UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PSEUDOARCO Y EL CÍRCULO DE PSEUDOARCOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A :

MAT. LEOBARDO FERNÁNDEZ ROMÁN

DIRECTORA DE TESIS: DRA. ISABEL PUGA ESPINOSA

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE, 2006

El Pseudoarco y el Círculo de Pseudoarcos

Mat. Leobardo Fernández Román

septiembre de 2006

A mi familia y
a mis amigos.

Índice general

Introducción

Una de las preguntas en las que más se ha interesado la Teoría de Continuos en las últimas décadas es la de clasificar a todos los continuos homogéneos planos. Se conocen tres de ellos con más de un punto: la circunferencia, el pseudoarco y el círculo de pseudoarcos. Si bien es claro que las circunferencias tienen las propiedades mencionadas, los dos últimos no solamente son difíciles de visualizar, su construcción, por medio de cadenas, es complicada y es difícil demostrar sus propiedades. La finalidad de este trabajo es presentar construcciones de estos dos ejemplos y demostrar que son, en efecto, continuos homogéneos planos. Presentamos también tres caracterizaciones del pseudoarco.

Este trabajo está basado principalmente en los artículos de Bing [1], [2], [3], Bing y Jones [6] y Wayne Lewis [10].

Un repaso de los resultados necesarios para el entendimiento de este trabajo lo presentamos en el Capítulo I. Incluimos conjuntos parcialmente ordenados, espacios métricos, descomposiciones, continuos y cadenas. De los conjuntos parcialmente ordenados lo que más nos interesa es el Lema de Zorn, el cual enunciamos sin demostración. De los espacios métricos nos interesan algunas propiedades como lo son el diámetro y el número de Lebesgue. En la parte de descomposiciones definimos lo que son descomposiciones semicontinuas superior e inferiormente, las cuales utilizaremos en la construcción del círculo de pseudoarcos. En la parte de continuos damos las definiciones que utilizaremos con frecuencia en capítulos posteriores. Por último, en la sección de cadenas definimos lo que son las cadenas y también presentamos el concepto de lo que es que una cadena que se tuerza dentro de otra cadena, concepto fundamental a lo largo de este trabajo.

En el Capítulo II estudiamos el pseudoarco y tres de sus caracterizaciones. En la primera sección de este capítulo vemos la construcción del pseudoarco. En la segunda sección estudiamos las propiedades de ser hereditariamente indescomponible y homogéneo. Finalmente en la tercera sección, vemos tres de sus caracterizaciones algunas de las cuales son usadas como definiciones equivalentes del pseudoarco.

En el Capítulo III estudiamos el círculo de pseudoarcos. En la primera sección vemos su construcción. En la segunda sección probamos los teoremas que nos llevan finalmente a probar que el círculo de pseudoarcos es un continuo homogéneo del plano.

Capítulo 1

Preliminares

Algunos de los conceptos básicos que usaremos a lo largo de este trabajo son presentados en este capítulo, conjuntos parcialmente ordenados, espacios métricos, descomposiciones, continuos y cadenas.

1.1. Conjuntos parcialmente ordenados

En esta sección discutiremos un poco de conjuntos, conjuntos parcialmente ordenados, conjuntos ordenados y el Lema de Zorn. Esto nos servirá para probar algunas convergencias de conjuntos que necesitaremos más adelante.

Una *relación* R en un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$. Usualmente denotamos $a \sim b$ para decir que la pareja (a, b) está en R. Si R es una relación en un conjunto A, se dice que R es *reflexiva* si $a \sim a$ para todo $a \in A$. R es *simétrica* si $a \sim b$ implica que $b \sim a$ para todo $a, b \in A$. R es *antisimétrica* si $a \sim b$ y $b \sim a$ implica $a = b$. R es *transitiva* si $a \sim b$ y $b \sim c$ implica $a \sim c$. R es una relación de *equivalencia* si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Una relación R en un conjunto A es una relación de *orden parcial* si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Usualmente denotamos $\leq$ a una relación de orden parcial y denotamos $(A, \leq)$ al conjunto A en el cual está definida una relación de orden $\leq$. Se dice que un conjunto A está *totalmente ordenado* si cualesquiera dos elementos de A son comparables, es decir, si para cualesquiera a y b en A, $a \leq b$ o $b \leq a$.

Un elemento a_0 en un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ es un *elemento mínimo* de A, si $a_0 \leq a$ para cada $a \in A$. Un elemento a_1 en un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ es un *elemento máximo* de A, si $a \leq a_1$ para cada $a \in A$. Se dice que un elemento a_0 en un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ es un *elemento minimal* de A si para cada $a \in A$ que cumple que $a \leq a_0$, se tiene que $a = a_0$. Un elemento a_1 en un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ es un *elemento maximal* de A si para cada $a \in A$ que satisface que $a_1 \leq a$, se tiene que $a_1 = a$.

Un subconjunto C de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ es una *cadena* conjuntista si $(C, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Dados un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ y un subconjunto no vacío C de A, diremos que un elemento $a \in A$ es una *cota superior* (*inferior*) de C si $a \geq c$ ($a \leq c$) para cada $c \in C$.

1.1.1 Lema (Zorn). *Si cada cadena C en un conjunto parcialmente ordenado no vacío $(A, \leq)$ tiene una cota superior, entonces A tiene un elemento maximal.*

Una demostración del Lema 1.1.1 se puede encontrar en el Teorema 1.13, pag. 142 de [8].

1.2. Espacios métricos compactos

En esta sección daremos las definiciones de espacio métrico y espacio compacto. También veremos algunos resultados relacionados a dichos espacios.

1.2.1 Definición. *Sea X un conjunto. Una* métrica *en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in X$ se satisfacen las siguientes tres propiedades:*

a) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$;

b) $d(x, y) = d(y, x)$;

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

1.2.2 Definición. *Un conjunto X en el cual se puede definir una métrica se llama* espacio métrico. *Denotamos a un espacio métrico X con métrica d como (X, d).*

1.2.3 Definición. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* A *un subconjunto no vacío de* X*. Definimos el* diámetro *de* A *como* $\text{diám}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$.

1.2.4 Definición. *Si* $\mathcal{U}$ *es una familia de conjuntos en un espacio métrico, definimos la* malla de $\mathcal{U}$ *como:*

$$\text{malla}(\mathcal{U}) = \sup\{\text{diám}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

1.2.5 Definición. *Una familia* $\mathcal{U}$ *de conjuntos es una* cubierta *de un espacio* X *si* X *es un subconjunto de* $\bigcup\{U \mid U \in \mathcal{U}\}$*, es decir, si para cada* $x \in X$*,* $x \in U$ *para algún* $U \in \mathcal{U}$*. Se dice que la cubierta es* abierta *si cada elemento de* $\mathcal{U}$ *es un conjunto abierto. Si* $\mathcal{U}$ *es una cubierta de* X*, una* subcubierta *de* $\mathcal{U}$ *es una subfamilia* $\mathcal{U}'$ *de* $\mathcal{U}$ *que también es una cubierta de* X*.*

1.2.6 Definición. *Un espacio* X *es* compacto *si cada cubierta abierta de* X *tiene una subcubierta finita.*

1.2.7 Definición. *Sean* X *un espacio métrico y* $\mathcal{U}$ *una cubierta abierta de* X*. Decimos que* $\lambda > 0$ *es un* número de Lebesgue para la cubierta $\mathcal{U}$ *si para cada subconjunto* A *de* X *con* $\text{diám}(A) < \lambda$*, se tiene que existe* $U \in \mathcal{U}$ *tal que* $A \subseteq U$*.*

Un resultado muy importante para los espacios métricos compactos nos lo da el siguiente teorema.

1.2.8 Teorema. *Sean* (X, d) *un espacio métrico compacto y* $\mathcal{U}$ *una cubierta abierta de* X*, entonces existe un número de Lebesgue para* $\mathcal{U}$*.*

Una demostración del Teorema 1.2.8 se puede encontrar en [11], Teorema 1.6.6, Pag. 44.

1.3. Descomposiciones

Daremos las definiciones de descomposición, descomposiciones semicontinua superiormente, semicontinua inferiormente y continua.

1.3.1 Definición. *Una* descomposición *de un espacio* X *es una colección de conjuntos mutuamente ajenos no vacíos cuya unión es* X*.*

1.3.2 Definición. *Sea $\mathcal{G}$ una descomposición de un espacio métrico X. Definimos el* espacio cociente *$X/\mathcal{G}$ como el conjunto cuyos elementos son los elementos de $\mathcal{G}$. La función $q : X \to X/\mathcal{G}$, que a cada punto de X lo manda al único elemento G de $\mathcal{G}$ tal que $x \in G$, se le llama* función cociente.

1.3.3 Definición. *Sean X un espacio métrico, $\mathcal{G}$ una descomposición de X y $q : X \to X/\mathcal{G}$ la función cociente. La topología $\mathcal{U} = \{U \subseteq X/\mathcal{G} \mid q^{-1}(U)$ es abierto en $X\}$ se llama la* topología cociente *para $X/\mathcal{G}$.*

1.3.4 Definición. *Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{G}$ es* semicontinua superiormente *si para cada $G \in \mathcal{G}$ y para cada subconjunto abierto U de X tal que $G \subseteq U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $G \subseteq V \subseteq U$ y tal que si $G' \in \mathcal{G}$ y $G' \cap V \neq \emptyset$, entonces $G' \subseteq U$.*

1.3.5 Definición. *Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{G}$ es* semicontinua inferiormente *si para cada $G \in \mathcal{G}$, cualesquiera dos puntos x y y de G y cualquier subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $y \in V$ y tal que si $G' \in \mathcal{G}$ y $G' \cap V \neq \emptyset$, entonces $G' \cap U \neq \emptyset$.*

1.3.6 Definición. *Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{G}$ es* continua *si $\mathcal{G}$ es semicontinua superior e inferiormente.*

1.3.7 Definición. *Si $\mathcal{G}$ es una descomposición de un espacio X, entonces cualquier subconjunto de X que es una unión de elementos de $\mathcal{G}$ se dice que es* $\mathcal{G}$-saturado.

1.4. Continuos

En esta sección presentaremos las definiciones de los conceptos principales que utilizaremos a lo largo de esta tesis. Además, siempre supondremos que estamos trabajando en un continuo fijo M.

1.4.1 Definición. *Un* continuo *M es un espacio métrico, compacto y conexo.*

1.4.2 Definición. *Se dice que un continuo es* descomponible *si se puede ver como la unión de dos subcontinuos propios no degenerados.*

Por ejemplo, una circunferencia es un continuo descomponible.

1.4.3 Definición. *Se dice que un continuo es* indescomponible *si no se puede ver como la unión de dos subcontinuos propios no degenerados.*

Un ejemplo de un continuo indescomponible es el continuo de Knaster.

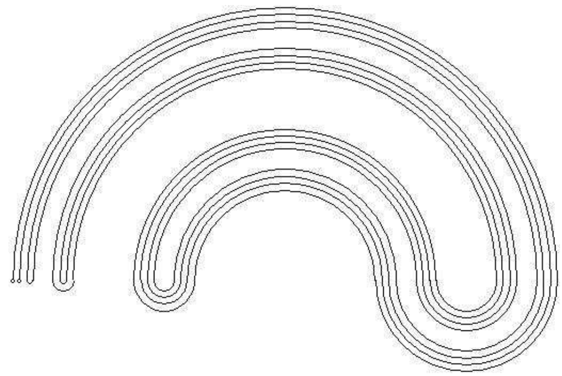

Figura 1.1: El continuo de Knaster

1.4.4 Definición. *Se dice que un continuo es* hereditariamente indescomponible *si cada uno de sus subcontinuos es indescomponible.*

1.4.5 Definición. *Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos X y Y se dice que es un* homeomorfismo *si es una función biyectiva continua tal que $f^{-1} : Y \to X$ también es continua.*

1.4.6 Definición. *Se dice que un espacio topológico X es* homogéneo *si para cualquier par de puntos $p_1, p_2 \in X$, hay un homeomorfismo $\varphi : X \to X$ tal que $\varphi(p_1) = p_2$.*

Un ejemplo de un continuo homogéneo es una circunferencia. Un ejemplo de un continuo que no es homogéneo es el intervalo $[0, 1]$.

1.4.7 Definición. *Sean M un continuo no degenerado y p un punto de M. El conjunto $k(p) = \{x \in M \mid$ hay un subcontinuo propio A de M tal que $x \in A$ y $p \in A\}$ se llama la* composante *de p en M.*

1.4.8 Teorema. *Sea M un continuo no degenerado y p un punto de M. Si $k(p)$ es la composante de p en M, entonces $k(p)$ es densa en M.*

1.4.9 Teorema. *Si M es un continuo indescomponible no degenerado, entonces el número de composantes de M es no numerable.*

Para una prueba del teorema anterior, ver Teorema 11.15 de [14].

1.5. Cadenas

Daremos algunas definiciones y veremos alguas propiedades de cadenas y continuos encadenables.

1.5.1 Definición. *Una* cadena *es una colección* $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ *de conjuntos abiertos* $D_1, D_2, ..., D_n$ *tales que* D_i *intersecta a* D_j *si y sólo si* $| i - j | \leq 1$*. El elemento* D_i *es el* i-ésimo eslabón *de la cadena* $\mathcal{D}$*. A los eslabones* D_1 *y* D_n *se les llama* eslabones finales*. Eslabones que no son eslabones finales se les llama* eslabones interiores*. Dos eslabones son* adyacentes *si se intersectan. Si* $r < t < s$ *entonces se dice que el eslabón* D_t *está entre los eslabones* D_r *y* D_s*. Si* p *y* q *son puntos que pertenecen a* D_1 *y a* D_n *respectivamente pero a ningún otro eslabón de la cadena, entonces se dice que* $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ *es una* cadena de p a q*. Por último,* $\mathcal{D}^*$ *denota la unión de los eslabones de la cadena* $\mathcal{D}$*.*

Para nuestro caso vamos a considerar las cadenas como subconjuntos del plano.

1.5.2 Definición. *Se dice que una cadena* $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ cubre *a un continuo* M *si* $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_i$*. Se dice que la cadena* $\mathcal{D}$ cubre propiamente *a* M *si* $M \cap D_j \neq \emptyset$ *para cada* $j \in \{1, 2, ..., n\}$*. Además, se dice que la cadena* $\mathcal{D}$ cubre irreduciblemente *a* M *si* $\mathcal{D} - \{D_j\}$ *ya no cubre a* M *para cualquier* $j \in \{1, 2, ..., n\}$*.*

1.5.3 Definición. *Sean* $\epsilon > 0$*,* M *un continuo y* $\mathcal{D}$ *una cadena que cubre a* M*. Si* $\text{malla}(\mathcal{D}) \leq \epsilon$*, entonces se dice que* $\mathcal{D}$ *es una* ϵ-cadena.

1.5.4 Definición. *Se dice que un continuo* M *es* encadenable *si para cada* $\epsilon > 0$*, existe una* ϵ*-cadena que cubre a* M*. Si* p *y* q *son puntos distintos de* M *y para toda* $\epsilon > 0$ *existe una* ϵ*-cadena* $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ *que cubre a* M *tal que* $p \in U_1$ *y* $q \in U_n$*, entonces se dice que* M *es* encadenable de p a q.

1.5.5 Definición. *Sean* M *un continuo y* $p \in M$*. Se dice que* p *es un* punto final *de* M *si para cada* $\epsilon > 0$*, hay una* ϵ*-cadena que cubre a* M *tal que sólamente el primer eslabón de esta* ϵ*-cadena contiene a* p*.*

1.5.6 Definición. *Si* $\mathcal{E}$ *es una cadena para la cual cada uno de sus eslabones es un eslabón de la cadena* $\mathcal{D}$ *entonces se dice que la cadena* $\mathcal{E}$ *es una* subcadena *de la cadena* $\mathcal{D}$*. Si los eslabones finales de la cadena* $\mathcal{E}$ *son el* i*-ésimo y el* j*-ésimo eslabones de* $\mathcal{D}$*, con* $i < j$*, denotaremos a* $\mathcal{E}$ *como* $\mathcal{D}(i, j)$*. Además,* $\mathcal{D}^*(i, j)$ *denota la unión de los eslabones de la subcadena* $\mathcal{D}(i, j)$*.*

1.5.7 Definición. *Se dice que la* cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ se tuerce en la cadena $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$ *si* $\mathcal{E}$ *está contenida en* $\mathcal{D}$ *y* $\mathcal{E}$ *es tal que si* $\mathcal{E}(i, j)$ *es una de sus subcadenas,* E_i *y* E_j *intersectan a* D_h *y a* D_k*, respectivamente, y* $\mid h - k \mid > 2$*, entonces* $\mathcal{E}(i, j)$ *es la unión de tres subcadenas* $\mathcal{E}(i, r)$*,* $\mathcal{E}(r, s)$ *y* $\mathcal{E}(s, j)$ *tales que* $(s - r)(j - i) > 0$ *y* E_r *y* E_s *son subconjuntos de los eslabones de* $\mathcal{D}(h, k)$ *adyacentes a* D_k *y a* D_h*, respectivamente.*

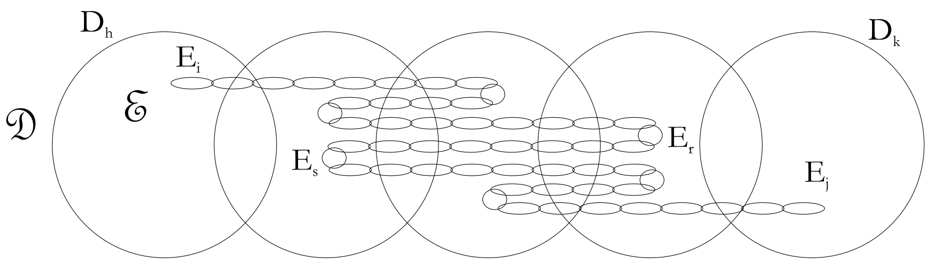

Figura 1.2: La cadena $\mathcal{E}$ se tuerce en la cadena $\mathcal{D}$.

1.5.8 Definición. *Se dice que la cadena* $\mathcal{E}$ *es una* consolidación *de la cadena* $\mathcal{D}$ *si cada eslabón de* $\mathcal{E}$ *es la unión de una subcolección de eslabones de* $\mathcal{D}$ *y* $\mathcal{D}$ *está contenida en* $\mathcal{E}$*.*

1.5.9 Definición. *Sean* $\mathcal{D}$ *y* $\mathcal{E}$ *dos cadenas tales que* $\mathcal{D}$ *esté contenida en* $\mathcal{E}$*. Si* (x_1, y_1)*,* (x_2, y_2)*,...,*(x_n, y_n) *es una colección de pares ordenados de enteros positivos, se dice que* $\mathcal{D}$ sigue el patrón (x_1, y_1), (x_2, y_2),...,(x_n, y_n) en $\mathcal{E}$ *si el* x_i*-ésimo eslabón de* $\mathcal{D}$ *es un subconjunto del* y_i*-ésimo eslabón de* $\mathcal{E}$*.*

1.5.10 Definición. *Decimos que la cadena* $\mathcal{E}$ refina *a la cadena* $\mathcal{D}$*, si cada eslabón de* $\mathcal{E}$ *está contenido en un eslabón de* $\mathcal{D}$*. En este caso, decimos que* $\mathcal{E}$ *es un refinamiento de* $\mathcal{D}$*.*

1.5.11 Definición. *Decimos que la cadena* $\mathcal{E}$ refina fuertemente *a la cadena* $\mathcal{D}$*, si la cerradura de cada eslabón de* $\mathcal{E}$ *está contenida en un eslabón de* $\mathcal{D}$*.*

1.5.12 Teorema. *Si* $\mathcal{D}$*,* $\mathcal{E}$ *y* $\mathcal{F}$ *son cadenas tales que* $\mathcal{D}$ *es una consolidación de* $\mathcal{E}$ *y* $\mathcal{F}$ *se tuerce en* $\mathcal{E}$*, entonces* $\mathcal{F}$ *se tuerce en* $\mathcal{D}$*.*

Demostración. Supongamos que F_h y F_k son eslabones de $\mathcal{F}$ que intersectan a los eslabones D_r y D_s de $\mathcal{D}$, respectivamente, con $\mid r - s \mid > 2$, y ningún eslabón interior de $\mathcal{F}(h, k)$ intersecta ni a D_r ni a D_s. Entonces los eslabones de $\mathcal{F}(h,k)$ sólo intersectan a los eslabones de $\mathcal{D}$ que pertenecen a $\mathcal{D}(r,s)$. Sean E_m y E_n eslabones de $\mathcal{E}$ contenidos en D_r y D_s tales que E_m y E_n intersecten F_h y F_k, respectivamente.

Como cada eslabón de $\mathcal{E}(m,n)$ intersecta a un eslabón de $\mathcal{F}(h,k)$ y cada eslabón interior de $\mathcal{F}(h,k)$ es un subconjunto de un eslabón interior de $\mathcal{D}(r,s)$, entonces $\mathcal{E}(m,n)$ está contenida en $\mathcal{D}(r,s)$. Como el eslabón de $\mathcal{E}(m,n)$ adyacente a E_m intersecta a un eslabón interior de $\mathcal{F}(h,k)$, éste no está contenido en D_r. Por lo tanto, el eslabón de $\mathcal{E}(m,n)$, adyacente a E_m, está en el eslabón de $\mathcal{D}(r,s)$ adyacente a D_r. También, el eslabón de $\mathcal{E}(m,n)$, adyacente a E_n, está en el eslabón de $\mathcal{D}(r,s)$ adyacente a D_s.

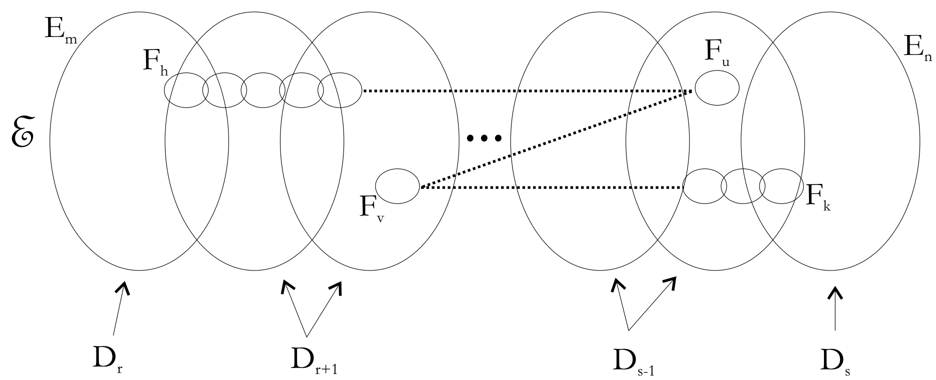

Figura 1.3: La cadena $\mathcal{F}$ se tuerce en la cadena $\mathcal{D}$.

Como $\mathcal{F}$ se tuerce en $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}(h,k)$ es la unión de tres subcadenas $\mathcal{F}(h,u)$, $\mathcal{F}(u,v)$ y $\mathcal{F}(v,k)$ tales que $(k-h)(v-u) > 0$ y F_u y F_v están en los eslabones de $\mathcal{D}(r,s)$ adyacentes a D_s y D_r, respectivamente. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ se tuerce en $\mathcal{D}$.

$\square$

1.5.13 Teorema. *Si $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son cadenas tales que $\mathcal{E}$ contiene a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{E}$ se tuerce en $\mathcal{D}$, entonces $\mathcal{F}$ se tuerce en $\mathcal{D}$.*

Demostración. Supongamos que F_h y F_k son eslabones de $\mathcal{F}$ que intersectan a los eslabones D_r y D_s de $\mathcal{D}$, respectivamente, y que $\mid r-s \mid > 2$. Sean E_m y E_n elementos de $\mathcal{E}$ que contienen a los eslabones F_h y F_k, respectivamente. Como $\mathcal{E}$ se tuerce en $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}(m,n)$ es la unión de tres subcadenas $\mathcal{E}(m,u)$,

$\mathcal{E}(u,v)$ y $\mathcal{E}(v,n)$ tales que $(n-m)(v-u)>0$ y E_u y E_v están en eslabones de $\mathcal{D}(r,s)$ adyacentes a D_s y a D_r, respectivamente.

Como E_u está entre E_m y E_n en $\mathcal{E}(m,n)$, hay un eslabón, F_x, de $\mathcal{F}(h,k)$ en E_u. Además, hay un eslabón F_y de $\mathcal{F}(x,k)$ en E_v. Entonces $\mathcal{F}(h,k)$ es la unión de tres cadenas $\mathcal{F}(h,x)$, $\mathcal{F}(x,y)$ y $\mathcal{F}(y,k)$ tales que $(k-h)(y-x)>0$ y F_x y F_y están en eslabones de $\mathcal{D}(r,s)$ adyacentes a D_s y a D_r, respectivamente. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ se tuerce en $\mathcal{D}$.

□

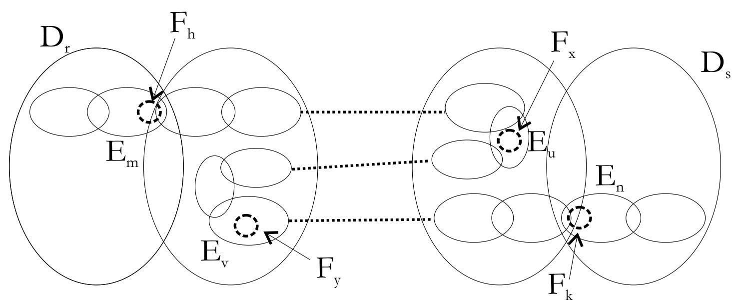

Figura 1.4: La cadena $\mathcal{F}$ se tuerce en la cadena $\mathcal{D}$.

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del Teorema 1.5.13.

1.5.14 Corolario. *Si $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son cadenas tales que $\mathcal{E}$ se tuerce en $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ es una consolidación de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ se tuerce en $\mathcal{D}$.*

1.5.15 Teorema. *Si la cadena $\mathcal{D}$ se tuerce en la cadena $\mathcal{E}=\{E_1,E_2,...,E_m\}$ y D_j es un eslabón particular de $\mathcal{D}$, entonces hay una cadena $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}$ es una consolidación de $\mathcal{D}$, D_j sólo está contenido en el primer eslabón de $\mathcal{F}$, cada eslabón de $\mathcal{F}$ es un subconjunto de la unión de dos eslabones adyacentes de $\mathcal{E}$ y cualquier eslabón de $\mathcal{F}$ que contiene a un eslabón final de $\mathcal{D}$ que intersecte a E_1 o a E_m es un subconjunto de $E_1\cup E_2$ o de $E_{m-1}\cup E_m$.*

Demostración. Probaremos el teorema por inducción sobre m. Primero vemos que el teorema vale para $m\in\{1,2,3,4\}$. En estos casos hacemos que uno de los eslabones de $\mathcal{F}$ sea la unión de eslabones de $\mathcal{D}$ contenidos en la unión de los primeros dos eslabones de $\mathcal{E}$, y el otro eslabón (si lo hay) de $\mathcal{F}$ sea la unión de los otros eslabones de $\mathcal{D}$.

Si D_j es un subconjunto de $E_1 \cup E_2$ se sigue fácilmente el teorema sin tener en cuenta el valor de m ya que $\mathcal{F}$ puede ser definida de la siguiente manera: su primer eslabón es la unión de los eslabones de $\mathcal{D}$ contenidos en $E_1 \cup E_2$, su segundo eslabón es la unión de eslabones de $\mathcal{D}$ contenidos en E_3 pero no en E_2, su tercer eslabón es la unión de eslabones contenidos en E_4 y no en E_3, y así sucesivamente hasta que su último eslabón es la unión de eslabones de $\mathcal{D}$ contenidos en $E_{m-1} \cup E_m$. De igual manera se sigue el teorema si el eslabón D_j es un subconjunto de $E_{m-1} \cup E_m$.

Supongamos que el teorema vale para $m < r$ y entonces hay que probar que el teorema vale para r.

Caso especial. Primero consideremos el caso en que ningún eslabón interior de $\mathcal{D}$ intersecta ni a E_1 ni a E_r. Por conveniencia, supongamos que los eslabones finales, D_1 y D_n, de $\mathcal{D}$ intersectan a E_1 y a E_r, respectivamente. Como $\mathcal{D}$ se tuerce en $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$ es la unión de tres subcadenas $\mathcal{D}(1,h)$, $\mathcal{D}(h,k)$ y $\mathcal{D}(k,n)$ tales que $1 < h < k < n$, D_h es un subconjunto de E_{r-1} y D_k es un subconjunto de E_2.

Supongamos primero que D_j es un eslabón de $\mathcal{D}(1,h)$. Como $\mathcal{E}(1,r-1)$ contiene a $\mathcal{D}(1,h)$ y tiene menos de r eslabones, entonces, por hipótesis de inducción, hay una cadena $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{H}$ es una consolidación de $\mathcal{D}(1,h)$, sólo el primer eslabón de $\mathcal{H}$ contiene a D_j, cada eslabón de $\mathcal{H}$ es un subconjunto de la unión de dos eslabones adyacentes de $\mathcal{E}(1,r-1)$, cualquier eslabón de $\mathcal{H}$ que contiene a D_1 es un subconjunto de $E_1 \cup E_2$ o de $E_{r-2} \cup E_{r-1}$, y cualquier eslabón de $\mathcal{H}$ que contiene a D_h es un subconjunto de $E_1 \cup E_2$ o de $E_{r-2} \cup E_{r-1}$.

Sea H_u el primer eslabón de $\mathcal{H}$ que contiene a D_h. Como $r > 4$, D_h no es un subconjunto de $E_1 \cup E_2$. Entonces H_u es un subconjunto de $E_{r-2} \cup E_{r-1}$. La cadena $\mathcal{F}$ se elige como sigue: $\mathcal{H}(1,u-1)$ es una subcadena de $\mathcal{F}$; $\mathcal{D}(k+1,n)$ es una subcadena de $\mathcal{F}$, si $\mathcal{D}'$ consiste de los eslabones de $\mathcal{D}$ que no están contenidos ni en $\mathcal{H}(1,u-1)$ ni en $\mathcal{D}(k+1,n)$, la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en $E_1 \cup E_2$ es un eslabón de $\mathcal{F}$, la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en E_3 pero no en E_2 es otro eslabón de $\mathcal{F}$, la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en E_4 pero no en E_3 es otro eslabón de $\mathcal{F}$,..., y la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en $E_{r-2} \cup E_{r-1}$ es otro eslabón de $\mathcal{F}$. La cadena $\mathcal{F}$ es la cadena que buscamos.

De igual forma, si D_j es un eslabón de $\mathcal{D}(h,k)$, o si D_j es un eslabón de $\mathcal{D}(k,n)$ se construye la cadena $\mathcal{F}$ que satisface el teorema.

Caso general. La idea en este caso es poder llevar las cadenas a alguno de los casos anteriores.

Sea $\mathcal{D}(h,k)$ una subcadena de $\mathcal{D}$, maximal con respecto a que $\mathcal{D}(h,k)$

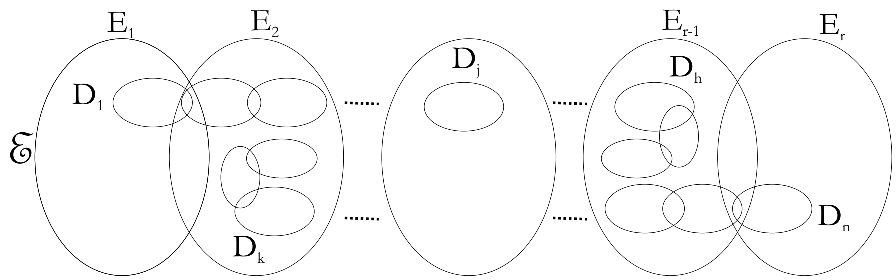

Figura 1.5: D_j sólo está contenido en el primer eslabón de $\mathcal{F}$.

contiene a D_j y ningún eslabón interior de $\mathcal{D}(h,k)$ intersecta ni a E_1 ni a E_r. Hay una cadena $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{H}$ es una consolidación de $\mathcal{D}(h,k)$, únicamente el primer eslabón de $\mathcal{H}$ contiene a D_j, cada eslabón de $\mathcal{H}$ es un subconjunto de la unión de dos eslabones adyacentes de $\mathcal{E}$ y si un eslabón de $\mathcal{F}$ contiene un eslabón final de $\mathcal{D}(h,k)$ que intersecte a E_1 o a E_r, entonces es un subconjunto de $E_1 \cup E_2$ o de $E_{r-1} \cup E_r$. Si ningún eslabón de $\mathcal{D}(h,k)$ intersecta a E_1, o si ningún eslabón de $\mathcal{D}(h,k)$ intersecta a E_r, la existencia de $\mathcal{H}$ se sigue de la hipótesis de inducción; si un eslabón de $\mathcal{D}(h,k)$ intersecta a E_1 y otro intersecta a E_r, la existencia de $\mathcal{H}$ se sigue del caso especial del teorema.

Sea H_u el primer eslabón de $\mathcal{H}$ que intersecta a $E_1 \cup E_r$. Por conveniencia, supongamos que H_u intersecta a E_1. Entonces H_u es un subconjunto de $E_1 \cup E_2$. Definimos la cadena $\mathcal{F}$ como sigue: $\mathcal{H}(1, u-1)$ es una subcadena de $\mathcal{F}$; si $\mathcal{D}'$ está formada por los eslabones de $\mathcal{D}$ que no están en $\mathcal{H}(1, u-1)$, la unión de los elementos de $\mathcal{D}'$ en $E_1 \cup E_2$ es un eslabón de $\mathcal{F}$, la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en E_3 pero no en E_2 es otro eslabón de $\mathcal{F}$, la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en E_4 pero no en E_3 es otro eslabón de $\mathcal{F}$,..., y la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en $E_{r-1} \cup E_r$ es otro eslabón de $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{H}(1, u-1)$ es igual a la cadena $\mathcal{F}(1, u-1)$, entonces D_j está en el primer eslabón de $\mathcal{F}$, por lo que la cadena $\mathcal{F}$ es la cadena que buscamos.

□

1.5.16 Teorema. *Si $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ es una cadena que se tuerce en la cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$ y $\mathcal{D}(r,s)$ es una subcadena de $\mathcal{D}$ tal que un eslabón de $\mathcal{D}(r,s)$ intersecta a E_1 y un eslabón de $\mathcal{D}(r,s)$ intersecta a E_m, entonces hay una cadena $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}$ es una consolidación de $\mathcal{D}$, cada elemento de $\mathcal{F}$ es un subconjunto de la unión de dos eslabones adyacentes de $\mathcal{E}$, D_r sólo está contenido en el primer eslabón de $\mathcal{F}$, y D_s sólo está contenido* *en el último eslabón de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}(h,k)$ una subcadena de $\mathcal{D}(r,s)$ tal que D_h intersecta a E_1 y D_k intersecta a E_m. Por conveniencia, supongamos que $h < k$ y que D_r y D_s son eslabones de $\mathcal{D}(1,h)$ y $\mathcal{D}(k,n)$ respectivamente.

Por el Teorema 1.5.15, hay una cadena $\mathcal{H}$ que es una consolidación de $\mathcal{D}(1,h)$ tal que cada eslabón de $\mathcal{H}$ es un subconjunto de la unión de dos eslabones adyacentes de $\mathcal{E}$, D_r sólo está contenido en el primer eslabón de $\mathcal{H}$, y si un eslabón de $\mathcal{H}$ contiene a D_h entonces es un subconjunto de $E_1 \cup E_2$ o de $E_{m-1} \cup E_m$; también hay una cadena $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G}$ es una consolidación de $\mathcal{D}(k,n)$, cada eslabón de $\mathcal{G}$ es un subconjunto de la unión de dos elementos adyacentes de $\mathcal{E}$, D_s sólo está contenido en el primer eslabón de $\mathcal{G}$ y si un eslabón de $\mathcal{G}$ contiene a D_k entonces es un subconjunto de $E_1 \cup E_2$ o de $E_{m-1} \cup E_m$.

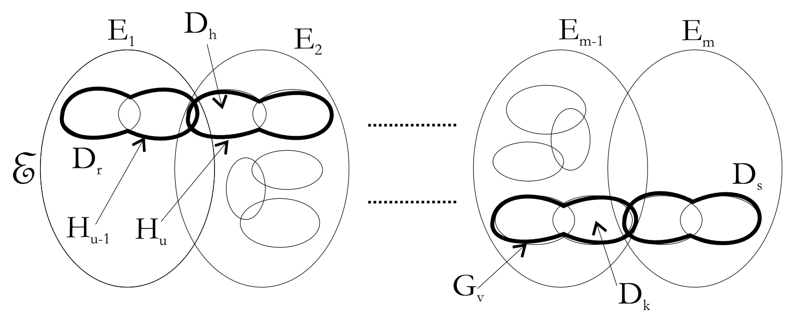

Figura 1.6: Dibujo Teorema 1.5.16

Sean H_u y G_v los primeros elementos de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G}$ que contienen a D_h y a D_k, respectivamente. Como el caso donde $m \leq 4$ se establece fácilmente, supongamos que H_u y que G_v son subconjuntos de $E_1 \cup E_2$ y de $E_{m-1} \cup E_m$, respectivamente. La cadena $\mathcal{F}$ requerida se define como sigue: los primeros eslabones de $\mathcal{F}$ son los eslabones de $\mathcal{H}(1,u-1)$, los últimos eslabones de $\mathcal{F}$ son los eslabones de $\mathcal{G}(v-1,1)$; si $\mathcal{D}'$ consiste de los eslabones de $\mathcal{D}$ que no están ni en $\mathcal{H}(1,u-1)$ ni en $\mathcal{G}(v-1,1)$, la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en $E_1 \cup E_2$ es un eslabón de $\mathcal{F}$, la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en E_3 pero no en E_2 es otro eslabón de $\mathcal{F}$, la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en E_4 pero no en E_3 es otro eslabón de $\mathcal{F}$,..., y la unión de los eslabones de $\mathcal{D}'$ en $E_{m-1} \cup E_m$ es otro eslabón de $\mathcal{F}$. Así, si la cadena $\mathcal{F}$ tiene w elementos, como $\mathcal{H}(1,u-1) = \mathcal{F}(1,u-1)$ y $\mathcal{G}(v-1,1) = \mathcal{F}(w-(v-2),w)$, esto nos asegura que D_r está en el primer eslabón de $\mathcal{F}$ y que D_s está en el último eslabón de $\mathcal{F}$.

$\square$

1.5.17 Teorema. *Supongamos que* $(1, x_1)$, $(2, x_2)$,...,(n, x_n) *es una colección de pares ordenados de enteros positivos tales que* $h = x_1 \leq x_i \leq x_n = k$ *y que* $\mid x_i - x_{i+1} \mid \leq 1$ *para* $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. *Supongamos que* $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$,... *es una sucesión de cadenas de* p *a* q *tales que para cada entero positivo* i*;*

1. $\mathcal{D}_{i+1}$ *se tuerce en* $\mathcal{D}_i$*;*
2. *La cadena* $\mathcal{D}_{i+1}$ *refina fuertemente a la cadena* $\mathcal{D}_i$*;*
3. *La malla de* $\mathcal{D}_i$ *es* $1/i$.

Denotamos por $D(i)_r$ *el* r*-ésimo eslabón de* $\mathcal{D}_i$. *Supongamos que la subcadena* $\mathcal{D}_2(u, v)$ *de* $\mathcal{D}_2$ *está contenida en la subcadena* $\mathcal{D}_1(h, k)$ *de* $\mathcal{D}_1$ *y las cerraduras de* $D(2)_u$ *y de* $D(2)_v$ *son subconjuntos ajenos de* $D(1)_h$ *y de* $D(1)_k$, *respectivamente. Entonces para cada entero* w *hay un entero* $j > w$ *y una cadena* $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *que sigue el patrón* $(1, x_1)$, $(2, x_2)$,...,(n, x_n) *en* $\mathcal{D}_1$ *tales que* $\mathcal{E}$ *es una consolidación de los eslabones de* $\mathcal{D}_j$ *contenidos en* $\mathcal{D}_2(u, v)$ *y ningún eslabón interior de* $\mathcal{E}$ *intersecta a* $D(2)_u \cup D(2)_v$.

Demostración. Probaremos este teorema por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces $h = k$ y entonces la subcadena $\mathcal{D}_2(u, v)$ de $\mathcal{D}_2$ está contenida en $D(1)_h$ y así, si w es un número entero positivo, para cualquier $j > w$ el teorema se cumple.

Supongamos que n es un número entero fijo mayor que 1. Como la cerradura de cada eslabón de $\mathcal{D}_2$ es un subconjunto compacto de un eslabón de $\mathcal{D}_1$, hay un número positivo ϵ (el número de Lebesgue, Teorema 1.2.8) tal que cualquier conjunto que es de diámetro menor que ϵ y que intersecta un eslabón de $\mathcal{D}_2$ es un subconjunto de un eslabón de $\mathcal{D}_1$. Por este resultado, el hecho de que la cerradura de $D(2)_u$ y $D(2)_v$ son subconjuntos de $D(1)_h$ y $D(1)_k$, respectivamente, y la hipótesis de que ningún eslabón de $\mathcal{D}_i$ tiene diámetro mayor que $1/i$, encontramos que, si w es un número entero positivo, hay un entero m mayor que w tal que cada subcadena de $\mathcal{D}_m$ con cinco eslabones contenida en $\mathcal{D}_2(u, v)$ es tal que la cerradura de la unión de esta subcadena es un subconjunto de un eslabón de $\mathcal{D}_1(h, k)$, cada subcadena con cinco eslabones de $\mathcal{D}_m$, uno de cuyos eslabones intersecta a $D(2)_u$

está contenida en $D(1)_h$, y cada subcadena con cinco eslabones, uno de cuyos eslabones intersecta $D(2)_v$ está contenida en $D(1)_k$.

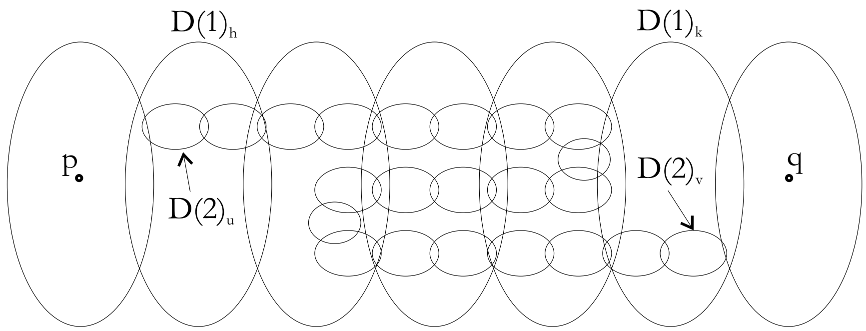

Figura 1.7: Dibujo 1 Teorema 1.5.17

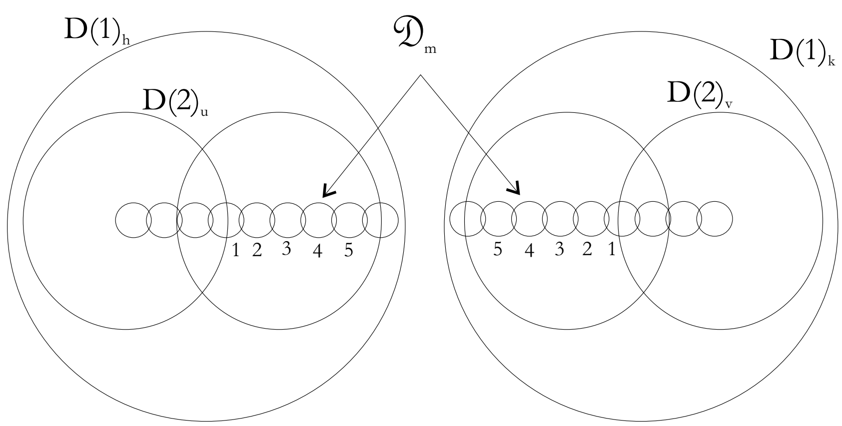

Figura 1.8: Dibujo 2 Teorema 1.5.17

Como $\mid x_i - x_{i+1} \mid \leq 1$, $n \geq k - h + 1$. Si $n = k - h + 1$, el teorema se cumple para cualquier entero j mayor que m. Entonces, la unión de todos los eslabones de $\mathcal{D}_j$ en la intersección de $D(1)_h$ y $\mathcal{D}_2^*(u, v)$ se puede tomar como E_1, la unión de todos los eslabones de $\mathcal{D}_j$ en la intersección de $D(1)_{h+1}$ y $D_2^*(u, v)$ que no están en $D(1)_h$ se puede tomar como E_2,..., y la unión de todos los eslabones de D_j en la intersección de $D(1)_k$ y $\mathcal{D}_2^*(u, v)$ se puede tomar como E_n.

Supongamos que el teorema se satisface para cualquier entero positivo menor que n y sean h y k enteros positivos tales que $n > k + 1 - h$.

Consideremos el caso en que $x_1 = x_2$. Por nuestra suposición, hay un entero $s > m$ y una cadena $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, ..., F_{n-1}\}$ tales que $\mathcal{F}$ es una consolidación de los eslabones de $\mathcal{D}_s$ en $\mathcal{D}_2(u, v)$, $\mathcal{F}$ sigue el patrón $(1, x_2)$, $(2, x_3)$,...,$(n-1, x_n)$ en $\mathcal{D}_1$, sólo el primer eslabón de $\mathcal{F}$ contiene algún punto de $D(2)_u$ y sólo el último eslabón de $\mathcal{F}$ contiene algún punto de $D(2)_v$. Como ningún eslabón de $\mathcal{D}_i$ tiene diámetro mayor que $1/i$ y la cerradura de $D(2)_u$ es un subconjunto de $D(1)_h$, se pueden encontrar un entero positivo j y una cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ que satisfagan las condiciones anteriormente descritas. Notemos que j y $\mathcal{E}$ pueden ser elegidos de tal manera que E_1 sea un subconjunto de $F_1 \cup D(2)_u$, E_2 sea un subconjunto de $F_1 \cup F_2$, E_3 sea un subconjunto de F_3,..., y E_n sea un subconjunto de $F_{n-1} \cup D(2)_v$. Entonces, $x_1 \neq x_2$.

Ahora, consideremos el caso en que hay enteros r y t tales que $1 < t < r < n$, $x_1 = x_r < x_t$, y $x_i < x_t$ para $i \in \{1, 2, ..., r\}$.

Supongamos que una subcadena $\mathcal{D}_{m+1}(p, q)$ de $\mathcal{D}_{m+1}$ está contenida en $\mathcal{D}_2(u, v)$ y que sus eslabones finales, $D(m+1)_\alpha$ y $D(m+1)_\beta$, intersectan $D(2)_u$ y $D(1)_{x_t+1}$, respectivamente. Ya que las cerraduras de los eslabones de las subcadenas de $\mathcal{D}_m$ son subconjuntos de eslabones de $\mathcal{D}_1$ y, como $\mathcal{D}_{m+1}$ se tuerce en $\mathcal{D}_m$, se sigue que $\mathcal{D}_{m+1}(p, q)$ es la unión de tres subcadenas, $\mathcal{D}_{m+1}(p, y)$, $\mathcal{D}_{m+1}(y, z)$ y $\mathcal{D}_{m+1}(z, q)$ tales que $(q-p)(z-y) > 0$. Además, $\mathcal{D}_{m+1}(p, z)$ es un subconjunto de $\mathcal{D}_1(h, x_t)$, pero ninguno de sus eslabones intersecta a $D(2)_v$, la cerradura de $D(m+1)_y$ es un subconjunto de $D(1)_{x_t}$ y la cerradura de $D(m+1)_z$ es un subconjunto de $D(1)_h$.

Notemos que, por construcción, la colección de eslabones de $\mathcal{D}_{m+1}$ en $\mathcal{D}_2(u, v)$ es la unión de cinco subcolecciones $\mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{S}, \mathcal{V}$ y $\mathcal{T}$ tales que $\mathcal{R}$ contiene a cada eslabón de $\mathcal{D}_{m+1}$ en $D(2)_u$. La cerradura de $\mathcal{U}^*$ es un subconjunto de $D(1)_{x_t}$. La cerradura de $\mathcal{V}^*$ es un subconjunto de $D(1)_h$. La cadena $\mathcal{T}$ contiene a cada eslabón de $\mathcal{D}_{m+1}$ en $D(2)_v$. Ningún eslabón de $\mathcal{R} \cup \mathcal{U}$ intersecta a ningún eslabón de $\mathcal{V} \cup \mathcal{T}$ y cada eslabón de $\mathcal{R} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{V}$ es un subconjunto de $\mathcal{D}_1^*(h, x_t)$.

Por la hipótesis de inducción, encontramos que hay un entero $j(\mathcal{R} \cup \mathcal{U})$ mayor que m y una cadena $\mathcal{F}$ tales que $\mathcal{F}$ es una consolidación de eslabones de $\mathcal{D}_{j(\mathcal{R} \cup \mathcal{U})}$ en $\mathcal{D}_2^*(u, v) \cap (\mathcal{R} \cup \mathcal{U})^*$, $\mathcal{F}$ sigue el patrón $(1, x_1)$, $(2, x_2)$,...,(t, x_t) en $\mathcal{D}_1$ y sólo el primer y el último eslabones de $\mathcal{F}$ contienen puntos de $D(2)_u$ y $\mathcal{U}^*$, respectivamente. Además, hay un entero $j(\mathcal{U} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{V})$ mayor que m y una cadena $\mathcal{G}$ tales que $\mathcal{G}$ es una consolidación de los eslabones de $\mathcal{D}_{j(\mathcal{U} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{V})}$ en la intersección de $\mathcal{D}_2^*(u, v)$ y de $(\mathcal{U} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{V})^*$, $\mathcal{G}$ sigue el patrón $(1, x_t)$, $(2, x_{t+1})$,...,$(r+1-t, x_r)$ en $\mathcal{D}_1$, y sólo el primer y el último eslabones de

$\mathcal{G}$ contienen puntos de $\mathcal{U}^*$ y $\mathcal{V}^*$, respectivamente. Más aún, hay un entero $j(\mathcal{V} \cup \mathcal{T})$ mayor que m y una cadena $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{H}$ es una consolidación de los eslabones de $\mathcal{D}_{j(\mathcal{V} \cup \mathcal{T})}$ en la intersección de $\mathcal{D}_2^*(u,v)$ y de $(\mathcal{V} \cup \mathcal{T})^*$, $\mathcal{H}$ sigue el patrón $(1, x_r)$, $(2, x_{r+1})$,...,$(n+1-r, x_n)$ en $\mathcal{D}_1$, sólo el primer eslabón de $\mathcal{H}$ contiene puntos de $\mathcal{V}^*$ y sólo el último eslabón de $\mathcal{H}$ contiene puntos de $D(2)_v$.

Sea $j = \text{máx}\{j(\mathcal{R} \cup \mathcal{U}), j(\mathcal{U} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{V}), j(\mathcal{V} \cup \mathcal{T})\}$. Una cadena $\mathcal{E}$ que satisfaga las condiciones de nuestro teorema se puede definir como sigue: E_1 es la unión de todos los eslabones de $\mathcal{D}_j$ en $\mathcal{D}_2(u,v)$ que están contenidos en $D(2)_u$ o en el primer eslabón de $\mathcal{F}$; E_i $(i \in \{2, 3, ..., t-1\})$ es la unión de todos los eslabones de $\mathcal{D}_j$ en el i-ésimo eslabón de $\mathcal{F}$; E_t es la unión de todos los eslabones de $\mathcal{D}_j$ en la unión del último eslabón de $\mathcal{F}$ y el primer eslabón de $\mathcal{G}$; ... ; y E_n es la unión de todos los eslabones de $\mathcal{D}_j$ en $\mathcal{D}_2(u,v)$ que están contenidos en $D(2)_r$ o en el último eslabón de $\mathcal{H}$. Entonces, el teorema se satisface si para algún entero $i > 1$, $x_i = x_1$.

Supongamos que para cada entero $i > 1$, $x_i \neq x_1$. Sean $\mathcal{W}$ el conjunto de todos los eslabones de $\mathcal{D}_2(u,v)$ que no están en $D(1)_h$ y $\mathcal{W}'$ el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{W}$ que intersectan $D(1)_h$. La cerradura de cada eslabón de $\mathcal{W}'$ es un subconjunto de $D(1)_{h+1}$. Por la hipótesis de inducción, hay un entero $j > m$ y una cadena $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, ..., F_{n-1}\}$ tales que $\mathcal{F}$ es una consolidación de los eslabones de $\mathcal{D}_j$ en $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ sigue el patrón $(1, x_2)$, $(2, x_3)$,...,$(n-1, x_n)$ en $\mathcal{D}_1$, F_1 es el único elemento de $\mathcal{F}$ que intersecta a $\mathcal{W}'$ y F_{n-1} es el único eslabón de $\mathcal{F}$ que intersecta a $D(2)_k$. Una cadena $\mathcal{E}$ que satisfaga las condiciones anteriormente descritas se puede obtener como sigue: E_1 es la unión de todos los elementos de $\mathcal{D}_j$ en $\mathcal{D}_2^*(u,v) \cap D(1)_h$, E_2 es F_1,..., y E_n es F_{n-1}.

$\square$

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del Teorema 1.5.17.

1.5.18 Teorema. *Supongamos que* $(1, x_1)$, $(2, x_2)$,...,(n, x_n) *es una colección de pares ordenados de enteros positivos tales que* $1 = x_1 \leq x_i \leq x_n = k$ *y que* $\mid x_i - x_{i+1} \mid \leq 1$ *para* $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. *Supongamos que* $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$,... *es una sucesión de cadenas de* p *a* q *tal que* $\mathcal{D}_1$ *tiene* x_n *eslabones y, para cada entero positivo* i;

1. $\mathcal{D}_{i+1}$ *se tuerce en* D_i;

2. *La cadena* $\mathcal{D}_{i+1}$ *refina fuertemente a la cadena* $\mathcal{D}_i$*;*

3. *La malla de* $\mathcal{D}_i$ *es* $1/i$.

Entonces hay un entero j *y una cadena* $\mathcal{E}$ *de* p *a* q *tales que* $\mathcal{E}$ *es una consolidación de* $\mathcal{D}_j$ *y* $\mathcal{E}$ *sigue el patrón* $(1, x_1)$, $(2, x_2)$,...,(n, x_n) *en* $\mathcal{D}_1$.

1.5.19 Teorema. *Supongamos que la cadena* $\mathcal{D}$ *se tuerce en la cadena* $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$, $(n > 2)$, *un eslabón de* $\mathcal{D}$ *está en* E_1 *y un eslabón de* $\mathcal{D}$ *está en* E_n. *Entonces hay una cadena* $\mathcal{F}$ *que es una consolidación de* $\mathcal{D}$ *y satisface:*

1. $\mathcal{F}$ *tiene sus eslabones finales en* E_1 *y* E_n*;*

2. $\mathcal{F}$ *se tuerce en* $\mathcal{E}$ *pero ninguna consolidación propia de* $\mathcal{F}$ *tiene estas propiedades;*

3. $\mathcal{F}$ *sigue el patrón* $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 3)$, $(6, 4)$,...,$(i, y(i))$,..., $(z(n), n)$ *en* $\mathcal{E}$, *donde* $z(n)$ *es el número de eslabones de* $\mathcal{F}$, $z(3) = 3$, $z(4) = 6$, $z(5) = 30$,..., $z(n) = 2z(n-1) + z(n-2) - 2$, *y* $y(i) = 1 + y(1+ \mid z(r-1) + z(r-2) - 1 - i \mid)$, *donde* $z(r-1) \leq i \leq z(r)$ *para algún entero* r.

Demostración. Probaremos este teorema por inducción. Claramente el teorema vale para $n \in \{3, 4\}$. Supongamos que el teorema es cierto para n con $3 \leq n < m$. Hay que probar que el teorema vale para $n = m$.

Sean F_1 la unión de los eslabones de $\mathcal{D}$ en E_1 y $F_{z(m)}$ la unión de los eslabones de $\mathcal{D}$ en E_m. F_2 es la unión de los elementos de $\mathcal{D}$ en E_2 que intersectan a E_1 pero no están en E_1, y $F_{z(m)-1}$ es la unión de los elementos de $\mathcal{D}$ en E_{m-1} que intersectan a E_m, pero que no están en E_m. Los demás eslabones de $\mathcal{D}$ se colocarán en eslabones apropiados de $\mathcal{F}$ como se describe a continuación:

Sea $\mathcal{D}(r, s)$ una subcadena de $\mathcal{D}$ tal que D_r intersecta a E_1 y D_s intersecta a E_m, pero ningún eslabón interior de $\mathcal{D}(r, s)$ intersecta a $E_1 \cup E_m$. Entonces, $\mathcal{D}(r, s)$ es la unión de tres subcadenas $\mathcal{D}(r, j)$, $\mathcal{D}(j, k)$ y $\mathcal{D}(k, s)$ tales que $(r - s)(j - k) > 0$, $D_k \subseteq E_2$ y $D_j \subseteq E_{m-1}$. Por hipótesis de inducción, alguna consolidación, $\mathcal{F}_1$, de $\mathcal{D}(r, j)$ y un eslabón de $\mathcal{D}$ en E_1 se tuerce en $\mathcal{E}$ y sigue el patrón $\{(1, 1), (2, 2), ..., (i, y(i)), ..., (z(m-1), m-1)\}$ en $\mathcal{E}$. Nótese que $\mathcal{F}_1$ podría no ser una cadena, ya que su primer eslabón podría no intersectar a su segundo eslabón. Además, alguna consolidación, $\mathcal{F}_3$, de $\mathcal{D}(k, s)$ junto con un

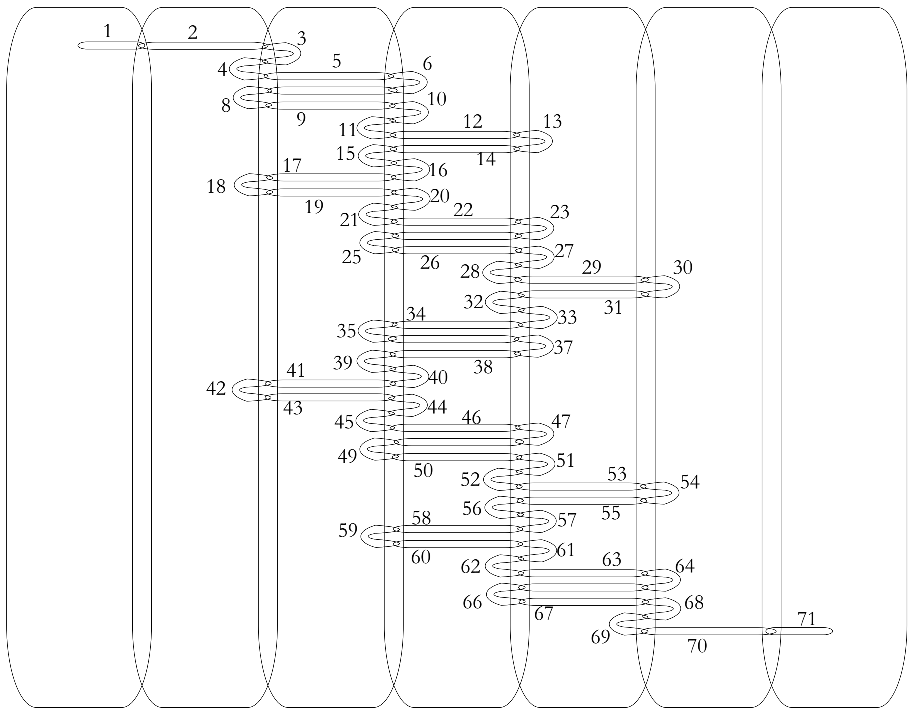

Figura 1.9: Una cadena que se tuerce de forma mínima en otra cadena

eslabón de $\mathcal{D}$ en E_m se tuerce en $\mathcal{E}$ y sigue el patrón $\{(1,2),(2,3),...,(i,y(i)+1),...,(z(m-1),m)\}$ en $\mathcal{E}$. Más aún, alguna consolidación, $\mathcal{F}_2$, de $\mathcal{D}(j,k)$ se tuerce en $\mathcal{E}$ y sigue el patrón $\{(1,m-1),(2,m-2),...,(i,m-y(i)),...,(z(m-2),2)\}$ en $\mathcal{E}$. El i-ésimo eslabón de $\mathcal{F}_1$ pertenece al i-ésimo eslabón de $\mathcal{F}$. El i-ésimo eslabón de $\mathcal{F}_3$ pertenece al $(z(m-1)+z(m-2)+(i-2))$-ésimo eslabón de $\mathcal{F}$. Y el i-ésimo eslabón de $\mathcal{F}_2$ pertenece al $(z(m-1)+i-1)$-ésimo eslabón de $\mathcal{F}$.

Los demás elementos de $\mathcal{D}$ se pueden poner en elementos apropiados de $\mathcal{F}$ hasta obtener una cadena $\mathcal{F}$ que satisface las condiciones anteriormente descritas.

$\square$

1.5.20 Teorema. *Supongamos que la cadena $\mathcal{D}_n$ ($n \in \{1,2\}$) se tuerce en la cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$, cada eslabón final de $\mathcal{E}$ contiene un eslabón de $\mathcal{D}_n$ y ninguna consolidación propia de $\mathcal{D}_n$ tiene estas propiedades. Entonces $\mathcal{D}_1$ sigue, en $\mathcal{E}$, el mismo patrón que $\mathcal{D}_2$ sigue en $\mathcal{E}$, y la cadena cuyos es-*

labones son las uniones de eslabones correspondientes de $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ se tuerce en $\mathcal{E}$.

Demostración. Como las dos cadenas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ cumplen las hipótesis del Teorema 1.5.19, entonces tanto $\mathcal{D}_1$ como $\mathcal{D}_2$ siguen el patrón $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,3)$, $(6,4)$,..., $(i, y(i))$,..., $(z(n), n)$ en $\mathcal{E}$. Así, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ siguen el mismo patrón en $\mathcal{E}$. Esto prueba la primera parte del teorema. Más aún, como las dos cadenas, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, siguen el mismo patrón en $\mathcal{E}$, esto quiere decir que tanto $\mathcal{D}_1$ como $\mathcal{D}_2$ tienen $z(n)$ eslabones.

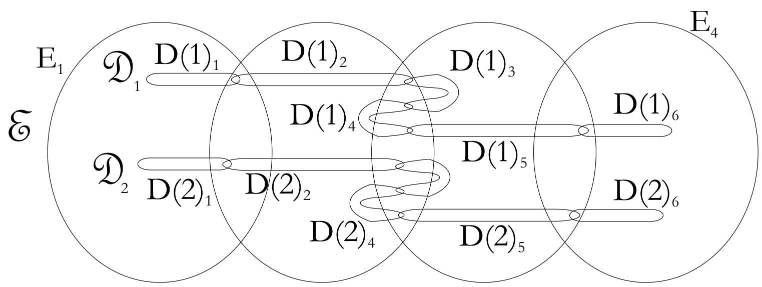

Figura 1.10: $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ siguen el mismo patrón en $\mathcal{E}$

Probaremos la segunda parte del teorema por inducción sobre m (el número de elementos de la cadena $\mathcal{E}$). Primero vemos que el teorema vale para $m = 4$. Como ninguna consolidación propia de $\mathcal{D}_n$ se tuerce en $\mathcal{E}$ y a la vez cada eslabón final de $\mathcal{E}$ contiene un eslabón de dicha consolidación propia, entonces las cadenas $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ siguen patrón $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,3)$, $(6,4)$ en la cadena $\mathcal{E}$. Además la cadena cuyos eslabones son las uniones de eslabones correspondientes de $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, es decir, la cadena $\mathcal{D}' = \{D(1)_1 \cup D(2)_1, D(1)_2 \cup D(2)_2, ..., D(1)_6 \cup D(2)_6\}$ se tuerce en la cadena $\mathcal{E}$.

Supongamos que el teorema vale para $r < m$. Como $\mathcal{D}_n$ se tuerce en $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{D}_n$ es la unión de tres subcadenas $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n(1,r) \cup \mathcal{D}_n(r,s) \cup \mathcal{D}_n(s,l)$ con $1 < r < s < l$, l el número de eslabones de la cadena $\mathcal{D}_n$ y $D(n)_r \subseteq E_{m-1}$, $D(n)_s \subseteq E_2$.

Ahora, como las cadenas $\mathcal{D}_n(1,r)$ se tuercen en $\mathcal{E}(1, m-1)$, entonces, por hipótesis de inducción, la cadena cuyos eslabones son las uniones correspondientes de eslabones de $\mathcal{D}_1(1,r)$ con los eslabones de $\mathcal{D}_2(1,r)$ se tuerce en la cadena $\mathcal{E}(1, m-1)$. Como las cadenas $\mathcal{D}_n(r,s)$ se tuercen en $\mathcal{E}(m-1, 2)$, entonces la cadena cuyos eslabones son las uniones correspondientes de eslabones de $\mathcal{D}_1(r,s)$ con los eslabones de $\mathcal{D}_2(r,s)$ se tuerce en $\mathcal{E}(m-1, 2)$. Por último, como las cadenas $\mathcal{D}_n(s,l)$ se tuercen en la cadena $\mathcal{E}(2,m)$, entonces la cadena cuyos eslabones son las uniones correspondientes de eslabones de $\mathcal{D}_1(s,l)$ con los eslabones de $\mathcal{D}_2(s,l)$ se tuerce en $\mathcal{E}(2,m)$. Pero entonces, la unión de las tres subcadenas cuyos eslabones son las uniones correspondientes de eslabones de $\mathcal{D}_1(1,r)$ con los eslabones de $\mathcal{D}_2(1,r)$, $\mathcal{D}_1(r,s)$ con los eslabones de $\mathcal{D}_2(r,s)$ y $\mathcal{D}_1(s,l)$ con los eslabones de $\mathcal{D}_2(s,l)$ se tuerce en $\mathcal{E}$.

$\square$

1.5.21 Teorema. *Supongamos que la cadena $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ se tuerce en la cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ...E_m\}$, D_1 está en E_1, D_n está en E_m, D_r está en E_m y D_s está en E_1 ($r < s$). Entonces para cada entero $t < s$, hay una consolidación $\mathcal{F}$ de $\mathcal{D}$ tal que el primer eslabón de $\mathcal{F}$ contiene a D_1 y el último contiene a D_n, cada eslabón de $\mathcal{F}$ es un subconjunto de la unión de dos eslabones adyacentes de $\mathcal{E}$ y cualquier subcadena de $\mathcal{F}$ cuyos eslabones finales contienen a D_t y a D_n, respectivamente, contiene a $\mathcal{D}(r,n)$.*

Demostración. Por los Teoremas 1.5.19 y 1.5.20, hay cadenas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ que son consolidaciones de $\mathcal{D}(1,r)$ y de $\mathcal{D}(r,s)$, respectivamente, tales que el primer eslabón de $\mathcal{G}_1$ es un subconjunto de E_1 y contiene a D_s y el primer eslabón de $\mathcal{G}_2$ es un subconjunto de E_1 y contiene a D_s. El último eslabón de $\mathcal{G}_1$ es un subconjunto de E_m y contiene a D_r y el último eslabón de $\mathcal{G}_2$ es un subconjunto de E_m y también contiene a D_r. Entonces la cadena $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, ..., H_u\}$, cuyos eslabones son las uniones de eslabones correspondientes de $\mathcal{G}_1$ y de $\mathcal{G}_2$, se tuerce en $\mathcal{E}$.

Sea H_v el primer eslabón de $\mathcal{H}$ que contiene a D_t. Por el Teorema 1.5.16, hay una consolidación $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H} \cup \mathcal{D}(s+1,n)$ tal que el primer eslabón de $\mathcal{K}$ contiene a H_v, el último eslabón contiene a D_n y cada eslabón de $\mathcal{K}$ es un subconjunto de la unión de dos eslabones adyacentes de $\mathcal{E}$. Los primeros $v-1$ eslabones de $\mathcal{F}$ son los eslabones de $\mathcal{G}_1(1,v-1)$, el v-ésimo eslabón de $\mathcal{F}$ es la unión de los eslabones de $\mathcal{D}$ que están en el primer eslabón de $\mathcal{K}$ pero en ningún eslabón de $\mathcal{G}_1(1,v-1)$, y cualquier otro eslabón de $\mathcal{F}$ es la unión de dos eslabones de $\mathcal{D}$ que están en un eslabón de $\mathcal{K}$ pero no intersectan eslabones de $\mathcal{G}_1(1,v-1)$.

$\square$

Capítulo 2

El Pseudoarco

En este capítulo definiremos uno de los continuos más importantes, el pseudoarco. Además presentaremos varias de sus propiedades y tres de sus caracterizaciones.

2.1. Construcción del pseudoarco

2.1.1 Definición. *Sean p y q dos puntos de un continuo. Sea $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$,... una sucesión de cadenas de p a q tales que para cada entero positivo i se cumplen:*

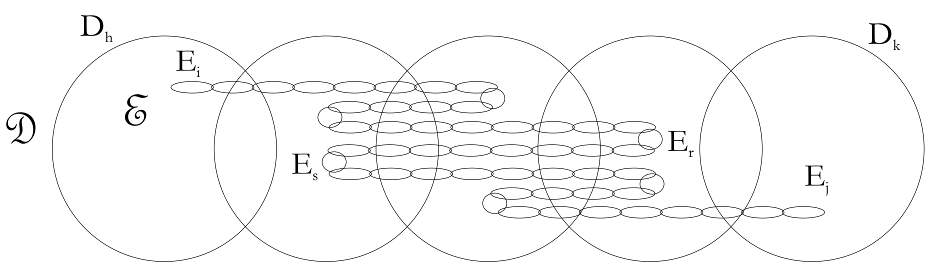

Figura 2.1: Primer paso en la construcción del pseudoarco

1. *$\mathcal{D}_{i+1}$ se tuerce en D_i;*
2. *La cadena $\mathcal{D}_{i+1}$ refina fuertemente a la cadena $\mathcal{D}_i$;*
3. *La malla de $\mathcal{D}_i$ es $1/i$.*

Entonces, definimos el pseudoarco*, P, como:* $P = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i^*$*, donde* $\mathcal{D}_i^*$ *denota la unión de los eslabones de* $\mathcal{D}_i$*.*

2.2. Propiedades del pseudoarco

Un pseudoarco es un continuo que es hereditariamente indescomponible y homogéneo, eso es lo que probaremos en los Teoremas 2.2.1 y 2.2.4.

2.2.1 Teorema. *El pseudoarco, P, es hereditariamente indescomponible.*

Demostración. Supongamos que el subcontinuo P' de P es la unión de dos subcontinuos propios H y K de P'. Notamos que hay dos puntos p y q de P' y un entero j tal que la distancia de p a H es mayor que $\frac{2}{j}$ y la distancia de q a K es mayor que $\frac{2}{j}$.

Sea $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$,... una sucesión de cadenas que cubren a P tales que para cada entero positivo i se cumplen: $\mathcal{D}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{D}_i$, ningún eslabón de la cadena $\mathcal{D}_i$ tiene diámetro mayor que $\frac{1}{i}$ y la cerradura de cada eslabón de $\mathcal{D}_{i+1}$ es un subconjunto de un eslabón de $\mathcal{D}_i$.

Sean $\mathcal{D}_j(h,k)$ $(h<k)$ y $\mathcal{D}_{j+1}(u,v)$ subcadenas de $\mathcal{D}_j$ y $\mathcal{D}_{j+1}$, respectivamente, tales que p y q pertenecen a eslabones finales de cada una de estas subcadenas. Supongamos que $p \in D(j)_h$. Como P' es un continuo, cada eslabón de $\mathcal{D}_j(h,k) \cup \mathcal{D}_{j+1}(u,v)$ contiene un punto de P'; en particular, $D(j)_{h+1}$ contiene un punto de K y ninguno de H y $D(j)_{k-1}$ contiene un punto de H pero ninguno de K.

Como $\mathcal{D}_{j+1}$ se tuerce en $\mathcal{D}_j$, $\mathcal{D}_{j+1}(u,v)$ contiene tres eslabones $D(j+1)_r$, $D(j+1)_s$ y $D(j+1)_t$ tales que $r<s<t$, $D(j+1)_s \subseteq D(j)_{h+1}$ y que $D(j+1)_r \cup D(j+1)_t \subseteq D(j)_{k-1}$. Pero H no es un continuo ya que $D(j+1)_r$ y $D(j+1)_t$ contienen puntos de H pero $D(j+1)_s$ no. Por lo tanto, suponer que $P' = H \cup K$, con H y K subcontinuos propios de P' nos lleva a una contradicción. De donde P es hereditariamente indescomponible.

$\square$

Los siguientes dos teoremas los necesitamos para poder probar el Teorema 2.2.4, que nos dice que el pseudoarco es homogéneo.

2.2.2 Teorema. *Sean M_n $(n \in \{1,2\})$ dos continuos, $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de números positivos con suma finita, es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i$ converge,* *y $\{\mathcal{X}_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de colecciones finitas de abiertos, $\mathcal{X}_{n,i} = \{X(n,i)_1, X(n,i)_2, ..., X(n,i)_{r_i}\}$, tales que para cada entero positivo i se cumple:*

1. *$\mathcal{X}_{n,i}$ cubre a M_n;*

2. *La malla de $\mathcal{X}_{n,i}$ es ϵ_i;*

3. *Si el j-ésimo elemento de $\mathcal{X}_{n,i+1}$ intersecta al k-ésimo elemento de $\mathcal{X}_{n,i}$ entonces la distancia entre el j-ésimo elemento de $\mathcal{X}_{m,i+1}$ y el k-ésimo elemento de $\mathcal{X}_{m,i}$ es menor que ϵ_i, donde m y n son tales que si $n = 1$ entonces $m = 2$ y viceversa, si $n = 2$ entonces $m = 1$.*

Entonces hay un homeomorfismo T que manda M_1 en M_2.

Demostración. Sea $X(n,i)_k$ el k-ésimo elemento de $\mathcal{X}_{n,i}$. Definimos $Y(n,i)_k$ como el conjunto de todos los puntos q tales que la distancia de q a $X(n,i)_k$ es menor que $\epsilon_i + 2(\epsilon_{i+1} + \epsilon_{i+2} + ...)$. Sea $\mathcal{Y}_{n,i}$ la colección de todos los $Y(n,i)_k$. Notamos que cada una de las colecciones $\{X(n,i)_k\}$ y $\{Y(n,i)_k\}$, variando i y k en los naturales, son bases de M_n.

Supongamos que $X(n,i)_r$ intersecta a $X(n,i+1)_s$. Como la distancia entre $X(m,i)_r$ y $X(m,i+1)_s$ es menor que ϵ_i y el diámetro de $X(m,i+1)_s$ es menor que ϵ_{i+1}, la cerradura de $Y(m,i+1)_s$ es un subconjunto de $Y(m,i)_r$. En general, si $i < j$ y $X(n,i)_r$ intersecta $X(n,j)_s$, entonces la cerradura de $Y(m,j)_s$ es un subconjunto de $Y(m,i)_r$. Para ver esto sea $w \in cl(Y(m,j)_s)$ y veamos cuál es la distancia de w a $x(m,i)_r$:

$d(w, X(m,i)_r) \leq d(w, X(m,j)_s) + \text{diám}(X(m,j)_s) + d(X(m,j)_s, X(m,i)_r) < \epsilon_j + 2(\epsilon_{j+1} + \epsilon_{j+2} + ...) + \epsilon_j + \epsilon_i < \epsilon_i + 2(\epsilon_{i+1} + \epsilon_{i+2} + ... + \epsilon_{j-1}) + 2\epsilon_j + 2(\epsilon_{j+1} + \epsilon_{j+2} + ...)$

lo que implica que $w \in Y(m,i)_r$.

Sean $p \in M_1$ y $\{X(1,r)_{a_r}\}_{r=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos abiertos de las colecciones $\mathcal{X}_{n,i}$ que contienen a p. Definimos $T(p) = \cap_{r=1}^{\infty} Y(2,r)_{a_r}$. Notamos que $T(p)$ está bien definido ya que $cl(Y(2,r)_{a_{r+1}}) \subseteq Y(2,r)_{a_r}$ y así $\cap_{r=1}^{\infty} Y(2,r)_{a_r} \neq \emptyset$, si $\{X(1,r)_{b_r}\}_{r=1}^{\infty}$ es otra sucesión de conjuntos abiertos que contienen a p y si $\cap_{r=1}^{\infty} Y(2,r)_{b_r} = \{w\}$, con $w \neq T(p)$, entonces existe un número natural N tal que si $j,k > N$ se tiene que $Y(2,j)_{a_j} \cap Y(2,k)_{b_k} = \emptyset$. Sin embargo $p \in X(1,j)_{a_j} \cap X(1,k)_{b_k}$ y, según el párrafo anterior, tenemos que si $j,k > N$, entonces $Y(2,j)_{a_j} \cap Y(2,k)_{b_k} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $T(p) = w$.

Ahora veamos que T, así definida, es continua. Sea V un abierto de M_2 tal que $T(p) \in V$. Entonces, como $\{Y(2,j)_{a_j}\}_{j=1}^{\infty}$ es una base local de $T(p)$, existe un número entero j tal que cualquier elemento de $\mathcal{Y}_{2,j}$ que contiene a $T(p)$ es un subconjunto de V. Si $X(1,j)_r$ es un elemento de $\mathcal{X}_{1,j}$ que contiene a p, entonces la imagen bajo T de $X(1,j)_r$ es un subconjunto de $Y(2,j)_r$. Pero $T(p) \in Y(2,j)_r \subseteq V$. Por lo tanto, T es continua.

Veamos ahora que $T(M_1) = M_2$. Sean $q \in M_2$, V un abierto de M_2 que contiene a q y j un entero tal que cualquier elemento de $\mathcal{Y}_{2,j}$ que contiene a q es un subconjunto de V. Supongamos que $q \in X(2,j)_r \in \mathcal{X}_{2,j}$. Ahora, $T(X(1,j)_r) \subseteq Y(2,j)_r$ y $Y(2,j)_r \subseteq V$. Entonces V contiene un punto de $T(M_1)$, es decir, $T(M_1)$ es denso en M_2. Como M_1 es compacto y T es continua, entonces $T(M_1)$ es compacto, lo que quiere decir que $M_2 = cl(T(M_1)) = T(M_1)$.

Por último, hay que probar que T es inyectiva. Supongamos que T no es inyectiva. Entonces hay dos puntos distintos p_1 y p_2 de M_1 tales que $T(p_1) = T(p_2)$ y, además, hay un entero k tal que ningún elemento de $\mathcal{Y}_{1,k}$ contiene a p_1 y p_2 al mismo tiempo. Sea $X(2,k)_r \in \mathcal{X}_{2,k}$ tal que $T(p_1) \in X(2,k)_r$, entonces hay un entero $j > k$ tal que cualquier elemento de $\mathcal{Y}_{2,j}$ que contiene a $T(p_1)$ es un subconjunto de $X(2,k)_r$. Sean $X(1,j)_u$ y $X(1,j)_v$ elementos de $\mathcal{X}_{1,j}$ que contienen a p_1 y p_2, respectivamente. Como $Y(2,j)_u$ y $Y(2,j)_v$ contienen a $T(p_1)$, entonces $X(2,j)_u$ y $X(2,j)_v$ son subconjuntos de $X(2,k)_r$, lo que implica que $X(1,j)_u$ y $X(1,j)_v$ son subconjuntos de $Y(1,k)_r$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, T es inyectiva.

Como T es continua y biyectiva definida de un compacto en un compacto, entonces T es un homeomorfismo.

$\square$

2.2.3 Teorema. *Supongamos que M_n ($n \in \{1,2\}$) es un continuo, p_n y q_n son puntos de M_n, $\{\epsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos tales que $\lim_{j\to\infty} \epsilon_j = 0$, y $\{\mathcal{D}_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de cadenas de p_n a q_n tal que, para cada entero i se cumple:*

1. *$\mathcal{D}_{n,i+1}$ se tuerce en $\mathcal{D}_{n,i}$;*
2. *La cadena $\mathcal{D}_{n,i+1}$ refina fuertemente a la cadena $\mathcal{D}_{n,i}$;*
3. *La malla de $\mathcal{D}_{n,i}$ es ϵ_i;*
4. *$M_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}^*_{n,i}$, donde $\mathcal{D}^*_{n,i}$ representa la unión de los eslabones de la cadena $\mathcal{D}_{n,i}$.*

Entonces hay un homeomorfismo de M_1 en M_2 que manda a p_1 y q_1 en p_2 y q_2, respectivamente.

Demostración. Construiremos una sucesión $\{\mathcal{X}_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ de colecciones de abiertos que cubran a M_n y que satisfagan las condiciones del Teorema 2.2.2.

Sea $\mathcal{X}_{1,1}$ una $\mathcal{D}_{1,i}$ tal que la malla de $\mathcal{X}_{1,1}$ sea $\frac{1}{2}$. Sea $\mathcal{X}_{2,1}$ una cadena de p_2 a q_2 que tiene el mismo número de eslabones que $\mathcal{X}_{1,1}$ y que sea una consolidación de alguna $\mathcal{D}_{2,i}$.

Como $\mathcal{X}_{2,1}$ es una consolidación de alguna $\mathcal{D}_{2,i}$, hay un entero k tal que $\mathcal{D}_{2,k}$ está contenida en $\mathcal{X}_{2,1}$ y la malla de $\mathcal{D}_{2,k}$ es $\frac{1}{2}$. Sea $\mathcal{X}_{2,2}$ esta $\mathcal{D}_{2,k}$. Por el Teorema 1.5.18, hay un entero j y una cadena $\mathcal{X}_{1,2}$ de p_1 a q_1 tales que $\mathcal{X}_{1,2}$ es una consolidación de $\mathcal{D}_{1,j}$ y sigue, en $\mathcal{X}_{1,1}$, el mismo patrón que $\mathcal{X}_{2,2}$ sigue en $\mathcal{X}_{2,1}$.

Sea $\mathcal{X}_{1,3}$ una $\mathcal{D}_{1,l}$ tal que $\mathcal{X}_{1,3}$ está contenida en $\mathcal{X}_{1,2}$ y la malla de $\mathcal{X}_{1,3}$ es $\frac{1}{4}$. Por el Teorema 1.5.18, hay un entero r y una cadena $\mathcal{X}_{2,3}$ de p_2 a q_2 tales que $\mathcal{X}_{2,3}$ es una consolidación de $\mathcal{D}_{2,r}$ y sigue, en $\mathcal{X}_{2,2}$, el mismo patrón que $\mathcal{X}_{1,3}$ sigue en $\mathcal{X}_{1,2}$.

Este proceso descrito en los dos párrafos anteriores se puede continuar hasta obtener una sucesión $\{\mathcal{X}_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ de colecciones de abiertos tales que para cada entero positivo i se satisface:

1. $\mathcal{X}_{n,i}$ cubre a M_n;
2. cada elemento de $\mathcal{X}_{n,i}$ intersecta a M_n;
3. la malla de $\mathcal{X}_{n,2i}$ es $\frac{1}{2^i}$;
4. $\mathcal{X}_{n,i+1}$ es una cadena de p_n a q_n que sigue el mismo patrón en $\mathcal{X}_{n,i}$ que $\mathcal{X}_{m,i+1}$ sigue en $\mathcal{X}_{m,i}$, donde $n \neq m$ y $m, n \in \{1, 2\}$.

Entonces se sigue, del Teorema 2.2.2, que hay un homeomorfismo que manda M_1 en M_2. El homeomorfismo descrito en el Teorema 2.2.2 manda a p_1 y q_1 en p_2 y q_2, respectivamente.

□

2.2.4 Teorema. *El pseudoarco P es homogéneo.*

Demostración. De la definición del pseudoarco (2.1.1) vemos que existe una sucesión de cadenas $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$,... tales que, para cada entero positivo i se cumplen:

1. $\mathcal{D}_{i+1}$ se tuerce en D_i;

2. La cadena $\mathcal{D}_{i+1}$ refina fuertemente a la cadena $\mathcal{D}_i$;

3. La malla de $\mathcal{D}_i$ es $\frac{1}{i}$.

Por el Teorema 2.2.1, tenemos que P es indescomponible. Sean x y y puntos que pertenecen a diferentes composantes de P. Afirmamos que, para cada entero j, hay un entero $k > j$ tal que la subcadena de $\mathcal{D}_k$ que va, digamos, de x a y tiene un eslabón que intersecta al primer eslabón de $\mathcal{D}_j$ y tiene un eslabón que intersecta al último eslabón de $\mathcal{D}_j$. Para ver que esto es cierto sea j un entero. Tenemos que, para cada i, si $\mathcal{D}_i(x, y)$ una subcadena de $\mathcal{D}_i$ que va de x a y entonces, el conjunto límite de la sucesión $\{\mathcal{D}_r^*(x, y)\}_{r=j+1}^{\infty}$ es un continuo que contiene a x y a y y, como x y y pertenecen a diferentes composantes de P, este continuo debe ser P. Por lo tanto, hay un entero $k > j$ tal que $\mathcal{D}_k(x, y)$ intersecta a los eslabones finales de $\mathcal{D}_j$.

Usando el Teorema 1.5.16, encontramos que hay un entero h y una cadena $\mathcal{E}_1$ de x a y tales que $\mathcal{E}_1$ es una consolidación de $\mathcal{D}_h$ y la malla de $\mathcal{E}_1$ es 1. Sea $j > h$ tal que la malla de $\mathcal{D}_j$ sea $\frac{1}{2}$. Por el Teorema 1.5.12, $\mathcal{D}_j$ se tuerce en $\mathcal{E}_1$. De la definición de la sucesión de las cadenas $\mathcal{D}_i$, se sigue que hay un entero k tal que, la cerradura de la unión de cada par de eslabones que se intersectan de $\mathcal{D}_k$ es un subconjunto de un eslabón de $\mathcal{D}_j$. Por el Teorema 1.5.16, hay una cadena $\mathcal{E}_2$ de x a y tal que $\mathcal{E}_2$ es una consolidación de $\mathcal{D}_k$ y $\mathcal{E}_2$ está contenida en $\mathcal{D}_j$. Por el Teorema 1.5.13, $\mathcal{E}_2$ se tuerce en $\mathcal{E}_1$.

Continuando este proceso obtenemos una sucesión $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de cadenas de x a y tal que, para cada entero i se cumple:

1. $\mathcal{E}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{E}_i$;

2. La cadena $\mathcal{E}_{i+1}$ refina fuertemente a la cadena $\mathcal{E}_i$;

3. La malla de $\mathcal{E}_i$ es $\frac{1}{i}$;

4. $\mathcal{E}_i$ es una consolidación de alguna $\mathcal{D}_j$.

Supongamos que p_1 y p_2 son dos puntos de P. Sea q_n $(n \in \{1, 2\})$ un punto que pertenece a una composante de P que no contiene a p_n. Por lo que acabamos de mostrar, se tiene que hay una sucesión de cadenas $\{\mathcal{Y}_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ de p_n a q_n tales que, para cada entero positivo i se cumple:

1. $\mathcal{Y}_{n,i+1}$ se tuerce en $\mathcal{Y}_{n,i}$;

2. La cadena $\mathcal{Y}_{n,i+1}$ refina fuertemente a la cadena $\mathcal{Y}_{n,i}$;

3. La malla de $\mathcal{Y}_{n,i}$ es $\frac{1}{i}$;

4. $\mathcal{Y}_{n,i}$ es una consolidación de alguna $\mathcal{D}_j$.

Entonces, por el Teorema 2.2.3, hay un homeomorfismo de P en P que manda p_1 en p_2. Por lo tanto, P es homogéneo.

$\square$

2.3. Caracterizaciones del pseudoarco

En esta sección se darán tres caracterizaciones del pseudoarco, en algunos casos usaremos la primera de ellas (Teorema 2.3.1) como definición del pseudoarco.

2.3.1 Teorema. *Un pseudoarco es un continuo encadenable, no degenerado, hereditariamente indescomponible.*

Por construcción tenemos que el pseudoarco P es encadenable, es no degenerado y por el Teorema 2.2.1 tenemos que P es hereditariamente indescomponible. Lo que hay que ver ahora es que si tenemos dos continuos encadenables, no degenerados y hereditariamente indescomponibles entonces son homeomorfos. Esto es lo que asegura el Teorema 2.3.2.

2.3.2 Teorema. *Dos continuos no degenerados, hereditariamente indescomponibles M y M' son homeomorfos si cada uno puede ser encadenado. De hecho, si p y q son puntos de diferentes composantes de M, y p' y q' son puntos de diferentes composantes de M', entonces hay un homeomorfismo de M en M' que manda p en p' y q en q'.*

Demostración. Como el continuo M es encadenable, hay una sucesión $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\mathcal{C}_i$ es una $\frac{1}{i}$-cadena que cubre a M, cada eslabón de $\mathcal{C}_i$ intersecta a M, y $\mathcal{C}_{i+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{C}_i$.

Primero probaremos que hay un entero n_2 suficientemente grande tal que $\mathcal{C}_{n_2}$ se tuerce en $\mathcal{C}_1 = \{C(1)_1, C(1)_2, ..., C(1)_{t_1}\}$, donde $C(1)_i$ es el i-ésimo eslabón de la cadena $\mathcal{C}_1$. Si esto no fuera cierto, deberían de existir elementos $C(1)_h$ y $C(1)_k$ de $\mathcal{C}_1$ tales que $k-h>2$ y, para cualquier entero m, $\mathcal{C}_m=\{C(m)_1, C(m)_2, ..., C(m)_{t_m}\}$ debería de tener dos eslabones $C(m)_i$ y $C(m)_j$ en $C(1)_h$ y $C(1)_k$, respectivamente, tales que si $C(m)_r$ está en $C(1)_{k-1}$ y está entre $C(m)_i$ y $C(m)_j$, entonces ningún eslabón de $\mathcal{C}_m$ está en $C(1)_{h+1}$ que esté entre $C(m)_r$ y $C(m)_j$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i<r<j$. Sea $W_m=(\mathcal{C}_m(i,r))^*$, es decir, W_m es la unión de los eslabones $C(m)_i$ y $C(m)_r$ y los eslabones de $\mathcal{C}_m$ que están entre ellos, donde suponemos que ningún eslabón de $\mathcal{C}_m$ en $C(1)_{k-1}$ está entre $C(m)_i$ y $C(m)_j$. Sea $V_m=(\mathcal{C}_m(r,j))^*$, es decir, V_m es la unión de los eslabones $C(m)_r$ y $C(m)_j$ y los eslabones de $\mathcal{C}_m$ que están entre ellos.

Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de números enteros tal que las sucesiones $\{W_{a_i}\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{V_{a_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converjan. Ahora, el conjunto $W=\lim_{i\to\infty} W_{a_i}$ es un continuo que intersecta a $cl(C(1)_h)$ y no intersecta a $cl(C(1)_k)$. También el conjunto $V=\lim_{i\to\infty} V_{a_i}$ es un continuo que intersecta a $cl(C(1)_k)$ y no intersecta a $cl(C(1)_h)$. Por lo que si suponemos que no existe el entero n_2 tal que, $\mathcal{C}_{n_2}$ se tuerce en $\mathcal{C}_1$, obtenemos una contradicción a que M es hereditariamente indescomponible, ya que el continuo $V\cup W$ es descomponible.

Entonces, hay una subsucesión $\{\mathcal{C}_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\mathcal{C}_{n_{i+1}}$ se tuerce en $\mathcal{C}_{n_i}$.

Sean p y q puntos que pertenecen a diferentes composantes de M. Entonces, para cada entero j, hay un entero k tal que la subcadena de $\mathcal{C}_{n_k}$ de p a q tiene un eslabón que intersecta al primer eslabón de $\mathcal{C}_{n_j}$ y un eslabón que intersecta al último eslabón de $\mathcal{C}_{n_j}$. Para ver que esto es así, tomemos un entero j. Sea W_i la unión de los eslabones de la subcadena de $\mathcal{C}_{n_i}$ de p a q. Como el conjunto límite de la sucesión $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un continuo en M que contiene a p y a q, entonces este conjunto límite es M. Entonces, algún W_k, con $k>j$ intersecta al primer y al último eslabones de $\mathcal{C}_{n_j}$ y la subcadena de $\mathcal{C}_{n_k}$ correspondiente a W_k tiene eslabones que intersectan al primer y al último eslabones de $\mathcal{C}_{n_j}$.

Se sigue del Teorema 1.5.16 que hay una cadena $\mathcal{E}_j$ tal que el primer eslabón de $\mathcal{E}_j$ contiene a p, el último eslabón de $\mathcal{E}_j$ contiene a q, $\mathcal{E}_j$ es una consolidación de $\mathcal{C}_{n_j}$, cada eslabón de $\mathcal{E}_j$ está en la unión de dos eslabones adyacentes de $\mathcal{C}_{n_j}$ y, por lo tanto, cada eslabón de $\mathcal{E}_j$ es de diámetro menor que $\frac{2}{j}$. Entonces, no hay perdida de generalidad en suponer que cada cadena en la sucesión $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una cadena de p a q.

Por lo tanto, hay una sucesión de cadenas $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de p a q tal que, para cada entero i se cumple:

1. $\mathcal{D}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{D}_i$;
2. La cadena $\mathcal{D}_{i+1}$ refina fuertemente a la cadena $\mathcal{D}_i$ (Lema 12.8 de [15]);
3. La malla de $\mathcal{D}_i$ es $\frac{1}{i}$;
4. $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i^*$, donde $\mathcal{D}_i^*$ es la unión de los elementos de $\mathcal{D}_i$.

De la misma forma encontramos que si p' y q' son puntos de diferentes composantes de M', hay una sucesión $\{\mathcal{D}'_i\}_{i=1}^{\infty}$ de cadenas de p' a q' tales que, para cada i se cumple:

1. $\mathcal{D'}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{D'}_i$;
2. La cadena $\mathcal{D'}_{i+1}$ refina fuertemente a la cadena $\mathcal{D'}_i$ (Lema 12.8 de [15]);
3. La malla de $\mathcal{D'}_i$ es $\frac{1}{i}$;
4. $M' = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D'}_i^*$, donde $\mathcal{D'}_i^*$ es la unión de los elementos de $\mathcal{D'}_i$.

Ahora, el Teorema 2.2.3 nos asegura que hay un homeomorfismo que manda M en M', p en p' y q en q'.

$\square$

La segunda caracterización que daremos del pseudoarco está en el Teorema 2.3.10 pero, para su demostración, necesitamos algunas definiciones y algunos resultados previos.

2.3.3 Definición. *Sean M un continuo y $A \subseteq M$. Se dice que M es* irreducible con respecto a A *si ningún subcontinuo propio de M contiene a A. Si existen dos puntos p y q en M tales que M es irreducible con respecto a $A = \{p, q\}$, entonces se dice que M es* irreducible.

2.3.4 Definición. *Sea M un continuo y E un subconjunto de M. La* frontera *de E se define como $Fr(E) = cl(E) \cap cl(M - E)$.*

Para una prueba de este teorema ver Teorema 5.6 de [14].

2.3.5 Teorema. *Sean M un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de M. Si K es una componente de E, entonces $cl(K) \cap Fr(E) \neq \emptyset$.*

2.3.6 Teorema. *Para cada subconjunto propio, R, de un continuo M, hay un punto p de $M - R$ tal que la unión de todos los continuos que están contenidos en $M - \{p\}$ e intersectan a R es densa en M.*

Demostración. Sean M un continuo y R un subconjunto propio de M. Sea N un subcontinuo de M tal que N es irreducible con respecto a R. Primero supongamos que $M = N$, es decir, supongamos que M es irreducible con respecto a R. Sea $p \in M - R$. Supongamos que el teorema es falso, es decir, supongamos que M contiene un subconjunto abierto $S \neq \emptyset$ tal que $S \cap H = \emptyset$, para todo subcontinuo H tal que $H \cap R \neq \emptyset$ y $p \notin H$. Como M es regular, existe un subconjunto abierto E de M tal que $cl(E) \subseteq S$. Entonces $cl(E) \cap H = \emptyset$ para todo continuo H tal que $H \cap R \neq \emptyset$ y $p \notin H$. Es decir, M contiene un subconjunto abierto E tal que cada subcontinuo de M que intersecte a R y a $cl(E)$ al mismo tiempo contiene a p. Entonces cada componente de $M - E$ que contiene un punto de R también contiene a p, de donde tenemos que, la componente de $M - E$ que contiene a p, es un continuo propio de M que contiene a R, pero esto no puede ser ya que M es irreducible con respecto a R.

Ahora consideremos el caso en que $M \neq N$. Como M es métrico y compacto, entonces es 2^o numerable y, por lo tanto, todos sus subespacios lo son. Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base numerable de $M - N$.

Construiremos ahora una sucesión $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos propios de M tales que N_{i+1} contenga un subconjunto abierto que, a su vez, contenga a $N_i \cup U_i$. Si un subconjunto abierto de un subcontinuo propio de M contiene a $N \cup U_1$, sea N_2 este subcontinuo, $N_2 = N$ en otro caso. Si un subconjunto abierto de un subcontinuo propio de M contiene a $N_2 \cup U_2$, sea N_3 este subcontinuo, $N_3 = N_2$ en otro caso. De forma similar obtenemos N_4, N_5,... Notemos que si W_i es un abierto de N_{i+1} que contiene a $N_i \cup U_i$, como se cumple que $W_i \subseteq W_j$ si $i \leq j$, entonces $(M - W_j) \subseteq (M - W_i)$. Entonces $\{M - W_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de cerrados con la propiedad de la intersección finita y, así, $\bigcap_{i=1}^{\infty}(M - W_i) \neq \emptyset$. Es decir, existe, por lo menos, un punto en $M - \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$. De esta forma, si $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ es densa en M, un punto de $M - \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ es el punto requerido.

Supongamos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ no es densa en M. Entonces, existe un entero positivo k tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i = \bigcup_{i=1}^{k} N_i$. Ya que, de lo contrario, $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ sería densa en M. En efecto, si E es un subconjunto abierto no vacío de $M - N$, entonces $U_j \subseteq E$ para alguna j y existe un continuo N_{j+1} tal que $U_j \cup N_j \subseteq N_{j+1}$. Se sigue de aquí que $(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i) \cap E \neq \emptyset$. Sea $H = \bigcup_{i=1}^{k} N_i$. Notemos que H es conexo, pues es unión de continuos con intersección no vacía, y H no pertence a ningún subconjunto abierto de ningún subcontinuo propio de M.

Sean E_i la componente de $M - U_i$ que contiene a H y $F_i = cl(M - E_i)$. Como $E_i \cap F_i$ tiene interior vacío, el Teorema de Baire nos asegura que existe $p \in M - H$ tal que $p \notin \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \cap F_i)$.

Veremos ahora que $F_i \cup H$ es conexo. Supongamos que $F_i \cup H = X \cup Y$, con X y Y cerrados en $F_i \cup H$ (que como $F_i \cup H$ es cerrado en M, entonces X y Y son cerrados en M), no vacíos tales que $X \cap Y = \emptyset$ y supongamos que $H \subseteq X$.

Notamos que $H \subseteq (M - Y)$ y, además, $M - Y \subseteq X \cup E_i$. Ya que, si $x \in M - Y$ y $x \in F_i \cup H$, entonces $x \in X$, o si $x \in M - Y$ y $x \notin F_i \cup H$ entonces $x \in E_i$.

Como $H \subseteq M - Y \subseteq X \cup E_i \subseteq M$, bastará ver que $X \cup E_i$ es un subcontinuo propio de M y así, H está contenido en un subconjunto abierto, $M - Y$, de un subcontinuo propio de M, $X \cup E_i$, lo cual contradice el hecho de que H no está contenido en ningún subconjunto abierto de ningún subcontinuo propio de M.

Veamos que $X \cup E_i$ es cerrado ya que X y E_i son cerrados. Para ver que $X \cup E_i$ es conexo notemos que $X = H \bigcup \cup_{\alpha \in I} C_\alpha$, donde C_α es una componente de F_i y $Y = \cup_{\beta \in J} C_\beta$, donde C_β es una componente de F_i. Por el Teorema 2.3.5 tenemos que $C_\alpha \cap cl(M - F_i) \neq \emptyset$, pero $C_\alpha \cap cl(M - F_i) = C_\alpha \cap cl(M - cl(M - E_i)) = C_\alpha \cap cl(int(M - (M - E_i))) = C_\alpha \cap cl(int(E_i)) \subseteq C_\alpha \cap cl(E_i) = C_\alpha \cap E_i$. Esto quiere decir que $C_\alpha \cap E_i \neq \emptyset$ para cada componente C_α de F_i que está en X y, como E_i es cerrado y conexo, entonces $X \cup E_i$ es conexo.

Ahora, para ver que $X \cup E_i$ es propio, sea $y \in Y$ y supongamos que $y \in E_i$. Como $y \in F_i$, tenemos que $y \in E_i \cap F_i \subseteq Fr(U_i)$, ya que si $y \in E_i \cap F_i$, $y \in Fr(E_i)$ y como $y \in Fr(E_i)$, entonces para todo abierto V de M tal que $y \in V$ se tiene que existen dos puntos $y_1, y_2 \in V$ tales que $y_1 \in V \cap E_i$ y $y_2 \in V \cap (M - E_i)$, pero esto último implica que $y_1 \notin U_i$ y $y_2 \in U_i$, es decir, $y \in Fr(U_i)$. Como Y es abierto en $F_i \cup H$, entonces $Y = W \cap (F_i \cup H)$, con W un abierto en M. Para este abierto W, como $Y \nsubseteq H$ y $F_i \cap W \neq \emptyset$, entonces existe $w_1 \in (W \cap U_i) \cap F_i$. Entonces $w_1 \notin E_i$, pero $w_1 \in W$ y $w_1 \in F_i \cup H$ y como $Y = W \cap (F_i \cup H)$, entonces $w_1 \in Y$, es decir, $w_1 \notin X$ y así $X \cup E_i$ es propio.

De lo anterior tenemos que $F_i \cup H$ es un subcontinuo de M. Definamos G_i como el continuo E_i o el continuo $F_i \cup H$ que no contiene a p. Ahora, $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ es densa en M. Ya que si U es un abierto de M, primero supongamos que $U \subseteq N$, entonces $U \subseteq E_i$, lo que implica que $U \cap F_i = \emptyset$ y, como $p \notin U$, ya que $p \in M - N$, entonces tenemos que, en este caso, $G_i = E_i \cap U \neq \emptyset$. Ahora, si $U \cap N \neq \emptyset$ pero U no es un subconjunto de N entonces sea $w \in U - N$. De esta forma existe un número natural i tal que $w \in U_i \subseteq cl(U_i) \subseteq (U - N)$. Como $E_i \cap F_i \subseteq Fr(U_i)$, entonces $E_i \cap U \neq \emptyset$ y $F_i \cap U \neq \emptyset$. Por último, si $U \cap H = \emptyset$, entonces existe una número i tal que $U_i \subseteq cl(U_i) \subseteq U$ y, como $E_i \cap F_i \subseteq Fr(U_i)$, $E_i \cap U \neq \emptyset$ y $F_i \cap U \neq \emptyset$. Por lo que $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ es densa en M y $p \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$.

□

2.3.7 Teorema. *Si $\mathcal{D}$ es una cadena que cubre a un continuo M y p es un punto de M tal que cada subcontinuo M' no degenerado de M que contiene a p es irreducible de p a algún otro punto de M', entonces hay una cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ que cubre a M tal que $\mathcal{E}$ es un refinamiento de $\mathcal{D}$ y $E_1 - cl(E_2)$ contiene a p.*

Demostración. Supongamos que el teorema es falso. Hay que ver entonces que hay un subcontinuo M' en M que contiene a p tal que M' es irreducible de p a algún otro punto de M' pero el teorema es falso para esta cadena dada $\mathcal{D}$. Por conveniencia supongamos que $M = M'$ pero como queremos que cualquier subcontinuo propio de M sí cumpla la conclusión del teorema consideremos la siguiente familia $\mathfrak{F} = \{M' \subset M \mid p \in M', M'$ no satisface el teorema$\}$ y ordenemos a $\mathfrak{F}$ por inclusión. Sea $\mathfrak{C} = \{M'_j\}_{j \in J}$ tal que $\mathfrak{C}$ está totalmente ordenada. Hay que ver que $\mathfrak{C}$ está acotada inferiormente y, así, podemos utilizar el Lema de Zorn para ver que hay un elemento minimal. Afirmamos que $\bigcap_{j \in J} M'_j$ es una cota inferior de $\mathfrak{C}$ y que está en $\mathfrak{F}$.

1. Notemos que $\bigcap_{j \in J} M'_j$ es un subcontinuo ya que $\mathfrak{C}$ está totalmente ordenada (intersección de continuos anidados, Corolario 6.1.9 de [7]).

2. Como $p \in M'_j$ para todo $j \in J$, entonces $p \in \bigcap_{j \in J} M'_j$.

3. Vemos que $\bigcap_{j \in J} M'_j$ no satisface la conclusión del teorema. Supongamos que $\bigcap_{j \in J} M'_j$ sí satisface el teorema. Sea K un subconjunto numerable de J tal que M'_k converge a $\bigcap_{j \in J} M'_j$ con $k \in K$. Como estamos

suponiendo que $\bigcap_{j\in J} M'_j$ sí satisface la conclusión del teorema, entonces existe una cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ tal que $\bigcap_{j\in J} M'_j \subseteq \bigcup_{r=1}^{n} E'_r$, donde $E'_i = E_i \cap (\bigcap_{j\in J} M'_j)$ y E_j es abierto en M. Entonces existe k_0 tal que $\bigcap_{j\in J} M'_j \subseteq M'_{k_0} \subseteq \bigcup_{r=1}^{n} E_r$, lo cual es una contradicción ya que M'_{k_0} no satisfacía la conclusión del teorema. Por lo tanto, $\bigcap_{j\in J} M'_j$ no satisface la conclusión del teorema.

Entonces, aplicando el Lema de Zorn (Lema 1.1.1), a la familia $\mathfrak{F}$ vemos que existe un elemento minimal en $\mathfrak{F}$. Es decir, existe un elemento minimal M_0 tal que M_0 no satisface la conclusión del teorema. Podemos suponer, entonces, que $M = M_0$ y supongamos que M intersecta a cada elemento de $\mathcal{D}$. Entonces, como la composante de p es un conjunto denso en M, M contiene un subcontinuo propio M'' que intersecta a cada eslabón de $\mathcal{D}$. Como M'' es un subcontinuo propio de M, entonces existe una cadena $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, ..., F_j\}$ que cubre a M'' tal que $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{D}$ y $p \in F_1 - cl(F_2)$ y ninguna cadena con menos eslabones tiene estas propiedades.

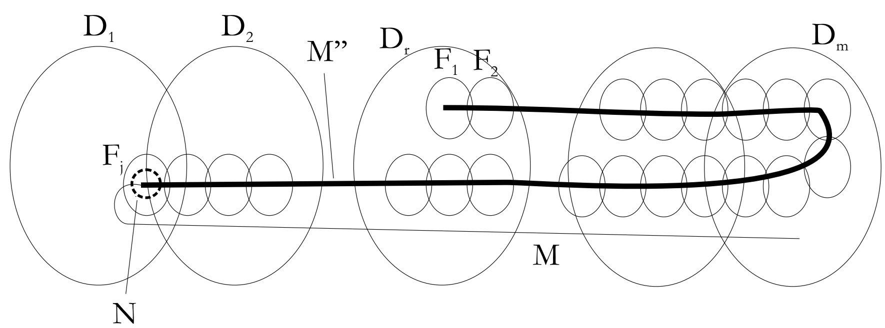

Figura 2.2: Dibujo Teorema 2.3.7

Entonces el último eslabón de $\mathcal{F}$ intersecta a $M'' \cap (D_1 \cup D_m)$, pues de otro modo, alguna cadena con menos elementos que $\mathcal{F}$ (con las propiedades requeridas) cubriría a M''. Supongamos que $(M'' \cap F_j) \cap D_1 \neq \emptyset$ y N es un conjunto abierto tal que $N \cap M'' \neq \emptyset$ y $cl(N) \subseteq (D_1 \cap F_j) - \{p\}$.

Como p satisface la condición de que cada subcontinuo M' que lo contiene es irreducible de p a algún otro punto de M', la componente de $M - N$ que contiene a p es un subconjunto de M'' y está cubierto por $\mathcal{F}$. Entonces existen dos conjuntos separados H y K tales que $M - N = H \cup K$, $p \in H$ y $H \subseteq \bigcup_{r=1}^{j} F_r$.

Como M es normal entonces existen conjuntos abiertos ajenos O_H y O_K tales que $H \subseteq O_H$ y $K \subseteq O_K$. Sea $\mathcal{E} = \{O_H \cap F_1, O_H \cap F_2, ..., O_H \cap (F_{j-1} - cl(N)), (D_1 - cl(O_H)) \cup N, O_K \cap D_2, O_K \cap D_3, ..., O_K \cap D_m\}$. Entonces, la cadena $\mathcal{E}$ cubre a M, es un refinamiento de la cadena $\mathcal{D}$ y $p \in ((O_H \cap F_1) - (O_H \cap F_2))$, lo cual es una contradicción. La contradicción viene de suponer que el teorema es falso para M.

$\square$

2.3.8 Teorema. *Sean M un continuo y $p \in M$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Cada subcontinuo no degenerado, H, de M que contiene a p es irreducible de p a algún otro punto de H.*
2. *Si dos subcontinuos de M contienen a p, entonces uno está contenido en el otro.*

Demostración. Primero veamos que la condición 1 implica la condición 2. Supongamos que H y K son dos subcontinuos de M tales que ninguno contiene al otro y que $p \in H \cap K$. Entonces existe algún punto $q \in H \cup K$ tal que $H \cup K$ no es irreducible de p a q, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se satisface la condición 2.

Ahora veamos que la condición 2 implica la condición 1. Sea M' un subcontinuo de M tal que $p \in M'$. Por el Teorema 2.3.6 hay un punto q de $M' - \{p\}$ tal que la unión de todos los continuos en $M' - \{q\}$ que contienen a p es densa en M'. Ahora, como estamos suponiendo que se satisface 2, M' es irreducible de p a q, ya que si H fuera un subcontinuo propio de M' que contiene a $\{p, q\}$ debería de existir un continuo K en $M - \{q\}$ tal que $p \in K$ pero no es un subcontinuo de H. Pero ni H ni K contienen uno al otro.

$\square$

2.3.9 Teorema. *Sean M un continuo encadenable y $p \in M$. Entonces, p es un punto final de M si y sólo si p satisface las condiciones* 1 *ó* 2 *del Teorema* 2.3.8.

Demostración. Primero supongamos que p es un punto final de M. Supongamos que para cada $\epsilon > 0$, existe una ϵ-cadena $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ tal que $p \in D_1 - D_2$ y supongamos que H y K son subcontinuos de M tales que

$p \in H \cap K$ y cada uno contiene un punto que está a distancia ϵ del otro. Es decir, existen $h \in H$ tal que $d(h, K) = \epsilon$ y $k \in K$ tal que $d(k, H) = \epsilon$.

Sea D_j el último elemento de $\mathcal{D}$ que contiene un punto de $H \cup K$. Si D_j contiene un punto de K, entonces cada elemento D_1, D_2,...,D_j contiene un punto de K. De aquí que ningún punto de H está más lejos que ϵ de K. Pero esto no puede ser porque estamos suponiendo que existe $h \in H$ que dista ϵ de K. Análogamente se obtiene una contradicción si D_j contiene un punto de H.

Ahora supongamos que p satisface alguna de las condiciones del Teorema 2.3.8, que, por el mismo Teorema 2.3.8, tenemos que se satisface la condición 1. Sea $\epsilon > 0$. El Teorema 2.3.7 nos asegura que existe una ϵ-cadena $\mathcal{C}$ que cubre a M tal que sólamente el primer eslabón de $\mathcal{C}$ contiene a p.

$\square$

2.3.10 Teorema. *Cada continuo M homogéneo, no degenerado y encadenable es homeomorfo a un pseudoarco.*

Demostración. Primero probaremos que M tiene un punto final p. Para cada entero n, sea q_n un punto de M tal que la $\frac{1}{n}$-cadena $\mathcal{D}^n$ cubra a M y un eslabón final de $\mathcal{D}^n$ contenga a q_n. Alguna subsucesión de $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto q. Entonces, el punto q de M tiene la propiedad de que para cada vecindad N de q y cada $\epsilon > 0$, hay una ϵ-cadena que cubre a M y uno de sus eslabones finales intersecta a M y está en N. Como M es homogéneo y cada homeomorfismo de M sobre sí mismo es uniformemente continuo, se sigue que cada punto de M tiene la propiedad de q.

Sea D_1 un eslabón final de una 1-cadena que cubre a M tal que D_1 contiene a un punto p_1 de M. Como p_1 tiene la propiedad de q, hay un eslabón final D_2 de una $\frac{1}{2}$-cadena que cubre a M tal que D_1 contiene a $cl(D_2)$ y D_2 contiene a un punto p_2 de M. También hay un eslabón final D_3 de una $\frac{1}{3}$-cadena que cubre a M tal que D_2 contiene a $cl(D_3)$ y D_3 contiene un punto p_3 de M. De forma similar obtenemos D_4, D_5,... Entonces el punto p, donde $\{p\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} D_j$, es un punto final de M, ya que para toda $\epsilon > 0$, hay una ϵ-cadena que cubre a M y tiene a p en un eslabón final.

Ahora, probaremos que el continuo M es hereditariamente indescomponible y así, por el Teorema 2.3.1, tendremos que M es un pseudoarco. Supongamos que M no es hereditariamente indescomponible. Es decir, supongamos que un subcontinuo H de M es tal que $H = H' \cup H''$, con H' y H'' subcontinuos propios de H. Sea $p \in H' \cap H''$. Como M es homogéneo, entonces p es un punto final de M, pero por el Teorema 2.3.9 tenemos que $H' \subseteq H''$ o $H'' \subseteq H'$, pero esto no es posible ya que H' y H'' son subcontinuos propios de H. Entonces M es hereditariamente indescomponible y, por lo tanto, M es un pseudoarco.

$\square$

Por último, la tercera caracterización que daremos del pseudoarco está en el Teorema 2.3.11. Ésta está relacionada con los puntos finales del pseudoarco.

2.3.11 Teorema. *Sea P un continuo no degenerado y encadenable. Entonces P es un pseudoarco si y sólo si cada punto de P es un punto final de P.*

Demostración. Primero supongamos que P es un pseudoarco. Entonces, por el Teorema 2.3.1, P es un continuo encadenable, no degenerado y hereditariamente indescomponible. Por lo que, por el Teorema 2.3.2, tenemos que si p y q son puntos en diferentes composantes de P, entonces p y q son puntos finales opuestos de P.

Ahora supongamos que cada punto de P es un punto final de P. Hay que verificar que P es hereditariamente indescomponible. Supongamos que P no es hereditariamente indescomponible. Entonces existen subcontinuos H y K tales que $P = H \cup K$ y ninguno está contenido en el otro, pero esto implica que ningún punto de $H \cap K$ es un punto final de P. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, P es hereditariamente indescomponible y así, por el Teorema 2.3.1, P es un pseudoarco.

$\square$

Capítulo 3

El círculo de pseudoarcos

Primero veremos la construccion del círculo de pseudoarcos. Después, probaremos algunos teoremas que nos servirán para ver que el círculo de pseudoarcos es homogéneo.

3.1. Construcción del círculo de pseudoarcos

Primero damos algunas definiciones.

3.1.1 Definición. *Una* cadena circular *es una cadena* $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ *en la cual dos eslabones* D_i *y* D_j *son adyacentes si y sólo si* $| i - j | \leq 1$ *o si* $i, j \in \{1, n\}$.

3.1.2 Definición. *Se dice que un continuo* $\mathbb{G}$ *es un* arco de continuos, $\mathbb{G} = \bigcup \mathcal{G}$ *donde* $\mathcal{G} = \{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$, *si existe una función continua, abierta y suprayectiva* $f : \mathbb{G} \to [0, 1]$ *tal que:*

1. $(\mathbb{G}/\sim)$ *es homeomorfo a* $[0, 1]$, *donde* $\mathbb{G}/\sim$ *es el espacio cociente de la relación* $X \sim Y$ *si y sólo si* $f(X) = f(Y)$.

2. $f^{-1}(t) = G_t$ *es un continuo para toda* t *en* $[0, 1]$.

Los continuos G_0 *y* G_1 *se llaman* elementos finales *de la colección* $\mathcal{G} = \{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$. *Usamos* $\mathbb{G}(a, b)$ *para denotar la unión de los continuos en la colección* $\{G_t \mid a \leq t \leq b\}$. *Si* $\mathbb{G} = \bigcup\{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ *es encadenable, entonces se dice que el arco de continuos* $\mathbb{G}$ *es encadenable.*

De la definición de un arco de continuos $\mathbb{G} = \bigcup\{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ tenemos que $\mathcal{G} = \{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ es una descomposición continua de continuos que llena a $\mathbb{G}$ tal que el correspondiente espacio cociente es un arco.

El círculo de pseudoarcos requiere una construcción preliminar. Sean W_1 y W_2 círculos en el plano con centro en $(0,0)$ y radios 1 y 2, respectivamente. Definiremos una colección $\{G_t \mid -\pi \leq t \leq \pi\}$ de arcos mutuamente ajenos tales que cada G_t es un segmento de línea recta que es irreducible de W_1 a W_2, o que es la unión de dos segmentos de línea recta irreducibles de W_1 a W_2 cuya intersección es un punto final común. Queremos que $G_\pi = G_{-\pi}$ y que $\bigcup_{t\in[-\pi,\pi]} G_t$ sea un continuo tipo círculo.

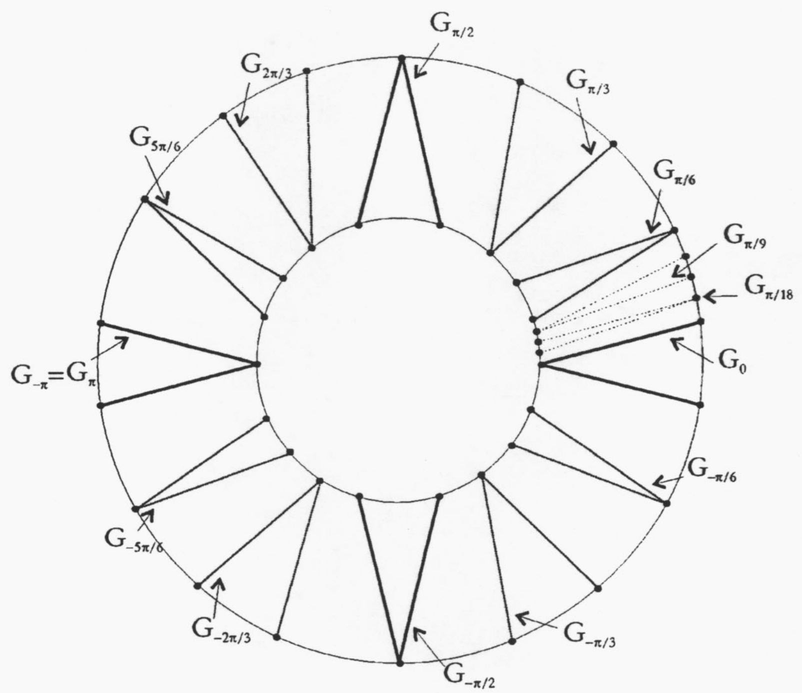

Figura 3.1: Continuo circular de conjuntos V

Sea $G_{-\pi}$ la unión del segmento de recta (dado en coordenadas polares) de $(1,-\pi)$ a $(2,-\pi-\frac{\pi}{12})$ con el segmento de recta de $(1,-\pi)$ a $(2,-\pi+\frac{\pi}{12})$ y hacemos $G_{-\pi} = G_\pi$. Sea G_0 la unión del segmento de recta de $(1,0)$ a $(2,\frac{\pi}{12})$

con el segmento de recta de $(1,0)$ a $(2,-\frac{\pi}{12})$. Sea $G_{\frac{\pi}{2}}$ la unión del segmento de recta de $(2,\frac{\pi}{2})$ a $(1,\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12})$ con el segmento de recta de $(2,\frac{\pi}{2})$ a $(1,\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12})$. Sea $G_{-\frac{\pi}{2}}$ la unión del segmento de recta de $(2,-\frac{\pi}{2})$ a $(1,-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12})$ con el segmento de recta de $(2,-\frac{\pi}{2})$ a $(1,-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12})$. A los elementos $G_0, G_{\frac{\pi}{2}}, G_{-\frac{\pi}{2}}, G_{\pi}, G_{-\pi}$ se les llaman conjuntos V.

Ahora, sea U^1 el conjunto de los puntos del anillo, W_1W_2, que se forma entre los círculos W_1 y W_2 pero que no están en ninguno de los conjuntos V construidos hasta el momento. Notemos que hay cuatro componentes U_1^1, U_2^1, U_3^1 y U_4^1 de U^1 que intersectan tanto a W_1 como a W_2. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las componentes están numeradas en sentido contrario a las manecillas del reloj, empezando en el cuadrante III. En cada una de estas componentes hay que definir dos conjuntos V. Sea $T_i^j = U_j^1 \cap W_i$. Entonces un punto final de T_i^j es un vértice de un conjunto V y un punto final de T_i^j es un punto final de un conjunto V. Tomamos los puntos que dividen al arco T_i^j en cuatro partes iguales y, así, construimos dos conjuntos V de forma tal que se vaya alternando la orientación de éstos. Hacemos lo mismo en todas las componentes U_j^1. Entonces hemos construimos otro ocho conjuntos V.

Sea U^2 el conjunto de los puntos del anillo W_1W_2 que no están en ninguno de los conjuntos V construidos hasta el momento. Hay doce componentes U_1^2, U_2^2,..., U_{12}^2 de U^2 que intersectan tanto a W_1 como a W_2. En cada una de estas componentes hay que definir dos conjuntos V de la misma forma en que las construimos para el caso de U^1. Observemos que ni en W_1 ni en W_2, ningún vértice de un conjunto V es adyacente a un vértice de otro conjunto V y ningún punto final de un conjunto V es adyacente a un punto final de otro conjunto V. Ahora hay que repetir el proceso una cantidad numerable de veces.

Sea $\mathbb{G}$ la unión de todos los conjuntos V, junto con cada segmento de línea recta que es el límite de una sucesión convergente de conjuntos V pero que no es un subconjunto de un conjunto V.

Hay que dar una numeración apropiada a los subíndices t en la colección $\mathcal{G} = \{G_t \mid -\pi \leq t \leq \pi\}$. Para esto hagamos lo siguiente: nos fijamos en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Los primeros cuatro elementos que tomamos son $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ y π, aunque este último está identificado con $-\pi$ y, así, los primeros cuatro elementos que construimos son: $G_{-\pi} = g_{\pi}$, $G_{-\frac{\pi}{2}}$, G_0 y $G_{\frac{\pi}{2}}$.

Ahora, en la región U_1^1, donde construimos dos conjuntos V, estos conjuntos V serán numerados como $G_{-\frac{5\pi}{6}}$ y $G_{-\frac{2\pi}{3}}$, siguiendo el sentido contrario de las manecillas del reloj. En la región U_2^1, donde también construimos dos conjuntos V que son $G_{-\frac{\pi}{3}}$ y $G_{-\frac{\pi}{6}}$. En la región U_3^1, estos conjuntos V son $G_{\frac{\pi}{6}}$ y $G_{\frac{\pi}{3}}$. Por último, en la región U_4^1, los conjuntos V son $G_{\frac{2\pi}{3}}$ y $G_{\frac{5\pi}{6}}$ (ver figura 3.1).

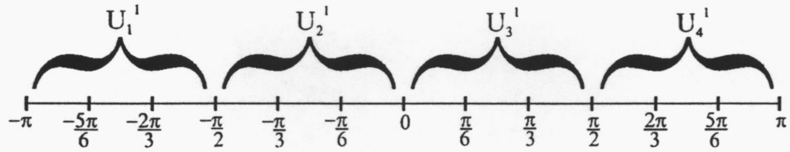

Figura 3.2: La numeración que daremos a los G_t

Repetimos el mismo proceso de numeración para las regiones U_1^2, U_2^2,..., U_{12}^2 y lo mismo para las regiones U_1^3, U_2^3,..., U_{36}^3, y así sucesivamente, hasta obtener la numeración que queremos para los conjuntos V de la colección $\mathcal{G} = \{G_t \mid -\pi \leq t \leq \pi\}$. Nos falta numerar los segmentos de recta que van de W_1 a W_2 que son límite de sucesiones de conjuntos V y que no son subconjuntos de ningún conjunto V ya numerado. Para esto, hagamos lo siguiente; sea L_w el límite de alguna sucesión de conjuntos V de $\mathcal{G} = \{G_t \mid -\pi \leq t \leq \pi\}$. Entonces como los conjuntos V ya están numerados, nos fijamos en la sucesión de índices. Esta sucesión de índices converge a un número $z \in [-\pi, \pi]$. Entonces hacemos $G_z = L_w$.

El continuo $\mathbb{G} = \bigcup\{G_t \mid -\pi \leq t \leq \pi\}$, así construido, es un continuo que se puede encadenar circularmente. Es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, existe una ϵ-cadena circular que cubre a $\mathbb{G}$. Resulta que $\mathbb{G}$ no es un continuo homogéneo.

Ahora, para construir el círculo de pseudoarcos, nos fijamos en el conjunto de los puntos extremos y vértices de los conjuntos V de la colección anterior $\mathcal{G}$. Como la familia de los conjuntos V es numerable, podemos suponer que están numerados como $V_1, V_2, V_3, \ldots$. Sean a_i y c_i los extremos de V_i y b_i el vértice de V_i. Supongamos que $b_i \in W_1$ si i es impar y que $b_i \in W_2$ si i es par. Observemos que existe una sucesión de cadenas circulares $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \ldots$, en el plano, que cumplen con lo siguiente:

1. Para toda i, la cadena $\mathcal{D}_{i+1}$ refina fuertemente a la cadena $\mathcal{D}_i$.

2. Cada elemento de $\mathcal{D}_i$ intersecta el anillo W_1W_2 y, para toda i, ningún par de eslabones adyacentes de $\mathcal{D}_i$ intersecta a W_1 y a W_2 al mismo

tiempo.

3. La malla de $\mathcal{D}_i$ es δ_i y la sucesión $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a cero.

4. Los subíndices de los elementos de $\mathcal{D}_i$ que intersectan W_1 preservan el orden contrario de las manecillas del reloj y los subíndices de los elementos de $\mathcal{D}_i$ que intersectan W_2 preservan el orden contrario de las manecillas del reloj.

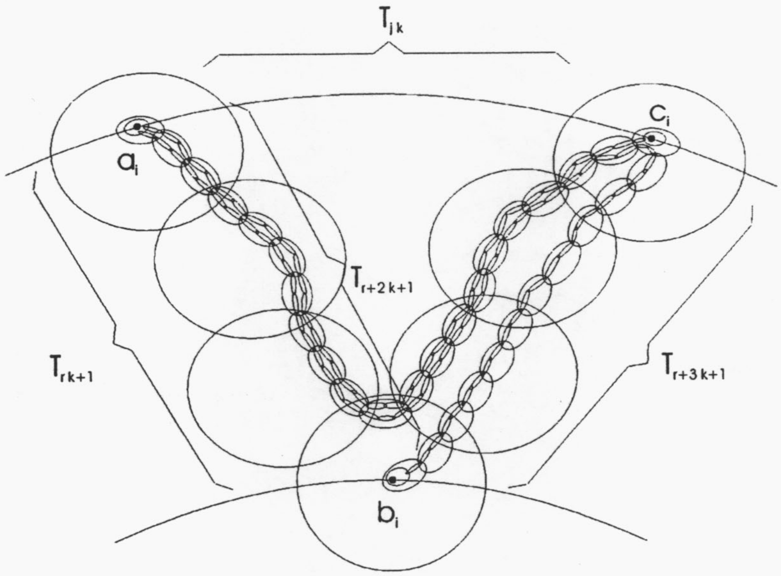

Figura 3.3: Círculo de pseudoarcos

5. Si a_i, c_i son extremos y b_i vértice de V_i, hay un número natural $m(i)$ tal que:

   - la subcadena de $\mathcal{D}_{m(i)}$, irreducible de a_i a c_i, contiene a b_i;
   - la subcadena de $\mathcal{D}_{m(i)+1}$, irreducible de a_i a b_i, contiene a c_i;
   - la subcadena de $\mathcal{D}_{m(i)+2}$, irreducible de b_i a c_i, contiene a a_i;
   - la subcadena de $\mathcal{D}_{m(i)+3}$, irreducible de a_i a c_i, contiene a b_i.

6. $(W_1 \cup W_2) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i^* = cl(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i, b_i, c_i\})$, donde $\mathcal{D}_i^*$ es la unión de los eslabones de $\mathcal{D}_i$.

7. Para cada i, $\mathcal{D}_i$ es la unión de varias subcadenas $\mathcal{T}_{i1}, \mathcal{T}_{i2}, ..., \mathcal{T}_{in(i)}$ tales que:

   - $\{\mathcal{T}_{i1}^*, \mathcal{T}_{i2}^*, ..., \mathcal{T}_{in(i)}^*\}$ es una cadena circular;
   - para cada j, con $1 \leq j \leq n(i)$, $\mathcal{T}_{ij}$ es irreducible de W_1 a W_2 o, para alguna k, $\mathcal{T}_{ij}$ es irreducible con respecto a $\{a_k, b_k, c_k\}$.

8. Si $h < i$, cada elemento de $\{\mathcal{T}_{ij}^*\}_{j=1}^{n(i)}$ es un subconjunto de dos elementos que se intersectan de $\{\mathcal{T}_{hk}^*\}_{k=1}^{n(h)}$.

9. Si $h < i$ y $\mathcal{T}_{ij}$ es un refinamiento de $\mathcal{T}_{hk} \cup \mathcal{T}_{hl}$, entonces $\mathcal{T}_{ij}$ se tuerce con respecto a $\mathcal{T}_{hk} \cup \mathcal{T}_{hl}$, donde $l \equiv (k+1)$ (mód$(n(h))$).

3.1.3 Definición. *Definimos el* círculo de pseudoarcos *como* $\mathbb{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}_i^*$, *donde* $\mathcal{D}_i^*$ *es la unión de los eslabones de* $\mathcal{D}_i$.

3.2. El círculo de pseudoarcos

En esta sección veremos algunos de los teoremas que necesitaremos para, finalmente, probar que el círculo de pseudoarcos es un continuo homogéneo plano.

3.2.1 Definición. *Se dice que un continuo M es* unicoherente *si cada vez que $M = A \cup B$, con A y B subcontinuos propios de M, entonces $A \cap B$ es conexo.*

3.2.2 Teorema. *Cada continuo encadenable es unicoherente.*

Demostración. Supongamos que un continuo encadenable M se puede ver como la unión de dos subcontinuos propios $M = M_1 \cup M_2$. Sean $p, q \in M_1 \cap M_2$. Hay que ver que p y q están en la misma componente de $M_1 \cap M_2$. Como M es encadenable, sea $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ una ϵ-cadena que cubre a M tal que $p \in D_i$ y $q \in D_j$ y podemos suponer que $i < j$. Como M_1 y M_2 son conexos y $\{p, q\} \subseteq M_1 \cap M_2$, entonces M_1 y M_2 intersectan a los eslabones $D_i, D_{i+1}, ..., D_j$. Entonces hay una sucesión de puntos $p = p_i, p_{i+1}, ..., p_{j-1}, p_j = q$ donde $p_r \in (D_r \cap M_1)$. Como $\mathcal{D}$ es una ϵ-cadena, entonces $d(p_r, M_2) < \epsilon$ y $d(p_r, p_{r+1}) < 2\epsilon$, ya que $p_r \in D_r$, diám$D_r < \epsilon$ y $D_r \cap M_2 \neq \emptyset$.

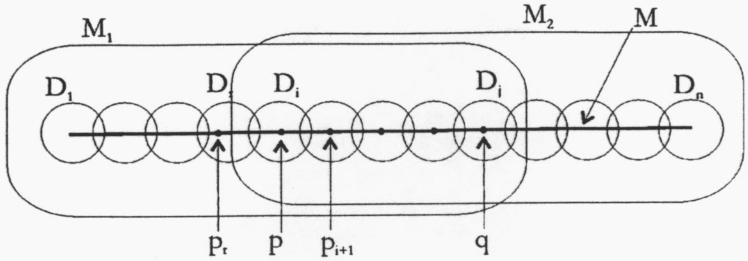

Figura 3.4: Cada continuo encadenable es unicoherente

Como M es encadenable, para todo número natural k, M se puede cubrir con una $\frac{1}{k}$-cadena. Entonces hay una sucesión $R_1, R_2, \ldots$ tal que R_k es un número finito de puntos, $p = p_1^k, p_2^k, \ldots, p_{t(k)-1}^k, p_{t(k)}^k = q$, tales que $p_r^k \in M_1$, $d(D_r^k, M_2) < \frac{1}{k}$ y $d(p_r^k, p_{r+1}^k) < \frac{2}{k}$.

Alguna subsucesión de $R_1, R_2, \ldots$ converge a un conjunto L. Pero L es conexo (Lema 4.16 de [14]), contiene a $\{p, q\}$ y pertenece a $M_1 \cap M_2$. Como p y q son arbitrarios tenemos que $M_1 \cap M_2$ es conexo. Por lo tanto, M es unicoherente.

□

3.2.3 Teorema. *Supongamos que $\mathbb{G}$ es un arco encadenable de continuos, $\mathbb{G} = \bigcup\{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$, y $0 < a < b < c < d < 1$. Hay un número positivo ϵ tal que si $\mathcal{D}$ es cualquier ϵ-cadena que cubre $\mathbb{G}$, entonces cualquier eslabón de $\mathcal{D}$ que intersecta a $\mathbb{G}(b,c)$ está entre algún eslabón de $\mathcal{D}$ que intersecta a $\mathbb{G}(0,a)$ y algún eslabón que intersecta a $\mathbb{G}(d,1)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y menor que

$$d(\mathbb{G}(0,a), \mathbb{G}(b,c)), \qquad d(\mathbb{G}(b,c), \mathbb{G}(d,1)) \qquad y \qquad \frac{d(\mathbb{G}(0,b), \mathbb{G}(c,1))}{2}.$$

Sean $\mathcal{D}$ una ϵ-cadena que cubre a $\mathbb{G}$ y D_i, D_j y D_k elementos de $\mathcal{D}$ que intersectan a $\mathbb{G}(0,a)$, $\mathbb{G}(b,c)$ y $\mathbb{G}(d,1)$, respectivamente, donde $i < k$. Hay que probar que $i < j < k$.

Como $\mathbb{G}(0,b)$ y $\mathbb{G}(c,1)$ son conexos, entonces hay subcadenas $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{D}''$ de $\mathcal{D}$ que contienen a D_i y D_k y cubren a $\mathbb{G}(0,b)$ y $\mathbb{G}(c,1)$, respectivamente, tales que cada eslabón de $\mathcal{D}'$ intersecta a $\mathbb{G}(0,b)$ y cada eslabón de $\mathcal{D}''$ intersecta a $\mathbb{G}(c,1)$. Como $d(\mathbb{G}(0,b), \mathbb{G}(c,1)) > 2\epsilon$, algún eslabón D_t de $\mathcal{D}$

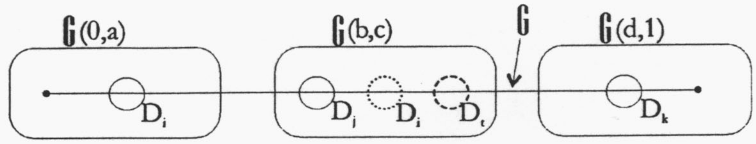

Figura 3.5: D_j está entre D_i y D_k.

está entre los eslabones de $\mathcal{D}'$ y los eslabones de $\mathcal{D}''$. Entonces $i < t < k$. Si $j < i < t$, entonces $\mathbb{G}(b,c)$ intersecta a D_i, ya que $\mathbb{G}(b,c)$ es conexo e intersecta a D_j y a D_t, lo cual es una contradicción. Ya que $\mathbb{G}(0,a) \cap D_i \neq \emptyset$ y $d(\mathbb{G}(0,a), \mathbb{G}(b,c)) > \epsilon$, por lo tanto, $i < j$. Análogamente, si suponemos que $t < k < j$ llegamos a una contradicción y, por lo tanto, $j < k$.

□

3.2.4 Teorema. *Supongamos que $\mathbb{G}$ es un arco encadenable de continuos, $\mathbb{G} = \bigcup\{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$. Entonces para toda $\epsilon > 0$, existe una ϵ-cadena $\mathcal{D}$ que cubre a $\mathbb{G}$ tal que el primer eslabón de $\mathcal{D}$ intersecta a G_0 y el último eslabón intersecta a G_1.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ y $\delta < \frac{d(G_0,G_1)}{2}$. Como $\mathbb{G}$ es encadenable, hay una δ-cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ que cubre a $\mathbb{G}$. Supongamos que E_i y E_j son el primer y último eslabones de la cadena $\mathcal{E}$ que intersectan a G_0. Supongamos, además, que E_r y E_s son el primer y último eslabones de $\mathcal{E}$ que intersectan a G_1. Entonces $\mathcal{E}(i,j)$ y $\mathcal{E}(r,s)$ son subcadenas de $\mathcal{E}$ que cubren propiamente a G_0 y a G_1, respectivamente, y ningún eslabón de $\mathcal{E}(i,j)$ intersecta a ningún eslabón de $\mathcal{E}(r,s)$. Supongamos que $i < j < r < s$. Sean a y b tales que $0 < a < b < 1$, $\mathcal{E}(i,j)$ cubre a $\mathbb{G}(0,a)$ y $\mathcal{E}(r,s)$ cubre a $\mathbb{G}(b,1)$. Aplicando el Teorema 3.2.3, existe $\gamma > 0$ tal que si $\mathcal{F}$ es una γ-cadena que cubre a $\mathbb{G}$, entonces cualquier eslabón de $\mathcal{F}$ que intersecta a $\mathbb{G}(a,b)$ está entre algún eslabón de $\mathcal{F}$ que intersecta a $\mathbb{G}(0,\frac{a}{2})$ y un eslabón que intersecta a $\mathbb{G}(\frac{b+1}{2},1)$. Más aún, si $\mathcal{F}$ es una γ-cadena que cubre irreduciblemente a $\mathbb{G}$, entonces $\mathcal{F}$ refina a $\mathcal{E}$ y cualquier eslabón de $\mathcal{F}$ que intersecta a $\mathbb{G}(0,a)$ está en un eslabón de $\mathcal{E}(i,j)$ y cualquier eslabón de $\mathcal{F}$ que intersecta $\mathbb{G}(b,1)$ está en un eslabón de $\mathcal{E}(r,s)$.

Sea $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, ..., F_m\}$ una γ-cadena irreducible que cubre a $\mathbb{G}$. Supongamos que F_t y F_u son eslabones de $\mathcal{F}$ que intersectan a G_0 y a G_1, respectivamente, y ningún eslabón de $\mathcal{F}$ entre F_t y F_u intersecta a $G_0 \cup G_1$.

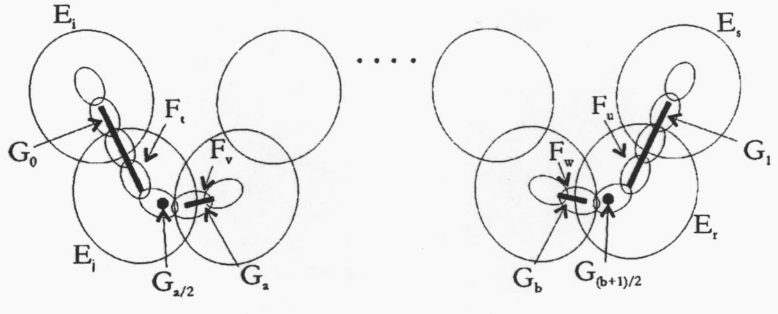

Figura 3.6: El primer eslabón de $\mathcal{D}$ intersecta a G_0 y el último a G_1.

Supongamos que $t < u$. Sea $\mathcal{F}(v,w)$ la subcadena de $\mathcal{F}(t,u)$ que es minimal con respecto a la propiedad de que F_v está en un eslabón extremo de $\mathcal{E}(i,j)$ y F_w está en un eslabón extremo de $\mathcal{E}(r,s)$. Entonces $\mathcal{E}(i,j)$ cubre cada eslabón de $\mathcal{F}(1,v)$, y $\mathcal{E}(r,s)$ cubre cada eslabón de $\mathcal{F}(w,m)$. Por conveniencia, supongamos que $F_v \subseteq E_j$ y que $F_w \subseteq E_r$. Sean A la unión de los elementos de $\mathcal{F}(1,v)$ y B la unión de los elementos de $\mathcal{F}(w,m)$. Entonces, la cadena $\mathcal{D}$ que buscamos es: $\mathcal{D} = \{A \cap E_i, A \cap E_{i+1}, ..., A \cap E_j, F_{v+1}, F_{v+2}, ..., F_{w-1}, B \cap E_r, B \cap E_{r+1}, ..., B \cap E_s\}$, donde $(A \cap E_i) \cap G_0 \neq \emptyset$ y $(B \cap E_s) \cap G_1 \neq \emptyset$.

$\square$

3.2.5 Teorema. *Supongamos que $\mathbb{G}$ es un arco encadenable de continuos, $\mathbb{G} = \bigcup\{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$, y que p es un punto de $\mathbb{G} - (G_0 \cup G_1)$. Entonces, cada vecindad abierta de p que no intersecta $G_0 \cup G_1$ separa G_0 de G_1 en $\mathbb{G}$.*

Demostración. Supongamos que U es una vecindad abierta de p que no intersecta a $G_0 \cup G_1$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $d(p, \mathbb{G} - U) > \epsilon$.

Por el Teorema 3.2.4 hay una ϵ-cadena $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ que cubre a $\mathbb{G}$ tal que $D_1 \cap G_0 \neq \emptyset$ y que $D_n \cap G_1 \neq \emptyset$. Sea $D_i \in \mathcal{D}$ tal que $p \in D_i$. Entonces $\mathbb{G} - U = A \cup B$, donde $A = \mathbb{G} - (U \bigcup \cup_{j=i}^{n} D_j)$ y $B = \mathbb{G} - (U \bigcup \cup_{j=1}^{i} D_j)$. Notemos que A y B son cerrados ya que U es abierto y, tanto $\cup_{j=i}^{n} D_j$ como $\cup_{j=1}^{i} D_j$, también son abiertos. Entonces A y B son abiertos y cerrados en $\mathbb{G} - U$ ya que son ajenos. Por lo tanto, A y B son cerrados en $\mathbb{G}$ y, así, U separa a G_0 de G_1.

$\square$

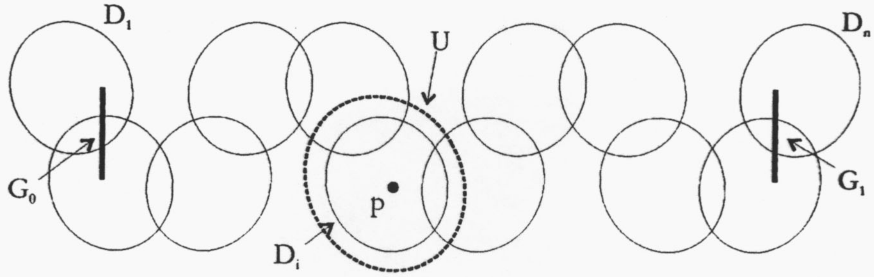

Figura 3.7: U separa a G_0 de G_1.

3.2.6 Teorema. *Supongamos que* $\mathbb{G}$ *es un arco encadenable de continuos indescomponibles,* $\mathbb{G} = \bigcup\{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ *y que* $\mathcal{E}$ *es una cadena que cubre a* $\mathbb{G}$ *tal que* $\mathcal{E}$ *cubre propiamente a cada* G_t *en la colección* $\mathcal{G} = \{G_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$. *Entonces, si* U *es un abierto tal que* $U \cap \mathbb{G} \neq \emptyset$, $U \cap (G_0 \cup G_1) = \emptyset$ *y* $cl(U)$ *está en un eslabón de* $\mathcal{E}$, *entonces* $\mathbb{G} - U$ *puede ser expresado como la unión de dos conjuntos ajenos* A *y* B *tales que* $G_0 \subseteq A$, $G_1 \subseteq B$ *y, para cada* $t \in [0, 1]$, *se tiene que* $A \cap G_t$ *intersecta a todos los eslabones de* $\mathcal{E}$ *o que* $B \cap G_t$ *intersecta a todos los eslabones de* $\mathcal{E}$.

Demostración. Sean $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \ldots$ una sucesión decreciente de cadenas que cubren a $\mathbb{G}$ tales que el primer eslabón de cada $\mathcal{D}_i$ intersecta a G_0 y el último intersecta a G_1 (Teorema 3.2.4). Sea D_1 un eslabón de alguna $\mathcal{D}_i$ tal que $D_1 \subseteq U$ y diám$(D_1) < 1$. Entonces, por el Teorema 3.2.5, $\mathbb{G} - D_1 = A_1 \cup B_1$ tal que $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $G_0 \subseteq A_1$ y $G_1 \subseteq B_1$.

Supongamos que el teorema es falso. Es decir, supongamos que existe $a_1 \in (0, 1)$ tal que $A_1 \cap G_{a_1}$ no intersecta a todos los eslabones de $\mathcal{E}$ y que $B_1 \cap G_{a_1}$ tampoco lo hace. Sean $r_A^{a_1} = d(G_{a_1} \cap A_1, B_1)$ y $r_B^{a_1} = d(G_{a_1} \cap B_1, A_1)$. Como $G_{a_1} \cap A_1$ y B_1 son cerrados y ajenos en $\mathbb{G}$ y $G_{a_1} \cap B_1$ y A_1 también son cerrados y ajenos en $\mathbb{G}$, entonces $r_A^{a_1}$ y $r_B^{a_1}$ son estrictamente positivos. Sean $r = \text{mín}\{\, r_A^{a_1}, r_B^{a_1}, \frac{\text{diám}(D_1)}{2} \,\}$ y $V = \{x \in \mathbb{G} \mid d(x, G_{a_1}) < r\}$. Por construcción, V es abierto y $G_{a_1} \subset V$. Ahora, como $\mathcal{G}$ es una colección semicontinua superiormente, entonces existe un conjunto abierto W tal que W es $\mathcal{G}$-saturado y $G_{a_1} \subset W \subset V$. Entonces existe $b_1 \in (0, 1)$ (que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_1 < b_1$) tal que $A_1 \cap G_{b_1}$ no intersecta a todos los eslabones de $\mathcal{E}$ y que $B_1 \cap G_{b_1}$ tampoco lo hace. Entonces, para cada $t \in [a_1, b_1]$, ni $A_1 \cap G_t$ ni $B_1 \cap G_t$ intersecta a todos los eslabones de $\mathcal{E}$.

Sea D_2 un eslabón de alguna $\mathcal{D}_j$ tal que $D_2 \subseteq D_1$, $D_2 \cap (\mathbb{G}(0, a_1) \cup$

$\mathbb{G}(b_1,1)) = \emptyset$ y diám$(D_2) < \frac{1}{2}$. Entonces, por el Teorema 3.2.5, $\mathbb{G} - D_2 = A_2 \cup B_2$ tal que $A_2 \cap B_2 = \emptyset$ y $A_1 \subseteq \mathbb{G}(0,a_1) \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq \mathbb{G}(b_1,1) \subseteq B_2$.

Como estamos suponiendo que el teorema es falso, entonces existen a_2 y b_2 tales que $0 < a_1 < a_2 < b_2 < b_1 < 1$ y, para cada $t \in [a_2, b_2]$, ni $A_2 \cap G_t$ ni $B_2 \cap G_t$ intersectan a todos los eslabones de $\mathcal{E}$.

Continuando con este proceso, encontramos una sucesión de abiertos D_1, D_2, D_3,..., una sucesión de números a_1, a_2, a_3,... y una sucesión de números b_1, b_2, b_3,... tales que $D_{j+1} \subseteq D_j$, D_j tiene diámetro menor que $\frac{1}{j}$ y es un eslabón de alguna D_i, $a_j < a_{j+1} < b_{j+1} < b_j$ y $\mathcal{G} - D_j = A_j \cup B_j$ tal que $\mathbb{G}(0, a_{j-1}) \subseteq A_j$ y $\mathbb{G}(b_{j-1}, 1) \subseteq B_j$.

Sea c un número tal que $0 < a_1 < a_2 < ... < c < ... < b_2 < b_1 < 1$. Para alguna sucesión creciente de enteros $n(1)$, $n(2)$, $n(3)$,..., la sucesión $A_{n(1)} \cap G_c$, $A_{n(2)} \cap G_c$, $A_{n(3)} \cap G_c$,... converge a un conjunto A_c y la sucesión $B_{n(1)} \cap G_c$, $B_{n(2)} \cap G_c$, $B_{n(3)} \cap G_c$,... converge a un conjunto B_c. Ahora, A_c es un continuo ya que $A_i \cap G_c$ no es la unión de dos conjuntos cuya distancia es mayor que $\frac{1}{i}$. Además, A_c es un subcontinuo propio de G_c ya que ningún $A_i \cap G_c$ intersecta a ningún eslabón de $\mathcal{E}$ (sin embargo G_c sí lo hace).

Análogamente, B_c es un continuo propio de G_c y $G_c = A_c \cup B_c$, lo cual es una contradicción ya que G_c es indescomponible.

□

Antes del siguiente teorema necesitamos definir lo que es una función de cadenas.

3.2.7 Definición. *Una* función de cadenas $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ *de una cadena* $\mathcal{D}$ *en una cadena* $\mathcal{E}$ *es una función que asigna un eslabón de* $\mathcal{E}$ *a cada eslabón de* $\mathcal{D}$ *tal que las imágenes de eslabones adyacentes son adyacentes, esto es,* $H(D_i)$ *y* $H(D_{i+1})$ *son eslabones adyacentes de* $\mathcal{E}$.

3.2.8 Teorema. *Supongamos que* $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ *y* $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$ *son cadenas y que* H_1 *y* H_2 *son dos funciones de cadenas de* $\mathcal{D}$ *en* $\mathcal{E}$ *tales que, tanto* H_1 *como* H_2*, mandan un eslabón de* $\mathcal{D}$ *en* E_{m-1}*. Entonces para algún eslabón* D_i *de* $\mathcal{D}$*, el eslabón* $H_1(D_i)$ *de* $\mathcal{E}$ *es adyacente al eslabón* $H_2(D_i)$*.*

Demostración. Supongamos que $H_1(D_1)$ precede a $H_2(D_1)$ en $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$, es decir, si $H_1(D_1) = E_k$ y $H_2(D_1) = E_l$, entonces $k \leq l$. Si cada eslabón $H_1(D_i)$ de $\mathcal{E}$ precede al correspondiente eslabón $H_2(D_i)$, sea D_i el eslabón de $\mathcal{D}$ tal que $H_1(D_i) = E_{m-1}$. Entonces $H_1(D_i)$ es adyacente a $H_2(D_i)$ ya que $H_2(D_i) = E_{m-1}$ o $H_2(D_i) = E_m$. Si para algún eslabón D_j de $\mathcal{D}$, $H_1(D_j)$ no precede a $H_2(D_j)$, sea D_i el primer eslabón de $\mathcal{D}$ tal que $H_1(D_i)$ no precede a $H_2(D_i)$, entonces $H_1(D_i)$ es adyacente a $H_2(D_i)$.

□

3.2.9 Teorema. *Supongamos que $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ es una cadena que cubre propiamente al pseudoarco P y que H es una función de cadenas de una cadena $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$ sobre la cadena $\mathcal{D}$. Entonces hay una cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$ que cubre propiamente a P tal que $E_i \subseteq D_j$ si $H(X_i) = D_j$. De hecho, si A y B son conjuntos cerrados en $P \cap D_1$ y $P \cap D_n$, respectivamente, $H(X_r) = D_1$ y $H(X_s) = D_n$, entonces la cadena $\mathcal{E}$ se puede elegir de manera que $A \subseteq E_r$ y que $B \subseteq E_s$.*

Demostración. Primero supongamos que $A \subseteq D_1 - cl(D_2)$, $B \subseteq D_n - cl(D_{n-1})$, $r = 1$, $s = m$, X_r es el único elemento de $\mathcal{X}$ tal que $H(X_r) = D_1$ y que X_s es el único elemento de $\mathcal{X}$ tal que $H(X_s) = D_n$.

Sean p_1 y p_2 puntos, en distintas composantes de P (Teorema 1.4.9), en $D_1 - cl(D_2)$ y $D_n - cl(D_{n-1})$, respectivamente, y $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$,... una sucesión de cadenas de p_1 a p_2 tales que cada $\mathcal{D}_i$ cubre a P, la malla de cada $\mathcal{D}_i$ es $\frac{1}{i}$, $\mathcal{D}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{D}_i$ y $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$. Entonces, se sigue del Teorema 1.5.18, que hay una cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$ de p_1 a p_2 tal que $\mathcal{E}$ cubre a P, $E_i \subseteq D_j$ si $H(X_i) = D_j$ (es decir, se pide que la cadena $\mathcal{E}$ siga el mismo patrón en la cadena $\mathcal{D}$ que el patrón que define la función $H : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$) y, para algún entero r, cada eslabón de $\mathcal{E}$ es la unión de eslabones de $\mathcal{D}_r$ (es decir, la cadena $\mathcal{E}$ es una consolidación de alguna cadena $\mathcal{D}_r$).

Ahora que hemos visto que el teorema es cierto para el caso especial hay que cambiar $\mathcal{D}$, $\mathcal{X}$ y $\mathcal{H}$ para obtener $\mathcal{D}'$, $\mathcal{X}'$ y $\mathcal{H}'$ para poder aplicar el caso especial, encontrar la cadena $\mathcal{E}'$ y ajustarla a una cadena $\mathcal{E}$ que será la cadena requerida. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $r < s$.

La cadena $\mathcal{D}'$ se obtiene como sigue: sean U_0, U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de D_1, $D_1 \cap D_2$ y D_2, respectivamente, tales que $P \cap (D_1 \cup D_2) \subseteq U_0 \cup U_1 \cup U_2$, $P \cap (D_1 - D_2) \cup A \subseteq U_0$, $P \cap (D_2 - D_1) \subseteq U_2$, $cl(U_0) \cap cl(U_2) = \emptyset$ y $A \cap cl(U_1) = \emptyset$. También, sean U_{n-1}, U_n y U_{n+1} subconjuntos abiertos de D_{n-1}, $D_{n-1} \cap D_n$ y D_n, respectivamente, tales que $P \cap (D_{n-1} \cup D_n) \subseteq U_{n-1} \cup U_n \cup U_{n+1}$, $P \cap (D_n - D_{n-1}) \cup B \subseteq U_{n+1}$, $P \cap (D_{n-1} -$

$D_n) \subseteq U_{n-1}$, $cl(U_{n-1}) \cap cl(U_{n+1}) = \emptyset$ y $B \cap cl(U_n) = \emptyset$. Entonces sea $\mathcal{D}' = \{U_0, U_1, U_2, D_3, ..., D_{n-2}, U_{n-1}, U_n, U_{n+1}\}$.

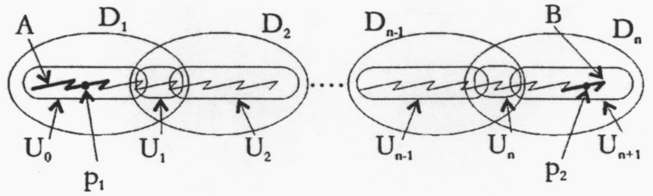

Figura 3.8: Dibujo Teorema 3.2.9

La cadena $\mathcal{X}' = \{Y', Y_r, Y_{r-1}, ..., Y_2, X_1, X_2, ..., X_m, Z_{m-1}, ..., Z_s, Z'\}$ se obtiene de $\mathcal{X}$ añadiendo r elementos al principio y $m + 1 - s$ al final. Entonces definimos la función de cadenas H' de $\mathcal{X}'$ sobre $\mathcal{D}'$ tal que $H'(Y') = U_0$, $H'(Z') = U_{n+1}$, $H'(X_i) = H'(Y_i) = H'(Z_i) = U_j$ (o D_j) si $H(X_i) = D_j$.

Como el caso especial aplica a $\mathcal{D}'$, $\mathcal{X}'$ y $\mathcal{H}'$, entonces hay una cadena $\mathcal{E}' = \{F', F_r, F_{r-1}, ..., F_2, E_1', E_2', ..., E_m', G_{m-1}, ..., G_s, G'\}$ tal que $A \subseteq F'$, $B \subseteq G'$ y un eslabón E' de $\mathcal{E}'$ está en un eslabón D de $\mathcal{D}'$ dado que D es la imagen bajo H' del eslabón de $\mathcal{X}'$ correspondiente a E'.

La cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$ que satisface la conclusión del teorema se obtiene de añadir ciertos elementos de $\mathcal{E}'$. El eslabón E_r es la unión de F', F_r y E_r'. Mientras que E_s es la unión de G', G_s, E_s'. En general, E_i es la unión de E_i', F_i, G_i (si hay tales F_i y G_i).

□

3.2.10 Teorema. *Supongamos que $\mathbb{P}$ es un arco encadenable de pseudoarcos, $\mathbb{P} = \bigcup\{P_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$, $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ es una cadena que cubre a $\mathbb{P}$ tal que cada eslabón de $\mathcal{D}$ intersecta a cada P_t de la colección $\mathcal{P} = \{P_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ y H es una función de cadenas de una cadena $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$ sobre $\mathcal{D}$. Entonces hay una cadena $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$ que cubre a $\mathbb{P}$ tal que cada P_t intersecta a cada eslabón de $\mathcal{E}$ y $E_i \subseteq D_j$ si $H(Y_i) = D_j$.*

Demostración. Primero consideremos el caso cuando $H(Y_1) = D_1$ y $H(Y_m) = D_n$. Sean U_A y U_B conjuntos abiertos con cerradura en D_1 y a D_n, respectivamente, tales que U_A y U_B intersectan a cada elemento de $\mathcal{P} = \{P_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

Se sigue del Teorema 3.2.9 que, para cada a, con $0 \leq a \leq 1$, hay una cadena $\mathcal{E}(a) = \{E(a)_1, E(a)_2, ..., E(a)_m\}$ que cubre P_a tal que $cl(U_A) \cap P_a \subseteq E(a)_1$, $cl(U_B) \cap P_a \subseteq E(a)_m$ y $E(a)_i \subseteq D_j$ si $H(Y_i) = D_j$.

La semicontinuidad superior de la colección $\mathcal{P} = \{P_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ implica que a está en un subconjunto conexo y abierto, I_a, del intervalo $I = [0,1]$ tal que si $x \in I_a$, entonces $\mathcal{E}(a)$ cubre P_x, $cl(U_A) \cap P_x \subseteq E(a)_1$ y $cl(U_B) \cap P_x \subseteq E(a)_m$. Una colección finita de tales conjuntos $I_{a_1}, I_{a_2}, ..., I_{a_t}$ cubren a I. Sean $\mathcal{E}(a_1), \mathcal{E}(a_2), ..., \mathcal{E}(a_t)$ las correspondientes cadenas $\mathcal{E}(a)$.

Ahora, hay que formar la cadena $\mathcal{E}$ a partir de $\mathcal{E}(a_1), \mathcal{E}(a_2), ..., \mathcal{E}(a_t)$. Se sigue del Teorema 3.2.5 que $\mathbb{P}$ se cubre por conjuntos abiertos $U_1, U_2, ..., U_t$ tales que $U_i \cap U_j = U_A \cup U_B$ si $i \neq j$ y, si $P_x \cap (U_i - (U_A \cup U_B)) \neq \emptyset$, entonces $x \in I_{a_i}$. Entonces la cadena $\mathcal{E}$, cuyo $k-$ésimo eslabón es:

$E_k = (E(a_1)_k \cap U_1) \cup (E(a_2)_k \cap U_2) \cap ... \cap (E(a_t)_k \cap U_t)$,

es la cadena requerida.

$\square$

En el Corolario 3.2.11 vamos a usar la notación que usaremos en la demostración del Teorema 3.2.13.

3.2.11 Corolario. *Supongamos que $\mathbb{Q}(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})$ es un arco encadenable de pseudoarcos, $\mathbb{Q}(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}) = \{Q_t \mid \frac{i}{k} \leq t \leq \frac{i+1}{k}\}$, $\mathcal{E}$ es una cadena que cubre $\mathbb{Q}(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})$ tal que cada Q_t intersecta a cada eslabón de $\mathcal{E}$ y H_1 es una función de cadenas de una cadena $\mathcal{D}(r,s)$ sobre $\mathcal{E}$. Entonces hay un número positivo ϵ tal que si $\mathcal{F}(t,u)$ es una ϵ-cadena irreducible que cubre a $\mathbb{Q}(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})$, entonces hay una función de cadenas $R_{\frac{2i+1}{2k}}$ de $\mathcal{F}(t,u)$ sobre $\mathcal{D}(r,s)$ tal que para cada eslabón F_j de $\mathcal{F}(t,u)$, se tiene que $F_j \subseteq (H_1 \circ R_{\frac{2i+1}{2k}})(F_j)$ y, si $\{F_v, F_{v+1}, ..., F_w\}$ es una subcadena de $\mathcal{F}(t,u)$ que cubre irreduciblemente algún Q_t, entonces cada eslabón de $\mathcal{D}(r,s)$ es la imagen de tres eslabones consecutivos de $\{F_v, F_{v+1}, ..., F_w\}$.*

Demostración. Se sigue, del Teorema 3.2.10, que hay una cadena $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_{s-r}\}$ (podemos suponer que $s > r$) tal que $\mathcal{C}$ cubre a $\mathbb{Q}(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})$, cada Q_t intersecta a cada eslabón de $\mathcal{C}$ y $C_l \subseteq E_j$ si $H_1(D_{s-r+l}) = E_j$. Sea $U_l = f^{-1}(I_{a_l})$, donde $f : \mathbb{Q}(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}) \to [\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$, $a_l \in [\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$ y $[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$ se cubre por un número finito de intervalos I_{a_j}. Sean $\delta > 0$ un número de Lebesgue para la cubierta $\{E_k \cap U_l\}$ (Teorema 1.2.8) y $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{\delta}{3}$. Si $\mathcal{F}(t,u)$ es una ϵ-cadena irreducible que cubre $Q(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})$, entonces para toda m, con $v \leq m \leq w$, existen tres eslabones consecutivos de $\mathcal{F}(t,u)$ contenidos en E_m.

Definamos $R_{\frac{2i+1}{2k}} : \mathcal{F}(t,u) \to \mathcal{D}(r,s)$ como $R_{\frac{2i+1}{2k}}(F_\alpha) = D_{r-s+j}$ si $F_\alpha \subseteq E_j$. Esta $R_{\frac{2i+1}{2k}}$, así definida, cumple con lo pedido.

□

3.2.12 Teorema. *Supongamos que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son cadenas que cubren propiamente a los pseudoarcos P y Q, respectivamente, y que H es una función de cadenas de $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{E}$ tal que cada eslabón de $\mathcal{E}$ es la imagen de un eslabón de $\mathcal{D}$ que contiene un punto de P que no está en la cerradura de ningún otro eslabón de $\mathcal{D}$. Entonces hay un homeomorfismo h de P sobre Q tal que para cada eslabón D_i de $\mathcal{D}$, $h(P \cap D_i) \subseteq H(D_i)$.*

Demostración. Usaremos dos simplificaciones en la demostración.

Primera simplificación: No hay pérdida de generalidad si suponemos que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ tienen el mismo número de eslabones, $H(D_i) = E_i$ y que cada eslabón de $\mathcal{D}$ contiene un punto de P que no está en la cerradura de ningún otro eslabón de $\mathcal{D}$. Esto se puede ver de la siguiente forma. Sea $\mathcal{D}'' = \{D_1'', D_2'', ..., D_n''\}$ la cadena tal que D_i'' es la unión de los eslabones de $\mathcal{D}$ que caen en el i-ésimo eslabón de $\mathcal{E}$ bajo H. Entonces $\mathcal{D}''$ es una cadena que cubre a P tal que cada eslabón de $\mathcal{D}''$ contiene un punto que no está en la cerradura de ningún otro eslabón de $\mathcal{D}''$. También, si h es un homeomorfismo de P en Q tal que $h(P \cap D_i'') \subseteq E_i$, entonces h es el homeomorfismo requerido. Por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{D}'' = \{D_1'', D_2'', ..., D_n''\} = \{D_1, D_2, ..., D_n\} = \mathcal{D}$, $H(D_i) = E_i$, $P \cap (D_1 - cl(D_2))$ contiene un punto p_1 y $P \cap (D_n - cl(D_{n-1}))$ contiene un punto p_2 tales que p_1 y p_2 pertenecen a distintas composantes de P.

Segunda simplificación: Reemplazaremos las cadenas $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ y $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ de la primera simplificación por las cadenas $\mathcal{D}' = \{D_1', D_2', ..., D_{4n-3}'\}$ y $\mathcal{E}' = \{E_1', E_2', ..., E_{4n-3}'\}$ que cubran a P y a Q, respectivamente, tales que $p_1 \in (D_1' - cl(D_2'))$, $p_2 \in (D_{4n-3}' - cl(D_{4n-4}'))$ y si h es un homeomorfismo de P sobre Q tal que $h(P \cap D_i') \subseteq cl(E_{i-1}) \cup cl(E_i) \cup cl(E_{i+1})$, entonces h será el homeomorfismo requerido.

Ahora, supongamos que q_1 y q_2 son puntos de distintas composantes de Q en $E_1 - cl(E_2)$ y $E_n - cl(E_{n-1})$, respectivamente. Sea $\epsilon > 0$ tal que cada subconjunto de Q de diámetro menor que 5ϵ está en un eslabón de $\mathcal{E}$ (número de Lebesgue, Teorema 1.2.8). Sea $\mathcal{F}$ una ϵ-cadena que cubre propiamente a Q. Entonces E_1' es la unión de todos los eslabones de $\mathcal{F}$ cuya cerradura intersecta a $E_1 - E_2$, E_5' es la unión de todos los eslabones de $\mathcal{F}$ cuya cerradura intersecta a $E_2 - (E_1 \cup E_3)$, E_9' es la unión de todos los eslabones de $\mathcal{F}$ cuya cerradura intersecta a $E_3 - (E_2 \cup E_4)$,..., y E'_{4n-3} es la unión de todos los eslabones de $\mathcal{F}$ cuya cerradura intersecta a $E_n - E_{n-1}$. Los eslabones de $\mathcal{F}$ con cerradura en $E_1 \cap E_2$ son combinados para formar E'_2, E'_3, E'_4; los eslabones de $\mathcal{F}$ con cerradura en $E_2 \cap E_3$ son combinados para formar E'_6, E'_7, E'_8,..., los eslabones de $\mathcal{F}$ con cerradura en $E_{n-1} \cap E_n$ son combinados para formar E'_{4n-6}, E'_{4n-5}, E'_{4n-4}.

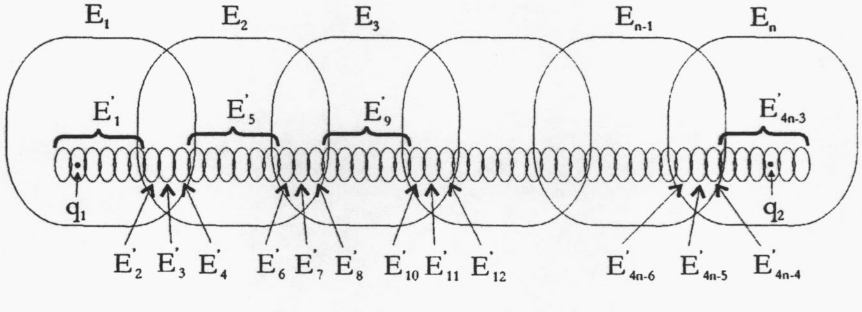

Figura 3.9: La cadena E'

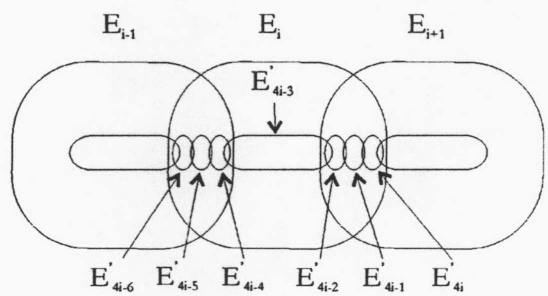

Figura 3.10: En el i-ésimo eslabón de la cadena E'

Sea $\delta > 0$ tal que la distancia entre cualesquiera par de eslabones no adyacentes de $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ es mayor que 5δ y la distancia entre $\{p_1, p_2\}$ y $D_2 \cup D_{n-1}$ sea mayor que 3δ. Sea $\mathcal{C}$ una δ-cadena que cubre propiamente a P y refina a $\mathcal{D}$. Entonces D'_3 es la unión de los eslabones de $\mathcal{C}$ que intersectan a $D_1 \cap D_2$, D'_7 es la unión de los eslabones de $\mathcal{C}$ que intersectan a $D_2 \cap D_3$,..., y D'_{4n-5} es la unión de los eslabones de $\mathcal{C}$ que intersectan a $D_{n-1} \cap D_n$. También D'_1 es la unión de los eslabones de $\mathcal{C}$ cuyas cerraduras contienen a p_1; D'_2 es la unión de los otros eslabones de $\mathcal{C}$ en $D_1 - cl(D_2)$; D'_4, D'_5, D'_6 están formados de combinar eslabones de $\mathcal{C}$ en $D_2 - cl(D_1 \cup D_3)$,..., D'_{4n-3} es la unión de los eslabones de $\mathcal{C}$ cuyas cerraduras contienen a p_2; D'_{4n-4} es la unión de los otros eslabones de $\mathcal{C}$ en $D_n - cl(D_{n-1})$.

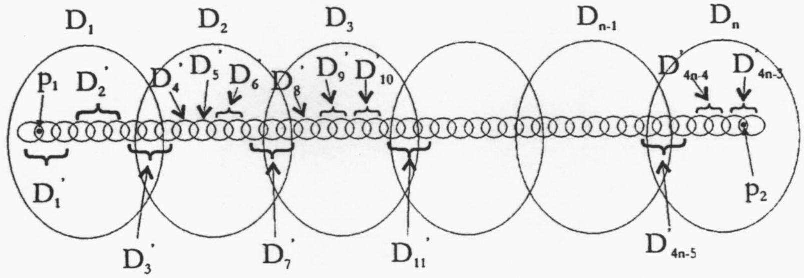

Figura 3.11: Cadena D'

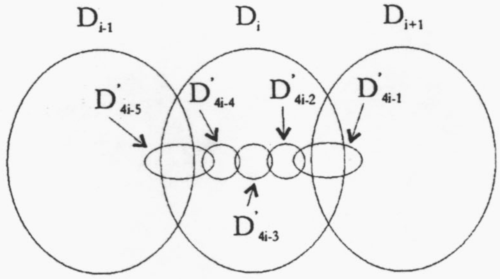

Figura 3.12: En el i−ésimo eslabón de la cadena D

Ahora mostraremos que si h es un homeomorfismo de P a Q tal que $h(P \cap D'_i) \subseteq cl(E'_{i-1}) \cup cl(E'_i) \cup cl(E'_{i+1})$, entonces h es el homeomorfismo requerido ya que $h(P \cap D_i) \subseteq E_i$. La razón es que $h(P \cap D_i) \subseteq h(P \cap (D'_{4i-5} \cup D'_{4i-4} \cup D'_{4i-3} \cup D'_{4i-2} \cup D'_{4i-1})) \subseteq cl(E'_{4i-6}) \cup cl(E'_{4i-5}) \cup cl(E'_{4i-4}) \cup cl(E'_{4i-3}) \cup cl(E'_{4i-2}) \cup cl(E'_{4i-1}) \cup cl(E'_{4i}) \subseteq cl(E_i)$.

Se sigue, del Teorema 2.2.4 y de la definición del pseudoarco, que hay una sucesión de cadenas $\{\mathcal{F}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de p_1 a p_2 tales que $\mathcal{F}_i$ cubre a P, $\mathcal{F}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{F}_i$ y la malla de $\mathcal{F}_i$ es $\frac{1}{i}$. También hay una sucesión de cadenas $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^{\infty}$ de q_1 a q_2 tal que $\mathcal{C}_i$ cubre a Q, $\mathcal{C}_{i+1}$ se tuerce en $\mathcal{C}_i$ y la malla de $\mathcal{C}_i$ es $\frac{1}{i}$.

Vamos a definir el homeomorfismo h. Sean $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de cadenas de p_1 a p_2 y $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de cadenas de q_1 a q_2 tales que:

1. $\mathcal{D}_i$ cubre a P y $\mathcal{E}_i$ cubre a Q.

2. $\mathcal{D}_i$ y $\mathcal{E}_i$ tienen malla $\frac{1}{i}$.

3. $\mathcal{D}_i = \{D_1^i, D_2^i, ..., D_{n_i}^i\}$ y $\mathcal{E}_i = \{E_1^i, E_2^i, ..., E_{n_i}^i\}$ tienen el mismo número de eslabones.

4. Hay dos funciones de cadenas $H_i^e : \mathcal{E}_{i+1} \to \mathcal{E}_i$ y $H_i^d : \mathcal{D}_{i+1} \to \mathcal{D}_i$ tales que $E_j^{i+1} \subseteq H_i^e(E_j^{i+1})$ y $D_j^{i+1} \subseteq H_i^d(D_j^{i+1})$ y si $H_i^d(D_j^{i+1}) = D_k^i$ entonces $H_i^e(E_j^{i+1}) = E_k^i$.

Veamos que, efectivamente, existen estas dos sucesiones de cadenas. Hagamos $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'$ y $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}'$, donde $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{E}'$ son las cadenas obtenidas en la segunda simplificación. Sean $\mathcal{E}_2$ alguna de las cadenas $\mathcal{C}_i$ tal que su malla sea $\frac{1}{3}$, refine a $\mathcal{E}_1$ y si H_1^e es cualquier función de cadenas de $\mathcal{E}_2$ sobre $\mathcal{E}_1$ entonces $E_j^2 \subseteq H_1^e(E_j^2)$ para cada j. Entonces, por el Teorema 1.5.18, encontramos que hay una cadena $\mathcal{D}_2$ de p_1 a p_2 que cubre a P tal que para algún entero r, cada eslabón de $\mathcal{D}_2$ es la unión de eslabones de $\mathcal{F}_r$, $\mathcal{D}_2$ tiene el mismo número de eslabones que $\mathcal{E}_2$ y $D_j^2 \subseteq H_1^d(D_j^2) = D_k^1$ si $H_1^e(E_j^2) = E_k^1$.

Sean $\mathcal{D}_3$ alguna $\mathcal{F}_i$ tal que su malla sea $\frac{1}{4}$, refine a $\mathcal{D}_2$ y si H_2^d es cualquier función de cadenas de $\mathcal{D}_3$ sobre $\mathcal{D}_2$ entonces $D_j^3 \subseteq H_2^d(D_j^3)$ para cada j. Nuevamente, se sigue del Teorema 1.5.18, que hay una cadena $\mathcal{E}_3$ de q_1 a q_2 que cubre a Q tal que para algún entero s, cada eslabón de $\mathcal{E}_3$ es la unión de eslabones de $\mathcal{C}_s$, $\mathcal{E}_3$ tiene el mismo número de eslabones que $\mathcal{D}_3$ y $E_j^3 \subseteq H_2^e(E_j^3) = E_k^2$ si $H_2^d(D_j^3) = D_k^2$. Repitiendo este proceso obtenemos las sucesiones $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Sea $A_d(p,i)$ la unión de los elementos de $\mathcal{D}_i$ que contienen al punto p de P y $B_e(p,i)$ la unión de los elementos correspondientes de $\mathcal{E}_i$. Entonces $A_d(p,i+1) \subseteq A_d(p,i)$. Además, $B_e(p,i+1) \subseteq B_e(p,i)$ ya que si E_j^{i+1} está en $B_e(p,i+1)$, D_j^{i+1} contiene a p, entonces $H_i^d(D_j^{i+1}) = D_k^i$ contiene a p y está en $D(p,i)$ y E_k^i está en $E(p,i)$ y contiene a E_j^{i+1}. El homeomorfismo h se define de tal manera que $h(p)$ es la intersección de las cerraduras de las sucesiones decrecientes de conjuntos abiertos $\{B_e(p,i)\}_{i=1}^{\infty}$. Del Teorema 2.2.2 se sigue que h es un homeomorfismo de P sobre Q.

Finalmente hay que ver que $h(P \cap D_i^1) \subseteq cl(E_{i-1}^1) \cup cl(E_i^1) \cup cl(E_{i+1}^1)$. Pero si p es un punto de D_i^1, entonces $A_d(p,1) \subseteq D_{i-1}^1 \cup D_i^1 \cup D_{i+1}^1$, por lo que $h(p) \in cl(B_e(p,1)) \subseteq cl(E_{i-1}^1) \cup cl(E_i^1) \cup cl(E_{i+1}^1)$. Por lo tanto, $h(P \cap D_i^1) \subseteq cl(E_{i-1}^1) \cup cl(E_i^1) \cup cl(E_{i+1}^1)$.

$\square$

La condición de que cada eslabón de la cadena $\mathcal{E}$ sea la imagen de un eslabón de $\mathcal{D}$ que cubre a un punto de P que no es cubierto por la cerradura de ningún otro eslabón de $\mathcal{D}$ es necesaria. Porque podría suceder que $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ y $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ tengan el mismo número de eslabones, $H(D_i) = E_i$ para toda i, $P \subseteq cl(D_2) \cup cl(D_3) \cup ... \cup cl(D_{n-1})$ y $Q \not\subseteq cl(E_2) \cup cl(E_3) \cup ... \cup cl(E_{n-1})$. Esta condición podría ser sustituida por la condición de que cada eslabón de $\mathcal{E}$ sea la imagen de un eslabón interior de $\mathcal{D}$.

3.2.13 Teorema. *Supongamos que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son continuos, arcos encadenables de pseudoarcos, $\mathbb{P} = \bigcup\{P_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ y $\mathbb{Q} = \bigcup\{Q_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$. Entonces cada homeomorfismo h que manda la unión de los extremos de $\mathbb{P}$ sobre la unión de los extremos de $\mathbb{Q}$ puede ser extendido a un homeomorfismo que manda a $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$. De hecho, si $h(P_0) = Q_0$, el homeomorfismo extendido, h, se puede escoger tal que $h(P_t) = Q_t$ para toda $t \in [0,1]$.*

Demostración. Hay que conseguir una sucesión de cadenas $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$,... que cubran a $\mathbb{P}$ y una sucesión de cadenas $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$,... que cubran a $\mathbb{Q}$ y usar estas sucesiones para definir el homeomorfismo h. También obtendremos dos sucesiones de funciones de cadenas H_1, H_2,... y K_1, K_2,... tales que H_i manda a $\mathcal{D}_i$ sobre E_i y K_i manda a $\mathcal{E}_{i+1}$ sobre $\mathcal{D}_i$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_1 \arrow[d, "H_1"] & \mathcal{D}_2 \arrow[d, "H_2"] & \mathcal{D}_3 \arrow[d, "H_3"] & \cdots & \mathcal{D}_i \arrow[d, "H_i"] & \mathcal{D}_{i+1} \arrow[d, "H_{i+1}"] & \cdots \\
\mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_2 \arrow[ul, "K_1"'] & \mathcal{E}_3 \arrow[ul, "K_2"'] & {} \arrow[ul, "K_3"'] & \mathcal{E}_i \arrow[ul, "K_{i-1}"'] & \mathcal{E}_{i+1} \arrow[ul, "K_i"'] & \mathcal{E}_{i+2} \arrow[ul, "K_{i+1}"']
\end{tikzcd}$$

Figura 3.13: Diagrama de funciones de cadenas

La función de cadenas H_1 será una aproximación al homeomorfismo h en el sentido de que para cada punto $p \in \mathbb{P}$, existe un número natural i tal que

$p \in D_i^1$ (D_i^1 es el i-ésimo eslabón de $\mathcal{D}_1$) y $h(p) \in H_1(D_i^1) \in \mathcal{E}_1$. También, K_1 será una aproximación a h^{-1} en el sentido de que para cada punto $q \in \mathbb{Q}$, existe un número natural i tal que $q \in E_i^2$ (E_i^2 es el i-ésimo eslabón de $\mathcal{E}_2$) y $h^{-1}(q)$ está en el eslabón $K_1(E_i^2) \in \mathcal{D}_1$. Más aún, K_1 concuerda con H_1^{-1} en que cada eslabón de $\mathcal{E}_2$ está en su imagen bajo $H_1 \circ K_1$.

Las cadenas $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$,..., $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$,... y las funciones de cadenas H_1, H_2,..., K_1, K_2,... serán definidas en el siguiente orden: $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{D}_1$, H_1, $\mathcal{E}_2$ K_1, $\mathcal{D}_2$, H_2, $\mathcal{E}_3$, K_2,...

Las cadenas $D_j^i \in \mathcal{D}_i$ y $E_j^i \in \mathcal{E}_i$ tendrán malla $\frac{1}{2^i}$. En general, E_j^{i+1} estará contenido en $(H_i \circ K_i)(E_j^{i+1})$ y D_j^{i+1} estará contenido en $(K_i \circ H_{i+1})(D_j^{i+1})$.

Las sucesiones de cadenas $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{\infty}$, y las sucesiones de funciones de cadenas $\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ serán elegidas de tal forma que para cada punto p de P_t, exista una sucesión decreciente de eslabones $D_{n_1}^1$, $D_{n_2}^2$, $D_{n_3}^3$,... que contienen a p (cada $D_{n_i}^i \in \mathcal{D}_i$) tal que $(K_{i-1} \circ H_i)(D_{n_i}^i) = D_{n_{i-1}}^{i-1}$ y $H_1(D_{n_1}^1)$, $H_2(D_{n_2}^2)$, $H_3(D_{n_3}^3)$... sea una sucesión de eslabones (cada $H_i(D_{n_i}^i) \in \mathcal{E}_i$) cuya cerradura contiene un punto q de Q_t.

El homeomorfismo h va a ser elegido de tal manera que $h(p) = q$. Para definir las cadenas $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{\infty}$ y las funciones de cadenas $\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ adecuadamente, extenderemos el homeomorfismo h a ciertos elementos de $\{P_t\}$ más adelante.

Sean $\mathbb{P}(a,b)$ la unión de los elementos de $\{P_t \mid a \leq t \leq b\}$ y $\mathbb{Q}(a,b)$ la unión de los elementos de $\{Q_t \mid a \leq t \leq b\}$.

<u>*Paso*</u> <u>1</u> En este paso definiremos la cadena $\mathcal{E}_1$ y extenderemos el homeomorfismo h a algunos elementos más de $\mathbb{P} = \{P_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$. Este paso consta de tres partes:

(a) Considerar una cadena $\mathcal{E}_1$ irreducible que cubre a $\mathbb{Q}$ y cuya malla es $\frac{1}{2}$.

(b) Se sigue de la continuidad de la colección $\{Q_t\}$ y de la compacidad de un arco que hay un entero positivo n, tal que si $0 \leq b - a \leq \frac{1}{n}$, entonces la subcadena de $\mathcal{E}_1$ que irreduciblemente cubre a $\mathbb{Q}(a,b)$, cubre propiamente a cada elemento de $\{Q_t \mid a \leq t \leq b\}$.

(c) Extender el homeomorfismo h ya definido en $P_0 \cup P_1$ a $P_0 \cup P_{\frac{1}{n}} \cup P_{\frac{2}{n}} \cup \ldots \cup P_1$.

<u>*Paso*</u> <u>2</u> En este paso definiremos $\mathcal{D}_1$, H_1 y extendemos la función h hasta definirla en algunos elementos más de $\{P_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$ y queremos que se cumplan las siguientes condiciones:

I. Si el eslabón D_j^1 de $\mathcal{D}_1$ intersecta a $P_{\frac{1}{n}}$, entonces $H_1(D_j^1)$ contiene a $h(D_j^1 \cap P_{\frac{i}{n}})$.

II. Para cada $t \in [0,1]$, H_1 manda a cualquier subcadena de $\mathcal{D}_1$ que cubre propiamente a P_t sobre una subcadena de $\mathcal{E}_1$ que cubre propiamente a Q_t.

Las partes (a) a (e) del Paso 2 van a ser usadas para obtener $\mathcal{D}_1$ y H_1. Las partes (f) a (h) muestran que H_1 y $\mathcal{D}_1$ satisfacen las condiciones I y II. En la parte (i) extendemos el homeomorfismo a otros elementos de $\{P_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

(a) Sea $\mathcal{F}$ una ϵ-cadena que cubre a $\mathbb{P}$, donde ϵ es suficientemente pequeño para hacer ciertas las siguientes afirmaciones:

1. $\epsilon < \frac{1}{2}$;
2. ningún eslabón de $\mathcal{F}$ intersecta a ambos P_a y P_b si $\frac{1}{2n} \leq b - a$;
3. la imagen bajo h de cualquier subconjunto de $P_0 \cup P_{\frac{1}{n}} \cup P_{\frac{2}{n}} \cup ... \cup P_1$ de diámetro menor que 5ϵ está en un elemento de $\mathcal{E}_1$;
4. cualquier subcadena de $\mathcal{F}$ que cubre un elemento de $\{P_t\}_{t\in[0,1]}$ tiene por lo menos seis veces el número de eslabones de $\mathcal{E}_1$.

(b) En esta parte del Paso 2 vamos a obtener aproximaciones R_0, $R_{\frac{1}{2n}}$, $R_{\frac{1}{n}}$, $R_{\frac{3}{2n}}$,...,R_1 a H_1. Primero describimos $R_{\frac{i}{n}}$, $(i \in \{0,1,2,...,n\})$. Consideremos la subcadena $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ de $\mathcal{F}$ que cubre irreduciblemente a $P_{\frac{i}{n}}$ y la subcadena $\{E_r, E_{r+1}, ..., E_s\}$ de $\mathcal{E}_1$ que cubre irreduciblemente a $Q_{\frac{i}{n}}$. Entonces, $R_{\frac{i}{n}}$ es una función de cadenas de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ sobre $\{E_r, E_{r+1}, ..., E_s\}$ tal que $h(F_j \cap P_{\frac{i}{n}}) \subseteq R_{\frac{i}{n}}(F_j)$ y, para cada elemento E_k de $\mathcal{E}_1(r,s)$, hay tres elementos consecutivos de $\mathcal{F}(t,u)$ que van a E_k bajo $R_{\frac{i}{n}}$. Una precaución que hay que tomar para asegurar que cada elemento E_k es la imagen de tres elementos consecutivos de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ es que $R_{\frac{i}{n}}(F_{j-2}) = R_{\frac{i}{n}}(F_{j-1}) = R_{\frac{i}{n}}(F_j) = R_{\frac{i}{n}}(F_{j+1}) = R_{\frac{i}{n}}(F_{j+2}) = E_k$, si E_k es el único elemento de $\mathcal{E}_1$ tal que $h(F_j \cap P_{\frac{i}{n}}) \subseteq E_k$. La condición (a) del Paso 2 nos permite hacer esto. A menos de que F_j sea el primero o último elemento de $\mathcal{F}$, tal que un $R_{\frac{i}{n}}$ mande más de tres elementos consecutivos de $\mathcal{F}$ en E_k.

Ahora hay que describir $R_{\frac{2i+1}{2n}}$, $(i \in \{0,1,2,...,n-1\})$. Sean $\mathcal{F}(t,u)$ y $\mathcal{E}_1(r,s)$ las subcadenas de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{E}_1$ que irreduciblemente cubren a

$\mathbb{P}(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ y a $\mathbb{Q}(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$, respectivamente. Puede ser que los subíndices t y u mencionados aquí difieran considerablemente de los t y u mencionados en el último párrafo, pero los r y s usados aquí no difieren por más de uno de los utilizados allá. Se sigue de la condición (b) del Paso 1, que $\mathcal{E}_1(r,s)$ cubre propiamente a cada elemento de $\{Q_t \mid \frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}\}$. Entonces $R_{\frac{2i+1}{2n}}$ es cualquier función de cadenas de cualesquiera $F_t, F_{t+1}, ..., F_u$ sobre $E_r, E_{r+1}, ..., E_s$ tan grande como sea para que resulte cierto que, para cada elemento E_k de $\mathcal{E}_1(r,s)$ y cada subcadena $\{F_v, F_{v+1}, ..., F_w\}$ de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ que irreduciblemente cubre a un elemento de $\{P_t \mid \frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}\}$, haya tres elementos consecutivos de $\{F_v, F_{v+1}, ..., F_w\}$ que van a E_k bajo $R_{\frac{2i+1}{2n}}$. Vamos a tener que ser más cuidadosos en describir el análogo de $R_{\frac{2i+1}{2n}}$ en el Paso 3, pero podemos completar el resultado aquí, asignando que $R_{\frac{2i+1}{2n}}$ mande a los primeros tres elementos de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ en E_r; los siguientes tres en E_{r+1},..., a los siguientes tres en E_s, a los siguientes tres en E_{s-1},... La condición 4 del Paso 2(a) nos asegura que $\{F_v, F_{v+1}, ..., F_w\}$ tiene suficientes elementos para que tal procedimiento pueda asegurarse que cada elemento de $\{E_r, E_{r+1}, ..., E_s\}$ sea la imagen de tres elementos consecutivos de $\{F_v, F_{v+1}, ..., F_w\}$ bajo $R_{\frac{2i+1}{2n}}$.

Si fuera cierto que todas las funciones R concordaran, podríamos usar $\mathcal{F}$ y una extensión de las R para $\mathcal{D}_1$ y H_1. Sin embargo, no hay razón por que ellas deban concordar. Así que obtenemos una cadena $\mathcal{D}_1$ que refina $\mathcal{F}$ y una función de cadenas H_1. Para obtener H_1 estaremos influenciados por $R_{\frac{i}{n}}$ cerca de $P_{\frac{i}{n}}$ y por $R_{\frac{2i+1}{2n}}$ en la parte de $\mathbb{P}$ entre $P_{\frac{i}{n}}$ y $P_{\frac{i+1}{n}}$.

(c) Mencionamos que estaremos influenciados por $R_{\frac{i}{n}}$ cerca de $P_{\frac{i}{n}}$. Describimos ahora la parte $\mathcal{P}_i$ de $\mathbb{P}$ cerca de $P_{\frac{i}{n}}$ donde estuvimos influidos.

Sea $\epsilon > 0$, $\epsilon < \frac{1}{2n}$ y tan pequeño que si $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ es la subcadena de $\mathcal{F}$ que cubre irreduciblemente a $P_{\frac{i}{n}}$ y $\{E_r, E_{r+1}, ..., E_s\}$ es la imagen de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ bajo $R_{\frac{i}{n}}$, entonces $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ cubre propiamente cada elemento de $\{P_t \mid \mid t - \frac{i}{n} \mid \leq \epsilon\}$ y $\{E_r, E_{r+1}, ..., E_s\}$ cubre propiamente a cada elemento de $\{Q_t \mid \mid t - \frac{i}{n} \mid \leq \epsilon\}$. Describimos $\mathcal{P}_i$ tal que $\mathcal{P}_i \subseteq \mathbb{P}(\frac{i}{n} - \epsilon, \frac{i}{n} + \epsilon)$.

Como cada una de $R_{\frac{i}{n}}$, $R_{\frac{2i+1}{2n}}$ y $R_{\frac{2i-1}{2n}}$ manda $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ (y posiblemente más) sobre una subcadena (posiblemente una diferente) de

$\mathcal{E}_1$ que cubre propiamente a $Q_{\frac{i}{n}}$, se sigue del Teorema 3.2.8 que hay una F_y y una F_z de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ tales que $R_{\frac{2i+1}{2n}}(F_y)$ y $R_{\frac{i}{n}}(F_y)$ son adyacentes y, además $R_{\frac{2i-1}{2n}}(F_z)$ y $R_{\frac{i}{n}}(F_z)$ también son adyacentes.

Por el Teorema 3.2.6, hay un abierto U_i en $\mathbb{P}(\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \epsilon) \cap F_y$ tal que $cl(U_i) \subseteq F_y$ y $\mathbb{P} - U_i$ es la unión de dos conjuntos cerrados ajenos A_i y B_i tales que $\mathbb{P}(0, \frac{i}{n}) \subseteq A_i$, $\mathbb{P}(\frac{i}{n} + \epsilon, 1) \subseteq B_i$ y, para cada elemento P_t de $\{P_t \mid \frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i}{n} + \epsilon\}$, hay uno de los conjuntos $P_t \cap A_i$ o $P_t \cap B_i$ que intersecta cada elemento de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$.

También hay un conjunto abierto V_i en $\mathbb{P}(\frac{i}{n} - \epsilon, \frac{i}{n})$ tal que $cl(V_i) \cap cl(U_i) = \emptyset$, $cl(V_i) \subseteq F_z$ y $\mathbb{P} - V_i$ es la unión de dos subconjuntos cerrados ajenos A_i' y B_i' tales que $\mathbb{P}(0, \frac{i}{n} - \epsilon) \subseteq A_i'$, $\mathbb{P}(\frac{i}{n}, 1) \subseteq B_i'$ y para cada elemento P_t de $\{P_t \mid \frac{i}{n} - \epsilon \leq t \leq \frac{i}{n}\}$, uno de los conjuntos $P_t \cap A_i'$ o $P_t \cap B_i'$ intersecta a cada elemento de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$.

Entonces $\mathcal{P}_i = A_i \cap B_i'$ si $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Si $i = 0$, $\mathcal{P}_i = A_i$; si $i = n$, $\mathcal{P}_i = B_i'$. Nótese que $P_{\frac{i}{n}} \subseteq \mathcal{P}_i$.

(d) En este paso definimos la cadena $\mathcal{D}_1$. Sea $\mathcal{D}_1$ una cadena que cubre irreduciblemente a $\mathbb{P}$ tal que diám(D_j^1) sea tan pequeño que:

1. Si un elemento D de $\mathcal{D}_1$ intersecta a $\mathcal{P}_i$, D está en $\mathcal{P}_i \cup U_i \cup V_i$ y en un eslabón de la subcadena de $\mathcal{F}$ que cubre irreduciblemente $P_{\frac{i}{n}}$.
2. Si D no intersecta a ningún $\mathcal{P}_i$, entonces D está en algún $\mathbb{P}(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ y en un eslabón de la subcadena de $\mathcal{F}$ que irreduciblemente cubre $\mathbb{P}(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$.
3. D no intersecta ambos U_i y V_i pero está en F_y o en F_z de acuerdo a que si D intersecta U_i o V_i. Notamos que si D intersecta a $\mathcal{P}_i$, D está en un elemento de $\mathcal{F}$ en que $R_{\frac{i}{n}}$ está definido, en caso de que no, D está en un elemento de $\mathcal{F}$ en que algún $R_{\frac{2i+1}{2n}}$ está definido.

(e) Ahora vamos a describir la función de cadenas H_1 de $\mathcal{D}_1$ sobre $\mathcal{E}_1$. Supongamos que D es un elemento de $\mathcal{D}_1$ que está en F_k de $\mathcal{F}$. Si D intersecta el U_i, mencionado en el Paso 2(c), entonces escogemos a F_k como F_y; con base a lo anterior $H_1(D)$ es $R_{\frac{i}{n}}(F_y)$ o $R_{\frac{2i+1}{2n}}(F_y)$ de acuerdo a que D intersecte o no a $\mathcal{P}_i$. Si D intersecta V_i, entonces escogemos a F_k como F_z; en este caso $H_1(D)$ es $R_{\frac{i}{n}}(F_z)$ o $R_{\frac{2i-1}{2n}}(F_z)$ de acuerdo a que D intersecte o no a $\mathcal{P}_i$. Si D intersecta $\mathcal{P}_i$ pero no a $U_i \cup V_i$, escogemos F_k como cualquier eslabón de $\mathcal{F}$ en que $R_{\frac{i}{n}}$ esté definida; por lo anterior ponemos $H_1(D) = R_{\frac{i}{n}}(F_k)$. Si D no intersecta a ningún $V_i \cup \mathcal{P}_i \cup U_i$, D, está en algún $\mathbb{P}(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ y elegimos F_k como algún eslabón de $\mathcal{F}$ en que $R_{\frac{2i+1}{2n}}(F_k)$ esté definido; entonces $H_1(D) = R_{\frac{2i+1}{2n}}(F_k)$.

(f) Aquí mostraremos que H_1 es una función de cadenas, esto es, $H_1(D_j)$ es adyacente a $H_1(D_{j+1})$, donde D_j y D_{j+1} son elementos adyacentes de $\mathcal{D}_1$. Si tanto D_j como D_{j+1} intersectan $\mathcal{P}_i$, entonces $H_1(D_j)$ es adyacente a $H_1(D_{j+1})$ ya que $R_{\frac{i}{n}}$ es una función de cadenas. Si uno interseca a $\mathcal{P}_i$ y el otro no, entonces ambos intersectan U_i o ambos intersectan V_i. Si ambos intersectan a U_i, entonces ambos están en F_y y $R_{\frac{i}{n}}(F_y)$ es adyacente a $R_{\frac{2i+1}{2n}}(F_y)$; si ambos intersectan V_i, entonces ambos están en F_z y $R_{\frac{i}{n}}(F_z)$ es adyacente a $R_{\frac{2i-1}{2n}}(F_z)$. Y si ni D_j ni D_{j+1} intersectan a ningún $\mathcal{P}_i$, entonces $H_1(D_j)$ es adyacente a $H_1(D_{j+1})$ ya que $R_{\frac{2i+1}{2n}}$ es una función de cadenas.

(g) En este paso mostraremos que la función de cadenas H_1 satisface la condición I mencionada al principio del Paso 2. Supongamos que D_j intersecta a $P_{\frac{i}{n}}$, $D_j \subseteq F_k$ y que $H_1(D_j) = R_{\frac{i}{n}}(F_k)$. Entonces, de la definición de $R_{\frac{i}{n}}$ en el Paso 2(b), tenemos que $h(F_k \cap P_{\frac{i}{n}}) \subseteq R_{\frac{i}{n}}(F_k)$. De donde $h(D_j \cap P_{\frac{i}{n}}) \subseteq R_{\frac{i}{n}}(F_k) = H_1(D_j)$.

(h) Ahora veamos que la condición II del Paso 2 se satisface. Supongamos que D_j intersecta P_t, $(\frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n})$. Primero hay que mostrar que $H_1(D_j)$ intersecta a Q_x.

Hay un elemento F_k de $\mathcal{F}$ que contiene a D_j tal que $H_1(D_j)$ es igual, o a $R_{\frac{i}{n}}(F_k)$, o a $R_{\frac{2i+1}{2n}}(F_k)$, o a $R_{\frac{i+1}{n}}(F_k)$. Si $H_1(D_j) = R_{\frac{i}{n}}(F_k)$, entonces $H_1(D_j)$ es un eslabón de la subcadena de $\mathcal{E}_1$ que cubre irreduciblemente a $Q_{\frac{i}{n}}$ y entonces intersecta a Q_t, ya que se cumplen las condiciones del Paso 1(b); si $H_1(D_j) = R_{\frac{i+1}{n}}(F_k)$, entonces $H_1(D_j)$ es un eslabón de la subcadena de $\mathcal{E}_1$ que cubre irrecuciblemente a $Q_{\frac{i+1}{n}}$ y entonces intersecta a Q_t; si $H_1(D_j) = R_{\frac{2i+1}{2n}}(F_k)$, entonces $H_1(D_j)$ es un eslabón de la subcadena de $\mathcal{E}_1$ que cubre irreduciblemente a $\mathbb{Q}(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ como se pide en el Paso 2 (b) y, por el Paso 1(b), tenemos que $H_1(D_j)$ intersecta a cada elemento de $\{Q_t \mid \frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}\}$.

Ahora supongamos que $\{D_v, D_{v+1}, ..., D_w\}$ es una subcadena de $\mathcal{D}_1$ que cubre irreduciblemente a P_t. Hay que probar que si E_k es un elemento de la subcadena de $\mathcal{E}_1$ que cubre irreduciblemente a Q_t, entonces hay un elemento D_j de $\{D_v, D_{v+1}, ..., D_w\}$ tal que $H_1(D_j) = E_k$.

Si P_t intersecta $\mathcal{P}_i \cup U_i$, entonces, se sigue de la definición de ϵ en el Paso 2(c), que E_k es un elemento de la subcadena $\{E_r, E_{r+1}, ..., E_s\}$ de $\mathcal{E}_1$ que cubre irreduciblemente a $Q_{\frac{i}{n}}$.

Si $P_t \cap \mathcal{P}_i$ intersecta a cada elemento de la subcadena $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ de $\mathcal{F}$ que cubre irreduciblemente a $P_{\frac{i}{n}}$, entonces hay que considerar los tres elementos consecutivos F_{a-1}, F_a y F_{a+1} de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ que van a E_k bajo $R_{\frac{i}{n}}$ como se mencionó en el Paso 2(b). Hay un D_j de $\{D_v, D_{v+1}, ..., D_w\}$ tal que $D_j \cap P_t \cap \mathcal{P}_i$ intersecta a F_a. Entonces $H_1(D_j)$ es igual o a $R_{\frac{i}{n}}(F_{a-1})$, o a $R_{\frac{i}{n}}(F_a)$, o a $R_{\frac{i}{n}}(F_{a+1})$ y los tres son iguales a E_k.

En el caso en que P_t intersecte a $\mathcal{P}_i \cup U_i$ pero $P_t \cap \mathcal{P}_i$ no intersecte a ninguno de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$, entonces, por la definición de A_i y B_i en el Paso 2(c), $P_t - (U_i \cup \mathcal{P}_i)$ intersecta a cada elemento de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$. Ahora, sean F_{a-1}, F_a y F_{a+1} tres elementos consecutivos de la subcadena $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ que van a E_k bajo $R_{\frac{2i+1}{2n}}$. Hay un D_j de $\{D_v, D_{v+1}, ..., D_w\}$ tal que D_j está en F_a e intersecta $P_t - (U_i \cup \mathcal{P}_i)$. Entonces $H_1(D_j)$ es, o $R_{\frac{2i+1}{2n}}(F_{a-1})$, o $R_{\frac{2i+1}{2n}}(F_a)$, o $R_{\frac{2i+1}{2n}}(F_{a+1})$ y los tres son iguales a E_k.

En el caso en que P_t intersecte a $V_{i+1} \cup \mathcal{P}_{i+1}$, también encontramos que hay un elemento D_j de $\{D_v, D_{v+1}, ..., D_w\}$ tal que $E_k = H_1(D_j)$.

En el caso en que P_t no intersecte a $\mathcal{P}_i \cup U_i \cup V_{i+1} \cup \mathcal{P}_{i+1}$, encontramos que E_k es un eslabón de la subcadena de $\mathcal{E}$ que cubre irreduciblemente a $\mathbb{Q}(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$. Sean $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ la subcadena de $\mathcal{F}$ que cubre irreduciblemente a P_t y F_{a-1}, F_a, F_{a+1} los tres eslabones consecutivos de $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ que van en E_k bajo $R_{\frac{2i+1}{2n}}$. Otra vez encontramos que hay un elemento D_j de $\{D_v, D_{v+1}, ..., D_w\}$ en F_a tal que $H_1(D_j) = E_k$.

(i) Como en el Paso 1(b) encontramos que hay un entero k tal que k es un múltiplo de n y si $0 \leq b - a \leq \frac{1}{k}$, entonces la subcadena de $\mathcal{D}_1$ que cubre irreduciblemente a $\mathbb{P}(a, b)$ cubre propiamente a cada elemento de $\{P_t \mid a \leq t \leq b\}$ y la imagen de esta subcadena bajo H_1 cubre propiamente cada elemento de $\{Q_t \mid a \leq t \leq b\}$.

Ahora extendemos el homeomorfismo h a $P_0, P_{\frac{1}{k}}, P_{\frac{2}{k}}, ..., P_1$. Esto lo hacemos de tal forma que $h(P_{\frac{i}{k}}) = Q_{\frac{i}{k}}$ y tal que para cada elemento D_j de la subcadena de $\mathcal{D}_1$ que cubre propiamente $P_{\frac{i}{k}}$, entonces $h(P_{\frac{i}{k}} \cap D_j) \subseteq H_1(D_j)$. El Teorema 3.2.12 nos asegura que h puede ser extendido de esta forma.

<u>*Paso* 3</u> En este paso definiremos una cadena $\mathcal{E}_2$ que cubra a $\mathbb{Q}$, una función de cadenas K_1 de $\mathcal{E}_1$ sobre $\mathcal{D}_1$, y extendemos la función h a algunos elementos adicionales de $\{P_t\}$. Este paso se parece mucho al Paso 2, pero esta vez estamos obteniendo una aproximación de h^{-1}.

Veremos que hay una $\frac{1}{4}$-cadena $\mathcal{E}_2$ que cubre irreduciblemente $\mathbb{Q}$ y una función de cadenas K_1 de $\mathcal{E}_2$ sobre $\mathcal{D}_1$ tal que:

I. Si el eslabón E_i de $\mathcal{E}_2$ intersecta $Q_{\frac{i}{k}}$, entonces $h^{-1}(E_i \cap Q_{\frac{i}{k}}) \subseteq K_1(E_i)$.

II. Para cada t, K_1 manda a cualquier subcadena de $\mathcal{E}_2$ que cubre propiamente Q_t sobre una subcadena de $\mathcal{D}_1$ que cubre propiamente P_x.

III. $E_i \subseteq (H_1 \circ K_1)(E_i)$ para cada eslabón E_i de $\mathcal{E}_2$.

Lo que hace un poco más dificil el Paso 3 con respecto al Paso 2 es la condición III. La prueba de que existen $\mathcal{E}_2$ y K_1 que satisfacen las condiciones I y II es similar a la prueba de que existen $\mathcal{D}_1$ y H_1 que satisfacen las condiciones I y II del Paso 2.

Mostraremos cómo modificar los argumentos del Paso 2 para obtener $\mathcal{E}_2$ y K_1 y que satisfagan las condiciones I, II y III.

Al igual que en el Paso 2, sea $\mathcal{F}$ una ϵ-cadena que cubre irreduciblemente a $\mathbb{Q}$ donde ϵ es lo suficientemente pequeño para hacer ciertas las siguientes afirmaciones:

1. $\epsilon < \frac{1}{4}$;

2. ningún eslabón de $\mathcal{F}$ intersecta a ambos Q_a y Q_b si $\frac{1}{2k} \leq b - a$;

3. la imagen bajo h^{-1} de cualquier subconjunto de $Q_0 \cup Q_{\frac{1}{k}} \cup Q_{\frac{2}{k}} \cup ... \cup Q_1$ de diámetro menor que 5ϵ está en un elemento de $\mathcal{E}_1$;

4. ϵ es menor que la ϵ que se menciona en el Corolario 3.2.11 donde $\mathcal{D}(r,s)$ es la subcadena de $\mathcal{D}$ que cubre irreduciblemente a $\mathbb{P}(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})$ con $i \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$ y $\mathcal{E}$ es la imagen de $\mathcal{D}(r,s)$ bajo H_1.

La función de cadenas $R_{\frac{i}{k}}$ que definimos aquí es similar a las $R_{\frac{i}{n}}$ definidas en el Paso 2(b), en que $R_{\frac{i}{k}}$ manda la subcadena $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ de $\mathcal{F}$, que cubre irreduciblemente $Q_{\frac{i}{k}}$, sobre la subcadena $\{D_v, D_{v+1}, ..., D_w\}$ de $\mathcal{D}_1$ que cubre irreduciblemente $P_{\frac{i}{k}}$ de tal manera que cada elemento de $\{D_v, D_{v+1}, ..., D_w\}$ es la imagen de tres elementos consecutivos de $\{F_t, F_{v+1}, ..., F_u\}$ y para cada j, $h^{-1}(Q_{\frac{i}{k}} \cap F_j) \subseteq R_{\frac{i}{k}}(F_j)$. Aplicando en ambos lados de $h^{-1}(Q_{\frac{i}{k}} \cap F_j) \subseteq P_{\frac{i}{k}} \cap R_{\frac{i}{k}}(F_j)$ el homeomorfismo h encontramos que $(Q_{\frac{i}{k}} \cap F_j) \subseteq h(P_{\frac{i}{k}} \cap R_{\frac{i}{k}}(F_j))$, ya que $h(P_{\frac{i}{k}} \cap R_{\frac{i}{k}}(F_j)) \subseteq (H_1 \circ R_{\frac{i}{k}})(F_j)$ y, por el Paso 2(i), tenemos que $Q_{\frac{i}{k}} \cap F_j \subseteq (H_1 \circ R_{\frac{i}{k}})(F_j)$.

Ahora, para completar el análogo del Paso 2(b), sólo necesitamos obtener una función de cadenas $R_{\frac{2i+1}{2k}}$ que mande a la subcadena $\{F_t, F_{t+1}, ..., F_u\}$ de $\mathcal{F}$ que cubre irreduciblemente a $\mathbb{Q}(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})$ sobre la subcadena $\{D_r, D_{r+1}, ..., D_s\}$ de $\mathcal{D}_1$ que cubre irreduciblemente a $\mathbb{P}(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})$ de tal forma que:

1. $F_j \subseteq (H_1 \circ R_{\frac{2i+1}{2k}})(F_j)$ y
2. para cada $t \in [\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$, $R_{\frac{2i+1}{2k}}$ mande a la subcadena $\{F_v, F_{v+1}, ..., F_w\}$ de $\mathcal{F}$ que cubre irreduciblemente a Q_x sobre $\{D_r, D_{r+1}, ..., D_s\}$ de tal manera que cada elemento de $\{D_r, D_{r+1}, ..., D_s\}$ es la imagen de tres eslabones consecutivos de $\{F_v, F_{v+1}, ..., F_w\}$.

Del hecho de que el diámetro de cada eslabón de la cadena $\mathcal{F}$ se tomó menor que la ϵ mencionada en el Corolario 3.2.11, tenemos que la función de cadenas $R_{\frac{2i+1}{2k}}$ existe.

En la analogía con el Paso 2(c), elegimos ϵ tan pequeña que los $\mathcal{Q}_i$, V_i, U_i que obtuvimos tengan la propiedad de que si F_j es un elemento de la subcadena de $\mathcal{F}$ que cubre irreduciblemente a $Q_{\frac{i}{k}}$, entonces $(V_i \cup \mathcal{Q}_i \cup U_i) \cap F_j \subseteq (H_1 \circ R_{\frac{i}{k}})(F_j)$. De la definición de $R_{\frac{i}{k}}$ ya tenemos que $Q_{\frac{i}{k}} \cap F_j \subseteq (H_1 \circ R_{\frac{i}{k}})(F_j)$.

Ahora, el argumento en el Paso 3 procede como el argumento en el Paso 2 a través de las partes (c),(d),(e),(f),(g),(h) e (i). El propósito en extender el homeomorfismo h en la parte (i) es para ayudar en el Paso 4. Para completar el Paso 3 hay que mostrar que la cadena $\mathcal{E}_2$ que obtuvimos en la analogía del Paso 2(d) satisface la condición III, con respecto a la función de cadenas K_1 que obtuvimos en la analogía del Paso 2(e).

Supongamos que el eslabón E_j de $\mathcal{E}_2$ intersecta $\mathcal{Q}_i$ (donde $\mathcal{Q}_i$ es el análogo de $\mathcal{P}_i$ en el Paso 2(c)), $E_j \subseteq F_z$ y $K_1(F_z) = R_{\frac{i}{k}}(F_z)$. Entonces F_z es un eslabón de la subcadena de $\mathcal{F}$ que cubre irreduciblemente a $Q_{\frac{i}{k}}$ y $E_j \subseteq V_i \cup \mathcal{Q}_i \cup U_i$, ya que $(V_i \cup \mathcal{Q}_i \cup U_i) \cap F_z \subseteq (H_1 \circ R_{\frac{i}{k}})(F_z)$ y $E_j \subseteq (H_1 \circ K_1)(E_j)$.

Supongamos que E_j no intersecta a ningún $\mathcal{Q}_i$. Entonces hay un F_z tal que $E_j \subseteq F_z$ y que $K_1(E_j) = R_{\frac{2i+1}{2k}}(F_z)$. Pero como $F_z \subseteq (H_1 \circ R_{\frac{2i+1}{2k}})(F_z)$, $E_j \subseteq (H_1 \circ K_1)(E_j)$.

Pasos $\underline{4, 5, 6, ...}$ Estos pasos son esencialmente copias del Paso 3. Tenemos condiciones A, A', B y B' que se tienen que satisfacer y que son modificaciones de las condiciones II y III del Paso 3.

Pasos $\underline{2n}$ En estos pasos encontramos una cadena $\mathcal{D}_n$ que cubre irreduciblemente a $\mathbb{P}$ y una función de cadenas H_n de $\mathcal{D}_n$ sobre $\mathcal{E}_n$ tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

A. Para cada $t \in [0, 1]$, H_n manda a cualquier subcadena de $\mathcal{D}_n$, que cubre propiamente a P_t, sobre una subcadena de $\mathcal{E}_n$ que cubre propiamente Q_t;

B. $D_i \subseteq (K_{n-1} \circ H_n)(D_i)$ para cada eslabón D_i de $\mathcal{D}_n$.

Pasos $\underline{2n + 1}$ En estos pasos encontramos una cadena $\mathcal{E}_{n+1}$ que cubre irreduciblemente a $\mathbb{Q}$ y una función de cadenas K_n de $\mathcal{E}_{n+1}$ sobre $\mathcal{D}_n$ tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

A'. Para cada $t \in [0, 1]$, K_n manda a cualquier subcadena de $\mathcal{E}_{n+1}$, que cubre propiamente a Q_t, sobre una subcadena de $\mathcal{D}_n$ que cubre propiamente P_t;

B'. $E_i \subseteq (H_n \circ K_n)(E_i)$ para cada eslabón E_i de $\mathcal{E}_{n+1}$.

Aunque hemos visto la analogía de la condición I del Paso 3, la única parte de ésta que nos interesará de aquí en adelante es la siguiente:

C. Si el eslabón D_i de $\mathcal{D}_n$ intersecta a $P_0 \cup P_1$, entonces $h(D_i \cap (P_0 \cup P_1)) \subseteq H_n(D_i)$.

C'. Si el eslabón E_i de $\mathcal{E}_{n+1}$ intersecta a $Q_0 \cup Q_1$, entonces $h^{-1}(E_i \cap (Q_0 \cup Q_1)) \subseteq K_n(E_i)$.

Ahora acabaremos de extender la definición del homeomorfismo h. Para cada punto p de $\mathbb{P}$, sea $D(p,i)$ la unión de los elemento de $\mathcal{D}_i$ que contienen a p y $H_i(D(p,i))$ denota la unión de las imagenes bajo H_i de los elementos de $\mathcal{D}_i$ en $D(p,i)$. Notemos que $D(p,i)$ es la unión de uno o dos eslabones adyacentes de $\mathcal{D}_i$ mientras que $H_i(D(p,i))$ es la unión de uno o dos eslabones adyacentes de $\mathcal{E}_i$.

Es claro que $D(p,i+1) \subseteq D(p,i)$. Ahora hay que ver que $H_{i+1}(D(p,i+1)) \subseteq H_i(D(p,i))$. Para esto, si $E_j^{i+1} = H_{i+1}(D_k^{i+1})$, donde D_k^{i+1} es un elemento de $\mathcal{D}_{i+1}$ en $D(p,i+1)$, entonces $E_j^{i+1} \subseteq H_i(D(p,i))$. Como, por la condición B, $D_k^{i+1} \subseteq (K_i \circ H_{i+1})(D_k^{i+1})$, el eslabón $(K_i \circ H_{i+1})(D_k^{i+1}) = K_i(E_j^{i+1})$ de $\mathcal{D}_i$ está en $D(p,i)$. Además, por la condición B', $E_j^{i+1} \subseteq (H_i \circ K_i)(E_j^{i+1})$ y, así, $(H_i \circ K_i)(E_j^{i+1}) = H_i(D_k^{i+1}) \subseteq H_i(D(p,i))$.

Para cada punto p de $\mathbb{P}$, sea $h(p)$ la intersección de la cerradura de la sucesión decreciente de conjuntos abiertos $H_1(D(p,1)), H_2(D(p,2)), H_3(D(p,3)), \ldots$. Esta intersección existe ya que $H_{i+1}(D(p,i+1)) \subseteq H_i(D(p,i))$ y es un punto ya que el diámetro de la cerradura de cada $H_i(D(p,i))$ es menor que $\frac{2}{2^i}$.

Si q es cualquier punto de $D(p,i)$, el diámetro de $H_i(D(p,i)) \cup H_i(D(q,i))$ es menor que $\frac{3}{2^i}$ y entonces $d(h(p),h(q)) < \frac{3}{2^i}$, es decir, h es continua.

Si $p \in P_t$ entonces se sigue, de la condición A, que $H_i(D(p,i))$ intersecta a Q_x. Así, $h(p) \in Q_x$.

Ahora hay que ver que h manda $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$ de manera suprayectiva. Sean q un punto de $\mathbb{Q}$ y E_j^i un elemento de $\mathcal{E}_i$ que contiene a q. Hay un elemento D_k^i de $\mathcal{D}_i$ tal que $H_i(D_k^i) = E_j^i$. Por lo tanto, para algún p de $\mathbb{P}$, $E_j^i \subseteq H_i(D(p,i))$. Como el diámetro de $H_i(D(p,i))$ es menor que $\frac{2}{2^i}$, $d(q,h(p)) < \frac{2}{2^i}$. Esto quiere decir que $h(\mathbb{P})$ es denso en $\mathbb{Q}$ y, como $h(\mathbb{P})$ es cerrado, entonces $h(\mathbb{P}) = \mathbb{Q}$.

La transformación h que definimos coincide con el homeomorfismo dado h en $P_0 \cup P_1$ porque para cada punto p de $P_0 \cup P_1$ y, por la condición C, $H_i(D(p,i))$ contiene $h(p)$.

Por último hay que ver que h es inyectiva. Supongamos que $h(p) = h(q)$. Como la cerradura de $H_i(D(p,i))$ y de $H_i(D(q,i))$ se intersectan y, por el tipo de cadenas con el que hemos estado trabajando, tenemos que $H_i(D(p,i))$ intersecta a $H_i(D(q,i))$. Como K_{i-1} es una función de cadenas, el conjunto $(K_{i-1} \circ H_i)(D(p,i))$ intersecta al conjunto $(K_{i-1} \circ H_i)(D(q,i))$. Pero la cerradura de esos conjuntos contienen a p y a q, respectivamente, entonces $d(p,q) < \frac{4}{2^i}$. Por lo tanto $p = q$ si $h(p) = h(q)$.

□

3.2.14 Proposición. *El círculo de pseudoarcos es homogéneo*

Demostración. Según la Definición 3.1.3 podemos suponer que el círculo de pseudoarcos está dado por $\mathbb{C} = \bigcup\{P_t \mid t \in [0,1]\}$ donde los elementos P_0 y P_1 están identificados, es decir, $P_0 = P_1$. Así que, para cada $t \in [0,1)$, podemos representar a $\mathbb{C} = \bigcup\{P_t \mid t \in [0,1]\}$, duplicando P_t y despegando el círculo de pseudoarcos $\mathbb{C}$ como se muestra en la figura 3.14. Diremos que $\mathbb{C}$ está separado en el pseudoarco P_t.

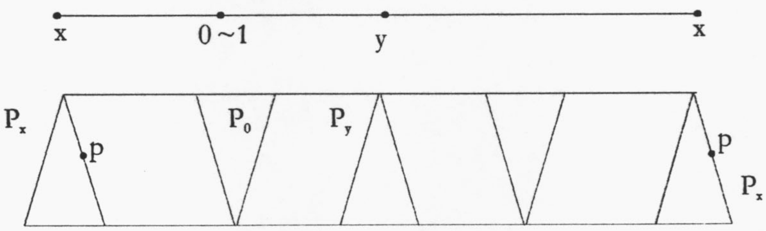

Figura 3.14: Identificacón del intervalo [0,1] en el punto t

Ahora, como el círculo de pseudoarcos es un continuo circularmente encadenable, al momento que separamos al círculo de pseudoarcos en el pseudoarco P_t, lo que obtenemos es un continuo arco encadenable de pseudoarcos. Esto se sigue del punto 7 de la definición del círculo de pseudoarcos (3.1.3), es decir, nos fijamos en la sucesión de subcadenas $\mathcal{T}_{ij(t)}$ que cubren al pseudoarco P_t y separamos la cadena circular $\{\mathcal{T}^*_{i1}, \mathcal{T}^*_{i2}, ..., \mathcal{T}^*_{ij(t)}, ..., \mathcal{T}^*_{in(i)}\}$ en el eslabón $\mathcal{T}^*_{ij(t)}$ para obtener la cadena $\{\mathcal{T}^*_{ij(t)}, \mathcal{T}^*_{i(j(t)+1)}, ..., \mathcal{T}^*_{in(i)}, \mathcal{T}^*_{i1}, \mathcal{T}^*_{i2}, ..., \mathcal{T}^*_{i(j(t)-1)}, \mathcal{T}^*_{ij(t)}\}$. Y como cada una de las subcadenas $\mathcal{T}_{ij}$ de la δ_i-cadena $\mathcal{D}_i$, entonces lo que obtenemos al separar el círculo de pseudoarcos en el pseudoarco P_t es, efectivamente, un continuo arco encadenable de pseudoarcos.

Sean p y q dos puntos distintos en $\mathbb{C}$, entonces existen t y r en $[0,1]$ tales que $p \in P_t$ y $q \in P_r$. Separamos el círculo de pseudoarcos de dos formas diferentes.

La primera forma de separarlo es en el pseudoarco P_t y al continuo arco encadenable de pseudoarcos así obtenido le llamamos $\mathbb{P}$. La segunda forma de separarlo es en el pseudoarco P_r y a este arco encadenable de pseudoarcos le llamamos $\mathbb{Q}$. Entonces $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son arcos encadenables de pseudoarcos. Más

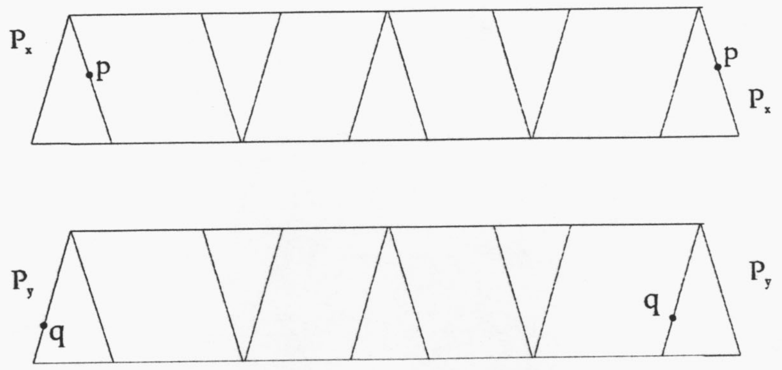

Figura 3.15: Formas de separar el círculo de pseudoarcos

aún, como P_t y P_r son pseudoarcos, existe un homeomorfismo h de P_t sobre P_r tal que $h(p) = q$ (Teorema 2.2.4) y, entonces, por el Teorema 3.2.13, el homeomorfismo h puede ser extendido a un homeomorfismo h^* que manda $\mathbb{P}$ sobre $\mathbb{Q}$ y es tal que $h^*(p) = q$, es decir, el círculo de pseudoarcos es homogéneo.

$\square$

Bibliografía

[1] R. H. Bing, *A homogeneous indecomposable plane continuum*, Duke Math. J. **15** (1948), 729–742.

[2] R. H. Bing, *Some characterizations of arcs and simple closed curves*, Amer. J. Math., 70 (1948), 497-506.

[3] R. H. Bing, *Snake–like continua*, Duke Math. J. **18** (1951), 653–663.

[4] R. H. Bing, *Concerning heredirarily indecomposable continua*, Pacific J. Math. **1** (1951), 43–51.

[5] R. H. Bing, *Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo–arc*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 345–346.

[6] R. H. Bing and F. B. Jones, *Another homogeneous plane continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 171–192.

[7] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[8] K. Hrbacek and T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[9] J. L. Kelley, *General Topology*, Springer, New York, 1975.

[10] W. Lewis, *The pseudo–arc*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. **5** (1999), 25–79.

[11] S. Macías, *Topics on continua*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2005.

[12] E. E. Moise, *An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerates subcontinua*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 581–594.

[13] E. E. Moise, *A note on the pseudo-arc*, Trans. Amer. Math. Soc. **67** (1949), 57–58.

[14] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory: an introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[15] S. B. Nadler Jr., *Dimension Theory: an introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas, México, 2002.

[16] S. Willard, *General Topology*, Dover, New York, 2004.