



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

*“APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTO DE  
FRONTERA (BEM) PARA RESOLVER PROBLEMAS  
DE POTENCIAL ”*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO ELÉCTRICO ELECTRÓNICO

P R E S E N T A N :

JONATAN GARCÍA ISLAS

VLADIMIR BLANCAS BLANCAS

DIRECTORES DE TESIS:

DR. JUAN HERNÁNDEZ CORDERO

DR. GUILLERMO PULOS CÁRDENAS



MÉXICO

2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## ***Dedicatorias***

A mis padres Juan Manuel y M. Magdalena porque me dieron la vida y me enseñaron el mejor camino a seguir. A ellos que estuvieron conmigo en los momentos difíciles y me dieron ánimo para seguir adelante. De no haber sido por el apoyo amoroso de ustedes, sus estímulos y la valiosa confianza en mi destino, jamás habría llegado a la cima, la cual constituye la herencia más valiosa que pudiera recibir.

A mi hermano Juan Manuel por su apoyo, amor y confianza que siempre hemos tenido desde niños. Porque siempre que te he necesitado has estado a mi lado y siempre has sido mi ejemplo a seguir.

A mi abuelito Abelardo por guiar mis pasos desde el más allá.

A mi abuelita Angelina por ser tan cariñosa, amorosa y consentidora. Abuelita te quiero decir “que eres la mejor abuelita del mundo”.

A mis tías Mago y María por todo su amor, cariño y apoyo que siempre me han dado incondicionalmente.

***Jonatan***

## ***Agradecimientos***

Muy sinceramente a mis directores, Dr. Juan Hernández y Dr. Guillermo Pulos por haberme transmitido sus conocimientos, por darme su confianza y su tiempo en la realización de este proyecto. También quiero agradecerles su respaldo y amistad que siempre me dieron.

A mi hermano, el Dr. Juan Manuel por haberme ayudado a tener un mejor desarrollo y entendimiento del método de elemento de frontera. También le agradezco a su esposa Evita por haberme abierto las puertas de su casa.

A mi compañero Néstor Martínez por haberme ayudado con el software de Matemática y principalmente por su tiempo y apoyo.

A mis sinodales Ing. Rodolfo Peters, Ing. Gabriel Jaramillo y al Ing. Salvador Zamora por haber leído y aportado sus comentarios a este trabajo. Por transmitirme sus conocimientos y ser muy buenos maestros durante mi estancia en la Facultad de Ingeniería.

A mi novia Ale por haberme dado sus comentarios acerca de mi tesis. También le agradezco todo su cariño, amor y confianza que me ha dado.

A mi mejor amigo Vladimir Blancas Blancas por todos los buenos momentos que hemos vivido, por su gran ayuda en los malos momentos y por el apoyo durante la realización de este trabajo.

A todos mis amigos René, Néstor, Charly, Panchito, Manolete, Felipe, Ian, Dr. Bernas, Mike, Fede, Oscar, Dr. Roberto Zenit, Andrea, Víctor, Gil, Piero, Gustavo, Iván y Esperanza por su apoyo, confianza, por los buenos momentos de convivencia y por hacer más placentera mi estancia en el Instituto de Investigaciones de Materiales.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales por la estancia y beca que me ofrecieron.

***Jonatan***

## ***Dedicatorias***

A mis padres Maricela Blancas (Chabelita), y Ernesto Blancas por el apoyo y cariño brindado; y el que quieran verme siempre feliz.

Especialmente con todo cariño a mis tías Rebeca Ábrego y Guadalupe Blancas, por el apoyo que uno necesita y busca en alguien, por saber conocerme, por creer en mí, por hacerme ver el sitio en el que debo estar, y los valiosos consejos que nunca se podrán olvidar.

A Hosannita (Bin Laden), por su amor incondicional, por todo el apoyo brindado y el soportarme tanto tiempo, regalándome parte de su vida.

A mis primos del alma, Abel, Moisés, Iván, Adrián, Teresita, y Fabi, que estuvieron siempre conmigo, y por la influencia para estar en el lugar en que me encuentro.

あることは分離の初めである。

Arukoto ha bunri no hazime dearu

Encontrarse, es el comienzo de la separación

過去を調査して、新しい事は博学である。

Kakowocho usashite, atarais ikotoha ha kugaku dearu

Estudiando lo [pasado](#), se aprende lo nuevo.

あなたに、私のせいめい、かるいたさん

***Vladimir***

## ***Agradecimientos***

Agradezco sinceramente a mis directores de tesis, Dr. Juan Arnaldo Hernández y Dr. Guillermo Pulos, por todos los conocimientos transmitidos, ya que no siempre en la vida se encuentra a personas valiosas como ellos, por la confianza, y el apoyo en la realización de este trabajo, por los buenos días trabajando en el tren, por los chistes y los días de naranja y amarillo, que el Doc. Pulos aconsejaba, ya que sin ellos no podría haber encontrado sentido en la vida. Y el hacer que la estancia en el Instituto sea una de las más agradables que he tenido.

Agradezco a Néstor Martínez por el apoyo brindado en el manejo del software Mathematica, y los tip's para la programación.

A mi mejor amigo Jonatan, por brindarme su confianza y permitirme realizar un trabajo de esta magnitud a su lado, y que sabe que en mi tendrá a un amigo para toda la vida.

A mis profesores y sinodales de titulación, Ing Gabriel Jaramillo, Ing. Rodolfo Peters, Ing. Salvador Zamora, por el apoyo y conocimientos brindados durante mi formación académica.

Especialmente al Señor Juan Manuel García, por la confianza brindada, los días que nos permitía hacer la tarea en su cubículo y la conexión a esta institución. Con todo el cariño a la Sra. Magdalena de García y sus hermanas, por todos los días que me acogió en su casa brindándome apoyo, confianza, y alentándome durante este tiempo. A Juan Manuel hermano de Jonatan, por la ayuda en el desarrollo matemático de este trabajo.

***Vladimir***

A mis amigos y compañeros de trabajo en el IIM, Rene, Eduardo(piloto), Charlie, Panchito, Andreyu, Vaio-let (ñoñitrona), Fede, Nestor (cuñao), Manolette (Chayan), Gill, Felipe, Celine, Roberto Zenit, Ian, Oscar, Esperanza e Ivan (Los baby's), El Doctor Berni, Mike, Karencita, Luis, Piero (inge precioso), Gustavo (Sami) y que gracias a ellos pase una de las mejores etapas de mi vida, y no olvidar los viernes de Fútbol, los miércoles de donas, los días de cenote azul, y especialmente los días sanguinarios de Halo.

Agradezco a aquellos que no haya mencionado y que me brindaron su ayuda directa o indirectamente, ya que es muy difícil recordar a todos aquellos quienes desearía agradecer.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales (IIM), por el buen trato y agradable estancia.

*Vladimir*

## ÍNDICE

<i>Cap.</i>		<i>Página</i>
<b>1.</b>	<b><i>INTRODUCCIÓN</i></b>	<b>1</b>
<b>1.1.</b>	<b><i>¿Qué es el método de elemento de frontera?</i></b>	<b>2</b>
<b>1.2.</b>	<b><i>Capacidad del método de elemento de frontera</i></b>	<b>2</b>
<b>1.3.</b>	<b><i>Diferencias entre BEM Y FEM</i></b>	<b>3</b>
<b>2.</b>	<b><i>MÉTODO DE ELEMENTO DE FRONTERA</i></b>	<b>6</b>
<b>2.1.</b>	<b><i>Método de funciones de Green</i></b>	<b>6</b>
<b>2.2.</b>	<b><i>Solución Fundamental para la ecuación de Laplace</i></b>	<b>7</b>
<b>2.3.</b>	<b><i>Método de elemento de frontera</i></b>	<b>11</b>
<b>2.3.1.</b>	<b><i>Solución para puntos internos del dominio</i></b>	<b>12</b>
<b>2.3.2.</b>	<b><i>Solución para puntos en la frontera</i></b>	<b>16</b>
<b>2.3.3.</b>	<b><i>Solución para puntos en la frontera cuando es una curva no suave</i></b>	<b>20</b>
<b>2.3.4.</b>	<b><i>Resumen de las soluciones</i></b>	<b>22</b>
<b>2.4.</b>	<b><i>Discretización para utilizar el método de elemento de frontera</i></b>	<b>23</b>
<b>2.4.1.</b>	<b><i>Discretización de las ecuaciones del método de elemento de frontera</i></b>	<b>25</b>
<b>3.</b>	<b><i>MÉTODO DE ELEMENTO DE FRONTERA CON MATHEMATICA</i></b>	<b>30</b>
<b>3.1.</b>	<b><i>Características básicas Mathematica</i></b>	<b>30</b>
<b>3.2.</b>	<b><i>BEM en Mathematica</i></b>	<b>31</b>
<b>3.2.1.</b>	<b><i>Datos de entrada</i></b>	<b>32</b>
<b>3.2.2.</b>	<b><i>Generador de puntos internos</i></b>	<b>37</b>
<b>3.2.3.</b>	<b><i>Cálculo de las listas de los nodos, nodos medios y elementos</i></b>	<b>39</b>
<b>3.2.4.</b>	<b><i>Obtención de las condiciones de frontera a partir de los datos de entrada</i></b>	<b>41</b>
<b>3.2.5.</b>	<b><i>Cálculo de las matrices H y G, obtención de los resultados de potencial y flujo</i></b>	<b>42</b>

3.2.5.1.	<i>Puntos en la frontera</i>	42
3.2.5.2.	<i>Puntos internos</i>	45
3.2.6.	<i>Representación gráfica del problema</i>	49
3.3.	<i>Limitaciones del Programa.</i>	50
3.3.1	<i>Caminos rectos</i>	50
3.3.2.	<i>Condiciones constantes</i>	51
4.	<b>RESULTADOS</b>	52
4.1.	<i>Comparación con problemas de solución conocida</i>	52
4.2.	<i>Placa rectangular con flujo de calor unidimensional</i>	52
4.2.1.	<i>Solución de nodos en la frontera y puntos internos</i>	55
4.3.	<i>Flujo de calor en una región anular</i>	57
4.3.1.	<i>Solución de nodos en la frontera y puntos internos</i>	60
4.4.	<i>Cálculo de errores</i>	62
4.4.1.1.	<i>Variación de errores en función del número de nodos en la frontera y puntos internos</i>	66
4.4.1.2	<i>Error en los nodos internos en función del número de nodos en la frontera</i>	68
4.4.1.3	<i>Acercamiento de la malla de puntos internos a las fronteras</i>	71
4.4.2	<i>Flujo de calor en una región anular</i>	74
4.5	<i>Bus de 3 barras conductoras</i>	76
4.5.1	<i>Representación gráfica del problema y solución</i>	78
5.	<b>CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO</b>	81
5.1.	<i>Conclusiones</i>	81
5.2.	<i>Trabajo a futuro</i>	82
	<i>Referencias y Bibliografía</i>	85
	<b>APÉNDICE A</b>	86
	<b>APÉNDICE B</b>	92
	<b>APÉNDICE C</b>	95

## ***CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN***

Muchos problemas físicos aplicados a la ingeniería pueden representarse con ecuaciones diferenciales que pueden ser resueltas por distintos métodos. Dependiendo de la geometría del problema, la solución de este tipo de ecuaciones puede llegar a ser complicada. Existen diferentes métodos numéricos que permiten obtener soluciones para problemas que no tienen una solución analítica; ejemplos de éstos son el método de elemento finito, el método de diferencias finitas y el método de elemento de frontera. La elección del método para la solución de un problema, depende básicamente de la geometría y de las condiciones de frontera.

Una gran cantidad de fenómenos físicos pueden ser representados mediante problemas de potencial. La ecuación diferencial a resolver en este caso, es la ecuación de Laplace, en las coordenadas apropiadas y las condiciones de frontera representativas del problema. Los campos de aplicación en donde se pueden encontrar problemas de potencial incluyen la electrodinámica, transferencia de calor y fluidos. En el primer caso, por ejemplo, se trata de encontrar el potencial eléctrico en una región en el espacio, para determinar con éste el campo eléctrico en la región o dominio del problema. La solución de este tipo de problemas es de interés en aplicaciones tales como la ubicación óptima de cables dieléctricos en torres de alta tensión [1]. En este caso, el objetivo es determinar las regiones de menor potencial eléctrico en la vecindad de la torre para colocar en éstas el cable y evitar su deterioro. La geometría de este problema, por ejemplo, no permite obtener una solución analítica sencilla, y se requiere de un método numérico para su solución.

En este trabajo se presenta la implementación del método de elemento de frontera (BEM) utilizando *Mathematica* como lenguaje de programación. El enfoque del programa es la solución de problemas de potencial de transferencia de calor y de potencial eléctrico. En las siguientes secciones se explicarán las ventajas que ofrece este método y en los capítulos subsecuentes se explicarán los fundamentos matemáticos necesarios. Finalmente, se fundamentará la elección de *Mathematica* como lenguaje de programación y se mostrarán resultados para algunos ejemplos simples.

### ***1.1 ¿Qué es el método de elemento de frontera?***

El método de elemento de frontera (BEM por sus siglas en inglés) ha encontrado aplicación en la solución de problemas de valores en la frontera en varias áreas de la ciencia y la tecnología. Este método se basa en el método de ecuaciones integrales, también conocido como método de ecuaciones integrales en la frontera (BIEM por sus siglas en inglés). Existen dos tipos de BIEMs aparentemente similares, pero con un enfoque de formulación totalmente diferente. Uno de ellos es el llamado método indirecto, que depende de un problema físico e involucra la transformación de la superficie de la frontera en una superficie de fuentes y sumideros ajustables. El otro tipo de formulación, conocido como método directo, está basado en encontrar la función de Green que es solución de la ecuación diferencial parcial. La metodología se basa en el hecho de que una vez que se conocen tanto la función de Green de una ecuación dada como las condiciones de frontera para el problema, entonces la solución puede obtenerse en la forma de una ecuación integral y puede ser calculada numéricamente [2]. El más utilizado de estos dos métodos es el método directo, ya que permite obtener fácilmente soluciones numéricas, mientras que el método indirecto supone una distribución de dipolos para encontrar la solución. En este trabajo se utilizará el método directo.

### ***1.2 Capacidad del método de elemento de frontera***

El método de elemento de frontera es apropiado para ser usado en problemas con fronteras complicadas y regiones no acotadas. Esto es muy útil para resolver diferentes tipos de problemas en física e ingeniería, como los representados por las ecuaciones de Poisson, Laplace y pueden mencionarse, entre otros, problemas de flujo de fluidos, plasticidad, viscosidad, análisis de fracturas, acústica, potencial eléctrico, elasticidad y muchas otras áreas [2].

Para poder resolver problemas de potencial con el método de elemento de frontera es necesario conocer la solución fundamental de la ecuación de Laplace, ya que a partir de ésta, se puede construir la solución general del problema [2]. Algunos ejemplos de soluciones fundamentales se muestran en la siguiente tabla:

<p>Solución a la ecuación de Laplace para dos dimensiones</p> <p>Donde: <math>r = \sqrt{x^2 + y^2}</math></p>	<p>Ecuación: <math>\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \delta_0 = 0</math></p> <p>Solución fundamental:</p> $u^* = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right)$
<p>Solución a la ecuación de Laplace para tres dimensiones</p> <p>Donde: <math>r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}</math></p>	<p>Ecuación: <math>\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} + \delta_0 = 0</math></p> <p>Solución fundamental:</p> $u^* = \frac{1}{4\pi r}$
<p>Solución a la ecuación de Helmholtz</p> <p>Donde: <math>r = \sqrt{x^2 + y^2}</math></p> <p>y <math>H</math> es la función de Hankel</p>	<p>Ecuación: <math>\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \lambda^2 u^* + \delta_0 = 0</math></p> <p>Solución fundamental:</p> $u^* = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(\lambda r)$
<p>Solución a la ecuación de Onda</p> <p>Donde: <math>r = \sqrt{x^2 + y^2}</math></p> <p>y <math>c</math> es la velocidad de onda</p>	<p>Ecuación: <math>c^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + \delta_0(t) = 0</math></p> <p>Solución fundamental:</p> $u^* = \frac{H(ct - r)}{2\pi c(c^2 t^2 - r^2)}$

Tabla 1.1

### 1.3 Diferencias entre BEM Y FEM

Existen varios métodos numéricos para resolver problemas de potencial; los más utilizados son el BEM Y el FEM (de sus siglas en inglés Finite Element Method – Método de Elemento Finito).

El método de elemento finito se basa en dividir el dominio en un número finito de elementos (de allí su nombre), es decir, discretizar el dominio continuo y resolver sobre cada uno de los elementos las ecuaciones del sistema para después ensamblar la solución total [6].

Existen diferencias entre el método de elemento de frontera y el método de elemento finito que pueden ser consideradas ventajas o desventajas de acuerdo con la aplicación. Algunas de las más destacables se listan a continuación.

1. FEM: Se requiere la discretización completa del dominio.  
BEM: Se requiere solamente la discretización de la frontera. Ésta es una de las grandes ventajas del BEM sobre el FEM.
2. FEM: Se requiere calcular la solución completa del dominio para poder obtener una solución en particular.  
BEM: Primero se calcula la solución en la frontera, y después la solución de los puntos del dominio (si es requerida) por lo que el problema se resuelve en pasos separados.  
Ésta es una ventaja del BEM ya que existen muchos problemas donde ocurren detalles muy interesantes sobre la frontera o que se encuentran localizados en una parte particular del dominio.
3. FEM: Las ecuaciones diferenciales son aproximadas.  
BEM: Solamente las condiciones de frontera son aproximadas. El uso del teorema de Green y de la solución fundamental en la formulación para el BEM no implica aproximaciones de las ecuaciones diferenciales en el dominio, solamente aproximaciones de éstas en las condiciones de frontera.
4. FEM: Genera matrices simétricas.  
BEM: Genera matrices no simétricas.
5. FEM: Los elementos integrales son fáciles de evaluar.  
BEM: Las integrales son más difíciles de evaluar, y las que contienen integrandos singulares tienen un efecto significativo sobre la exactitud de la solución.

6. FEM: Trata problemas no lineales muy bien.

BEM: Este método no puede tratar problemas lineales para los que no exista solución fundamental. Debe encontrarse una solución fundamental o una aproximación antes de que el método de elemento de frontera pueda ser aplicado. Existen muchos problemas lineales para los cuales la solución fundamental no existe.

7. FEM: Este método se implementa fácilmente.

BEM: Este método es mucho más difícil de implementar. Cuando se presenta la necesidad de evaluar integrales con integrandos singulares, el BEM se vuelve más difícil de implementar que el FEM.

Como puede verse, el BEM presenta algunas ventajas sobre el método de elemento finito y viceversa. Utilizamos el BEM ya que simplifica la obtención de la solución con sólo discretizar la frontera; también, nos ofrece la posibilidad de reducir la dimensión del problema en uno. Es decir, en lugar de resolver integrales de superficie se resuelven integrales de línea (integrales de frontera) y, además, resuelve problemas con condiciones de frontera en el infinito, algo que el FEM no tiene. Por ejemplo, si se quieren resolver problemas de potencial eléctrico, éstos deben plantearse con potencial cero en el infinito, por lo que el método a elegir debería ser entonces el BEM. En el siguiente capítulo se explicarán los formalismos matemáticos relacionados con el método de elemento de frontera que serán de utilidad para desarrollar el programa en *Mathematica*.

## CAPÍTULO 2. Método de Elemento de Frontera

### 2.1 Método de funciones de Green

El método de funciones de Green se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales. La idea fundamental del método puede plantearse si consideramos un dominio  $D$  con frontera  $\partial D$ . En general, se busca la solución a problemas de tipo:

$$\begin{aligned}Eu(x) &= f(x) \\Fu(x) &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

Donde  $E$  es un operador y  $f(\mathbf{x})$  es una función en  $D$ . Se quiere encontrar la solución  $u(\mathbf{x})$  para ciertas condiciones de frontera dadas  $Fu(x) = 0$ . Dependiendo de la forma del operador  $E$ , este tipo de problemas tienen una solución única para cada función continua  $f(\mathbf{x})$ . Si definimos a  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  como la función de Green para estos problemas, entonces la solución única estará dada por:

$$u(\mathbf{x}) = \int_D G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') dD\tag{2.2}$$

El problema se reduce entonces a encontrar la función de Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , lo cual no siempre es sencillo. Para esto, se reemplaza la función  $f(\mathbf{x})$  de la ecuación (2.1) por la función delta de Dirac  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ; la solución a este problema representa entonces la función de Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  [2]. La función de Green se conoce también como la solución fundamental  $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  al problema, y debe pertenecer al espacio de las funciones cuadrado integrables (espacio  $W_2^{(1)}(D)$ ). Las funciones que pertenecen a este espacio tienen integrales acotadas, lo cual garantiza la obtención de  $u(\mathbf{x})$  de acuerdo con (2.2) [5].

## 2.2 Solución Fundamental para la ecuación de Laplace

En esta sección se desarrollará la solución fundamental ( $w$ ) para la ecuación de Laplace en dos variables, útil para resolver problemas de potencial [6]. Consideremos  $\nabla^2 u = 0$  en el dominio  $D \in \mathbb{R}^2$  representado por un disco con centro en el origen, donde  $D$  es el dominio y  $\Gamma$  es la frontera (Figura 2.1).

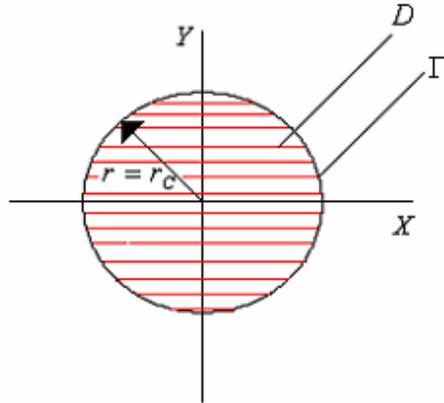


Figura 2.1

La ecuación de Laplace en coordenadas polares para  $u = u(r, \theta)$  está dada por:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (2.3)$$

El problema general puede simplificarse dependiendo de las condiciones geométricas y de frontera en particular. En los problemas de potencial típicos,  $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$  en la ecuación (2.3). Además,  $u$  es constante para radios fijos  $r = r_c$  (figura 2.1), es decir, se buscan soluciones que dependen únicamente de  $r$ , por lo que la ecuación se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0 \quad (2.4)$$

Para poder encontrar la solución podemos utilizar el método de cambio de variable [4]. En este caso podemos asignar  $v = \frac{\partial u}{\partial r}$ , y sustituyendo en (2.4) se obtiene:

$$\frac{1}{r}v + \frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{v}{r},$$

$$\frac{\partial v}{v} = -\frac{\partial r}{r}$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene:

$$\text{Log}\left(\frac{v}{A}\right) = -\text{Log}(r),$$

donde  $A$  es la constante de integración. De aquí obtenemos fácilmente:

$$v = \frac{A}{r}$$

Recordando el cambio de variable utilizado obtenemos ahora:

$$du = \frac{A}{r} dr$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene:

$$u = A\text{Log}(r) + B \tag{2.5}$$

Ésta es la solución para la ecuación de Laplace en una región delimitada por un círculo centrado en el origen. Este resultado es útil para encontrar la solución

fundamental, o función de Green, en  $R^2$ . Como se explicó en la sección anterior, para esto hay que encontrar ahora la solución  $w$  de

$$\nabla^2 w = -\delta(\xi - x, \eta - y) \quad (2.6)$$

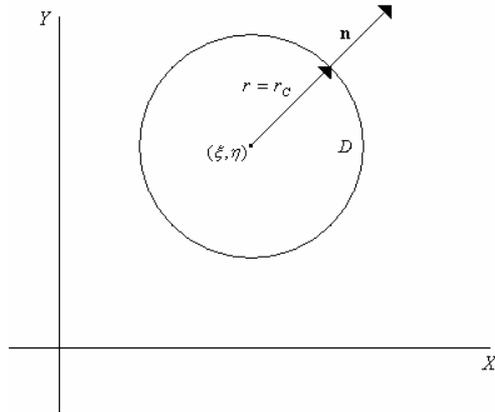


Figura 2.2

Donde la función delta de Dirac está localizada en el punto  $(\xi, \eta)$ . Integrando la ecuación anterior en un dominio  $D$  (figura 2.2) alrededor de  $(\xi, \eta)$  se obtiene:

$$\int_D \nabla^2 w dD = -\int_D \delta(\xi - x, \eta - y) dD$$

Utilizando la propiedad de la función *delta de Dirac* [5]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

la integral se puede expresar como:

$$\int_D \nabla^2 w dD = -\int_D \delta(\xi - x, \eta - y) dD = -1 \quad (2.7)$$

Dado que conocemos la solución del problema en los puntos de la frontera, es conveniente representar la integral anterior en términos de una integral en la frontera. Para esto podemos utilizar el teorema de Green [5]:

$$\int_D \nabla^2 w dD = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} ds \quad (2.8)$$

La integral (2.7) puede expresarse como:

$$\int_D \nabla^2 w dD = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial r} r_c d\theta = -1 \quad (2.9)$$

en donde hemos remplazado  $ds = r_c d\theta$ , y el vector  $n$  es normal a la frontera del disco y paralelo al radio  $r = r_c$  (figura 2.2).

El cambio de dominio de integración nos permite utilizar la solución de la ecuación de Laplace para obtener la solución fundamental. En este caso,  $\nabla^2 w = 0$  en la frontera, y podemos entonces utilizar la ecuación (2.5) para evaluar la integral en la frontera. Explícitamente:

$$w = A \text{Log}(r) + B \quad (2.10)$$

y la ecuación (2.9) puede escribirse como:

$$\int_D \nabla^2 w dD = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial r} r_c d\theta = \frac{A}{r} \int_0^{2\pi} r_c d\theta$$

Esto se simplifica recordando que  $r = r_c$ , entonces se obtiene:

$$\int_D \nabla^2 w dD = A 2\pi \quad (2.11)$$

Sustituyendo la ecuación (2.11) en (2.7) obtenemos:

$$\int_D \nabla^2 w dD = A2\pi = -1$$

Despejando la constante  $A$  obtenemos:

$$A = -\frac{1}{2\pi}$$

Al sustituir la constante  $A$  en la ecuación (2.10) tenemos:

$$w = -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(r) + B$$

Sin perder generalidad se puede tomar  $B = 0$ , lo que implica que:

$$w = -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(r) = \frac{1}{2\pi} \text{Log}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) es la solución fundamental de la ecuación de Laplace o función de Green en  $R^2$  [6]. Como veremos en las siguientes secciones, esta solución sirve para evaluar las soluciones  $u$  para puntos en la frontera para cualquier tipo de curva.

### **2.3 Método de elemento de frontera**

En este trabajo, implementaremos el método de elemento de frontera (BEM), para la ecuación de Laplace. En este caso,  $E$  es el Laplaciano y  $f(\mathbf{x}) = 0$  en la ecuación (2.1). Se requiere encontrar la solución  $u(\mathbf{x})$  para ciertas condiciones de frontera (figura 2.3) en cuatro casos particulares:

- a) cuando  $\bar{x}$  es un punto que se encuentra fuera del dominio,
- b) cuando se encuentra dentro del dominio,
- c) cuando está sobre la frontera y
- d) cuando está en la frontera y además ésta no constituye una curva suave.

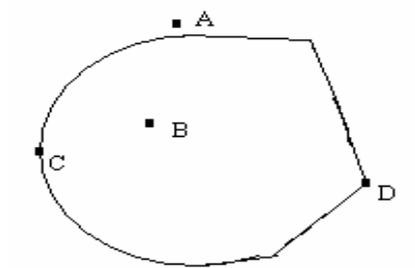


Figura 2.3

### 2.3.1 Solución para puntos internos del dominio

El método de elemento de frontera para puntos internos del dominio comienza considerando una función arbitraria  $w \in W_2^{(1)}(D)$ , que multiplica la ecuación  $\nabla^2 u = 0$  para un dominio  $D$  en  $R^2$ .

Explícitamente:

$$w \nabla^2 u = 0$$

Integrando la ecuación anterior en el dominio  $D$  obtenemos:

$$\int_D w \nabla^2 u dD = 0$$

Desarrollando la ecuación anterior obtenemos:

$$\int_D w \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_D w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy + \int_D w \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy = 0 \quad (2.13)$$

Es conveniente representar las integrales anteriores en términos de integrales en la frontera, para esto podemos utilizar el teorema de integración por partes [4]:

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x_i} g(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_D f(\mathbf{x}) \frac{\partial g}{\partial x_i} d\mathbf{x} \quad (2.14)$$

Donde  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son funciones continuas con derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} (i = 1, \dots, n)$ ;  $n_i$  es la coordenada  $i$ -ésima del vector normal unitario  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$ .

Aplicando el teorema de integración por partes de la ecuación (2.14) a cada una de las integrales de la ecuación (2.13) obtenemos:

$$\int_D w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} w n_x d\Gamma - \int_D \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy$$

$$\int_D w \nabla^2 u dx dy = \int_{\Gamma} w \left( \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_D \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.15)$$

Sabemos que la derivada direccional con respecto al vector normal es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \dots = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.16)$$

sustituyendo la ecuación (2.16) en (2.15) y utilizando el producto punto obtenemos:

$$\int_D w \nabla^2 u dx dy = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_D \left( \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

Pero:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \nabla w \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nabla u$$

Lo que implica que:

$$\int_D w \nabla^2 u dx dy = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_D \nabla w \cdot \nabla u dx dy = 0 \quad (2.17)$$

Desarrollando la integral de dominio de la parte derecha de la ecuación (2.17) queda:

$$\int_D \nabla w \cdot \nabla u dx dy = \int_D \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int_D \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy$$

Aplicando el teorema de integración por partes de la ecuación (2.14) a cada una de las integrales anteriores:

$$\int_D \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial x} n_x d\Gamma - \int_D u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy$$

$$\int_D \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial y} n_y d\Gamma - \int_D u \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy$$

Las sumamos y obtenemos:

$$\int_D \nabla w \cdot \nabla u dx dy = \int_{\Gamma} u \left( \frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_D u \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy$$

Sabemos que  $\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \dots = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  y  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w$ , implica:

$$\int_D \nabla w \cdot \nabla u dx dy = \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_D u \nabla^2 w dx dy$$

sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (2.17) obtenemos:

$$\int_D w \nabla^2 u dx dy = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_D u \nabla^2 w dx dy \quad (2.18)$$

En la integral de dominio de la parte derecha de la ecuación (2.18) sustituimos la ecuación (2.6), para encontrar la solución de  $u$ , por lo que obtenemos:

$$\int_D u \nabla^2 w dx dy = - \int_D u \delta(\xi - x, \eta - y) dx dy$$

Pero sabemos que una de las propiedades de la función delta de Dirac establece que [5]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) h(x) dx = h(0)$$

Esto implica que:

$$\int_D u \nabla^2 w dx dy = - \int_D u \delta(\xi - x, \eta - y) dx dy = -u(\xi, \eta)$$

Donde  $(\xi, \eta) \in D$ . Sustituyendo lo anterior en la ecuación (2.18) obtenemos:

$$\int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - u(\xi, \eta) = 0$$

Despejando obtenemos la solución para puntos internos del dominio:

$$u(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) contiene solo integrales de frontera, y relaciona el valor de la función  $u$  en un punto  $(\xi, \eta)$  interior al dominio con expresiones integrales de frontera [6].

### 2.3.2 Solución para puntos en la frontera

Para puntos  $P$  (punto suave) que se encuentran en la frontera ( $\Gamma$ ) de la región  $D$  (figura 2.4a) tenemos que alargar el dominio  $D$  a un dominio  $D'$  de tal forma que incluya un disco de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $P$ , como se muestra en la figura (2.4b).

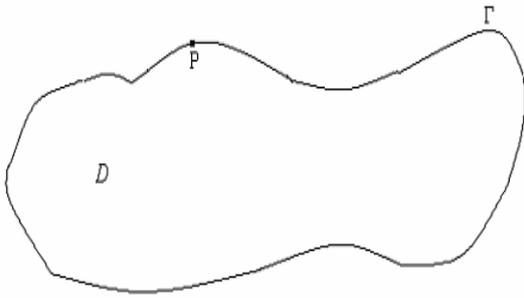


Figura 2.4a

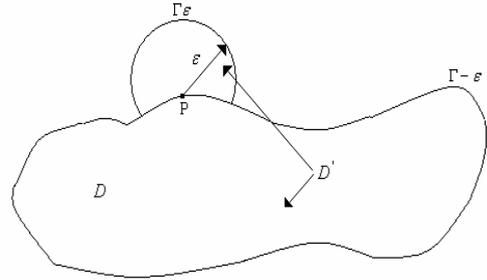


Figura 2.4b

Ahora la frontera de la región  $D'$  es la unión de la frontera que se tenía  $\Gamma - \varepsilon$  con la del disco  $\Gamma \varepsilon$ , por lo que queda  $\Gamma' = \Gamma \varepsilon \cup \Gamma - \varepsilon$ . Como  $P$  está en la región  $D'$  (dentro) podemos aplicar la ecuación (2.19) [6].

$$u(P) + \int_{\Gamma' = \Gamma \varepsilon \cup \Gamma - \varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma' = \Gamma \varepsilon \cup \Gamma - \varepsilon} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma$$

Para obtener la solución de  $u$  cuando el punto  $P$  está en la frontera de la región  $D$  debemos investigar el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ . La ecuación anterior se puede escribir:

$$u(P) + \int_{\Gamma - \varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma \varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma - \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma + \int_{\Gamma \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma \quad (2.19a)$$

Debemos analizar estas cuatro integrales tomando la solución fundamental  $w = -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(r)$ , ya que a partir de la solución fundamental se puede encontrar una solución general para los problemas de potencial. Comencemos con:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial \left( -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(r) \right)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma$$

Como el vector normal  $\mathbf{n}$  a la frontera  $\Gamma_\varepsilon$  es radial, tenemos  $\mathbf{n} = r$  lo que implica que:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial \left( -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(r) \right)}{\partial r} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u}{r} d\Gamma$$

Como en la frontera  $\Gamma_\varepsilon$   $r = \varepsilon$  la ecuación anterior toma la forma:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} u d\Gamma$$

Para resolver la integral anterior utilizaremos el teorema del valor medio. Sean  $h, g$  funciones continuas y  $g \geq 0$  en  $[a, b]$ , entonces:

$$\int_a^b h(t)g(t)dt = h(c) \int_a^b g(t)dt$$

Donde  $c \in [a, b]$ .

Para el caso de la integral  $\int_{\Gamma_\varepsilon} u d\Gamma$  escogemos  $u$  como la función  $h$  y 1 como la función  $g$  del teorema del valor medio, por lo que al resolverla obtenemos:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u d\Gamma = \int_0^\pi u \varepsilon d\theta = u(P) \int_0^\pi \varepsilon d\theta$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u d\Gamma = u(P) \varepsilon \pi$$

Lo que implica que:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} u(P) \varepsilon \pi$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{1}{2} u(P)$$

Entonces:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{u(P)}{2} \quad (2.20)$$

Tomemos ahora la integral:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{2\pi} \text{Log}(r) d\Gamma$$

En la frontera  $r = \varepsilon$  y por tal:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(\varepsilon) \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma$$

Aplicando el teorema del valor medio con  $h = \frac{\partial u}{\partial n}$  y  $g = 1$  obtenemos [5]:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(\varepsilon) \frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}} \int_{\Gamma_\varepsilon} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(\varepsilon) \frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}} \int_0^\pi \varepsilon d\theta$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(\varepsilon) \frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}} \pi \varepsilon$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = -\frac{1}{2} \text{Log}(\varepsilon) \frac{\partial u(P)}{\partial \mathbf{n}} \varepsilon$$

Por lo tanto:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = 0 \quad (2.21)$$

Para los límites cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  de las integrales:

$$\int_{\Gamma-\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad \text{y} \quad \int_{\Gamma-\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma$$

La frontera  $\Gamma' = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma - \varepsilon$  tiende a la frontera de la región  $D$ . Entonces para este caso nuestro tendremos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} u d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} u d\Gamma \quad (2.22)$$

Y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma \quad (2.23)$$

Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (2.20), (2.21), (2.22) y (2.23) en la ecuación (2.19a) tenemos:

$$u(P) + \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \left( -\frac{u(P)}{2} \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma + 0$$

$$\frac{1}{2} u(P) + \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma \quad (2.24)$$

Esta ecuación (2.24) contiene solo integrales de frontera, y relaciona el valor de la función  $u$  en un punto  $P$  suave de la frontera del dominio  $D$  [6].

### 2.3.3 Solución para puntos en la frontera cuando es una curva no suave

Si  $P$  es un punto singular (es decir, está en una curva no suave) que se encuentra en la frontera de la región  $D$  (figura 2.5), seguimos un procedimiento similar al caso anterior: alargar el dominio  $D$  a un dominio  $D'$  de tal forma que incluya un disco de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $P$ , como se muestra en la figura (2.5):

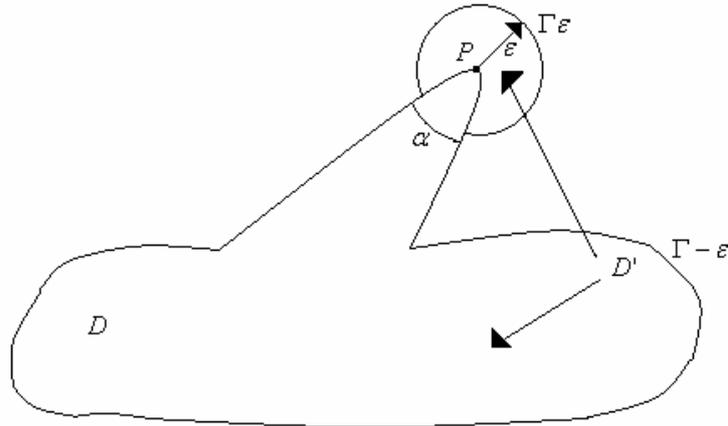


Figura 2.5

Ahora la frontera de  $D'$  es  $\Gamma' = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma - \varepsilon$ . Se siguen los mismos pasos que en el caso anterior (2.3.2): para obtener la solución de  $u$  cuando el punto  $P$  está en la frontera de la región  $D$  debemos investigar el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  de la ecuación (2.19a) [6]. Todas las integrales son similares al caso anterior. La única excepción es la integral:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma$$

Esta integral puede resolverse de la siguiente manera:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial \left( -\frac{1}{2\pi} \text{Log}(r) \right)}{\partial r} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u}{r} d\Gamma$$

Pero  $r = \varepsilon$  en  $\Gamma_\varepsilon$  tenemos:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{(2\pi-\alpha)} u \varepsilon d\theta$$

Usando el teorema del valor medio obtenemos:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} u(P) \int_0^{(2\pi-\alpha)} \varepsilon d\theta$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} u(P) [\varepsilon(2\pi - \alpha)]$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -u(P) + \frac{\alpha u(P)}{2\pi}$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -\frac{u(P)}{2\pi} (2\pi - \alpha)$$

Por lo que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = -u(P) + \frac{\alpha u(P)}{2\pi} \quad (2.25)$$

Por lo tanto sustituyendo las ecuaciones (2.20), (2.22), (2.23), (2.25) en la ecuación (2.19a) tenemos:

$$u(P) + \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \left( -u(P) + \frac{\alpha u(P)}{2\pi} \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma + 0$$

$$\frac{\alpha u(P)}{2\pi} + \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma \quad (2.26)$$

Esta ecuación (2.26) contiene solo integrales de frontera, y relaciona el valor de la función  $u$  en un punto singular en la frontera con expresiones integrales de frontera [6].

### 2.3.4 Resumen de las soluciones

Las expresiones anteriores son útiles para obtener una ecuación para cualquier punto  $P$  a partir de las ecuaciones (2.19), (2.24), (2.26). Explícitamente:

$$C(P)u(P) + \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.27)$$

Donde:

$C(P) =$

- 0 si  $P$  está fuera del dominio  $D$
- 1 si  $P$  está dentro del dominio  $D$
- $\frac{1}{2}$  si  $P \in \Gamma$  y es punto suave
- $\frac{\alpha}{2\pi}$  si  $P \in \Gamma$  y es punto singular

Con la ecuación (2.27), se obtiene la solución de la función  $u(P)$  para cualquier punto que pertenezca al dominio  $D$ . Como veremos en la próxima sección, se debe discretizar tanto la geometría de la frontera como las ecuaciones, debido a que se facilita la evaluación de las integrales en (2.27) [6].

#### 2.4 Discretización para utilizar el método de elemento de frontera

Debemos discretizar (particionar) la frontera  $\Gamma$  (figura 2.6) en  $N$  segmentos  $\Gamma_j$ , donde  $j = 1, \dots, N$  quedando la región  $D$ .

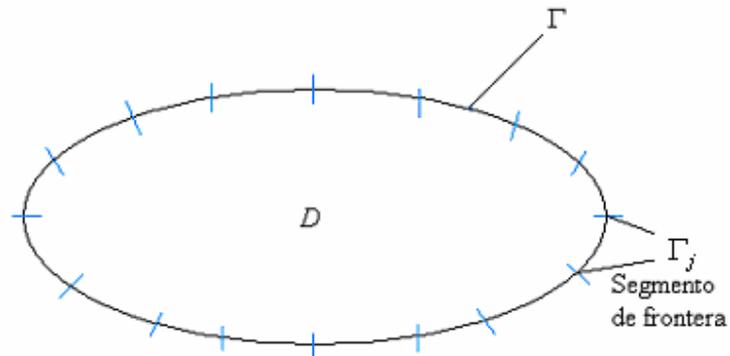


Figura 2.6

Los segmentos que unen los puntos particionados son llamados segmentos de la frontera, y estos se denotan por  $\Gamma_j$ , donde  $j = 1, \dots, N$ . Si se utilizan líneas rectas, que se llamarán elementos de la frontera, la discretización de la frontera (figura 2.7) produce en general una región aproximada  $\bar{D}$  que tiene la forma de un polígono.  $\bar{\Gamma}$  se puede representar como  $\bar{\Gamma} = \bigcup_{j=1}^N \bar{\Gamma}_j$ . A los puntos donde se unen dos líneas rectas se les llama punto extremo.

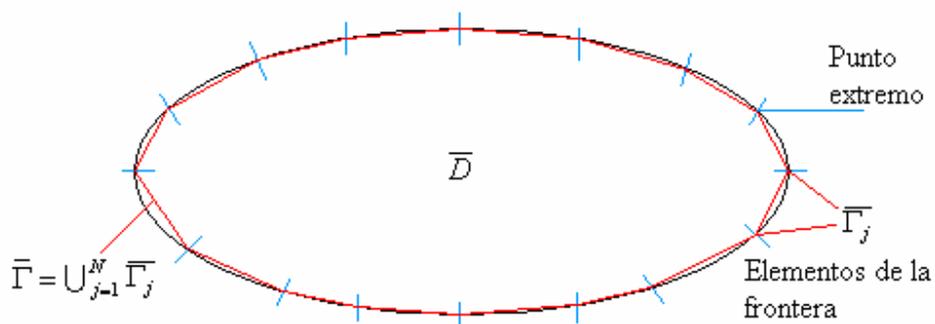


Figura 2.7

La parte entre la frontera  $\Gamma$  y la frontera aproximada  $\bar{\Gamma}$  produce un error de discretización. El escoger los elementos de la frontera adecuadamente siempre minimizará el error de discretización.

Si las condiciones de frontera son mezcladas (figura 2.8), es decir, si las condiciones naturales y esenciales de la frontera son aplicadas a dos partes  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  donde  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , los dos puntos en común de estas partes son tomados como puntos extremos.

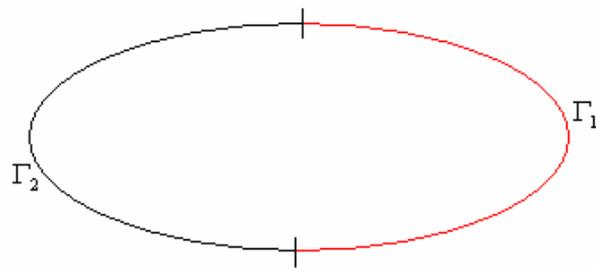


Figura 2.8

En el caso de que el error de discretización fuera cero, tendríamos que  $\Gamma = \bar{\Gamma}$  y  $D = \bar{D}$ . Para nuestro caso, donde sólo utilizamos elementos constantes y caminos rectos, se colocan nodos en los puntos medios de cada elemento de frontera (figura 2.9). Éstos nodos se denominan nodos medios.

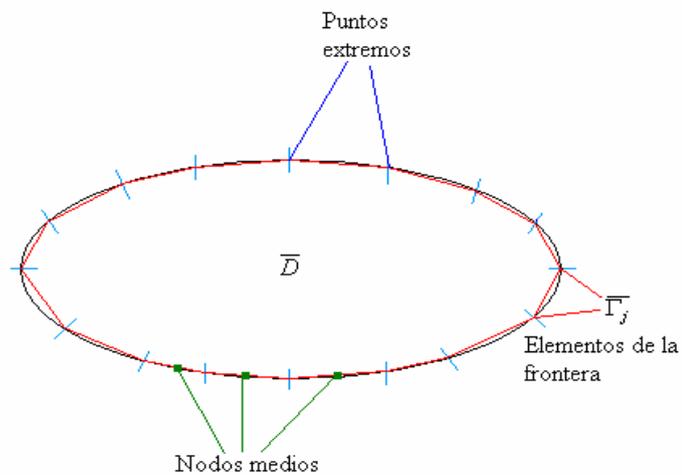


Figura 2.9

### 2.4.1 Discretización de las ecuaciones del método de elemento de frontera

Supongamos que la frontera  $\Gamma$  de una región  $D$  es suave (figura 2.10). La discretización puede hacerse en  $N$  elementos, de los cuales tendremos  $N_1$  elementos a lo largo de  $\Gamma_1$  y  $N_2$  a lo largo de  $\Gamma_2$ , donde  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ .

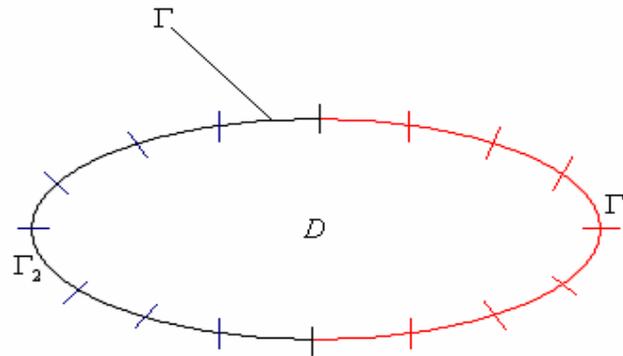


Figura 2.10

Esta discretización produce una región aproximada  $\bar{D}$  y una frontera aproximada  $\bar{\Gamma}$ , como se muestra en la figura (2.11).

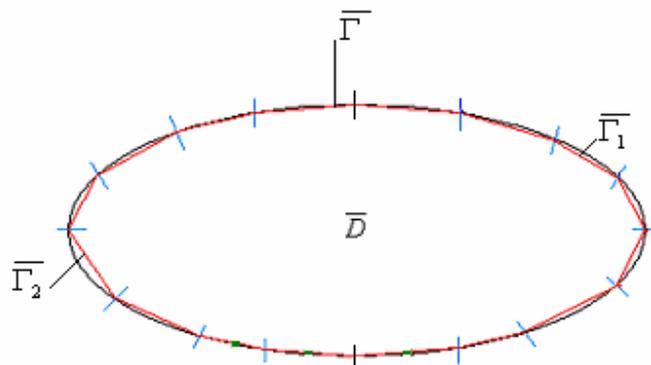


Figura 2.11

Recordemos la ecuación para encontrar el valor de la función  $u$  para cualquier punto  $P$  tanto en el dominio  $D$  como en la frontera  $\Gamma$ .

$$C(P)u(P) + \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma$$

En nuestro caso solo consideramos una frontera con puntos suaves, por lo que la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\frac{u(P)}{2} + \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad P \in \Gamma(\text{suave})$$

Asumamos que los valores de  $u$  y  $w \equiv \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  son constantes en cada elemento al igual que los valores de los nodos medios para cada elemento respectivamente. Definiendo  $u^* \equiv \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ ,  $w^* \equiv \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}$  la ecuación anterior es ahora:

$$\frac{u(P)}{2} + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} w^* ds = \sum_{j=1}^N w_j \int_{\Gamma_j} u^* ds \quad P \in \Gamma(\text{suave}) \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) sólo se aplica para obtener la solución de la función  $u(P)$  para cualquier nodo medio en la frontera para puntos suaves. Observemos que los términos  $\int_{\Gamma_j}$  relacionan el nodo  $i$  ( $u(P)$ ) con el elemento  $j$  sobre el cual la integral es evaluada. Denotamos la integral  $\int_{\Gamma_j} w^* ds$  que se encuentra del lado izquierdo de la ecuación (2.28) como  $\hat{H}_{ij}$  y la integral  $\int_{\Gamma_j} u^* ds$  que se encuentra del lado derecho como  $G_{ij}$  [2]. Con esto la ecuación (2.28) toma la forma:

$$\frac{u(P)}{2} + \sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N w_j G_{ij} \quad P \in \Gamma(\text{suave}) \quad (2.29)$$

La ecuación anterior relaciona el valor de  $u$  en el nodo medio  $i$  ( $u(P)$ ) con el valor de  $u$  y  $w$  en todos los nodos de la frontera incluyendo el  $i$ . Si escribimos la ecuación (2.29) para cada nodo medio  $i$ , obtenemos un sistema de  $N$  ecuaciones por lo que obtenemos [2]:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} w_j \quad (2.30)$$

Donde:

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} \quad \text{Para } i \neq j$$

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} \quad \text{Para } i = j$$

La ecuación (2.29) se puede escribir en forma matricial como:

$$HU = GW \quad (2.31)$$

Observemos que  $N = N_1 + N_2$  y que los  $N_1$  valores de  $u$  y los  $N_2$  valores de  $w$  son conocidos. Pero también tenemos un conjunto de  $N$  valores desconocidos en la ecuación (2.31).

Los términos  $H_{ii}$  incluyen los coeficientes  $C(i)$  (que es igual a  $\frac{1}{2}$  para una frontera suave). Estos términos son evaluados bajo la condición de cuando un potencial uniforme  $u$  es aplicado sobre una región entera finita, el valor de  $w = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  debe ser cero, por lo que la ecuación (2.31) implica:

$$HI = 0 \quad (2.32)$$

Donde  $I$  es el vector columna unitario. La ecuación (2.32) significa que la suma de todos los elementos en los renglones de la matriz  $H$  deben ser cero [2], por lo que los valores de los coeficientes de la diagonal pueden ser fácilmente calculados una vez que conocemos todos los coeficientes que están fuera de ella. Esto puede hacerse mediante:

$$H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N H_{ij}, (i = 1, \dots, N) \quad (2.33)$$

Ahora denotaremos los  $N_2$  valores desconocidos de  $u$  por  $\hat{u}$  y los  $N_1$  valores de  $w$  por  $\hat{w}$ . Reordenando la ecuación (2.31), donde todos los valores desconocidos ( $N_2$  de  $\hat{u}$  y  $N_1$  de  $\hat{w}$ ) están del lado izquierdo podemos escribir:

$$AX = F \quad (2.34)$$

$X$  es el vector desconocido cuyos elementos son  $\hat{u}$  y  $\hat{w}$ . De ahí, podemos determinar todos los valores de  $\hat{u}$  y  $\hat{w}$  sobre la frontera entera a partir de la ecuación (2.34). Una vez que esto está hecho, podemos calcular los valores de  $u$  para cualquier punto interno usando la ecuación (2.27) que en su forma discreta queda [2]:

$$u(P) = \sum_{j=1}^N w_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij} \quad P \in D \quad (2.35)$$

Para calcular el flujo de los puntos internos  $w_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  y  $w_y = \frac{\partial u}{\partial y}$  puede ser calculado por diferencias de la ecuación (2.19a) [2]. Entonces, para cualquier punto interno tendremos:

$$w_x(i) = \int_{\Gamma_j} w \frac{\partial u^*}{\partial x} ds - \int_{\Gamma_j} u \frac{\partial w^*}{\partial x} ds$$

En su forma discreta esto queda expresado como:

$$w_x(i) = \sum_{j=1}^N w_j \left( \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial x} ds \right) - \sum_{j=1}^N u_j \left( \int_{\Gamma_j} \frac{\partial w^*}{\partial x} ds \right) \quad (2.36a)$$

Similarmente:

$$w_y(i) = \int_{\Gamma_j} w \frac{\partial u^*}{\partial y} ds - \int_{\Gamma_j} u \frac{\partial w^*}{\partial y} ds$$

En forma discreta:

$$w_y(i) = \sum_{j=1}^N w_j \left( \int_{\bar{\Gamma}_j} \frac{\partial u^*}{\partial y} ds \right) - \sum_{j=1}^N u_j \left( \int_{\bar{\Gamma}_j} \frac{\partial w^*}{\partial y} ds \right) \quad (2.36b)$$

Como puede verse, para poder aplicar el método de elemento de frontera es necesario tener la solución fundamental del problema a solucionar. En este trabajo estudiamos problemas representados por la ecuación de Laplace, cuya solución fundamental es conocida. En el siguiente capítulo se desarrollará un programa en el lenguaje *Mathematica*, que utilizaremos para probar el método de elemento de frontera para solucionar problemas de potencial.

## **CAPÍTULO 3. MÉTODO DE ELEMENTO DE FRONTERA CON MATHEMATICA**

### **3.1 Características básicas de Mathematica**

El lenguaje de programación que escogimos para desarrollar la tesis es *Mathematica*, programa desarrollado por la empresa Wolfram Research. Éste es un sistema para realizar cálculos numéricos y simbólicos, que además incorpora un excelente lenguaje de programación. Adicionalmente tiene la capacidad de integrar cálculos, gráficos y texto en un mismo documento electrónico llamado cuaderno.

*Mathematica* es un lenguaje de desarrollo para aplicaciones en las que los aspectos de desarrollo matemático, algebraico, numérico, simbólico y gráfico juegan un papel muy importante. Está diseñado para tratar tanto cálculos simbólicos, matemáticos, como aquellos cálculos numéricos tradicionalmente llevados a cabo en C o Fortran. La mayoría de las funciones especiales de la física matemática y funciones matriciales, ya están construidas en *Mathematica*. Además, tiene una extensa capacidad gráfica para las visualizaciones de los resultados de los cálculos.

*Mathematica* como lenguaje de programación, se diferencia de Fortran, C o Pascal en parte por su habilidad en el tratamiento de las expresiones matemáticas, números, expresiones simbólicas, etc. También consta de herramientas matemáticas y gráficas muy poderosas; por ejemplo, se pueden realizar cálculos de integrales por diferentes métodos y realizar diferentes tipos de gráficas, sin tener que implementar rutinas adicionales, facilitando así la programación. Por otra parte, es un lenguaje interpretado, es decir, es un lenguaje que se va ejecutando instrucción por instrucción. Como consecuencia, un cálculo tarda más tiempo en ejecutarse que en un lenguaje compilado; sin embargo, el escribir un programa en *Mathematica* requiere menor tiempo que el necesario para escribir el mismo programa en C, y lo más importante es que permite concentrar los esfuerzos en los detalles conceptuales y no en los de implementación.

Las aplicaciones de *Mathematica* engloban prácticamente todas las áreas de investigación y desarrollo, tanto científicas como de ingeniería. La programación puede hacerse de forma simple, haciendo incluso posible que expertos en el tema matemático desarrollen programas sin la necesidad de ser expertos programadores [7].

Los programas en *Mathematica* se basan en la programación funcional, que es una forma de programar que pone el énfasis en la evaluación de expresiones en lugar de la ejecución de órdenes. La ejecución de un programa funcional no es sino la aplicación de una función a unos datos; la expresión que resulta se reduce, mediante reescrituras sucesivas, a expresiones equivalentes más sencillas, hasta llegar a una expresión irreducible que se considera el resultado de la ejecución del programa. Pueden existir funciones de orden superior, es decir, funciones que tienen como argumento a otras funciones. *Mathematica* también es un programa que opera sobre listas, que se definen por medio de corchetes ( { { }, { }, { } ... { } } ).

### 3.2 BEM en Mathematica

El programa requiere básicamente de la programación de cuatro ecuaciones, éstas son la (2.34), (2.35), (2.36a) y (2.36b). Estas ecuaciones calculan el potencial y el flujo (derivada del potencial), tanto para los puntos en la frontera como para los puntos internos respectivamente, como se vio en el capítulo dos. La función general que se utilizó para programar estas ecuaciones en *Mathematica* es la siguiente:

$$\text{func}[\{x_i, y_i\}, \{\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\}\}] = \text{NIntegrate}[\dots]$$

Donde:

- $\{x_i, y_i\}$  es el nodo donde se requiere calcular el potencial o flujo.
- $\{\{x_0, y_0\}, \{x_1, y_1\}\}$  son los nodos extremos de los elementos que conforman la frontera.
- `NIntegrate` es la función que cuantifica la relación entre el nodo y los elementos de la frontera. Ésta utiliza diferentes métodos de integración, los cuales son

evaluados por el criterio de *Mathematica*, ya que esta función está preestablecida. El diagrama de flujo del programa se muestra en la figura (3.1).

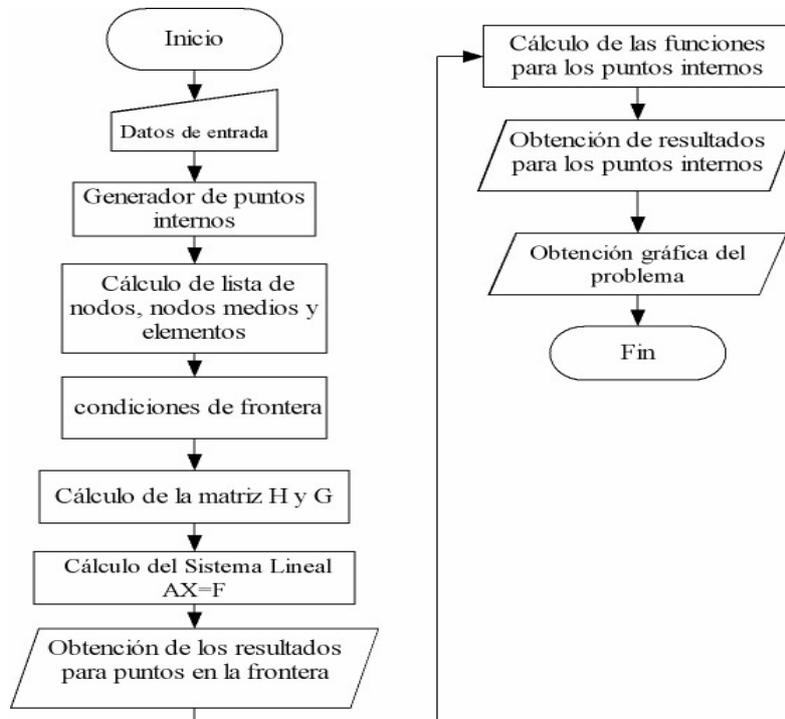


Figura 3.1

### 3.2.1 Datos de entrada

El programa necesita ciertos datos de entrada para realizar las operaciones necesarias y obtener los resultados. Estos datos se introducen en una lista, y llevan un orden establecido de la siguiente manera:  $\{\{vertice\}, N, \rho, \{TipoCF, ValorCF\}, figura\}$ . Esta evaluación debe hacerse por cada segmento de la frontera. Los elementos de esta lista pueden describirse como sigue:

*Vértice*: le llamamos vértice al par ordenado  $\{x,y\}$  que representa, a los nodos extremos que forman los segmentos de la frontera (los segmentos pueden ser curvos o líneas) como se muestra en la figura (3.2).

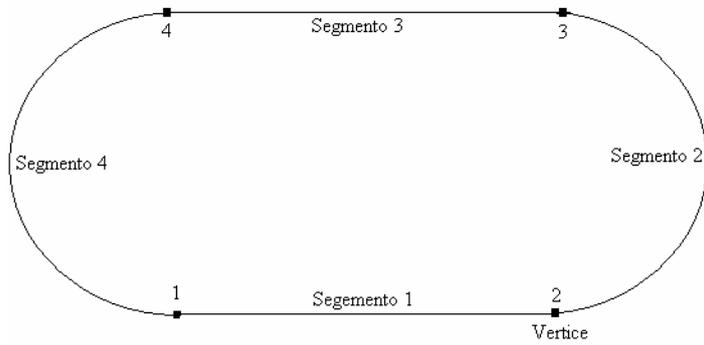


Figura 3.2

$N$ : es el número de nodos deseados en cada segmento como se muestra en la figura (3.3).

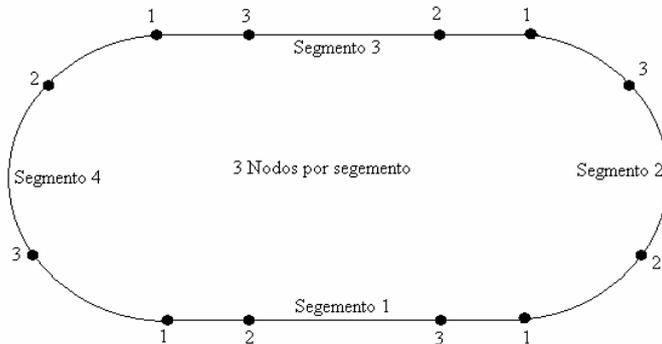


Figura 3.3

$\rho$ : es la función de densidad de nodos por unidad de longitud. Esta función, divide cada segmento de la frontera en  $N$  nodos, pero con diferentes distancias entre cada uno. Esto depende de la función utilizada, como se muestra en la figura (3.4).

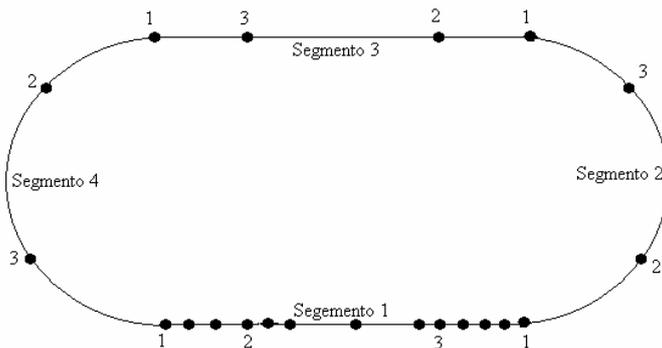


Figura 3.4

*TipoCF*: identifica el tipo del valor conocido en la frontera para cada segmento. Con un valor entero se expresa el grado de la derivada de la función para cada segmento, como se muestra en la figura (3.5). (0 indica una función de potencial, 1 indica una función de flujo o primera derivada normal).

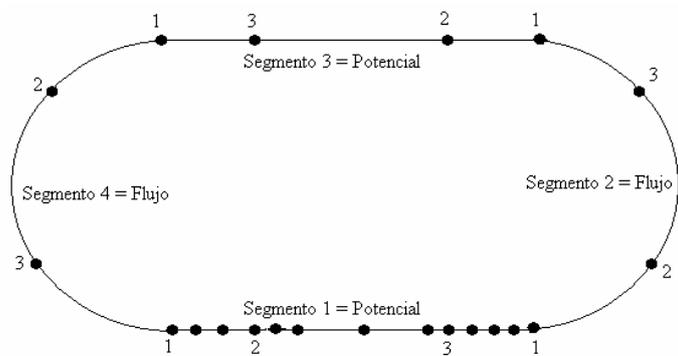


Figura 3.5

*ValorCF*: es el valor numérico conocido de la condición de frontera en cada segmento.

*Figura*: identifica el tipo de segmento que se utiliza con un número entero; una recta se especifica con el 1 y una curva con el 0.

*Elemento*: es la unión de dos nodos de la frontera particionada, como se ilustra en la figura (3.6).

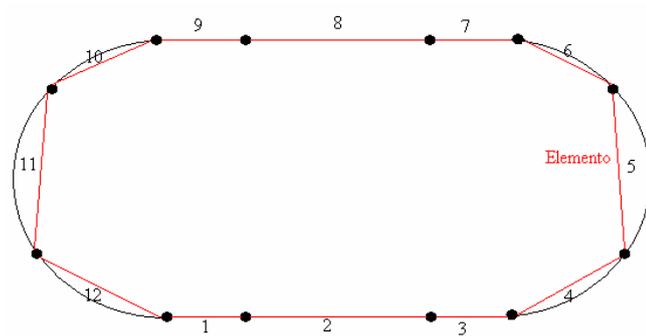


Figura 3.6

Consideremos por ejemplo la siguiente lista de datos de entrada:

```
entrada2 = {{{0,0},1,1,{1,0},1}, {{6,0},1,1,{0,200},1}, {{6,6},1,1,{1,0},1}, {{0,6},1,1,{0,0},1}}
```

La *entrada2* está formada por cuatro segmentos. Si tomamos el primer segmento de la lista  $\{\{0,0\}, 1, 1, \{1,0\}, 1\}$  se interpreta como sigue:

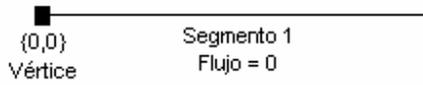
- El elemento  $\{0,0\}$  indica las coordenadas del vértice.
- El elemento 1 indica el número de nodos deseados en el segmento, en este caso sólo es uno.
- El siguiente elemento 1 indica la función de densidad, en este caso es constante e igual a uno.
- El elemento  $\{1,0\}$  indica que se tiene una condición de frontera para flujo, con valor constante de cero.
- El siguiente elemento 1 indica que se tiene un segmento recto.

Esto lo podemos observar en la figura (3.7a).

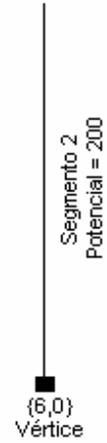
Si tomamos el segundo elemento de la lista  $\{\{6,0\}, 1, 1, \{0,200\}, 1\}$ , el mismo se interpreta como sigue:

- El elemento  $\{6,0\}$  indica las coordenadas del vértice.
- El elemento 1 indica el número de nodos deseados en el segmento, en este caso sólo es uno.
- El siguiente elemento 1 indica la función de densidad, en este caso es constante e igual a uno.
- El elemento  $\{0,200\}$  indica que se tiene una frontera de potencial, con valor constante de doscientos.
- El siguiente elemento 1 indica que se tiene un segmento recto.

Esto lo podemos observar en la figura (3.7b).

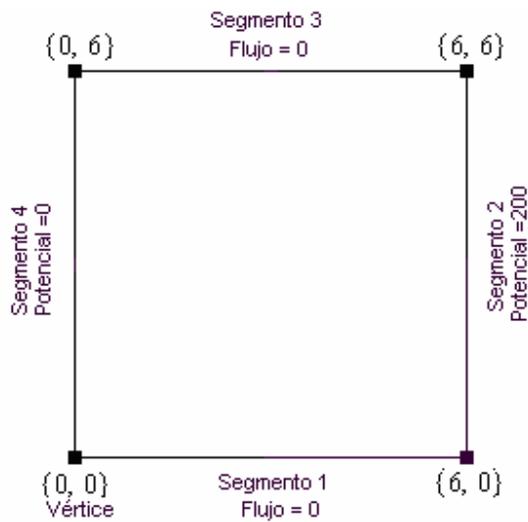


*Figura 3.7a*



*Figura 3.7b*

Al desarrollar completamente el ejemplo quedaría como se muestra en la figura (3.7c)



*Figura 3.7c*

### 3.2.2 *Generador de puntos internos*

Otros datos de entrada que el programa necesita son los puntos internos del dominio, los cuales el usuario determinará dependiendo del análisis del problema. Existen tres tipos de arreglos que se utilizan en el programa. El primero es en forma de un mallado rectangular, el segundo es en forma de un mallado curvo (circular) y el tercero se forma a partir de un camino recto. Para el primer y tercer casos, los datos se introducen en una lista de la forma  $\{\{cx,cy\},\{base, altura\},\{número\ de\ nodosx, número\ de\ nodosy\},\{tipo\ posición\}$ , donde:

- $\{cx,cy\}$ . Es el punto central de coordenadas  $(x,y)$  del mallado rectangular.
- $\{base, altura\}$ . Especifican el ancho y la altura del mallado.
- $\{número\ de\ nodosx, número\ de\ nodosy\}$ . El *número de nodosx* es el número de puntos que se tendrán en el ancho del mallado y el *número de nodosy* es el número de puntos que se tendrán en la altura del mallado.
- *tipo posición*. Identifica el tipo de mallado que se quiere utilizar a través de un número entero, rectangular por medio del 1 o curvo por medio del 0.

Supongamos que definimos una lista de la forma  $\{\{3,3\}, \{5,5\}, \{5, 5\}, 1\}$ . El programa nos dará 25 puntos internos, cada uno con sus respectivas coordenadas  $(x,y)$ ; esto lo realiza a través de cuatro funciones programadas llamadas *rangointr*, *rangoint $\theta$* , *puntosinternosR $\theta$* , y *puntosinteriores*, por lo que el mallado quedaría con las dimensiones que se muestran en la figura (3.8).

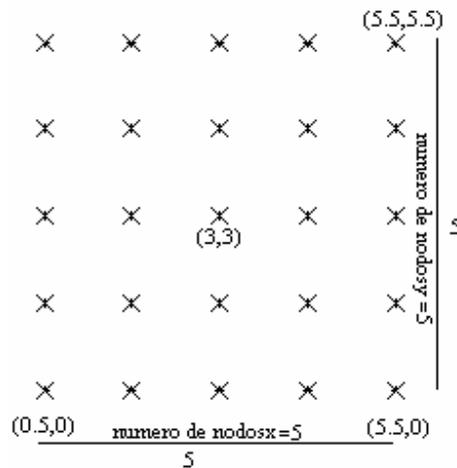


Figura 3.8

Para el caso de camino recto, sólo es posible realizarlo de dos maneras: horizontal o verticalmente. Esto se hace definiendo en la parte de base un 1 para que el camino sea vertical, o en la altura un 1 para que el camino sea horizontal.

Para definir un mallado curvo, los datos se introducen de la siguiente manera:  $\{\{centro\ del\ radio,\ ángulo\ central\}, \{tamaño\ del\ radio,\ ángulo\ total\ del\ radio\}, \{número\ de\ nodos\ del\ radio,\ número\ de\ nodos\ para\ el\ ángulo\}, tipo\ posición\}$ . Los elementos de esta lista son:

- $\{\{centro\ del\ radio,\ ángulo\ central\}$ . Es el punto central de coordenadas  $(r, \theta)$  del mallado curvo.
- $\{tamaño\ del\ radio,\ ángulo\ total\ del\ radio\}$ . El tamaño del radio indica la longitud de radio que tendrá el mallado curvo y el ángulo total del radio indica la apertura total del abanico del mallado.
- $\{número\ de\ nodos\ del\ radio,\ número\ de\ nodos\ para\ el\ ángulo\}$ . El número de nodos del radio es el número de nodos que se tendrán en la longitud de radio del mallado y el ángulo total del radio es el número de nodos que se tendrán en el abanico del mallado. Si tenemos por ejemplo, cinco en la parte de número de nodos del radio y cinco en el ángulo total del radio, nuestro mallado curvo constará de un total de 25 puntos internos.

Consideremos por ejemplo, la lista,  $\{\{20,45\}, \{10,45\}, \{5, 5\}, 0\}$ ; el programa nos dará 25 puntos internos, cada uno con sus respectivas coordenadas  $(r, \theta)$ . Esto lo realiza a través de cuatro funciones programadas llamadas *rangointr*, *rangoint $\theta$* , *puntosinternosR $\theta$* , *puntosinteriores*, por lo que el mallado resulta con las dimensiones que se muestran en la figura (3.9).

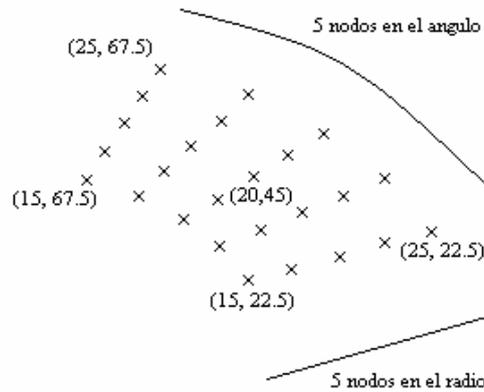


Figura 3.9

### 3.2.3 Cálculo de las listas de los nodos, nodos medios y elementos

En esta parte del programa lo primero que se realiza es separar cada uno de los datos de entrada. Específicamente, se construye una lista de vértices, una lista de número de nodos deseados, una lista de las funciones de densidad y una lista del tipo de figura, con el fin de obtener los puntos que el programa va a utilizar para solucionar el problema.

- La función *nodos* crea la lista llamada *listadenodos* a partir de los nodos deseados  $N$ , dándonos una lista de coordenadas  $(x,y)$  de todos los nodos de la frontera. Estos se encuentran sobre los segmentos como se puede observar en la figura (3.10).

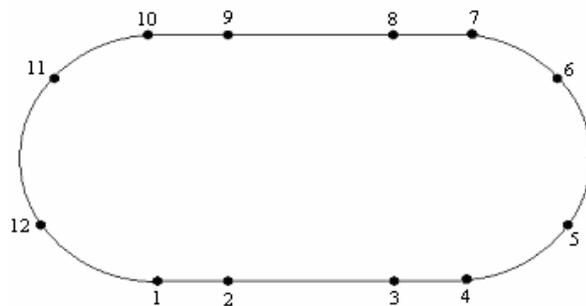


Figura 3.10

- La lista *listadeelementos* se obtiene a través de la manipulación de la lista *listadenodos*, por medio de las funciones *Append* y *Partition* definidas en *Mathematica*. Así se obtiene una lista de pares ordenados  $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]$ , que representan los puntos extremos de cada elemento, como se muestra en la figura (3.11).

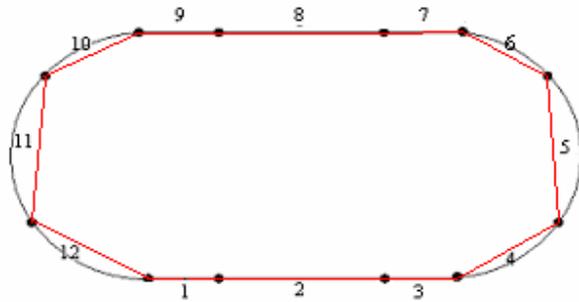


Figura 3.11

- La lista *listadenodosmedios* se obtiene manipulando la lista *listadeelementos*, por medio de la función *Map* preescrita en *Mathematica*. Las coordenadas (x,y) son los puntos medios que se encuentran entre cada elemento, como se muestra en la figura (3.12).

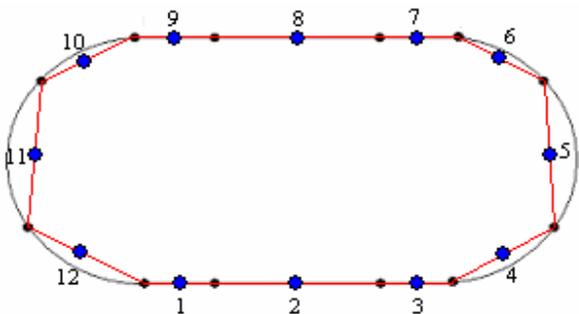


Figura 3.12

En esta parte del programa lo más importante son las listas *listadeelementos* y la *listadenodosmedios*, ya que como se verá en la sección 3.2.5 el programa las utiliza para obtener la solución del problema. Considerando el ejemplo de la sección 3.2.1, se obtendrían las siguientes listas:

$$listadenodos = \{\{0,0\}, \{6,0\}, \{6,6\}, \{0,6\}\}$$

$listadeelementos = \{\{0,0\}, \{6,0\}\}, \{\{6,0\}, \{6,6\}\}, \{\{6,6\}, \{0,6\}\}, \{\{0,6\}, \{0,0\}\}$

$listadenodosmedios = \{\{3,0\}, \{6,3\}, \{3,6\}, \{0,3\}\}$

Estas listas, muestran los nodos extremos de cada elemento más los nodos medios, esto se ejemplifica en la figura (3.13).

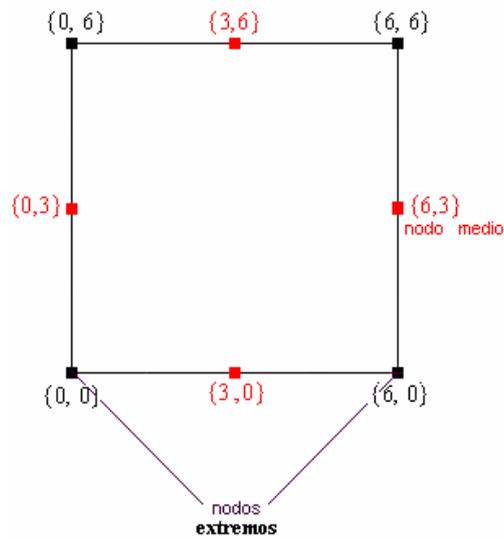


Figura 3.13

### 3.2.4 Obtención de las condiciones de frontera a partir de los datos de entrada

En esta parte del programa se genera una lista de las condiciones de frontera, considerando tanto el tipo como el valor. La primera lista se llama *cf* y es una lista de los tipos y de los valores de las condiciones de frontera de cada segmento, ésta se saca a partir de los datos de entrada. Considerando el ejemplo de la sección 3.2.1 se tendría la siguiente lista  $\{\{1,0\}, \{0,200\}, \{1,0\}, \{0,0\}\}$ , ya que se tienen cuatro segmentos.

Posteriormente se crea *listacf*, que es una lista de las condiciones de frontera en las que se repite el tipo y el valor de las condiciones de frontera tantas veces como nodos haya en un segmento, es decir, para cada nodo medio de la frontera se asigna tanto el tipo como el valor de frontera. Considerando el ejemplo de la sección 3.2.1 se tendría la siguiente lista  $\{\{1,0\}, \{0,200\}, \{1,0\}, \{0,0\}\}$  ya que la frontera consta de cuatro nodos medios. Estas listas también se utilizan en la sección (3.2.5) para la solución del problema.

### 3.2.5 Cálculo de las matrices $H$ y $G$ , obtención de los resultados de potencial y flujo

En esta parte del programa se realizan los cálculos necesarios para obtener la solución del problema. Para esto, se utilizan las ecuaciones en forma discreta que se obtuvieron en el capítulo dos.

#### 3.2.5.1 Puntos en la frontera

Se parte de la ecuación (2.31), desarrollada en diferentes pasos:

$$HU = GW$$

##### a) Obtención de la matriz $G$

La matriz  $G$  se obtiene a partir de la variable  $g54$ , por medio de dos funciones, la función  $gmatrix$  y la función  $iustar5$ , que dependen de la lista de nodos medios y de la lista de elementos. Para obtener los elementos de la matriz  $G$  se utiliza la función  $cerca$ , que proporciona un criterio de exclusión, con el fin de no realizar cálculos de un elemento sobre su propio nodo medio. Si la función  $cerca$  es verdadera, es decir, el nodo medio se encuentra sobre su propio elemento, entonces se calculan los elementos  $G_{ii}$  de la matriz  $G$  a partir de la integral:

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{C_i} \text{Log} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \frac{L_i}{2\pi} \left[ 1 - \text{Log} \left( \frac{L_i}{2} \right) \right] \quad (3.1)$$

Pero si la función  $cerca$  es falsa, entonces los elementos  $G_{ij}$  de la matriz  $G$  se calculan a partir de la integral:

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{C_j} \text{Log} \left( \frac{1}{r} \right) ds = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{2} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \text{Log} \left[ \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \right] d\xi \quad (3.2)$$

Se puede ver el desarrollo matemático de las ecuaciones (3.1) y (3.2) en el apéndice A.

### b) Obtención de la matriz $H$

La matriz  $H$  se obtiene a partir de la variable  $h54$ , por medio de dos funciones, la función  $hmatrix$  y la función  $iqstar5$ , que dependen de la lista de nodos medios y de la lista de elementos. Para obtener los elementos de la matriz  $H$ , también se utiliza la función  $cerca$ . Si ésta es verdadera, es decir, el nodo medio se encuentra sobre su propio elemento, entonces se calculan los elementos  $H_{ii} = 0$ . Pero si la función  $cerca$  es falsa, es decir, el nodo medio no se encuentra dentro del elemento, entonces los elementos  $H_{ij}$  de la matriz  $H$  se calculan a partir de la integral:

$$H_{ij} = \int_{C_j} q^* ds = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \left[ n_x \int_{-1}^1 \frac{x - x_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} d\xi + n_y \int_{-1}^1 \frac{y - y_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} d\xi \right] \quad (3.3)$$

se puede ver el desarrollo matemático de la ecuaciones (3.3) en el apéndice A.

### c) Obtención de los valores desconocidos de potencial y flujo

Para obtener los valores desconocidos de las funciones, se utiliza la función  $mezclados$ , que se encarga de resolver la ecuación (2.31). Esta función mezcla los elementos de las dos matrices  $H$  y  $G$  con los valores iniciales conocidos de frontera tanto de potencial como de flujo, para crear el arreglo matricial  $AX = f$ , de donde se obtienen los valores desconocidos tanto de potencial como de flujo, para los puntos sobre la frontera.

Consideremos un ejemplo de una figura cuadrada, que consta de cuatro puntos medios en la frontera, como se muestra en la siguiente figura (3.14):

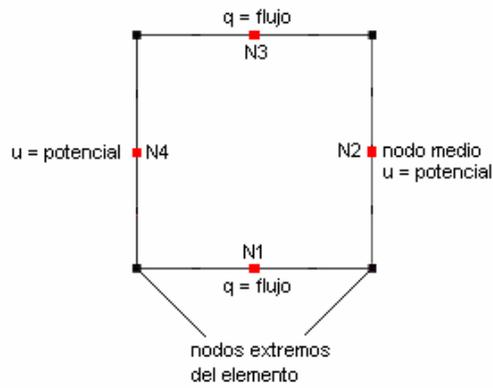


Figura 3.14

La ecuación (2.31) matricialmente quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2^* \\ u_3 \\ u_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2 \\ q_3^* \\ q_4 \end{bmatrix}$$

donde:

$u_2^*$  y  $u_4^*$  son los valores iniciales de potencial conocidos.

$u_1$  y  $u_3$  son los valores de potencial desconocidos.

$q_1^*$  y  $q_3^*$  son los valores iniciales de flujo conocidos.

$q_2$  y  $q_4$  son los valores de flujo desconocidos.

Aplicando la función *mezclados* a la matriz anterior, quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{13} & -G_{12} & -G_{14} \\ H_{21} & H_{23} & -G_{22} & -G_{24} \\ H_{31} & H_{33} & -G_{32} & -G_{34} \\ H_{41} & H_{43} & -G_{42} & -G_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ q_2 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & -H_{12} & -H_{14} \\ G_{21} & G_{23} & -H_{22} & -H_{24} \\ G_{31} & G_{33} & -H_{32} & -H_{34} \\ G_{41} & G_{43} & -H_{42} & -H_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_3^* \\ u_2^* \\ u_4^* \end{bmatrix}$$

$$AX = f.$$

Como puede verse, los valores desconocidos tanto de potencial como de flujo quedan separados. De aquí resulta fácil ver que, una vez calculadas las integrales, se puede resolver un sistema matricial para encontrar el vector de incógnitas.

### 3.2.5.2 Puntos internos

#### a) Cálculo para los valores de potencial

Se parte de la ecuación (2.35). Ésta se obtiene a partir de la variable  $u_{interior}$ , por medio de dos funciones: la función  $fncint$  y la función  $uint$ .

$$u(i) = \sum_{j=1}^N q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij}$$

#### i. Función $fncint$

Esta función realiza el producto punto para dos escalares, es decir, realiza el producto de  $q_j G_{ij}$  y de  $u_j \hat{H}_{ij}$ . Considerando el ejemplo de la sección 3.2.5.1, esto sería:

$$\begin{aligned} \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \cdot \{G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{14}\} &= q_1 G_{11} + q_2 G_{12} + q_3 G_{13} + q_4 G_{14} \\ \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \cdot \{G_{21}, G_{22}, G_{23}, G_{24}\} &= q_1 G_{21} + q_2 G_{22} + q_3 G_{23} + q_4 G_{24} \\ \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \cdot \{G_{31}, G_{32}, G_{33}, G_{34}\} &= q_1 G_{31} + q_2 G_{32} + q_3 G_{33} + q_4 G_{34} \\ \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \cdot \{G_{41}, G_{42}, G_{43}, G_{44}\} &= q_1 G_{41} + q_2 G_{42} + q_3 G_{43} + q_4 G_{44} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cdot \{\hat{H}_{11}, \hat{H}_{12}, \hat{H}_{13}, \hat{H}_{14}\} &= u_1 \hat{H}_{11} + u_2 \hat{H}_{12} + u_3 \hat{H}_{13} + u_4 \hat{H}_{14} \\ \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cdot \{\hat{H}_{21}, \hat{H}_{22}, \hat{H}_{23}, \hat{H}_{24}\} &= u_1 \hat{H}_{21} + u_2 \hat{H}_{22} + u_3 \hat{H}_{23} + u_4 \hat{H}_{24} \\ \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cdot \{\hat{H}_{31}, \hat{H}_{32}, \hat{H}_{33}, \hat{H}_{34}\} &= u_1 \hat{H}_{31} + u_2 \hat{H}_{32} + u_3 \hat{H}_{33} + u_4 \hat{H}_{34} \\ \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cdot \{\hat{H}_{41}, \hat{H}_{42}, \hat{H}_{43}, \hat{H}_{44}\} &= u_1 \hat{H}_{41} + u_2 \hat{H}_{42} + u_3 \hat{H}_{43} + u_4 \hat{H}_{44} \end{aligned}$$

## ii. Función *uint*

Esta función utiliza la función *fn cint* para realizar la resta entre los valores obtenidos de  $\sum_{j=1}^N q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij}$ , y así obtener los valores numéricos de potencial para cada punto interno.

Considerando el ejemplo de la sección 3.2.5.1, esto sería:

$$\begin{aligned} u_1 &= (q_1 G_{11} + q_2 G_{12} + q_3 G_{13} + q_4 G_{14}) - (u_1 H_{11} + u_2 H_{12} + u_3 H_{13} + u_4 H_{14}) \\ u_2 &= (q_1 G_{21} + q_2 G_{22} + q_3 G_{23} + q_4 G_{24}) - (u_1 H_{21} + u_2 H_{22} + u_3 H_{23} + u_4 H_{24}) \\ u_3 &= (q_1 G_{31} + q_2 G_{32} + q_3 G_{33} + q_4 G_{34}) - (u_1 H_{31} + u_2 H_{32} + u_3 H_{33} + u_4 H_{34}) \\ u_4 &= (q_1 G_{41} + q_2 G_{42} + q_3 G_{43} + q_4 G_{44}) - (u_1 H_{41} + u_2 H_{42} + u_3 H_{43} + u_4 H_{44}) \end{aligned}$$

## b) Cálculo para los valores de flujo en $X$ (Flujo en $X$ es la derivada parcial del potencial con respecto a $X$ )

Se parte de la ecuación (2.36a). Ésta se obtiene a partir de la variable  $q_{interiorX}$ , por medio de dos funciones, la función *fn cint* y la función *qxint*.

$$q_x(i) = \sum_{j=1}^N q_j \left( \int_{\bar{\Gamma}_j} \frac{\partial u^*}{\partial x} ds \right) - \sum_{j=1}^N u_j \left( \int_{\bar{\Gamma}_j} \frac{\partial w^*}{\partial x} ds \right)$$

## i. Desarrollo de las funciones *iustar5ux* y *iqstar5qx*

La función *iustar5ux* calcula los valores de la integral  $\int_{\bar{\Gamma}_j} \frac{\partial u^*}{\partial x} ds$  y la función *iqstar5qx* de la integral  $\int_{\bar{\Gamma}_j} \frac{\partial q^*}{\partial x} ds$ . Denotamos la integral  $\int_{\bar{\Gamma}_j} \frac{\partial u^*}{\partial x} ds$  que se encuentra del lado derecho de la ecuación (2.36a) como  $M_{ij}$  y la integral  $\int_{\bar{\Gamma}_j} \frac{\partial q^*}{\partial x} ds$  que se encuentra del

lado derecho como  $N_{ij}$ . Éstas quedan desarrolladas en el programa de la siguiente manera respectivamente:

$$iustar5ux = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{4\pi} \left[ -\int_{C_j} \frac{x_i - x}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} d\xi \right] \quad (3.4)$$

$$iqstar5qx = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{4\pi} \left[ n_x \int_{C_j} \frac{-(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} d\xi + n_y \int_{C_j} \frac{-2(x_i - x)(y_i - y)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} d\xi \right] \quad (3.5)$$

El desarrollo matemático de las ecuaciones (3.4) y (3.5) puede verse en el apéndice B.

La función *funcint* se explicó anteriormente, si consideramos el ejemplo de la sección 3.2.5.1, esto sería:

$$\begin{aligned} \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \bullet \{M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}\} &= q_1 M_{11} + q_2 M_{12} + q_3 M_{13} + q_4 M_{14} \\ \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \bullet \{M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{24}\} &= q_1 M_{21} + q_2 M_{22} + q_3 M_{23} + q_4 M_{24} \\ \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \bullet \{M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{34}\} &= q_1 M_{31} + q_2 M_{32} + q_3 M_{33} + q_4 M_{34} \\ \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \bullet \{M_{41}, M_{42}, M_{43}, M_{44}\} &= q_1 M_{41} + q_2 M_{42} + q_3 M_{43} + q_4 M_{44} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \bullet \{N_{11}, N_{12}, N_{13}, N_{14}\} &= u_1 N_{11} + u_2 N_{12} + u_3 N_{13} + u_4 N_{14} \\ \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \bullet \{N_{21}, N_{22}, N_{23}, N_{24}\} &= u_1 N_{21} + u_2 N_{22} + u_3 N_{23} + u_4 N_{24} \\ \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \bullet \{N_{31}, N_{32}, N_{33}, N_{34}\} &= u_1 N_{31} + u_2 N_{32} + u_3 N_{33} + u_4 N_{34} \\ \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \bullet \{N_{41}, N_{42}, N_{43}, N_{44}\} &= u_1 N_{41} + u_2 N_{42} + u_3 N_{43} + u_4 N_{44} \end{aligned}$$

## ii. Función $qxint$

Esta función utiliza la función  $fcint$  para realizar la resta entre los valores obtenidos de  $\sum_{j=1}^N q_j M_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j N_{ij}$ , y así obtener los valores numéricos de flujo en X para cada punto interno. Considerando el ejemplo de la sección 3.2.5.1, esto sería:

$$\begin{aligned} q_{1X} &= (q_1 M_{11} + q_2 M_{12} + q_3 M_{13} + q_4 M_{14}) - (u_1 N_{11} + u_2 N_{12} + u_3 N_{13} + u_4 N_{14}) \\ q_{2X} &= (q_1 M_{21} + q_2 M_{22} + q_3 M_{23} + q_4 M_{24}) - (u_1 N_{21} + u_2 N_{22} + u_3 N_{23} + u_4 N_{24}) \\ q_{3X} &= (q_1 M_{31} + q_2 M_{32} + q_3 M_{33} + q_4 M_{34}) - (u_1 N_{31} + u_2 N_{32} + u_3 N_{33} + u_4 N_{34}) \\ q_{4X} &= (q_1 M_{41} + q_2 M_{42} + q_3 M_{43} + q_4 M_{44}) - (u_1 N_{41} + u_2 N_{42} + u_3 N_{43} + u_4 N_{44}) \end{aligned}$$

## c) Cálculo para los valores de flujo en Y (Flujo en Y es la derivada parcial del potencial con respecto a Y)

Se parte de la ecuación (2.36b). Ésta se obtiene a partir de la variable  $qinteriroY$ , por medio de dos funciones, la función  $fcint$  y la función  $qyint$ .

$$q_y(i) = \sum_{j=1}^N q_j \left( \int_{\bar{\Gamma}_j} \frac{\partial u^*}{\partial y} ds \right) - \sum_{j=1}^N u_j \left( \int_{\bar{\Gamma}_j} \frac{\partial w^*}{\partial y} ds \right)$$

Se desarrolla de la misma forma que el caso para el flujo en X, lo único que cambia son las ecuaciones  $iustar5ux$  y  $iqstar5qx$ . Éstas quedan de la siguiente manera:

$$iustar5uy = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{4\pi} \left[ - \int_{C_j} \frac{y_i - y}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} d\xi \right] \quad (3.6)$$

$$iqstar5qy = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{4\pi} \left[ n_x \int_{C_j} \frac{-2(x_i - x)(y_i - y)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} d\xi + n_y \int_{C_j} \frac{(x_i - x)^2 - (y_i - y)^2}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} d\xi \right] \quad (3.7)$$

El desarrollo matemático de las ecuaciones (3.6) y (3.7) puede verse en el apéndice B.

### 3.2.6 Representación gráfica del problema

En esta parte del programa se obtiene la representación gráfica del problema que se está solucionando. También se realiza la extracción de todas las listas calculadas anteriormente, como por ejemplo, *lista de puntos medios*, *puntos interiores*, etc. Todo esto es usado en la función *modelo*, que realiza el dibujo del problema a solucionar. Un ejemplo se muestra en la figura (3.15).

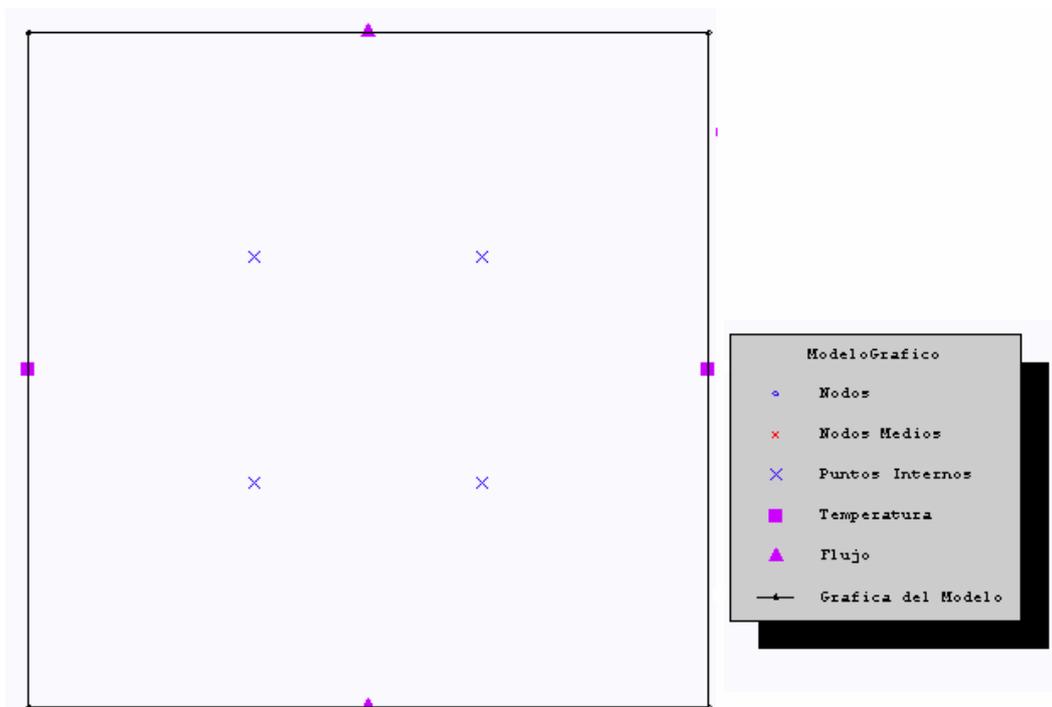


Figura 3.15

### 3.3 Limitaciones del Programa

El programa está limitado a ciertas condiciones debido a que se tomó la decisión de resolver los problemas con elementos rectos y con condiciones de frontera constantes.

#### 3.3.1 Caminos rectos

Se utilizaron caminos rectos por la facilidad de programación. Es muy útil para las fronteras con formas de polígonos, pero si necesitamos hacer una pequeña curva, tenemos que discretizar dicha curva con rectas.

Por ejemplo, la solución del polígono de la figura (3.16) no es complicada ya que sólo consta de caminos rectos. Pero si se tiene algún segmento curvo como se muestra en la figura (3.17), y este contiene pocos elementos rectos, el error promedio en los nodos de frontera será alto.

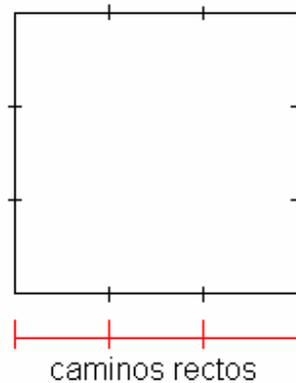


Figura 3.16

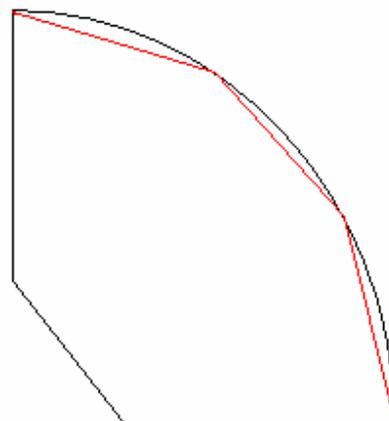
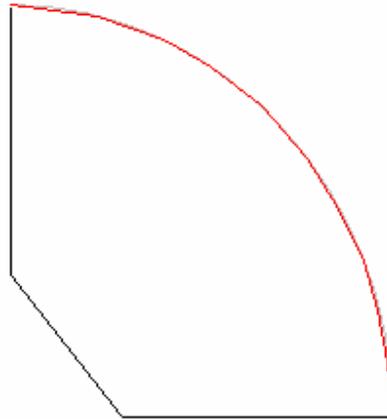


Figura 3.17

Si se quiere disminuir el error promedio en la frontera, se tienen que agregar más elementos rectos, por lo que éstos serán más pequeños, como se muestra en la figura (3.18).



*Figura 3.18*

### **3.3.2 Condiciones constantes**

Utilizamos dos condiciones: la de potencial y la de flujo; a éstas les asignamos valores constantes. Esto se hizo debido a que es el caso más simple para resolver este tipo de problemas y así es posible evaluar el desempeño del programa en forma simple. El código del programa puede verse en el apéndice C. En el siguiente capítulo se verá la aplicación del programa en tres tipos de problemas físicos donde veremos, además de algunos resultados, los alcances del programa.

## CAPÍTULO 4 RESULTADOS

### 4.1 Comparación con problemas de solución conocida

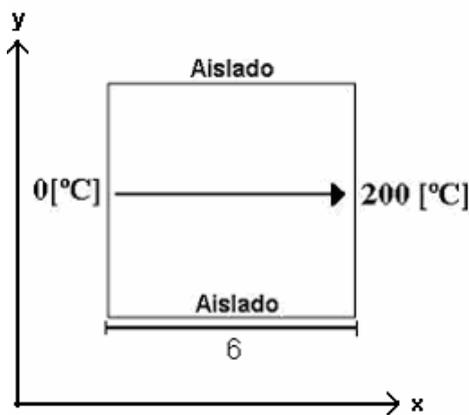
Para analizar los resultados obtenidos con el programa, utilizamos tres problemas de solución conocida, estos son:

1. Placa rectangular con flujo de calor unidimensional.
2. Flujo de calor en una región anular.
3. Potencial en un bus de tres barras.

Para los dos primeros problemas se comparan resultados con soluciones obtenidas de programas hechos en *Fortran* usando el método *BEM*. La solución analítica, que se obtiene de resolver la ecuación diferencial representativa del problema, se compara también con los resultados numéricos. Para el tercer problema, se compara la solución obtenida en el software *FemLab* (método *FEM*) contra el de este trabajo.

### 4.2 Placa rectangular con flujo de calor unidimensional

Se tiene una placa rectangular con flujo de calor linealmente distribuido que va de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ , como se muestra en la figura (4.1). Lo que se quiere encontrar es la distribución de temperatura en todo el dominio de la región.



*Figura 4.1 Placa rectangular con flujo de calor unidimensional*

La ecuación diferencial que representa al problema es:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

En este caso, se considera una distribución uniforme de temperatura en la dirección  $y$ , por lo que la solución particular para este problema, con este tipo de geometría y condiciones de frontera es:

$$u(x, y) = \frac{T_0}{a} x, \text{ con } u(0, y) = 0, u(a, y) = T_0 \quad (4.2)$$

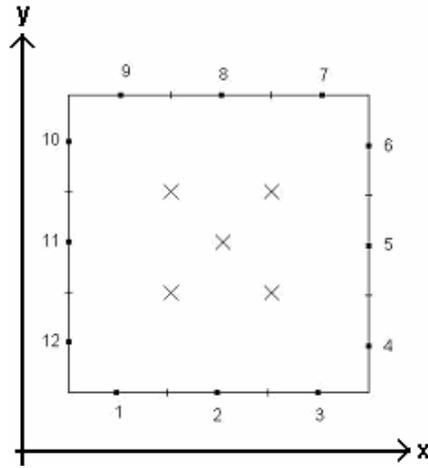
Para este ejemplo,  $a = 6$  y  $T_0 = 200$ , por lo que la distribución de temperatura y los flujos de calor en las direcciones  $x$ ,  $y$  son:

$$u(x, y) = \frac{100}{3} x \quad (4.3)$$

$$\text{Flujo en } x: \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{100}{3} \quad (4.4)$$

$$\text{Flujo en } y: \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.5)$$

Para la primera prueba de este problema, se utilizaron tres elementos por lado en el BEM, por lo tanto se obtienen doce nodos medios para el análisis en la frontera. Se utilizan también cinco nodos internos, como se muestra en la figura (4.2). Los datos de entrada al programa se muestran en la tabla (4.1).



**Figura 4.2** Representación gráfica del problema a analizar

Segmentos	Vértices de los segmentos	Condición de frontera (Tipo, Valor)	Número de nodos deseados por segmento	Función de densidad	Tipo de figura	Nodos Internos
1	0, 0	1, 0	3	1	1	(2, 2)
2	6, 0	0, 200	3	1	1	(2, 4)
3	6, 6	1, 0	3	1	1	(3, 3)
4	0, 6	0, 0	3	1	1	(4, 2)
						(4, 4)

**Tabla 4.1** Datos de entrada al programa para la placa rectangular.

#### 4.2.1 Solución de nodos en la frontera y puntos internos

Los resultados de temperatura y flujo de calor, tanto de los nodos medios como de los puntos internos, se muestran en las tablas (4.2) y (4.3), respectivamente.

Nodos medios (coordenadas x,y)	Método Analítico		BEM en Fortran [2]		BEM en Mathematica	
	$u$ $T = \frac{100}{3}x$	$q$ $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{100}{3}$	$u$	$q$	$u$	$q$
(1, 0)	<b>33.3333</b>	<b>0.0</b>	31.8337	0.0	<b>31.8255</b>	<b>0.0</b>
(3, 0)	<b>100</b>	<b>0.0</b>	100.0125	0.0	<b>100.</b>	<b>0.0</b>
(5, 0)	<b>166.667</b>	<b>0.0</b>	168.1661	0.0	<b>168.175</b>	<b>0.0</b>
(6, 1)	<b>200</b>	<b>33.3333</b>	200.0	35.3129	<b>200</b>	<b>35.3029</b>
(6, 3)	<b>200</b>	<b>33.3333</b>	200.0	32.4913	<b>200</b>	<b>32.5077</b>
(6, 5)	<b>200</b>	<b>33.3333</b>	200.0	35.3129	<b>200</b>	<b>35.3029</b>
(5, 6)	<b>166.667</b>	<b>0.0</b>	168.1660	0.0	<b>168.175</b>	<b>0.0</b>
(3, 6)	<b>100</b>	<b>0.0</b>	100.0123	0.0	<b>100</b>	<b>0.0</b>
(1, 6)	<b>33.3333</b>	<b>0.0</b>	31.8335	0.0	<b>31.8255</b>	<b>0.0</b>
(0, 5)	<b>0</b>	<b>33.3333</b>	0.0	35.3076	<b>0</b>	<b>35.3029</b>
(0, 3)	<b>0</b>	<b>33.3333</b>	0.0	32.5141	<b>0</b>	<b>32.5077</b>
(0, 1)	<b>0</b>	<b>33.3333</b>	0.0	35.3076	<b>0</b>	<b>35.3029</b>

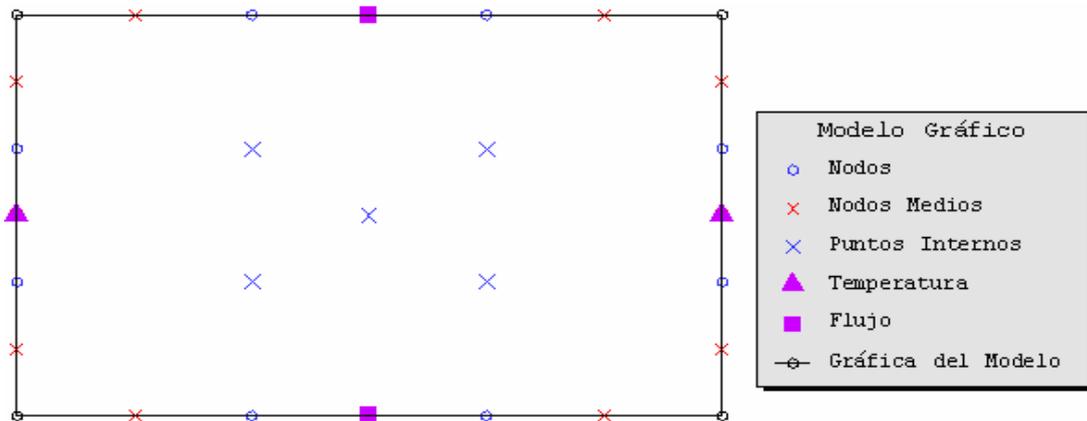
**Tabla 4.2** Soluciones analítica y numéricas con el método BEM (Fortran y Mathematica).

En la tabla (4.2) se muestran tres resultados: el analítico, que se obtiene mediante las ecuaciones (4.2) y (4.3), la solución programada en Fortran tomada de [2], y la solución programada en *Mathematica*. En la tabla (4.3) se muestran los resultados para los nodos internos.

Nodos Internos (x,y)	Método Analítico			Solución en Fortran [2]			Solución en Mathematica		
	u	q <sub>x</sub>	q <sub>y</sub>	u	q <sub>x</sub>	q <sub>y</sub>	u	q <sub>x</sub>	q <sub>y</sub>
	$T = \frac{100}{3}x$	$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{100}{3}$	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$						
(2,2)	66.666	33.333	0.000	66.4933	33.5370	0.097	<b>66.4874</b>	<b>33.5352</b>	<b>0.098</b>
(2,4)	66.666	33.333	0.000	66.4933	33.5370	-0.097	<b>66.4874</b>	<b>33.5352</b>	<b>-0.098</b>
(3,3)	100	33.333	0.000	100.0063	33.4765	0.000	<b>100.00</b>	<b>33.4761</b>	<b>0.000</b>
(4,2)	133.333	33.333	0.000	133.5199	33.5356	-0.099	<b>133.513</b>	<b>33.5352</b>	<b>-0.098</b>
(4,4)	133.333	33.333	0.000	133.5199	33.5356	0.099	<b>133.513</b>	<b>33.5352</b>	<b>0.098</b>

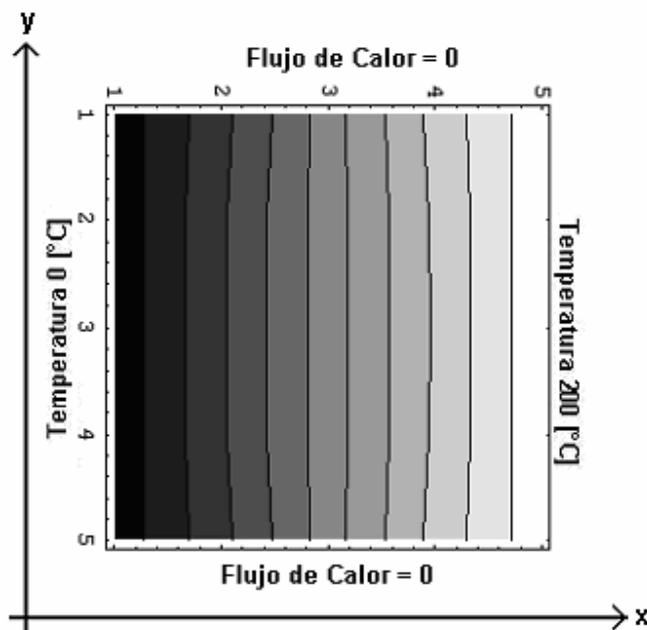
**Tabla 4.3** Soluciones analítica y numéricas con el método BEM (Fortran y Mathematica) para nodos internos.

En la figura (4.3), se muestra la representación gráfica del problema de la placa rectangular dada por el programa. En ésta pueden identificarse los vértices, los nodos, los nodos medios, los nodos internos y el tipo de frontera por cada lado del problema.



**Figura 4.3** Representación gráfica del problema en Mathematica

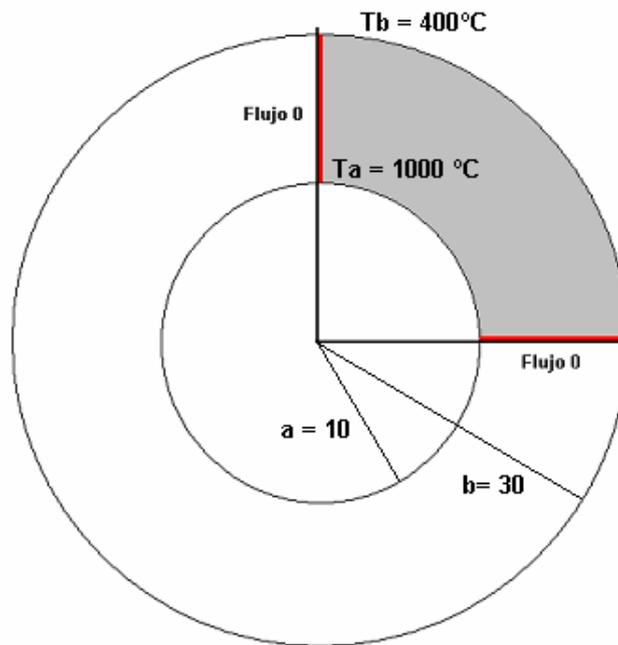
La solución del problema se presenta de manera gráfica en la figura (4.4). Podemos ver la distribución de temperatura, que es lineal a lo largo de la placa, que va desde 0°C hasta 200°C.



*Figura 4.4 Representación gráfica de la solución obtenida con BEM en Matemática*

### **4.3 Flujo de calor en una región anular**

Se tiene una región anular con distribución de temperatura uniforme que va de 400 °C a 1000 °C, como se muestra en la figura (4.5). Lo que se quiere encontrar, es la variación de temperatura en todo el dominio de la región. Por la simetría del problema, podemos considerar únicamente la región sombreada y considerar en los extremos flujo de calor cero, esto es, se consideran como paredes aisladas.



**Figura 4.5** Flujo de calor en una región anular; por simetría de la figura se considera únicamente la región sombreada.

Si  $T(r, \theta) = T(r)$ , la ecuación diferencial que representa al problema es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0 \quad (4.6)$$

La solución particular para este problema, con este tipo de geometría y condiciones de frontera es:

$$T(r) = Ta + \frac{Ta - Tb}{\text{Log} \left[ \frac{a}{b} \right]} \text{Log} \left[ \frac{r}{a} \right] \quad (4.7)$$

Donde:

- $Ta$  es la temperatura de la región interior
- $Tb$  es la temperatura de la región exterior
- $a$  es el radio interior
- $b$  es el radio exterior
- $r$  es el radio del nodo a analizar

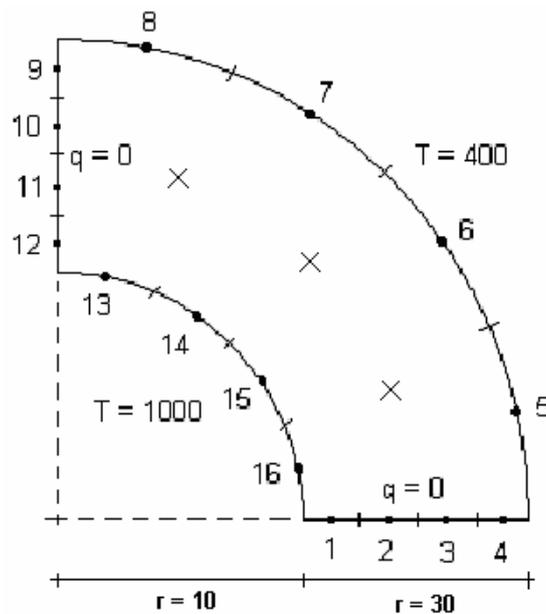
La expresión analítica al problema en coordenada cartesiana, y las expresiones para el flujo de calor en las direcciones  $x$ ,  $y$  son:

$$T(x, y) = 1000 + \frac{1000 - 400}{\text{Log}\left[\frac{10}{30}\right]} \text{Log}\left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{10}\right] \quad (4.8)$$

$$\text{Flujo en } x: \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{600x}{(x^2 + y^2)\text{Log}[3]} \quad (4.9)$$

$$\text{Flujo en } y: \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{600y}{(x^2 + y^2)\text{Log}[3]} \quad (4.10)$$

La solución numérica del problema se obtuvo discretizando la frontera como se indica en la figura (4.6). Como puede verse, se utilizaron 4 elementos por lado, y por lo tanto, se utilizan 16 nodos medios para la frontera. En la región interna, se utilizan únicamente 3 nodos. Los datos de entrada al programa se muestran en la tabla (4.4).



**Figura 4.6** Representación gráfica del problema a analizar

Segmentos	Vértices de los segmentos	Condición de frontera (Tipo, Valor)	Numero de nodos deseados por segmento	Función de densidad	Tipo de figura	Nodos Internos
1	10, 0	1, 0	3	1	1	(18.47, 7.65)
2	30, 0	0, 400	3	1	0	(14.1,14.14)
3	0, 30	1, 0	3	1	1	(7.65,18.47)
4	0, 10	0,1000	3	1	0	

**Tabla 4.4** Datos de entrada al programa para la región anular

**4.3.1. Solución de nodos en la frontera y puntos internos**

Los resultados de temperatura y flujo de calor, tanto de los nodos medios como de los nodos internos, se muestran en las tablas 4.5 y 4.6, respectivamente. Al igual que en el caso anterior, en las tablas se incluyen los resultados obtenidos con la solución analítica y las soluciones numéricas del BEM (en Fortran y *Mathematica*).

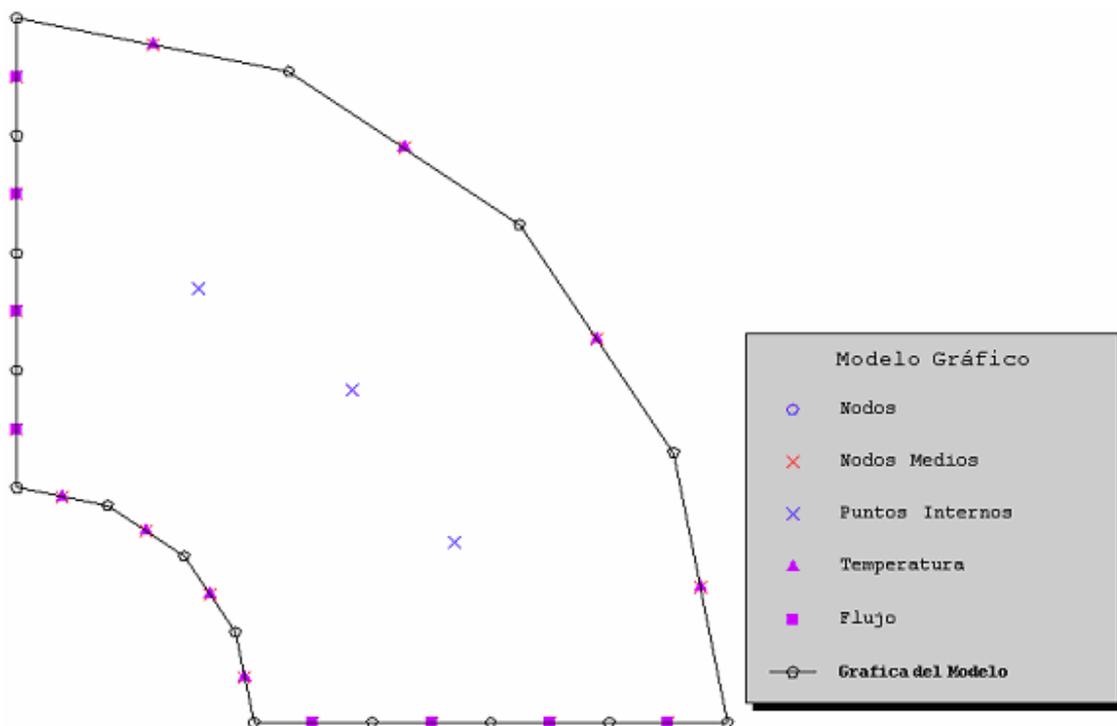
Coordenadas de los nodos medios	Método Analítico		Solución en Fortran		Solución en Mathematica	
	u	Q	u	q	u	q
	$T = T_a + \frac{T_a - T_b}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \dots 10 \leq r \leq 30$	$\frac{\partial T}{\partial r}$				
12.5, 0	878.132	0.0	876.1199	0.00	876.136	0.00
17.5, 0	694.369	0.0	688.5445	0.00	688.554	0.00
22.5, 0	557.116	0.0	548.9433	0.00	548.947	0.00
27.5, 0	447.521	0.0	438.1204	0.00	437.949	0.00
28.85, 5.74	400.00	-18.90	400.00	-18.8493	400.00	-18.8463
24.46, 16.34	400.00	-18.50	400.00	-18.4573	400.00	-18.4592
16.34, 24.46	400.00	-18.50	400.00	-18.4573	400.00	-18.4592
5.74, 28.85	400.00	-18.90	400.00	-18.8494	400.00	-18.8463
0, 27.5	447.521	0.00	438.1204	0.00	437.949	0.00
0, 22.5	557.116	0.00	548.9433	0.00	548.947	0.00
0, 17.5	694.369	0.00	688.5446	0.00	688.554	0.00
0, 12.5	878.132	0.00	876.1201	0.00	876.136	0.00
1.91, 9.61	1000.00	58.3200	1000.00	58.3131	1000.00	58.2962
5.44, 8.15	1000.00	53.72.00	1000.00	53.7123	1000.00	53.7229
8.15, 5.44	1000.00	53.72.00	1000.00	53.7123	1000.00	53.7229
9.61, 1.91	1000.00	58.3200	1000.00	58.3130	1000.00	58.2962

**Tabla 4.5.** Soluciones del método BEM para la solución analítica y las programadas en Fortran y Mathematica de los nodos medios de la frontera.

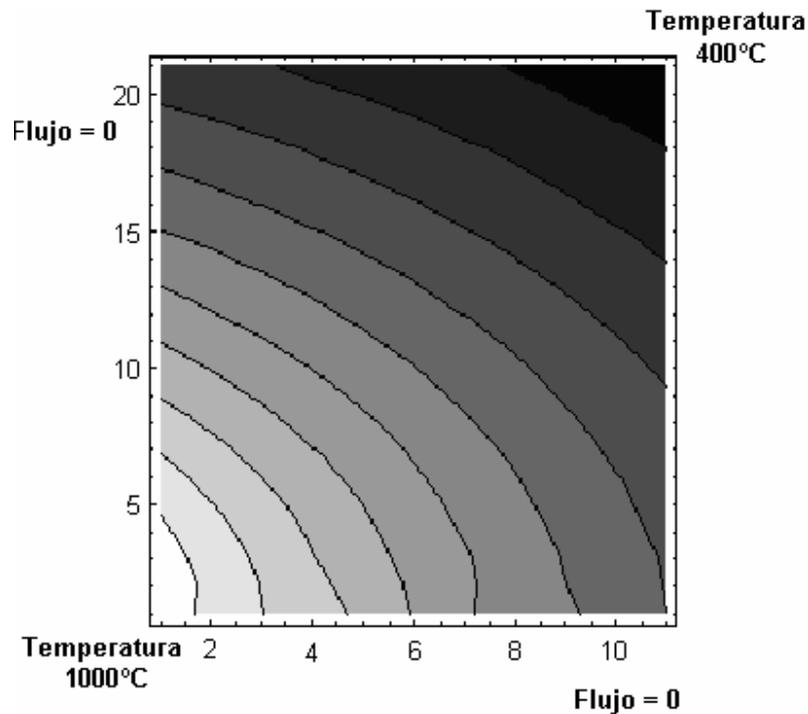
Nodos Internos	Método Analítico			Solución en Fortran			Solución en Mathematica		
	u	q <sub>x</sub>	q <sub>y</sub>	u	q <sub>x</sub>	q <sub>y</sub>	u	q <sub>x</sub>	q <sub>y</sub>
18.4776, 7.6537	621.442	-25.35	-10.64	613.882	-25.348	-10.636	613.88	-25.351	-10.637
14.1421, 14.1421	621.444	-19.38	-19.38	613.403	-19.379	-19.379	613.40	-19.382	-19.382
7.6537, 18.4776	621.442	-10.64	-25.35	613.882	-10.636	-25.348	613.88	-10.637	-25.351

**Tabla 4.6** Soluciones del método BEM para la solución analítica y las programadas en Fortran y Mathematica de los nodos internos.

En la figura (4.7), se muestra la representación del problema de la región anular dada por el programa. Al igual que en el caso anterior, en esta representación pueden identificarse los vértices, los nodos, los nodos medios, los nodos internos y el tipo de frontera por cada lado del problema. La representación gráfica de la distribución de temperatura se muestra en la figura (4.8).



**Figura 4.7.** Representación gráfica del problema dada por BEM en Mathematica



**Figura 4.8.** Representación gráfica de la solución obtenida con el BEM en Mathematica

#### 4.4 Cálculo de errores

Para evaluar los resultados obtenidos con el programa, se realizaron cálculos de errores para el problema de la placa rectangular. Se utilizó únicamente este problema por su geometría simple, aunque la tendencia de los errores deberá ser muy similar en todas las geometrías. Los elementos que se toman para realizar los cálculos de errores, son los valores que no están prescritos en el problema.

El error se calcula de acuerdo con:

*Error = valores de la solución analítica – valores de la solución numérica.*

$$error = valor_{numérico} - valor_{analítico} \tag{4.11}$$

#### 4.4.1 Placa rectangular

Analizaremos el primer problema resuelto en la sección anterior, que consta de tres elementos por segmento, doce nodos, doce nodos medios y cinco nodos internos, como se observa en la figura (4.9). Los errores se calcularon para los nodos en la frontera y para los puntos internos.

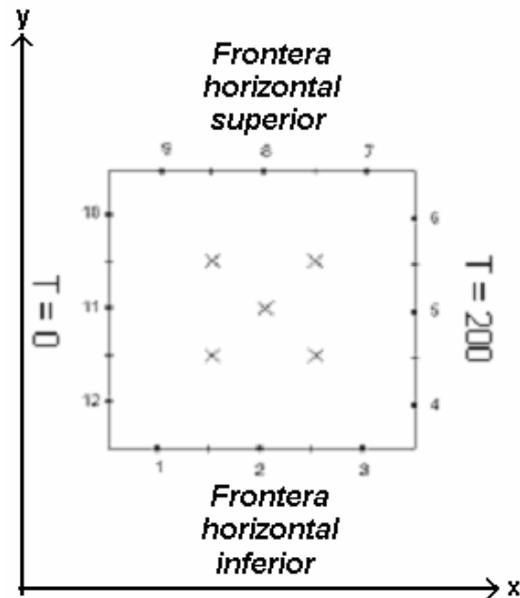


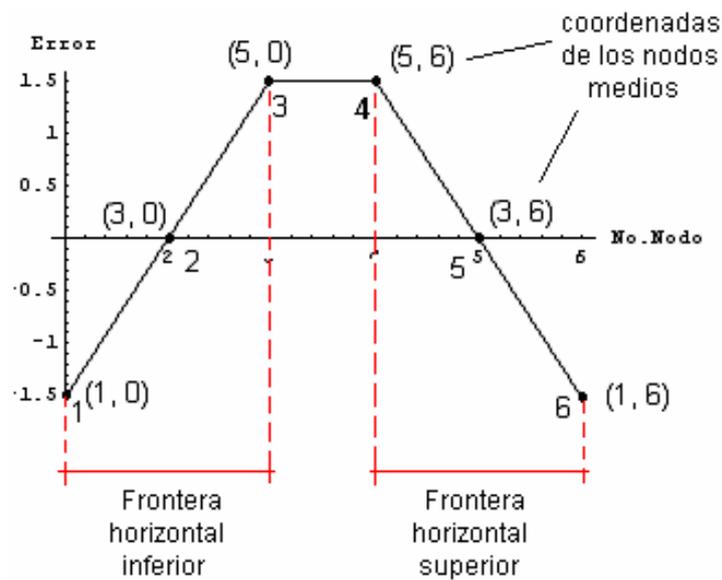
Figura 4.9 Representación gráfica del problema de la placa rectangular

Para los nodos medios de la frontera horizontal inferior, denotados por 1, 2 y 3 en la figura 4.9, podemos construir la siguiente tabla utilizando (4.11):

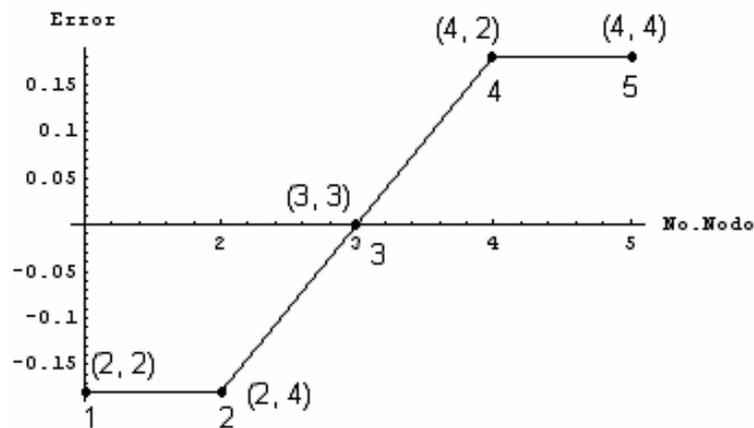
Coordenada del nodo	Valor analítico	Valor numérico	Error = $V_a - V_n$
(1, 0)	33.3333	31.8255	<b>1.5078</b>
(3, 0)	100	100.	<b>0.0000</b>
(5, 0)	166.667	168.175	<b>-1.5078</b>

Tabla 4.7. Errores de temperatura para algunos nodos medios de la frontera

A partir de la tabla (4.7), podemos dibujar la gráfica de los errores de cada nodo de la frontera como se observa en la figura (4.10). Como podemos ver, el error está entre 1.5 y -1.5 en los nodos a los extremos y en los nodos cercanos a las fronteras laterales. Los nodos con menos error son los que se encuentran en la parte central del dominio.

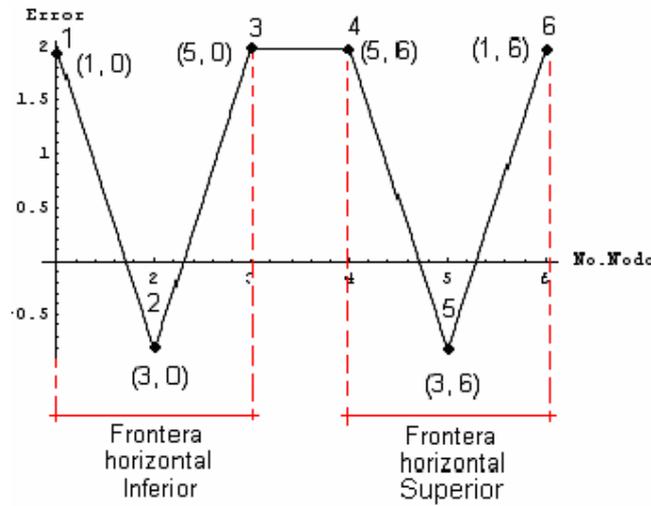


**Figura 4.10** Error en la temperatura para nodos en la frontera.



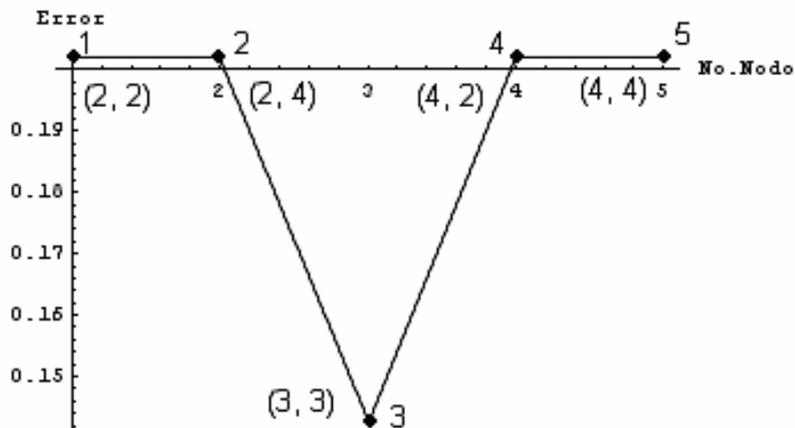
**Figura 4.11.** Error en la temperatura para nodos internos

La figura (4.11) muestra el error para los puntos internos y se obtiene de la misma manera, es decir, con la ecuación (4.9). Como podemos ver, el error de los nodos internos es menor que el error obtenido para los nodos en la frontera, y nuevamente se observa que el error mayor es el que se obtiene en las fronteras laterales.

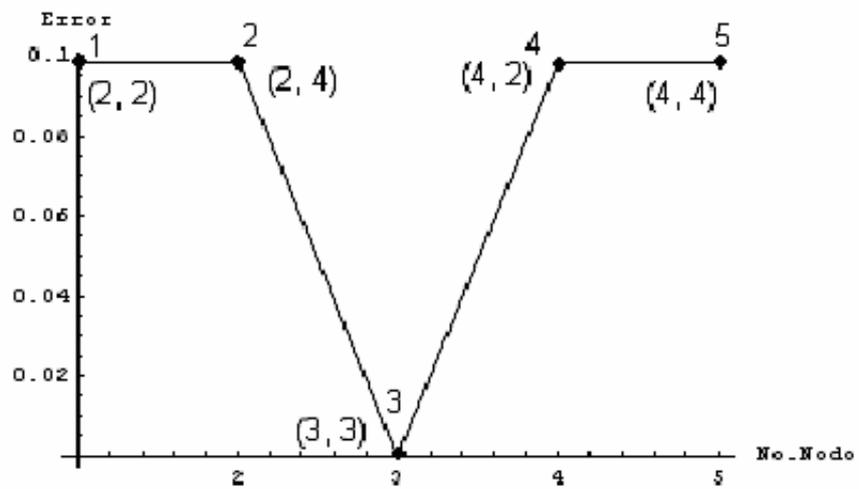


**Figura 4.12** Error en cálculo de flujo para los nodos de la frontera

El cálculo de los errores para el flujo se realizó de la misma manera; los resultados se muestran en la figura (4.12). También se observa que el mayor error sigue siendo en las fronteras laterales. Similarmente, en la figura (4.13) se observa que el error para el flujo en los nodos internos tiene un comportamiento similar al observado en los puntos en la frontera; esto es, el error con mayor magnitud se encuentra en los puntos cercanos a las fronteras en las que no está prescrito un valor de flujo. Finalmente, en la figura (4.14) observamos que el error en el flujo en  $Y$  tiene el mismo comportamiento que en los casos anteriores.



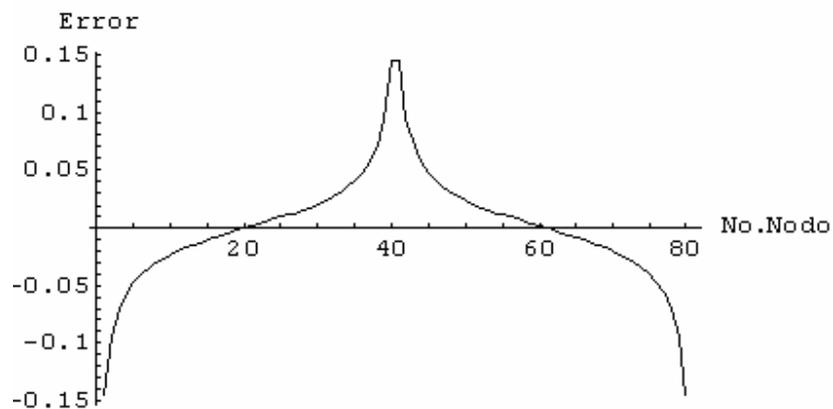
**Figura 4.13.** Gráfica de error de flujo en  $X$  de los nodos internos



**Figura 4.14** Gráfica de error de flujo en Y de los nodos internos

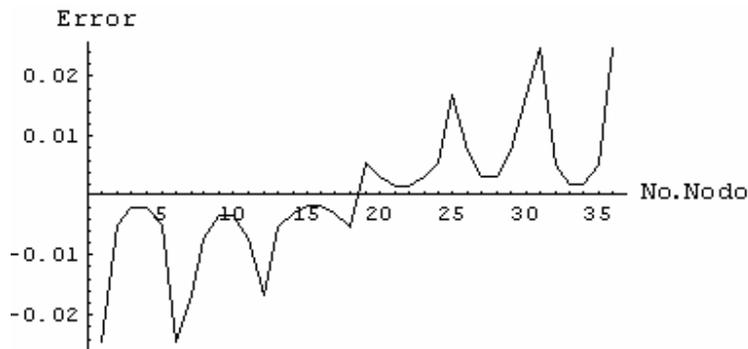
#### 4.4.1.1 Variación de errores en función del número de nodos en la frontera y puntos internos

Para observar si el error en la frontera y el de los nodos internos disminuye, se evaluaron los errores aumentando el número de nodos de la frontera de 12 a 160. Asimismo, se utilizaron 40 nodos por segmento y 36 puntos internos. Los resultados se muestran en las siguientes gráficas.



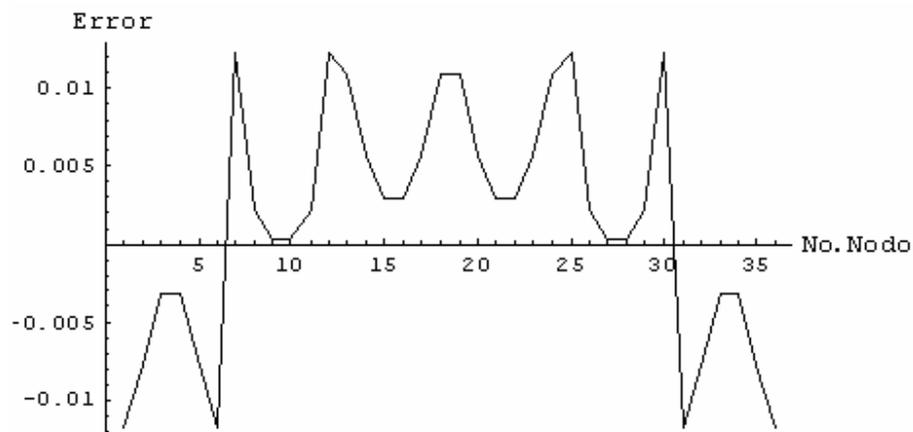
**Figura 4.15** Error de temperatura para los nodos en la frontera (40 nodos por segmento)

Al aumentar en número de nodos en la frontera a 160 nodos por segmento, se redujo el error de 1.5 a 0.15, como se observa en la figura (4.15). Al igual que en el caso anterior, donde hay más error es a los extremos de la frontera. Una evidencia más clara de la reducción en el error puede notarse si comparamos las gráficas (4.15) y (4.10).

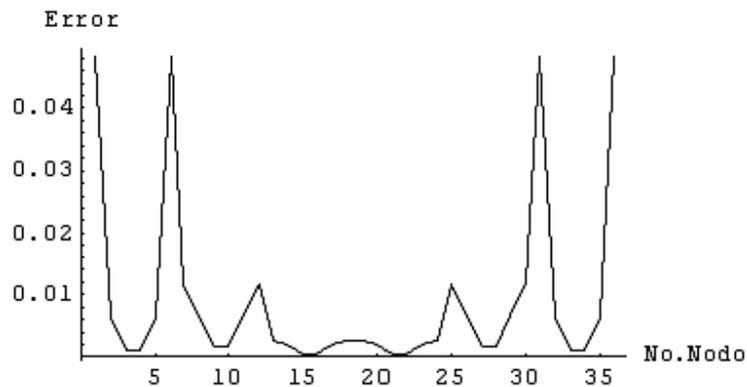


**Figura 4.16** Error de temperatura para los puntos internos

En la figura (4.16) se observa que el error en los nodos internos es mucho menor que en los casos analizados en la sección anterior. En la figura (4.17) también se observa que el error del flujo en  $X$  disminuye al aumentar el número de nodos, pero el error máximo sigue presentándose a los extremos de la frontera. De la figura (4.18) se observa que el error en el cálculo de flujo en  $Y$  se reduce en magnitud, pero mantiene un comportamiento similar al obtenido con los cálculos para 5 puntos internos.



**Figura 4.17** Error de Flujo en  $X$  para los Nodos Internos



**Figura 4.18** Error de Flujo en Y para los Nodos Internos

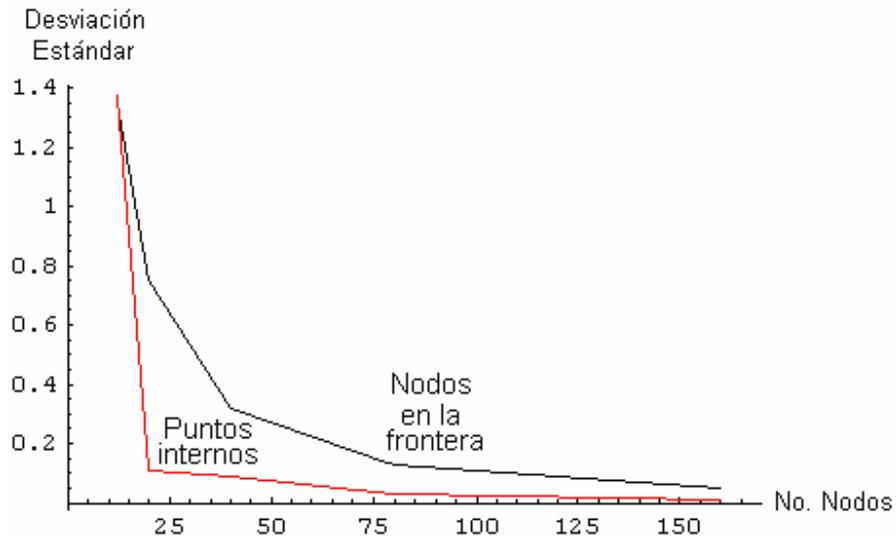
Con el análisis de las gráficas anteriores, podemos decir que entre mayor sea el número de nodos que se utilicen en la frontera, menor será el error en los cálculos. Sin embargo, se sigue observando que los errores con mayor magnitud son los que se encuentran a los extremos de las fronteras. La discusión de este comportamiento se presenta en la siguiente sección.

#### **4.4.1.2 Error en los nodos internos en función del número de nodos en la frontera**

Los efectos de aumentar el número de nodos en la frontera fueron evaluados con la desviación estándar. Ésta fue calculada de acuerdo con:

$$DE_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.12)$$

En la gráfica (4.18) se representa la desviación estándar para 12, 20, 40, 80, 160 nodos en la frontera, manteniendo el número de puntos interiores en 36. Los valores de la desviación estándar se muestran en la tabla (4.8).

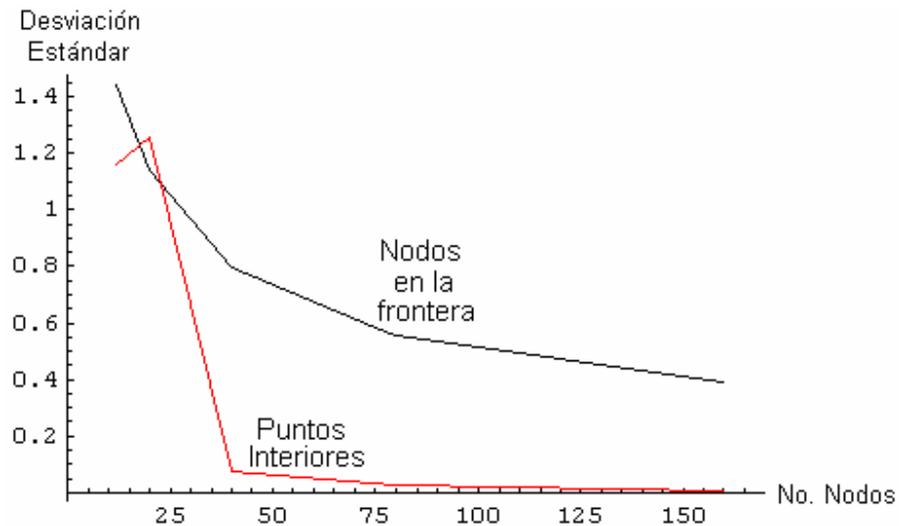


**Figura 4.18** Gráfica de desviación estándar de la temperatura en la frontera y nodos internos.

No. Nodos en la frontera	DE frontera	DE internos
12	1.34868	1.37418
20	0.753825	0.10702
40	0.317093	0.0914493
80	0.12658	0.0318082
160	0.048847	0.0108214

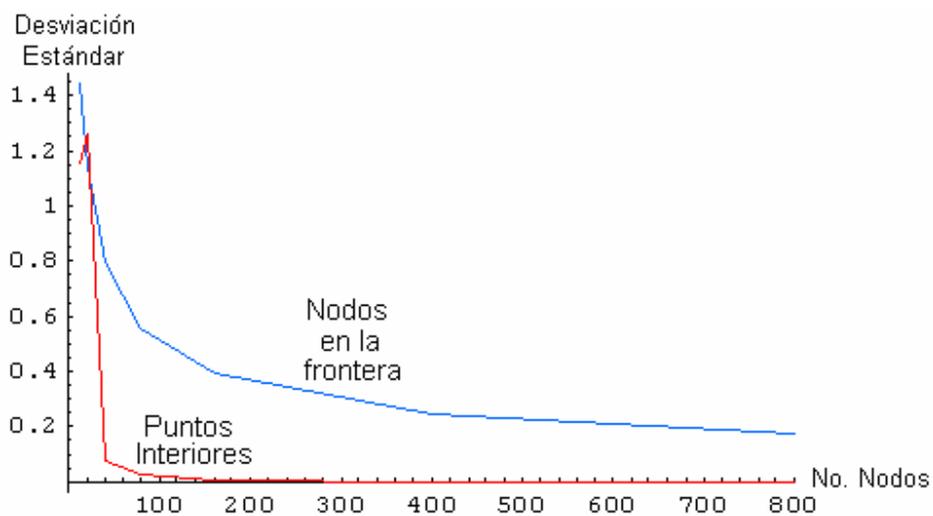
**Tabla 4.8** Valores de desviación estándar para varios números de nodos en la frontera

Como se muestra en la figura (4.18), los errores de la frontera son más grandes que los de los nodos internos; además, al aumentar el número de nodos, tanto en la frontera como en los nodos internos, el error disminuye. Un análisis similar se realizó para los cálculos de flujo. Los resultados para el flujo en la dirección  $X$  se muestran en la figura (4.19)



**Figura 4.19** Gráfica de desviación estándar de flujo en X en la frontera y nodos internos.

La tendencia del error puede verse más claramente en la figura (4.20). Esta gráfica se obtuvo con dos corridas más utilizando 400 y 800 nodos en la frontera. Como podemos ver, el error en la temperatura disminuye al aumentar el número de nodos. Un comportamiento similar se obtiene al graficar el error en el flujo en la dirección X.

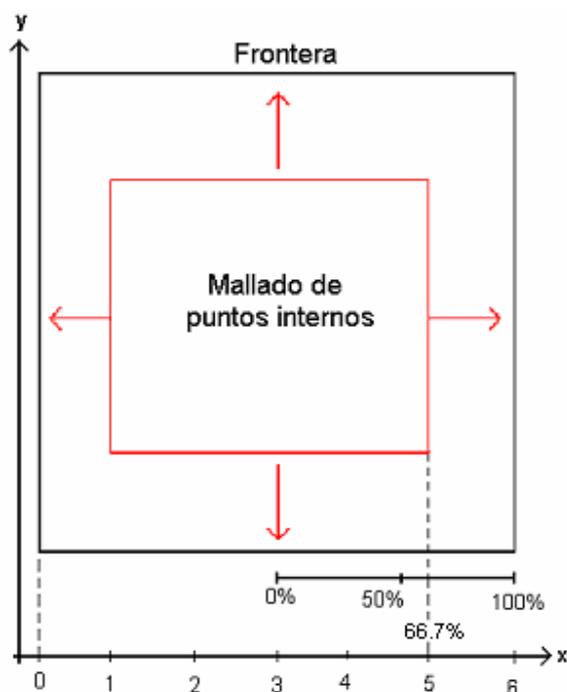


**Figura 4.20** Desviación estándar para temperaturas.

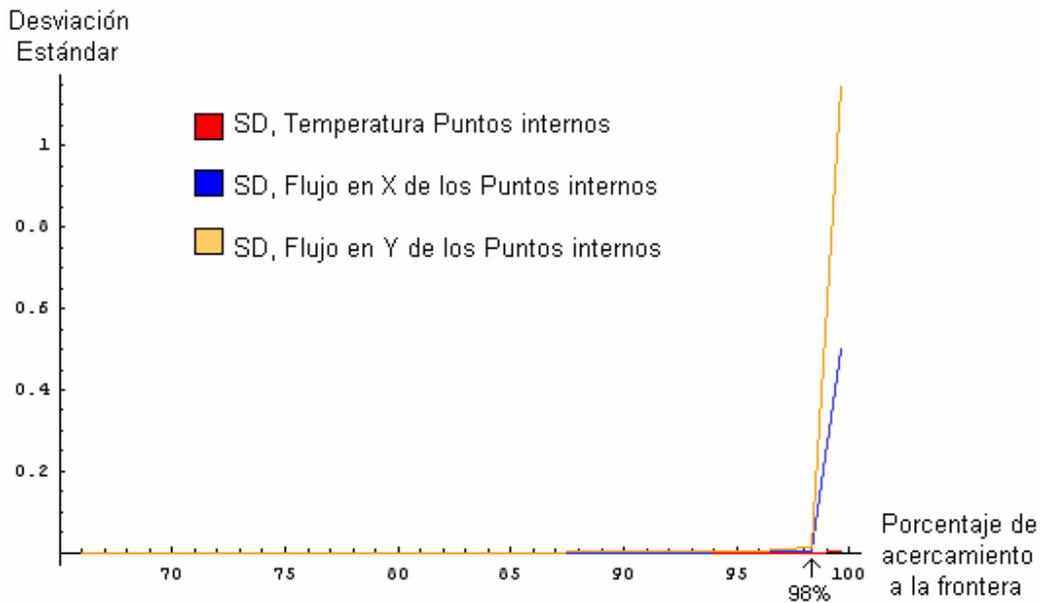
#### 4.4.1.3 Acercamiento de la malla de puntos internos a las fronteras

Como se explicó en el Capítulo 2, las soluciones para los nodos en la frontera y los puntos internos se calculan de manera diferente. Debido a esto, el error que se obtenga al acercar un punto interno hacia la frontera puede llegar a ser considerable. Para investigar este efecto, se realizaron varios cálculos de error, tanto de temperatura como de flujo en dirección  $x$  y para los puntos internos, variando la distancia entre los puntos y la frontera. Para esto, se propuso un mallado de  $n \times n$  puntos que se va acercando a la frontera como se muestra en la figura (4.21).

Se realizaron cálculos con 800 nodos en la frontera y 400 puntos internos. Los cálculos se realizaron a partir de un 66.7% de proximidad, como se muestra en la figura (4.21). Se graficaron la desviación estándar de temperatura y flujos en las direcciones  $x, y$ , como se muestra en la figura (4.22). Es evidente en la figura, que a partir de un acercamiento del 98%, los errores en los cálculos aumentan considerablemente. En principio, esto indica que para incluir nodos dentro de esta zona, las soluciones deberán calcularse de otra manera. Algunas propuestas para resolver este tipo de problemas se presentan en el siguiente capítulo.

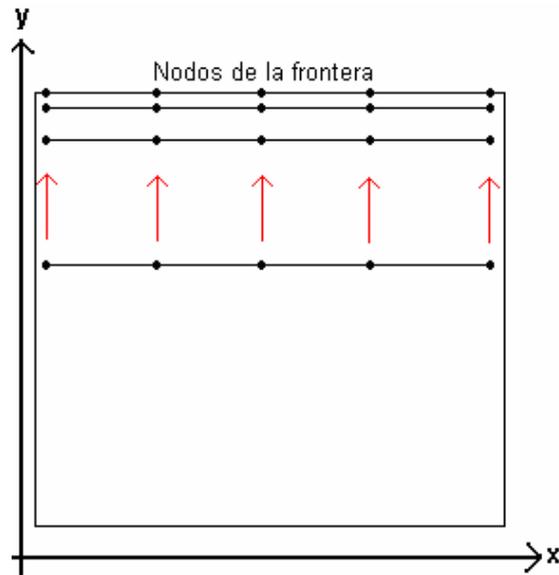


**Figura 4.21** Acercamiento de la malla a las fronteras para cálculos de error.

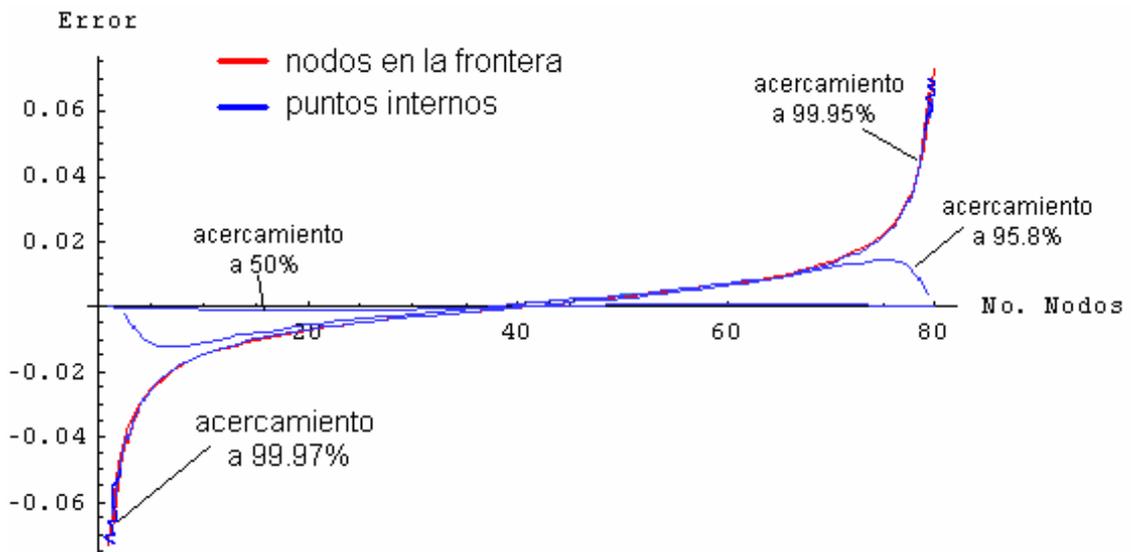


**Figura 4.22** Desviación estándar de la temperatura en los nodos interiores.

En los cálculos anteriores, los puntos internos fueron evaluados sin importar si coincidían con los nodos en la frontera. Intuitivamente, podríamos esperar que si un punto interno coincide con un nodo en la frontera, el error debería ser cuando mucho igual al error en la frontera. Para corroborar esto, se realizaron otros cálculos en los que se hicieron coincidir las coordenadas  $x$  de los nodos internos, con las coordenadas  $x$  de los nodos de la frontera, para distintos porcentajes de acercamiento, como se muestra en la figura 4.23. El error de temperatura bajo estas condiciones se evaluó haciendo coincidir 80 nodos de la frontera con 80 puntos internos, comenzando el acercamiento a la frontera desde un 50%. Los resultados de estos cálculos se muestran en la figura 4.24.

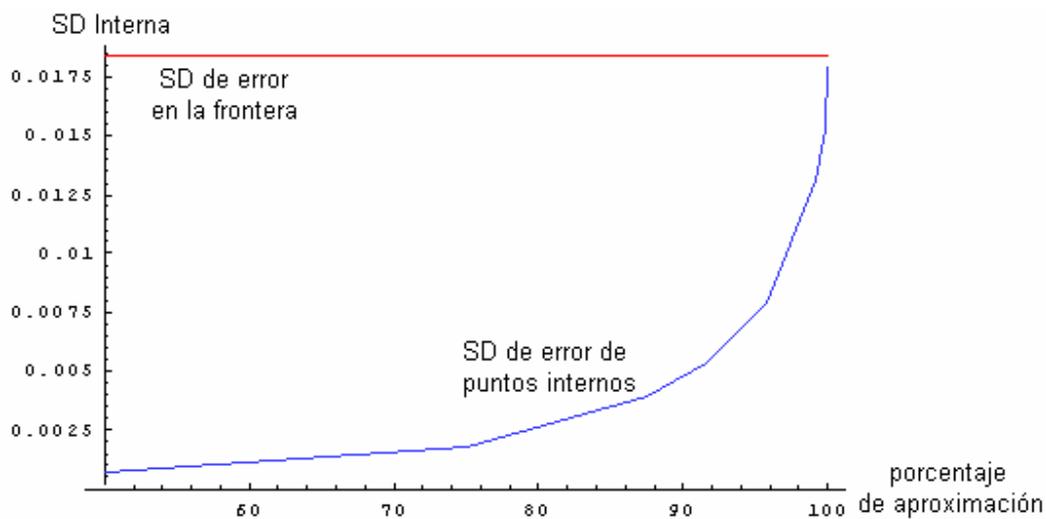


**Figura 4.23** Acercamiento de la línea de puntos internos hacia los nodos en la frontera



**Figura 4.24** Comparación de error en temperatura entre los puntos internos y los nodos de la frontera (acercamientos de 50% a 99.97%).

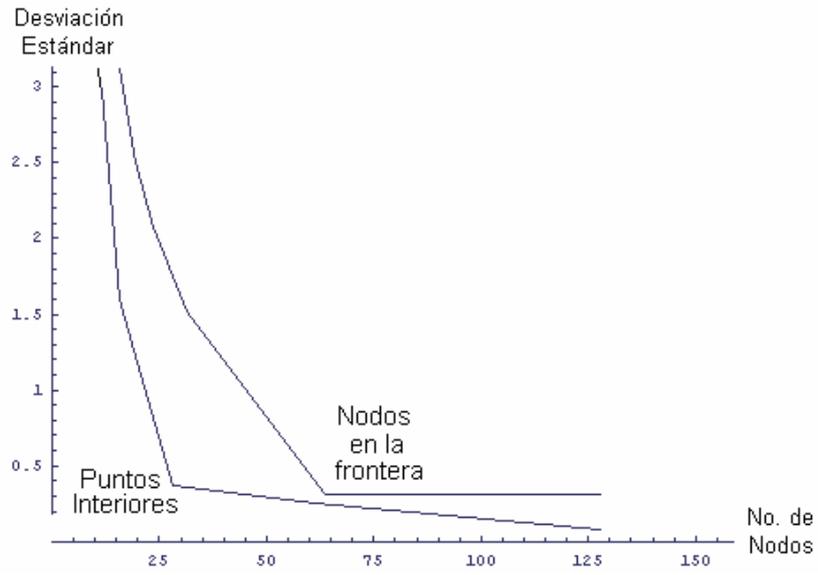
Como podemos ver en la figura (4.24), el error en los puntos internos efectivamente se acerca al error en los nodos de la frontera. Puede observarse que para acercamientos a partir de 99.95%, ambos errores coinciden. Un fenómeno interesante que también puede observarse en la figura es que, a partir de un acercamiento de 99.97%, se presentan oscilaciones en los extremos. Una evidencia más de que ambos errores tienden a igualarse se muestra en la figura 4.25, en la que se grafica la desviación estándar del error para puntos internos y nodos en la frontera.



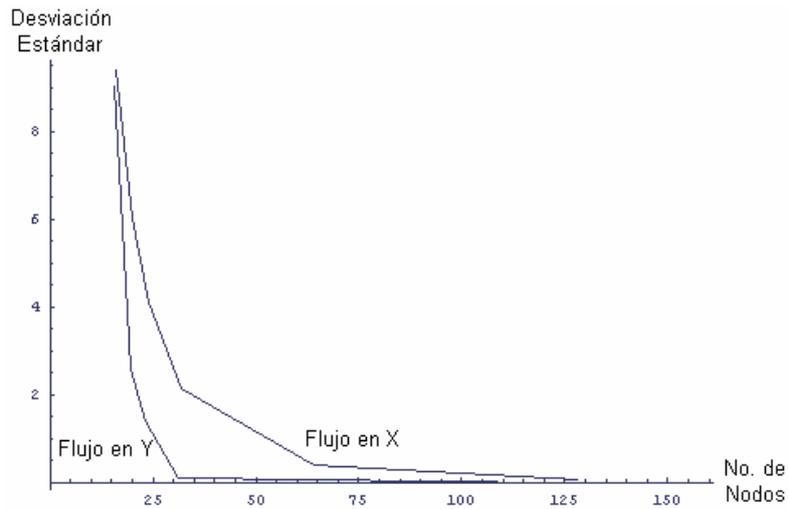
**Figura 4.25.** Desviación estándar para la temperatura al ir acercando la línea de nodos internos a la frontera.

#### 4.4.2 Flujo de calor en una región anular

Para el modelo de la región anular, se realizaron las mismas pruebas que en el caso de la placa rectangular. Los resultados se muestran en las figuras (4.26) y (4.27), y puede observarse que se presenta un comportamiento similar; es decir, al aumentar el número de nodos en la frontera, disminuye el error tanto de los puntos internos como de los nodos en la frontera.



**Figura 4.26.** Desviación estándar para la temperatura en la frontera y nodos internos



**Figura 4.28** Gráfica de desviación estándar para el flujo en X y Y de los nodos internos

#### 4.5 Bus de 3 barras conductoras

Para evaluar el desempeño del programa con un problema eléctrico se eligió modelar un bus de 3 barras, como el que se muestra en la figura (4.29). En este caso, el problema consiste en encontrar las líneas equipotenciales alrededor de las barras conductoras. A pesar de que a simple vista el problema puede parecer simple, la geometría de éste no permite obtener una solución analítica simple, por lo que generalmente se utilizan métodos numéricos para obtener una solución aproximada.

La solución numérica de este problema parte de considerar la simetría del bus, con esto podemos dividir el dominio como se muestra en la figura (4.29). Los parámetros a utilizar en el programa se muestran en la figura (4.30). Los datos de entrada se muestran en la tabla (4.9) y las condiciones de frontera son las siguientes:

- En las líneas de frontera ( $F$ ) el potencial es cero  $F = 0 V$ .
- En las líneas que representan las barras conductoras:

$$A = 100 V \quad B = -50 V \quad C = -50 V$$

Para los nodos internos se generó una malla de 141 x 141 nodos.

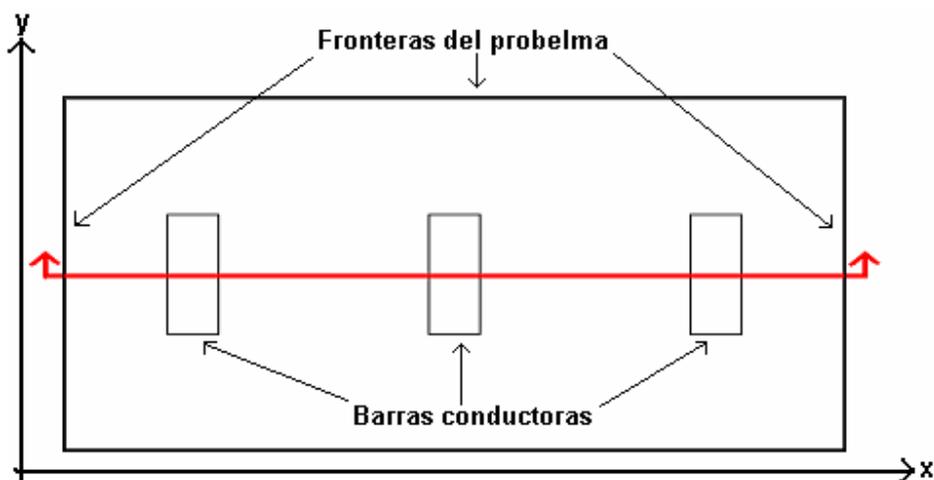
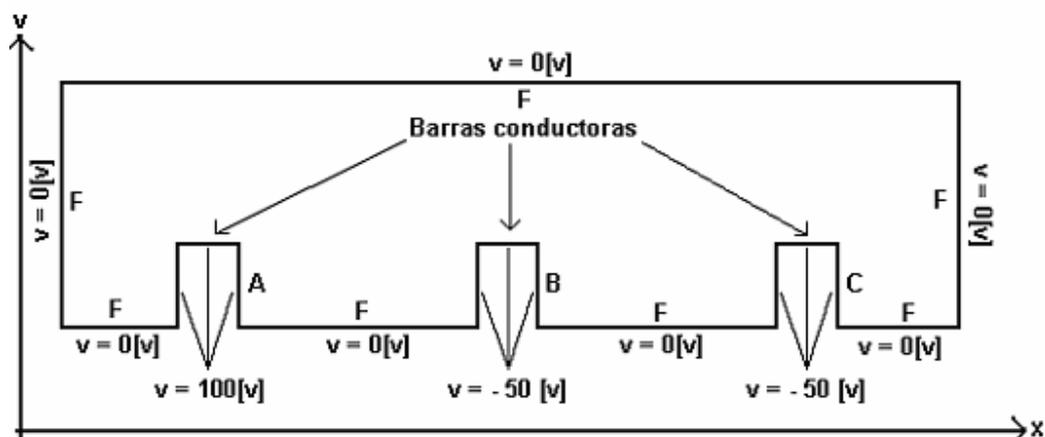


Figura 4.29 Representación gráfica del bus de 3 barras.



*Figura 4.30 Representación gráfica del problema y condiciones de frontera. Para efectos de cálculo, el valor de voltaje cero se considera como flujo cero.*

Segmentos	Vértices de los segmentos	Condición de frontera (Tipo, Valor)	Número de nodos deseados por segmento	Función de densidad	Tipo de figura
1	0, 0	1, 0	20	1	1
2	4.5, 0	0, 100	100	1	1
3	4.5, 1	0, 100	100	1	1
4	5.5, 1	0, 100	100	1	1
5	5.5, 0	1, 0	20	1	1
6	9.5, 0	0, -50	100	1	1
7	9.5, 1	0, -50	100	1	1
8	10.5, 1	0, -50	100	1	1
9	10.5, 0	1, 0	20	1	1
10	14.5, 0	0, -50	100	1	1
11	14.5, 1	0, -50	100	1	1
12	15.5, 1	0, -50	100	1	1
13	15.5, 0	1, 0	20	1	1
14	20, 0	1, 0	20	1	1
15	20, 4	1, 0	20	1	1
16	0, 4	1, 0	20	1	1

**Tabla 4.9** Datos de entrada al programa para el bus de 3 conductores

#### 4.5.1 Representación gráfica del problema y solución

En la figura (4.31) se muestra la gráfica del problema del bus de 3 conductores dada por el programa desarrollado en *Mathematica*. En las figuras (4.32) y (4.33), se muestra el resultado gráfico para una superficie  $(x, y, V)$ , donde 'x, y' es el nodo analizado y 'V' es el valor de potencial

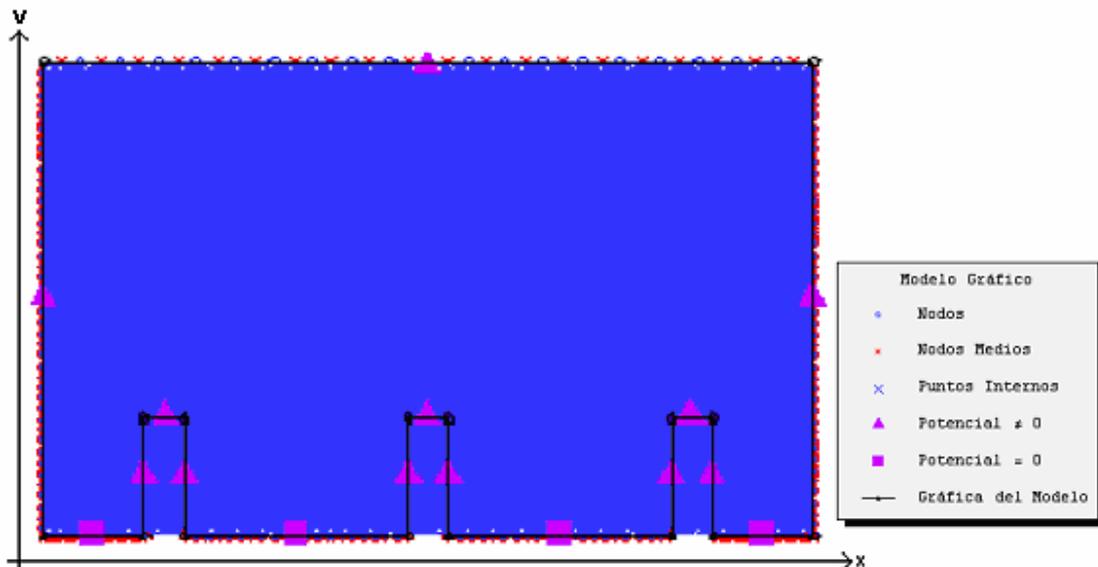


Figura 4.31 Representación gráfica del problema resuelto por Mathematica

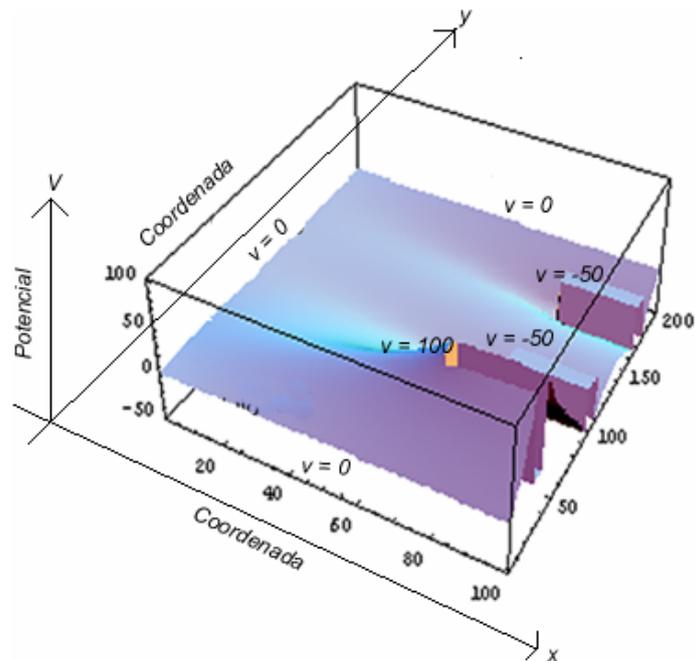
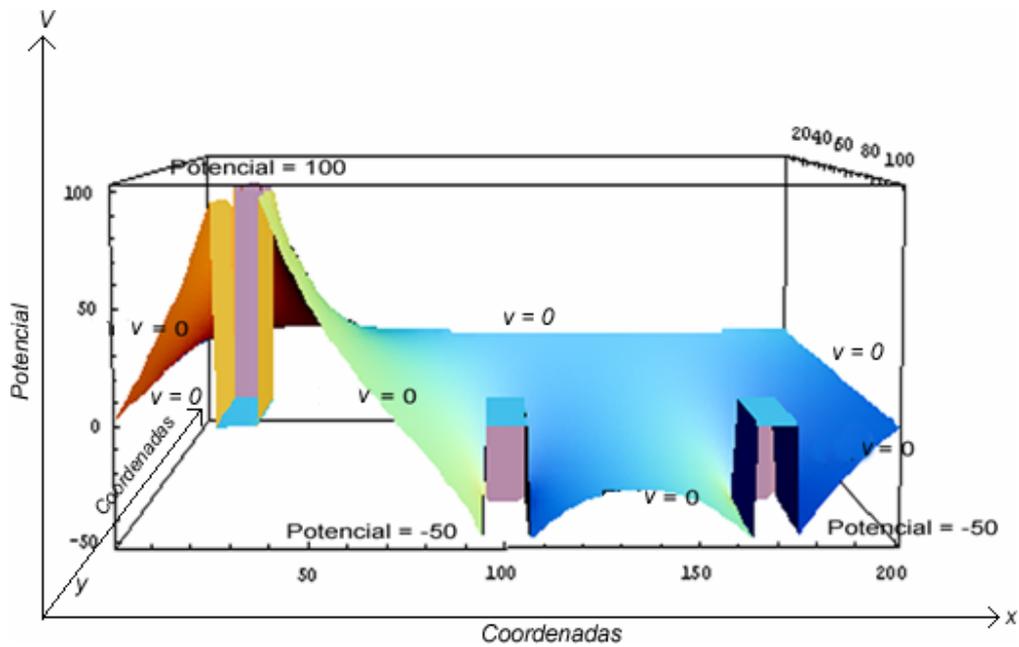
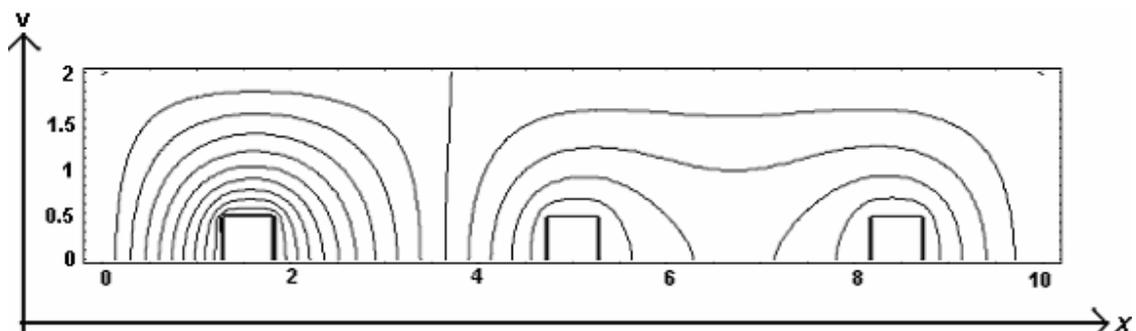


Figura 4.32 Representación gráfica de la superficie  $x, y, V$

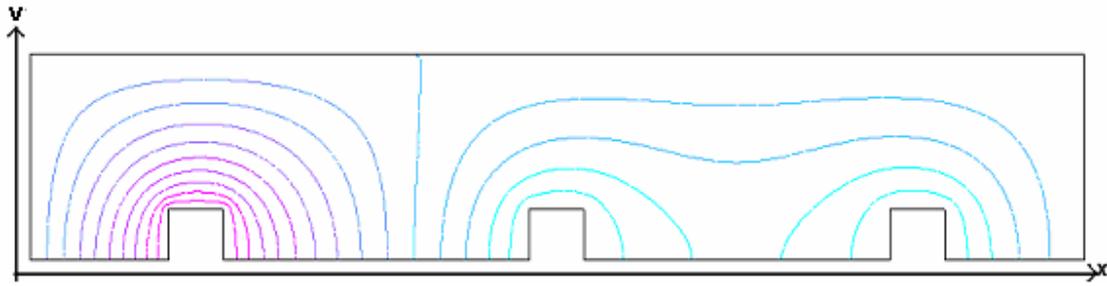


**Figura 4.33** Representación gráfica de la superficie  $x, y, V$

En la figura (4.34), se muestra el resultado gráfico del problema, donde se pueden ver las líneas equipotenciales con valores de contorno de:  $(10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, -10, -20, -30, -40)V$  alrededor de las barras. Como comparación, la figura 4.35 muestra la solución del mismo problema obtenida con Femlab. La similitud entre ambas soluciones es evidente.



**Figura 4.34** Representación gráfica de la solución para el bus de 3 barras



**Figura 4.35.** Solución gráfica obtenida en FemLab

Como podemos observar en el análisis de resultados y gráficas de error, el programa arroja resultados aceptables con márgenes de error que pueden reducirse al aumentar el número de nodos en la frontera. La solución de un problema relativamente complicado, como el del bus de tres barras, es muy similar a los resultados que se obtienen con paquetes desarrollados con base en el FEM. Esta primera versión del BEM implementado en *Mathematica* parece funcionar de manera adecuada, dentro de las limitaciones que se expusieron en las secciones previas. La discusión de mejoras al programa y reducción en los errores de cálculo se presenta en el siguiente capítulo.

## **CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO**

El objetivo central de este trabajo fue desarrollar un programa para evaluar el desempeño del BEM en *Mathematica* y utilizarlo para resolver problemas de potencial. Los problemas analizados en el capítulo anterior se eligieron por que son relativamente simples de resolver. Adicionalmente, la elección de *Mathematica* para implementar el BEM se basó principalmente en las funciones ya definidas en este paquete.

A continuación se presentan algunos puntos importantes con los que puede concluirse este trabajo, y también se exponen algunos de los problemas encontrados mientras se realizaron las corridas del programa. Finalmente, presentamos algunas propuestas para realizar aplicaciones prácticas que involucren los conceptos tratados en este trabajo.

### **5.1 Conclusiones**

Se evaluaron dos tipos de métodos numéricos, el FEM y el BEM, para resolver problemas de potencial. Al comparar estos dos métodos numéricos se encontraron dos ventajas principales del BEM sobre el FEM: la primera y más importante fue que el BEM disminuye la dimensión del problema en una unidad, y la otra es que sólo necesita ser discretizada la frontera. La desventaja del BEM es que sólo puede resolver problemas para los que se conozca la solución fundamental. A pesar de que no se desarrollaron ejemplos con condiciones de frontera en el infinito, la posibilidad de realizar cálculos de este tipo con el BEM es claramente una opción atractiva para utilizar este método. Problemas como la distribución de campos eléctricos en la vecindad de una torre de transmisión eléctrica, podrían ser analizados con este método.

El análisis del error, calculado tanto para el potencial como el flujo, nos permite concluir que el parámetro más importante es el número de nodos en la frontera. Un análisis comparativo del error de los nodos en la frontera mostró que éste es mayor al error en los nodos internos. Si se quiere disminuir el error, tanto para los nodos en la frontera como los nodos internos, se debe aumentar únicamente el número de nodos en la frontera.

El utilizar el programa *Mathematica* facilitó mucho la programación y desarrollo del programa, debido a que consta con las herramientas necesarias para resolver las ecuaciones que utiliza el método de elemento de frontera. También nos ayudó en el tiempo de programación, ya que si se hubiera hecho en un lenguaje como C o Fortran, se hubieran tenido que desarrollar herramientas matemáticas adicionales, como por ejemplo, rutinas de integración numérica y otras. *Mathematica* tiene también la ventaja de ofrecer una extensa capacidad gráfica para la visualización de los resultados de los diferentes cálculos obtenidos.

Para los fines del tiempo de procesamiento del cálculo de resultados, éste depende del número de puntos que se estén analizando y también depende de la configuración del hardware de la computadora. Esto se verificó realizando cálculos similares en equipos diferentes.

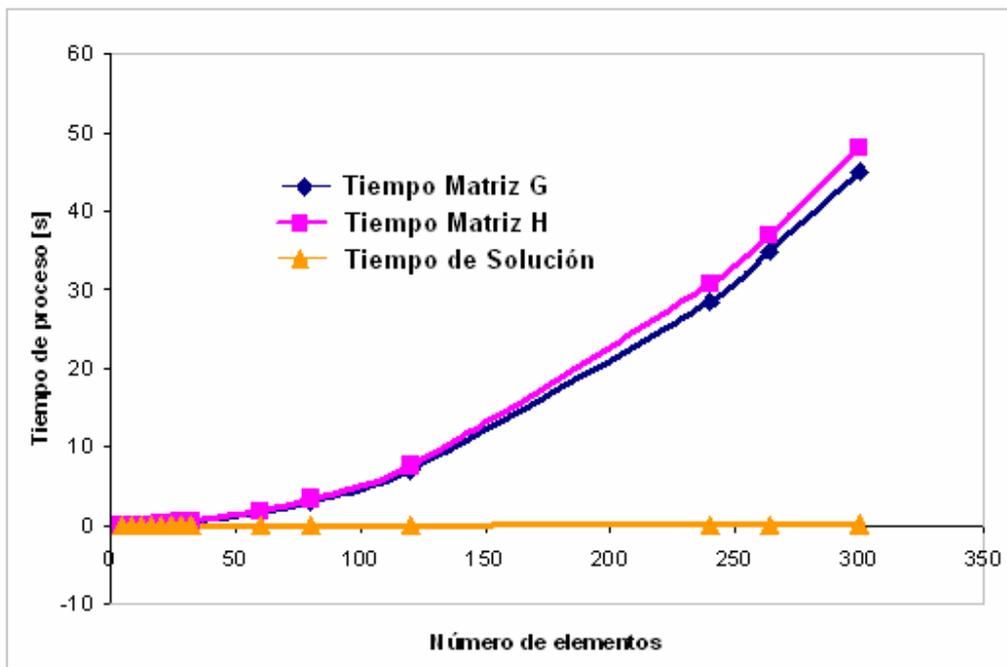
## ***5.2 Trabajo a futuro***

Este trabajo fue inspirado en la idea de desarrollar un programa capaz de resolver cualquier problema físico de potencial. Hasta ahora, el programa está limitado a resolver problemas con elementos rectos y condiciones de frontera constantes. Una vez observados los resultados, puede verse que es necesario mejorar ciertas características del programa, como el utilizar la ecuación para fronteras no suaves.

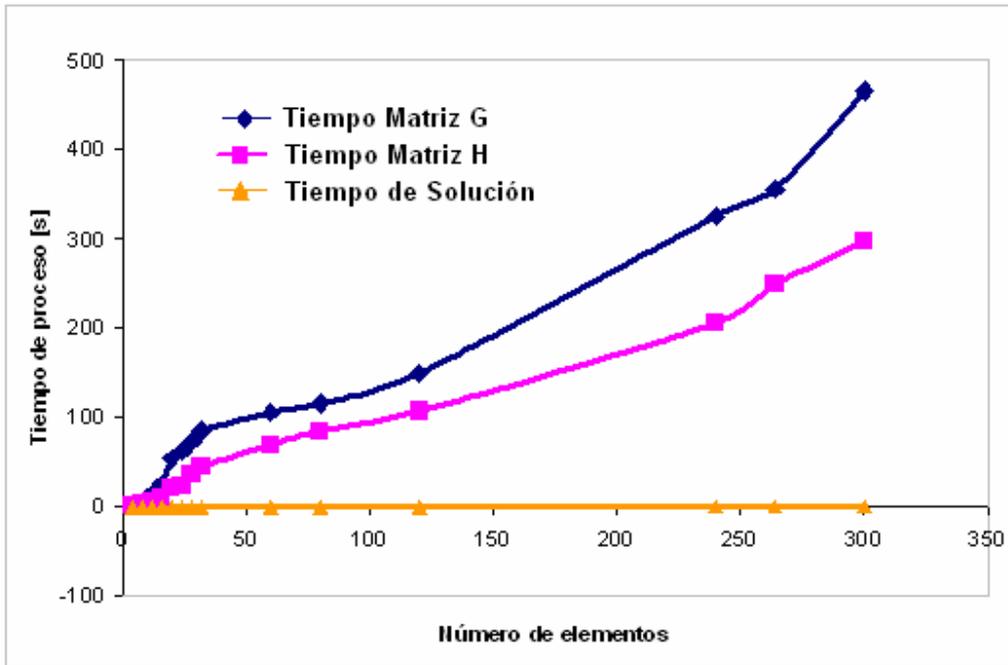
Para hacer el programa más completo y poder resolver modelos físicos más complicados, se deben estudiar y programar los casos para cuando se tienen elementos variables, elementos discontinuos, elementos curvos y condiciones frontera en el infinito. Al igual que en los ejemplos desarrollados en este trabajo, *Mathematica* ayudaría en la programación de estos casos, debido al gran número de funciones ya definidas.

Otra limitante del programa desarrollado son los tiempos de solución; dado que *Mathematica* no es un lenguaje compilado, los cálculos numéricos toman más tiempo. Para disminuir el tiempo de procesamiento, el programa se podría paralelizar utilizando programas ya desarrollados para este fin (como por ejemplo, *Grid Mathematica*). La

posibilidad de reducir el tiempo de los cálculos mediante procesamiento en paralelo puede verse en el siguiente ejemplo desarrollado con el programa. Se utilizaron dos métodos de integración: la integral numérica y la integral analítica, y se observó que la integral numérica tiene un menor tiempo de proceso. También se observó que el cálculo de las integrales para cada uno de los elementos de las matrices  $H$  y  $G$  requieren mayor tiempo de proceso que el necesario para obtener la solución del sistema  $AX = F$ . Esto puede verse en las figuras (5.1) y (5.2). Los cálculos de los elementos matriciales deberían ser realizados en paralelo, por ejemplo, podemos pensar que cada renglón de una matriz podría evaluarse simultáneamente en varias computadoras. Este tipo de pruebas y evaluaciones deberán realizarse en trabajos futuros, y así explotar al máximo las ventajas ofrecidas por el BEM y las herramientas contenidas en *Mathematica*.



**Figura 5.1.** Cálculo de tiempos de la integral numérica



*Figura 5.2. Cálculo de tiempos de la integral analítica.*

### *Referencias y Bibliografía*

- [1] Florkowska Barbara, Analysis of electric field distribution around the High-Voltage overhead transmission lines with an ADSS fiber-optic cable, IEEE Transactions on power delivery, Vol. 19 No.3, July 2004.
- [2] Prem Kishore Kythe, An introduction to boundary element methods, CRC, 1<sup>st</sup> edition, 1995, Boca Raton.
- [3] Beer Gernot, Programming the boundary element method an introduction for engineers, John Wiley and Sons Ltd, 1<sup>st</sup> edition, 2001, Chi Chester-England.
- [4] Spivak Michael, Cálculo infinitesimal, Reverté, 2<sup>nd</sup> edition, 1992.
- [5] Karel Rektorys, Variational methods in mathematic science and engineering, Kluwer Academic Publishers, 2<sup>nd</sup> edition, 1980, Dordrecht.
- [6] Professor Hunter Peter, FEM/BEM notes, Department of engineering science the University of Auckland, 2002, New Zealand.
- [7] Stephen Wolfram, The Mathematica book, Wolfram Media, 5<sup>th</sup> edition, 2003, Champaign- Illinois.

## APÉNDICE A

Las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) se desarrollan matemáticamente de la siguiente manera.

### 1. Para la ecuación (3.1) sabemos de la ecuación (2.32) que:

$$G_{ii} = \int_{C_j} u^* ds \quad (\text{A.1})$$

Donde:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left( \frac{1}{r} \right) ds \quad (\text{A.2})$$

al sustituir la ecuación (A.2) en (A.1) obtenemos:

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{C_j} \text{Log} \left( \frac{1}{r} \right) ds \quad (\text{A.3})$$

Esta ecuación se aplica a los nodos medios, que se encuentre dentro de su propio elemento.

De la figura (A.1) decimos que  $L_i = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$ , es decir, es la longitud del elemento  $i$ .

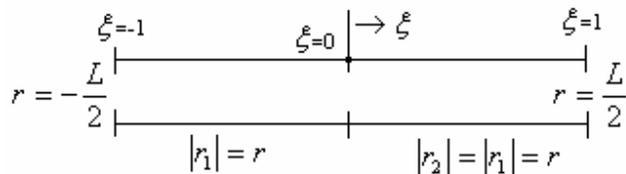


Figura A.1

Donde:

$$r = \frac{L_i}{2} \xi \quad (\text{A.4})$$

Se sabe que:

$$\begin{aligned} r &= 0 \text{ en } \xi = 0, \\ r &= \pm \frac{L_i}{2} \text{ en } \xi = \pm 1, \end{aligned}$$

y además existe una singularidad en  $r = \xi = 0$  para

$$\text{Log}\left(\frac{1}{r}\right),$$

Sustituyendo la ecuación (A.4) en (A.3) obtenemos:

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \text{Log}\left[\frac{2}{L_i \xi}\right] ds \quad (\text{A.5})$$

Donde:

$$ds = dr \Rightarrow dr = \frac{L_i}{2} d\xi,$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (A.5) obtenemos:

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \text{Log}\left[\frac{2}{L_i \xi}\right] \frac{L_i}{2} d\xi \quad (\text{A.6})$$

Pero como se está tomando solamente la mitad de  $L_i$ , ya que  $\xi$  va de (-1,1), se multiplica por dos, la ecuación (A.4) queda:

$$G_{ii} = \frac{2}{2\pi} \frac{L_i}{2} \int_0^1 \text{Log} \left[ \frac{2}{L_i \xi} \right] d\xi$$

$$G_{ii} = \frac{L_i}{2\pi} \int_0^1 \text{Log} \left[ \frac{2}{L_i \xi} \right] d\xi$$

$$G_{ii} = \frac{L_i}{2\pi} \left[ \xi \text{Log} \left( \frac{2}{L_i} \right) - \xi \text{Log} \xi + \xi \right]_0^1$$

$$G_{ii} = \frac{L_i}{2\pi} \left[ \text{Log} \left( \frac{2}{L_i} \right) + 1 \right]$$

$$G_{ii} = \frac{L_i}{2\pi} \left[ 1 - \text{Log} \left( \frac{L_i}{2} \right) \right] \tag{A.7}$$

**2. Para la ecuación (3.2) sabemos de la ecuación (2.32) que:**

$$G_{ij} = \int_{C_j} u^* ds \tag{A.8}$$

al sustituir la ecuación (A.2) en (A.8) obtenemos:

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{C_j} \text{Log} \left( \frac{1}{r} \right) ds \tag{A.9}$$

Para mapear cualquier elemento  $i$  a una recta de  $(-1, 1)$  se utiliza la técnica basada en la fórmula numérica de la cuadratura de Gauss, esto se hace, debido a que si se evalúa la integral  $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y) ds$ , puede llegar a ser muy difícil o imposible, dependiendo del integrando  $F(x, y)$ . Para lograr la transformación se utiliza:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_0}{2} + \frac{x_1 - x_0}{2} \xi \\ dx &= \frac{x_1 - x_0}{2} d\xi \\ y &= \frac{y_1 + y_0}{2} + \frac{y_1 - y_0}{2} \xi \\ dy &= \frac{y_1 - y_0}{2} d\xi \end{aligned} \tag{A.10}$$

Además, la longitud del elemento  $i$  es:

$$r = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \tag{A.11}$$

y la longitud de arco es:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{A.12}$$

Sustituyendo  $dx$  y  $dy$  de la ecuación (A.10) en (A.12) obtenemos:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 d\xi^2 + \left(\frac{y_1 - y_0}{2}\right)^2 d\xi^2} \\ ds &= \sqrt{\left(\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_0}{2}\right)^2\right) d\xi^2} \\ ds &= \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_0}{2}\right)^2} d\xi \\ ds &= \sqrt{\frac{1}{4}[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]} d\xi \end{aligned}$$

$$ds = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} d\xi \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo (A.11) y (A.13) en la ecuación (A.9) obtenemos:

$$G_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \text{Log} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} \right] * \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} d\xi$$

$$G_{ij} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \text{Log} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} \right] d\xi$$

$$G_{ij} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{2} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \text{Log} \left[ \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \right] d\xi \quad (\text{A.14})$$

**3. Para la ecuación (3.3) sabemos de la ecuación (2.32) que:**

$$H_{ij} = \int_{\tilde{C}_j} q^* ds \quad (\text{A.15})$$

Donde:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u^*}{\partial x} n_x + \frac{\partial u^*}{\partial y} n_y \quad (\text{A.16})$$

al sustituir la ecuación (A.2) en la ecuación (A.16) obtenemos:

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{1}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} \right)}{\partial x} n_x + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{1}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} \right)}{\partial y} n_y$$

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \left[ \left( -\frac{1}{2} * \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} * 2(x_i - x) * -1 \right) n_x + \left( -\frac{1}{2} * \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} * 2(y_i - y) * -1 \right) n_y \right]$$

$$q^* = -\frac{1}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} * (x - x_i) \right) n_x + \left( \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} * (y - y_i) \right) n_y \right]$$

$$q^* = -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x - x_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} n_x + \frac{y - y_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} n_y \right] \quad (\text{A.17})$$

al sustituir la ecuación (A.17) y (A.13) en (A.15) se obtiene:

$$H_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{x - x_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} n_x + \frac{y - y_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} n_y \right] \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} d\xi$$

$$H_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \left[ n_x \int_{-1}^1 \frac{x - x_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} d\xi + n_y \int_{-1}^1 \frac{y - y_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} d\xi \right] \quad (\text{A.18})$$

## APÉNDICE B

Las ecuaciones (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7) se desarrollan matemáticamente de la siguiente manera.

### 1. Ecuación (3.4).

Una parte de la ecuación (2.36a) es:

$$\int_{c_j} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} ds \quad (\text{B.1})$$

Al sustituir la ecuación (A.2) y (A.13) en (B.1) obtenemos:

$$\int_{c_j} \frac{\partial \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x_i} \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} d\xi \quad (\text{B.2})$$

Sustituimos la ecuación (A.11) en (B.2) se obtiene:

$$\int_{c_j} \frac{\partial \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left( \frac{1}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} \right)}{\partial x_i} \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} d\xi \quad (\text{B.3})$$

Simplificando la ecuación (B.3) obtenemos:

$$\int_{c_j} \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} 2(x_i - x) \right) \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} d\xi$$

$$\int_{c_j} \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{x_i - x}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \right) \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} d\xi$$

$$\frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{4\pi} \left[ - \int_{c_j} \frac{x_i - x}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} d\xi \right] \quad (\text{B.4})$$

## 2. Ecuación (3.5):

Una parte de la educación (2.36a) es:

$$\int_{c_j} \frac{\partial q^*}{\partial x_i} ds \quad (\text{B.5})$$

Sustituimos (A.13) y (A.17) en (B.5) se obtiene:

$$\int_{c_j} \frac{\partial - \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x - x_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} n_x + \frac{y - y_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} n_y \right]}{\partial x_i} \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} d\xi \quad (\text{B.6})$$

Resolviendo por separado la derivada parcial queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^*}{\partial x_i} &= \frac{\partial - \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x - x_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} n_x + \frac{y - y_i}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} n_y \right]}{\partial x_i} \\ \frac{\partial q^*}{\partial x_i} &= - \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{-(x_i - x)^2 - (y_i - y)^2 - (x - x_i) 2(x - x_i)(-1)}{\left( (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \right)^2} n_x \right] + \left[ \frac{0 - (y - y_i) 2(x_i - x)}{\left( (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \right)^2} n_y \right] \right) \\ \frac{\partial q^*}{\partial x_i} &= - \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{-x_i^2 + 2x_i x - x^2 - (y_i - y)^2 + 2(x^2 - x_i x - x_i x + x_i^2)}{\left( (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \right)^2} n_x \right] + \left[ \frac{2(x_i - x)(y_i - y)}{\left( (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \right)^2} n_y \right] \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x_i} = -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x_i^2 - 2x_i x + x^2 - (y_i - y)^2}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} n_x \right] + \left[ \frac{2(x_i - x)(y_i - y)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} n_y \right]$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} n_x \right] + \left[ \frac{-2(x_i - x)(y_i - y)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} n_y \right] \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo la ecuación (B.7) en (B.6) obtenemos:

$$\int_{C_j} \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} n_x \right] + \left[ \frac{-2(x_i - x)(y_i - y)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} n_y \right] \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} d\xi$$

$$\frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{4\pi} \left[ n_x \int_{C_j} \frac{-(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} d\xi + n_y \int_{C_j} \frac{-2(x_i - x)(y_i - y)}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^2} d\xi \right] \quad (\text{B.8})$$

Las ecuaciones (3.6) y (3.7) se resuelven de la misma forma que las anteriores, lo único que cambia, es que se deriva respecto a  $y_i$ .

## APÉNDICE C

### Código de programación

#### *Datos de entrada*

```
entrada2 = {{{{10, 0},4 ,1 ,{1 , 0}, 1}, {{30, 0},4 , 1, {0, 400},  
0}, {{0, 30},4 ,1 ,{1, 0}, 1}, {{0, 10},4 ,1 ,{0, 1000}, 0}}
```

*entrada2* es la lista de datos de entrada, que el usuario introduce por cada segmento de la frontera.

#### *Generador de puntos internos*

```
r3 = {{20, 45}, {10, 70}, {5, 5}, 0}
```

*r3* es la lista que el usuario introduce, para la obtención de los nodos internos.

```
tipoposicion = Take[r3, {4}]
```

*tipoposicion* es la lista que toma de *r3* el último elemento, con el fin de saber si se van a generar puntos internos en un arreglo rectangular ó circular.

```
rangointr = Range[r3[[1, 1]] -  $\frac{r3[[2, 1]]}{2}$  ,  
r3[[1, 1]] +  $\frac{r3[[2, 1]]}{2}$  ,  $\frac{r3[[2, 1]]}{r3[[3, 1]] - 1}$  ]
```

*Rangointr* es la lista donde se obtienen las coordenadas de r para los puntos internos en el caso circular, y las coordenadas de X para el caso rectangular, a partir de *r3*.

```

rangoint $\theta$  = Range[r3[[1, 2]] -  $\frac{r3[[2, 2]]}{2}$ ,
r3[[1, 2]] +  $\frac{r3[[2, 2]]}{2}$ ,  $\frac{r3[[2, 2]]}{r3[[3, 2]] - 1}$ ]

```

$rangoint^\theta$  es la lista donde se obtienen las coordenadas de  $\theta$  para los puntos internos en el caso circular, y las coordenadas de Y para el caso rectangular.

```

puntosinternosR $\theta$ . = Flatten[Table[{rangointr[[i]],
rangointr[[j]]}, {i, 1, Length[rangointr]}, {j, 1,
Length[rangointr]}], 1]

```

$puntosinternosR^\theta$  es la lista donde se obtienen los puntos internos en coordenadas polares, dando el radio r y su ángulo  $\theta$ , solo para el caso circular.

```

puntosinteriores =
If[tipoposicion == {0},
Chop[
Flatten[
Table[{rangointr[[i]] * Cos[ $\frac{\pi}{180}$  rangoint $\theta$ [[j]]],
rangointr[[i]] * Sin[ $\frac{\pi}{180}$  rangoint $\theta$ [[j]]]},
{i, 1, Length[rangointr]},
{j, 1, Length[rangoint $\theta$ ]}], 1]],
Flatten[Table[{rangointr[[i]], rangoint $\theta$ [[j]]},
{i, 1, Length[rangointr]},
{j, 1, Length[rangoint $\theta$ ]}], 1]]

```

$puntosinteriores$  obtiene la lista de puntos internos a partir de la condición  $tipoposicion$  dependiendo del caso que se tenga; para el caso circular genera una malla circular en coordenadas rectangulares (x, y), para el caso rectangular genera una malla rectangular en coordenadas (x, y).

## *Cálculo de las listas de los nodos, nodos medios y elementos*

```
listadevertices = First[Transpose[entrada2]]
```

*listadevertices* obtiene la lista de vertices a partir de *entrada2*.

```
tipofigura = Flatten[Take[Transpose[entrada2], {5}]]
```

*tipofigura* obtiene la lista del tipo de figura a partir de *entrada2*.

```
n = Take[Transpose[entrada2], {2}]/Flatten
```

*n* obtiene la lista del número de nodos a partir de *entrada2*.

```
funcdensidad = Take[Transpose[entrada2], {3}]/Flatten
```

*funcdensidad* obtiene la lista de  $\rho$  a partir de *entrada2*.

```
seg[c_] := Partition[Append[c,First[c]], 2, 1];  
segmentos = seg[listadevertices]
```

La variable *segmentos* obtiene una lista de los puntos extremos de cada segmento de la frontera, a partir de la función *seg*.

```
xlin[s_, u_, v_] = u+(v-u)s;  
ylin[s_, k_, l_] = k+(l-k)s;
```

Las funciones *xlin* y *ylin* son las ecuaciones de una recta paramétrica que mapean cada elemento a la recta horizontal ( $0 \leq s \leq 1$ ). Donde *s* es el parámetro, *u* = *x* inicial, *v* = *x* final, *k* = *y* inicial, *l* = *y* final, de cada elemento de la frontera, que se utilizan en la función *coornodos*.

$$ns[\rho_, s0_, s1_, s_] := \frac{\int_{s0}^s \rho \, ds}{\int_{s0}^{s1} \rho \, ds}$$

La función *ns* obtiene el valor del área normalizada de la función de densidad hasta la abscisa *s*.

```
ecu=Map[ns[#,0,1,s]&,funcdensidad]
```

La variable *ecu* obtiene una lista de funciones en *s* de áreas normalizadas.

```
listasdeincrementos=Table[s/.FindRoot[ecu[[j]]□i/n[[j]],{s,.5}],{j,1,Length[ecu]},{i,0,n[[j]]-1}]/Chop
```

*listasdeincrementos* obtiene una lista de *s* acumuladas que obedecen la función de densidad de nodos para cada elemento

```
coornodos[{{u_,k_},{v_,l_}},list_,renglon_]:=Table[{xlin[list[[renglon,j]],u,v],ylin[list[[renglon,j]],k,l]},{j,1,Length[list[[renglon]]]}
```

La función *coornodos* obtiene una lista de las coordenadas (*x,y*) de los nodos para un elemento dado (en renglón).

```
nodos[segmen_] :=
Do[If[tipofigura[[z]] == 1,
lis_z = coornodos[segmen[[z]], listasdeincrementos, z],
lis_z = Map[func2invers, coornodos[Map[func2, segmen[[z]]],
listasdeincrementos, z]], {z, Length[segmen]}
```

*nodos* obtiene una lista de listas de las coordenadas de los nodos, a partir de la función *coornodos*.

```
func2[{x_, y_}] :=
  { $\sqrt{x^2 + y^2}$ , If[ArcTan[ $\frac{y}{x}$ ] === Indeterminate, 90,  $\frac{180}{\pi}$  ArcTan[ $\frac{y}{x}$ ]]}
```

*func2* transforma los vértices de la lista *entrada2* a la forma polar.

```
func2invers[{r_,  $\theta$ _}] := {r Cos[ $\frac{\pi}{180} \theta$ ], r Sin[ $\frac{\pi}{180} \theta$ ]}
```

*func2invers* transforma los vértices de los segmentos a la forma cartesiana.

```
nodos[segmentos];
listadenodos = Flatten[Table[lisi, {i, Length[segmentos]}], 1]
```

*listadenodos* es una lista de coordenadas de todos los nodos en la frontera.

```
listadesegmentos = Partition[Append[listadenodos, First[listadenodos]], 2, 1]
```

*listadeelemntos* obtiene una lista de pares de coordenadas, estos pares de coordenadas son los puntos extremos de cada elemento.

```
listadenodosmedios =
  Map[{ $\frac{\#[[1, 1]] + \#[[2, 1]]}{2}$ ,  $\frac{\#[[1, 2]] + \#[[2, 2]]}{2}$ } &,
  listadesegmentos]
```

*listadenodosmedios* obtiene una lista de coordenadas, estas coordenadas son los puntos medios que se encuentran en cada elemento.

### ***Obtención de las condiciones de frontera a partir de los datos de entrada***

```
cf=Part[Transpose[entrada2],4]
```

*cf* es una lista de los tipos y de los valores de las condiciones de frontera en cada segmento.

```
listacf=Flatten[Table[cf[[m]],{m,1,Length[n]},{j,1,Part[n,m]}],1]
```

*listacf* es una lista de las condiciones de frontera en la que se repite el tipo y el valor tantas veces como nodos deseados se requieran.

### ***Cálculo de la matriz H, y G, obtención de los resultados de temperatura y flujo tanto internos como externos***

```
cerca[{xi_, yi_}, {{x0_, y0_}, {x1_, y1_}}] :=  
With[{long =  $\sqrt{(x1 - x0)^2 + (y1 - y0)^2}$ , centro =  $\left\{\frac{x0 + x1}{2}, \frac{y0 + y1}{2}\right\}$ },  
If[ $\sqrt{(xi - \text{First}[\text{centro}]^2 + (yi - \text{Last}[\text{centro}]^2) < \text{long} 10^{-6}$ ,  
True, False] ];
```

La función *cerca* nos provee un criterio de exclusión para no realizar cálculos de un segmento sobre su propio punto medio

```

iustar5[{xi_, yi_}, {{x0_, y0_}, {x1_, y1_}}] :=
  With[{long =  $\sqrt{(x1 - x0)^2 + (y1 - y0)^2}$ },
    N[ $\frac{\text{long} (1 - \text{Log}[\frac{\text{long}}{2}])}{2 \pi}$ ] /; cerca[{xi, yi}, {{x0, y0}, {x1, y1}}]];
iustar5[{xi_, yi_}, {{x0_, y0_}, {x1_, y1_}}] :=
  Module[{ $\Delta x = x1 - x0$ ,  $\Delta y = y1 - y0$ ,  $xb = \frac{x0 + x1}{2}$ ,  $yb = \frac{y0 + y1}{2}$ ,
    Sex, y,  $\xi$ , len}, len =  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ;  $x = xb + \frac{\Delta x \xi}{2}$ ;  $y = yb + \frac{\Delta y \xi}{2}$ ;
   $\frac{\text{len}}{2} \frac{1}{4 \pi}$  NIntegrate[Log[ $\frac{1}{(xi - x)^2 + (yi - y)^2}$ ], { $\xi$ , -1, 1},
  AccuracyGoal -> .1];

```

La función *iustar5* depende del criterio de la función *cerca*, si ésta es verdadera entonces calcula los valores de temperatura a partir de la ecuación:

$$\frac{\sqrt{(x1 - x0)^2 + (y1 - y0)^2} \left( 1 - \text{Log} \left[ \frac{\sqrt{(x1 - x0)^2 + (y1 - y0)^2}}{2} \right] \right)}{2\pi}$$

Debido a que el punto medio se encuentra dentro del segmento, pero si es falso entonces los calcula a partir de la ecuación

$$\frac{\sqrt{(x1 - x0)^2 + (y1 - y0)^2}}{2} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \text{Log} \left[ \frac{1}{\left( xi - \frac{x0+x1}{2} + \frac{x1-x0\xi}{2} \right)^2 + \left( yi - \frac{y0+y1}{2} + \frac{y1-y0\xi}{2} \right)^2} \right] d\xi$$

Ya que el punto medio no se encuentra dentro del segmento.

```

gmatrix[f_, cc_, e_] := Outer[f, cc, e, 1];
g54=gmatrix[iustar5, listadenodosmedios, listadesegmentos];g54//Mat
rixForm

```

La matriz *G* se obtiene a partir de la variable *g54*, por medio de dos funciones, la función *gmatrix* y la función *iustar5*, que dependen de la lista de nodos medios y de la lista de elementos.

```

iqstar5[{xi_, yi_}, {{x0_, y0_}, {x1_, y1_}}] :=
  0 /; cerca[{xi, yi}, {{x0, y0}, {x1, y1}}];
iqstar5[{xi_, yi_}, {{x0_, y0_}, {x1_, y1_}}] :=
  Module[{Δx = x1 - x0, Δy = y1 - y0, xb =  $\frac{x0 + x1}{2}$ , yb =  $\frac{y0 + y1}{2}$ ,
    len, x, y, ξ, nx, ny, qx, qy}, len =  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ; nx =  $\frac{\Delta y}{len}$ ;
  ny =  $-\frac{\Delta x}{len}$ ; x = xb +  $\frac{\Delta x \xi}{2}$ ; y = yb +  $\frac{\Delta y \xi}{2}$ ;
  qx = If[nx ≠ 0, NIntegrate[ $\frac{-xi + x}{(xi - x)^2 + (yi - y)^2}$ , {ξ, -1, 1},
    AccuracyGoal → 4], 0];
  qy = If[ny ≠ 0, NIntegrate[ $\frac{-yi + y}{(xi - x)^2 + (yi - y)^2}$ , {ξ, -1, 1},
    AccuracyGoal → 4], 0]; - $\frac{len}{4 \pi}$  (nx qx + ny qy)];

```

La función *iqstar5* también depende del criterio de la función *cerca*, si ésta es verdadera entonces otorga el valor de cero; debido a que el punto medio se encuentra dentro del segmento, pero si es falso entonces los calcula a partir de dos ecuaciones debido a que tipo de dirección tenga el flujo positivo o negativo:

- (1) Si  $n_x = \frac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}$  entonces se calcula con la ecuación  $\int_{-1}^1 \left[ \frac{-xi + x}{(xi - x)^2 + (yi - y)^2} \right] d\xi$  ;
- (2) Si  $n_y = \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}$  entonces se calcula con la ecuación  $\int_{-1}^1 \left[ \frac{-yi + y}{(xi - x)^2 + (yi - y)^2} \right] d\xi$

Ya que el punto medio no se encuentra dentro del segmento.

```

hmatrix[f_, nod_, e_] := With[{m = Outer[f, nod, e, 1]}, m + DiagonalMatrix[-
Map[Apply[Plus, #] &, m]]];
h54 = hmatrix[iqstar5, listadenodosmedios, listadesegmentos]; h54 // MatrixForm

```

La matriz  $H$  se obtiene a partir de la variable  $h54$ , por medio de dos funciones, la función  $hmatrix$  y la función  $iqstar5$ , que dependen de la lista de nodos medios y de la lista de elementos.

```

mezclados[hm_, gm_, cf_] :=
Module[{tipo = First[Transpose[cf]], valor = Last[Transpose[cf]],
hmt = Transpose[hm], gmt = Transpose[gm], pu, pq, a, f, v, ft, res, uconoc,
udes, qconoc, qdes, ues, qes},
pu = Position[tipo, 0] // Flatten;
pq = Position[tipo, 1] // Flatten;
a = Transpose[Flatten[{Map[Part[hmt, #] &, pq], -
Map[Part[gmt, #] &, pu]}, 1]]; f = Dot[ft, v];
ft = Transpose[Flatten[{Map[Part[gmt, #] &, pq], -
Map[Part[hmt, #] &, pu]}, 1]];
v = Flatten[{Map[Part[valor, #] &, pq], Map[Part[valor, #] &, pu]}];
res = LinearSolve[a, f];
uconoc = Map[Part[valor, #] &, pu]; udes = Take[res, Length[pq]];
qconoc = Map[Part[valor, #] &, pq];
qdes = Take[res, -Length[pu]];
ues = Join[Transpose[{pu, uconoc}],
Transpose[{pq, udes}]] // Sort // Transpose // Last;
qes = Join[Transpose[{pq, qconoc}],
Transpose[{pu, qdes}]] // Sort // Transpose // Last; {ues, qes}];

```

La función  $mezclados$  mezcla los elementos de las dos matrices  $H$  y  $G$  con los valores iniciales conocidos de frontera tanto de potencial como de flujo, para crear el arreglo matricial  $AX = f$ .

`resultados=mezclados[h54,g54,listacf]`

*Resultados*, obtiene los valores de temperatura  $u$  y de flujo  $q$  tanto los que ya se conocen en la frontera como los que no son conocidos esto lo hace a través de la función *mezclados*.

```

iustar5ux[{xi_, yi_}, {{x0_, y0_}, {x1_, y1_}}] :=
Module[{Δx = x1 - x0, Δy = y1 - y0, xb =  $\frac{x0 + x1}{2}$ , yb =  $\frac{y0 + y1}{2}$ ,
x, y, ξ, len}, len =  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ; x = xb +  $\frac{\Delta x \xi}{2}$ ; y = yb +  $\frac{\Delta y \xi}{2}$ ;
 $\frac{len}{2} \frac{1}{4 \pi}$ 
(-NIntegrate[ $\frac{2 (xi - x)}{(xi - x)^2 + (yi - y)^2}$ , {ξ, -1, 1},
AccuracyGoal → 0.1])];
iustar5uy[{xi_, yi_}, {{x0_, y0_}, {x1_, y1_}}] :=
Module[{Δx = x1 - x0, Δy = y1 - y0, xb =  $\frac{x0 + x1}{2}$ , yb =  $\frac{y0 + y1}{2}$ ,
x, y, ξ, len}, len =  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ; x = xb +  $\frac{\Delta x \xi}{2}$ ; y = yb +  $\frac{\Delta y \xi}{2}$ ;
 $\frac{len}{2} \frac{1}{4 \pi}$ 
(-NIntegrate[ $\frac{2 (yi - y)}{(xi - x)^2 + (yi - y)^2}$ , {ξ, -1, 1},
AccuracyGoal → 0.1])];

```

La función *iustar5ux* y *iustar5uy* se utilizan para poder calcular la temperatura para cualquier punto interior.

```

iqstar5qx[{xi_, yi_], {x0_, y0_}, {x1_, y1_}] :=
Module[{Δx = x1 - x0, Δy = y1 - y0, xb =  $\frac{x0 + x1}{2}$ , yb =  $\frac{y0 + y1}{2}$ ,
len, x, y, ξ, nx, ny, qx, qy}, len =  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ; nx =  $\frac{\Delta y}{len}$ ;
ny =  $-\frac{\Delta x}{len}$ ; x = xb +  $\frac{\Delta x \xi}{2}$ ; y = yb +  $\frac{\Delta y \xi}{2}$ ;
qx = If[nx ≠ 0, NIntegrate[ $\frac{-(xi - x)^2 + (yi - y)^2}{((xi - x)^2 + (yi - y)^2)^2}$ , {ξ, -1, 1},
AccuracyGoal → 0.1], 0];
qy = If[ny ≠ 0, NIntegrate[ $\frac{-2 (xi - x) (yi - y)}{((xi - x)^2 + (yi - y)^2)^2}$ , {ξ, -1, 1},
AccuracyGoal → 0.1], 0];  $\frac{len}{4 \pi} (nx qx + ny qy)$ ];

```

La función *iqstar5qx* se utilizan para poder calcular el flujo interno en la componente *x* para cualquier punto interno.

La función *iqstar5qy* se utilizan para poder calcular el flujo interno en la componente *y* para cualquier punto interno.

```

fncint[{x_, y_, vec_, int_, elem_] := Dot[vec, Map[int[{x, y], #1] &, elem]]

```

Esta función realiza el producto punto para dos escalares, es decir, realiza el producto de  $q_j G_{ij}$  y de  $u_j \hat{H}_{ij}$ .

```

uint[{x_, y_], uq_, iustar_, iqstar_, elem_] := fncint[{x, y], Last[uq], iustar, elem] - fncint[{x, y], First[uq], iqstar, elem];

```

La función *uint* utiliza la función *fncint* para realizar la resta entre los valores obtenidos de  $\sum_{j=1}^N q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij}$ , y así obtener los valores numéricos de potencial para cada punto interno.

```
uinterior=Map[uint[#1,resultados,iustar5,iqstar5,listadesegmentos  
&,puntosinteriores]
```

*uinterior* nos entrega el resultado numérico de las temperaturas internas de cada punto interior utilizando la función *uint*

```
qxint[{x_,y_},uq_,iustar5ux_,iqstar5qx_,elem_]:=fncint[{x,y},Last  
[uq],iustar5ux,elem]-fncint[{x,y},First[uq],iqstar5qx,elem];
```

La función *qxint* es la ecuación que calcula el flujo interno en la componente x, para cada punto interno, utilizando la función *fncint*

```
qinteriorX=Map[qxint[#1,resultados,iustar5ux,iqstar5qx,listadeseg  
mentos]&,puntosinteriores]
```

*qinteriorX* nos entrega el resultado numérico de los flujos sobre la componente x para cada punto interno utilizando la función *qxint*

```
qyint[{x_,y_},uq_,iustar5uy_,iqstar5qy_,elem_]:=fncint[{x,y},Last  
[uq],iustar5uy,elem]-fncint[{x,y},First[uq],iqstar5qy,elem];
```

La función *qyint* es la ecuación que calcula el flujo interno en la componente y, para cada punto interno, utilizando la función *fncint*

```
qinteriorY=Map[qyint[#1,resultados,iustar5uy,iqstar5qy,listadeseg  
mentos]&,puntosinteriores]
```

*qinteriorY* nos entrega el resultado numérico de los flujos sobre la componente Y, para cada punto interno, utilizando la función *qyint*

## **Tablas numéricas de los datos obtenidos de temperatura y flujo**

**Resultados Fron**  
**uinterior**  
**qinteriorX**  
**qinteriorY**

De esta forma se da la orden para poder desplegar los resultados:

- *Resultados Fron*, despliega los resultados de la temperatura y flujo X y Y, de los puntos en la frontera.
- *uinterior*, despliega los resultados numéricos de la temperatura, de los puntos internos.
- *qinteriorX*, despliega los resultados numéricos del flujo en X, de los puntos internos.
- *qinteriorY*, despliega los resultados numéricos del flujo en y, de los puntos internos.

## **Representación gráfica del problema**

```
listaagregadadevertices=Append[listadenodos,First[listadenodos]]
```

*listaagregadadevertices* agrega al final de la lista el primer elemento.

```
listadepuntosmedios =  
Map[{ $\frac{\#[[1, 1]] + \#[[2, 1]]}{2}$ ,  $\frac{\#[[1, 2]] + \#[[2, 2]]}{2}$ } &,   
Partition[Append[listadenodos, First[listadenodos]], 2, 1]]
```

*listadepuntosmedios* como su nombre nos dice, nos da los puntos medios de la lista de vértices.

```
tipo=First[Transpose[listacf]]
```

Lo utilizamos para diferenciar el tipo de condición de frontera que tenemos, ya sea de temperatura o de flujo.

```
posu=Position[tipo,0]
```

```
posq=Position[tipo,1]
```

*posu* diferencia a la temperatura a través del cero, *posq* diferencia al flujo a través del uno.

```
listadepuntosmediosU=Flatten[Table[listadepuntosmedios[[posu[[i]]],{i,Length[posu]}],1]
```

Nos da cuales son los puntos medios de los segmentos de temperatura.

```
listadepuntosmediosQ=Flatten[Table[listadepuntosmedios[[posq[[i]]],{i,Length[posq]}],1]
```

Nos da cuales son los puntos medios de los segmentos de flujo.

```

<<Graphics`MultipleListPlot`
modelo =
MultipleListPlot[listadenodos,listadenodosmedios,puntosinteriores
,listadepuntosmediosU, listadepuntosmediosQ,
listaagregadadevertices,
SymbolShape→{MakeSymbol[RegularPolygon[5,1.5]],
MakeSymbol[{Line[{{1.5,1.5},{-1.5,-1.5}}], Line[{{-
1.5,1.5},{1.5,-1.5}}]}], MakeSymbol[{Line[{{3,3},{-3,-
3}}],Line[{{-3,3},{3,-3}}]}]}, PlotSymbol[Box,4],
PlotSymbol[Triangle,6]},
SymbolStyle→{Hue[.7],Hue[0],Hue[0.7],Hue[.8],Hue[.8],
Automatic}, PlotJoined→{False,False,False,False,False,True},
Axes→False, Background→RGBColor[0.972503`,0.972503`,1.`],
PlotLegend→{"Nodos","Nodos Medios","Puntos
Internos","Temperatura","Flujo","Grafica del Modelo"},
LegendPosition→{1,-0.5}, LegendTextSpace→3,
LegendLabel→"ModeloGrafico", LegendLabelSpace→1,
LegendOrientation→Vertical, LegendBackground→GrayLevel[.8],
LegendShadow→{.05,-.05}, LegendSize→{.5,.5},
Background→GrayLevel[.8], PlotRange→All, AspectRatio→Automatic]

```

La función *modelo* se utiliza para poder dibujar las gráficas de diferentes listas de datos, también nos ayuda a identificar el tipo de dato de cada lista, poniéndole algún símbolo. En este caso se comienza dibujando la lista de nodos, que se representan por medio de un círculo. Después se dibuja la lista de nodos medios, que se representan por una x minúscula. Posteriormente llamamos la lista de puntos interiores, que se representan con una X mayúscula. Finalmente llamamos la lista de puntos medios, donde se representa por medio de un cuadrado los elementos de temperatura y por medio de un triángulo los elementos de flujo.

Como resultado se obtiene la Gráfica del problema como se muestra en la figura (C.1)

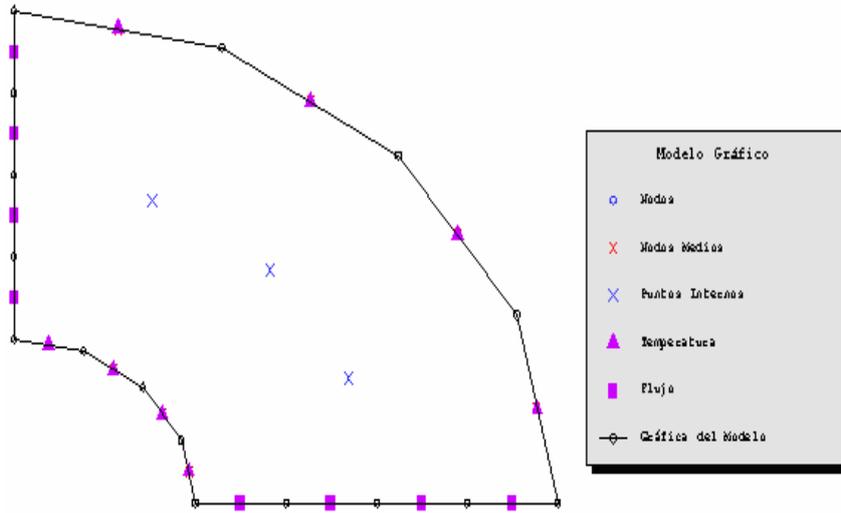


Figura (C.1)