



Universidad Nacional Autónoma de México

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

**FACULTAD DE INGENIERIA- DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO**

**PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DE PRESIÓN EN
YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS CON
FRONTERAS A PRESIÓN CONSTANTE**

T E S I S

PARA OBTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERIA PETROLERA Y DE GAS NATURAL-YACIMIENTOS

P R E S E N T A

HÉCTOR LEYVA GÓMEZ



**TUTOR
DR. RODOLFO CAMACHO VELÁZQUEZ
2006**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Este trabajo es el resultado del esfuerzo de un gran número de personas que me brindaron parte de su valioso tiempo, conocimiento, apoyo y experiencia en la industria petrolera. A todos ellos, les doy las gracias.

Y en particular, a quienes me motivaron a seguir adelante en todo momento

Dr. Rodolfo G. Camacho Velazquez

Ing. Antonio Inda López

M. en I. Raúl León Ventura

Ing. Enrique Gómez Hernández

Dr. Jose A. González Guevara

Dedico este trabajo a:

Cecy, mi esposa y fiel compañera, que cargó en hombros trabajo y responsabilidades para que yo pudiera concluir este trabajo y que, pese a la adversidad, nunca perdió la confianza en mí.

A mis hijos, Eduardo, Mónica y Jorge, quienes son mi más grande motivo para seguir adelante.

Mis padres, Reyna y Jaime quienes han dedicado gran parte de sus vidas para que yo sea alguien en la vida, útil a la sociedad.

Esto es tan solo es una muestra de los que sus privaciones y desvelos han logrado.

Gracias a todos ustedes, mi razón de ser.

Contenido

	<i>Pag.</i>
Agradecimientos	i
Índice	i
Lista de Tablas	iii
Lista de figuras	iii
Resumen	1
Introducción	2
Capítulo I Desarrollo de la ecuación que describe la caída de presión en yacimientos naturalmente fracturados.	
I.1. La ecuación de difusividad.	4
I.2. Modelo de Barenblatt.	8
I.3. Modelo de Kazemi.	13
Capítulo II Solución de la ecuación en el espacio de Laplace para un pozo que penetra parcialmente la formación.	
II.1. Respuesta de presión en yacimientos bajo la influencia de un casquete de gas y empuje hidráulico.	18
II.2. Flujo hacia un pozo con terminación parcial y dos fronteras con presión constante.	18
II.3. Aproximación para tiempos cortos	35
II.4. Aproximación para tiempos grandes	36
Capítulo III Validación del modelo matemático	
III.1. - Inversión al espacio real, algoritmo de Stehfest	38
III.2 - Validación en periodos de tiempo cortos	39
III.3. - Validación en periodos de tiempo grandes	41
Capítulo IV Efecto de los diferentes parámetros en la respuesta de presión	

IV.1. Efecto del coeficiente de capacidad de almacenamiento, ω	44
IV.2. Efecto del coeficiente de flujo interporoso, λ	45
IV.3. Efecto de la longitud del intervalo productor	46
IV.4. Efecto de la posición del punto medio del intervalo productor en la formación productora.	47
IV.5. Efecto de la longitud de penetración dentro de la formación productora	48
Capítulo V Conclusiones y recomendaciones	50
Nomenclatura	51
Apéndices	
A Aplicación de la transformación integral de Hankel.	54
B Flujo hacia un pozo con terminación parcial y presión en las fronteras que depende del tiempo.	55
C Algoritmo de cómputo	63
Bibliografía	68

Lista de tablas

Tabla No.	Pag.
I. Parámetros empleados para la comparación de los modelos a tiempos cortos.	37
II. Parámetros empleados para la comparación de los modelos a tiempos grandes.	40

Lista de figuras

Figura No.	Pag.
1. Volumen elemental para la derivación de la ecuación de difusión.	3
2. Comportamiento de presión vs tiempo adimensional, modelo de Warren y Root.	12
3. Esquema de un yacimiento con elementos rectangulares de matriz.	13
4. Efecto de λ sobre la existencia y duración de los regímenes de flujo; $\omega'=10^3$.	14
5. Efecto de λ sobre la existencia y duración de los regímenes de flujo; $\omega'=10^4$.	15
6. Esquema de un pozo productor con casquete de gas y acuífero activo.	18
7. Respuesta de presión a tiempos cortos.	38
8. Respuesta de presión a tiempos grandes.	39
9. Efecto del coeficiente de almacenamiento.	42
10. Efecto del coeficiente de flujo interporoso.	43
11. Efecto de la longitud del intervalo productor.	44
12. Efecto de la posición del intervalo productor.	45
13. Efecto de la longitud de penetración dentro de la formación productora.	46

Resumen

La mayor parte de la teoría de ingeniería de yacimientos ha sido fundada en la suposición de un medio homogéneo e isotrópico. Sin embargo, muchos yacimientos altamente productivos, producen de yacimientos naturalmente fracturados. Se han propuesto una gran variedad de modelos para tomar en cuenta el comportamiento de presión, resultado de esas dos características. Estos modelos difieren conceptualmente solo en las suposiciones que gobiernan el flujo entre la matriz y las fracturas.

Con base en la idealización presentada por Barenblatt y coautores, el presente trabajo presenta un modelo matemático que permite interpretar la respuesta de presión en yacimientos naturalmente fracturados bajo la influencia combinada de un casquete de gas y acuífero, para lo cual en el desarrollo del modelo matemático se considera la influencia de dos fronteras (superior e inferior) a presión constante.

La ecuación resultante, en el espacio de Laplace, fue resuelta mediante el método de separación de variables y traída al espacio real mediante el algoritmo de Stehfest. Adicionalmente, se plantea dicha ecuación en el espacio de Hankel como alternativa de solución.

En el apéndice se propone una ecuación para el caso en el que la presión en las fronteras depende del tiempo. La solución de esta ecuación se obtuvo mediante el empleo de la Transformación Finita por Seno de Fourier.

La validación del modelo a tiempos pequeños y grandes muestra que la respuesta obtenida con el modelo en cuestión es satisfactoria. Las pequeñas diferencias que se observan pueden atribuirse al valor empleado en los parámetros del algoritmo de inversión numérica y a la condición de frontera interna empleada.

Introducción¹

La mayor parte de la teoría de ingeniería de yacimientos ha sido fundada en la suposición de un medio homogéneo e isotrópico. Sin embargo, muchos yacimientos altamente productivos, producen de yacimientos naturalmente fracturados. Se han propuesto una gran variedad de modelos para tomar en cuenta el comportamiento de presión, resultado de esas dos características. Estos modelos difieren conceptualmente solo en las suposiciones que gobierna el flujo entre la matriz y las fracturas.

Una formación naturalmente fracturada generalmente se representa por una matriz de roca con fracturas de origen secundario. Se supone que la red fracturas es continua a través de la formación y representa la vía de permeabilidad principal. La alta difusividad de las fracturas resulta en una respuesta rápida a lo largo de la red de fracturas a cualquier cambio de presión tal como el causado por un pozo en producción. La matriz de roca, teniendo una permeabilidad baja pero, una porosidad primaria relativamente alta, tiene una respuesta “retardada” a los cambios que ocurren en las fracturas que la rodean. Estas respuestas no inmediatas causan un abatimiento de presión en la fractura relativo a la matriz, que en su momento induce un flujo cruzado matriz-fractura. Este periodo de flujo interporoso toma lugar inmediatamente después de la respuesta de presión de la fractura y antes de que la presión en la fractura y la matriz se equilibren, después de esto la formación actúa como un medio uniforme de propiedades compuestas.

Barenblat, Zeltov y Cochina parecen ser los primeros en modelar un yacimiento fracturado². En la industria petrolera, este modelo comúnmente es referido como el modelo de Warren y Root³. En este modelo, la red de fracturas es visualizada como un medio continuo con fracturas uniformemente distribuidas – un volumen elemental contiene a ambos sistemas, matriz y fracturas. La transferencia de fluido entre matriz y fracturas toma lugar bajo un gradiente lineal de presiones (flujo pseudoestacionario). El comportamiento de flujo del sistema matriz-fracturas está gobernado por la Ley de Darcy. Principalmente, estamos interesados en el principio de conservación de masa.

Un segundo modelo, presentado por Kazemi, supone que un yacimiento fracturado puede ser representado por un sistema de fracturas horizontales, separadas por la matriz. El fluido solo puede ser producido vía fracturas; la matriz alimenta las fracturas a un gasto que es gobernado por las propiedades de la matriz. Este modelo supone estado transitorio de flujo de la matriz a las fracturas. La mayoría de las soluciones analíticas del modelo de Kazemi, sin embargo, se presentan en el trabajo de Swaan-O.

Con base en la idealización presentada por Barenblatt y coautores, el presente trabajo tiene como objeto presentar un modelo matemático que permite interpretar la respuesta de presión en yacimientos naturalmente fracturados bajo la influencia combinada de un casquete de gas y acuífero, para lo cual en el desarrollo del modelo matemático se considera la influencia de dos fronteras (superior e inferior) a presión constante.

CAPÍTULO I

Desarrollo de la ecuación que describe la caída de presión en yacimientos naturalmente fracturados.

I.1 La ecuación de Difusividad

En esta sección se desarrolla la ecuación diferencial para el flujo de fluidos en medios porosos bajo condiciones isotérmicas¹, la cual es combinada con la ecuación de Darcy para derivar la ecuación diferencial que gobierna la distribución de presión en el flujo de fluidos a través de medios porosos bajo las siguientes suposiciones, entre otras que se mencionarán más adelante:

- Flujo de una sola fase líquida.
- Efectos gravitacionales despreciables.
- Líquido de compresibilidad constante en la zona de aceite.
- Flujo laminar.
- Porosidad constante.

Para el desarrollo se considera un volumen elemental del medio poroso definido por un paralelepípedo (figura 1) y se aplica la ley de conservación de masa

$$(masa\ que\ entra) - (masa\ que\ sale) = (masa\ acumulada) \quad \dots(1.1)$$

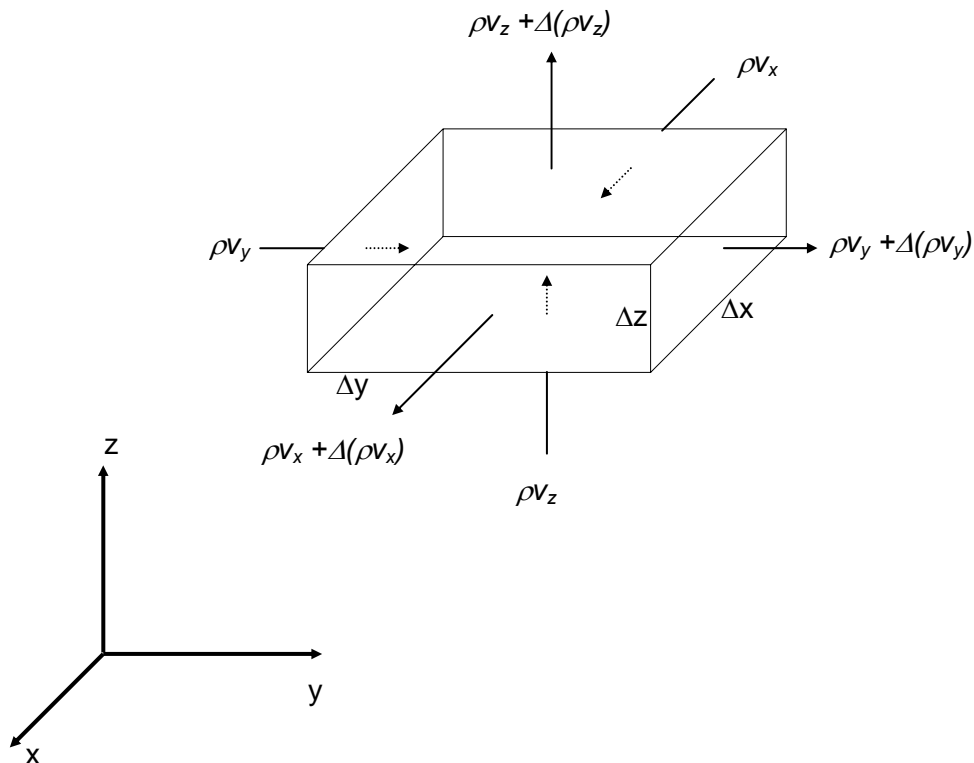


Figura 1. Volumen de control para la derivación de la ecuación de difusividad en tres dimensiones.

El cambio de masa en el volumen de control representativo en un intervalo de tiempo Δt , puede expresarse por medio de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \pm (q \cdot \rho) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi S \rho). \quad \dots(1.2)$$

En notación vectorial, la ecuación (1.2) puede escribirse como

$$\nabla \cdot (\rho v) + (q \cdot \rho)_p - (q \cdot \rho)_I = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi S \rho). \quad \dots(1.3)$$

La Ley de Darcy está dada por

$$v = -\frac{k}{\mu} \rho \nabla \Phi, \quad \dots(1.4)$$

donde

$$\Phi = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} + gz. \quad \dots(1.5)$$

En la ecuación anterior el primer término es la energía de presión y el segundo es la energía potencial; debiera incluirse un tercer término debido a la energía cinética pero, en los problemas de flujo de fluidos en medios porosos, el cambio de energía cinética es muy pequeño comparado con los cambios de presión y energía potencial.

En particular, para un sistema coordenado x, y, z , la ecuación (1.4) puede escribirse como

$$v_x = -\frac{k_x}{\mu} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \dots(1.6)$$

$$v_y = -\frac{k_y}{\mu} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \dots(1.7)$$

$$v_z = -\frac{k_z}{\mu} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{k_z}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + g \rho \right). \quad \dots(1.8)$$

Sustituyendo la ecuación (1.4) en la ecuación (1.3) se tiene

$$\nabla \cdot \left(\frac{k\rho^2}{\mu} \nabla \Phi \right) + (q \cdot \rho)_p - (q \cdot \rho)_I = -\frac{\partial}{\partial t} (\phi S \rho). \quad \dots(1.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.6) a (1.8) en la ecuación (1.9) y considerando que no hay términos de inyección o producción y que $S_{wc}=0$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{k_z}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho \right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho). \quad \dots(1.10)$$

La densidad para un fluido de compresibilidad constante puede evaluarse mediante

$$\rho = \rho_0 e^{c(p-p_0)}. \quad \dots(1.11)$$

Sustituyendo la ecuación (1.11) en (1.10)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu} \rho_0 e^{c(p-p_0)} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\mu} \rho_0 e^{c(p-p_0)} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu} \rho_0 e^{c(p-p_0)} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho_0 e^{c(p-p_0)} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_0 e^{c(p-p_0)}). \quad \dots(1.12)$$

Considerando que la viscosidad es constante y derivando

$$k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + g\rho_0 e^{c(p-p_0)} c \frac{\partial p}{\partial z} \right) + c \left[k_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + k_z \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho_0 e^{c(p-p_0)} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial k_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho_0 e^{c(p-p_0)} \right) \frac{\partial k_z}{\partial z} = \mu \left(\phi c \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad \dots(1.13)$$

Despreciando efectos gravitacionales

$$k_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + c \left[k_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial k_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial k_z}{\partial z} = \mu \left(\phi c \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad \dots(1.14)$$

Suponiendo que:

- La compresibilidad del fluido es muy pequeña, $c \ll \ll 1$
- La porosidad es constante
- Los gradientes de presión son pequeños y que las permeabilidades en todas direcciones son aproximadamente constantes, entonces:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial k_x}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial k_y}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial k_z}{\partial z} \ll \ll 1, \text{ de tal forma que los gradientes al cuadrado se}$$

$$\text{pueden despreciar } \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 \ll \ll 1$$

Entonces la ecuación (1.14) se puede expresar de la siguiente manera

$$\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \phi c \frac{\partial p}{\partial t}. \quad \dots(1.15)$$

Si se considera que la permeabilidad depende de la posición en la formación y la viscosidad puede ser función de la presión, entonces considerando un fluido ligeramente compresible, de la ecuación 1.10 se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \phi c \frac{\partial p}{\partial t}. \quad \dots(1.16)$$

Las ecuaciones (1.15) o (1,16) reciben el nombre de ecuación de difusión en coordenadas rectangulares.

I.2 El modelo de Barenblatt (1960)²

La manera más simple de ver un yacimiento naturalmente fracturado, es la idealización de Barenblatt y coautores sobre un yacimiento fisurado, la cual considera un sistema de bloques porosos separados por un sistema de fisuras. El sistema de fisuras impide la difusión directa entre bloques adyacentes, y el volumen del sistema de fisuras es muy pequeño en comparación con el volumen de los bloques. Entonces los bloques proveen el almacenamiento de masa y las fisuras las vías de flujo. En esencia, la construcción de este modelo introduce dos presiones para los fluidos – la presión p_m en los bloques y la presión p_f en el sistema de fracturas donde cada una de ellas es un promedio sobre un volumen que contiene una cantidad sustancial de bloques. La matriz puede ser vista como una fuente que “alimenta” a la red de fracturas. Es importante mencionar que el considerar bloques de matriz cúbicos es una interpretación de Warren y Root³ del modelo

de Barenblatt, la cual es restrictiva e innecesaria, ya que los bloques de matriz no requieren tener una forma específica.

Recientemente, se ha presentado un nuevo modelo que permite interpretar la respuesta de presión en yacimientos naturalmente fracturados con porosidad vugular⁴; el modelo considera que existe una interacción entre matriz, vugulos y sistema de fracturas. Se consideran dos casos: sin flujo a través de los vugulos, el cual es una extensión del modelo de Warren y Root y el segundo, cuando el proceso de disolución de las gargantas de los poros ha creado un sistema interconectado de vugulos y cavernas.

La expresión matemática que describe la idealización de Barenblatt y coautores es⁵:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_{fx}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_{fy}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_{fz}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial z} \right) - (V\phi c)_f \frac{\partial p_f}{\partial t} = -A(x, y, z, t). \quad \dots(1.17)$$

Si $(V\phi c)_m$ es el almacenamiento en la matriz y p_m la presión promedio en la matriz, entonces se puede demostrar que

$$A(x, y, z, t) = -(\phi c V)_m \frac{\partial p_m}{\partial t}. \quad \dots(1.18)$$

Para considerar la transferencia de fluido entre la matriz y el sistema de fracturas, se obtiene la relación siguiente aplicando el principio de conservación de masa y la Ley de Darcy.

$$(\phi c V)_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{k_m A_m}{\mu \ell V} (p_m - p_f). \quad \dots(1.19)$$

Si se hace V/A_m igual a ℓ , entonces la ecuación anterior puede ser escrita como

$$(\phi c V)_m \frac{\partial \bar{p}_m}{\partial t} = \frac{k_m}{\mu \ell^2} (p_m - p_f). \quad \dots(1.20)$$

Sustituyendo la ec. (1.18) en la ec. (1.17) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_{fx}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_{fy}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_{fz}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial z} \right) - (V\phi c)_f \frac{\partial p_f}{\partial t} = (\phi c V)_m \frac{\partial p_m}{\partial t}. \quad \dots(1.21)$$

Esta ecuación se puede expresar en términos adimensionales⁶ mediante las siguientes definiciones y el uso de la regla de la cadena en la derivación.

$$p_D(x_D, y_D, z_D) = \frac{\alpha_1 kh}{q\mu} [p_i - p_F(x_D, y_D, z_D)], \quad \dots(1.22)$$

$$x_D = \frac{x}{L}; \quad \dots(1.23)$$

$$t_D = \frac{k}{\phi\mu c L^2} t; \quad \dots(1.24)$$

donde α_1 es una constante de conversión de unidades. Para el primer miembro del lado izquierdo se tiene

$$\left(\frac{k_{fx}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x_D} \left\{ \frac{k_{fx}}{\mu} \left[p_i - \frac{q\mu}{\alpha_1 k_{fx} h} p_{fD} \right] \right\} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{L} \right); \quad \dots(1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_{fx}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_D} \left[\frac{q}{\alpha_1 h L} \frac{\partial p_{fD}}{\partial x_D} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{L} \right); \quad \dots(1.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_{fx}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) = - \frac{q}{\alpha_1 h L^2} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial x_D^2}. \quad \dots(1.27)$$

Procediendo de manera similar con los términos restantes, la ec. (1.21) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & - \frac{q}{\alpha_1 L^2 h} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial x_D^2} - \frac{q}{\alpha_1 L^2 h} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial y_D^2} - \frac{q}{\alpha_1 L^2 h} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial z_D^2} + (V\phi c)_f \left(\frac{k}{\phi\mu c L^2} \right) \left(\frac{q\mu}{\alpha_1 kh} \right) \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} = \\ & - (V\phi c)_m \left(\frac{k}{\phi\mu c L^2} \right) \left(\frac{q\mu}{\alpha_1 kh} \right) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D}. \quad \dots(1.28) \end{aligned}$$

Si el tiempo adimensional está basado en una permeabilidad de referencia $k_f = \sqrt[3]{k_{fx} k_{fy} k_{fz}}$ y $\phi c = [(V\phi c)_f + (V\phi c)_m]$, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\begin{aligned} & - \frac{q}{\alpha_1 L^2 h} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial x_D^2} - \frac{q}{\alpha_1 L^2 h} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial y_D^2} - \frac{q}{\alpha_1 L^2 h} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial z_D^2} + \\ & \frac{(V\phi c)_f}{(V\phi c)_f + (V\phi c)_m} \left(\frac{\sqrt[3]{k_{fx} k_{fy} k_{fz}}}{\mu L^2} \right) \left(\frac{q\mu}{\alpha_1 h \sqrt[3]{k_{fx} k_{fy} k_{fz}}} \right) \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} = \end{aligned}$$

$$-\frac{(V\phi c)_m}{(V\phi c)_f + (V\phi c)_m} \left(\frac{\sqrt[3]{k_{fx} k_{fy} k_{fz}}}{\mu L^2} \right) \left(\frac{q\mu}{\alpha_1 h \sqrt[3]{k_{fx} k_{fy} k_{fz}}} \right) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D}. \quad \dots(1.29)$$

Definiendo los parámetros ω y λ como:

$$\omega = \frac{(V\phi c)_f}{(V\phi c)_f + (V\phi c)_m}; \quad \dots(1.30)$$

$$\lambda = \frac{k_m L^2}{\mu \ell^2}; \quad \dots(1.31)$$

donde L es una longitud característica, la ec. (1.29) se puede expresar como:

$$\nabla_D^2 (p_{fD}) = \omega \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} + (1 - \omega) \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D}. \quad \dots(1.32)$$

Procediendo de manera similar con la ec. (1.19) se llega a

$$\lambda (p_{fD} - p_{mD}) = (1 - \omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D}; \quad \dots(1.33)$$

donde:

$$x_{Dj} = \frac{x_j}{L} \sqrt{\frac{k_f}{k_{fj}}}. \quad \dots(1.34)$$

La ecuación (1.32) en coordenadas cilíndricas se expresa como:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right) + \frac{k_{fz}}{k_{fr}} \frac{r_w^2}{h^2} \frac{\partial^2 p_{fD}}{\partial z_D^2} = \lambda (p_{fD} - p_{mD}) + \omega \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D}; \quad \dots(1.35)$$

donde:

$$r_D = \sqrt{x_D^2 + y_D^2}. \quad \dots(1.36)$$

Si se toma la transformada de Laplace de las ecuaciones 1.33 y 1.35 con respecto a t_D y como condiciones iniciales:

$$p_{fD}(r,0)=0 \text{ y } p_{mD}(r,0)=0; \quad \dots(1.37)$$

entonces:

$$\lambda(\bar{p}_{fD} - \bar{p}_{mD}) = (1 - \omega)u \bar{p}_{mD}; \quad \dots(1.38)$$

$$\bar{p}_{mD} = \frac{\lambda \bar{p}_{mD}}{[u(1 - \omega) + \lambda]}; \quad \dots(1.39)$$

y

$$\frac{1}{r_D^2} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^2 \frac{\partial \bar{p}_{fD}}{\partial r_D} \right) + \frac{k_{fz}}{k_{fr}} \frac{r_w^2}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{p}_{fD}}{\partial z_D^2} = \omega u \bar{p}_{fD} + (1 - \omega)u \bar{p}_{mD}. \quad \dots(1.40)$$

Sustituyendo la ec. (1.39) en la ec. (1.40) se llega a:

$$\frac{1}{r_D^2} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^2 \frac{\partial \bar{p}_{mD}}{\partial r_D} \right) + \frac{k_{fz}}{k_{fr}} \frac{r_w^2}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{p}_{fD}}{\partial z_D^2} - u f(u) \bar{p}_{fD} = 0; \quad \dots(1.41)$$

donde

$$f(u) = \frac{u\omega(1 - \omega) + \lambda}{u(1 - \omega) + \lambda}. \quad \dots(1.42)$$

Desde un punto de vista analítico es posible obtener tres soluciones aproximadas al problema de Barenblatt:

1. Si en la ecuación anterior se toma el límite cuando $u \rightarrow 0^+$, entonces

$$f(u) = 1. \quad \dots(1.43)$$

2. Reagrupando la ec. (1.42) como se indica a continuación

$$f(u) = \left(\frac{\omega}{1 - \omega + \frac{\lambda}{u}} \right) - \left(\frac{\omega^2}{1 - \omega + \frac{\lambda}{u}} \right) + \frac{\lambda}{u(1 - \omega) + \lambda}, \quad \dots(1.44)$$

y tomando el límite cuando $u \rightarrow \infty$,

$$f(u) = \frac{\omega}{1-\omega} - \frac{\omega^2}{1-\omega}, \quad \dots(1.45)$$

entonces

$$f(u \rightarrow \infty) = \omega. \quad \dots(1.46)$$

3. Streltsova-Adams mostró una aproximación que también puede ser empleada cuando $\lambda \ll (1-\omega)u$ y $\omega \ll \lambda / [(1-\omega)u]$. Bajo estas condiciones

$$f(u) = \frac{\lambda}{u(1-\omega)}. \quad \dots(1.47)$$

Cuando aplica (1.46), el soporte de presión de la matriz es despreciable y el yacimiento se comporta como si fuera un sistema homogéneo con el producto porosidad-compresibilidad igual a $(V\phi c_t)_f$. Cuando aplica (1.43) el yacimiento se comporta como si el producto porosidad efectiva-compresibilidad fuese igual a $(V\phi c_t)_f + (V\phi c_t)_m$.

La figura 2 muestra la respuesta para un pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento naturalmente fracturado de extensión infinita. Se muestra la influencia de λ y ω . El tiempo adimensional está basado en $(V\phi c_t)_f$. A tiempos pequeños el pozo se comporta como un sistema homogéneo con una porosidad-compresibilidad $(V\phi c_t)_e = (V\phi c_t)_f$, ($f(u) \approx \omega$) y a tiempos grandes con una compresibilidad efectiva $(V\phi c_t)_e = (V\phi c_t)_f + (V\phi c_t)_m$, ($f(u) \approx 1$). Durante estos dos periodos, se hacen evidentes dos líneas rectas semilogarítmicas con pendientes aproximadamente igual a 1.51 cada una de ellas.

Frecuentemente se menciona que la respuesta de las líneas paralelas es característica de los yacimientos naturalmente fracturados en flujo con geometría radial. El parámetro ω gobierna la longitud entre las dos rectas semilogarítmicas y λ gobierna el tiempo al cual la primera línea recta termina y también el tiempo al cual la segunda línea recta comienza. Durante el periodo de tiempo intermedio $p_{wD} \approx \text{constante}$, [$f(s) \approx \lambda / u(1-\omega)$].

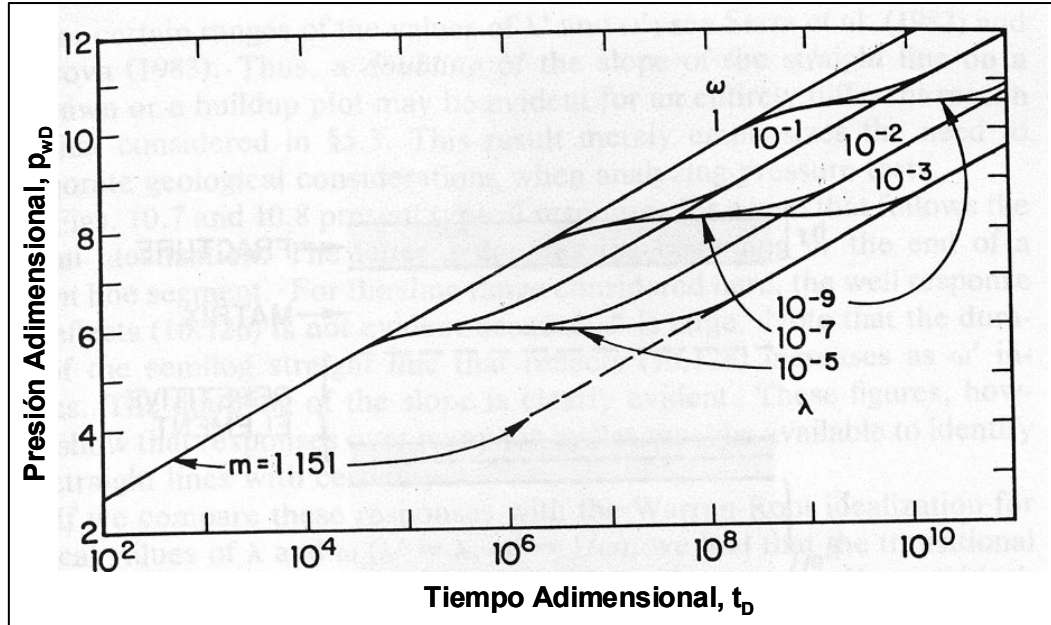


Figura 2. Presión adimensional, p_{wD} vs. tiempo adimensional t_D . Modelo de Warren y Root.

I.3 El modelo de Kazemi(1969)-de Swaan(1976)⁷

El modelo considerado por estos autores se muestra en la siguiente figura. Una vez más suponemos que la producción toma lugar vía el sistema de fracturas. A diferencia del modelo de Barenblatt, este modelo examina la forma de los bloques de la matriz y es conocido como “Modelo transitorio de flujo interporoso” ambos autores mostraron que las principales características del modelo de Barenblatt se conservan. Las diferencias son evidentes solo en el período intermedio entre los dos periodos semilogarítmicos lineales mostrados en la figura 2.

En esencia, la respuesta del yacimiento fracturado está gobernada por dos parámetros: λ' , ω' .

Considerando uno de los elementos simétricos del sistema, Serra, Reynolds y Raghavan en 1983 mostraron que $f(u)$ está dada por:

$$f(u) = 1 + \sqrt{\frac{\lambda' \omega'}{3u}} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega' u}{\lambda'}}\right). \quad \dots(1.48)$$

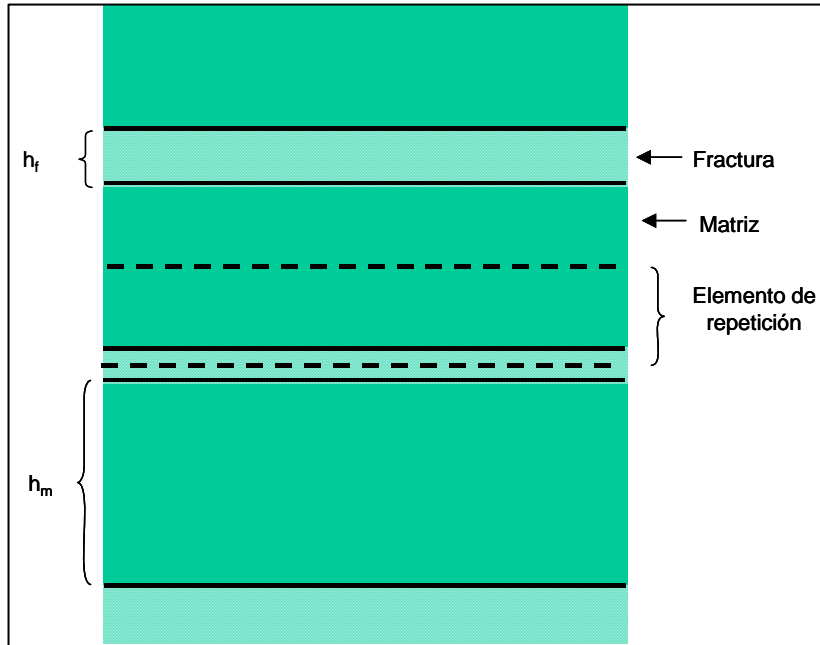


Figura 3. Esquema de un yacimiento con elementos rectangulares de matriz

Las definiciones de ω' y λ' son, respectivamente

$$\omega' = \frac{(\phi c_t h)_m}{(\phi c_t h)_f}; \quad \dots(1.49)$$

y

$$\lambda' = \frac{12L^2 (kh)_m}{h_m^2 (kh)_f}, \quad \dots(1.50)$$

y u es la variable de Laplace considerando t_D basado en $(\phi c_t)_f$. En esencia la ecuación (1.48) sugiere que la respuesta natural de un yacimiento fracturado está gobernada por dos parámetros λ' , ω' . Nuevamente, es posible mostrar que

$$f(u \rightarrow \infty) = 1; \quad \dots(1.51)$$

y

$$f(u \rightarrow 0^+) = 1 + \omega'. \quad \dots(1.52)$$

Durante estos periodos de flujo, se hacen evidentes líneas rectas semilogarítmicas con pendientes aproximadamente iguales a 1.151. La distancia entre las dos rectas depende de $1+\omega'$. El parámetro λ' gobierna el tiempo al que la respuesta del pozo se desvía o se une con la línea recta semilogarítmica.

La aproximación del tiempo intermedio se obtiene con la suposición de que u es suficientemente grande tal que $\tanh x \approx 1$ y $\lambda'\omega'/(3u) \gg 1$. Bajo estas circunstancias $f(u)$ puede ser aproximado por

$$f(u) \approx \sqrt{\frac{\lambda'\omega'}{3u}}. \quad \dots(1.53)$$

La importancia de esta aproximación radica en que sugiere la posible existencia de una línea recta semilogarítmica intermedia con una pendiente igual a un medio de la primera o terceras líneas semilogarítmicas, para ciertos rangos del valor de λ' y ω' (Serra y cols. 1983 y Streltsova 1983). Por lo tanto, puede ser evidente un quiebre de la pendiente de la línea recta en una gráfica de decremento o incremento de presión debido a diferentes razones. Esto enfatiza la necesidad de incorporar consideraciones geológicas cuando se analiza una prueba de presión. Las figuras 4 y 5 presentan una respuesta típica de un pozo que sigue la idealización de Kazemi. La letra x indica el comienzo o el fin de un segmento de línea recta. Para el rango de tiempo considerado aquí, la respuesta del pozo que refleja la ecuación 1.51 no es evidente porque ω' es grande. Obsérvese que la duración de la línea recta semilogarítmica que indica la ecuación 1.53 se incrementa conforme ω' crece. El quiebre en la pendiente es evidente. Las figuras, sin embargo, muestran que las respuestas deben estar disponibles en varios ciclos para identificar ambas líneas rectas con precisión.

Si comparamos estas respuestas con la idealización de Warren y Root para valores idénticos de λ y ω ($\lambda' \approx \lambda$, $\omega' \approx 1/[1+\omega']$), encontraremos que el periodo de transición comienza mucho más temprano y termina más tarde que si usamos la idealización de Kazemi. Este comportamiento es una característica de los modelos de interporosidad transitoria.

Como puede verse, la solución de un yacimiento homogéneo se puede usar para modelar la solución de un yacimiento naturalmente fracturado simplemente reemplazando la u en el argumento de la función de Bessel o función exponencial por $uf(u)$.

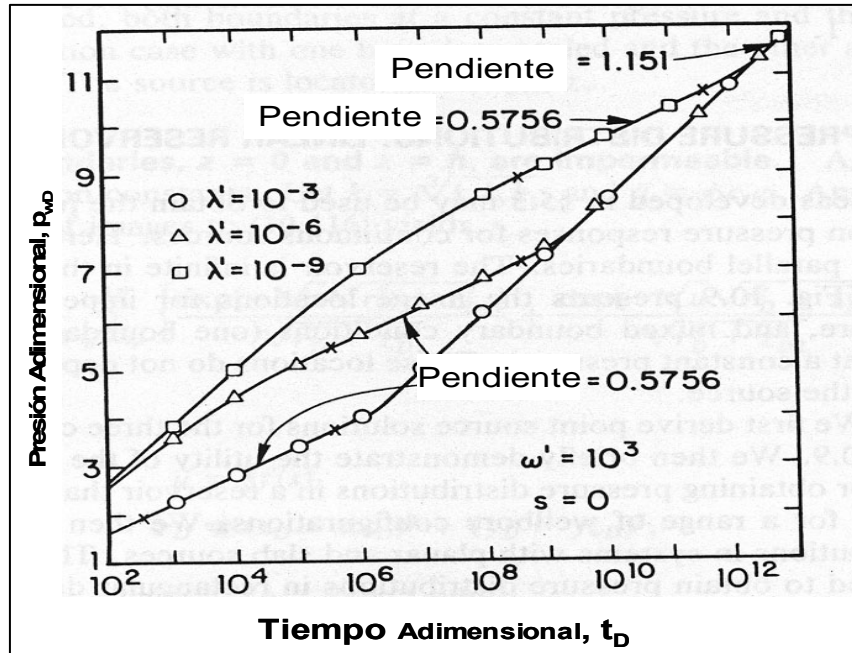


Figura 4. Efecto de λ sobre la existencia y duración de los regímenes de flujo; $\omega' = 10^3$ (Serra, 1981).

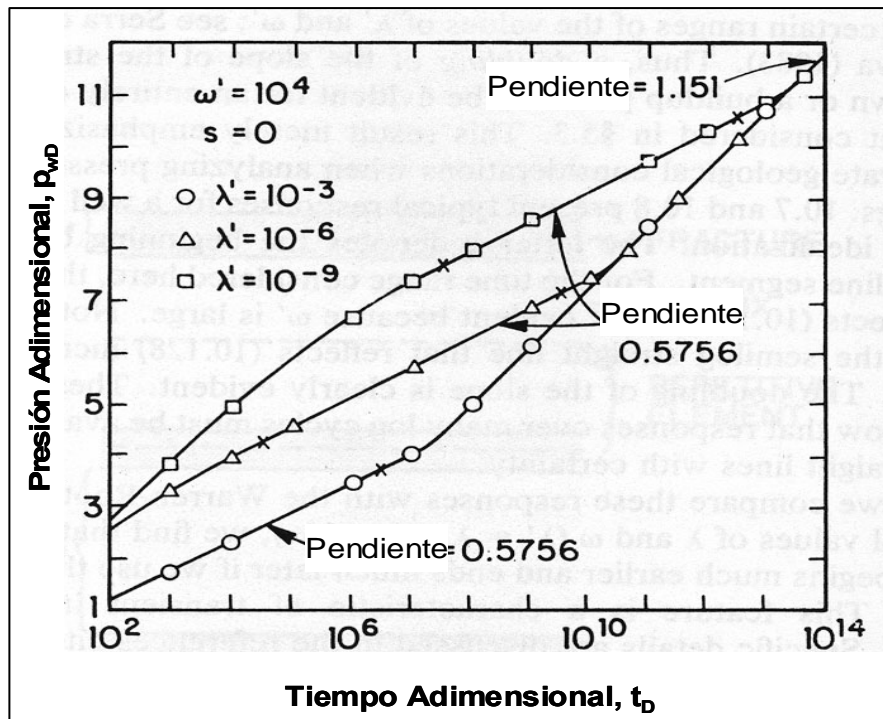


Figura 5. Efecto de λ sobre la existencia y duración de los regímenes de flujo; $\omega' = 10^4$ (Serra, 1981).

CAPÍTULO II

Solución de la ecuación en el espacio de Laplace para un pozo que penetra parcialmente la formación.

II.1 Respuesta de presión en yacimientos bajo la influencia de un casquete de gas y empuje hidráulico

Cuando actúa una capa de gas sobre un cierto espesor de aceite, la movilidad total del fluido en la interfase gas-aceite y arriba de esta, excede considerablemente la movilidad de la fase líquida en la zona de aceite. Entonces, conforme el aceite se produce, el gas (que es más compresible) arriba del contacto gas-aceite mantiene una presión aproximadamente constante, con el resultado de que la interfase se comporta como una frontera a presión aproximadamente constante. Cuando la presión en la zona de aceite cae por abajo del valor mantenido en el contacto gas-aceite, ocurre el flujo vertical. El flujo vertical en la interfase gas-aceite modifica significativamente el patrón de flujo hacia el pozo productor. Esta alteración se hace más y más pronunciada conforme el tiempo pasa. Sin embargo, para una prueba típica de presión, donde el tiempo es limitado, la interfase gas-aceite puede ser vista como una frontera de presión constante en la parte superior de la zona de aceite.

El efecto de presión constante de un casquete de gas sobre el comportamiento de un pozo puede considerarse similar al de un acuífero activo en la base de la formación. Analíticamente, los dos casos pueden investigarse con el mismo modelo⁸.

La frontera a presión constante en el fondo de la formación manifestará su existencia contribuyendo a la estabilización de los gradientes de presión desarrollados por el proceso de extracción, lo cual, llevará el sistema a alcanzar un estado estacionario.

II.2 Flujo hacia un pozo con terminación parcial y dos fronteras a presión constante

Cuando un pozo productor penetra parcialmente la formación⁹, el disturbio de presión en la formación está confinado inicialmente al intervalo perforado, con el flujo hacia el pozo siendo esencialmente radial dentro de la zona productora. Este caso se ilustra en la figura 6. Conforme el tiempo avanza, el volumen afectado por el pozo se expande hasta que alcanza las fronteras superior e inferior de la formación. El flujo hacia el pozo nuevamente es radial pero ahora sobre el espesor total de la formación.

En esta sección se obtendrá la ecuación general del decremento de presión en una zona de aceite que se encuentra bajo la influencia de un casquete de gas y un acuífero activo.

Se consideran las siguientes suposiciones:

El aceite se explota mediante un pozo que produce solo de un intervalo pequeño de la formación. La zona de aceite tiene un espesor h (figura 6); la formación productora es naturalmente fracturada y de extensión lateral infinita. El pozo produce de la zona de aceite a un gasto constante q desde $t > 0$ y en adelante. Conforme el aceite es extraído, el gas en el casquete inicialmente comprimido a la presión del yacimiento p_i , se expande. La

capacidad de almacenamiento del casquete de gas excede considerablemente la de la zona de aceite, debido a su compresibilidad mucho mayor comparada con la de la zona de aceite. Además, la movilidad del gas, debido a su viscosidad menor, excede por mucho a la del aceite. Entonces, el volumen de aceite fluyendo lejos de la interfase gas-aceite es siempre compensado instantáneamente por una expansión del gas. El movimiento resultante de la interfase gas-aceite se supone despreciable; esto es, el contacto gas-aceite se supone permanece cerca del estado estacionario, con gas movable arriba y aceite movable abajo, solamente.

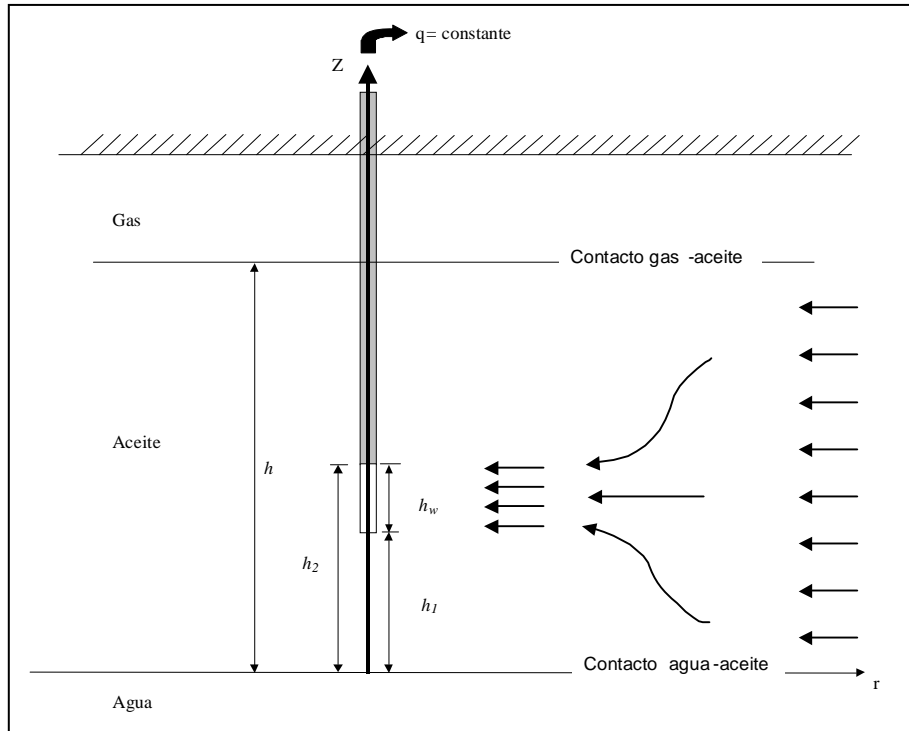


Figura 6. – Pozo que produce de una zona de aceite que se encuentra bajo la influencia de un casquete de gas y un acuífero activo.

La ecuación diferencial que define la respuesta de presión debida al flujo de aceite hacia un pozo está dada por la ecuación 1.41, que en coordenadas cilíndricas y en términos de la variable de Laplace se expresa como¹⁰:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{fD}}{\partial r_D} \right) + \frac{k_{fz}}{k_{fr}} \frac{r_w^2}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{p}_{fD}}{\partial z_D^2} - u f(u) \bar{p}_{fD} = 0; \quad \dots(2.1)$$

donde

$$f(u) = \frac{u\omega(1-\omega) + \lambda}{u(1-\omega) + \lambda}. \quad \dots(2.2)$$

Las condiciones de frontera para el problema en cuestión son:

$$\bar{p}_{fD}(r_D, 0, u) = 0, \quad 0 \leq r_D \leq \infty; \quad \dots(2.3)$$

$$\bar{p}_{fD}(r_D, 1, u) = 0, \quad 0 \leq r_D \leq \infty; \quad \dots(2.4)$$

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{fD}}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{u}; \quad \dots(2.5)$$

$$\int \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{fD}}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D \rightarrow 0} dz_D = 0, \quad 0 < z_D < h_{1D} \text{ y } h_{2D} \leq z_D \leq 1; \quad \dots(2.6)$$

$$\bar{p}_{fD}(\infty, z_D, u) = 0, \quad 0 \leq z_D \leq 1; \quad \dots (2.7)$$

donde u es la variable de Laplace y

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad \dots(2.8)$$

$$h_D = \frac{h}{r_w} \sqrt{\frac{k_{fr}}{k_{fz}}}, \quad \dots(2.9)$$

$$h_{wD} = \frac{h_w}{h}, \quad \dots(2.10)$$

$$h_{1D, 2D} = \frac{h_{1,2}}{h}, \quad \dots(2.11)$$

$$z_D = \frac{z}{h}. \quad \dots(2.12)$$

La solución de la ecuación 2.1 puede encontrarse por diversos métodos⁺. Sin embargo, en este caso se utilizará el método de separación de variables.

⁺ Una alternativa de solución es aplicando la transformación de Hankel, la cual se muestra en el apéndice **A**.

Entonces, expresando la solución para la ecuación 2.1 como el resultado del producto de dos funciones¹¹, es decir

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D) = R(r_D)Z(z_D). \quad \dots(2.13)$$

Sustituyendo la ecuación 2.13 en 2.1

$$\frac{R''(r_D)}{R(r_D)} + \frac{1}{r_D} \frac{R'(r_D)}{R(r_D)} + \frac{1}{h_D^2} \frac{Z''(z_D)}{Z(z_D)} - uf(u) = 0; \quad \dots(2.14)$$

$$\frac{R''(r_D)}{R(r_D)} + \frac{1}{r_D} \frac{R'(r_D)}{R(r_D)} = -\frac{1}{h_D^2} \frac{Z''(z_D)}{Z(z_D)} + uf(u). \quad \dots(2.15)$$

Separando variables e igualando a una constante de separación, digamos η

$$\frac{R''(r_D)}{R(r_D)} + \frac{1}{r_D} \frac{R'(r_D)}{R(r_D)} = \eta; \quad \dots(2.16)$$

$$\frac{1}{h_D^2} \frac{Z''(z_D)}{Z(z_D)} - uf(u) = -\eta. \quad \dots(2.17)$$

Haciendo $\eta < 0$, es decir, $\eta = -\xi^2$, la ecuación 2.17 será

$$Z''(z_D) - h_D^2(\xi^2 + uf(u))Z(z_D) = 0 \quad \dots(2.18)$$

Que tiene como solución general

$$Z(z_D) = \cosh\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 + uf(u))} z_D\right) + B \sinh\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 + uf(u))} z_D\right) \quad \dots(2.19)$$

Valuando la condición de frontera dada por la ecuación 2.3 en 2.19

$$Z(z_D = 0) = 0 = A \cosh(0) + B \sinh(0) \quad \dots(2.20)$$

De donde $A=0$, lo cual implica que

$$Z(z_D) = B \sinh\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 + uf(u))} z_D\right) \quad \dots(2.21)$$

Valuando la condición de frontera dada por la ecuación 2.4 en 2.21

$$Z(z_D = 1) = 0 = B \sinh\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 + u f(u))}\right) \quad \dots(2.22)$$

Si $B=0$ tendríamos una solución trivial, entonces

$$\sinh\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 + u f(u))}\right) = 0 \quad \dots(2.23)$$

Lo cual se cumple si

$$\xi = \sqrt{-u f(u)} \quad \dots(2.24)$$

La ecuación 2.24 indica que ξ solo puede tomar un único valor, que es cero; debido a ello la solución dada por la ecuación 2.18 con $\eta < 0$ deja de ser de nuestro interés.

Haciendo $\eta=0$, la ecuación 2.17 será

$$Z''(z_D) - h_D^2 u f(u) Z(z_D) = 0 \quad \dots(2.25)$$

Cuya solución general es

$$Z(z_D) = A \cosh\left(\sqrt{h_D^2 u f(u)} z_D\right) + B \sinh\left(\sqrt{h_D^2 u f(u)} z_D\right) \quad \dots(2.26)$$

Resulta evidente que la solución de 2.26 nos llevará a obtener, al igual que en el caso anterior, una solución puntual que estará dada por

$$Z(z_D) = B \sinh\left(\sqrt{h_D^2 u f(u)} z_D\right) \quad \dots(2.27)$$

Por lo que al igual que en el caso anterior, deja de ser de nuestro interés.

Haciendo $\eta > 0$, es decir, $\eta = (\xi^2)$, la ecuación 2.17 será

$$Z''(z_D) + h_D^2 (\xi^2 - u f(u)) Z(z_D) = 0, \quad \dots(2.28)$$

que tiene como solución general

$$Z(z_D) = A \cos\left(\sqrt{h_D^2 (\xi^2 - u f(u))} z_D\right) + B \sin\left(\sqrt{h_D^2 (\xi^2 - u f(u))} z_D\right), \quad \dots(2.29)$$

donde A y B son constantes desconocidas que deben ser evaluadas.

Igualmente, si $\eta > 0$, la ecuación 2.16 toma la siguiente forma

$$r_D^2 R''(r_D) + r_D R'(r_D) - \xi^2 r_D^2 R(r_D) = 0. \quad \dots(2.30)$$

Realizando el siguiente cambio de variable en la ecuación anterior

$$\chi = \xi r_D, \quad \dots(2.31)$$

cuya derivada, aplicando la regla de la cadena, es

$$\frac{dR(r_D)}{dr_D} = \frac{dR(r_D)}{d\chi} \frac{d\chi}{dr_D}, \quad \dots(2.32)$$

$$\frac{dR(r_D)}{dr_D} = \xi \frac{dR(r_D)}{d\chi}. \quad \dots(2.33)$$

Derivando y aplicando la regla de la cadena nuevamente

$$\frac{d}{dr_D} \left(\frac{dR(r_D)}{dr_D} \right) = \frac{d}{d\chi} \left(\xi \frac{dR(r_D)}{d\chi} \right) \frac{d}{dr_D} (\xi r_D), \quad \dots(2.34)$$

$$\frac{d^2 R(r_D)}{dr_D^2} = \xi^2 \frac{d^2 R(r_D)}{d\chi^2}. \quad \dots(2.35)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.31, 2.33 y 2.35 en 2.30 se llega a

$$\chi^2 \frac{\partial^2 R(r_D)}{\partial \chi^2} + \chi \frac{\partial R(r_D)}{\partial \chi} - \chi^2 R(r_D) = 0. \quad \dots(2.36)$$

La solución de 2.36 en términos de ξr_D , está formada por funciones de Bessel modificadas y es

$$R(\xi r_D) = CI_0(\xi r_D) + DK_0(\xi r_D), \quad \dots(2.37)$$

donde C y D son constantes desconocidas que deben ser evaluadas.

Sustituyendo 2.29 y 2.37 en 2.13 se llega a que

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = \left\{ A \cos\left(\sqrt{h_D^2 (\xi^2 - uf(u))} z_D\right) + B \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2 (\xi^2 - uf(u))} z_D\right) \right\}.$$

$$[CI_0(\xi r_D) + DK_0(\xi r_D)]. \quad \dots(2.38)$$

La ecuación 2.38, permite calcular $\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u)$ en un yacimiento debido al flujo hacia un pozo que penetra totalmente la formación. Para el caso en el cual se desea calcular $\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u)$ debido al flujo hacia un pozo que produce de un intervalo pequeño, entonces la ecuación 2.38 deberá tomar en cuenta el efecto combinado de la influencia de cada uno de los tres intervalos indicados en la figura 6; es decir h_{1D} , h_{wD} y $1-h_{2D}$.

De acuerdo a lo anterior, las ecuaciones que representan la respuesta de presión en los intervalos arriba mencionados serán, respectivamente

$$\begin{aligned} \bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = & \left\{ C_1 \cos\left(\sqrt{h_D^2 (\xi^2 - uf(u))} z_D\right) + C_2 \text{sen}\left(\sqrt{h_D^2 (\xi^2 - uf(u))} z_D\right) \right\} \cdot \\ & [C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)] \quad 0 \leq z_D < h_{1D}, \quad \dots(2.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = & \left\{ C_5 \cos\left(\sqrt{h_D^2 (\xi^2 - uf(u))} z_D\right) + C_6 \text{sen}\left(\sqrt{h_D^2 (\xi^2 - uf(u))} z_D\right) \right\} \cdot \\ & [C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)] \quad h_{1D} \leq z_D \leq h_{2D}, \quad \dots(2.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = & \left\{ C_9 \cos\left(\sqrt{h_D^2 (\xi^2 - uf(u))} z_D\right) + C_{10} \text{sen}\left(\sqrt{h_D^2 (\xi^2 - uf(u))} z_D\right) \right\} \cdot \\ & [C_{11} I_0(\xi r_D) + C_{12} K_0(\xi r_D)] \quad h_{2D} < z_D \leq 1, \quad \dots(2.41) \end{aligned}$$

donde C_1 a C_{12} son constantes desconocidas que deben ser evaluadas. Adicionalmente, las ecuaciones anteriores deberán cumplir las condiciones de continuidad siguientes

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) \Big|_{z_D=h_{1D}^-} = \bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) \Big|_{z_D=h_{1D}^+}, \quad \dots(2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_D} \bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) \Big|_{z_D=h_{1D}^-} = \frac{\partial}{\partial z_D} \bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) \Big|_{z_D=h_{1D}^+}, \quad \dots(2.43)$$

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) \Big|_{z_D=h_{2D}^-} = \bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) \Big|_{z_D=h_{2D}^+}, \quad \dots(2.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_D} \bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) \Big|_{z_D=h_{2D}^-} = \frac{\partial}{\partial z_D} \bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) \Big|_{z_D=h_{2D}^+}. \quad \dots(2.45)$$

Sustituyendo 2.39 a 2.41 en las ecuaciones 2.42 a 2.45, se llega a

$$0 = \left\{ C_1 \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^- \right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^- \right) \right\} [C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)] - \left\{ C_5 \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+ \right) + C_6 \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+ \right) \right\} [C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)], \quad \dots(2.46)$$

$$0 = [C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)] \left\{ -C_1 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^- \right) + C_2 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^- \right) \right\} - [C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)] \left\{ -C_5 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+ \right) + C_6 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+ \right) \right\}, \quad \dots(2.47)$$

$$0 = \left\{ C_5 \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^- \right) + C_6 \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^- \right) \right\} [C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)] - \left\{ C_9 \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+ \right) + C_{10} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+ \right) \right\} [C_{11} I_0(\xi r_D) + C_{12} K_0(\xi r_D)], \quad \dots(2.48)$$

$$0 = [C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)] \left\{ -C_5 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^- \right) + C_6 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^- \right) \right\} - [C_{11} I_0(\xi r_D) + C_{12} K_0(\xi r_D)] \left\{ -C_9 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+ \right) + C_{10} \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+ \right) \right\}. \quad \dots(2.49)$$

Sustituyendo la condición de frontera dada por 2.3 en 2.39

$$\bar{p}_{fD}(r_D, 0, u) = 0 = \{C_1 \cos(0) + C_2 \operatorname{sen}(0)\} [C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)], \quad \dots(2.50)$$

simplificando

$$C_1 [C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)] = 0, \quad \dots(2.51)$$

de donde

$$C_1 = 0. \quad \dots(2.52)$$

Sustituyendo 2.52 en 2.46

$$0 = C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^-\right) [C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)] -$$

$$\left\{ C_5 \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+\right) + C_6 \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+\right) \right\} [C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)].$$

...(2.53)

Despejando C_2

$$C_2 = \left\{ C_5 \frac{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+\right)}{\operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^-\right)} + C_6 \right\} \frac{[C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)]}{[C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)]}.$$

...(2.54)

Sustituyendo 2.52 en 2.47

$$0 = C_2 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^-\right) [C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)] -$$

$$[C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)] * \left\{ -C_5 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+\right) + \right.$$

$$\left. C_6 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+\right) \right\}.$$

...(2.55)

Despejando C_2

$$C_2 = \left\{ -C_5 \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+\right)}{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^-\right)} + C_6 \right\} \frac{[C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)]}{[C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)]}.$$

...(2.56)

Igualando 2.54 y 2.56

$$\left\{ C_5 \frac{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+\right)}{\operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^-\right)} + C_6 \right\} \frac{[C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)]}{[C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)]} =$$

$$\left\{ -C_5 \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^+\right)}{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{1D}^-\right)} + C_6 \right\} \frac{[C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)]}{[C_3 I_0(\xi r_D) + C_4 K_0(\xi r_D)]}.$$

...(2.57)

Simplificando

$$C_5 \left\{ \frac{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{1D}^+\right)}{\sen\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{1D}^-\right)} + \frac{\sen\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{1D}^+\right)}{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{1D}^-\right)} \right\} = 0, \quad \dots(2.58)$$

de donde

$$C_5 = 0. \quad \dots(2.59)$$

Sustituyendo la condición de frontera dada por 2.4 en 2.41

$$\begin{aligned} \bar{p}_{fD}(r_D, 1, u) = 0 = & \left\{ C_9 \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}\right) + C_{10} \sen\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}\right) \right\} \\ & [C_{11}I_0(\xi r_D) + C_{12}K_0(\xi r_D)], \end{aligned} \quad \dots(2.60)$$

de donde

$$C_9 = -C_{10} \tan \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}. \quad \dots(2.61)$$

Por otro lado, sustituyendo 2.59 en 2.47

$$\begin{aligned} 0 = & C_6 \sen\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{2D}^-\right) [C_7I_0(\xi r_D) + C_8K_0(\xi r_D)] - \\ & \left\{ C_9 \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{2D}^+\right) + C_{10} \sen\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{2D}^+\right) \right\} [C_{11}I_0(\xi r_D) + C_{12}K_0(\xi r_D)]. \end{aligned} \quad \dots(2.62)$$

Despejando C_{10}

$$C_{10} = C_6 \frac{[C_7I_0(\xi r_D) + C_8K_0(\xi r_D)]}{[C_{11}I_0(\xi r_D) + C_{12}K_0(\xi r_D)]} - C_9 \frac{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{2D}^+\right)}{\sen\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{2D}^+\right)}, \quad \dots(2.63)$$

Sustituyendo 2.58 en 2.48

$$\begin{aligned} 0 = & C_6 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{2D}^-\right) [C_7I_0(\xi r_D) + C_8K_0(\xi r_D)] - \\ & \left\{ -C_9 \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \sen\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{2D}^+\right) + C_{10} \sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} \cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}h_{2D}^+\right) \right\} \\ & [C_{11}I_0(\xi r_D) + C_{12}K_0(\xi r_D)]. \end{aligned} \quad \dots(2.64)$$

Despejando C_{10}

$$C_{10} = C_6 \frac{[C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)]}{[C_{11} I_0(\xi r_D) + C_{12} K_0(\xi r_D)]} + C_9 \frac{\text{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+\right)}{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+\right)}. \quad \dots(2.65)$$

Igualando 2.63 y 2.65

$$C_6 \frac{[C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)]}{[C_{11} I_0(\xi r_D) + C_{12} K_0(\xi r_D)]} - C_9 \frac{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+\right)}{\text{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+\right)} =$$

$$C_6 \frac{[C_7 I_0(\xi r_D) + C_8 K_0(\xi r_D)]}{[C_{11} I_0(\xi r_D) + C_{12} K_0(\xi r_D)]} + C_9 \frac{\text{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+\right)}{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+\right)}. \quad \dots(2.66)$$

Simplificando

$$C_9 \left\{ \frac{\text{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+\right)}{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+\right)} - \frac{\cos\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+\right)}{\text{sen}\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))} h_{2D}^+\right)} \right\} = 0, \quad \dots(2.67)$$

de donde

$$C_9 = 0. \quad \dots(2.68)$$

Sustituyendo 2.68 en 2.61

$$C_{10} \tan\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}\right) = 0. \quad \dots(2.69)$$

Si $C_{10}=0$ entonces se obtiene una solución trivial para la ecuación 2.41, ya que no se obtiene mayor información sobre las constantes; entonces se deberá cumplir que

$$\tan\left(\sqrt{h_D^2(\xi^2 - uf(u))}\right) = 0, \quad \dots(2.70)$$

lo cual se cumple si

$$\sqrt{h_D^2(\xi_n^2 - uf(u))} = n\pi \quad n=1, 2, 3, \dots \quad \dots(2.71)$$

es decir

$$\xi_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_D}\right)^2 + uf(u)} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \dots(2.72)$$

Por lo anterior, se tiene un número infinito de soluciones. Entonces, sustituyendo 2.51, 2.59, 2.68 y 2.72 en las ecuaciones 2.38 a 2.40, respectivamente se tiene que

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_2 \text{sen}(n\pi z_D) [C_3 I_0(\xi_n r_D) + C_4 K_0(\xi_n r_D)] \quad 0 \leq z_D < h_{1D}, \dots(2.73)$$

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_6 \text{sen}(n\pi z_D) [C_7 I_0(\xi_n r_D) + C_8 K_0(\xi_n r_D)] \quad h_{1D} \leq z_D \leq h_{2D}, \dots(2.74)$$

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{10} \text{sen}(n\pi z_D) [C_{11} I_0(\xi_n r_D) + C_{12} K_0(\xi_n r_D)] \quad h_{12} < z_D \leq 1. \dots(2.75)$$

Por simplicidad, haciendo

$$C_2 C_3 = a_n, \quad \dots(2.76)$$

$$C_2 C_4 = b_n, \quad \dots(2.77)$$

$$C_6 C_7 = c_n, \quad \dots(2.78)$$

$$C_6 C_8 = d_n, \quad \dots(2.79)$$

$$C_{10} C_{11} = e_n, \quad \dots(2.80)$$

$$C_{10} C_{12} = g_n, \quad \dots(2.81)$$

y sustituyendo en 2.73 a 2.75, respectivamente

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}(n\pi z_D) [a_n I_0(\xi_n r_D) + b_n K_0(\xi_n r_D)] \quad 0 \leq z_D < h_{1D}. \quad \dots(2.82)$$

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}(n\pi z_D) [c_n I_0(\xi_n r_D) + d_n K_0(\xi_n r_D)] \quad h_{1D} \leq z_D \leq h_{2D}. \quad \dots(2.83)$$

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}(n\pi z_D) [e_n I_0(\xi_n r_D) + g_n K_0(\xi_n r_D)] \quad h_{12} < z_D \leq 1. \quad \dots(2.84)$$

Valuando la condición de frontera 2.6 en 2.82, que es el caso para el cual $0 \leq z_D < h_{D1}$

$$\int_0^{h_{1D}} \left\{ r_D \frac{\partial}{\partial r_D} \left[\sum_{n=0}^{\infty} [a_n I_0(\xi_n r_D) + b_n K_0(\xi_n r_D)] \text{sen}(n\pi z_D) \right] \right\} \Bigg|_{r_D \rightarrow 0} dz_D = 0. \quad \dots(2.85)$$

La derivada de las funciones I_0 y K_0 se obtienen de las fórmulas de recurrencia siguientes

$$\frac{d}{dx} [x^p I_p(x)] = x^p I_{p-1}(x), \quad \dots(2.86)$$

$$\frac{d}{dx} [x^p K_p(x)] = -x^p K_{p-1}(x), \quad \dots(2.87)$$

$$I_{-n} = I_n \quad n=1, 2, 3, \dots \quad \dots(2.88)$$

$$K_{-n} = K_n \quad n=1, 2, 3, \dots \quad \dots(2.89)$$

derivando el lado izquierdo de 2.85

$$\int_0^{h_{1D}} \left\{ r_D \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n [a_n I_1(\xi_n r_D) - b_n K_1(\xi_n r_D)] \text{sen}(n\pi z_D) \right\} \Bigg|_{r_D \rightarrow 0} dz_D = 0. \quad \dots(2.90)$$

Como se puede observar, si se toma el límite entonces el lado izquierdo se hace cero, lo cual no nos da mayor información sobre el valor de las constantes. Sin embargo, ya que se va tomar el límite cuando $r_D \rightarrow 0$, entonces se sustituyen las aproximaciones de las funciones Bessel¹² para cuando $x \rightarrow 0^+$ dadas por

$$I_p(x) \approx \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+1)} \quad p \neq -1, -2, -3, \dots \quad \dots(2.91)$$

$$K_p(x) \approx \frac{\Gamma(p)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^p \quad p > 0 \quad \dots(2.92)$$

Donde $\Gamma(p)$ es la función Gamma

$$\Gamma(p+1) = p! \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \dots(2.93)$$

Haciendo uso de la siguiente propiedad de la función Gamma

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \dots(2.94)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.91 y 2.92 en 2.90 e introduciendo r_D a la sumatoria

$$\int_0^{h_{1D}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \xi r_D \left[a_n \left(\frac{\xi_n r_D}{2} \right) - b_n \left(\frac{1}{\xi_n r_D} \right) \right] \text{sen}(n\pi z_D) \right\} \Bigg|_{r_D \rightarrow 0} dz_D = 0. \quad \dots(2.95)$$

Simplificando

$$\int_0^{h_{1D}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{\xi_n^2 r_D^2}{2} \right) - b_n \right] \text{sen}(n\pi z_D) \right\} \Bigg|_{r_D \rightarrow 0} dz_D = 0. \quad \dots(2.96)$$

Tomando el límite

$$\int_0^{h_{1D}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi z_D) dz_D = 0. \quad \dots(2.97)$$

La ecuación 2.96 se reconoce como un problema de series de Fourier. Multiplicando por $\text{sen}(m\pi z_D)$ en ambos lados de la ecuación

$$\int_0^{h_{1D}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi z_D) \text{sen}(m\pi z_D) dz_D = 0. \quad \dots(2.98)$$

Integrando con respecto a z_D de 0 a 1

$$\int_0^1 \int_0^{h_{1D}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{sen}(n\pi z_D) \text{sen}(m\pi z_D) dz_D dz_D = 0. \quad \dots(2.99)$$

Para una sumatoria finita la integral de la suma es igual a la suma de las integrales; suponiendo que esta propiedad es aplicable a 2.99

$$\int_0^{h_{1D}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^1 \text{sen}(n\pi z_D) \text{sen}(m\pi z_D) dz_D = 0. \quad \dots(2.100)$$

La integral es diferente de cero si $m=n$; entonces, efectuando la sumatoria

$$\int_0^{h_{1D}} b_n \int_0^1 \text{sen}^2(n\pi z_D) dz_D = 0. \quad \dots(2.101)$$

Integrando

$$\int_0^{h_{1D}} b_n \left[\frac{1}{2} z_D - \frac{1}{2(2n\pi)} \text{sen}(2n\pi z_D) \right]_0^1 dz_D = 0. \quad \dots(2.102)$$

Simplificando

$$\frac{1}{2} b_n \int_0^{h_{1D}} dz_D = 0, \quad \dots(2.103)$$

de donde se obtiene que

$$b_n = 0. \quad \dots(2.104)$$

Valuando la condición de frontera externa dada por la ecuación 2.7 en 2.82

$$\bar{p}_{fD}(\infty, z_D, u) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n I_0(\infty) + b_n K_0(\infty)] \text{sen}(n\pi z_D). \quad \dots(2.105)$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\text{sen}(m\pi z_D)$ en ambos miembros, tomando en cuenta que $b_n=0$, ecuación 2.104, integrando de 0 a 1 y aplicando la misma propiedad de las sumatorias que en la ecuación 2.99

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n I_0(\infty) \int_0^1 \text{sen}(n\pi z_D) \text{sen}(m\pi z_D) dz_D = 0. \quad \dots(2.106)$$

Nuevamente, la integral es diferente de 0 si $n=m$. Realizando la sumatoria

$$a_n I_0(\infty) \int_0^1 \text{sen}^2(n\pi z_D) dz_D = 0, \quad \dots(2.107)$$

de donde se obtiene que

$$a_n = 0. \quad \dots(2.108)$$

Por lo anterior

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = 0 \quad 0 \leq z_D < h_{1D}. \quad \dots(2.109)$$

Por analogía, resulta evidente que la solución de la ecuación 2.84 en el intervalo $h_{2D} < z_D \leq 1$ también es cero. Es decir,

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = 0 \quad h_{2D} < z_D \leq 1. \quad \dots(2.110)$$

Valuando la condición de frontera dada por la ecuación 2.5 en 2.82

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left\{ r_D \frac{\partial}{\partial r_D} \left[\sum_{n=0}^{\infty} [c_n I_0(\xi_n r_D) + d_n K_0(\xi_n r_D)] \text{sen}(n\pi z_D) \right] \right\} \Bigg|_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{u}, \quad \dots(2.111)$$

Derivando el lado izquierdo

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left\{ r_D \sum_{n=0}^{\infty} \xi [c_n I_1(\xi_n r_D) - d_n K_1(\xi_n r_D)] \text{sen}(n\pi z_D) \right\} \Bigg|_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{u}. \quad \dots(2.112)$$

Si se toma el límite en el lado izquierdo entonces se llega a una incongruencia. Sustituyendo las aproximaciones de las funciones Bessel para cuando $x \rightarrow 0^+$ e introduciendo r_D a la sumatoria

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \xi r_D \left[c_n \left(\frac{\xi_n r_D}{4} \right) - d_n \left(\frac{1}{\xi_n r_D} \right) \right] \text{sen}(n\pi z_D) \right\} \Big|_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{u}. \quad \dots(2.113)$$

Simplificando

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n \left(\frac{\xi_n^2 r_D^2}{2} \right) - d_n \right] \text{sen}(n\pi z_D) \right\} \Big|_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{u}. \quad \dots(2.114)$$

Tomando el límite

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \text{sen}(n\pi z_D) dz_D = \frac{1}{u}. \quad \dots(2.115)$$

Multiplicando por $\text{sen}(m\pi z_D)$ a ambos miembros e integrando de 0 a 1

$$\int_0^1 \int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \text{sen}(n\pi z_D) \text{sen}(m\pi z_D) dz_D dz_D = \frac{1}{u} \int_0^1 \text{sen}(m\pi z_D) dz_D, \quad \dots(2.116)$$

lo cual, por las propiedades ya mencionadas anteriormente, es posible expresarlo como

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \int_0^1 \text{sen}(n\pi z_D) \text{sen}(m\pi z_D) dz_D dz_D = \frac{1}{u} \int_0^1 \text{sen}(m\pi z_D) dz_D. \quad \dots(2.117)$$

Nuevamente, la integral es diferente de 0 si $m=n$; entonces, efectuando la sumatoria

$$d_n \int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \int_0^1 \text{sen}(n\pi z_D)^2 dz_D dz_D = \frac{1}{u} \int_0^1 \text{sen}(n\pi z_D) dz_D, \quad \dots(2.118)$$

$$d_n \int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left[\frac{1}{2} z_D - \frac{1}{2(2n\pi)} \text{sen}(2n\pi z_D) \right] dz_D = -\frac{1}{n\pi u} \cos(n\pi z_D) \Big|_0^1, \quad \dots(2.119)$$

$$d_n \int_{h_{1D}}^{h_{2D}} dz_D = -\frac{2}{n\pi u} [\cos(n\pi) - 1], \quad \dots(2.120)$$

$$d_n = -\frac{2[\cos(n\pi) - 1]}{(h_{2D} - h_{1D})n\pi u}. \quad \dots(2.121)$$

$h_{2D} - h_{1D}$ es igual a la longitud del intervalo productor, entonces simplificando

$$d_n = \frac{2[1 - (-1)^n]}{h_{wD} n\pi u}. \quad \dots(2.122)$$

Valuando la condición de frontera externa dada por la ecuación 2.7 en 2.83

$$\bar{p}_{fD}(\infty, z_D, u) = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n I_0(\infty) + d_n K_0(\infty)] \text{sen}(n\pi z_D). \quad \dots(2.123)$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\text{sen}(m\pi z_D)$ en ambos miembros e integrando de 0 a 1:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} [c_n I_0(\infty) + d_n K_0(\infty)] \text{sen}(n\pi z_D) \text{sen}(m\pi z_D) dz_D = 0. \quad \dots(2.124)$$

Procediendo de la misma manera que en los casos anteriores

$$[c_n I_0(\infty) + d_n K_0(\infty)] \int_0^1 \text{sen}(n\pi z_D)^2 dz_D = 0. \quad \dots(2.125)$$

Simplificando

$$c_n I_0(\infty) + d_n K_0(\infty) = 0, \quad \dots(2.126)$$

$$c_n = -\frac{d_n K_0(\infty)}{I_0(\infty)}. \quad \dots(2.127)$$

Las funciones de Bessel modificadas tienen el siguiente comportamiento asintótico

$$K_0(x) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty, \quad \dots(2.128)$$

$$I_0(x) \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty. \quad \dots(2.129)$$

Sustituyendo 2.128 y 2.129 en 2.127 se llega a que

$$c_n = 0, \quad \dots(2.130)$$

Entonces sustituyendo 2.122 y 2.130 en 2.83

$$\bar{p}_{fD}(r_D, z_D, u) = \frac{2}{\pi h_{wD} u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_0(\xi_n r_D) [1 - (-1)^n] \text{sen}(n\pi z_D) \quad 0 \leq z_D \leq 1. \quad \dots(2.131)$$

Con ξ_n dado por la ecuación 2.72

Cabe hacer mención que la posición del intervalo productor dentro del yacimiento está considerada en la ecuación anterior, ya que $h_{wD} = h_{2D} - h_{1D}$ y z_D es la posición en la cual se desea calcular la respuesta de presión.

II.3 Aproximación para tiempos cortos

En la sección II.2 se obtuvo la expresión matemática 2.131, que permite determinar la respuesta de presión para el problema en estudio. Como puede apreciarse, esta ecuación está en función de 5 variables: ω , λ , h_{wD} , z_D y h_D ; resulta evidente la conveniencia de obtener una expresión con un número de términos menor. Esto es posible si considera que las variables involucradas tienen influencia solo en ciertos periodos de tiempo.

Con base en la ecuación 1.46, evaluando la ecuación 2.72, para tiempos cortos la función $f(u)$ se puede aproximar como $f(u) = \omega$, con lo cual se obtiene

$$\xi_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_D}\right)^2 + u\omega} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad \dots(2.132)$$

II.5 Aproximación para tiempos grandes

Como se vio en el capítulo I, es posible obtener una aproximación para tiempos grandes de la función $f(u)$, la cual está dada por la ecuación 1.43. De acuerdo a esto se tiene que

$$\xi_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_D}\right)^2} + u \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots(2.133)$$

CAPÍTULO III

Validación del modelo matemático.

III.1 Inversión al espacio real, algoritmo de Stehfest

Debido a la dificultad que se tiene para invertir la ecuación 2.130 del espacio de Laplace al espacio real, se hace necesario emplear un método numérico para transformarla.

De los métodos numéricos disponibles, el que presenta mayor simplicidad en su manejo es el desarrollado por Stehfest¹³, y por ello el que se emplea para la inversión de las soluciones obtenidas.

En el año 1970 Stehfest propuso un procedimiento numérico para obtener la inversa de una función en términos de la variable de Laplace u , el cual a continuación se describe brevemente.

Si $F_a(t)$ es el valor aproximado de la inversa de $f(u)^*$ a un tiempo t , entonces $F_a(t)$ está dada por

$$F_a(t) = \left(\ln \frac{2}{t} \right) \sum_{i=1}^n V_i P \left[i \frac{\ln 2}{t} \right], \quad \dots (3.1)$$

donde

$$V_i = (-1)^{(N/2+i)} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min\left(i, \frac{N}{2}\right)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!} \quad \dots (3.2)$$

Aquí, $P(u)$ es la función cuya inversa se desea encontrar, N es un número par y k es un entero que se determina aritméticamente. V_i depende solo de N y sus propiedades son tales que para un valor dado de N , la suma de los V_i son cero y los valores de $|V_i|$ tienden a incrementarse conforme N incrementa. Los valores de V_i deben ser calculados solo una vez para un valor dado de N . Para obtener una mayor precisión, el valor de N necesita ser aproximadamente proporcional al número de dígitos significativos que se estén empleando en el programa de cómputo. El valor de N debe seleccionarse experimentando numéricamente y su valor debe cambiar con el tiempo. Generalmente la precisión de $F_a(t)$ se incrementa conforme el valor de N se incrementa. Para problemas de nuestro interés, N generalmente está en el rango $8 < N < 12$.

El requisito principal para calcular $F_a(t)$ mediante las ecuaciones anteriores es que la función $f(t)$ no tenga discontinuidades y que no oscile (a menos que la longitud de onda de la oscilación satisfaga ciertos criterios).

* En esta caso en particular $f(u)$ es cualquier función que depende de la variable u .

Cuando la función a invertir no cumple con los requisitos mencionados, se puede emplear el algoritmo de Crump (1976). Sin embargo, este algoritmo, es mucho más complicado de implementar que el de Stehfest.

III.2 Validación en periodos de tiempo cortos

Con el fin de poder evaluar el modelo matemático en el espacio real, se compararon las respuestas de presión obtenidas con el modelo desarrollado por Bui, Mamora, Lee¹⁴ y la obtenida mediante el modelo desarrollado en este trabajo. Las principales suposiciones, entre otras, del modelo de los autores citados son: pozo parcialmente penetrante, formación horizontal y naturalmente fracturada de extensión lateral infinita, espesor constante, las fronteras superior e inferior de la formación son impermeables, matriz y fracturas de propiedades uniformes, yacimiento con un fluido ligeramente compresible, de una sola fase y de viscosidad constante. A diferencia del modelo desarrollado en este trabajo, ellos consideran la solución para el caso en el que $r \rightarrow r_w$. El modelo de referencia, empleando la nomenclatura utilizada en este trabajo es el siguiente

$$\bar{p}_{Df} = \frac{K_0(\sqrt{uf(u)}r_D)}{u\sqrt{uf(u)}K_1(\sqrt{uf(u)}r_D)} + \frac{2}{u\pi^2 h_{Dp}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_0(\sqrt{uf(u)}r_D)}{n^2 \xi K_1(\sqrt{uf(u)}r_D)} \left\{ \text{sen} \left[n\pi \left(\frac{h_b}{h} + h_{DP} \right) \right] - \text{sen}(n\pi h_{bD}) \right\}^2 \quad \dots(3.3)$$

La inversión al espacio real de ambos modelos se realizó empleando el mismo algoritmo de Stehfest, con un valor de 8 para N , en ambos modelos.

Los parámetros empleados se listan en la Tabla I.

Tabla I. Parámetros empleados para la comparación de los modelos a tiempos cortos.

Parámetro	Valor
Espesor adimensional, h_D	2000
Espesor del yacimiento, h [ft]	400
Radio del pozo, r_w [ft]	0.2
Longitud del intervalo productor, h_w [ft]	40
Coefficiente de almacenamiento, ω [-]	0.02
Coefficiente de flujo interporoso, λ [-]	1.0×10^{-3}

La respuesta de presión de ambos modelos se presenta en la figura 7. La respuesta del modelo desarrollado en este trabajo resulta ser similar en tiempo y forma, durante el periodo en el cual se presentan los efectos de la doble porosidad y hasta $t_D = 3.0 \times 10^3$, a

aquella obtenida mediante el modelo de Bui, Mamora y Lee. Ya que a tiempos mayores, cuando los efectos de las fronteras superior e inferior comienzan a sentirse, las curvas se separan. A tiempos grandes, se obtiene una pendiente igual a cero en el modelo de referencia, mientras que en el modelo a comparar, se observa un periodo de tiempo en el cual la derivada de presión cae siguiendo un comportamiento lineal con pendiente $-5/4$. El valor de esta pendiente, como se verá en el capítulo 4, se atribuye a que el intervalo productor está en contacto con una de las fronteras.

El valor de la derivada se determinó empleando el mismo algoritmo de inversión y la propiedad

$$F'(u) = u f(u) - F(0). \quad \dots(3.4)$$

De acuerdo a la expresión anterior, la ecuación a invertir se multiplicó por la variable de Laplace y posteriormente se trajo al espacio real empleando el mismo algoritmo de cómputo.

En el apéndice **B** se presenta el algoritmo empleado para la inversión de las ecuaciones, el cual está programado en lenguaje FORTRAN.

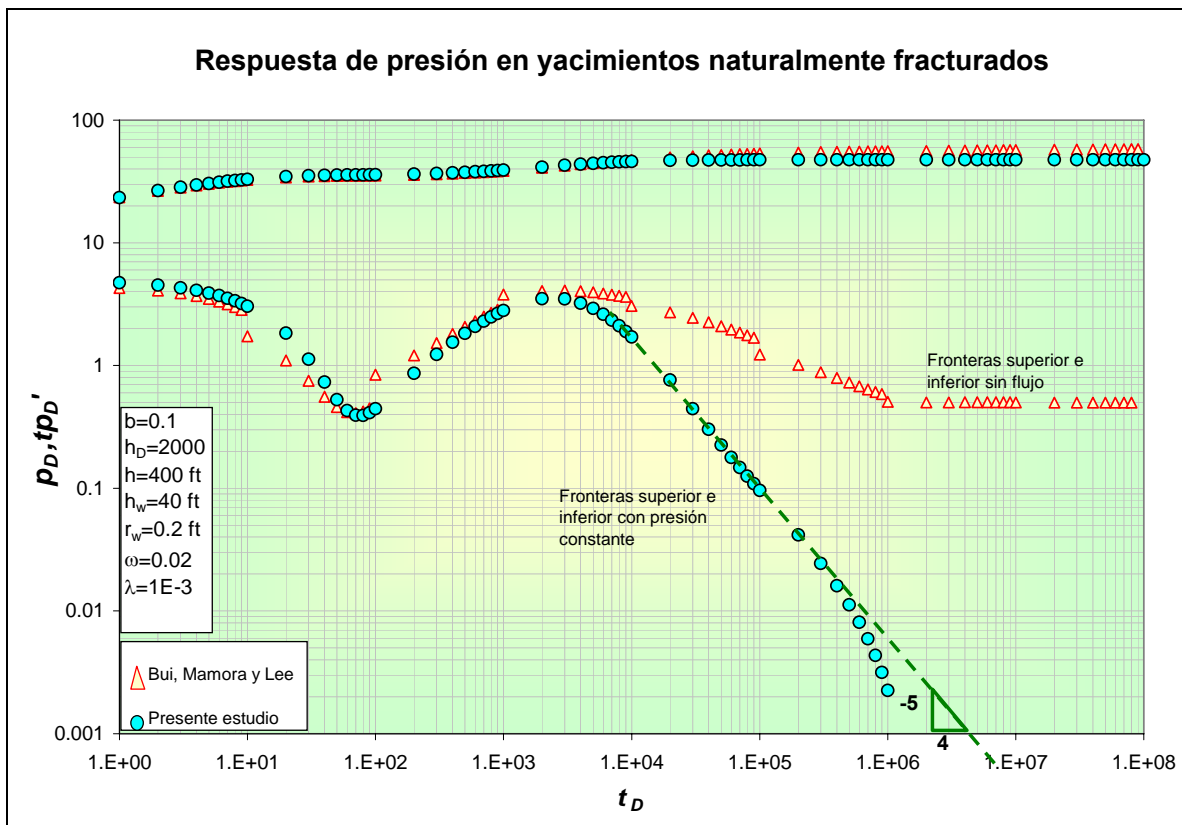


Figura 7. Respuesta de presión obtenida por el modelo desarrollado por Bui, Mamora y Lee y el obtenido en el presente estudio. Comparación a tiempos cortos.

III.3 Validación en periodos de tiempo grandes

Para validar la respuesta de presión obtenida mediante el modelo desarrollado en este estudio, se empleó aquel desarrollado por M. Abbaszadeh y P. Hegeman¹⁵. Su solución, obtenida analíticamente, permite calcular la respuesta de presión en un pozo con terminación parcial y con cierto ángulo de inclinación, en un yacimiento infinito. Las fronteras superior e inferior pueden ser sin flujo o tener soporte de presión vertical mediante un casquete de gas, empuje hidráulico o la combinación de ambas. Supone que el yacimiento es horizontal con espesor constante, homogéneo y anisotrópico. El modelo matemático que presentan, empleando la misma nomenclatura que en este trabajo, es el siguiente

$$p_{wD}(t_D, \theta_{wD}, z_{wD}) = \left(\frac{2h_D}{\pi h_{wD}} \right)^2 \int_0^{t_D} \frac{e^{-\frac{1}{4}\tau_D}}{\tau_D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-A}}{n^2} \text{sen}^2 \left(\frac{n\pi h_{wD}}{2h_D} \right) \text{sen}^2 \left(\frac{n\pi z_{wD}}{h_D} \right) d\tau_D \dots (3.5)$$

Donde

$$A = \frac{n^2 \pi^2 \tau_D}{h_D^2} \dots (3.6)$$

La comparación de los modelos se presenta en la figura 8.

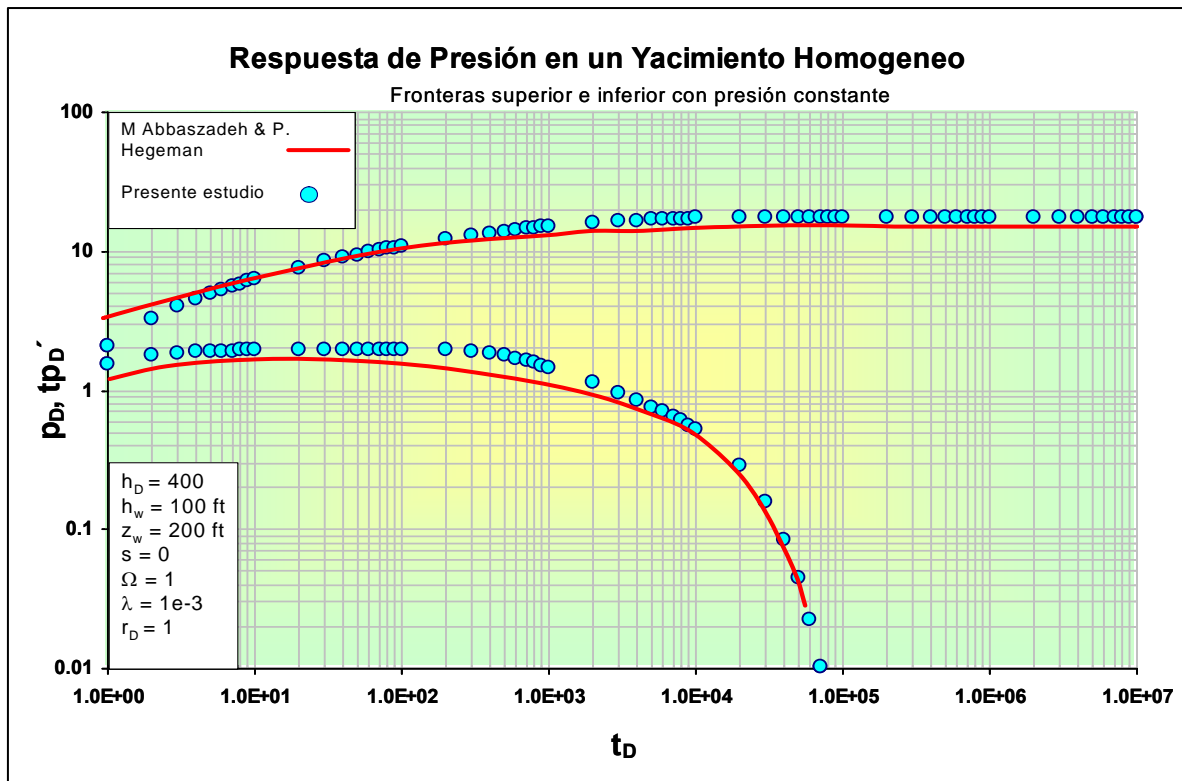


Figura 8. Respuesta de presión obtenida con el modelo desarrollado por M. Abbaszadeh y P. Hegeman y el obtenido en el presente estudio. Comparación a tiempos grandes.

Con el fin de obtener la respuesta de un yacimiento homogéneo, y así poder efectuar la comparación con el modelo de M. Abbaszadeh y P. Hegeman, se calculó la respuesta de presión con el modelo desarrollado en este estudio considerando $\omega = 1$. Los parámetros empleados en ambos modelos se indican en la Tabla II.

Tabla II. Parámetros empleados para la comparación de los modelos a tiempos grandes.

Parámetro	Valor
Espesor adimensional, h_D	400
Radio del pozo, r_w [ft]	0.2
Longitud del intervalo productor, h_w [ft]	200
Almacenamiento, C_D [-]	0
Daño, s_D [-]	0
Coefficiente de almacenamiento, ω [-]	1.0
Coefficiente de flujo interporoso, λ [-]	1.0×10^{-3}
Angulo de inclinación del intervalo, θ [°]	0

En la figura 8 se aprecia que existen diferencias a tiempos cortos y medios. Se observa que la respuesta de ambos modelos tiende a ser la misma a medida que se manifiestan los efectos de las fronteras superior e inferior, llegando a ser iguales para $t_D > 4.0 \times 10^4$. Las diferencias observadas se atribuyen a la condición de frontera interna (ec. 3.7), que es diferente en ambos casos, la inversión numérica del modelo a validar, el valor empleado del parámetro N y la definición de h_D y L_{wD} (ec. 3.8), ya que los autores citados emplean en la definición un valor de radio equivalente (ec.3.9).

$$0.001127 \int_{-L_w/2}^{L_w/2} \frac{2wk_H}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{w \rightarrow 0} dL = q_w \quad \dots(3.7)$$

En la ecuación 3.7 q_w es la producción de aceite del pozo y el integrando representa el aporte de fluido por unidad de longitud. La constante 0.001127 es un factor de conversión de unidades.

$$h_D = \frac{h}{r'_w} \sqrt{\frac{k_r}{k_z}} \quad \dots(3.8)$$

$$r'_w = \frac{r_w}{2} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta_w + \left(\frac{k_v}{k_H} \right) \text{sen}^2 \theta_w}} \right] \right\} \quad \dots(3.9)$$

El significado de cada variable se indica en la sección de nomenclatura.

CAPÍTULO IV

Efecto de los diferentes parámetros en la respuesta de presión.

IV.1 Efecto del coeficiente de capacidad almacenamiento, ω .

El efecto del coeficiente de almacenamiento sobre la p_D y tp'_D se presenta en la figura 9. Se puede observar que la curva de la derivada de presión proporciona la forma de un valle durante el periodo de transición matriz-fractura. A medida que disminuye el valor de ω , la forma característica del valle se profundiza, además de que inicia a tiempos más cortos. A tiempos mayores, todas las curvas convergen a un mismo valor. La parte superior de la transición matriz-fractura es la misma para todas las curvas. Comparando con las curvas tipo de un pozo totalmente penetrante se observa que, el valor de la derivada de la respuesta de presión tiene valores mayores en el caso de un pozo con terminación parcial.

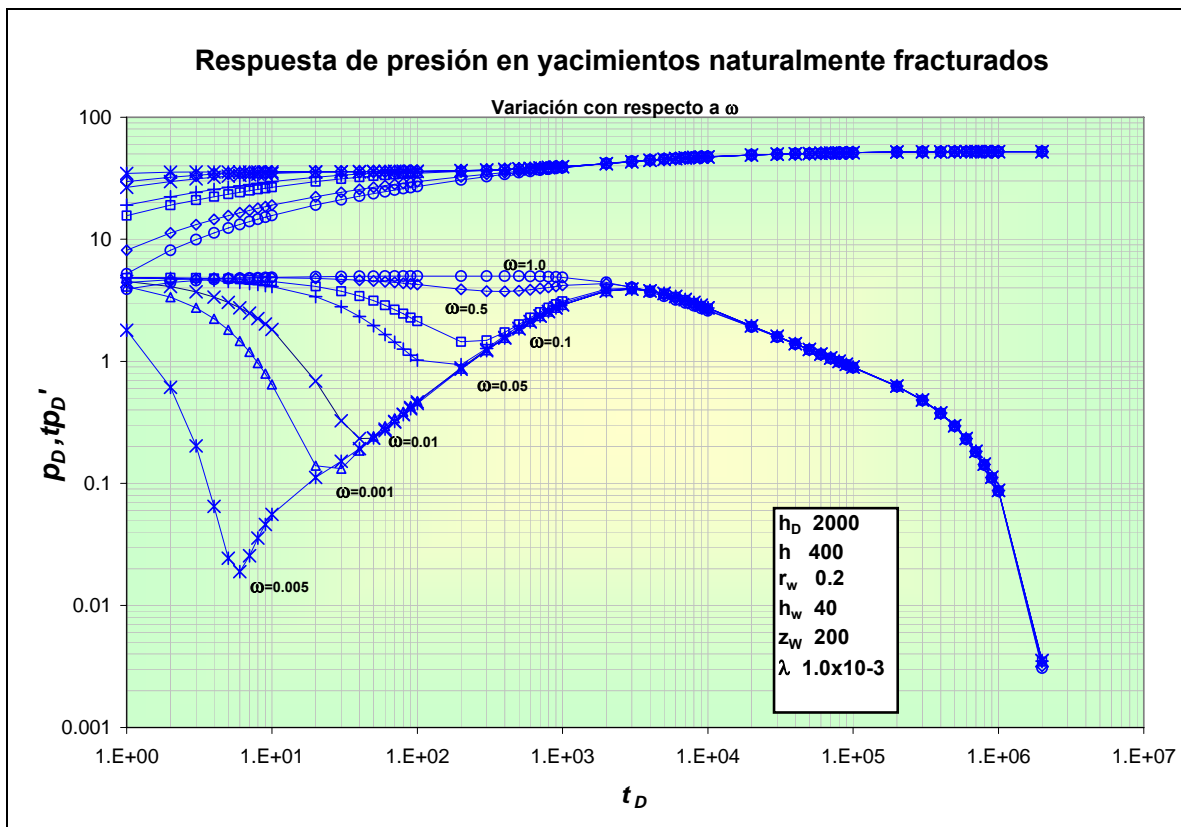


Figura 9. Variación de la respuesta de presión para diversos valores del coeficiente de almacenamiento ω .

IV.2 Efecto del coeficiente de flujo interporoso, λ .

En la figura 10, para $h_D=2000$ se observa que a medida que el valor del coeficiente interporoso se hace menor, el valle se profundiza, además de que se presenta a tiempos mayores. Para λ menor que 10^{-5} , la transición matriz-fractura ocurre cuando se presentan los efectos de las fronteras.

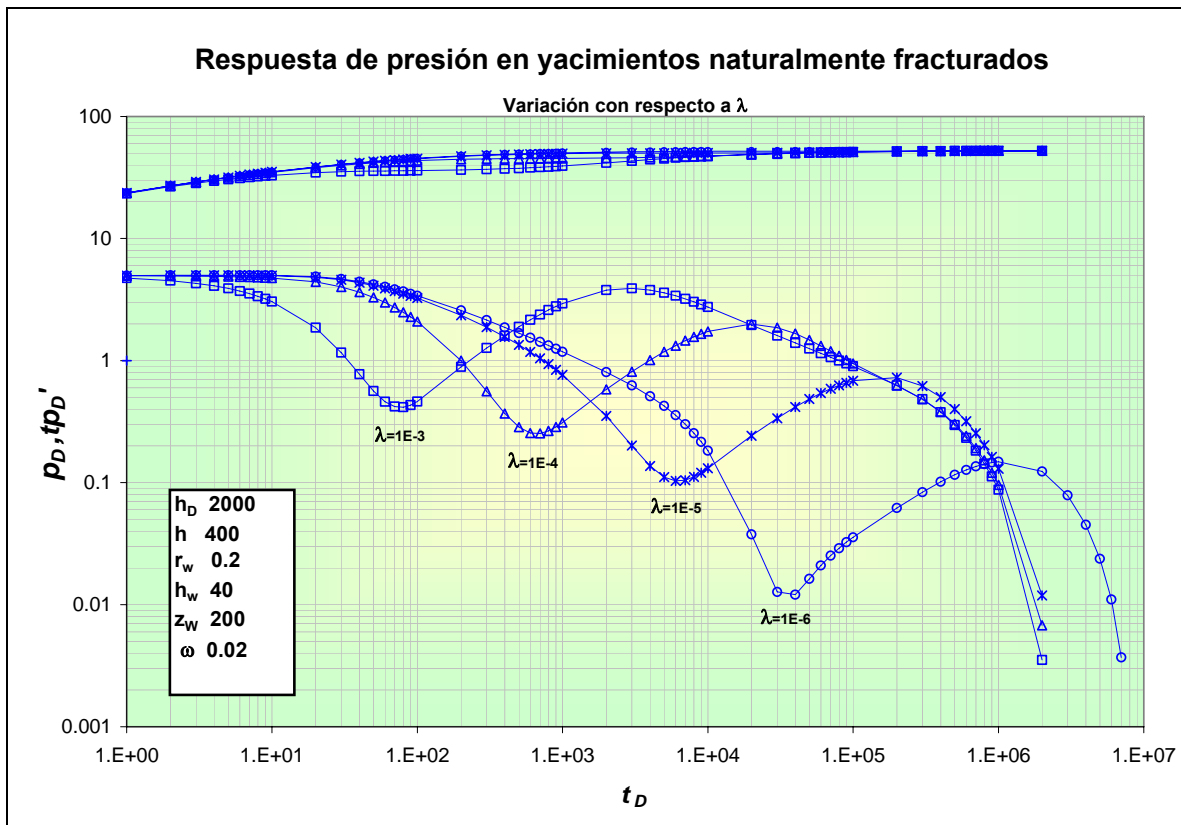


Figura 10. Variación de la respuesta de presión para diversos valores del coeficiente de flujo interporoso λ .

IV.3 Efecto de la longitud del intervalo productor, h_{wD} .

La figura 11, muestra el efecto de la longitud del intervalo productor sobre la respuesta de presión. A medida que h_{wD} aumenta su longitud, las curvas convergen a aquella que se obtiene cuando el intervalo productor es igual al espesor de la formación. Con todo el espesor de la formación produciendo, es posible observar el periodo de flujo radial.

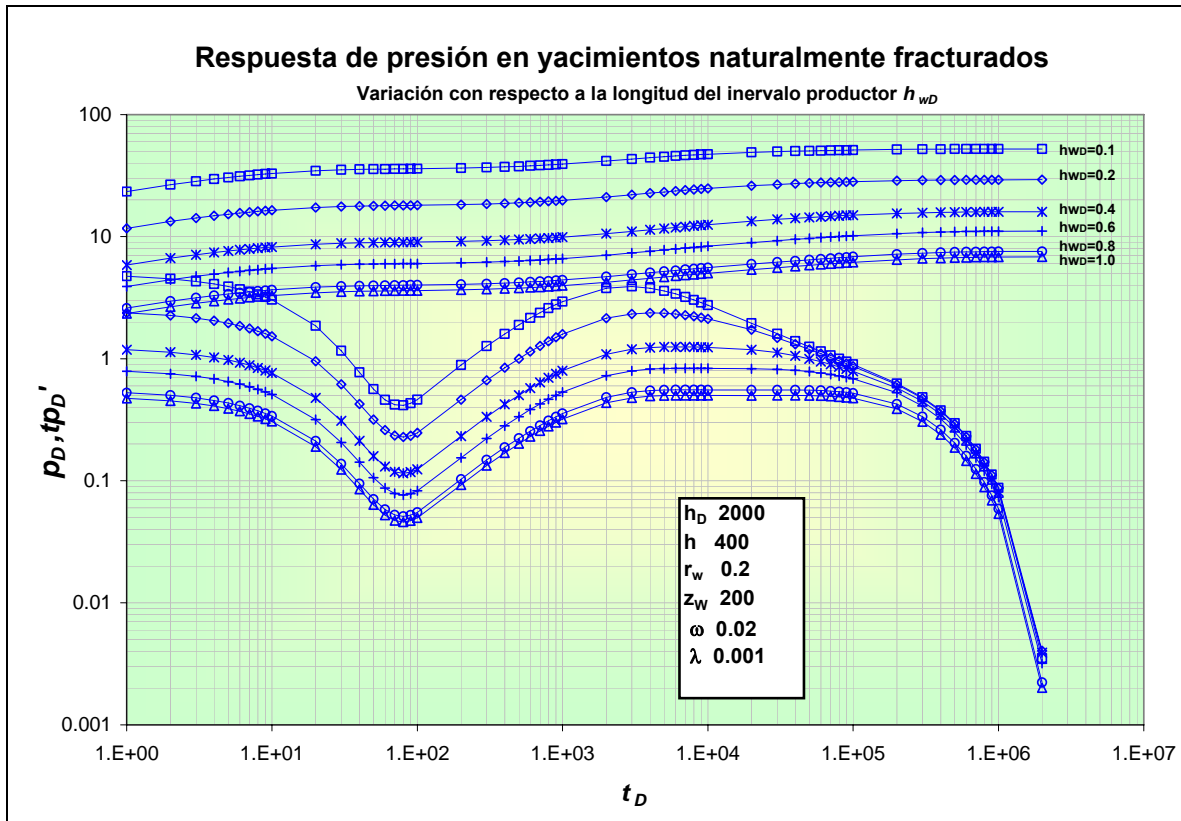


Figura 11. Variación de la respuesta de presión para diversos valores de la longitud del intervalo productor.

IV.4 Efecto de la posición del punto medio del intervalo productor Z_{wD} , en la formación productora.

La posición del intervalo productor tiene influencia en la respuesta de presión principalmente, una vez que han finalizado los efectos de la transición matriz-fractura, tal y como se aprecia en la figura 12. A medida que el intervalo productor se aproxima a alguna de las fronteras, los efectos de éstos límites se manifiestan en menor tiempo, haciéndose evidente el comportamiento lineal que antecede a los efectos de la segunda frontera, la cual provoca que la derivada tienda a un valor cero.

Del análisis de las curvas tipo, también se encontró que para una posición del punto medio del intervalo productor z_{wD} , se tiene la misma respuesta de presión que si estuviese ubicado en $h-z_{wD}$.

En la gráfica, z_{wD} es la distancia del punto medio del intervalo productor a la frontera más cercana.

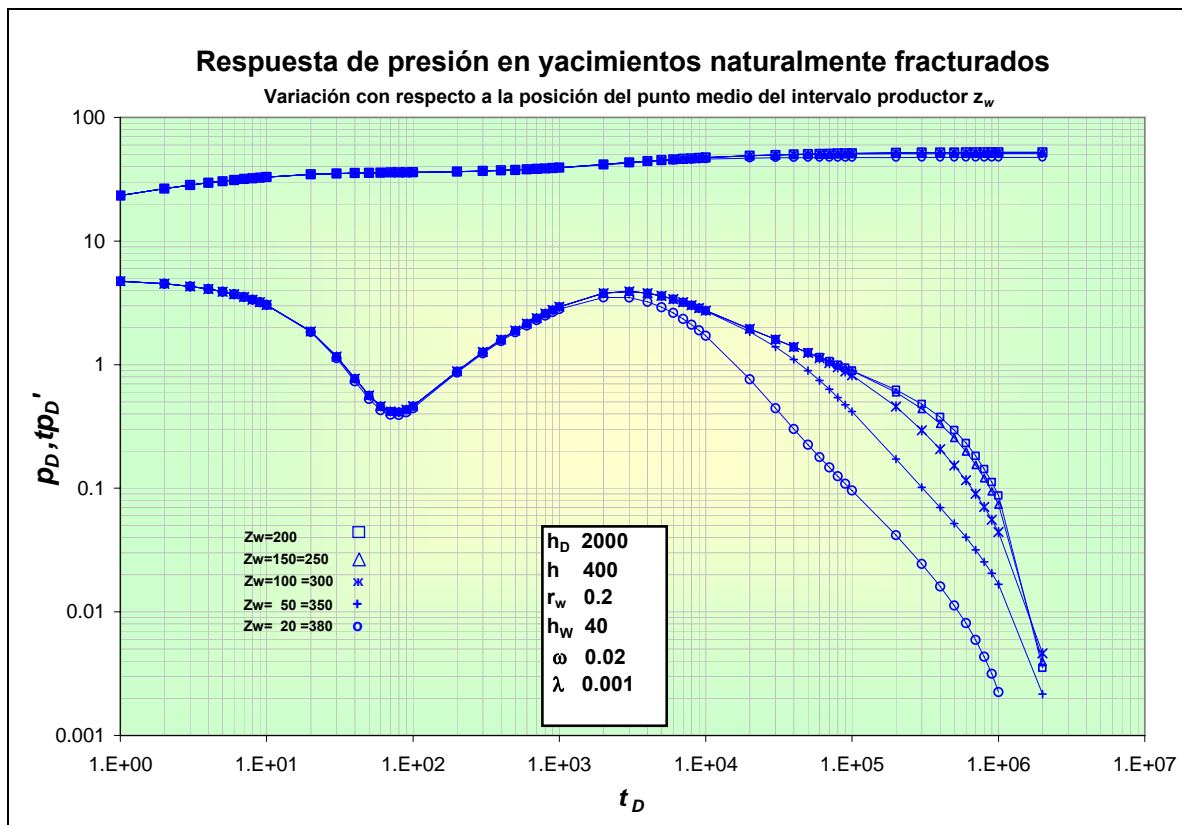


Figura 12. Variación de la respuesta de presión para diversas posiciones del intervalo productor.

IV.5 Efecto de la longitud de penetración dentro de la formación productora.

Si la longitud del intervalo productor inicia debajo de la frontera superior o por encima de la frontera inferior y crece en longitud hacia la frontera opuesta, se observa que la derivada de la respuesta de presión tiene un comportamiento lineal entre el fin de los efectos de la transición matriz-fractura y el efecto de la frontera opuesta (figura 13), para el conjunto de datos empleados. El comportamiento lineal de la derivada mantiene la pendiente en todos los casos, pero tiende a desaparecer a medida que se alcanza la frontera opuesta. Para los datos empleados en este análisis, la pendiente de la derivada en la porción lineal es de $-5/4$, valor que se obtiene debido al contacto del intervalo productor con una de las fronteras.

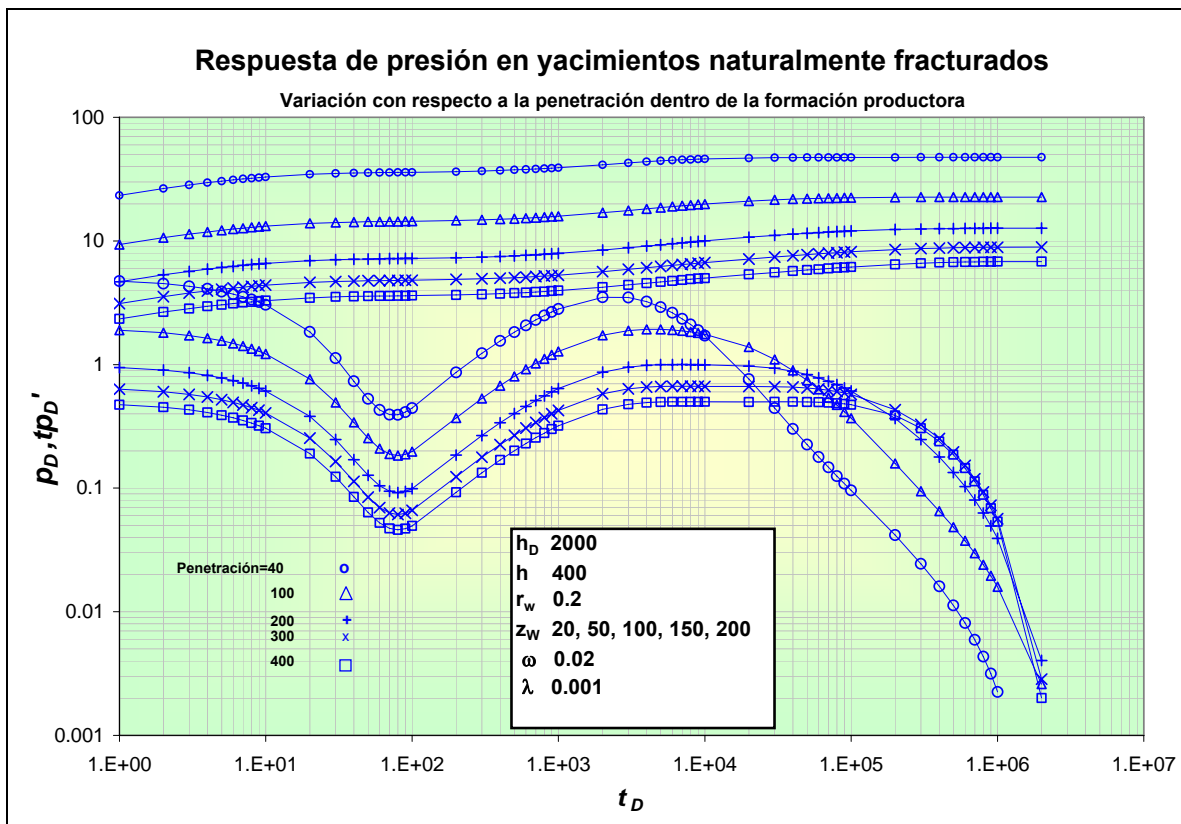


Figura 13. Variación de la respuesta de presión para diversas longitudes de penetración dentro de la formación productora.

CAPÍTULO V

Conclusiones y recomendaciones.

A partir del trabajo desarrollado se derivan las siguientes conclusiones y recomendaciones:

Se desarrolló una ecuación que permite calcular la caída de presión en un yacimiento naturalmente fracturado, con un intervalo vertical abierto a producción de longitud y posición variables dentro del yacimiento. La ecuación considera los efectos de doble porosidad descritos por el modelo desarrollado por Warren y Root.

Las curvas tipo desarrolladas a partir de este trabajo no consideran los efectos de daño y almacenamiento del pozo, queda para un trabajo posterior incorporar dichos efectos en el desarrollo matemático del modelo.

La validación del modelo a tiempos pequeños y grandes muestra que la respuesta obtenida con el modelo en cuestión es satisfactoria. Las diferencias pequeñas que se observan pueden atribuirse al valor empleado en los parámetros del algoritmo de inversión numérica.

El modelo puede ser empleado para calcular la caída de presión en yacimientos homogéneos asignando un valor unitario a la función $f(u)$.

Del análisis del efecto de los parámetros involucrados en la ecuación, se observó que cuando uno de los extremos del intervalo productor se acerca a alguna de las fronteras, superior o inferior, la derivada de la respuesta de presión se ajusta a una línea recta de pendiente $-5/4$. Se observó que dicha pendiente se desarrolla más rápidamente a medida que disminuye la distancia entre el intervalo productor y alguna de las fronteras.

Se puede presentar el caso en el que la caracterización del yacimiento naturalmente fracturado no sea posible, debido que el tiempo en el cual se presentan los efectos de doble porosidad y frontera es tal que ambos se superponen. Esto se acentuará en la medida en que el intervalo productor esté cerca de alguna de las fronteras y del tiempo requerido para que se lleve a cabo el flujo de fluidos entre la matriz y la fractura.

NOMENCLATURA

A	Área
B	Factor de volumen
c	Compresibilidad de fluido
g	Aceleración de la gravedad
h	Espesor de formación
k	Permeabilidad
k_f	Permeabilidad de fractura
L	Longitud
p	Presión
p_D	Presión
p'_D	Derivada de la presión adimensional
p_{wf}	Presión de fondo fluyendo
p_{ws}	Presión de fondo estática
q	Gasto
r	Radio
r_D	Radio adimensional
r_w	Radio del pozo
S	Saturación
t	Tiempo de producción
t_D	Tiempo adimensional
u	Variable de Laplace
v	Velocidad
V	Volumen
x	Coordenada en el eje "x"
y	Coordenada en el eje "y"
z	Coordenada en el eje "z"
α	Constante de conversión de unidades
λ	Coefficiente de transferencia para yacimientos naturalmente fracturados
μ	Viscosidad
ρ	Densidad
ϕ	Porosidad
ω	Coefficiente de almacenamiento para yacimientos naturalmente fracturados
$Ko(x)$	Función de Bessel modificada de segundo tipo, orden cero

Subíndices

<i>D</i>	Adimensional
<i>f</i>	Fractura
<i>i</i>	Flujo, fractura
<i>j</i>	Inicial, índice
<i>m</i>	Matriz
<i>t</i>	Total
<i>1D</i>	Espesor <i>h1</i> en términos adimensionales
<i>2D</i>	Espesor <i>h2</i> en términos adimensionales

APÉNDICES

Apéndice A

Ecuación para predecir la caída de presión empleando la transformación de Hankel.

La ecuación diferencial que define la respuesta de presión debida al flujo de aceite hacia un pozo, tal como se indicó en el capítulo II está dada por

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_f}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{p}_f}{\partial r_D} + \frac{1}{h_D^2} \frac{\partial^2 \bar{p}_f}{\partial z_D^2} - uf(u) \bar{p} = 0. \quad \dots (A1)$$

Esta ecuación puede ser expresada como

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_f}{\partial r_D} \right) + \frac{1}{h_D^2} \frac{\partial^2 \bar{p}_f}{\partial z_D^2} - uf(u) \bar{p} = 0. \quad \dots (A2)$$

La fórmula de transformación de Hankel^{16,17}, empleando la misma notación de este trabajo es

$$H' \left[\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_f}{\partial r_D} \right) - \frac{\nu}{r_D^2} \bar{p} \right] = -\zeta^2 \bar{p}, \quad \dots (A3)$$

donde ν es el orden de la transformación, que para este caso es cero. Aplicando la transformación se llega a

$$-\zeta^2 \bar{p} + \frac{\partial^2 \bar{p}_f}{\partial z_D^2} - uf(u) \bar{p} = 0. \quad \dots (A4)$$

La solución de la ecuación es

$$\bar{p}_f(\zeta, z_D, u) = Ae^{\sqrt{uf(u)+\zeta^2} z_D} + Be^{-\sqrt{uf(u)+\zeta^2} z_D}. \quad \dots (A5)$$

Donde A y B son constantes que deben determinarse para posteriormente invertirse¹⁸ y encontrar la solución al problema en el espacio de Laplace.

Apéndice B

Flujo hacia un pozo con terminación parcial y presión en las fronteras que depende del tiempo

Al igual que en el capítulo II, la ecuación diferencial para la caída de presión $\Delta p(r,z,t) = \Delta p = p_i - p(r,z,t)$ debida al flujo de aceite hacia un pozo, está dada por la ecuación (2.1). En este caso en particular, se considera que la caída de presión en las fronteras superior e inferior son función del tiempo y que su comportamiento está dado por las funciones $f_1(t)$, y $f_2(t)$, que en el espacio de Laplace son respectivamente

$$\bar{p}_{fD}(r_D, 0, u) = \bar{f}_1(u) \quad 0 \leq r_D \leq \infty, \quad \dots(B.1)$$

$$\bar{p}_{fD}(r_D, 1, u) = \bar{f}_2(u) \quad 0 \leq r_D \leq \infty. \quad \dots(B.2)$$

El problema de valores en la frontera resultante, es posible resolverlo por el método de separación de variables; sin embargo existe el inconveniente de que las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones B.1 y B.2 no son homogéneas. Es posible reducir el problema a otro que tenga condiciones de frontera homogéneas si expresamos la distribución de presión como la suma de una distribución de presión estacionaria $\bar{v}_f(z_D)$, más una distribución de presión transitoria $\bar{p}_f^*(r_D, z_D)$; sin embargo, de resultados previos los cuales no se presentan, se sabe que la ecuación en derivadas parciales resultante no es homogénea y el proceso de solución resulta ser complicado. En lugar del método de separación de variables y expansión en series se empleará la Transformada Finita por Seno de Fourier.

Multiplicando la ecuación 2.1 y las condiciones de frontera dadas por 2.5 a 2.7 por $\text{sen}\left(\frac{n\pi z_D}{a}\right)$, e integrando en el dominio de z_D , donde a es el límite superior de z_D , se tiene que

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 \bar{p}_{fD}}{\partial r_D^2} \text{sen}(n\pi z_D) dz_D + \frac{1}{r_D} \int_0^1 \frac{\partial \bar{p}_{fD}}{\partial r_D} \text{sen}(n\pi z_D) dz_D + \frac{1}{h_D^2} \int_0^1 \frac{\partial^2 \bar{p}_{fD}}{\partial z_D^2} \text{sen}(n\pi z_D) dz_D - uf(u) \int_0^1 \bar{p}_{fD} \text{sen}(n\pi z_D) dz_D = 0. \quad \dots(B.3)$$

Se sabe que

$$\int_0^a \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_D^2} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{n\pi}{a} \left[(-1)^{n+1} f(a) + f(0) \right] - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \bar{f}_s(n) , \quad \dots(\text{B.4})$$

entonces

$$\frac{\partial^2 \hat{p}_{fD}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \hat{p}_{fD}}{\partial r_D} + \frac{1}{h_D^2} \left[\frac{n\pi}{1} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_2(u) + \bar{f}_1(u) \right] - \left(\frac{n\pi}{1} \right)^2 \hat{p}_{fD} \right] - uf(u) \hat{p}_{fD} = 0 \quad \dots(\text{B.5})$$

donde la barra doble indica que la variable está sometida a la transformada de Laplace y Seno simultáneamente.

Factorizando

$$\frac{\partial^2 \hat{p}_{fD}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \hat{p}_{fD}}{\partial r_D} - \left[\left(\frac{n\pi}{h_D} \right)^2 + uf(u) \right] \hat{p}_{fD} = -\frac{n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_2(u) + \bar{f}_1(u) \right] . \quad \dots(\text{B.6})$$

Procediendo de manera similar con la condición de frontera interna dada por la ec. 2.5

$$\int_0^1 \left[\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left(r_D \frac{\partial \hat{p}_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D \rightarrow 0} dz_D \right] \text{sen}(n\pi z_D) dz_D = -\frac{1}{u} \int_0^1 \text{sen}(n\pi z_D) dz_D , \quad \dots(\text{B.7})$$

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left(r_D \frac{\partial \hat{p}_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{u} \left[-\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi z_D) \right]_0^1 . \quad \dots(\text{A.8})$$

Valuando los límites y simplificando

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left(r_D \frac{\partial \hat{p}_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D \rightarrow 0} dz_D = \frac{1}{n\pi u} [\cos(n\pi) - \cos(0)] , \quad \dots(\text{B.9})$$

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left(r_D \frac{\partial \hat{p}_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{n\pi u} [1 - (-1)^n] \quad \dots(B.10)$$

Procediendo con la condición de frontera interna dada por la ec. 2.6

$$\int_0^1 \left[\int \left(r_D \frac{\partial \hat{p}_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D \rightarrow 0} dz_D \right] \text{sen}(n\pi z_D) dz_D = 0 \quad 0 \leq z_D < h_{1D} \text{ y } h_{2D} < z_D \leq 1. \quad \dots(B.11)$$

$$\int \left(r_D \frac{\partial \hat{p}_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D \rightarrow 0} dz_D = 0 \quad 0 \leq z_D < h_{1D} \text{ y } h_{2D} < z_D \leq 1. \quad \dots(B.12)$$

Procediendo con la condición de frontera externa 2.7

$$\int_0^1 \hat{p}_{fD}(\infty, z_D, u) \text{sen}(n\pi z_D) dz_D = 0 \quad , \quad \dots(B.13)$$

$$\hat{p}_{fD}(\infty, n, u) = 0. \quad \dots(B.14)$$

Transformando la condición de frontera inferior, ecuación 2.3

$$\int_0^1 \bar{p}_{fD}(r_D, 0, u) \text{sen}(n\pi z_D) dz_D = \int_0^1 \bar{f}_1(u) \text{sen}(n\pi z_D) dz_D \quad 0 \leq r_D \leq \infty, \quad \dots(B.15)$$

$$\bar{p}_{fD}(r_D, 0, u) = \bar{f}_1(u) \quad 0 \leq r_D \leq \infty. \quad \dots(B.16)$$

Por analogía la transformación de la condición de frontera dada por B.2 es

$$\hat{p}_{fD}(r_D, 1, u) = \bar{f}_2(u) \quad 0 \leq r_D \leq \infty. \quad \dots(B.17)$$

Una vez transformada la ecuación en derivadas parciales así como las condiciones de frontera, el paso siguiente consiste en resolver la ecuación no homogénea dada por B.6, la cual se puede expresar como

$$r_D^2 \frac{\partial^2 \hat{p}_{fD}}{\partial r_D^2} + r_D \frac{\partial \hat{p}_{fD}}{\partial r_D} - \left[\left(\frac{n\pi}{h_D} \right)^2 + uf(u) \right] r_D^2 \hat{p}_{fD} = - \frac{n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_2(u) + \bar{f}_1(u) \right] r_D^2 \quad \dots(B.18)$$

Esta es una ecuación del tipo Bessel no homogénea. Si se hace

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_D} \right)^2 + uf(u)} \quad , \quad \dots(B.19)$$

su solución es

$$\hat{p}_{fD}(r_D, n, u) = AI_0(\alpha r_D) + BK_0(\alpha r_D) - \frac{n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_2(u) + \bar{f}_1(u) \right] r_D^2 \quad \dots(B.20)$$

De manera similar, como en la sección anterior, la ecuación B.20 permite calcular $\hat{p}_{fD}(r_D, n, u)$ en un yacimiento debido al flujo hacia un pozo que penetra totalmente la formación. Para el caso en el cual se desea calcular $\hat{p}_{fD}(r_D, n, u)$ debido al flujo hacia un pozo que produce de un intervalo pequeño, entonces la ecuación B.20 deberá tomar en cuenta el efecto combinado de la influencia de cada uno de los tres intervalos indicados en la figura 6; es decir h_{1D} , h_{wD} y $1-h_{2D}$.

De acuerdo a lo anterior, las ecuaciones que representan la respuesta de presión en los intervalos arriba mencionados serán, respectivamente

$$\hat{p}_{fD}(r_D, n, u) = C_1 I_0(\alpha r_D) + C_2 K_0(\alpha r_D) - \frac{n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_{h_{1D}^-}(u) + \bar{f}_1(u) \right] r_D^2 \quad \dots(B.21)$$

para $0 \leq Z_D < h_{1D}$,

$$\hat{p}_{fD}(r_D, n, u) = C_3 I_0(\alpha r_D) + C_4 K_0(\alpha r_D) - \frac{n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_{h_{2D}^-}(u) + \bar{f}_{h_{1D}^+}(u) \right] r_D^2 \quad \dots(B.22)$$

para $h_{1D} < Z_D \leq h_{2D}$,

$$\hat{p}_{fD}(r_D, n, u) = C_5 I_0(\alpha r_D) + C_6 K_0(\alpha r_D) - \frac{n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_2(u) + \bar{f}_{h_{2D}^+}(u) \right] r_D^2 \quad \dots(B.23)$$

para $h_{2D} < z_D \leq 1$.

Donde C_1 a C_6 son constantes desconocidas que deben ser evaluadas.

Adicionalmente, las ecuaciones anteriores deberán cumplir las condiciones de continuidad dadas por las ecuaciones 2.41 a 2.44.

Valuando la condición de frontera interna dada por B.12 para cuando $0 \leq z_D < h_{1D}$

$$\int_0^{h_{1D}} \left(r_D \frac{\delta \hat{p}_{fD}}{\delta r_D} \right)_{r_D \rightarrow 0} dz_D = 0 = \int_0^{h_{1D}} \left\{ r_D \left[\left(C_1 \alpha I_1(\alpha r_D) - C_2 \alpha K_1(\alpha r_D) - \frac{2n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_{h_{1D}^-}(u) + \bar{f}_1(u) \right] r_D \right) \right] \right\} dz_D \quad \dots(B.24)$$

Ya que se va a tomar el límite para cuando el radio tiende a cero, entonces se sustituyen las aproximaciones de las funciones de Bessel para cuando el argumento tiende a cero

$$\int_0^{h_{1D}} \left\{ \alpha r_D \left[C_1 \left(\frac{\alpha r_D}{2} \right) - C_2 \left(\frac{1}{\alpha r_D} \right) \right] - \frac{2n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_{h_{1D}^-}(u) + \bar{f}_1(u) \right] r_D^2 \right\}_{r_D \rightarrow 0} dz_D = 0, \quad \dots(B.25)$$

simplificando

$$\int_0^{h_{1D}} \left\{ \left[C_1 \left(\frac{\alpha^2 r_D^2}{2} \right) - C_2 \right] - \frac{2n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_{h_{1D}^-}(u) + \bar{f}_1(u) \right] r_D^2 \right\}_{r_D \rightarrow 0} dz_D = 0, \quad \dots(B.26)$$

tomando el límite

$$\int_0^{h_{1D}} C_2 dz_D = 0, \quad \dots(B.27)$$

de donde

$$C_2=0. \quad \dots (B.28)$$

Valuando la condición de frontera dada B.12 para cuando $h_{2D} < z_D \leq 1$

$$\int_{h_{2D}}^1 \left(r_D \frac{\delta \hat{p}_{fD}}{\delta r_D} \right)_{r_D \rightarrow 0} dz_D = 0 = \int_{h_{2D}}^1 \left\{ r_D \left(C_5 \alpha I_1(\alpha r_D) - C_6 \alpha K_1(\alpha r_D) - \frac{2n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_2(u) + \bar{f}_{h_{2D}^+}(u) \right] r_D \right) \right\} dz_D, \quad \dots (B.29)$$

Por analogía con la ecuación B.20 se tiene que

$$C_6=0. \quad \dots (B.30)$$

Valuando la condición de frontera dada por B.10

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left(r_D \frac{\partial \hat{p}_{fD}}{\partial r_D} \right)_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{n\pi u} [1 - (-1)^n], \quad \dots (B.31)$$

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left\{ \alpha r_D [C_3 I_1(\alpha r_D) - C_4 K_1(\alpha r_D)] - \frac{2n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n+1} \bar{f}_{h_{2D}^-}(u) + \bar{f}_{h_{1D}^+}(u) \right] r_D^2 \right\}_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{n\pi u} [1 - (-1)^n]. \quad \dots (B.32)$$

Sustituyendo las aproximaciones de las funciones de Bessel para cuando el argumento tiende a cero

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left\{ \alpha r_D \left[C_3 \left(\frac{\alpha r_D}{2} \right) - C_4 \left(\frac{1}{\alpha r_D} \right) \right] - \frac{2n\pi}{h_D^2} \left[(-1)^{n-1} \bar{f}_2(u) + \bar{f}_1(u) \right] r_D^2 \right\}_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{n\pi u} [1 - (-1)^n], \quad \dots (B.33)$$

simplificando

$$\int_{h_{1D}}^{h_{2D}} \left\{ C_3 \left(\frac{\alpha^2 r_D^2}{2} \right) - C_4 - \frac{2n\pi}{h_D^2} [(-1)^{n+1} \bar{f}_2(u) + \bar{f}_1(u)] r_D^2 \right\}_{r_D \rightarrow 0} dz_D = -\frac{1}{n\pi u} [1 - (-1)^n].$$

..., (B.34)

Tomando el límite e integrando

$$-C_4 z_D \Big|_{h_{1D}}^{h_{2D}} = -\frac{1}{n\pi u} [1 - (-1)^n],$$

... (B.35)

$$-C_4 (h_{2D} - h_{1D}) = -\frac{1}{n\pi u} [1 - (-1)^n],$$

... (B.36)

$$C_4 = \frac{1}{n\pi h_{wD} u} [1 - (-1)^n],$$

... (B.37)

donde $h_w = h_{2D} - h_{1D}$.

Sustituyendo las constantes dadas por B.28, B.30 y B.37 en las ecuaciones B.17 a B.18

$$\hat{p}_{fD}(r_D, n, u) = C_1 I_0(\alpha r_D) - \frac{n\pi}{h_D^2} [(-1)^{n+1} \bar{f}_{h_{1D}^-}(u) + \bar{f}_1(u)] r_D^2$$

... (B.38)

para $0 \leq z_D < h_{1D}$,

$$\hat{p}_{fD}(r_D, n, u) = C_3 I_0(\alpha r_D) + \frac{1}{n\pi h_{wD} u} [1 - (-1)^n] K_o(\alpha r_D) -$$

$$\frac{n\pi}{h_D^2} [(-1)^{n+1} \bar{f}_{h_{2D}^-}(u) + \bar{f}_{h_{1D}^+}(u)] r_D^2$$

... (B.39)

para $h_{1D} \leq z_D \leq h_{2D}$,

$$\hat{p}_{fD}(r_D, n, u) = C_5 I_0(\alpha r_D) - \frac{n\pi}{h_D^2} [(-1)^{n+1} \bar{f}_2(u) + \bar{f}_{h_{2D}^+}(u)] r_D^2,$$

... (B.40)

para $h_{2D} < z_D \leq 1$.

La formula de inversión de la Transformada seno de Fourier está dada por

$$f(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_s(n) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}. \quad \dots(\text{B.41})$$

Aplicando B.41 a las ecuaciones B.39, B.40 y B.41

$$\bar{p}_{jD}(r_D, z_D, u) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{1n} I_0(\alpha r_D) - \frac{n\pi}{h_D^2} [(-1)^{n+1} \bar{f}_{h_{1D}^-}(u) + \bar{f}_1(u)] r_D^2 \right\} \operatorname{sen}(n\pi z_D) \quad \dots(\text{B.42})$$

para $0 \leq z_D < h_{1D}$.

$$\bar{p}_{jD}(r_D, z_D, u) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{3n} I_0(\alpha r_D) + \frac{1}{n\pi h_{wD} u} [1 - (-1)^n] K_0(\alpha r_D) - \frac{n\pi}{h_D^2} [(-1)^{n+1} \bar{f}_{h_{2D}^-}(u) + \bar{f}_{h_{1D}^+}(u)] r_D^2 \right\} \operatorname{sen}(n\pi z_D) \quad \dots(\text{B.43})$$

para $h_{1D} \leq z_D \leq h_{2D}$,

$$\bar{p}_{jD}(r_D, z_D, u) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{5n} I_0(\alpha r_D) - \frac{n\pi}{h_D^2} [(-1)^{n+1} \bar{f}_2(u) + \bar{f}_{h_{2D}^+}(u)] r_D^2 \right\} \operatorname{sen}(n\pi z_D) \quad \dots(\text{B.44})$$

para $h_{2D} < z_D \leq 1$.

Para dar solución al problema, se debe encontrar el valor de las constantes C_{1n} , C_{3n} y C_{5n} , así como de $\bar{f}_{h_{1D}}(u)$ y $\bar{f}_{h_{2D}}(u)$. Para esto se cuenta con las 4 condiciones de continuidad dadas por las ecuaciones 2.32 a 2.44 y la condición de frontera 2.7.

Apéndice C

Algoritmo de cómputo.

```
*****
*
*   Programa que invierte la solución en el espacio de Laplace para un yacimiento naturalmente fracturado, de extensión lateral infinita, gasto constante con dos fronteras a presión constante mediante el - - algoritmo de Stehfest.
*
*****
*
*   Autor:           Héctor Leyva Gómez
*   Fecha:           08-sep-02
*   Revisión:       30
*****
*   Definiciones:
*
*   omega coeficiente de almacenamiento interporoso
*   lamda coheficiente de flujo interporoso
*   TDCD tiempo al cual se desea calcular la inversa de Laplace
*   DELT incremento en tiempo
*   PD presión adimensional (en el espacio real)
*   S variable de Laplace
*   IND índice de fracturamiento IND=0 Yacimiento homogéneo, IND .NE. 0 Yacimiento fracturado
*   Ht Espesor total de la formación
*   H1 Distancia desde Z=0 a la base del intervalo productor
*   Hp Longitud del intervalo productor
*   Rw Radio del pozo
*   RD Radio adimensional
*   Q Gasto del pozo
*   Bo Factor de volumen del aceite
*   Visc Viscosidad del aceite
*   Perm Permeabilidad en el sentido radial
*   PermRZ Cociente de permeabilidades radial entre vertical
*   Limite Número de términos a incluirse en la sumatoria*
*   VAL-INI.DAT Archivo de entrada de datos
*   VAL-FIN.OUT Archivo de salida de datos
*****
```

Program ecDOS121MOD

USE NUMERICAL_LIBRARIES

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

COMMON /uno/ OMEGA,AMDA,Ht,Hl,Hp,Rw,RD,Q,Bo,Vis,Perm,PermRZ,limite

OPEN (UNIT=5,STATUS='OLD',FILE='VAL-INI.DAT')
OPEN (UNIT=6,STATUS='NEW',FILE='VAL-FIN.OUT')

OMEGA= 0.
AMDA= 0.

C Se determina si es yacimiento fracturado, en tal caso
C lee los valores de omega y lambda, radio, intervalos, etc.
READ(5,*) INDF

IF(INDF.NE.0) READ(5,*) OMEGA,AMDA,Ht,Hl,Hp,Rw,RD,Q,Bo,Vis,Perm,
+ PermRZ,limite
WRITE(6,*) INDF,OMEGA,AMDA,Ht,Hl,Hp,Rw,RD,Q,Bo,Vis,Perm,
+ PermRZ,limite

C Establece los incrementos de tiempo y se inicializan
C L, M y N.
TDCD=.01
DELT=TDCD
L=0
N=8
M=0

C Se calculan diez ciclos logarítmicos con diez puntos en
C cada ciclo.
DO 8 J=1,10
9 L=L+1
CALL LINV(TDCD,PD,N,M)
WRITE(6,200) TDCD,PD
M=N
TDCD=TDCD+DELT
IF((TDCD.GE.(10.*DELT)).OR.((TDCD+DELT).GT.(10.*DELT))) GO TO
+ 8
GO TO 9
8 DELT=DELT*10.

200 FORMAT(5X,1PE17.10,6X,1PE17.10)

STOP
END

*****
* STEHFEST ALGORITHM *
*****
* *
* VARIABLES *
* P - FUNCTION TO BE INVERTED. *

```



```

*          MUST BE DECLARED EXTERNAL IN THE CALLING ROUTINE.*
*    T  - TIME AT WHICH INVERSE IS WANTED.                    *
*    FA - THE RESULT.                                         *
*    N  - PARAMETER THAT GOVERNS THE ACCURACY.                *
*          N MUST BE EVEN.                                    *
*          N IS ROUGHLY EQUIVALENT TO THE NUMBER OF DIGITS *
*          WITH WHICH THE COMPUTER IS WORKING.                *
*          E.G. HONEYWELL CP-5                                 *
*          PRECISION DIGITS      N                             *
*          SINGLE                 8           8               *
*          DOUBLE                 16          16               *
*          M=0 FOR THE FIRST CALL OR IF LINV IS CALLED MORE *
*          THAN ONCE AND N IS CHANGED.                        *
*          M=N IF LINV IS CALLED MORE THAN ONCE AND N IS    *
*          THE SAME.                                          *
*****

```

```

SUBROUTINE LINV(T,FA,N,M)

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

```

DIMENSION V(50),G(50),H(25)

```

```

DLN2= 0.6931471805599453

```

```

IF(N.EQ.M) GO TO 10

```

```

IF(N.GT.50) GO TO 99

```

```

1 G(0) = 1.D0

```

```

NH = N/2

```

```

SN = 2*MOD(NH,2)-1

```

```

DO 2 I= 1,N

```

```

2 G(I) = G(I-1)*I

```

```

H(1) = 2.D0/G(NH-1)

```

```

DO 3 I= 2,NH

```

```

FI = I

```

```

3 H(I) = FI**NH*G(2*I)/G(NH-I)/G(I)/G(I-1)

```

```

DO 5 I= 1,N

```

```

V(I) = 0.D0

```

```

KBG = (I+1)/2

```

```

KND = MIN0(I,NH)

```

```

DO 4 K= KBG,KND

```

```

4 V(I) = V(I)+H(K)/G(I-K)/G(2*K-I)

```

```

V(I) = SN*V(I)

```

```

5 SN = -SN

```

```

M = N

```

```

10 FA = 0.D0

```

```

A = DLN2/T

```

```

DO 11 I= 1,N

```

```

S = A*I

```

```

11 FA=FA+V(I)*P(S)

```

```

FA = A*FA

RETURN
99 WRITE(6,*) N

600 FORMAT(1X'ERROR: N MUST BE LESS THAN 50'/1X'N='I3)
RETURN
END

*****
*   Función (en el espacio de Laplace) a ser invertida   *
*****
*
*   Definiciones:
*
*   U       Variable de Lapace (s)
*   TOL     Diferencia mínima para la sumatoria
*   Dpf     Valor final calculado
*   FU      f(s)
*   H1     Intervalo no fluyente inferior
*   Hp     Intervalo productor
*   H2     Intervalo no fluyente superior
*   RD     Radio Adimensional
*   VIS     Viscosidad
*   Q      Gasto de aceite
*   Bo     Factor de vol. del aceite
*****

FUNCTION P(U)

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

COMMON /uno/ OMEGA,AMDA,Ht,H1,Hp,Rw,RD,Q,Bo,Vis,Perm,PermRZ,limite

PI =3.141592653589793238462643383279
Zr=PI*(H1+Hp/2)/Ht
Hw=PI*Hp/(2*Ht)

PIHD=PI/(Ht*DSQRT(PermRZ)/Rw)

FU= U*(OMEGA*(1.-OMEGA)+ AMDA)/(U*(1.-OMEGA)+AMDA)
UFU=U*FU

F1=(2*141.2*Q*Bo*Vis)/((PI**2)*Perm*Hp*U)

SUMA1 = 0.
SUMA2 = 0.

n=1
DO WHILE (n .LT. limite)
    ALFA=DSQRT((n*PIHD)**2+UFU)

```

```
F2 = DBSK0(ALFA*RD)
F3 = DSIN(n*Hw)*(DSIN(n*Zr))**2
SUMA1=F2*F3/n
SUMA2=SUMA2+SUMA1
n=n+1
END DO

P=F1*SUMA2

RETURN

END
```

BIBLIOGRAFÍA

- 1 **Samaniego F.:** "Apuntes de la asignatura Mecánica de Yacimientos". DEPMI, UNAM (2000).
- 2 **Barenblatt G. I., Zheltov Y. P., Kochina I. N.** "Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks (Strata)". J. Appl. Math. Mech. (May 1960) 24, 1286-1303.
- 3 **Warrent J. E., Root P. J.** "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs". SPE (1963), 245-255.
- 4 **R. Camacho, M. Vázquez, R. Castrejón, V. Arana:** "Pressure Transient and Decline Curve Behaviors in Naturally Fractured Vuggy Carbonate Reservoirs. SPE 77689. (September-October 2002).
- 5 **Carslaw H. S., Jaeger J.C.:** "Conduction of Heat in Solids". Oxford University Press, Oxford (1959), 41-42,255-277
- 6 **Stanislav J., Kabir C.** "Pressure Transient Analysis". Prentice Hal, Englewood Cliffs, New Jersey. (1990), 11-13.
- 7 **Raghavan R.:** "Well Test Analysis". Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. (1993) 356-366.
- 8 **Ozkan E., Raghavan.** "Performance of Horizontal Wells Subject to Bottomwater Drive". SPERE (agosto, 1990), 375-383.
- 9 **Streltsova T.** "Well Testing in Heterogeneous Formations". John Wiley & Sons. N. Y. (1998), 254-256.
- 10 **Ozkan E., Raghavan R.** "New Solutions for Well-Test-Analysis Problems: Part 1- Analytical Considerations". SPE 18615 (Septiembre 1991), 359-368.
- 11 **Camacho R.** "Notas de la Asignatura Matemáticas I". DEPMI, UNAM. (2000-II).
- 12 **Andrews L. C.** "Special Functions of Mathematics for Engineers". Second Edition. Oxford University Press. (1998).
- 13 **Stehfest H.** "Algorithm 368, Numerical Inversion of Laplace Transforms [D5]". Communications of the ACM. (Jan, 1970) Vol. 13, 47-49.
- 14 **Bui T., Mamora D., Lee W.** "Transient Pressure Analysis for Partially Penetrating Wells in Naturally Fractured Reservoirs". SPE 60289. Presentado en la SPE Rocky Mountain Regional/Low Permeability Reservoirs and Exhibition en Denver, Colorado. 12-15 de marzo (2000).

-
-
- 15 **M. Abbaszadeh, P. Hegeman.** "Pressure-transient Analysis for a Slanted Well in a Reservoir with Vertical Pressure Support". SPEFE (Sept. 1990) 277-284.
 - 16 **John A. Aseltine.** "Transform Method in linear System Analysis". McGraw-Hill, N.Y. (1958), 263-269.
 - 17 **Lambe C. G., C. J. Tranter.** "Ecuaciones diferenciales para ingenieros y científicos". Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. México, 274-282.
 - 18 **Duff and Taylor.** "Differential Equations of Applied Mathematics". John Wiley and Sons, Inc., (1966), 416.