



Universidad Nacional  
Autónoma de  
México

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA**

**“GENERACIÓN DE VORTICIDAD MEDIANTE  
FUERZAS MAGNÉTICAS”**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

PRESENTA:

**ALDO FIGUEROA LARA**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA**



2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

Agradezco enormemente a la Universidad Nacional Autónoma de México, y en particular al Centro de Investigación en Energía donde me brindaron todas las facilidades para realizar este trabajo.

A los revisores, sus críticas y comentarios ayudaron en gran medida a la mejora de esta tesis. Dr. Solorio, gracias por la ayuda para la realización de la maestría en el CIE.

Al Dr. Eduardo Ramos y en especial al Dr. Sergio Cuevas, su tiempo y paciencia son invaluable.

Esta obra no hubiera sido posible sin el apoyo económico otorgado por el CONACyT.

Agradezco al ya viejo amigo en las buenas y en las malas Alberto, y a todos los nuevos amigos, hicieron que la travesía de la maestría fuera más divertida, Carlos, Amilcar, Luis, Beatriz, Ulises 1 y 2, David, Fernando, Iván, Juan, Orlando, Gabriela. Sin olvidar a la amiga de siempre Adriana, gracias por tu apoyo.

IV

.

*Dedicado a MI FAMILIA y a LEA, por su comprensión, esfuerzo y afecto para conmigo.*

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Formulación del problema</b>	<b>9</b>
2.1. Ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos . . . . .	9
2.2. Ecuaciones del campo electromagnético . . . . .	10
2.3. Ecuaciones de la MHD . . . . .	13
2.4. Adimensionalización . . . . .	14
2.5. Aproximación 2D . . . . .	17
<b>3. Solución analítica para números de Reynolds pequeños</b>	<b>21</b>
3.1. Campo magnético aplicado . . . . .	22
3.2. Condiciones de frontera y condición inicial . . . . .	23
3.3. Solución analítica . . . . .	24
3.3.1. Solución a orden cero . . . . .	24
3.3.2. Solución a primer orden . . . . .	25
3.3.3. Solución a segundo orden . . . . .	29
3.4. Resultados . . . . .	29
<b>4. Solución numérica del modelo bidimensional</b>	<b>39</b>
4.1. Campo magnético aplicado . . . . .	39
4.2. Condiciones de frontera y condición inicial . . . . .	41
4.3. Implementación numérica . . . . .	42
4.4. Resolución de malla, paso en el tiempo y localización del imán . .	44
4.5. Resultados . . . . .	44
4.5.1. Comparación con el modelo analítico . . . . .	44
4.5.2. Efecto del número de Reynolds . . . . .	50
4.5.3. Efecto del número de Hartmann . . . . .	62

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
<b>5. Modelo numérico cuasi-bidimensional</b>	<b>73</b>
5.1. Determinación de la función $f$ . . . . .	77
5.2. Ecuaciones promediadas . . . . .	79
5.3. Resultados . . . . .	81
<b>Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>87</b>
<b>Referencias</b>	<b>89</b>
<b>Anexo</b>	<b>93</b>

# Resumen

En este trabajo se presenta un estudio sobre el flujo dipolar generado a través de la interacción electromagnética de una corriente eléctrica independiente del tiempo y el espacio y un campo magnético no uniforme e independiente del tiempo en una delgada capa de fluido conductor. En el Capítulo 1 se presenta una introducción a la agitación electromagnética; se aborda su importancia dentro de fenómenos meteorológicos así como en aplicaciones industriales, y se hace un breve recuento de trabajos previos y experimentos afines. En el Capítulo 2 establecemos el sistema de ecuaciones magnetohidrodinámicas y las aproximaciones que nos permiten analizar el flujo utilizando un enfoque bidimensional. En el Capítulo 3, se presenta la solución al modelo bidimensional utilizando un enfoque analítico válido para bajos números de Reynolds y Hartmann. En el Capítulo 4 se desarrolla un modelo numérico bidimensional que permite analizar los efectos inerciales y magnéticos sobre el flujo, para números de Reynolds y Hartmann grandes. En el Capítulo 5 se presenta un modelo cuasi-bidimensional que toma en cuenta las capas límite que se forman en el fondo del recipiente que contiene al fluido conductor, y se analizan los efectos sobre el flujo. Finalmente, se establecen las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 1

## Introducción

Comúnmente en la dinámica de fluidos se busca describir el movimiento de líquidos o gases producido por fuerzas que actúan sobre el fluido. Tales fuerzas pueden ser de corto o largo alcance y bajo ciertas condiciones, pueden agitar el fluido y eventualmente lograr el mezclado del mismo. Evidentemente, existen muchas formas de agitar fluidos. Por ejemplo, es posible agitar un fluido en un contenedor mediante fuerzas mecánicas al hacer girar rodetes dentro del contenedor, o a través del desplazamiento periódico de sus paredes, es decir, mediante fuerzas tangenciales que generan vorticidad en la capa del fluido cercana a la pared [Chien et al. 1986]. Una manera diferente de agitación se logra al rotar cilindros concéntricamente, obteniendo un mezclado eficiente en la región anular entre los cilindros [Aref y Balachandar 1986]. Otra manera es imponiendo una diferencia de temperatura periódica entre las paredes del recipiente. Si la diferencia de temperatura es suficientemente alta se presentan flujos convectivos que agitan el fluido de manera intensa [de la Cruz 2005]. Las fuerzas electrostáticas también se han utilizado para este fin, sin embargo, su uso requiere de altos potenciales eléctricos [Qian et al. 2002]. Pero también es posible agitar y mezclar fluidos utilizando fuerzas electromagnéticas, como veremos más adelante.

La agitación y el mezclado de fluidos es un tema de gran interés práctico. De hecho, observamos estos fenómenos en sistemas naturales tales como la atmósfera y el océano, pero también se encuentran en dispositivos creados por el hombre, para múltiples aplicaciones tecnológicas. El éxito de muchas operaciones dentro de la industria metalúrgica, de pinturas, química, de alimentos, farmacéutica, entre otras, depende de una agitación y un mezclado eficaz. El mezclado de fluidos puede mejorar la transferencia de calor en distintos procesos industriales, mientras que en la atmósfera o el océano ocasiona el transporte y dispersión de sustancias químicas disueltas, partículas sólidas (contaminantes), nutrientes u organismos pequeños.

Debemos distinguir entre agitación y mezclado. De una manera poco estricta, entendemos por agitación el movimiento recirculante inducido en un fluido dentro de un contenedor. Por su parte, el mezclado es el proceso mediante el que puede obtenerse una distribución espacialmente homogénea de dos o más fases inicialmente separadas. Entonces, la agitación puede producir mezclado. En particular, resultan de interés aquellos procesos mediante los cuales es posible agitar fluidos sin necesidad de introducir un material externo al fluido y al recipiente que lo contiene.

En aplicaciones industriales donde se requiere una alta pureza, tal como en el procesamiento de metales, semiconductores o pinturas, es importante lograr un mezclado eficiente en ausencia de materiales ajenos al procesado que puedan contaminar el producto. Una manera no intrusiva de agitar un fluido eléctricamente conductor es usando fuerzas electromagnéticas, lo que da lugar a la *agitación electromagnética*. Tales fuerzas pueden crearse mediante la interacción de corrientes eléctricas que circulan en el fluido, y campos magnéticos externos; las corrientes eléctricas pueden ser inyectadas directamente al fluido o pueden ser inducidas por el movimiento del fluido dentro del campo. De hecho, cuando un fluido conductor se mueve en un campo magnético, se induce una fuerza electromotriz (fem) que da lugar a corrientes eléctricas. Dichas corrientes interactúan con el campo magnético originando fuerzas de cuerpo que pueden modificar el movimiento del fluido considerablemente.

La utilización de fuerzas electromagnéticas para producir flujos de líquidos conductores en laboratorio es de gran interés básico. El hecho de que la fuerza electromagnética pueda modularse a través de controlar la corriente eléctrica inyectada en el fluido o bien la intensidad del campo magnético, ofrece una gran versatilidad que permite obtener toda una gama de patrones de flujo laminares o turbulentos e incluso estudiar con detalle la transición de un régimen a otro. Entre los experimentos de interés se encuentran aquéllos realizados en delgadas capas de un metal líquido o un electrolito bajo campos magnéticos que apuntan esencialmente en la dirección normal a la capa del fluido. A grandes rasgos, podemos distinguir dos tipos de estudios. Por un lado, aquéllos que se realizan bajo campos magnéticos uniformes presentes en toda la región de flujo. Comúnmente este tipo de campos magnéticos es generado por electroimanes o bobinas especialmente diseñadas, o bien por imanes superconductores que pueden alcanzar intensidades muy altas [Sommeria 1986, Messadek y Moreau 2002]. Por otro lado, existen estudios que utilizan campos magnéticos generados por imanes permanentes y por consiguiente las intensidades alcanzadas son pequeñas y los campos son no uniformes [Qian et al. 2002, Paret et al. 1997, Gleeson 2005]. El

movimiento se produce al inyectar, mediante electrodos, una corriente eléctrica en el fluido conductor en presencia del campo magnético, lo que da lugar a una *fuerza de Lorentz* que agita al fluido. Recordemos que la fuerza de Lorentz es una fuerza rotacional y por tanto capaz de generar vorticidad en el fluido. Al confinar el movimiento en dicha capa, se reducen las perturbaciones del flujo en la dirección normal dando lugar a un flujo cuasi-bidimensional. Además, si el campo magnético es intenso, éste introduce una dirección preferencial en el espacio, por lo que se induce aún más la bidimensionalidad del sistema. Se ha comprobado teórica y experimentalmente que un campo magnético intenso es capaz de atenuar las componentes de vorticidad que no son paralelas al campo aplicado. Esto trae como resultado que los vórtices dentro del campo tienden a alinearse en la dirección del mismo, produciendo un flujo cuasi-bidimensional [Sommeria y Moreau 1982]. De esta manera ha sido posible comprobar experimentalmente muchas de las propiedades de la turbulencia bidimensional, que eran conocidas desde los años sesenta y que sólo tenían un sustento teórico, como es el caso de la cascada inversa de energía. En turbulencia tridimensional existe una cascada directa de energía mediante la cual la energía introducida en el sistema a escalas grandes se transfiere a escalas pequeñas hasta alcanzar un límite inferior, donde se disipa por efectos viscosos. En dos dimensiones, sin embargo, las escalas pequeñas pueden transferir energía hacia las escalas grandes de modo que una multitud de vórtices o remolinos pequeños puede organizarse y eventualmente dar lugar a una o varias estructuras de gran tamaño. Esto es de relevancia en la formación de estructuras en los flujos atmosféricos que en buena aproximación pueden considerarse cuasi-bidimensionales; de hecho, la existencia de la gran mancha roja de Júpiter ha sido explicada a partir de una turbulencia cuasi-bidimensional [Sommeria et al. 1988, Marcus 1988].

Una manera sencilla de efectuar experimentos de mezclado electromagnético es mediante la inyección de corriente eléctrica en una capa delgada de electrolito en presencia de campos magnéticos producidos por imanes permanentes. En el Centro de Investigación en Energía (CIE) se han realizado experimentos con fuerzas electromagnéticas en capas delgadas de electrolitos [Salas et al. 2001, Cuevas et al. 2002]. Aunque el trabajo objeto de esta tesis es esencialmente teórico, con el fin de dar una idea clara de los experimentos que lo han motivado, se presenta a continuación una breve descripción del dispositivo experimental y los resultados principales. El montaje experimental consiste de una cuba, que es un contenedor rectangular con dimensiones interiores de  $0.36 \times 0.28$  m y una altura de 0.013 m, el contenedor se coloca horizontalmente y está abierto por la parte superior. La cuba que contiene al electrolito está hecha de acrílico y vidrio. Sólo una de las paredes laterales más largas está hecha de vidrio con índice de refracción aproximado al índice de refracción del agua, esto es para minimizar la desviación de una

hoja láser debido al cambio del medio en que se propaga. Las dimensiones del vidrio son  $0.29 \times 0.02 \times 0.006$  m. La hoja láser entra horizontalmente para medir el campo de velocidades con la técnica de velocimetría por imagen de partículas, PIV por sus siglas en inglés. El equipo de PIV consta de un procesador, un láser pulsado de doble cavidad, una cámara para la captación de imágenes y una computadora. El láser está montado sobre un banco óptico que permite su posicionamiento vertical para medir la velocidad en planos horizontales a diferentes profundidades de la capa de fluido. La cámara está montada encima de la cuba enfocada hacia la capa de fluido, como se muestra en la Figura 1.1, donde se presenta una imagen del equipo experimental.

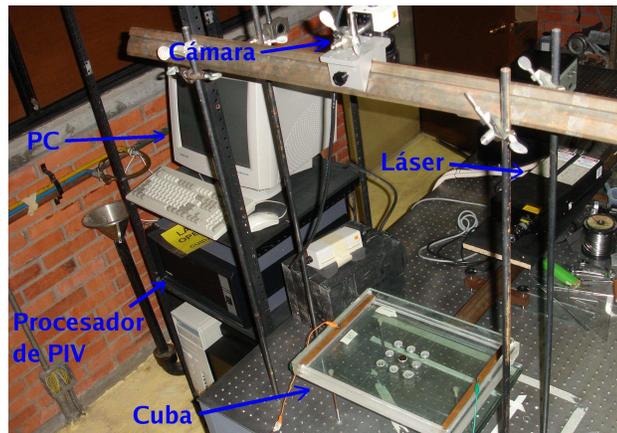


Figura 1.1: Equipo experimental.

La corriente eléctrica directa se induce a través de aplicar una diferencia de potencial (usando una fuente de corriente regulable) a dos electrodos de cobre situados en los costados más alejados de la cuba. El campo magnético es originado por un imán cilíndrico permanente de Neodymium Iron Boron ( $NdFeB$ ) con diámetro de 0.019 m y longitud de 0.01 m, colocado en una trampa a 0.002 m del fondo del centro geométrico de la cuba (ver Figura 1.2), con objeto de disminuir la distancia entre el electrolito y el imán. El valor máximo del campo magnético en el centro del imán es de 0.33 T mientras que en el borde se alcanza sólo 5% de este valor. El campo magnético en el centro del imán apunta principalmente en la dirección vertical positiva y es perpendicular al fondo del contenedor. El fluido de trabajo es una solución electrolítica de bicarbonato de sodio ( $NaHCO_3$ ) a 8.8% en masa, preparada con agua tridestilada, alcanzando una altura de 0.004 m dentro de la cuba. En condiciones de temperatura ambiente ( $25^{\circ}C$ ), la solución tiene una densidad de  $1086 \text{ kg/m}^3$ , una viscosidad cinemática, de  $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  y una conductividad eléctrica de aproximadamente 4 mho/m. La región encima del fluido está en condiciones de atmósfera libre.

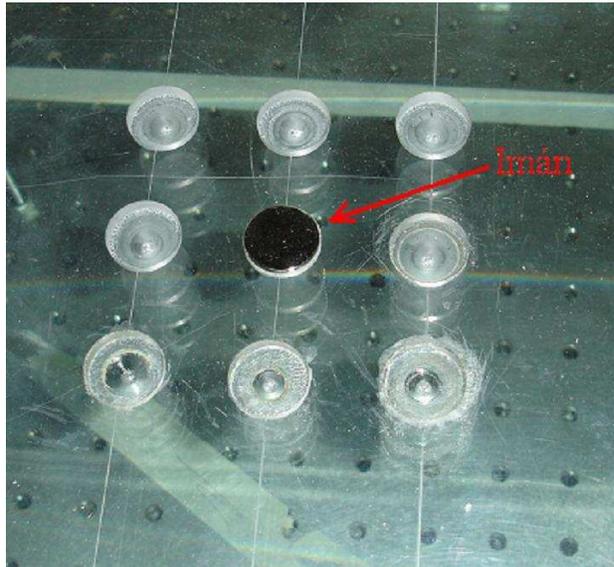


Figura 1.2: Imán.

En estos experimentos se ha logrado obtener diversos patrones de flujo para distintas distribuciones de campo magnético producidas por diferentes configuraciones de uno o varios imanes permanentes. Un patrón de flujo de interés es el que se forma debido a la interacción de una corriente eléctrica inyectada y el campo magnético de un imán dipolar. Dicho patrón de flujo es un vórtice dipolar o *dipolo*, el cual ha sido estudiado de manera teórica [Salas et al. 2001.] y numérica [Ramos et al. 2005], y es la estructura básica que aparece en flujos más complejos. Un dipolo se caracteriza por la aparición de un par de vórtices gemelos que rotan en direcciones opuestas (ver Figura 1.3). En la Figura 1.3,  $j^0$  y  $B^0$  representan a la densidad de corriente eléctrica inyectada y al campo magnético generado por el imán permanente, respectivamente.

Los vórtices o remolinos son fenómenos ubicuos en la naturaleza que a través de los años han llamado la atención de la humanidad. En los océanos se presentan por ejemplo, como corrientes en forma de hongo y en la atmósfera como huracanes y tornados, eventos devastadores que han dejado huella en el hombre. De hecho, los movimientos caprichosos de los vórtices que podemos contemplar en un sistema tan simple como una taza de té o café al verter unas gotas de leche, tienen un potencial de aplicación en áreas tales como el crecimiento de cristales, mezclado químico, estudios del clima y otros.

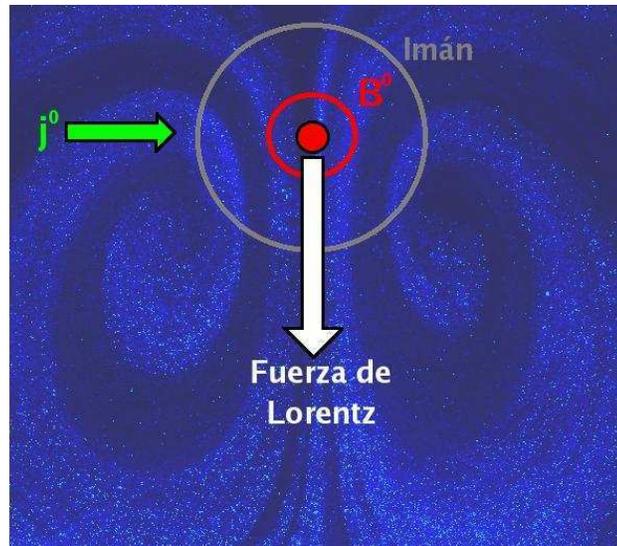


Figura 1.3: Dipolo generado con una corriente de 50 mA.

Desde un punto de vista básico es de gran importancia el estudio de las propiedades de tales flujos, en particular su estabilidad, ya que dependiendo de las condiciones impuestas pueden dar lugar tanto a movimientos laminares como a caóticos o turbulentos. En este trabajo nos interesa estudiar patrones de flujo generados por fuerzas electromagnéticas, y cabe notar que es diferente al trabajo presentado por Beltrán (2006), donde se estudia el flujo de un líquido conductor sobre un obstáculo magnético. En particular, estudiaremos únicamente flujos laminares mediante la solución numérica de las ecuaciones que gobiernan este tipo de flujo.

# Capítulo 2

## Formulación del problema

Al tomar como base los experimentos realizados en el CIE, nuestro objetivo es modelar numéricamente el flujo producido por la interacción del campo magnético de un imán permanente y una corriente directa a través de una delgada capa de una solución electrolítica. Es necesario entonces establecer primeramente las ecuaciones que describen este fenómeno. Ya que realizaremos la descripción del flujo visualizando al líquido conductor como un medio continuo, debemos hacer uso, por un lado, de las ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos y, por otro, de las ecuaciones del campo electromagnético. La fusión de estas ecuaciones da lugar a las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) que permiten estudiar los fenómenos producidos cuando interaccionan campos magnéticos y fluidos eléctricamente conductores no magnetizables. A continuación presentaremos de manera condensada las ecuaciones de la dinámica de fluidos, las del campo electromagnético y las ecuaciones fundamentales de la MHD. Posteriormente normalizaremos las variables del problema para obtener un conjunto de ecuaciones adimensionales adecuadas para la descripción del flujo bajo estudio.

### 2.1. Ecuaciones de balance de la dinámica de fluidos

En una gran cantidad de aplicaciones prácticas, los líquidos y aún los gases, pueden considerarse incompresibles, es decir, su volumen permanece inalterado ante esfuerzos normales de tipo compresional y por tanto su densidad puede considerarse constante. En particular, el electrolito utilizado en los experimentos puede suponerse incompresible por lo que la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad tiene la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector campo de velocidad. Por otra parte, podemos modelar al electrolito como un fluido Newtoniano, de manera que la ecuación de balance de la cantidad de movimiento, conocida también como la ecuación de Navier-Stokes queda

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

donde  $P$  es el campo de presión,  $\mathbf{f}$  es una fuerza de cuerpo no electromagnética relevante (como la fuerza de gravedad),  $\mathbf{j}$  es el vector densidad de corriente y  $\mathbf{B}$  es el vector de campo magnético. A su vez,  $\rho$  y  $\nu$  son la densidad de masa y la viscosidad cinemática del fluido, respectivamente. Nótese que la ecuación de Navier-Stokes difiere de la ecuación para el caso puramente hidrodinámico por un término adicional, llamado, la fuerza de Lorentz ( $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ).

La ecuación de transferencia de calor cuando existe interacción electromagnética tiene la forma

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right] = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} + \Phi_v, \quad (2.3)$$

donde  $T$  es el campo de temperatura,  $\Phi_v$  denota una fuente de disipación viscosa que explícitamente involucra términos cuadráticos de los gradientes de velocidad,  $c_p$  es el calor específico a presión constante,  $k$  es la conductividad térmica y  $\sigma$  es la conductividad eléctrica del medio. El segundo término del lado derecho denota la disipación de Joule presente en el fluido debido a la circulación de corrientes eléctricas en el medio. Esta ecuación está desacoplada de las dos anteriores y se presenta sólo por completés ya que no será considerada para la descripción de nuestro problema pues no estudiaremos la transferencia de calor. El considerar la interacción electromagnética lleva a que las ecuaciones ordinarias de la mecánica de fluidos sean insuficientes para lograr una descripción adecuada del sistema. Por lo tanto, debemos complementarlas con las ecuaciones del campo electromagnético, que comprenden a las *ecuaciones de Maxwell*, y las ecuaciones constitutivas que caracterizan a los campos en distintos medios.

## 2.2. Ecuaciones del campo electromagnético

En un medio homogéneo, isotrópico y lineal, las ecuaciones macroscópicas de Maxwell en forma diferencial son

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico,  $\rho_e$  denota a la densidad de carga eléctrica total,  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica del material y  $\mu$  es la permeabilidad magnética. Las ecuaciones (2.4)-(2.7) establecen la ley de Gauss para el campo eléctrico, la inexistencia de monopolos magnéticos, la ley de Faraday y la ley de Ampère-Maxwell, respectivamente. Al segundo término del lado derecho de la ecuación (2.7) se le conoce como la corriente de desplazamiento de Maxwell; dicho término es de relevancia cuando las oscilaciones de los campos son de alta frecuencia.

En general,  $\epsilon$  y  $\mu$  pueden depender del estado termodinámico del medio, sin embargo para la gran mayoría de los problemas tratados en MHD, estas cantidades pueden considerarse constantes. En particular, la permeabilidad magnética puede considerarse igual a la del vacío,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Vs/Am.

Es necesario proporcionar una ecuación constitutiva que establezca la relación entre la densidad de corriente eléctrica y los campos eléctrico y magnético. La ecuación más común, válida para líquidos y gases conductores, es la llamada ley de Ohm, que en un medio conductor en reposo se expresa como

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}', \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{E}'$  es el campo eléctrico en el sistema en reposo, y la conductividad eléctrica se puede suponer constante como una buena aproximación. Si el conductor se desplaza respecto al sistema de laboratorio con velocidad  $\mathbf{u}$ , la ley de Ohm toma la forma

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{u}. \quad (2.9)$$

Los términos  $(\rho_e \mathbf{u})$  y  $(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$  se denominan la corriente de convección y el campo eléctrico efectivo, respectivamente.

La fusión de las ecuaciones de la mecánica de fluidos con las ecuaciones del campo electromagnético presenta algunas dificultades. Las primeras son ecuaciones clásicas no relativistas, y por ende son invariantes ante transformaciones

Galilenas. Por su parte, las ecuaciones del campo electromagnético son ecuaciones relativistas, por tanto invariantes ante transformaciones de Lorentz. La mezcla de ecuaciones con distintas propiedades de invarianza podría dar lugar a una descripción errónea del fenómeno en consideración. Esto se resuelve utilizando lo que se conoce como la aproximación MHD que consiste básicamente en restringir los fenómenos estudiados a aquellos en donde: a) la velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz; b) los flujos tienen lugar en campos magnéticos cuasi-estacionarios o a bajas frecuencias; c) los campos eléctricos son del orden de magnitud de la fuerza electromotriz inducida por el movimiento del fluido en el campo electromagnético [Cuevas 2004].

Debido a esta aproximación se puede despreciar la corriente de desplazamiento de Maxwell en la ecuación (2.7). Físicamente lo que se está despreciando es el proceso de acumulación o redistribución de cargas eléctricas. La aproximación MHD lleva también a establecer asimismo la invarianza del campo magnético en los distintos sistemas de referencia. También establece que la corriente de convección  $\rho_e \mathbf{u}$  en la ecuación (2.9) es despreciable respecto a la corriente de conducción  $\mathbf{j}$ . Con estas simplificaciones las ecuaciones del campo magnético en un conductor en movimiento son

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.13)$$

En esta aproximación es apropiado ignorar la ecuación de conservación de la carga eléctrica (2.4) ya que el campo eléctrico está completamente determinado por las ecuaciones rotacionales y la ley de Ohm. Al despreciar la corriente de desplazamiento, las ecuaciones (2.10)-(2.13) pierden su invarianza ante transformaciones de Lorentz, presentando únicamente su invarianza Galileana. Además, de la ecuación (2.12) se sigue la condición

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.14)$$

que es equivalente a despreciar la corriente de desplazamiento. Estas ecuaciones, junto con las de balance para el fluido forman un sistema completo de ecuaciones que permiten describir el comportamiento de un fluido conductor en un campo magnético.

## 2.3. Ecuaciones de la MHD

Las ecuaciones del campo electromagnético (2.10)-(2.13) pueden combinarse para dar lugar a lo que se conoce como la ecuación de inducción [Müller y Bühler 2001]. Primero, despejamos el campo  $\mathbf{E}$  de la ecuación (2.13) y lo introducimos en la ecuación (2.11); eliminamos  $\mathbf{j}$  con ayuda de la ecuación (2.12), considerando la ecuación (2.10) y que el fluido es incompresible (ecuación (2.1)). De esta forma, obtenemos la ecuación de transporte que obedece el campo magnético  $\mathbf{B}$ , es decir,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \lambda \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.15)$$

donde la cantidad  $\lambda = 1/\mu_0\sigma$  es la difusividad magnética, que es una propiedad del medio conductor que expresa la medida de la tendencia del campo magnético a difundirse a través del medio. Esta ecuación establece que el campo magnético también obedece una ecuación de transporte y se propaga mediante los mecanismos convectivo y difusivo. Evidentemente, por el hecho de que aparece la velocidad  $\mathbf{u}$ , la ecuación (2.15) debe resolverse simultáneamente con las ecuaciones de continuidad (2.1) y Navier-Stokes (2.2).

De modo que el sistema completo de ecuaciones que describe el movimiento de un fluido viscoso, incompresible y eléctricamente conductor en un campo magnético es

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \lambda \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}. \quad (2.20)$$

A continuación, escribiremos estas ecuaciones de manera adimensional.

## 2.4. Adimensionalización

La modelación completa del experimento realizado en el CIE puede resultar bastante compleja. Al inyectar la corriente en el electrolito a través de los electrodos, ésta interactúa con el campo magnético dando lugar a la fuerza de Lorentz que provoca el movimiento del fluido. Cuando el electrolito tiene un movimiento relativo al campo magnético aplicado, de acuerdo a la ley de inducción de Faraday, se genera una fuerza electromotriz que induce la circulación de una corriente en el electrolito. Por tanto, en el electrolito existe una densidad de corriente total que es la suma de la corriente aplicada y la inducida:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^0 + \mathbf{j}^i, \quad (2.21)$$

donde  $\mathbf{j}^0$  y  $\mathbf{j}^i$  son la corriente aplicada e inducida, respectivamente. La existencia de corrientes eléctricas tiene a su vez varios efectos físicos. Por un lado, la circulación de corrientes eléctricas en el fluido conductor generan lo que se conoce como el calentamiento o disipación de Joule, que manifiesta el hecho de que parte de la energía existente en el sistema es transformada de manera irreversible en calor; sin embargo, este efecto lo consideramos despreciable, debido a que la energía disipada es en general muy pequeña. Por otro lado, en concordancia con la ley de Ampère, estas corrientes inducen campos magnéticos, por lo que el campo magnético total será ahora el campo aplicado más el campo inducido por la corriente que circula en el fluido:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{b}, \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{B}^0$  y  $\mathbf{b}$  son el campo magnético aplicado e inducido, respectivamente. Se debe tener en cuenta que la corriente inducida,  $\mathbf{j}^i$ , da lugar a fuerzas electromagnéticas (de Lorentz) que actúan en dirección contraria a las fuerzas aplicadas, por lo que tienden a inhibir el movimiento del fluido, tratando de llevarlo al equilibrio.

Los parámetros controlados externamente durante los experimentos son la intensidad de campo magnético aplicado y la densidad de corriente aplicada; además, las propiedades del electrolito, es decir, la densidad, la viscosidad cinemática, la permeabilidad magnética y la conductividad eléctrica se suponen conocidas. Al tomar en consideración lo anterior y realizando un análisis dimensional se optó por las siguientes variables adimensionales denotadas con un asterisco:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^* &= \frac{\mathbf{u}}{u_0}, & P^* &= \frac{P}{\rho u_0^2}, \\
\mathbf{j}^* &= \frac{\mathbf{j}}{j^0}, & \mathbf{B}^{0*} &= \frac{\mathbf{B}^0}{B_m}, \\
\mathbf{b}^* &= \frac{\mathbf{b}}{Rm B_m}, & \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{d}, \\
t^* &= \frac{t}{d^2/\nu}, & u_0 &= \frac{\nu}{d},
\end{aligned}$$

donde  $d$  es la longitud característica del sistema, que específicamente es el diámetro del imán,  $B_m$  es la magnitud máxima del campo magnético aplicado y  $Rm = \mu_0 \sigma d U_0$  es un parámetro adimensional conocido como número de Reynolds magnético, el cual analizaremos con mayor detenimiento posteriormente. La velocidad  $u_0 = \nu/d$  puede interpretarse como una velocidad viscosa ya que es precisamente la fuerza viscosa la que se opone a la fuerza de Lorentz aplicada. El modelo de Salas et al. (2001) utiliza una adimensionalización distinta y para su solución omite el término convectivo, sin embargo, como veremos en el Capítulo 3, al hacer uso de la adimensionalización aquí presentada, no omitimos el término convectivo. Al utilizar estas variables, las ecuaciones adimensionales de conservación de masa y cantidad de movimiento toman la forma

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* &= -\nabla^* P^* + \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \\
+ Re (\mathbf{j}^* \times \mathbf{B}^{0*}) + Re Rm (\mathbf{j}^* \times \mathbf{b}^*). & \quad (2.24)
\end{aligned}$$

En la ecuación (2.24),  $Re$  denota al número de Reynolds el cual da una estimación de la importancia del transporte de cantidad de movimiento por convección comparado con el transporte por difusión viscosa y está dado por

$$Re = \frac{U_0 d}{\nu}, \quad (2.25)$$

donde la velocidad característica  $U_0$  surge del balance de las fuerzas dominantes en el flujo, es decir, la fuerza viscosa y la fuerza electromagnética aplicada, es decir,

$$|\nu \nabla^2 \mathbf{u}| \sim \left| \frac{1}{\rho} \mathbf{j}^0 \times \mathbf{B}^0 \right|, \quad (2.26)$$

o bien, en orden de magnitud

$$\frac{\nu U_0}{d^2} = \frac{j^0 B^0}{\rho}, \quad (2.27)$$

de donde

$$U_0 = \frac{j^0 B^0 d^2}{\rho \nu}. \quad (2.28)$$

La ecuación de inducción magnética adimensional queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Rm \frac{\partial \mathbf{b}^*}{\partial t^*} = & \nabla^{*2} \mathbf{b}^* + (\mathbf{B}^{0*} \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{B}^{0*} \\ & + Rm (\mathbf{b}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* - Rm (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{b}^*. \end{aligned} \quad (2.29)$$

En la ecuación (2.29) aparece un parámetro adimensional de gran importancia en la MHD, el número de Reynolds magnético  $Rm$ . Este número puede interpretarse como la razón del campo magnético inducido por el movimiento del fluido, y el campo externo aplicado  $B^0$ . Otra interpretación común de  $Rm$  es que estima la importancia del transporte de campo magnético por efectos convectivos comparado con el transporte de esta cantidad por efectos difusivos. Matemáticamente lo anterior se expresa como

$$Rm = \mu_0 \sigma d U_0 = \frac{U_0 d}{\lambda}. \quad (2.30)$$

Se observa que este parámetro tiene la misma estructura que el número de Reynolds que comúnmente aparece en hidrodinámica. El carácter de la ecuación (2.18) depende fuertemente de la importancia relativa de  $Rm$ . Así, cuando  $Rm \ll 1$ , los efectos difusivos son dominantes. Este es el caso que se presenta en la mayoría de los flujos de metales líquidos y electrolitos a escala industrial o de laboratorio, donde el campo magnético inducido por el movimiento del fluido es despreciable en comparación con el campo impuesto o aplicado. Por otra parte, cuando  $Rm \gg 1$ , dominan los efectos convectivos. En tal caso los campos magnéticos inducidos pueden incrementarse sustancialmente, de manera que la conservación de flujo magnético origina que la fuerza de Lorentz propicie un comportamiento elástico del campo que da lugar a las ondas de Alfvén. Las ondas de Alfvén, desconocidas en la mecánica de fluidos y en la electrodinámica, son perturbaciones transversales que se propagan a lo largo de las líneas de fuerza del campo magnético, y su origen puede asociarse a la vibración de estas líneas concebidas como cuerdas de tensión. Estos efectos son usualmente de gran relevancia en fenómenos astrofísicos y significativos a escala geofísica [Cuevas 2004].

En este trabajo utilizaremos la aproximación  $Re \ll 1$ , de modo que los términos de orden  $Re$  en la ecuación (2.29) se desprecian. Asimismo, el último término del lado derecho de la ecuación (2.24) se desprecia pues para los valores de  $Re$  utilizados en este trabajo, el producto  $ReRe$  sigue siendo mucho menor que uno. Al quitar por simplicidad los asteriscos a las variables adimensionales, las ecuaciones que gobiernan el flujo quedan como sigue

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{u} + Re (\mathbf{j} \times \mathbf{B}^0), \quad (2.32)$$

$$0 = \nabla^2 \mathbf{b} + (\mathbf{B}^0 \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}^0, \quad (2.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{b} = \frac{1}{N} \mathbf{j}^i, \quad (2.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^0 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B}^0 = 0, \quad (2.35)$$

donde  $N$  es el parámetro de interacción o número de Stuart. Este parámetro cuantifica la razón de la fuerza magnética y la inercial, y está dado por

$$N = \frac{\sigma dB^0{}^2}{\rho U_0}. \quad (2.36)$$

Este parámetro también puede expresarse como  $N = \frac{Ha^2}{Re}$ , donde  $Ha$  es el número de Hartmann, definido como

$$Ha = dB^0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}. \quad (2.37)$$

El cuadrado de  $Ha$  da una estimación de la magnitud de la fuerza magnética comparada con la fuerza viscosa. Evidentemente, de los tres parámetros  $Re$ ,  $Ha$  y  $N$ , sólo dos son independientes.

## 2.5. Aproximación 2D

Existen diversas situaciones físicas en las que el flujo de un líquido presenta un comportamiento que tiende a la bidimensionalidad. Tal es el caso de flujos

bajo campos magnéticos muy intensos [Messadek y Moreau 2002] o flujos en rotación [Zavala-Sansón et al. 2001] donde las fuerzas magnéticas o bien la de Coriolis, respectivamente, inhiben las perturbaciones en la dirección ya sea del campo aplicado o de la velocidad angular de rotación. Por otro lado, el confinar el movimiento de un líquido a una capa muy delgada propicia también un comportamiento cuasi-bidimensional, donde las perturbaciones en la dirección normal a la capa son amortiguadas por el confinamiento geométrico [Satijn et al. 2001]. De hecho, en estos sistemas se puede inferir que después de un pequeño estado transitorio, el flujo puede ser tratado como bidimensional [Paret et al. 1997]. Tal es el caso de los flujos producidos mediante fuerzas magnéticas en una capa de electrolito, estudiados experimentalmente en el CIE [Salas et al. 2001, Ramos et al. 2005, Cuevas et al. 2002]. Este tipo de flujos puede modelarse analítica o numéricamente como un flujo puramente bidimensional o bien cuasi-bidimensional, de manera físicamente aceptable, a pesar del carácter tridimensional del flujo real. Éste es el enfoque que se seguirá en el presente trabajo ya que simplifica enormemente la tarea de modelación y ofrece resultados razonables, [Smolentsev 1997, Cuevas et al. 2006, Paret et al. 1997]. Al tomar lo anterior en cuenta, consideramos primeramente un modelo bidimensional que ignora completamente la dependencia en la coordenada normal  $z$ , lo que implica que el espesor de la película de fluido es despreciable. Por tanto, las componentes del campo de velocidad son

$$\mathbf{u} = [u(x, y, t), v(x, y, t), 0]. \quad (2.38)$$

Aunque el campo magnético es tridimensional, en esta aproximación consideramos que la componente normal al plano  $xy$  es la única relevante al problema. Suponemos que la delgada capa de fluido de espesor  $h$ , es mucho más pequeña que el diámetro del imán  $d$ , ( $h \ll d$ ), que es la longitud característica relevante en el plano de movimiento. Se considera además que en el plano de movimiento el campo magnético es independiente de la coordenada  $z$ . Por tanto, el campo magnético es de la forma

$$\mathbf{B}^0 = [0, 0, B_z^0(x, y)]. \quad (2.39)$$

Asimismo, el campo inducido se aproxima como

$$\mathbf{b} = [0, 0, b_z(x, y, t)]. \quad (2.40)$$

Como se verá más adelante, con esta suposición es posible obtener las corrientes inducidas en el plano de movimiento a partir de la ley de Ampère. Al igual que el campo de velocidad, las corrientes se encuentran en el plano  $xy$

$$\mathbf{j} = [1 + j_x^i(x, y, t), j_y^i(x, y, t), 0]. \quad (2.41)$$

Nótese que la densidad de corriente aplicada está en la dirección  $x$ , y su valor igual a 1, ya que normalizamos utilizando la magnitud de la corriente aplicada  $j^0$ . Finalmente, las ecuaciones a resolver para el problema planteado son las siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Re j_y^i B_z^0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - Re B_z^0 - Re j_x^i B_z^0, \quad (2.44)$$

$$0 = \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z}{\partial y^2} - u \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - v \frac{\partial B_z^0}{\partial y}. \quad (2.45)$$

Una vez determinado  $b_z$ , de la ley de Ampère (2.34b), pueden calcularse las componentes de la corriente inducida

$$j_x^i = N \frac{\partial b_z}{\partial y}, \quad j_y^i = -N \frac{\partial b_z}{\partial x}, \quad (2.46)$$

donde puede observarse que  $b_z$  hace las veces de una función de corriente para la densidad de corriente eléctrica.

A continuación, presentaremos la solución analítica de estas ecuaciones por el método de perturbaciones para el caso de números de Reynolds pequeños.



# Capítulo 3

## Solución analítica para números de Reynolds pequeños

En el capítulo anterior planteamos las ecuaciones de la MHD e hicimos ciertas aproximaciones para llegar a un sistema de ecuaciones adecuado para describir nuestro fenómeno de estudio. El siguiente paso es solucionar dicho sistema. Aunque uno de los principales objetivos de este trabajo es el tratamiento numérico del problema, buscamos primeramente un análisis analítico como método alternativo que nos sirva como base para lograr una mejor comprensión del fenómeno. Sin embargo, como se verá a continuación, las soluciones analíticas encontradas aquí presentan diversas limitaciones que impiden reproducir de una manera completa el flujo estudiado. No obstante, dichas soluciones captan algunos rasgos físicos relevantes del fenómeno por lo que resulta ilustrativo considerar este enfoque como un primer acercamiento al problema.

Para resolver el sistema de ecuaciones de manera analítica recurrimos al método de perturbaciones partiendo de la ecuación de vorticidad. Si derivamos con respecto a la coordenada vertical  $y$  la ecuación (2.43), y el resultado lo restamos a la derivada con respecto a la coordenada horizontal  $x$  de la ecuación (2.44) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} - Re \frac{\partial B_z^0}{\partial x} \\ - Re \left( \frac{\partial(j_x^i B_z^0)}{\partial x} + \frac{\partial(j_y^i B_z^0)}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $\omega_z(x, y)$  es la componente de la vorticidad en dirección de la coordenada transversal  $z$ , y está definida como

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.2)$$

Al aplicar la conservación de la carga eléctrica (2.14), la ecuación (3.1) toma la forma

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} - Re \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - Re \left( j_x^i \frac{\partial B_z^0}{\partial x} + j_y^i \frac{\partial B_z^0}{\partial y} \right). \quad (3.3)$$

El tercer y cuarto término del lado derecho de la ecuación (3.3) dan cuenta de las fuerzas de Lorentz presentes en el flujo. El tercer término es la fuerza aplicada, es decir, el motor de movimiento. Por su parte, el último término es la fuerza inducida que actúa para frenar el movimiento.

Al analizar el último término del lado derecho de la ecuación (3.3) observamos que es de orden  $Ha^2$ , es decir,

$$Re j_y^i B_z^0 = -Ha^2 \frac{\partial b_z}{\partial x} B_z^0, \quad Re j_x^i B_z^0 = Ha^2 \frac{\partial b_z}{\partial x} B_z^0. \quad (3.4)$$

Debido a que en el experimento  $Ha \simeq 0.38$ , en una primera aproximación podemos despreciar la fuerza de Lorentz producida por las corrientes inducidas, es decir, podemos omitir el último término de la ecuación (3.3). Finalmente, la ecuación de vorticidad queda como

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} - Re \frac{\partial B_z^0}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Por otra parte, la ecuación para la presión se puede obtener al tomar la divergencia de las ecuaciones de movimiento (2.43) y (2.44). Al despreciar las corrientes inducidas, la ecuación (3.5) queda desacoplada de la ecuación (2.45), por lo que se puede resolver primero la ecuación de vorticidad (3.5) para obtener el campo de velocidad y posteriormente el campo de presión, y después resolver la ecuación para el campo magnético inducido (2.45). Finalmente, las componentes de la densidad de corriente inducida pueden obtenerse a través de la ecuación (2.46).

### 3.1. Campo magnético aplicado

Para modelar el campo magnético aplicado de una manera simplificada, recurrimos a la expresión exacta del campo debido a un dipolo magnético puntual

[Good y Nelson 1971]. Ya que deseamos hacer una modelación bidimensional, consideramos un dipolo puntual cuyo momento magnético dipolar  $\mathbf{m}$  apunta en la dirección  $z$ ; de esta forma la contribución dominante está en la dirección normal al plano de la capa de fluido  $xy$ . Además, omitimos la dependencia en la coordenada transversal  $z$ , puesto que el flujo tiene lugar sólo en un plano determinado,  $z = \text{constante}$ . Colocando el sistema coordenado en el origen ( $x = y = 0$ ), la expresión para el campo magnético bidimensional queda como

$$B_z^0(x, y) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^2 + y^2} + \mu_0 m \delta(x) \delta(y). \quad (3.6)$$

En la ecuación (3.6), el primer término del lado derecho da la contribución del campo magnético fuera del origen, mientras que el segundo término considera los efectos de la singularidad del campo dipolar. El campo se puede normalizar con  $B_n = \mu_0 m / L^2$ , donde  $L$  es una longitud característica. Para un dipolo de longitud finita, la longitud  $L$  se puede escoger sin ambigüedad, sin embargo, no hay longitud característica para un dipolo puntual. Para propósitos prácticos, escogimos  $L$  de tal manera que la constante de normalización  $B_n = 1$ , esto es,  $L = \sqrt{\mu_0 m}$  [Cuevas et al. 2006]. Finalmente, el campo magnético normalizado está dado por

$$B_z^0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} + \delta(x) \delta(y). \quad (3.7)$$

Es importante notar que la expresión tridimensional del campo dipolar satisface exactamente las ecuaciones magnetostáticas (2.35). Sin embargo, si conservamos sólo la componente normal, el campo pierde su propiedad de irrotacionalidad. No obstante, ya que las componentes del campo en las direcciones  $x$  y  $y$  son muy pequeñas comparadas con la componente normal, el mantener únicamente esta componente permite describir la dinámica de flujo con resultados físicamente razonables.

## 3.2. Condiciones de frontera y condición inicial

En contraste con el experimento, donde el fluido está contenido por una caja de sección transversal rectangular, en la solución analítica consideramos por simplicidad que el fluido está en una región infinita.

Suponemos que a una distancia suficientemente alejada del origen el campo magnético producido por el dipolo puntual es despreciable, por lo que la fuerza de Lorentz será nula, el campo de presión será constante y el fluido permanecerá estático. Además, suponemos también que a esa distancia el campo

magnético inducido es cero. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} u \longrightarrow 0 \\ v \longrightarrow 0 \\ P \longrightarrow \text{constante} \\ b_z \longrightarrow 0 \end{array} \right\} \text{cuando } x, y \longrightarrow \pm\infty. \quad (3.8)$$

En principio, el campo de velocidad y presión, así como el campo magnético inducido deben ser finitos en el origen, es decir,

$$\left. \begin{array}{l} u \longrightarrow \text{finito} \\ v \longrightarrow \text{finito} \\ P \longrightarrow \text{finito} \\ b_z \longrightarrow \text{finito} \end{array} \right\} \text{cuando } x, y \longrightarrow 0. \quad (3.9)$$

En un inicio el fluido está en reposo, por lo que como condición inicial tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} u = v = b_z = 0 \\ P = \text{constante} \end{array} \right\} \text{en } t = 0. \quad (3.10)$$

### 3.3. Solución analítica

Para resolver analíticamente las ecuaciones de movimiento, suponemos que el número de Reynolds es muy pequeño de manera que podemos expresar las variables como una serie en el parámetro  $Re$ , es decir,

$$\begin{aligned} \omega_z &= \omega_z^{(0)} + Re \omega_z^{(1)} + Re^2 \omega_z^{(2)} + O(Re^3), \\ u &= u^{(0)} + Re u^{(1)} + Re^2 u^{(2)} + O(Re^3), \\ v &= v^{(0)} + Re v^{(1)} + Re^2 v^{(2)} + O(Re^3), \\ b_z &= b_z^{(0)} + Re b_z^{(1)} + Re^2 b_z^{(2)} + O(Re^3), \\ P &= P^{(0)} + Re P^{(1)} + Re^2 P^{(2)} + O(Re^3), \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde el superíndice muestra el orden de la aproximación.

#### 3.3.1. Solución a orden cero

La vorticidad a orden cero cumple con la ecuación

$$\frac{\partial \omega_z^{(0)}}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial \omega_z^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial \omega_z^{(0)}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega_z^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z^{(0)}}{\partial y^2}. \quad (3.12)$$

En la ecuación (3.12) no aparece algún término fuente que provoque movimiento en el fluido, por lo que éste permanece en reposo. La solución de esta ecuación es por tanto

$$\omega_z^{(0)} = u^{(0)} = v^{(0)} = 0. \quad (3.13)$$

La ecuación para la presión es

$$\frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{(0)}}{\partial y^2} = 0, \quad (3.14)$$

Esta ecuación puede resolverse fácilmente mediante el método de separación de variables. la cual tiene como solución<sup>1</sup>

$$P^{(0)} = 0. \quad (3.15)$$

A su vez, el campo magnético inducido obedece a la ecuación

$$\frac{\partial^2 b_z^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z^{(0)}}{\partial y^2} = u^{(0)} \frac{\partial B_z^0}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial B_z^0}{\partial y}, \quad (3.16)$$

cuya solución es

$$b_z^{(0)} = 0. \quad (3.17)$$

Al igual que el campo magnético inducido, las corrientes eléctricas inducidas a este orden son también cero:

$$j_x^{i(0)} = j_y^{i(0)} = 0. \quad (3.18)$$

### 3.3.2. Solución a primer orden

A  $O(Re)$ , la vorticidad satisface a la ecuación

$$\frac{\partial \omega_z^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega_z^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{\partial B_z^0}{\partial x}. \quad (3.19)$$

Para dar solución a la ecuación (3.19) utilizamos el método de la función de Green en el dominio infinito  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ , para  $t > 0$  y la condición

---

<sup>1</sup>Este tipo de ecuaciones se resuelven fácilmente mediante el método de separación de variables, y utilizando coordenadas polares .

inicial  $\omega_z = 0$  en  $t = 0$  [Özişik 1993, Salas et al. 2001]. Cabe resaltar que sólo el término correspondiente a las funciones delta de Dirac del campo magnético aplicado (ecuación (3.7)), da una contribución diferente de cero. Finalmente, la solución a la ecuación de vorticidad es

$$\omega_z^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}, \quad (3.20)$$

de donde obtenemos para  $t \rightarrow \infty$  la solución estacionaria

$$\omega_z^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (3.21)$$

Nótese que esta solución no satisface la condición (3.9), es decir, diverge en el origen. Este comportamiento es heredado del campo magnético dipolar que también presenta una singularidad en el origen. A pesar de esta limitación, veremos que la solución analítica reproduce de manera satisfactoria el comportamiento del flujo en la vecindad de la singularidad.

Para obtener el campo de velocidad recurrimos a la función corriente  $\psi(x, y)$  definida como

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.22)$$

de manera que satisface la condición de conservación de masa (ecuación (2.42)). Expandiendo la función corriente tenemos

$$\psi = \psi^{(0)} + Re \psi^{(1)} + Re^2 \psi^{(2)} + O(Re^3), \quad (3.23)$$

que a orden cero, al igual que el campo de velocidad a ese orden, tiene como solución  $\psi^{(0)} = 0$ .

La función corriente a primer orden cumple con la ecuación

$$\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial y^2} = -\omega_z^{(1)}. \quad (3.24)$$

La solución general de esta ecuación tiene la forma

$$\psi^{(1)} = \frac{x}{8\pi} [1 - \text{Log}(x^2 + y^2)] + C_1 \frac{x}{x^2 + y^2} + C_2 x.$$

Si aplicamos las condiciones de frontera (3.8) y (3.9) pidiendo que las velocidades se anulen en infinito y tomen valores finitos en el origen, concluimos que las constantes  $C_1$  y  $C_2$  deben ser iguales a cero, por lo tanto

$$\psi^{(1)} = \frac{x}{8\pi} [1 - \text{Log}(x^2 + y^2)]. \quad (3.25)$$

De la definición (3.22) obtenemos las componentes de velocidad

$$u^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (3.26)$$

$$v^{(1)} = -\frac{1}{8\pi} \left[ 1 - \text{Log}(x^2 + y^2) - \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right]. \quad (3.27)$$

Sin embargo, notamos que las soluciones (3.26) y (3.27) no satisfacen las condiciones a la frontera. El que no satisfagan la condición en el origen se debe, como ya lo hemos mencionado, a la singularidad existente en el campo magnético aplicado. Por su parte, el hecho de no satisfacer la condición en  $r \rightarrow \infty$  manifiesta un problema intrínseco a la aproximación  $Re \ll 1$ . Este problema no es característico sólo del flujo en consideración sino que se presenta de manera análoga en un problema clásico de la dinámica de fluidos, a saber, en el flujo sobre un cilindro sólidos a bajos números de Reynolds (ver por ejemplo, Batchelor 1967, p. 244-246). En tal caso, se encuentra que es posible satisfacer la condición de no deslizamiento sobre el cilindro, pero la solución diverge cuando  $r \rightarrow \infty$ . El determinar de manera precisa la región del espacio donde nuestra solución es válida, es un problema complejo que requiere de un análisis asintótico cuidadoso que trasciende los alcances del presente trabajo y se plantea como una tarea a futuro. No obstante, es interesante analizar los resultados que se obtienen con este enfoque a pesar de sus limitaciones.

La presión obedece a la ecuación

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{\partial B_z^0}{\partial y}, \quad (3.28)$$

y puede resolverse de manera análoga a la ecuación (3.19), de modo que la solución estacionaria es

$$P^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (3.29)$$

La ecuación para el campo magnético inducido es

$$\frac{\partial^2 b_z^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z^{(1)}}{\partial y^2} = u^{(1)} \frac{\partial B_z^0}{\partial x} + v^{(1)} \frac{\partial B_z^0}{\partial y}. \quad (3.30)$$

Con el fin de obtener soluciones analíticas simples, en lugar de utilizar la expresión (3.7) para la componente normal del campo magnético aplicado, utilizamos la distribución Gaussiana

$$B_z^0(x, y) = \frac{n}{\pi} e^{-n(x^2+y^2)}, \quad n > 0. \quad (3.31)$$

De hecho, ambas expresiones para el campo magnético aplicado presentan una distribución similar alrededor del origen. Asimismo, la integración de ambas expresiones en el dominio infinito es igual a 1. Utilizando la expresión (3.31), la solución de la ecuación (3.30) es

$$b_z^{(1)} = \frac{y}{16\pi^2(x^2 + y^2)} \left\{ (1 - \eta(x^2 + y^2)) Ei(-\eta(x^2 + y^2)) - e^{-\eta(x^2+y^2)} \text{Log}(x^2 + y^2) \right\}, \quad (3.32)$$

donde la función  $Ei$  está definida como

$$Ei(\Gamma) = - \int_{-\Gamma}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad \text{para } \Gamma > 0. \quad (3.33)$$

Curiosamente, la solución (3.32) se comporta correctamente en infinito, pero al igual que las soluciones previas, diverge en el origen.

Las componentes de la densidad de corriente inducida se calculan a través de la ecuación (2.46), obteniendo

$$j_x^{i(1)} = \frac{Ne^{-\eta(x^2+y^2)}}{16\pi^2(x^2 + y^2)^2} \left\{ (y^2 + 2\eta y^2(x^2 + y^2) - x^2) \text{Log}(x^2 + y^2) - e^{\eta(x^2+y^2)} Ei(-\eta(x^2 + y^2)) (y^2 + \eta(x^2 + y^2)^2 - x^2) - 2\eta y^2(x^2 + y^2) \right\}, \quad (3.34)$$

$$j_y^{i(1)} = \frac{xyNe^{-\eta(x^2+y^2)}}{8\pi^2(x^2 + y^2)^2} \left\{ \eta(x^2 + y^2) + e^{\eta(x^2+y^2)} Ei(-\eta(x^2 + y^2)) - (1 + \eta(x^2 + y^2)) \text{Log}(x^2 + y^2) \right\}. \quad (3.35)$$

### 3.3.3. Solución a segundo orden

Para completar el tratamiento analítico, obtendremos la corrección al campo de velocidad a segundo orden. La ecuación de vorticidad a  $O(Re^2)$  es

$$\frac{\partial^2 \omega_z^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z^{(2)}}{\partial y^2} = u^{(1)} \frac{\partial \omega_z^{(1)}}{\partial x} + v^{(1)} \frac{\partial \omega_z^{(1)}}{\partial y}, \quad (3.36)$$

la cual tiene como solución

$$\omega_z^{(2)} = \frac{xy}{32\pi^2} \frac{\text{Log}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}. \quad (3.37)$$

La función de corriente cumple con la ecuación

$$\frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial y^2} = -\omega_z^{(2)}, \quad (3.38)$$

y al resolverla obtenemos

$$\psi^{(2)} = \frac{xy}{512\pi^2} \left[ \text{Log}(x^2 + y^2) - (\text{Log}(x^2 + y^2))^2 - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.39)$$

De la ecuación (3.39) podemos inferir las componentes de velocidad

$$u^{(2)} = \frac{x}{1024\pi^2(x^2 + y^2)} \{-x^2 + 3y^2 + 2\text{Log}(x^2 + y^2) [x^2 - 3y^2 - (x^2 + y^2)\text{Log}(x^2 + y^2)]\}, \quad (3.40)$$

$$v^{(2)} = \frac{y}{1024\pi^2(x^2 + y^2)} \{-3x^2 + y^2 + 2\text{Log}(x^2 + y^2) [3x^2 - y^2 + (x^2 + y^2)\text{Log}(x^2 + y^2)]\}. \quad (3.41)$$

Al tomar en cuenta la forma de las soluciones para  $u^{(2)}$  y  $v^{(2)}$ , la solución de  $b_z^{(2)}$  es complicada y hemos decidido omitirla, así como también omitimos la solución de  $P^{(2)}$ . Esto es plausible debido a que las soluciones a segundo orden no tienen una contribución significativa cuando  $Re \ll 1$ .

## 3.4. Resultados

Los resultados que se muestran a continuación fueron obtenidos con el parámetro  $Ha = 0.2$ , que es un valor muy cercano al experimental ( $Ha \simeq 0.38$ ). Ya que

$Ha < 1$ , los efectos de la corriente inducida son mínimos. El número de Reynolds utilizado es  $Re = 0.1$ . Las gráficas se presentan en el intervalo  $-2 \leq (x, y) \leq 2$ , puesto que es en esta región donde mejor se puede apreciar el flujo dipolar.

La Figura 3.1 muestra el campo vectorial de velocidad calculado con las expresiones analíticas (3.26), (3.27), (3.40) y (3.41). En ella, podemos observar la formación de un dipolo, en el cual el vórtice izquierdo gira en sentido horario mientras que el vórtice derecho gira en sentido antihorario. La fuente del campo magnético aplicado está localizada en el centro geométrico, y es ahí donde se localiza la magnitud máxima de velocidad en la dirección negativa del eje  $y$ . Las líneas de corriente asociadas al campo vectorial se pueden apreciar en la Figura 3.2, donde observamos la simetría del dipolo respecto a ambos ejes coordenados. Dicha simetría manifiesta el dominio de los efectos difusivos respecto a los convectivos, o en otras palabras, el efecto despreciable de la corrección a segundo orden. De hecho, el considerar esta corrección lleva a modificaciones de orden  $10^{-6}$  que resultan totalmente despreciables.

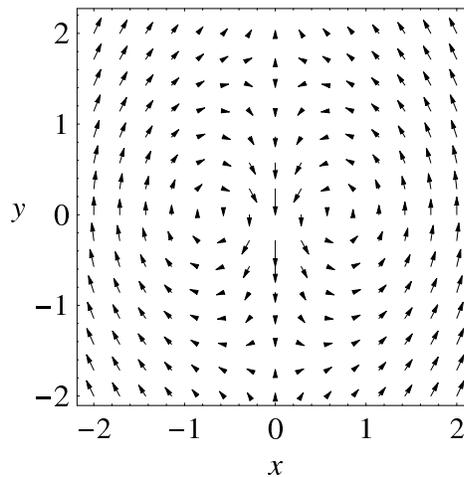


Figura 3.1: Campo vectorial de velocidad.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

En la Figura 3.3 observamos los perfiles de la componente vertical de velocidad  $v$  en función de  $y$  para distintos valores de  $x$ . Notamos que lejos de la fuente de campo magnético ( $y \rightarrow \pm 2$ ), la velocidad tiende a cero, mientras que al acercarnos a la fuente de campo magnético ( $y \rightarrow 0$ ) la velocidad incrementa su magnitud hasta alcanzar un máximo cuando  $x = 0$ . Los perfiles correspondientes a  $x = 0.1$  y  $x = 0.2$  muestran un máximo local en  $y = 0$ , este comportamiento

da cuenta sobre los cambios en la dirección de la velocidad al atravesar el vórtice derecho.

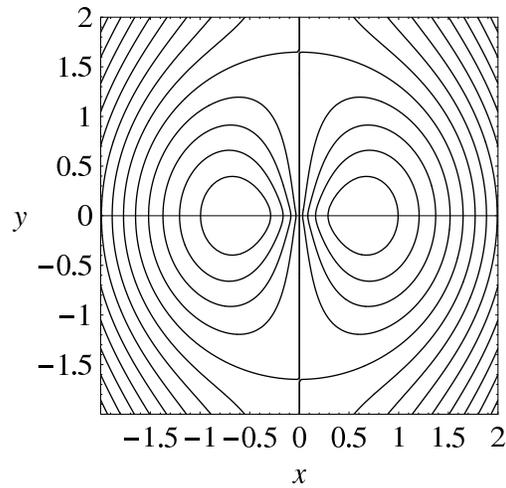


Figura 3.2: Líneas de corriente.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

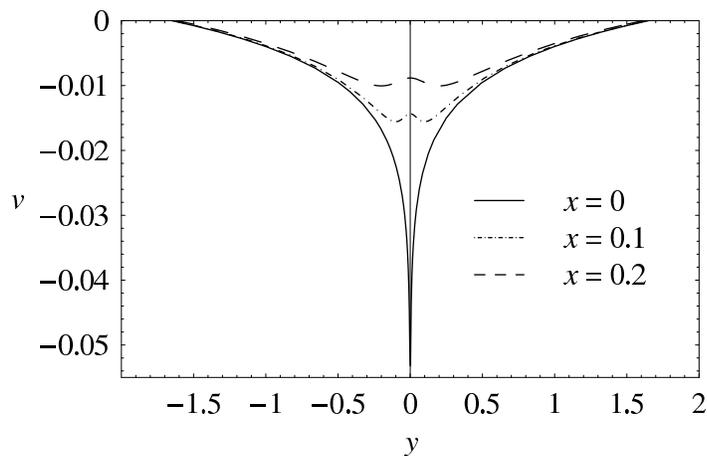


Figura 3.3: Componente vertical de la velocidad  $v$  en función de  $y$  para  $x$  constante.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

La Figura 3.4 contiene perfiles de la componente vertical de la velocidad  $v$  en función de la coordenada  $x$  para  $y = \text{constante}$ . Nuevamente observamos que la velocidad máxima se alcanza precisamente en el origen donde, de hecho, la velocidad es infinita en el modelo matemático. Nótese que para  $y = 0.3$  y  $y = 0.6$  la

velocidad también alcanza un máximo cuando  $x = 0$ . Asimismo observamos que al atravesar los vórtices de izquierda a derecha la velocidad cambia de positiva a negativa y nuevamente a positiva.

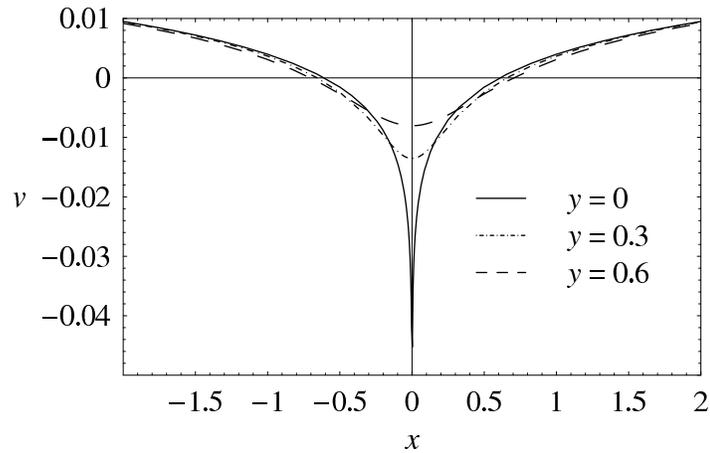


Figura 3.4: Componente vertical de la velocidad  $v$  en función de  $x$  para  $y$  constante.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

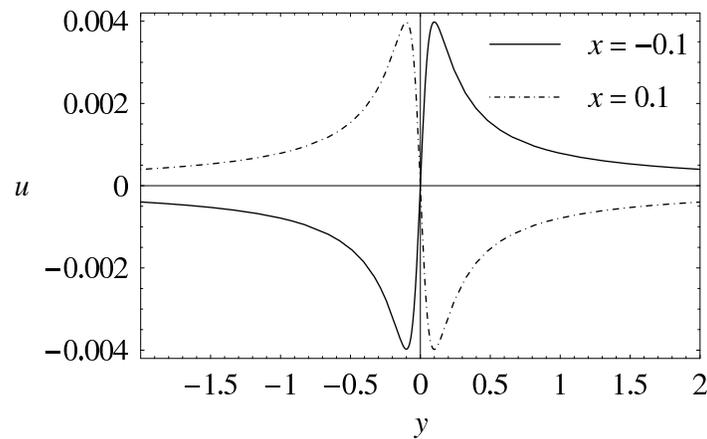


Figura 3.5: Componente horizontal de la velocidad  $u$  en función de  $y$  para  $x$  constante.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

En la Figura 3.5 se muestran los perfiles para la componente de velocidad horizontal  $u$  en función de la coordenada vertical  $y$  para  $x = \text{constante}$ . Si observamos

el perfil  $x = 0.1$ , al movernos a lo largo de la coordenada  $y$  la velocidad se incrementa en dirección positiva en el cuadrante inferior derecho debido a que el vórtice del lado derecho gira en sentido antihorario, mientras que se vuelve negativa, pasando por cero en el centro geométrico, en el cuadrante superior derecho. Puesto que el vórtice izquierdo gira en sentido horario, el perfil  $x = -0.1$  tiene la forma inversa del perfil  $x = 0.1$ .

La Figura 3.6 presenta perfiles de  $u$  en función de la coordenada horizontal  $x$  para  $y = \text{constante}$ . En el perfil  $y = 0.1$ , cuando nos movemos en dirección de la coordenada  $x$  atravesamos ambos vórtices por encima del eje horizontal  $x$ , por tanto la velocidad aumenta puesto que el vórtice izquierdo gira en sentido horario, haciéndose cero al pasar por el centro para enseguida disminuir, debido a que el vórtice derecho gira en sentido antihorario. Debido a que en el perfil  $y = -0.1$  atravesamos ambos vórtices por debajo del eje horizontal  $x$ , la curva se invierte respecto al caso  $y = 0.1$ .

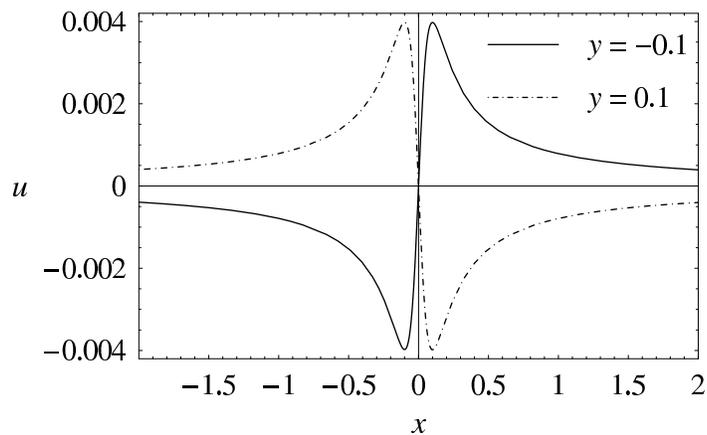


Figura 3.6: Componente horizontal de la velocidad  $u$  en función de  $x$  para  $y$  constante.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

La Figura 3.7 muestra las isólinas de vorticidad del flujo. En ella se puede notar que la vorticidad es simétrica respecto a ambos ejes coordenados, lo que muestra que los efectos difusivos dominan en el flujo.

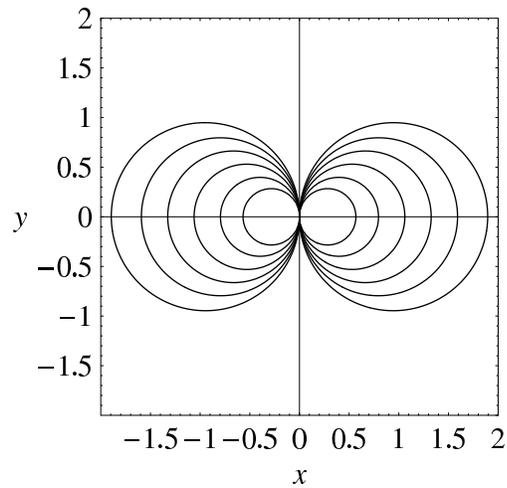


Figura 3.7: Islóneas de vorticidad.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

La Figura 3.8 muestra como varía la vorticidad en función de la coordenada  $y$  para  $x = \text{constante}$ . Observamos que la vorticidad es apreciable únicamente y se intensifica alrededor del centro geométrico. El perfil  $x = -0.1$  es idéntico al perfil  $x = 0.1$  pero invertido. Esto se debe a que se refieren al vórtice izquierdo y derecho, respectivamente, los cuales tienen vorticidad de la misma magnitud pero de sentido opuesto.

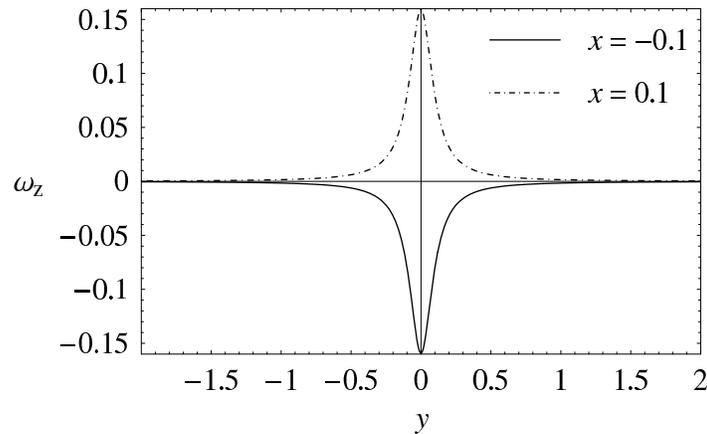


Figura 3.8: Vorticidad  $\omega_z$  en función de  $y$  para  $x$  constante.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

En la Figura 3.9 observamos los perfiles del campo de presión en función de  $y$

cuando  $x = \text{constante}$ . La presión presenta un salto en las vecindades del origen. Este comportamiento se puede explicar de manera sencilla y aproximada con la ecuación de Bernoulli. Si observamos el perfil  $x = 0.1$ , cerca del origen la magnitud de la velocidad aumenta, por ende la presión disminuye tomando valores negativos; al alejarse del centro la magnitud de velocidad disminuye, por lo que la presión aumenta.

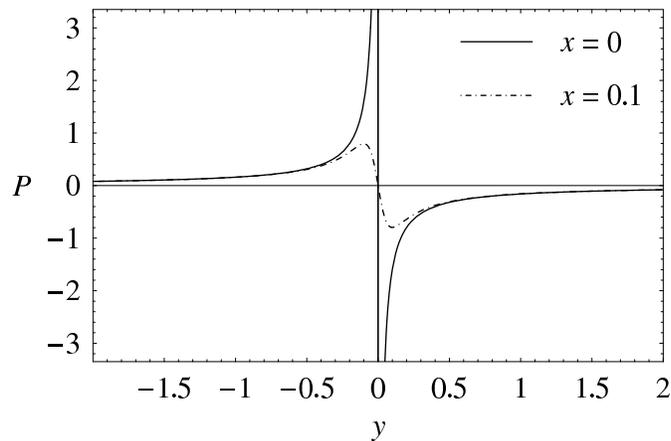


Figura 3.9: Presión  $P$  en función de  $y$  para  $x$  constante.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

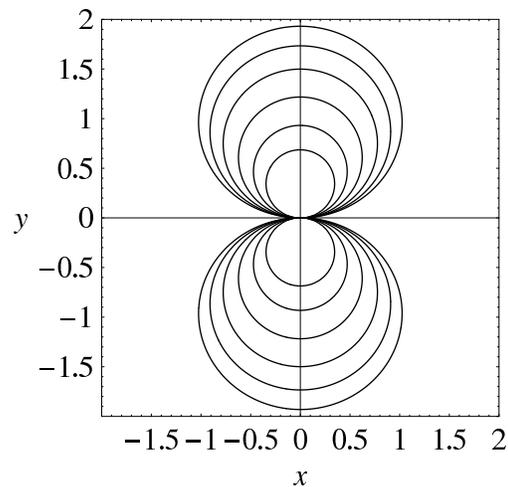


Figura 3.10: Isóneas de campo magnético inducido.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

En la Figura 3.10 se muestran las isolíneas del campo magnético inducido, mientras que en las Figuras 3.11 y 3.12 se muestran sus perfiles en función de  $y$  y  $x$  respectivamente. En las figuras se aprecia que el campo magnético inducido es intenso en la periferia del origen, además de ser simétrico respecto a ambos ejes coordenados.

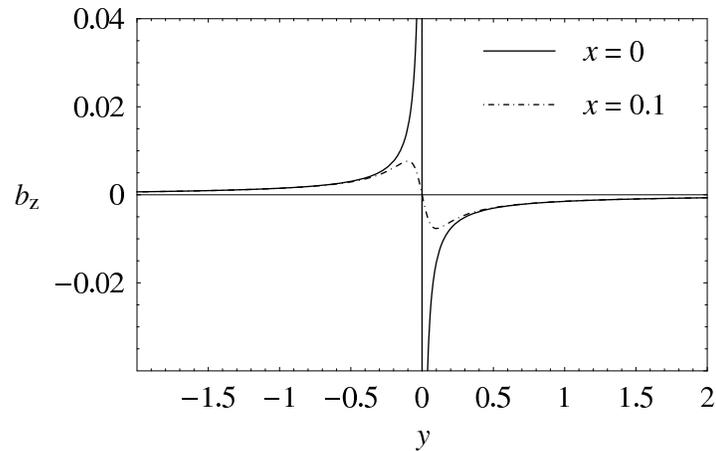


Figura 3.11: Campo magnético inducido  $b_z$  en función de  $y$  para  $x$  constante.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

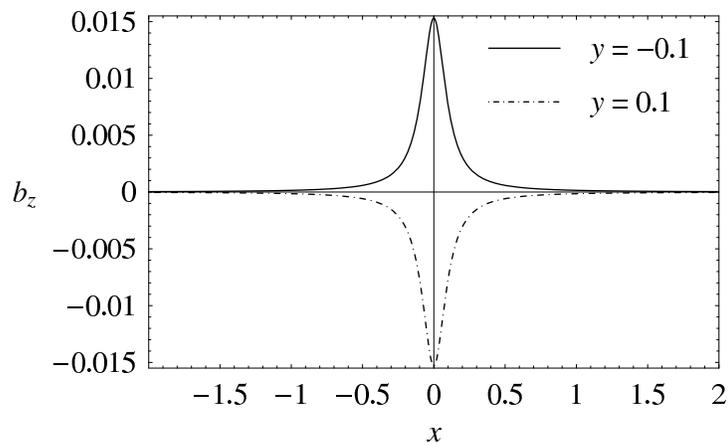


Figura 3.12: Campo magnético inducido  $b_z$  en función de  $x$  para  $y$  constante.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

La Figura 3.13 muestra el campo vectorial de la densidad de corriente inducida. Se puede observar la formación de dos circuitos de corriente, el circuito inferior gira en sentido antihorario y el superior gira en sentido horario. En la vecindad del origen las corrientes de ambos circuitos se suman para alcanzar la corriente inducida máxima en dirección negativa de la coordenada horizontal  $x$ . Nótese que esta corriente está en sentido opuesto al de la corriente aplicada. La corriente inducida interactúa con el campo magnético aplicado y da lugar a una fuerza de Lorentz opuesta a la fuerza magnética que ocasiona el movimiento, es decir, actúa como un freno magnético.

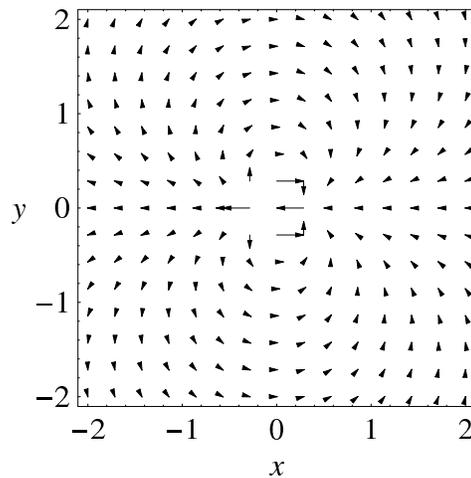


Figura 3.13: Campo vectorial de la densidad de corriente inducida.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

Aunque se tiene el campo de densidad de corriente inducida, las soluciones obtenidas no toman en cuenta su efecto sobre el flujo (freno magnético), además no todas satisfacen las condiciones a la frontera y sólo son válidas para números de Reynolds pequeños.



# Capítulo 4

## Solución numérica del modelo bidimensional

Las limitaciones encontradas en las soluciones analíticas hacen necesaria la búsqueda de soluciones numéricas que permitan extender el rango de números de Reynolds y Hartmann analizados, así como evitar las divergencias en el origen y en regiones alejadas de éste. También es de interés poder analizar efectos no lineales en el flujo. En este capítulo presentaremos un modelo numérico puramente bidimensional que ignora la presencia del fondo del recipiente que contiene al electrolito. En el capítulo 5, extenderemos este modelo para incluir el efecto de la fricción causada por el fondo del contenedor.

Para la simulación numérica utilizamos una formulación basada en las variables primitivas velocidad y presión y el campo magnético inducido como variable electromagnética. A continuación se expondrá el método utilizado así como las aproximaciones y pruebas realizadas para evaluar el desempeño numérico.

### 4.1. Campo magnético aplicado

En el experimento el campo magnético es producido por un imán dipolar con geometría cilíndrica. En la simulación numérica, el campo se modela mediante una superficie aislante magnetizada de geometría rectangular uniformemente polarizada en la dirección normal, para el que existe una expresión analítica [McCaig 1977]. Aunque estrictamente el campo es tridimensional, la contribución dominante del campo aplicado es la componente normal a lo largo de la dirección  $z$ , por lo que será la única que consideraremos en el análisis. Este tipo de suposición para modelar campos magnéticos no uniformes ha dado resultados razonables [Cuevas et al. 2006]. En términos dimensionales, poniendo el siste-

ma coordenado en el centro de la superficie rectangular cuyas dimensiones son  $X_0 = 2a$  y  $Y_0 = 2b$ , la componente normal del campo producido por la superficie magnetizada situada sobre el plano  $Z = Z_0$ , está dada por la expresión analítica [McCaig 1977]

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_z^0 = \xi B_m \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{(X+a)(Y+b)}{(Z-Z_0) [(X+a)^2 + (Y+b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \right. \\ + \tan^{-1} \left( \frac{(X-a)(Y-b)}{(Z-Z_0) [(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \\ - \tan^{-1} \left( \frac{(X+a)(Y-b)}{(Z-Z_0) [(X+a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \\ \left. - \tan^{-1} \left( \frac{(X-a)(Y+b)}{(Z-Z_0) [(X-a)^2 + (Y+b)^2 + (Z-Z_0)^2]^{1/2}} \right) \right\} \quad (4.1) \end{aligned}$$

donde  $\xi$  es una constante de normalización. Por simplicidad, consideramos que la superficie magnetizada tiene forma cuadrada, esto es,  $2a = 2b = d$ . Recordemos que  $d$  es la escala geométrica utilizada para adimensionalizar el sistema de ecuaciones. Ya que el flujo tiene lugar únicamente en un plano determinado donde  $z = \text{constante}$ , se supone también que el campo magnético aplicado es una función independiente de la coordenada  $z$ . La Figura 4.1 muestra la distribución adimensional de la componente normal del campo. El campo se normalizó de tal forma que el valor máximo del campo en la región central es igual a 1. Consideramos que la superficie magnetizada está separada del plano de movimiento por una distancia  $z_0 = h$ . El campo muestra un rápido decaimiento al ir alejándose del centro, en los bordes de la placa la intensidad del campo es de 36 % del valor en el centro, y sólo un 4 % a una distancia adimensional de dos unidades. Debido a su rápido decaimiento, el campo presenta alta intensidad sólo en una zona muy localizada que para efectos de la simulación numérica, se supondrá suficientemente alejada de las fronteras del sistema.

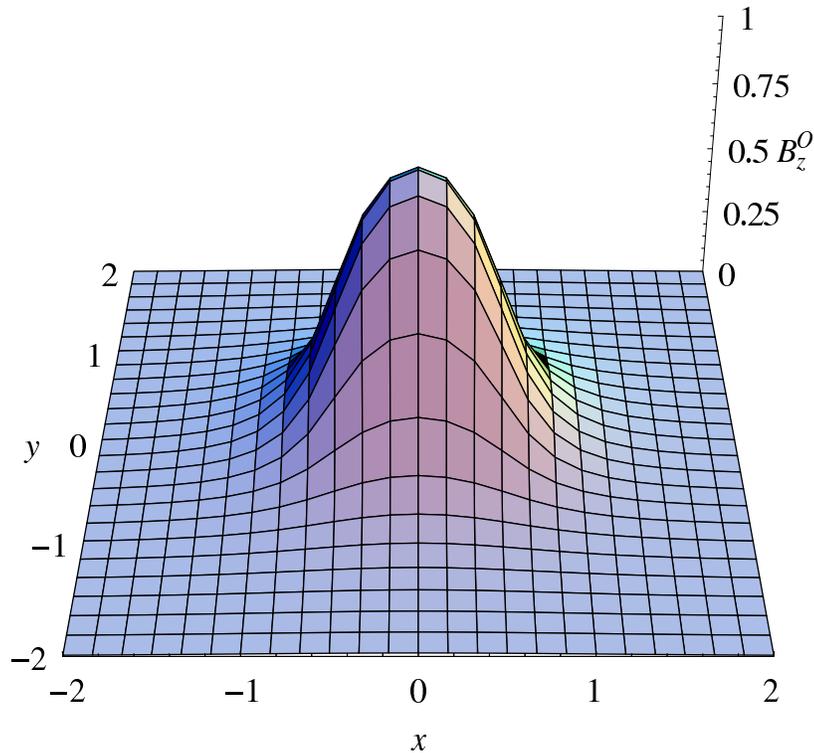


Figura 4.1: Campo magnético aplicado (adimensional) producido por una placa cuadrada magnetizada uniformemente en la dirección normal, la longitud de la placa es  $2a = 1$ .

Debe notarse que mientras que la expresión tridimensional del campo producido por la superficie magnetizada satisface exactamente las ecuaciones magnetostáticas (2.35), al conservar sólo la componente normal, el campo ya no es irrotacional. No obstante, como veremos más adelante, manteniendo únicamente esta componente es posible describir la dinámica de flujo con resultados razonables. De hecho, las componentes del campo en las direcciones  $x$  y  $y$  son muy débiles comparadas con la componente normal y su influencia en el flujo es pequeña.

## 4.2. Condiciones de frontera y condición inicial

La solución numérica se obtuvo en dominios de integración rectangulares, por lo que se cuenta con cuatro fronteras. Para el campo de velocidad se supone condición de no deslizamiento en las cuatro fronteras, simulando las paredes que contienen al electrolito:

$$u = 0, \quad v = 0. \quad (4.2)$$

Además, suponemos que el campo magnético inducido es cero a una distancia suficientemente grande de la fuente del campo aplicado. Ya que suponemos que las fronteras que contienen al fluido están suficientemente alejadas de la zona donde se localiza el imán, se impuso que la única componente del campo inducido satisface la condición

$$b_z|_S = 0, \quad (4.3)$$

donde el subíndice  $S$  denota las fronteras del dominio de integración. Por su parte, las paredes que confinan al fluido se suponen eléctricamente aislantes, por lo que las corrientes inducidas forman trayectorias cerradas en el fluido.

Como condición inicial tenemos que el fluido está en reposo, por lo que

$$\text{en } t = 0, \quad u = v = b_z = 0, \quad (4.4)$$

es decir, de acuerdo con la ecuación (2.45), al no haber movimiento, el campo magnético inducido también es cero.

### 4.3. Implementación numérica

Para dar solución numérica a este problema, se utilizó el método numérico descrito en [Griebel et al. 1998] que se extendió para considerar flujos MHD [Cuevas et al. 2006]. De acuerdo a este procedimiento, las ecuaciones (2.42)-(2.45) fueron discretizadas utilizando un método de diferencias finitas. La discretización espacial es de segundo orden en un arreglo de malla uniforme, y se utilizó el método de Euler para la discretización temporal. Las diferentes variables están localizadas en distintas partes de la malla. Las componentes de velocidad  $u$  y  $v$  se definieron en los puntos medios verticales y horizontales respectivamente de la malla computacional, mientras que la presión y el campo magnético inducido se definieron en el centro de la celda. Este arreglo de las variables previene posibles oscilaciones de la presión. Los términos difusivos se discretizaron utilizando diferencias centrales. Para los términos convectivos se utilizó una mezcla de diferencias centrales y discretización por celda donante (*donor-cell*)<sup>1</sup>. El campo de velocidad y campo magnético inducido cumplen con las condiciones de frontera (4.2) y (4.3), respectivamente, y con la condición inicial (4.4).

---

<sup>1</sup>Ver Anexo.

La discretización de las ecuaciones de cantidad de movimiento (2.43) y (2.44) es de la forma

$$\begin{aligned} u^{(n+1)} &= u^{(n)} + \delta t \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + Re j_y^i B_z^0 - \frac{\partial P}{\partial x} \right], \\ v^{(n+1)} &= v^{(n)} + \delta t \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} - Re (1 + j_x^i) B_z^0 - \frac{\partial P}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En el paso del tiempo ( $n$ ) se conocen todas las variables, mientras que aquellas en el tiempo ( $n+1$ ) son las variables a conocer. Las ecuaciones han sido reescritas utilizando la ecuación de continuidad (2.42). Si definimos

$$\begin{aligned} F^{(n)} &= u^{(n)} + \delta t \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + Re j_y^i B_z^0 \right], \\ G^{(n)} &= v^{(n)} + \delta t \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} - Re (1 + j_x^i) B_z^0 \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

llegamos a las siguientes abreviaciones

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \delta t \frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial x}, \quad v^{(n+1)} = G^{(n)} - \delta t \frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial y}, \quad (4.7)$$

donde las velocidades se asocian al tiempo ( $n$ ), mientras que a las derivadas correspondientes a la presión se asocian al tiempo ( $n+1$ ). Esta discretización del tiempo en las ecuaciones de momento es explícita en las velocidades e implícita en la presión. Sustituyendo la relación (4.7) en la ecuación de continuidad (2.42) se llega a la ecuación de Poisson para la presión  $p^{(n+1)}$

$$\frac{\partial^2 P^{(n+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{(n+1)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta t} \left( \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial y} \right) \quad (4.8)$$

En resumen, para calcular las variables en el tiempo ( $n+1$ ) se siguen los siguientes pasos:

- 1: Calcular  $F^{(n)}$  y  $G^{(n)}$  de acuerdo a la relación (4.6)
- 2: Obtener la presión  $P^{(n+1)}$  de la ecuación de Poisson (4.8)<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Para resolver la ecuación de Poisson para la presión se utilizaron condiciones de Neumann en las fronteras, de acuerdo al método de proyección de Chorin y Teman.

- 3: Obtener el campo inducido  $b_z^{(n+1)}$  para calcular las corrientes inducidas
- 4: Calcular el nuevo campo de velocidad utilizando la ecuación (4.7)

Para resolver la ecuación de presión se utilizó el método de Gauss-Seidel, la ecuación se iteró hasta alcanzar la divergencia del campo de velocidades en el orden de  $10^{-5}$ . La ecuación para el campo magnético inducido (2.45) se resolvió al tiempo  $(n+1)$  utilizando el mismo método. Las componentes de densidad de corriente se calcularon a través la relación (2.34), para el cual la condición de divergencia cero se satisface por la identidad vectorial  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = 0$ .

## 4.4. Resolución de malla, paso en el tiempo y localización del imán

Para efectuar la simulación se utilizó un dominio cuadrado de  $25 \times 25$ . Al igual que en el experimento, el centro de la placa cuadrada magnetizada de lado unitario que genera el campo aplicado se colocó en el centro geométrico, es decir, en las coordenadas  $x = 12.5$  y  $y = 12.5$ . De esta manera, la distancia entre la placa y las fronteras es lo suficientemente grande para cumplir la condición que el campo magnético inducido en las fronteras es cero. En la solución numérica se utilizó una malla ortogonal equidistante con una razón de 1 : 4, es decir, cada unidad adimensional es seccionada cuatro veces de manera uniforme. En los distintos casos resueltos, la malla es suficientemente fina para resolver las capas cortantes que se forman debido a la acción de las fuerzas magnéticas. La integración temporal se realizó usando un paso en el tiempo pequeño:  $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ . Con estas condiciones se obtienen divergencias del campo de velocidad menores a  $3 \times 10^{-4}$ , cumpliendo así con la condición  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en una buena aproximación.

## 4.5. Resultados

### 4.5.1. Comparación con el modelo analítico

En primer instancia, buscamos comparar al menos cualitativamente los resultados obtenidos a través de la simulación numérica con aquellos del análisis analítico. Es por ello que los parámetros adimensionales en este caso son; al igual que en el análisis analítico,  $Ha = 0.2$ , y  $Re = 0.1$ .

La Figura 4.2 muestra el campo vectorial de velocidad. En ella, al igual que en la Figura 3.1 para la solución analítica, se puede observar la formación de un

dipolo; el vórtice del lado izquierdo gira en sentido horario mientras que el vórtice del lado derecho gira en sentido antihorario. Una diferencia entre los dos casos es la distancia de separación entre los núcleos de los vórtices; en la solución numérica la distancia es mayor, ya que en este caso el campo es generado por una placa magnetizada de geometría cuadrada de longitud 1, mientras que en la solución analítica el campo es producido por un dipolo puntual. La Figura 4.3 muestra las líneas de corriente de este campo vectorial. En ella se puede apreciar la simetría del dipolo y la distancia de separación entre los vórtices. Aunque no es posible realizar una comparación cuantitativa directa entre los resultados analíticos y los numéricos debido a que el campo magnético aplicado es distinto en cada caso, puede observarse que la solución numérica mantiene la simetría que caracteriza el transporte esencialmente difusivo de vorticidad.

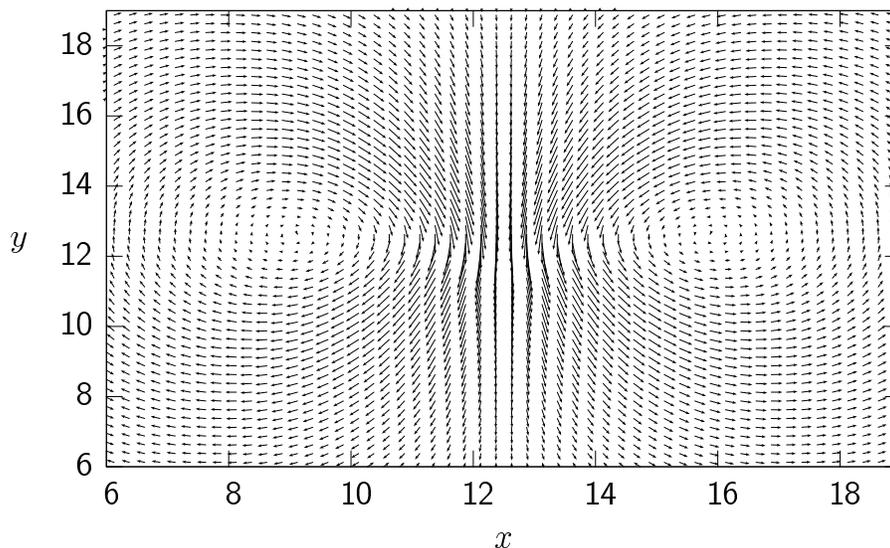


Figura 4.2: Campo vectorial de velocidad.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

En las Figuras 4.4 y 4.5 se muestran los perfiles de las componentes de velocidad  $v$  y  $u$  en función de  $y$  para  $x = 13.125$ . Observamos que estos perfiles son cualitativamente similares a los obtenidos con la solución analítica (ver Figuras 3.3 y 3.5).

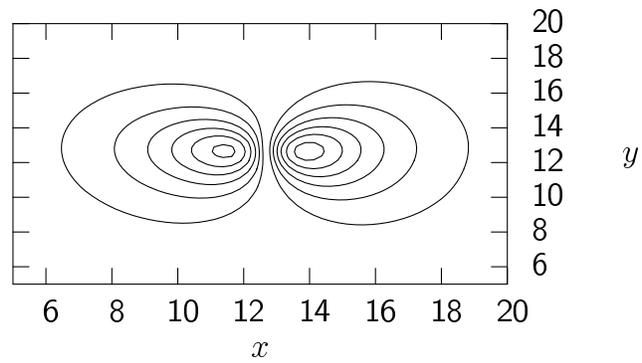


Figura 4.3: Líneas de corriente.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

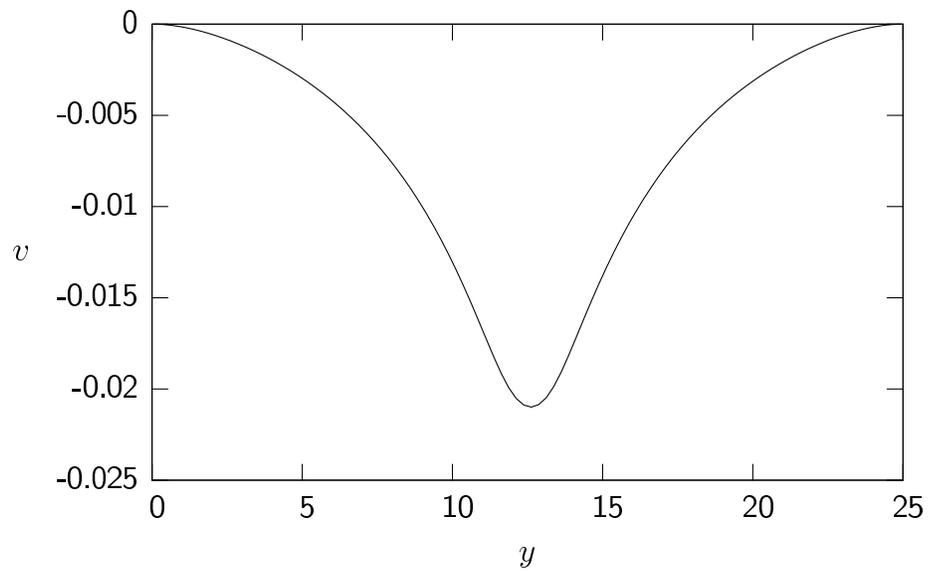


Figura 4.4: Componente vertical de velocidad  $v$  en función de  $y$  para  $x = 13.125$ .  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

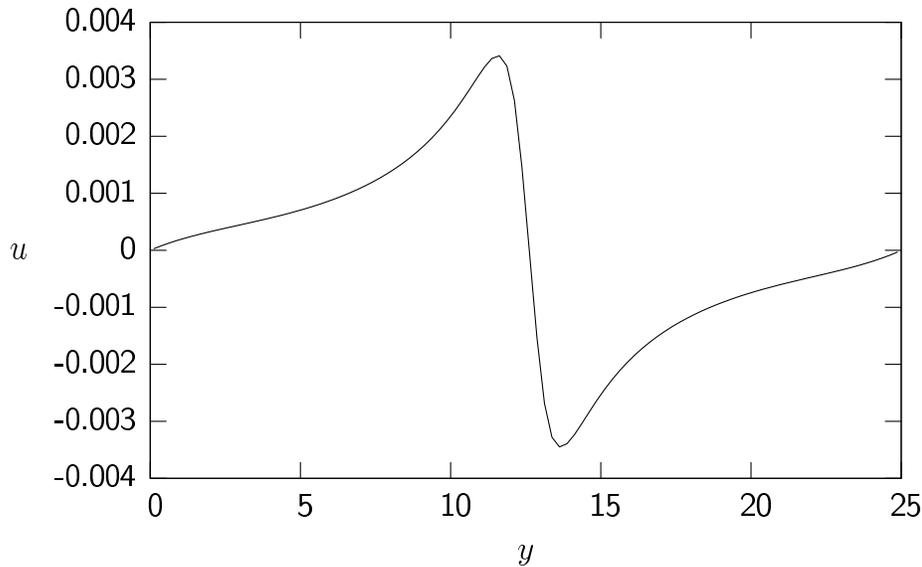


Figura 4.5: Componente horizontal de velocidad  $u$  en función de  $y$  para  $x = 13.125$ .  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

Las Figuras 4.6 y 4.7 muestran las isolíneas de vorticidad y de campo magnético inducido, respectivamente. Claramente se observa la simetría tanto en la generación de vorticidad como en la inducción de campo magnético. Como sabemos, las isolíneas de campo magnético son las líneas de corriente de la densidad de corriente eléctrica inducida, las cuales forman circuitos cerrados a ambos lados del eje horizontal. La Figura 4.8 muestra precisamente el campo vectorial de la densidad de corriente inducida. Se observan nítidamente los dos circuitos de corriente que se intensifican en la zona donde el campo magnético es más intenso, fluyendo en la dirección negativa del eje  $x$ . Como ya mencionamos, la corriente inducida fluye en dirección opuesta a la aplicada y al interactuar con el campo magnético aplicado produce un frenado magnético conocido como frenado de Hartmann. Para números de Hartmann pequeños este frenado es despreciable.

La Figura 4.9 muestra el comportamiento de la componente horizontal de densidad de corriente inducida  $j_x^i$  en función de  $x$  para  $y = 13.125$ . Se observa que en el caso de la solución numérica no se tiene una densidad de corriente infinita, es decir, no tenemos el problema de la discontinuidad de la solución analítica, puesto que el campo magnético aplicado es finito en todo el dominio.

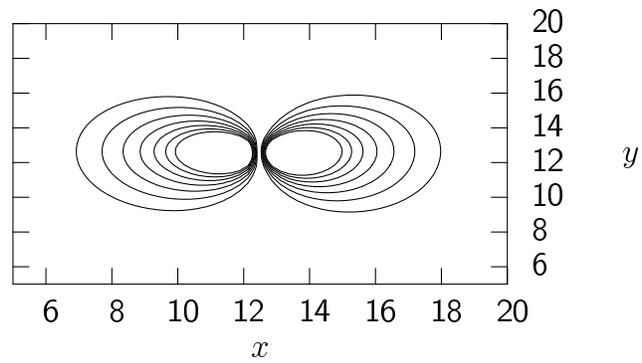


Figura 4.6: Isolíneas de vorticidad.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

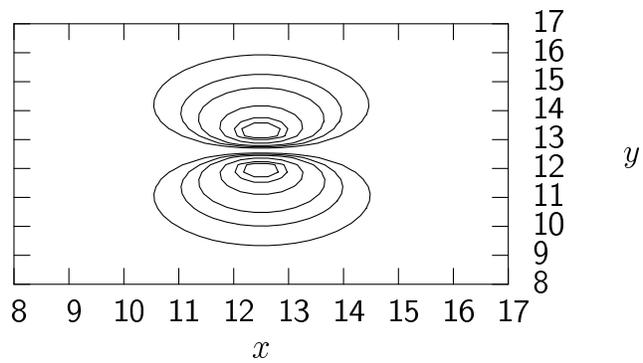


Figura 4.7: Isolíneas de campo magnético inducido.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

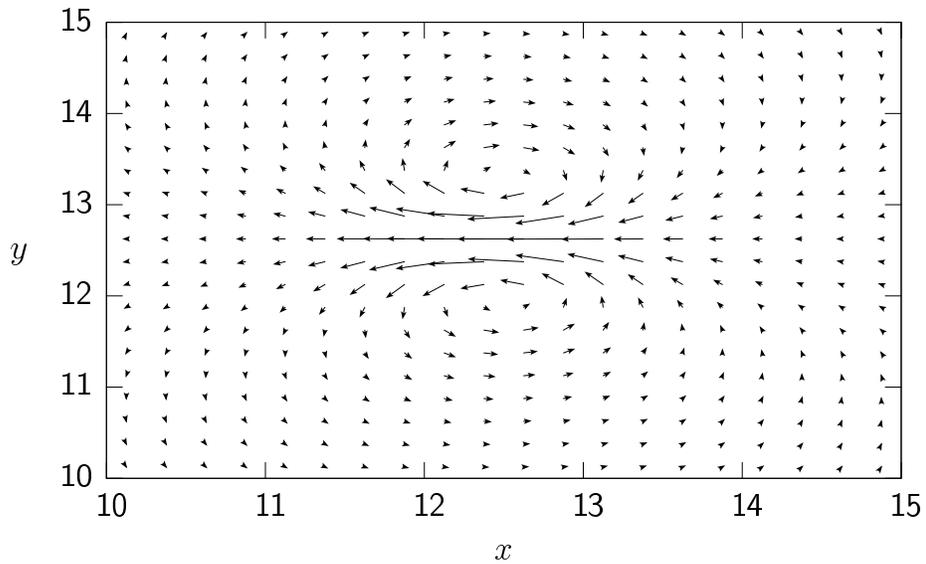


Figura 4.8: Campo vectorial de densidad de corriente inducida.  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

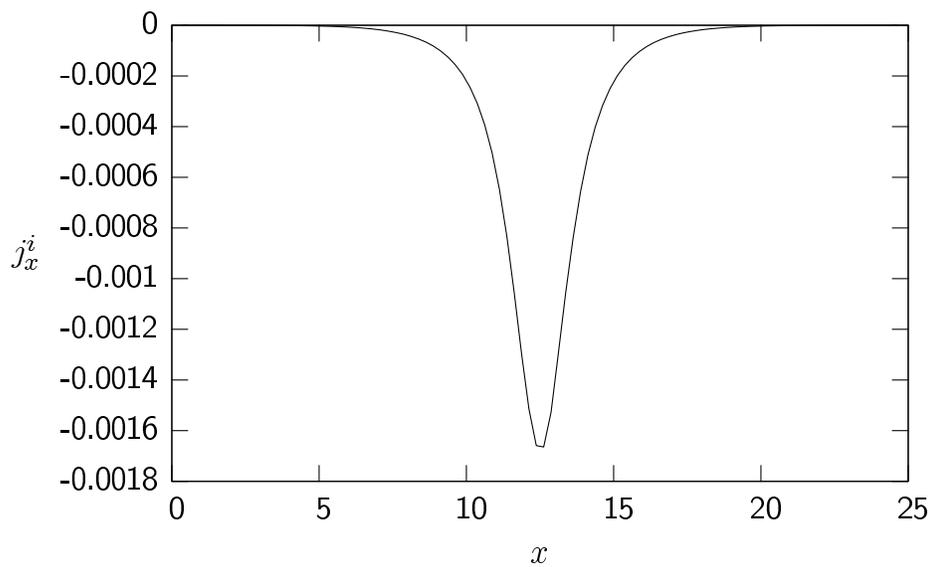


Figura 4.9: Componente horizontal de densidad de corriente inducida  $j_x^i$  en función de  $x$  para  $y = 13.125$ .  $Re = 0.1$ ,  $Ha = 0.2$ .

Podemos afirmar que las soluciones numérica y analítica concuerdan de manera

cualitativa y reproducen razonablemente el comportamiento de los vórtices generados por fuerzas electromagnéticas cuando los números de Hartmann y Reynolds son pequeños. A continuación exploraremos el efecto de incrementar  $Re$  manteniendo  $Ha$  pequeño. Más adelante analizaremos el efecto de considerar  $Ha$  grandes.

#### 4.5.2. Efecto del número de Reynolds

El incremento del número de Reynolds se traduce en una intensificación de las fuerzas convectivas o inerciales. Recordemos que para un fluido y un campo magnético dado,  $Re$  se incrementa al aumentar la magnitud de la densidad de corriente inyectada en el fluido, lo que ocasiona, a su vez, que la fuerza de Lorentz que impulsa al fluido y genera vorticidad sea más intensa. El efecto de incrementar  $Re$  se puede apreciar claramente en las Figuras 4.10 y 4.11, donde se muestran los campos vectoriales de velocidad para  $Re = 10$  y  $Re = 50$ , respectivamente. Cabe mencionar que el número de Hartmann se mantuvo constante ( $Ha = 0.2$ ). En ambas figuras vemos que al aumentar el número de Reynolds, se extiende el área que ocupan los vórtices, además, los núcleos de los vórtices se desplazan en la dirección negativa del eje vertical. Este desplazamiento es un efecto claro de la influencia de las fuerzas inerciales, ya que existe un arrastre de los vórtices en la dirección de la fuerza aplicada. Este efecto no lineal tiende a romper la simetría del flujo respecto al eje  $x$ . Para el caso  $Re = 50$  se logra apreciar la influencia de la frontera inferior sobre el flujo, se puede observar que la velocidad pasa de una manera rápida de un valor diferente de cero a un valor cero, para satisfacer la condición de no deslizamiento, en contraste con las otras tres fronteras donde la velocidad pasa a cero de forma gradual. Es debido a lo anterior que  $Re = 50$  es el número de Reynolds más alto que utilizamos.

Las Figuras 4.12 y 4.13 muestran las líneas de corriente para los casos  $Re = 10$  y  $Re = 50$  respectivamente. En estas figuras se observa más claramente la elongación de los vórtices que se produce al incrementar el número de Reynolds.

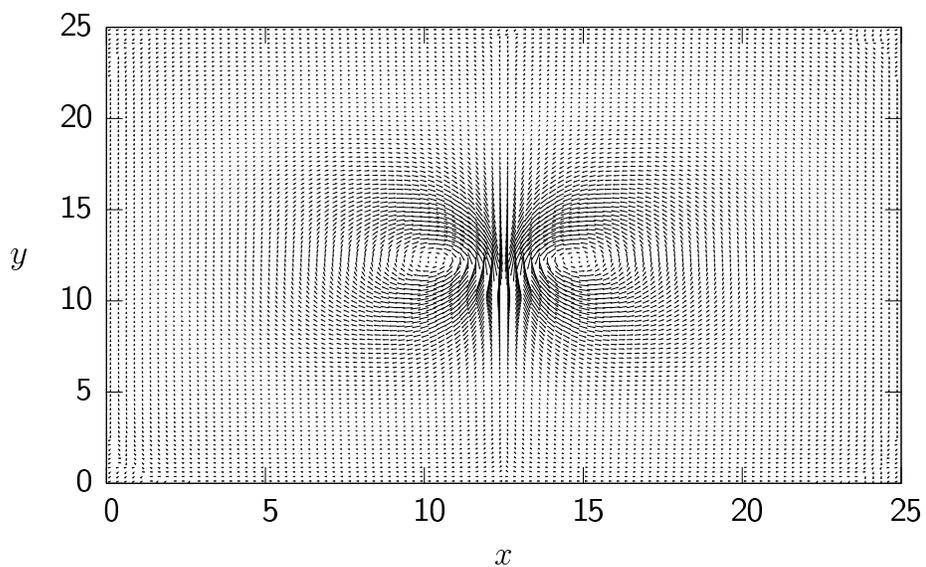


Figura 4.10: Campo vectorial de velocidad para  $Re = 10$ ,  $Ha = 0.2$ .

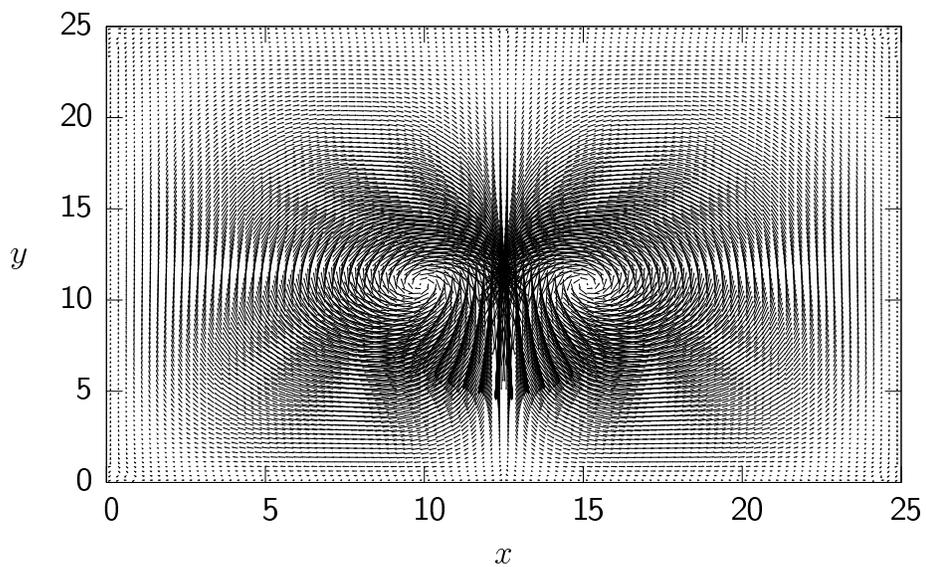


Figura 4.11: Campo vectorial de velocidad para  $Re = 50$ ,  $Ha = 0.2$ .

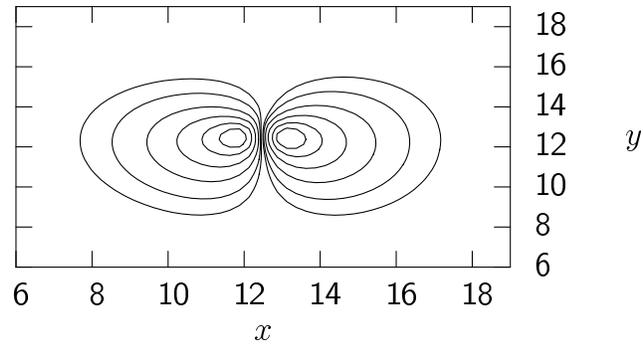


Figura 4.12: Líneas de corriente para  $Re = 10$ ,  $Ha = 0.2$ .

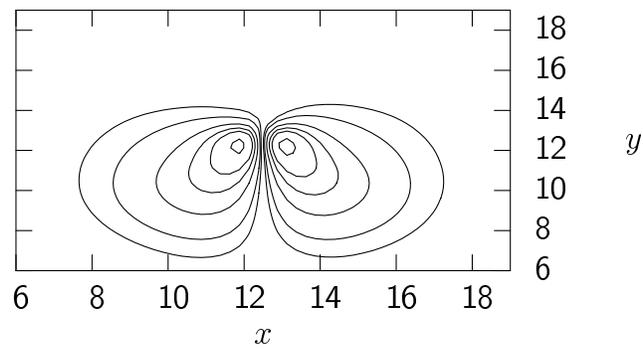


Figura 4.13: Líneas de corriente para  $Re = 50$ ,  $Ha = 0.2$ .

En la Figura 4.14 se muestra el efecto de  $Re$  sobre la componente vertical de velocidad  $v$  en función de  $y$  para  $x = \text{constante}$ . Los perfiles corresponden a la

coordenada  $x = 12.375$  que es muy cercana al centro geométrico del dominio de integración. Se observa que el perfil  $Re = 10$  es cercanamente simétrico, presentando la velocidad máxima muy cerca del punto donde el campo magnético aplicado es máximo. Para este valor de  $Re$  los efectos inerciales no son muy notorios. Sin embargo al incrementar el número de Reynolds la simetría se pierde, y el punto de velocidad máxima se desplaza hacia abajo, en dirección del flujo, mostrando claramente el efecto convectivo. Asimismo, la magnitud de la velocidad se incrementa con el número de Reynolds.

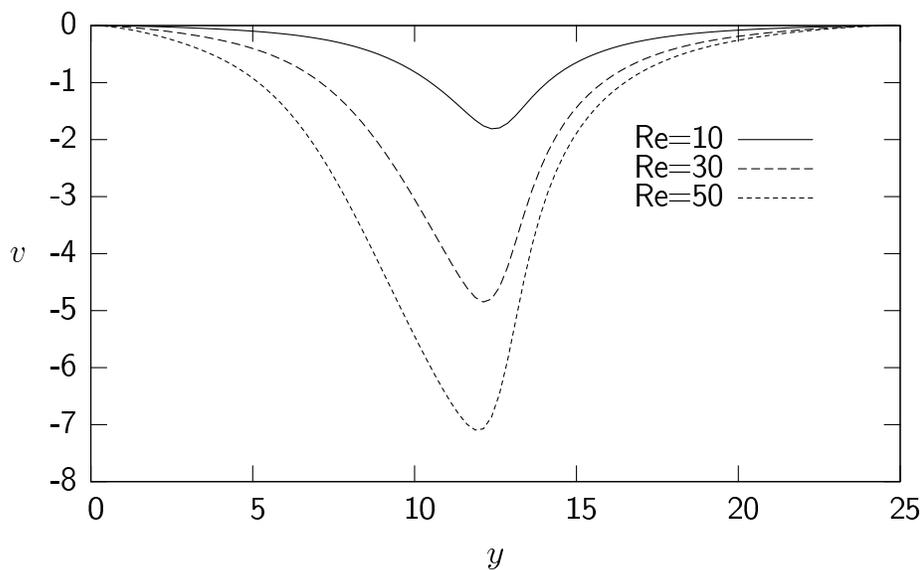


Figura 4.14: Efecto del número de Reynolds en la componente vertical de velocidad  $v$  en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .  $Ha = 0.2$ .

La Figura 4.15 muestra a la componente  $v$  en función de  $x$  para  $y = 12.375$ , y los distintos números de Reynolds. En ella notamos también el incremento de la magnitud de la velocidad al aumentar  $Re$ , aunque la simetría respecto al eje  $y$  no se pierde.

Por otro lado, las Figuras 4.16 y 4.17 muestran el impacto del aumento de  $Re$  en la componente horizontal de velocidad  $u$ . Al igual que  $v$ , la componente horizontal aumenta su magnitud con  $Re$ , aunque debe notarse que es mucho menor que la magnitud de  $v$ . Para esta componente también notamos que la simetría con el eje vertical se conserva y se pierde con el eje horizontal.

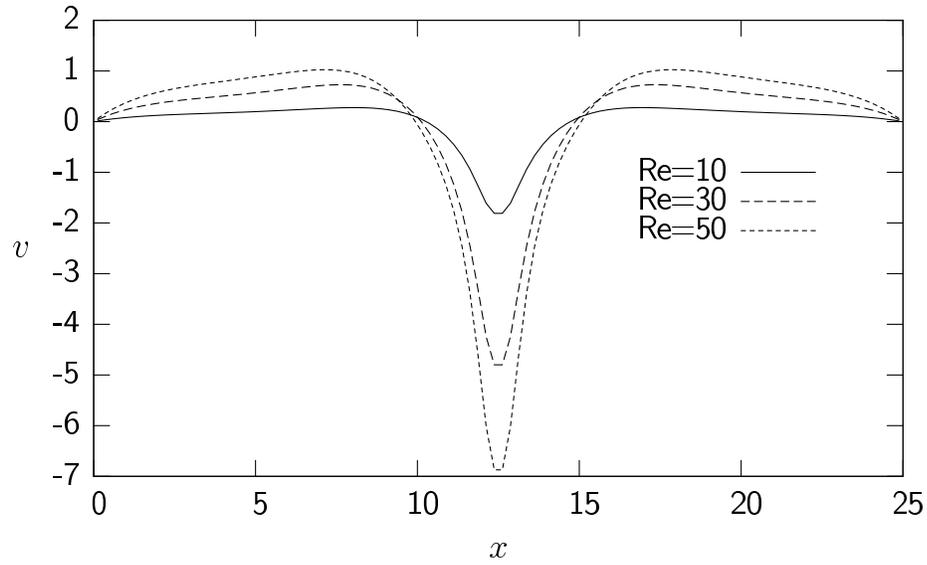


Figura 4.15: Efecto del número de Reynolds en la componente vertical de velocidad  $v$  en función de  $x$  para  $y = 12.375$ .  $Ha = 0.2$ .

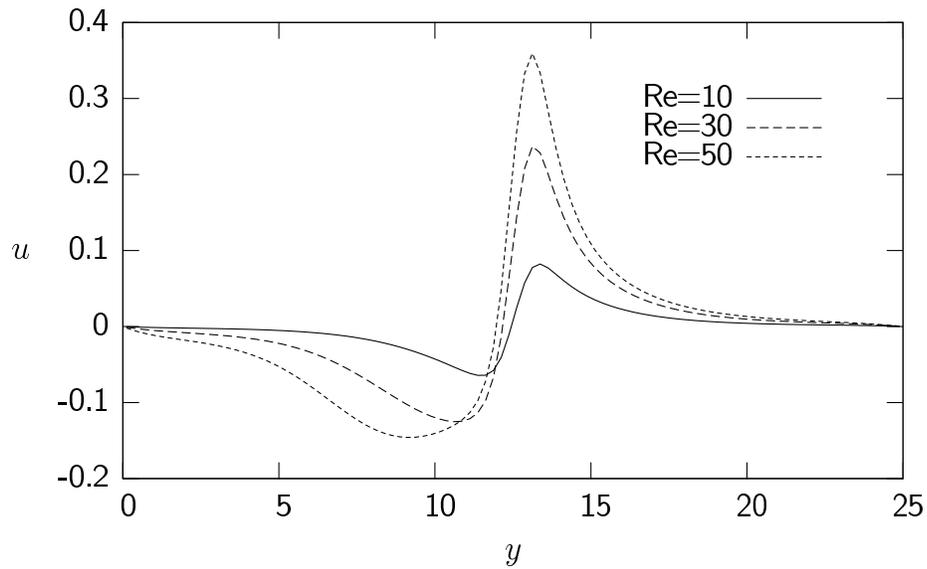


Figura 4.16: Efecto del número de Reynolds en la componente horizontal de velocidad  $u$  en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .  $Ha = 0.2$ .

Si observamos detenidamente, en la Figura 4.17 los perfiles  $Re = 30$  y  $Re = 50$

presentan sus máximos invertidos respecto al perfil  $Re = 10$ . Este efecto puede explicarse notando que cuando  $Re = 10$ , el perfil  $u$  en función de  $x$  en  $y = 12.375$  corresponde a la parte inferior de donde se localizan los núcleos de los vórtices, y que presentan velocidades negativas para  $x < 12.5$  y positivas para  $x > 12.5$ . Sin embargo, cuando  $Re = 30$  y  $50$  en  $y = 12.375$  los perfiles se encuentran por encima de los núcleos de los vórtices debido al elongamiento de éstos en la dirección negativa del eje  $y$ . En tal posición, el sentido de la velocidad se invierte. Este cambio en el sentido de la velocidad se muestra también en la Figura 4.18, donde se observan los perfiles para  $Re = 5, 10$  y  $15$ .

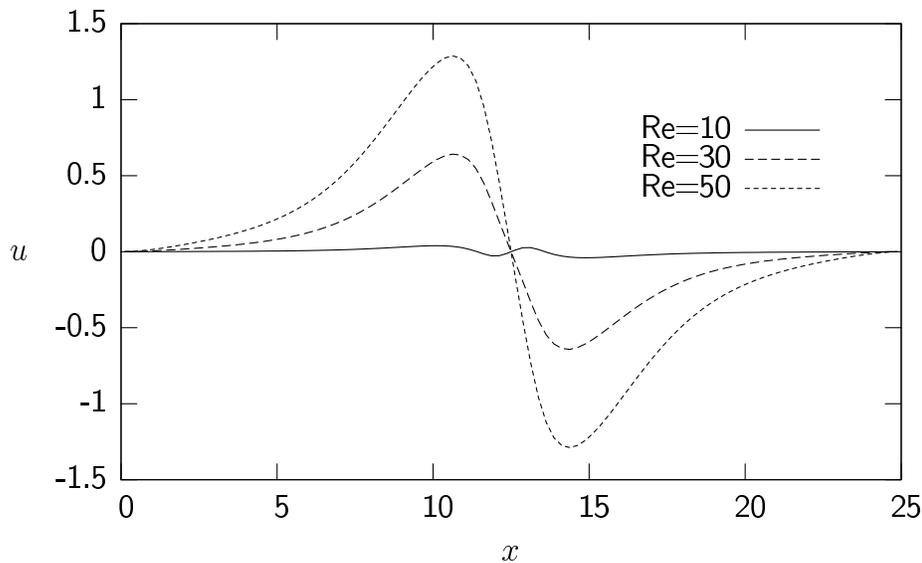


Figura 4.17: Efecto del número de Reynolds en la componente horizontal de velocidad  $u$  en función de  $x$  para  $y = 12.375$ .  $Ha = 0.2$ .

En la Figura 4.19 se muestra la velocidad máxima en función del número de Reynolds. En ella observamos un incremento no lineal al aumentar las fuerzas inerciales.

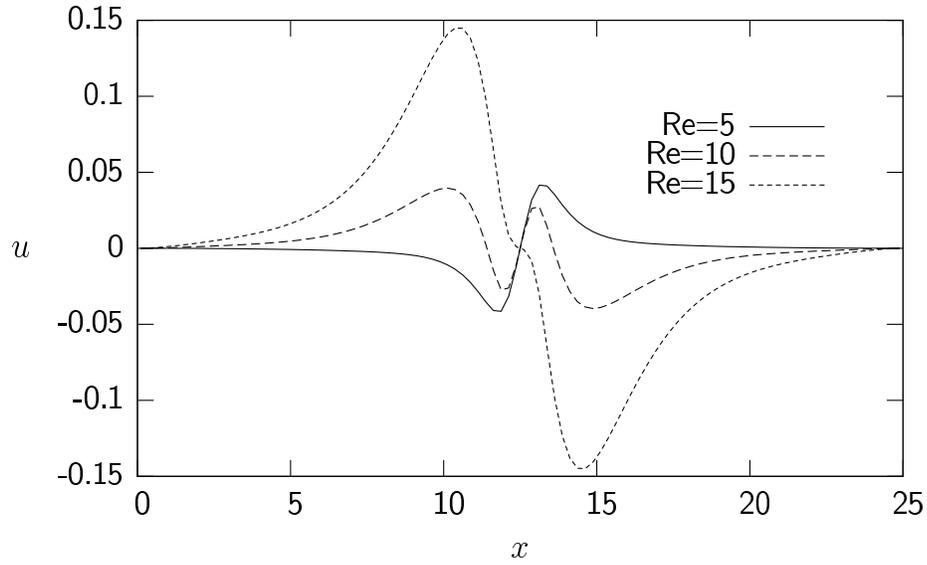


Figura 4.18: Efecto del número de Reynolds en la componente horizontal de velocidad  $u$  en función de  $x$  para  $y = 12.375$ .  $Ha = 0.2$ .

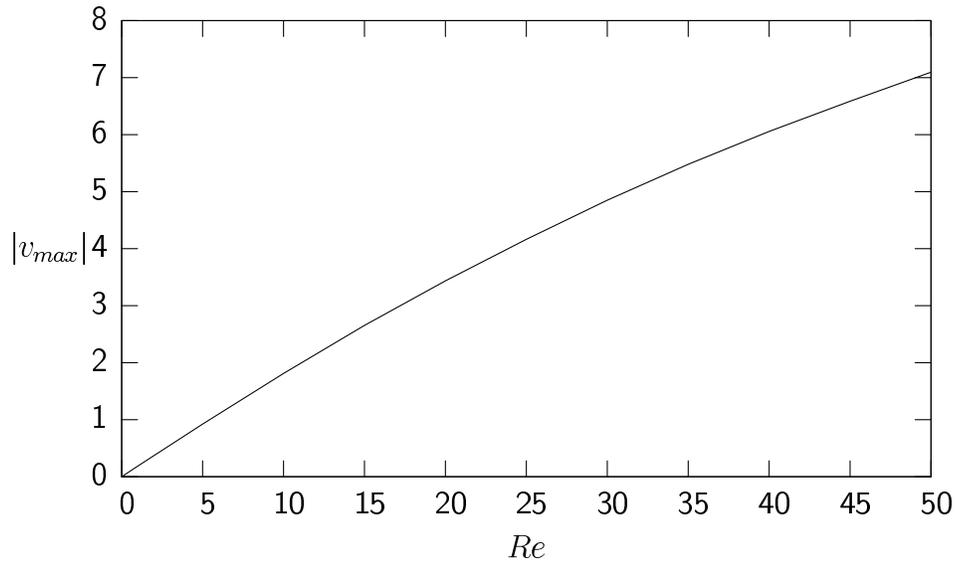


Figura 4.19: Velocidad vertical máxima como función del número de Reynolds.  $Ha = 0.2$ .

Como anteriormente se comentó, el punto de velocidad máxima se desplaza en

la dirección de la fuerza aplicada. En la Figura 4.20 se muestra la coordenada  $y$  donde se localiza la velocidad máxima como función del número de Reynolds (para los valores de  $Re$  analizados, la coordenada horizontal donde se encuentra la velocidad máxima es siempre  $x = 12.375$ ). El hecho de que el patrón encontrado sea escalonado manifiesta que la malla utilizada no es suficientemente fina para captar desplazamientos ligeros al variar  $Re$ .

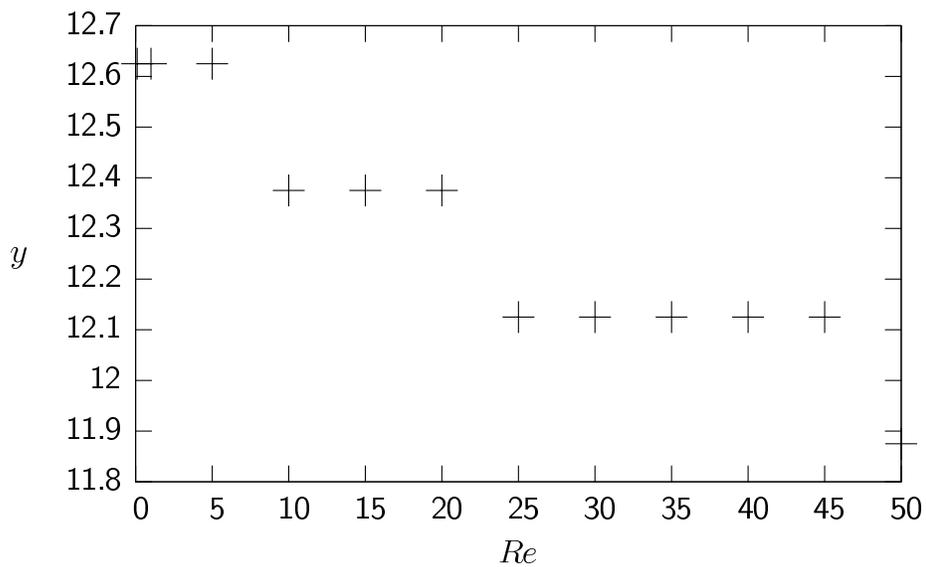


Figura 4.20: Posición de la velocidad máxima en función del número de Reynolds.  $Ha = 0.2$ .

Los isocontornos de vorticidad son cualitativamente similares a las líneas de corriente mostradas en las Figuras 4.12 y 4.13. Las Figuras 4.21 y 4.22 muestran los perfiles de vorticidad para distintos números de Reynolds. Notamos que  $\omega_z$  es apreciable en la zona de campo magnético intenso, además de incrementar su valor y perder su simetría respecto a ambos ejes con el aumento de  $Re$ .

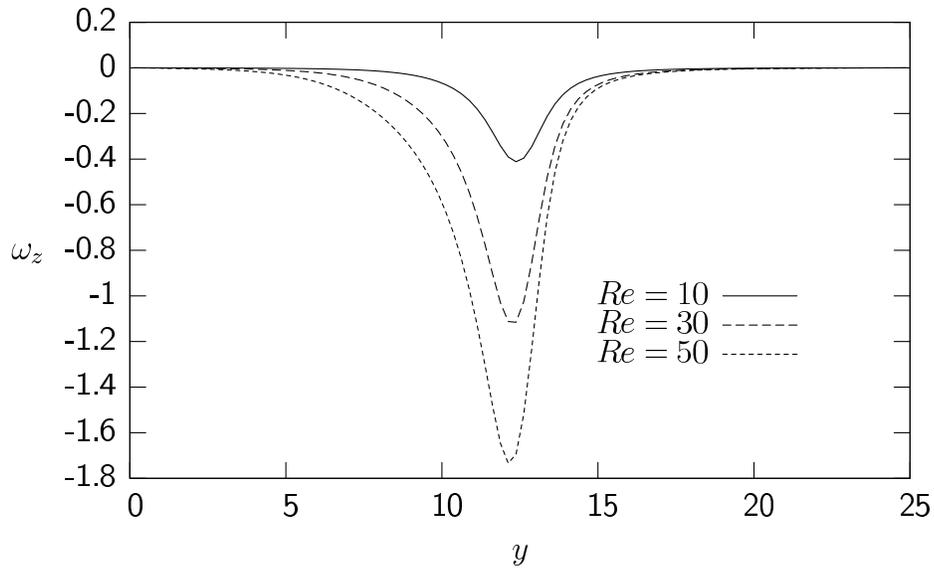


Figura 4.21: Efecto del número de Reynolds en la vorticidad  $\omega_z$  en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .  $Ha = 0.2$ .

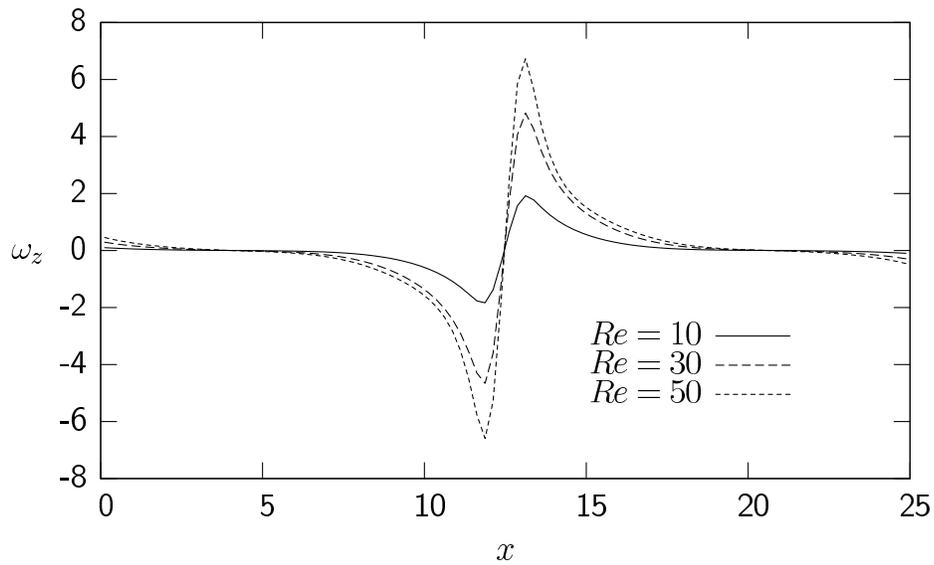


Figura 4.22: Efecto del número de Reynolds en la vorticidad  $\omega_z$  en función de  $x$  para  $y = 12.375$ .  $Ha = 0.2$ .

En la Figura 4.23 se presenta a la vorticidad en el centro geométrico como

función del tiempo para  $Re = 10, 30$  y  $50$ . Se observa que la vorticidad parte de cero, y al ir avanzando el tiempo su magnitud aumenta hasta llegar a un valor constante, indicando que el flujo llega a un estado estacionario. Cabe notar que, en los perfiles  $30$  y  $50$  la magnitud de la vorticidad aumenta y después disminuye levemente antes de alcanzar un valor constante, este comportamiento se debe a que al aumentar  $Re$  las fuerzas inerciales también aumentan, por lo que constituye un efecto inercial transitorio. Se observa que al incrementar  $Re$  la magnitud de la vorticidad también aumenta, y le toma más tiempo al flujo llegar al estado estacionario. La Figura 4.24 muestra a la vorticidad en función del tiempo para  $Re = 50$  en  $x = 12.375$  y distintas posiciones a lo largo del eje  $y$ . Esta figura muestra como cerca del máximo de campo magnético aplicado ( $y = 12.5$ ), la vorticidad se transporta en un tiempo muy corto, mientras que el transporte es más lento conforme nos alejamos del punto máximo de campo magnético. Además, el efecto inercial mencionado anteriormente se manifiesta en mayor manera cerca de la fuente de campo magnético.

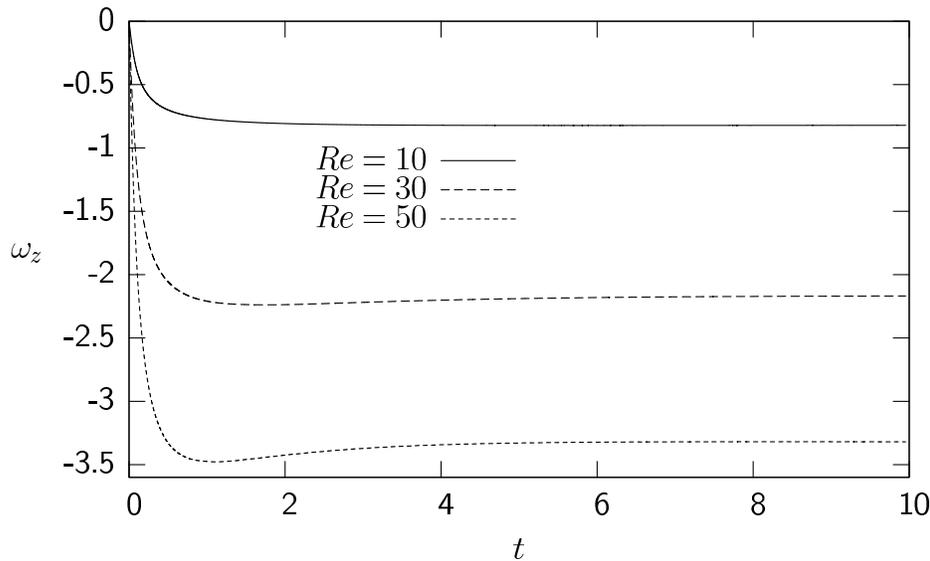


Figura 4.23: Efecto del número de Reynolds en la vorticidad  $\omega_z$  localizada en el centro geométrico en función del tiempo.  $Ha = 0.2$ .

Por su parte, las isolíneas de campo magnético inducido son cualitativamente similares a las encontradas para  $Re = 0.1$  (ver Figura 4.7). Sin embargo, su magnitud se incrementa notablemente al aumentar  $Re$ , tal como puede observarse en la Figura 4.25, donde se muestra el campo inducido en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .

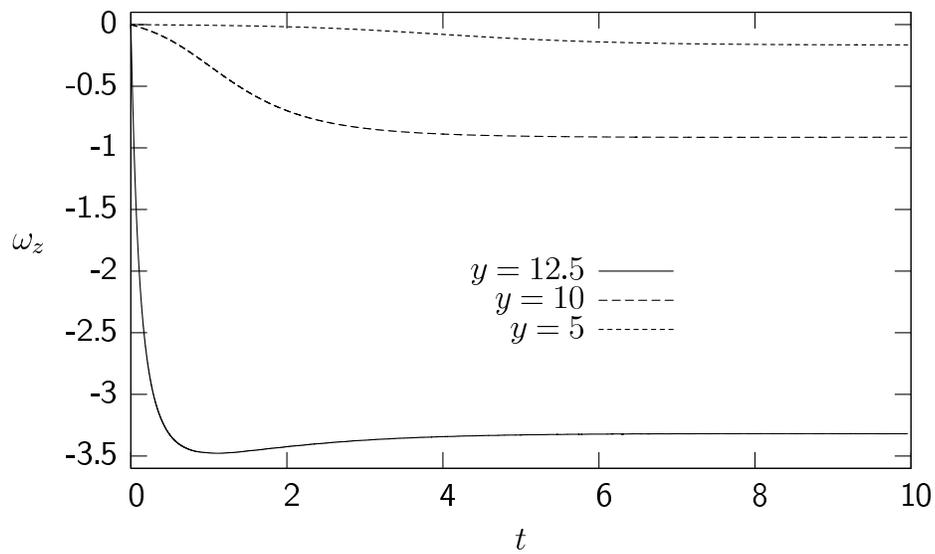


Figura 4.24: Vorticidad  $\omega_z$  en distintos puntos de la coordenada vertical  $y$  para  $x = 12.375$  en función del tiempo para  $Re = 50$ .  $Ha = 0.2$ .

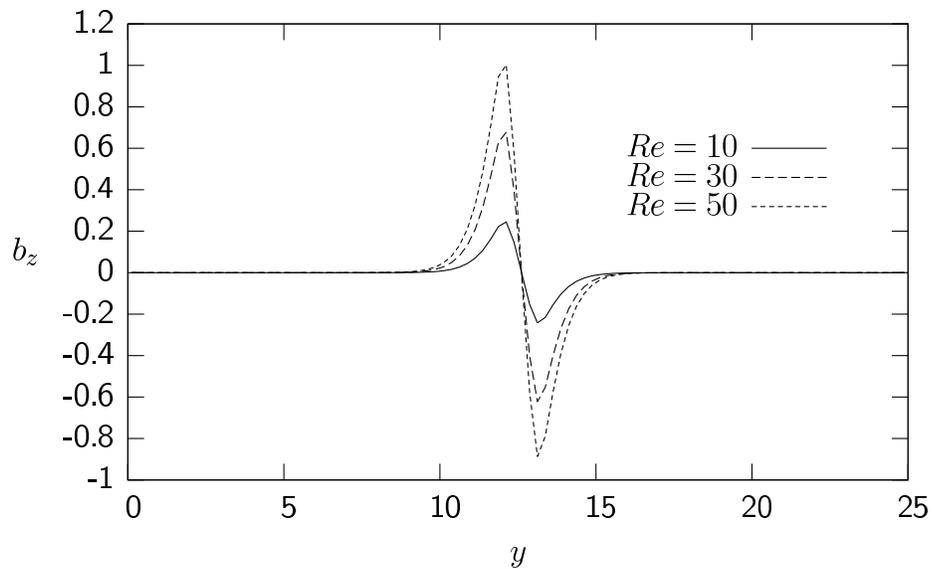


Figura 4.25: Efecto del número de Reynolds en el campo magnético inducido en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .  $Ha = 0.2$ .

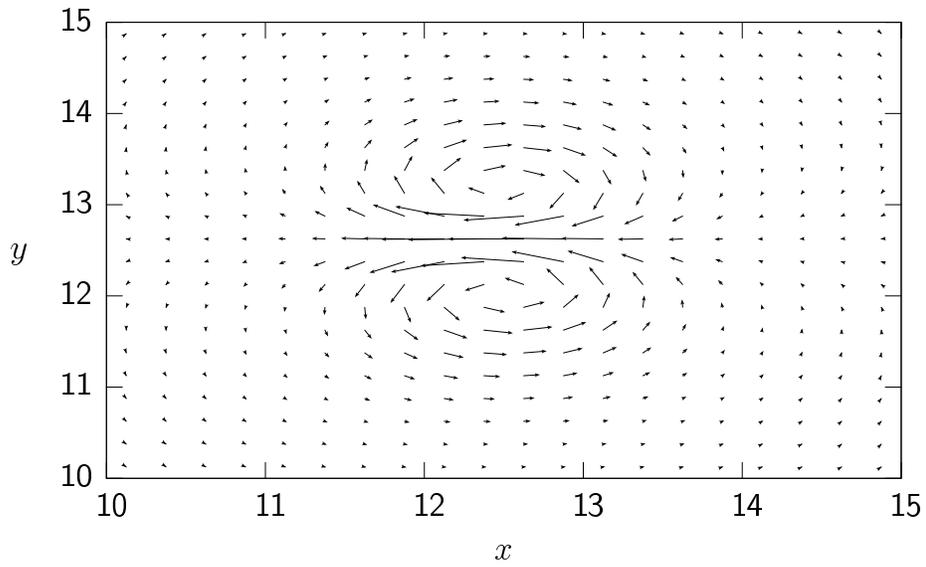


Figura 4.26: Campo vectorial de la densidad de corriente inducida para  $Re = 10$ .  
 $Ha = 0.2$ .

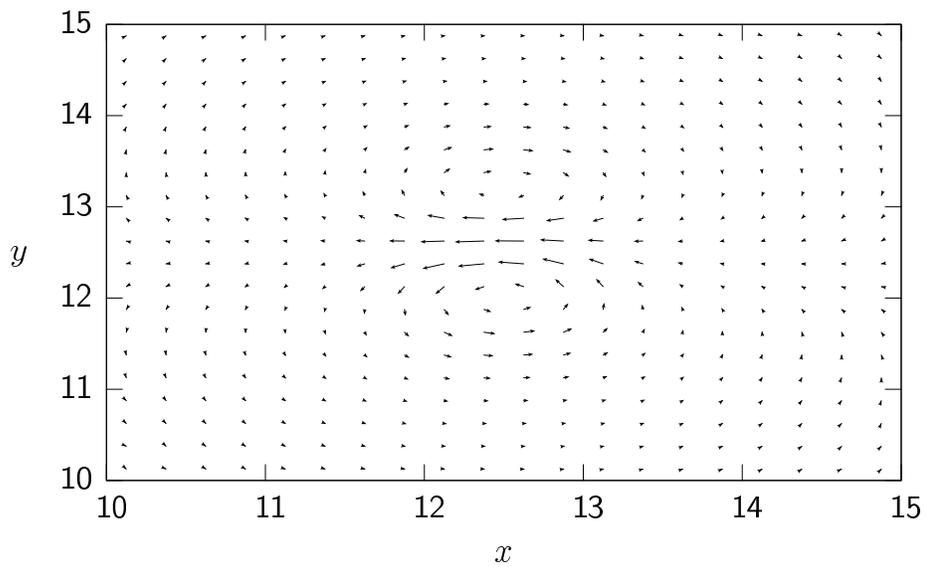


Figura 4.27: Campo vectorial de la densidad de corriente inducida para  $Re = 50$ .  
 $Ha = 0.2$ .

Las Figuras 4.26 y 4.27 muestran el campo vectorial de densidad de corriente

inducida. Al hacer la comparación entre estas dos figuras vemos la disminución de la magnitud de la corriente cuando  $Re$  se incrementa. Esto puede observarse más claramente en la Figura 4.28 donde se tiene el perfil de la máxima densidad de corriente inducida en dirección  $x$  como función del número de Reynolds, y que presenta un comportamiento ligeramente no lineal. Esto muestra que el frenado de Hartmann disminuye conforme  $Re$  aumenta. Como comentábamos previamente, en todos los casos analizados hasta ahora el frenado de Hartmann es despreciable, esto es, los casos puramente hidrodinámicos no difieren significativamente de aquellos que toman en cuenta la densidad de corriente inducida cuando  $Ha = 0.2$ .

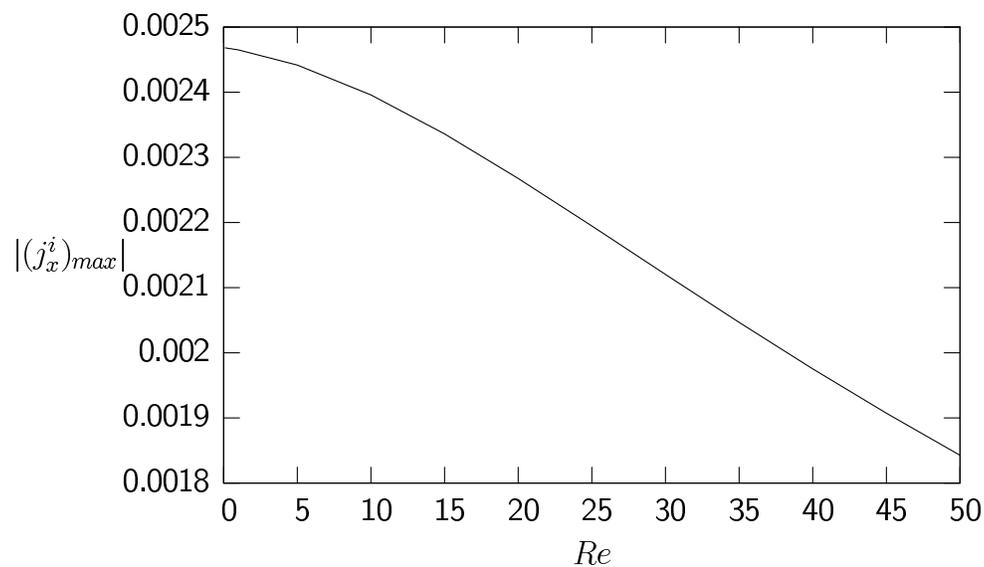


Figura 4.28: Densidad de corriente inducida horizontal máxima como función de  $Re$ .  $Ha = 0.2$ .

### 4.5.3. Efecto del número de Hartmann

Hasta ahora hemos analizado casos en que el número de Hartmann es muy pequeño. A continuación estudiaremos el efecto que tiene sobre el flujo el aumentar  $Ha$ . Experimentalmente esto se logra aumentando la intensidad del campo magnético aplicado o bien utilizando un fluido de trabajo con una conductividad eléctrica mayor, por ejemplo, un metal líquido. Ambas posibilidades plantean ciertas dificultades experimentales ya que, por una parte, incrementar la intensidad de campo magnético requiere probablemente la utilización de un electroimán

pues difícilmente pueden obtenerse intensidades altas con imanes permanentes. Por otra parte, el trabajar con metales líquidos requiere cuidadosas medidas de seguridad y la adaptación del dispositivo experimental para lograr un contacto eléctrico adecuado entre el metal y los electrodos. No obstante, el trabajar con números de Hartmann altos es experimentalmente factible. Como hemos visto, la interacción de la densidad de corriente aplicada con el campo magnético aplicado da origen a una fuerza de Lorentz que crea vorticidad e imprime movimiento al fluido. A su vez, la interacción de la densidad de corriente inducida con el campo magnético aplicado crea una fuerza de Lorentz que se opone al movimiento, efecto conocido como el frenado magnético o de Hartmann. El aumento del número de Hartmann se traduce en incrementar las corrientes inducidas, lo que lleva a intensificar el frenado de Hartmann.

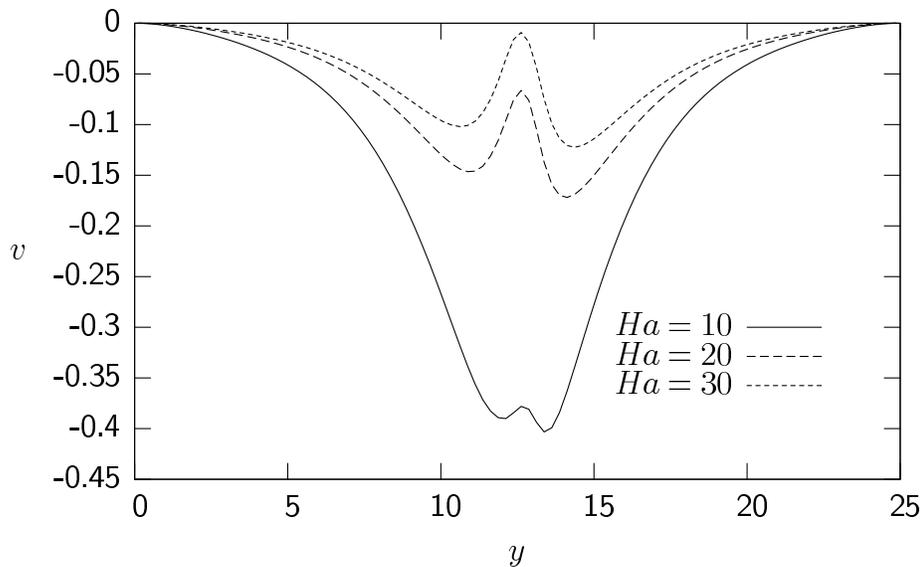


Figura 4.29: Efecto del número de Hartmann en la componente vertical de velocidad  $v$  en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .  $Re = 10$ .

Las Figuras 4.29-4.32 muestran el efecto del número de Hartmann sobre los perfiles de velocidad. Para los resultados aquí mostrados el número de Reynolds se mantuvo constante,  $Re = 10$ . En las figuras vemos que al aumentar  $Ha$  la magnitud de la velocidad se reduce debido al frenado magnético, además, notamos que el frenado de Hartmann es más intenso en la zona donde el campo magnético es más fuerte. Para notar rápidamente el la intensidad y el efecto de frenado podemos referirnos a los perfiles  $Re = 10$  de las Figuras 4.14 -4.17, donde  $Ha$  es pequeño. Por otra parte, el flujo pierde simetría con respecto a

ambos ejes coordenados.

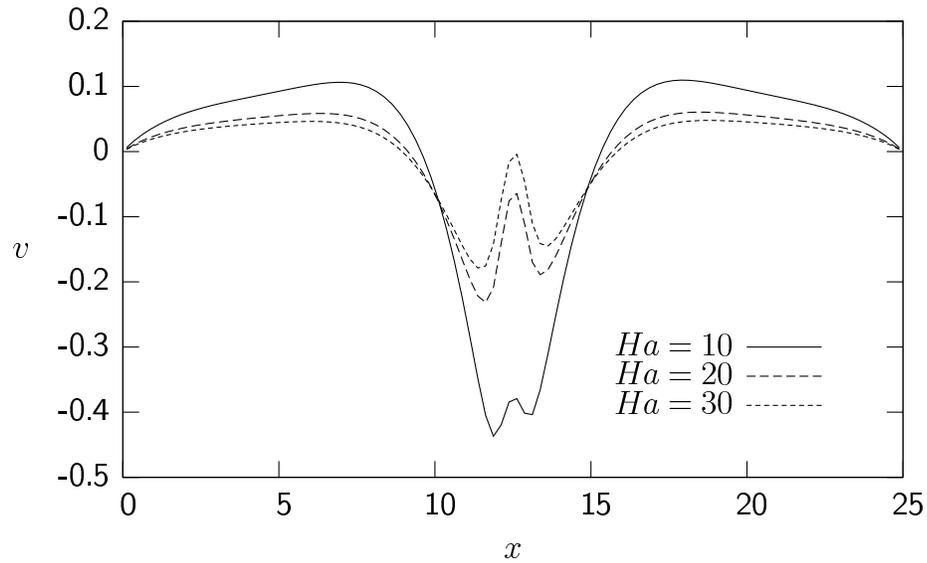


Figura 4.30: Efecto del número de Hartmann en la componente vertical de velocidad  $v$  en función de  $x$  para  $y = 12.375$ .  $Re = 10$ .

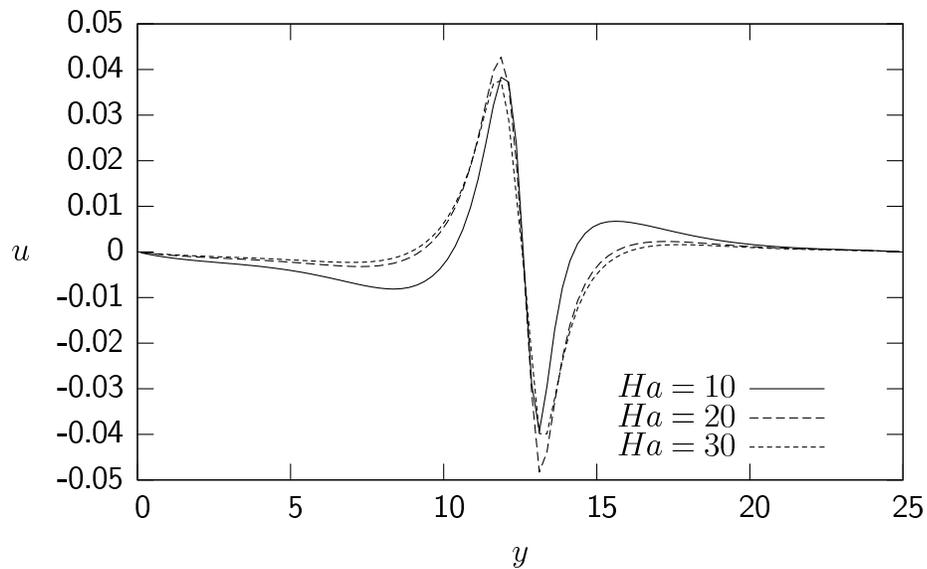


Figura 4.31: Efecto del número de Hartmann en la componente horizontal de velocidad  $u$  para  $x = 12.375$ .  $Re = 10$ .

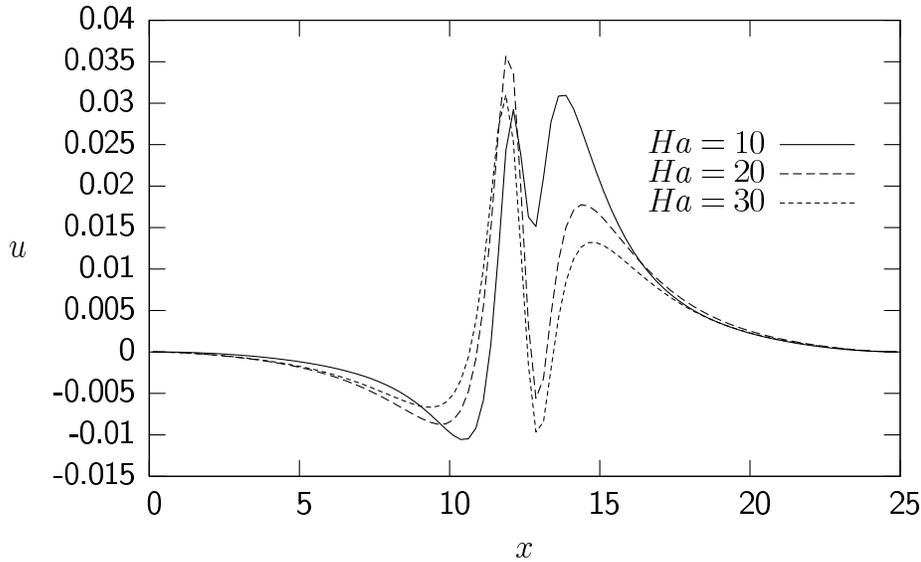


Figura 4.32: Efecto del número de Hartmann en la componente horizontal de velocidad  $u$  para  $y = 12.375$ .  $Re = 10$ .

Ahora bien, si aumentamos aún más el número de Hartmann el efecto de la corriente inducida puede llegar incluso a cambiar el sentido de la velocidad. Las Figuras 4.33 y 4.34 muestran la componente vertical  $v$  de la velocidad como función de  $x$  y  $y$ , respectivamente, para valores del número de Hartmann de 40, 100 y 200. En este caso, la corriente inducida en la región central llega a ser mayor que la aplicada de manera que la fuerza de Lorentz inducida supera a la aplicada en esa zona y la velocidad cambia de sentido, es decir, llega a ser positiva.

Como vimos en la sección anterior, cuando  $Ha$  es pequeño la velocidad máxima se localiza siempre a lo largo del eje vertical que pasa por el punto donde el campo magnético es máximo. En la Figura 4.34 observamos que cuando  $Ha$  es grande la velocidad máxima se desplaza hacia el lado izquierdo, ligeramente fuera de la zona de campo magnético intenso. De hecho, se encuentra una asimetría ya que se observa un máximo local del lado derecho, pero menor al del lado izquierdo. Nótese que este máximo va disminuyendo conforme  $Ha$  aumenta. Esto se observa más claramente en la Figura 4.35 donde se grafica la velocidad máxima contra el número de Hartmann, encontrándose que ésta tiende a cero conforme  $Ha$  aumenta.

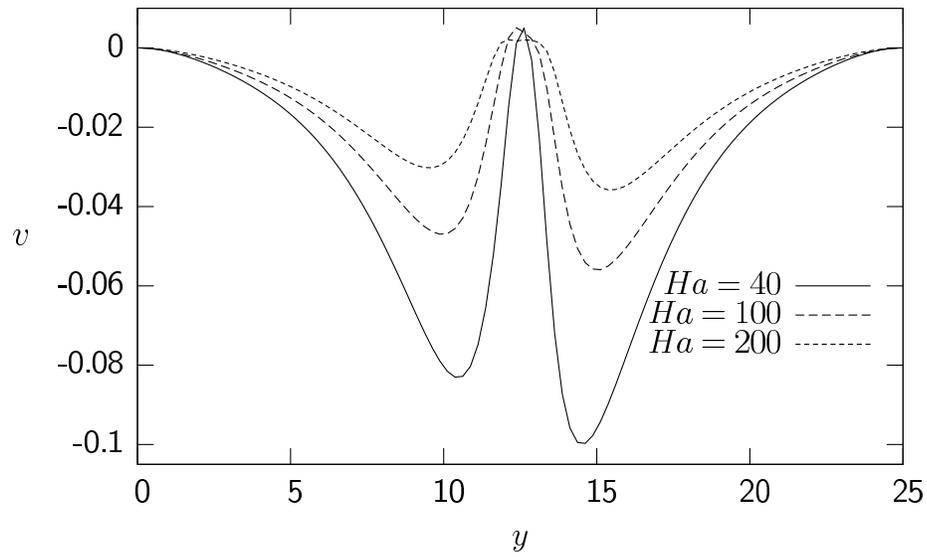


Figura 4.33: Efecto del número de Hartmann en la componente vertical de velocidad  $v$  en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .  $Re = 10$ .

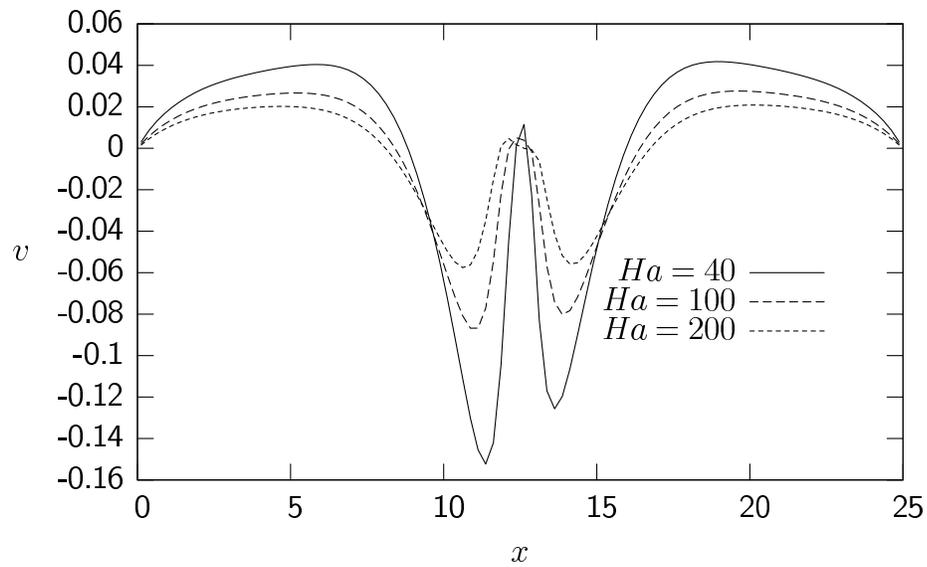


Figura 4.34: Efecto del número de Hartmann en la componente vertical de velocidad  $v$  en función de  $x$  para  $y = 12.375$ .  $Re = 10$ .

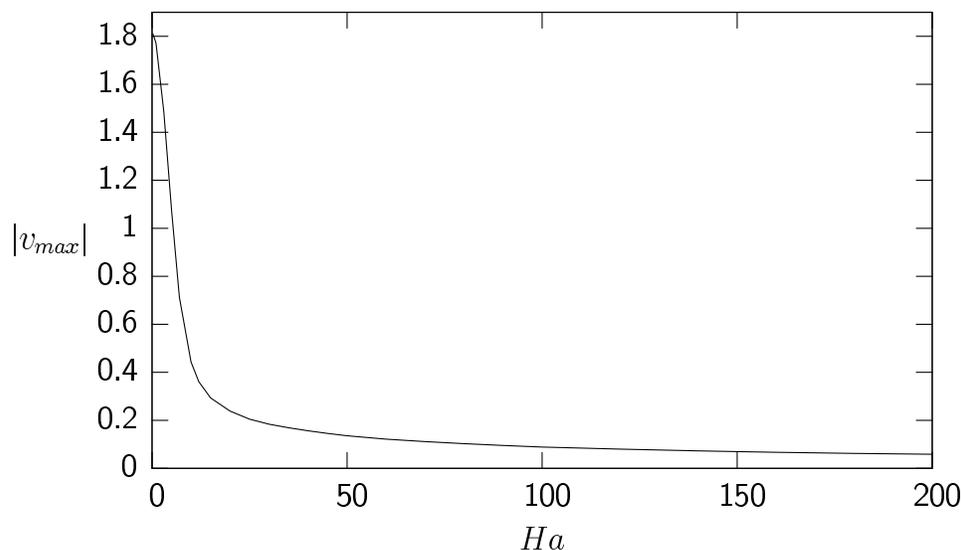


Figura 4.35: Velocidad vertical máxima como función del número de Hartmann.  $Re = 10$ .

Del análisis de los perfiles de velocidad previos es claro que el flujo puede modificarse drásticamente cuando  $Ha \gg 1$ , comparado con el flujo que se encuentra cuando  $Ha$  es  $O(1)$ . La manera más directa de observar las modificaciones en el flujo es a través de los campos de velocidad, como los mostrados en las Figuras 4.36-4.38. En la Figura 4.36, que corresponde al caso  $Ha = 40$ , pueden observarse los dos vórtices que rotan en sentido horario y antihorario, a la izquierda y a la derecha, respectivamente, del centro geométrico donde se localiza el campo magnético aplicado. Sin embargo, justo en la zona central encontramos un cambio sustancial en el patrón de flujo. Se observa cómo el flujo que desciende en dirección negativa del eje  $y$  se desvía y rodea la zona de campo intenso. Esto se observa aún más claramente en la Figura 4.37 donde se muestra el caso  $Ha = 200$ . Nótese que además el tamaño de la zona donde el flujo se desvía es mayor. Esto indica que el flujo encuentra una fuerte oposición en la zona central debido a la fuerza de Lorentz inducida que actúa en dirección opuesta a la aplicada. Notamos entonces que la zona de campo magnético intenso actúa como un obstáculo para el flujo, es decir, como un obstáculo magnético. Este tipo de obstáculos han sido estudiados recientemente en flujos de líquidos conductores bajo campos magnéticos localizados en condiciones donde no existen corrientes inyectadas [Cuevas et al. 2006]. En la Figura 4.38 se muestra un acercamiento a la zona del obstáculo magnético. Observamos que dentro de la región donde el flujo es desviado, se forma una zona de recirculación, es decir, un monopolo que

gira en sentido horario.

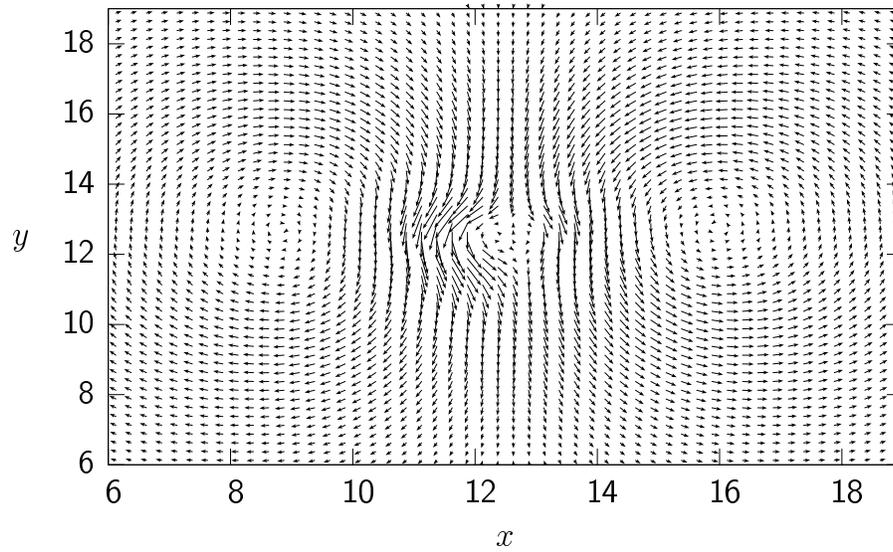


Figura 4.36: Campo vectorial de la velocidad para  $Ha = 40$ ,  $Re = 10$ .

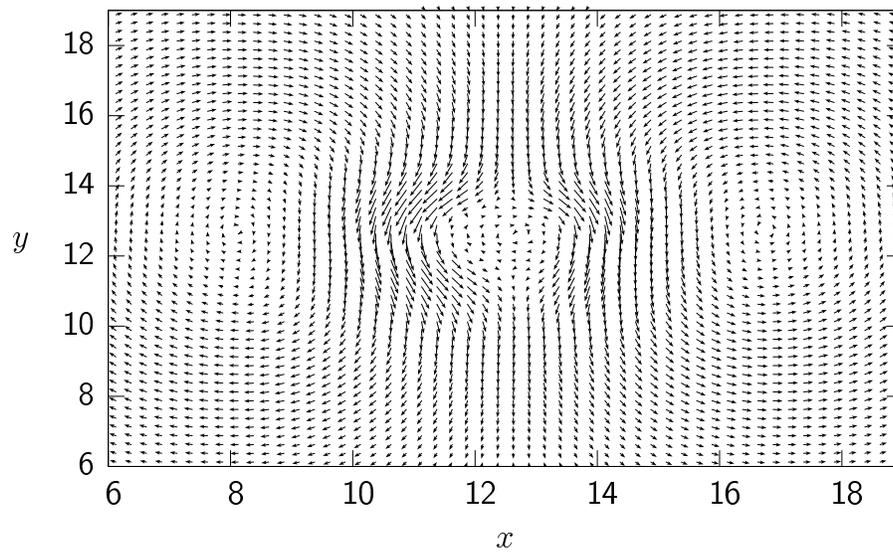


Figura 4.37: Campo vectorial de la velocidad para  $Ha = 200$ ,  $Re = 10$ .

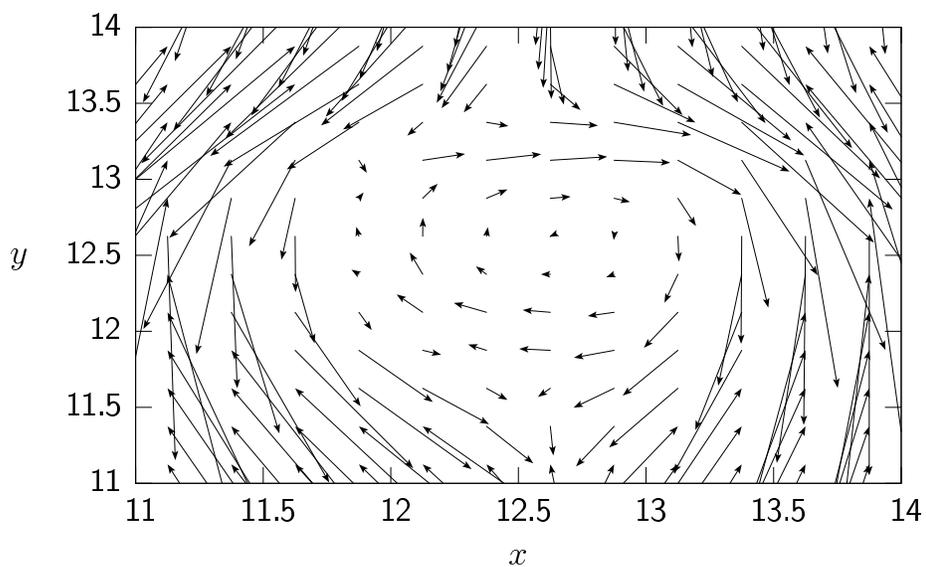


Figura 4.38: Acercamiento a la zona del obstáculo magnético en el campo vectorial de la velocidad para  $Ha = 200$ ,  $Re = 10$ .

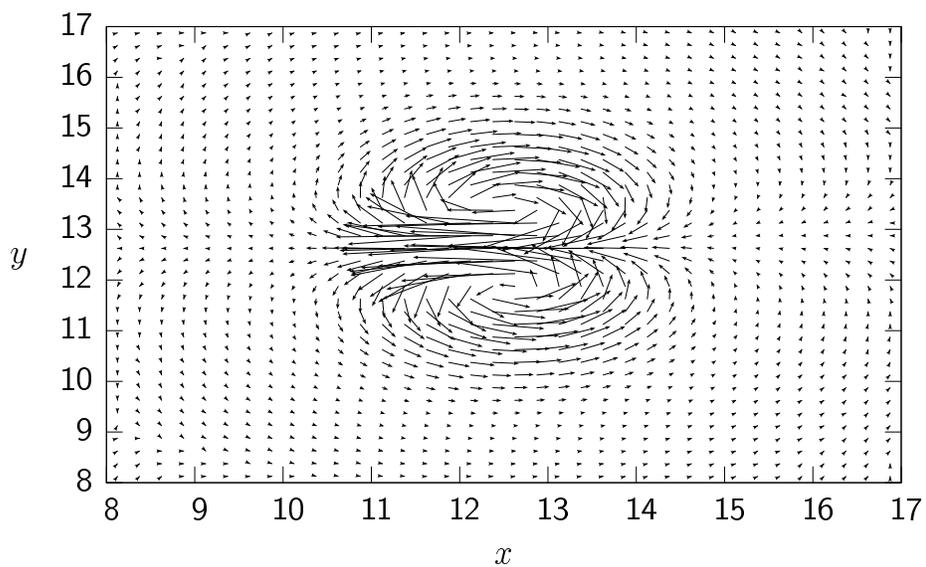


Figura 4.39: Campo vectorial de la densidad de corriente inducida para  $Ha = 40$ ,  $Re = 10$ .

Para reafirmar el análisis anterior podemos observar las Figuras 4.39 y 4.40 que

muestran los campos vectoriales de la densidad de corriente inducida para  $Ha = 40$  y  $Ha = 200$ , respectivamente. Notamos que al aumentar  $Ha$  el área de los circuitos de corriente se incrementa, así como su intensidad, lo que da cuenta del incremento de la fuerza magnética inducida.

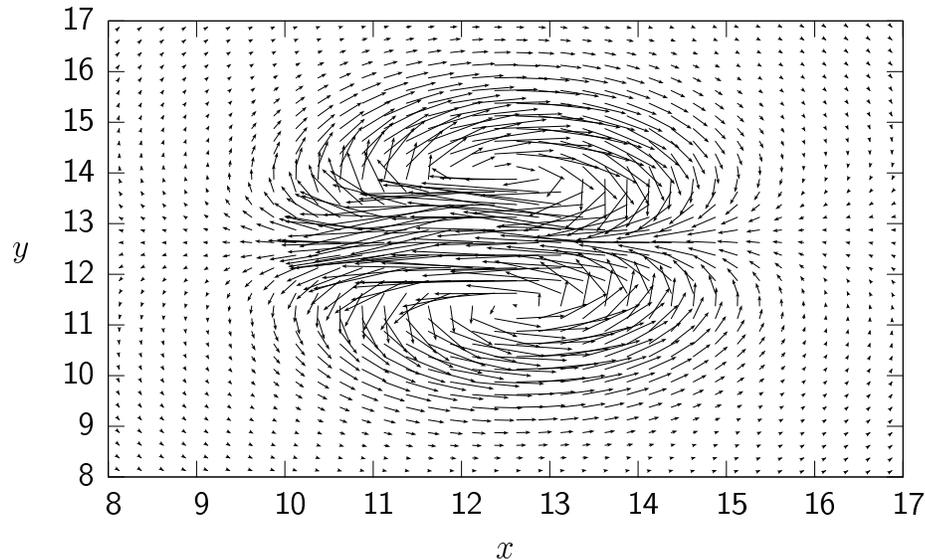


Figura 4.40: Campo vectorial de la densidad de corriente inducida para  $Ha = 200$ ,  $Re = 10$ .

La Figura 4.41 presenta a la vorticidad en el centro geométrico como función del tiempo para distintos números de Hartmann. En ella se observa que la vorticidad sufre oscilaciones al incrementar  $Ha$ . La frecuencia de la oscilación ( $\simeq 2.98 \text{ Hz}$ ) es similar para los distintos valores de  $Ha$ , sin embargo existe un número de Hartmann crítico ( $Ha \simeq 60$ ) en el cual la amplitud de la oscilación es mayor. No obstante, este comportamiento es transitorio, ya que para tiempos largos las oscilaciones tienden a desaparecer.

En la Figura 4.42 se muestra la vorticidad como función del tiempo para  $Ha = 60$  en un intervalo de tiempo mucho mayor que en la figura anterior. Aunque la amplitud de las oscilaciones se va amortiguando hasta alcanzar un estado estacionario, este resultado parece indicar que el flujo puede desestabilizarse aumentando el número de Hartmann. Aunque aquí no se encontraron condiciones para la desestabilización, se plantea como un caso interesante al analizar flujos con  $Ha$  grandes y  $Re > 10$  ya que al incrementar  $Re$ , las fuerzas inerciales intensas pueden propiciar condiciones que desestabilicen al flujo.

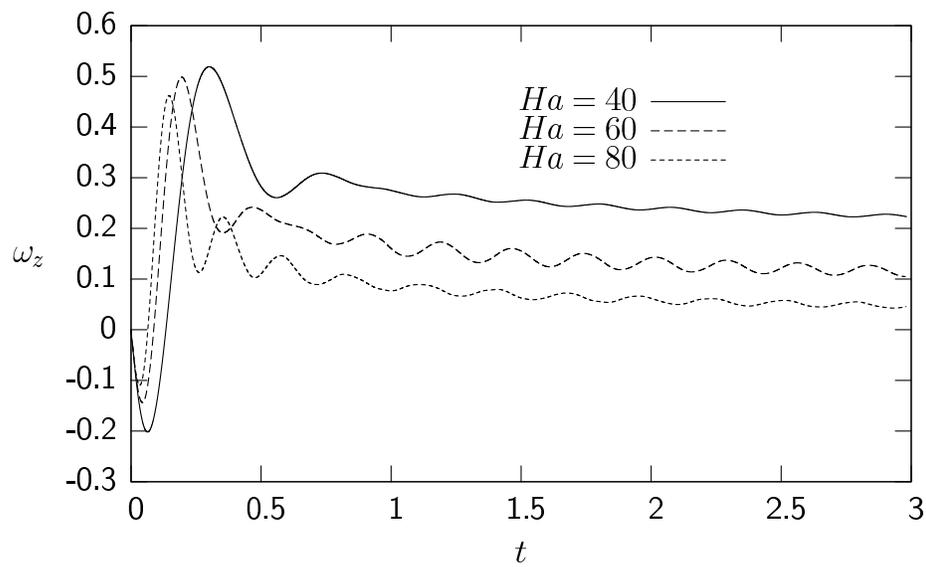


Figura 4.41: Efecto del número de Hartmann en la vorticidad  $\omega_z$  localizada en el centro geométrico en función del tiempo.  $Re = 10$ .

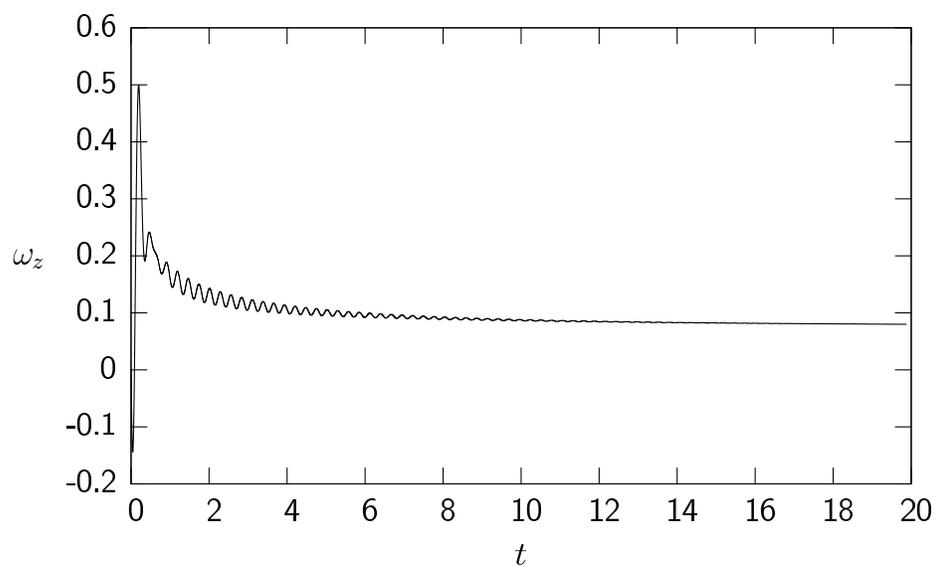


Figura 4.42: Vorticidad  $\omega_z$  localizada en el centro geométrico en función del tiempo para  $Ha = 60$ ,  $Re = 10$ .



## Capítulo 5

# Modelo numérico cuasi-bidimensional

El modelo completamente bidimensional analizado en el capítulo anterior captura razonablemente bien las estructuras vórticas observadas en los experimentos. Sin embargo, es evidente que el fondo de la cuba debe tener influencia sobre el flujo, de manera que el campo de velocidad en la delgada capa de fluido muestra una dependencia en la coordenada transversal  $z$ . Lo anterior ha sido verificado experimentalmente [Demiaux 2003]. Con el fin de mejorar la descripción del fenómeno, se optó por desarrollar un modelo cuasi-bidimensional que toma en cuenta la fricción del fluido con el fondo del recipiente.

En la delgada capa de fluido los principales efectos tridimensionales provienen de la existencia de capas límite que se forman en el fondo del contenedor. Como veremos, en el modelo cuasi-bidimensional las capas límite se modelan a través de un término adicional en la ecuación de momento que toma en cuenta a la fricción con el fondo. Debemos hacer notar que existen dos tipos diferentes de capas límite presentes: la capa de Hartmann dentro de la zona del campo magnético y la capa límite viscosa en el dominio donde el campo magnético es despreciable. En campos magnéticos transversales fuertes, las capas de Hartmann son muy delgadas ( $O(Ha^{-1})$ ), y las variables primitivas presentan una variación leve a lo largo de las líneas de campo magnético. Bajo estas condiciones es razonable reducir el esfuerzo computacional al considerar un comportamiento cuasi-bidimensional del flujo que modela los ligeros efectos tridimensionales en vez de resolverlos explícitamente. Esta aproximación, originalmente establecida por Sommeria y Moreau en 1982, ha sido exitosamente aplicada a flujos MHD en canales al promediar las ecuaciones a lo largo de las líneas de campo [Bühler 1996; Smolentsev 1997]. En estos casos, un campo magnético uniforme se extiende sobre todo el dominio y el flujo cuasi-bidimensional obtenido retiene los efectos MHD tridimensionales a

través de la fricción de Hartmann y un término de fuerza.

Una aproximación similar para campos magnéticos no uniformes fue utilizada por primera vez por Lavrent'ev et al. (1990), donde los efectos tridimensionales debidos a la presencia de capas de Hartmann fueron introducidos a través de un perfil de velocidad de Hartmann local a lo largo de la dirección del campo. Esta suposición fue justificada de manera experimental [Bocheninskii et al. 1971] y teórica [Kalyutik et al. 1986], demostrando que aún con números de Hartmann y parámetros de interacción pequeños la velocidad longitudinal se aproxima a un perfil de Hartmann local. El perfil de Hartmann es una solución exacta de las ecuaciones de la MHD para el caso de un fluido conductor que fluye entre dos planos infinitos bajo un campo magnético transversal a los planos [Müller y Büller 2001]. El enfoque cuasi-bidimensional también se ha utilizado en flujos de delgadas capas de fluido en ausencia de campos magnéticos. En tal caso, las perturbaciones tridimensionales son inhibidas por el confinamiento geométrico. Bajo estas condiciones se puede aplicar el mismo procedimiento de promediado, llegando a ecuaciones cuasi-bidimensionales para las variables primitivas. Este es el enfoque seguido por Satijn et al. (2001) y Clercx et al. (2003) al modelar flujos en aguas someras, donde la fricción del fondo es parametrizada a través de un término lineal adicional conocido como la fricción de Rayleigh.

Siguiendo la aproximación cuasi-bidimensional, suponemos que el transporte de momentum en la dirección normal es principalmente difusivo, por tanto, las componentes de velocidad pueden ser expresadas en la forma

$$\mathbf{u} = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), 0]. \quad (5.1)$$

Por tanto, las ecuaciones para el campo de velocidad son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + Re j_y^i B_z^0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - Re B_z^0 - Re j_x^i B_z^0. \quad (5.4)$$

Si derivamos la ecuación (5.3) con respecto a la coordenada vertical  $y$ , y el resultado lo restamos a la derivada con respecto a la coordenada horizontal  $x$  de la ecuación (5.4), obtenemos la ecuación de transporte de vorticidad.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \\ &- \operatorname{Re} \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - \operatorname{Re} \frac{\partial (j_x^i B_z^0)}{\partial x} - \operatorname{Re} \frac{\partial (j_y^i B_z^0)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.6)$$

Aplicando la conservación de la carga eléctrica (2.14) tenemos que

$$-\frac{\partial (j_x^i B_z^0)}{\partial x} - \frac{\partial (j_y^i B_z^0)}{\partial y} = B_z^0 \frac{\partial j_z^i}{\partial z} - j_x^i \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - j_y^i \frac{\partial B_z^0}{\partial y}. \quad (5.7)$$

Por tanto, la ecuación de vorticidad queda como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \\ &- \operatorname{Re} \frac{\partial B_z^0}{\partial x} + \operatorname{Re} B_z^0 \frac{\partial j_z^i}{\partial z} - \operatorname{Re} j_x^i \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - \operatorname{Re} j_y^i \frac{\partial B_z^0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ahora bien, definimos el promedio sobre el grosor de la capa de fluido para una función arbitraria  $g(x, y, z, t)$  como

$$\langle g \rangle (x, y, t) = \frac{1}{h} \int_0^h g(x, y, z, t) dz. \quad (5.9)$$

donde  $h$  es el grosor de dicha capa.

Además suponemos que las variables de campo están dadas como la variable promedio en el espesor de la capa de fluido, multiplicadas por una función  $f$  que depende de la dirección  $z$ :

$$u(x, y, z, t) = \langle u \rangle (x, y, t) f(x, y, z), \quad (5.10)$$

$$v(x, y, z, t) = \langle v \rangle (x, y, t) f(x, y, z), \quad (5.11)$$

$$\omega_z(x, y, z, t) = \langle \omega_z \rangle (x, y, t) f(x, y, z), \quad (5.12)$$

$$j_x^i(x, y, z, t) = \langle j_x^i \rangle (x, y, t) f(x, y, z), \quad (5.13)$$

$$j_y^i(x, y, z, t) = \langle j_y^i \rangle(x, y, t) f(x, y, z). \quad (5.14)$$

La dependencia de  $f$  en las coordenadas  $x$  y  $y$  refleja las diferentes regiones de flujo debido a la localización del campo magnético. Además, la función  $f$  debe satisfacer

$$\frac{1}{h} \int_0^h f dz = 1. \quad (5.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.10)-(5.14) en la ecuación (5.8) e integrando respecto a  $z$  de 0 a  $h$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial t} + \left[ \langle u \rangle \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial y} \right] I = \frac{\partial^2 \langle \omega \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle \omega \rangle}{\partial y^2} + \frac{\langle \omega \rangle}{\tau} \\ - Re \frac{\partial B_z^0}{\partial x} + Re B_z^0 \frac{1}{h} [j_z^i]_{z=0}^h - Re \langle j_x^i \rangle \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - Re \langle j_y^i \rangle \frac{\partial B_z^0}{\partial y}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde las cantidades  $I$  y  $\tau$  están definidas como

$$I = \frac{1}{h} \int_0^h f^2 dz, \quad (5.17)$$

$$\tau^{-1} = \frac{1}{h} \left[ \frac{df}{dz} \right]_{z=0}^h. \quad (5.18)$$

$\tau$  puede interpretarse como una escala de tiempo característico para el decaimiento de la vorticidad, debido a la disipación en las capas de Hartmann y viscosa.

De acuerdo con los experimentos, suponemos que las fronteras en  $z = 0$  y  $z = h$  (es decir, la pared del fondo del recipiente y la superficie libre) son eléctricamente aislantes, por lo que la componente normal de la densidad de corriente se anula en tales fronteras, de modo que la ecuación de vorticidad para las variables promediadas (5.16) queda como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial t} + \left[ \langle u \rangle \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle \omega \rangle}{\partial y} \right] I = \frac{\partial^2 \langle \omega \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle \omega \rangle}{\partial y^2} + \frac{\langle \omega \rangle}{\tau} \\ - Re \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - Re \langle j_x^i \rangle \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - Re \langle j_y^i \rangle \frac{\partial B_z^0}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.19)$$

## 5.1. Determinación de la función $f$

Para resolver la ecuación (5.19) necesitamos conocer la función  $f$ , la cual es necesaria a su vez para determinar las cantidades  $I$  y  $\tau$ . La función  $f$  se determina de una manera aproximada, pues de lo que se trata es de describir de forma razonable la dependencia de los campos de velocidad, vorticidad y densidad de corriente con la coordenada normal. Si nos referimos al plano  $yz$  que corta justamente al imán por la mitad, Figura 5.1, la corriente inyectada apunta en la dirección  $x$ , mientras que el campo magnético aplicado apunta en la dirección  $z$ , de modo que la fuerza de Lorentz apunta en la dirección negativa del eje  $y$ , por tanto, la velocidad máxima del fluido se tiene precisamente en el plano  $yz$ .

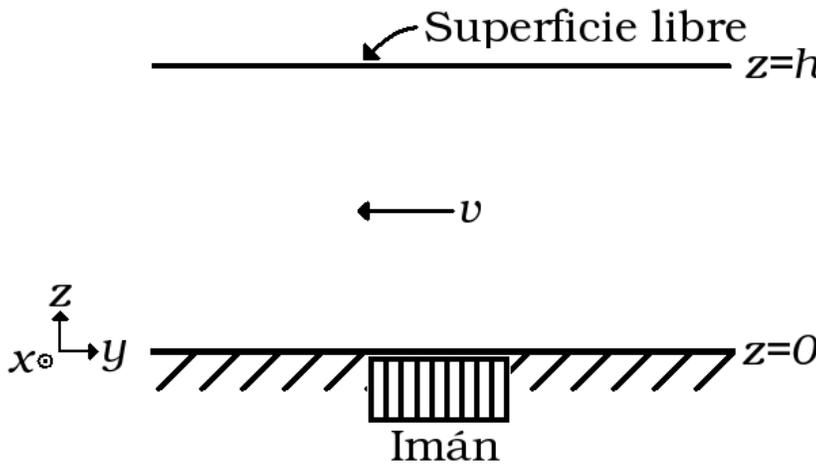


Figura 5.1: Plano  $yz$ .

Tomando lo anterior en cuenta, simplificamos el problema haciendo las siguientes suposiciones: la única componente del campo de velocidad está en dirección negativa del eje  $y$  y depende sólo de la coordenada  $z$ , por tanto  $v = f(z)$ ; no existe gradiente de presión en la dirección  $y$  y la fuerza de Lorentz está dada por el producto de las corrientes (inyectada e inducida) en la dirección  $x$  por el campo aplicado. Al aplicar esta suposición en la ecuación (5.4), obtenemos

$$\frac{d^2 \bar{f}}{dz^2} - Re B_z^0 - Re j_x^i B_z^0 = 0, \quad (5.20)$$

donde  $\bar{f}$  es la función  $f$  sin normalizar. La componente horizontal de la densidad de corriente inducida está dada por la ley de Ohm (ecuación (2.9)), que adimensionalizada es

$$j_x^i = N v B_z^0, \quad (5.21)$$

donde suponemos que  $E_x = 0$ , esto, dado que sabemos que la corriente inducida se genera en respuesta al movimiento del fluido en el campo magnético aplicado y no debido a campos eléctricos. De modo que la ecuación (5.20) queda como

$$\frac{d^2 \bar{f}}{dz^2} - Ha^2 B_z^0 \bar{f} - Re B_z^0 = 0 \quad (5.22)$$

La función  $f$  satisface la condición de no deslizamiento con el fondo de la cuba, y la condición de ausencia de esfuerzos cortantes en la superficie libre, por tanto, las condiciones de frontera son

$$\bar{f}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{f}(h)}{dz} = 0. \quad (5.23)$$

Al aplicar las condiciones (5.23), la solución de (5.22) es

$$\bar{f}(z) = \frac{Re}{Ha^2 B_z^0} [\cosh(Ha B_z^0 (h - z)) \operatorname{sech}(Ha B_z^0 h) - 1]. \quad (5.24)$$

La función normalizada  $f(z)$  es

$$f(z) = \frac{\bar{f}(z)}{M}, \quad (5.25)$$

donde  $M$  es la constante de normalización dada por

$$M = \frac{1}{h} \int_{z=0}^h \bar{f}(z) dz = \frac{Re}{Ha^3 B_z^0} [\tanh(Ha B_z^0 h) - Ha B_z^0 h], \quad (5.26)$$

de modo que

$$f = Ha B_z^0 h \frac{\cosh(Ha B_z^0 (h - z)) \operatorname{sech}(Ha B_z^0 h) - 1}{\tanh(Ha B_z^0 h) - Ha B_z^0 h}. \quad (5.27)$$

Nótese que la función  $f$  adquiere una dependencia en las coordenadas  $x$  y  $y$  a través del campo magnético aplicado  $B_z^0(x, y)$  y que es independiente de  $Re$ . En la Figura 5.2 se muestra la variación de  $f$  con  $z$  para dos distintas posiciones en el plano de flujo, una cerca de la zona de campo magnético intenso y otra en una posición donde el campo es despreciable. Observamos que en el centro geométrico donde el campo magnético aplicado es intenso, se forma un perfil de Hartmann local, mientras que lejos de la fuente de campo se forma un perfil parabólico de Poiseuille.

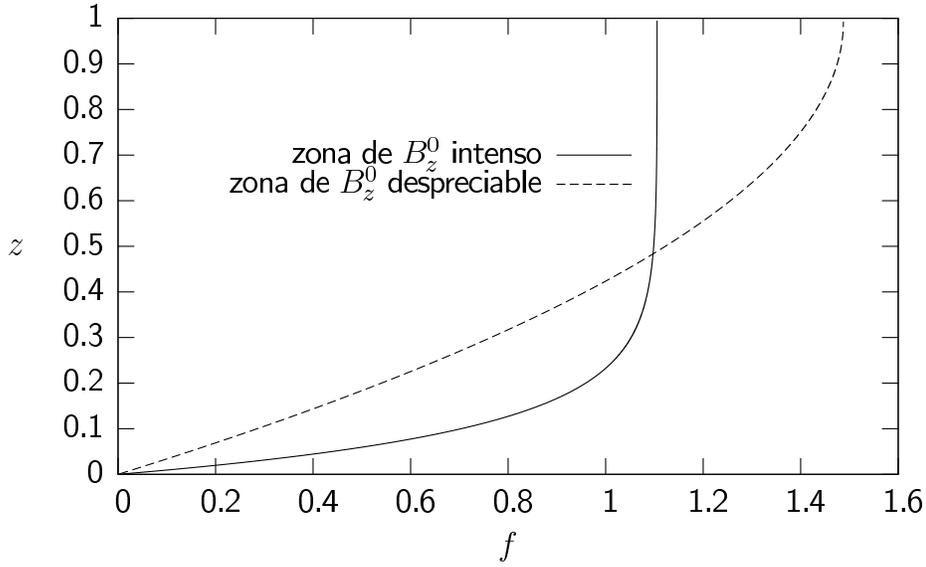


Figura 5.2: Efecto del campo magnético en  $f$  en función de  $z$  para  $h = 1$ ,  $Ha = 10$ .

Una vez conocida  $f$  podemos calcular las cantidades  $I$  y  $\tau$ , es decir,

$$\tau^{-1} = (HaB_z^0)^2 \frac{\tanh(HaB_z^0 h)}{\tanh(HaB_z^0 h) - HaB_z^0 h}, \quad (5.28)$$

$$I = \frac{HaB_0 h \operatorname{sech}^2(HaB_z^0 h)}{4 (\tanh(HaB_z^0 h) - HaB_z^0 h)^2} [2HaB_z^0 h (2 + \cosh(2HaB_z^0 h)) - 3 \sinh(2HaB_z^0 h)]. \quad (5.29)$$

## 5.2. Ecuaciones promediadas

Una vez obtenido el modelo promediado a partir de la ecuación de vorticidad, es posible reescribir las ecuaciones cuasi-bidimensionales que gobiernan al flujo incluyendo nuevos términos, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] I = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{u}{\tau} + Re j_y^i B_z^0, \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] I = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{v}{\tau} - Re B_z^0 - Re j_x^i B_z^0, \quad (5.32)$$

$$0 = \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z}{\partial y^2} - u \frac{\partial B_z^0}{\partial x} - v \frac{\partial B_z^0}{\partial y}. \quad (5.33)$$

donde el símbolo  $\langle \rangle$  se ha omitido por simplicidad. Debe notarse que el campo magnético inducido  $b_z$  se supuso siempre puramente bidimensional, ya que incluir una dependencia en la coordenada  $z$  lleva a no satisfacer la condición  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ . Adicionalmente, debemos enfatizar que el cuarto término del lado derecho de las ecuaciones (5.31) y ((5.32)) modelan la fricción magnética en regiones donde el campo magnético es intenso y la fricción viscosa en regiones donde el campo magnético es despreciable. De hecho, la fricción magnética es mayor que la viscosa y aumenta con el número de Hartmann.

Las componentes de la corriente inducida se determinan a partir de la ley de Ampère (2.34b)

$$j_x^i = N \frac{\partial b_z}{\partial y}, \quad j_y^i = -N \frac{\partial b_z}{\partial x}. \quad (5.34)$$

Las ecuaciones retienen la dependencia temporal asociada con los efectos inerciales. Bajo esta aproximación la dinámica de flujo está determinada por la interacción de la componente normal del campo aplicado con los lazos de corriente paralelos al plano del fondo, así como por la fricción de las capas límites de Hartmann-Rayleigh [Cuevas et al. 2006].

Las condiciones a la frontera utilizadas para la resolución de este modelo son las mismas del modelo completamente bidimensional. Por otra parte, la implementación numérica para solucionar este modelo es completamente similar al algoritmo utilizado para el modelo bidimensional.

## 5.3. Resultados

El tomar en cuenta la fricción ocasionada por la existencia de capas límite en el fondo del recipiente, tiene como consecuencia una mayor estabilidad del flujo debido a la inclusión de un efecto disipativo adicional. En la práctica, el disminuir el espesor  $h$  trae como consecuencia la atenuación de los distintas variables de flujo, en particular, de las componentes de velocidad. Evidentemente, el efecto de la fricción será mayor mientras menor sea el grosor de la capa de líquido. Por el contrario, el efecto del fondo del recipiente será menos importante mientras mayor sea el espesor de la capa de líquido. De hecho, si tomamos el límite cuando  $h \rightarrow \infty$ , tenemos que  $I = 1$  y  $\tau^{-1} = 0$ , por lo que el efecto disipativo desaparece. Con esto podemos afirmar que en un límite idealizado, el modelo puramente bidimensional correspondería al caso de una capa de fluido de grosor infinito, suponiendo que la dependencia con la coordenada  $z$  es inexistente. Cabe mencionar que aunque estrictamente el modelo cuasi-bidimensional sólo es válido cuando la altura de la capa de fluido es menor a la longitud característica (diámetro del imán), conservando con ello el confinamiento geométrico, es decir, cuando  $h < 1$ , arroja resultados ilustrativos cuando  $h > 1$ , por lo que se incluirán a continuación.

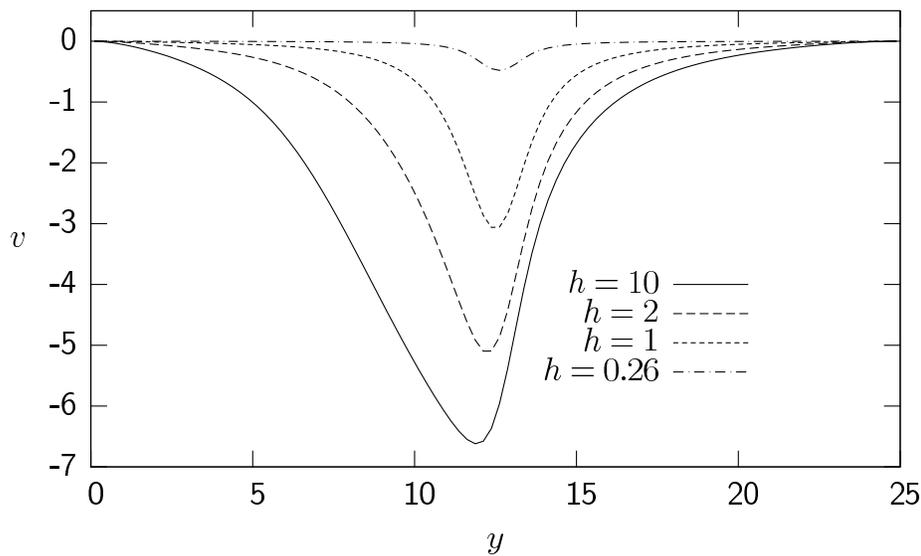


Figura 5.3: Efecto de la altura de la capa de fluido  $h$  en la componente vertical de velocidad  $v$  en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .  $Re = 50$ ,  $Ha = 0.2$ .

Las Figuras 5.3-5.6 muestran perfiles de las componentes de velocidad, vorticidad y campo magnético inducido en función de  $y$  para  $x = 12.375$ , y diversos valores

del espesor  $h$ . Todos los resultados presentados aquí corresponden a  $Re = 50$  y  $Ha = 0.2$ . En todas las figuras observamos la misma tendencia, es decir, al disminuir la altura de la capa de fluido, el efecto de fricción con el fondo es mayor, por lo que las variables reducen su magnitud. Nótese que además los perfiles recuperan la simetría respecto a ambos ejes coordenados. Asimismo, notamos que los perfiles con  $h = 10$  son muy parecidos a los perfiles de las figuras correspondientes del modelo bidimensional para los mismos valores de  $Re$  y  $Ha$ , por lo que se puede decir que en el modelo bidimensional  $h \gg 1$ .

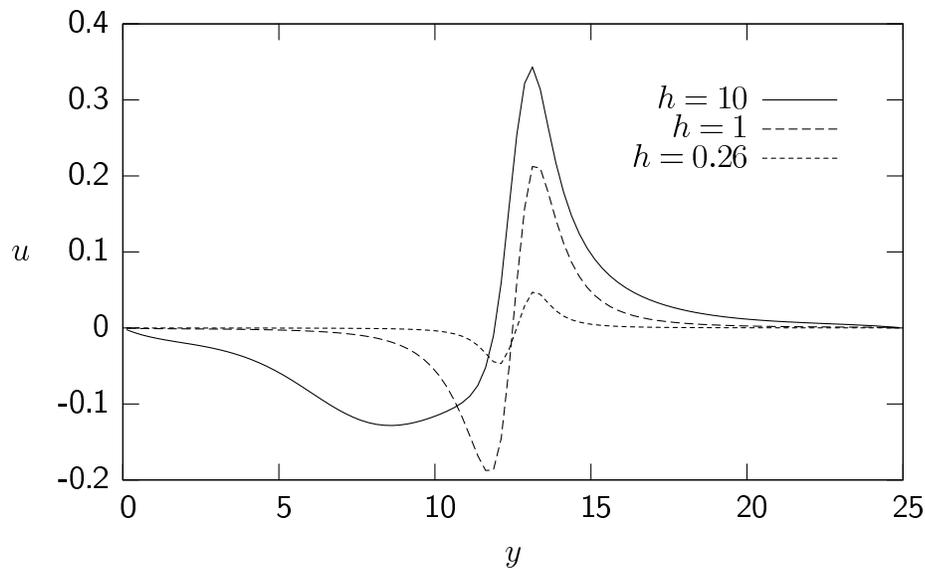


Figura 5.4: Efecto de la altura de la capa de fluido  $h$  en la componente horizontal de velocidad  $u$  en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .  $Re = 50$ ,  $Ha = 0.2$ .

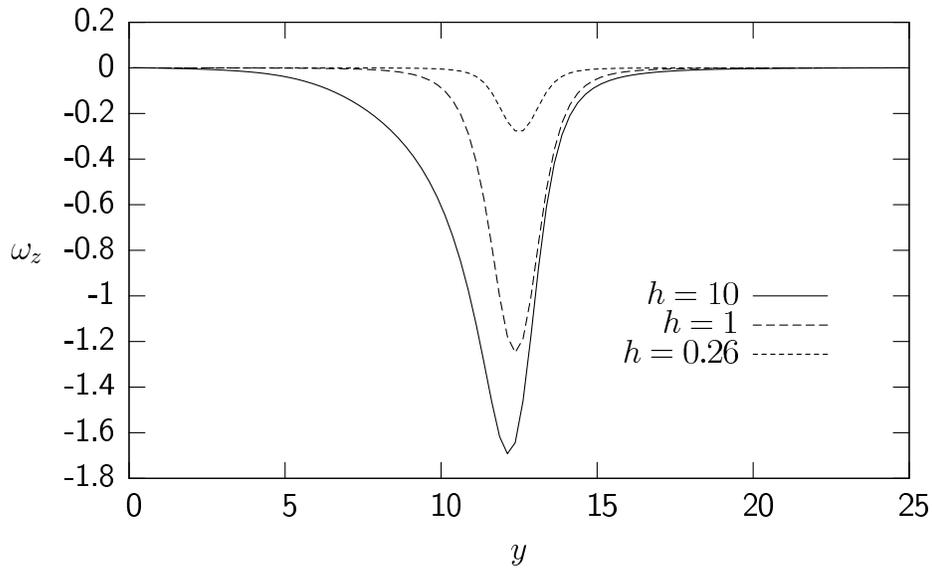


Figura 5.5: Efecto de la altura de la capa de fluido  $h$  en la vorticidad  $\omega_z$  en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .  $Re = 50$ ,  $Ha = 0.2$ .

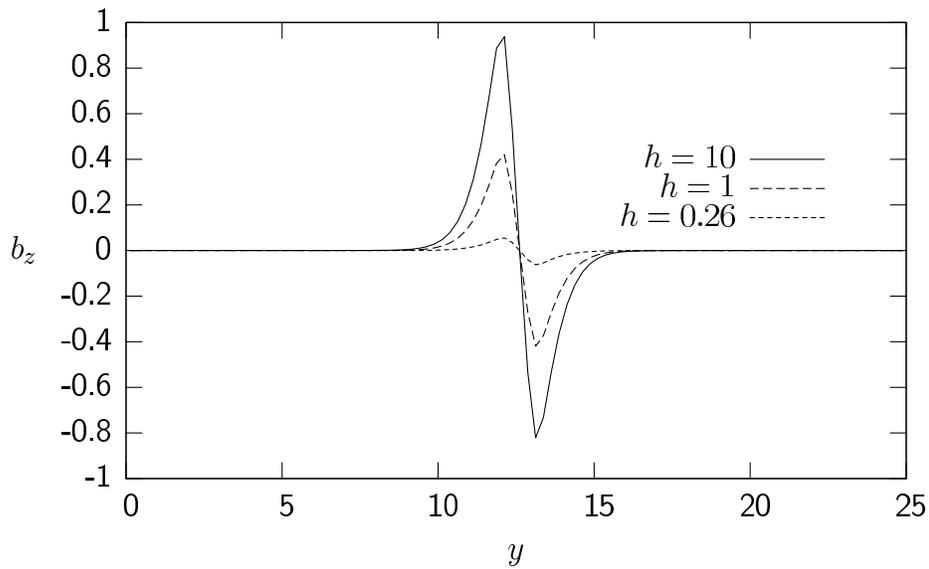


Figura 5.6: Efecto de la altura de la capa de fluido  $h$  en el campo magnético inducido  $b_z$  en función de  $y$  para  $x = 12.375$ .  $Re = 50$ ,  $Ha = 0.2$ .

En la Figura 5.7 se presenta a la vorticidad en el centro geométrico como función

del tiempo para distintos valores de  $h$ . Observamos que al disminuir la altura de la capa de fluido la magnitud de la vorticidad también disminuye. Además, en contraste con  $h > 1$ , cuando  $h$  es pequeña el flujo requiere de menor tiempo para llegar al estado estacionario. Cuando  $h$  es grande el efecto disipativo disminuye y los efectos inerciales se vuelven apreciables, esto lo podemos observar en el perfil  $h = 10$ , notamos que en un inicio la magnitud de la vorticidad aumenta y disminuye ligeramente hasta alcanzar un valor constante.

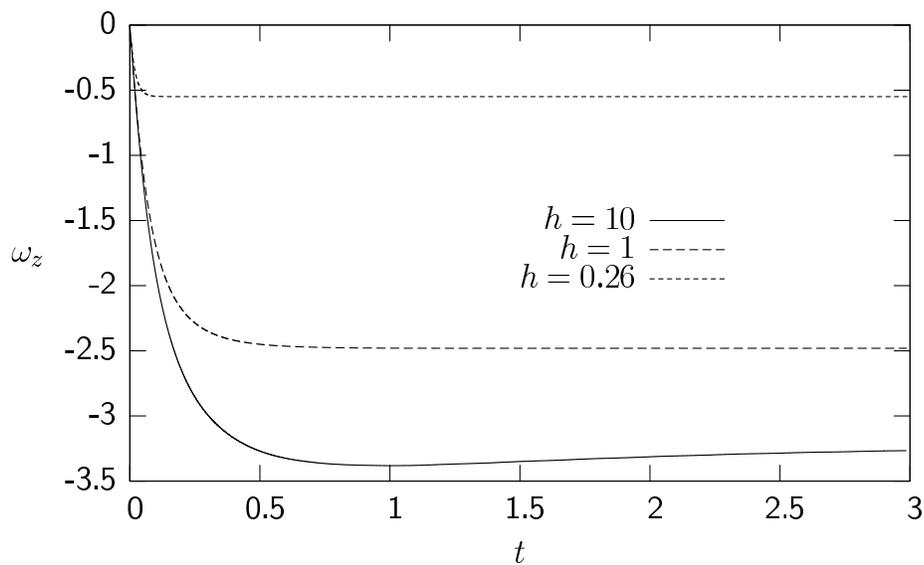


Figura 5.7: Efecto de la altura de la capa de fluido en la vorticidad  $\omega_z$  localizada en el centro geométrico en función del tiempo.  $Re = 50$ ,  $Ha = 0.2$ .

La velocidad máxima y la densidad de corriente inducida máxima en función de  $h$ , se muestran en las Figuras 5.8 y 5.9, respectivamente. Notamos que ambas variables disminuyen su magnitud cuando la altura de la capa de fluido se reduce. Este es un claro efecto de la atenuación sufrida por el flujo debido a la existencia de las capas límite viscosa y de Hartmann en la pared del fondo.

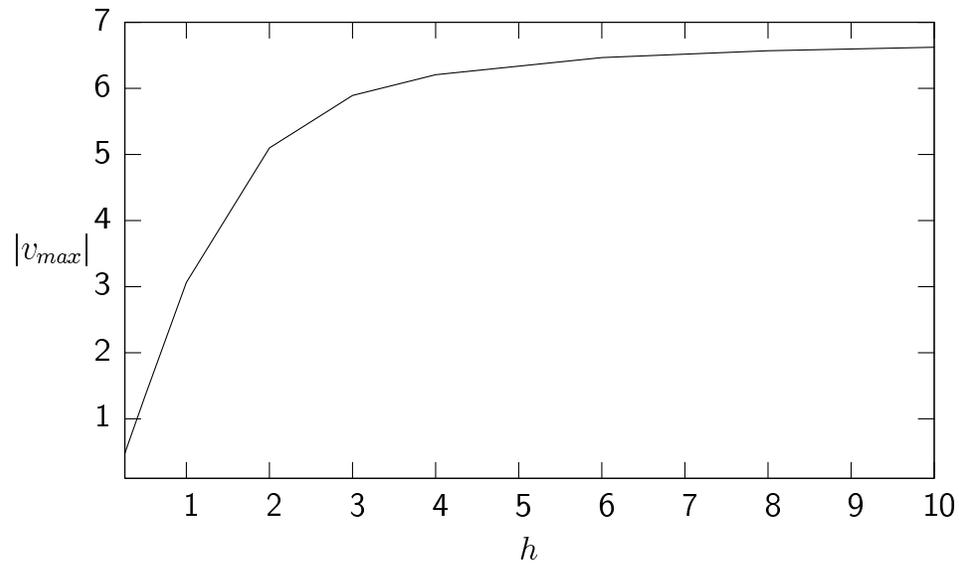


Figura 5.8: Velocidad máxima en función de la altura de la capa de fluido  $h$ .  $Re = 50$ ,  $Ha = 0.2$ .

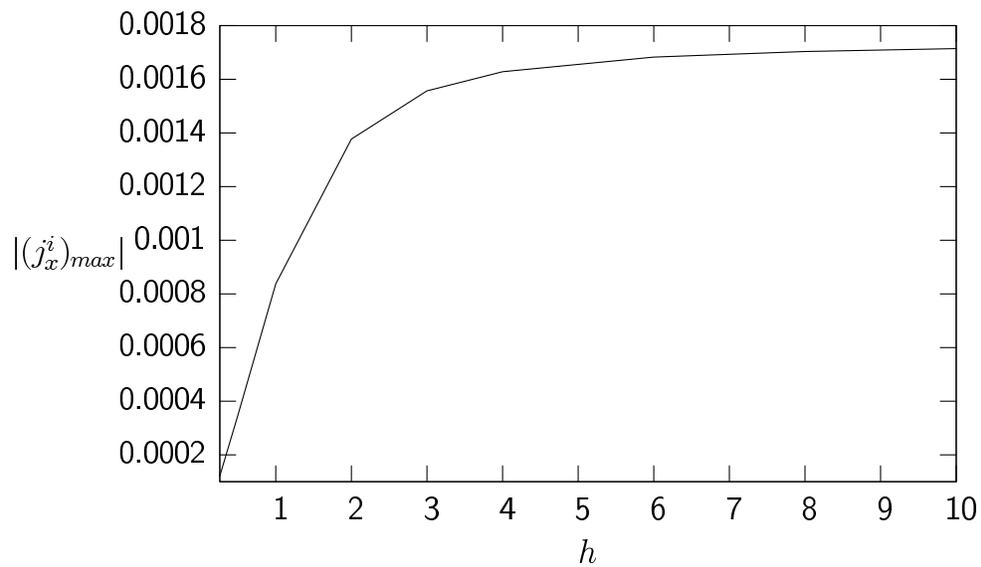


Figura 5.9: Densidad de corriente inducida máxima en función de la altura de la capa de fluido  $h$ .  $Re = 50$ ,  $Ha = 0.2$ .



## Conclusiones y trabajo a futuro

En este trabajo hemos estudiado teóricamente la generación de vórtices dipolares mediante la interacción de una corriente eléctrica directa y un campo magnético localizado en una pequeña sección del dominio del flujo. Se establecieron las ecuaciones que describen el fenómeno y posteriormente se utilizó un enfoque analítico y uno numérico para la solución de las mismas. El enfoque analítico involucra un método de perturbaciones que es válido siempre y cuando los números de Reynolds y Hartmann sean pequeños. Aunque las soluciones analíticas presentan limitaciones severas en la satisfacción de las condiciones de frontera, resultan ilustrativas ya que reproducen de manera físicamente razonable muchas de las características dominantes de los flujos en cuestión. Las limitaciones de las soluciones analíticas motivaron el desarrollo de un método numérico capaz de analizar el comportamiento del flujo en un rango amplio de valores de  $Re$  y  $Ha$ , lo que permite explorar comportamientos no lineales, así como la variación temporal de las variables. Primeramente, se utilizó un modelo puramente bidimensional que ignora la presencia de la pared del fondo del recipiente que contiene al fluido. Los resultados para  $Re$  y  $Ha$  pequeños se comparan razonablemente bien de manera cualitativa con las soluciones analíticas. Los resultados numéricos muestran que cuando se incrementa el número de Reynolds, manteniendo el  $Ha$  pequeño, el flujo pierde su simetría con respecto al eje  $x$ , los vórtices se elongan y sus núcleos se desplazan en dirección de la fuerza de Lorentz aplicada. En estas condiciones la fuerza de Lorentz inducida que se opone al flujo es despreciable. Por otra parte, cuando se aumenta el número de Hartmann, el efecto de la corriente inducida es apreciable, y puede propiciar oscilaciones que podrían eventualmente llegar a desestabilizar el flujo. Para valores de  $Ha$  suficientemente altos, el efecto de la corriente inducida puede llegar incluso a cambiar el sentido de la velocidad en la zona de campo magnético intenso. De hecho, se observa que el flujo se desvía y rodea esa zona que actúa como un obstáculo magnético. Dentro de dicha zona se observa la formación de un vórtice monopolar. Debemos hacer notar que se requiere de un estudio en un intervalo más amplio de  $Re$  y  $Ha$ , puesto que los casos aquí estudiados corresponden a flujos laminares que even-

tualmente alcanzan un estado estacionario. Sería interesante explorar condiciones que puedan llegar a desestabilizar al flujo y eventualmente producir un régimen turbulento. El análisis de la turbulencia puede requerir modificaciones al modelo e incluso el desarrollo de una técnica computacional diferente. También se utilizó un modelo cuasi-bidimensional que introduce el efecto de las capas límite con el fondo del recipiente a través de un término de fricción de Hartmann-Rayleigh. Este término modela la fricción de Hartmann cerca de la zona de campo magnético intenso, y la fricción de Rayleigh donde el campo magnético es despreciable. En los resultados, observamos que el efecto del fondo se intensifica cuando la capa de fluido disminuye. Como es de esperar, la inclusión del término de fricción juega un papel disipativo que atenúa las variables de flujo y produce un efecto estabilizador. El modelo cuasi-bidimensional logra capturar características fundamentales del flujo, aunque un modelo tridimensional puede ser una tarea a futuro.

Existen muchas tareas a futuro en el presente estudio. En particular es necesario afinar el modelo numérico para hacer posible una comparación cuantitativa con los resultados experimentales. Las herramientas computacionales utilizadas aquí se pueden tomar como base para el desarrollo de métodos numéricos que caractericen el mezclado de fluidos conductores en sistemas confinados mediante fuerzas magnéticas dependientes del tiempo. En particular, es de interés considerar la interacción de una corriente eléctrica alterna con un arreglo de imanes permanentes y determinar la eficiencia de mezclado realizando un seguimiento de partículas, además de resolver la ecuación de convección-difusión para la concentración de las especies mezcladas. El tratamiento teórico y experimental del problema aportará un enfoque complementario que permitirá obtener un conocimiento profundo del fenómeno estudiado. Este conocimiento es la base de las aplicaciones exitosas del método de agitación electromagnética.

## Referencias

- Aref, H., Stirring by chaotic advection. *J. Fluid Mech.* **143**, 1-21 (1984)
- Aref, H. y Balachandar, S., Chaotic advection in a Stokes flow. *Phys. Fluids* **29**, 3515-3521 (1986)
- Batchelor G. K., An introduction to fluid dynamics. *Cambridge University Press*, Cambridge (1967)
- Bau, H. H., Zhong, J. y Yi, M., A minute magneto hydro dynamic mixer. *Sensors and Actuators B* **79**, 207-215 (2001)
- Bau, H. H., Zhu, J., Qian, S. y Xiang, Y., A magneto-hydrodynamically controlled fluidic network. *Sensors and Actuators B* **88**, 205-216 (2003)
- Beltrán, A., Flujo de líquidos conductores en campos magnéticos localizados, Tesis de Maestría. *UNAM* (2006)
- Bocheninskii, V. P., Branover, G. G., Tananaev, A. V. y Cheryaev, Yu. P., An experimental study of the resistance to the flow of an electroconductive fluid in plane insulated channels in the presence of a transverse magnetic field, with consideration given to the end effect and the roughness of the walls. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza* **4**, 10-21 (1971)
- Bühler, L., Instabilities in quasi-two-dimensional magnetohydrodynamic flows. *J. Fluid Mech.* **326**, 125-150 (1996)
- Chien, W. L., Rising, H. y Ottino, J. M., Laminar mixing and chaotic mixing in several cavity flows. *J. Fluid Mech.* **170**, 355 (1986)
- Clercx, H. J. H., Van Heijst, G. J. F. y Zoetewij, Quasi-two-dimensional turbulence in shallow fluid layers: The role of bottom friction and fluid layer depth. *Phys. Rev. E* **67**, 066303 (2003)

- de la Cruz, L. M., Tesis de Doctorado en Ciencias Computacionales. *UNAM* (2005)
- Cuevas, S., Introducción a la magnetohidrodinámica. Memorias de la Escuela de Verano en Física, *UNAM-UAEM*, 1-22 (2004)
- Cuevas, S., Sierra, F. y Avramenko, A., Magnetic damping of steady streaming vortices in oscillatory viscous flow over a wavy wall. *Magnetohydrodynamics* **38**, 9-21 (2002)
- Cuevas S., Smolentsev S, y Abdou M., On the flow past a magnetic obstacle. *J. Fluid Mech.* **000**, 1-26 (2006)
- Cuevas S., Smolentsev S, y Abdou M., Vorticity generation in the creeping flow past a magnetic obstacle. *Phys. Rev. E* (enviado) (2006)
- Demiaux, François, Etude du brassage électromagnétique dans une solution électrolytique. Rapport de stage, *Département Génie Mécanique Développement*, 1-32 (2003)
- Frank, M., Barleon, L. y Müller, U., Visual analysis of two-dimensional magnetohydrodynamics. *Phys. Fluids* **13**(8), 2287-2295 (2001)
- Good, R. H. y Nelson, T. J., The classical electromagnetic field. *Academic Press*, New York (1971)
- Gleeson, J. P., Transient micromixing: Examples of laminar and chaotic stirring. *Phys. Fluids* **17**, 100614 (2005)
- Griebel, M., Dornseifer T. y Nuenhoeffer T., Numerical Simulation in Fluid Dynamics. *SIAM* (1998).
- Kalyutic, A. I., Lavrent'ev, I. V. y Serebryakov, V. V., The development of floe for an electroconductive fluid in a magnetic field. *Magnetohydrodynamics* **2**, 11-14 (1986)
- Kolesnichenko, I., Khripchenko, S., Buchenau, D. y Gerbeth, G., Electro-vortex flows in a square Layer of liquid metal. *Magnetohydrodynamics* **41**(1), 39-51 (2005)
- Lavrent'ev, I. V., Molokov, S. Yu., Sidorenkov, S. I. y Shishko, A. R., Stokes flow in a rectangular magnetohydrodynamic channel with nonconducting walls within a nonuniform magnetic field at large Hartmann numbers. *Magnetohydrodynamics* **26**(3), 328-338 (1990)

- Leprévost, J. C., Angilella, J. R. y Brancher, J. P. Geometrical analysis of chaotic mixing in a low Reynolds number magnetohydrodynamic quadrupolar flow. *Phys. Rev. E* **63**, 056309 (2001)
- Marcus, P. S., Numerical simulation of Jupiter's Great Red Spot. Letters to Nature, *Nature* 331, 693-696 (1988)
- McCaig, M., Permanent Magnets in Theory and Practice. *Wiley* (1997)
- Messadek, K. y Moreau, R., An experimental investigation of quasi-two-dimensional turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.* **456**, 137-159 (2002)
- Müller y Büller, Magnetofluidynamics in Channels and Containers. *Springer* (2001)
- Ottino, J. M., The Kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport. *Cambridge University Press* (1989)
- Ozişik, M. N., Heat conduction. *Wiley*, New York, 2nd ed., 227 (1993)
- Paret, J., Marteau, D., Paireau, O. y Tabeling, P., Are flows electromagnetically forced in thin stratified layers two dimensional? *Phys. Fluids* **9** (10), 3102-3104 (1997)
- Paret, J. y Tabeling, P., Experimental observation of a two-dimensional inverse energy cascade. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4162-4165 (1997)
- Qian, S., Zhu, J. y Bau, H. H., A stirrer for magnetohydrodynamically controlled minute fluidic network. *Phys. Fluids* **14**, 3584-3591 (2002)
- Ramos, E., Demiaux, F., Cuevas, S. y Salas, H., Electrically driven vortices in a non-homogeneous magnetic field in shallow fluid layers. The 15<sup>th</sup> Riga and 6<sup>th</sup> PAMIR conference on fundamental and applied MHD Numerical and experimental methods, 191-194 (2005)
- Roberts, P. H, y Daimon, P. H., Magnetohydrodynamics. *Encyclopedia of energy* **3**, 705-732 (2004)
- Salas, H., Cuevas, S. y Ramos, E., Electrically driven vortices in a dipolar magnetic field. *Magnetohydrodynamics* **37**, 38-44 (2001)
- Satijn, M. P., Cense, A. W., Verzicco, R., Clercx, H. J. H. y Van Heijst, G. J. F., Three-dimensional structure and decay properties of vortices in shallow fluid layers. *Phys. Fluids* **13**(7), 1932-1945 (2001)

- Zavala Sansón, L., Van Heijst, G. J. F. y Backx, N. A., Ekman decay of a dipolar vortex in a rotating fluid. *Phys. Fluids* **13**, 440-451 (2001)
- Smolentsev, S., Averaged model in MHD duct flow calculations. *Magneto-hydrodynamics* **33**(1), 42-47 (1997)
- Sommeria, J., Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *J. Fluid Mech.* **170**, 139-168 (1986)
- Sommeria, J. y Moreau, R., Why, how and when, MHD turbulence becomes two-dimensional. *J. Fluid Mech.* **118**, 507-518 (1982)
- Sommeria, J., Meyers, S. D. y Swinney, H. L., Laboratory simulation of Jupiter's Great Red Spot. *Letters to Nature, Nature* 331, 689 - 693 (1988)

## Anexo

### Esquema donor cell

Una forma para evitar problemas de estabilidad es discretizar con el esquema de celda donora (donor cell). Este esquema se aplica principalmente a la discretización de términos de convección de la forma  $d(ku)/dx$ . La variable  $u$  se coloca en los puntos de la malla y se asume que la variable  $k$  está en los puntos medios (Ver Figura 5.10).

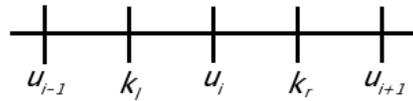


Figura 5.10: Discretización utilizando el esquema celda donora.

La discretización por celda donora del término de convección sobre la malla en el punto  $x_i$  está dada por

$$\frac{d(ku)}{dx} = \frac{1}{2\delta x} \{k_r(u_i + u_{i+1}) - k_l(u_{i-1} + u_i) + |k_r|(u_i - u_{i+1}) - |k_l|(u_{i-1} + u_i)\}. \quad (5.35)$$