las componentes del vector de desplazamientos locales quedan expresadas como:

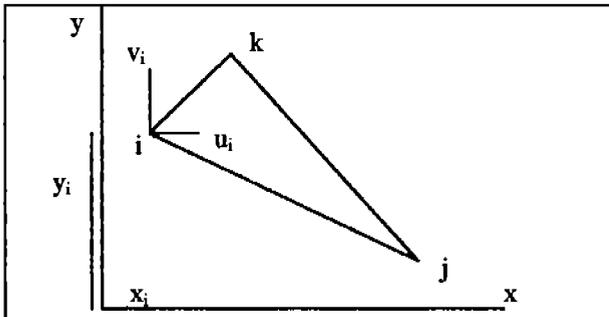


Fig. 4.1. Elemento Plano típico bajo tensión plana. Representación de coordenadas globales y desplazamientos locales.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [H][d_e]$$

donde la matriz $[H]$ es la función de interpolación que permite aproximar la solución exacta de los desplazamientos dentro del elemento y $[d_e]$ es el vector de desplazamientos nodales.

Encontrando los desplazamientos u y v a partir de la consideración de que estos son funciones bilineales de las coordenadas, entonces:

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad [4.1]$$

$$v = a_4 + a_5 x + a_6 y \quad [4.2]$$

Sustituyendo las coordenadas de los nodos en la ecuación [4.1], se tiene que:

$$u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i$$

$$u_j = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j$$

$$u_k = a_1 + a_2 x_k + a_3 y_k$$

Con un poco de álgebra se obtienen los valores de cada constante:

$$a_1 = \frac{1}{2A} [u_i(x_j y_k - x_k y_j) - x_i(u_j y_k - u_k y_j) + y_i(u_j x_k - u_k x_j)]$$

$$a_2 = \frac{1}{2A} [(u_j y_k - u_k y_j) - u_i(y_k - y_j) + y_i(u_k - u_j)]$$

$$a_3 = \frac{1}{2A} [(x_j u_k - x_k u_j) - x_i(u_k - u_j) + u_i(x_k - x_j)]$$

donde A es el área del elemento triangular.

Sustituyendo estos valores en la ecuación [4.1] se llega a:

$$u = \frac{1}{2A} \left\{ \begin{array}{l} u_i [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_k - y_j)x + (x_k - x_j)y] + \\ u_j [(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] + \\ u_k [(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y] \end{array} \right\}$$

si especificamos a los parámetros a_i , a_j y a_k como :

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i$$

entonces :

$$u = \frac{1}{2A} \left\{ \begin{array}{l} u_i [a_i + (y_k - y_j)x + (x_k - x_j)y] + \\ u_j [a_j + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] + \\ u_k [a_k + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y] \end{array} \right\} \quad [4.3]$$

Procediendo de manera similar para los desplazamientos verticales, se llega a:

$$v = \frac{1}{2A} \left\{ \begin{array}{l} v_i [a_i + (y_k - y_j)x + (x_k - x_j)y] + \\ v_j [a_j + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y] + \\ v_k [a_k + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y] \end{array} \right\}$$

[4.4]

o, expresándolo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [H][d_e]$$

es decir:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

donde:

$$H_1 = (1/2 A) [a_i + (y_k - y_j) x + (x_k - x_j) y]$$

$$H_2 = (1/2 A) [a_j + (y_k - y_i) x + (x_i - x_k) y]$$

$$H_3 = (1/2 A) [a_k + (y_i - y_j) x + (x_j - x_i) y]$$

Según la teoría de la elasticidad, las deformaciones unitarias están dadas por:

Tensión :

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x$$

$$\epsilon_y = \partial v / \partial y$$

Corte :

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$$

Así que de las ecuaciones [4.3] y [4.4] se obtiene que:

$$\epsilon_x = \frac{1}{2A} [(y_k - y_j)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{2A} [(x_k - x_j)v_i + (x_i - x_k)v_j + (x_j - x_i)v_k]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2A} [(y_k - y_j)v_i + (y_k - y_i)v_j + (y_i - y_j)v_k + (x_k - x_j)u_i + (x_i - x_k)u_j + (x_j - x_i)u_k]$$

Que matricialmente puede escribirse como:

$$[\epsilon] = [B] [d_e] \quad [4.5]$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_2 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 & B_5 & 0 & B_6 \\ B_4 & B_1 & B_5 & B_2 & B_6 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

donde:

$$B_1 = (y_k - y_j)$$

$$B_2 = (y_k - y_i)$$

$$B_3 = (y_i - y_j)$$

$$B_4 = (x_k - x_j)$$

$$B_5 = (x_i - x_k)$$

$$B_6 = (x_j - x_i)$$

Se observa que la "matriz geométrica" [B] depende únicamente de las coordenadas de los nodos del elemento.

Por otra parte, los esfuerzos dentro del elemento están en función de los desplazamientos de los nodos, es decir:

$$[\sigma] = [D] [e] \quad [4.6]$$

donde la matriz [D] tiene la siguiente forma:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

siendo:

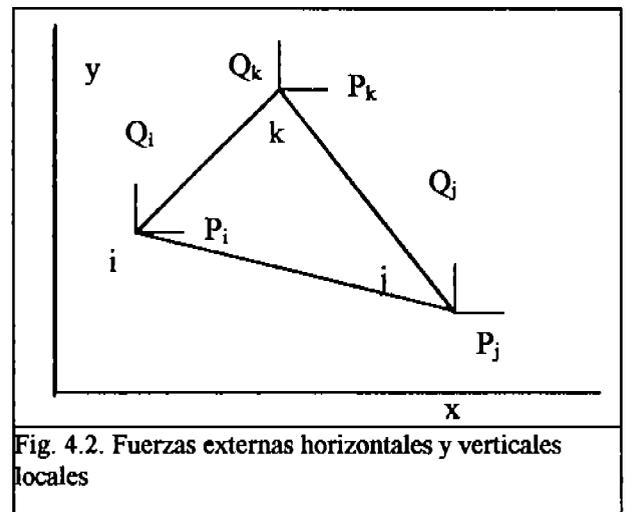
E = Módulo de elasticidad.

ν = coeficiente de Poisson.

Luego, sustituyendo el valor de la matriz [e] de la ecuación [4.5] en la expresión [4.6], se obtiene:

$$[\sigma] = [D] [B] [d_e] \quad [4.7]$$

Para la determinación de la matriz de rigidez de un elemento se puede recurrir a la evaluación del trabajo originado por las fuerzas externas y del trabajo interno producido por la deformación acumulada.



Según la figura (4.2), el trabajo que provocan las fuerzas externas es:

$$W = \frac{1}{2} (P_i u_i + Q_i v_i + P_j u_j + Q_j v_j + P_k u_k + Q_k v_k)$$

Que expresado matricialmente corresponde a:

$$W = \frac{1}{2} [d_e]^T [P_e] \quad [4.8]$$

donde :

$$[P_e] = \begin{bmatrix} P_i \\ Q_i \\ P_j \\ Q_j \\ P_k \\ Q_k \end{bmatrix}$$

Por otra parte, el trabajo interno acumulado por unidad de volumen dentro del elemento finito es:

$$W'_{in} = \frac{1}{2} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy})$$

que escribiéndolo en forma matricial se expresa como:

$$W'_{in} = \frac{1}{2} [\epsilon]^T [\sigma]$$

Por lo tanto, el trabajo interno en todo el elemento de volumen vale:

$$W_{in} = \iiint_{Vol} W'_{in} dV = \frac{1}{2} \iiint_{Vol} [\epsilon]^T [\sigma] dV \quad [4.9]$$

Igualando las ecuaciones [4.8] y [4.9] se obtiene:

$$[d_e]^T [P_e] = \iiint_{Vol} [\epsilon]^T [\sigma] dV$$

Sustituyendo la expresión [4.5] :

$$[d_e]^T [P_e] = \iiint_{Vol} [d_e]^T [B]^T [\sigma] dV$$

$$[d_e]^T [P_e] = [d_e]^T \iiint_{Vol} [B]^T [\sigma] dV$$

$$[P_e] = \iiint_{Vol} [B]^T [\sigma] dV$$

Sustituyendo la ecuación [4.7] se tiene:

$$[P_e] = \iiint_{Vol} [B]^T [D] [B] [d_e] dV$$

Enseguida, si se considera:

- Un espesor unitario del elemento.
- Desplazamiento positivo cuando el tamaño del elemento decrece.

Entonces, se tiene que [P] es una matriz constante:

$$[P_e] = [B]^T [D] [B] [d_e] A$$

donde A = área del elemento.

Llamando $[K_e]$ a la matriz de rigidez del elemento y definiéndola como:

$$[K_e] = [B]^T [D] [B] A$$

entonces se tiene que :

$$[P_e] = [K_e] [d_e]$$

Así pues, para determinar la matriz de rigidez global se superponen las rigideces individuales de cada elemento por adición directa, formando de esta manera una matriz $[K_e]$.

Si se denomina [U] al vector de desplazamientos de todo el medio y [P] al vector de carga, entonces se podrá obtener para todo el entorno la siguiente expresión:

$$[P] = [K] [U]$$

Esta expresión matricial origina un sistema de ecuaciones simultáneas lineales donde las incógnitas son los desplazamientos nodales de los elementos, Su solución permite conocer dichos desplazamientos y así determinar las deformaciones unitarias y los esfuerzos en cada elemento utilizando las ecuaciones [4.5] y [4.7], respectivamente.

4.2. APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN BIDIMENSIONAL EN MECÁNICA DE SÓLIDOS.

Se pueden citar varias aplicaciones prácticas de la formulación bidimensional del método de elementos finitos en la mecánica de sólidos. En el texto clásico de Zienkiewicz y Taylor¹ se mencionan por ejemplo, las siguientes:

- Distribución de tensiones en torno a un orificio reforzado,
- Tensiones tectónicas en un valle anisótropo,
- Presiones hidrostáticas internas y externas en una presa,
- Tensiones alrededor de una central eléctrica subterránea.

Otras aplicaciones que parecen evidentes son en el diseño de puentes de concreto reforzado y el diseño de pavimentos para autopistas y aeropistas.

En este trabajo se considera la aplicación en el diseño de pavimentos flexibles, por ser un material anisótropo y heterogéneo.

Un pavimento flexible está constituido por varias capas de materiales sólidos de diferentes propiedades mecánicas. La superficie de rodamiento es una superficie bituminosa, formada típicamente por un agregado pétreo y un aglutinante asfáltico. Más abajo se disponen de al menos dos capas bien diferenciadas. Una base de material granular y una sub-base también granular pero con suelos de menor calidad, con mayor contenido de finos y menor exigencia en sus propiedades mecánicas. Finalmente, en la capa inferior queda la terracería. Aunque la resistencia a los esfuerzos cortantes no es un requisito fundamental en las terracerías, ellas deben constituir un material poco deformable, por lo tanto la calidad de los suelos juega un papel importante, por lo que comúnmente se le da

un tratamiento de compactación para obtener las propiedades mecánicas deseadas.

La estructura del pavimento tiene la finalidad de proveer una superficie de rodamiento confortable y distribuir los esfuerzos mecánicos en las capas inferiores. Un pavimento bien diseñado se considera aquél en el que las deformaciones de la carpeta asfáltica no rebasan los límites de elasticidad ante carga crítica y las deformaciones en las capas inferiores queden muy debajo del límite plástico para evitar el colapso de la estructura.

Desde el punto de vista de la programación, un buen algoritmo de cómputo por elementos finitos variacionales para este campo de la mecánica en particular, debe ser tan versátil que pueda ser aplicado a todos los casos mencionados como ejemplo en este apartado, por lo menos para materiales cuyo comportamiento esfuerzo-deformación sea lineal. Además debe permitir cambiar fácilmente la geometría del sistema, las condiciones de frontera y la distribución de cargas externas. El programa Dispav1.Bas que se describe en la siguiente sección cumple con dichas características.

Una pequeña modificación que se puede consultar en el texto de Zienkiewicz y Taylor (*opus cit.*) permitiría resolver problemas bidimensionales de mecánica de sólidos para materiales no lineales.

El algoritmo que se presenta en este capítulo está dedicado a la determinación de esfuerzos y deformaciones en materiales anisotrópicos y heterogéneos, pero la aplicación a materiales homogéneos e isotrópicos es relativamente más sencilla y consiste simplemente en especificar igualdad de propiedades mecánicas en todo el material en las direcciones horizontal y vertical.

4.3 ALGORITMO PARA DISEÑO DE PAVIMENTOS FLEXIBLES.

De todos los problemas de mecánica de sólidos bidimensional se eligió el del diseño de pavimentos flexibles por las razones que ya fueron acotadas:

- La heterogeneidad y anisotropía del material.
- La posibilidad de manejar diferentes condiciones de frontera.
- La caracterización del problema únicamente mediante esfuerzos de corte y compresión.

La figura 4.3 representa la discretización de las cuatro capas que constituyen un pavimento flexible. Especificadas cada una con diferente asfalto. Cada nivel se dividió horizontalmente en dos y, de acuerdo a la aplicación de las cargas, se consideró una división vertical en siete regiones. Las flechas que se muestran en la figura representan las cargas normales de un trailer, un camión de pasajeros y un automóvil, aunque resulta sencillo para el usuario cambiar a carga crítica (tres trailer en las posiciones señaladas) Se consideró conveniente ubicar nodos en los puntos de aplicación de las cargas externas. Internamente también se tomó en cuenta el peso de las capas superiores sobre los niveles más profundos. Se aplican condiciones de frontera naturales en los límites laterales e inferior del pavimento.

La figura 4.4 representa la topología del arreglo de elementos finitos triangulares seleccionado para la resolución del problema. En dicho esquema se puede observar la ubicación de cada elemento con sus correspondientes nodos y sus relaciones con elementos vecinos, así como la ubicación y relaciones de vecindad de cada nodo.

En la figura 4.5 se muestra la forma en que opera el método de Gauss-Seidel con relajación para la resolución del sistema de ecuaciones simultáneas lineales, recorriendo una estrella de seis brazos a lo largo de la retícula de elementos finitos.

El sistema de ecuaciones simultáneas lineales que se obtiene es tribanda predominantemente diagonal.

El algoritmo computacional que se presenta aquí es versátil ya que:

- La especificación de las coordenadas nodales puede cambiarse fácilmente y el programa automáticamente reconstruirá el conjunto de ecuaciones a resolver para calcular desplazamientos, esfuerzos y deformaciones.
- Las cargas externas, que constituyen las condiciones de frontera también pueden ser modificadas fácilmente por el usuario. Por ejemplo, para considerar cargas normales o críticas.
- Las propiedades físicas y mecánicas de las capas también pueden modificarse, por ejemplo, para considerar un material isótropo y homogéneo.

Se utilizó programación modular en la construcción del algoritmo de cómputo. El diagrama de bloques que se presenta en las siguientes páginas sirve para visualizar la forma en que se encuentran arregladas las subrutinas.

Para la construcción de las matrices de rigidez locales se hace uso de las ecuaciones obtenidas para elementos triangulares en el apartado 4.1.

Para el ensamblaje, el programa Dispav1.bas arregla la matriz globalizada en un conjunto de 9 submatrices y utiliza el método de Gauss-Seidel con relajación para resolver el sistema de ecuaciones simultáneas resultante.

El programa cuenta con subrutinas de graficación que permiten representar los resultados en una forma más condensada y llevar a cabo un análisis de los efectos globales de los espesores de carpeta, base y sub-base sobre el comportamiento mecánico de los pavimentos. Los datos de entrada se especifican como parámetros, pero el usuario puede acceder al programa objeto para modificar las condiciones de la simulación y adecuarlo a sus necesidades.

A continuación de las figuras 4.3 a 4.5, se presenta el diagrama de bloques del programa Dispav1.Bas y enseguida el listado en código Qbasic.

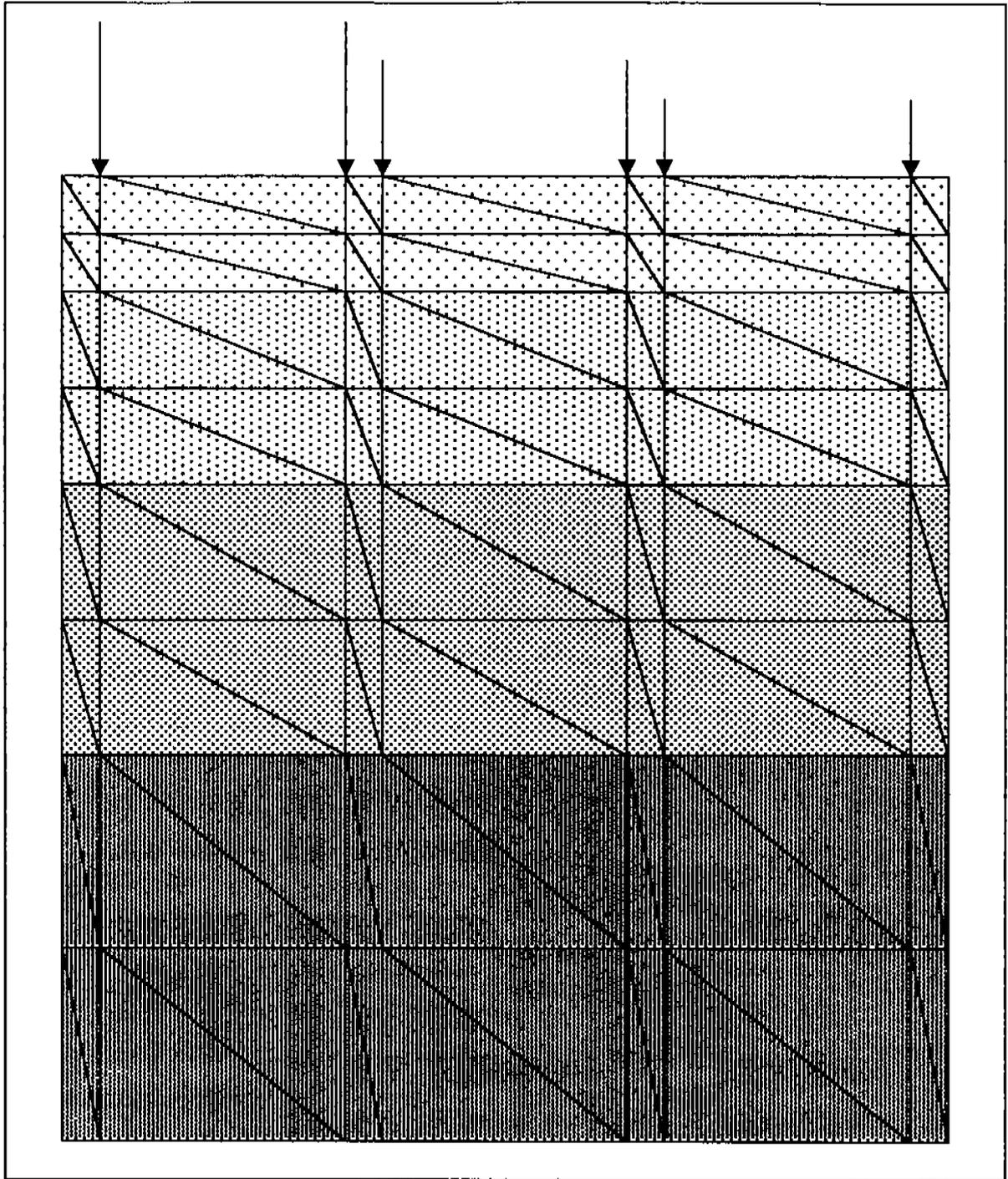


Figura 4.3.- Malla de Elementos Finitos.

- Carpeta Asfáltica 
- Base 
- Súbase 
- Terracería 

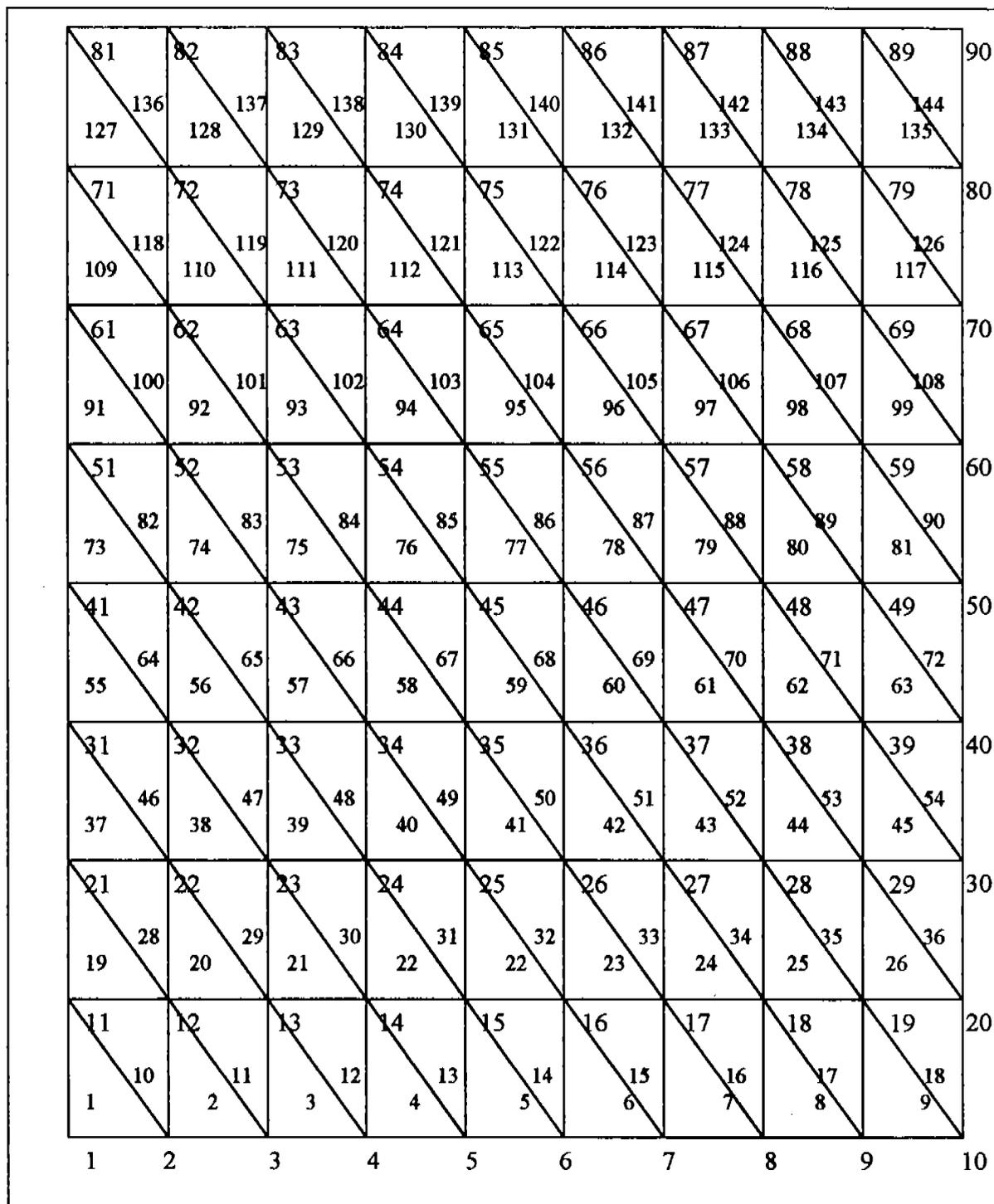


Figura 4.4- Conformación Topológica de la malla de Elementos Finitos.

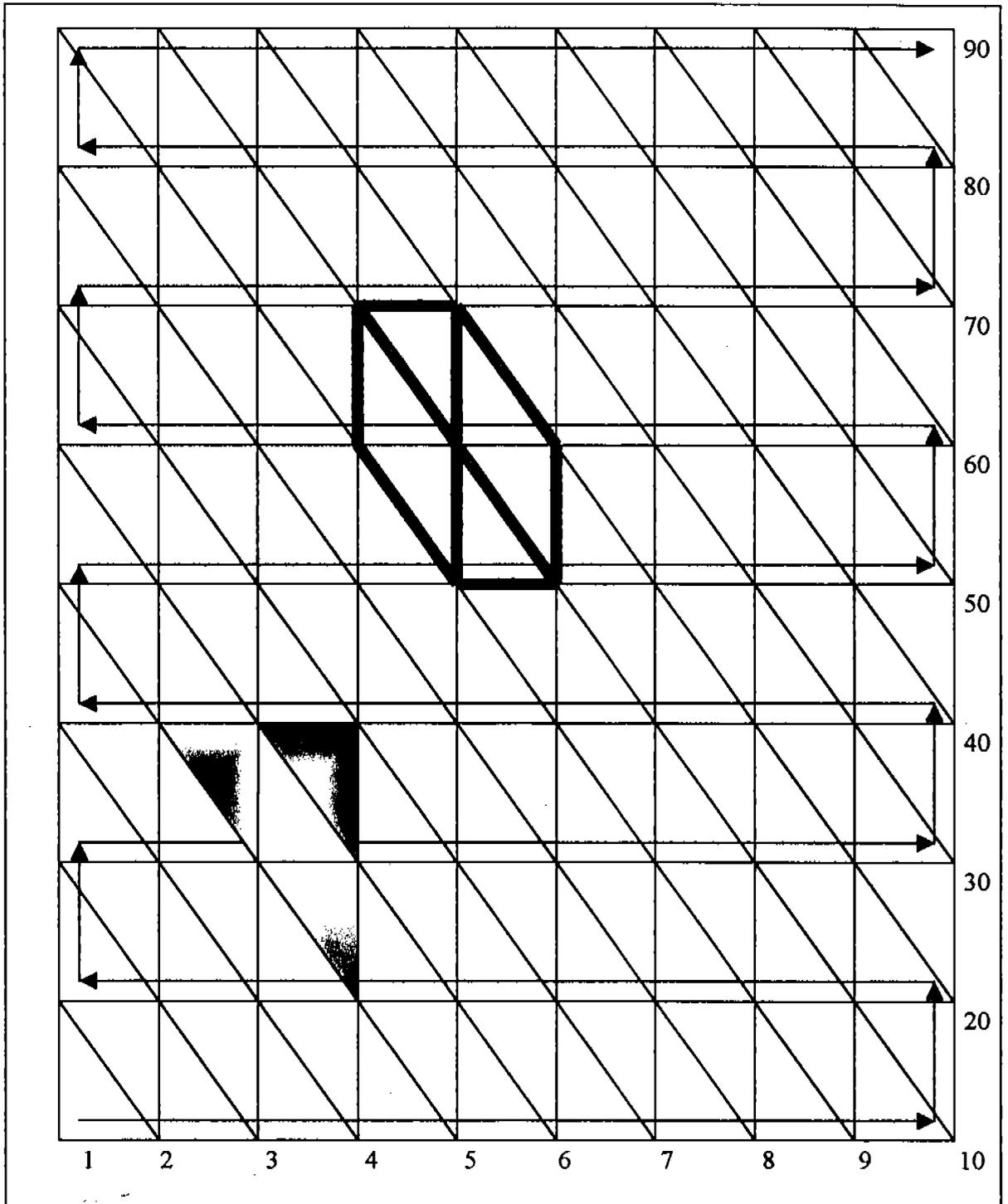
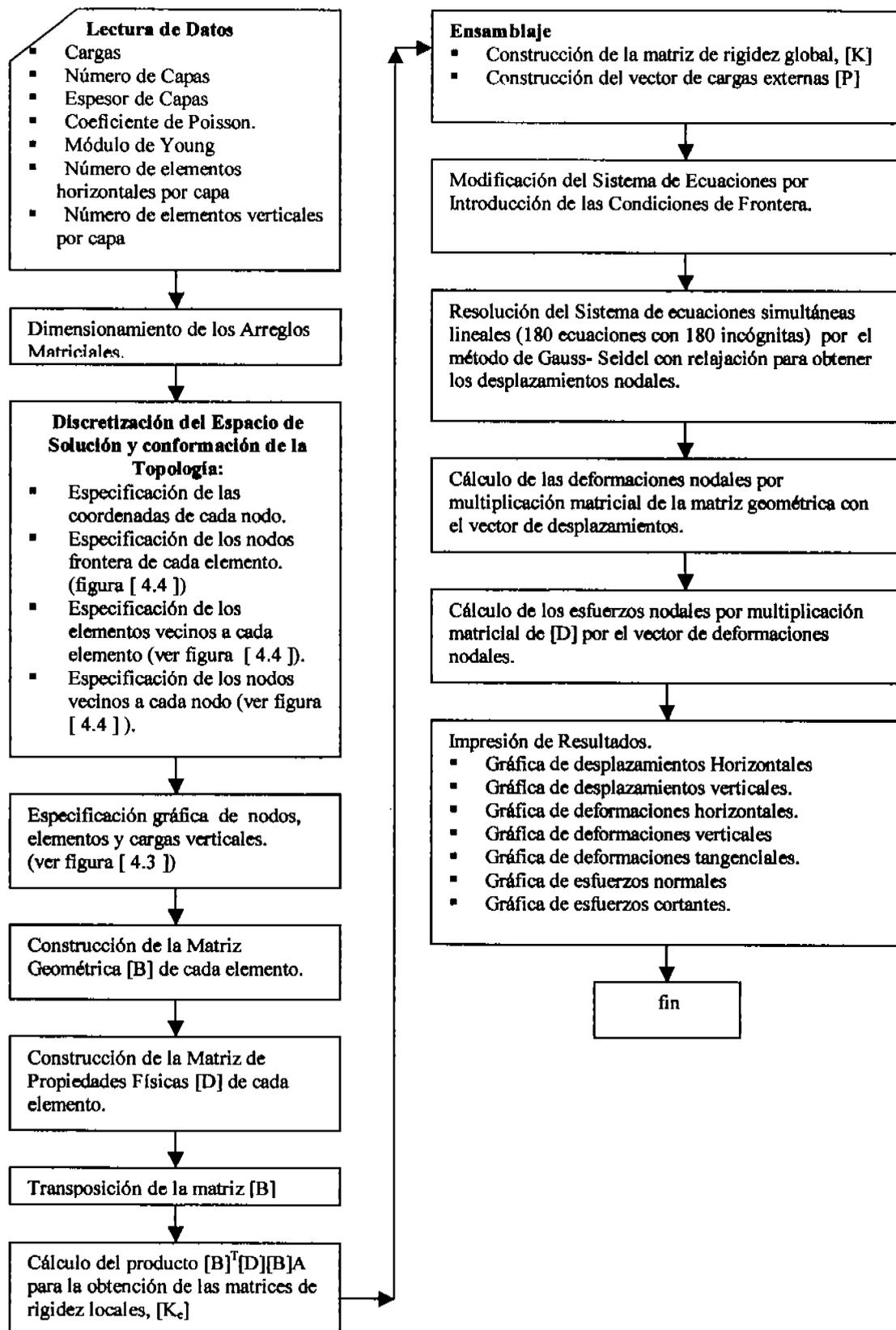


Figura 4.5- Discretización de la región de solución y procedimiento de resolución del sistema de ecuaciones simultáneas lineales.

Diagrama de Bloques del Programa Dispav1.bas



Listado del Programa Dispav1

A continuación se presenta el algoritmo de cómputo para el diseño de pavimentos flexibles, basado en el diagrama de flujo anterior. Los bloques de instrucciones que lo componen son:

Bloque I. En la primera serie de instrucciones se especifica el número de ciclos a procesar, Dispav1.bas realiza el cálculo para 5 espesores de la carpeta asfáltica, 4 de la base, 4 de la sub-base y un solo espesor de terracería; un total de 80 iteraciones. Pero el usuario del programa puede cambiar el número de espesores a probar por una simple modificación de los contadores CARPETA, BASE Y SÚBBASE.

```

***** ESPECIFICACIÓN DEL NÚMERO *****
***** DE CICLOS A PROCESAR *****
FOR CARPETA = 1 TO 4
  FOR BASED = 1 TO 4
    FOR SUBBASE = 1 TO 4

```

Bloque II. El siguiente par de instrucciones permite especificar el modo gráfico con el que se construye el esquema de discretización del medio continuo. Se eligió el modo Screen 12 por su versatilidad e la combinación de colores y por su alta resolución. Con los valores A, B y C se fijan los valores de las coordenadas límite en pantalla.

```

SCREEN 12
A = 100: B = 540: C = 360

```

Bloque III. A continuación se dimensionan los arreglos matriciales que almacenan en memoria RAM los valores de las variables de cálculo.

Los vectores [XN] y [YN] se utilizan para guardar las coordenadas de cada uno de los nodos de la malla de 90 elementos finitos. [XNG] y [YNG] hacen lo propio con las coordenadas de graficación normalizadas, mientras que [EI] [EJ] y [EK] almacenan las coordenadas nodales de cada elemento, es decir, el número de nodo que corresponde a cada uno de los tres vértices de cada uno de los 144 elementos. El vector [E] se dimensiona para almacenar los valores de los 4 módulos de Young (1 de cada material), en tanto que la matriz unidimensional [NU] guarda los coeficientes de Poisson. El vector [ENU] guarda el término constante de la matriz de propiedades físicas, [D], de cada uno de los 4 materiales $[E(1-\mu) / (1+\mu) (1-2\mu)]$. La matriz geométrica [B] de 3 renglones por 6 columnas, se dimensiona para cada uno de los 144 elementos; la matriz de propiedades físicas [D] se especifica para 3 renglones, 3 columnas y cada uno de los 4 materiales. Similarmente, el producto de la transpuesta de [B] por [D], se dimensiona para 3 renglones, 6 columnas y cada uno de los 144 elementos. Un tercer arreglo

matricial tridimensional se especifica para las matrices de rigidez locales, [K_c].

El arreglo matricial tridimensional [KG] se dimensiona para permitir el almacenamiento de 60 coeficientes de 20 ecuaciones simultáneas de cada una de las 9 líneas horizontales de la malla de elementos finitos, conformándose por partes un sistema de ecuaciones algebraicas de 180 ecuaciones con 180 incógnitas. El vector [U] almacena los valores de los 90 desplazamientos horizontales y verticales, correspondiendo los subíndices pares a estos últimos y los impares a los primeros.

[BL] es una matriz que almacena las condiciones de frontera de cada uno de los 90 nodos, correspondientes a sus cargas horizontales y verticales. El vector [C] se dimensiona para almacenar las cargas en los nodos de superficie. [DEFOR] es una matriz que guarda los datos intermedios para el cálculo de las deformaciones a partir del producto de [B] y [U].

El arreglo matricial [DEFORMA] almacena las deformaciones horizontales, verticales y tangenciales de cada uno de los 144 elementos en sus subíndices 1, 2 y 3, respectivamente. Finalmente, para representar gráficamente los resultados se dimensionan las matrices:

- Coordenadas gráficas normalizadas: [XNGRAF], [YNGRAF], [DIVY]
- Esfuerzos normales y cortantes: [GAMA], [SIGMA1], [SIGMA2], [SIGMA3]

```

DIM XN(100), YN(100), XNG(100), YNG(100)
DIM EI(144), EJ(144), EK(144), ENU(4), E(4), NU(4)
DIM B(144, 3, 6), BTD(144, 6, 3), K(144, 6, 6),
DIM D(4, 3, 3), KG(9,20,60), U(180,2), BL(180)
DIM C(10), X(7)
DIM DEFOR(144, 6, 1), DEFORMA(144, 3)
DIM XGRAF(144), YGRAF(144)
DIM XNGRAF(144), YNGRAF(144), DIVY(100)
DIM EX(150), EY(144), GAMA(144)
DIM SIGMA1(144), SIGMA2(144), SIGMA3(144)
DIM CAR(180)

```

Bloque IV. El siguiente paso es la especificación de la altura de las diferentes capas. Esto se hace asignando a las variables H1 (espesor de la terracería), H2 (espesor de la subrasante), H3 (altura de la rasante) y H4 (altura de la carpeta asfáltica), valores que varían en cada iteración.

De acuerdo a como se encuentra estructurado el programa se prueban para espesores de carpeta de 6, 8, 10 y 12 cm; 15, 25, 35 y 45 para la subrasante; 15, 30, 45 y 60 para la base y 1 m para el espesor de la terracería. En esta parte también se especifican las

alturas H_iG ($i = 1$ a 4) como parámetros de graficación y la anchura total del pavimento.

$H1 = 1$; $H2 = .15 * SUBASE$; $H3 = .05 + .1 * BASED$;
 $H4 = .04 + .04 * CARPETA$; $L = 9$
 $HTOTAL = (H1 + H2 + H3 + H4) * 2$; $FACT = 25 / HTOTAL$
 $H1G = H1 * FACT$; $H2G = H2 * FACT$; $H3G = H3 * FACT$; $H4G = H4 * FACT$

Bloque V. En el bloque de instrucciones que sigue se especifican las propiedades mecánicas de los materiales, concretamente el módulo de elasticidad (Young), y el coeficiente de Poisson. Se incluye también la densidad de cada material ya que en el cálculo de esduerzos y deformaciones se consideran los efectos del peso de la estructura.

$E(1) = 8.24$; $E(2) = 20.6$; $E(3) = 41.2$; $E(4) = 150$
 $NU(1) = .4$; $NU(2) = .38$; $NU(3) = .38$; $NU(4) = .35$
 $RO4 = .0022$; $RO3 = .002$; $RO2 = .002$; $RO1 = .0016$

Bloque VI. Como paso siguiente se asigna a la variable M el número de nodos horizontales; se especifican las cargas en los nodos de superficie; y se establece la longitud de espaciamiento entre cada pareja de nodos contiguos, en función, por supuesto, de la forma en que se distribuyen las cargas a lo ancho de la carpeta asfáltica. Se consideran 3 carriles de 3m y anchos de 1.4, 1.8 y 2m entre los ejes de cada vehículo, Automóvil, camión de pasajeros y trailer, respectivamente.

$M = 10$
 $L(1) = .5$; $L(2) = 2$; $L(3) = .5$; $L(4) = .5$; $L(5) = 2$;
 $L(6) = .5$; $L(7) = .5$; $L(8) = 2$; $L(9) = .5$
 $C(1) = 0$; $C(2) = 1$; $C(3) = 1$; $C(4) = 0$; $C(5) = 6.25$
 $C(6) = 6.25$; $C(7) = 0$; $C(8) = 9.4$; $C(9) = 9.4$
 $C(10) = 0$

Bloque VII. El siguiente paso es el cálculo de las coordenadas nodales. Esto se realiza mediante una serie de ciclos iterativos for-next que barren lo largo y ancho de la malla de los elementos finitos, asignándoles coordenadas normalizadas XN , YN a cada nodo en función de las alturas de cada subcapa y de las distancias horizontales entre nodos adyacentes. Así mismo, se especifican las coordenadas gráficas normalizadas XNG , YNG .

```

***** Coordenadas Nodales *****
FOR I = 1 TO M
  xn(I) = xn(I - 1) + L(I - 1)
  YN(I) = 0
  FOR J = 1 TO
    xn(I + M * J) = xn(I)
  NEXT J
  FOR J = 1 TO 2
    YN(I + M * J) = H1 * J
    YN(I + M * (J + 2)) = H1 * 2 + H2 * J

```

```

  YN(I + M * (J + 4)) = H1 * 2 + H2 * 2 + H3 * J
  YN(I + M * (J + 6)) = H1 * 2 + H2 * 2 + H3 * 2
  & + H4 * J
  NEXT J
NEXT I

```

```

***** Coordenadas Gráficas *****

```

```

FOR I = 1 TO M
  XNG(I) = XNG(I - 1) + L(I - 1)
  YG(I) = 0
  FOR J = 1 TO 8
    XNG(I + M * J) = XNG(I)
  NEXT J
  FOR J = 1 TO 2
    YNG(I + M * J) = H1G * J
    YNG(I + M * (J + 2)) = H1G * 2 + H2G * J
    YNG(I + M * (J + 4)) = H1G * 2 + H2G * 2
    & + H3G * J
    YNG(I + M * (J + 6)) = H1G * 2 + H2G * 2
    & + H3G * 2 + H4G * J
  NEXT J
NEXT I

```

Bloque VIII. El desplegado gráfico de la malla de elementos finitos es el siguiente paso en este programa. Se dibujan los puntos que especifican la posición de cada nodo con la instrucción PSET; y con diferentes colores se trazan las líneas que delimitan a cada elemento, mediante la instrucción LINE; también se dibujan las cargas sobre los nodos de la superficie. La figura [4.3] representa el arreglo de elementos finitos que aparece en pantalla durante la ejecución durante la ejecución del programa al llegar a esta subrutina de discretización gráfica

```

*****
*** DISCRETIZACIÓN GRÁFICA ***
*****
COLOR 7
FOR I = 1 TO 90
  PSET (XNG(I) * 40 + A, C - YNG(I) * 10)
NEXT I
FOR I = 1 TO 20
  COLOR 12
  LINE (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I) * 10)-(A +
  & XNG(I - 1) * 40, C - YNG(I) * 10)
  IF I / 10 - INT(I / 10) <> 0 THEN
    LINE (A + XNG(I + 1) * 40, C - YNG(I) * 10)-
    & (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I + 10) * 10)
  END IF
  LINE (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I) * 10)-(A +
  & XNG(I) * 40, C - YNG(I + 10) * 10)
NEXT I
FOR I = 21 TO 40
  COLOR 7
  LINE (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I) * 10)-(A +
  & XNG(I - 1) * 40, C - YNG(I) * 10)
  IF I / 10 - INT(I / 10) <> 0 THEN
    LINE (A + XNG(I + 1) * 40, C - YNG(I) * 10)-

```

```

& (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I + 10) * 10)
  END IF
  LINE (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I) * 10)-(A +
& XNG(I) * 40, C - YNG(I + 10) * 10)
NEXT I
FOR I = 41 TO 60
  COLOR 2
  LINE (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I) * 10)-(A +
& XNG(I - 1) * 40, C - YNG(I) * 10)
  LINE (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I) * 10)-(A +
& XNG(I) * 40, C - YNG(I + 10) * 10)
  IF I / 10 - INT(I / 10) <> 0 THEN
  LINE (A + XNG(I + 1) * 40, C - YNG(I) * 10)-
& (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I + 10) * 10)
  END IF
NEXT I
FOR I = 61 TO 80
  COLOR 5
  LINE (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I) * 10)-(A +
& XNG(I - 1) * 40, C - YNG(I) * 10)
  LINE (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I) * 10)-(A +
& XNG(I) * 40, C - YNG(I + 10) * 10)
  IF I / 10 - INT(I / 10) <> 0 THEN
  LINE (A + XNG(I + 1) * 40, C - YNG(I) * 10)-
& (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I + 10) * 10)
  END IF
  LINE (A + XNG(I) * 40, C - YNG(I + 10) * 10)-
& (A + XNG(I - 1) * 40, C - YNG(I + 10) * 10)
NEXT I
FOR I = 1 TO 10
  COLOR 3
  LINE (A + XNG(I) * 40, C - YNG(90) * 10 - C(I)
& * 10)-(A + XNG(I) * 40, C - YNG(90) * 10)
NEXT I
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""

```

Bloque IX. La siguiente serie de instrucciones permite especificar las coordenadas i, j, k de cada elemento. Es decir, le asigna el número de nodo que le corresponde a cada vértice de los elementos triangulares. Esto se realiza mediante ciclos for-next anidados para barrer cada capa $M1$, e internamente, cada uno de los 9 elementos.

```

*****
*** CONFORMACIÓN DE LA TOPOLOGÍA
*** ESPECIFICACIÓN DE LAS COORDENADAS
& I,J,K DE CADA ELEMENTO ****
*****
N = 0
FOR M1 = 1 TO 8
  COLOR 5
  PRINT
  PRINT "M1="; M1
  PRINT : PRINT : PRINT
  FOR Q1 = 1 TO M - 1
    N = N + 1
    EI(N) = N - (M - 2) * (M1 - 1)
    EJ(N) = N - (M - 2) * (M1 - 1) + 1

```

```

EK(N) = N - (M - 2) * (M1 - 1) + M
  COLOR 11
  PRINT "ELEMENTO"; N, "I=NODO";
& EI(N), "J=NODO"; EJ(N), "K=NODO"; EK(N)
  NEXT Q1
  FOR Q2 = 1 TO 9
    N = N + 1
    EI(N) = N - (M - 2) * (M1 - 1) + 2
    EJ(N) = N - (M - 2) * (M1 - 1) + 1
    EK(N) = N - (M - 2) * (M1 - 1) - (M - 2)
    COLOR 14
    PRINT "ELEMENTO"; N, "I=NODO";
& EI(N), "J=NODO"; EJ(N), "K=NODO"; EK(N)
  NEXT Q2
NEXT M1

```

Bloque X. Como siguiente paso procede la construcción de la matriz geométrica [B], la matriz de propiedades físicas [D] y la matriz de rigideces locales [K_e]. Esto se realiza fácilmente con la serie de instrucciones que se muestran a continuación. El cálculo de la matriz [B] se lleva a cabo para cada uno de los 144 elementos, [D] para cada uno de los 4 materiales y [K_e] también para los 144 elementos.

***** CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ
& GEOMÉTRICA DE CADA ELEMENTO *****

```

LOCATE 20, 20
FOR N = 1 TO 144
  PRINT "N="; N
  B(N, 1, 1) = YN(EK(N)) - YN(EJ(N))
  B(N, 1, 2) = 0
  B(N, 1, 3) = YN(EK(N)) - YN(EI(N))
  B(N, 1, 4) = 0
  B(N, 1, 5) = YN(EI(N)) - YN(EJ(N))
  B(N, 1, 6) = 0
  B(N, 2, 1) = 0
  B(N, 2, 2) = YN(EK(N)) - YN(EJ(N))
  B(N, 2, 3) = 0
  B(N, 2, 4) = YN(EI(N)) - YN(EK(N))
  B(N, 2, 5) = 0
  B(N, 2, 6) = YN(EJ(N)) - YN(EI(N))
  B(N, 3, 1) = B(N, 2, 2)
  B(N, 3, 2) = B(N, 1, 1)
  B(N, 3, 3) = B(N, 2, 4)
  B(N, 3, 4) = B(N, 1, 3)
  B(N, 3, 5) = B(N, 2, 6)
  B(N, 3, 6) = B(N, 1, 5)
NEXT N
COLOR 7

```

***** CONSTRUCCIÓN DE LAS MATRICES DE
& PROPIEDADES FÍSICAS, [D] *****

```

FOR I = 1 TO 4
  ENU(I) = E(I) * (1 - NU(I)) / (1 + NU(I)) / (1 - 2
& * NU(I))
  D(I, 1, 1) = 1: D(I, 2, 2) = 1
  D(I, 1, 2) = NU(I) / (1 - NU(I))

```

```

D(I, 2, 1) = D(I, 1, 2)
D(I, 3, 3) = (1 - 2 * NU(I)) / 2 / (1 - NU(I))
COLOR 2: 'PRINT "D"; I, "="
FOR J = 1 TO 3
  FOR K = 1 TO 3
    D(I, J, K) = D(I, J, K) * ENU(I)
    COLOR 8: 'PRINT D(I, J, K)
  NEXT K
PRINT
NEXT J
NEXT I

```

Bloque XI. La transposición de las matrices geométricas y su posterior multiplicación con la matriz de propiedades físicas correspondiente, permiten obtener las matrices de rigidez locales. El siguiente conjunto de instrucciones realiza esta tarea para cada uno de los 144 elementos. Se utilizan ciclos doblemente anidados.

```

'***** CONSTRUCCIÓN DE LAS MATRICES DE
& RIGIDEZ LOCALES *****

FOR N = 1 TO 144
  COLOR 10: 'PRINT "ELEMENTO="; N
  COLOR 8: 'PRINT "[B]T[D]:"
  IF N <= 36 THEN A = 1
  IF N <= 72 THEN A = 2
  IF N <= 108 THEN A = 3
  IF N > 108 THEN A = 4
  FOR Q = 1 TO 3
    FOR R = 1 TO 6
      SUMBTD = 0
      FOR C = 1 TO 3
        SUMBTD = SUMBTD +
& B(N, C, R) * D(A, C, Q)
      NEXT C
      BTD(N, R, Q) = SUMBTD
      COLOR 12: 'PRINT USING
& "##.####"; BTD(N, R, Q); : PRINT "";
    NEXT R
  NEXT Q
  COLOR 5: 'PRINT "MATRIZ DE RIGIDEZ
& LOCAL"
  FOR Q1 = 1 TO 6
    FOR R1 = 1 TO 6
      SUMA = 0
      FOR C1 = 1 TO 3
        SUMA = SUMA + BTD(N, R1,
& C1) * B(N, C1, Q1)
      NEXT C1
      K(N, R1, Q1) = SUMA
      COLOR 12: 'PRINT USING "##.####";
& K(N, R1, Q1); : PRINT "";
    NEXT R1
  NEXT Q1
NEXT N

```

El procedimiento anterior da como resultado el conjunto de ecuaciones locales para los desplazamientos nodales. El paso crítico en la técnica de elemento finito es el ensamblaje, es decir, la obtención del conjunto de ecuaciones simultáneas lineales. La siguiente serie de cálculos realiza dicha globalización

Bloque XII. El procedimiento consiste en la suma de los desplazamientos nodales en los puntos de interconexión de cada elemento. Se distinguen los diferentes tipos de elementos y se especifican en cada comentario previo al cálculo. La identificación de dichos tipos de elementos da la posibilidad de generalizar los cálculos para hacer menos extensa la serie de instrucciones.

Se imprime como resultado, la **topología**, es decir, el número de nodo, sus elementos vecinos y sus nodos vecinos.

Se construyen, para cada uno de los 90 nodos y 2 desplazamientos (horizontal y vertical), un conjunto de 180 ecuaciones y 180 incógnitas, donde los términos diferentes de cero de la iésima ecuación corresponden a los coeficientes de los desplazamientos horizontal y vertical del nodo i y sus 6 primeros vecinos más cercanos. Los coeficientes de cada ecuación se guardan en las submatrices de rigidez globalizadas [KG], una para cada línea horizontal de la malla de elementos finitos. Esto se hizo para no tener que utilizar una matriz de 180 por 180 que Qbasic no maneja, además de que se consigue eficientar en parte el uso de la memoria.

```

'*****
***** ENSAMBLAJE *****
*****
** *NODO ESQUINA INFERIOR IZQUIERDA ***
nivel = 0
N1 = 1
NODO = N1 + nivel * 10
X(1) = N1 - 1; X(2) = N1; X(3) = N1 + 1; X(4) =
& N1 - 10; X(5) = N1 - 9; X(6) = N1 + 9; X(7) = N1 +
& 10
AA = NODO + 8 * INT(NODO / 10);
BB = AA - 9; CC = AA - 18; DD = AA - 10;
EE = AA - 1; FF = AA + 8
COLOR 3
PRINT "ELEMENTOS VECINOS="; AA
PRINT "NODOS VECINOS="
FOR H = 1 TO 7
IF H = 2 OR H = 3 OR H = 7 THEN
XD = X(H) + nivel * 10
PRINT XD,
ELSE
END IF
NEXT H: PRINT
*****
*****

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2 - 1) = K(AA, 1, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2) = K(AA, 1, 2)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2 - 1) = K(AA, 2, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2) = K(AA, 2, 2)
*****
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(3) * 2 - 1) = K(AA, 1, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(3) * 2) = K(AA, 1, 4)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(3) * 2 - 1) = K(AA, 2, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(3) * 2) = K(AA, 2, 4)
*****
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2 - 1) = K(AA, 1, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2) = K(AA, 1, 6)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2 - 1) = K(AA, 2, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2) = K(AA, 2, 6)
FOR H = 1 TO 7
  COLOR 4
  NEXT H
BEEP
'***** NODOS ORILLA INFERIOR
nivel = 0
FOR N1 = 2 TO 9
  NODO = N1 + nivel * 10
  X(1) = N1 - 1: X(2) = N1: X(3) = N1 + 1: X(4) =
& N1 - 10: X(5) = N1 - 9: X(6) = N1 + 9: X(7) = N1 +
& 10
  AA = NODO + 8 * INT(NODO / 10):
  BB = AA - 9: CC = AA - 18: DD = AA - 10:
  EE = AA - 1: FF = AA + 8
  COLOR 3
  PRINT "Elementos vecinos="; AA, EE, FF
  PRINT "NODOS VECINOS="
  FOR H = 1 TO 7
    IF H = 1 OR H = 2 OR H = 3 OR H = 6 OR
& H = 7 THEN
      XD = X(H) + nivel * 10
      PRINT XD
    ELSE
      END IF
  NEXT H: PRINT
'*****
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(1) * 2 - 1) = K(EE, 3, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(1) * 2) = K(EE, 3, 2)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(1) * 2 - 1) = K(EE, 4, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(1) * 2) = K(EE, 4, 2)
*****
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2 - 1) = K(AA,
&1, 1) + K(FF, 5, 5) + K(EE, 3, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2) = K(AA, 1, 2)
&+ K(FF, 5, 6) + K(EE, 3, 4)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2 - 1) = K(AA, 2, 1)
&+ K(FF, 6, 5) + K(EE, 4, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2) = K(AA, 2, 2) +
&K(FF, 6, 6) + K(EE, 4, 4)
*****
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(3) * 2 - 1) = K(AA, 1, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(3) * 2) = K(AA, 1, 4)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(3) * 2 - 1) = K(AA, 2, 3)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(3) * 2) = K(AA, 2, 4)
*****
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(6) * 2 - 1) = K(FF, 5,
&3) + K(EE, 3, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(6) * 2) = K(FF, 5, 4)
&+ K(EE, 3, 6)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(6) * 2 - 1) = K(FF, 6, 3)
&+ K(EE, 4, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(6) * 2) = K(FF, 6, 4) +
&K(EE, 4, 6)
*****
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2 - 1) = K(AA,
&1, 5) + K(FF, 5, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2) = K(AA, 1, 6)
&+ K(FF, 5, 2)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2 - 1) = K(AA, 2, 5)
&+ K(FF, 6, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2) = K(AA, 2, 6) +
&K(FF, 6, 2)
NEXT N1
'*** NODO ESQUINA DERECHA INFERIOR
nivel = 0
N1 = 10
NODO = N1 + nivel * 10
X(1) = N1 - 1: X(2) = N1: X(3) = N1 + 1: X(4) =
& N1 - 10: X(5) = N1 - 9: X(6) = N1 + 9: X(7) = N1 +
& 10
AA = NODO + 8 * INT(NODO / 10) - 8:
BB = AA - 9: CC = AA - 18: DD = AA - 10:
EE = AA - 1: FF = AA + 8
COLOR 5
PRINT "NODO="; NODO
COLOR 6
PRINT "ELEMENTOS VECINOS="; EE, FF
COLOR 3
PRINT "NODOS VECINOS="
FOR H = 1 TO 7
  IF H = 1 OR H = 2 OR H = 6 OR H = 7 THEN
    XD = X(H) + nivel * 10
    PRINT XD,
  ELSE
    END IF
NEXT H: PRINT
'*****
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(1) * 2 - 1) = K(EE, 3, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(1) * 2) = K(EE, 3, 2)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(1) * 2 - 1) = K(EE, 4, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(1) * 2) = K(EE, 4, 2)
*****
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2 - 1) = K(FF, 5, 5) +
&K(EE, 3, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2) = K(FF, 5, 6) +
&K(EE, 3, 4)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2 - 1) = K(FF, 6, 5) +
&K(EE, 4, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2) = K(FF, 6, 6) + K(EE,
&4, 4)
*****
'*****

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(6) * 2 - 1) = K(FF, 5, 3) +
&K(EE, 3, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(6) * 2) = K(FF, 5, 4) +
&K(EE, 3, 6)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(6) * 2 - 1) = K(FF, 6, 3) +
&K(EE, 4, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(6) * 2) = K(FF, 6, 4) + K(EE,
&4, 6)
'*****

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2 - 1) = K(FF, 5, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2) = K(FF, 5, 2)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2 - 1) = K(FF, 6, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2) = K(FF, 6, 2)

```

***** NODOS INTERNOS Y LATERALES

FOR nivel = 1 TO 7

*** NODOS ORILLA LATERAL IZQUIERDA

N1 = 1

NODO = N1 + nivel * 10

X(1) = N1 - 1: X(2) = N1: X(3) = N1 + 1: X(4) =

&N1 - 10: X(5) = N1 - 9: X(6) = N1 + 9: X(7) = N1 +

&10

FOR G = 1 TO 7

X(G) = X(G) + 10

NEXT G

AA = NODO + 8 * INT(NODO / 10):

BB = AA - 9: CC = AA - 18: DD = AA - 10:

EE = AA - 1: FF = AA + 8

COLOR 5

PRINT "NODO="; NODO

COLOR 6

PRINT "ELEMENTOS VECINOS="; AA, BB,

&CC

COLOR 3

PRINT "NODOS VECINOS="

FOR H = 1 TO 7

IF H = 3 OR H = 2 OR H = 4 OR H = 5 OR H = 7

THEN

XD = X(H)

PRINT XD,

ELSE

END IF

NEXT H: PRINT

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2 - 1) = K(AA, 1, 1) +
&K(CC, 5, 5) + K(BB, 3, 3)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2) = K(AA, 1, 2) +
&K(CC, 5, 6) + K(BB, 3, 4)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2 - 1) = K(AA, 2, 1) +
&K(CC, 6, 5) + K(BB, 4, 3)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2) = K(AA, 2, 2) +
&K(CC, 6, 6) + K(BB, 4, 4)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(3) * 2 - 1) = K(BB, 3, 1) +
&K(AA, 1, 3)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(3) * 2) = K(BB, 3, 2) +
&K(AA, 1, 4)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(3) * 2 - 1) = K(BB, 4, 1) +
&K(AA, 2, 3)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(3) * 2) = K(BB, 4, 2) +
&K(AA, 2, 4)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(4) * 2 - 1) = K(CC, 5, 1)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(4) * 2) = K(CC, 5, 2)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(4) * 2 - 1) = K(CC, 6, 1)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(4) * 2) = K(CC, 6, 2)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(5) * 2 - 1) = K(CC, 5, 3) +
&K(BB, 3, 5)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(5) * 2) = K(CC, 5, 4) +
&K(BB, 3, 6)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(5) * 2 - 1) = K(CC, 6, 3) +
&K(BB, 4, 5)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(5) * 2) = K(CC, 6, 4) +
&K(BB, 4, 6)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2 - 1) = K(AA, 1, 5)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2) = K(AA, 1, 6)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2 - 1) = K(AA, 2, 5)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2) = K(AA, 2, 6)

```

***** NODOS INTERNOS

FOR N1 = 2 TO 9

PRINT "N1="; N1

NODO = N1 + nivel * 10

X(1) = N1 - 1: X(2) = N1: X(3) = N1 + 1: X(4) =

&N1 - 10: X(5) = N1 - 9: X(6) = N1 + 9: X(7) = N1 +

&10

FOR G = 1 TO 7: X(G) = X(G) + 10: NEXT G

AA = NODO + 8 * INT(NODO / 10):

BB = AA - 9: CC = AA - 18: DD = AA - 10:

EE = AA - 1: FF = AA + 8

COLOR 4

PRINT "NODO="; NODO

COLOR 3

PRINT "ELEMENTOS VECINOS="; AA, BB,

&CC, DD, EE, FF

COLOR 3

PRINT "NODOS VECINOS="

FOR H = 1 TO 7

XD = X(H) + nivel * 10 - 10

PRINT XD,

NEXT H: PRINT

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(1) * 2 - 1) = K(EE, 3, 1) +
&K(DD, 1, 3)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(1) * 2) = K(EE, 3, 2) +
&K(DD, 1, 4)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(1) * 2 - 1) = K(EE, 4, 1) +
&K(DD, 2, 3)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1, X(1) * 2) = K(EE, 4, 2) +
&K(DD, 2, 4)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2 - 1) = K(AA, 1, 1) +
&K(FF, 5, 5) + K(EE, 3, 3) + K(DD, 1, 1) + K(CC, 5,
&5) + K(BB, 3, 3)

```

```

KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2) = K(AA, 1, 2) +
&K(FF, 5, 6) + K(EE, 3, 4) + K(DD, 1, 2) + K(CC, 5,
&6) + K(BB, 3, 4)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2 - 1) = K(AA, 2, 1) +
&K(FF, 6, 5) + K(EE, 4, 3) + K(DD, 2, 1) + K(CC, 6,
5) &+ K(BB, 4, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2) = K(AA, 2, 2) + K(FF,
&6, 6) + K(EE, 4, 4) + K(DD, 2, 2) + K(CC, 6, 6) +
&K(BB, 4, 4)
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(3) * 2 - 1) = K(BB, 3, 1) +
&K(AA, 1, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(3) * 2) = K(BB, 3, 2) +
&K(AA, 1, 4)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(3) * 2 - 1) = K(BB, 4, 1) +
&K(AA, 2, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(3) * 2) = K(BB, 4, 2) +
&K(AA, 2, 4)
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(4) * 2 - 1) = K(CC, 5, 1) +
&K(DD, 1, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(4) * 2) = K(CC, 5, 2) +
&K(DD, 1, 6)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(4) * 2 - 1) = K(CC, 6, 1) +
&K(DD, 2, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(4) * 2) = K(CC, 6, 2) +
&K(DD, 2, 6)
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(5) * 2 - 1) = K(CC, 5, 3) +
&K(BB, 3, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(5) * 2) = K(CC, 5, 4) +
&K(BB, 3, 6)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(5) * 2 - 1) = K(CC, 6, 3) +
&K(BB, 4, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(5) * 2) = K(CC, 6, 4) +
&K(BB, 4, 6)
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(6) * 2 - 1) = K(FF, 5, 3) +
&K(EE, 3, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(6) * 2) = K(FF, 5, 4) +
&K(EE, 3, 6)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(6) * 2 - 1) = K(FF, 6, 3) +
&K(EE, 4, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(6) * 2) = K(FF, 6, 4) + K(EE,
&4, 6)
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2 - 1) = K(AA, 1, 5) +
&K(FF, 5, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2) = K(AA, 1, 6) +
&K(FF, 5, 2)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2 - 1) = K(AA, 2, 5) +
&K(FF, 6, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2) = K(AA, 2, 6) + K(FF,
&6, 2)
NEXT N1

```

```
'***** NODOS ORILLA LATERAL DERECHA
```

```
N1 = 10
```

```
NODO = N1 + nivel * 10
```

```

X(1) = N1 - 1: X(2) = N1: X(3) = N1 + 1: X(4) =
&N1 - 10: X(5) = N1 - 9: X(6) = N1 + 9: X(7) = N1 +
&10

```

```

FOR G = 1 TO 7: X(G) = X(G) + 10: NEXT G
AA = NODO + 8 * INT(NODO / 10) - 8:
BB = AA - 9: CC = AA - 18: DD = AA - 10:
EE = AA - 1: FF = AA + 8
COLOR 6
PRINT "NODO="; NODO
COLOR 5
PRINT "Elementos vecinos="; DD, EE, FF
COLOR 3
PRINT "NODOS VECINOS="
FOR H = 1 TO 7
IF H = 1 OR H = 2 OR H = 4 OR H = 6 OR H = 7
THEN
XD = X(H) + nivel * 10 - 10
PRINT XD,
ELSE
END IF
NEXT H: PRINT
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(1) * 2 - 1) = K(EE, 3, 1) +
&K(DD, 1, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(1) * 2) = K(EE, 3, 2) +
&K(DD, 1, 4)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(1) * 2 - 1) = K(EE, 4, 1) +
&K(DD, 2, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(1) * 2) = K(EE, 4, 2) +
&K(DD, 2, 4)
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2 - 1) = K(FF, 5, 5) +
&K(EE, 3, 3) + K(DD, 1, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2) = K(FF, 5, 6) +
&K(EE, 3, 4) + K(DD, 1, 2)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2 - 1) = K(FF, 6, 5) +
&K(EE, 4, 3) + K(DD, 2, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2) = K(FF, 6, 6) + K(EE,
&4, 4) + K(DD, 2, 2)
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(4) * 2 - 1) = K(DD, 1, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(4) * 2) = K(DD, 1, 6)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(4) * 2 - 1) = K(DD, 2, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(4) * 2) = K(DD, 2, 6)
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(6) * 2 - 1) = K(FF, 5, 3) +
&K(EE, 3, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(6) * 2) = K(FF, 5, 4) +
&K(EE, 3, 6)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(6) * 2 - 1) = K(FF, 6, 3) +
&K(EE, 4, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(6) * 2) = K(FF, 6, 4) + K(EE,
&4, 6)
'*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2 - 1) = K(FF, 5, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(7) * 2) = K(FF, 5, 2)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2 - 1) = K(FF, 6, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(7) * 2) = K(FF, 6, 2)
NEXT nivel

```



```

*** NODO ESQUINA SUPERIOR DERECHA ***
nivel = 8
N1 = 10
NODO = N1 + nivel * 10
X(1) = N1 - 1; X(2) = N1; X(3) = N1 + 1;
X(4) = N1 - 10; X(5) = N1 - 9; X(6) = N1 + 9;
X(7) = N1 + 10
FOR G = 1 TO 7: X(G) = X(G) + 10: NEXT G
AA = NODO + 8 * INT(NODO / 10) - 8;
BB = AA - 9; CC = AA - 18; DD = AA - 10;
EE = AA - 1; FF = AA + 8
COLOR 1
PRINT "NODO="; NODO
COLOR 11
PRINT "ELEMENTOS VECINOS="; DD
COLOR 3
PRINT "NODOS VECINOS="
FOR H = 1 TO 7
IF H = 1 OR H = 2 OR H = 4 THEN
XD = X(H) + nivel * 10 - 10
PRINT XD,
ELSE
END IF
NEXT H: PRINT

```

```

*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(1) * 2 - 1) = K(DD, 1, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(1) * 2) = K(DD, 1, 4)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(1) * 2 - 1) = K(DD, 2, 3)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(1) * 2) = K(DD, 2, 4)
*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2 - 1) = K(DD, 1, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(2) * 2) = K(DD, 1, 2)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2 - 1) = K(DD, 2, 1)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(2) * 2) = K(DD, 2, 2)
*****
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(4) * 2 - 1) = K(DD, 1, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1 - 1, X(4) * 2) = K(DD, 1, 6)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(4) * 2 - 1) = K(DD, 2, 5)
KG(nivel + 1, 2 * N1, X(4) * 2) = K(DD, 2, 6)
*****

```

Bloque XIII. Una vez construida la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones simultáneas en el paso anterior, se procede a construir el vector de términos independientes que especifica las cargas nodales. Este vector contiene las cargas debidas a los esfuerzos de compresión que generan los vehículos en la superficie y, para los nodos internos, el efecto del peso de las cargas superiores.

```

*****
***** CONDICIONES DE FRONTERA *****
*****
FOR I = 1 TO 10
BL(I * 2 + 160) = C(I)
CAR(80 + I) = C(I)
PRINT "CARGA VERTICAL EN EL NODO"; I;
"DE SUPERFICIE"; BL(2 * I + 160)
NEXT I

```

```

***** cargas en nodos internos *****
FOR I = 1 TO 90
IF I <= 10 THEN CAR(2 * I) = RO4 * 2 * H4 +
&RO3 * 2 * H3 + RO2 * 2 * H2 + RO1 * 2 * H1
IF I <= 20 THEN CAR(2 * I) = RO4 * 1 * H4 +
&RO3 * 2 * H3 + RO2 * 2 * H2 + RO1 * 2 * H1
IF I <= 30 THEN CAR(2 * I) = RO3 * 2 * H3 +
&RO2 * 2 * H2 + RO1 * 2 * H1
IF I <= 40 THEN CAR(2 * I) = RO3 * 1 * H3 +
&RO2 * 2 * H2 + RO1 * 2 * H1
IF I <= 50 THEN CAR(2 * I) = RO2 * 2 * H2 +
&RO1 * 2 * H1
IF I <= 60 THEN CAR(2 * I) = RO2 * 1 * H2 +
&RO1 * 2 * H1
IF I <= 70 THEN CAR(2 * I) = RO1 * 2 * H1
IF I <= 80 THEN CAR(2 * I) = RO1 * 1 * H1
NEXT I
PRINT

```

Bloque XIV. Resolución del sistema de ecuaciones simultáneas. El método iterativo de Gauss-Seidel con relajación es el de mayor uso en la resolución de ecuaciones lineales del tipo banda predominantemente diagonal. Se sabe que con los métodos de Gauss-Seidel o de Jacobi, un sistema de ecuaciones banda predominantemente diagonal converge para cualesquiera valores iniciales que se les asigne a las incógnitas, aún sin factor de relajación. Pero para matrices banda no predominantemente diagonal el caso es distinto, y para lograr convergencia es necesario utilizar un factor de relajación menor a uno, necesitándose además de una gran cantidad de iteraciones. El número de iteraciones bajo el que se observó convergencia de todos los desplazamientos nodales es de 100 con un porcentaje de error menor al 0.1 por ciento en todos los casos, por lo que es el número de iteraciones máximo que se considera. El ciclo de iteraciones se construye con la instrucción Goto 2617 y se detiene cuando el contador it = 110. Esta condición aparece al final de la subrutina.

```

*** Resolución del Sistema de Ecuaciones ***
*****
*** Inicialización de los desplazamientos ***
FOR I = 1 TO 180
U(I, 1) = 0
NEXT I
*****
*** Método de Gauss-Seidel ***
*****
*** Cálculo de desplazamientos en la Superficie ***
2617
K = 9: nivel = 8
FOR I = 1 TO 20
SUMACOE = 0: SUMA2 = 0
FOR J = 1 TO 40
IF J < 20 + I THEN
SUMA2 = SUMA2 + ABS(KG(K, I, J))
SUMACOE = SUMACOE + KG(K, I, J)
&* U(J + nivel * 20 - 20, 1)

```

```

        COLOR 3
        ELSE
        END IF
    NEXT J
    U(I + 160, 2) = U(I + 160, 1)
    U(I + 160, 1) = (BL(nivel * 20 + I) -
&SUMACOE) / KG(K, I, 20 + I)
    IF IT > 20 THEN
        U(I + 160, 1) = .1 * U(I + 160, 1) + .9 * U(I +
&160, 2)
    ELSE
        U(I + 160, 1) = .4 * U(I + 160, 1) + .6 * U(I +
&160, 2)
    END IF
    IF U(I + 160, 1) < 0 THEN
        RESIDUO = RESIDUO + SQR((ABS(U(I + 160,
&2) - U(I + 160, 1) / U(I + 160, 1))) ^ 2)
    ELSE
    END IF
    NEXT I
'*****
'***** NIVELES INTERMEDIOS *****
'*****
FOR K = 8 TO 2 STEP -1
    nivel = K - 1
    FOR I = 1 TO 20
        SUMACOE = 0: SUMA2 = 0
        FOR J = 1 TO 60
            IF J < 20 + I THEN
                SUMA2 = SUMA2 + ABS(KG(K, I, J))
                SUMACOE = SUMACOE + KG(K, I, J)
&* U(J + nivel * 20 - 20, 1)
            ELSE
            END IF
        NEXT J
        U(I + nivel * 20, 2) = U(I + nivel * 20, 1)
        U(I + nivel * 20, 1) = (CAR(nivel * 20 + I) -
&SUMACOE) / KG(K, I, 20 + I)
        IF IT > 20 THEN
            U(I + nivel * 20, 1) = .1 * U(I + nivel * 20, 1) + .9
&* U(I + nivel * 20, 2)
        ELSE
            U(I + nivel * 20, 1) = .4 * U(I + nivel * 20, 1) + .6 * U(I +
&160, 2)
        END IF
        IF U(I + nivel * 20, 1) < 0 THEN
            RESIDUO = RESIDUO + SQR((ABS(U(I + nivel
&* 20, 2) - U(I + nivel * 20, 1) / U(I + nivel * 20, 1)))
&^ 2)
        ELSE
        END IF
    NEXT I
NEXT K
'*****
'***** NIVEL INFERIOR
'*****
K = 1: nivel = 0
    FOR I = 1 TO 20
        SUMACOE = 0: SUMA2 = 0
        FOR J = 1 TO 40

```

```

        IF J < I THEN
            SUMA2 = SUMA2 + ABS(KG(K, I, J))
            SUMACOE = SUMACOE + KG(K,
&I, J) * U(J + nivel * 20, 1)
        ELSE
        END IF
    NEXT J
    U(I, 2) = U(I, 1)
    U(I, 1) = (CAR(nivel * 20 + I) - SUMACOE) /
&KG(K, I, I)
    IF IT > 20 THEN
        U(I, 1) = .1 * U(I, 1) + .9 * U(I, 2)
    ELSE
        U(I, 1) = .4 * U(I, 1) + .6 * U(I, 2)
    END IF
    IT = IT + 1
    PRINT "ITERACIÓN="; IT
    SUMCOC = 0
    FOR I = 1 TO 180
        IF U(I, 1) < 0 THEN
            COCIENT = U(I, 2) / U(I, 1)
        ELSE
        END IF
        IF COCIENT < 1.01 AND COCIENT > .99
    THEN
        SUMCOC = SUMCOC + 1
        ELSE
        END IF
    NEXT I
    PRINT "SUMCOC="; SUMCOC
    BEEP
    IF SUMCOC = 180 THEN GOTO 2714
    IF IT < 150 THEN
        GOTO 2617
    ELSE
    END IF
    2714 BEEP: : BEEP: PRINT "ITERACIÓN="; IT
    DO
    LOOP WHILE INKEY$ = ""
    PRINT "CARPETA="; CARPETA; "BASE=";
&BASE; "SUBBASE="; SUBBASE
    PRINT "DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES Y
&VERTICALES"
    IF IT = 1 THEN 2814
    FOR I = 1 TO 90
        PRINT "U"; I; "HORIZONTAL="; U(I * 2 - 1, 2),
&"U"; I; "VERTICAL="; U(I * 2, 1)
    NEXT I

```

Bloque XV. Una vez obtenidos los desplazamientos nodales se procede al cálculo de las deformaciones nodales por medio de la multiplicación de la matriz geométrica [B] por el vector de desplazamientos de cada elemento, cuyos componentes son los desplazamientos horizontal y vertical de cada uno de los nodos i, j y k de los vértices de cada elemento. La siguiente serie de instrucciones lleva a cabo esta tarea. También se calculan los desplazamientos nodales en el ciclo k que se indica antes de cerrar el ciclo i.

```

PRINT "DEFORMACIONES NODALES
& (EX,EY,GAMMA)"
FOR I = 1 TO 143
  DEFOR(I, 1, 1) = U(2 * EI(I) + 1, 1)
  DEFOR(I, 2, 1) = U(2 * EI(I), 1)
  DEFOR(I, 3, 1) = U(2 * EJ(I) + 1, 1)
  DEFOR(I, 4, 1) = U(2 * EJ(I), 1)
  DEFOR(I, 5, 1) = U(2 * EK(I) + 1, 1)
  DEFOR(I, 6, 1) = U(2 * EK(I), 1)
  SUMEX = 0: SUMEY = 0: SUMGAMA = 0
  FOR K = 1 TO 6
    SUMEX = SUMEX + B(I, 1, K) * DEFOR(I,
&K, 1)
    SUMEY = SUMEY + B(I, 2, K) * DEFOR(I,
&K, 1)
    SUMGAMA = SUMGAMA + B(I, 3, K) *
&DEFOR(I, K, 1)
  NEXT K
  DEFORMA(I, 1) = SUMEX: DEFORMA(I, 2) =
&SUMEY: DEFORMA(I, 3) = SUMGAMA
  EX(I) = SUMEX: EY(I) = SUMEY: GAMA(I) =
&SUMGAMA
  PRINT "*****"
  DO
  LOOP WHILE INKEY$ = ""
  PRINT "ELEM="; I
  PRINT EX(I), EY(I), GAMA(I)
NEXT I

```

Bloque XVI. En seguida se calculan los esfuerzos nodales multiplicando la matriz de propiedades físicas por la matriz columna de deformaciones. También se calculan los desplazamientos horizontales y verticales:

```

LPRINT "ESFUERZOS NODALES"
FOR I = 1 TO 144
  IF I <= 36 THEN R = 1
  IF I <= 72 THEN R = 2
  IF I <= 108 THEN R = 3
  FOR K = 1 TO 3
    SIGMA11 = SIGMA11 + D(R, 1, K) *
&DEFORMA(K, 1)
    SIGMA22 = SIGMA22 + D(R, 2, K) *
&DEFORMA(K, 1)
    SIGMA33 = SIGMA33 + D(R, 3, K) *
&DEFORMA(K, 1)
  NEXT K
  SIGMA1(I) = SIGMA11: SIGMA2(I) =
&SIGMA22: SIGMA3(I) = SIGMA33
  PRINT "SIGMA1="; SIGMA1(I); "SIGMA2=";
&SIGMA2(I); "SIGMA3="; SIGMA3(I)
2814 N = 0
IT = 0
NEXT I
FOR capa = 1 TO 9
  FOR I = 1 TO 10
    YGRAF(capa, I) = U((I * 2 - 1) + capa * I, 2)
  NEXT I
NEXT capa
GOSUB 4000
LOCATE 2, 17: PRINT "DESPLAZAMIENTOS
&HORIZONTALES";

```

```

DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
FOR capa = 1 TO 9
  FOR I = 1 TO 10
    YGRAF(capa, I) = U((I * 2) + capa * I, 2)
  NEXT I
NEXT capa
GOSUB 4000
LOCATE 2, 17: PRINT "DESPLAZAMIENTOS
&VERTICALES";
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
GOTO 4217

```

Bloque XVII. Por último se procede a la graficación de las variables de interés, lo cual se lleva a cabo mediante las siguientes subrutinas. Se construyen las gráficas de :

Impresión de Resultados.

- Gráfica de desplazamientos Horizontales
- Gráfica de desplazamientos verticales.
- Gráfica de deformaciones horizontales.
- Gráfica de deformaciones verticales
- Gráfica de deformaciones tangenciales.
- Gráfica de esfuerzos normales
- Gráfica de esfuerzos cortantes.

```

'*****
'***** SUBROUTINA DE GRAFICACIÓN
'*****
4000 CLS
XMAX = 10 * 9: XMIN = 0
DELTAX = (XMAX - XMIN) / 10
FOR capa = 1 TO 9
  FOR J = 1 TO 10
    XGRAF(capa, J) = xn(J) + L * capa
  NEXT J
NEXT capa
'OBTENCIÓN DE LOS VALORES EXTREMOS DE
&LA FUNCIÓN
YMIN = YGRAF(1, 1): YMAX = YGRAF(1, 1)
FOR I = 1 TO 9
  FOR J = 1 TO 10
    IF YMIN > YGRAF(I, J) THEN YMIN =
&YGRAF(I, J)
    IF YMAX < YGRAF(I, J) THEN YMAX =
&YGRAF(I, J)
  NEXT J
NEXT I
'ESPECIFICACIÓN DEL INTERVALO DE
&GRAFICACIÓN.
xmingraf = 0: XMAXGRAF = 10 * 9
YMINGRAF = YMIN: YMAXGRAF = YMAX
scalex = 1: SCALEY = .1
SCREEN 8
CLS
LINE (80, 30)-(80, 169): LINE (80, 30)-(499, 30):
LINE (80, 169)-(499, 169): LINE (499, 30)-(499, 169)
PASX = XMAXGRAF + ABS(xmingraf)

```

```

PASY = YMAXGRAF + ABS(YMINGRAF)
EJEY = 80 + (499 - 80) / PASX * ABS(xmingraf)
EJEX = 30 + (169 - 30) / PASY * YMAXGRAF
COLOR 4
LINE (EJEY, 30)-(EJEY, 169)
LINE (80, EJEX)-(499, EJEX)
REM normalizacion de escala
NY = INT(PASY / SCALEY)
NX = INT(PASX / scalex)
DIVX(1) = 80: DIVY(1) = 169
FOR J = 1 TO 10
  FOR I = 1 TO 9
    XNGRAF(I, J) = XGRAF(I, J) * (499 - 80) /
&PASX + EJEY
    LINE (XNGRAF(2, J), 30)-(XNGRAF(2, J), 24)
    LINE (XNGRAF(2, J), 166)-(XNGRAF(2, J),
&169)
  NEXT I
NEXT J
NYMENOS = INT(ABS(169 - EJEX) / 100 / PASY)
NYMAS = INT(ABS(30 - EJEX) / 100 / PASY)
GOTO 2614
FOR J = 1 TO NYMENOS
  DIVY(J) = -EJEX - J * SCALEY * (169 - 30) /
&PASY
  LINE (EJEY - 3, DIVY(J))-(EJEY + 3, DIVY(J))
  LINE (80, DIVY(J))-(83, DIVY(J))
  LINE (556, DIVY(J))-(499, DIVY(J))
NEXT J
FOR J = 1 TO NYMAS
  DIVY(J) = -EJEX - J * SCALEY * (169 - 30) /
&PASY
  LINE (EJEY - 3, DIVY(J))-(EJEY + 3, DIVY(J))
  LINE (80, DIVY(J))-(83, DIVY(J))
  LINE (556, DIVY(J))-(499, DIVY(J))
NEXT J
2614
FOR J = 1 TO 10
  IF J < 14 THEN COLOR J + 1, 1 ELSE COLOR
&J - 14, 1
  FOR I = 1 TO 9
    XNGRAF(I, J) = XGRAF(I, J) * (499 - 80) /
&PASX + EJEY
    YNGRAF(I, J) = -YGRAF(I, J) * (169 - 30) /
&PASY + EJEX
    PSET (XNGRAF(I, J) - 1, YNGRAF(I, J) + 1)
    PSET (XNGRAF(I, J) - 1, YNGRAF(I, J))
    PSET (XNGRAF(I, J) - 1, YNGRAF(I, J) - 1)
    PSET (XNGRAF(I, J), YNGRAF(I, J) + 1)
    PSET (XNGRAF(I, J), YNGRAF(I, J))
    PSET (XNGRAF(I, J), YNGRAF(I, J) - 1)
    PSET (XNGRAF(I, J) + 1, YNGRAF(I, J) + 1)
    PSET (XNGRAF(I, J) + 1, YNGRAF(I, J))
    PSET (XNGRAF(I, J) + 1, YNGRAF(I, J) - 1)
  NEXT I
NEXT J
FOR I = 1 TO 9
  FOR capa = 1 TO 9
    LINE (XNGRAF(capa, I), YNGRAF(capa, I))-
&(XNGRAF(capa, I + 1), YNGRAF(capa, I + 1))

```

```

NEXT capa
NEXT I
LOCATE 21, 4: PRINT USING "#.####";
&YMINGRAF
LOCATE 5, 4: PRINT USING "#.####";
&YMAXGRAF
LOCATE 7, 65: PRINT "ACOTACIONES"
FOR capa = 1 TO 9
  LOCATE capa + 8, 65: COLOR capa + 1: PRINT
&"INTERFASE"; capa
NEXT capa
RETURN
4217
FOR J = 1 TO 144
  YGRAFI(J) = EX(J)
NEXT J
GOSUB 4727
LOCATE 2, 30: PRINT "DEFORMACIONES
&HORIZONTALES"
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
FOR J = 1 TO 144
  YGRAFI(J) = EY(J)
NEXT J
GOSUB 4727
LOCATE 2, 30: PRINT "DEFORMACIONES
&VERTICALES"
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
FOR J = 1 TO 144
  YGRAFI(J) = GAMA(J)
NEXT J
GOSUB 4727
LOCATE 2, 30: PRINT "DEFORMACIONES
&TANGENCIALES"
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
FOR J = 1 TO 144
  YGRAFI(J) = SIGMA1(J)
NEXT J
GOSUB 4727
LOCATE 2, 30: PRINT "ESFUERZOS
&LONGITUDINALES EN X"
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
FOR J = 1 TO 144
  YGRAFI(J) = SIGMA2(J)
NEXT J
GOSUB 4727
LOCATE 2, 30: PRINT "ESFUERZOS
&LONGITUDINALES EN Y"
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
FOR J = 1 TO 144
  YGRAFI(J) = SIGMA3(J)
NEXT J
GOSUB 4727
LOCATE 2, 30: PRINT "ESFUERZOS
&TANGENCIALES"
DO

```

```

LOOP WHILE INKEY$ = ""
GOTO 4828
4727
'*****
'***** SUBROUTINA DE GRAFICACIÓN 2
'*****
CLS
XMAX = 144: XMIN = 0
DELTAX = (XMAX - XMIN) / 144
  FOR J = 1 TO 144
    XGRAFI(J) = J
  NEXT J
'OBTENCIÓN DE LOS VALORES EXTREMOS DE
&LA FUNCIÓN
YMIN = YGRAFI(1): YMAX = YGRAFI(1)
FOR I = 1 TO 144

  IF YMIN > YGRAFI(I) THEN YMIN =
&YGRAFI(I)
  IF YMAX < YGRAFI(I) THEN YMAX =
&YGRAFI(I)
NEXT I
'ESPECIFICACIÓN DEL INTERVALO DE
&GRAFICACIÓN.
xmingraf = 0: XMAXGRAF = 144
YMINGRAF = YMIN: YMAXGRAF = YMAX
scalex = 9: SCALEY = .001
SCREEN 8
CLS
LINE (80, 30)-(80, 169): LINE (80, 30)-(499, 30):
LINE (80, 169)-(499, 169): LINE (499, 30)-(499, 169)
PASX = XMAXGRAF + ABS(xmingraf)
PASY = YMAXGRAF + ABS(YMINGRAF)
EJEY = 80 + (499 - 80) / PASX * ABS(xmingraf)
EJEX = 30 + (169 - 30) / PASY * YMAXGRAF
LINE (EJEY, 30)-(EJEY, 169)
LINE (80, EJEX)-(499, EJEX)
REM normalización de escala
NY = INT(PASY / SCALEY)
NX = INT(PASX / scalex)
DIVX(1) = 80: DIVY(1) = 169
FOR I = 1 TO 144
  XNGraFI(I) = XGRAFI(I) * (499 - 80) / PASX +
&EJEY

NEXT I
FOR I = 1 TO 144
  XNGraFI(I) = XGRAFI(I) * (499 - 80) / PASX +
&EJEY
  YNGRAFI(I) = -YGRAFI(I) * (169 - 30) / PASY
&+ EJEX
  PSET (XNGraFI(I) - 1, YNGRAFI(I) + 1), INT(I
&/ 36 + 2)
  PSET (XNGraFI(I) - 1, YNGRAFI(I)), INT(I / 36
&+ 2)
  PSET (XNGraFI(I) - 1, YNGRAFI(I) - 1), INT(I /
&36 + 2)
  PSET (XNGraFI(I), YNGRAFI(I) + 1), INT(I / 36
&+ 2)

```

```

  PSET (XNGraFI(I), YNGRAFI(I)), INT(I / 36 +
&2)
  PSET (XNGraFI(I), YNGRAFI(I) - 1), INT(I / 36
&+ 2)
  PSET (XNGraFI(I) + 1, YNGRAFI(I) + 1), INT(I
&/ 36 + 2)
  PSET (XNGraFI(I) + 1, YNGRAFI(I)), INT(I / 36
&+ 2)
  PSET (XNGraFI(I) + 1, YNGRAFI(I) - 1), INT(I
&/ 36 + 2)
NEXT I

FOR I = 1 TO 143
  LINE (XNGraFI(I), YNGRAFI(I))-(XNGraFI(I +
&1), YNGRAFI(I + 1))
NEXT I
LOCATE 21, 4: PRINT USING "#.####";
YMINGRAF
LOCATE 5, 4: PRINT USING "#.####";
YMAXGRAF
LOCATE 7, 65: PRINT "ACOTACIONES"
FOR capa = 1 TO 4
  LOCATE capa + 8, 65: COLOR capa + 1: PRINT
&"CAPA"; capa
  LOCATE 18, 65: PRINT "SUBBASE=";
&SUBASE: LOCATE 19, 65: PRINT "BASE=";
&BASED
  LOCATE 20, 65: PRINT "CARPETA=";
&CARPETA

NEXT capa
RETURN
4828
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
NEXT SUBASE
NEXT BASED
NEXT CARPETA

```

4.4 Resultados de la Ejecución del Programa Dispav1.bas.

Las figuras que se muestran a continuación muestran el desplegado gráfico de los resultados del cálculo de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en las diferentes capas que conforman un pavimento flexible.

En la figura 4.6 se representa la geometría del pavimento y la discretización del dominio de solución de las ecuaciones diferenciales, conformando la malla de elementos finitos. Las figuras 4.7 a 4.11 exhiben los desplazamientos verticales y horizontales así como las deformaciones verticales, horizontales y tangenciales para un pavimento flexible de geometría regular, quedando dichas propiedades mecánicas dentro de los límites de comportamiento elástico.

En las gráficas de desplazamientos se especifican las desviaciones (en cm.) de la posición original de equilibrio (pavimento sin carga) en cada uno de los puntos nodales a lo largo de cada una de las nueve interfases horizontales conformadas al discretizar el sistema. La interfase número 1 es la inferior y la nueve la

exterior, es decir, la parte de la carpeta asfáltica sujeta a carga.

En las gráficas de deformaciones se representan los efectos netos sobre las diferentes capas del pavimento al aplicársele la carga. La capa 4 es la del extremo derecho en todas las figuras que representan las deformaciones. Obsérvese que los efectos de la distribución de esfuerzos se reparten en las capas inferiores, deformando poco la carpeta (dentro de límites elásticos). La figura 4.12 muestra las deformaciones en un pavimento con geometría trapezoidal a la que se le conoce como disposición en balcón, presentándose únicamente los desplazamientos verticales y las deformaciones horizontales y verticales.

El programa dispav1.bas también grafica la distribución de los esfuerzos en las diferentes capas, como puede observarse al ejecutar el programa.

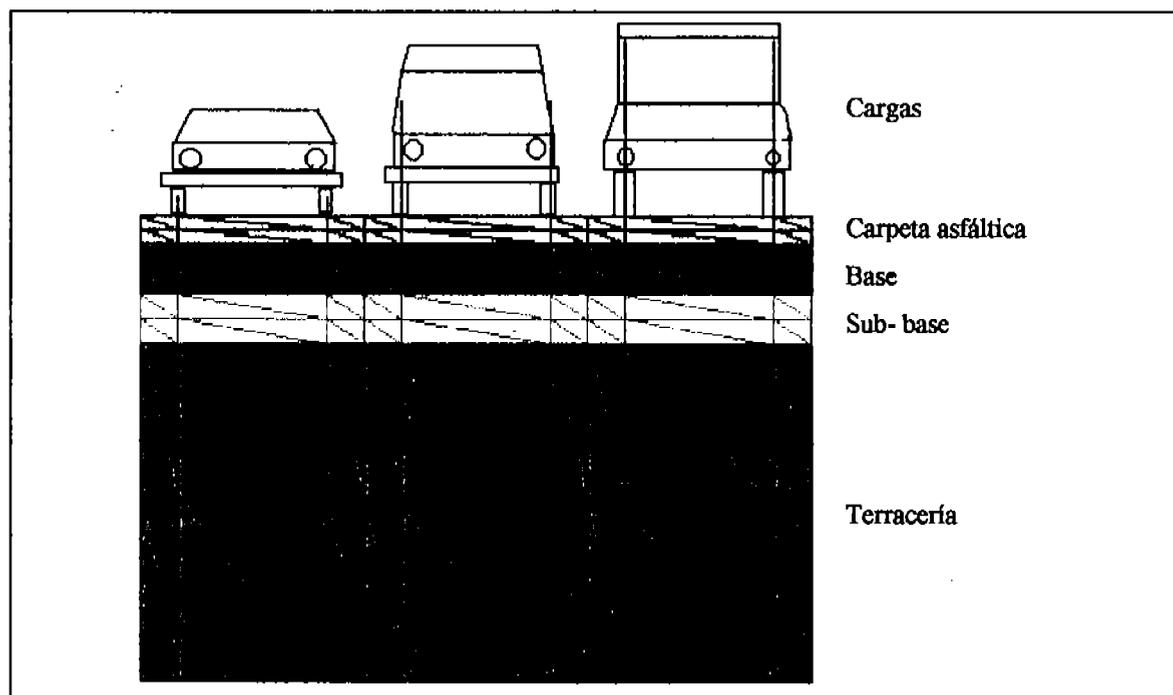
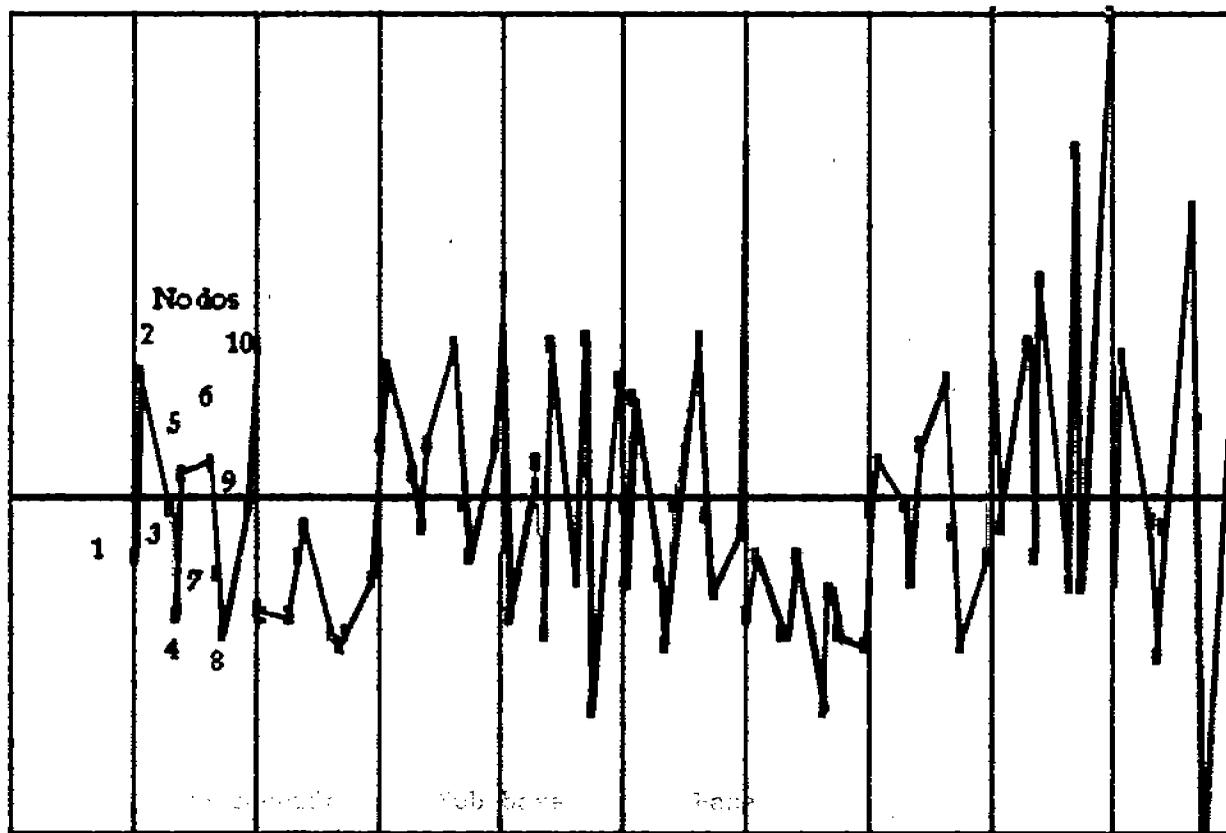


Fig. 4.6 Topología del arreglo de elementos finitos en un pavimento rectangular. Las cargas nodales corresponden a los pesos de un automóvil, un camión de pasajeros y un trailer. Expresadas en el programa en toneladas métricas.

DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES

0.3021



- .2124

Interfase:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

Fig. 4.7 Desplazamientos horizontales en un pavimento flexible bajo condición normal de carga

DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES

0.3021

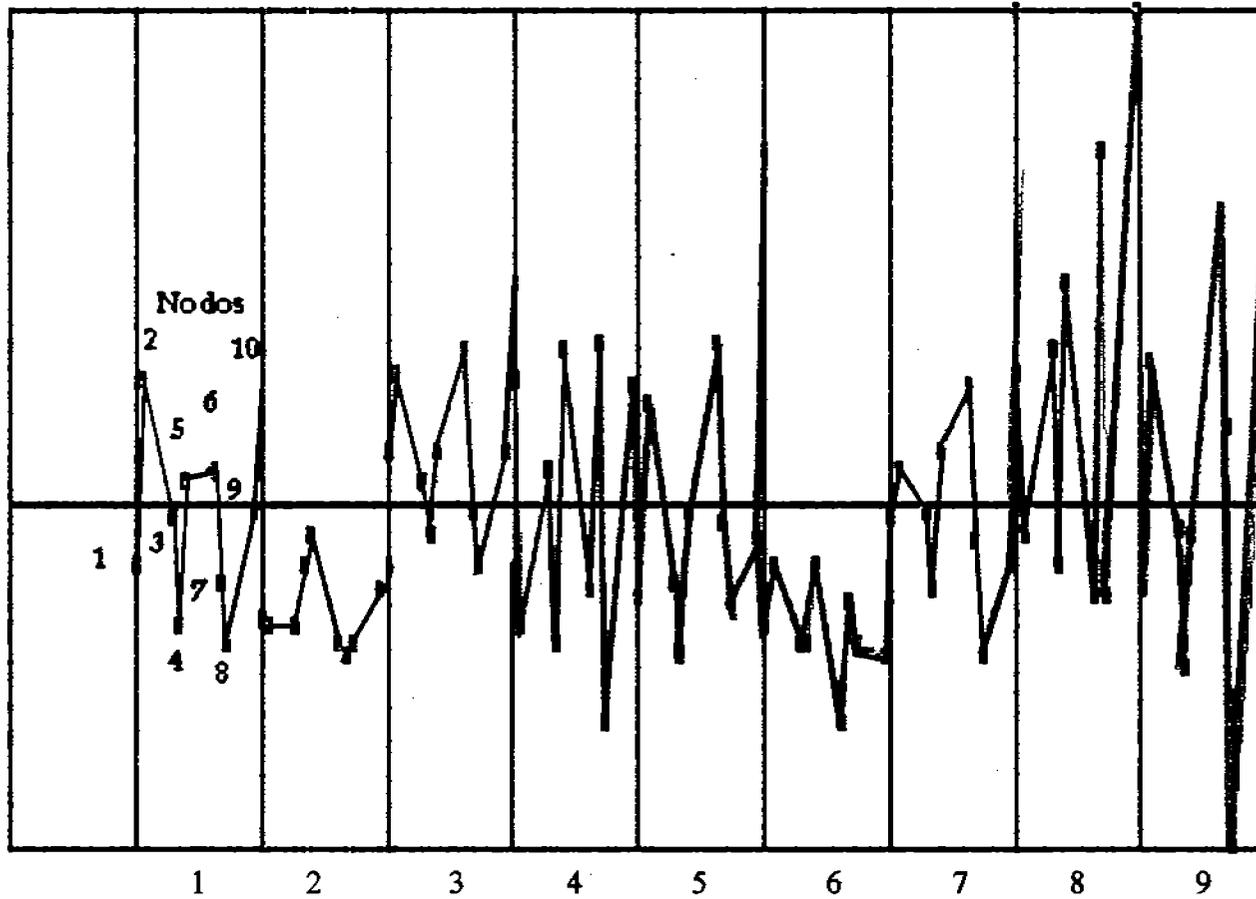
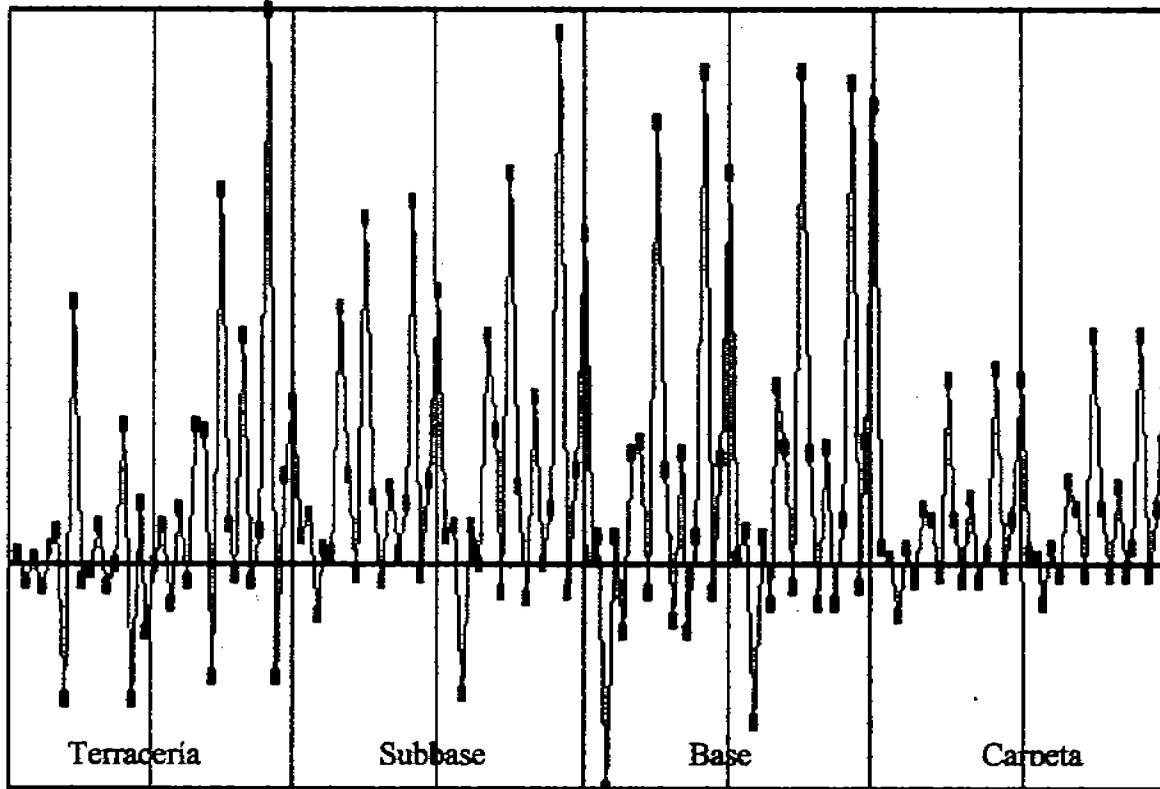


Fig. 4.8. Desplazamientos horizontales en un pavimento flexible bajo condición normal de carga

DEFORMACIONES VERTICALES

0.0393



ACOTACIONES

CAPA 1
CAPA 2
CAPA 3
CAPA 4

SUBBASE= 1
BASE= 1
CARPETA= 1

-0.0156

Terracería

Subbase

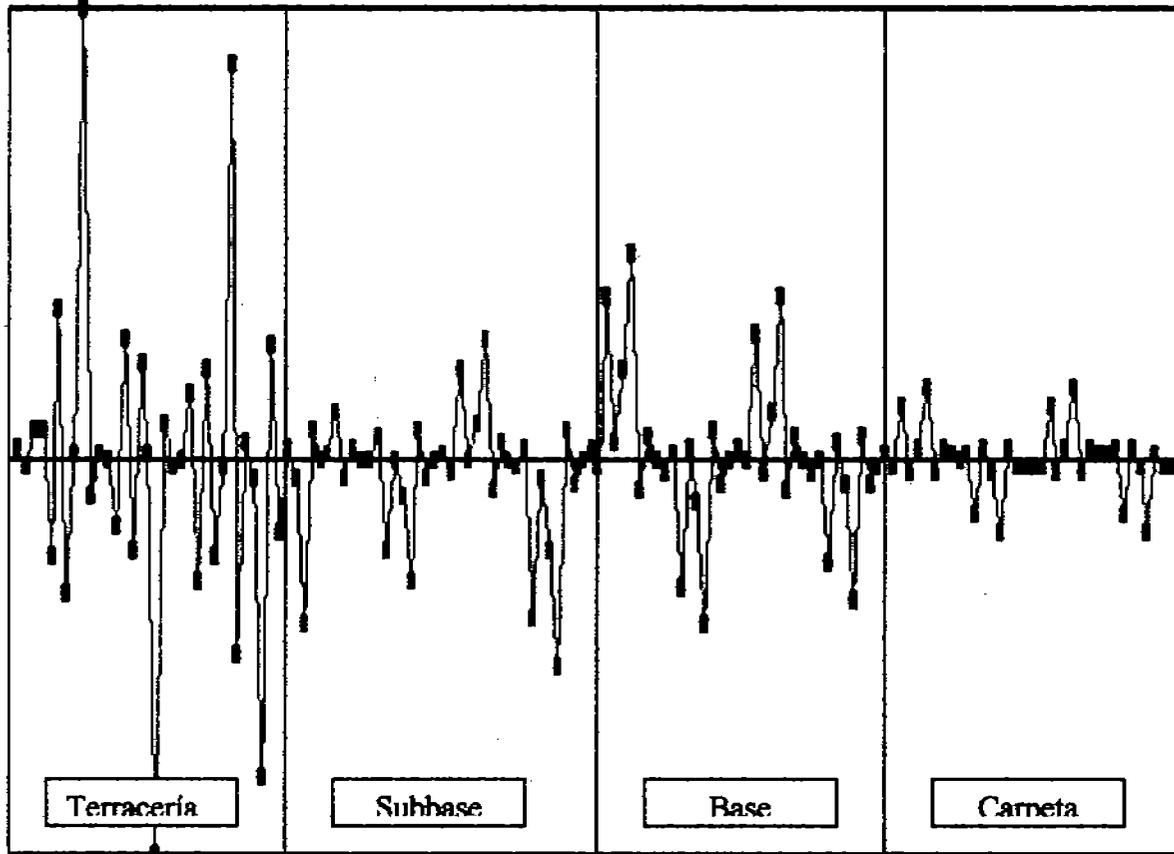
Base

Carbeta

Fig. 4.9. Deformaciones verticales en un pavimento flexible bajo condición normal de carga.

DEFORMACIONES HORIZONTALES

0.0669



ACOTACIONES

CAPA 1
CAPA 2
CAPA 3
CAPA 4

SUBBASE= 1
BASE= 1
CARPETA= 1

-0.0588

Terracería

Subbase

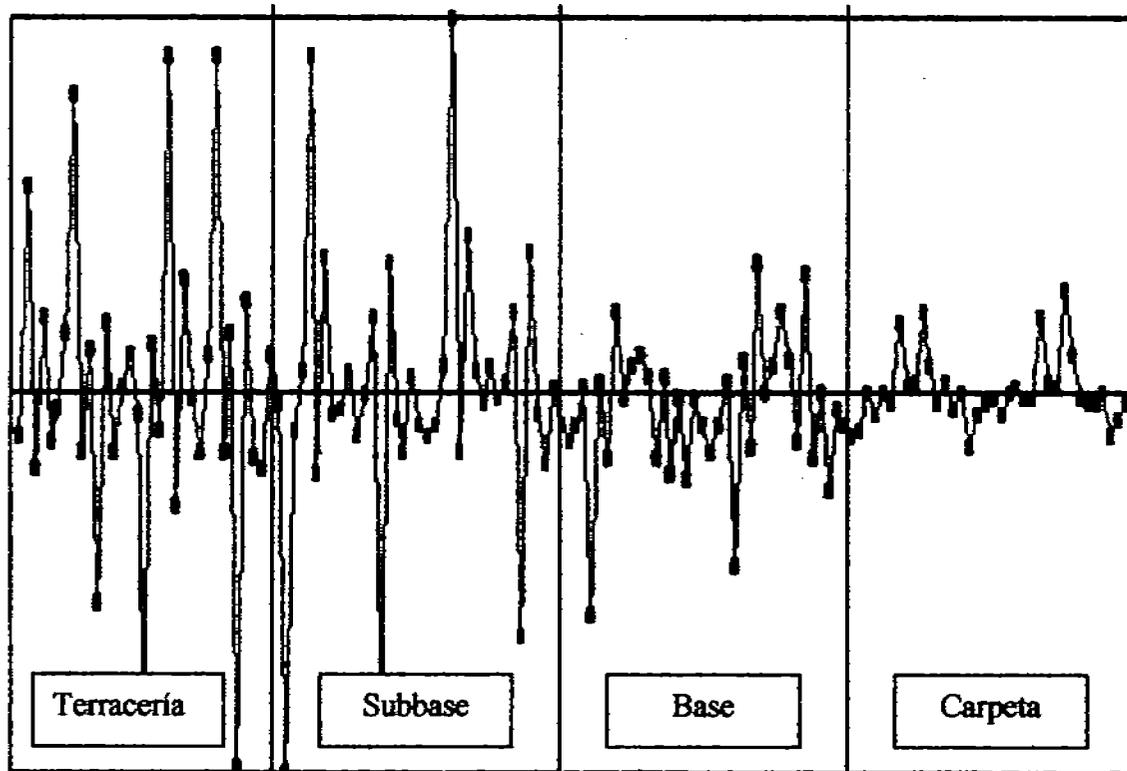
Base

Carretera

Fig. 4.10. Deformaciones horizontales en un pavimento flexible bajo condición normal de carga.

DEFORMACIONES TANGENCIALES

0.1129



ACOTACIONES

CAPA 1
CAPA 2
CAPA 3
CAPA 4

SUBBASE= 1
BASE= 1
CARPETA= 1

-.1134

Fig. 4.11. Deformaciones tangenciales en un pavimento flexible bajo condición normal de carga.

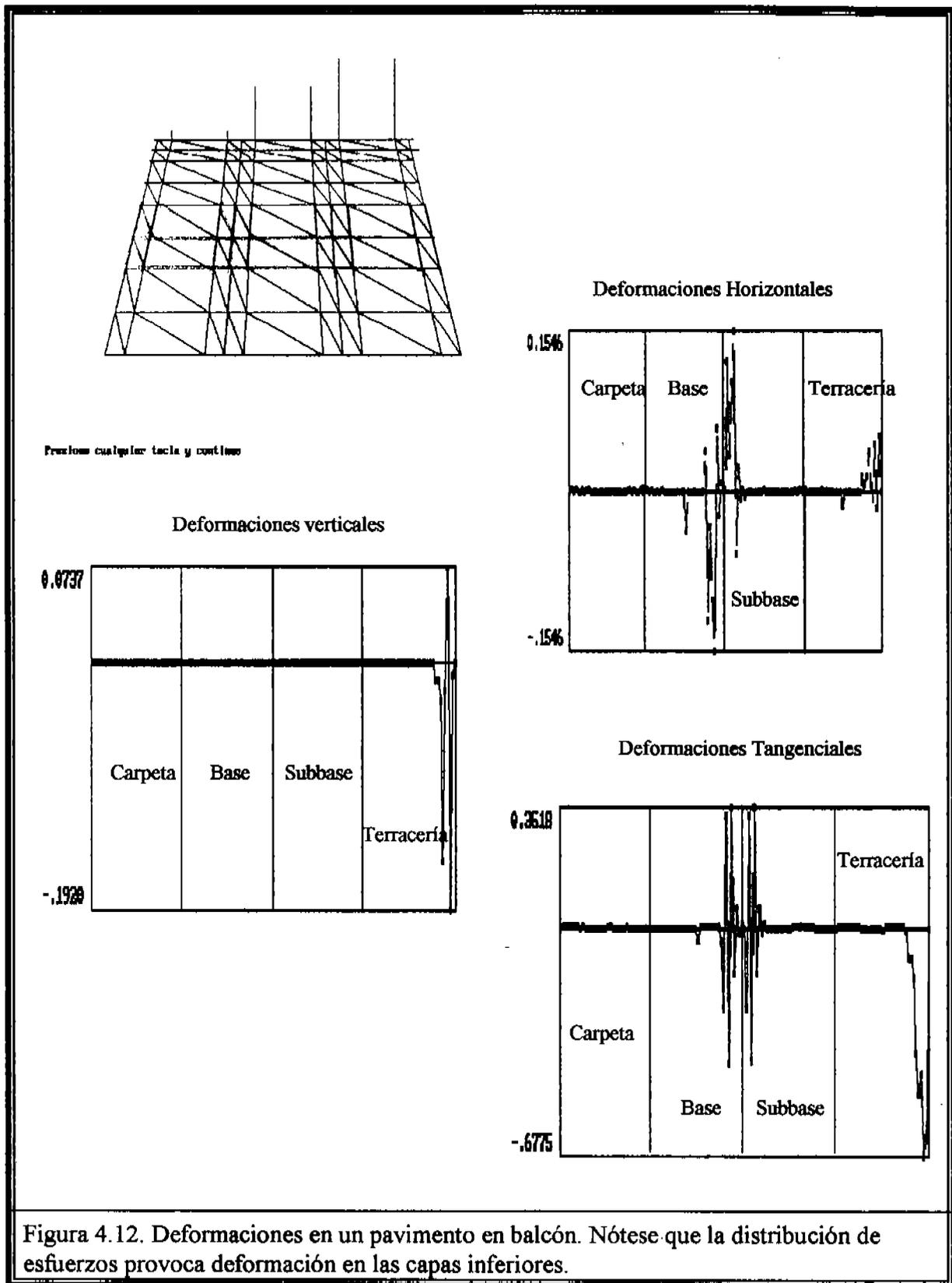


Figura 4.12. Deformaciones en un pavimento en balcón. Nótese que la distribución de esfuerzos provoca deformación en las capas inferiores.

5

Transferencia Bidimensional de Calor en Estado Estacionario.

5.1 INTRODUCCIÓN.

En el capítulo anterior se demostró que las ecuaciones básicas para la formulación de la solución de problemas de elasticidad por métodos de elementos finitos, pueden obtenerse simplemente por minimización de la energía potencial total del sistema, sin ninguna referencia directa a las ecuaciones de equilibrio estático.

En muchas aplicaciones de la física y de la ingeniería es posible obtener soluciones "exactas" de diferentes problemas minimizando algún funcional sujeto a ciertas condiciones de frontera. En el caso de la elasticidad este funcional corresponde físicamente a la energía potencial total del sistema (el principio de trabajos virtuales).

En varios casos, el funcional puede ser simplemente una cantidad definida matemáticamente y en otros la interpretación física puede no ser tan obvia. Por ejemplo, en algunos casos del flujo de un fluido ideal, el funcional podría representar la rapidez de producción de entropía.

El comportamiento físico de una gran variedad de sistemas puede ser descrito mediante las bien conocidas ecuaciones diferenciales de Laplace y de Poisson. La solución analítica de dichas ecuaciones en problemas de campo bi y tridimensionales puede representar una formidable tarea, especialmente en el caso en que existan condiciones de frontera complejas y regiones de geometría irregular. La formulación vía elemento

finito de esta clase de problemas ha probado ser una aproximación muy efectiva y versátil a la solución. Las dificultades a que se enfrentan los métodos de diferencias finitas, asociadas con geometría irregular y condiciones de frontera complejas son virtualmente eliminadas.

Algunos ejemplos de problemas prácticos que se encuentran frecuentemente en la naturaleza y que caen dentro de esta categoría, son: conducción de calor, percolación a través de medios porosos, torsión de vigas prismáticas, flujo de potencial irrotacional en fluidos, distribución de campos eléctricos y magnéticos, etc. En el área de la termodinámica de los procesos irreversibles los problemas de interés corresponden, en la mayoría de los casos, a la solución de las ecuaciones diferenciales que gobiernan los fenómenos de transporte de momentum, calor y masa.

En este capítulo, se abordará el problema de encontrar la solución aproximada óptima para la ecuación de Fourier en estado estacionario con un término de fuente calorífica, cuyo modelo matemático corresponde al tipo de ecuación conocido como ecuación de Poisson.

El siguiente desarrollo es general. Una redefinición de las variables físicas involucradas, hacen a la formulación igualmente aplicable a otros problemas que involucran la ecuación de Poisson.

5.2 FORMULACIÓN VARIACIONAL.

La ecuación diferencial que gobierna la transferencia de calor en estado no estacionario es la ecuación de Fourier, que en coordenadas cartesianas corresponde a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \frac{\partial}{\partial t} \rho C_p T \quad (5.1)$$

donde:

k_x, k_y, k_z = coeficientes direccionales de conductividad térmica.

T = temperatura.

Q = calor generado por unidad de volumen.

ρ = densidad.

C_p = capacidad calorífica.

Si enfocamos nuestra atención al problema estacionario bidimensional tal como se muestra en la figura 5.1

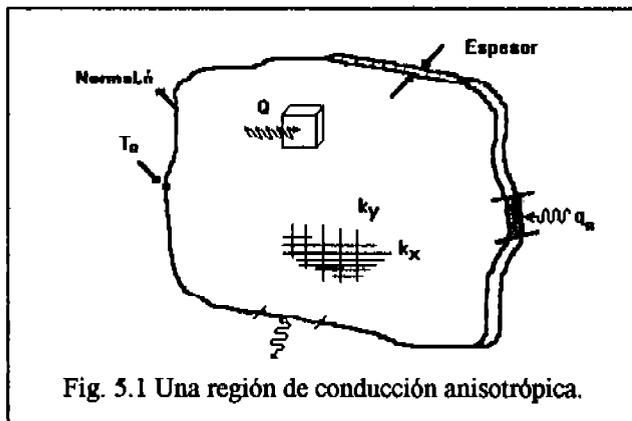


Fig. 5.1 Una región de conducción anisotrópica.

la ecuación gobernante se simplifica a :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (5.2)$$

Las ecuaciones (5.1) y (5.2) junto con las condiciones de frontera apropiadas especifican completamente el problema.

Las condiciones de frontera que se encuentran con mayor frecuencia en aplicaciones prácticas son:

1. La temperatura es una función definida en la frontera (Condición de Dirichlett) :

$$T = T(s), \text{ en el contorno } \Gamma_s. \quad (5.3)$$

2. El flux de calor se especifica en alguna parte Γ_q del contorno (Condición de Neumann):

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y + q + h(T - T_r) = 0 \quad (5.4)$$

$$\text{o: } k_n \frac{\partial T}{\partial n} + q + h(T - T_r) = 0$$

donde l_x y l_y son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie de contorno, q representa el flux de calor por unidad de superficie y $h(T - T_r)$ es la pérdida de calor por convección.

Como se estableció previamente, se puede formular alternativamente la solución del problema de conducción de calor utilizando cálculo variacional. El teorema de Euler-Lagrange del cálculo variacional establece que si se desea minimizar la integral:

$$I(u) = \int_{\text{vol}} F(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) dx dy dz + \int_{\text{sup}} (qu + hu^2 / 2) dA \quad (5.5)$$

la condición necesaria y suficiente para que se alcance el mínimo, es que la función desconocida $u(x, y, z)$ satisfaga la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} - \frac{\partial}{\partial u} F = 0 \quad (5.6)$$

asegurando que la variable dependiente u cumpla con las condiciones esenciales de frontera.

La minimización de la integral:

$$I = \int_{\text{vol}} \left[\frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right\} - QT \right] dx dy dz + \int_{\text{sup}} [qT + hT^2 / 2] dA \quad (5.7)$$

conduce directamente a la formulación equivalente a la ecuación (5.2) para el caso de estado estacionario.

La contribución volumétrica al funcional es el argumento de la primera integral. Por lo tanto, si dicho funcional volumétrico ha de ser minimizado, debe satisfacer la ecuación (5.5). De ahí que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial T}{\partial x}} &= k_x \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial T}{\partial y}} &= k_y \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial T}{\partial z}} &= k_z \frac{\partial T}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial T} &= -Q \end{aligned} \quad (5.8)$$

sustituyendo estas igualdades en la ecuación (5.6), se llega directamente a la ecuación (5.1) para estado estacionario, verificando que la funcional F conduce a la solución estacionaria correcta. Euler también

estableció que la condición de frontera natural asociada a la ecuación (5.5) es:

$$l_x k_x \frac{\partial T}{\partial x} + l_y k_y \frac{\partial T}{\partial y} + l_z k_z \frac{\partial T}{\partial z} + g + h(T - T_r) = 0 \quad (5.9)$$

o simplemente:

$$k_n \frac{\partial T}{\partial n} + g + h(T - T_r) = 0 \quad (5.4.b)$$

donde n es la normal unitaria a un punto sobre la superficie y k_n es la conductividad en dicha dirección.

Esta es la condición de frontera natural dada anteriormente por la ecuación (5.4).

5.3 MATRICES DE ELEMENTO Y MATRICES DE FRONTERA.

A partir de las ecuaciones (5.1) y (5.7) se ve claramente que el funcional bidimensional requerido para el análisis en estado estacionario, es:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\text{Área}} \left[\frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\} - QT \right] \varepsilon \, dx \, dy \\ &+ \int_{\text{contorno}} [qT + hT^2 / 2] \varepsilon \, dl \quad (5.10) \end{aligned}$$

donde ε es el espesor del dominio. Para el ensamblaje se procederá exactamente en la misma forma que como lo hicimos en la formulación variacional previa. Es decir, asumiremos que la integral de área es la suma de las integrales sobre las áreas de cada elemento. De manera semejante, la integral de contorno, donde la temperatura no está especificada, se asume que es la suma de las integrales de los segmentos de frontera.

Entonces:

$$I = \sum_{\circ} I^{\circ} + \sum_{\text{b}} I^{\text{b}} \quad (5.11)$$

donde las contribuciones al elemento son:

$$I^{\circ} = \int_{\text{Área}=\text{A}^{\circ}} \left[\frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\} - QT \right] \varepsilon \, dx \, dy \quad (5.12)$$

y las contribuciones de los segmentos frontera son:

$$I^{\text{b}} = \int_{\text{contorno}=\Gamma^{\text{b}}} [qT + hT^2 / 2] \varepsilon \, dl \quad (5.13)$$

Si se toman en cuenta las consideraciones de interpolación usuales en el interior del elemento y en sus fronteras, entonces podemos expresar estas cantidades en forma matricial como:

$$[I^{\circ}] = \frac{1}{2} [T^{\circ}]^T [S^{\circ}] [T^{\circ}] - [T^{\circ}]^T [C^{\circ}] \quad (5.14)$$

$$[I^{\text{b}}] = \frac{1}{2} [T^{\text{b}}]^T [S^{\text{b}}] [T^{\text{b}}] - [T^{\text{b}}]^T [C^{\text{b}}] \quad (5.15)$$

De aquí que las matrices del elemento sean:

$$[S^{\circ}] = \int_{\text{A}^{\circ}} \left\{ k_x [H_x^{\circ}]^T [H_x^{\circ}] + k_y [H_y^{\circ}]^T [H_y^{\circ}] \right\} \varepsilon^{\circ} \, dx \, dy \quad (5.16)$$

$$[C^{\circ}] = \int_{\text{A}^{\circ}} [H^{\circ}]^T Q^{\circ} \varepsilon^{\circ} \, dx \, dy \quad (5.17)$$

$$[S^{\text{b}}] = \int_{\Gamma^{\text{b}}} [h^{\text{b}} [H^{\text{b}}]^T [H^{\text{b}}] \varepsilon^{\text{b}}] \, dl \quad (5.18)$$

$$[C^{\text{b}}] = \int_{\Gamma^{\text{b}}} [T_r^{\text{b}} [h^{\text{b}} [H^{\text{b}}]^T \varepsilon^{\text{b}}] \, dl \quad (5.19)$$

$$[C^{\text{q}}] = \int_{\Gamma^{\text{b}}} [q^{\text{b}} [H^{\text{b}}]^T \varepsilon^{\text{b}}] \, dl \quad (5.20)$$

Donde [H] denota las funciones de forma y sus derivadas se especifican como $[H_x] = \partial[H]/\partial x$, etc. Para esta clase de problemas existe solamente una temperatura desconocida por nodo. Una vez más si el vector [T] denota todas esas incógnitas, entonces tanto $[T^*]$ como $[T^b]$ son subconjuntos de [T].

Si se selecciona un elemento triangular de tres nodos, entonces las funciones de interpolación por elemento, $[H^*]$ están dadas en coordenadas locales por la ecuación (3.23) y en coordenadas globales por las ecuaciones (3.29) a (3.31). Para el conjunto anterior de ecuaciones:

$$[H_x^*] = \frac{\partial[H^*]}{\partial x} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^* / 2A^* = [D_x] \quad (5.21)$$

$$[H_y^*] = \frac{\partial[H^*]}{\partial y} = [c_1 \ c_2 \ c_3]^* / 2A^* = [D_y] \quad (5.22)$$

Debido a que todos los parámetros que incluyen estas ecuaciones son constantes, podemos evaluar la ecuación (5.16) por inspección. Si además las conductividades térmicas también son constantes:

$$[S^e] = \frac{k_x^e \varepsilon^e}{4A^e} \begin{bmatrix} b_1 b_1 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2 b_2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3 b_3 \end{bmatrix}^e + \quad (5.23)$$

$$\frac{k_y^e \varepsilon^e}{4A^e} \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{bmatrix}^e$$

Esta arreglo matricial se conoce como matriz de conductividad del elemento. Nótese que esta expresión permite modificar los valores de las conductividades en las direcciones x e y. Las ecuaciones (5.23) y (3.30) muestran que la conducción en la dirección x depende del tamaño del elemento en la dirección y, y viceversa. Si la generación interna de calor, Q también es constante,

entonces la ecuación 5.17 puede ser integrada vía primer momento del área para dar:

$$I = \int_A x \, dx \, dy = A(x_1 + x_2 + x_3) / 3 \quad (5.24)$$

para dar:

$$[C^*] = \frac{Q^* A^* \varepsilon^*}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Este vector de fuente interna muestra que un tercio del calor interno, $Q^* A^* \varepsilon^*$, es diferido a cada uno de los tres nodos.

Sobre un segmento de frontera típico, la interpolación en el borde puede ser correspondiente a la ecuación 3.11 u otras formas. Las integrales exactas pueden ser evaluadas por la ecuación :

$$I = \int_L [H^*]^T [H^*] dx \quad (5.26)$$

Por ejemplo si el coeficiente convectivo h es constante, entonces la matriz cuadrada del segmento de frontera se obtiene a partir de esta integral dando:

$$[S^b] = \frac{h^b L^b \varepsilon^b}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Similarmente, si existe un flux de calor normal constante q en la superficie, entonces el vector de flux en la frontera es:

$$C^b = \frac{q^b l^b \varepsilon^b}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

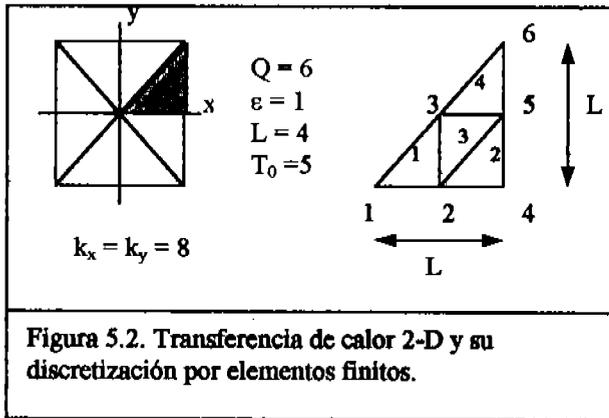
En este caso la mitad del flux normal total es diferido a cada uno de los dos nodos del segmento.

5.4 EJEMPLO DE APLICACIÓN

Considérese una placa cuadrada de espesor uniforme cuyo perímetro exterior se mantiene a temperatura invariable, mientras que su interior genera calor con una potencia constante. Nótese que la distribución de temperatura será simétrica respecto a los centros de línea del cuadrado así como respecto a sus dos diagonales. Esto significa que solamente es necesario utilizar 1/8 de la región en el análisis. Por simplicidad se considerará que el material es homogéneo y que la conductividad térmica es isotrópica, $k_x = k_y = k$.

Los planos de simetría tienen flux normal de calor igual a cero, $q = 0$. Esta es una condición de frontera natural en el análisis de Elemento Finito y en este caso se cumple debido a que $[C_q]$ en la ecuación (5.20) es igual a cero cuando el flux normal $q = 0$. La otra condición de frontera corresponde a la temperatura constante en el borde, como se muestra en la Fig. 5.2.

Para empezar a construir el modelo se seleccionan 4 elementos y 6 nodos. Conforme a la numeración, a los últimos tres nodos se les asocia una condición de frontera isotérmica, mientras que a los primeros tres les corresponden las temperaturas internas desconocidas.



Para esta región homogénea los datos son:

ELEMENTO	K^e	Q^e	TOPOLOGÍA	ϵ^e
1	8	6	1,2,3	1
2	8	6	2,4,5	1
3	8	6	5,3,2	1
4	8	6	3,5,6	1

Para la geometría de la Fig. 5.2. se determinan las propiedades geométricas del elemento a partir de las ecuaciones (3.28) a (3.31). Las cuales son:

	e = 1, 2, 4			e = 3		
i	1	2	3	1	2	3
b_i	-2	2	0	2	-2	0
c_i	0	-2	2	0	2	-2
	$A^e = 2$			$A^e = 2$		

A partir de la ecuación (5.23), la matriz de conducción para los elementos 1,2 y 4 son:

$$S^* = \frac{8(1)}{4(2)} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{8(1)}{4(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

o simplemente:

$$[S^*] = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

Debido a que el elemento 3 resulta de una rotación de 180 grados del elemento 1, ambos tienen la misma $[S^*]$. El ensamblaje para los cuatro elementos da el siguiente sistema de ecuaciones :

$$[S][T] = [C]$$

Donde:

$$[S] = \begin{bmatrix} +4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & (+8+4+4) & (-4-4) & -4 & 0 & 0 \\ 0 & (-4-4) & (+4+8+4) & 0 & (-4-4) & 0 \\ 0 & -4 & 0 & +8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & (-4-4) & -4 & (+4+4+8) & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & +4 \end{bmatrix}$$

y:

$$[C] = \frac{QA\epsilon}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+1+1 \\ 1+1+1 \\ 1 \\ 1+1+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \\ 4 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

En el vector anterior las q 's son los fluxes de calor nodales que se requieren para mantener la temperatura externa fija. Debido a que a las últimas tres ecuaciones se les asocian condiciones de frontera isotérmicas y los valores de dichas temperaturas son conocidos, se pueden reducir las tres primeras a:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 16 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} - T_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} - T_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} - T_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituyendo los datos de que la temperatura de la superficie exterior es 5, se reduce el término fuente a:

$$[C^*] = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 32 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones $[S][T] = [C^*]$ se obtiene:

$$[T^*] = \begin{bmatrix} 8.75 \\ 7.75 \\ 7.125 \end{bmatrix}$$

5. 5. Programa para Determinar la Distribución de Temperaturas en un Proceso de Transferencia de Calor Bidimensional en Estado Estacionario

A continuación se presenta un algoritmo computacional basado en la formulación variacional del método de elementos finitos para el cálculo del perfil de temperaturas en una placa rectangular que genera calor uniformemente en su superficie, disipándolo de manera tal que la temperatura de sus bordes se mantiene constante al transcurrir el tiempo. El análisis se realiza sobre la octava parte de la placa rectangular, como puede observarse en la representación gráfica de la malla de elementos finitos de la figura lateral. El dominio de la ecuación diferencial se divide en elementos triangulares, conformando un arreglo de neb^2 triángulos isósceles cuyos dos lados iguales son de longitud $L/(2neb)$, siendo $neb =$ número de elementos en la base. El programa que se lista a continuación se utilizó para determinar los perfiles de temperatura en la placa cuadrada con fronteras isotérmicas y generación interna de calor a lo largo de su superficie.

Substituyendo estos valores en el sistema original de ecuaciones se obtienen los fluxes de calor nodales externos. Por ejemplo, la cuarta ecuación indica que:

$$-4 T_2 + 8 T_4 - 4 T_3 = 4 + q_4,$$

de donde $q_4 = -15$.

Los otros dos fluxes nodales son:

$$q_5 = -29; q_6 = -4.$$

y el calor interno generado total es:

$$\Sigma Q^e A^e t^e = 48.$$

La energía térmica generada internamente es igual al calor disipado hacia el exterior para mantener condiciones de estado estacionario.

En la siguiente sección se presenta un algoritmo de cómputo escrito en lenguaje Qbasic, donde se implementa este procedimiento de elementos finitos variacionales, considerando un número de elementos en la base que puede extenderse hasta un máximo de 100.

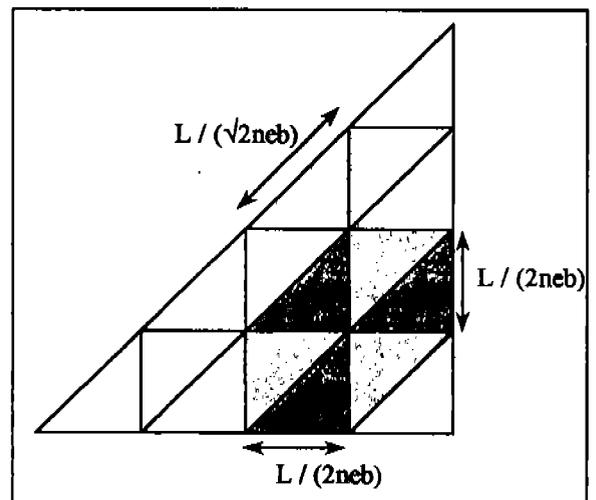


Fig. 5.3. Especificación del arreglo de elementos finitos en una placa rectangular para análisis de transferencia de calor por conducción.

BLOQUE I.

- Se especifica el número de elementos en la base del triángulo (neb).
- Se calcula el número de nodos totales (sum) en función del número de elementos en cada nivel del triángulo, mediante un ciclo FOR-NEXT, el cual va sumando los nodos en los arreglos triangulares en cada nivel.

CLS

neb = 10

FOR I = 1 TO neb + 1

SUM = SUM + I 'calcula el número total de nodos
NEXT I

BLOQUE II.

Se dimensionan los arreglos matriciales para cada una de las variables que se utilizan en el programa principal y sus subrutinas:

- Se dimensiona un vector [AP] de dimensión (sum) para especificar el número de elementos que son vecinos para cada nodo, y que corresponde también al número de veces que aparecerá un nodo en el sistema de ecuaciones globalizado.
- Se calcula el número de nodos en la base del triángulo y se dimensiona una matriz cuadrada [T] de dimensión (2 * número de nodos en la base + 1).
- En la matriz [m] de dimensión (neb²,3) se guardan el número de elemento y la identidad de sus tres vértices, es decir el número de nodo correspondiente a cada uno de sus vértices, de acuerdo a la topología.
- En la matriz [mg] de dimensión igual al (número total de nodos, número total de nodos + 1) se guardan los coeficientes de la matriz globalizada que resulte del ensamblaje de las ecuaciones para cada elemento.
- La matriz cuadrada [COEF] de dimensión (3,3) se utiliza para guardar los coeficientes correspondientes a cada uno de los vértices del sistema de ecuaciones planteado para cada elemento, siendo diferentes valores para los triángulos normales e invertidos.
- La matriz [a1] de igual dimensión que en el caso de la matriz [mg], para transferir el sistema de ecuaciones a la subrutina de eliminación Gaussiana.

- El vector [nc] especifica el número de capa a que pertenece cada elemento .
- Los vectores [x], [y],[xn], [yn] y [y1] se utilizan para almacenar las variables de graficación, se les asigna una dimensión (sum²) para tener la posibilidad de graficar la distribución de temperaturas para la placa rectangular completa.

DIM nc(neb + 1), m(neb ^ 2, 3), mg(SUM, SUM + &1), COEF(3, 3), a1(SUM, SUM + 1)

DIM x(SUM ^ 2), ap(SUM)

DIM y(SUM ^ 2), yn(SUM ^ 2), xn(SUM ^ 2), &Y1(SUM ^ 2)

NNODOS = neb + 1 'número de nodos en la base

DIM T(2 * NNODOS, 2 * NNODOS)

BLOQUE III.

Se especifica el número de elementos por capa (nivel horizontal) y al mismo tiempo el número de capa para cada elemento:

FOR N = 1 TO neb ^ 2

'determinación del número de capa (nc)

FOR I = 1 TO neb

lim = 2 * I * neb - I ^ 2

IF N < 1.001 * lim THEN c = I: GOTO 10

NEXT I

10 COLOR c

nc(I) = nc(I) + 1

BLOQUE IV.

Se calcula un conjunto de funciones auxiliares que serán útiles en la especificación del número de capa de cada elemento:

rc = 1 / 2 * c ^ 2 - (neb * 2 - 1) / 2 * c + neb - 1

rc1 = 1 / 2 * (c - 1) ^ 2 - (neb * 2 - 1) / 2 * (c - 1) &+ neb - 1

rc2 = 1 / 2 * (c + 1) ^ 2 - (neb * 2 - 1) / 2 * (c + &1) + neb - 1

BLOQUE V.

Se determina la topología del arreglo triangular de elementos, es decir se determina el número de nodo que le corresponde a cada vértice de los triángulos normales e invertidos mediante un ciclo FOR-NEXT en el que se van barriendo los renglones de la región triangular desde la base, hasta el vértice.

- normal se refiere a que los triángulos corresponden a la siguiente geometría:



- mientras que los triángulos invertidos tienen la siguiente geometría: 

```
'determinación e impresión de la topología
lim2 = -1 * c ^ 2 + (2 * neb + 1) * c - neb + 1
IF N < -1 * c ^ 2 + (2 * neb + 1) * c - neb + 1 THEN
&20 ELSE 30
20 COLOR 14:
nodo1 = N + rc: nodo2 = N + rc + 1: nodo3 = N +
&rc1 + 2
'PRINT "elemento="; n, "("; n + rc; n + rc + 1; n +
&rc1 + 2; ")":
GOTO 40
30 COLOR 3:
nodo1 = N + rc + 2: nodo2 = N + rc + 1: nodo3 = N
&+ rc2 - 1
'PRINT "elemento="; n, "("; n + rc + 2; n + rc + 1; n
&+ rc2 - 1; ")":
40 'PRINT "elemento="; n, "("; nodo1; nodo2;
&nodo3; ")":
m(N, 1) = nodo1: m(N, 2) = nodo2: m(N, 3) = nodo3
NEXT N
FOR I = 1 TO neb
'PRINT "nc("; I; ")="; nc(I)
NEXT I
```

BLOQUE VI.

Especificación de los coeficientes del sistema de ecuaciones para cada elemento.

```
COEF(1, 1) = 4: COEF(1, 2) = -4: COEF(1, 3) = 0
COEF(2, 1) = -4: COEF(2, 2) = 8: COEF(2, 3) = -4
COEF(3, 1) = 0: COEF(3, 2) = -4: COEF(3, 3) = 4
```

BLOQUE VII.

Ensamblaje de los sistemas de ecuaciones para obtener la matriz globalizada.

Una vez determinada la topología, es decir el número de nodo que corresponde a los 3 vértices de cada elemento se van llenando las casillas en la matriz globalizada con los coeficientes correspondientes según el BLOQUE VI, donde se van guardando los valores de los coeficientes para cada casilla y conforme van llegando más términos a esa casilla se van sumando algebraicamente.

```
FOR N = 1 TO neb ^ 2
FOR I = 1 TO 3
FOR j = 1 TO 3
mg(m(N, I), m(N, j)) = mg(m(N, I),
&m(N, j)) + COEF(I, j)
```

```
NEXT j
NEXT I
NEXT N
```

BLOQUE VIII.

Se especifica el número de elementos con que es vértice cada nodo:

-A cada nodo se le asigna un número de seis elementos circundantes y posteriormente a los nodos que son vértice, se les especifica el valor de 1 y a los nodos que son orilla se les asigna un número de tres elementos como corresponde a la topología.

```
REM especificación de número de elementos con los
&que es vértice cada nodo
FOR I = 1 TO SUM
ap(I) = 6 'inicializa apariciones de todos los
&nodos con 6, es decir, se especifica que c/nodo es
&vértice de 6 elementos
NEXT I
ap(1) = 1: ap(neb + 1) = 1 'nodos esquina de la
&base solo son vértice de 1 elemento
FOR I = 2 TO neb
ap(I) = 3 'nodos orilla de la base son vértice
&de 3 elementos
NEXT I
ap(neb + 2) = 3: sumy = neb + 2 '
FOR I = 1 TO neb - 2
sumy = sumy + neb - (I - 1)
ap(sumy) = 3 'nodos orilla diagonal son
&vértice de 3 elementos
NEXT I
sume = neb + 1
FOR I = 1 TO neb - 1
sume = sume + neb - (I - 1)
ap(sume) = 3 'nodos orilla derecha son vértice
&de 3 elementos
NEXT I
ap(SUM) = 1 'nodo esquina superior es
&vértice de un elemento
FOR I = 1 TO SUM
' PRINT "AP"; I, "="; ap(I), 'imprime
&relación nodo-núm de elementos con que es vértice
NEXT I
```

BLOQUE IX.

Se especifica el calor producido (qprod) en el interior de cada elemento.

'qprod= calor producido en cada elemento (128 es el &calor total producido en la placa)
qprod = 16 / neb ^ 2

BLOQUE X.

Se calcula la contribución del término fuente a cada vértice multiplicando el número de elementos que circundan a cada nodo por el qprod del elemento y se construye el vector correspondiente al término fuente.

```
FOR k = 1 TO SUM          'calcula el término
&de qprod para c/nodo correspondiente a la matriz
&de capacitancia
  mg(k, SUM + 1) = ap(k) * qprod
NEXT k
FOR k = 1 TO SUM
  FOR L = 1 TO SUM + 1
    ' PRINT mg(K, L);      'imprime sistema
&de ecuaciones sin condiciones de frontera
  NEXT L
  ' PRINT
NEXT k
```

BLOQUE XI.

Se introducen las condiciones de frontera isotérmica en el borde derecho y las condiciones de frontera adiabática (condición de frontera natural) en los otros bordes del triángulo, procediéndose a la modificación de los arreglos matriciales en función de las temperaturas conocidas.

```
REM introducción de condiciones frontera
REM frontera isotérmica en el borde derecho
temp = 1
FOR I = neb + 1 TO 1 STEP -1
  suma = suma + 1      'suma es el número de
&nodo isotérmico
  FOR j = 1 TO SUM
    IF mg(j, suma) <> 0 THEN mg(j, SUM +
&1) = mg(j, SUM + 1) - mg(j, suma) * temp
    mg(j, suma) = 0      'hace cero los
&coeficientes del renglón suma
    mg(suma, j) = 0      'hace cero los
&coeficientes de la columna suma
  NEXT j
  mg(suma, suma) = 1      'hace 1 el
&coeficiente de la diagonal del nodo isotérmico
  mg(suma, SUM + 1) = temp 'igual a la
&temperatura del nodo isotérmico al valor temp
NEXT I
REM impresión de la matriz de coeficientes del
sistema de ecuaciones a resolver
FOR k = 1 TO SUM
  FOR L = 1 TO SUM + 1
```

```
    PRINT mg(k, L);
  NEXT L
  PRINT
NEXT k
```

BLOQUE XII.

Resolución del sistema de ecuaciones mediante eliminación gaussiana.

```
REM *ELIMINACION GAUSSIANA
SCREEN 0: COLOR 4, 15
a = 4: b = 636: c = 4: d = 436
SCREEN 12: COLMARC = 4
LINE (a, c)-(b, d), 3, BF
LINE (640, c)-(1, 1), COLMARC, BF
LINE (1, 1)-(a, 440), COLMARC, BF
LINE (1, 440)-(640, d), COLMARC, BF
LINE (b, 1)-(640, 440), COLMARC, BF
LOCATE 12, 40: PRINT "calculando"
'Inicia Algoritmo de Eliminación Gaussiana
FOR I = 1 TO SUM
  FOR j = 1 TO SUM + 1
    a1(I, j) = mg(I, j)
  PRINT a1(I, j);
  NEXT j
NEXT I
N = SUM
FOR r = 1 TO N - 1
  PRINT
  FOR I = r + 1 TO N
    qt = a1(I, r) / a1(r, r)
    FOR j = r + 1 TO N + 1
      a1(I, j) = a1(I, j) - qt * a1(r, j)
    NEXT j
  NEXT I
  FOR I = r + 1 TO N
    a1(I, r) = 0
  NEXT I
NEXT r
x(N) = a1(N, N + 1) / a1(N, N)
FOR NX = 1 TO N - 1
  SUMAT = 0
  I = N - NX
  FOR j = I + 1 TO N
    SUMAT = SUMAT + a1(I, j) * x(j)
  NEXT j
  x(I) = (a1(I, N + 1) - SUMAT) / a1(I, I)
NEXT NX
CLS
FOR I = 1 TO SUM
  PRINT "x"; I; "=", x(I)
NEXT I
```

BLOQUE XIII.

Después de hallar la solución del sistema de ecuaciones se obtiene la temperatura en cada uno de los nodos de la región triangular, enseguida se procede a copiar esos valores a los puntos que sean simétricos, respecto a las diagonales del rectángulo y a las perpendiculares mediatrices. Esto se realiza mediante el siguiente conjunto de ciclos iterativos:

```
SUMAT = 0
FOR I = 1 TO NNODOS - 1
  SUMAT = SUMAT + I
NEXT I
NTOTAL = NNODOS ^ 2 - SUMAT
FOR k = 1 TO NNODOS
  sum2 = 0
  SUM1 = SUM1 + k
  'Copia las temperaturas nodales al triángulo
  &adyacente inferior
  'conservando la simetría con la perpendicular
  &mediatriz horizontal
  FOR L = k TO NNODOS
    T(k, L) = x(NTOTAL - sum2 - SUM1 + 1)
    sum2 = sum2 + L
  NEXT L
  'Copia las temperaturas nodales del nuevo triángulo
  al triángulo adyacente respetando la simetría con la
  diagonal.
  FOR L = 1 TO NNODOS - k
    T(k, NNODOS + L) = T(k, NNODOS - L)
  NEXT L
  'Copia las temperaturas nodales del nuevo triángulo
  &al triángulo adyacente
  'respetando la simetría con la perpendicular
  &mediatriz vertical.
  FOR L = 1 TO NNODOS
    T(L, k) = T(k, L)
  NEXT L
  FOR L = 1 TO NNODOS - k
    T(NNODOS + L, k) = T(NNODOS - L, k)
  NEXT L
NEXT k
'Hasta este momento se ha obtenido la distribución de
&temperaturas para la mitad del rectángulo, bajo la
&diagonal superior y se procede entonces a copiarlo
&hacia la parte superior de la diagonal mediante el
&siguiente ciclo:
FOR k = 1 TO 2 * NNODOS - 2
  FOR L = 1 TO 2 * NNODOS - k - 1
    T(2 * NNODOS - k, 2 * NNODOS - L) =
T(k, L)
  NEXT L
```

```
NEXT k
'Ciclo de impresión de las temperaturas nodales para
& toda la región rectangular.
FOR I = 1 TO NNODOS * 2 - 1
  FOR j = 1 TO NNODOS * 2 - 1
    PASOA = PASOA + 1
    Y1(PASOA) = T(j, I)
    COLOR 13
    NEXT j
  NEXT I
```

BLOQUE XIV.

Se lleva a cabo el desplegado gráfico de los resultados, mediante una gráfica tridimensional $T=T(x,y)$ y un corte sobre el plano de simetría.

```
SCREEN 12
' * * * * GRAFICADOR TRIDIMENSIONAL * * * *
a = 4: b = 636: c = 4: d = 436: COLMARC = 4
LINE (a, c)-(b, d), 3, BF
LINE (640, c)-(1, 1), COLMARC, BF
LINE (1, 1)-(a, 440), COLMARC, BF
LINE (1, 440)-(640, d), COLMARC, BF
LINE (b, 1)-(640, 440), COLMARC, BF
a = 20: b = 420: c = 20: d = 280
LINE (a, c)-(b, d + 30), 15, BF
xmin = 1: xmax = NNODOS * 2 - 1
ZMIN = 1: ZMAX = NNODOS * 2 - 1
NX = xmax: nz = ZMAX
DIM Z(nz), yTRI(NX, nz), xgraf(NX), ygraf(NX,
&nz), limizq(nz), limder(nz), liminf(nz), limsup(nz)
DELTAX = (xmax - xmin) / NX: DELTAZ =
&(ZMAX - ZMIN) / nz
PASOG = 0
FOR I = 1 TO NX
  x(I) = xmin + (I - 1) * DELTAX
  FOR j = 1 TO nz
    Z(j) = ZMIN + (j - 1) * DELTAZ
    yTRI(I, j) = T(I, j)
    PASOG = PASOG + 1
    Y1(PASOG) = T(I, j)
  NEXT j
NEXT I
YMIN = yTRI(1, 1): YMAX = yTRI(1, 1)
FOR I = 1 TO NX
  FOR j = 1 TO nz
    IF yTRI(I, j) < YMIN THEN YMIN = yTRI(I, j)
    IF yTRI(I, j) > YMAX THEN YMAX = yTRI(I, j)
  NEXT j
NEXT I
e = 200: f = 200: colcuad = 7
FOR j = 1 TO nz
  limizq(j) = e - (j - 1) * e / nz
  limder(j) = limizq(j) + (b - e)
```

```

limsup(j) = c + (j - 1) * (d - f) / nz
liminf(j) = limsup(j) + f
LINE (limizq(j) + 20, limsup(j))-(limder(j) - 10,
&limsup(j)), colcuad
LINE -(limder(j) - 10, liminf(j)), colcuad
IF j = 1 THEN color1 = 9 ELSE color1 =
&colcuad
LINE -(limizq(j) + 20, liminf(j)), color1
LINE -(limizq(j) + 20, limsup(j)), color1
NEXT j
xmingraf = xmin * e / (xmax - xmin)
ymingraf = YMIN * f / (YMAX - YMIN)
FOR j = 1 TO nz
  FOR I = 1 TO NX
    xgraf(I) = x(I) * e / (xmax - xmin) + limizq(j) -
&xmingraf + 20
    ygraf(I, j) = -yTRI(I, j) * f / (YMAX - YMIN) +
&liminf(j) + ymingraf
    PSET (xgraf(I), ygraf(I, j)), j
    IF I > 1 THEN LINE (xgraf(I), ygraf(I, j))-
&(xgraf(I - 1), ygraf(I - 1, j)), INT(j / 10 + 1)
    IF j > 1 THEN LINE (xgraf(I), ygraf(I, j))-
&(xgraf(I) + e / nz, ygraf(I, j - 1)), INT(I / 10) + 1
    NEXT I
  NEXT j
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
CLS
SCREEN 12
*** GRAFICADOR BIDIMENSIONAL *****
a = 4: b = 636: c = 4: d = 436: COLMARC = 4
LINE (a, c)-(b, d), 3, BF
LINE (640, c)-(1, 1), COLMARC, BF
LINE (1, 1)-(a, 440), COLMARC, BF
LINE (1, 440)-(640, d), COLMARC, BF
LINE (b, 1)-(640, 440), COLMARC, BF
a = 20: b = 620: c = 20: d = 420
LINE (a, c)-(b, d), 15, BF
xmin = 1: xmax = (NNODOS * 2 - 1) ^ 2
COLOR 14:
DELTAx=(xmax - xmin) / (NNODOS * 2 - 1) ^ 2 - 1
x(0) = xmin - DELTAx
REM VALORES DE LA FUNCIÓN
FOR I = 1 TO (NNODOS * 2 - 1) ^ 2
y(I) = Y1(I): x(I) = I
COLOR 3
NEXT I
REM VALORES EXTREMOS DE LA FUNCIÓN
YMIN = y(1): YMAX = y(1)
FOR I = 2 TO (2 * NNODOS + 1) ^ 2 - 1
IF YMIN > y(I) THEN YMIN = y(I)
IF YMAX < y(I) THEN YMAX = y(I)
NEXT I

```

```

PRINT "TMIN="; YMIN, "TMAX="; YMAX
xmingraf = 0: xmaxgraf = xmax: ymingraf = YMIN
ymaxgraf = YMAX
scalex = 2 * (neb + 1) - 1: scaley = 1
1100
izq = 40: der = 400: sup = 20: inf = 300
LINE (0, 0)-(639, 440), 15, BF: COLOR 9
LINE (izq, sup)-(izq, inf)
LINE (izq, sup)-(der, sup)
LINE (izq, inf)-(der, inf)
LINE (der, sup)-(der, inf)
PASX = xmaxgraf + ABS(xmingraf)
PASY = ymaxgraf + ABS(ymingraf)
EJEY = izq + (der - izq) / PASX * ABS(xmingraf)
EJEX = sup + (inf - sup) / PASY * ymaxgraf
LINE (EJEY, sup)-(EJEY, inf)
LINE (izq, EJEX)-(der, EJEX)
REM normalización de escala
NY = INT(PASY / scaley)
NX = INT(PASX / scalex)
DIM DIVX(NX), DIVY(NY)
DIVX(1) = izq: DIVY(1) = inf
FOR I = 2 TO NX
DIVX(I) = DIVX(I - 1) + scalex * (der - izq) / PASX
COLOR 7
LINE (DIVX(I), EJEX - 2)-(DIVX(I), EJEX + 2)
LINE (DIVX(I), sup)-(DIVX(I), sup + 2)
LINE (DIVX(I), inf - 2)-(DIVX(I), inf)
NEXT I
FOR j = 2 TO NY
DIVY(j) = DIVY(j - 1) - scaley * (inf - sup) / PASY
LINE (EJEY - 3, DIVY(j))-(EJEY + 3, DIVY(j))
LINE (izq, DIVY(j))-(izq + 3, DIVY(j))
LINE (der - 3, DIVY(j))-(der, DIVY(j))
NEXT j
1200
FOR I = 1 TO (NNODOS * 2 - 1) ^ 2
xn(I) = x(I) * (der - izq) / PASX + EJEY
yn(I) = -Y1(I) * (inf - sup) / PASY + EJEX
COLOR 3
PSET (xn(I) - 1, yn(I) + 1)
PSET (xn(I) + 1, yn(I))
PSET (xn(I) - 1, yn(I) - 1)
PSET (xn(I), yn(I) + 1)
PSET (xn(I), yn(I) - 1)
PSET (xn(I) + 1, yn(I) + 1)
PSET (xn(I) + 1, yn(I))
PSET (xn(I) + 1, yn(I) - 1)
NEXT I
FOR j = 1 TO (NNODOS * 2 - 1) ^ 2 - 1
COLOR 4
LINE (xn(j), yn(j))-(xn(j + 1), yn(j + 1))
NEXT j
END

```

5.5.1. Resultados de la Simulación Computacional.

Los resultados de los cálculos se despliegan mediante un par de gráficas. En la primera de ellas se visualiza la dependencia de la temperatura con las coordenadas, $T(x,y)$, por medio de la subrutina de graficación tridimensional, siendo el resultado el siguiente:

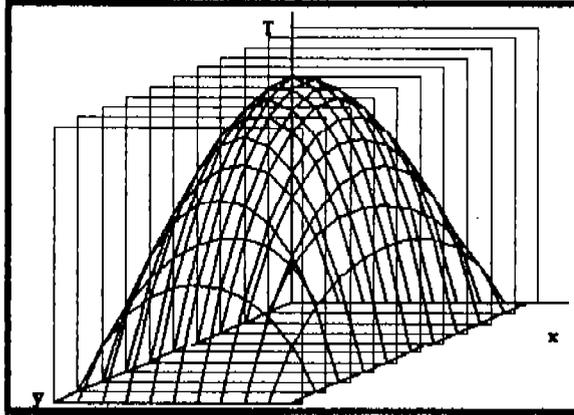


Fig. 5.4.a. Distribución de temperaturas en la superficie de una placa con densidad superficial de generación interna de calor constante y perímetro isotérmico .

Obsérvese la distribución simétrica de temperaturas tanto respecto a la dirección x como en y , lo cual es resultado de la homogeneidad en la producción de calor en la superficie de la placa y la temperatura isotérmica a lo largo de su perímetro.

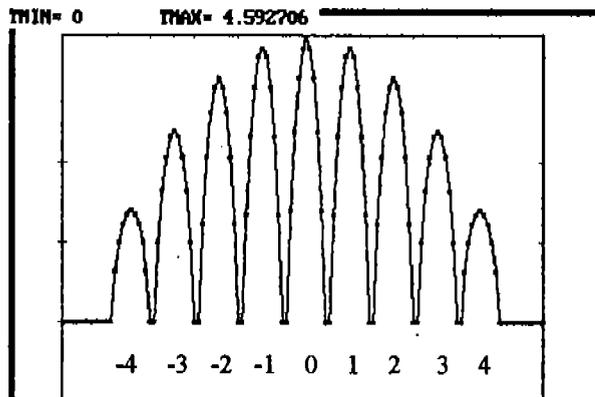


Fig. 5.4.b. Distribución de temperaturas en la superficie de una placa con densidad superficial de generación interna de calor constante y perímetro isotérmico . Cortes transversales.

En el segundo desplegado gráfico (fig. 5.4b) por medio de la subrutina de graficación bidimensional, se visualiza la distribución de temperaturas para la mitad de la placa. Dicha mitad se divide en niveles mediante cortes transversales y se especifica gráficamente el perfil de temperaturas en cada nivel, siendo más fácil leer el valor numérico correspondiente a la temperatura de cada nodo que en la gráfica 3-D. El esquema que se presenta a continuación muestra dicha división en niveles:

				4				
				3				
				2				
				1				
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
				-1				
				-2				
				-3				
				-4				

Los resultados mostrados corresponden a una especificación de 9 elementos en la base de la placa. La simetría en la distribución de la temperatura permite que este último desplegado gráfico sea general para cualquier corte en x o y .

Un pequeño cambio en la instrucción donde se especifica la intensidad de la fuente permite resolver un problema ligeramente diferente, por ejemplo, si en el bloque IX se especifica una variación sinusoidal de la intensidad de producción de calor con las coordenadas x e y , digamos:

$$Q_{\text{prod}} = q \sin [(x^2 + y^2)/8]$$

los resultados correspondientes a la distribución de temperaturas en la superficie de la placa son los siguientes (considerando 19 elementos en la base de la placa) :

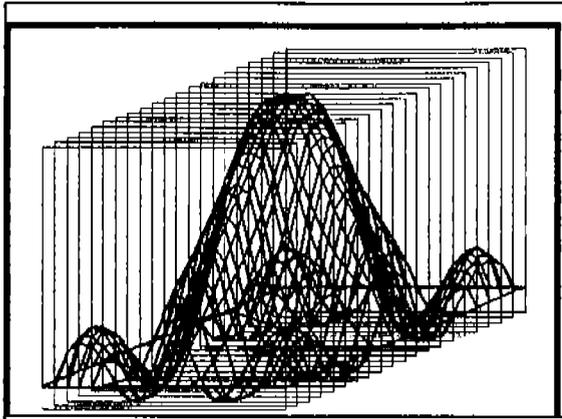


Fig. 5.5.a. Distribución de temperatura en una placa con generación interna de calor no homogénea y frontera isotérmica. Gráfica 3-D
 $Q = 5q \sin(x^2 + y^2) / 8$

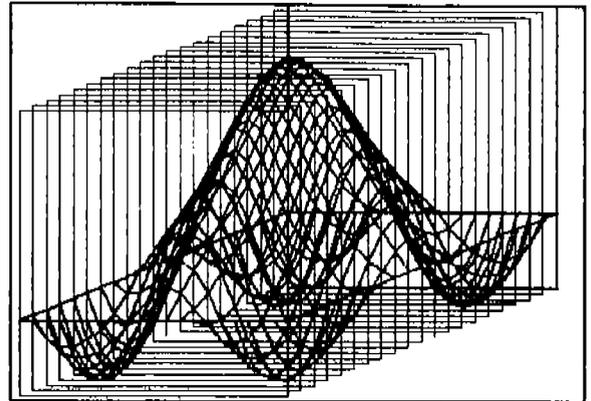


Fig.5.6.a. Representación 3-D de la distribución de temperatura en una placa con generación no homogénea de calor y perímetro isotérmico
 $Q = 2q \cos(x^2 + y^2) / 18$

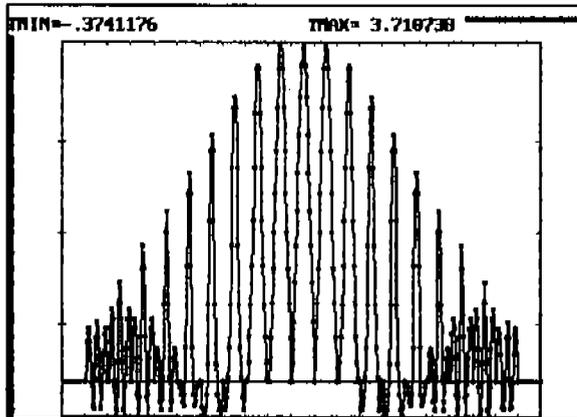


Fig. 5.5.b. Distribución de temperatura en una placa con generación interna de calor no homogénea y frontera isotérmica. Gráfica 2-D
 $Q = 5q \sin(x^2 + y^2) / 8$

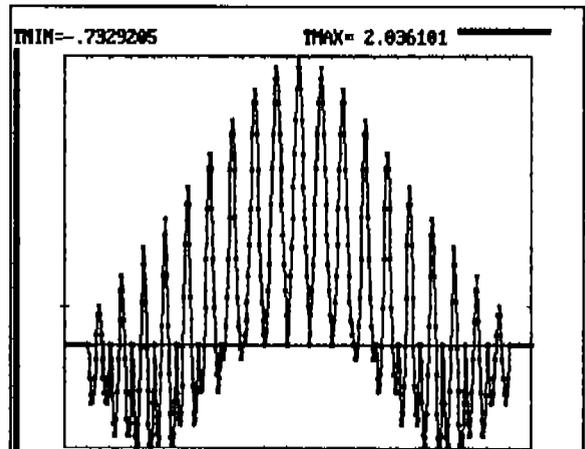


Fig.5.6.b. Representación 3-D de la distribución de temperatura en una placa con generación no homogénea de calor y perímetro isotérmico.
 $Q = 2q \cos(x^2 + y^2) / 18$

A partir de la gráfica 5.5.a se puede observar que la distribución de temperaturas en la placa sigue siendo simétrica con respecto a los ejes x e y .

Si el calor producido varía en forma cosenoidal siguiendo la función:

$$Q_{\text{prod}} = q \cdot 2 \cos[(x^2 + y^2) / 18],$$

Modificando nuevamente el bloque IX, se caracterizaría el respectivo perfil de temperaturas. Entonces los resultados son:

Por otra parte, las condiciones de frontera también pueden modificarse de manera sencilla. Si en el bloque XI en lugar de considerar frontera isotérmica se toma en cuenta una distribución de temperaturas en los bordes que varíe en forma sinusoidal, por ejemplo:

$$T_{\text{borde}} = 3 \sin(y/3) \quad \text{para el borde vertical}$$

$$T_{\text{borde}} = 3 \sin(x/3) \quad \text{para borde horizontal}$$

Con el sistema de coordenadas en el centro de la placa, los resultados, de la simulación computacional serían los siguientes:

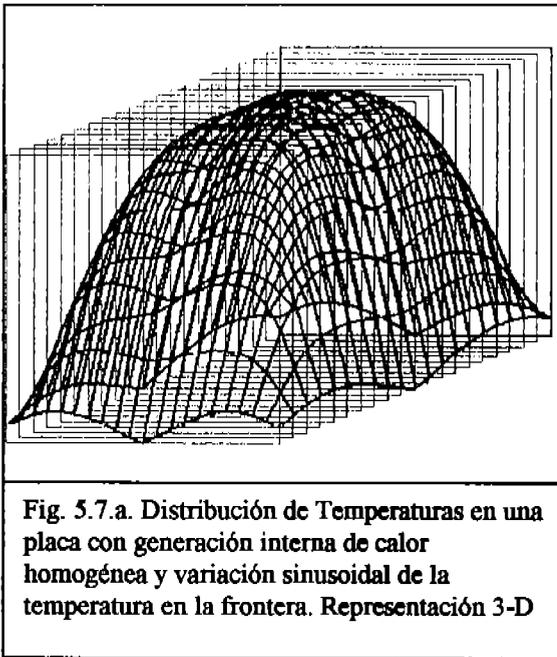


Fig. 5.7.a. Distribución de Temperaturas en una placa con generación interna de calor homogénea y variación sinusoidal de la temperatura en la frontera. Representación 3-D

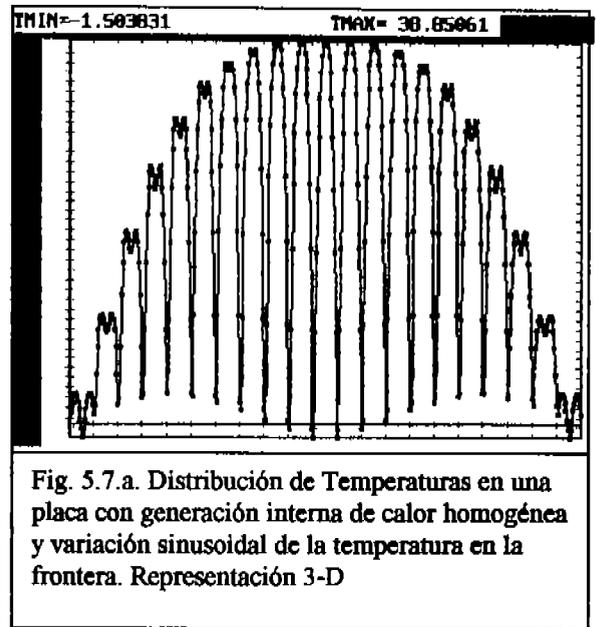


Fig. 5.7.a. Distribución de Temperaturas en una placa con generación interna de calor homogénea y variación sinusoidal de la temperatura en la frontera. Representación 3-D

En la siguiente sección se analizará la aplicación de las ecuaciones de transferencia de calor bidimensional a la determinación de la distribución de temperaturas en aletas de enfriamiento, introduciendo el manejo de condiciones de frontera adiabáticas y convectivas

5.6. Transporte Bidimensional de Calor en Estado Estacionario a Través de Aletas de Enfriamiento.

Uno de los problemas más interesantes respecto a las aplicaciones prácticas de la transferencia bidimensional de calor en estado estacionario es el de la optimización de la geometría de aletas de enfriamiento. Dichos dispositivos se utilizan para incrementar el área de transferencia de calor de equipos industriales o componentes electrónicos y disipar eficientemente el exceso de energía térmica hacia el medio ambiente circundante. La eficacia de la aleta se mide en términos de la competencia entre la energía disipada y el incremento del área. Debe existir una geometría óptima en la que el cociente entre el calor disipado y el incremento del área sea máximo. La primera etapa en la optimización de las aletas de enfriamiento es la caracterización del perfil de temperaturas en el interior de la aleta y el cálculo del calor disipado por unidad de área. El segundo paso corresponde a ensayar con diferentes geometrías y obtener datos que en una tercera etapa serían procesados por algún

algoritmo de optimización como el de escalamiento de montañas o mediante algoritmos genéticos, para dar finalmente con la geometría óptima para una aplicación específica. En esta sección se presenta un algoritmo de cómputo que tiene como objetivo determinar el perfil de temperaturas en el interior de una aleta de enfriamiento, dando la posibilidad al usuario de modificar la geometría de la aleta y las condiciones de frontera.

La ecuación diferencial que caracteriza el fenómeno de transferencia de calor a lo largo de la aleta es la ecuación 5.1, y para el transporte bidimensional en estado estacionario, se convierte en la ecuación 5.2, con el término Q correspondiendo a la transferencia convectiva a través de la superficie de la aleta, es decir:

$$k\nabla^2 T + h(T - T_{amb}) (\text{Área/Volumen}) = 0 \quad (5.30)$$

Para una aleta metálica en la que se transfiere calor por convección natural hacia el aire circundante, la transferencia de calor por conducción domina sobre las pérdidas convectivas y la formulación presentada en las secciones 5.2 y 5.3 es válida. Las condiciones de frontera quedan dadas por las expresiones (5.3) y (5.4), con $h = 0$ en la condición de Neumann para las fronteras adiabáticas y h distinta de cero para las fronteras convectivas.

Considerando elementos finitos triangulares y funciones de aproximación lineales en x y en y , para el enésimo elemento, se tendría la siguiente expresión para la distribución de temperaturas:

$$T_n = a_n x + b_n y + c_n \quad (5.31)$$

Donde a_n , b_n y c_n son los parámetros a optimizar y son función de las temperaturas nodales T_{n1} , T_{n2} y T_{n3} en los vértices del elemento (x_{n1}, y_{n1}) , (x_{n2}, y_{n2}) y (x_{n3}, y_{n3}) , respectivamente. De acuerdo a la discusión presentada en el capítulo 3 para elementos finitos triangulares:

$$a_n = (1/2A)(a_{n1}T_{n1} + a_{n2}T_{n2} + a_{n3}T_{n3}) \quad (5.32)$$

$$b_n = (1/2A)(b_{n1}T_{n1} + b_{n2}T_{n2} + b_{n3}T_{n3}) \quad (5.33)$$

con:

$$a_{n1} = y_{n2} - y_{n3}; a_{n2} = y_{n3} - y_{n1}; a_{n3} = y_{n1} - y_{n2} \quad (5.34 \text{ a, b y c})$$

$$b_{n1} = x_{n3} - x_{n2}; b_{n2} = x_{n1} - x_{n3}; b_{n3} = x_{n2} - x_{n1} \quad (5.35 \text{ a, b y c})$$

$$2A = x_{n1}(y_{n2} - y_{n3}) + x_{n2}(y_{n3} - y_{n1}) + x_{n3}(y_{n1} - y_{n2}) \quad (5.36)$$

El funcional (5.10) puede expresarse como:

$$I = \epsilon \sum_i \int \left[\frac{k}{2} \nabla T^2 - QT \right] dA_n + \epsilon \sum_j \int q T d\ell_m + \epsilon \sum_k \int \frac{h}{2} (T - T^3) d\ell_m \quad (5.37)$$

ecuación en la que q representa el calor que se produce en la frontera m y que para condiciones adiabáticas es $q=0$. La primera sumatoria se realiza sobre el número total de elementos, la segunda se realiza sobre todas las fronteras adiabáticas y la tercera sobre todas las fronteras convectivas. Las

fronteras isotérmicas se consideran al momento de modificar el sistema de ecuaciones ensamblado.

Al integrar el primer término a lo largo de la superficie de un elemento se obtiene:

$$\int \left[\frac{k}{2} (a_n^2 + b_n^2) - QT \right] dA = A \left[\frac{k}{2} (a_n^2 + b_n^2) \right] - A \frac{Q}{3} (T_{n1} + T_{n2} + T_{n3}) \quad (5.38)$$

La integración a lo largo de la frontera m que cumple con los requerimientos de producción constante de calor q , da:

$$\int_0^{L_m} q \left[T_{m1} + \frac{1}{L_m} (T_{m2} - T_{m1}) \ell \right] d\ell = q \frac{T_{m1} + T_{m2}}{2} L_m \quad (5.39)$$

Donde L_m es la longitud de la frontera.

Para condiciones de frontera convectivas la última integral da:

$$\frac{1}{2} \int_0^{L_m} h \left[T_{m1} - T_{m3} + \frac{\ell}{L_m} (T_{m2} - T_{m1}) \right]^2 d\ell = \frac{L_m h}{2} \left[\frac{T_{m1}^2 + T_{m1}T_{m2} + T_{m2}^2}{3} - T_{m3}(T_{m1} + T_{m2}) + T_{m3}^2 \right] \quad (5.40)$$

Al minimizar el funcional, el procedimiento de integración anterior da como resultado un sistema de ecuaciones simultáneas de dimensión igual al número de nodos.

Suponiendo que T_{ni} representa la temperatura nodal del vértice i del elemento n , con $i = 1, 2, 3$, el proceso de minimización de la funcional lleva a:

$$\frac{\partial I}{\partial T_{ni}} = \sum_{\text{todos los elementos que contienen a } T_{ni}} \frac{\partial}{\partial T_{ni}} \left\{ A \left[\frac{k}{2} (a_n^2 + b_n^2) - \frac{Q}{3} (T_{n1} + T_{n2} + T_{n3}) \right] \right\} \quad (5.41)$$

donde las derivadas parciales dentro de la sumatoria corresponden a:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T_{n1}}\right)_{\text{enésimo elemento}} = \frac{k}{4A} \begin{bmatrix} (a_{n1}^2 + b_{n1}^2)T_{n1} \\ +(a_{n1}a_{n2} + b_{n1}b_{n2})T_{n2} \\ +(a_{n1}a_{n3} + b_{n1}b_{n3})T_{n3} \end{bmatrix} - \frac{QA}{3}$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T_{n2}}\right)_{\text{enésimo elemento}} = \frac{k}{4A} \begin{bmatrix} (a_{n2}a_{n1} + b_{n2}b_{n1})T_{n1} \\ +(a_{n2}^2 + b_{n2}^2)T_{n2} \\ +(a_{n2}a_{n3} + b_{n2}b_{n3})T_{n3} \end{bmatrix} - \frac{QA}{3}$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T_{n3}}\right)_{\text{enésimo elemento}} = \frac{k}{4A} \begin{bmatrix} (a_{n3}a_{n1} + b_{n3}b_{n1})T_{n1} \\ +(b_{n2}b_{n3} - a_{n2}a_{n3})T_{n2} \\ +(a_{n3}^2 + b_{n3}^2)T_{n3} \end{bmatrix} - \frac{QA}{3}$$

(5.42 a, b y c)

Para el enésimo elemento frontera con producción de calor q a lo largo de ella, la optimización del funcional conduce a :

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T_{m1}}\right)_{\text{enésimo elemento}} = \frac{qL_m}{2} \quad (5.43 \text{ a})$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T_{m2}}\right)_{\text{enésimo elemento}} = \frac{qL_m}{2} \quad (5.43 \text{ b})$$

Mientras que para condición de frontera convectiva en el enésimo elemento frontera, se tiene:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T_{m1}}\right)_{\text{enésimo elemento}} = \frac{hL_m}{6}(2T_{m1} + T_{m2} - 3T_3) \quad (5.44 \text{ a})$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T_{m2}}\right)_{\text{enésimo elemento}} = \frac{hL_m}{6}(T_{m1} + 2T_{m2} - 3T_3) \quad (5.44 \text{ b})$$

En el caso de frontera adiabática, la derivada del funcional en la frontera puede expresarse como:

$$\frac{\partial I}{\partial T_m} = \frac{hL_m}{2}(T_{m1} + T_{m2} - 2T_3) \quad (5.45)$$

Finalmente, la minimización total del funcional ($\partial I / \partial T_n = 0$) puede escribirse como un sistema de ecuaciones simultáneas lineales:

$$[A] [T] = [B] \quad (5.46)$$

Igualando a cero la suma total de todas las operaciones anteriores que involucran al conjunto completo de los elementos interiores y de frontera, se obtiene el sistema de ecuaciones simultáneas mencionado con dimensión igual al número de puntos nodales.

El ensamblaje del sistema de ecuaciones se realiza en la forma en que se explicó en el capítulo 2. Para este caso, el enésimo elemento triangular contiene los vértices $v1_n$, $v2_n$, $v3_n$, como se ilustra en la figura 5.8 En la matriz global se llenan las casillas correspondientes a los números de nodos asignados a cada vértice con las correspondientes ecuaciones de aproximación que dependen de si el elemento es interno o si es un elemento frontera.

De acuerdo a lo que se ha desarrollado en esta sección, dichas ecuaciones son:

$$a_{vi vj} = \frac{k}{4A}(a_{ni}a_{nj} + b_{ni}b_{nj}) \quad (5.47)$$

que en forma explícita para cada vértice del enésimo elemento dan:

$$a_{v1 v1} = \frac{k}{4A}(a_{n1}^2 + b_{n1}^2) \quad (5.47 \text{ a})$$

$$a_{v1 v2} = \frac{k}{4A}(a_{n1}a_{n2} + b_{n1}b_{n2}) \quad (5.47 \text{ b})$$

$$a_{v1 v3} = \frac{k}{4A}(a_{n1}a_{n3} + b_{n1}b_{n3}) \quad (5.47 \text{ c})$$

$$a_{v2 v1} = \frac{k}{4A}(a_{n2}a_{n1} + b_{n2}b_{n1}) \quad (5.47 \text{ d})$$

$$a_{v2 v2} = \frac{k}{4A}(a_{n2}^2 + b_{n2}^2) \quad (5.47 \text{ e})$$

$$a_{v2 v3} = \frac{k}{4A}(a_{n2}a_{n3} + b_{n2}b_{n3}) \quad (5.47 \text{ f})$$

$$a_{v3 v1} = \frac{k}{4A}(a_{n3}a_{n1} + b_{n3}b_{n1}) \quad (5.47 \text{ g})$$

$$a_{v3 v2} = \frac{k}{4A}(a_{n3}a_{n2} + b_{n3}b_{n2}) \quad (5.47 \text{ h})$$

$$a_{v3 v3} = \frac{k}{4A}(a_{n3}^2 + b_{n3}^2) \quad (5.47 \text{ i})$$

Diferenciando un tercio del calor producido en cada elemento (Q) a cada uno de los vértices, es decir:

$$b_{v1} = b_{v2} = b_{v3} = QA / 3 \quad (5.48)$$

Luego, suponiendo que $v_1(m)$ y $v_2(m)$ denotan los vértices del elemento frontera m :

- Si la frontera es de producción constante de calor en el borde ($q = \text{constante}$) o adiabática ($q=0$):

$$b_{v_1} = b_{v_2} = q L_m / 2 \quad (5.49)$$

- Si la frontera es convectiva, entonces a los vértices en los bordes, v_1 y v_2 se les suman los siguientes términos:

$$a_{v_1 v_1} = a_{v_2 v_2} = h L_m / 3 \quad (5.50)$$

$$a_{v_1 v_2} = a_{v_2 v_1} = h L_m / 6 \quad (5.51)$$

$$b_{v_1} = b_{v_2} = h L_m T_{amb} / 2 \quad (5.52)$$

- Si la frontera es isotérmica, la temperatura en los vértices v_1 y v_2 es conocida, consecuentemente los coeficientes $a_{v_1 v_1}$ y $a_{v_2 v_2}$ se hacen iguales a 1, todos los demás coeficientes de los respectivos renglones y columnas se igualan a cero y en el vector de términos independientes se especifica el

valor de la temperatura conocida, mediante el procedimiento descrito en la sección 5.4.

La eliminación de los nodos de temperatura conocida reduce el tamaño del sistema de ecuaciones a resolver, obteniéndose un sistema de ecuaciones lineales simultáneas de dimensión igual al número de temperaturas desconocidas.

$$[A'] [T] = [B'] \quad (5.53)$$

La matriz de coeficientes que se obtiene al final de este proceso de ensamblaje es tridiagonal convergente.

En la siguiente sección se explica el diagrama de bloques y el algoritmo de cómputo para el cálculo de la distribución de temperaturas en aletas de enfriamiento.

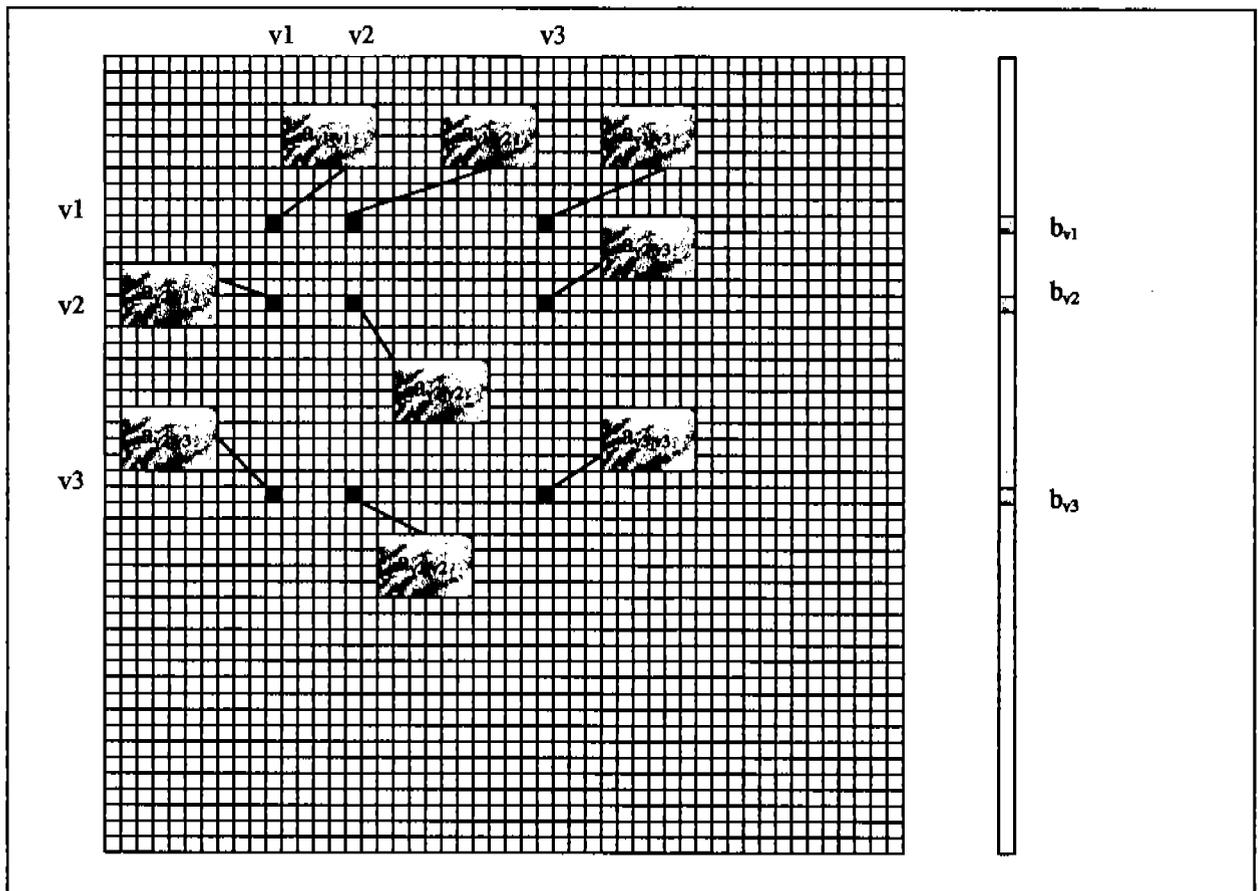
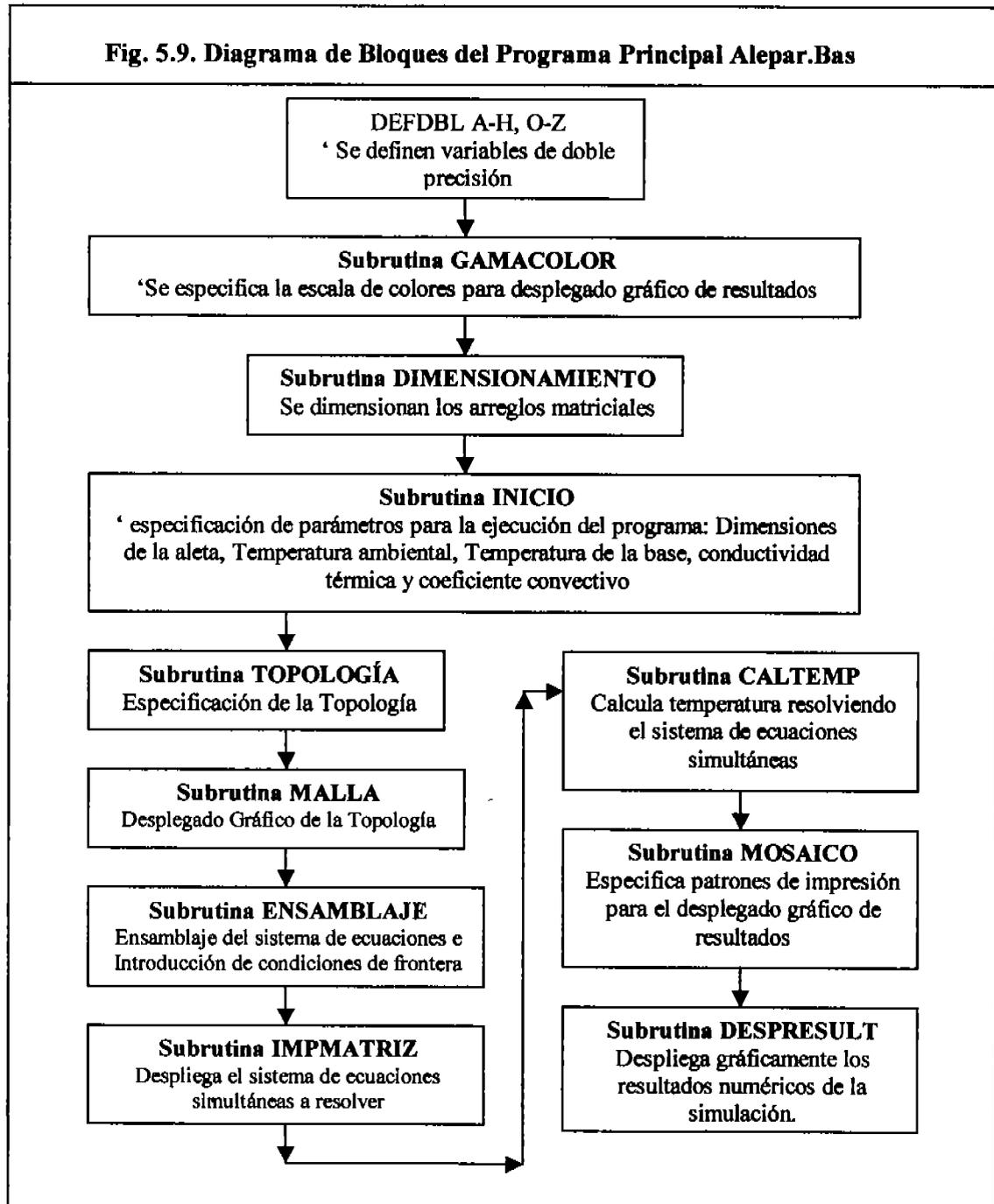


Figura 5.8.- Especificación de coeficientes para el ensamblaje del sistema de ecuaciones simultáneas lineales para transferencia de calor por conducción a lo largo de una aleta de enfriamiento.

5.6.1. Diagrama de Bloques del Programa Alepar.Bas.

A continuación se presenta un conjunto de diagramas de bloques que representan el algoritmo de cómputo para la determinación de los perfiles de temperatura en una aleta de enfriamiento de perfil parabólico. En primera instancia se presenta el diagrama de bloques del programa principal, seguido por cada una de las subrutinas que lo conforman.

Este programa está construido de forma tal que el usuario puede modificar fácilmente la geometría y las condiciones de frontera accediendo a las subrutinas topología y ensamblaje que conforman el programa principal. El perfil geométrico de la aleta puede especificarse como una función continua o puede indicarse la altura de la aleta en cada coordenada x a lo largo de ella.



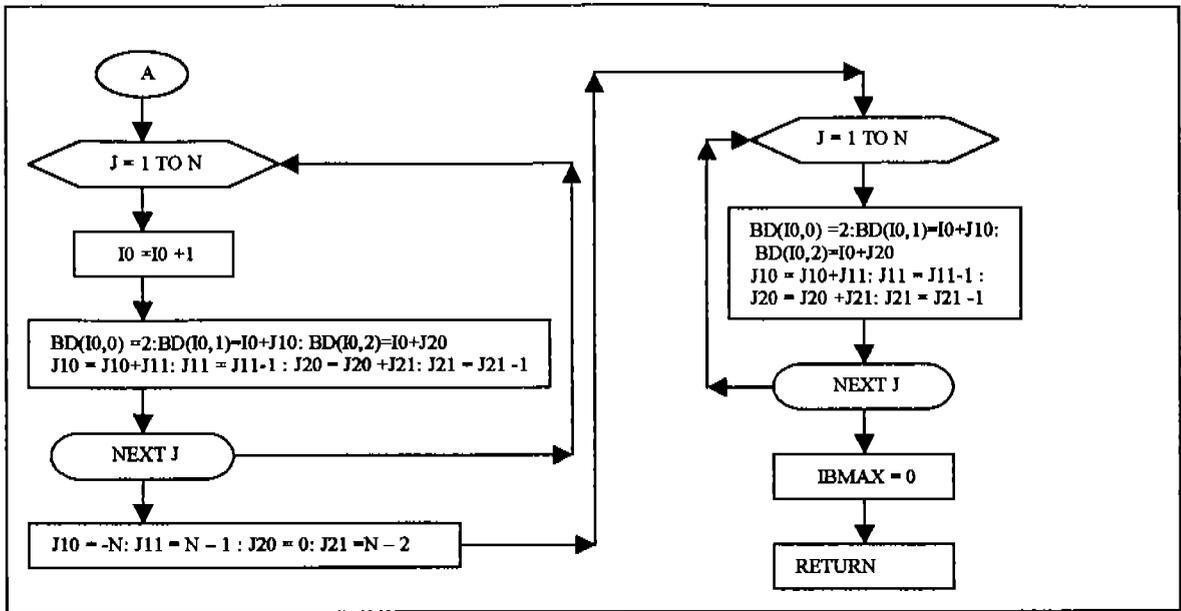


Fig. 5.11. Ejemplo de Desplado Gráfico de la Topología de una Aleta Parabólica

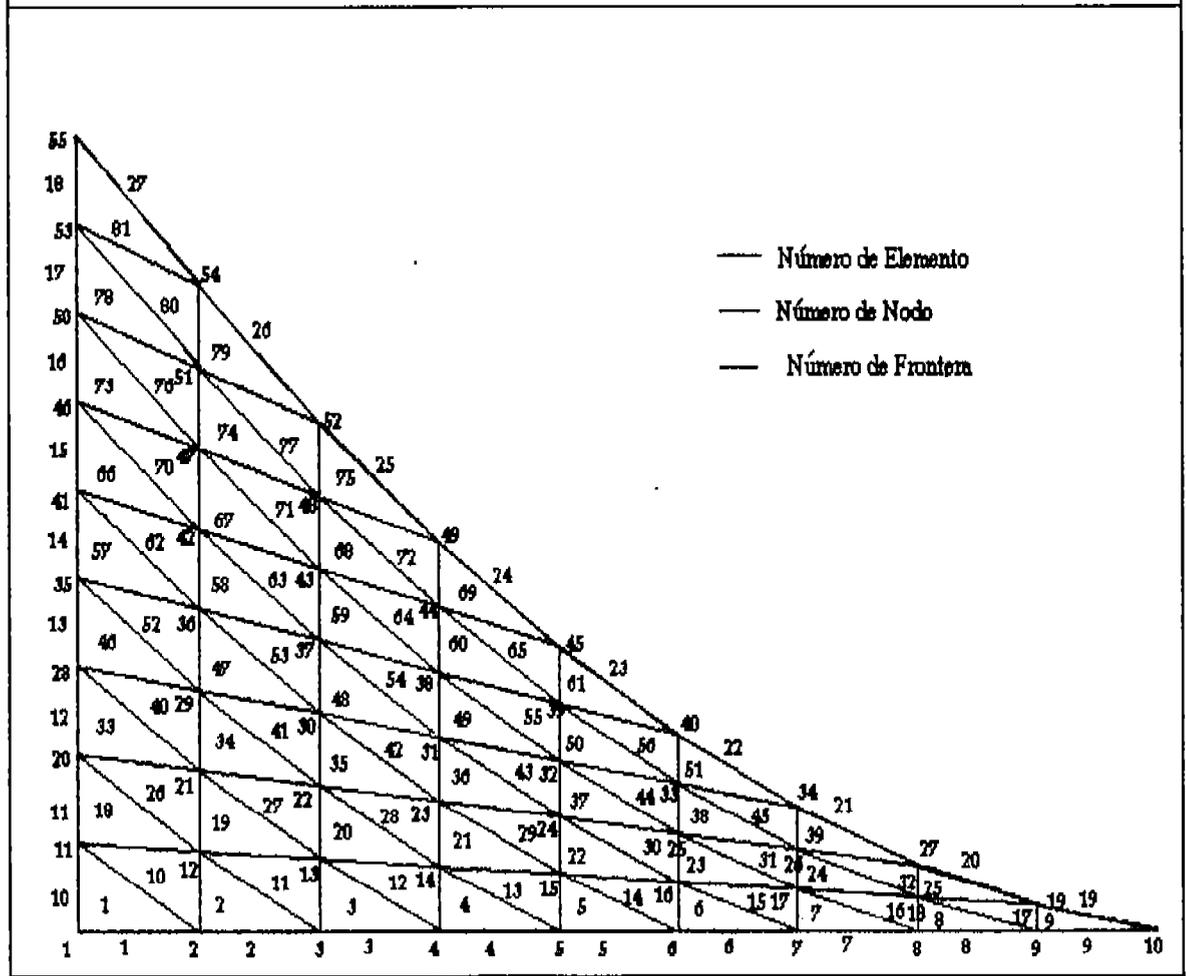
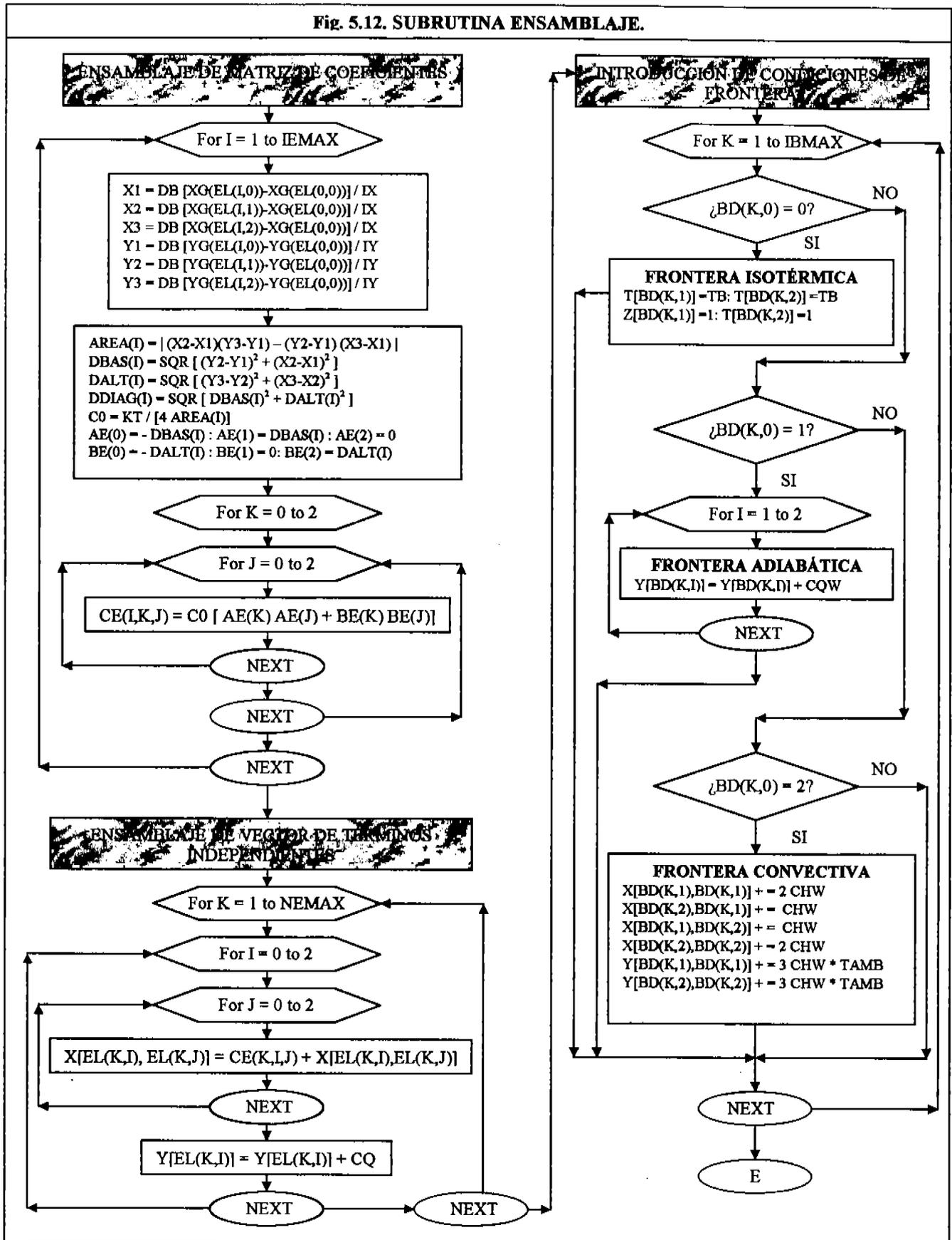
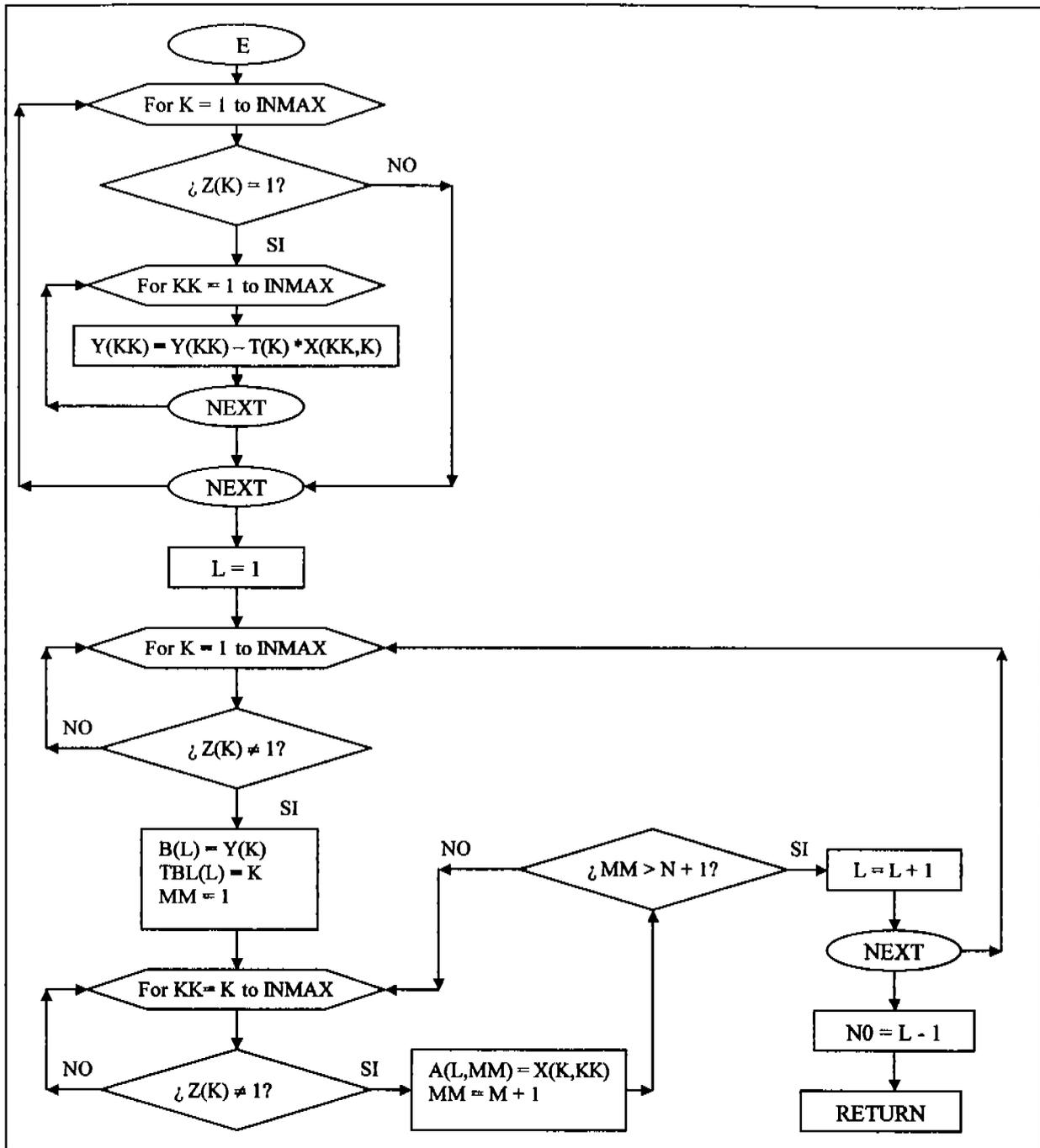


Fig. 5.12. SUBROUTINA ENSAMBLAJE.

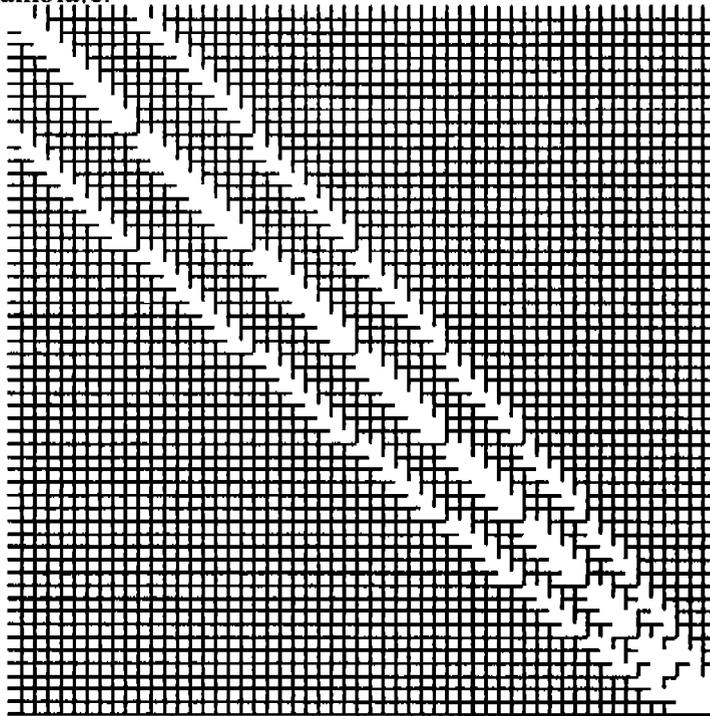




El siguiente par de figuras muestra el desplegado gráfico correspondiente al proceso de ensamblaje de las ecuaciones locales para obtener el sistema de ecuaciones global, que aparecen en la pantalla del monitor. En la primera de ellas se puede observar que se trata de un sistema predominantemente diagonal simétrico de dos bandas convergentes. Las celdas en rojo indican coeficientes diferentes a cero. El valor numérico de dichos coeficientes está dado por la ecuación (5.47).

En la segunda figura puede observarse el resultado de la introducción de las condiciones de frontera. Los valores numéricos de los elementos de la matriz global de coeficientes cambian según las ecuaciones (5.50) y (5.51). Nótese también que los términos independientes se modifican al introducir las condiciones límite, pasando de su formulación de acuerdo a la ecuación (5.48) a la correspondiente a (5.49) o (5.52).

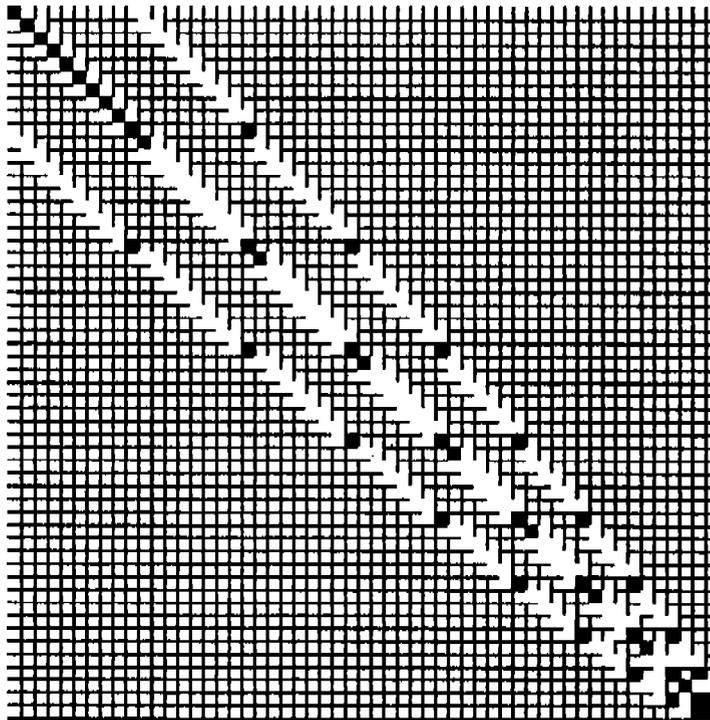
Ensamblaje:



=



Introducción de condiciones de Frontera:



=



Fig.5.12.a. Ensamblaje del sistema de ecuaciones

Fig. 5.13. DIAGRAMA DE BLOQUES DE LA SUBROUTINA CALTEMP

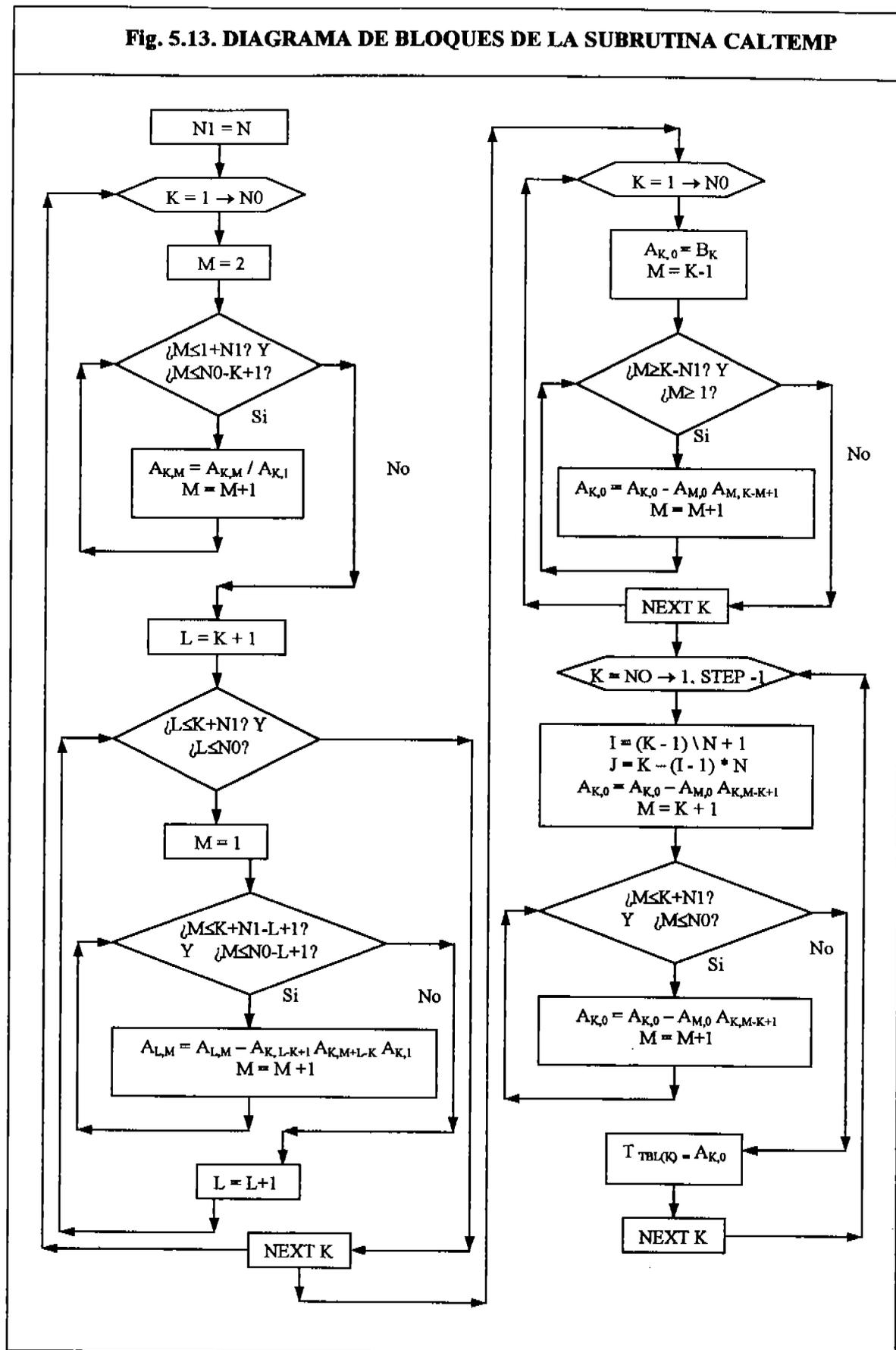
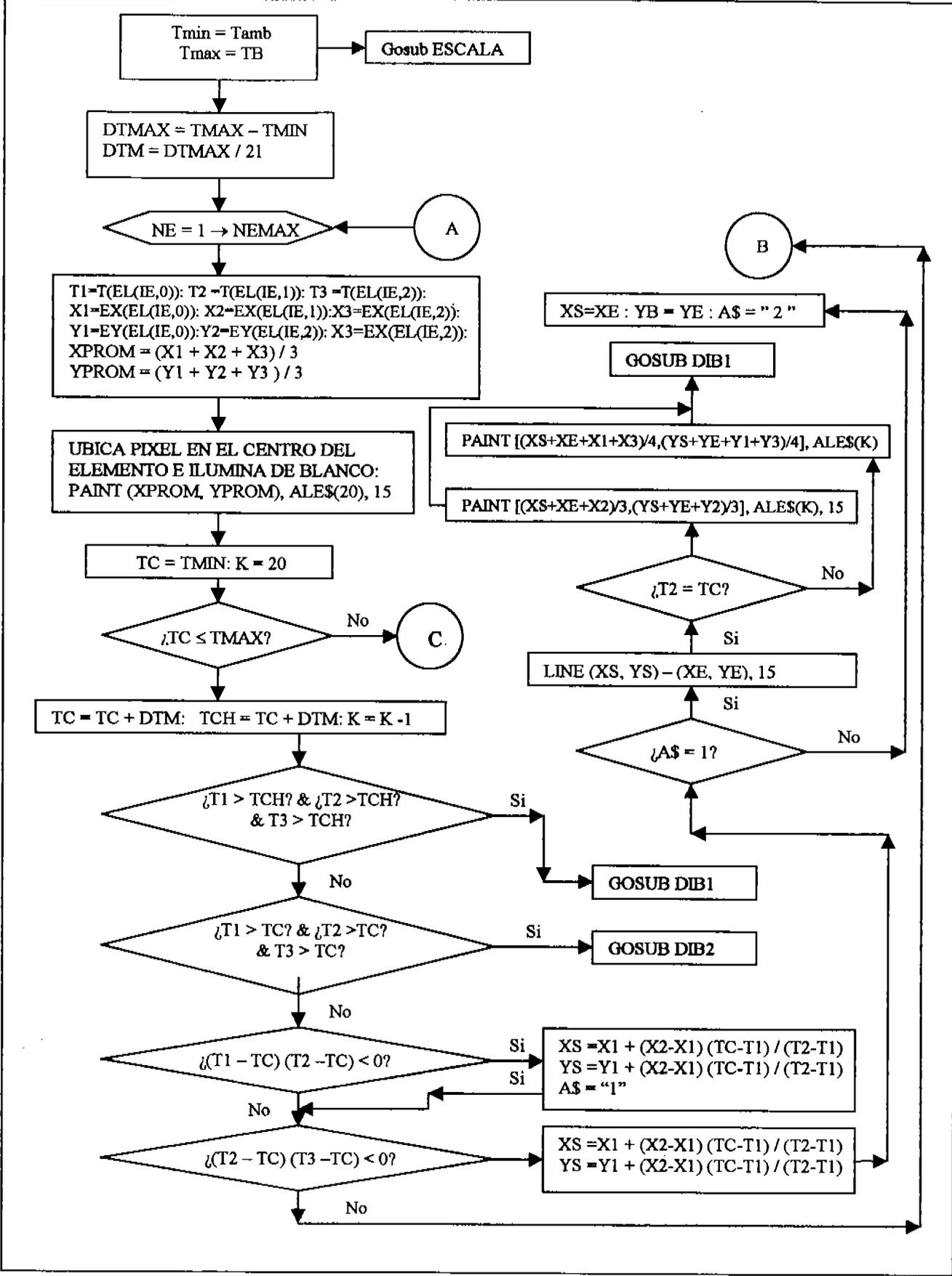
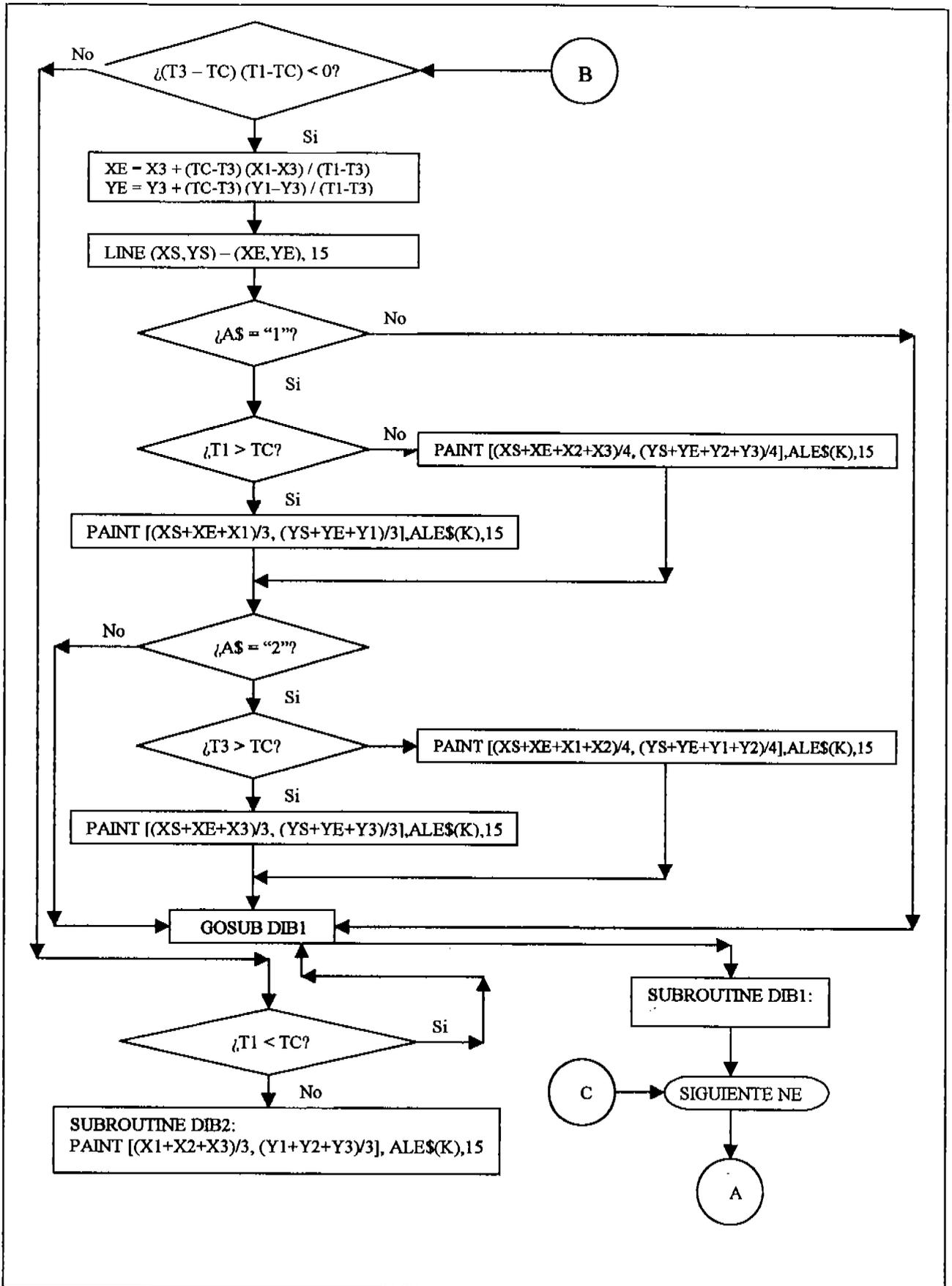


Fig. 5.14. Diagrama de Bloques Subrutina DESPRESULT





5.6.2. Algoritmo de Cómputo del Programa Alepar.bas

A continuación se presenta el código en lenguaje Qbasic para la simulación computacional del comportamiento de aletas de enfriamiento con perfil geométrico correspondiente a parábolas cúbicas caladas.

```

DEFDBL A-H, O-Z
GOSUB GAMACOLOR: 'ESCALA DE COLORES
GOSUB DIMENSIONAMIENTO: 'ARREGLOS MATRICIALES
GOSUB INICIO: 'MENÉ DE INICIO
GOSUB TOPOLOGIA: 'ESPECIFICA TOPOLOGÍA
GOSUB MALLA: 'IMPRESIÒN DE LA TOPOLOGÍA
GOSUB ENSAMBLAJE: 'ENSAMBLAJE E INTRODUCCIÒN DE CONDICIONES DE FRONTERA
GOSUB IMPMATRIZ: 'despliega los elementos de la mat.
GOSUB CALTEMP: 'c lculo de la temperatura
GOSUB MOSAICO: 'patrones de impresiòn
GOSUB DESPRESULT: 'despliega los resultados
GOSUB CALFLUX: 'balance de calor
GOSUB IMPRFLUX: 'calcula la relaciòn de transf. calor
FIN: 'fin del tratamiento
END

'***** SUBRUTINAS *****
'***** ESPECIFICACIÒN DE LA ESCALA DE COLORES*****
GAMACOLOR: 'ESPECIFICA ESCALA DE COLORES
SCREEN 12 ' MODO GRÀFICO DE ALTA RESOLUCIÒN
GBLANC% = 15: GAMAR% = 14: GCIEL% = 11: GVERD% = 10: GVIOLET% = 13: GROSÍ% = 12:
GAZUL% = 9
GNEGR% = 0: GIL% = 4
COLOR GBLANC%: CLS
ON KEY(30) GOSUB FIN: KEY(30) ON
IMAX = 82: JMAX = 10
RETURN

'***** ARREGLOS MATRICIALES Y PANTALLA *****
DIMENSIONAMIENTO:
DIM X(IMAX, IMAX), Y(IMAX), Z(IMAX), T(IMAX), EX(IMAX), EY(IMAX)
DIM XG(IMAX), YG(IMAX)
DIM TBL(IMAX), EL(IMAX, 2), BD(IMAX, 2), CE(2, 2)
DIM A(IMAX, JMAX), B(IMAX)
DIM ALE$(20), AREA(82), LONGIT(81), TPROM(82), QCONV(82), aguj(81, 3, 2)
RETURN

'***** MENÉ DE INICIO *****
INICIO:
CLS : N = 9
LINE (0, 0)-(640, 440), 15, BF
COLOR GIL%: LOCATE 6, 21: PRINT "CONDUCCIÒN TÈRMICA EN UNA ALETA VIA ELEMENTO
FINITO"
COLOR GCIEL%: LOCATE 9, 21: PRINT USING "Nºmero de MALLAS(<9)= #"; N
COLOR GIL%: LOCATE 9, 44: INPUT "", A$:
IF A$ <> "" THEN N = VAL(A$)
IF N > 8 OR N < 3 THEN N = 9
ALT = .05: ANCH = .05: GROS = .001: TB = 30: TAMB = 10: KT = .21: HF = 100
RETURN

'***** ESPECIFICACIÒN DE TOPOLOGÍA *****
TOPOLOGIA:
N1 = N - 1: IX% = 560 / (N * 8) - 1: IY% = 360 / (N * 16) - 1
IX = IX% * 9: IY = IY% * 18
LX0 = 16 + 8: LY0 = 420 - 8: LX = IX * N: LY = IY * N
'VÒRTICE INF IZQ EN (LX0, LY0); DELTAX =9, DELTAY=18
'DELTAS: DE ALTURA =DH; DE BASE =DB; DE SUPERFICIE =DS, DE DIAGONAL=DW

```

```

DH = ALT / N: DB = ANCH / N: DS = DH * DB / 2: DW = SQR(DB * DB + DH * DH)
H = .6 * ALT:
H1 = .1 * ALT: H2 = .3 * ALT: DCUB = ALT
ACUB = 27 / 2 * (H1 - H2) / ANCH ^ 3
BCUB = (H2 - 2 * H1 - 6 / 27 * ACUB * ANCH ^ 3) * 9 / 2 / ANCH ^ 2
CCUB = 1 / ANCH * (-ACUB * ANCH ^ 3 - BCUB * ANCH ^ 2 - DCUB)
COLOR 14
LOCATE 1, 1: PRINT "ACUB="; ACUB; "BCUB="; BCUB; "CCUB="; CCUB; "DCUB="; DCUB
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
PRINT
HPAR(9) = 0
FOR J = 0 TO N - 1
X4 = J * DB:
HPAR(J) = ACUB * X4 ^ 3 + BCUB * X4 ^ 2 + CCUB * X4 + DCUB
HPAR(J) = HPAR(J) * 9 / (N - J)
PRINT "HPAR"; J; "="; HPAR(J)
NEXT J
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
CLS
'Nfmero de NODO
INMAX = 0
COLOR 14

FOR J = 0 TO N:
FOR I = 0 TO N - J
INMAX = INMAX + 1
'XS% = (LX0 + I * IX) / 8: YS% = (LY0 - J * IY + 8) / 16
'A$ = MID$(STR$(INMAX), 2, 2)
'COLOR GAMAR%: LOCATE YS%, XS%: PRINT A$;
EX(INMAX) = LX0 + I * IX:
EY(INMAX) = LY0 - J * HPAR(I) * 800
XG(INMAX) = EX(INMAX)
YG(INMAX) = EY(INMAX)
LOCATE 1, 1
' IMPRIME COORDENADAS NODALES EN PANTALLA:
PRINT "nodo="; INMAX, "x="; EX(INMAX); "y="; EY(INMAX)
PSET (EX(INMAX), EY(INMAX)), 15
NEXT:
NEXT:
N7 = N
FOR J = 0 TO N
FOR I = 1 TO N7 - J
LINE (XG(I + SUM + J), YG(I + SUM + J))-(XG(I + SUM + J + 1), YG(I + SUM + J +
1)), I
LINE (XG(I + J + SUM), YG(I + J + SUM))-(XG(I + N + 1 + SUM), YG(I + N + 1 +
SUM))
LINE (XG(I + J + SUM + 1), YG(I + J + SUM + 1))-(XG(I + N + 1 + SUM), YG(I + N +
1 + SUM))
NEXT I
SUM = SUM + N7 - J
NEXT J

'Nfmero de elemento
I0 = 0: J0 = N + 1: J1 = N: J2 = -1
JO0 = N + 1: JO1 = N - 1: JO2 = N + 2: JE2 = 2 * N
FOR J = 1 TO 2 * N - 1
IF (J MOD 2) > 0 THEN
J0 = J0 - JO0: J1 = J1 - JO1: J2 = J2 + JO2
JO0 = JO0 - 1: JO1 = JO1 - 1: JO2 = JO2 - 1
ELSE
J0 = J0 + 2: J2 = J2 - JE2: JE2 = JE2 - 2
END IF

```

```

FOR I = 1 TO N - J \ 2: I0 = I0 + 1
'XS% = (LX0 + (I - (INT(J) MOD 2) * .5) * IX) / 8 - 2
'YS% = 1 + (LY0 - (J * .5 - (INT(J + 1) MOD 2) * .25) * IY) / 16
'A$ = MID$(STR$(I0), 2, 2)
'COLOR GAZUL%: LOCATE YS%, XS%: PRINT A$
EL(I0, 0) = I0 + J0: EL(I0, 1) = I0 + J1: EL(I0, 2) = I0 + J2:
NEXT: NEXT
IEMAX = I0

```

'Número de frontera

```

I0 = 0:
FOR I = 1 TO N: I0 = I0 + 1:
'XS% = (LX0 + I * IX - .5 * IX) / 8: YS% = (LY0 + 8) / 16
'A$ = MID$(STR$(I0), 2, 2)
'COLOR GROSÍ%: LOCATE YS%, XS%: PRINT A$
BD(I0, 0) = 0: BD(I0, 1) = I0 + J10: BD(I0, 2) = I0 + 1:
NEXT
J10 = -N: J11 = N: J20 = 1: J21 = N - 1
FOR J = 1 TO N: I0 = I0 + 1
'XS% = LX0 / 8: YS% = (LY0 - J * IY + .5 * IY + 9) / 16
'A$ = MID$(STR$(I0), 2, 2)
'COLOR GROSÍ%: LOCATE YS%, XS%: PRINT A$:
BD(I0, 0) = 0: BD(I0, 1) = I0 + J10: BD(I0, 2) = I0 + J20:
J10 = J10 + J11: J11 = J11 - 1: J20 = J20 + J21: J21 = J21 - 1
NEXT
J10 = -N: J11 = N - 1: J20 = 0: J21 = N - 2
FOR J = 1 TO N: I0 = I0 + 1
'XS% = (LX0 + (N - J + 1) * IX - .5 * IX) / 8 + 1
'YS% = (LY0 - J * IY + .5 * IY + 9) / 16
'A$ = MID$(STR$(I0), 2, 2)
'COLOR GROSÍ%: LOCATE YS%, XS%: PRINT A$:
BD(I0, 0) = 0: BD(I0, 1) = I0 + J10: BD(I0, 2) = I0 + J20:
J10 = J10 + J11: J11 = J11 - 1: J20 = J20 + J21: J21 = J21 - 1
NEXT

```

```

' * * * * *
'* * * * * coordenadas agujeros * * * * *
' * * * * *
NAGUJ = 5

```

```

aguja(1, 1, 1) = 12: aguja(1, 1, 2) = 13 ' borde 1
aguja(1, 2, 1) = 12: aguja(1, 2, 2) = 21 ' borde 2
aguja(1, 3, 1) = 13: aguja(1, 3, 2) = 21 ' borde 3

```

```

aguja(2, 1, 1) = 23: aguja(2, 1, 2) = 30 ' borde 1
aguja(2, 2, 1) = 23: aguja(2, 2, 2) = 31 ' borde 2
aguja(2, 3, 1) = 30: aguja(2, 3, 2) = 31 ' borde 3

```

```

aguja(3, 1, 1) = 23: aguja(3, 1, 2) = 24 ' borde 1
aguja(3, 2, 1) = 23: aguja(3, 2, 2) = 31 ' borde 2
aguja(3, 3, 1) = 24: aguja(3, 3, 2) = 31 ' borde 3

```

```

aguja(4, 1, 1) = 42: aguja(4, 1, 2) = 43 ' borde 1
aguja(4, 2, 1) = 42: aguja(4, 2, 2) = 47 ' borde 2
aguja(4, 3, 1) = 43: aguja(4, 3, 2) = 47 ' borde 3

```

```

aguja(5, 1, 1) = 16: aguja(5, 1, 2) = 17 ' borde 1
aguja(5, 2, 1) = 16: aguja(5, 2, 2) = 25 ' borde 2
aguja(5, 3, 1) = 17: aguja(5, 3, 2) = 25 ' borde 3

```

```

' * * * * *
'* * * * *
' * * * * *

```

```

FOR K = 1 TO NAGUJ
  FOR p = 1 TO 3      ' p = contador de bordes de elemento
    I0 = I0 + 1
    BD(I0, 0) = 2: BD(I0, 1) = aguj(K, p, 1): BD(I0, 2) = aguj(K, p, 2):
  NEXT p
NEXT K

```

```

  IBMAX = I0
  DO
  LOOP WHILE INKEY$ = ""
  CLS
RETURN

```

***** IMPRIME TOPOLOGÍA *****

```

MALLA:
CLS
COLOR GAMAR%: LOCATE 1, 1: PRINT "Elemento No.      NODO No."
COLOR GBLANC%
FOR IE = 1 TO IEMAX
  LOCATE 2, 1:
  PRINT USING " #####  ##, ##, ##, "; IE; EL(IE, 0); EL(IE, 1); EL(IE, 2)
NEXT:
COLOR GAMAR%: LOCATE 5, 1: PRINT "Elemento No.  NODO No.  Condición de Frontera No."
COLOR GBLANC%
FOR IB = 1 TO IBMAX
  LOCATE 7, 1
  PRINT USING " #####          ##          ##          ##"; IB; BD(IB, 1); BD(IB, 2); BD(IB,
0)

```

```

NEXT
RETURN
* * * ENSAMBLAJE E INTRODUCCIÓN DE CONDICIONES DE FRONTERA * * *
ENSAMBLAJE:
CLS

```

```

LINE (0, 0)-(640, 480), 15, BF
C0 = KT / (4 * DS): Q = 0
AE(0) = -DB: AE(1) = DB: AE(2) = 0
BE(0) = -DH: BE(1) = 0: BE(2) = DH
FOR I = 0 TO 2:
  FOR J = 0 TO 2:
    CE(I, J) = C0 * (AE(I) * AE(J) + BE(I) * BE(J))
  NEXT J
NEXT I
CQ = Q * DS / 3
FOR I = 1 TO INMAX
  LINE (5 * I + 5, 0 + 5)-(5 * I + 5, INMAX * 5 + 5), 9
  LINE (0 + 5, 5 * I + 5)-(INMAX * 5 + 5, 5 * I + 5), 9
NEXT I
FOR K = 1 TO IEMAX:
  FOR I = 0 TO 2
    FOR J = 0 TO 2
      X(EL(K, I), EL(K, J)) = X(EL(K, I), EL(K, J)) + CE(I, J)
      FOR I1 = 0 TO 4
        FOR J1 = 0 TO 4
          PSET (EL(K, I) * 5 + I1, EL(K, J) * 5 + J1), 12
        NEXT J1
      NEXT I1
    NEXT J
  NEXT I
  Y(EL(K, I)) = Y(EL(K, I)) + CQ

```

```

      IF Y(EL(K, I)) = 0 THEN CLR% = 4 ELSE CLR% = 2
      FOR I2 = 0 TO 4
        FOR J2 = 0 TO 4
          PSET (INMAX * 7 + I2, EL(K, I) * 5 + J2), CLR%
        NEXT J2
      NEXT I2

    NEXT I
  NEXT K

DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
CQW = 0: CHW = DW * HF / 6
FOR K = 1 TO IBMAX
  IF BD(K, 0) = 0 THEN      'FRONTERA ISOTERMICA
    T(BD(K, 1)) = TB: T(BD(K, 2)) = TB
    Z(BD(K, 1)) = 1: Z(BD(K, 2)) = 1
    FOR I4 = 0 TO 4
      FOR J4 = 0 TO 4
        PSET (5 * BD(K, 1) + I4, 5 * BD(K, 1) + J4), 8
        PSET (5 * BD(K, 2) + I4, 5 * BD(K, 2) + J4), 8
        PSET (INMAX * 7 + I4, BD(K, 1) * 5 + J4), 8
      NEXT J4
    NEXT I4
  ELSEIF BD(K, 0) = 1 THEN  'FRONTERA ADIABATICA
    FOR I = 1 TO 2: Y(BD(K, I)) = Y(BD(K, I)) + CQW: NEXT I
  ELSEIF BD(K, 0) = 2 THEN  'FRONTERA CONVECTIVA
    X(BD(K, 1), BD(K, 1)) = X(BD(K, 1), BD(K, 1)) + CHW * 2
    X(BD(K, 2), BD(K, 1)) = X(BD(K, 2), BD(K, 1)) + CHW:
    X(BD(K, 1), BD(K, 2)) = X(BD(K, 1), BD(K, 2)) + CHW:
    X(BD(K, 2), BD(K, 2)) = X(BD(K, 2), BD(K, 2)) + CHW * 2
    Y(BD(K, 1)) = Y(BD(K, 1)) + 3 * CHW * TAMB
    Y(BD(K, 2)) = Y(BD(K, 2)) + 3 * CHW * TAMB
    FOR I = 0 TO 4
      FOR J = 0 TO 4
        PSET (5 * BD(K, 1) + I, 5 * BD(K, 1) + J), 4
        PSET (5 * BD(K, 1) + I, 5 * BD(K, 2) + J), 4
        PSET (5 * BD(K, 2) + I, 5 * BD(K, 1) + J), 4
        PSET (5 * BD(K, 2) + I, 5 * BD(K, 2) + J), 4
      NEXT J
    NEXT I
    FOR I3 = 0 TO 4
      FOR J3 = 0 TO 4
        IF Y(BD(K, 1)) <> 0 THEN CLR% = 3 ELSE CLR% = 14
        PSET (INMAX * 7 + I3, BD(K, 1) * 5 + J3), CLR%
        IF Y(BD(K, 2)) <> 0 THEN CLR% = 3 ELSE CLR% = 14
        PSET (INMAX * 7 + I3, BD(K, 2) * 5 + J3), CLR%
      NEXT J3
    NEXT I3
  END IF
NEXT
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
FOR K = 1 TO INMAX
  IF Z(K) = 1 THEN
    FOR KK = 1 TO INMAX: Y(KK) = Y(KK) - T(K) * X(KK, K): NEXT
  END IF
NEXT

L = 1
FOR K = 1 TO INMAX
  IF Z(K) <> 1 THEN
    B(L) = Y(K): TBL(L) = K: MM = 1

```

```

FOR KK = K TO INMAX
  IF Z(KK) <> 1 THEN
    A(L, MM) = X(K, KK): MM = MM + 1
    IF MM > N + 1 THEN GOTO CL1
  NEXT KK:
CL1:   L = L + 1
      END IF
      NEXT K
      NO = L - 1
RETURN

      *****DESPLIEGA LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ*****
IMPMATRIZ:
CLS :
COLOR GVERD%: LOCATE 1, 27: PRINT "Elementos de la Matriz"
COLOR GBLANC%
PRINT "  A(K,1)    A(K,2)    A(K,3)    A(K,4)    A(K,5)    A(K,6)    A(K,7)    B(K)"
FOR K = 1 TO NO: FOR J = 1 TO 7
IF A(K, J) <> 0 THEN COLOR GBLANC% ELSE COLOR GAZUL%
  PRINT USING "#.###^ ^ ^ ^ "; A(K, J);
NEXT J
COLOR GIL%
PRINT USING "#.###^ ^ ^ ^ "; B(K)
NEXT
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
RETURN

      *****CALCULOS DE TEMPERATURA*****
CALTEMP:
N1 = N
FOR K = 1 TO NO
  M = 2
  WHILE (M <= 1 + N1) AND (M <= NO - K + 1)
    A(K, M) = A(K, M) / A(K, 1): M = M + 1
  WEND
  L = K + 1
  WHILE (L <= K + N1) AND (L <= NO)
    M = 1
    WHILE (M <= K + N1 - L + 1) AND (M <= NO - L + 1)
      A(L, M) = A(L, M) - A(K, L - K + 1) * A(K, M + L - K) * A(K, 1)
      M = M + 1
    WEND
    L = L + 1
  WEND
NEXT K
FOR K = 1 TO NO
  A(K, 0) = B(K)
  M = K - 1
  WHILE ((M >= K - N1) AND (M >= 1))
    A(K, 0) = A(K, 0) - A(M, 0) * A(M, K - M + 1)
    M = M - 1
  WEND
NEXT K
FOR K = NO TO 1 STEP -1
  I = (K - 1) \ N + 1: J = K - (I - 1) * N
  A(K, 0) = A(K, 0) / A(K, 1)
  M = K + 1
  WHILE (M <= K + N1) AND (M <= NO)
    A(K, 0) = A(K, 0) - A(M, 0) * A(K, M - K + 1): M = M + 1
  WEND
  T(TBL(K)) = A(K, 0):
NEXT K
FOR K = 1 TO INMAX: PRINT T(K): NEXT
RETURN

```

*****CuLCULOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR*****

CALFLUX:

'PRINT "COORDENADAS NODALES DE CADA ELEMENTO:"

FOR I = 1 TO 81

X1 = (XG(EL(I, 0)) - XG(EL(0, 0))) * DB / IX

X2 = (XG(EL(I, 1)) - XG(EL(0, 0))) * DB / IX

X3 = (XG(EL(I, 2)) - XG(EL(0, 0))) * DB / IX

Y1 = (YG(EL(I, 0)) - YG(EL(0, 0))) * DH / IY

Y2 = (YG(EL(I, 1)) - YG(EL(0, 0))) * DH / IY

Y3 = (YG(EL(I, 2)) - YG(EL(0, 0))) * DH / IY

TPROM(I) = (T(EL(I, 0)) + T(EL(I, 1)) + T(EL(I, 2))) / 3

AREA(I) = 1 / 2 * ABS((X2 - X1) * (Y3 - Y1) - (Y2 - Y1) * (X3 - X1))

QCONV(I) = (TPROM(I) - TAMB) * AREA(I)

QCONV1 = QCONV1 + QCONV(I)

SUMAREA = SUMAREA + AREA(I)

COLOR 14

'PRINT "X"; I; "-"; XG(EL(I, 0)); XG(EL(I, 1)); XG(EL(I, 2))

'PRINT "Y"; I; "-"; INT(YG(EL(I, 0))); INT(YG(EL(I, 1))); INT(YG(EL(I, 2)))

COLOR 3

LOCATE 1, 1

'PRINT "AREA"; I; AREA(I); "M^2"

NEXT I

FOR I = 1 TO IBMAX

X1B = (XG(BD(I, 1)) - XG(EL(0, 0))) * DB / IX

X2B = (XG(BD(I, 2)) - XG(EL(0, 0))) * DB / IX

Y1B = (YG(BD(I, 1)) - YG(EL(0, 0))) * DH / IY

Y2B = (YG(BD(I, 2)) - YG(EL(0, 0))) * DH / IY

LONGIT(I) = SQR((Y2B - Y1B) ^ 2 + (X2B - X1B) ^ 2)

AREAB = AREAB + LONGIT(I) * GROS

NEXT

AREAB = AREAB - ANCH * GROS

'PRINT "AREAB="; AREAB

ARSINAL = ANCH * GROS

'PRINT "SUMAREA="; SUMAREA; "ARSINAL="; ARSINAL

DO

LOOP WHILE INKEY\$ = ""

DELTAQ = (SUMAREA + AREAB) / ARSINAL: QSUM = 0

FOR IB = 1 TO IBMAX

QSUM = QSUM + LONGIT(IB) * GROS * ((T(BD(IB, 1)) + T(BD(IB, 2))) / 2! - TAMB)

NEXT

QSINAL = (TB - TAMB) * ANCH * GROS

QSUM = QSUM - QSINAL

DELTAQ = (QSUM + QCONV1) / QSINAL: EFIC = DELTAQ / DELTAA

'LOCATE 1, 1: PRINT "QSUM="; QSUM; "QCONV="; QCONV1; "QSINAL="; QSINAL

DO

LOOP WHILE INKEY\$ = ""

RETURN

*****BALANCE DE CALOR*****

IMPRFLUX:

COLOR 14: LOCATE 2, 1: PRINT USING "Incremento de prea =###.###"; DELTAA

LOCATE 1, 1: PRINT USING "Incr de Calor =###.###"; DELTAQ

LOCATE 3, 1:

PRINT USING "Eficiencia de aleta =###.###"; EFIC;

LOCATE 5, 41: PRINT USING "Altura aleta(m) .###"; ALT

LOCATE 6, 41: PRINT USING "Ancho aleta(m) .###"; ANCH

LOCATE 7, 41: PRINT USING "Conductividad(W/mK) ####"; KT

LOCATE 8, 41: PRINT USING "Coeficiente convectivo(W/m2K) ####"; HF

LOCATE 9, 41: PRINT "PERFIL=";

LOCATE 9, 48: PRINT USING "#####.#"; ACUB;

```

        LOCATE 9, 55: PRINT "X^3+"
        LOCATE 9, 59: PRINT USING "##.##"; BCUB
        LOCATE 9, 64: PRINT "X^2+"
        LOCATE 9, 67: PRINT USING "##.##"; CCUB
        LOCATE 9, 73: PRINT "X+"
        LOCATE 9, 75: PRINT USING "##.##"; DCUB
    COLOR GBLANC%
    DO
    LOOP WHILE INKEY$ = ""
RETURN
    ***** DIBUJA MARCO PARA DESPLEGADO GRUFICO DE RESULTADOS *****
MARCO:
SUM = 0

FOR J = 0 TO N
    FOR I = 1 TO N - J
        COLOR 15
        LINE (XG(I + SUM + J), YG(I + SUM + J))-(XG(I + SUM + J + 1), YG(I + SUM + J +
1))
        LINE (XG(I + J + SUM), YG(I + J + SUM))-(XG(I + N + 1 + SUM), YG(I + N + 1 +
SUM))
        LINE (XG(I + J + SUM + 1), YG(I + J + SUM + 1))-(XG(I + N + 1 + SUM), YG(I + N +
1 + SUM))
        NEXT I
        SUM = SUM + N - J
    NEXT J
    DO
    LOOP WHILE INKEY$ = ""
    RETURN
        *****DESPLEGADO DE RESULTADOS*****
DESPRESULT:
    CLS
    LINE (0, 0)-(640, 480), 3, BF
    GOSUB MARCO
    IF TB > TAMB THEN TMIN = TAMB: TMAX = TB ELSE TMIN = TB: TMAX = TAMB
    GOSUB escala
    DTMAX = TMAX - TMIN: IF DTMAX = 0 THEN RETURN
    DTM = DTMAX / 20.99
    FOR IE = 1 TO IEMAX
        IF IE = 19 OR IE = 23 OR IE = 36 OR IE = 42 OR IE = 67 THEN 2310 ELSE 2320
2310    T1 = 0: T2 = 0: T3 = 0
        X1 = EX(EL(IE, 0)): X2 = EX(EL(IE, 1)): X3 = EX(EL(IE, 2))
        Y1 = EY(EL(IE, 0)): Y2 = EY(EL(IE, 1)): Y3 = EY(EL(IE, 2))
        PAINT ((X1 + X2 + X3) / 3, (Y1 + Y2 + Y3) / 3), ALE$(20), GBLANC%: GOTO 2330
2320    T1 = T(EL(IE, 0)): T2 = T(EL(IE, 1)): T3 = T(EL(IE, 2))
        X1 = EX(EL(IE, 0)): X2 = EX(EL(IE, 1)): X3 = EX(EL(IE, 2))
        Y1 = EY(EL(IE, 0)): Y2 = EY(EL(IE, 1)): Y3 = EY(EL(IE, 2))
        PAINT ((X1 + X2 + X3) / 3, (Y1 + Y2 + Y3) / 3), ALE$(20), GBLANC%
2330    TC = TMIN: K = 20
        WHILE (TC <= TMAX)
            TC = TC + DTM: TCH = TC + DTM: K = K - 1
            IF ((T1 > TCH) AND (T2 > TCH) AND (T3 > TCH)) THEN GOTO DW2
            IF ((T1 > TC) AND (T2 > TC) AND (T3 > TC)) THEN GOTO DW3
            A$ = " "
            IF (T1 - TC) * (T2 - TC) < 0 THEN
                XS = X1 + (TC - T1) / (T2 - T1) * (X2 - X1)
                YS = Y1 + (TC - T1) / (T2 - T1) * (Y2 - Y1)
                A$ = "1":
            END IF
            IF (T2 - TC) * (T3 - TC) < 0 THEN
                XE = X2 + (TC - T2) / (T3 - T2) * (X3 - X2)
                YE = Y2 + (TC - T2) / (T3 - T2) * (Y3 - Y2)

```

```

IF A$ = "1" THEN
  LINE (XS, YS)-(XE, YE), GBLANC%
  IF T2 > TC THEN
    PAINT ((XS + XE + X2) / 3, (YS + YE + Y2) / 3), ALE$(K), GBLANC%
  ELSE
    PAINT ((XS + XE + X1 + X3) / 4, (YS + YE + Y1 + Y3) / 4), ALE$(K),
GBLANC%
    END IF
    GOTO DW2
  ELSE
    XS = XE: YS = YE: A$ = "2"
  END IF
END IF
IF (T3 - TC) * (T1 - TC) < 0 THEN
  XE = X3 + (TC - T3) / (T1 - T3) * (X1 - X3)
  YE = Y3 + (TC - T3) / (T1 - T3) * (Y1 - Y3)
  LINE (XS, YS)-(XE, YE), GBLANC%
  IF A$ = "1" THEN
    IF T1 > TC THEN
      PAINT ((XS + XE + X1) / 3, (YS + YE + Y1) / 3), ALE$(K), GBLANC%
    ELSE
      PAINT ((XS + XE + X2 + X3) / 4, (YS + YE + Y2 + Y3) / 4), ALE$(K),
GBLANC%
    END IF
  ELSEIF A$ = "2" THEN
    IF T3 > TC THEN
      PAINT ((XS + XE + X3) / 3, (YS + YE + Y3) / 3), ALE$(K), GBLANC%
    ELSE
      PAINT ((XS + XE + X1 + X2) / 4, (YS + YE + Y1 + Y2) / 4), ALE$(K),
GBLANC%
    END IF
  END IF
  GOTO DW2
END IF

IF T1 <= TC THEN GOTO DW2
DW3: PAINT ((X1 + X2 + X3) / 3, (Y1 + Y2 + Y3) / 3), ALE$(K), GBLANC%
DW2: WEND

```

```

NEXT
RETURN

```

*****MODOS DE MOSAICO*****

MOSAICO:

```

ALE$(0) = CHR$( &H55) + CHR$( &HAA) + CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF) + CHR$( &HAA) + CHR$( &H55) +
CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF)
ALE$(1) = CHR$( &H11) + CHR$( &H44) + CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H44) + CHR$( &H11) +
CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF)
ALE$(2) = CHR$( &H0) + CHR$( &H0) + CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF)
ALE$(3) = CHR$( &H0) + CHR$( &H11) + CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H0) + CHR$( &H44) +
CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF)
ALE$(4) = CHR$( &H0) + CHR$( &H55) + CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H0) + CHR$( &HAA) +
CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF)
ALE$(5) = CHR$( &H0) + CHR$( &H77) + CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H0) + CHR$( &HDD) +
CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF)
ALE$(6) = CHR$( &H0) + CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF) + CHR$( &HFF)
ALE$(7) = CHR$( &H0) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H77) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H0) + CHR$( &HFF) +
CHR$( &HDD) + CHR$( &HFF)
ALE$(8) = CHR$( &H0) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H55) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H0) + CHR$( &HFF) +
CHR$( &HAA) + CHR$( &HFF)
ALE$(9) = CHR$( &H0) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H11) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H0) + CHR$( &HFF) +
CHR$( &H44) + CHR$( &HFF)
ALE$(10) = CHR$( &H0) + CHR$( &HFF) + CHR$( &H0) + CHR$( &HFF)

```

```

ALE$(11) = CHR$(&H11) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H44) + CHR$(&HFF) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(12) = CHR$(&H55) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HAA) + CHR$(&HFF) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(13) = CHR$(&H77) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HDD) + CHR$(&HFF) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(14) = CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(15) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H77) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HDD) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(16) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H55) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HAA) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(17) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H11) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H44) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(18) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(19) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&H11) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) +
CHR$(&H44) + CHR$(&HFF)
ALE$(20) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&H55) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) +
CHR$(&HAA) + CHR$(&HFF)
'DO
'LOOP WHILE INKEY$ = ""

```

```
RETURN
```

```
*****BARRA DE COLOR*****
```

```
escala:
```

```

LOCATE 1, 28
COLOR 15
PRINT "T="; TMIN: LOCATE 1, 53: PRINT (TMIN + TMAX) / 2
LOCATE 1, 75: PRINT TMAX
XREN = 264: YREN = 31: DXREN = 16: DYREN = 16
LINE (XREN, YREN)-(XREN + DXREN * 21, YREN - DYREN), GBLANC%, B
FOR I = 1 TO 20
    LINE (XREN + I * DXREN, YREN)-(XREN + I * DXREN, YREN - DYREN), GBLANC%
NEXT
FOR K = 0 TO 20
    PAINT (XREN + 1 + K * DXREN, YREN - 1), ALE$(20 - K), GBLANC%
NEXT
LINE (XREN, YREN)-(XREN + DXREN * 21, YREN - DYREN), GNEGR%, B
FOR I = 1 TO 20
    LINE (XREN + I * DXREN, YREN)-(XREN + I * DXREN, YREN - DYREN), GNEGR%
NEXT
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""

RETURN

```

5.6.3. Resultados de la Simulación de Transferencia de Calor Bidimensional en Aletas de Enfriamiento

Las figuras 5.15 a 5.20 corresponden al desplegado gráfico de la ejecución del programa Alepar.Bas para aletas de enfriamiento de diferentes geometrías y bajo distintas condiciones de frontera. En la Figura 5.15 se presenta la distribución de temperaturas en una aleta con perfil parabólico dado por la ecuación:

$$y = -8x^2 - 0.6x + 0.05$$

La base de la aleta cumple con la condición de frontera de temperatura constante e igual a 100°C, mientras que a lo largo de las otras dos fronteras la condición límite corresponde a la transferencia convectiva de calor hacia el medio ambiente circundante que se encuentra a 10°C. La aleta tiene una altura máxima de 5 cm y un ancho también de 5 cm. El coeficiente de conductividad térmica es isotrópico e iguala 1 W/m °K, mientras que el coeficiente convectivo es de 500 W/m² °K.

En la figura 5.16 se representa el perfil de temperaturas a lo largo de una aleta con las mismas condiciones de frontera y las mismas propiedades termofísicas que en el caso anterior y cuyo contorno en la diagonal está dado por:

$$y = 16x^2 - 1.8x + 0.05$$

Puede observarse que la eficiencia de esta aleta es menor a la anterior, dividiendo el incremento del área entre el incremento de calor, dando como resultado 27.5 % y 32.6 %, respectivamente.

La figura 5.17 exhibe una aleta de perfil lineal y con 2 condiciones de frontera isotérmicas y una convectiva. Dicho perfil puede simularse fácilmente al especificar un valor de $h = 0.5 * alt$ en la subrutina de especificación de la topología del programa Alepar.Bas. Las temperaturas de los lados vertical y horizontal son de 100°C, mientras que en la diagonal se tiene contacto con un medio ambiente a 10°C. Las propiedades termofísicas siguen siendo las mismas que en los casos anteriores. En la figura 5.18 se muestra otra aleta de perfil parabólico operando bajo las mismas condiciones isotérmicas y convectiva que la aleta lineal del caso anterior. Puede observarse que la eficiencia aumenta un poco respecto al perfil lineal. La figura 5.19 muestra una aleta de enfriamiento de perfil irregular sujeta a las mismas condiciones isotérmicas y convectivas que en los casos precedentes.

Además de probarse con condiciones de frontera convectivas e isotérmicas, también se pueden hacer cálculos con condiciones adiabáticas, tal como se exhibe en la figura 5.20, para un perfil irregular. El programa Alepar.bas permite ir definiendo la altura "y" correspondiente a cada coordenada nodal "x" de la base. El cambio en la subrutina topología es:

```

HPAR(9) = 0
HPAR(0) = 1 * H : HPAR(1) = .7 * H
HPAR(2) = .5 * H : HPAR(3) = .6 * H
HPAR(4) = .3 * H : HPAR(5) = .75 * H
HPAR(6) = .8 * H : HPAR(7) = .4 * H
HPAR(8) = .5 * H
FOR J= 0 TO N - 1
    HPAR(J) = HPAR(8) * J / (N - J)
NEXT J

```

La figura 5.21 representa la distribución de temperaturas en una aleta de perfil cúbico. La modificación de la geometría de parábola cuadrática a parábola cúbica se realiza de manera sencilla en la subrutina topología. El procedimiento consiste en definir la altura de la aleta a distancias de 1/3 y 2/3 de la longitud de la base de la aleta. El programa automáticamente calcula los coeficientes a, b, c y d de la parábola cúbica correspondiente a la ecuación:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Finalmente en la figura 5.22 se muestra una aleta calada con condiciones de frontera isotérmicas.

Mediante la utilización exhaustiva del programa Alepar.bas puede llevarse a cabo la optimización del perfil de la aleta, hasta obtener aquella que exhiba una eficiencia máxima para diferentes condiciones de operación. Dicha optimización puede dirigirse por ejemplo, hacia la eficientización de los parámetros de la función que define los perfiles geométricos de las distintas aletas parabólicas. El proceso de búsqueda queda inmerso en un espacio multifuncional y métodos como el de algoritmos genéticos pueden dar buen resultado. El programa Alepar.bas está limitado por el hecho de que en la base solo se pueden considerar 9 elementos como máximo. Esto es debido a la limitación en el dimensionamiento de los arreglos matriciales, que en Qbasic tienen un máximo de (120, 120). El cambio de método de resolución de las ecuaciones simultáneas puede solventar este problema, tal como se hizo en el programa Dispav1.bas donde se utilizó el método iterativo de Gauss-Seidel con relajación.

Incr de Calor = 11.685 T= 10
 Incremento de Área = 34.052
 Eficiencia de aleta = 0.326

55

100

Altura aleta(m) .050
 Ancho aleta(m) .050
 Conductividad(W/mK) 1
 Coeficiente convectivo(W/m²K) 500
 PERFIL= $-8.0X^2 - 0.60X + 0.05$

FRONTERA CONVECTIVA

FRONTERA CONVECTIVA

FRONTERA ISOTÉRMICA

Fig.5.15 .Distribución de temperatura en una aleta de enfriamiento de perfil parabólico

Incr de Calor = 6.348 T= 10
Incremento de Área = 23.110
Eficiencia de aleta = 0.275

55

100

Altura aleta(m) .050
Ancho aleta(m) .050
Conductividad(W/mK) 1
Coeficiente convectivo(N/m2K) 500
PERFIL= 16.0X^2 -1.80X +0.05



Fig.5.16.Distribución de temperatura en una aleta de enfriamiento de perfil parabólico

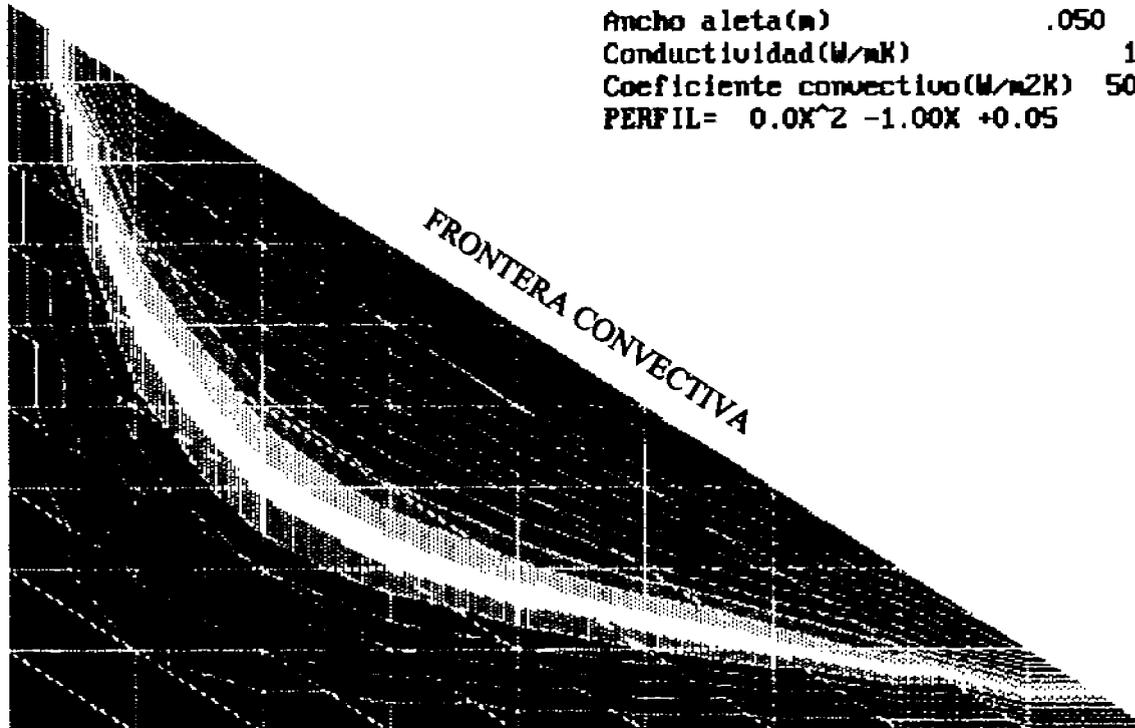
Incr de Calor = 19.801 T= 10
Incremento de Área = 30.384
Eficiencia de aleta = 0.652

55

100

Altura aleta(m) .050
Ancho aleta(m) .050
Conductividad(W/mK) 1
Coeficiente convectivo(W/m²K) 500
PERFIL= 0.0X² -1.00X +0.05

FRONTERA ISOTERMICA



FRONTERA ISOTERMICA

Fig. 5.17. Distribución de temperatura en una aleta de enfriamiento de perfil parabólico

Incr de Calor = 28.382 I= 10
Incremento de Área = 41.461
Eficiencia de aleta = 0.685



Altura aleta(m) .050
Ancho aleta(m) .050
Conductividad(W/mK) 1
Coeficiente convectivo(W/m2K) 500
PERFIL= $-24.0X^2 + 0.20X + 0.05$

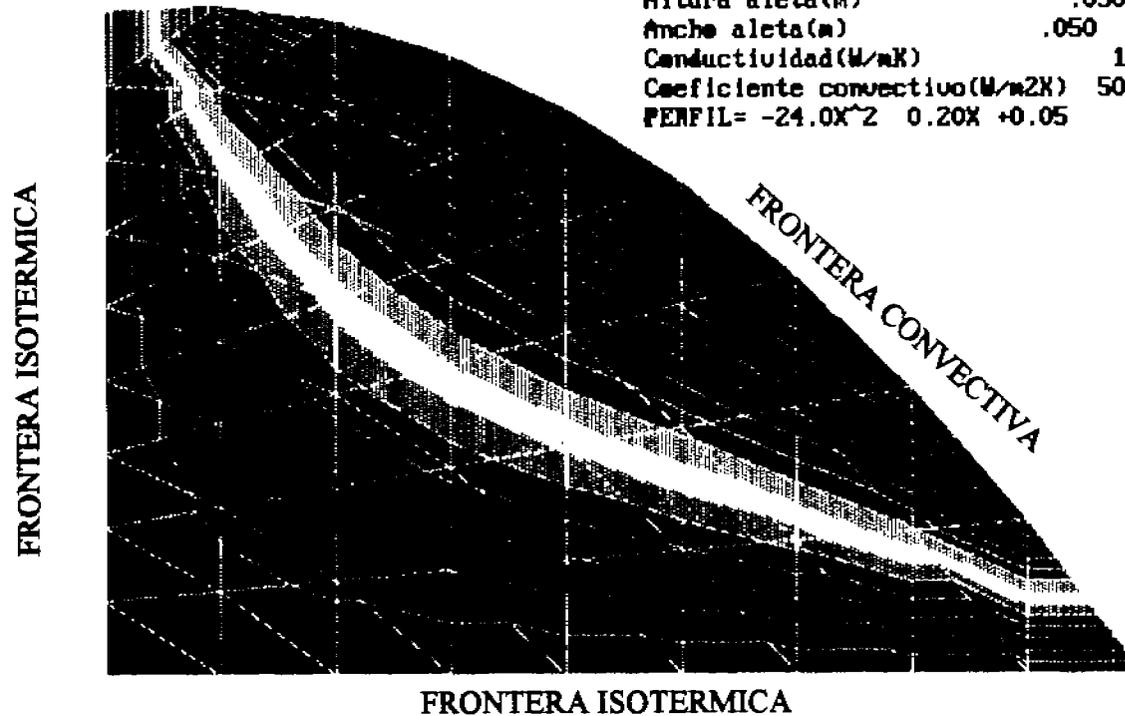


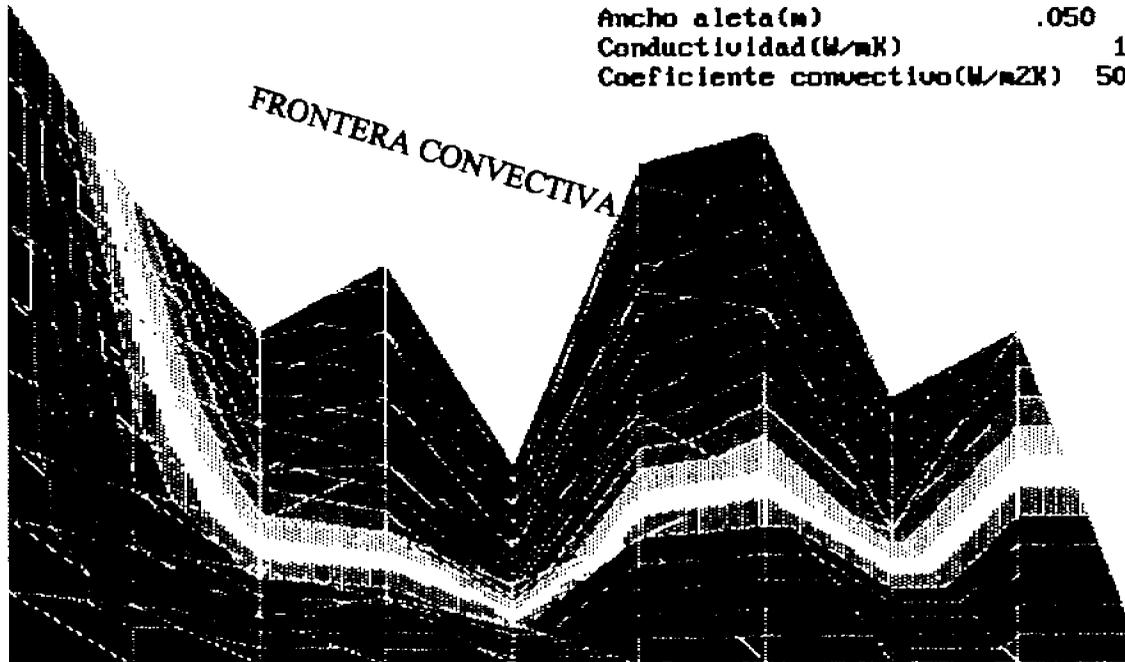
Fig.5.18.Distribución de temperatura en una aleta de enfriamiento de perfil parabólico

Incr de Calor = 22.980 T= 10
Incremento de Área = 35.211
Eficiencia de aleta = 0.653



Altura aleta(m) .050
Ancho aleta(m) .050
Conductividad(W/mK) 1
Coeficiente convectivo(W/m²K) 500

FRONTERA ISOTERMICA



FRONTERA ISOTERMICA

Fig.5.19.Distribución de temperatura en una aleta de enfriamiento de perfil irregular

Incr de Calor = 14.243 T= 10
Incremento de Área = 28.906
Eficiencia de aleta = 0.493



Altura aleta(m) .050
Ancho aleta(m) .050
Conductividad(W/mK) 1
Coeficiente convectivo(W/m²K) 500

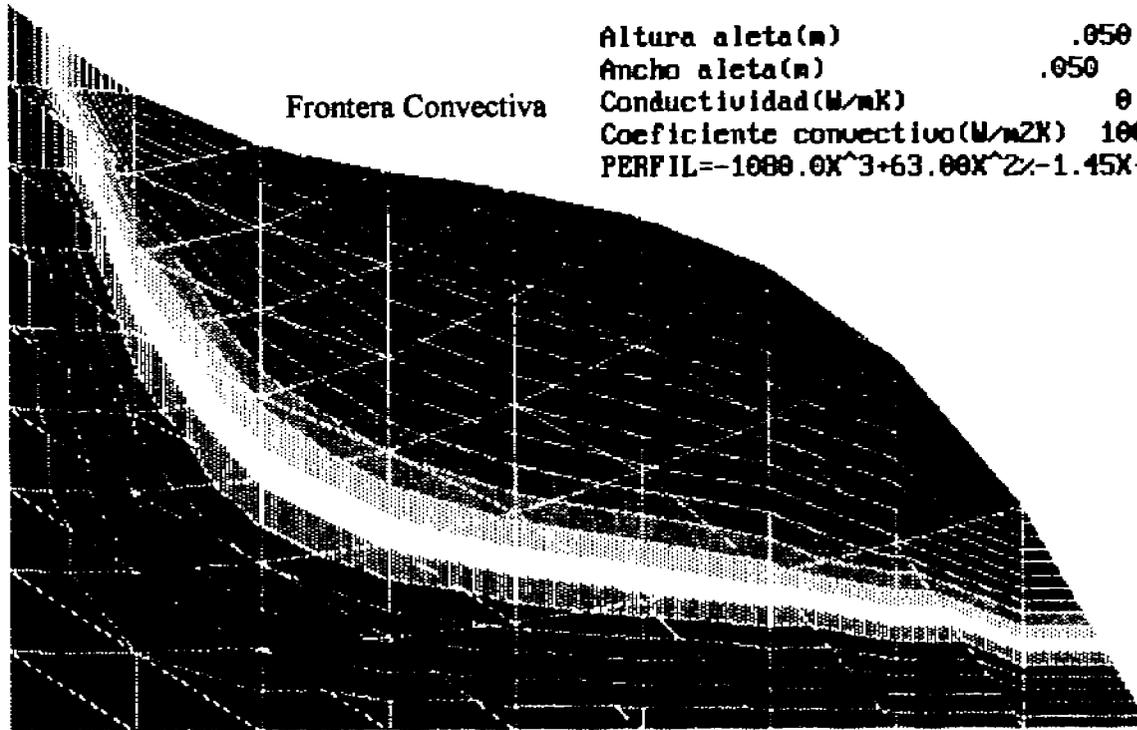


Fig. 5.20. Distribución de temperatura en una aleta de enfriamiento de perfil irregular

Incr de Calor = 23.989 $T = 10$
Incremento de Área = 38.70
Eficiencia de aleta = 0.620



Frontera Isotérmica



Frontera Convectiva

Altura aleta(m) .050
Ancho aleta(m) .050
Conductividad(W/mK) 0
Coeficiente convectivo(W/m²K) 100
PERFIL=-1000.0X³+63.00X²-1.45X+0.05

Frontera Isotérmica

Fig.5.21. Transferencia de calor por conducción en una aleta de perfil cúbico.

Incr de Calor = 25.204
Incremento de área = 40.805
Eficiencia de aleta = 0.618

T = 10

20

30

Altura aleta(m) = .050
Ancho aleta(m) = .050
Conductividad(W/mK) = 0
Coeficiente convectivo(W/m²K) = 100
PERFIL = 1080.0X³+63.00X²-1.45X+0.05

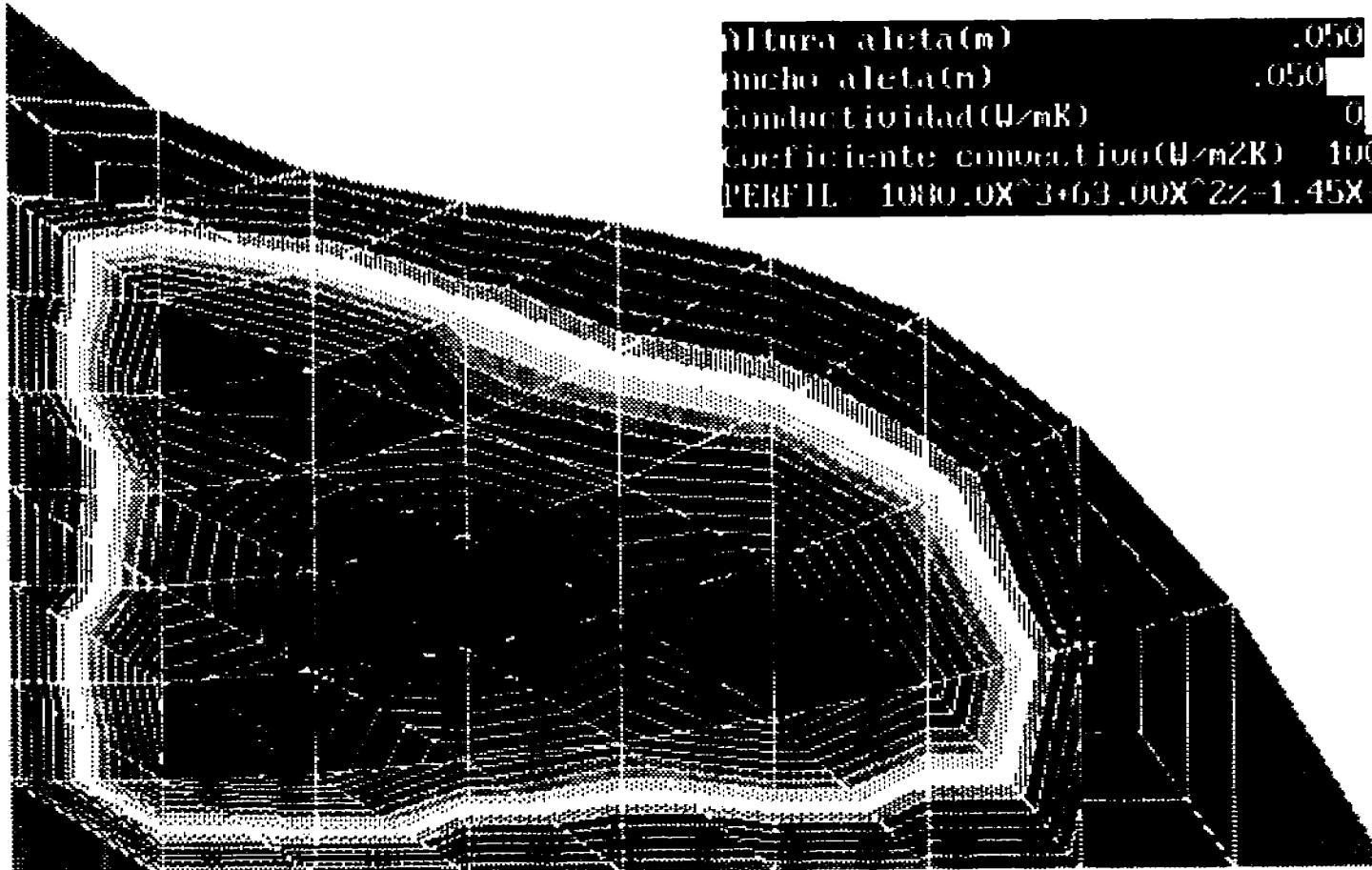


Fig. 5.22 Placa semitriangular con condiciones de frontera isotérmicas y tres agujeros en su interior por donde se desprende calor por efecto convectivo

6

*Análisis Axisimétrico.***6.1. INTRODUCCIÓN.**

Una gran cantidad de problemas de la termodinámica irreversible corresponden a los flujos de calor, masa o momentum asociados a la distribución axisimétrica del respectivo potencial impulsor. Por ejemplo, los problemas de transporte de calor o masa a través de sólidos de revolución pueden formularse en términos del flujo de los campos vectoriales a través de superficies generadas por la revolución de un arco alrededor de un eje de rotación. El sistema de coordenadas cilíndricas es el más adecuado para llevar a cabo el análisis de este tipo de problemas.

Cuando la dimensión axial del cilindro es mucho mayor que la radial y el análisis se realiza lejos de los extremos, el fenómeno se simplifica al caso de transporte radial unidimensional, es decir, se puede hacer la aproximación de cilindro infinito. En caso contrario también debe considerarse el transporte en dirección axial. La simetría alrededor del eje del cilindro permite no tener que considerar algún tipo de transporte en dirección tangencial.

El cambio a coordenadas cilíndricas requiere de pequeñas modificaciones en las ecuaciones diferenciales gobernantes y en los teoremas integrales correspondientes que permiten llevar a cabo la formulación de Elemento Finito en coordenadas cartesianas.

Las integrales de superficie y de volumen toman formas especiales. En ellas se hace uso de los Teoremas de Pappus del cálculo elemental. El primero demuestra que la superficie de revolución generada por un arco que se hace girar alrededor de un eje de rotación es igual al producto de la longitud de dicho arco y la distancia recorrida por su centroide de línea. El segundo teorema establece que el volumen generado por la rotación de una superficie alrededor de un eje de revolución es igual al producto del área generatriz por la distancia recorrida por el centroide de área. En ambos casos la distancia recorrida por el centroide correspondiente durante una revolución completa es $2\pi \langle R \rangle$, donde $\langle R \rangle$ es la coordenada radial del centroide del arco o área, medida desde el eje de rotación. Si se considera un análisis infinitesimal, entonces las diferenciales de superficie o de volumen de revolución correspondientes son:

$$dA = 2\pi R dl \quad (6.1)$$

$$dV = 2\pi R dR dz. \quad (6.2)$$

expresiones que serán muy útiles en el desarrollo que sigue.

6.2. CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL DE CALOR A TRAVÉS DE UN CILINDRO.

Cuando a un rectángulo, que tiene uno de sus lados adyacentes al eje de rotación, se le hace girar hasta completar un ciclo, se genera un volumen de revolución constituido por envolventes cilíndricas superpuestas y cuyas áreas superficiales siguen una proporcionalidad directa respecto a la longitud de su radio. Consecuentemente, conforme se lleva a cabo la transferencia de calor por conducción en dirección radial, se atraviesa una cantidad cada vez mayor de material, es decir, una área transversal más grande.

La ecuación de balance de flujo de calor en estado estacionario para coordenadas cilíndricas, es:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(Rk \frac{dT}{dR} \right) + Q = 0 \quad (6.3)$$

donde:

R = distancia radial desde el eje de revolución.

k = conductividad térmica.

T = temperatura.

Q = generación interna de calor por unidad de volumen.

Se pueden tener condiciones de frontera esenciales donde T corresponda a un valor definido por alguna función de distribución, o donde se conozca la distribución del flux superficial de calor:

$$-k \frac{dT}{dR} = q. \quad (6.4)$$

donde:

q = es el flux normal a la superficie, es decir, en dirección radial.

Si se multiplica la ecuación (6.3) por R , entonces obtendremos para la forma unidimensional:

$$\frac{d}{dR} \left(k^* \frac{dT}{dR} \right) + Q^* = 0$$

donde:

$$\begin{aligned} k^* &= Rk. \\ Q^* &= RQ \end{aligned}$$

Que corresponde a una ecuación diferencial de coeficientes variables. Esta formulación permite encontrar la forma de la integral variacional, requerida para el análisis de elementos finitos, mediante una simple inspección, quedando:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\Delta Z \int \left[\frac{1}{2} k^* \left(\frac{dT}{dR} \right)^2 - Q^* T \right] dR, \text{ o} \\ I &= 2\pi\Delta Z \int \frac{1}{2} \left[k \left(\frac{dT}{dR} \right)^2 - QT \right] R dR \end{aligned} \quad (6.5)$$

Esta última funcional representa el principio variacional en coordenadas cilíndricas para la ecuación de Poisson. Los límites de integración son los radios interior y exterior del segmento cilíndrico bajo estudio. La longitud típica en la dirección axial se denota con ΔZ .

La matriz de conducción para un elemento representativo es:

$$[S^e] = 2\pi \int_{L^e} k^e \frac{d[H^e]^T}{dR} \frac{d[H^e]}{dR} R dR \quad (6.6)$$

y el vector fuente (si existe un manantial de calor) es:

$$[C_Q^e] = 2\pi \int_{L^e} [H^e]^T Q^e R dR. \quad (6.7)$$

Si se considera un elemento lineal de dos nodos en la dirección radial, se pueden usar los resultados previos para escribir estas matrices por inspección. Definiendo:

$$L^e = (R_2 - R_1)^e, \quad y \quad \frac{d[H^e]}{dR} = \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

además, asumiendo una conductividad constante del material en el elemento, se obtiene:

$$[S^e] = 2\pi \frac{k^e}{(L^e)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{R_1}^{R_2} R dR \quad (6.8)$$

$$[S^e] = 2\pi \frac{k^e (R_2^2 - R_1^2)^e}{2(L^e)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S^e] = \pi \frac{k^e (R_2 + R_1)^e}{(R_2 - R_1)^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Por lo tanto, a diferencia de lo que ocurre con el caso unidimensional cartesiano, la matriz de conducción depende del sitio donde esté localizado el elemento. Es decir, de la cantidad de material que esté incluido por unidad de longitud en la dirección radial.

Considerando un término fuente constante:

$$[C_Q^e] = 2\pi Q^e \int_{L^e} [H^e]^T R dR \quad (6.10)$$

Pero las funciones de interpolación lineal $[H^e]$, también dependen directamente de la posición radial. Una aproximación a esta integral se consigue utilizando la interpolación isoparamétrica con lo cual tenemos:

$$R = [H^e] [R^e]. \quad (6.11)$$

Entonces:

$$[C_Q^e] = 2\pi Q^e \left[\int_{L^e} [H^e]^T [H^e] dR \right] [R^e] \quad (6.12)$$

Así que:

$$[C^e] = 2\pi \frac{Q^e L^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = 2\pi \frac{Q^e L^e}{6} \begin{bmatrix} 2R_1 + R_2 \\ R_1 + 2R_2 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Como ejemplo numérico se considera un cilindro con propiedades constantes y sin generación interna de calor, con una temperatura interior de $T = 100$ en $R = 4$ y una temperatura en el radio exterior de $T = 10$ en $R = 8$. Se selecciona un modelo con 4 segmentos de línea equidistantes y 5 nodos. La numeración de los nodos es de adentro hacia afuera. Las condiciones de frontera isotérmicas son de $T_1 = 100$ y $T_5 = 10$.

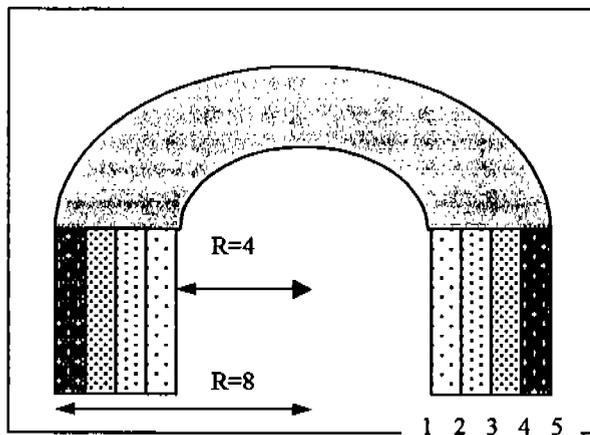


Fig. 6.1. Malla de elementos finitos para transferencia unidireccional de calor

A partir de la ecuación (6.9) se nota que los términos $(R_2 + R_1)^0 / L^0$ para cada elemento son: 9, 11, 13, y 15; respectivamente. A partir de estos datos se ensambla el sistema de ecuaciones quedando:

$$\pi k^0 \begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & (9+11) & -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & (11+13) & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & (13+15) & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_5 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Aplicando las condiciones de frontera esenciales y dividiendo ambos lados por el factor constante πk^0 , se obtiene el sistema de ecuaciones reducido:

$$\begin{bmatrix} 20 & -11 & 0 \\ -11 & 24 & -13 \\ 0 & -13 & 28 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = 100 \begin{Bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + 10 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

Resolviéndolo se obtiene la distribución de temperaturas internas:

$$T_2 = 71.0627, T_3 = 47.3943, \text{ y } T_4 = 27.3417.$$

Comparando con la solución exacta:

$$T = [T_1 \ln(R_5/R) + T_5 \ln(R/R_1)] / \ln(R_5/R_1)$$

Se observa que la aproximación es adecuada en al menos tres cifras significativas. También se puede notar que tanto la distribución de temperaturas aproximada como la exacta son independientes del valor de la conductividad térmica, (k). Esto es cierto, únicamente porque la generación interna de calor (Q) fue cero. Por supuesto, la conductividad térmica tiene algunos efectos sobre los flujos de calor externos (q_1 y q_5) necesarios para mantener las temperaturas superficiales. Retrosustituyendo en la primera ecuación del sistema 6.14, para los flujos de calor, se obtiene:

$$q_1 / \pi k^0 = [9(100) - 9(71.06) + 0] = 818.3,$$

que corresponde al flux de calor que entra por el radio interior. La quinta ecuación da q_5 una cantidad de calor igual que sale por la superficie envolvente del cilindro de radio exterior. Así que en este sistema el flujo de calor es siempre en la dirección radial positiva. Debe hacerse notar que si se hubiese usado una función de aproximación de más alto orden, entonces las integrales hubieran sido mucho más complicadas que en el caso unidimensional. Esto es típico en la mayoría de los problemas axisimétricos. En la práctica se puede utilizar integración numérica para evaluar las matrices de conductividad de cada elemento.

Como ejemplo en el que el término (6.12) de generación interna de calor es diferente de cero, se puede considerar el proceso en el que el material es irradiado por una fuente electromagnética. La onda incide con una potencia P_0 y conforme a las propiedades eléctricas de material, principalmente su conductancia eléctrica y su capacitancia, la onda penetrará en el volumen. El modelo matemático más sencillo para caracterizar el calentamiento por radiación electromagnética es la Ley de Beer-Lambert que corresponde a una disipación exponencial decreciente de la potencia incidente a medida que penetra la onda en el material. Introduciendo esta expresión en la ecuación (6.12) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 [C_Q]^* &= 2\pi \int_0^{L^*} \left[1 - \frac{R}{L^*} \right] \left[1 - \frac{R}{L^*} \right] P_0 \exp\{-\beta(R - R_0)\} dR \left[R \right]^* \\
 &= 2\pi P_0 \int_0^{L^*} \left[\left(1 - \frac{R}{L^*} \right)^2 \frac{R}{L^*} \left(1 - \frac{R}{L^*} \right) \right] \exp\{-\beta(R - R_0)\} dR \left[\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \right]^*
 \end{aligned}
 \tag{6.15}$$

Integrando se llega finalmente a la expresión:

$$[C_Q] = 2\pi P_0 e^{\beta R_0} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}^0
 \tag{6.16}$$

con:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{\beta} - \frac{2}{\beta^2 L} - \frac{2}{\beta^3 L^2} (1 - e^{-\beta L}) \\
 b &= \frac{1}{\beta^2 L} (1 + e^{-\beta L}) + \frac{2}{\beta^3 L^2} (1 - e^{-\beta L}) \\
 c &= \frac{2}{\beta^3 L^2} (e^{-\beta L} - 1) - \left(\frac{2}{\beta^2 L} + \frac{1}{\beta} \right) e^{-\beta L}
 \end{aligned}$$

Que es el término de fuente de calor en el ensamblaje del sistema de ecuaciones.

6.3. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA TRANSPORTE UNIDIRECCIONAL DE CALOR EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESTADO ESTACIONARIO.

En esta sección se citan dos ejemplos de la resolución analítica de la ecuación de Fourier en coordenadas cilíndricas para transferencia de calor unidireccional en estado estacionario.

Dichas soluciones servirán como referencia para comparar la exactitud de los resultados que se obtengan mediante la solución computacional por elementos finitos.

6.3.1. Conducción de Calor a Través de un Cilindro Hueco.

El primer ejemplo corresponde a un cilindro hueco de radio interno, R_0 , y radio externo, R_1 . La temperatura de su superficie interior se mantiene constante a un valor T_0 , mientras que la temperatura de la envolvente externa se mantiene invariable en T_1 . Si T_1 es diferente a T_0 , espontáneamente se lleva a cabo un proceso irreversible de transferencia de calor por conducción axisimétrica unidireccional en estado estacionario, que queda caracterizada por la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0
 \tag{6.16}$$

Esta ecuación se resuelve mediante el siguiente cambio de variable:

$$y = dT / dr$$

Sustituyendo se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden de variables separables:

$$dy/dr + (1/r)y = 0,$$

cuya solución es: $y = c_1 / r$

Retrosustituyendo la variable "y" se llega a: $dT/dr = c_1 / r$,

E integrando se obtiene la siguiente solución general:

$$T = c_1 \ln r + c_2$$

Finalmente, introduciendo condiciones de frontera isotérmicas para compatibilidad con el ejemplo del apartado anterior, tenemos:

Condiciones isotérmicas

$$T = T_1 \quad \text{en } r = R_1 \quad (R_1 = \text{radio exterior})$$

$$T = T_0 \quad \text{en } r = R_0 \quad (R_0 = \text{radio interior}).$$

Solución Particular:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{\ln(r/R_0)}{\ln(R_1/R_0)}
 \tag{6.17}$$

6.3.2. Transferencia de Calor por Conducción Unidireccional con Generación Interna de Calor por Radiación.

Un sistema ligeramente diferente consiste en un cilindro sólido que genera calor por resonancia electromagnética con una fuente externa, tal como en el calentamiento de materiales por microondas. En condiciones de transporte unidireccional radial y estado estacionario, la expresión matemática que rige el proceso de transferencia de calor es:

$$k \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) \right] = P_0 e^{-\beta(R_0-r)} \quad (6.18)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria lineal de variables separables.

Integrando dos veces consecutivas, la segunda mediante la sustitución de la función exponencial por una serie de Taylor, e introduciendo como condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} dT/dr &= 0 & \text{en } r &= 0 \\ T &= T_0 & \text{en } r &= R_0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Se llega a la solución para el perfil de temperaturas radial en el cilindro:

$$T = T_0 + \frac{P_0}{k\beta^2 \exp(\beta R_0)} \left[\exp \left\{ -R_0 \left(1 - \frac{r}{R_0} \right) \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n R_0^n}{n(n!)} \left(1 - \left\{ \frac{R}{R_0} \right\}^n \right) \right] \quad (6.20)$$

6.4 ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA TRANSFERENCIA UNIDIMENSIONAL DE CALOR EN COORDENADAS CILÍNDRICAS.

El programa Axis1D.Bas sirve para evaluar la transferencia de calor unidireccional por conducción a través de un material homogéneo e isotrópico, con términos de producción de calor por resonancia electromagnética con una fuente externa, bajo condiciones de flujo de calor axisimétrico y estado estacionario. Se puede especificar $P_0 = 0$ y entonces se trataría exclusivamente de procesos de transporte de calor por conducción en régimen estable.

Transferencia de calor axisimétrica 1-D con radiación

Bloque I.- Especificación de las propiedades físicas del material:

REM ANÁLISIS AXYSIMÉTRICO

LE = .01	Longitud del elemento
K = .46	Conductividad térmica
L = .1	Altura del material
BETA = 2.85	Factor de atenuación
R0 = .06	Profundidad de Penetración
P0 = 15206	Potencia Incidente
RMIN = .04	Radio interior
RMAX = .08	Radio exterior
n = 16	Número de elementos

Bloque II.- Dimensionamiento de Arreglos Matriciales. Se dimensionan los siguientes arreglos matriciales para la implementación del método de elementos finitos:

- Un vector [R] para almacenar los valores de las coordenadas radiales de cada nodo.
- Una matriz cuadrada [A], que es la matriz de conductividad, de dimensión igual al número de nodos, $n+1$.
- Una matriz cuadrada [s] del mismo tamaño
- Un vector [c] para almacenar los términos fuente en cada nodo y que corresponde a la suma de radiación incidente por el radio interior y el radio exterior del cilindro.
- Una matriz cuadrada [A1] para la implementación del método de eliminación gaussiana con el que se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas resultante
- Cuatro vectores [x], [y], [xn], [yn], para el procedimiento de graficación. La variable x es la coordenada radial nodal y xn su normalización. Mientras que la variable y es la temperatura y yn su normalización.

DIM R(n + 1), A(n + 1, n + 1), s(n + 1, n + 1),
c(n + 1), A1(n + 1, n + 1), x(n), xn(n), Y(n), yn(n)

Bloque III.- Cálculos preliminares. Se realiza una serie de procedimientos previos a la implementación del algoritmo del método de elementos finitos.

'Se asigna el valor del radio mínimo al primer elemento del vector [R] y el del radio máximo al último elemento.

R(1) = RMIN

R(n) = RMAX

' Se calculan las variables A1, B y D para usarse en 'la expresión de Beer-Lambert, de acuerdo a la 'ecuación (6.15)

A1 = 1 / BETA * (EXP(BETA * (L - R0)) - EXP(-BETA * R0))

B = (L / BETA) * EXP(BETA * (L - R0)) - 1 / BETA ^ 2 * (EXP(BETA * (L - R0)) - EXP(-BETA * R0))

D = L ^ 2 / BETA * EXP(BETA * (L - R0)) - 2 * L / BETA ^ 2 * EXP(BETA * (L - R0)) + 2 / BETA ^ 3 * (EXP(BETA * (L - R0)) - EXP(-BETA * R0))

Bloque IV.- Se construyen las matrices locales de conductancia y capacitancia y se ensamblan simultáneamente para obtener las matrices globales.

FOR I = 1 TO n

R(I + 1) = I * (RMAX - RMIN) / n + RMIN

REM construcción de las matrices locales de 'conductancia y capacitancia

A(I, I) = K * (R(I) + R(I + 1)) / (R(I + 1) - R(I))

s(I, I) = K * (R(I) + R(I + 1)) / (R(I + 1) - R(I)) + A(I - 1, I - 1)

s(I, I + 1) = -A(I, I); s(I + 1, I) = -A(I, I)

s(I + 1, I + 1) = A(I, I)

c(I) = 2 * 3.1416 * P0 * ((A1 - 2 / L * B + D / L ^ 2) * R(I) + (B / L - D / L ^ 2) * R(I + 1))

c(I + 1) = 2 * 3.1416 * P0 * ((B / L - D / L ^ 2) * R(I) + D / L ^ 2 * R(I + 1))

NEXT I

Bloque V.- Se introducen las Condiciones de Frontera.

' CONDICIONES DE FRONTERA ISOTÉRMICAS

c(1) = 100; c(n + 1) = 10

Bloque VI.- Reconstrucción del Sistema de Ecuaciones. Debido a que al haber introducido las condiciones de frontera en los extremos, la temperatura en el primer y último nodo son conocidas, por eso en la matriz de capacitancia, al primer y último coeficiente se les asigna el valor de 1. Además, en las ecuaciones que contienen a dichos coeficientes como incógnita, se sustituye la temperatura conocida y se pasa con signo contrario

al vector de términos independientes, como lo requiere el álgebra.

c(2) = c(1) * s(1, 1); s(1, 1) = 1:

FOR I = 2 TO n: s(1, I) = 0; s(I, 1) = 0; NEXT I

c(n) = c(n + 1) * s(n + 1, n + 1); s(n + 1, n + 1) = 1

FOR I = 1 TO n: s(I, n + 1) = 0; s(n + 1, I) = 0

NEXT I: COLOR 3

Bloque VII.- Impresión del sistema de ecuaciones a resolver

FOR I = 1 TO n + 1

FOR J = 1 TO n + 1: PRINT s(J, I); " ";

NEXT J: PRINT c(I)

NEXT I

Bloque VIII.- Resolución del sistema de ecuaciones por Eliminación Gaussiana. Subrutina presentada en el programa de Galerkin 1-D.

Bloque IX.- Graficación de los resultados.

Subrutina presentada en el programa Galerkin 1-D.

La siguiente figura es un ejemplo del desplegado gráfico de los resultados. El ejemplo corresponde a la transferencia de calor por conducción a través de un cilindro hueco con radio interno igual a 4cm y radio externo de 8 cm; con una conductividad térmica igual a 1 y condiciones de frontera isotérmicas de temperatura interna en la pared igual a 100° y en la pared exterior de 30°. Una potencia de radiación incidente igual a 15206 Watts y un coeficiente beta igual a uno. Nótese que debido a la incidencia de la radiación por las dos paredes, la distribución de temperaturas presenta un máximo en una coordenada radial interna. La comparación entre la predicción vía elementos finitos y la solución analítica (ecuación 6.20) indica un error máximo de -0.002013% y una media cuadrática del error de 0.000385%.

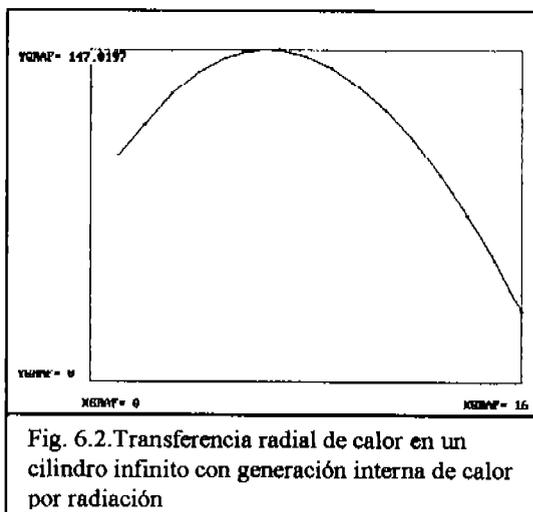


Fig. 6.2. Transferencia radial de calor en un cilindro infinito con generación interna de calor por radiación

6.5 Transferencia de Calor Bidimensional Axisimétrica

Si se transporta calor por conducción tanto en dirección axial como radial, la ecuación (6.3) se generaliza a:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R k_R \frac{\partial T}{\partial R} \right) + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} + Q = 0. \quad (6.21)$$

Y entonces, la correspondiente matriz de conducción del elemento es:

$$[S] = \int \left(\frac{\partial [H]^T}{\partial R} \frac{\partial [H]}{\partial R} + \frac{\partial [H]^T}{\partial Z} \frac{\partial [H]}{\partial Z} \right) R dR dZ \quad (6.22)$$

y el vector fuente es:

$$[C_Q^e] = 2\pi \int_{A^e} [H]^T Q^e R dR dZ \quad (6.23)$$

Si otra vez se consideran elementos triangulares simples de tres nodos, como en el caso de transporte de calor bidimensional en coordenadas cartesianas, los cuales tienen derivadas globales constantes, se puede integrar la ecuación (6.22) por inspección.

La matriz [H] es constante y por lo tanto puede ser removida de la integral, siendo únicamente necesario integrar en el volumen; utilizando el teorema de Pappus:

$$V^e = 2\pi \int_{A^e} R dR dZ = 2\pi \int R dA = 2\pi \langle R \rangle A^e,$$

donde $\langle R \rangle = (R_1 + R_2 + R_3) / 3$ es el centroide radial del elemento. En el caso de la placa plana, el elemento de volumen tenía un tamaño dado por: $V = \epsilon A$, donde ϵ es el espesor; ahora simplemente se tiene que reemplazar ϵ por $2\pi \langle R \rangle$.

Aún cuando el término fuente es constante la ecuación (6.23) no es trivial. Si interpolamos la posición radial a partir de las coordenadas nodales:

$$R = [H] [R^e].$$

Entonces:

$$[C_Q^e] = 2\pi Q^e \int_{A^e} [H]^T [H] dR dZ [R^e]. \quad (6.24)$$

La integral es fácil de resolver. Sustituyendo la matriz integrada, obtenemos:

$$[C_Q^e] = \frac{2\pi Q^e A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

6.6. Algoritmo Computacional para Transferencia de Calor Bidimensional Axisimétrica en Coordenadas Cilíndricas.

El programa Axis2D.Bas en código Qbasic permite calcular el perfil de temperaturas para transferencia de calor bidimensional en estado estacionario a través de un cilindro sólido de radio r_0 con un hueco concéntrico de radio r_1 y generación interna de calor homogénea en su volumen. Considerando condiciones de frontera isotérmicas en las paredes interna y externa del cilindro, así como en sus tapas.

El análisis axisimétrico bidimensional se realiza eligiendo elementos finitos triangulares cuyo número puede ser modificado por el usuario, quien establece el número de elementos en la base del cilindro, siendo igual el número de elementos verticales y horizontales.

***** ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA TRANSFERENCIA DE CALOR *****
 ***** BIDIMENSIONAL EN COORDENADAS CILÍNDRICAS *****

Bloque I.- Especificación de Propiedades del Arreglo Matricial. En el primer bloque de instrucciones se especifica la longitud del elemento y el número de elementos en la base (neb). El número de nodos en la base es igual al número de elementos más uno. El número total de elementos es igual a dos veces el número de elementos

en la base al cuadrado. El programa calcula ese número de elementos totales (nel), así como el número total de nodos que se guarda en la variable sum.

```
LE = 3
neb = 10      'número de elementos en la base
nel = 2 * neb ^ 2  'calcula el número de elementos totales
PRINT "número de elementos totales="; nel
sum = (neb + 1) ^ 2
PRINT "num. total de nodos = "; sum
```

Bloque II.- Dimensionamiento de Matrices. En el segundo conjunto de instrucciones se dimensionan los arreglos matriciales que se utilizan a lo largo del programa, que son:

- Una matriz [m] de dimensión (nel,3) donde se guardan el número de elemento y la identidad de los tres vértices, es decir, el número de nodo de cada uno de sus vértices.
- Una matriz [mg] de dimensión igual a (sum, sum+1), donde se guardan los coeficientes de la matriz globalizada que vayan resultando durante el ensamblaje de las ecuaciones para cada elemento. No se trata de una matriz cuadrada porque en la última columna se almacenan los términos independientes del sistema de ecuaciones globalizado.
- Una matriz cuadrada [COEF] de dimensión (3,3) que se utiliza para guardar los coeficientes correspondientes a cada uno de los vértices en el sistema de ecuaciones locales y que han sido planteados analíticamente mediante el álgebra reportada en 6.5.
- El vector [cq] donde se almacena para cada nodo, la contribución al término fuente que generan cada uno de los elementos circundantes.
- El vector [RPRM] donde se guarda el radio promedio de cada elemento.
- Los vectores [r1], [r2] y [r3] donde se guardan las coordenadas de los tres vértices de cada elemento.
- Los vectores [x], [y] y [xn], [yn], útiles para el procedimiento de graficación.

```
DIM c(neb), m(nel, 3), mg(sum, sum + 1), COEF(3, 3)
DIM APARECE(sum + 1)
DIM x(sum), y(sum), xn(sum), yn(sum), cq(sum)
DIM RPRM(nel), r1(nel), r2(nel), r3(nel)
```

En la siguiente instrucción se define la variable ALE que sirve para redimensionar las matrices de coeficientes globales [MG1] ante la reducción del sistema de ecuaciones globalizado cuando se introducen condiciones de frontera.

```
ALE = (neb - 1) ^ 2
```

Se dimensiona el vector [COEF1] donde se almacenan los términos independientes del sistema de ecuaciones ensamblado, la matriz [MG1] donde se guardan los coeficientes del sistema de ecuaciones ensamblado y la matriz [a1] con la que se transfieren los coeficientes del sistema de ecuaciones a resolver hacia la subrutina de eliminación Gaussiana.

```
DIM COEF1(ALE), MG1(ALE, ALE + 1), A1(ALE, ALE + 1)
```

Bloque III.- Especificación de Topología. Se establece la topología del arreglo de elementos finitos. Con el se especifican los números de cada elemento, se identifica si se trata de un triángulo normal o invertido (parado o de cabeza), también se especifica los números de los nodos que corresponden a cada uno de sus vértices y la capa o nivel a que pertenece cada elemento. El programa da la posibilidad de que el usuario visualice la topología.

```
FOR N = 1 TO nel
c = INT((N - 1) / 2 / neb) + 1 'determinación de la capa a que corresponde cada elemento
' PRINT "num ele="; n; "capa="; c
IF N - 2 * neb * (c - 1) <= (neb) THEN 10 ELSE 20 'determina si el triángulo está parado o de cabeza
10 nodo1 = N - (c - 1) * (neb - 1); NODO2 = nodo1 + 1; NODO3 = N + 2 + neb - (c - 1) * (neb - 1)
COLOR 9: PRINT N; "("; nodo1; NODO2; NODO3; ")"
GOTO 30
20 nodo1 = N + 2 - (c - 1) * (neb - 1); NODO2 = nodo1 - 1; NODO3 = N - neb - (c - 1) * (neb - 1)
```

```
color4: PRINT N; "("; nodo1; NODO2; NODO3; ")"
30 m(N, 1) = nodo1: m(N, 2) = NODO2: m(N, 3) = NODO3
NEXT N
```

Bloque IV.-Especificación de matrices locales. El siguiente conjunto de instrucciones sirve para establecer los coeficientes del sistema de ecuaciones locales para cada elemento basándose en el álgebra desarrollada en la explicación previa.

```
COEF(1, 1) = 4: COEF(1, 2) = -4: COEF(1, 3) = 0
COEF(2, 1) = -4: COEF(2, 2) = 8: COEF(2, 3) = -4
COEF(3, 1) = 0: COEF(3, 2) = -4: COEF(3, 3) = 4
```

Bloque V.-Determinación del Radio Promedio y Coordenadas Radiales de los Nodos de cada Elemento.

Para triángulos normales:

```
FOR I = 1 TO neb * 2 STEP 2
  FOR j = 1 TO neb
    r1(neb * (I - 1) + j) = LE * (j - 1)
    r2(neb * (I - 1) + j) = LE * j
    r3(neb * (I - 1) + j) = LE * j
    RPROM(neb * (I - 1) + j) = LE * (2 * j + (j - 1)) / 3
  NEXT j
NEXT I
```

Para triángulos invertidos:

```
FOR I = 2 TO neb * 2 STEP 2
  FOR j = 1 TO neb
    r1(neb * (I - 1) + j) = LE * j
    r2(neb * (I - 1) + j) = LE * (j - 1)
    r3(neb * (I - 1) + j) = LE * (j - 1)
    RPROM(neb * (I - 1) + j) = LE * (j + 2 * (j - 1)) / 3
  NEXT j
NEXT I
```

Impresión de los radios promedio de cada elemento:

```
FOR I = 1 TO nel
  PRINT "rpro"; I; "=", RPROM(I)
NEXT I
```

Bloque VI.- Ensamblaje del Sistema de Ecuaciones Global.- Se ensamblan las ecuaciones de cada elemento para obtener la matriz globalizada. Mediante el siguiente procedimiento de ensamblaje se van leyendo los números de celda asignados a cada uno de los términos para cada vértice en la matriz globalizada y se van llenando con los coeficientes que le corresponden si se trata del nodo 1, 2 ó 3. Conforme van llegando nuevos valores a la celda se suman a los que se tenían anteriormente.

```
FOR N = 1 TO nel
  FOR I = 1 TO 3
    FOR j = 1 TO 3
      mg(m(N, I), m(N, j)) = mg(m(N, I), m(N, j)) + COEF(I, j) * RPROM(N)
    NEXT j
  NEXT I
NEXT N
```

Bloque VII.- Cálculo del calor producido en cada elemento. Con la siguiente instrucción se calcula el calor producido en el interior de cada elemento. qprod puede ser una constante o una función que dependa de la posición, o eventualmente puede ser cero. Lo cual indicaría ausencia del término fuente. El usuario tiene la posibilidad de acceder a esta instrucción para modificar la naturaleza de la fuente de calor en la simulación.

```
'qprod= calor producido en cada elemento
qprod = 0 * 8 / neb ^ 2 / 2
```

Bloque VIII. Cálculo y ensamblaje de los términos fuente. El siguiente ciclo de cálculos iterativos permite ensamblar el vector de términos fuente:

```
'Ensamblaje De Los Términos Fuente
FOR N = 1 TO nel
  cq(m(N, 1)) = cq(m(N, 1)) + 2 * r1(N) + r2(N) + r3(N)
  cq(m(N, 2)) = cq(m(N, 2)) + r1(N) + 2 * r2(N) + r3(N)
  cq(m(N, 3)) = cq(m(N, 3)) + r1(N) + r2(N) + 2 * r3(N)
NEXT N
' Impresión de los términos fuente
FOR I = 1 TO sum
  PRINT "CQ"; I, "="; cq(I),
NEXT I
```

Bloque IX.- Construcción de la matriz globalizada. En la siguiente serie de instrucciones se le asigna a la última columna de la matriz globalizada los valores correspondientes del vector de términos fuente, multiplicando por el perímetro del cilindro local para tomar en cuenta las correcciones geométricas por variación del tamaño (espesor) de los elementos.

```
FOR k = 1 TO sum
  mg(k, sum + 1) = cq(k) * qprod * 2 * 3.1416 / 12
NEXT k
FOR k = 1 TO sum
  FOR L = 1 TO sum + 1
    PRINT mg(k, L);
  NEXT L
  PRINT
NEXT k
DO
LOOP WHILE INKEY$ = ""
COLOR 3
```

Bloque X.- Introducción de condiciones frontera. Se especifican las condiciones de frontera isotérmicas para cada uno de los nodos que se ubican en las paredes interna y externa del cilindro y en las tapas superior e inferior del mismo. **Simultáneamente se reconstruye el sistema de ecuaciones lineales.** Debido a que al introducir las condiciones de frontera en los extremos, la temperatura en varios nodos son conocidas, a los coeficientes correspondientes en la matriz de capacitancia se les asigna el valor de 1. Además, en las ecuaciones que contienen a dichos coeficientes como incógnita, se sustituye la temperatura conocida y se pasa con signo contrario al vector de términos independientes, como lo requiere el álgebra.

```
TEMP = 5
FOR I = 1 TO neb
  FOR j = 1 TO sum 'BORDE INFERIOR
    IF mg(j, I) <> 0 THEN mg(j, sum + 1) = mg(j, sum + 1) - mg(j, I) * TEMP
    mg(j, I) = 0
    mg(I, j) = 0
  NEXT j
  mg(I, I) = 1
  mg(I, sum + 1) = TEMP
  I1 = I * (neb + 1) 'BORDE DERECHO
  FOR j = 1 TO sum
    IF mg(j, I1) <> 0 THEN mg(j, sum + 1) = mg(j, sum + 1) - mg(j, I1) * TEMP
    mg(j, I1) = 0
    mg(I1, j) = 0
  NEXT j
  mg(I1, I1) = 1
  mg(I1, sum + 1) = TEMP
  I2 = I * (neb + 1) + 1 'BORDE IZQUIERDO
```

```

FOR j = 1 TO sum
  IF mg(j, I2) <> 0 THEN mg(j, sum + 1) = mg(j, sum + 1) - mg(j, I2) * TEMP
  mg(j, I2) = 0
  mg(I2, j) = 0
NEXT j
mg(I2, I2) = 1
mg(I2, sum + 1) = TEMP
I3 = neb * (neb + 1) + I 'BORDE SUPERIOR
FOR j = 1 TO sum
  IF mg(j, I3) <> 0 THEN mg(j, sum + 1) = mg(j, sum + 1) - mg(j, I3) * TEMP * 2
  mg(j, I3) = 0
  mg(I3, j) = 0
NEXT j
mg(I3, I3) = 1
mg(I3, sum + 1) = TEMP * 2
NEXT I
FOR j = 1 TO sum
  IF mg(j, sum) <> 0 THEN mg(j, sum + 1) = mg(j, sum + 1) - mg(j, sum) * TEMP
  mg(j, sum) = 0
  mg(sum, j) = 0
NEXT j
mg(sum, sum) = 1
mg(sum, sum + 1) = TEMP
COLOR 4
REDUC = 0

FOR I = 1 TO sum
  IF mg(I, I) <> 1 THEN 110 ELSE 120
110 REDUC = REDUC + 1
  'PRINT "REDUC"; REDUC
  COEFI(REDUC) = I
120 NEXT I
FOR j = 1 TO REDUC
  FOR k = 1 TO REDUC
    MG1(j, k) = mg(COEFI(j), COEFI(k))
    MG1(j, k + 1) = mg(COEFI(j), sum + 1)
  NEXT k
NEXT j
COLOR 9
FOR j = 1 TO REDUC
  FOR k = 1 TO REDUC + 1
    PRINT MG1(j, k);
  NEXT k
  PRINT
NEXT j

```

Bloque XI.- Se transfere el sistema de ecuaciones a la subrutina de eliminación Gaussiana.

```

FOR i = 1 TO REDUC
  FOR j = 1 TO reduc+1
    AI(i,j) = MG1(i,j)
  NEXT j
NEXT i

```

Bloque XI.- Subrutina de Eliminación Gaussiana.

Bloque XII.- Subrutina de Graficación.

6.7. Resultados de la Simulación de Transferencia de Calor Bidimensional en Coordenadas Cilíndricas.

La gráfica siguiente muestra los resultados de la ejecución del programa Axis2D. Bas evaluando la distribución axisimétrica de temperatura a lo largo del volumen de un cilindro hueco de radio interior de 4 cm, radio exterior de 8 cm y longitud de 8 cm. Con una conductividad térmica de 1 Watts / m °K y producción de calor cero en su volumen. Las temperaturas de la pared externa e interna así como las de las tapas permanecen constantes e iguales a:

- Pared interior = 5°

- Pared exterior = 5°
- Tapa superior = 10°
- Tapa inferior = 5°

Los números romanos representan el número de nivel contado desde el plano inferior hasta el plano superior. Las divisiones en cada nivel representan las coordenadas nodales de 0 a 9, donde cero corresponde al radio de 4 cm y 9 al radio de 8 cm. El esquema del inciso (b) representa la malla de elementos finitos.

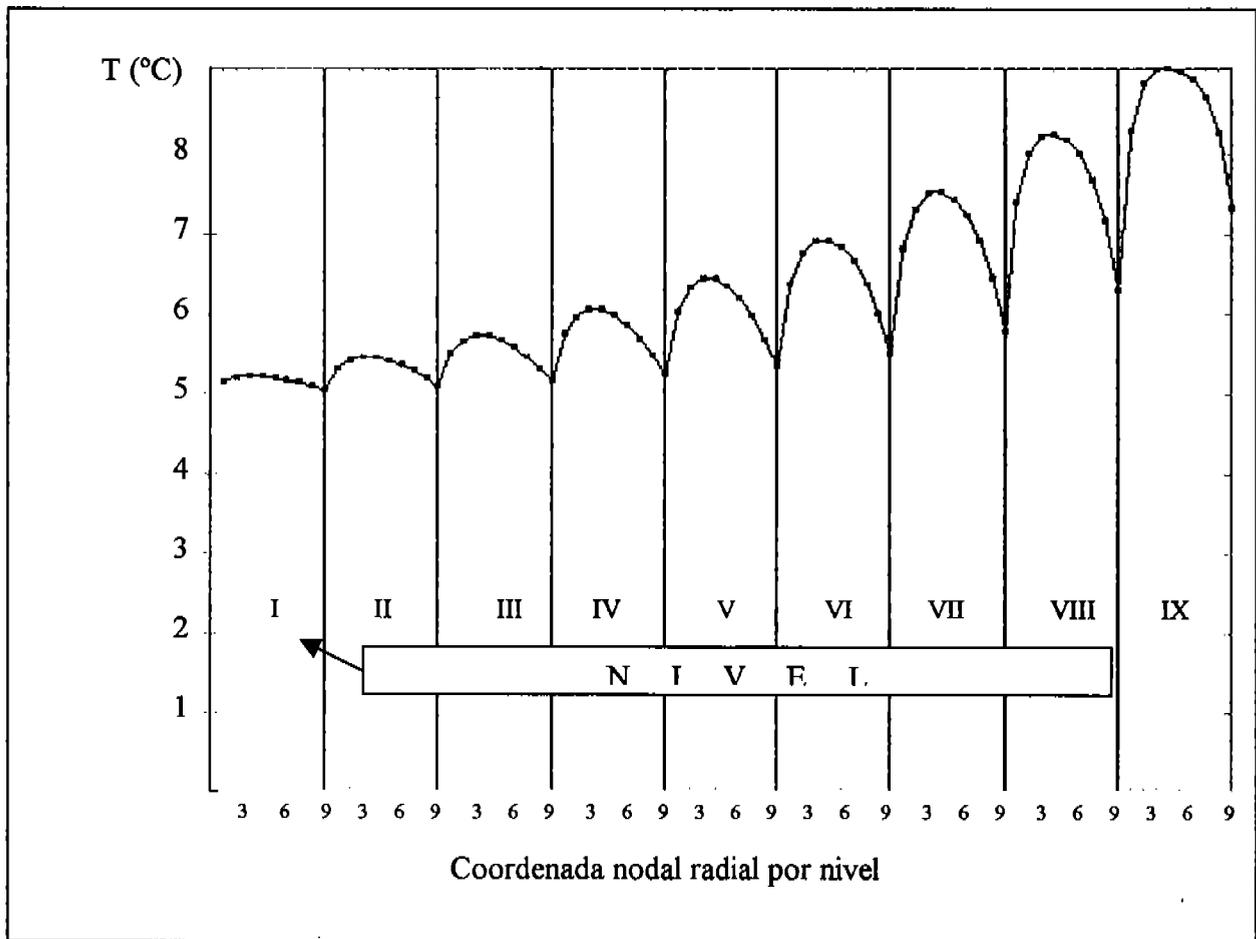
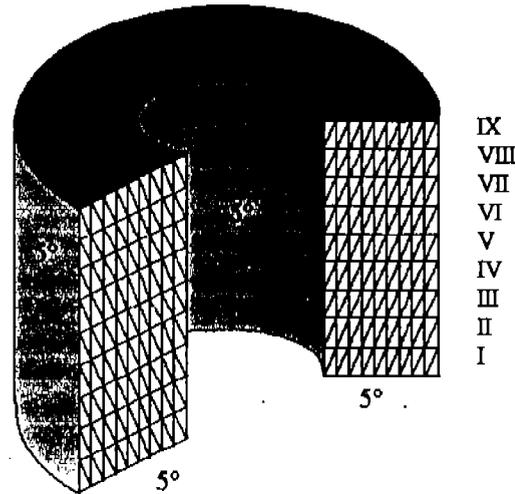


Fig. 6.3.a. Simulación de la transferencia de calor a través de un cilindro hueco con condiciones de frontera isotérmicas y sin generación interna de calor. Este esquema representa el perfil de temperaturas por niveles que se especifican en la malla de elementos finitos representadas en la figura 6.3.b. Este ejemplo corresponde a la resolución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

Fig. 6.3.b. Simulación de la transferencia de calor a través de un cilindro hueco con condiciones de frontera isotérmicas y sin generación interna de calor. Esquema anterior representa el perfil de temperaturas por niveles que se especifican en la malla de elementos finitos representadas en la figura lateral. Este ejemplo corresponde a la resolución de la ecuación de Laplace bidimensional en coordenadas cilíndricas.



La siguiente figura es otra de las representaciones gráficas de los resultados del problema anterior, que da como salida el programa AXIS2D.BAS, utilizándose la subrutina de graficación tridimensional presentada. En esta gráfica, al igual que

en las figuras 6.3 a y b, se representa la distribución de temperaturas en los nodos internos. La temperatura en los nodos superficiales se conoce, $T = 10^{\circ}\text{C}$ en la tapa superior y 5°C en las demás superficies.

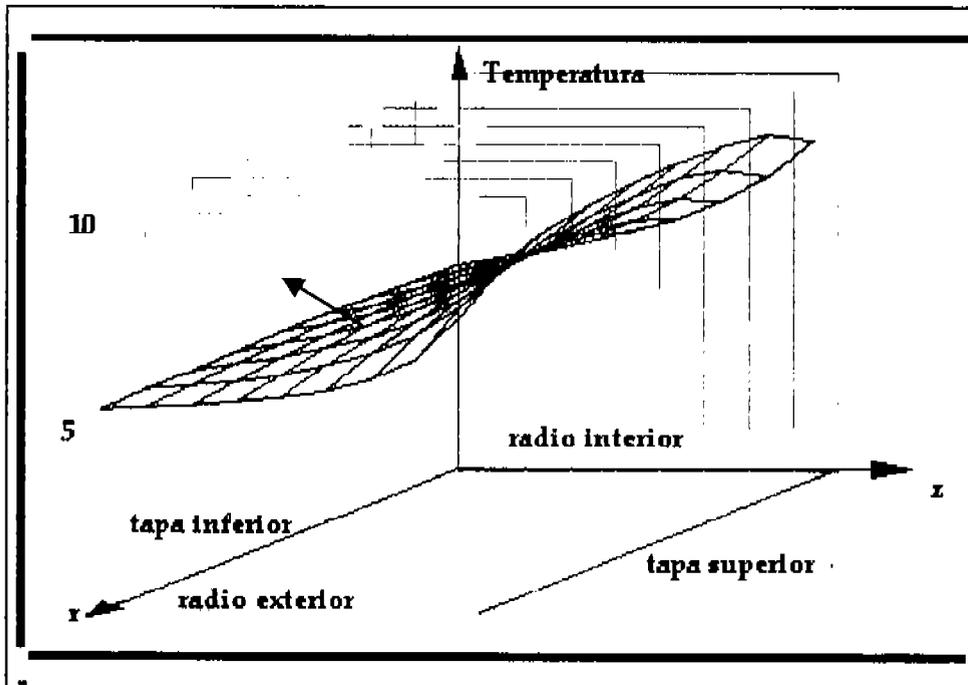


Fig. 6.4. Representación gráfica tridimensional de la distribución de temperaturas en el interior de un cilindro hueco con condiciones de frontera isotérmicas y sin generación interna de calor.

Si para la ejecución del programa AXIS2D.BAS se le asigna una producción de calor interna de 100 Watts en el bloque VI, entonces la ecuación diferencial de transferencia de calor por conducción corresponde al tipo de ecuación de Poisson. Los resultados de la simulación por elementos finitos son los siguientes:

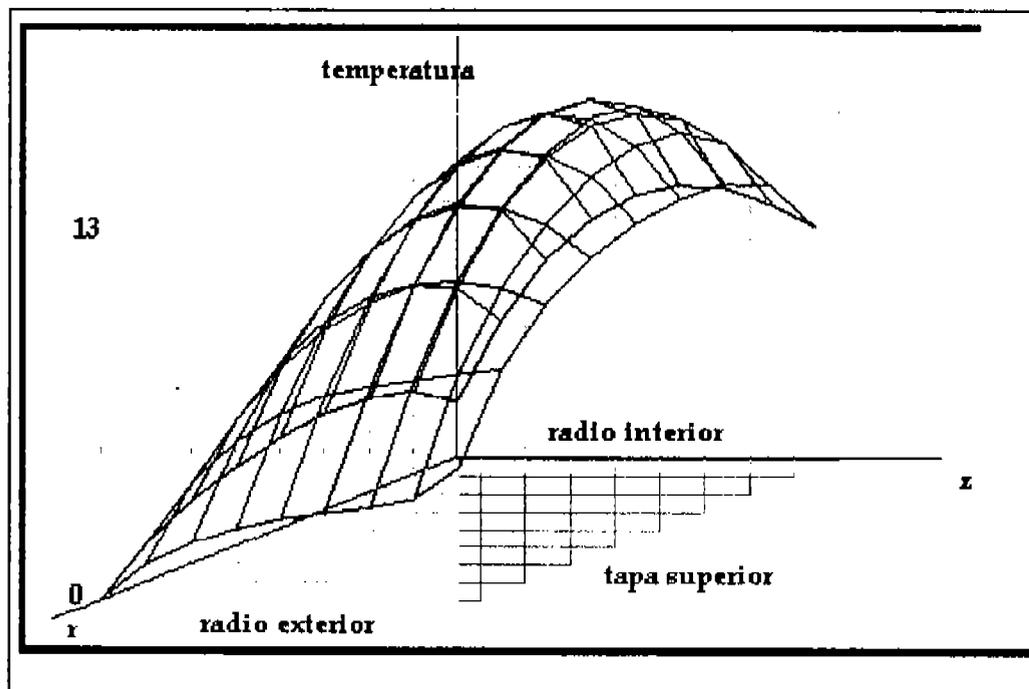


Fig. 6.5. Representación gráfica de la Transferencia de Calor por conducción a través de un cilindro hueco con generación interna de calor y fronteras isotérmicas.

Aún cuando el programa Axis2D.Bas maneja exclusivamente fronteras isotérmicas, no resulta difícil modificarlo para introducir la consideración de fronteras adiabáticas o convectivas, tal como se hizo en el capítulo 5. De hecho, la mayoría de los problemas de utilidad práctica de este tipo de procesos de la termodinámica irreversible tiene que ver con fronteras no isotérmicas.

En procesos de transferencia de masa por difusión en coordenadas cilíndricas se pueden encontrar situaciones semejantes a las de los fenómenos de transferencia de calor, por lo que el par de programas presentados aquí, también pueden ser útiles en la caracterización de procesos de difusión molecular. En el capítulo que sigue se aborda

precisamente el análisis por elementos finitos de la difusión molecular en estado estacionario.

El algoritmo de cómputo presentado en este capítulo puede ser fácilmente modificado accediendo a las instrucciones del bloque III, para incluir otras formas geométricas de simetría axial. La especificación de las coordenadas radiales como una función de la coordenada axial, permite llevar a cabo el cálculo de la transferencia de calor en estado estacionario y fronteras isotérmicas, prácticamente para cualquier cuerpo axisimétrico. A continuación se presenta como ejemplo un conjunto de figuras en las que se muestran las distribuciones de temperaturas obtenidas para cuerpos de diferentes configuraciones geométricas de simetría axial, con condiciones de frontera isotérmicas y en estado estacionario.

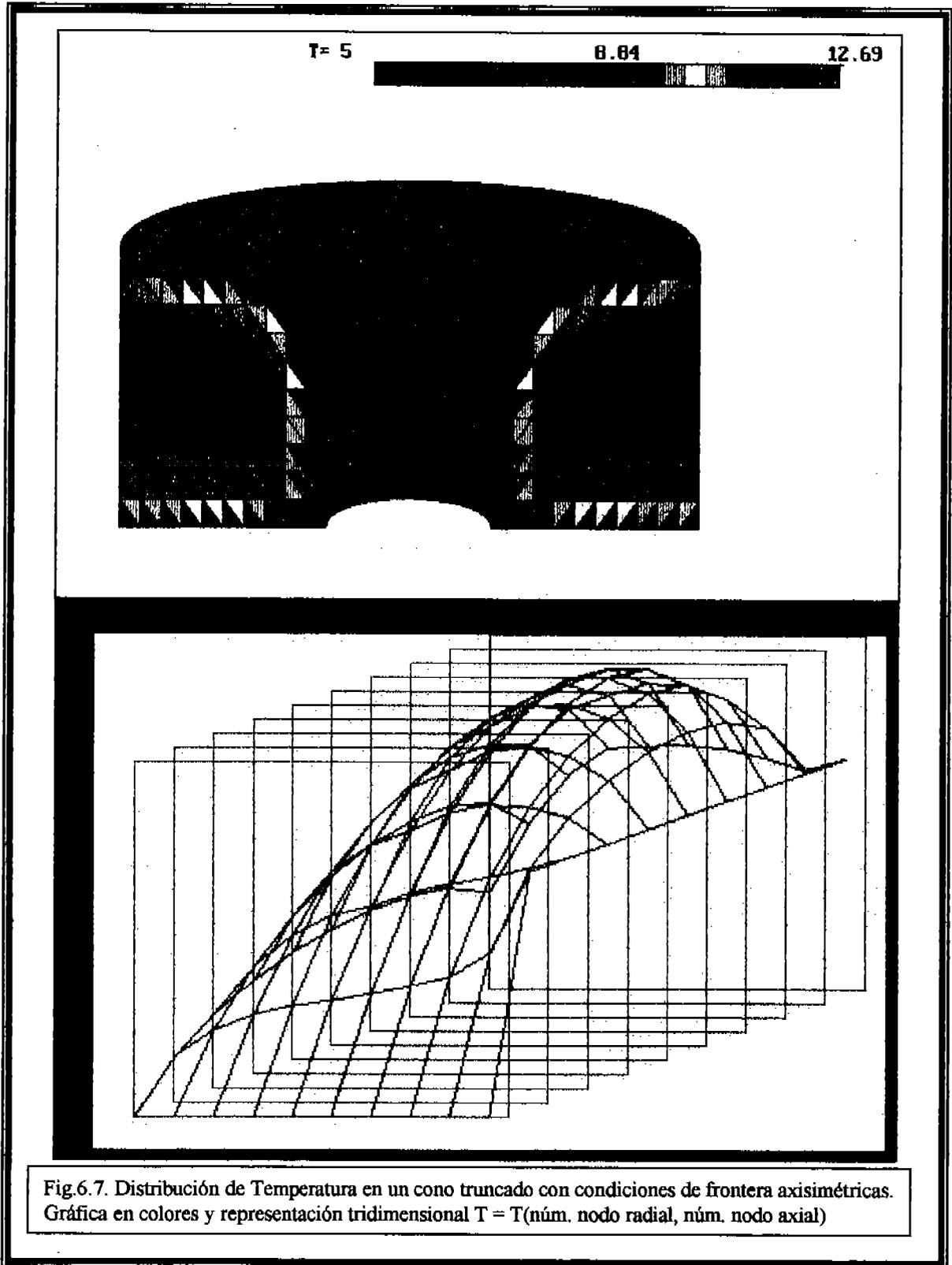


Fig.6.7. Distribución de Temperatura en un cono truncado con condiciones de frontera axisimétricas. Gráfica en colores y representación tridimensional $T = T(\text{núm. nodo radial, núm. nodo axial})$

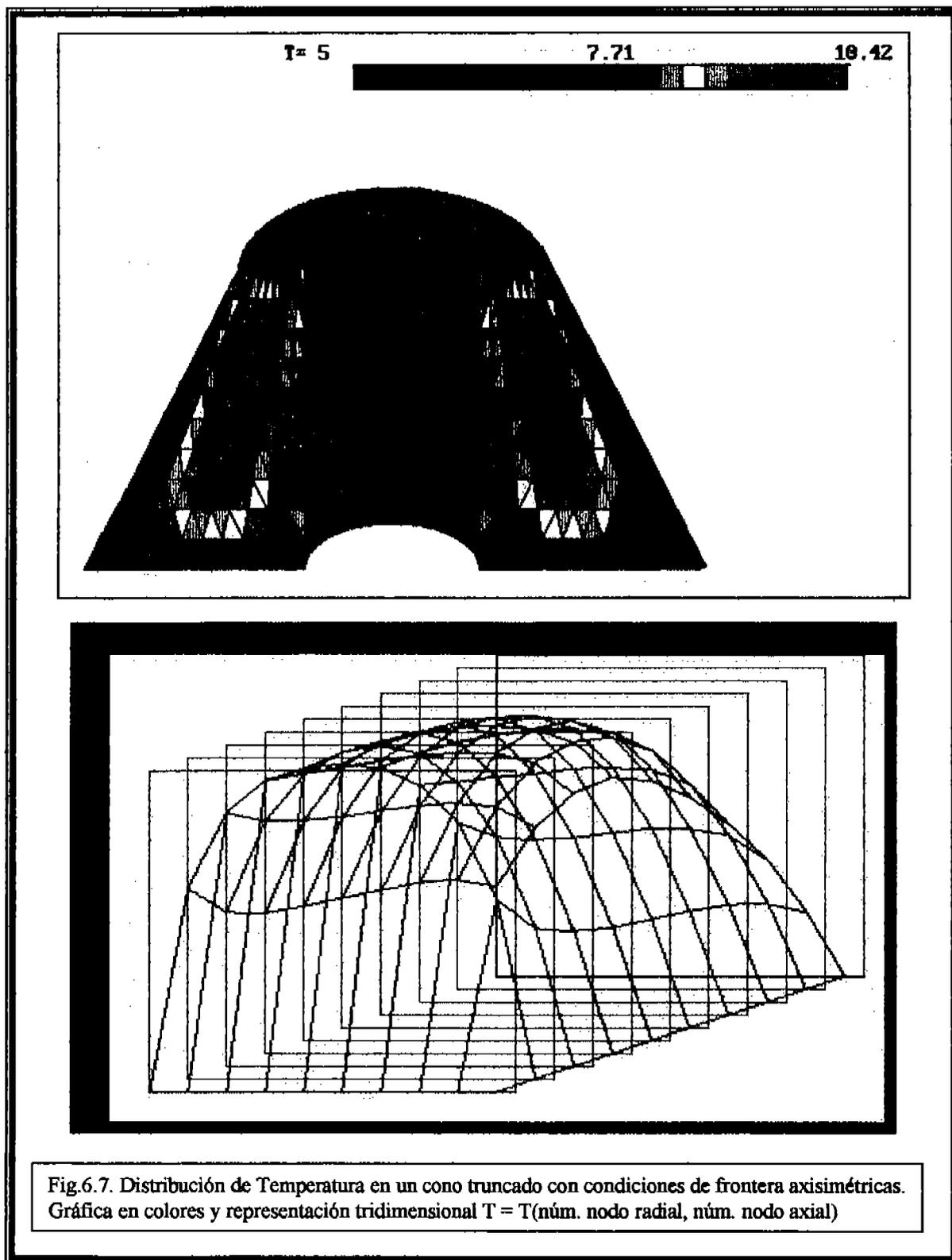


Fig.6.7. Distribución de Temperatura en un cono truncado con condiciones de frontera axisimétricas. Gráfica en colores y representación tridimensional $T = T(\text{núm. nodo radial, núm. nodo axial})$

Transferencia de Masa Bidimensional.

7.1.-INTRODUCCIÓN

Otro de los procesos de la termodinámica irreversible que se presentan frecuentemente en la naturaleza y en aplicaciones industriales, es el de la difusión de sustancias en mezclas multicomponentes. En este capítulo se llevará a cabo el estudio de sistemas binarios donde ocurre el fenómeno de difusión de A en B estático considerando diferentes geometrías y desde dos puntos de vista:

- la integración analítica en los casos de ecuaciones diferenciales sencillas y con condiciones de frontera regulares, y
- la integración numérica mediante el método de elementos finitos en los casos de condiciones de frontera de geometría irregular.

A Finales del siglo XIX, el médico alemán Adolf Eugene Fick, analizando el proceso de difusión molecular en mezclas binarias, llegó a deducir el modelo matemático que describe la evolución en el tiempo de los perfiles de concentración de una sustancia A en una mezcla de multicomponentes.

En primer lugar, identificó experimentalmente la proporcionalidad lineal entre la densidad de flujo molar de difusión con los gradientes de concentración, escribiendo la ecuación diferencial de primer orden que describe dicho comportamiento e introduciendo el coeficiente de difusividad molar D_{AE} como la constante de proporcionalidad. Esta ecuación se conoce como primera ley de Fick y puede ser escrita en forma vectorial de la siguiente manera:

$$J_{AE} = D_{AE} (-\nabla C_A) \quad (7.1)$$

donde J_{AE} representa el flux molar de difusión respecto a un sistema de referencia que sigue el movimiento del fluido (moles de A que se difunden a través de la mezcla de multicomponentes por unidad de área y unidad de tiempo); mientras que el signo negativo en el gradiente de concentración indica que la transferencia de la sustancia A se verifica de zonas de alta concentración hacia regiones de concentración baja.

La formulación de la primera ley de Fick para densidad de flujo molar relativa a coordenadas estáticas, toma en cuenta la transferencia de A por mecanismos de transporte molecular y convectivo, y corresponde a:

$$N_{AE} = x_A \sum N_i - c D_{AE} \nabla x_A \quad (7.2)$$

En esta ecuación, el vector $x_A \sum N_i$ representa el flux molar de A resultante del movimiento global del fluido, mientras que el vector $c D_{AE} \nabla x_A$ corresponde a la densidad de flujo que resulta de la difusión molecular (por efecto del gradiente de concentración), superpuesta al flujo global. La concentración molar global del fluido se denota con la letra c . Para una mezcla binaria de A y B:

$$N_A = x_A (N_A + N_B) - c D_{AB} \nabla x_A \quad (7.3)$$

La siguiente figura representa dos situaciones que ilustran el significado de las funciones N_A y J_A :

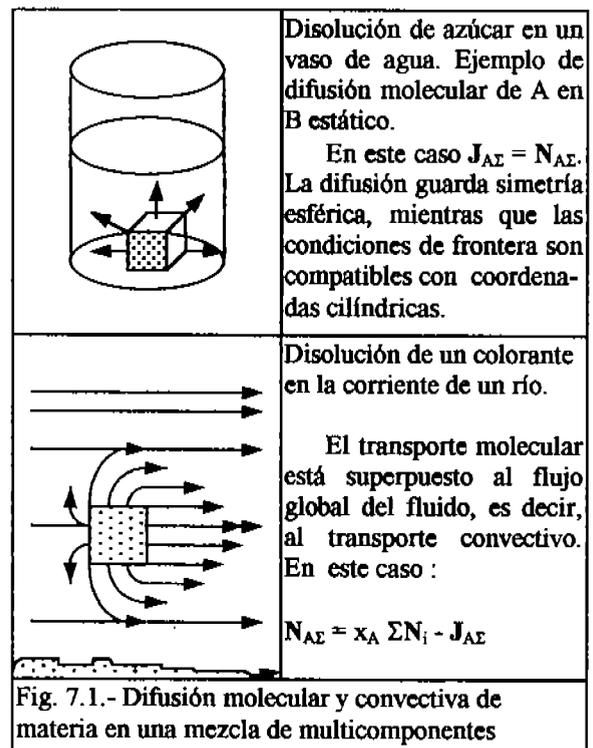
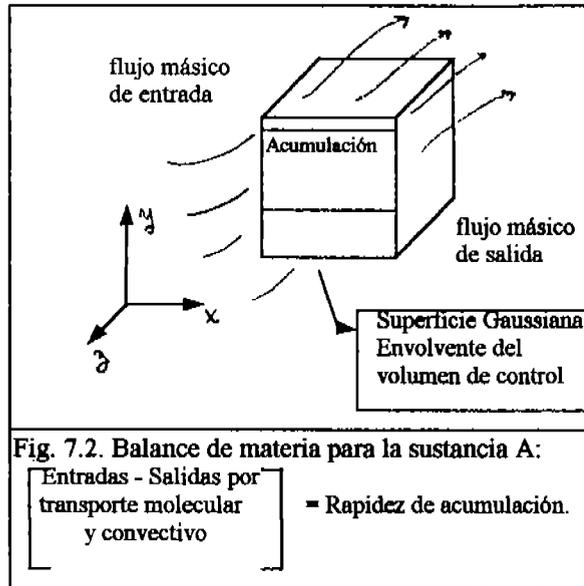


Fig. 7.1.- Difusión molecular y convectiva de materia en una mezcla de multicomponentes

Recordando el significado físico de la función divergente podemos realizar un balance de materia para la sustancia A durante el proceso de difusión en condiciones de estado transitorio, con el fin de obtener el modelo matemático que propuso Fick en su trabajo original. La siguiente figura es una representación esquemática de dicho balance:



Tomando en cuenta coordenadas fijas (enfoque Euleriano), podemos escribir:

$$-\nabla \cdot \mathbf{N}_{A\Sigma} = c \frac{\partial x_A}{\partial t} \quad (7.4)$$

para la difusión en un sólido o en un fluido estático:

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_{A\Sigma} = c \frac{\partial x_A}{\partial t} \quad (7.5)$$

donde el divergente del flux molar de A representa la diferencia de los flujos molares de entrada menos salida que atraviesan una superficie gaussiana tomada en las inmediaciones del campo de difusión, mientras que el lado derecho de la ecuación representa la rapidez de acumulación de la sustancia A en el interior de la superficie gaussiana que encierra el volumen de control considerado para el balance.

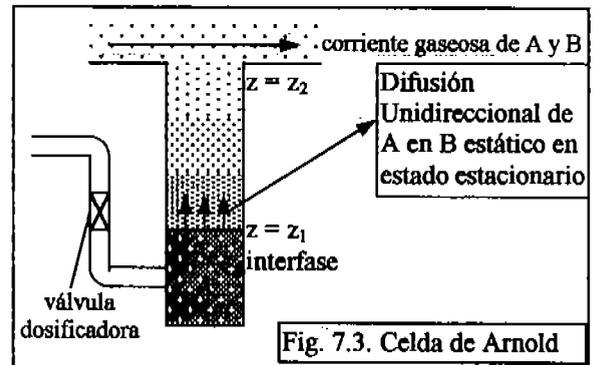
La difusión molecular de A en B estático corresponde a un evento físico de alta incidencia tanto en procesos naturales como industriales. En lo que sigue consideraremos varias situaciones en las que la integración de la ecuación diferencial correspondiente pueda llevarse a cabo en forma analítica, mientras que en los casos relacionados a geometrías o condiciones de frontera complejas, tomaremos en cuenta el método de elementos finitos para integración.

7.2.- SOLUCIONES ANALÍTICAS.

a) Celda de Arnold en Estado Estacionario.

Para mezclas binarias en fase gaseosa, el ejemplo clásico de la difusión de A en B estático corresponde al de la celda de Arnold. Dicho sistema consiste en un tubo vertical que se llena parcialmente con el líquido volátil A y que se coloca con su extremo superior abierto al paso de una corriente de gas constituida por las sustancias A y B. En la parte superior, $z = z_2$, la fracción molar de A es igual a x_2 .

En la interfase, la concentración del vapor de A corresponde al equilibrio termodinámico con el líquido a la presión y temperatura del sistema. Por lo tanto en $z = z_1$, la fracción molar de A, x_1 , es igual al cociente de la presión de vapor de la sustancia A entre la presión del sistema, suponiendo implícitamente que A y B forman una mezcla ideal, para hacer factible la sustitución de las fugacidades por las presiones parciales.



La cantidad de líquido en el tubo se mantiene constante por el artificio mostrado en la figura, el cual permite la entrada de A en la cantidad exacta para compensar las pérdidas por evaporación. La parte superior del tubo se llena con la mezcla gaseosa de A

y B, entonces, al evaporarse A se difunde a través de dicha mezcla. Consideraremos que el proceso de difusión se realiza a presión y temperatura constantes y que B es completamente insoluble en A.

Al alcanzar el estado estacionario, existe un movimiento neto de A alejándose de la superficie de evaporación, mientras que el gas B en la sección superior del tubo permanece inmóvil.

Como el proceso de difusión ocurre en una sola dirección, el primer paso es escribir la ecuación (7.3) para tomar en cuenta exclusivamente el transporte unidireccional:

$$N_{Az} = x_A (N_{Az} + N_{Bz}) - c D_{AB} \partial x_A / \partial z \quad (7.6)$$

Para las condiciones indicadas, $N_{Bz} = 0$, entonces, simplificando:

$$N_{Az} = - \frac{c D_{AB}}{1 - x_A} \frac{d x_A}{dz} \quad (7.7)$$

Por otra parte, el balance de materia de A (ec. 7.4) para difusión unidireccional en condiciones de estado estacionario, se simplifica a:

$$-\nabla \cdot N_{Az} = 0;$$

$$-\frac{d}{dz} N_{Az} = 0 \quad (7.8)$$

Sustituyendo (7.7) en (7.8), obtenemos:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{c D_{AB}}{1 - x_A} \frac{d x_A}{dz} \right] = 0 \quad (7.9)$$

Para mezclas de gases ideales en régimen isotérmico e isobárico, la concentración global del fluido, c , es constante y el coeficiente de difusividad, D_{AB} , es independiente de la concentración. Dichos términos se factorizan como una constante fuera del operador derivada y al pasar dividiendo al otro lado de la ecuación, se eliminan:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1 - x_A} \frac{d x_A}{dz} \right] = 0 \quad (7.10)$$

Integrando dos veces esta ecuación diferencial de segundo orden, obtenemos:

$$-\ln(1 - x_A) = c_1 z + c_2 \quad (7.11)$$

Las constantes de integración se evalúan mediante las condiciones de frontera:

$$\text{en } z = z_1 \quad x_A = x_{A1} \quad (7.12)$$

$$\text{en } z = z_2 \quad x_A = x_{A2} \quad (7.13)$$

que al ser sustituidas dan lugar a dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, cuya solución conduce a:

$$c_1 = \ln [(1 - x_{A1}) / (1 - x_{A2})] / (z_2 - z_1) = \ln (x_{B1} / x_{B2}) / (z_2 - z_1) \quad (7.14)$$

$$c_2 = (z_1 \ln x_{B2} - z_2 \ln x_{B1}) / (z_2 - z_1) \quad (7.15)$$

consecuentemente, el perfil de concentración de A en la parte superior del tubo queda dado por:

$$\left[\frac{1 - x_A}{1 - x_{A1}} \right] = \left[\frac{1 - x_{A2}}{1 - x_{A1}} \right]^{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}; \quad (7.16)$$

$$\text{o: } \left[\frac{x_B}{x_{B1}} \right] = \left[\frac{x_{B2}}{x_{B1}} \right]^{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \quad (7.17)$$

La gráfica siguiente representa los resultados obtenidos:

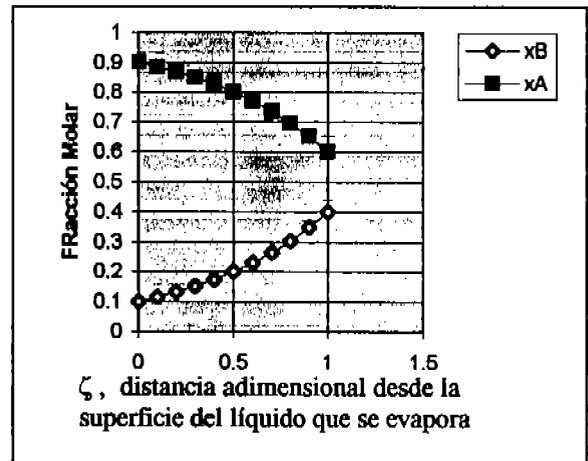


Fig. 7.4. Distribución de concentraciones de A y B para difusión molecular de A en B estático en una celda de Arnold.

A pesar de que el perfil de concentración es muy útil en la caracterización cuantitativa de los procesos de difusión, una variable de mayor uso a nivel de aplicaciones de Ingeniería es la concentración media, es decir, el promedio ponderado de la concentración de las especies de la mezcla

binaria. El factor de ponderación sería, obviamente, la distancia medida desde la interfase líquido-vapor. Denominando al cociente $(z - z_1) / (z_2 - z_1) = \zeta$ como la distancia adimensional desde la superficie líquida, tenemos, para la concentración promedio ponderada de la especie B:

$$\langle x_B \rangle = \frac{\int_{z_1}^{z_2} (x_B/x_{B1}) dz}{\int_{z_1}^{z_2} dz} = \frac{\int_0^1 (x_{B2} - x_{B1}) \zeta d\zeta}{\int_0^1 d\zeta} = \frac{(x_{B2} - x_{B1}) \zeta^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{x_{B2} - x_{B1}}{2}$$

de donde resulta que:

$$\langle x_B \rangle = (x_{B2} - x_{B1}) / \ln(x_{B2} / x_{B1}) \quad (7.18)$$

Por lo tanto, el promedio ponderado de x_B es la media logarítmica de los valores extremos.

La velocidad de evaporación del líquido, se obtiene evaluando el flujo molar de A en la interfase líquido-gas, utilizando la ecuación (7.7) :

$$N_{Az}|_{z=z_1} = - \left[\frac{cD_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \right]_{z_1} = \left[\frac{cD_{AB}}{x_{B1}} \frac{dx_B}{dz} \right]_{z_1}$$

$$N_{Az}|_{z=z_1} = \frac{cD_{AB}}{z_2 - z_1} \ln \frac{x_{B2}}{x_{B1}} \quad (7.19)$$

Combinando las ecuaciones (7.18) y (7.19), finalmente llegamos a:

$$N_{Az}|_{z=z_1} = \frac{cD_{AB} (x_{A1} - x_{A2})}{(z_2 - z_1)(x_B)_{med} \ln} \quad (7.20)$$

En esta última expresión se puede identificar el potencial impulsor que promueve la transferencia de masa, como el gradiente de concentración de la especie A a lo largo de la longitud del tubo. Considerando el modelo de gas ideal, las ecuaciones (7.19) y (7.20) pueden escribirse como:

$$N_{Az}|_{z=z_1} = \frac{pD_{AB}}{RT(z_2 - z_1)} \ln \frac{p_{B2}}{p_{B1}} = \frac{pD_{AB} (p_{A1} - p_{A2})}{RT(z_2 - z_1)(p_B)_{med} \ln}$$

Estas ecuaciones son más frecuentemente usadas ya que la presión es más fácil de medir que la concentración.

La celda de Arnold fue uno de los dispositivos más ampliamente utilizados en la determinación experimental de los coeficientes de difusión para mezclas binarias en fase gaseosa. Trabajando a nivel de líquido constante, con el dosificador se cuantifica

la cantidad de A evaporada. Se mide también la distancia $(z_2 - z_1)$. Conociendo la presión de vapor de la sustancia a volatilizar (mediante tablas termodinámicas), y midiendo la presión total del sistema, la presión del componente B se determina restando estas dos presiones, y entonces, se dispone de todos los datos, simplemente para despejar el coeficiente de difusión y llevar a cabo las operaciones aritméticas.

Sin embargo, el método de Arnold adolece de varios defectos. Mantener el régimen isotérmico puede ser complicado debido a la tendencia del líquido a enfriarse conforme se evapora. También, pueden existir corrientes convectivas parásitas cuando el vapor que genera el líquido que se volatiliza es de menor densidad que el gas que está sobre él. Además, el menisco que forma la interfase líquido-gas por tensión interfacial, provoca que la trayectoria de difusión no sea completamente uniforme a lo largo del tubo. Actualmente se prefieren métodos más precisos para la estimación de los coeficientes de difusión.

Ejemplos:

Ejemplo 1. Difusión Unidireccional a través de una película líquida estancada en estado estacionario.

En el estudio de la velocidad de lixiviación de una sustancia A a partir de partículas sólidas mediante un disolvente B, se puede postular que la etapa que controla la velocidad del proceso es la difusión de A desde la superficie de la partícula hasta la corriente global del fluido. La solubilidad de A en B es C_{A0} gmol/cm³, y la concentración de la corriente global (más allá de la película líquida de espesor δ) es $C_{A\delta}$.

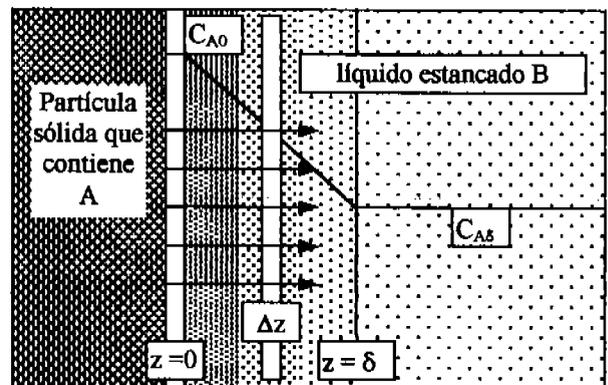


Figura 7.5. Ejemplo 1. Difusión a través de una película de líquido estancado.

a) Obtener una ecuación diferencial de C_A en función de z , aplicando un balance de materia para A a una lámina delgada de espesor Δz . Supóngase que D_{AB} es constante y que A es solo ligeramente soluble en B. Despréciase la curvatura de la partícula.

b) Demostrar que en ausencia de reacción química en la fase líquida, el perfil de concentración es lineal.

c) demostrar que la velocidad de lixiviación viene dada por:

$$N_{Az} = \frac{D_{AB}}{\delta} (C_{A0} - C_{A\delta})$$

Solución:

a) para el elemento de volumen de espesor Δz , la diferencia entre los flujos molares de la sustancia A (entradas menos salidas) es igual a la acumulación de A en el interior de dicho volumen, pero en condiciones de estado estacionario, este último término es cero; entonces, y en ausencia de reacción química:

$$SN_{Az}|_z - SN_{Az}|_{z+\Delta z} = 0$$

siendo S el área transversal a la dirección de flujo. Dividiendo esta ecuación entre el volumen de la superficie gaussiana considerada para el análisis: $\Delta V = S \Delta z$, y tomando el límite cuando Δz tiende a cero, tenemos:

$$\frac{dN_{Az}}{dz} = 0$$

para el líquido estancado, el término de difusión convectiva es cero, entonces:

$$N_{Az} = -cD_{AB} \frac{dx_A}{dz} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación de balance, obtenemos (considerando al coeficiente de difusividad independiente de la concentración):

$$\frac{d^2}{dz^2} C_A = 0$$

b) integrando dos veces la ecuación anterior, llegamos a:

$$C_{Az} = c_1 z + c_2, \text{ un perfil lineal de concentración de A.}$$

Introduciendo las condiciones límite:

$$\begin{aligned} \text{en } z = 0 & \quad C_A = C_{A0} \\ \text{en } z = \delta & \quad C_A = C_{A\delta} \end{aligned}$$

obtenemos los siguientes valores para las constantes de integración :

$$c_1 = (C_{A\delta} - C_{A0}) / \delta ; \quad c_2 = 0$$

La distribución de la concentración de A en líquido estancado B, queda dada entonces por la siguiente función lineal :

$$C_A = C_{A\delta} \frac{z}{\delta} + C_{A0} \left[1 - \frac{z}{\delta} \right] = (C_{A\delta} - C_{A0}) (z / \delta) + C_{A0}$$

Mientras que la densidad de flujo molar de A, que es la pendiente del perfil de concentraciones, es igual a una constante:

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} = \frac{D_{AB}}{\delta} (C_{A0} - C_{A\delta})$$

Ejemplo 2.-

Difusión desde una gota hacia una película de gas estancado.

Una gota de la sustancia A está suspendida en una corriente del gas B. El radio de la gotita es r_1 . Se admite que existe una película esférica de gas estacionario de radio r_2 , alrededor de la gota esférica. La concentración de la sustancia A en la fase gaseosa es x_{A1} para $r = r_1$, y x_{A2} para $r = r_2$.

a) Demostrar, mediante un balance aplicado a una envoltura, que para la difusión en estado estacionario, $r^2 N_{Ar}$, es una constante cuyo valor en la superficie de la gota es $r_1^2 N_{Ar1}$.

b) Demostrar que la ecuación (7.3) y el resultado del inciso (a) conducen a la siguiente ecuación diferencial ordinaria para x_A :

$$r_1^2 N_{Ar1} = -\frac{cD_{AB}}{1-x_A} r^2 \frac{dx_A}{dr}$$

c) Integrar esta ecuación entre los límites r_1 y r_2 con el fin de obtener:

$$N_{Ar1} = \frac{cD_{AB}}{r_2 - r_1} \left[\frac{r_2}{r_1} \right] \ln \frac{x_{B2}}{x_{B1}}$$

d) Si se define un coeficiente de transferencia de materia k_p mediante la ecuación $N_{Ar1} = k_p (p_{A1} - p_{A2})$, demostrar que, cuando $r_2 \rightarrow \infty$, se cumple:

$$k_p = 2cD_{AB}/D (p_B)_{med \ln}$$

en la que D es el diámetro de la gotita. Discútase el significado de este resultado aplicado a la evaporación de una gotita en una gran masa de gas que no está en movimiento.

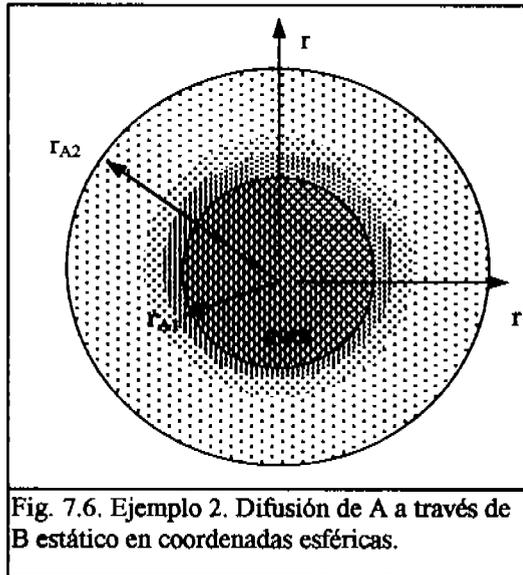


Fig. 7.6. Ejemplo 2. Difusión de A a través de B estático en coordenadas esféricas.

Solución :

Conociendo el significado físico de la función divergencia, podemos obviar el análisis sobre un elemento diferencial de volumen, procediendo a escribir las ecuaciones constitutivas que caracterizan esta configuración de flujo de materia.

El balance de materia (flujos de entrada menos salida = rapidez de acumulación) para la sustancia A que se difunde en B estático, para régimen transitorio, corresponde a la siguiente ecuación:

$$-\nabla \cdot N_{AB} = c (\partial x_A / \partial t)$$

La cual, para estado estacionario y difusión unidimensional radial en coordenadas esféricas, se simplifica a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 N_{Ar} = 0$$

integrando y sustituyendo la primera condición de frontera, que se refiere a la concentración de A en la interfase líquido-gas:

$$r^2 N_{Ar} = c_1 = r_1^2 N_{Ar1}$$

de donde : $N_{Ar} = r_1^2 N_{Ar1} / r^2$

Ahora escribimos la primera ley de Fick en coordenadas esféricas:

$$N_{Ar} = -\frac{cD_{AB}}{1-x_A} \frac{dx_A}{dr};$$

Igualando las dos últimas ecuaciones:

$$r_1^2 N_{Ar1} = -\frac{cD_{AB}}{1-x_A} r^2 \frac{dx_A}{dr}$$

c) Separando variables e integrando:

$$r_1^2 N_{Ar1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -cD_{AB} \int_{x_{A1}}^{x_{A2}} \frac{dx_A}{(1-x_A)} =$$

$$r_1^2 N_{Ar1} \left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right] = cD_{AB} \ln \frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}} = cD_{AB} \ln \frac{x_{B2}}{x_{B1}}$$

Despejando N_{Ar1} , finalmente obtenemos:

$$N_{Ar1} = \frac{cD_{AB}}{r_2 - r_1} \left[\frac{r_2}{r_1} \right] \ln \frac{x_{B2}}{x_{B1}}$$

la cual, expresada en términos de presiones parciales es :

$$N_{Ar1} = \frac{cD_{AB}}{r_2 - r_1} \left[\frac{r_2}{r_1} \right] \ln \frac{p_{B2}}{p_{B1}}$$

d) Cuando r_2 tiende a infinito, $r_2 - r_1 \approx r_2$

$$N_{Ar1} = k_p (p_{A1} - p_{A2}) = \frac{cD_{AB}}{r_2} \left[\frac{r_2}{r_1} \right] \ln \frac{p_{B2}}{p_{B1}};$$

$$k_p = \frac{2cD_{AB}}{D} \left[\frac{\ln \frac{p_{B2}}{p_{B1}}}{p_{B2} - p_{B1}} \right] = \frac{2cD_{AB}}{D} (p_B)_{med \ln}$$

Los resultados obtenidos son válidos para procesos en estado estacionario de difusión de A en B estático bajo condiciones de temperatura y presión constantes. A diferencia del ejemplo 1, aquí no existe deformación de las trayectorias de difusión, debido a

la simetría esférica de la configuración del campo de flujo y la ausencia de efectos de tensión superficial que provoquen la aparición de un menisco en la interfase.

Al integrar sin límites el resultado del inciso (b), se obtiene el perfil de concentraciones en el interior de la película de difusión. Un poco de álgebra permite llegar a deducir que está dado por:

$$x_A = 1 - (1 - x_{A1}) \exp \left[\frac{r_1 N_{Ar1}}{c D_{AB}} \left(1 - \frac{r_1}{r} \right) \right]$$

El siguiente esquema representa gráficamente este perfil de concentraciones, que corresponde a una función exponencial decreciente de la coordenada radial:

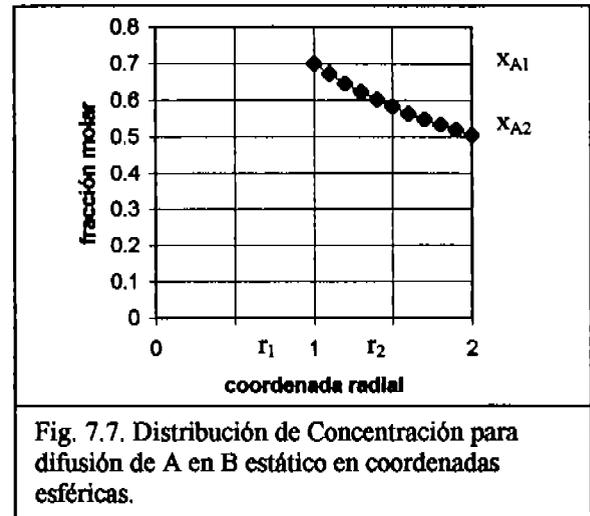


Fig. 7.7. Distribución de Concentración para difusión de A en B estático en coordenadas esféricas.

7.3.- Procesos Electrolíticos Controlados por Transporte de Carga en Soluciones Diluidas Isotérmicas en Estado Estacionario.

Algunas de las aplicaciones tecnológicas más importantes de los conceptos teóricos relacionados con la difusión de A en B estático ocurre en el campo de la Ingeniería Electroquímica. Uno de cuyos procesos, la electrodeposición de sustancias electrolíticas en la superficie de electrodos de diferente geometría, frecuentemente llega a ser un problema de difícil solución, desde el punto de vista analítico. La dificultad surge casi siempre en la manipulación de las condiciones de frontera para geometrías irregulares. Es por eso que en esta sección consideraremos dicho problema para presentar algunos de los métodos numéricos que hemos desarrollado para la solución de problemas relacionados con los fenómenos de transporte

Para empezar consideremos un sistema isotérmico que consiste de un solvente sin disociar y n sustancias o especies iónicas disueltas.

Podemos representar a la densidad de flujo molar del i -ésimo componente, J_i (mol/m² seg), como la suma vectorial de tres términos : difusión, migración iónica y convección.

$$J_i = - D_i \nabla C_i - C_i u_i \nabla \phi + C_i v_o \quad (7.21)$$

donde:

- $D_i \nabla C_i$ representa la densidad de flujo molar del componente i , debido a la difusión molecular, es

decir, a la existencia de un gradiente de concentración en el seno de la solución. Este término corresponde a la ley de Fick de la difusión.

- $C_i u_i \nabla \phi$ representa la densidad de flujo molar del componente i , debido a la migración iónica, es decir a la influencia del potencial eléctrico de la solución sobre las especies cargadas. Este término corresponde a la ley de Coulomb para las interacciones eléctricas.

$C_i v_o$ es el término que representa el flux molar convectivo del componente i . Corresponde a la cantidad de las sustancias electrolíticas que son arrastradas por el fluido que se mueve con velocidad v_o .

En esta ecuación:

- D_i Denota el coeficiente de difusión del i -ésimo componente en el disolvente.
- u_i La velocidad de migración de la i -ésima partícula dividida por la intensidad de campo eléctrico (denominada también movilidad eléctrica o movilidad electroquímica).
- ϕ El potencial eléctrico de la solución.
- v_o la velocidad del solvente con respecto a un sistema de coordenadas fijo.

Por simplicidad, usamos la convención de que el signo de u_i es idéntico al de la carga del i -ésimo ion. Por lo tanto para un ion sin disociar $u_i = 0$.

La densidad de flujo molar J_i es un vector normal al área de la sección transversal al flujo.

La velocidad de movimiento del solvente generalmente se puede calcular resolviendo la ecuación hidrodinámica de Navier-Stokes; En casos especiales puede ser constante y los fluxes J_i pueden ser referidos convenientemente a un sistema de coordenadas que se mueve con el solvente, es decir, podemos utilizar $N_i = J_i - C_i v_0$.

La cantidad ϕ es el potencial interno de una fase dada, la diferencia de ϕ entre dos puntos se denomina diferencia de potencial galvánico.

Las cantidades D_i y u_i son linealmente dependientes; para soluciones iónicas muy diluidas, su interdependencia se describe mediante la relación de Nernst-Einstein:

$$D_i = R T u_i / z_i F \quad (7.22)$$

- z_i Es el número de carga iónica, es decir, la carga del iésimo ion referida a la carga del protón. También se le denomina "número de transporte".
- F Es la constante de Faraday en Cb/mol

Por convención el signo de u_i es idéntico a z_i , por lo tanto el lado derecho de esta ecuación es siempre positivo.

La corriente que fluye a través del electrolito se debe al movimiento de los iones. La densidad de flujo de los iones J_i es comúnmente expresada en mol $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, pero otra forma de expresarlo es en Amp/ cm^2 . la cantidad resultante puede ser convenientemente denominada densidad parcial de corriente debida a las especies i y está dada por:

$$j_i = F z_i J_i \quad (7.23)$$

La densidad total de corriente es obtenida por la suma de las densidades parciales de todas la especies cargadas:

$$j = F \sum_{i=1}^n z_i J_i \quad (7.24)$$

Como caso especial, el vector de densidad de corriente j , puede tener un solo componente diferente de cero, cuyo signo dependería de la dirección del eje

de coordenadas. Esto se conoce como el caso unidimensional, en donde el campo eléctrico en la solución es homogéneo.

Otra ecuación básica es el balance de masa para las especies i . En notación vectorial tiene la siguiente forma:

$$\partial C_i / \partial t = -(\nabla J_i + R_i) \quad (7.25)$$

Que indica que la rapidez con la que aumenta la concentración de la especie i en el interior de una superficie gaussiana en el seno de la solución es igual a la diferencia entre los flujos molares de (entrada-salida) de dicha especie por difusión molar más la (producción - consumo) de dicha especie por alguna reacción química homogénea que se esté llevándose a cabo. Literalmente:

$$(\text{Almacenamiento}) = [(\text{Entrada}) - (\text{Salida})] + [(\text{Producción}) - (\text{Consumo})]$$

El último término de la ecuación tiene significado especial en la teoría de electrodos porosos. Si es negativo, entonces el proceso concierne a la formación de las especies i ; si es positivo se tendrá un consumo de especies. Los tres términos tienen las mismas dimensiones ($\text{mol L}^{-3}\text{T}^{-1}$).

Finalmente, la ecuación que sirve como complemento a las anteriores, es la condición de electroneutralidad:

$$\sum z_i C_i = 0 \quad (7.26)$$

La cual es exacta en regiones del electrolito sin gradientes de concentración y exhibe alta precisión también en el seno de la solución con gradientes de concentración diferentes de cero. Sin embargo no es aplicable en la región de doble capa de Helmholtz, es decir en la vecindad de la superficie del electrodo, una región de 1 a 10 nanómetros de espesor.

Afortunadamente la influencia de la doble capa comúnmente es despreciable en los cálculos de transporte de sustancias electrolíticas, Dicha región es frecuentemente identificada geoméricamente con la superficie del electrodo para efectos de simulación computacional, por lo que no representa un problema crítico.

El conjunto de ecuaciones básicas citadas permiten realizar los cálculos de las densidades de flujo de masa y carga así como la distribución de concentraciones en espacio y tiempo. La primera de ellas aplica, por supuesto, solo a procesos

isotérmicos. En un caso más general podría ser necesario considerar también la difusión térmica con una fuerza impulsora ∇T , lo cual representa, sin embargo, solo una corrección que se añadiría al flux másico debido a la difusión isotérmica.

En los procesos electrolíticos controlados por transferencia de carga, la fuerza impulsora más importante que promueve las corrientes de difusión de las especies electroquímicas cargadas es el potencial eléctrico. Consideraremos un sistema isotérmico en estado estacionario de una solución electrolítica diluida en el que los gradientes de concentración sean nulos o despreciables, y además en el que la contribución del mecanismo de transporte convectivo también sea igual a cero. Bajo estas condiciones, la ecuación (21) se reduce a:

$$\mathbf{J}_i = -D_i \nabla C_i - C_i u_i \nabla \phi + C_i \mathbf{v}_0 \quad (7.21)$$

La ecuación de balance de materia (7.5) en estado transitorio se simplifica a:

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_i = -\nabla \cdot (-C_i u_i \nabla \phi) = 0 \quad (7.27)$$

En el caso de concentraciones constantes de todos los iones, se reduce a la ecuación de Laplace.

$$\text{div}(\text{grad } \phi) = \nabla^2 \phi = 0 \quad (7.28)$$

Esta ecuación es una de las que más llama la atención en textos de matemáticas avanzadas y de física-matemática. Se han desarrollado una gran cantidad de métodos analíticos, numéricos e híbridos, para llevar a cabo su solución en la forma más general posible. En este resumen, la resolveremos analíticamente mediante **series de Fourier** y compararemos los resultados con los obtenidos al aplicar uno de los métodos numéricos más versátiles que se han desarrollado hasta la actualidad, el de los **elementos finitos**. La solución computacional vía **diferencias finitas** es poco exacta, y por eso no la abordaremos aquí.

7.4.- Solución Analítica de la Ecuación de Laplace.

a) Coordenadas Cilíndricas 1-D.

Desarrollaremos la solución analítica de la ecuación de Laplace para el transporte de A a través de B estático, durante el proceso de difusión electrolítica controlada por transferencia de carga. Como primer ejemplo, consideraremos la electrólisis que se verifica entre dos electrodos cilíndricos concéntricos, en régimen isotérmico y estado estacionario. El flujo de las especies electroquímicas es exclusivamente radial, y por lo tanto, la ecuación característica para este proceso, corresponde al Laplaciano en dirección radial igual a cero, dando lugar a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (7.29)$$

Esta ecuación se resuelve mediante el cambio de variable: $y = d\phi / dr$.

Sustituyendo se obtiene una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden de variables separables:

$$dy/dr + (1/r)y = 0.$$

Al separar variables queda:

$$\int dy/y = -\int dr/r,$$

e integrando:

$$\ln y = \ln (c_1 / r),$$

de donde: $y = c_1 / r$

Luego, al retrosustituir la variable "y":

$$c_1 / r = d\phi/dr.$$

Integrando nuevamente se obtiene la siguiente solución general:

$$\phi = c_1 \ln r + c_2.$$

Para evaluar las constantes de integración c_1 y c_2 se introducen las condiciones de frontera. Como ejemplo consideremos que el potencial eléctrico es homogéneo en la superficie de ambos electrodos:

$$\phi = \phi_1 \text{ en } r = R_1 \text{ (} R_1 = \text{radio exterior). (ánodo)}$$

$$\phi = \phi_0 \text{ en } r = R_0 \text{ (} R_0 = \text{radio interior). (cátodo)}$$

entonces:

$$c_1 = (\phi_1 - \phi_0) / \ln(R_1 - R_0), y$$

$$c_2 = \phi_0 - c_1 \ln R_0 = \phi_0 - (\phi_1 - \phi_0) \ln R_0 / \ln(R_1/R_0).$$

Finalmente:

$$\phi = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\ln(R_1 / R_0)} \ln \frac{r}{R_0} + \phi_0$$

Esta solución servirá como referencia para comparar los resultados que se obtengan con los programas de elemento finito.

b) Coordenadas Cartesianas 2-D.

Como ejemplo de la solución analítica de la ecuación de difusión de A en B estático en estado estacionario, caracterizada por la ecuación de Laplace bidimensional la cual define el potencial eléctrico en el seno de una solución electrolítica, determinaremos la distribución de ϕ en el espacio comprendido entre dos electrodos que forman un arreglo cuadrangular como el que se muestra en la siguiente figura:

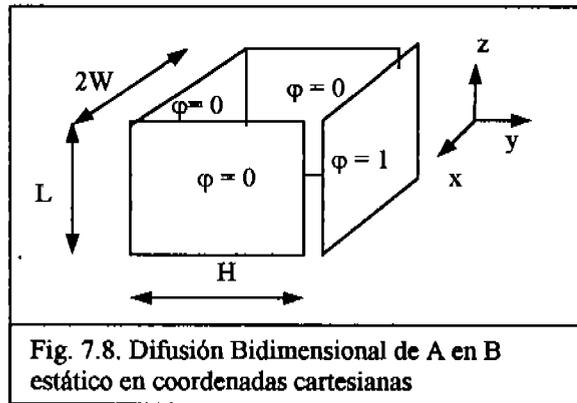
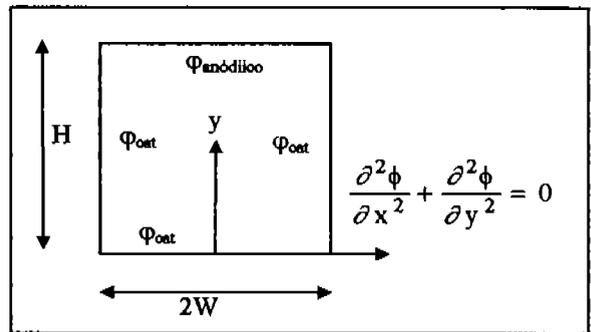
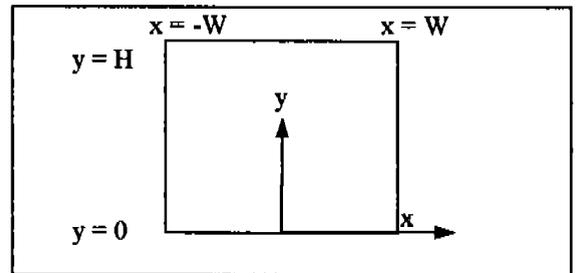


Fig. 7.8. Difusión Bidimensional de A en B estático en coordenadas cartesianas

De acuerdo con la ley de Gauss del campo eléctrico, las líneas de campo quedan encerradas en el espacio comprendido entre las dos placas. El potencial eléctrico variará con las coordenadas x e y, pero en dirección z se mantendrá constante debido a la invariabilidad de las condiciones de frontera en planos verticales. Uno de esos planos representa la forma en que se simplifica la ecuación de Laplace para esta conformación geométrica de los electrodos y sus condiciones de frontera, tal como puede observarse en la siguiente figura:



Las condiciones de frontera son claramente definidas, de acuerdo al siguiente conjunto de ecuaciones:



$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{\text{anódico}} & \text{en } x = \pm W & \quad \forall y \\ \phi &= \phi_{\text{cátodo}} & \text{en } y = 0 & \quad \forall x \\ \phi &= \phi_{\text{anódico}} & \text{en } y = H & \quad \forall x \end{aligned}$$

Resolveremos la ecuación de Laplace por el método de separación de funciones que nos permitirá convertir esta ecuación diferencial parcial en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, y utilizaremos series de Fourier para la integración ulterior.

Antes de llevar a cabo la integración, es conveniente adimensionalizar la ecuación diferencial. Usando variables adimensionales, el resultado tendrá cierto grado de universalidad. Es decir, será aplicable a cualquier escala y además permitirá manejar más fácilmente las condiciones de frontera.

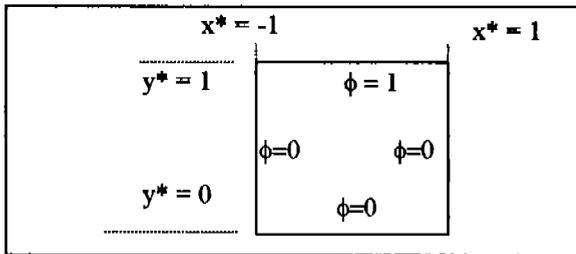
Definiendo el potencial adimensional ϕ como:

$$\phi = (\varphi - \varphi_{\text{catódico}}) / (\varphi_{\text{anódico}} - \varphi_{\text{catódico}})$$

y a las coordenadas adimensionales como :

$$x^* = x / w ; \quad y^* = y / H$$

Las condiciones límite adimensionales son:



Obsérvese que :

$$\partial x^* = \partial x / W ; \quad \partial^2 x^* = \partial^2 x / W^2$$

$$\partial y^* = \partial y / W ; \quad \partial^2 y^* = \partial^2 y / W^2$$

$$\partial \phi = \partial \varphi / (\varphi_{\text{anódico}} - \varphi_{\text{catódico}}) ;$$

$$\partial^2 \phi = \partial^2 \varphi / (\varphi_{\text{anódico}} - \varphi_{\text{catódico}})$$

Por lo que la ecuación diferencial adimensional es:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \phi + \left(\frac{W}{H} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \phi \right] = 0$$

Suponemos que el potencial ϕ , dependiente de las coordenadas x^* , y^* , puede ser escrito como el producto de dos funciones: Chi, X, que depende solo de x^* , e Ipsilon, Y, dependiente exclusivamente de y^* :

$$\phi = XY.$$

Derivando con respecto a x^* se tiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \phi = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} (XY) = Y \frac{d^2}{dx^{*2}} X$$

Mientras que al derivar con respecto a y^* :

$$\frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \phi = \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} (XY) = X \frac{d^2}{dy^{*2}} Y$$

Sustituyendo las segundas derivadas con respecto a x^* e y^* en la ecuación de Laplace, se obtiene la siguiente ecuación en derivadas ordinarias:

$$Y \frac{d^2}{dx^{*2}} X + \left(\frac{W}{H} \right)^2 X \frac{d^2}{dy^{*2}} Y = 0$$

Y la solución para ϕ es :

$$\phi = XY = c_2 c_4 \cos \left(\left[\frac{(2n+1)}{2} \right] \pi x^* \right) \sinh \left(\left[\frac{H}{W} \right] \left[\frac{(2n+1)}{2} \right] \pi y^* \right)$$

$$\phi = c_n \cos \left(\left[\frac{(2n+1)}{2} \right] \pi x^* \right) \sinh \left(\left[\frac{H}{W} \right] \left[\frac{(2n+1)}{2} \right] \pi y^* \right)$$

$$= c_n \cos \left(\left[\frac{(2n+1)}{2} \right] \pi x^* \right) \sinh \left(\left[\frac{H}{W} \right] \left[\frac{(2n+1)}{2} \right] \pi y^* \right) \quad \forall x^*$$

En esta expresión matemática aparece el término c_n , que corresponde a una serie de valores que puede tomar la constante de integración única. La determinación de las constantes de integración c_n se realiza introduciendo la cuarta condición de frontera:

$$\text{condición límite 4: } \phi = 1 \text{ en } y^* = 1 \quad \forall x^*.$$

Como esta condición es válida para todo valor de x^* en el intervalo de $-1 \leq x^* \leq 1$, la evaluación de las constantes c_n debe tomar en cuenta la contribución cosenoidal en todo el intervalo de x^* , esto se logra realizando la suma infinitesimal de dichas contribuciones. Dentro del universo de funciones que permiten obtener la solución general, aquellas que son ortogonales con la función coseno, no entran en la solución, en tanto que aquellas que no son ortogonales, conforman la solución particular del problema. Para tomar en cuenta todas las funciones que conforman la solución tomaremos el producto punto de la ecuación anterior con el coseno del argumento.

$$[1 = c_n \cos ([(2n+1) / 2] \pi x^*) \sinh ([H/W][(2n+1) / 2] \pi)] \bullet \cos ([(2m+1) / 2] \pi x^*)$$

$$\text{haciendo : } b_n = c_n \sinh ([H/W][(2n+1) / 2] \pi)$$

$$\int_{-1}^1 \cos ([(2m+1) / 2] \pi x^*) dx^* = b_n \int_{-1}^1 \cos ([(2m+1) / 2] \pi x^*) \cos ([(2n+1) / 2] \pi x^*) dx^*$$

La integral del lado derecho se hace cero cuando $n \neq m$, ya que entonces se tienen funciones ortogonales, y es igual a cero si $n = m$ (funciones no ortogonales), entonces:

$$\int_{-1}^1 \cos ([(2m+1) / 2] \pi x^*) dx^* = b_n \int_{-1}^1 \cos^2 ([(2m+1) / 2] \pi x^*) dx^*$$

Integrando:

$$\frac{2}{(2n+1)\pi} \sin \left(\frac{2n+1}{2} \pi x^* \right) \Big|_{-1}^1 = c_n \sinh \left(\frac{H}{W} \lambda \right) \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{4} \cos(2n+1)\pi x^* + \frac{1}{2} \right] dx^*$$

al evaluar los límites de integración:

$$\frac{2}{(2n+1)\pi} (-1)^{n+1} (2) = c_n \sinh \left(\frac{H}{W} \lambda \right)$$

Por lo tanto :

$$c_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi \sinh \left(\frac{H}{W} \frac{2n+1}{2} \pi \right)}$$

El potencial adimensional queda dado por:

$$\phi = \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1) \sinh \left(\frac{H}{W} \frac{2n+1}{2} \pi \right)} \cos \left(\frac{2n+1}{2} \pi x^* \right) \sinh \left(\frac{2n+1}{2} \pi y^* \frac{H}{W} \right)$$

Sustituyendo las variables dimensionales :

$$\phi = \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1) \sinh \left(\frac{H}{W} \frac{2n+1}{2} \pi \right)} \cos \left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{W} \right) \sinh \left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{y}{W} \right) \quad (7.30)$$

El resultado es una serie infinita convergente. Al momento de evaluar el potencial adimensional local en cualquier punto de coordenadas (x, y) , mientras mayor sea n , es decir, mientras mayor sea el número de términos considerados en la sumatoria, más exacto será el resultado.

Si en lugar de seleccionar el origen del sistema de coordenadas a la mitad de la placa central de las tres que conforman el cátodo, se hubiese seleccionado la esquina izquierda de ella, la ecuación que describiría la distribución espacial del potencial eléctrico sería (es fácil llevar a cabo los cálculos):

$$\phi = \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5,7,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{n \sinh\left(\frac{H}{W} n\pi\right)} \sin\left(n\pi \frac{x}{W}\right) \sinh\left(n\pi \frac{y}{W}\right) \right] \quad (7.31)$$

Nótese que en esta última expresión matemática ha desaparecido la parte simétrica y ha sido sustituida por una parte antisimétrica, la función sinusoidal, lo cual no es sorprendente, y está relacionado con la ubicación del origen del sistema de coordenadas. Cualquiera de las dos últimas ecuaciones es útil para determinar el potencial eléctrico en los puntos comprendidos entre ánodo y cátodo. El programa que se presenta a continuación permite llevar a cabo el cálculo, haciendo uso de esta segunda formulación.

```
INPUT "NUM DE NODOS="; N
```

```
DIM t(N, N + 1) 'la matriz [t] se utiliza para guardar los valores del potencial en puntos (x,y)
w = 2: H = 1: U = 1 'U es el potencial eléctrico adimensional anódico, el catódico es cero
```

```
FOR I = 1 TO N
  Y = I / (N) * H
  FOR J = 1 TO N
    X = J / (N + 1) * w
    FOR G = 1 TO 53 STEP 2
      ARG1 = G * 3.1416 * Y / w
      SENH1 = 1 / 2 * (EXP(ARG1) - EXP(-ARG1))
      ARG2 = G * 3.1416 * H / w
      SENH2 = 1 / 2 * (EXP(ARG2) - EXP(-ARG2))
      ARG3 = G * 3.1416 * X / w
      SEN3 = SIN(ARG3)
      S = S + 1 / G * SENH1 / SENH2 * SEN3
    NEXT G
    t(I, J) = U * 4 / 3.1416 * S
    PRINT "POT="; t(I, J)
    S = 0
  NEXT J
NEXT I
```

Los resultados de la simulación computacional vía elementos finitos se compararán contra los obtenidos mediante esta solución analítica que se toma como exacta, con la finalidad de estimar la exactitud del método numérico en la resolución de la ecuación de Laplace.

Una vez comprobado el grado de exactitud, se utilizará el algoritmo de elementos finitos en la caracterización de la función de distribución del potencial eléctrico para configuraciones geométricas de los electrodos en los que sea muy difícil acceder a una solución analítica.

En la siguiente sección se desarrolla un algoritmo computacional basado en el método de elementos finitos para el cálculo del potencial eléctrico en celdas electrolíticas de diferentes conformaciones geométricas. El programa que se describe en 7.5 es versátil y exacto, ya que permite manejar diferentes geometrías simplemente modificando la posición de los puntos nodales, y calcular con exactitud el potencial eléctrico, como se demuestra en la sección 7.7.

7.5 ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA LA CARACTERIZACIÓN DE PROCESOS DE ELECTRODEPOSICIÓN POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

7.5.1. Descripción del Algoritmo Computacional.

El algoritmo computacional que se describe a continuación, escrito en lenguaje Qbasic, permite evaluar el potencial eléctrico para densidad de corriente primaria en el espacio comprendido entre los electrodos (ánodo y cátodo) de una solución electrolítica diluida homogénea en condiciones isotérmicas y estado estacionario.

El usuario tiene la posibilidad de establecer diferentes configuraciones geométricas de los electrodos accediendo a un conjunto de instrucciones donde se especifican las coordenadas nodales (x, y) de los vértices de cada elemento triangular que conforma la malla de elementos finitos en que se discretiza el dominio de la solución. Existen dos posibilidades:

- Para electrodos de geometría irregular se recomienda la utilización del par de instrucciones READ-DATA e introducir la lista de las coordenadas x e y de cada uno de los nodos.
- En el caso de geometrías regulares, donde la ubicación de los nodos se puede ajustar a una función en el plano x-y, se recomienda utilizar un ciclo FOR-NEXT para establecer mediante una relación matemática las coordenadas de cada punto nodal.

Para efectos de explicación, en el algoritmo que se describe a continuación, se consideró un par de

electrodos cilíndricos concéntricos por lo que es aplicable la segunda opción. Posteriormente, en la sección 7.5.7 se ejemplifica como cambiar a otras geometrías utilizando la especificación directa de las coordenadas nodales.

El algoritmo siguiente resuelve la ecuación de Laplace bidimensional en coordenadas cartesianas mediante la formulación variacional del método de Elementos finitos, utilizando funciones de aproximación bilineales (lineales en "x" y en "y").

Los pasos que conforman el programa de cómputo son:

- Dimensionamiento de los arreglos matriciales.
- Especificación de la Topología.
- Representación gráfica de la malla de elementos finitos.
- Construcción de las ecuaciones locales de cada elemento
- Ensamblaje de la matriz global del sistema.
- Introducción de la condiciones de frontera naturales y de potencial constante.
- Resolución del sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas lineales.
- Cálculo de la distribución del potencial eléctrico en el espacio interelectródico.
- Representación gráfica de los resultados.

7.5.2. Ciclo para Dimensionamiento de Arreglos Matriciales.

En el primer bloque de instrucciones se especifica el número de nodos radiales (K1) y de nodos tangenciales (J1) para el caso de electrodos cilíndricos concéntricos (para otra configuración geométrica se requiere de especificar las coordenadas nodales (x, y) mediante un listado directo, lo cual puede hacerse fácilmente mediante las instrucciones READ-DATA. En el capítulo siguiente veremos un ejemplo específico donde se utiliza este procedimiento. Por lo pronto, y para fines de

explicación de este algoritmo, se considerarán los electrodos cilíndricos.

Se puede dar un valor máximo de 11 a j1 y a k1, debido a la limitación en cuanto a memoria disponible en el software. Aunque no resulta muy complicado ingenárselas para aumentar el número de nodos.

En este bloque de instrucciones, se calcula también el número total de nodos en la malla de

monitorear basta con añadir una comilla a la instrucción print para que se anule dicha tarea y la ejecución del programa sea más ágil.

```
FOR k = 1 TO k1
  r = ra + (rb - ra) / (k1 - 1) * (k - 1)
  FOR j = 1 TO j1
    alfa = 3.1416 / 2 / (j1 - 1) * (j - 1)
    kempes = k + (j - 1) * k1
    x1(kempes) = r * COS(alfa)
    y1(kempes) = r * SIN(alfa)
    PRINT "nodo="; kempes, "x=";
    &: x1(kempes); "y="; y1(kempes)
  NEXT j
NEXT k
FOR i = 1 TO n2
  PRINT "X1"; i, "="; x1(i), "Y1"; i, "="; y1(i)
NEXT i
```

En el quinto bloque se encuentran las instrucciones que permiten graficar los electrodos y la distribución topológica de los elementos. Se dibujan los puntos correspondientes a las coordenadas de cada uno de los nodos y se trazan líneas que unen las parejas de nodos adecuadas para conformar la malla de elementos finitos de acuerdo a la topología. A cada nodo se le asigna un número de identificación y a cada elemento se le asigna otro número que identifica su posición en las series de hileras consecutivas de triángulos parados e invertidos; además a cada elemento se le asocia una terna de números que corresponden a los números de identidad de los nodos que tienen como vértices.

```
REM "GRAFICADOR"
REM se leen los valores de la función a graficar, en
este caso, las coordenadas x, y de los puntos nodales
FOR i = 1 TO n2
  COLOR 3
  PRINT "x="; x1(i), "y="; y1(i)
NEXT i
REM Determinación de valores extremos de la
función para especificar escalas y área de graficación
ymin = y1(1): YMAX = y1(n2)
xmin = x1(1): xMAX = x1(n2)
FOR i = 2 TO n2
  IF ymin > y1(i) THEN ymin = y1(i)
  IF YMAX < y1(i) THEN YMAX = y1(i)
  IF xmin > x1(i) THEN xmin = x1(i)
  IF xMAX < x1(i) THEN xMAX = x1(i)
NEXT i
xmingraf = xmin: xmaxgraf = xMAX: ymingraf =
ymin: ymaxgraf = YMAX
scalex = .1: scaley = .1
```

SCREEN 12 ' inicia procedimiento de graficación.

```
100 CLS
LINE (0, 0)-(639, 440), 15, BF ' fondo blanco
COLOR 3
LINE (c, a)-(c, b) ' marco en color verde
LINE (c, a)-(d, a)
LINE (c, b)-(d, b)
LINE (d, a)-(d, b)
pasx = xmaxgraf + ABS(xmingraf)
pasy = ymaxgraf + ABS(ymingraf)
ejey = c + (d - c) / pasx * ABS(xmingraf)
' calcula posición de ejes x, y
ejex = a + (b - a) / pasy * ymaxgraf
COLOR 3
LINE (ejey, a)-(ejey, b)
' dibuja ejes x, y en verde
LINE (c, ejex)-(d, ejex)
REM normalización de escala
NY = INT(pasy / scaley)
NX = INT(pasx / scalex)
DIM DIVX(NX), DIVY(NY)
DIVX(1) = c: DIVY(1) = b
FOR i = 2 TO NX
  DIVX(i) = DIVX(i - 1) + scalex * (d - c) / pasx
  COLOR 3
  LINE (DIVX(i), ejex - 2)-(DIVX(i), ejex + 2)
  ' dibuja divisiones de escala
  LINE (DIVX(i), a)-(DIVX(i), a + 2)
  LINE (DIVX(i), b - 2)-(DIVX(i), b)
NEXT i
FOR j = 2 TO NY
  DIVY(j) = DIVY(j - 1) - scaley * (b - a) / pasy
  LINE (ejey - 3, DIVY(j))-(ejey + 3, DIVY(j))
  LINE (c, DIVY(j))-(c + 3, DIVY(j))
  LINE (d - 3, DIVY(j))-(d, DIVY(j))
NEXT j

1200
FOR i = 1 TO n2
  xn(i) = x1(i) * (d - c) / pasx + ejey
  yn(i) = -y1(i) * (b - a) / pasy + ejex
  COLOR 9
  ' dibuja puntos nodales con nueve pixeles
  PSET (xn(i) - 1, yn(i) + 1)
  PSET (xn(i) - 1, yn(i))
  PSET (xn(i) - 1, yn(i) - 1)
  PSET (xn(i), yn(i) + 1)
  PSET (xn(i), yn(i))
  PSET (xn(i), yn(i) - 1)
  PSET (xn(i) + 1, yn(i) + 1)
  PSET (xn(i) + 1, yn(i))
  PSET (xn(i) + 1, yn(i) - 1)
NEXT i
' traza malla de elementos finitos uniendo nodos.
FOR i = 1 TO j1 - 1
  FOR j = 1 TO k1
```

```

COLOR 3
LINE (xn(k1 * (i - 1) + j + k1), yn(k1 * (i -
&:1) + j + k1))-(xn(j + k1 * (i - 1)), yn(j + k1 * (i -
&:1)))
NEXT j
FOR j = 1 TO k1 - 1
  COLOR 3
  LINE (xn(k1 * (i - 1) + j), yn(k1 *
(i - 1) + j))-(xn(j + 1 + k1 * (i - 1)), yn(j + 1
+ k1 * (i - 1)))

```

```

NEXT j
NEXT i
FOR i = 2 TO j1
  FOR j = 1 TO k1
    COLOR 3
    LINE (xn(k1 * (i - 1) + j), yn(k1 * (i -
&:1) + j))-(xn(j + 1 + k1 * (i - 2)), yn(j + 1 + k1 * (i -
&:2)))
  NEXT j
NEXT i

```

7.5.4. Ciclo para la Formulación de las Ecuaciones Locales y Ensamblaje del Sistema de Ecuaciones Global .

El sexto bloque es la subrutina correspondiente a la aplicación del método de los elementos finitos. Mediante la variable ALE se le asigna un número de identificación a cada elemento. En seguida se le asocian los números de los nodos que conforman sus vértices, así como las coordenadas en "x" y en "y" de cada uno de ellos. Se conforman las ecuaciones locales y al mismo tiempo se construye la matriz global del sistema, [a]. Todo esto se lleva a cabo mediante una serie de ciclos iterativos FOR-NEXT anidados, que aparentemente conforman el algoritmo más resumido que se puede escribir.

```

FOR L = 1 TO j1 - 1
  FOR k = 1 TO k1 - 1
    NN(1, 1) = (L - 1) * k1 + k:
    NN(1, 2) = L * k1 + k + 1:
    NN(1, 3) = L * k1 + k
    NN(2, 1) = NN(1, 1):
    NN(2, 2) = NN(2, 1) + 1:
    NN(2, 3) = NN(1, 2)
    FOR NE = 1 TO 2
      ALE = ALE +
      FOR j = 1 TO 3
        NP = NN(NE, j): X(j) = x1(NP):
        Y(j) = y1(NP)
        NN(NE, j) = NP:
      NEXT j
      EA(1) = X(3) - X(2):
      EA(2) = X(1) - X(3):
      EA(3) = X(2) - X(1)
      EB(1) = Y(2) - Y(3):
      EB(2) = Y(3) - Y(1):
      EB(3) = Y(1) - Y(2)
      AE = EB(1) * EA(2) - EB(2) * EA(1)
      FOR i = 1 TO 3
        IR = NN(NE, i)
        FOR j = 1 TO 3
          IC = NN(NE, j)

```

```

          EK = (EA(i) * EA(j) + EB(i) *
&:EB(j)) / 2
          a(IR, IC) = a(IR, IC) + EK
        NEXT j
      NEXT NE
    NEXT k
  NEXT L

```

En el séptimo bloque de instrucciones se especifican las condiciones de frontera mediante las sentencias READ-DATA y se reconstruye la matriz globalizada de coeficientes del sistema eliminando las columnas y renglones que tengan un coeficiente correspondiente al potencial eléctrico conocido. Por otra parte, las condiciones de frontera naturales en los bordes laterales de los electrodos quedan automáticamente establecidas y no es necesario introducir por ellas alguna modificación adicional al sistema de ecuaciones global. En el par de instrucciones READ-DATA se introducen alternadamente los números de los nodos donde se tiene el valor del potencial eléctrico conocido y en seguida el valor de dicho potencial en forma adimensional. El valor de cero corresponde al potencial catódico adimensionalizado y el valor de uno es el del potencial anódico adimensional.

```

FOR i = 1 TO N3
  READ NP, SV
  DATA 1,0,11,0,21,0,31,0,41,0,51,0,61,0,71,0,
&:81,0,91,0,10,1,20,1,30,1,40,1,50,1,60,1,70,1,80,1,
&:90,1,100,1
  FOR j = 1 TO n2
    a(NP, j) = 0
  NEXT j
  a(NP, NP) = 1: t(NP, 1) = SV
  PRINT "NP="; NP, "SV="; SV
NEXT i

```

7.5.5. Ciclo Para la Resolución del Sistema de Ecuaciones Simultáneas Lineales.

Después de haber introducido mediante estos ciclos, las condiciones de frontera, se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas lineales modificado que corresponde al sistema de ecuaciones a resolver. El método de resolución puede ser el de eliminación gaussiana, el de inversión de matriz o el de descomposición L-U. En seguida, como octavo bloque de instrucciones, se presenta el algoritmo de eliminación gaussiana que es el que se utilizó en esta simulación computacional:

```
REM * ELIMINACION GAUSSIANA
'PRINT "Sistema De Ecuaciones A Resolver:"
FOR i = 1 TO n2
  FOR j = 1 TO n2
    A1(i, j) = a(i, j)
    'PRINT A1(i, j);
  NEXT j
  A1(i, n2 + 1) = t(i, 1)
NEXT i
N = n2
FOR r = 1 TO N - 1
```

```
  FOR i = r + 1 TO N
    qt = A1(i, r) / A1(r, r)
    FOR j = r + 1 TO N + 1
      A1(i, j) = A1(i, j) - qt * A1(r, j)
    NEXT j
  NEXT i
  FOR i = r + 1 TO N
    A1(i, r) = 0
  NEXT i
NEXT r
xec(N) = A1(N, N + 1) / A1(N, N)
FOR NX = 1 TO N - 1
  sumat = 0
  i = N - NX
  FOR j = i + 1 TO N
    sumat = sumat + A1(i, j) * xec(j)
  NEXT j
  xec(i) = (A1(i, N + 1) - sumat) / A1(i, i)
NEXT NX
FOR i = 1 TO n2 - 5
  'PRINT "x"; I; "="; xec(I)
NEXT i
```

7.5.6. Ciclo para la Representación Gráfica de los Resultados.

Finalmente, habiendo obtenido la solución a la ecuación diferencial de Laplace para el potencial eléctrico, se procede a representar gráficamente los resultados, en un procedimiento similar con el que se representó gráficamente la topología del sistema, y empleando una escala de colores para los valores del potencial eléctrico. El algoritmo que se empleó fue el siguiente:

```
'topología triángulos parados.
FOR i = 1 TO k1 - 1
  FOR j = 1 TO j1 - 1
    elem = i + (j - 1) * 2 * (k1 - 1)
    m1 = i + (j - 1) * k1 + k1
    m2 = m1 - (j1 - 1)
    m3 = m2 + 1
    xg1(elem) = x1(m1)
    xg2(elem) = x1(m2)
    xg3(elem) = x1(m3)
    yg1(elem) = y1(m1)
    yg2(elem) = y1(m2)
    yg3(elem) = y1(m3)
    Tec(elem) = (xec(m1)+xec(m2)+xec(m3)) / 3
    t1(elem) = (Tec(elem)+xec(m1)+xec(m2)) / 3
```

```
    t2(elem) = (Tec(elem)+xec(m3)+xec(m2)) / 3
    t3(elem) = (Tec(elem)+xec(m1)+xec(m3)) / 3
  NEXT j
NEXT i

'topología triángulos de cabeza
FOR i = 1 TO k1 - 1
  FOR j = 1 TO j1 - 1
    elem = i + (j - 1) * 2 * (k1 - 1) + k1 - 1
    m3 = i + (j - 1) * k1 + k1
    m1 = m3 - (k1 - 1)
    m2 = m3 + 1
    xg1(elem) = x1(m1)
    xg2(elem) = x1(m2)
    xg3(elem) = x1(m3)
    yg1(elem) = y1(m1)
    yg2(elem) = y1(m2)
    yg3(elem) = y1(m3)
    Tec(elem) = (xec(m1)+xec(m2)+xec(m3)) / 3
    t1(elem) = (Tec(elem)+xec(m1)+xec(m2)) / 3
    t2(elem) = (Tec(elem)+xec(m3)+xec(m2)) / 3
    t3(elem) = (Tec(elem)+xec(m1)+xec(m3)) / 3
  NEXT j
NEXT i
```

```

FOR i = 1 TO n3
  PRINT "elem="; i
  PRINT "tec="; Tec(i), "t1="; t1(i); "t2="; t2(i);
  &:"t3="; t3(i)
NEXT i
COLOR 3
FOR elem = 1 TO n3
  IF t1(elem) < .04 THEN color1 = 0
  IF t1(elem) > .08 THEN color1 = 8
  IF t1(elem) > .16 THEN color1 = 1
  IF t1(elem) > .24 THEN color1 = 9
  IF t1(elem) > .32 THEN color1 = 2
  IF t1(elem) > .4 THEN color1 = 4
  IF t1(elem) > .48 THEN color1 = 6
  IF t1(elem) > .56 THEN color1 = 12
  IF t1(elem) > .64 THEN color1 = 5
  IF t1(elem) > .72 THEN color1 = 13
  IF t1(elem) > .8 THEN color1 = 11
  IF t1(elem) > .88 THEN color1 = 7
  IF t1(elem) > .96 THEN color1 = 10
  IF t1(elem) > 1.04 THEN color1 = 14

  IF t2(elem) < .04 THEN color2 = 0
  IF t2(elem) > .08 THEN color2 = 8
  IF t2(elem) > .16 THEN color2 = 1
  IF t2(elem) > .24 THEN color2 = 9
  IF t2(elem) > .32 THEN color2 = 2
  IF t2(elem) > .4 THEN color2 = 4
  IF t2(elem) > .48 THEN color2 = 6
  IF t2(elem) > .56 THEN color2 = 12
  IF t2(elem) > .64 THEN color2 = 5
  IF t2(elem) > .72 THEN color2 = 13
  IF t2(elem) > .8 THEN color2 = 11
  IF t2(elem) > .88 THEN color2 = 7
  IF t2(elem) > .96 THEN color2 = 10
  IF t2(elem) > 1.04 THEN color2 = 14

  IF t3(elem) < .04 THEN color3 = 0
  IF t3(elem) > .08 THEN color3 = 8
  IF t3(elem) > .16 THEN color3 = 1
  IF t3(elem) > .24 THEN color3 = 9
  IF t3(elem) > .32 THEN color3 = 2

```

```

IF t3(elem) > .4 THEN color3 = 4
IF t3(elem) > .48 THEN color3 = 6
IF t3(elem) > .56 THEN color3 = 12
IF t3(elem) > .64 THEN color3 = 5
IF t3(elem) > .72 THEN color3 = 13
IF t3(elem) > .8 THEN color3 = 11
IF t3(elem) > .88 THEN color3 = 7
IF t3(elem) > .96 THEN color3 = 10
IF t3(elem) > 1.04 THEN color3 = 14

```

```

xgm = (xg1(elem)+xg2(elem)+xg3(elem))/3
ygm = (yg1(elem)+yg2(elem)+yg3(elem))/3
xgmnor = xgm * (d - c) / pasx + ejey
ygmnor = -ygm * (b - a) / pasy + ejex
xg1(elem) = xg1(elem) * (d - c) / pasx + ejey
yg1(elem) = -yg1(elem) * (b - a) / pasy + ejex
xg2(elem) = xg2(elem) * (d - c) / pasx + ejey
yg2(elem) = -yg2(elem) * (b - a) / pasy + ejex
xg3(elem) = xg3(elem) * (d - c) / pasx + ejey
yg3(elem) = -yg3(elem) * (b - a) / pasy + ejex

```

```

LINE (xg3(elem), yg3(elem))-(xgmnor, ygmnor)
LINE -(xg1(elem), yg1(elem))
LINE (xg2(elem), yg2(elem))-(xgmnor, ygmnor)
'LINE -(xg1(elem), yg1(elem))

```

```

PAINT ((xg1(elem) + xg2(elem) + xgmnor) / 3,
&:(yg1(elem) + yg2(elem) + ygmnor) / 3), color1, 3
PAINT ((xg2(elem) + xg3(elem) + xgmnor) / 3,
&:(yg2(elem) + yg3(elem) + ygmnor) / 3), color2, 3
PAINT ((xg1(elem) + xg3(elem) + xgmnor) / 3,
&:(yg1(elem) + yg3(elem) + ygmnor) / 3), color3, 3

```

```

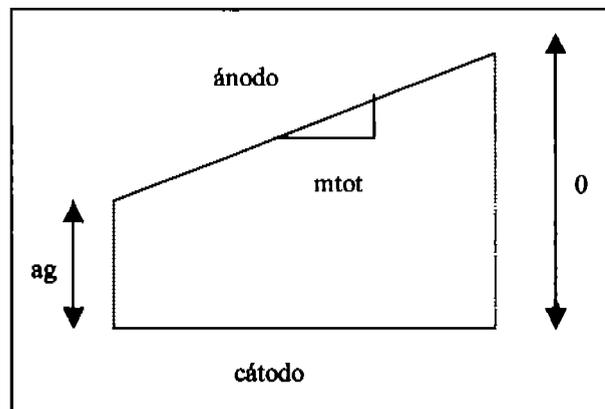
NEXT elem

```

En la sección 7.6 se representa el diagrama de bloques correspondiente a este algoritmo computacional. Antes se explicará la forma en que debe modificarse este programa para aplicarlo a otras conformaciones geométricas de los electrodos y a diferentes condiciones de frontera.

7.5.7. Aplicación a Diferentes Configuraciones Geométricas de los Electrodo.

Para electrodos de diferente configuración geométrica se realiza una modificación en la especificación de la topología del cuarto bloque de instrucciones. Por ejemplo, para un par de electrodos planos ubicados uno frente al otro, con un ángulo de inclinación, como se muestra en la siguiente figura, tendríamos:



```

Ag = 2: cg = 5 : dg = 1
Mtot = (cg - ag) / dg;
FOR k=1 TO k1
  FOR j = 1 TO j1
    Kempes = k + (j-1) * k1
    X1(kempes) = k + (j - 1) * .1
    Y1(kempes) = ag / (k1 - 1) * (k - 1) +
&: mtot / (k1 - 1) * (k - 1) * x1(kempes)
    'PRINT "nodo="; kempes, "x=";
&: x1(kempes); "y="; y1(kempes)
  NEXT j
NEXT K

```

En este conjunto de instrucciones, los dos primeros renglones especifican la geometría de los electrodos de acuerdo a la figura adjunta. En el

primer renglón se especifica la distancia de separación entre ánodo y cátodo en el lado izquierdo y derecho, respectivamente. En el segundo renglón se calcula la pendiente del ánodo.

El ciclo de cálculos iterativos permite calcular automáticamente las coordenadas nodales de la malla de elementos triangulares con la que se llena el espacio entre los electrodos. Nuevamente la variable kempes es el número de nodo y las coordenadas x1 y y1 se utilizan posteriormente a lo largo del programa para los cálculos del potencial eléctrico y la visualización gráfica de los resultados.

Estos son los únicos cambios que deben hacerse al programa para la aplicación del método de elementos finitos a nuevas configuraciones geométricas de los electrodos. La serie de instrucciones están construidas de forma tal que el programa por sí solo calcula longitudes y áreas de los elementos finitos, construye el conjunto de ecuaciones locales y lleva a cabo el ensamblaje, introduce condiciones de frontera y finalmente resuelve el sistema de ecuaciones resultante y representa gráficamente los resultados.

Para un par de electrodos paralelos, es decir cuando la pendiente es cero, ag se especifica con un valor igual al de cg y se procede con la ejecución del programa.

El usuario tiene, entonces, simplemente, que establecer la nueva topología mediante un ciclo FOR-NEXT o por medio de la especificación directa de los puntos nodales con un par de instrucciones READ-DATA. En este último caso deben especificarse las coordenadas (x , y) de todos los puntos nodales.

7.5.8. Aplicación a diferentes condiciones de Frontera.

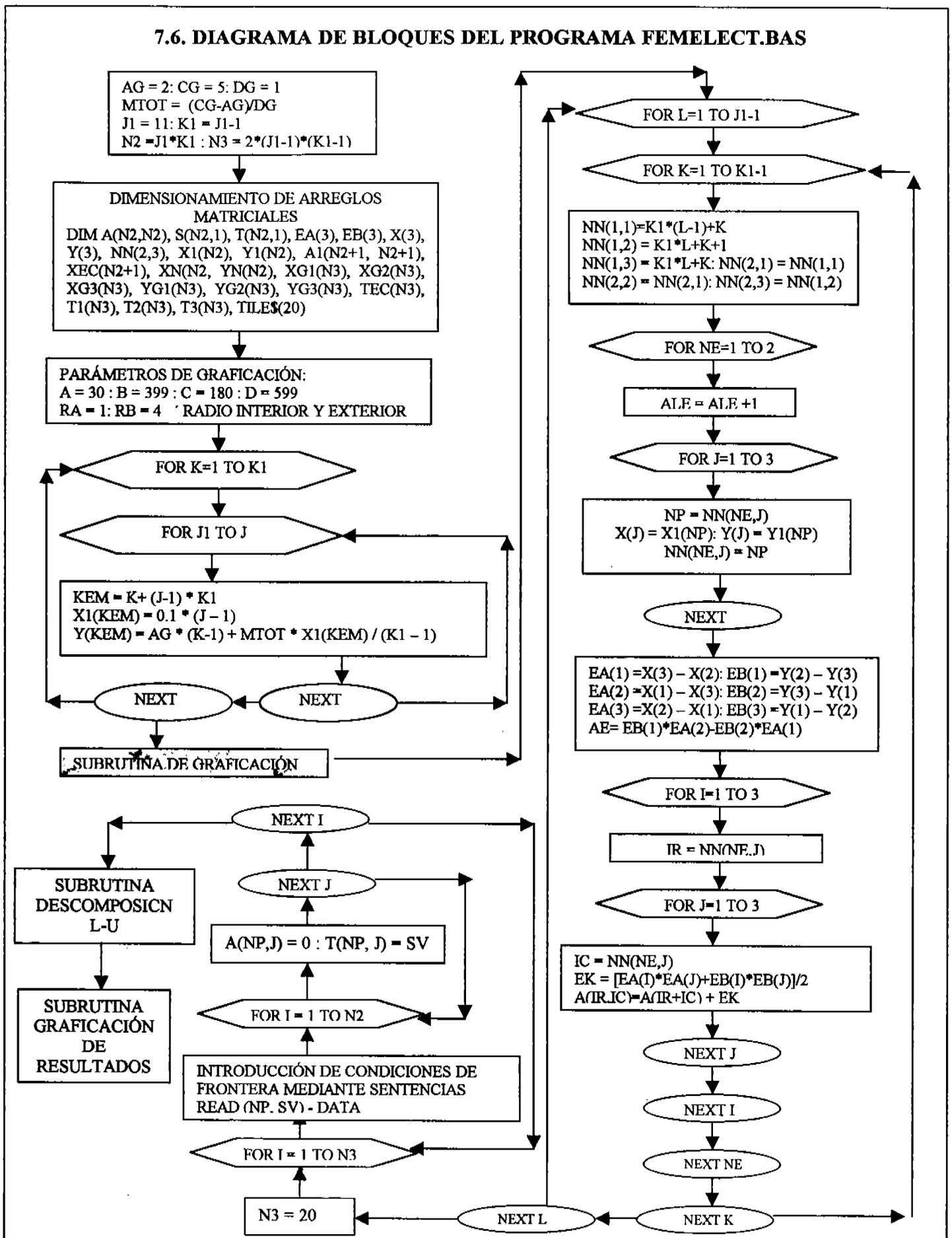
La especificación de las condiciones de frontera que se hacen en el séptimo bloque, puede ser cambiada introduciendo directamente los valores del potencial eléctrico en los números de nodos correspondientes. El potencial anódico se especifica para los puntos nodales múltiplos de 10, mientras que el potencial catódico corresponde a los nodos múltiplos de 10 más uno. La distribución no homogénea del potencial eléctrico en los electrodos puede ser causada por no homogeneidad en la densidad de corriente.

```

FOR i = 1 TO N3
  READ NP, SV
  DATA 1,0,11,0,21,0,31,0,41,0,51,0,61,0,71,0,
81,0,91,0,101,0,110,0,20,0,30,0,40,0,50,0,60,1,70,1,8
0,1,90,1,100,1,110,1
  FOR j = 1 TO n2
    a(NP, j) = 0
  NEXT j
  a(NP, NP) = 1: t(NP, 1) = SV
  'PRINT "NP="; NP, "SV="; SV
NEXT i

```

7.6. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL PROGRAMA FEMELECT.BAS

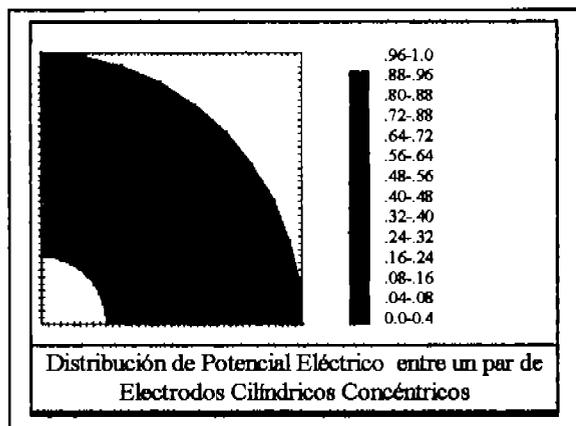


7.7 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.

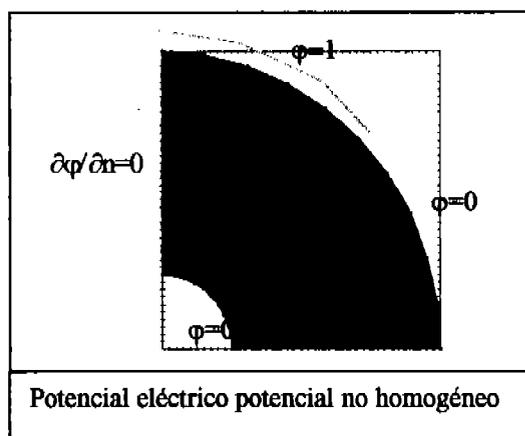
Para los Procesos Electrolíticos Controlados por Transporte de Carga en Soluciones Diluidas Isotérmicas en Estado Estacionario, la distribución del potencial eléctrico en el seno de la solución permite controlar la densidad de corriente para obtener mejor calidad del electrodeósito. Los resultados de la aplicación del programa Femelect.bas para determinar la distribución del potencial eléctrico en el espacio intercatódico de una solución electrolítica.

Los siguientes resultados son los obtenidos al llevar a cabo la simulación computacional mediante el programa femelect.bas de elementos finitos variacionales, adaptado a diferentes geometrías.

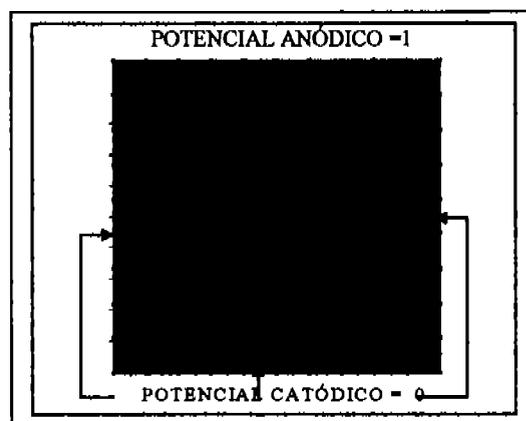
Empezaremos por un par de electrodos cilíndricos concéntricos. La figura siguiente representa un corte transversal, considerando sólo la cuarta parte del perímetro de la circunferencia:



La figura muestra como varía el potencial en el seno de la solución electrolítica, desde 0 a 1, que son los correspondientes potenciales anódico y catódico normalizados. Cada color representa diferente valor del potencial eléctrico. La escala de colores aparece al lado de la figura y es la misma que se utiliza en todas las distintas configuraciones geométricas de los electrodos cuando se ejecuta el programa. Si la distribución del potencial no es homogénea, el cálculo del potencial interelectródico se puede hacer con el programa Femelect.bas simplemente modificando las condiciones de frontera, como se muestra a continuación:



La figura que se muestra a continuación corresponde al desplegado gráfico de la simulación computacional de la distribución del potencial eléctrico para un par de electrodos en un arreglo cuadrangular, cuya solución analítica conocemos:

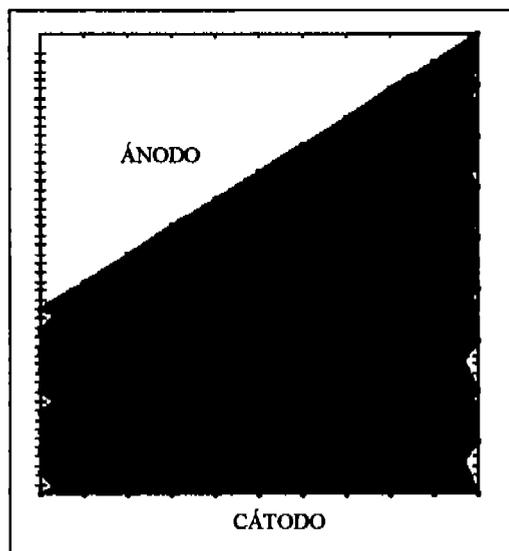


Los cálculos computacionales se realizaron con el mismo programa, utilizando 11 nodos en dirección horizontal y 10 nodos en dirección vertical para un total de 110 nodos y 200 elementos, que posteriormente mediante una regresión lineal simple de la función de aproximación se convirtieron en 600 elementos que son los que aparecen en el desplegado gráfico. Obsérvese la distribución simétrica del potencial eléctrico para esta configuración.

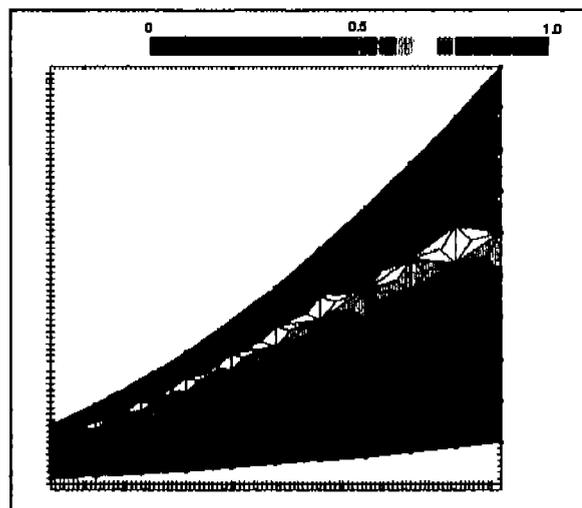
El intérprete Qbasic permite resolver sistemas de 120 ecuaciones simultáneas lineales o menores, por eso la limitación en cuanto al número de elementos a procesar. Sin embargo, un manejo inteligente de varias matrices de

coeficientes, en lugar de una, puede servir para incrementar el número de elementos, como en este caso. A pesar de esta limitación, los valores predichos por el método de elemento finito son de alta exactitud respecto a la solución analítica presentada en este texto para las dos situaciones anteriores

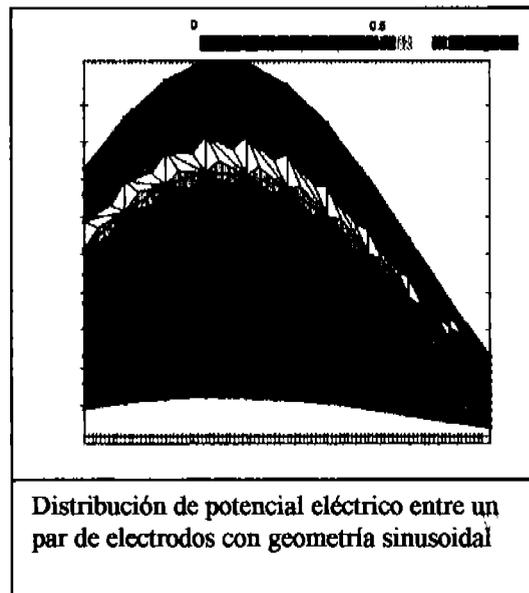
La figura que se sigue es el desplegado gráfico que se obtiene de la determinación del potencial eléctrico para una celda de Hull con el mismo programa. La solución analítica a este problema se obtiene por series de Fourier. La solución numérica obtenida mediante la aplicación del programa Femelect.bas ajusta muy bien a los resultados teóricos:



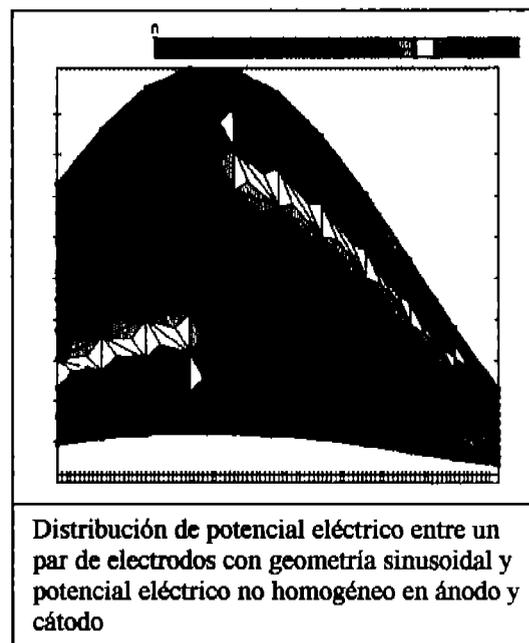
Un caso más difícil de integrar analíticamente es el de un par de electrodos con perfil parabólico. La simulación por elementos finitos se muestra en la siguiente figura:



Finalmente, las figuras siguientes exhiben la distribución del potencial eléctrico en el espacio interelectródico para un par de electrodos sinusoidales, con potenciales homogéneos en los electrodos en la primera de ellas y con distribución no homogénea de potencial eléctrico en la última:



Distribución de potencial eléctrico entre un par de electrodos con geometría sinusoidal



Distribución de potencial eléctrico entre un par de electrodos con geometría sinusoidal y potencial eléctrico no homogéneo en ánodo y cátodo

Dinámica de Fluidos.

8.1. INTRODUCCIÓN.

El análisis del movimiento de fluidos ha sido uno de los problemas más interesantes dentro de la termodinámica de procesos irreversibles. Desde el enfoque fenomenológico de las ecuaciones de Navier-Stokes hasta las formulaciones recientes mediante la Dinámica Molecular, las retículas de gas o las redes de Boltzmann, el objetivo de caracterizar la dinámica de fluidos compresibles e incompresibles en régimen laminar o turbulento y condiciones de estado estacionario o inestable, se ha logrado parcialmente.

Desde el punto de vista fenomenológico la expresión matemática gobernante es la conocida como ecuación de Navier-Stokes, una ecuación diferencial parcial de segundo orden no lineal:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (8.1)$$

Esta expresión corresponde a la segunda ley de Newton aplicada al movimiento de un fluido. El primer término del lado izquierdo es la aceleración temporal del fluido por unidad de volumen. El segundo término, es decir, el producto punto de la velocidad con el gradiente de velocidad, es la aceleración espacial, que se presenta por ejemplo cuando existen cambios de área en la sección transversal al flujo y corresponde al término no lineal de la ecuación. El primer término del lado derecho es la fuerza viscosa por unidad de volumen, el tensor de transporte molecular de momentum, $\boldsymbol{\tau}$, puede exhibir a nivel macroscópico una dependencia lineal con el gradiente de velocidad para los denominados fluidos Newtonianos o cualquier otro tipo de correlación para fluidos no Newtonianos. El segundo término del lado derecho es el gradiente de presión. Si en el campo de velocidades existen regiones en las que se manifiesten presiones altas y otras

regiones en las que la presión sea menor, el fluido tenderá a fluir desde las zonas de alta presión hacia las regiones de presión baja, es decir, en sentido contrario al gradiente. Finalmente las fuerzas de gravedad corresponden al último término de la ecuación (8.1).

La ecuación de Navier-Stokes puede resolverse para una gran cantidad de casos de dinámica de fluidos en régimen laminar después de llevar a cabo una simplificación importante de algunos de los términos, frecuentemente tomando en cuenta condiciones de régimen laminar en estado estacionario y con configuraciones de flujo correspondientes a geometrías regulares. Para geometrías irregulares es más conveniente emplear métodos numéricos como el de diferencias finitas o el de los elementos finitos.

Para flujos turbulentos es necesario tomar en cuenta las fluctuaciones aleatorias espacio-temporales de la velocidad del fluido. A finales del siglo XIX el Ingeniero Náutico británico Osborne Reynolds dedujo la expresión matemática que caracteriza la dinámica de los flujos turbulentos, la cual se conoce actualmente como ecuación de Reynolds:

$$\begin{aligned} < \rho > \left[\frac{\partial < \mathbf{v} >}{\partial t} + < \mathbf{v} > \cdot \nabla < \mathbf{v} > \right] = \\ & -\nabla \cdot < \boldsymbol{\tau} > -\nabla < P > + < \rho > \mathbf{g} - \nabla \cdot < \rho > < \mathbf{v}' \mathbf{v}' > \end{aligned} \quad (8.2)$$

Esta ecuación escrita para los promedios temporales de la velocidad, densidad y presión, tiene la misma forma que la ecuación de Navier-Stokes, salvo la introducción del término correspondiente al flujo turbulento de momentum. Dicho término, que es el último de la ecuación anterior, toma en cuenta el transporte de cantidad de movimiento asociado a las componentes fluctuantes de la velocidad del fluido e introduce un problema clásico en la dinámica de fluidos, el "problema de cerradura", ya que se tienen más incógnitas que ecuaciones.

Para resolver el problema de cerradura, desde principios del siglo XX se propusieron algunos modelos matemáticos para calcular el tensor de esfuerzos turbulentos ($\langle \rho \langle v'v' \rangle \rangle$). El primero de ellos, el de Boussinesq proponía una relación de proporcionalidad lineal de dicho tensor con los gradientes de velocidad, en una analogía con la ley de Newton de la viscosidad e introduciendo el parámetro de viscosidad turbulenta. No tiene ningún fundamento físico y predice perfiles turbulentos con muy baja precisión.

El segundo modelo de cerradura en orden cronológico fue el de longitud de mezcla de Prandtl, el cual realiza una analogía de la dinámica de los remolinos turbulentos con la teoría cinético molecular de Boltzmann y Maxwell, predice con fundamentos teóricos, una dependencia de proporcionalidad cuadrática entre el tensor de esfuerzos turbulentos y el gradiente de velocidad, y sus resultados, al menos con fluidos confinados, son bastante exactos. Por ejemplo, su predicción para flujo turbulento en tuberías se adapta con muy alta precisión al perfil universal de velocidades de naturaleza empírica.

Finalmente vale la pena mencionar el modelo de Kolmogorov que toma en cuenta el tamaño de los remolinos más pequeños y su frecuencia de aparición, introduciendo respectivamente los parámetros κ y ϵ . Este modelo es bastante preciso para una gran cantidad de flujos turbulentos alrededor de objetos.

Para flujo irrotacional bidimensional la ecuación de Navier-Stokes en conjunción con la ecuación de continuidad, conducen al par de ecuaciones:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Estas ecuaciones cumplen con las siguientes relaciones matemáticas:

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

donde ϕ y ψ representan campos escalares y se les denomina respectivamente función de potencial y función de corriente. Cauchy y Riemann demostraron que el conjunto anterior de cuatro ecuaciones son condiciones necesarias y suficientes para que exista una función de variable compleja $w(z)$ tal que su parte real corresponda a la función de potencial y su parte imaginaria a la función de corriente.

Entonces, dada una función compleja cualquiera, la gráfica de $\phi = \text{constante}$ produce las líneas equipotenciales (suma de energía cinética por unidad de masa más presión igual a constante) y la gráfica de $\psi = \text{constante}$ produce las líneas de corriente, es decir las líneas a las cuales el vector velocidad del fluido es tangente.

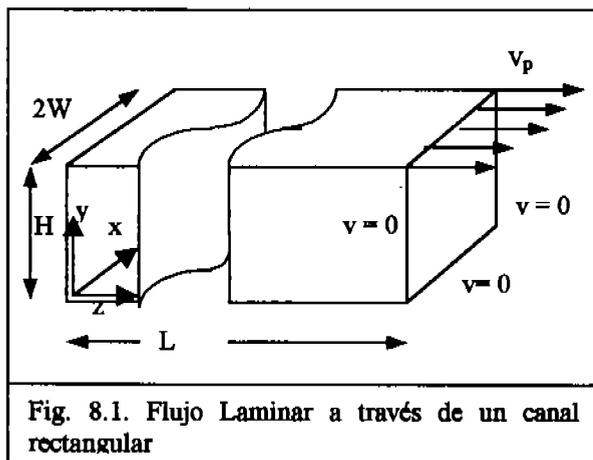
El desplegado gráfico de $\phi = \text{constante}$ y $\psi = \text{constante}$ genera los denominados mapas conformacionales. Puede demostrarse fácilmente que tanto ϕ como ψ conforman campos laplacianos y que el gradiente de ambas funciones son mutuamente ortogonales. A situaciones de flujo como esta se les conoce como flujo de potencial bidimensional, y debido a que la ecuación gobernante para la distribución de las funciones de potencial y de corriente es la ecuación de Laplace, resulta más o menos sencillo caracterizar flujos de esta naturaleza aplicando programas de elementos finitos semejantes a los que se han desarrollado en este trabajo hasta este momento.

El otro enfoque de la dinámica de fluidos, basado en física estadística, ha producido varios modelos basados en dinámica molecular, teoría del caos, grupos de renormalización, retículas de gas y recientemente se encuentra en desarrollo los modelos de retículas de Boltzmann.

En este capítulo se presentará la solución analítica para varias configuraciones de flujo en régimen laminar, llegando a establecer el perfil de velocidades bidimensional en estado estacionario para flujo laminar incompresible de un fluido Newtoniano a través del canal de un extrusor y se llevará a cabo la caracterización de dicha configuración de flujo utilizando el método de los elementos finitos. Luego se abordará el problema de flujo de potencial bidimensional para diferentes configuraciones de flujo.

8.2. Flujo Laminar Viscoso a Través de un Canal Rectangular.

Revisaremos ahora las características más importantes del flujo laminar estacionario de un fluido Newtoniano a través de un canal rectangular cuando el movimiento es causado por el deslizamiento de una de las fronteras de dicho canal, como se ilustra en la siguiente figura:



Esta configuración de flujo se presenta en algunos casos de aplicación industrial, como en el transporte de fluidos o semisólidos en bandas de transmisión y con mayor frecuencia en extrusores de plástico o de pastas alimenticias, como será explicado en la siguiente sección.

La formulación Lagrangiana de la ecuación de movimiento puede ser simplificada para obtener una ecuación diferencial más fácil de integrar:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (8.1)$$

La aceleración temporal del fluido, en condiciones de estado estacionario es cero por lo que la primera derivada del lado izquierdo de la ecuación se hace anula.

Como el área transversal al flujo es constante, la aceleración espacial también se elimina.

Debido a que el flujo es por arrastre viscoso y el movimiento es horizontal, no existen gradientes de presión y los efectos gravitacionales son nulos, por lo que la ecuación de Navier-Stokes se reduce a:

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (8.3)$$

Integraremos esta ecuación diferencial para el caso de fluidos newtonianos, en los que el tensor de flux molecular de momentum se expresa como una función lineal de los gradientes de velocidad. El caso más complicado que corresponde al flujo no newtoniano de modelo de potencia será tratado posteriormente.

Para fluido newtoniano la ecuación diferencial resultante es:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0 \quad (8.4)$$

El Laplaciano vectorial es un vector definido como la suma de las segundas derivadas de los componentes de velocidad en cada dirección, menos dos tercios de la divergencia de la velocidad, multiplicados por los correspondientes vectores unitarios. En nuestro caso, como el único componente de velocidad distinto de cero es v_z , la componente en z del Laplaciano es:

$$\mu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_z \right] \quad (8.5)$$

Puede observarse, a partir de la ecuación de continuidad que la velocidad solo varía en dirección x e y, mientras que en dirección z permanece invariable:

La ecuación de continuidad es :

$$-\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = \partial \rho / \partial t = -[\partial \rho v_x / \partial x + \partial \rho v_y / \partial y + \partial \rho v_z / \partial z] \quad (8.6)$$

Considerando flujo incompresible ($\rho = \text{constante}$), observando que $v_x = 0$ y $v_y = 0$, y como la densidad no cambia con el tiempo, la ecuación de continuidad da como resultado:

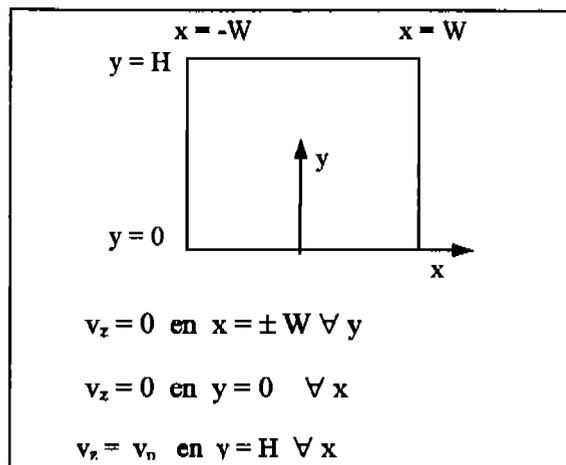
$$\partial v_z / \partial z = 0, \text{ por lo tanto } \partial^2 v_z / \partial z^2 = 0$$

Por lo tanto:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_z \right] = 0 \quad (8.7)$$

Esta expresión matemática se conoce como ecuación de Laplace (en honor del matemático francés Pierre Simón de Laplace), y aparece frecuentemente en la física matemática.

Las condiciones de frontera están claramente definidas, según el siguiente sistema de coordenadas:



Por simplificación de la notación, en todo el desarrollo que sigue omitiremos el subíndice z del componente de velocidad.

En el capítulo 7 se presentó la solución de la ecuación de Laplace para un sistema análogo al que se tiene en este momento, por lo que la solución debe ser equivalente. En seguida se adimensionalizarán las variables que definen la dinámica del fluido en esta configuración de flujo y se procederá a escribir la solución al perfil de velocidades por analogía a la solución analítica presentada en el capítulo 7. Obtener la solución en forma adimensional permite lograr una expresión matemática válida a cualquier escala.

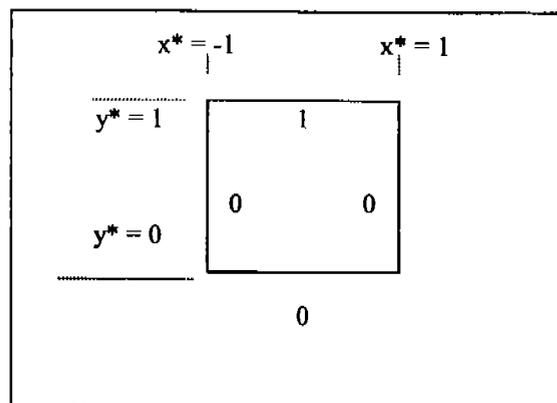
Definiendo la velocidad adimensional v^* como :

$$v^* = v / v_p$$

y a las coordenadas adimensionales como :

$$x^* = x / w ; y^* = y / H$$

Las condiciones de frontera adimensionales son:



Obsérvese que :

$$\partial x^* = \partial x / W ; \partial^2 x^* = \partial^2 x / W^2$$

$$\partial y^* = \partial y / H ; \partial^2 y^* = \partial^2 y / H^2$$

$$\partial v^* = \partial v / v_p ; \partial^2 v^* = \partial^2 v / v_p$$

Por lo que la ecuación diferencial adimensionalizada es:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} v^* + \left(\frac{W}{H} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} v^* \right] = 0 \quad (8.8)$$

Al integrar por separación de variables y utilizando series de Fourier, la velocidad adimensional queda dada por:

$$v^* = \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1) \sinh\left(\frac{H}{W} \frac{2n+1}{2} \pi\right)} \cos\left(\frac{2n+1}{2} \pi x^*\right) \sinh\left(\frac{2n+1}{2} \pi y^* \frac{H}{W}\right) \right] \quad (8.9)$$

Obsérvese la simetría de esta solución respecto al eje x y la asimetría en respecto al eje de las y.

Sustituyendo las variables adimensionales :

$$v = \frac{4v_p}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1) \sinh\left(\frac{H}{W} \frac{2n+1}{2} \pi\right)} \cos\left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{W}\right) \sinh\left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{y}{W}\right) \quad (8.10)$$

Expresión equivalente a la ecuación (7.30)

Si en lugar de seleccionar el origen del sistema de coordenadas en la parte central de la placa inferior del canal rectangular, se hubiera seleccionado la esquina inferior izquierda, la ecuación que describiría el perfil de velocidades sería:

$$v = \frac{4v_p}{\pi} \sum_{1,3,5,7,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{n \sinh\left(\frac{H}{W} n\pi\right)} \sin\left(n\pi \frac{x}{W}\right) \sinh\left(n\pi \frac{y}{W}\right) \right] \quad (8.11)$$

Nótese que en esta última expresión matemática ha desaparecido la función simétrica para la dependencia de la velocidad con respecto a x , y ha sido sustituida por una función antisimétrica.

La ecuación (8.11) representa la distribución de velocidad en el canal rectangular en condiciones de estado estacionario para flujo laminar por arrastre viscoso.

En la siguiente sección veremos como se utiliza este resultado para caracterizar el perfil de velocidades en un extrusor de tornillo sencillo. Como en dicho dispositivo se utiliza un tornillo que rota en el interior de una cámara cilíndrica concéntrica, es necesario analizar el flujo tangencial en régimen laminar y estado estacionario de fluidos de diferente comportamiento reológico entre cilindros concéntricos rotatorios, por lo que en la siguiente sección se presenta la caracterización analítica de dicha configuración de flujo.

8.3. Flujo Tangencial Laminar entre Cilindros Concéntricos Rotatorios en Estado Estacionario.

El flujo laminar tangencial entre cilindros concéntricos rotatorios es una configuración de flujo de gran importancia para la determinación de los parámetros reológicos de un fluido. En el flujo axial a través de conductos cilíndricos, el fluido se mueve en régimen laminar cuando el número de Reynolds es menor a 2100. Esto impone una fuerte limitación al intervalo de experimentación en reómetros capilares.

En el flujo tangencial entre cilindros rotatorios concéntricos, la fuerza centrípeta estabiliza el régimen laminar y las ondulaciones que conducen a la turbulencia aparecen hasta números de Reynolds mayores a 20 000. El efecto es similar al que se ve sujeto una piedra en una honda, donde la fuerza centrípeta que ejerce la cuerda impone la trayectoria circular. Esta configuración de flujo consiste en

trayectorias circulares planas horizontales, el único componente de velocidad diferente de cero es la velocidad tangencial (de las coordenadas cilíndricas).

Hallaremos el perfil de velocidad considerando un flujo laminar incompresible en estado estacionario.

La ecuación de movimiento es:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right] = -\nabla \cdot \vec{\tau} - \nabla P + \rho \vec{g}$$

El primer término (la aceleración temporal) es cero debido a la condición de flujo en estado estacionario.

El segundo término (la aceleración espacial) es cero porque el área transversal no cambia de tamaño.

El gradiente de presión es cero en la dirección de movimiento, ya que para una línea de corriente dada, la presión es constante. La presión varía radial y axialmente, pero no en dirección tangencial.

La componente de la fuerza de gravedad en dirección del movimiento es cero, ya que las líneas de corriente están distribuidas en planos horizontales.

Entonces, la simplificación de la ecuación de movimiento conduce a:

$$-\nabla \cdot \vec{\tau} = 0$$

El tensor de flux molecular de momentum tiene una sola componente diferente de cero, la correspondiente al transporte radial del componente tangencial de momentum: $\tau_{r\theta} \neq 0$.

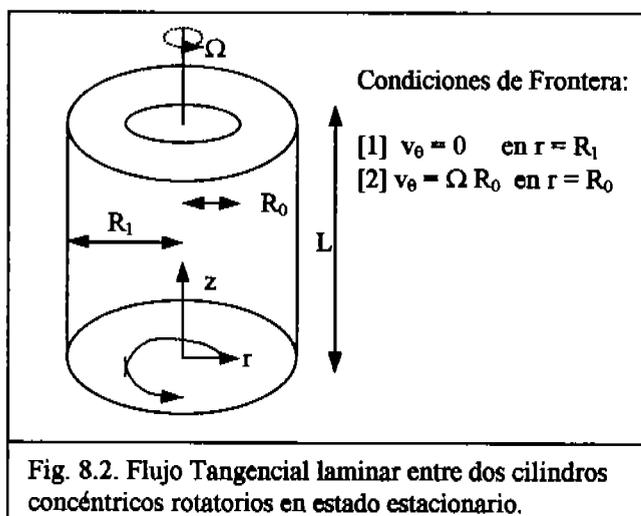


Fig. 8.2. Flujo Tangencial laminar entre dos cilindros concéntricos rotatorios en estado estacionario.

Por lo tanto:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \tau_{r\theta} = 0$$

$$r^2 \tau_{r\theta} = c_1 \Rightarrow \tau_{r\theta} = \frac{c_1}{r^2}$$

aquí no es posible evaluar c_1 , ya que las condiciones de frontera se encuentran especificadas en términos de la velocidad.

Introduciendo el modelo reológico de la potencia:

$$\tau_{r\theta} = k \left[-r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_{\theta}}{r} \right) \right]^n = \frac{c_1}{r^2}$$

$$- \int d \left(\frac{v_{\theta}}{r} \right) = \left(\frac{c_1}{k} \right)^{1/n} \int r^{-\frac{2}{n}-1}$$

consecuentemente:

$$\frac{v_{\theta}}{r} = \frac{n}{2} \left(\frac{c_1}{k} \right)^{1/n} r^{-2/n} + c_2$$

Introduciendo las condiciones de frontera:

$$[1]: \quad 0 = \frac{n}{2} \left(\frac{c_1}{k} \right)^{1/n} R_1^{-\frac{2}{n}} + c_2$$

$$[2]: \quad \Omega = \frac{n}{2} \left(\frac{c_1}{k} \right)^{1/n} R_0^{-\frac{2}{n}} + c_2$$

$$[2] - [1]: \quad \Omega = \frac{n}{2} \left(\frac{c_1}{k} \right)^{1/n} \left[R_0^{-\frac{2}{n}} - R_1^{-\frac{2}{n}} \right]$$

$$c_1 = k \left[\frac{2 \Omega}{n \left(R_0^{-\frac{2}{n}} - R_1^{-\frac{2}{n}} \right)} \right]^n ; \quad c_2 = \frac{\Omega}{1 - \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{\frac{2}{n}}}$$

El perfil de velocidades queda dado por:

$$v_{\theta} = \frac{\Omega r}{\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^{\frac{2}{n}} \right]} \left[1 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{\frac{2}{n}} \right] \quad (8.12)$$

La velocidad tangencial del fluido depende de la coordenada radial vía la suma de una

proporcionalidad directamente lineal y un recíproco de la potencia $(2/n - 1)$.

Para un fluido newtoniano:

$$v_{\theta} = \frac{\Omega r}{\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2\right]} \left[1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right], \quad (8.13)$$

una combinación de una función lineal con un recíproco.

El perfil de esfuerzos cortantes es:

$$\tau_{r\theta} = \frac{c_1}{r^2} = k \left[\frac{2 \Omega / n}{R_0^{-2/n} - R_1^{-2/n}} \right]^n \frac{1}{r^2}.$$

El esfuerzo cortante en la pared del cilindro interior corresponde al valor del tensor de flux de momentum en $r = R_0$:

$$\tau_w = c_1 / R_0^2 = \text{fuerza tangencial} / \text{área de la envolvente cilíndrica}$$

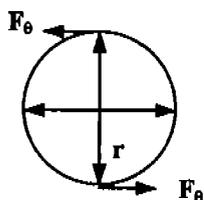
$$\tau_w = F_{\theta} / 2 \pi r_0 L = c_1 / R_0^2$$

Comúnmente, para determinar los parámetros reológicos, no se mide la fuerza tangencial sino el torque aplicado al cilindro interior y la velocidad angular resultante, la cual depende de la fuerza de fricción que genera el fluido.

El torque es: $M_o = r \times F$

como r es perpendicular a F :

$$M_o = r F_{\theta} \quad (\text{formulación escalar})$$



El torque total aplicado por el par de fuerzas es:

$$M_o_T = 2 r F_{\theta} = 2 R_0 F_{\theta}$$

$$M_o_T = (c_1 / R_0^2) 4 \pi R_0^2 L$$

Por lo tanto, para un fluido cuyo comportamiento se ajusta al modelo de potencia:

$$M_o_T = 4\pi L k \left[\frac{2 \Omega / n}{R_0^{-2/n} - R_1^{-2/n}} \right]^n$$

para un fluido newtoniano:

$$M_o_T = 4\pi L \mu \left[\frac{2 \Omega}{R_0^{-2} - R_1^{-2}} \right]$$

Una relación lineal entre el torque y la velocidad angular.

Si al graficar los resultados experimentales de torque y velocidad angular, el ajuste a una línea recta que pasa por el origen es con un coeficiente de regresión alto, el fluido es newtoniano y la pendiente de la recta es la velocidad angular.

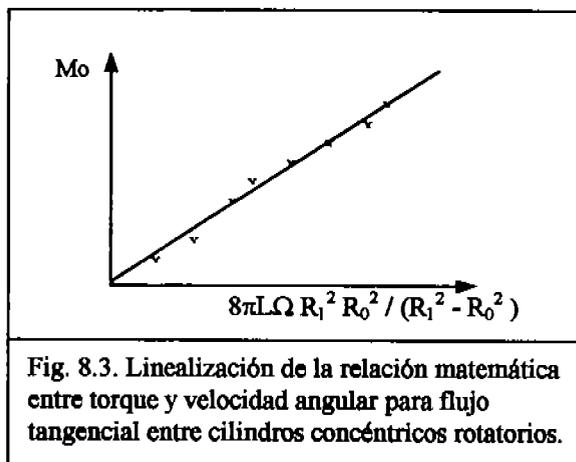


Fig. 8.3. Linealización de la relación matemática entre torque y velocidad angular para flujo tangencial entre cilindros concéntricos rotatorios.

La linealización de la ecuación correspondiente al fluido no newtoniano procede tomando logaritmos.

Rearreglando la ecuación del torque:

$$M_o_T = \Omega^n 4\pi L k \left[\frac{2/n}{R_0^{-2/n} - R_1^{-2/n}} \right]^n$$

adimensionalizando:

$$\frac{M_o_T}{M_o_R} = \left[\frac{\Omega}{\Omega_R} \right]^n 4\pi L k \left[\frac{2/n}{R_0^{-2/n} - R_1^{-2/n}} \right]^n \Omega^n M_o_R$$

Donde M_o_R es un torque de referencia correspondiente a una velocidad angular de referencia (Ω_R). Tomando logaritmos:

$$\log \frac{Mo_T}{Mo_R} = n \log \left[\frac{\Omega}{\Omega_R} \right] + \log \left(\frac{1}{4\pi Lk} \left[\frac{2/n}{R_0^{-2/n} - R_1^{-2/n}} \right] \right)^n \Omega^n Mo_R$$

Al graficar los resultados experimentales es factible determinar los parámetros reológicos n y k si la reología del fluido se adapta al modelo de potencia.

8.4. Determinación Analítica de la Distribución de Velocidades en un Extrusor de Tornillo Sencillo.

La figura 8.4 es la representación esquemática de un extrusor de tornillo sencillo. Está constituido por un barril o coraza en el que se introduce coaxialmente un tornillo helicoidal, normalmente de sección transversal rectangular o trapezoidal. El material a extruir se introduce en la tolva de alimentación ubicada en uno de los extremos de la extrusora. Mediante un motor se pone a girar el tornillo que conducirá el material alimentado a lo largo del barril hasta el otro extremo, fluyendo en régimen laminar. Durante su trayectoria el fluido puede verse sometido a un tratamiento térmico que normalmente se monitorea por medio de un conjunto de termopares colocados equidistantemente. En el extremo opuesto del equipo se hace pasar al material a través de un dado que le da la forma final.

El proceso de extrusión es muy común en la industria de polímeros y en la industria alimenticia, donde la mayoría de los fluidos tienen un comportamiento reológico no Newtoniano, aunque hay algunos casos como algunos polímeros de Nylon que en condiciones isotérmicas pueden considerarse como Newtonianos. El objetivo en esta sección es establecer las ecuaciones diferenciales que describen el paso de un fluido Newtoniano o no Newtoniano a través del tornillo de un extrusor y llevar a cabo la solución analítica para el caso integrable del flujo de un fluido Newtoniano en régimen isotérmico estacionario.

Suponiendo un tratamiento isotérmico, la ecuación diferencial gobernante para el flujo del material a través del canal del tornillo es:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right] \quad (8.14)$$

Esta ecuación es la representación más simple de la dinámica de un fluido Newtoniano en un extrusor de tornillo sencillo y corresponde a una ecuación de Poisson. Su solución, más el acoplamiento con la solución de la ecuación de Navier-Stokes para dos cilindros concéntricos rotatorios y la introducción de un factor de corrección que tome en cuenta el ángulo de la hélice del tornillo, permiten caracterizar el proceso de extrusión y predecir la variación del flujo volumétrico con respecto a la caída de presión necesaria para hacer fluir el material.

El problema de la integración de la ecuación de Poisson, que es una ecuación diferencial parcial no homogénea, puede dividirse en dos partes. La primera de ellas es la solución de la ecuación de Laplace asociada, cuyo resultado es la ecuación (8.11). Y el segundo paso corresponde a encontrar la solución particular que puede realizarse mediante el método de inspección o por variación de parámetros. Procediendo de esta manera se llega a:

$$v_{zp} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{L} \left[\frac{y^2 - Hy}{2} + \frac{4H^2}{\pi^2} \frac{v}{v_p} \right] \quad (8.15)$$

donde v está dada por la ecuación (8.11).

Para un fluido no Newtoniano cuyo comportamiento reológico se puede ajustar al modelo de potencia, la ecuación de Navier-Stokes para flujo laminar incompresible isotérmico en estado estacionario se reduce a:

$$\nabla P = -\nabla \cdot \tau \quad (8.16)$$

Sustituyendo el modelo de potencia:

$$\tau_{yz} = k \left(-\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^n ; \tau_{xz} = k \left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^n \quad (8.17)$$

se obtiene:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^n \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^n \right] \quad (8.18)$$

Realizando la derivación se llega :

$$\frac{dP}{dz} = \left[kn \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial k}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^n \right] + \left[kn \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial k}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^n \right] \quad (8.19)$$

Considerando despreciable la variación del índice de consistencia en las direcciones x e y, perpendiculares a la dirección de flujo, se llega finalmente a:

$$\frac{dP}{dz} = kn \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + kn \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (8.20)$$

Nótese que si el índice de comportamiento se hace igual a uno y se sustituye el índice de

consistencia por la viscosidad, se obtiene la ecuación de Laplace para fluidos Newtonianos.

(8.18) es una ecuación diferencial no lineal, el índice de comportamiento frecuentemente es fraccionario, por lo tanto es muy difícil lograr una solución analítica, entonces es recomendable proceder mediante algún método numérico. El método de diferencias finitas proporciona una opción viable pero poco versátil en cuanto la modificación de la geometría por lo que se procederá a formular la solución por elementos finitos que permite un manejo más adecuado de las condiciones e frontera.

Para la ecuación de Poisson del flujo del fluido Newtoniano se puede formular la solución mediante elementos finitos variacionales, en cambio para el modelo de potencia es más conveniente alguno de los métodos de residuos ponderados.

La solución de la ecuación de Navier-Stokes para la componente tangencial del flujo helicoidal a través del canal del extrusor ya ha sido desarrollada en 8.2. Esta solución se suma a la ecuación (8.11) directamente, ya que en ambos casos se trata de la resolución de la ecuación de movimiento donde se ha eliminado el término no lineal.

8.5. Algoritmo Computacional para el Flujo Laminar de Fluidos Newtonianos en Estado Estacionario a través del Canal de un Extrusor de Tornillo Sencillo de Diferentes Geometrías.

Para las ecuaciones de Poisson y Laplace se dispone de un principio variacional debido a que ambas cumplen con al ecuación de Euler-Lagrange. Por lo tanto, para el flujo laminar de fluidos Newtonianos utilizaremos el método variacional de la técnica de elementos finitos.

El programa para el cálculo de los perfiles de velocidad es el mismo que el presentado como femelect.bas en el capítulo 7. La única diferencia es la introducción del término fuente para incluir los efectos de la contrapresión sobre la ecuación diferencial de Laplace que caracteriza el flujo por arrastre viscoso.

La figura 8.4 representa esquemáticamente un extrusor, mientras que en las figuras (8.5 y 8.6) se muestra el resultado de la determinación de los perfiles de velocidad en estado estacionario para un fluido Newtoniano que fluye en régimen laminar a través del canal de un extrusor de tornillo sencillo, tanto cuando el flujo es por arrastre, como cuando el efecto de contrapresión es importante.

La comparación de los resultados de la simulación computacional contra las soluciones analíticas desarrolladas para las ecuaciones de Laplace y Poisson, demuestran la gran exactitud del método. Tanto para flujo por arrastre como con contrapresión, el error prácticamente es nulo.

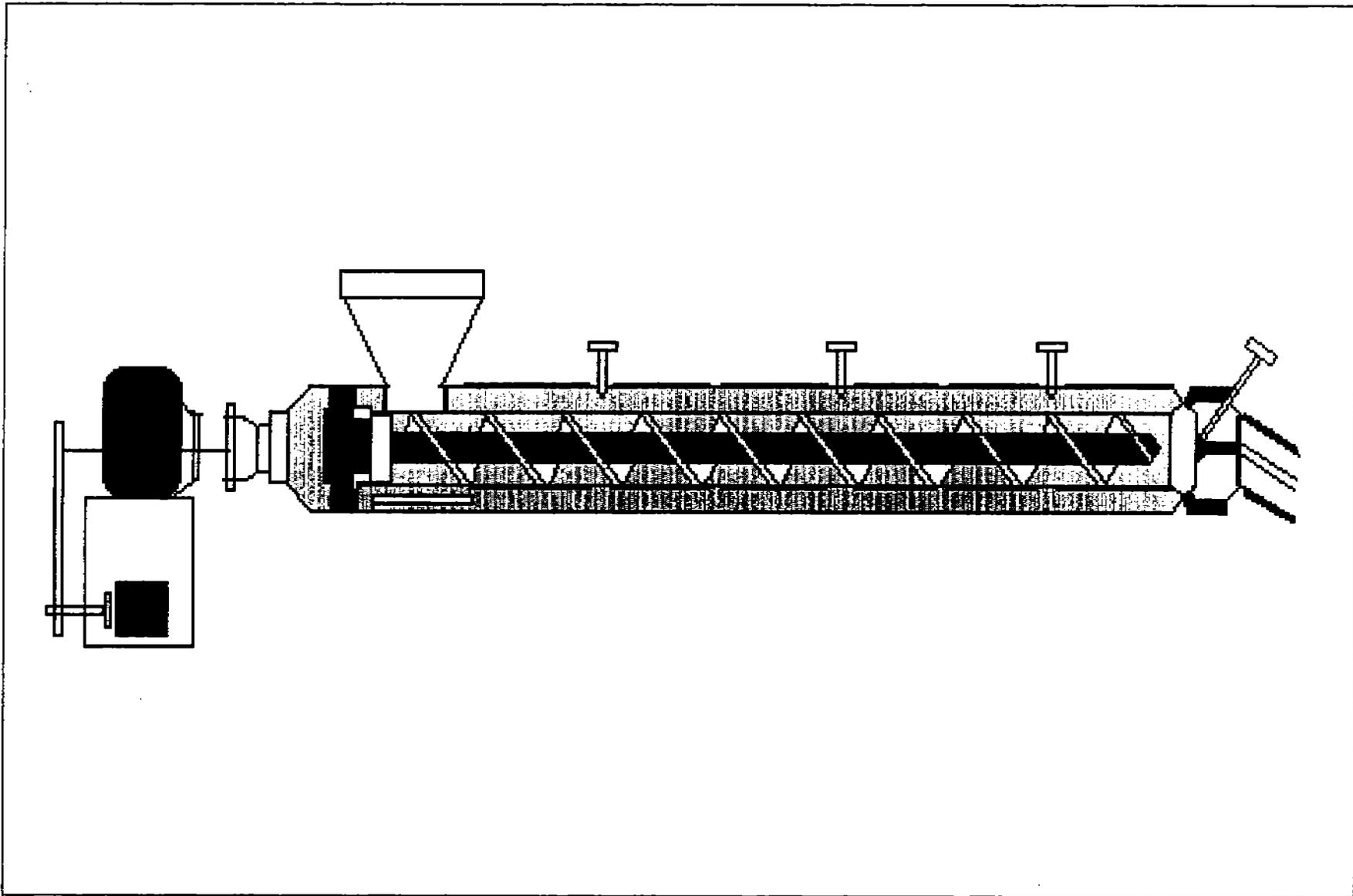


Figura 8.4. Representación esquemática de un extrusor de tornillo sencillo.

velocidad adimensional:

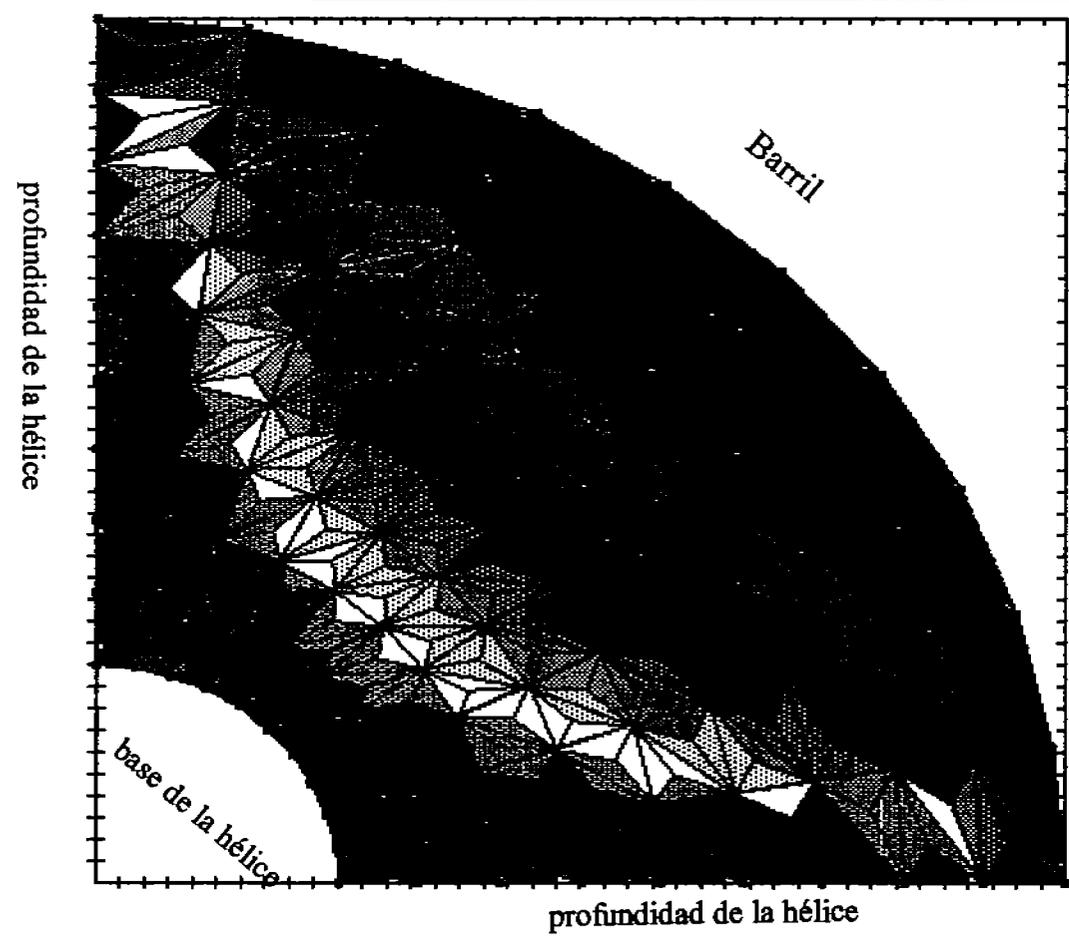


Fig. 8.5. Distribución de velocidades en el canal de un extrusor de tornillo sencillo con gran profundidad de la hélice del tornillo, para flujo por arrastre de un fluido Newtoniano en condiciones de estado estacionario.

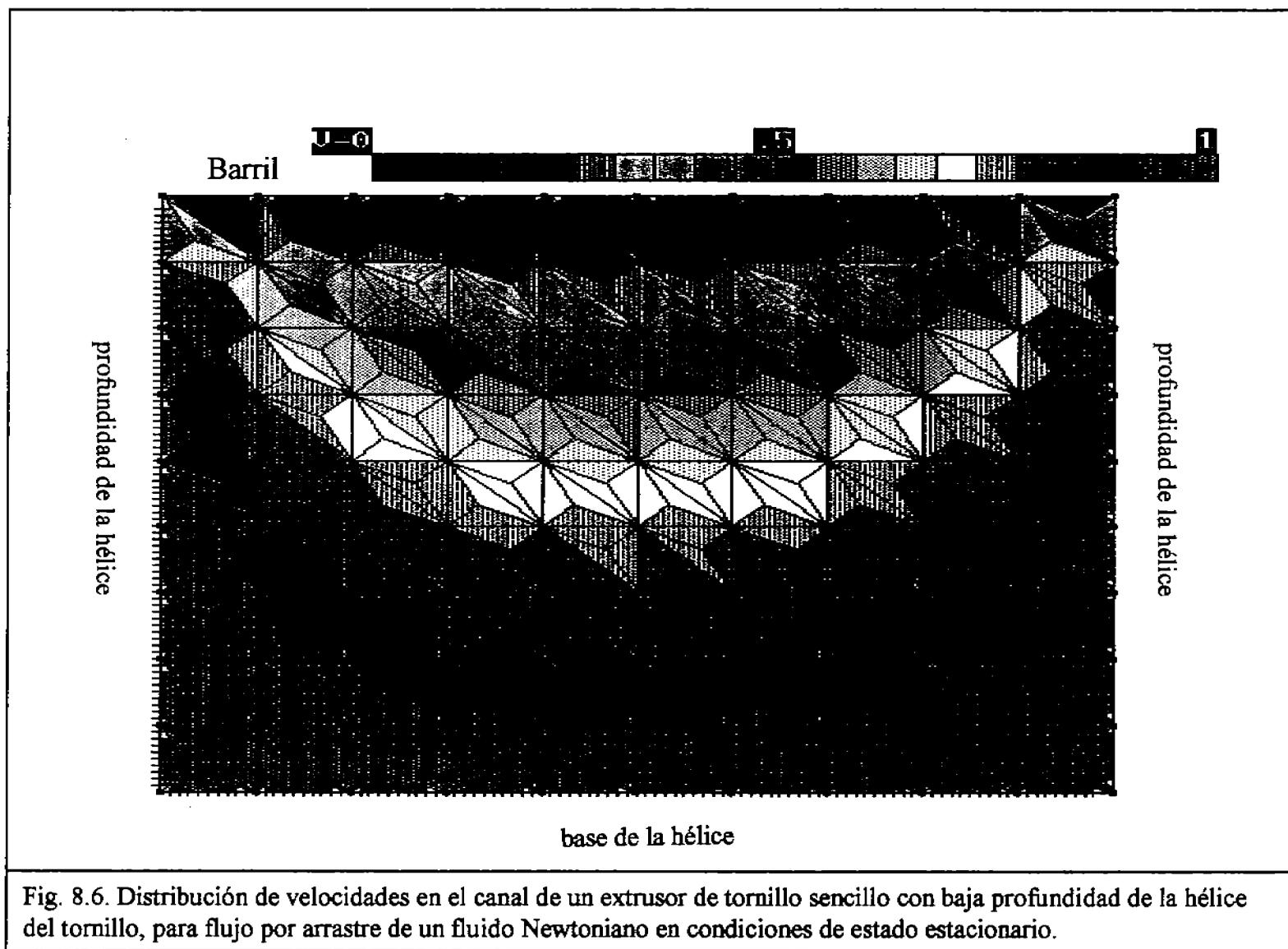


Fig. 8.6. Distribución de velocidades en el canal de un extrusor de tornillo sencillo con baja profundidad de la hélice del tornillo, para flujo por arrastre de un fluido Newtoniano en condiciones de estado estacionario.

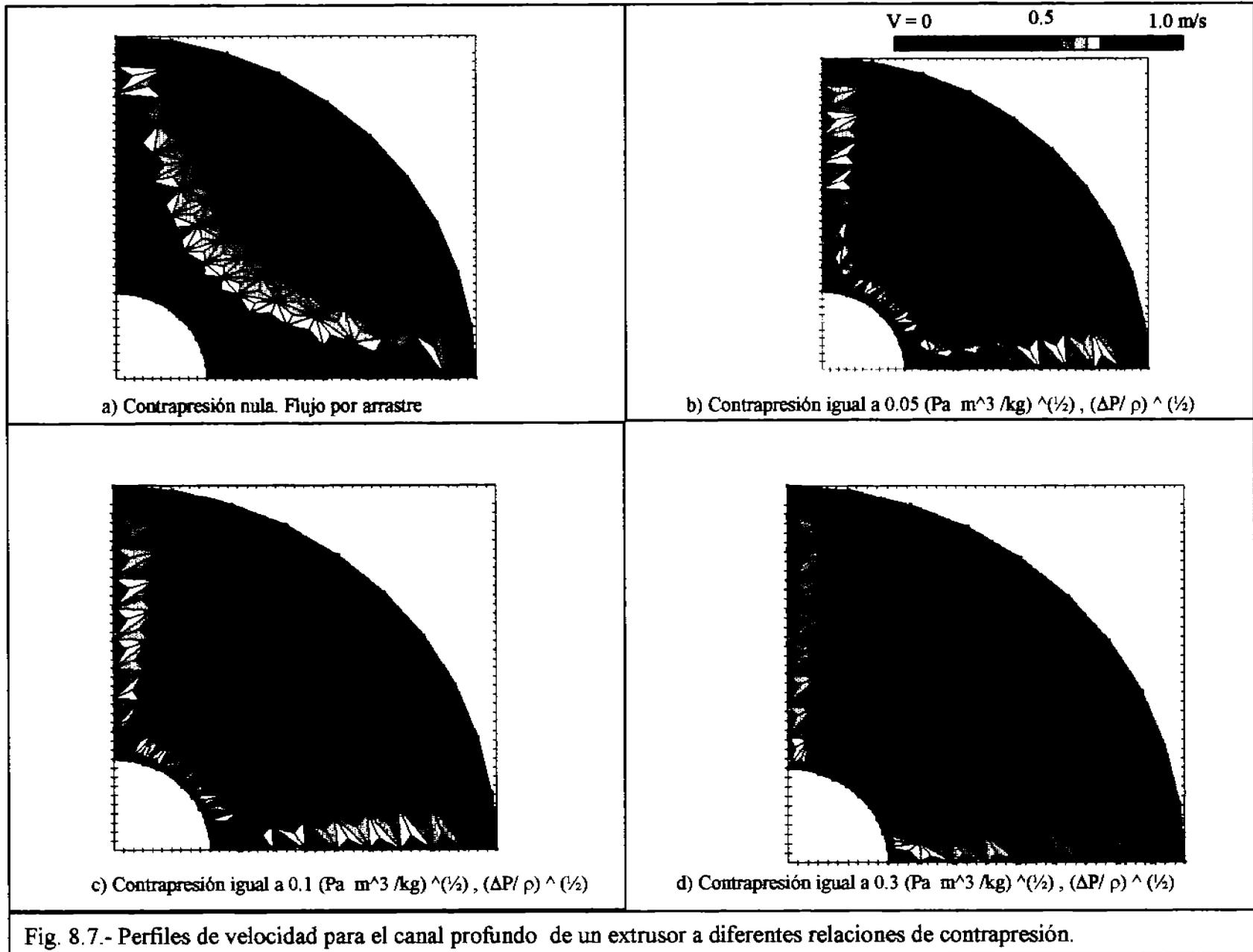
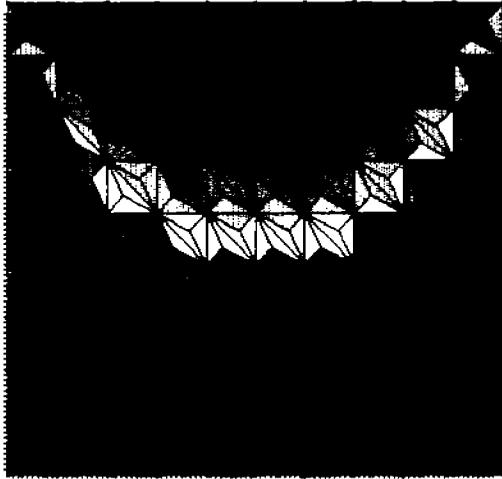
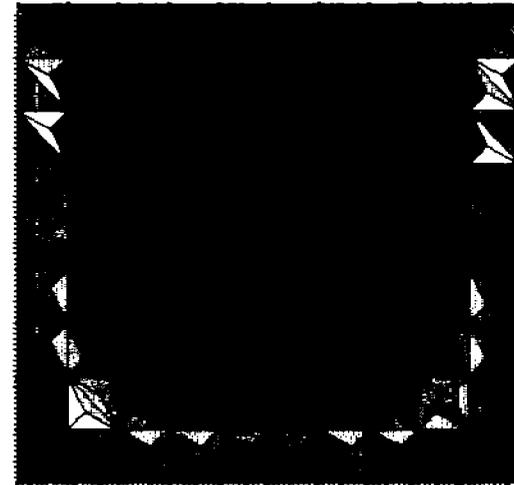


Fig. 8.7.- Perfiles de velocidad para el canal profundo de un extrusor a diferentes relaciones de contrapresión.

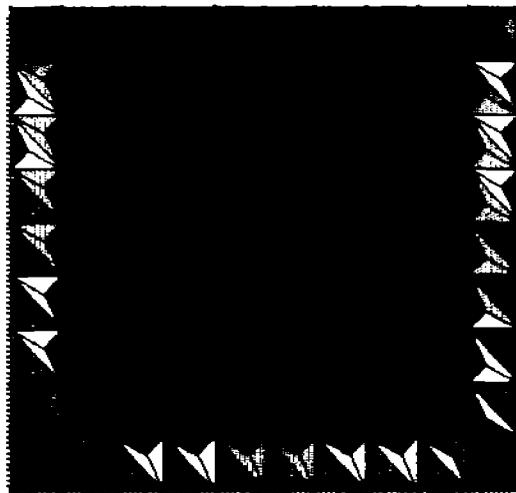


a) Contrapresión nula. Flujo por arrastre

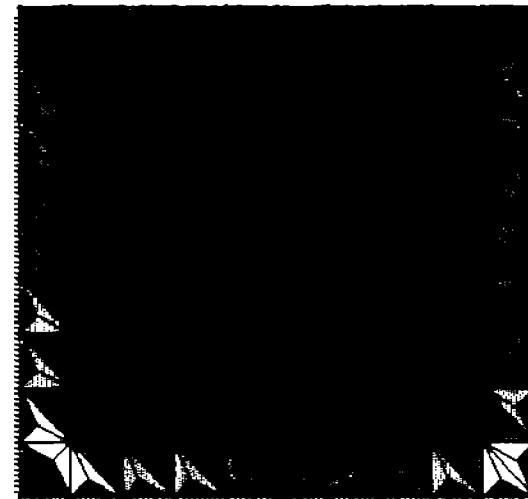


b) Contrapresión igual a $0.05 \text{ (Pa m}^3/\text{kg)}^{1/2}$, $(\Delta P/\rho)^{1/2}$

V= 0 V= 0.5 V= 1 m/s



c) Contrapresión igual a $0.1 \text{ (Pa m}^3/\text{kg)}^{1/2}$, $(\Delta P/\rho)^{1/2}$



d) Contrapresión igual a $0.3 \text{ (Pa m}^3/\text{kg)}^{1/2}$, $(\Delta P/\rho)^{1/2}$

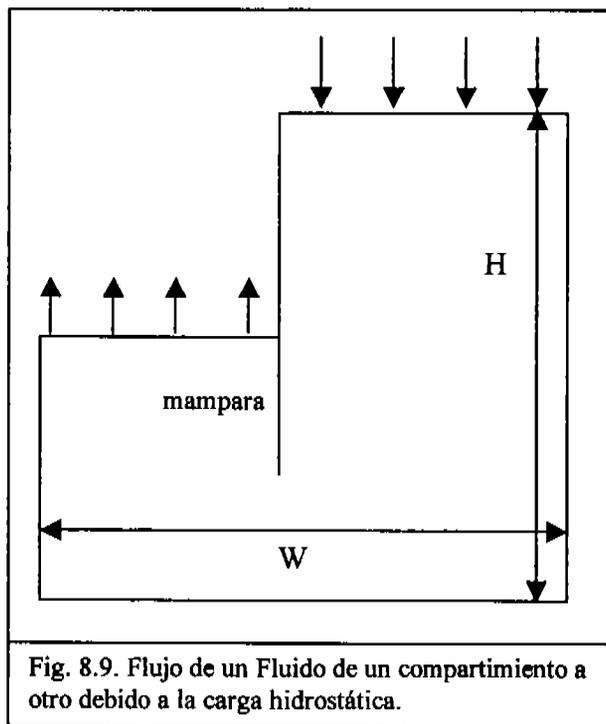
Fig. 8.8.- Perfiles de velocidad para el canal rectangular de un extrusor a diferentes relaciones de contrapresión.

8.6. Flujo de Potencial Bidimensional.

Las consideraciones matemáticas para el flujo ideal no viscoso conduce a las ecuaciones de Laplace tanto para el potencial de velocidades como para la función de corriente. La caracterización de los campos de velocidad en flujos en régimen turbulento plenamente desarrollado puede lograrse considerando el modelo de flujo de potencial en las regiones alejadas de las fronteras sólidas y la teoría de capa límite en las vecindades próximas a dichas fronteras. En esta sección se ejemplifica la aplicación de la resolución de la ecuación de Laplace en la caracterización de la distribución de la función potencial de un campo de velocidades bidimensional. Las líneas de corriente de dicho campo pueden construirse trazando líneas perpendiculares a las líneas equipotenciales. La teoría subyace en las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ya mencionadas en este capítulo, y puede encontrarse mayor información en cualquier texto de Dinámica de Fluidos o en el libro clásico de Fenómenos de Transporte de Bird, Stewart y Lightfoot.

El ejemplo base que consideraremos consiste en lo siguiente:

Un recipiente rectangular de ancho W , y profundidad H , tiene dos compartimientos con las características mostradas en la siguiente figura:



El compartimiento derecho tiene mayor altura que el izquierdo y consecuentemente una mayor energía potencial. En la parte intermedia se encuentra una mampara que divide los dos compartimientos. Bajo estas condiciones el fluido tenderá a fluir del compartimiento derecho al izquierdo tal como se muestra en la figura. Una fuente externa podría asegurar la estacionariedad del proceso.

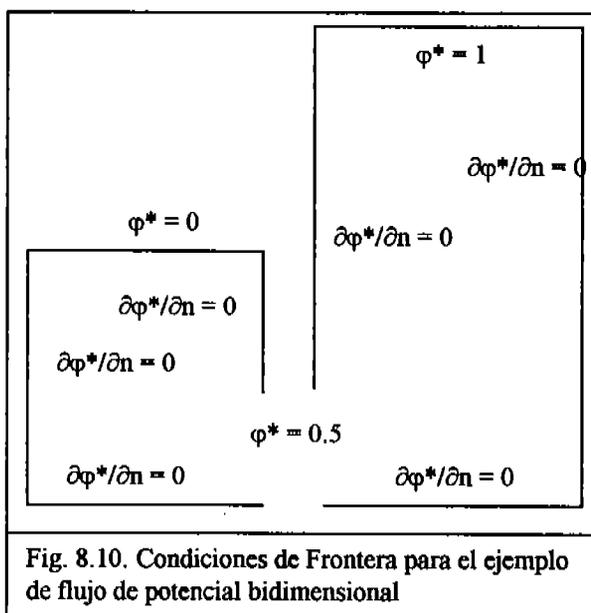
La caracterización de las líneas de corriente que definen el flujo del fluido se puede lograr por dos vías:

- * Resolviendo la ecuación de Laplace para la función de corriente.
- * Resolviendo la ecuación de Laplace para la función potencial y construir las líneas de corriente trazando vectores perpendiculares a las líneas equipotenciales.

Consideraremos la segunda opción debido a que resulta sencillo establecer las condiciones de frontera.

El problema puede ser dividido en dos, el compartimiento izquierdo y el compartimiento derecho. La carga hidrostática define la energía potencial en los puntos señalados, mientras que la ausencia de flujo a través de las paredes del recipiente definen las otras dos condiciones de frontera.

Para los compartimientos separados se tendrían las siguientes condiciones, que son las que se introducen en la simulación computacional :



8.6.1. Algoritmo Computacional para Flujo Potencial Bidimensional de Fluidos Incompresibles en Estado Estacionario.

A continuación se presenta el listado del programa Potflux.Bas con el que se llevaron a cabo los cálculos de la distribución espacial de la función potencial para el ejemplo del paso de un fluido líquido de un compartimiento a otro debido a la diferencia en la carga hidrostática entre ambos, así como para el conjunto de configuraciones de flujos que se presentan en la subsección 8.6.2. Este algoritmo resuelve la ecuación de Laplace y grafica los resultados en escala de colores. El programa es una adaptación del algoritmo femelect.bas presentado en el capítulo 7.

Bloque I.- Especificación de número de nodos y dimensionamiento de arreglos matriciales.

```
REM j1 = nodos verticales, k1= nodos horizontales
j1 = 11: k1 = j1 - 1
n2 = j1 * k1
N3 = (j1 - 1) * (k1 - 1) * 2
DIM A(n2, n2), s(n2, 1), t(n2, 1), EA(3), EB(3)
DIM X(3), Y(3), NN(n2, 3), x1(n2), y1(n2)
DIM A1(n2 + 1, n2 + 1), xec(n2 + 1)
DIM xn(n2), yn(n2), XG1(N3), XG2(N3), XG3(N3)
DIM YG1(N3), YG2(N3), YG3(N3), Tec(N3)
DIM T1(N3), T2(N3), T3(N3), ALE$(20)
```

Bloque II.- Especificación de límites de graficación:

A = 40: B = 399: C = 180: D = 559

Bloque III.- Cálculo de coordenadas nodales.

```
FOR K = 1 TO k1
  FOR J = 1 TO j1
    x1(kempes) = J - 1
    y1(kempes) = K - 1
  NEXT J
NEXT K
```

Bloque IV.- Determinación de los valores extremos de las coordenadas nodales y desplegado gráfico de la malla de elementos finitos.

Es el quinto bloque del programa Femelect. Bas presentado en la página 134, sin ningún cambio.

Bloque V.- Construcción de las ecuaciones locales y ensamblaje del sistema de ecuaciones global.

Es el ciclo de cálculos presentado en 7.5.4, sin cambio alguno.

Bloque VI.- Introducción de condiciones de frontera.

Se especifican los valores de la velocidad en los nodos orilla ubicados en los sitios de entrada y salida de fluido. A los nodos que corresponden a los puntos de contacto con las paredes sólidas se les asigna la condición de frontera natural.

```
N3 = 16
FOR I = 1 TO N3
  READ NP, SV
  DATA 101, 0.5, 102, 0.5, 103, 0.5, 104, 0.5, 105,
  0.5, 10, 0, 20, 0, 30, 0, 40, 0, 50, 0, 60, 0, 70, 0, 80, 0, 90, 0, 100, 0,
  110, 0
  FOR J = 1 TO n2
    A(NP, J) = 0
  NEXT J
  A(NP, NP) = 1: t(NP, 1) = SV
NEXT I
```

Bloque VII.- Resolución del sistema de ecuaciones simultáneas lineales por eliminación gaussiana.

Subrutina presentada en 7.5.5.

Bloque VIII.- Desplegado gráfico de resultados.

Corresponde al conjunto de instrucciones presentado en 7.5.6. La representación gráfica de los triángulos "de cabeza" y "parados" es la misma, lo que se cambia es la subrutina que colorea el interior de los elementos.

'topología triángulos de cabeza

```
FOR I = 1 TO k1 - 1
  FOR J = 1 TO j1 - 1
    ELEM = I + (J - 1) * 2 * (k1 - 1) + k1 - 1
    m3 = I + (J - 1) * k1 + k1
    m1 = m3 - (k1 - 1)
    m2 = m3 + 1
    XG1(ELEM) = x1(m1)
    XG2(ELEM) = x1(m2)
    XG3(ELEM) = x1(m3)
    YG1(ELEM) = y1(m1)
    YG2(ELEM) = y1(m2)
    YG3(ELEM) = y1(m3)
    Tec(ELEM) = (xec(m1) + xec(m2) + xec(m3)) / 3
    T1(ELEM) = (Tec(ELEM) + xec(m1) + xec(m2)) / 3
    T2(ELEM) = (Tec(ELEM) + xec(m3) + xec(m2)) / 3
    T3(ELEM) = (Tec(ELEM) + xec(m1) + xec(m3)) / 3
  NEXT J
NEXT I
```

```

COLOR 3
CLS
SCREEN 12
DIM ALE$(20)
ALE$(0) = CHR$(&H55) + CHR$(&HAA) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HAA) + CHR$(&H55) +
CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF)
ALE$(1) = CHR$(&H11) + CHR$(&H44) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H44) + CHR$(&H11) +
CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF)
ALE$(2) = CHR$(&H0) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF)
ALE$(3) = CHR$(&H0) + CHR$(&H11) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&H44) +
CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF)
ALE$(4) = CHR$(&H0) + CHR$(&H55) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HAA) +
CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF)
ALE$(5) = CHR$(&H0) + CHR$(&H77) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HDD) +
CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF)
ALE$(6) = CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF)
ALE$(7) = CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H77) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) +
CHR$(&HDD) + CHR$(&HFF)
ALE$(8) = CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H55) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) +
CHR$(&HAA) + CHR$(&HFF)
ALE$(9) = CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H11) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) +
CHR$(&H44) + CHR$(&HFF)
ALE$(10) = CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(11) = CHR$(&H11) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H44) + CHR$(&HFF) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(12) = CHR$(&H55) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HAA) + CHR$(&HFF) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(13) = CHR$(&H77) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HDD) + CHR$(&HFF) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(14) = CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(15) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H77) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HDD) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(16) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H55) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HAA) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(17) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H11) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H44) +
CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(18) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&H0) + CHR$(&HFF)
ALE$(19) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&H11) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) +
CHR$(&H44) + CHR$(&HFF)
ALE$(20) = CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) + CHR$(&H55) + CHR$(&HFF) + CHR$(&HFF) + CHR$(&H0) +
CHR$(&HAA) + CHR$(&HFF)

```

```
*****BARRA DE COLOR*****
```

```

LOCATE 1, 28
PRINT "T="; TMIN: LOCATE 1, 53: PRINT (TMIN + TMAX) / 2
LOCATE 1, 75: PRINT TMAX
XREN = 264: YREN = 31: DXREN = 16: DYREN = 16
LINE (XREN, YREN)-(XREN + DXREN * 21, YREN - DYREN), GBLANC%, B
FOR I = 1 TO 20
  LINE (XREN + I * DXREN, YREN)-(XREN + I * DXREN, YREN - DYREN), GBLANC%
NEXT
FOR K = 0 TO 20
  PAINT (XREN + 1 + K * DXREN, YREN - 1), ALE$(20 - K), GBLANC%
NEXT

```

```

LINE (XREN, YREN)-(XREN + DXREN * 21, YREN - DYREB), GNEGR%, B
FOR I = 1 TO 20
  LINE (XREN + I * DXREN, YREN)-(XREN + I * DXREN, YREN - DYREN), GNEGR%
NEXT
FOR ELEM = 1 TO 180
  FOR K = 0 TO 20
    IF T1(ELEM)>=(K / 20) AND T1(ELEM)<(K + 1) / 20 THEN COLOR1$ = ALE$(20 - K)
    IF T2(ELEM)>=(K / 20) AND T2(ELEM)<(K + 1) / 20 THEN COLOR2$ = ALE$(20 - K)
    IF T3(ELEM)>=(K / 20) AND T3(ELEM)<(K + 1) / 20 THEN COLOR3$ = ALE$(20 - K)
  NEXT K
  XGM = (XG1(ELEM) + XG2(ELEM) + XG3(ELEM)) / 3
  YGM = (YG1(ELEM) + YG2(ELEM) + YG3(ELEM)) / 3
  XGMNOR = XGM * (D - C) / PASX + EJEY
  YGMNOR = -YGM * (B - A) / PASY + EJEX
  XG1(ELEM) = XG1(ELEM) * (D - C) / PASX + EJEY
  YG1(ELEM) = -YG1(ELEM) * (B - A) / PASY + EJEX
  XG2(ELEM) = XG2(ELEM) * (D - C) / PASX + EJEY
  YG2(ELEM) = -YG2(ELEM) * (B - A) / PASY + EJEX
  XG3(ELEM) = XG3(ELEM) * (D - C) / PASX + EJEY
  YG3(ELEM) = -YG3(ELEM) * (B - A) / PASY + EJEX
  LINE (XG3(ELEM), YG3(ELEM))-(XGMNOR, YGMNOR)
  LINE -(XG1(ELEM), YG1(ELEM))
  LINE (XG2(ELEM), YG2(ELEM))-(XGMNOR, YGMNOR)
  PAINT ((XG1(ELEM) + XG2(ELEM) + XGMNOR) / 3, (YG1(ELEM) + YG2(ELEM) + YGMNOR) / 3),
COLOR1$
  PAINT ((XG2(ELEM) + XG3(ELEM) + XGMNOR) / 3, (YG2(ELEM) + YG3(ELEM) + YGMNOR) / 3),
COLOR2$
  PAINT ((XG3(ELEM) + XG1(ELEM) + XGMNOR) / 3, (YG3(ELEM) + YG1(ELEM) + YGMNOR) / 3),
COLOR3$
NEXT ELEM

```

8.6.2. Resultados de la Simulación de Flujo Potencial Bidimensional.

Para finalizar este capítulo se presenta una serie de gráficas en las que se puede observar los resultados de la aplicación del algoritmo de cómputo listado en la sección anterior. La modificación de la geometría y condiciones de frontera es fácil de llevar a cabo.

En la figura 8.9 se representa el desplegado gráfico para el flujo por presión hidrostática entre dos

compartimientos. En la figura 8.10 se modifica levemente el sistema especificando la salida en la parte superior de la pared lateral izquierda del primer compartimiento. En la figura 8.11 se muestra el mapa conformacional para flujo de un campo de velocidades homogéneo que incide sobre una pared plana. La solución analítica para esta configuración de flujo es conocida y resulta útil para cuantificar la exactitud del método numérico.

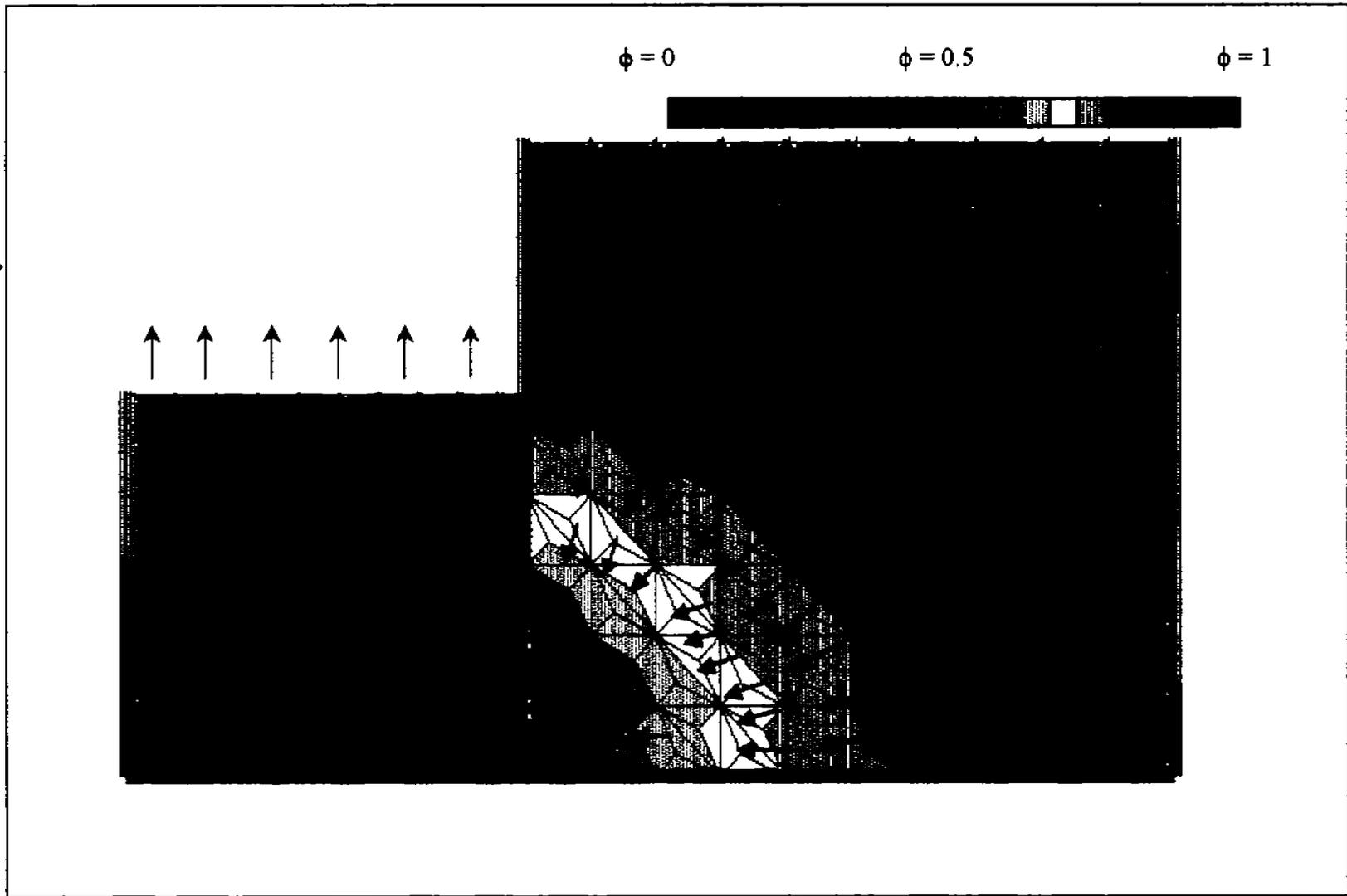


Fig. 8.9. Distribución de la función potencial de velocidad y líneas de corriente para flujo de potencial 2-D debido a presión hidrostática

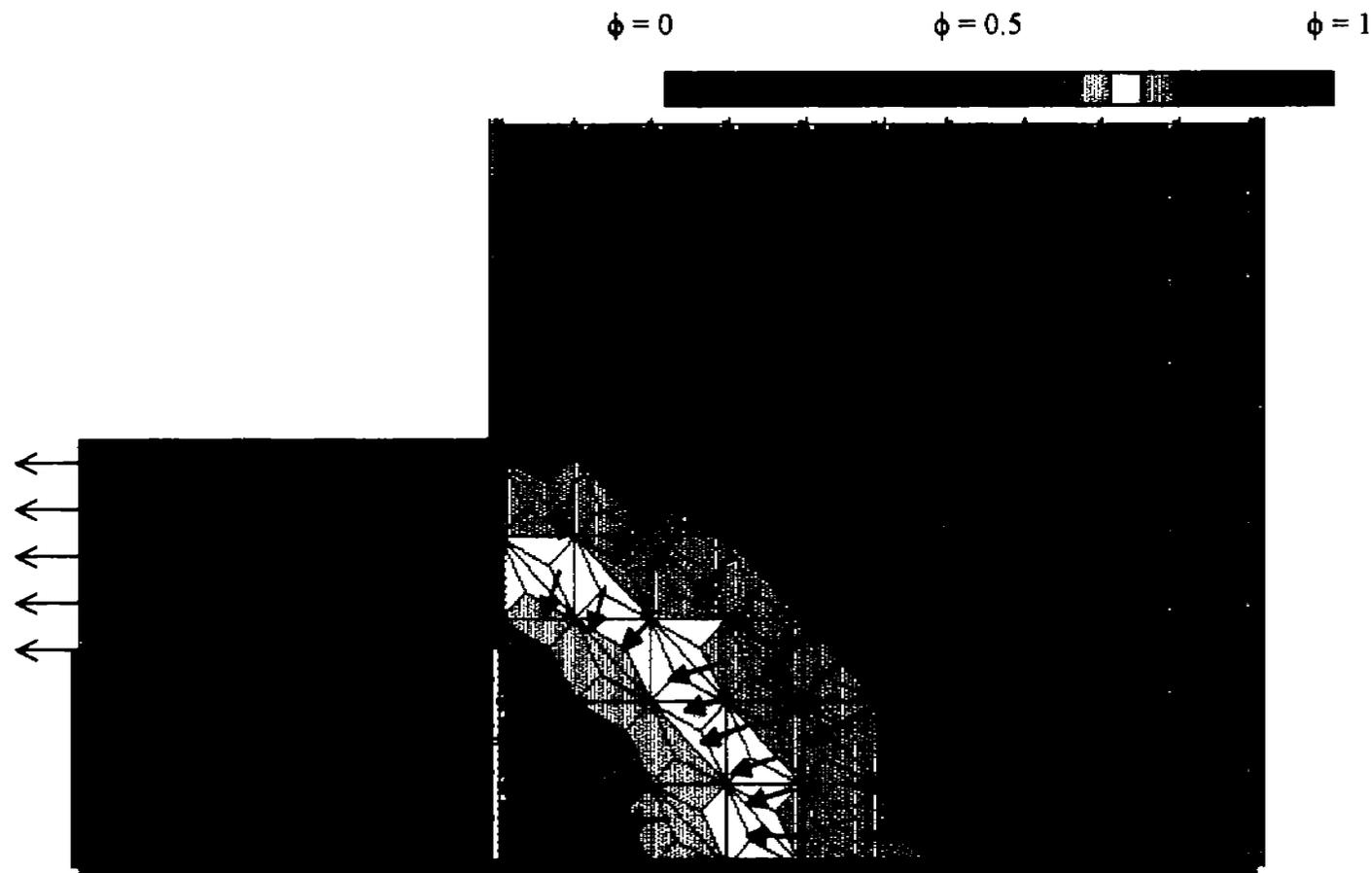


Fig.8.10. Distribución de la función potencial de velocidad y líneas de corriente para flujo de potencial 2-D debido a presión hidrostática. Recipiente izquierdo con salida lateral.

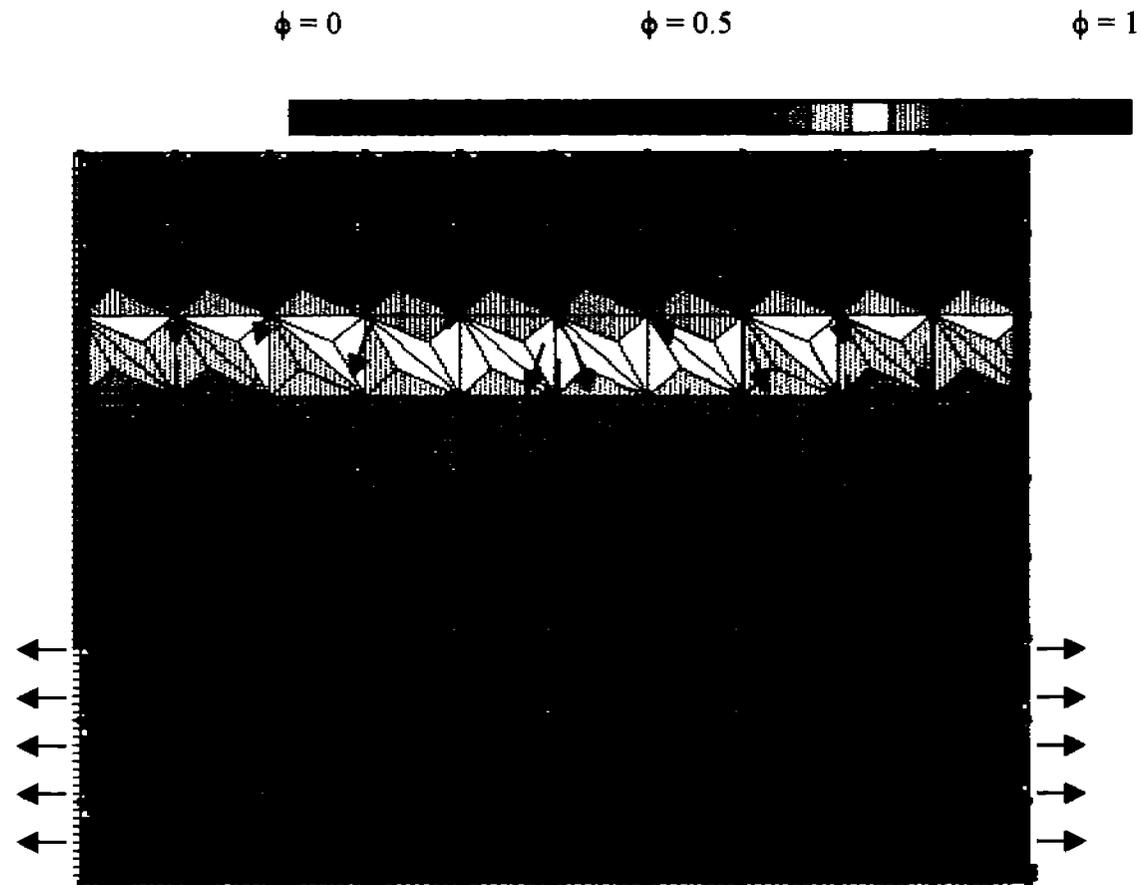


Fig.8.11. Distribución de la función potencial de velocidad y líneas de corriente para flujo de potencial 2-D de un campo homogéneo que incide sobre una placa plana.

9

ANÁLISIS TRANSITORIO.

EJEMPLOS UNIDIMENSIONALES

9.1 Introducción.

En los capítulos anteriores se han ejemplificado únicamente procesos irreversibles en estado estable. Sin embargo, muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza proceden sin que llegue a alcanzarse el estado estacionario, y aún aquellos en los que se alcanza dicho régimen, evolucionan durante un tiempo en forma transitoria, por lo que el análisis del régimen inestable es de tanta importancia como el de los procesos en estado estacionario.

En este capítulo se considerará la resolución de ecuaciones diferenciales parciales dependientes de las coordenadas espaciales y del tiempo, que caracterizan a algunos procesos irreversibles no estacionarios. Ejemplos de tales modelos matemáticos son las ecuaciones de Fick, Fourier y Navier-Stokes, o las ecuaciones de Reynolds para flujo turbulento, que contienen primeras derivadas temporales y segundas derivadas espaciales. A diferencia de la ecuación de onda en la que la aplicación de la segunda ley de Newton y el término de transporte de las ondas en el espacio obligan a incluir segundas derivadas de la amplitud con respecto al tiempo y al espacio, respectivamente.

La resolución numérica de ecuaciones diferenciales dependientes del tiempo requiere de la revisión de numerosos aspectos teóricos que se deben investigar antes de seleccionar un algoritmo computacional. Estos incluyen: los límites de estabilidad, la amplitud del error, el error de fase implícito en el método, etc. El propósito de este capítulo es ejemplificar procedimientos típicos que se utilizan en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales que caracterizan procesos transitorios de la termodinámica irreversible. Únicamente se considerarán problemas no estacionarios con primeras derivadas temporales.

El algoritmo que se presenta al final de este capítulo es un híbrido de elementos finitos que se utiliza para la integración espacial combinado con un

ciclo externo de diferencias finitas para la integración temporal.

Recuérdese la definición del cálculo diferencial e integral para la derivada de una cantidad, R , con respecto al tiempo:

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \quad (9.1)$$

Esta forma del teorema de L'Hopital será útil para reemplazar el operador derivada temporal en las ecuaciones diferenciales por su correspondiente aproximación numérica.

La subrutina relacionada a la integración en el tiempo queda caracterizada por la selección de los operadores de diferencias y las formas en que se combinen. A las expresiones resultantes se les denomina diferencias finitas debido a que la diferencia de tiempo Δt es finita en lugar del límite infinitesimal en la derivada.

Las aproximaciones de diferencias finitas más comúnmente empleadas son las diferencias hacia adelante:

$$\dot{R} = \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t}, \quad (9.2)$$

las diferencias hacia atrás:

$$\dot{R} = \frac{R(t) - R(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (9.3)$$

y las diferencias centrales:

$$\dot{R} = \frac{R(t + \Delta t) - R(t - \Delta t)}{2 \Delta t}, \quad (9.4)$$

donde Δt denota una pequeña diferencia de tiempo.

Es fácil desarrollar expresiones similares para estimar la segunda derivada, aunque aquí no se especificuen.

9.2 Métodos para Integración Temporal.

El sistema de ecuaciones gobernantes para un proceso irreversible transitorio es generalmente un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$[A]\dot{R}(t) + [B]R(t) = [P(t)] \quad (9.5)$$

donde el punto representa la derivación con respecto al tiempo. El establecimiento de las condiciones iniciales define los valores de la variable R en el tiempo cero, $R(0)$; mientras que las condiciones de frontera fijan a uno o varios de los componentes de la matriz $[R]$, digamos $R(j)$, como una función del tiempo, es decir $R(j) = g(t)$. Las ecuaciones gobernantes involucran ahora dos matrices cuadradas, $[A]$ y $[B]$. Por lo tanto, en general, será necesario aplicar dos veces el procedimiento de ensamblaje discutido previamente. Es decir:

$$[A] = \sum_{e=1}^{NE} [A^e] \quad (9.6)$$

$$[B] = \sum_{e=1}^{NE} [B^e] \quad (9.7)$$

donde $[A^e]$ y $[B^e]$ son generadas a partir del procedimiento de ensamblaje directo y las correspondientes contribuciones al elemento, $[a^e]$ y $[b^e]$.

Solamente se tomará en cuenta la **integración temporal directa** considerando como evoluciona la variable dependiente R de la ecuación (9.5) de un intervalo de tiempo a otro, a este esquema se le conoce como **integración paso a paso**. Hay una gran cantidad de tales procedimientos publicados en la literatura. El texto de Zienkiewicz y Taylor (1994) examina en detalle muchos aspectos de los procedimientos simples de integración temporal para aplicaciones lineales transitorias. Dicho autor utiliza tanto aproximaciones espaciales de diferencias finitas como de elemento finito para ilustrar como difieren sus soluciones transitorias.

9.2.1 El método de Integración de Euler.

La exactitud, estabilidad y tamaño relativo del algoritmo computacional para un esquema numérico de integración temporal dependen de como se aproxime la "velocidad", es decir, la primera derivada de la variable dependiente, durante el intervalo de tiempo. Por ejemplo, se puede suponer que la rapidez de cambio durante dicho intervalo es:

- constante,
- igual al valor promedio entre el principio y el final del intervalo,
- varía linealmente durante el intervalo, etc.

Para ilustrar los casos (a) y (c), considérese un intervalo de tiempo $k = \Delta t$ y asúmase una serie de Taylor para $[R(t)]$ en términos de su valor en el intervalo de tiempo previo, $[R(t-k)]$:

$$[R(t)] = [R(t-k)] + k[\dot{R}(t-k)] + \frac{k^2}{2}[\ddot{R}(t-k)] \quad (9.8)$$

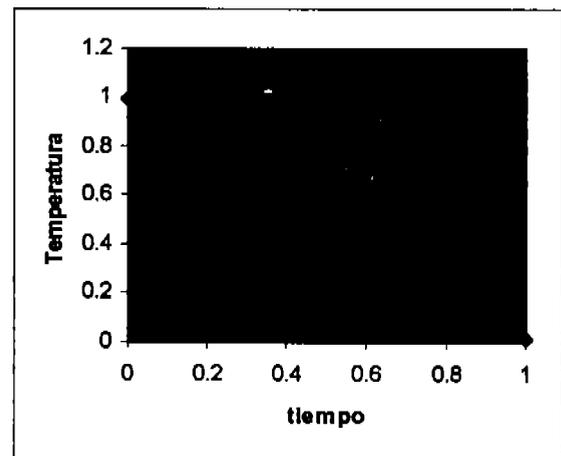


Fig. 9.1 Consideraciones típicas en el método de Integración de Euler.

Como se ilustra en la Fig. (9.1), la suposición del inciso (a) y la ecuación (9.8) dan $[R(t)]$ para el tiempo actual en función del valor R en el paso de tiempo anterior. El procedimiento de integración

estándar de Euler se obtiene, para una aceleración cero (segunda derivada temporal igual a cero), multiplicando ambos lados de la ecuación (9.8) por [A] y resulta:

$$[A][R(t)] = [A][R(t-k)] + k[A][\dot{R}(t-k)] \quad (9.9)$$

Al sustituir en la ecuación (9.5) evaluada al tiempo (t-k):

$$[A][\dot{R}(t-k)] = [P(t-k)] - [B][R(t-k)] \quad (9.10)$$

Para obtener el resultado final:

$$[A][R(t)] = k [P(t-k)] + \{[A] - k [B]\} [R(t-k)]. \quad (9.11)$$

La ecuación diferencial gobernante ha sido reducida a un conjunto de ecuaciones algebraicas de la forma:

$$[S] [R(t)] = [F(t)] \quad (9.12)$$

El cual puede resolverse explícitamente en cada paso de tiempo. En el caso actual el método de Euler da lugar al sistema de matrices:

$$[S] = [A] \quad (9.13)$$

y:

$$[F(t)] = k [P(t-k)] + ([A] - k [B]) [R(t-k)]. \quad (9.14)$$

Como se ilustra en la Tabla 9.1 todas las técnicas de integración pueden ser reducidas a la forma de la ecuación (9.12).

Cuando el problema es lineal y el tiempo k, es constante, la matriz cuadrada del sistema no cambia con el tiempo. Por lo tanto necesita ser ensamblada e "invertida" solo una vez (En caso que la solución algebraica sea vía matriz inversa). Entonces a cada paso de tiempo solo es necesario evaluar [F(t)] y resolver para [R(t)].

Antes de considerar el significado práctico de formas alternas de la ecuación (9.12), reportadas en la tabla 9.1, regresemos a la suposición de que la variación de R es lineal durante el paso de tiempo.

A partir de la Fig. 9.2 se nota que:

$$[\dot{R}(t)] = [\dot{R}(t-k)] + k[\ddot{R}(t-k)] \quad (9.15)$$

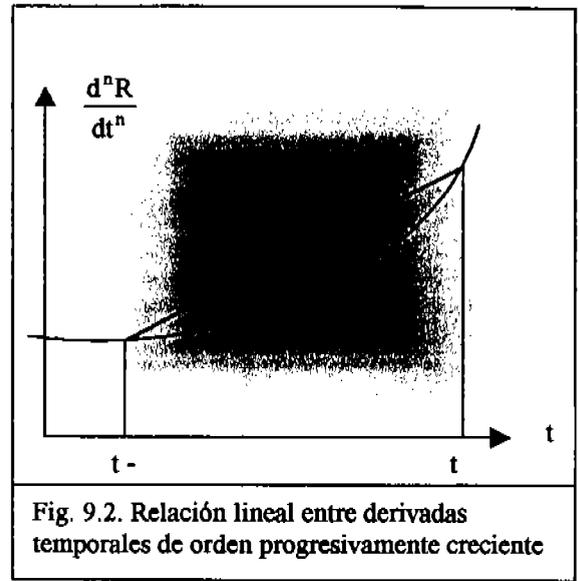


Fig. 9.2. Relación lineal entre derivadas temporales de orden progresivamente creciente

Resolviendo la ecuación (9.8) para $d^2[R]/dt^2$ y sustituyendo en la ecuación anterior se llega a:

$$[\dot{R}(t)] = 2 \left\{ \frac{R(t) - R(t-k)}{k} \right\} - [\dot{R}(t-k)] \quad (9.16)$$

Sustituyendo $d[R(t)]/dt$ evaluada al tiempo t en la ecuación (9.5) se obtiene el sistema de ecuaciones lineales:

$$[S] [R(t)] = [F(t)], \quad (9.17)$$

donde ahora

$$[S] = [B] + 2 [A] / k \quad (9.18)$$

$$[F(t)] = [P(t)] + [A] \left\{ \frac{2[R(t-k)]}{k} + [\dot{R}(t-k)] \right\} \quad (9.19)$$

A esta ecuación se le conoce como algoritmo de velocidad lineal. El método de Euler es un método explícito, mientras que la formulación de la velocidad lineal es uno de muchos algoritmos implícitos.

Nótese que la formulación de Euler no requiere almacenamiento adicional, mientras que el algoritmo de velocidad lineal requiere de almacenar la primera derivada en el tiempo t y en el tiempo (t-k), para llevar a cabo los cálculos necesarios que permitan actualizar sus valores en cada paso de

tiempo. La relación de recurrencia necesaria que utiliza los valores calculados anteriormente para $[R(t)]$, se obtiene a partir de la ecuación (9.16). Nótese también que el procedimiento implícito requiere que se tengan valores iniciales de la velocidad para empezar. Esto puede ser obtenido a partir de la ec. (9.5) como:

$$[\dot{R}(0)] = [A]^{-1} \{ [P(0)] - [B][R(0)] \} \quad (9.20)$$

Sin embargo, este es un enfoque práctico solamente cuando $[A]$ es una matriz diagonal.

Tabla 9.1 Matrices de Sistema para Transitorios Lineales.	
1. Método de Euler (diferencias hacia adelante), $k = \Delta t$	
$[S] = [A] / k$	
$[F] = [P(t-k)] + ([A] / k - [B]) [R(t-k)]$	
2. Cranck-Nicholson (diferencias centrales) $h = \Delta t/2$.	
$[S] = [A] / k + [B] / 2$.	
$[F] = [P(t-h)] + ([A] / k - [B] / 2) [R(t-k)]$	
3. Velocidad Lineal.	
$[S] = 2 [A] / k + [B]$	
$[F] = [P(t)] + [A] (2 [R(t-k)] / k - [R(t-k)]$	
$[\dot{R}(t)] = 2 \{ [R(t)] - [R(t-k)] \} / k + [R(t-k)]$	

9.2.2 Diagonalización de Matrices para Soluciones Transitorias.

Cuando se utiliza una formulación espacial de diferencias finitas explícitas, la matriz $[A]$ es una matriz diagonal, sin embargo si se utiliza una formulación de Elemento Finito, no se obtiene una matriz diagonal. La forma consistente de la formulación de Elemento Finito introduce un acoplamiento de algunos de los coeficientes de la matriz de las derivadas del tiempo. Como fue demostrado por Myers, esto tiende a generar un algoritmo de integración menos estable en el tiempo.

La conversión de $[A]$ a una matriz diagonal economiza la memoria de almacenamiento y hace más económica la resolución del sistema de ecuaciones. Algunos procedimientos matemáticos para la modificación de $[A]$ han demostrado ser exitosos. Para ilustrar esto, considérese la forma típica de la contribución de un elemento, digamos a^e . La definición consistente para propiedades constantes es:

$$[a]^e \equiv q \int_{V^e} [H^e]^T [H^e] dV \quad (9.21)$$

Donde q es alguna propiedad constante por unidad de volumen y la matriz $[H]$ denota las funciones de interpolación del elemento. Esto generalmente puede ser escrito como:

$$[a^e] = Q[M] \quad (9.22)$$

donde $Q = qV^e$, y $[M]$ es una matriz simétrica llena.

Hagamos que la suma de los coeficientes de la matriz $[M]$ sea T , es decir:

$$T = \sum_i \sum_j M_{ij} \quad (9.23)$$

En la mayoría de los casos T puede ser unitaria, pero en el caso de las integrales axisimétricas. Otra cantidad de interés es la suma de los términos diagonales de $[M]$, es decir su traza:

$$d = \sum_i M_{ii} \quad (9.24)$$

La solución más común para diagonalizar una matriz es diferir o sumar todos los términos de un renglón dado sobre la diagonal del renglón y después hacer los términos fuera de la diagonal igual a cero. Estos es la matriz diferida $[L]$ que se define como:

$$L_{ii} = \sum_j M_{ij} \quad (9.25)$$

$$L_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Nótese que al hacer esto no se altera el valor de T.

Puede obtenerse otra matriz diagonal [D], con el mismo valor T retrayéndola de la diagonal de [M] y escalándola por un factor de T/d. Es decir:

$$D_{ii} = M_{ii} T/d. \quad (9.26.a)$$

$$D_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j. \quad (9.26.b)$$

La matriz [D] será denominada matriz diagonalizada y [L] la matriz diferida. Estas matrices son referidas como matrices condensadas.

Para elementos lineales simples en dos y tres dimensiones ambos procedimientos dan lugar a matrices diagonales idénticas. Aunque para problemas axisimétricos y elementos de mayor orden se obtienen resultados diferentes y la matriz diagonalizada es la que da resultados más exactos en general. Esto es debido a que los elementos de más alto orden en la forma diferida pueden introducir ceros en la diagonal. Las matrices [M], [L] y [D] para un triángulo cuadrático se presentan en la Fig. 9.2.

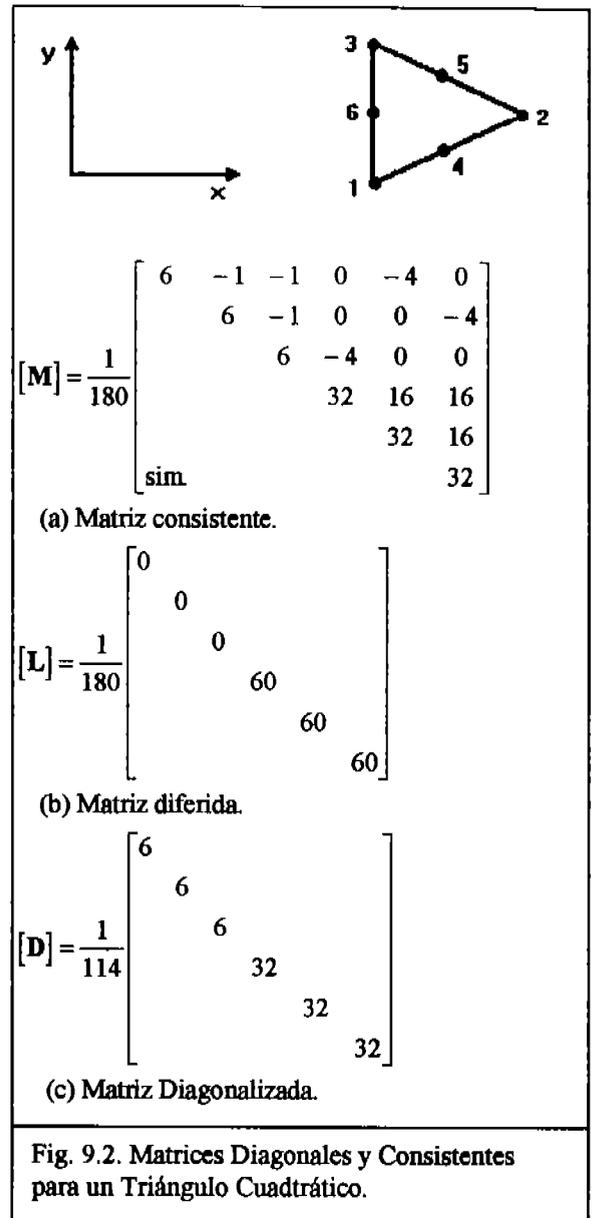


Fig. 9.2. Matrices Diagonales y Consistentes para un Triángulo Cuadrático.

9.3 Transferencia de Calor Transitoria

Como un ejemplo más detallado de lo anterior se aplicará el método de Crank-Nicholson a un problema de Transferencia de Calor simple.

Considérese una barra uniforme que está inicialmente a temperatura constante. Supongamos que los dos extremos de la barra sufren descenso repentino hasta temperaturas diferentes. Por simplicidad, utilizaremos tres elementos lineales iguales y un total de cuatro nodos como se muestra en la Fig. 9.3. Debido a que los dos nodos extremos son de temperatura conocida, necesitamos determinar la historia térmica de los dos nodos restantes.

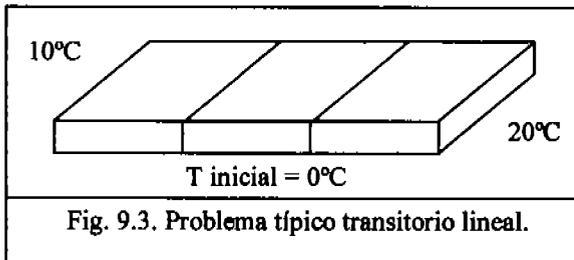


Fig. 9.3. Problema típico transitorio lineal.

La ecuación diferencial parcial que gobierna el fenómeno es:

$$\rho C_p \frac{\partial R}{\partial t} - K \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0 \quad (9.27)$$

donde R denota la temperatura, t es el tiempo, y las propiedades del material K , ρ y C_p son la conductividad térmica, la densidad másica, y el calor específico, respectivamente.

Este sistema también requiere condiciones iniciales, es decir $R(x, t=0)$ y las condiciones de frontera como una función del tiempo, es decir $R(0, t)$ y $R(L, t)$.

Como ejemplo se tomará en cuenta una condición inicial de temperatura igual a 0°C , y arbitrariamente se establecerá que las condiciones de frontera sean $R_1(t) = 10^\circ\text{C}$ y $R_4(t) = 20^\circ\text{C}$.

En el capítulo 5 se demostró que la contribución del elemento a la matriz de conducción global es:

$$[B^e] = \frac{K^2}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

Myers da la derivación de la correspondiente matriz de capacitancia del elemento como:

$$[A^e] = c^e \rho^e \int_L [H^e]^T [H^e] dx = \frac{c^e \rho^e L^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (9.29)$$

El ensamblaje de tres elementos iguales da la ecuación 9.5 como:

$$\frac{\rho C_p L^e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} [\dot{R}] + \frac{K}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} [R] = [P]$$

De ahí que la longitud total de la barra es $L = 3 L^e$. El término de fuerza $[P]$ contiene las fuentes internas de calor dependientes del tiempo y las fuentes de calor nodales. Aquí se asume que ellos son cero en los nodos interiores.

La forma anterior fue utilizada para ilustrar el punto de que la ecuación 9.1 requiere de los dos sistemas de matrices cuadradas. Sin embargo, podríamos no desear almacenarlas en la forma anterior. Cuando comparamos las opciones de la tabla IX.1 con las ecuaciones actuales a resolver, es decir la ecuación 9.12, vemos que es probablemente más eficiente usar las dos matrices cuadradas alternas. Por ejemplo, la opción de Crank-Nicholson necesita que tanto la matriz:

$$[S] = [A] k + [B] / 2, \quad (9.31)$$

así como:

$$[Q] = [A] / k - [B] / 2, \quad (9.32)$$

sean usadas en la actualización del término de fuerza $[F]$.

Suponiendo un paso de tiempo constante, k , y multiplicando todos los términos por $(6k/\rho L^e)$, permite escribir el método de Crank-Nicholson (para $[P] = [0]$) como:

$$[S'] [R(t+k)] = [Q'] [R(t)] = [F'] \quad (9.33)$$

donde:

$$S' = \begin{bmatrix} (2+b) & (1-b) & 0 & 0 \\ & (4+b) & (1-b) & 0 \\ & & (4+2b) & (1-b) \\ \text{sim.} & & & (2+b) \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

y donde $b = 3kK/\rho C_p L^2$. La matriz $[Q']$ la misma excepto por un cambio en el signo de todos los términos b . Si renormalizamos de manera que $b=3$, nuestro modelo numérico actual llega a ser:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} R(t+k) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} R(t). \quad (9.35)$$

Por supuesto, esta ecuación aún debe ser modificada posteriormente, debido a que el lado izquierdo involucra términos de R que son definidos por las condiciones de frontera.

Cuando esos términos se mueven hacia la derecha solamente el segundo y el tercer renglones permanecen independientes:

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_2(t) \\ R_3(t) \end{Bmatrix} - R_1(t+k) \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix} - R_4(t+k) \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad (9.36)$$

Para los resultados en el primer paso sustituimos las condiciones iniciales en R_2 y R_3 , y las nuevas condiciones de frontera son R_1 y R_4 . El lado derecho resultante en este caso es

$$F' = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - 10 \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix} - 20 \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 40 \end{Bmatrix} \quad (9.37)$$

Resolviendo para los nuevos valores de R_2 y R_3 :

$$\begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 20 \\ 40 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.917 \\ 4.583 \end{Bmatrix} \quad (9.38)$$

En el siguiente paso el lado derecho cambia a:

$$F' = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2.917 \\ 4.583 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 40 \end{Bmatrix}. \quad (9.39)$$

Las nuevas temperaturas correspondientes son:

$$\begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.271 \\ 5.104 \end{Bmatrix}. \quad (9.40)$$

Continuando de esta manera se encuentra que esas temperaturas finalmente alcanzan sus valores estacionarios de 13.333 y 16.667, respectivamente. La primera y última ecuación no utilizadas, pueden ser usadas para determinar el flux de calor en los extremos dependiente del tiempo, P_1 y P_4 , necesarios para mantener las dos temperaturas extremas.

Este tipo de cálculo transitorio es sensible al tamaño del paso del tiempo, k . Si el paso de tiempo es demasiado largo, pueden surgir oscilaciones de las temperaturas calculadas. Si es demasiado pequeño, entonces puede ocurrir un choque térmico en el flux nodal de calor o un incremento repentino de la temperatura hacia niveles térmicos físicamente imposibles. Ambos efectos son causados por tamaños incompatibles de la malla y del paso del tiempo. Ellos pueden ser combinados con propiedades del material para dar el número adimensional de Fourier

$$f = \frac{kK}{\rho C_p L^2}. \quad (9.41)$$

Para problemas térmicos transitorios el número de Fourier deberá tener un valor aproximadamente igual a la unidad en todos los nodos donde hay un severo choque térmico. En tal caso L^o denota la distancia más pequeña hasta otro nodo en el elemento.

Las expresiones matemáticas obtenidas en este apartado serán útiles en la construcción del algoritmo computacional para la determinación de la evolución de los perfiles de temperatura en procesos unidimensionales de transferencia de calor en estado transitorio. Antes de ello, y a manera de comparación, se obtendrá la solución analítica.

9.4. Solución Analítica para la Transferencia de Calor por Conducción en Régimen Transitorio

I.- Coordenadas Cartesianas y Fronteras Isotérmicas

Consideraremos un prisma rectangular de un material homogéneo e isotrópico, con propiedades físicas, conductividad térmica (k), densidad (ρ) y capacidad calorífica (C_p) independientes de la temperatura. Dicho bloque se encuentra inicialmente a una temperatura inicial T_{amb} y se introduce en hielo, quedando completamente cubierto. La cantidad de hielo es suficiente para mantener en todo momento la temperatura de la pared del prisma igual a cero grados centígrados.

Seleccionaremos un sistema de coordenadas con su origen ubicado en el centroide de volumen del prisma con la finalidad de tener condiciones de frontera simétricas y simplificar el álgebra.

El modelo matemático que caracteriza la evolución de la distribución de temperaturas en el interior del bloque es la ecuación de Fourier:

$$k\nabla^2 T = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9.42)$$

Para un material isotrópico y homogéneo en coordenadas cartesianas, la transferencia de calor 3-D corresponde a:

$$k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9.43)$$

Las condiciones de Frontera son:

$$T = 0^\circ \text{C en } x = \pm L \quad \forall (y, z, t) \quad (9.44.a)$$

$$T = 0^\circ \text{C en } y = \pm H \quad \forall (x, z, t) \quad (9.44.b)$$

$$T = 0^\circ \text{C en } z = \pm W \quad \forall (x, y, t) \quad (9.44.c)$$

La condición inicial es :

$$T = T_{amb} \text{ en } t = 0 \quad \forall (x, y, z) \quad (9.45)$$

Proponemos ahora que la solución de la ecuación diferencial, $T = T(x, y, z, t)$ puede ser escrita en términos de un producto de cuatro funciones unidependientes :

$$T = X(x) Y(y) \Gamma(z) \Theta(t), \text{ entonces:}$$

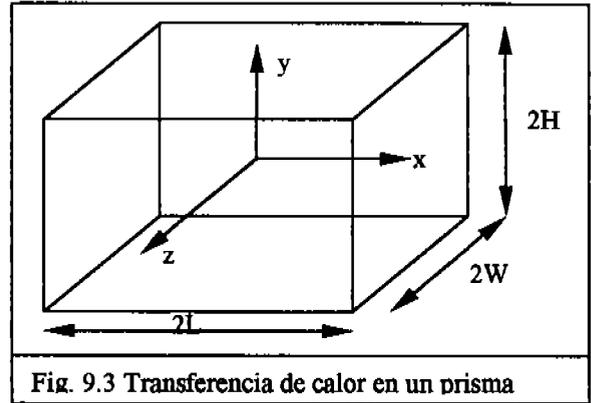


Fig. 9.3 Transferencia de calor en un prisma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} XY\Gamma\Theta = Y\Gamma\Theta \frac{d^2}{dx^2} X$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} XY\Gamma\Theta = X\Gamma\Theta \frac{d^2}{dy^2} Y$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} XY\Gamma\Theta = XY\Theta \frac{d^2}{dz^2} \Gamma$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} XY\Gamma\Theta = XY\Gamma \frac{d}{dt} \Theta$$

Sustituyendo:

$$\alpha \left[Y\Gamma\Theta \frac{d^2 X}{dx^2} + X\Gamma\Theta \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY\Theta \frac{d^2 \Gamma}{dz^2} \right] = XY\Gamma \frac{d}{dt} \Theta$$

siendo α la difusividad térmica del cuerpo, una medida de la rapidez con la que se conduce el calor en el material respecto a la cantidad de energía térmica que se acumula.

dividiendo entre $XY\Gamma\Theta$, obtenemos:

$$\alpha \left[\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{\Gamma} \frac{d^2 \Gamma}{dz^2} \right] = \frac{1}{\Theta} \frac{d}{dt} \Theta$$

Esta ecuación solo puede satisfacerse si cada uno de los términos del lado izquierdo es igual a una constante ($-\lambda_1^2$, $-\lambda_2^2$, $-\lambda_3^2$, respectivamente) y si el

término de la derecha es igual a la suma de las tres constantes $-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$.

Por lo tanto :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda_1^2, \text{ rearreglando:}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} X + \lambda_1^2 X = 0, \text{ factorizando los operadores:}$$

$$(D^2 + \lambda_1^2)X =$$

como chi no es cero:

$$D = \mp \sqrt{-\lambda_1^2} = \pm i\lambda_1$$

entonces:

$$X = c_1 \exp(\lambda_1 x) + c_2 \exp(-\lambda_1 x)$$

Utilizando la fórmula de Euler:

$$X = c_1 \cos(\lambda_1 x) + c_2 \sin(\lambda_1 x)$$

Esta es la solución general para la función chi. Está constituida por una parte simétrica (la función coseno) y una parte antisimétrica (la función seno).

De manera semejante:

$$Y = c_3 \cos(\lambda_2 y) + c_4 \sin(\lambda_2 y)$$

$$\Gamma = c_5 \cos(\lambda_3 z) + c_6 \sin(\lambda_3 z)$$

La ecuación diferencial ordinaria para la dependencia en el tiempo es:

$$d\Theta/dt = -\alpha (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \Theta$$

cuya solución es :

$$\Theta = c_7 \exp[-\alpha (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) t]$$

Por condiciones de simetría, las constantes c_2 , c_4 y c_6 deben ser cero (las partes antisimétricas de X , Y y Γ no contribuyen a la solución).

Como $T = 0$ en $x = \pm L$, X debe ser cero en dicha posición para que, independientemente de cualquier valor que pudiesen tomar Y , Γ y Θ , se cumpla con la condición de frontera isotérmica de temperatura cero, entonces:

$$X = 0 = c_1 \cos(\lambda_1 x)$$

por lo tanto :

$$\lambda_1 = [(2n+1)/2]\pi / L, \text{ con } n = \pm 0, 1, 2, 3 \dots \infty$$

similarmente, en $y = \pm H$, $T = 0$ ($Y = 0$), y :

$$\lambda_2 = [(2m+1)/2]\pi / H, \text{ con } m = \pm 0, 1, 2, 3 \dots \infty$$

además en $z = \pm W$, $T = 0$ ($\Gamma = 0$), y :

$$\lambda_3 = [(2p+1)/2]\pi / W, \text{ con } p = \pm 0, 1, 2, 3 \dots \infty$$

Después de haber obtenido los eigenvalores λ_1 , λ_2 y λ_3 , solo queda introducir la condición inicial:

en $t = 0$, $T = T_{amb}$ para toda x, y, z, t . Sustituyendo:

$$T_{amb} = c_n \cos(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 y) \cos(\lambda_3 z) \exp[-\alpha (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) t]$$

como $t = 0$, la exponencial decreciente toma el valor de 1, consecuentemente:

$$T_{amb} = c_n \cos(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 y) \cos(\lambda_3 z)$$

donde $c_n = c_1 c_3 c_5 c_7$, es la única constante por evaluar. Esto se consigue multiplicando la ecuación anterior, vía producto punto, por una función que permita eliminar las componentes ortogonales a la solución de la ecuación diferencial. Es decir, dentro del universo de todas las funciones cosenoidales nos quedaremos con solo aquellas que contribuyen a la solución.

La ortogonalidad entre dos funciones cumple con la condición de que el producto punto entre ellas es igual a cero (igual que con vectores):

$$f(x) \bullet g(x) = \int f(x) g(x) dx = 0$$

La integración se realiza en todo el intervalo de evaluación de la función $f(x)$.

En el caso que estamos analizando $f(x)$ es la función multidependiente de los cosenos de x, y, z . Entonces, la multiplicación vía producto punto por la función $g(x, y, z)$ que dé la posibilidad de quedarnos solo con las componentes no ortogonales que si contribuyen con la solución, corresponde a :

$$[T_{amb} = c_n \cos(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 y) \cos(\lambda_3 z)] \bullet g(x, y, z)$$

donde:

$$g(x,y,z) = \cos [(2n+1) \pi/2L] \cos[(2m+1) \pi/2] \cos[(2p+1) \pi/2W]$$

quedando:

$$[T_{amb} = c_n \cos (\lambda_1 x) \cos (\lambda_2 y) \cos (\lambda_3 z)] \bullet \{ \cos [(2n+1)/2] \pi / L \} \{ \cos [(2m+1)/2] \pi / H \} \{ \cos [(2p+1)/2] \pi / W \}$$

El producto punto del lado derecho es cero si n es distinta a n', m distinta a m' o p distinta a p' (componentes ortogonales); y es diferente a cero solo si : n = n', m = m' y p = p'. Consecuentemente:

$$T_{amb} \iiint \{ \cos [(2n+1)/2] \pi / L \} \{ \cos [(2m+1)/2] \pi / H \} \{ \cos [(2p+1)/2] \pi / W \} dz dy dx = \\ = c_n \iiint \{ \cos^2 [(2n+1)/2] \pi / L \} \{ \cos^2 [(2m+1)/2] \pi / H \} \{ \cos^2 [(2p+1)/2] \pi / W \} dz dy dx$$

Los límites de integración son de -L a L para la integral en x, -H a H para la de y y -W a W para z.

Las dos integrales múltiples pueden ser resueltas para cada variable por separado, debido a que el argumento corresponde a productos de funciones unidependientes.

Del lado izquierdo de la ecuación tenemos:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{L}\right) dx = \frac{2L}{(2n+1)\pi} \left[\text{sen}\left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{L}\right) \right]_{-L}^L$$

En la siguiente tabla se especifican los valores que toma la función seno evaluada de -L a L:

n	lím. sup (x=L)	lím. inf (x=-L)	[sen] ^L _{-L}
0	sen (π/2) = 1	sen (π/2) = -1	2
1	sen (3π/2) = -1	sen(-3π/2) = 1	-2
2	sen (5π/2) = 1	sen(-5π/2) = -1	2
3	sen (7π/2) = -1	sen(-7π/2) = 1	-2
4	sen (9π/2) = 1	sen(-9π/2) = -1	2

$-2(-1)^n$

De acuerdo a estos valores, la integral anterior da como resultado:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{L}\right) dx = \frac{2L}{(2n+1)\pi} 2(-1)^n$$

similarmente:

$$\int_{-H}^H \cos\left(\frac{2m+1}{2} \pi \frac{y}{H}\right) dy = \frac{2H}{(2m+1)\pi} 2(-1)^m$$

$$\int_{-W}^W \cos\left(\frac{2p+1}{2} \pi \frac{z}{W}\right) dz = \frac{2W}{(2p+1)\pi} 2(-1)^p$$

del lado derecho, las integrales de coseno cuadrado dan :

$$\int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2n+1) \pi \frac{x}{L} \right] dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} \right]_{-L}^L - \frac{L}{2(2n+1)\pi} \left[\text{sen} \left[(2n+1) \pi \frac{x}{L} \right] \right]_{-L}^L = L$$

igualmente:

$$\int_{-H}^H \cos^2\left(\frac{2m+1}{2} \pi \frac{y}{H}\right) dy = H$$

$$\int_{-W}^W \cos^2\left(\frac{2p+1}{2} \pi \frac{z}{W}\right) dz = W$$

Sustituyendo:

$$T_{amb} \left[\frac{4L(-1)^n}{(2n+1)\pi} \right] \left[\frac{4H(-1)^m}{(2m+1)\pi} \right] \left[\frac{4W(-1)^p}{(2p+1)\pi} \right] = c_n LHW$$

Por lo tanto c_n toma el valor:

$$c_n = T_{amb} \frac{64 (-1)^{n+m+p}}{(2n+1)(2m+1)(2p+1) \pi^3}$$

Entonces, la solución de la ecuación de Fourier para el transporte 3D de calor por conducción en coordenadas cartesianas, estado transitorio y fronteras isotérmicas, es:

$$T = \frac{64}{\pi^3} T_{amb} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m+p}}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)} \cos\left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{2m+1}{2} \pi \frac{y}{H}\right) \cos\left(\frac{2p+1}{2} \pi \frac{z}{W}\right) \exp\left[-\left\{\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\pi}{L}\right]^2 + \left[\left(\frac{2m+1}{2}\right) \frac{\pi}{H}\right]^2 + \left[\left(\frac{2p+1}{2}\right) \frac{\pi}{W}\right]^2\right\} \alpha t\right] \quad (9.46)$$

Esta serie convergente es la solución analítica de la ecuación de transferencia de calor por conducción en tres dimensiones con fronteras isotérmicas. La serie de Fourier resultante da la solución exacta cuando se toma un número infinito de términos; para efectos prácticos es suficiente considerar 7 términos en cada índice de corrimiento de las sumatorias.

La solución para procesos de transferencia de calor Bidimensional es fácil de obtener eliminando los términos de z de la ecuación anterior:

$$T = \frac{16}{\pi^2} T_{amb} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)} \cos\left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{2m+1}{2} \pi \frac{y}{H}\right) \exp\left[-\left\{\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\pi}{L}\right]^2 + \left[\left(\frac{2m+1}{2}\right) \frac{\pi}{H}\right]^2\right\} \alpha t\right] \quad (9.47)$$

En tanto que para transporte unidimensional, tendremos:

$$T = \frac{4}{\pi} T_{amb} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{L}\right) \exp\left[-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2} \alpha t\right] \quad (9.48)$$

El proceso de adimensionalización de la ecuación diferencial y de las condiciones de frontera permite obtener una solución más universal. Sin embargo, es fácil construir la solución adimensional a partir de la ecuación (9.46), siendo ella:

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} = \frac{64}{\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m+p}}{(2n+1)(2m+1)(2p+1)} \cos\left(\frac{2n+1}{2} \pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{2m+1}{2} \pi \frac{y}{H}\right) \cos\left(\frac{2p+1}{2} \pi \frac{z}{W}\right) \exp\left[-\left\{\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\pi}{L}\right]^2 + \left[\left(\frac{2m+1}{2}\right) \frac{\pi}{H}\right]^2 + \left[\left(\frac{2p+1}{2}\right) \frac{\pi}{W}\right]^2\right\} \alpha t\right] \quad (9.50)$$

Donde T_1 es la temperatura en las fronteras isotérmicas y T_0 es la temperatura inicial del bloque homogéneo.

En el programa transit1 se grafica la solución analítica para la transferencia unidimensional de calor en estado transitorio simultáneamente con la solución numérica de elementos finitos para determinar la exactitud de dicho método.

9.5 ALGORITMO COMPUTACIONAL PARA LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN ESTADO TRANSITORIO 1-D.

El programa de cómputo TRANSIT1 evalúa la evolución del perfil de temperaturas en el interior de una barra sólida con una envolvente aislante de manera tal que se lleva a cabo un proceso de transferencia unidireccional de calor con condiciones de frontera de temperatura constante en los extremos. La temperatura inicial de la barra es T_0 en una distribución completamente homogénea. En un momento determinado el extremo derecho adquiere una temperatura más alta que eventualmente puede ser igual a la temperatura izquierda. Bajo estas condiciones la distribución de temperaturas en el interior de la barra evoluciona paulatinamente hacia la distribución de equilibrio térmico.

El usuario tiene la posibilidad de especificar los valores de la temperatura inicial y las temperaturas en los extremos, así como la longitud de la barra, el coeficiente de conductividad térmica y la capacidad Calorífica del material.

BLOQUE I. En el primer bloque de instrucciones se dimensionan las variables de interés:

-Una matriz [A] de $(n+1)$ renglones y $(n+1)$ columnas, la cual contiene a los coeficientes que multiplican al vector de temperaturas en el tiempo $t + \Delta t$.

-Una matriz cuadrada [B] de dimensión $(n+1)$ que corresponde a los coeficientes que multiplican al vector de temperaturas en el tiempo actual, antes de introducir las condiciones de frontera

-Una matriz cuadrada [C] de dimensión $(n-1)$ para los coeficientes de $t + \Delta t$ reducida al introducir las condiciones de frontera.

-Un vector [P] en el que se almacenará el producto de la matriz [B] por el vector de temperaturas actuales.

-Un vector [D] de dimensión $(n-2)$ en el que se almacenan los valores resultantes de la reducción del vector [P] al eliminar los términos de temperatura constante.

Un par de matrices cuadradas [L] y [U] que se utilizan en la implementación del método de

descomposición L-U para resolución del sistema de ecuaciones simultáneas lineales.

Un par de vectores [X] y [T] para almacenar las coordenadas y las temperaturas nodales, respectivamente. Un vector [Y] para transferir los valores de la temperatura a la subrutina de graficación.

Un par de vectores [XN], [YN] para guardar las coordenadas gráficas normalizadas útiles en la representación gráfica de los resultados.

CLS

```
'EL SISTEMA DE ECUACIONES A RESOLVER
ES [A][T+]=[B][T]
FO = 3: N = 14
DIM F(N + 1, N + 1), C(N - 2, N - 2), G(N + 1, N + 1),
P(N), D(N), L(N, N), U(N, N), C1(N), X(N)
DIM T(N), X1(N), Y(N), XN(N), YN(N)
```

BLOQUE II. En el segundo bloque de instrucciones se especifica el valor de la temperatura inicial para todos los nodos.

'TEMPERATURA INICIAL

```
TINIC = 0
FOR I = 1 TO N: T(I) = TINIC: NEXT I
```

BLOQUE III. El tercer conjunto de instrucciones es un ciclo FOR-NEXT anidado en el que se construye la matriz [A] especificando el valor de los coeficientes en el diagrama como $(2+Fo)$ y de los términos fuera de la diagonal $(1 - Fo)$ y llevando a cabo el ensamblaje para obtener la matriz global [A] a partir de las matrices de cada elemento, del ensamblaje resultan los términos $(4+2Fo)$ para los términos de la diagonal, excepto en las esquinas donde se conserva el valor de $(2+Fo)$.

'CONDICIONES DE FRONTERA

```
TIZQ = 10: TDER = 20
```

'CONSTRUCCIÓN DE MATRIZ [F]

```
FOR I = 1 TO N
```

```
  FOR J = I - 1 TO I + 1
```

```
    IF J = I THEN F(I, J) = 4 + 2 * FO ELSE
```

```
    F(I, J) = 1 - FO
```

```
  NEXT J
```

```
NEXT I
```

```
F(1, 1) = 2 + FO: F(N, N) = 2 + FO
```

BLOQUE IV: En el cuarto bloque se imprime la matriz [F] mediante un ciclo anidado FOR-NEXT.

```
FOR I = 1 TO N
  FOR J = 1 TO N
    PRINT F(I, J);
  NEXT J
  PRINT
NEXT I
```

BLOQUE V. En el bloque V se lleva a cabo la reducción de la matriz [F] a la matriz, eliminando [F] de los renglones y columnas cuyo término en la diagonal corresponde a una temperatura conocida .

```
'REDUCCIÒN DE MATRIZ [F]-->[C]
COLOR 3
FOR I = 1 TO N - 2
  FOR J = 1 TO N - 2
    C(I, J) = F(I + 1, J + 1)
  PRINT C(I, J);
  NEXT J
  PRINT
NEXT I
COLOR 15
```

BLOQUE VI: Se construye la matriz ensamblada [G] especificando los valores de (2-Fo) para los términos en la diagonal y (1+Fo) para los términos fuera de la diagonal, excepto en los extremos.

```
'CONSTRUCCIÒN DE MATRIZ [G]
FOR I = 1 TO N
  FOR J = I - 1 TO I + 1
    IF I = J THEN G(I, J) = 4 - 2 * FO ELSE
G(I, J) = 1 + FO
  NEXT J
NEXT I
G(1, 1) = 2 - FO; G(N, N) = 2 - FO
```

BLOQUE VII. Se calcula el producto de [G] por [T], en el tiempo actual obteniéndose el vector [P], e imprimiéndose el resultado mediante un ciclo FOR-NEXT anidado.

```
100 ' MULTIPLICACIÒN [G][T]=[P]
FOR I = 1 TO N
  SUMAT = 0
  FOR J = 1 TO N
    SUMAT = SUMAT + G(I, J) * T(J)
  NEXT J
  P(I) = SUMAT
NEXT I
```

BLOQUE VIII.

Se lleva a cabo la reducción del vector [P] al vector [D], tomando en cuenta las condiciones de frontera en el extremo izquierdo y derecho de la barra, especificando entonces el término[D1] como resultante en el despeje de la segunda ecuación en la que está contenida la temperatura de la izquierda, similar es el caso para el término [D(n-2)]

```
'REDUCCIÒN DEL VECTOR [P]-->[D]
D(1) = P(2) - F(2, 1) * TIZQ
D(N - 2) = P(N - 1) - F(N - 1, N) * TDER
FOR I = 2 TO N - 3
  D(I) = P(I + 1)
NEXT I
COLOR 3
```

```
GOSUB 200
GOTO 100
END
```

BLOQUE IX: SUBROUTINA DESCOMPOSICIÒN L-U (MÉTODO DE KOLESKI)

```
200 'DESCOMPOSICIÒN LU
FOR I = 1 TO N - 2
  L(I, 1) = C(I, 1)
NEXT I
FOR J = 1 TO N - 2
  U(1, J) = C(1, J) / L(1, 1)
NEXT J
FOR J = 2 TO N - 2
  FOR I = J TO N - 2
    SUMAC1 = 0
    FOR K = 1 TO J - 1
      SUMAC1 = SUMAC1 + L(I, K) * U(K, J)
    NEXT K
    L(I, J) = C(I, J) - SUMAC1
  NEXT I
  U(J, J) = 1
  FOR I = J + 1 TO N - 2
    SUMAC2 = 0
    FOR K = 1 TO J - 1
      SUMAC2 = SUMAC2 + L(J, K) * U(K, I)
    NEXT K
    U(J, I) = (C(J, I) - SUMAC2) / L(J, J)
  NEXT I
NEXT J
'PRINT "MATRIZ L"
FOR I = 1 TO N - 2
  FOR J = 1 TO N - 2
    NEXT J
NEXT I
```

```

FOR I = 1 TO N - 2
  FOR J = 1 TO N - 2
    NEXT J
NEXT I
C1(I) = D(I) / L(I, 1)
FOR I = 2 TO N - 2
  SUM3 = 0
  FOR K = 1 TO I - 1
    SUM3 = SUM3 + L(I, K) * C1(K)
  NEXT K
  C1(I) = (D(I) - SUM3) / L(I, I)
NEXT I
X(N) = C1(N)
FOR I = N - 1 TO 1 STEP -1
  SUM4 = 0
  FOR K = I + 1 TO N - 2
    SUM4 = SUM4 + U(I, K) * X(K)
  NEXT K
  X(I) = C1(I) - SUM4
NEXT I
COLOR 3
FOR I = 1 TO N - 2
NEXT I
FOR I = 2 TO N - 1
  T(I) = X(I - 1)
NEXT I
T(1) = TIZQ: T(N) = TDER
GOSUB 2000
RETURN

```

BLOQUE X. SUBROUTINA DE GRAFICACIÓN

```

2000:SCREEN 12
FOR I = 1 TO N
  X1(I) = I: Y(I) = T(I)
NEXT I
PASO = PASO + 1
IF PASO = 1 THEN 2010 ELSE 2020
2010:CLS
XMIN = 0: XMAX = N
DELTAX = (XMAX - XMIN) / (N - 1)
XMINGRAF = 0: XMAXGRAF = N
YMINGRAF = 0: YMAXGRAF = 25
SCALEX = 1: SCALEY = 1
PASX = XMAXGRAF + ABS(XMINGRAF)
PASY = YMAXGRAF + ABS(YMINGRAF)
EJEY = 80 + (559 - 80) / PASX * ABS(XMINGRAF)
EJEX = 30 + (400 - 30) / PASY * YMAXGRAF
LINE (0, 0)-(600, 440), 15, BF
LINE (80, 30)-(80, 400), 4
LINE (80, 30)-(559, 30), 4
LINE (80, 400)-(559, 400), 4
LINE (559, 30)-(559, 400), 4

```

```

LINE (EJEY, 30)-(EJEY, 400), 7
LINE (80, EJEX)-(559, EJEX), 7
REM normalizacion de escala
NY = INT(PASY / SCALEY):
NX = INT(PASX / SCALEX)
DIM DIVX(NX), DIVY(NY)
DIVX(1) = 80: DIVY(1) = 400
FOR I = 2 TO NX
  DIVX(I) = DIVX(I - 1) + SCALEX * (559 - 80) / PASX
LINE (DIVX(I), EJEX - 2)-(DIVX(I), EJEX + 2), 9
LINE (DIVX(I), 30)-(DIVX(I), 32), 9
LINE (DIVX(I), 397)-(DIVX(I), 400), 9
NEXT I
FOR J = 2 TO NY
  DIVY(J) = DIVY(J - 1) - SCALEY * (400 - 30) / PASY
LINE (EJEY - 3, DIVY(J))-(EJEY + 3, DIVY(J)), 9
LINE (80, DIVY(J))-(83, DIVY(J)), 9
LINE (556, DIVY(J))-(559, DIVY(J)), 9
NEXT J
2020: FOR I = 1 TO N
  XN(I) = X1(I) * (559 - 80) / PASX + EJEY
  YN(I) = -Y(I) * (400 - 30) / PASY + EJEX
  PSET (XN(I) - 1, YN(I) + 1), 2
  PSET (XN(I) - 1, YN(I)), 2
  PSET (XN(I) - 1, YN(I) - 1), 2
  PSET (XN(I), YN(I) + 1), 2
  PSET (XN(I), YN(I) - 1), 2
  PSET (XN(I) + 1, YN(I) + 1), 2
  PSET (XN(I) + 1, YN(I)), 2
  PSET (XN(I) + 1, YN(I) - 1), 2
NEXT I
FOR J = 1 TO N - 1
  LINE (XN(J), YN(J))-(XN(J + 1), YN(J + 1)), 3
NEXT J
RETURN

```

BLOQUE XI. SUBROUTINA DE SOLUCIÓN ANALÍTICA.

```

400 NOD = (n+1) / 2
LTOT = 2 * NOD - 1: DELTAT = 1: ALFA = 1
FOR I = 1 TO NOD
  SUMAT1 = 0
  FOR J = 0 TO 40
    SUMAT1 = SUMAT1 + ((-1) ^ J) / (2 * J + 1) *
    COS((2 * J + 1) / 2 * 3.1416 * (NOD - I + 1) / (LTOT + 1) * 2)
    * EXP(-(J + 1 / 2) ^ 2 * 3.1416 ^ 2 * ALFA / ((LTOT + 1) / 2 ^ 2)
    * PAS1 * DELTAT)
  NEXT J
  TEMP(I) = TIZQ + 4 * (TINIC - TIZQ) / 3.1416
* SUMAT1
NEXT I
GOSUB 2000
GOTO 100
RETURN

```

9.6. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN ESTADO TRANSITORIO.

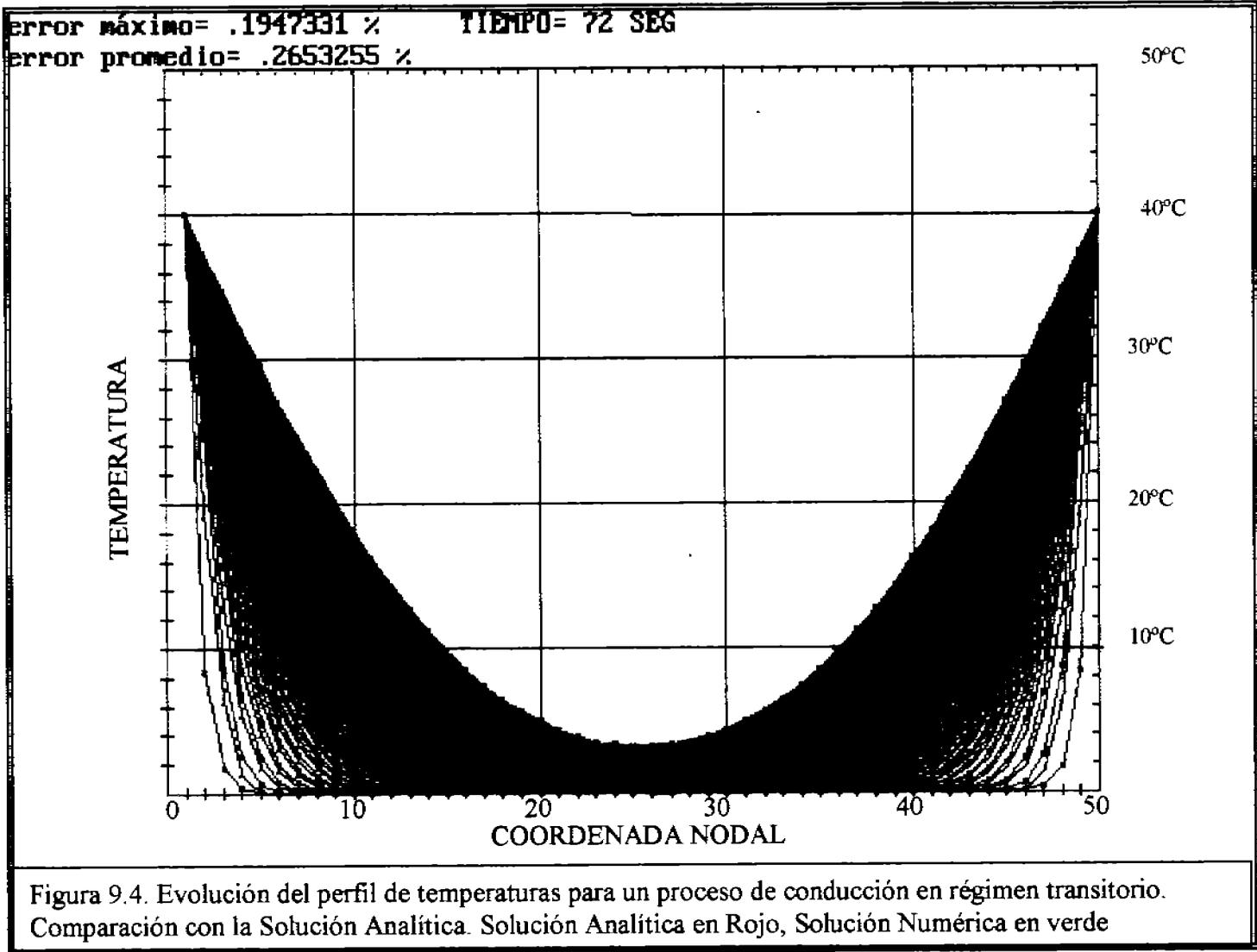
Las figuras 9.4 y 9.5 muestran los resultados gráficos de la simulación computacional de la transferencia de calor por conducción en estado transitorio. En ambas se utiliza un número de Fourier de 3, un total de 50 nodos a lo largo de la barra y una temperatura inicial de la barra igual a 0°C.

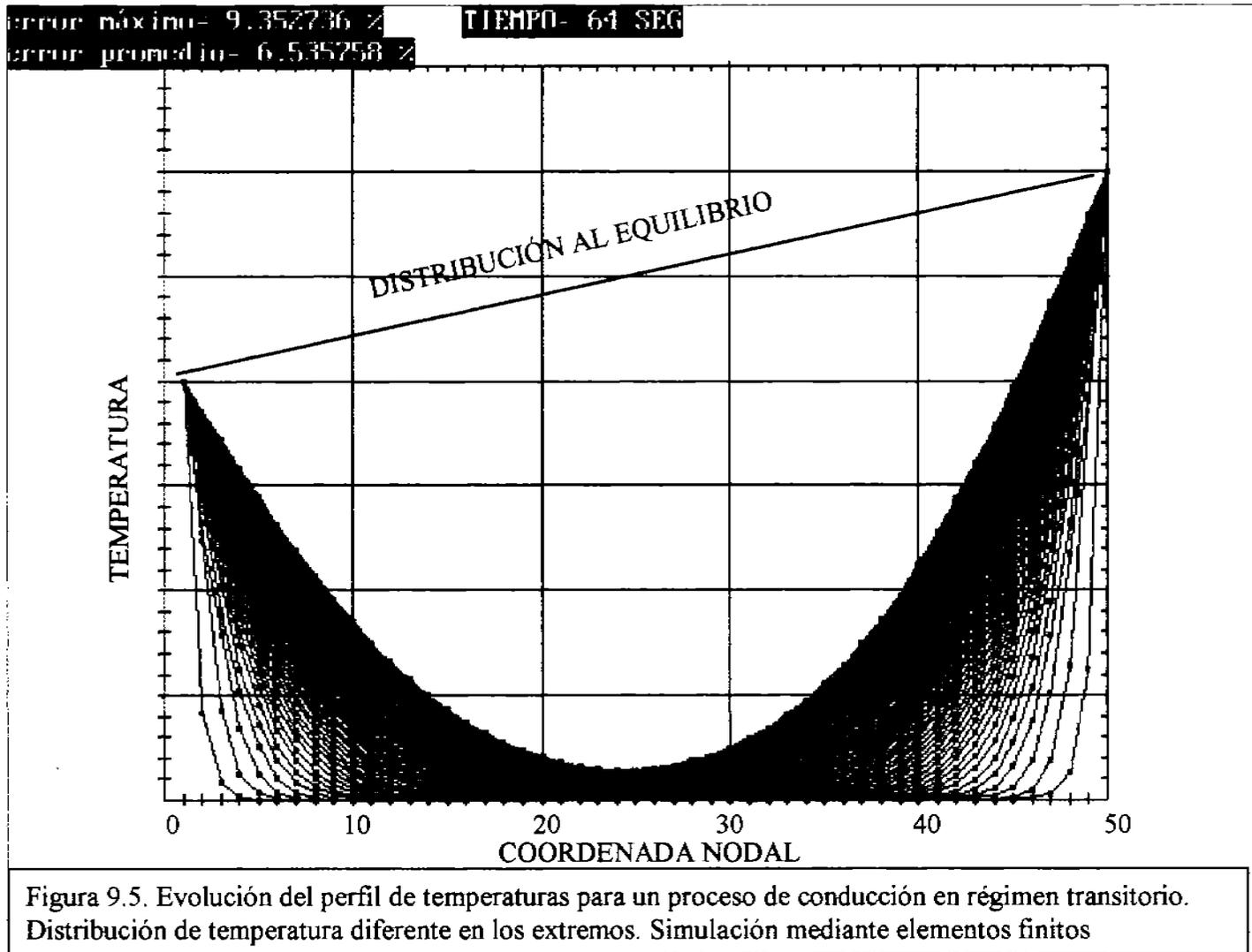
En la figura 9.4 puede observarse el caso en que la temperatura de ambos extremos se eleva repentinamente a 20°C en el tiempo $t=0$, y como evoluciona posteriormente el perfil de temperaturas a lo largo de la barra. En dicha gráfica las líneas en rojo representan la solución analítica correspondiente a la ecuación (9.48) y las líneas en verde la aproximación numérica. El desplegado gráfico aparece en el monitor de la computadora tal y como se muestra en esta gráfica. En la parte superior izquierda se imprime el porcentaje de error máximo actual y el promedio de error acumulado durante el tiempo de ejecución del programa. Las curvas verdes y rojas prácticamente se traslapan debido a que el error es muy pequeño, por ejemplo en el

septuagésimo segundo intervalo de tiempo, el error máximo en ese instante es de 0.1947%, mientras que el error promedio acumulado es de 0.2653%, lo cual quiere decir que al principio la predicción del algoritmo híbrido (elementos finitos – diferencias finitas) exhibe un error más grande, el cual va disminuyendo a medida que avanza el tiempo.

En la figura 9.5 se grafican las predicciones del método de elementos finitos cuando la temperatura en los extremos se eleva repentinamente a valores diferentes, 20°C para el lado izquierdo y 30°C para el derecho, también con condiciones de frontera isotérmicas. También aquí los resultados concuerdan bastante bien con la solución analítica.

Aunque no se presenta aquí, no resulta complicado modificar los programas de los procesos termodinámicos irreversibles de transferencia de masa y de dinámica de fluidos para incluir la condición de no estacionariedad.





Conclusiones.

La formulación clásica de la termodinámica de procesos irreversibles, basada en los postulados de Onsager, junto con los principios de conservación de calor, masa y momentum, permiten llegar a las ecuaciones diferenciales parciales de Navier-Stokes, Fourier y Fick, como modelos matemáticos para los procesos de transferencia de momentum, transporte de calor y difusión molecular, respectivamente.

En este trabajo se ha abordado el problema de la resolución de dichas ecuaciones diferenciales mediante la aplicación de uno de los métodos numéricos más versátiles y de más amplio uso en aplicaciones científicas y de ingeniería, el método de los elementos finitos. A pesar de que dicho método dista de ser reciente, ya que Sir Isaac Newton desarrolló las bases del cálculo variacional en la clásica y semilegendaria resolución del problema de la braquistócrona, en épocas tan lejanas como finales del siglo XVII, sus aplicaciones prácticas en los procesos irreversibles, solo ha sido posible gracias al rápido desarrollo de la tecnología electrónica de los últimos años.

En esta tesis se ha desarrollado el análisis matemático que conduce a la formulación de la solución vía principios variacionales y por métodos de residuos ponderados.

Se ha demostrado la **versatilidad** en el manejo de **geometrías irregulares** y **diferentes condiciones de frontera**. En este aspecto, se ha ejemplificado como un solo programa puede ser utilizado para resolver diferentes problemas, ya que los algoritmos que se han escrito permiten cambiar fácilmente la geometría al modificar las coordenadas de posición de los puntos nodales que conforman la malla de elementos finitos; tales programas reconstruyen automáticamente las ecuaciones locales de cada elemento, las ensamblan, introducen condiciones las condiciones de frontera, y resuelven el sistema de ecuaciones globalizado empleando alguno de los varios métodos como el de inversión matricial, descomposición L-U, eliminación gaussiana o el de gauss Seidel con relajación, mismos que fueron utilizados a lo largo del desarrollo de esta tesis.

También se presentaron las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales para procesos irreversibles en los que la geometría permite llevar a cabo la integración, utilizando métodos de separación de variables, series de Fourier y funciones de Bessel.

Una vez desarrolladas dichas ecuaciones analíticas para los casos algebraicamente integrables, se llevó a cabo la evaluación cuantitativa de la exactitud del método numérico. Luego de probada su exactitud, y después de haberse obtenido resultados altamente confiables, se procedió a aplicar con confianza los algoritmos de cómputo en la solución de casos de difícil integración.

Se utilizaron tanto métodos variacionales en la solución de las ecuaciones de Laplace y Poisson, así como algoritmos de residuos ponderados en aplicaciones prácticas de transferencia de masa, calor y momentum.

Se analizaron procesos irreversibles en estado estacionario en dos y tres dimensiones, en coordenadas cartesianas y cilíndricas. Se formuló un algoritmo híbrido diferencias finitas- elemento finito para resolver problemas de transferencia de calor en régimen transitorio.

Evidentemente pudo haberse extendido este estudio a procesos irreversibles acoplados como el efecto Soret de transferencia de masa debido a gradientes de temperatura o como el efecto Dufour para la transferencia de calor promovida por gradientes de concentración. También es factible aplicar el análisis a procesos con transiciones de fase y transferencia interfacial, así como extender el transporte transitorio unidimensional a dos y tres dimensiones y profundizar en la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales, pero se espera que los ejemplos que se tomaron en cuenta ilustren la versatilidad y exactitud del método de elementos finitos en la caracterización de la termodinámica de procesos irreversibles.

A pesar de que el método data de la década de los 40's, la mayoría de las personas que en México utilizan las técnicas de elementos finitos, lo hacen ejecutando software comercial, muchas veces operándolo como si fuese una caja negra. Sin embargo, al programar, se va conociendo las características del método y resolviendo una a una las dificultades para poder llegar a un programa versátil. La experiencia que se adquiere al manejar los métodos variacionales o de residuos ponderados, es bastante valiosa, y permite resolver problemas cada vez de mayor grado de dificultad, sin depender de las limitaciones de los paquetes comerciales.

Bibliografía.

Capítulo 1:

Basaran, Cemal ; Nie Shihua. An Irreversible Thermodynamics Theory for Damage Mechanics of Solids. *International Journal of Damage Mechanics*. Vol. 13, Núm, 3, 2004; pp 205-223.

De Vos, Alexis. Endoreversible Thermodynamics of Solar Energy Conversión. Oxford University Press. N.Y. 1992.

Hoffmann, K. H.; Burzler, J. Fisher, A.; Shubert, S. Optimal Process Paths for Endoreversible Processes. *Journal of Non Equilibrium Thermodynamics*. Vol. 28, Num. 3 , 2003

García Colín, L. (1983). "Procesos irreversibles". La Física Contemporánea. Las Ciencias en el Siglo XX. Coordinación de la Investigación Científica. Dirección General de Difusión Cultural. Unidad editorial, UNAM, México, 1983.

Kreuzer, H. J. (1981). Nonequilibrium Thermodynamics and its Statistical Foundations. Oxford Science Publications. Oxford University Press. N.Y., 1981.

Lebon, G. (1993). "Extended Thermodynamics". Nonequilibrium Thermodynamics with Applications to Solids. International Center for Mechanical Sciences. Springer-Verlag; Wien-N.Y., 1993, pp. 139-205.

Liu, Y; Hayakawa, K; Murakami, S; An irreversible Thermodynamics Theory for Elastic-plastic damage materials. *European Journal of Mechanics A*. Vol 17, Núm 1, 1998; pp 13-32

Maugin, Gerard A. Thermomechanics of Non Linear Irreversible Behaviours. An Introduction. Series on Nonlinear Sciences. World Scientific Publishing Company. 1999

Müller, Ingo; Ruggeri, Tomasso. Extended Thermodynamics. Springer Verlag. N.Y. 1993

Capítulo 2:

Archer, J.S. (1963). Consistent mass matrix for distributed mass systems. *Proc. A.S.C.E.* 89ST4, pp. 161-178.

Argyris, J.H. (1964). Recent advances in matrix methods of structural analysis. *Progress on Aeronautics Science*. Vol 4, 1964.

Argyris J.H. y Kelsey, S. (1960). Energy theorems and structural analysis. Butterworths, N.Y., 1960.

Ayappa, K.G. y Davis, H.T. (1992). Analysis of microwave heating of materials with temperature dependent properties. *A.I.C.H.E. J.* Vol. 37, No. 3.

Bazeley, G. P.; Cheung, Y.K.; Irons, B.M. y Zienkiewicz, O.C. (1965). Triangular elements in bending-conforming and nonconforming solutions. *Proceedings of Conferences on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Air Force Institute of Technology, Wright Patterson Air Force, Ohio. 1965, pp. 547-576.

Birkhoff, G. ; Schultz, M.H. y Varga, R.S. (1968). Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations. *Numer. Math.* Vol. 11, 1968, pp. 232-256.

Clough, R.W. (1960). The finite element in plane stress analysis. *Proceedings of the 2nd A.S.C.E. Conferences on Electronic Computation*. Pittsburgh, Pa. 1960, pp. 345-378.

Clough, R. W. y Johnson, C. P. (1968). A finite element approximation for the analysis of thin shells. *Int. J. Solids Structs.* Vol. 4, 1968, pp. 43-60.

Connor, J.J. y Brebbia, C.A. (1976). Finite element techniques for fluid flow. Newnes-Butterworths, N.Y. 1976.

Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 49, pp. 1-23.

Doctors, L. J. (1970). An application of the finite element technique for boundary value problems of potential flows. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 2, 243-252.

Gallagher, R. H. (1969). Finite element analysis of plate and shell structures. *Proc. A.S.C.E. Symp. On application of the finite element methods in civil engineering*, pp. 155-205. Van der Bilt University, Nashville, Tennessee. U.S.A., 1969.

- Gallagher R. H.; Padlog, J. y Bijlaard, P.P. (1962)** Stress analysis of heated complex shapes. *J. Am. Rocket Soc.* **32**, pp 700-707.
- Gould, P.L.; Cataloglu, A. y Clark, R.E. (1976)**. Mathematical modelling of human aortic valve leaflets. *Appl. Math. Modelling*, vol. **1**, 1976, pp. 33-36.
- Grafton, P.E. y Strome, D. R. (1963)**. Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method. *J.A.I.A.A.*, **1**, pp 2342-2347.
- Greenstadt, J. (1959)**. On the reduction of continuous problems to discrete form. *IBM J. Res. Develop.* **3**, pp 355-368.
- Hrennikoff, A. (1941)**. Solution of problems in elasticity by the framework method. *J. Appl. Mech.* **A8**, pp. 169-175.
- Jones, R.E. (1964)**. A generalization of the direct stiffness method of structural analysis. *J.A.I.A.A.* **2**, pp. 821-826.
- Koening, H. A. y Davis, N. (1969)**. The damped transient behaviour of finite beams and plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **1**, pp. 151-162.
- Martin, H.C. (1965)**. On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems. *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, pp. 697-716. Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A. F. Base Ohio, 1965.
- McHenry, D. (1943)**. A lattice analogy for the solution of plane stress problems. *J. Inst, Civ. Eng.* **21**, pp 59-82.
- Melosh, R.J. (1963)**. Basis for the derivation of matrices for the direct stiffness method. *J.A.I.A.A.I.* **1**, pp 1631-1637.
- Pike, L. y Guerra, A. (1991)**. Optimización en Ingeniería. Ed. Alfa-Omega. Barcelona-España, 1991, capítulo 10.
- Polya, G. (1952)**. Sur une interprétation de la méthode des différences finies qui peut fournir des bornes supérieures ou inférieures. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **235**, pp 995-997.
- Synge, J.L. (1957)**. The hypercicle method in mathematical physics. Cambridge University Press., 1957.
- Szabo, B.A. y Lee, G.C. (1969)**. Derivation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by Gelerkin's method. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **1**, pp 301-310.
- Turner, M.J.; Clough, R.W.; Martin, H.C. y Topp, L.T. (1956)**. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.* **23**, pp. 805-823.
- Turner, M.J.; Dill, E.H.; Martín, H.C. y Melosh, R.J. (1960)**. Large deflections of structures subjected to heating and external loads. *J. Aeron. Sci.* **27**, pp. 97-107.
- Weinberger, H.F. (1956)**. Upper and lower bounds for eigenvalues by finite difference methods. *Comm. Pure appl. Math.* **9**, pp. 613-623.
- Wilson, E. L. y Nickell, R.E. (1966)**. Application of finite element method to heat conduction analysis. *Nucl. Engng Des.* **4**, pp 1-11.
- Zienkiewicz, O.C. (1977)**. The finite element method. 3rd edition. Mc Graw-Hill, 1977.
- Zienkiewicz, O.C., Cheung, Y.K. (1965)**. Finite elements in the solution of field problems. *The Engineer*, **220**, pp. 507-510.
- Zienkiewicz, O.C.; Irons, B.M. y Nath, B. (1966)**. Natural frequencies of complex, free submerged structures by the finite element method. *Proc. Symp. Vibration in Civil Eng.*, pp 83-93. Butterworths.
- Zienkiewicz, O.C.; Lyness, J; y Owen, D.R.J. (1977)**. Three dimensional magnetic field determination and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **11**, pp 355-375.
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1994)**. El Método de los Elementos Finitos. Vol. 1 y 2. Cimme, McGraw-Hill. Barcelona España, 1994.
- Zienkiewicz, O.C.; Watson, M. King, I.P. (1968)**. A numerical method of visco-elastic stress analysis. *Int. J. Mech. Sci.* **10**, 807-27.
- Zlamal, M. (1968)**. On the finite element method. *Numer. Math.* **12**, pp 395-409.

Capítulo 3:

Akin, C. (1987). Applied Numerical Methods for Personal Computers. The Finite Element Method. McGraw-Hill, Singapore, 1987.

Brunette, D. (1988). Finite Element Analysis from Concepts to Applications. Addison-Wesley, Massachusetts, U.S.A. 1988.

Livesley, R. K. (1988). Elementos Finitos. Introducción para Ingenieros. Limusa, México, 1988.

Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1994). El Método de los Elementos Finitos. Vol. 1 y 2. Cimne, McGraw-Hill. Barcelona España, 1994.

Capítulo 4:

Basaran, Cemal ; Nie Shihua. An Irreversible Thermodynamics Theory for Damage Mechanics of Solids. International Journal of Damage Mechanics. Vol. 13, Núm, 3, 2004; pp 205-223.

Liu, Y; Hayakawa, K; Murakami, S; An irreversible Thermodynamics Theory for Elastic-plastic damage materials. European Journal of Mechanics A. Vol 17, Núm 1, 1998; pp 13-32

Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1994). El Método de los Elementos Finitos. Vol. 1 y 2. Cimne, McGraw-Hill. Barcelona España, 1994.

Capítulo 5:

Akin, C. (1987). Applied Numerical Methods for Personal Computers. The Finite Element Method. McGraw-Hill, Singapore, 1987.

Bird, R.B.; Stewart, W.E. y Lightfoot, E.N. (1960). Fenómenos de Transporte. Editorial Reverté. Barcelona, España, 3ª edición. 1992.

Kotake, S. e Higata, (1992). N. Numerical Simulation of heat Transfer and Fluid Flow on a Personal Computer. John Wiley and Sons. New York, U.S.A. 1992.

Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1994). El Método de los Elementos Finitos. Vol. 1 y 2. Cimne, McGraw-Hill. Barcelona España, 1994.

Capítulo 6:

Akin, C. (1987). Applied Numerical Methods for Personal Computers. The Finite Element Method. McGraw-Hill, Singapore, 1987.

Capítulo 7:

Roussar, K.I.; Michka I. y Kimula, V. (1996) Electrochemical Engineering. Edit. Elsevier. Czechoslovakia, 1986.

Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1994). El Método de los Elementos Finitos. Vol. 1 y 2. Cimne, McGraw-Hill. Barcelona España, 1994.

Bird, R.B.; Stewart, W.E. y Lightfoot, E.N. (1960). Fenómenos de Transporte. Editorial Reverté. Barcelona, España, 3ª edición. 1992.

Capítulo 8:

Bird, R.B.; Stewart, W.E. y Lightfoot, E.N. (1960). Fenómenos de Transporte. Editorial Reverté. Barcelona, España, 3ª edición. 1992.

Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1994). El Método de los Elementos Finitos. Vol. 1 y 2. Cimne, McGraw-Hill. Barcelona España, 1994.

Capítulo 9:

Akin, C. (1987). Applied Numerical Methods for Personal Computers. The Finite Element Method. McGraw-Hill, Singapore, 1987.

Bird, R.B.; Stewart, W.E. y Lightfoot, E.N. (1960). Fenómenos de Transporte. Editorial Reverté. Barcelona, España, 3ª edición. 1992.

Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L. (1994). El Método de los Elementos Finitos. Vol. 1 y 2. Cimne, McGraw-Hill. Barcelona España, 1994.