Universidad Nacional Autónoma de México

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN PSICOLOGÍA
RESIDENCIA EN EDUCACIÓN ESPECIAL

REPORTE DE EXPERIENCIA PROFESIONAL :

APROPIACIÓN DE FRACCIONES EN ALUMNOS DE 6º DE PRIMARIA CON BAJO RENDIMIENTO ACADÉMICO EN MATEMÁTICAS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN PSICOLOGÍA

PRESENTA:

ALEJANDRO OCTAVIO DELGADO CABALLERO

DIRECTOR DEL REPORTE: MTRA. AURORA GONZÁLEZ GRANADOS
JURADO DE EXAMEN: DRA. FABIOLA ZACATELCO RAMÍREZ

DRA. GUADALUPE ACLE TOMASINI
DRA. MARTHA ELBA ALARCÓN ARMENDÁRIZ
MTRA. MARÍA DEL PILAR ROQUE HERNÁNDEZ
MTRA. ROSALINDA LOZADA GARCÍA
DRA. IRMA ROSA ALVARADO GUERRERO

MÉXICO, D.F. 2006

A los de siempre

José, María, Claudia, Osvaldo y Carina.

A

Elena, criaturita ayuujk.

Agradecimientos:

A Aurora González Granados, *por su tiempo, que fue mucho; por acompañarme aún más allá de lo que dictaba el trabajo; por ser parte fundamental de mi aprendizaje y construir conmigo este proyecto.*

A Susana Argueta Hernández, *por los momentos en el escenario, por ser guía y acompañante en este proyecto.*

A Fabiola Zacatelco Ramírez, *por la paciencia con que leyó este reporte y por sus sugerencias.*

A Alma Rodríguez, *por dejarme utilizar en este proyecto parte de su trabajo.*

A mis profesores de maestría, *por compartir generosamente su conocimiento y experiencia.*

A mis padres, *por el apoyo de toda mi vida, por ser un ejemplo a seguir, porque son los que siempre me esperan a pesar de perderme o llegar tarde; porque por ellos todo y sin ellos nada.*

A Claudia Delgado Caballero, *por el apoyo incondicional que siempre me ha otorgado, porque me ha dado tanto que me es imposible expresar todo lo que le debo.*

A Catalina Caballero Romero, *por la caldera, la magia, por mis primeros libros.*

A Elena Aguilar Gil, *porque en diversas formas este trabajo también es suyo, porque lo supo enriquecer con sus comentarios y por ser la correctora de estilo.*

A Liuba Aguilar Gil, *por ser la paciente escucha de este proyecto, porque escuchando me ayudó a encontrar los senderos que siguió este trabajo y por todo el tiempo que dedicó conmigo a la construcción de materiales.*

A los maíces, Edgar, Giselle, Nancy, Rosa y Abraham, *porque desde que los conozco mi crecimiento se lío al de ellos.*

A Laura Basurto Martínez, *por cada instante compartido dentro de la maestría y en otros escenarios y por saber estar en el momento preciso.*

A Nico y Adriana, *porque su compañía en la maestría enriqueció mi aprendizaje y porque el conocerlos ha servido para guiar mi rumbo.*

A Carmen Morales, *porque fue la primera persona que me mostró la piedra angular de este trabajo.*

Cualquier error en este trabajo es en su totalidad de mi autoría.

Este reporte se realizó gracias a la beca de maestría otorgada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la educación en México, al igual que en otros países, se ha centrado en dos aspectos, por un lado se pretende elevar la calidad educativa y por otro alcanzar una mayor equidad en el acceso a la educación. Esto ha llevado a evaluar el sistema educativo mexicano, el cual en la actualidad, según el *Programa Nacional de Educación 2001-2006* (Secretaria de Educación Pública [SEP], 2002a) busca, a través de diversos medios, elevar el nivel académico de los estudiantes. Al mismo tiempo, pretende que todos los niños puedan acceder a la educación independientemente de su sexo, raza, nivel económico, religión o nivel de habilidades. En este último punto se inserta el interés por los niños con *necesidades educativas especiales*, los cuales por mucho tiempo fueron atendidos en centros de educación especial, por lo que quedaban al margen, no sólo de tener las mismas oportunidades de educación, sino también, en la mayoría de los casos, aislados de la sociedad.

En las reformas realizadas en 1993 en la *Ley general de educación* (SEP, 1993), se asume que los niños con necesidades especiales tienen, entre otras cosas, el derecho de acceder a la educación regular. Al mismo tiempo se retoma una concepción diferente en la forma de abordar el tema de la discapacidad, englobando a ésta bajo el concepto de necesidades educativas especiales, esta nueva visión del concepto implica que todos los alumnos pueden tener necesidades educativas especiales, no sólo los que tienen *discapacidad física* (Brennan, 1988 y SEP, 2002b).

En documentos de actualización docente, tales como el de *La integración educativa en la escuela primaria* (SEP, 2002b) y los *Cuadernos de integración educativa* (SEP, 2002c), se plantea que para llevar a cabo esta inclusión se deberá, en la medida de lo posible, evaluar y atender dentro del aula regular a los niños con necesidades especiales, basándose en adecuaciones o modificaciones curriculares, las cuales según Torres (1999), no inciden únicamente en los planes y programas de estudio, sino también en los métodos didácticos y de enseñanza, en la forma de organización escolar, etc.

Por los motivos señalados, el programa de la Residencia en Educación Especial, inscrito dentro del programa de Maestría en Psicología de la UNAM, se ha interesado, entre otras cosas, en la atención de escuelas regulares de educación básica. Esta nueva orientación tiene como propósito principal conjugar teoría y práctica, promoviendo de esta forma la adquisición de competencias profesionales que sean de utilidad al psicólogo para la atención de la población con necesidades educativas especiales de dichos centros. Una de las principales competencias profesionales que se promueven, es la elaboración de productos tecnológicos que reporten beneficios al centro en donde los psicólogos realizan sus prácticas y que al mismo tiempo, puedan ser extensivos a otras instituciones.

El presente trabajo surge de las actividades realizadas en la escuela “José Guadalupe Posada”, en el periodo comprendido entre 2003 y 2005. Durante estos dos años se llevaron a cabo tres fases de intervención:

1. La primera de ellas consistió en la exploración, evaluación y detección de los problemas más acuciantes del centro escolar. Esta primera fase, condujo al equipo de la residencia que realizaba sus prácticas en dicho centro, a seleccionar el problema y tema principal de este reporte, es decir, *la apropiación del concepto de fracción en alumnos de 6º de primaria con bajo rendimiento académico*.
2. En la segunda fase se realizó un trabajo de reforzamiento de las precurrentes[1] de las fracciones con un grupo de 5º, entre las que se incluyeron: operaciones básicas, manejo de áreas y uso de estrategias cognitivas para la solución de problemas.
3. En la tercera fase, cuando estos mismos alumnos ya habían pasado a 6º, se realizó la aplicación del programa para el aprendizaje de fracciones diseñado por el autor del presente trabajo.

El programa para la apropiación del concepto de fracción en alumnos de 6º de primaria con bajo rendimiento académico es pieza fundamental de este reporte. Por ello, se ha otorgado un amplio espacio para considerar sus fundamentos teóricos y prácticos, además de incluirse el manual del programa para el profesor.

Los conocimientos y sobre todo la experiencia obtenida durante estos dos años de formación, en las prácticas señaladas anteriormente, son los que constituyen el presente reporte, en el que en primer lugar, se pueden encontrar los fundamentos teóricos que lo sustentan, para después entrar de lleno en la descripción de las prácticas realizadas y, finalmente, en la presentación de los resultados y conclusiones que se obtuvieron a partir de ellas.

[1] En este trabajo se considera que una persona no pasa de un estado de no conocimiento a un estado de conocimiento, sino que entre ambos estados existen siempre conocimientos previos necesarios sobre los que descansa un nuevo aprendizaje; si no existen estos conocimientos mínimos no se puede presentar aprendizaje. Por ejemplo, para poder sumar o restar es imprescindible primero clasificar o contar.

BREVE PANORAMA HISTÓRICO DEL SISTEMA EDUCATIVO MEXICANO (SEM)

Entre los estudiosos del campo social no hay discrepancia sobre la importancia que tiene la educación dentro de la sociedad (Bourdieu y Passeron, 1996; Durkheim, 1990 y Marx, 1973); pues su objetivo no sólo es formar habilidades y conocimientos para llevar a cabo un determinado trabajo, sino que también busca la formación integral del individuo, desarrollando en él cualidades interiores, tales como normas y valores morales, el carácter y la forma que éste tiene de acercarse a la realidad y sus problemas (Marx, 1973). Vista de esta manera la educación es un punto crucial en todos los países, ya que a través de ella se pretende lograr no solamente el desarrollo productivo de un país, sino también, una sociedad más justa y equitativa.

Se reconoce que en México la educación oficial ha desempeñado un papel fundamental en el desarrollo del país casi desde su independencia, sin embargo, la falta de una adecuada planeación y estructuración, aunada a problemas más acuciantes en cada momento histórico, como la poca estabilidad económica y política que ha sufrido en la mayor parte de su historia y el gran crecimiento demográfico, han hecho que ésta, la educación, no haya logrado hasta el día de hoy alcanzar las metas propuestas desde sus inicios.

A pesar de ello, y como señala Ornelas (1995), el SEM está en una constante transformación y ha sufrido profundas reformas que en cierta medida han tratado de resolver, bajo determinado contexto económico, político y social, las necesidades más apremiantes del país. Dichas transformaciones han sido determinadas por la manera en que sus actores han concebido los fines de la educación, los cuales según el mismo autor han girado en torno a dos visiones sobre la misión que debe encarnar el SEM, por una parte la de formar hombres cultos y libres y por otra la de generar hombres productivos que respondan al progreso económico de México. Estas dos maneras de pensar la educación siguen guiando en la actualidad el camino del SEM, a pesar de que en la práctica no han logrado conciliarse. A continuación se describirán los etapas más representativas por las que ha atravesado el SEM.

Los orígenes del SEM moderno se remontan a la segunda mitad del siglo XIX, cuando en la Constitución de 1857 se adopta una educación elemental pública, laica, obligatoria y gratuita. En esta etapa, el manejo de la educación fue responsabilidad de cada estado y al gobierno federal sólo le correspondía manejar las escuelas del distrito y de los territorios federales (Martínez, 2001), la misión de la educación era asociada a la idea del progreso del país y, más que la formación de un hombre culto por medio de ella, se pensaba en la creación de un ser productivo industrialmente hablando (Ornelas, 1995).

Tras la Revolución de 1910 y después de la aprobación de la Constitución de 1917, el gobierno federal asumió un papel protagónico en todos los ámbitos del país. En lo que respecta a la educación, con la creación de un ministerio federal, la Secretaría de Educación Pública en 1921, el Estado tomaría el manejo de todo el sistema educativo nacional. Ornelas (1995) señaló que a partir de ese momento el SEM pasó por tres reformas profundas hasta llegar a la conformación de lo que hoy es. La primera de ellas surgió precisamente con la creación de la SEP y fue encabezada por José Vasconcelos quien, dadas las condiciones en que se encontraba el país, trató de llevar la alfabetización hasta los lugares más apartados de la República, poniendo especial énfasis en las zonas rurales; para Vasconcelos la educación tenía dos grandes fines, por un lado el de homogeneizar a la sociedad tan diversa del país a través de una educación para toda la población, así como también de la unificación lingüística y por otro, la creación de ciudadanos libres que pudieran ser capaces de gozar de la cultura y el arte.

A este periodo lo sucedió *La educación socialista* bajo la dirección de Narciso Bassols, él creyó firmemente que el objetivo principal de la educación debía ser el de formar a un hombre libre de prejuicios y fanatismos religiosos y construir una sociedad igualitaria. Sin embargo, en esta etapa, la educación estuvo guiada en gran medida por los requerimientos de una incipiente industria mexicana que, en ese entonces, requería de la mano de obra especializada, por lo que se promovió en gran medida la formación tecnológica más que la humanista, a partir de acciones como la impartición de talleres técnicos desde la secundaria y priorizando la educación en zonas urbanas más que rurales. Esta etapa fue impulsada a partir de 1934 por el presidente Lázaro Cárdenas, y duró hasta el final del periodo de Ávila Camacho en 1945.

El tercer periodo descrito por Ornelas (1995) es el denominado *escuela de la unidad nacional*, encabezado por Jaime Torres Bodet quien, inspirado por la obra de Vasconcelos, se abocó a una ardua lucha contra el analfabetismo, por lo que impulsó la formación de un gran número de maestros para las escuelas primarias, secundarias y rurales y volvió a proponer las misiones de alfabetización, pretendiendo una formación más humanística que técnica, apoyo a la cultura y las artes. Sin embargo, el contexto por el que atravesaba el México de Bodet era muy diferente al de los tiempos de Vasconcelos, por lo que no pudo sobreestimar la necesidad del país por generar personas con habilidades para el trabajo, esto lo llevó a la creación de un mayor número de escuelas y programas técnicos, así como de más escuelas vocacionales.

Cabe mencionar que pese a los grandes esfuerzos realizados en los tres periodos señalados, no se había cumplido con uno de los principales objetivos del sistema educativo mexicano, el cual era llevar la educación básica a toda la población.

Lo que usualmente suele denominarse como la etapa de *modernización educativa* del SEM comenzó en la segunda mitad del siglo XX (Martínez, 2001). La gran explosión demográfica del país, que se manifestó en un gran número de niños en edad de cursar la educación básica y el número de aquellos que ya la habían concluido y que reclamaban seguir con su educación en niveles superiores, dirigió el rumbo de la educación por varias décadas en el país. Para abatir estos problemas y nuevamente teniendo a Jaime Torres Bodet en la dirección de la SEP, el gobierno de Adolfo Ruiz Cortines (1952-1958) implementó un plan nacional de educación, el *Plan de once años*, que entre otras cosas pretendía aumentar la capacidad de atención del sistema educativo a través de acciones como: el doble turno en las escuelas, el programa federal de construcción de escuelas (Comité Administrador del Programa Federal de Construcción de Escuelas, CAPFCE) y el crecimiento de las escuelas regulares. Así mismo, se emprendieron otras acciones que buscaban elevar la calidad de la enseñanza, en este rubro destacó el programa de libros de texto gratuitos para todos los grados de la enseñanza primaria.

En el gobierno de López Portillo (1976-1982) se inició un amplio diagnóstico del sistema educativo, que arrojó resultados alarmantes, pues aún no se complementaba la cobertura del 100% y lo que era aún peor, la eficiencia terminal no superaba el 50% (SEP- Dirección de

Educación Especial [DEE], 1994). Esto llevó a la adopción del *Plan Nacional de Educación* presentado a fines de 1977 por Porfirio Muñoz Ledo. Bajo este nuevo programa se abandonó el esquema rígido de escolarización mediante planteles convencionales, lo que condujo a la adopción de varias estrategias como: la creación de albergues escolares, transporte, instructores comunitarios, etc., de esta forma pudo abatirse la demanda marginal no atendida en varias décadas.

La etapa actual del SEM se caracteriza por su preocupación por dos aspectos fundamentales: por un lado busca elevar la calidad e igualdad de oportunidades de la educación básica y por otro la formación de hombres preparados técnicamente para solventar las necesidades laborales del país.

Martínez (2001) señaló que, con el arribo de Carlos Salinas al gobierno (1988-1994) se estableció el *Programa de Modernización de la Educación 1989-1994*, en el cual se contemplaban, entre otras cosas, la formación de docentes, la educación de adultos, la capacitación para el trabajo, la educación media superior y superior. En este periodo se vieron avances importantes en materia educativa, se promulgó la obligatoriedad de la enseñanza secundaria, se crearon nuevos planes de estudio y se diseñaron nuevos libros de texto, a la vez que se promulgó la nueva Ley General de Educación (1993) y se hicieron reformas al Artículo 3º de la Constitución, lo que condujo a avances en la descentralización educativa.

En este periodo también se hicieron reformas cruciales en materia de educación especial, sobre todo a partir de 1993, año en el que se modifica el Artículo 41 de la Ley General de Educación, pues se abrió la posibilidad de integración escolar de niñas y niños con necesidades educativas especiales asociadas a discapacidades. Sin embargo, se generaron muchas dudas y preocupaciones entre los directivos, profesores y padres de familia sobre la seguridad y formalidad de este giro de la educación en nuestro país (Martínez, 2001).

No obstante los avances alcanzados en esta etapa, no se resolvieron problemas educativos, como los de calidad y equidad; los defectos estructurales del sistema, en especial la imbricación del sindicato y las autoridades en la toma de decisiones, siguieron intactos.

Las políticas educativas del sexenio de Ernesto Zedillo, (1994-2000) guardaron un alto grado de continuidad respecto a las de Carlos Salinas; las cuales se ven reflejadas en el

Programa de Desarrollo Educativo 1995-2000, que se elaboró bajo la dirección de Miguel Limón, (SEP: 1996). Entre los avances de este periodo se puede destacar que en la educación básica, las cifras de cobertura y eficiencia terminal aumentaron de manera importante, debido a que se le brindó mayor importancia a la educación media superior y a la superior, a la vez que existió una considerable disminución de la presión demográfica en el grupo de edad 6-14 (Martínez, 2001). Por otra parte, se realizó una importante reforma curricular de la primaria, seguida por la renovación de los libros de texto gratuitos, mejorando su calidad y publicando libros en una veintena de lenguas indígenas. Pese a todo, lejos se está de pensar que con ello se haya alcanzado la tan anhelada calidad educativa.

En los últimos años, con la llegada de Vicente Fox al gobierno de la república, se establece el 28 de septiembre de 2001 el programa de educación actual, bajo la dirección de Reyes Tamez, actual secretario de educación, con el nombre de *Programa Nacional de Educación 2001-2006*. Este documento lleva por subtítulo *Por una educación de buena calidad para todos. Un enfoque educativo para el siglo XXI* y en él, desde el título se expresan los principales objetivos del nuevo programa.

> En materia educativa la prioridad de la política pública federal es garantizar la equidad y mejorar la calidad del proceso y los resultados. Alcanzar la justicia educativa y la equidad es el primer objetivo estratégico establecido en el Programa Nacional del sector (SEP, 2002b, p.7).

Del actual programa de educación, se puede afirmar que guarda un delicado equilibrio entre continuidad y cambio, pues a pesar de que en él se sostiene la necesidad de cambios más radicales que graduales, también se menciona la forma paulatina en que se irán dando y la imposibilidad de que esto se logre en un solo gobierno. Cabe señalar que bajo este gobierno se han realizado programas independientes, además de las subdivisiones contenidas en la tercera parte del *Programa Nacional de Educación*. Ejemplo de ello es el *Programa Nacional de fortalecimiento de la educación especial y de la integración educativa (2002),* en donde se encuentran las acciones que se realizarán en está área en particular, los antecedentes, la situación actual y las acciones con las que se piensa fortalecer dicho rubro.

Como se puede ver a través de esta breve revisión histórica, una de las principales preocupaciones del sistema educativo mexicano ha sido cubrir la demanda de educación básica, lo cual aún no se ha logrado en su totalidad, pues según datos estadísticos obtenidos de la SEP (2004), la eficiencia terminal alcanzada en 2001 era de 86.3% y la cobertura en educación básica de niños entre los 6 y 15 años, en el periodo comprendido entre el 2001-2002 era del 91.5%.

Otros puntos cruciales que han preocupado a las últimas administraciones son el logro de la calidad y la equidad educativa, los cuales son alarmantes, ya que la calidad educativa del país sigue en tela de juicio, debido a los pobres resultados alcanzados por sus estudiantes. Ejemplo de ello son los datos reportados por la SEP (2004), entre los cuales se destaca que los alumnos de 6° grado de primaria tienen "un nivel de logro satisfactorio" en español de 53.9% y en matemáticas de 55.4%. Contrastan con esta aseveración, los datos reportados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), la cual señaló en el 2003 la baja calidad de la educación en México y la gran desigualad en la misma que todavía existe en el país (Quintana, 2003).

Es por ello que en la actualidad los grandes retos que asume el sistema educativo mexicano van sobre todo en dos sentidos: elevar la calidad educativa y ofrecer igualdad de oportunidades para toda la población mexicana, independientemente de su sexo, raza o nivel de habilidades de aprendizaje.

LA EDUCACIÓN ESPECIAL

A través de la historia se ha observado que el hombre ha adoptado distintas posturas hacia el ‘otro’ en el que halla una diferencia; la manera en la que lidia con lo ‘anormal’, lo que no reconoce como propio marca la historia de la educación especial, si esta relación es hostil se tratará de confinar, ‘curar’ o eliminar la diferencia, si es aceptada se tratará de incluirla como una más de las manifestaciones humanas.

Se puede decir que la educación especial ha seguido una línea que va de la segregación total o severa a los principios de aceptación o integración social. Según Sánchez (1994), los primeros datos que se tienen sobre el tratamiento de las personas con discapacidades se remontan a la antigua Grecia, en donde existía una marcada discriminación de los niños considerados “anormales” a diferencia de los que no lo eran. En esta sociedad, al igual que en la romana, el infanticidio de los que presentaban algún tipo de malformación o deficiencia era frecuente e incluso aceptable; en otras palabras, la relación que se mantenía con la diferencia era hostil. Más tarde, en la Edad Media, el cambio de visión de mundo que implicó el cristianismo y la condena del infanticidio por parte de la iglesia[2] provocó la búsqueda de formas alternativas para tratar a los niños con discapacidad. Es entonces cuando aparecen las primeras experiencias en este tipo de atención, experiencia que no redundó precisamente en mejoras, pues debido a la falta de un diagnóstico adecuado y aunado a la idea de la imposibilidad de educarlos, muchos de los niños con discapacidades fueron tratados como locos y confinados junto a ellos, si no es que abandonados (Foucault, 1976).

Más adelante, a mediados del siglo XVI, se documenta que el fraile Pedro Ponce de León (1509-1584) llevó a cabo, en el Monasterio de Oña (España), un proyecto de educación de doce niños sordomudos con sorprendente éxito (Bautista, 1993). Muchos autores, entre los que se encuentran Bautista (1993), Sánchez (1994) y Botías, Higueras y Sánchez (1998), consideran que esto marcó el principio de la educación especial, la cual, desde entonces, según los mismos autores, ha pasado por dos periodos: **el periodo de las instituciones,** en el cual en un principio se crearon instituciones generales donde se aislaba a las personas

[2] Cabe recordar la gran importancia de la iglesia como institución no sólo religiosa sino también rectora de las normas políticas y sociales (Bühler, 1983).

con discapacidad y posteriormente se fueron especializando para tratar de forma particular problemas específicos, pero a pesar de dicha evolución su carácter no dejaba de ser excluyente. Por otra parte se encuentra **el periodo de la educación,** en donde se revisan las características que definen a este tipo de personas y se les trata de incluir dentro de la sociedad.

Estos periodos a su vez, se han caracterizado por la forma en que abordan el problema de la educación especial, debido a que sus pretensiones van en un continuo de mayor segregación a menor segregación y de menor integración a una mayor integración social, dichas formas pueden clasificarse en tres principales modelos: **el modelo asistencial**, **el modelo terapéutico** y **el modelo educativo**.

Cabe decir, que a pesar de que estos tres modelos muestran un continuo en el tiempo, no se puede simplificar la manera en que se han sucedido, pues no se puede decir que uno de ellos haya sustituido por entero al otro, sino más bien que, en la actualidad, los tres modelos coexisten en muchas sociedades en menor o mayor grado e incluso aún hoy se siguen reportando casos en los que las personas con discapacidad son recluidas y olvidadas e incluso asesinadas. A continuación, se describirán de forma breve los tres periodos por los que ha pasado la educación especial: *el periodo de las instituciones, el de la educación y el de la integración educativa.* Estos periodos serán abordados en el plano internacional y en el nacional.

Según Bautista (1993), *el periodo de las instituciones* se inició a finales del siglo XVIII y principios del XIX con la creación masiva de instituciones especializadas que atendían a la población con discapacidad y se caracterizó en un principio por su carácter asistencial, el cual tenía la concepción de proteger de la sociedad a los individuos con deficiencias, o también se tenía la idea contraria, que suponía el hecho de que más allá de pretender ayudar a las personas con discapacidad se prefería proteger a la población "normal", aislando a las que se consideraban "anormales" en instituciones. El resultado fue un incremento en la discriminación del discapacitado como producto del aislamiento y la segregación a las que se veía sometido. Sin embargo, la idea de que se estaba proporcionando cuidado y asistencia a estas personas tranquilizaba la conciencia colectiva.

Bautista (1993), señala que a pesar de todo, se puede considerar este periodo como una etapa de progreso, ya que, a lo largo del siglo XIX se crean escuelas especiales para ciegos y sordos y a finales del siglo se inicia la atención a deficientes mentales en instituciones creadas para ellos.

Con la creación de dichas instituciones, comienza un lento proceso en el que de un modelo puramente asistencial se pasa a un modelo terapéutico en el cual se concibe a las personas con discapacidad como sujetos que pueden ser curados, ya que los avances médicos alcanzados en los siglos anteriores dieron paso a la idea de que la atención médica era la vía para ayudar a estas personas; sin embargo, el hecho de que, a pesar de todo, la exclusión de los discapacitados en la sociedad siguiera como una constante en el problema, puso en tela de juicio y replanteó esta forma de atención .

En México, tanto los periodos como los modelos que presuponen la educación especial están muy diluidos, sobre todo en sus primeras etapas, debido al carácter asistencial y terapéutico con que se crearon las primeras instancias para atender los problemas de discapacidad; de acuerdo con autores como Galeana, Rosales y Suaste (1982, citados en: Rodríguez, 2004) y en documentos de SEP-DEE (1994), los principios de la educación especial en el país se remontan a la segunda mitad del siglo XIX, cuando Benito Juárez crea la Escuela Nacional de Ciegos (1867) y Sordomudos (1870). Sin embargo, fue hasta el año 1914 cuando se brindó por primera vez atención a personas con deficiencia mental, por parte del precursor de la Educación Especial en el país, el Dr. José de Jesús González. Por otra parte, pocos años después de la creación de la SEP en 1921, se crea el Departamento de Psicopedagogía e Higiene Escolar en 1929, con lo cual se daría el primer intento de institucionalización de la Educación Especial en México (Galeana, Rosales y Suaste 1982, citados en: Rodríguez, 2004).

El periodo de la educación está definido en principio por el cambio a un modelo educativo que concibe a las personas con discapacidad como sujetos que pueden ser educados más que ser curados, para así obtener las habilidades que superen las barreras impuestas por los impedimentos que conllevan sus deficiencias físicas o mentales. En segundo plano se propone terminar con la segregación de estas personas e incluirlas en la sociedad, con lo que aparece en el plano internacional una segunda etapa de este mismo periodo. Por tales razones, en este escrito se han separado los inicios y la integración educativa en sí misma.

Bautista (1993) planteó que los inicios de la integración educativa se remontan a los primeros años del siglo pasado, en donde las demandas de la industrialización comienzan a requerir que la sociedad sea capaz de brindar a toda la población al menos la escolarización elemental, lo cual llevó a la detección de numerosos alumnos que presentaban ciertas deficiencias, tenían dificultades para seguir el ritmo "normal" de la clase y lograr rendimientos iguales a los del resto de sus compañeros de edad. Es entonces cuando se aplica la división del trabajo a la educación y nace así una pedagogía diferencial, una educación especial institucionalizada, basada en los niveles de capacidad intelectual.

Bautista (1993) también señala que en los principios de este periodo, proliferan las clases especiales y las clasificaciones de niños según sus determinadas características. Los centros se multiplican y se diferencian en función de las distintas etiologías. Estos centros especiales y especializados se encontraban segregados de los centros ordinarios y tenían sus propios programas, técnicas y especialistas, constituyendo de esta manera un subsistema del sistema educativo general.

Por su parte en México, entre 1935-1958, se inicia el planteamiento de la institucionalización de la Educación Especial. Se crean varias escuelas especiales como el Instituto Mexicano Pedagógico, que atendía a niños con deficiencia mental, la Clínica de la Conducta y de Ortolalia, y el Instituto Nacional de Psicopedagogía, cuyo apoyo legal y económico estaba a cargo del gobierno. Así mismo se crean instituciones que pretendían formar maestros especialistas para ciegos y sordomudos básicamente, como la Escuela Normal de Especialización. Sin embargo estas instituciones, pese a que ya tenían un carácter educativo, guardaban grandes resabios del modelo clínico terapéutico y de sus bases segregadoras.

El énfasis puesto en que la interacción entre las personas favorece el aprendizaje y el desarrollo de las mismas (Ovejero, 1998), aunado al hecho de que, en el periodo de la educación se continuara con la segregación de las personas con discapacidad, motivó a un cambio paulatino en el modelo de atención de las personas con discapacidad, pues se asumió que la segregación repercutía directamente en que éstas no tuviesen las mismas oportunidades de desarrollo personal y profesional. El nuevo modelo tenía como reto principal brindar a todas las personas las mismas oportunidades de desarrollo.

El modelo de *la integración educativa* surge a mediados del siglo pasado. Como efecto de las "dos grandes guerras mundiales" y sus dramáticas consecuencias, se producen cambios significativos en la forma de ver a nuestros semejantes, se comienzan a replantear temas como la tolerancia y la aceptación de los otros, así como también a reflexionar y reformular los derechos del hombre, lo cual tendría como consecuencia en 1948 a la Declaración Universal de Derechos Humanos (Mendoza, 1978). No es de extrañar que por esos años se haya dado gran importancia al tema de las personas con discapacidad, ya que los estragos de la guerra habían dejado a un gran número de personas con algún tipo de impedimento. Esto daría pie al inicio de la segunda etapa de la integración educativa, puesto que se considera el tema de integrar a las personas con discapacidad a la sociedad.

Bautista (1993), dentro de las bases filosóficas de la integración destaca el "principio de normalización", el cual sustenta "la posibilidad de que el deficiente mental desarrolle un tipo de vida tan normal como sea posible".

Otro aspecto filosófico que sienta las bases de la integración es la aceptación de la diversidad, la cual de acuerdo con Alegre (2002), en su forma básica señala que todos somos diferentes, lo normal es la diversidad, aprendemos, sentimos y pensamos de diferente manera, razón por la cual no habría ningún fundamento para segregar a las personas con discapacidad, ya que ellos sólo tienen o requieren formas distintas de aprendizaje, lo mismo que lo pueden requerir todos los seres humanos.

En el mismo sentido Beeny (1975, citado en: Bautista, 1993, p.29), señala que "La integración como filosofía significa una valoración de las diferencias humanas", de esta manera no se trata de eliminar las diferencias, sino de aceptar su existencia como distintos modos de ser dentro de un contexto social, que puede ofrecer a cada uno de sus miembros las mejores condiciones para el desarrollo máximo de sus capacidades, poniendo a su alcance los mismos beneficios y oportunidades de vida.

Bajo este contexto surge la integración educativa a mediados del siglo pasado en los países bajos (Mikkelsen 1969, citado: Botías, et al, 1998), en donde se trata de integrar a la sociedad a las personas que sufrían algún tipo de impedimento físico o mental. Dicho modelo fue adoptado y desarrollado en la década de los sesentas por un gran número de naciones (Marchesi y Martín, 1995), lo que generó un ambiente propicio para que las autoridades de estos y otros países pusieran en la mesa de discusión las necesidades y derechos de las personas con discapacidad.

Años más tarde, en 1978 se escribió el informe Warnock, un estudio realizado en Gran Bretaña para describir cuál era la situación de la educación especial (García Pastor, 1993, citado en: SEP 2002b). De sus resultados se derivaron muchas normas legales, hoy vigentes en ese país, y adoptadas por muchos otros, sobre todo por los países de occidente. Además en este documento se menciona por vez primera el término 'niño con una necesidad educativa especial', refiriéndose a aquellos que necesitan apoyos especiales para aprender. Conjuntamente se plantea cuáles son los principales derechos de las personas con estas características y se señalan las razones por las que la integración podría ser el mejor camino para lograr un óptimo desarrollo de los niños con necesidades educativas especiales (Warnock 1987, citado en Brennan, 1988).

A partir de entonces se realizan diversas declaraciones de las Naciones Unidas, que culminaron en las normas uniformes sobre la igualdad de oportunidades para las personas con discapacidad, en las que se insta a los estados a garantizar que la educación de las personas con discapacidad forme parte integrante del sistema educativo (SEP, 2002).

Existen otros dos documentos fundamentales en el desarrollo de la integración educativa: éstos son la Conferencia Mundial sobre Educación para Todos de 1990 celebrada en Jomtiem, en donde se renueva el empeño de la comunidad mundial por garantizar el derecho de la educación para todos, independientemente de sus diferencias particulares (PNUD-UNESCO-UN ICEF.-B. M.[3], 1990) y la Declaración de Salamanca realizada en España en 1994, en la cual los 92 gobiernos participantes, incluyendo a México, y 25 organizaciones internacionales, reafirman el compromiso con la educación para todos, reconociendo la necesidad y urgencia de impartir enseñanza a los niños, jóvenes y adultos con necesidades educativas especiales dentro del sistema común de educación (UNESCO-Ministry of Education and Science Spain, 1994).

---

[3] Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo - Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura - Fondo de la Naciones Unidas para la Infancia – Banco Mundial

Estos documentos fueron decisivos para la nueva conceptualización de educación especial y de los niños con necesidades especiales. De acuerdo con Sánchez (1994), la educación especial es el conjunto de conocimientos científicos e intervenciones educativas, psicológicas y sociales tendientes a optimizar las posibilidades de sujetos excepcionales, ya sean sujetos con deficiencias o superdotados. De tal manera que su objeto de estudio está centrado en las diferencias individuales.

Otro concepto que se desarrolló en esos años fue el del niño con necesidades educativas especiales, el cual ya no se limitaba a los discapacitados y al cual se le daría un carácter más general, ya que ahora se entendería como "aquel niño, que en relación con sus compañeros de grupo, tiene dificultades para desarrollar el aprendizaje de los contenidos asignados en el currículo, requiriendo que se incorporen a su proceso educativo mayores recursos y/o recursos diferentes para que logren los fines y objetivos educativos" (SEP, 2002b, p. 13).

Se considera que con estas definiciones pretenden evitar el carácter discriminatorio que sugerían las etiquetas, ya que dentro de esta nueva concepción caben tanto los niños con discapacidad, como todos aquellos que en algún momento de su escolarización presenten problemas para lograr los objetivos curriculares y que no hayan podido ser resueltos por el profesor. Así mismo, este nuevo modelo ha hecho visibles nuevos retos que no habían sido considerados de forma clara por la educación especial, como es el caso de personas que no tienen ninguna discapacidad física, sino que presentan desventajas de aprendizaje, como es el caso de los grupos minoritarios, los grupos indígenas, grupos de inmigrantes o comunidades marginadas.

Es también importante señalar que ningún modelo de atención en educación especial (asistencial, médico o educativo) se ha comenzado a instrumentar sin que existan ciertas resistencias, por el contrario, el paso de uno a otro ha sido gradual e incluso, se puede decir que en la actualidad los tres modelos coexisten dentro de la sociedad, por lo que ciertas partes de la sociedad ven a la discapacidad como objeto de "lástima" o como algo que hay que "curar". El modelo educativo de integración educativa es relativamente joven, tiene pocos años de haberse retomado, puede recibir críticas, puede mejorarse y puede dársele una oportunidad antes de dejarlo de lado. A continuación se abordará brevemente cómo se ha concebido en nuestro país el paso hacia este modelo de atención.

Situación de la integración educativa en México

Las propuestas y declaraciones a nivel mundial tuvieron un alto impacto en México, lo cual llevó en 1970 a la creación de la Dirección General de Educación Especial (DGEE), organismo que reformaría y desarrollaría nuevos planes y programas institucionales, entre los cuales se encuentra aquel que llevó a cabo los primeros intentos de integración, denominado Programa Nacional de Integración de 1989.

La integración educativa en México comienza de “manera formal” con las reformas realizadas en 1993 al artículo 3º de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, en el cual se garantiza el derecho de todo individuo a recibir educación por parte de la federación, estados y municipios, desde el preescolar hasta la secundaria, de manera obligatoria. Asimismo se realizaron cambios al artículo 41° en la Ley General de Educación, quedando asentado en él que la educación especial se destinará a individuos con discapacidades transitorias o definitivas, así como a aquellos con aptitudes sobresalientes (Ley general de educación, 2006), sustentando de esa manera el marco legal en cuanto a las estrategias que deberán seguirse para la integración educativa de todos los individuos (Peña, 2002).

Las reformas descritas, formularon grandes cambios en la estructura del sistema educativo mexicano (SEP, 2002b), entre las cuales las más destacadas fueron los siguientes:

- ✓ Se promovió la inserción de niños con necesidades educativas especiales a las escuelas regulares.
- ✓ La Secretaria de Educación Especial se integró a la de Educación General.
- ✓ Se realizaron cambios en los planes y programas de estudio.
- ✓ Se replantearon las formas de evaluación.
- ✓ Se crearon servicios colaterales y de apoyo a la educación general como los Centros de Atención Múltiple (CAM), las Unidades de Servicios de Apoyo a la Educación

Regular (USAER), los Centros de Atención Psicopedagógica de Educación Preescolar (CAPEP)y las Unidades de Orientación al Público (UOP).

- ✓ Se inició la creación de planes y programas para la organización escolar y la capitación docente.

Esta nueva forma de entender la educación expresa en sí misma una amplia colaboración de todos sus participantes (Demetter, P., Thurston, L.P. & Dyck N, 2002), sobre todo entre los servicios de educación general y educación especial, pues al promoverse la incorporación e integración de los niños con discapacidad dentro del sistema de educación regular, los maestros de educación regular tienen que apoyarse en los de educación especial.

Así mismo, la reestructuración que supone la integración educativa debe prever una planeación adecuada, que contemple la organización escolar y delimite el papel que tiene cada uno de los implicados en el ámbito educativo, donde se asuma que el proyecto es responsabilidad de todos, por lo que es importante realizar evaluaciones continuas a corto y largo plazo (Demetter, P., Thurston, L.P. & Dyck N, 2002).

De igual manera se debe asumir una forma de trabajo coherente con el modelo de integración, por lo que, el trabajo en equipo es fundamental, tanto al interior del aula como entre todos los comprometidos con ella. Donde la función que deberán promover los profesores, especialistas, directivos y padres, será la de consultor, el que pide asesoría y el que consulta, el que asesora. Estos pueden ser intercambiables, dependiendo del momento y las necesidades que se planteen.

Otra pieza clave del modelo de integración es el currículum, el cual se entiende como una herramienta que responde a cuestiones fundamentales como: qué enseñar, cómo enseñar y cuándo evaluar (Torres, 1999). Es por ello que en documentos de la SEP, como el Programa Nacional de fortalecimiento de la educación especial e integración educativa (2002b), se señala la necesidad de hacer una revisión constante de los planes y programas de estudio, así como de generar nuevas estrategias tanto didácticas como de evaluación, que respondan a este proyecto educativo.

En este sentido, Paris y Ayres (1994) señalan la importancia de una evaluación continua, basada en diversas estrategias como lo pueden ser el mismo currículum o la revisión constante del trabajo de los alumnos, los padres o los propios maestros, a través de la creación de carpetas en donde se recopilen diversos tipos de información como pueden ser, los trabajos escolares, diarios, informes, etc. A esta técnica, dichos autores la denominan portafolio.

Como se ha revisado, el modelo de integración educativa lleva poco tiempo de haberse instaurado en la educación en México y como es de esperarse, sigue coexistiendo con el modelo médico e incluso en algunos casos con un modelo más tradicional, sobre todo, porque aún persiste un gran desconocimiento por parte de la población sobre lo que significa este proyecto que promueve la no discriminación. Por tal motivo, sería ingenua y pronta su descalificación. Habría que esperar más tiempo para realizar una verdadera evaluación de sus alcances y limitaciones, en tanto, el modelo de la integración educativa impone grandes retos al sistema educativo mexicano, como el brindar el servicio a nivel nacional, proveer de recursos humanos y de infraestructura suficientes, revisar y adecuar nuevos métodos de enseñanza, etc. Es en este último rubro en el que el presente proyecto pretende incidir.

El hecho de que una metodología alternativa de enseñanza, para un caso particular en el currículo de la escuela primaria, se aborde como punto central de este trabajo, corresponde a la consideración de tres aspectos:

El primero de ellos es la diversidad, que como ya se ha señalado, ha traído consigo la atención de todos los casos en que se presenten necesidades educativas especiales, sean permanentes o transitorias y no solamente aquellos en donde existe una discapacidad física. En el caso particular de este trabajo, el hecho de que las prácticas educativas se hayan llevado a cabo en un contexto de asentamientos urbanos irregulares y con una población de escasos recursos económicos, planteó la necesidad de generar una metodología de enseñanza adecuada y adaptada al contexto, como un modo de prevención de mayores problemas educativos a los presentados en la etapa de diagnóstico que se realizó en el primer semestre[4].

El segundo aspecto también se desprende del diagnóstico realizado en la primera parte de la intervención y es la atención a uno de los problemas en el que se presentaron mayores

[4] El diagnóstico realizado en la escuela se revisa de manera mas detallada en el apartado correspondiente a las etapas de intervención.

dificultades en los alumnos que cursaban los últimos grados: las fracciones. Lo anterior repercute directamente en la importancia que tiene realizar adecuaciones pertinentes a los contextos de enseñanza, a la vez que se promueve un carácter preventivo, pues se considera que atender deficiencias académicas en alumnos que cursan los últimos grados es un factor importante para que éstos no presenten mayores problemas académicos cuando pasen a otro nivel educativo.

Un tercer y último aspecto es que este trabajo trata de ser coherente con el modelo de integración, para el cual, como se señaló anteriormente, las necesidades educativas especiales no corresponden de forma exclusiva a las personas con discapacidad, sino que hacen referencia a todos aquellos alumnos que a pesar de las adecuaciones realizadas por el profesor de aula regular no han sido capaces de alcanzar los propósitos del currículum (en este caso las fracciones). Además de la importancia que tiene el no segregar a estos alumnos del grupo, por el contrario se propone que su atención debe ser dentro del aula regular. A través de esta acción se pretende incidir en todo el grupo y no solamente en alumnos específicos, a la vez que se toman en cuenta los beneficios que tienen para los alumnos con bajo aprovechamiento el trabajar con compañeros más capaces.

Por estas razones, se decidió abordar el problema de la enseñanza de fracciones desde la perspectiva histórico–cultural, ya que desde esta concepción teórica se promueve el trabajo colaborativo, la enseñanza en contexto y la evaluación del proceso, puntos esenciales para los objetivos de este trabajo. Además de que dentro de esta misma perspectiva también se han realizado investigaciones sobre la enseñanza de conceptos científicos. A continuación se revisará esta postura con más detalle.

PANORAMA GENERAL DE LA TEORÍA HISTÓRICO-CULTURAL

En las últimas décadas, uno de los paradigmas en psicología educativa que ha tenido un gran impacto en el interior de la educación especial, es la teoría histórico-cultural, por las amplias posibilidades heurísticas que ha demostrado tener, sobre todo, por medio del *trabajo por pares*, en el cual se espera que un estudiante "novato" mejore su rendimiento o capacidades en determinadas áreas al trabajar de forma colaborativa con un "experto" (Tudge, 2000 y Duran, 2001) y el uso de las *herramientas de mediación* (las cuales serán explicadas en la página 27 de este trabajo) como facilitadoras del aprendizaje (Kozulin, 2000 y Prieto, 1992).

La perspectiva histórico-cultural fue desarrollada por Liev Semiónovich Vigotsky y su grupo de trabajo en la segunda y tercera década del siglo pasado, en lo que antes era la Unión Soviética. Para una mayor comprensión de la teoría se ha dividido este apartado en tres partes, en la primera se tratan los principios filosóficos que sirvieron de base a Vigotsky para fundamentar su postura. En la segunda se tratan los aspectos esenciales de la teoría histórico-cultural y en la tercera se describe brevemente la teoría sobre la adquisición de conceptos científicos propuesta por Galperín y Talizina.

Desde su incursión a la psicología, Vigotsky se había planteado superar lo que él denominaba la "crisis de la psicología". Para esto, el primer paso que habría que dar, era resolver el problema planteado por el "dualismo cartesiano"[5]. En este sentido, Vigotsky opone la postura dualista de Descartes con la postura monista de Spinosa, de este último autor retomaría la idea de que la realidad o naturaleza es sólo una, única y homogénea, a la que el hombre tiene acceso por medio del espacio y el pensamiento (Bronckart, 2000).

De Hegel, Vigotsky retomaría entre otras cosas, la dialéctica, la cual el filósofo alemán definiría como: "el proceso mediante el cual la mente, como un potencial ilimitado, se encuentra con objetos limitados distintos de ella, que la niegan, y entonces se reorganiza en una síntesis superior que retiene el momento de la negación" (Bronckart, 2000, p. 120).

[5] El dualismo cartesiano concibe al cuerpo separado de la mente, la primera es la *res extensa* y la segunda la *res cogitans* en donde se encuentra la sustancia pensante, incluida la razón, la conciencia y el alma. Este pensamiento influyó en psicología a paradigmas como el conductista (Smirnov, 1960).

Luego entonces, “la dialéctica también es un método, en cuanto la evolución del pensamiento y la ciencia sólo pueden reproducir la dialéctica de la realidad” (Bronckart, p. 120).

Tras la revolución de 1917, Vigotsky estudió de manera más profunda las ideas de Marx con el objeto de desarrollar una psicología marxista, lo cual había sido intentado ya por los psicólogos soviéticos de aquella época, pero sólo había tenido por frutos un simple parafraseo de citas textuales de éste filósofo (Shuare, 1990). A través de Marx, Vigotsky rechazó la creencia en la preexistencia de ‘la idea’ en la materia desde la eternidad, la cual estaba inserta en el planteamiento panteísta de Spinosa y Hegel y era característica del idealismo objetivo. Vigotsky rescató el monismo de Spinosa y al igual que Marx y Engels, retomó la dialéctica de Hegel, pero invirtiéndola de tal modo que no es la conciencia la que explica la vida material, por el contrario, es a partir de la vida material de la humanidad como se puede explicar su historia y la conciencia es el fruto de esa vida material. Este planteamiento sugiere que la capacidad del pensamiento humano no se desprende de las propiedades del cuerpo, sino de las propiedades de la vida social objetiva en los aspectos de la praxis, la acción y el lenguaje (Bronckart, 2000).

Hacer frente al problema de la psicología desde una posición marxista condujo a Vigotsky a asumir tres aspectos fundamentales, propios del método del materialismo histórico: a) el *instrumentalismo,* el cual utilizó para explicar que todos los procesos superiores de la conducta que estén relacionados con el pensamiento, el lenguaje, la memoria, etc., tienen un carácter mediacional, por tanto, no están apoyados solamente en estímulos del medio, sino sobre todo en los estímulos o recursos internos que el sujeto va creando y desarrollando a lo largo de su vida; b) el *histórico,* al referirse a la historia, este autor no considera el tiempo en términos de la persona u órgano fisiológico que se desarrolla; para él, en el momento del nacimiento, el hombre es el heredero de toda la evolución filogenética y de un proceso histórico, un desarrollo social, luego entonces, el producto final de su desarrollo estará en función de las características del medio social en que vive. Al respecto Shuare (1990, p. 59) señaló: “Vigotsky introduce el tiempo en la psicología, o mejor dicho, al revés, introduce la psiquis en el tiempo…”, c) el *cultural*, hace referencia a la importancia que tiene la interacción social a lo largo del desarrollo ontogenético sobre el desarrollo del individuo. Es la cultura la que ha preservado el conocimiento generado de forma social y es sólo a través de la interacción con los otros como el sujeto logra apropiarse de dicho conocimiento (Carretero y García, 1998).

Según Rodríguez (1996) tres temas fundamentales caracterizan al enfoque histórico-cultural, la adopción del análisis genético evolutivo como método de estudio, la premisa de que las funciones psicológicas superiores se originan en la vida social. Por último, la idea de que la acción humana, individual y socialmente está mediada por herramientas y signos; en particular por el lenguaje.

Vigotsky, antes de abordar el problema psicológico, se preguntaría sobre el *status* de la psique, resolviéndolo en una hipótesis clara: la psique tiene una base material, biológica, pero su origen es social (Bronckart, 2000). Por tal razón, su objetivo era dar una explicación socio-histórica de las funciones psicológicas superiores, es decir su problema estaba planteado en términos de: ¿Cómo las funciones psicológicas primarias (memoria, lenguaje, atención, etc.) de carácter biológico se transforman en funciones psicológicas superiores (exclusivas del ser humano) de carácter social? Para lograrlo, no bastaba el método genético que explicaba el desarrollo personal y actual de un individuo, sino que antes, era necesario emplear el materialismo-histórico, en busca del trasfondo histórico-social en que los procesos superiores fueron constituidos.

Por medio de este método, Vigotsky llegó a la conclusión de que los procesos psicológicos superiores son procesos complejos autorregulados, sociales por su origen, mediatizados por su estructura, conscientes y voluntarios por su funcionamiento (Baquero, 1999). Esto quiere decir que el hecho humano no está garantizado por la herencia genética de la especie, sino que el origen del hombre (el paso del antropoide al hombre, al igual que del niño al adulto) se produce gracias a la actividad conjunta y se perpetúa y garantiza mediante el proceso social de la educación (Del Río, 1990). Al respecto Vigotsky escribió:

> "...la psiquis humana, en comparación con la del animal, implica en sí misma un salto cualitativo, porque, a diferencia de los fenómenos psíquicos de los animales, los humanos ("las funciones psíquicas superiores", según la terminología vygotskiana) son el producto de la compleja interacción del individuo con el mundo, interacción mediatizada por los objetos creados por el hombre..." Shuare (1996, p. 553).

En este sentido, incluso los sistemas funcionales son tanto individuales como culturales y el desarrollo genético no es estrictamente ontogenético, sino histórico – genético y sociogenético. De tal manera que comunidades, culturas y grupos de conciencia son unidades o sistemas genéticos en desarrollo, al igual que los individuos.

Baquero (1999) señaló que para Vigotsky las funciones psicológicas superiores del hombre se caracterizan por:

1. Estar constituidas en la vida social y ser específicas de los seres humanos.
2. Regular la acción en función de un control voluntario, superando su dependencia y control por parte del entorno.
3. Estar reguladas concientemente o haber necesitado de esta regulación conciente en algún momento de su constitución.
4. Necesitar en su organización del uso de instrumentos de mediación.

Del mismo modo, Vigotsky se planteó en un primer momento dilucidar cuál sería la mínima parte en que podría ser reducida la psique, lo concreto en ella, llegando en un primer momento, a la manera de Engels (1999), a emplear el término "instrumentos cognitivos" como analogía de las "herramientas de trabajo" que Engels había utilizado para explicar la transformación del mono en hombre. De esta manera, los instrumentos mentales, y dentro de ellos los *signos,* jugarían un papel primordial para llegar a una explicación de la psique, posteriormente este postulado variaría. Lo que permaneció invariante en su obra es el carácter *instrumental, histórico* y *cultural* de la psique. (Baquero, 1999; Carretero y García, 1998 y Talizina, 1988).

La conclusión a la que llegó Vigotsky bajo esta concepción teórica es que el aprendizaje precede al desarrollo y que este aprendizaje sólo es posible a través de la interacción social. El hecho de anteponer el aprendizaje al desarrollo biológico ha sido fundamentado por los estudios realizados por Luria y Vigotsky en Asía (Kozulin, 2000) y por la replica realizada por Cole (1999) en África. En ambos estudios se demuestra cómo comunidades diferentes a las occidentales parecen tener un desarrollo cognitivo inferior cuando para su estudio se aplican pruebas de investigación occidentales.

Son estos supuestos teóricos los que en este trabajo llevan a considerar como pieza clave los medios que se emplean en el aprendizaje; por tal razón, a continuación se desarrollarán brevemente los principales conceptos de la teoría histórico–cultural que han sido retomados para el diseño del modelo de intervención.

La mediación. En la teoría histórico-cultural un concepto central es la mediación, en la cual a manera de urdimbre, se entretejen los tres aspectos explicativos formulados por Vigotsky para explicar la conformación de los procesos superiores: instrumental, histórico y cultural. A través del concepto de mediación se explica, no solamente cómo es que los instrumentos cognitivos creados de forma social median la actividad del niño, sino también, cómo el agente transmisor, es decir "el otro", adulto o compañero que ya posee dichos instrumentos, transmite o, mejor dicho, es mediador en la apropiación de estos instrumentos por parte del que aún no los posee, es decir el niño. Kozulin (2000) señala que, incluso aquellos objetos creados de forma social, como por ejemplo los libros, pueden ser considerados mediadores, aún cuando de manera física el otro humano no esté presente.

Los instrumentos de mediación son las herramientas mentales (signos y símbolos) que el niño utiliza para controlar su conducta, interpretar y entender el mundo, entre otras cosas. Dichas herramientas son una analogía de lo que ocurre con las herramientas que el hombre emplea para realizar su trabajo. En este sentido, de la misma forma en la que el hombre aumenta su posibilidad de cargar piedras cuando emplea una carretilla en lugar de las manos, también los procesos psicológicos como el pensamiento o la memoria aumentan sus posibilidades biológicamente determinadas, si se emplean herramientas mentales como los signos, los cuales pueden ser tan simples como una marca hecha para ayudar a recordar algo, hasta signos más elaborados como la escritura. En este sentido cabe señalar el papel central del lenguaje como herramienta mental que cumple funciones de planeación, organización y autorregulación de la conducta y el aprendizaje. (Kozulin, 2000 y Vigotsky, 1979; 1999)

Con respecto al agente mediador, Vigotsky (1979) escribió que en la ontogénesis, el niño interactúa con el mundo que le rodea en forma mediada a través de otra persona que le enseña a emplear los símbolos, nombres de los sonidos, lenguaje, etc. Estos símbolos son los medios de comunicación social entre las personas, medios de ejercer influencia sobre los otros. Poco a poco el niño transforma los símbolos como medios para actuar para sí mismo operando sobre su propia actividad simbólica, primero en forma exteriorizada y luego en el interior. Así, en la interacción con otros, el niño adquiere los instrumentos psicológicos con los que dirige su comportamiento, primero en un nivel externo, social para luego pasar a un nivel interno, individual, como lo postula la ley genética del desarrollo propuesta por Vigotsky:

> "Toda función en el desarrollo cultural del niño aparece en escena dos veces, en dos planos; primero en el plano social y después en el psicológico, al principio entre los hombres como categoría interpsíquica y luego en el interior del niño como categoría intrapsíquica, lo dicho se refiere por igual a la atención voluntaria, a la memoria lógica, a la formación de conceptos y al desarrollo de la voluntad...El paso, naturalmente, de lo externo a lo interno, modifica el propio proceso, transforma su estructura y funciones. Detrás de todas las funciones superiores y sus relaciones se encuentran genéticamente las relaciones sociales, las autenticas relaciones humanas" (Vigotsky, 2001a p. 68).

Para Rodríguez (1996) esta ley articula tres ideas fundamentales: primero, que las formas de consciencia individual tienen su génesis en la aparición de las formas colectivas de actividad. Segundo, que la mente se conforma mediante la actividad, nunca en forma pasiva. Tercero, que parte de lo considerado propiamente psíquico tiene sus fundamentos en la interacción social y en la colaboración.

De tal forma, las herramientas mentales han sido construidas de manera social a lo largo de la historia del hombre y son trasmitidas al niño a través de la interacción social. A este respecto, el adulto cumple una función de mediador entre el niño y el mundo, de manera más específica, entre el niño y la cultura o entre el niño y el conocimiento desarrollado por la sociedad. El adulto, en primera instancia, sirve como guía de la actividad del niño al prestarle las herramientas mentales que él aún no posee, hasta que logra apropiarse de ellas y es capaz de utilizarlas por sí mismo. Por ejemplo, cuando el niño aún no es capaz de dirigir su atención voluntariamente y el adulto le señala un objeto que puede ser de interés con una frase como "Mira ese avión", está orientando la atención del niño hacia donde debe dirigirla, proceso que el niño interioriza o hace propio paulatinamente hasta que es capaz de dirigir su atención por sí mismo.

En síntesis, en este trabajo utilizamos el término *mediación* para referirnos a cómo una persona que domina un conocimiento y el uso de un tipo determinado de herramientas mentales utiliza diversos tipos de ayudas (preguntas, ejemplos, contraejemplos, etc,) con el fin de que una persona que no domina el conocimiento, ni las herramientas, sea capaz de realizar eficazmente una tarea relacionada con ambos.

La zona de desarrollo próximo (ZDP). Para describir este concepto es necesario explicar la concepción que Vigotsky tenía del desarrollo y el aprendizaje. El desarrollo del niño es visto más como un proceso complejo que como un simple continuo. En el desarrollo entendido como 'continuo' se plantea que el niño pasa de una etapa en la que 'no sabe hacer' a otra en el que ya 'sabe hacer', mientras que en el desarrollo entendido como 'proceso' se plantea que el niño nunca parte de un estado vacío de conocimiento, sino que más bien parte de conocimientos y del uso de instrumentos cognitivos adquiridos previamente, éstos se entretejen con nuevos aprendizajes, los que a su vez potencializan su desarrollo. Otra diferencia entre el desarrollo entendido como proceso o como continuo es que el primero de ellos se entiende como una estructura lineal y unidireccional, en tanto que el segundo es el resultado de varios caminos posibles en donde el cambio puede surgir tanto de avances como de retrocesos.

La concepción vigotskyana entiende al aprendizaje como un proceso social, el cual ya hemos tratado anteriormente y que hace referencia a que el niño no aprende de forma aislada, sino en interacción con otros dentro de un contexto sociocultural dinámico. Además, bajo esta concepción el aprendizaje y el desarrollo se encuentran interrelacionados desde los primeros días de vida del niño, en donde el primero es el punto de apoyo para el segundo.

Estas dos concepciones sobre el desarrollo y el aprendizaje del niño serían la fuente principal que llevaría a Vigotsky al planteamiento de la zona de desarrollo próximo (ZDP), la cual se entiende de forma sintética como: *la diferencia entre lo que el niño es capaz de hacer solo y lo que es capaz de hacer en colaboración con otra persona más capaz* (Baquero, 1999, Del Río, 1990, Kozulin, 2000 y Vigotsky, 2001b). A su vez, la ZDP es otra de las herramientas heurísticas importantes para entender y explicar el desarrollo y aprendizaje del niño, de la misma manera que plantea una forma alterna a la evaluación tradicional que se hacía de ellos. En cuanto al planteamiento del primero de estos dos aspectos, impulsa la idea de que el aprendizaje se suscita en interacción con los otros y se potencializa en el niño cuando lo realiza en colaboración de un compañero más capaz, esta idea sería desarrollada de forma más amplia por Rogoff (1990) y Wertsch (1984).

El segundo aspecto formula una crítica a las formas tradicionales de evaluación, las cuales se realizaban de manera individual, trazando un corte en el nivel manifiesto del rendimiento del niño en comparación con otros niños de su edad. A Vigotsky le interesaba más una evaluación intrapsicológica, es decir, era más importante saber lo que el niño podía hacer en comparación consigo mismo que con los otros niños. Esto sólo era posible si se tenía en cuenta la resolución de tareas en colaboración con otros, lo cual proporcionaba dos resultados, lo que el niño podía resolver solo y lo que era capaz de resolver con ayuda de un compañero más hábil, la diferencia es el resultado de la evaluación y a la vez constituye la ZDP (Kozulin, 2000).

El rasgo esencial de la hipótesis de Vigotsky es la noción de que los procesos evolutivos no coinciden con los procesos de aprendizaje. Por el contrario el proceso evolutivo va a remolque del proceso de aprendizaje; esta secuencia es lo que se convierte en la ZDP. Un segundo rasgo importante es que aunque el aprendizaje está directamente relacionado con el curso del desarrollo infantil, ninguno se realiza en igual medida o paralelamente.

La formación de conceptos. En su famoso libro *Pensamiento y lenguaje*, Vigotsky (1999) trató de explicar la formación de conceptos en el niño, teniendo en cuenta la participación de los instrumentos de mediación. Para ello empleó la técnica de "estímulo doble" desarrollada por su colaborador Leonid Sajarov (Kozulin, 2000). Esta prueba consistía en presentarle diversos objetos al niño para que los clasificara. Una característica importante era que dichos objetos estaban marcados con una letra, de tal forma que el niño podía emplear tanto las características objetivas de los objetos, como también sus nombres, los cuales funcionaban a manera de signo, es decir de una herramienta mental. Por medio de este experimento, Vigotsky pretendía aproximarse a la forma en que se construyen los conceptos en la vida del niño, pues según él, los niños construyen los conceptos a partir de la combinación de las características del objeto y las definiciones verbales proporcionadas por los adultos.

Vigotsky (1999) distinguió dos tipos de conceptos que se formaban en el niño, los científicos y los cotidianos. Ambos conceptos estaban relacionados entre sí y se distinguían por la forma o actividad en que el niño se apropia de ellos. De forma ideal, los conceptos científicos se forman en escenarios educativos, por medio de la enseñanza 'formal'. Estos conceptos están organizados de forma sistemática y jerárquica, además de ser la abstracción de los conocimientos que el hombre tiene sobre las ciencias naturales y sociales y se puede decir que el niño se ha apropiado de ellos cuando es capaz de usarlos de forma conciente para la resolución de diversos problemas o tareas. En cambio, los conceptos cotidianos se forman en el contexto del niño, por lo que suelen estar anclados a éste, de tal forma que el niño puede utilizarlos para resolver tareas dentro de un contexto específico, pero resulta difícil o imposible trasladarlos a otro o hacer generalizaciones a partir de ellos (Vigotsky, 1999 y Kozulin, 2000).

Al tratar de explicar la forma en que se interrelacionan los conceptos científicos y cotidianos, Vigotsky (1999) llegó a la conclusión de que para desarrollar los primeros, el niño se basa en sus conocimientos previos, es decir en los conceptos cotidianos y que se tiene un mejor conocimiento de los conceptos científicos dependiendo de la cantidad de experiencias que el niño tenga en relación con ellos. Esto lo llevó a decir que los conceptos científicos se desarrollan "de arriba abajo", es decir, desde fórmulas verbales o matemáticas a sus correlatos empíricos, mientras que los cotidianos tienen un proceso inverso, "de abajo arriba", desde las impresiones espontáneas a unas experiencias más estructuradas (Baquero, 1997; Kozulin, 2000 y Vigotsky, 1999).

Todo lo anterior permite comprender que la unidad de análisis en esta perspectiva es la acción mediada para la evaluación a partir del método genético, el cual de acuerdo con Hernández (1998), no se puede reducir a la simple observación del desarrollo del niño, sino que en el caso de este enfoque en particular se emplean por lo menos tres métodos de análisis: 1) el experimental-evolutivo, en el cual el investigador interviene artificialmente en el proceso evolutivo empleando la mediación para observar los cambios que ésta genera en los procesos cognitivos del niño; 2) el genético-comparativo, a través del cual se comparan los procesos psicológicos entre sujetos que presentan algún problema de tipo orgánico y los que presentan un 'desarrollo normal' por no mostrar ninguna deficiencia de este tipo, y 3) el microgenético que consiste en el análisis detallado de una función u operación psicológica y su constitución a corto plazo por medio de una situación experimental. De esta manera desde un marco histórico-cultural se requiere de la consideración de la acción que se realiza en una situación concreta y los instrumentos empleados por parte del niño y el investigador para llevarla a cabo (Rodríguez, 1996).

El sistema teórico de Vigotsky aunado a posteriores aportaciones a sus ideas por parte de sus seguidores, principalmente de Luria y Leontiev, establecieron las bases para el desarrollo del enfoque sociocultural contemporáneo en la psicología que, según Werstch (1984), comienza con el supuesto de que la acción se halla mediada y no puede ser separada del medio o contexto en el que se lleva a cabo; siendo la premisa fundamental que los proceso psicológicos son construidos conforme los individuos participan en interacciones sociales y utilizan herramientas.

En relación con el tema central de este trabajo, la adquisición de conceptos científicos, existen posturas posteriores a Vigotsky que retomaron su trabajo para generar una propuesta específica para la adquisición de conceptos científicos en los escolares, esta propuesta será desarrollada en el siguiente apartado.

Teoría de la adquisición de conceptos científicos propuesta por Galperín y Tallízina

Uno de los principales continuadores de los trabajos realizados por Vigotsky es L. Leóntiev, quien desarrolló la teoría de la actividad según la cual la apropiación es "la peculiar reproducción por el individuo, de las capacidades y funciones humanas formadas en el curso de la historia" (Shuare, 1990 p. 179); es decir, la asimilación de la experiencia histórico-social de la humanidad, que se da a partir de la interacción con el prójimo. A su vez, de esta teoría se derivan las investigaciones de Galperín (1995) y Tallízina (1994) que tratan específicamente sobre la formación de conceptos científicos en el niño, las cuales han sido retomadas como pilares fundamentales de este trabajo, debido a que se pretende emplear este modelo para la enseñanza del concepto de fracción. A continuación nos detendremos a revisar algunos de los puntos esenciales que tratan estos autores.

Tallízina (1994) señaló que la apropiación del conocimiento se logra mediante la interacción entre el individuo y el mundo, sin embargo, para que exista una acción es indispensable que exista también una necesidad que sea motivo de la acción y un objetivo que se pretenda alcanzar. La actividad es posible sólo cuando motivo y objetivo coinciden.

Así mismo, la verdadera actividad se consigue cuando se logra motivar al alumno a través de la realización misma de la tarea, vinculando los fines individuales o motivación personal con los fines sociales, en este caso representados por el aprendizaje. De la misma manera, la motivación se consigue de manera más sencilla y natural cuando el aprendizaje logra vincularse con tareas socialmente útiles (Tallízina, 1994).

En este sentido, cualquier tarea o acto que emprende el niño comienza con una motivación y pasa por una planeación, organización, ejecución y verificación de la misma. Si el niño aún no tiene bien apropiadas algunas de las partes de la tarea no podrá realizarla. En este caso, el adulto puede mediar entre el niño y la tarea a través de "ayudas" que lo guíen en alguna de sus partes, que orienten la planeación, busquen formas de organización diferentes o generen dudas sobre la correcta realización de la misma.

Otro punto que sobresale por su relación con la enseñanza-aprendizaje es la forma en que el adulto organiza y sistematiza la información que presentará al niño en el contexto educativo. En relación con ello, Tallízina (1994) describió tres métodos principales que se han empleado para guiar la actividad del niño con mayor o menor éxito. El primero de ellos se caracteriza porque se presenta al alumno el problema sin darle datos o estrategias para su solución, ya que se espera que él mismo pueda descubrirlos por ensayo y error. Se piensa que de esta manera el alumno estará más motivado por la tarea y logrará un aprendizaje significativo.

El segundo tipo se caracteriza por el hecho de que al alumno se le ofrece desde el inicio todo un sistema completo y preelaborado de orientaciones o guías para la resolución del problema, de tal forma que basta con memorizar el procedimiento para que se dé el aprendizaje, pero tiene como desventaja el hecho de que no se puede aplicar a casos diferentes, por lo que se tiene que hacer un uso extensivo del aprendizaje memorístico.

El tercer método es considerado por Tallízina (1994) como el más efectivo, éste se caracteriza porque al alumno se le enseña cuáles son las características "invariantes" del objeto de estudio, con el fin de que pueda apoyarse en ellas para orientarse en la solución del problema planteado en el momento y generalizar los procedimientos a todos los casos en los que estas invariantes son aplicables, logrando de esta forma la generalización.

Una invariante es aquello que siempre permanece en el concepto, que no varía. Por ejemplo, en el caso de un círculo, podemos encontrar muchas características como son el tamaño, el color, el grosor de la línea, el material con el que esta trazada, etc., pero ¿qué es aquello que nunca cambia en una circunferencia? La respuesta es que ésta es siempre una curva cerrada en la que todos los puntos están a la misma distancia del centro. Si una parte de los puntos que la conforman estuviera a una distancia distinta del centro, dejaría de ser una circunferencia aunque fuera una curva cerrada.

Tener conocimiento de las invariantes de un concepto sirve para poder guiar la actividad del alumno; retomando el ejemplo de la circunferencia, saber que todos sus puntos están a la misma distancia del centro sirve, en primera instancia, para no confundirla con otra figura geométrica como una elipse y en segunda, para resolver problemas orientándonos a partir de las características que en el concepto nunca varían. Si por ejemplo, al alumno se le diera la distancia que hay de un punto al centro y se le pidiera encontrar el diámetro total de la circunferencia, lo podría realizar fácilmente puesto que conoce que del centro al otro extremo de la circunferencia existe exactamente la misma medida.

No tener conocimiento de las invariantes del concepto frecuentemente conduce a conclusiones erróneas. Por ejemplo, durante la intervención que se realizó en el presente trabajo a un grupo de 6º grado, al presentar un rectángulo a los alumnos, lo confundieron con un cuadrado sólo porque visualmente lo parecía. Esto, pese a que ya habían medido los cuatro lados del cuadrado y tenían conocimiento de que no todos sus lados medían lo mismo.

El tercer método propuesto por Tallízina es el que ha sido retomado en este trabajo porque se considera que el uso de invariantes como instrumentos cognitivos puede ser un cambio importante en la forma en que tradicionalmente se ha pretendido enseñar el concepto de fracción. Se propone que el uso de estas herramientas cognitivas asociadas al empleo de actividades cercanas al contexto de la población atendida tenga un impacto positivo en las dificultades de aprendizaje que tienen los alumnos en relación con el tema de las fracciones.

Los aspectos de la teoría histórico–cultural revisados hasta el momento dan la pauta para entender la postura que en este trabajo se asume acerca del desarrollo del niño y el aprendizaje. De tal manera se considera que dentro del área de educación especial es fundamental tener en cuenta el factor biológico, pero la mayor importancia debe recaer en el aprendizaje, en la forma en que se enseña y se aprende.

Un ejemplo más ilustrativo de la importancia que tienen *los instrumentos cognitivos* y el aprendizaje sobre el desarrollo es el de los niños sordos que por mucho tiempo fueron considerados "idiotas", no es sino hasta que Pedro Ponce en 1620 desarrolló métodos alternativos de enseñanza que les permitieron la comunicación con los otros, lo que a su vez se reflejó en su desarrollo cognitivo y lo cual desvaneció dicho mito (Alisedo, 1988). Hoy en día ningún estudioso dentro del campo de la educación especial considera que los sordos tienen un retraso cognitivo.

Lo anterior justifica que dentro del programa de maestría en psicología con residencia en educación especial se haya abordado la búsqueda de métodos alternativos de enseñanza como medio para dar respuesta a las necesidades educativas especiales que presentaban en una parte del currículo los alumnos de los últimos grados del escenario en donde se llevaron a cabo las prácticas profesionales.

La elección del tema de fracciones respondió a que como parte de la etapa de exploración, detección y selección del problema[6], se aplicó un examen exploratorio en las áreas de español y matemáticas a todos los grupos del la escuela en la que se llevaron a cabo las prácticas. Dichos exámenes fueron elaborados por los integrantes de la residencia que realizaban sus prácticas en ese escenario. Esto permitió que se percataran de que la enseñanza de fracciones había sido postergada a partir del 3º por la dificultad que representa el tema para los alumnos. En quinto grado el currículo de matemáticas, guarda una gran cantidad de horas al tema de las fracciones; por esta razón dentro del examen exploratorio varios de los ejercicios estaban vinculados a este tema.

[6] Esta etapa será descrita de manera más amplia en el capítulo Programa de intervención para la apropiación del concepto de fracción (p. 54).

Los resultados encontrados en las pruebas exploratorias mostraron que en todos los grados existían problemas en el área de matemáticas, pero estos problemas se acentuaban en los alumnos de los últimos grados. Además de ello también se corroboró que uno de los principales problemas se encontraba relacionado con el tema de fracciones debido a que en el examen aplicado a los alumnos de sexto grado (acababan de cursar el 5º) permitieron corroborar la existencia de grandes dificultades en el tema de fracciones en donde su promedio en una escala de una escala de 1-10 era de 2. A continuación se presentará una panorámica general del problema que ha representado la enseñanza de las fracciones en la educación básica, así como la definición y principales características del concepto.

EL PROBLEMA DE LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES

La dificultad que representa el aprendizaje de las matemáticas para los alumnos de la escuela elemental ha sido objeto de diversas investigaciones como las realizadas por Guevara, (1991); Schmelkes, (citado en Ornelas, 1995) y Ornelas (1995), las cuales han demostrado el rezago educativo que presentan los estudiantes en esta materia. En los últimos años se han hecho esfuerzos importantes para mejorar esta situación, pese a ello, los resultados obtenidos no han sido del todo satisfactorios, como lo muestran los primeros datos de la evaluación realizada por el PISA (Programme for International Student Assessment), la cual fue aplicada en mayo de 2003 a una población estudiantil de 15 años en 29 países pertenecientes a la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico). Según su informe, México no sólo ocupó uno de los últimos lugares, sino que los estudiantes mostraron un bajo desempeño en las competencias de lectura y matemáticas. En cuanto a la primera, sólo el 48% tuvo una competencia suficiente. Con respecto a la segunda, los resultados son aún más desalentadores, debido a que sólo el 44.1% alcanzó competencias suficientes (Fuentes, 2005).

Por otra parte, a partir de diversos documentos de la SEP (1992 y 2002d) y datos reportados por varios autores como Clemente (2002); Linares y Sánchez (1988) y Mancera (1992) se sabe que uno de los temas del currículo de matemáticas de la escuela elemental con el que los alumnos suelen tener mayores dificultades es el de los números racionales, comúnmente llamados fracciones.

Según Mancera (1992) las fracciones han formado parte del currículo de la escuela elemental por más de un siglo. En las últimas décadas se han realizado tres reformas al currículo que han repercutido directamente en la enseñanza de este tema. La primera de estas ocurrió en 1972, cuando en la enseñanza de las matemáticas se implementaron apoyos gráficos y particularmente en lo que se refiere a la enseñanza de las fracciones se implementó el uso de la recta numérica En 1982 se dosificaron los contenidos, se hizo extensivo el uso didáctico de apoyos gráficos y se introdujo el uso de de la manipulación de objetos como recurso para la enseñanza de las matemáticas (Mancera, 1992). En particular en el aprendizaje de las fracciones se pretendía que mediante el uso de estos apoyos didácticos los alumnos comprendieran la fracción en su expresión más sencilla, es decir, como división, para que posteriormente fueran capaces de establecer equivalencias. A partir de esta reforma se comenzó a introducir el paradigma piagetano en la enseñanza de las matemáticas sin lograr subsanar totalmente los problemas que este tema representa para los alumnos de educación básica.

La introducción del modelo constructivista en la enseñanza de las matemáticas tuvo un impacto directo en la enseñanza de fracciones como lo demuestran las investigaciones realizadas por Block (1987) y Dávila (1995). Esta segunda autora realizó un estudio con un grupo de primero (30 alumnos) y uno de segundo grado (32 alumnos) de primaria. Entre los hallazgos más relevantes encontró que los alumnos utilizaron preferentemente la técnica de ir partiendo un entero en mitades para realizar el reparto, lo cual reafirma las ideas expuestas por Piaget, Inhelder y Szeminska (1966) respecto a que los niños con edades comprendidas entre 5 y 11 años usan comúnmente esta forma de reparto y señaló que su uso suele desorientar a los niños cuando en el reparto existe un número impar. Otro dato sobresaliente es el hecho de que los niños de estas edades no demostraron tener consolidada la conservación del área en el reparto de figuras geométricas cuando éstas se dividen en partes diferentes, por lo que los alumnos niegan que dos mitades y cuatro cuartos forman el mismo entero; esta situación se agrava si el entero es repartido en figuras diferentes. Resultados idénticos han sido reportados por Nunes y Bryant (1998), quienes en una investigación con niños de siete y ocho años concluyeron que la mayoría de los alumnos se centran en el número de partes en que se divide el entero, pero no toman en cuenta el tamaño de las mismas.

Las dificultades que este concepto representa para los alumnos de educación básica fueron tomadas en cuenta en las reformas de los planes y programas de estudio de educación básica de 1993 y en su revisión en el 2002 (SEP, 2002d), lo que dio como resultado el aplazamiento de la introducción de fracciones hasta tercero y cuarto grado de la escuela primaria y de la multiplicación y división de las mismas hasta la escuela secundaria.

Sin embargo, si el problema está en gran medida determinado por la maduración de los alumnos y la adquisición del concepto de conservación del entero, ¿por qué los alumnos que supuestamente ya debieran haber adquirido dicho concepto, siguen presentando problemas con las nociones más básicas del concepto de fracción? ¿Tendrá que ver con la maduración o con la forma en que se están enseñando las fracciones? La propuesta es plantear un método didáctico alternativo a través del uso de las invariantes del concepto de fracción, empleando para ello el uso de invariantes del concepto de fracción, por lo que es necesario entender primero y de manera muy puntual lo que se entiende por una fracción, para posteriormente poder describir cuáles son sus características esenciales o invariantes.

El concepto de fracción

Lo que se entiende por fracción no es simple, ya que existen muchas formas en las cuales se emplea el término sin que exista una relación aparente entre ellas, por ejemplo solemos emplear expresiones como "un medio", "la mitad" o el "50%", a veces sin darnos cuenta de que estamos haciendo alusión a la misma proporción o sin notar que estamos empleando diferentes interpretaciones del mismo concepto. Lo que usualmente solemos denominar fracción o quebrado no es otra cosa que el resultado de dividir un número natural entre otro número natural que no sea cero (Weisstein, 2005).

Una vez que se ha definido el objeto de estudio, es necesario considerar que hay dos tipos de unidades, más de una interpretación de lo que es una fracción y varios tipos de ellas. La Tabla 1 muestra en forma conjunta tres formas de entender este concepto basadas en los planes y programas de estudio vigentes para los grados de quinto y sexto grado de la escuela primaria, así como también, en algunas de las diversas interpretaciones del concepto de fracción que han presentado autores como Linares, Salvador y Sánchez, (1988).

Tabla 1
Formas de entender la fracción

Tipo de unidades	Interpretación de la fracción	Tipo de fracción
Discretas	Como parte-todo	Propias
Continuas	Como cociente	Impropias
	Como recta numérica	Iguales a la unidad
	Como decimales	Mixtas
	Como porcentajes	
	Como expresión numérica (medida)	
	Como razón	

Tipos de unidades.

Antes de entrar en detalle en las diversas interpretaciones que se pueden hacer del concepto de fracción, es preciso señalar que cuando hablamos de una fracción, estamos haciendo referencia a una **unidad** que será repartida en **elementos o partes iguales**. De acuerdo con ello, una característica especial de la unidad es que puede estar constituida por un elemento o un conjunto de elementos. Según sea el caso, se hará referencia **a unidades continuas** o **discretas**.

Unidades continuas. La unidad asume el valor de un elemento, representa a una sola figura u objeto. Entre las representaciones más frecuentes se encuentran los diagramas circulares o rectangulares de dos dimensiones, en donde se toma una parte del todo, con la condición de que esa parte sea congruente o mida lo mismo que las otras. En la Figura 1 se muestra un cuadrado dividido en cuartos, del que se sombrearon 2 cuartos.

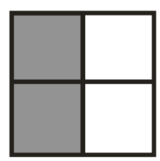


Figura 1. El cuadrado forma un 'todo' o 'unidad' que ha sido repartido en cuatro partes, de las cuales se han sombrado dos para ilustrar que se han tomado dos de los cuatro cuartos.

Unidades discretas. La unidad esta constituida por un conjunto de elementos, los cuales al reunirse se constituyen como un "todo". En la Figura 2 cada grupo de tres círculos representa una unidad.

$2\frac{1}{3}$

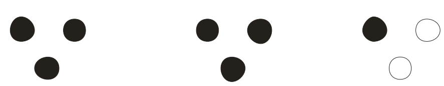


Figura 2. Al lado izquierdo aparece la representación numérica de dos enteros y un tercio y a su lado se muestran tres conjuntos formados por tres elementos, cada uno de ellos forma una 'unidad' de las que se han sombreado dos y un elemento de la tercera.

Interpretaciones del concepto de fracción

Una vez explicados los tipos de unidades que puede asumir la fracción, se puede ahondar en las diferentes interpretaciones del concepto. A continuación se describen más en detalle cada una de ellas.

La fracción vista como una relación entre parte-todo. Esta interpretación es la más común, se presenta cuando un objeto o conjunto de objetos considerados como un «todo» o unidad se divide entre cualquier número de partes del mismo tamaño. En este caso, la fracción indica la relación que existe entre un número de partes y la unidad. Por ejemplo, como se muestra en la Figura 3, cuando dividimos un cuadrado en dos partes iguales y tomamos una, estamos hablando de 1/2 o de la mitad del cuadro, donde el uno se conoce como 'numerador' y el dos como 'denominador', el primero hace referencia a lo que se toma y el segundo a las partes en que se divide la unidad.

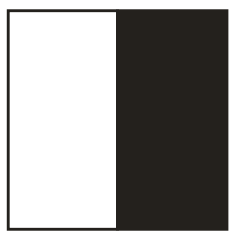


Figura 3. El cuadrado considerado como unidad se ha dividido en dos partes iguales de las cuales la parte sombrada representa la del medio que se ha tomado.

Cuando se aplica este concepto a situaciones de la vida cotidiana, es necesario explicar a los alumnos que no siempre es posible dividir un objeto sin que este pierda sus características funcionales. Por ejemplo si se desea dividir a un grupo de alumnos en mitades y se tiene un número impar de alumnos no resulta posible dividir a uno de los alumnos en dos.

Otro aspecto importante a considerar en la fracción como relación parte-todo es que la división se tiene que dar en "partes congruentes", es decir, iguales en tamaño, lo que no indica necesariamente partes de la misma forma. Por ejemplo en la Figura 4, la relación entre las partes sombreadas y el número de partes se puede representar como 3/5 (tres quintos) porque el área de las cinco partes mide lo mismo, aunque tengan diferente forma.

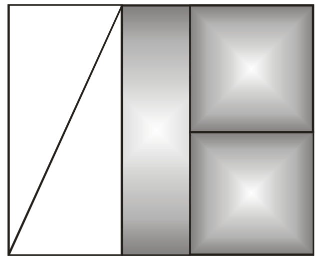


Figura 4. El cuadrado como unidad ha sido dividido en cinco partes que tienen una misma área: dos triángulos, un rectángulo y dos cuadrados. Las tres partes sombreadas representan las que se han tomado.

Una figura no necesariamente representa 3/5 (tres quintos) aunque se divida en cinco partes y se hayan sombreado tres de ellas, pues un requisito indispensable es que estas partes sean congruentes, es decir, del mismo tamaño. Por ejemplo, la Figura 5 no cumple con la condición de que las partes sean iguales y por tanto, NO representa 3/5.

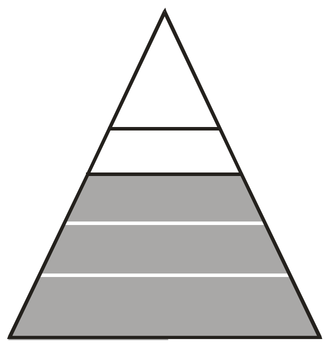


Figura 5. El triángulo como unidad ha sido dividido en cinco partes que no tienen una misma área, por lo que no representan tres quintos, auque se tomen tres de sus partes.

La fracción vista como cociente o división. En esta interpretación se señala la división de un número natural entre otro, siempre y cuando ambos sean diferentes de cero; de tal modo que 8/4 es igual a 8 ÷ 4 e igual a 2. La comprensión de esta interpretación de la fracción varía en grado de complejidad cuando la unidad es discreta o continua, pues como señala Kieren (1980, citado en: Linares et al. 1988), al niño le resulta difícil entender que repartir tres objetos entre cinco personas es igual que repartir un objeto entre cinco y tomar tres partes.

La fracción en la recta numérica. En este caso se hace referencia a la asociación que puede hacerse entre las fracciones y una recta dividida entre un número "X" de partes congruentes, en donde una fracción puede ser localizada en un punto situado sobre la recta.

Por ejemplo, en la Figura 6 se presenta una recta de 10 cm, en donde la unidad es igual a 1 cm. En este caso 8/4 se localiza en el segundo centímetro de la recta.

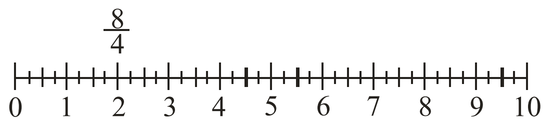


Figura 6. En esta recta cada centímetro representa una unidad, por lo que, cuatro cuartos serían un centímetro y ocho cuartos serían dos centímetros.

La fracción vista como un número decimal. Esta interpretación establece una relación entre la interpretación de la fracción como parte-todo y nuestro sistema de numeración decimal. Por ejemplo, cuando se emplea la representación continua, como en la Figura 7, y se considera la unidad como un rectángulo que se divide en diez partes, en relación al todo o unidad cada una de las éstas es una de diez, lo que es igual a 0.10, e igual a una décima.

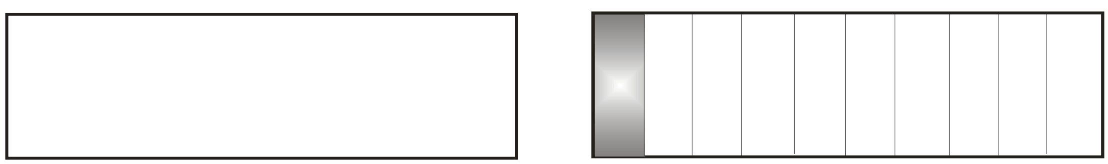


Figura 7. El primer rectángulo es considerado como una unidad. El segundo ha sido dividido en diez partes, en donde la parte sombreada corresponde a un décimo. Si cada "parte" (décima) se divide en otras diez partes, se obtiene "una de diez de una de diez", 1 de 10 de 1/10 (una centésima).

La fracción vista como porcentaje. Otra interpretación de las fracciones es la que se refiere al porcentaje, en él se asigna de antemano el valor de nuestra unidad la cual equivale a 100, por lo que en esta interpretación se habla de una fracción con denominador 100, es decir $\frac{1}{100}$, donde el uno o numerador se sustituye por el porcentaje que se quiere obtener. Por ejemplo, si se quiere saber a cuánto equivale el 50% de 40 alumnos, hay que tomar $\frac{50\%}{100}$, lo que simplificado es igual a $\frac{5}{10}$ e igual a $\frac{1}{2}$; lo que significa que el 50% de 40 alumnos es igual a $\frac{1}{2}$, lo que a su vez es igual a 20 alumnos. El mismo resultado se obtendría si en lugar de simplificar la fracción se multiplica el porcentaje o numerador por la cantidad de alumnos (50 x 40) y se divide entre el denominador (2000÷100= 20) con lo cual se obtiene el resultado directo, el 50% de 40 alumnos es igual a 20 alumnos.

Las fracciones vistas como una expresión numérica que expresa medida. En este caso, las fracciones se asocian con unidades de medición como longitud, peso, tiempo, etc. Por ejemplo ¾ de metro, ½ kilo, ¼ de hora.

Fracción como razón. En este caso las fracciones se emplean para establecer una relación comparativa entre *dos unidades*, en vez de establecer una relación de la "parte" con el "todo" o "unidad". Por ejemplo, como se representa en la Figura 8, si hay 10 dulces y se quieren repartir entre 30 alumnos, se tienen entonces dos unidades, una de 10 y otra de 30, esto es igual a decir que 1/3 de los niños recibiría un dulce, hay que recordar que 1/3 es una fracción equivalente a 10/30.

Unidad 1 = 10 dulces 

Unidad 2 = 30 niños 

Niños a los que les tocarán dulces = 10/30 = 1/3

10 dulces =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

30 niños =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\frac{1}{3}$
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\frac{2}{3}$
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	$\frac{3}{3}$

Figura 8. La primera unidad esta constituida por diez dulces, la segunda por 30 niños, de los cuales 10 recibieron dulces, es decir, la primera unidad y 20 de ellos no. Lo que significa que 1/3 de los niños recibieron dulces.

Esto equivale a decir que:

- ✓ Diez de cada 30 niños recibirá dulces
- ✓ Uno de cada tres niños recibirá dulces
- ✓ 10/30 de los niños recibirá dulces
- ✓ 1/3 de los niños recibirá dulces

Esta interpretación puede quedar más clara si se comparan unidades de medición distintas. Por ejemplo, en una carrera de velocidad, se recorrieron 100 metros en 10 segundos. La primera es una unidad de longitud, 100 metros, la cual puede tomarse como un todo, en cuyo caso, sólo podría fraccionarse por unidades del sistema métrico decimal, (10 de los 100 metros fueron dominados por el corredor número 3). Sin embargo, al compararse con una unidad de tiempo (segunda unidad), no se puede decir que los 10 segundos sean una parte de los 100 metros. En este caso sólo se puede establecer una relación de comparación entre las dos unidades.

Tipos de fracción

Las fracciones pueden también diferenciarse con base en la relación que se presente entre la "parte" y la "unidad". Desde este punto de vista reciben el nombre de propias, impropias, iguales a la unidad y mixtas.

Fracciones propias. Son fracciones donde las partes que se toman (el numerador) son menores a la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad (denominador), como se representa en la Figura 9.

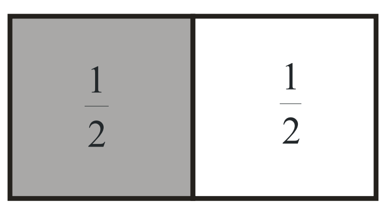


Figura 9. El cuadrado representa una unidad que ha sido dividida en dos partes iguales, la parte sombreada representa ½.

Fracciones impropias. Son fracciones, donde las partes que se toman (el numerador) sobrepasan a la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad (denominador), como se representa en la Figura 10.

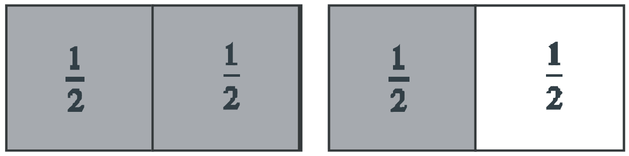


Figura 10. Cada cuadrado ha sido dividido en medios. Las tres partes sombreadas representan los 3/2 que se han tomado.

Fracciones iguales a la unidad. Son fracciones donde las partes que se toman (el numerador) igualan a la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad (denominador), como se representa en la Figura 11.

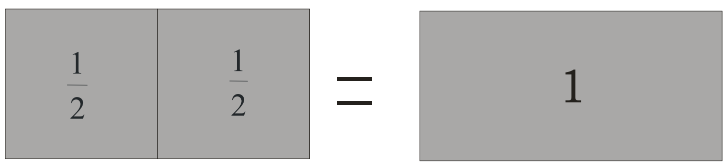


Figura 11. El primer cuadrado representa una unidad que ha sido dividida en dos partes iguales. El que se hayan sombreado ambas mitades representa que se han tomado 2/2, lo que equivale a decir que se ha tomado un entero.

Fracciones Mixtas. Al igual que en el caso de las fracciones impropias, las partes que se toman (el numerador) sobrepasan a la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad (denominador), lo que cambia es su representación simbólica, como se representa en la Figura 12.

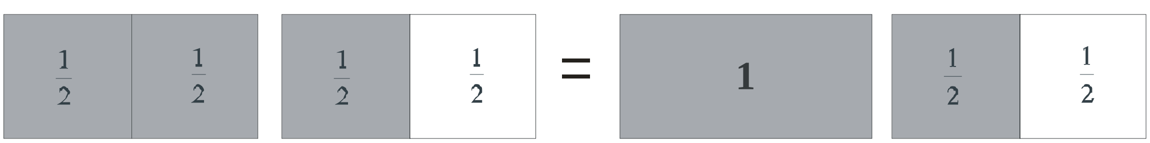


Figura 12. El primer cuadrado representa dos unidades que ha sido dividida en medios. Las partes sombreadas representan que se han tomado 3/2, lo que equivale a decir que se han tomado un entero y 1/2, como lo representan los otros dos cuadrados.

Invariantes del concepto de fracción

Ahora que ya se ha dicho lo que se entiende por fracción e invariante, es necesario señalar aquello que ha de servir como eje del trabajo en la enseñanza de fracciones, es decir, cuáles son *las invariantes del concepto de fracción*, aquellas características esenciales del concepto que permiten saber que se hace referencia a una fracción y no a otra cosa, pues necesariamente el concepto de fracción debe guardar características comunes, sin importar que se esté hablando del tipo de unidades discretas o continuas, en su interpretación como cociente o como porcentaje, del tipo de las propias o de las impropias.

Para poder establecer las invariantes de cualquier concepto es preciso tratar de entender primero qué es un concepto. Según Pérez (2002, 46):

> "Un concepto es una abstracción de un conjunto de objetos, propiedades o eventos existentes en el mundo real o un mundo posible, que puede poseer una realización física en una lengua natural o sistema de representación determinados, al cual se puede hacer referencia mediante un símbolo arbitrario, aunque necesariamente único, dentro de un sistema representacional. Como constructo, posee ciertas propiedades distintivas de los demás conceptos, con los que guarda diversos tipos de relaciones. Tanto sus propiedades intrínsecas como sus relaciones con los demás conceptos deben ser evidentes, y por tanto susceptibles de ser especificados de forma explícita".

De acuerdo con Pérez (2002) lo que probablemente es esencial en un concepto son las relaciones que guarda con los otros conceptos, es decir que lo que hace que un determinado concepto sea distinguido de los demás son tanto sus propiedades distintivas como las relaciones que guarda con los demás conceptos. A este respecto, Gentner & Markman (1997) señalaron el papel fundamental que tienen tanto las diferencias como las analogías en la identificación de un concepto. Estos autores consideran que la búsqueda de analogías y diferencias en los conceptos son procesos cognitivos similares. Lo que diferencia unas de las otras es que mientras las primeras se centran en el proceso, las segundas se centran en el objeto.

En cuanto al objeto de estudio de este trabajo, lo anterior significa que los conceptos se distinguen entre sí a través de sus diferencias, pero también por medio de las relaciones (similitudes) que guardan con otros conceptos. Por ejemplo, cuando un cuadrado es dividido en cuatro partes, si estas son proporcionales se habla de 4/4, pero si no lo son, se dice que el cuadrado está partido en cuatro pedazos. En este caso la diferencia consiste en que mientras un cuadrado tiene partes proporcionales, el otro no las tiene. La similitud radica en que en ambos casos el cuadrado fue dividido en cuatro.

Ahora bien, la importancia que tiene la discrepancia que existe entre diferencias y analogías radica en el nivel más básico de las primeras en relación con las segundas. Esto quiere decir que cuando se habla de diferencias y se centra la atención en el objeto, los rasgos sobresalientes son totalmente secundarios. Por ejemplo, en el caso de un cuadrado, la atención puede centrarse en el color, el grosor de las líneas, pero se deja de lado la verificación de si sus lados realmente miden lo mismo o si todos sus ángulos miden 90 grados.

En el caso de las analogías la atención se centra en el proceso, por lo que la atención puede centrarse en rasgos como el que los lados midan exactamente lo mismo y que los ángulos sean de 90 grados, aunque en este caso, todavía pueden aparecer características secundarias del concepto como el hecho de que en dos cuadrados uno tenga cuatro lados de 5cm, y otro cuatro lados de 3cm.

Con el fin de identificar las características invariantes del concepto de fracción, además de lo expuesto hasta el momento sobre la fracción, se consultó a un matemático, lo que fue de gran ayuda para la comprensión de algunos aspectos relevantes del concepto. Con base en la información recabada se dedujeron un grupo de características que fueron de utilidad para el trabajo con los alumnos, aunque no se puede afirmar que realmente constituyan características invariantes en todos los casos ni que incluyan todos los aspectos a considerar. Fueron éstas:

1. El objeto puede ser dividido. En el concepto de fracción siempre se parte de una unidad que será dividida, si ésta no es susceptible de serlo entonces no se puede decir que se este hablando de una fracción.

2. El objeto puede dividirse en las partes que uno quiera. Esta invariante hace referencia al hecho de que cuando se habla de fracciones se parte de una unidad, sea ésta discreta o continua, la cual puede ser dividida en un número infinito de

partes, aunque esto sólo ocurra en el plano de lo abstracto. Por ejemplo, si se tiene un conjunto de cinco gatos y se quiere la mitad de ellos, la invariante se cumple en el plano de lo abstracto porque la mitad es igual a 2.5 gatos, aunque en la realidad no se pueda partir a uno de éstos sin que pierda sus propiedades.

3. Las partes tienen que ser iguales. Cuando hablamos de una fracción, las partes en que se divide la unidad tienen que ser proporcionales, es decir del mismo tamaño, cuando esto no se cumple se habla de partes o pedazos, pero no de fracciones.
4. En la repartición de la unidad no puede sobrar nada. Comúnmente, cuando se divide en fracciones y sobra "algo", la invariante anterior no se cumple, porque las partes dejan de ser proporcionales, por lo que si la unidad es dividida en partes exactamente iguales es imposible que sobre "algo".
5. Las partes de la unidad también se pueden considerar como un objeto independiente. Una vez que la unidad se ha fraccionado, cada parte puede constituirse a su vez en un todo o unidad, por lo que puede volver a fraccionarse de forma independiente.
6. Si se reúnen todas las partes vuelve a formarse el objeto. Si se parte de la base de que las partes son congruentes y de que en una fracción no puede sobrar nada, al reunirse las fracciones estas deben de volver a constituirse en la unidad inicial.
7. Las partes deben ser diferentes de cero. Esto hace referencia a que no se puede repartir algo que no existe, si la unidad es igual a cero, no hay nada que repartir y por tanto tampoco nada que pueda fraccionarse.

Estas invariantes del concepto de fracción fueron las que se emplearon a manera de herramientas cognitivas en el programa de intervención para la apropiación del concepto de fracción en alumnos de sexto grado de primaria, con éstas concluimos el apartado teórico y en la siguiente sección se presentará cómo es que los fundamentos teóricos revisados hasta este momento fueron aplicados.

Hasta este momento se han señalado las dificultades que tienen los alumnos de educación básica en el aprendizaje del concepto de fracción y de forma concreta los encontrados en los últimos grados de la población atendida dentro del programa de la residencia en educación especial. También se ha revisado lo qué es una fracción, así como sus diversas interpretaciones, los tipos de unidades y de fracciones que se suelen revisar en nivel primaria. A través de dicha revisión se puede dilucidar que la fracción es un concepto complejo, lo cual justifica los problemas a los que se enfrentan los profesores al tratar de enseñarlo y la dificultad que tienen los alumnos al tratar de aprenderlo.

Como se ha señalado en este trabajo (véase páginas 37-38) , en México, una de las formas en que en las últimas décadas se ha abordado el problema de la enseñanza de las fracciones es propuesta por el enfoque constructivista. Este paradigma refiere que uno de los mayores problemas en el aprendizaje de las fracciones se relaciona con la maduración cognitiva del alumno.

En este reporte, se considera lo anterior no es el problema fundamental por que a pesar de que la enseñanza de las fracciones se ha postergado al 3º de la escuela primaria y el mayor énfasis hasta los últimos años de la misma, los alumnos de 6º siguen presentando muchas dificultades en su aprendizaje. Esta es la razón que ha llevado a afirmar que el mayor problema en la enseñanza de las fracciones no es la maduración del niño sino la forma en que se enseña el concepto de fracción, por lo cual, se propone un método alternativo de enseñanza a través del uso de las invariantes del concepto. La forma en que se llevó a la práctica dicho método y sus resultados se presentarán en los siguientes capítulos.

PROGRAMA DE INTERVENCIÓN PARA LA APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN

Contexto de la zona

La prácticas se realizaron durante cuatro semestres en la escuela primaria “José Guadalupe Posada”, la cual se encuentra ubicada en la Ciudad de México, en la delegación Iztapalapa; el nombre de la delegación proviene de la lengua náhuatl, (Iztapalli-losas o lajas, Alt-agua, y Pan-sobre) que pueden traducirse como "en el agua de las lajas" (Gobierno del Distrito Federal [GDF], 1996).

La delegación ***Iztapalapa*** se encuentra situada en la región oriente de la Ciudad de México o Distrito Federal [D.F.], -Capital de los Estados Unidos Mexicanos- cuenta con una superficie aproximada de 117 kilómetros cuadrados, mismos que representan casi el 8% del territorio de la capital de la República y su altura sobre el nivel del mar es de 2100 m. (GDF, 1996).

Iztapalapa colinda al norte, con la delegación Iztacalco y el municipio de Netzahualcóyotl -Estado de México-; al este, con los Municipios de los Reyes la Paz e Ixtapaluca -Estado de México-; al Sur, con las delegaciones Tláhuac y Xochimilco, al oeste, con las delegaciones Coyoacán y Benito Juárez (GDF, 1996). En la Figura 13 se muestra la ubicación y colindancias de la delegación.

Figura 13. La demarcación clara y con un punto señala la ubicación de la delegación Iztapalapa.

La tendencia demográfica de la delegación se ha incrementado considerablemente a partir de la segunda mitad del siglo XX. De acuerdo con las cifras reportadas por el INEGI, la población en 1950 era de 76,621 habitantes y en el año 2000 la delegación contaba con un total de 2, 000,000 de habitantes, lo que la hace la delegación con la mayor densidad de población del Distrito Federal.

En lo referente a las actividades económicas formales de la delegación, se puede estimar que en el año de 1990 la población económicamente activa, tomando en cuenta de los 12 años en adelante, correspondía a 499,166 habitantes, de los cuales 146,395 eran mujeres y 352,771 eran hombres.

En la delegación de Iztapalapa la cantidad de personas que percibían ingresos por arriba de cinco salarios mínimos era del 5.5%, en tanto que aquellos que percibían entre uno y dos salarios mínimos era de 45.4%, y aquellos que percibían salarios por debajo del mínimo ocupaban una proporción del 21.3%. (GDF, 1996).

En lo que respecta a educación en Iztapalapa, según cifras del Prontuario Estadístico de Fin de Cursos 1997-1998 de la SEP, en educación primaria la delegación contaba con una matrícula de 226,130 alumnos inscritos, con un personal docente de 75, 100 y con un número de escuelas que ascendía a 604 (GDF, 1996).

Escenario

La Escuela primaria "José Guadalupe Posada", con Clave de Centro de Trabajo 09DPR42295, se encuentra ubicada en la calle de Ignacio Allende No. 18, en la colonia Miguel de la Madrid Hurtado, delegación Iztapalapa, Distrito Federal. Cuenta con doce grupos, dos por grado, con doce salones y un aula de cómputo, así como un espacio para la dirección y un cuarto adjunto que hace las veces de antesala y sala de juntas. También cuenta con un servicio sanitario para niñas y otro para niños, un patio al centro, otro atrás y un cuarto en la parte posterior que se utiliza como bodega. En la Figura 14 se muestra la distribución de los espacios en la escuela.

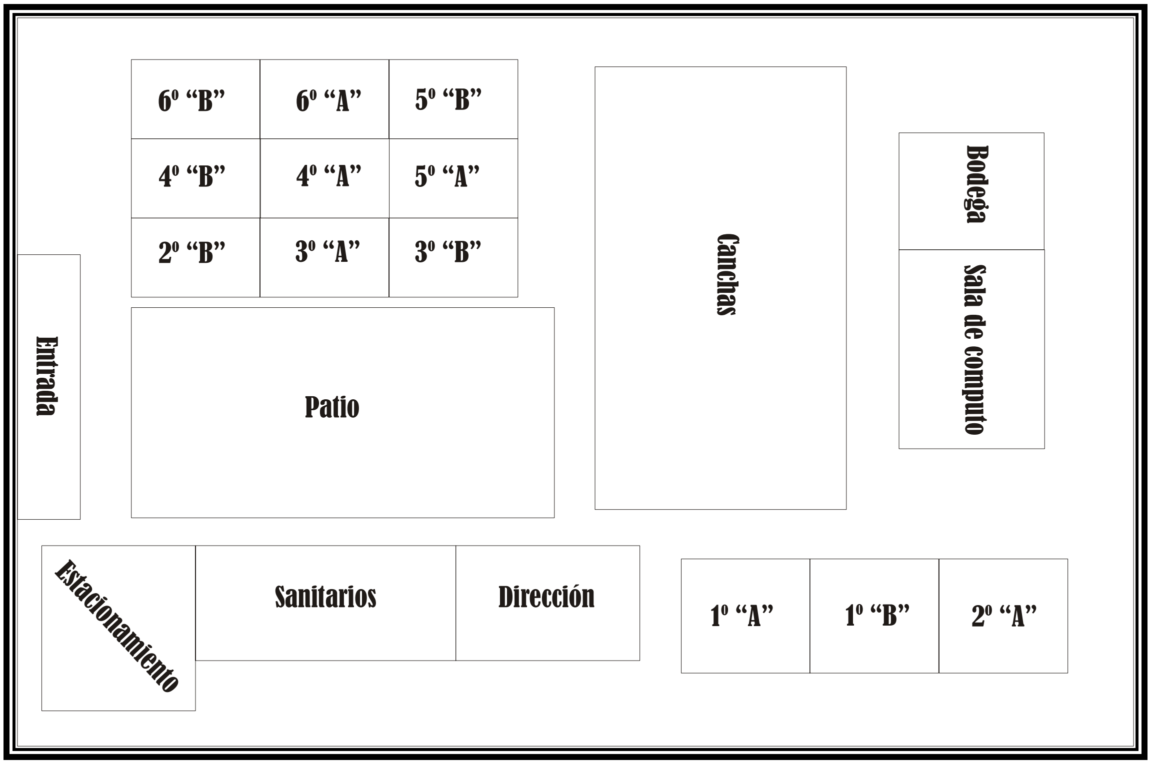


Figura 14. Croquis de la escuela primaria "José Guadalupe Posada"

Población

Al inicio de las prácticas, en septiembre de 2003, la escuela "José Guadalupe Posada" estaba conformada por una planta docente de doce profesores, tres administrativos y dos intendentes. La matrícula registrada en la escuela era de cuatrocientos treinta y cinco alumnos, de los cuales doscientos diecinueve eran hombres y doscientos dieciséis eran mujeres. Había dos grupos por cada uno de los seis grados y la cantidad de alumnos por grado correspondía a:

- 1° A: 33 alumnos.
- 1° B: 33 alumnos.
- 2° A: 40 alumnos.
- 2° B: 43 alumnos.
- 3° A: 36 alumnos.
- 3° B: 38 alumnos
- 4° A: 37 alumnos.
- 4° B: 34 alumnos.
- 5° A: 37 alumnos.
- 5° B: 37 alumnos.
- 6° A: 32 alumnos.
- 6° B: 33 alumnos.

La zona en que se encuentra ubicada la escuela se caracteriza por encontrarse en un contexto marginado, con asentamientos irregulares y bajos recursos económicos. Los maestros suelen comentar que muchos de los alumnos provienen de familias de otros estados que arribaron hace poco a la Ciudad de México y que viven serios problemas de desintegración familiar. En la Figura 15 se presenta una vista panorámica de la escuela y su contexto.

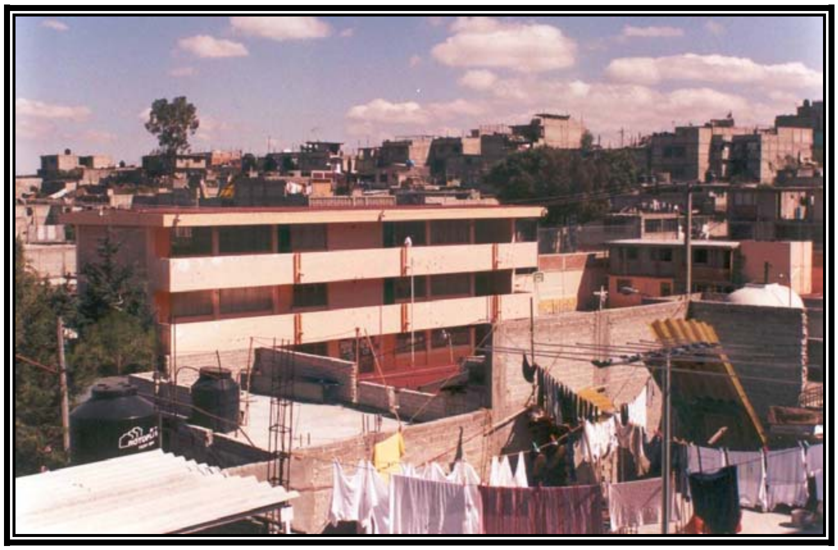


Figura 15. El edificio principal de la escuela aparece como parte sobresaliente del contexto.

Etapas de la intervención

La intervención hecha en la escuela primaria se realizó en tres etapas, la primera de ellas consistió en la exploración, detección y selección de uno de los problemas más acuciantes de la escuela, una vez seleccionado el problema se comenzó con la segunda etapa, en la cual se trabajó con los precurrentes del problema seleccionado –las fracciones– a través de un programa adaptado y la tercera intervención consistió en la aplicación del programa para la apropiación del concepto de fracción. A continuación se describirán con más detalle cada una de estas etapas.

1. Etapa de exploración, evaluación y selección del problema.

Esta etapa se realizó en el primer semestre, partiendo de que uno de los problemas principales señalados por directivos y profesores de la escuela era el bajo rendimiento académico de algunos de sus alumnos. Esto llevó a realizar en todos los grados: entrevistas con los profesores, revisión de expedientes, solicitud de exámenes diagnósticos de los alumnos y finalmente a realizar una evaluación diagnóstica a todos los alumnos de la escuela en las áreas de español y matemáticas, con el fin de detectar quiénes eran los alumnos que tenían un menor rendimiento académico y en qué grado se encontraban estos casos, para que una vez que hubieran sido detectados pudieran ser atendidos.

A partir de la evaluación exploratoria, se encontró que en la mayoría de los grados había dificultades en las áreas de español y matemáticas, lo cual era más evidente en los últimos grados. Por ejemplo, en el área de matemáticas, empleando una escala del 1 al 10, el promedio general en quinto grado fue de 5.1 y en sexto de 4.7; en el área de español fue de 6.1 y 6.4, respectivamente. De manera particular se observó una gran dificultad en la solución de problemas con fracciones, cuyo nivel en sexto grado fue de 2.0, lo cual contrasta con la cantidad de horas dedicadas a su estudio en el currículo de 5º y 6º.

De los múltiples problemas detectados en la escuela se decidió trabajar el área de matemáticas e incidir en un problema en específico: las fracciones; la decisión de abordar este problema se tomó debido a que fue la parte del currículo de primaria en el que se encontraron mayores dificultades por parte de los alumnos. La decisión de trabajar con un grupo de quinto grado en específico se debió a que este grupo obtuvo las calificaciones más bajas en la prueba exploratoria. Aunado a esto, el trabajar con un grupo de quinto grado permitiría que la intervención se continuara cuando ellos pasaran a sexto grado y así mismo, esta intervención también tendría un carácter preventivo sobre mayores deficiencias que pudieran presentar estos alumnos al pasar a la escuela secundaria.

Sin embargo, debido a los problemas encontrados en todos los niveles relacionados con operaciones básicas, se decidió aplicar previamente un programa que reforzara el manejo de éstas, aunado a otros temas relacionados con las bases para el uso y manejo del concepto de fracciones.

2. Etapa del trabajo con los precurrentes del concepto de fracción

Esta parte del trabajo obedeció a la necesidad de reforzar en los alumnos los precurrentes del concepto de fracción, es decir, el reforzamiento del concepto de número, el manejo de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), la extracción de áreas de figuras geométricas de dos dimensiones, el manejo de fracciones sencillas (medios y cuartos) y la resolución de problemas matemáticos. Esto se realizó con el fin de que cuando se aplicara el programa de intervención para la apropiación del concepto de fracción, los alumnos contaran con las bases necesarias y a su vez porque su aplicación concedería tiempo suficiente para planear, diseñar y conseguir los materiales que se emplearían en el programa de fracciones. El objetivo general planteado para esta parte de la intervención fue el siguiente:

- Enseñar a los alumnos estrategias cognitivas para la solución de problemas matemáticos con el fin de reforzar los precurrentes del concepto de fracción, principalmente el manejo de operaciones básicas.

Para cubrir estos objetivos se tomó como base el trabajo realizado por Rodríguez (2004), ex-alumna de la residencia, el cual fue diseñado para que alumnos de 6º grado de primaria desarrollaran estrategias cognitivas útiles para resolver problemas matemáticos. El programa fue aplicado en una versión modificada para cumplir con los objetivos planteados en esta fase[7]. Rodríguez planteó tres estrategias cognitivas que el programa pretende generar en los niños, éstas son:

1. **Selección.** Consiste en identificar las ideas principales y descartar la información irrelevante del problema planteado.
2. **Organización**. Consiste en organizar los datos y las operaciones que se realizan para llegar a la solución del problema.
3. **Elaboración.** Consiste en seleccionar la operación adecuada para dar solución a un problema a partir de los conocimientos previos.

A las tres estrategias cognitivas planteadas por Rodríguez (2004) se agregó una cuarta:

4. **Autoevaluación.** Consiste en la evaluación que realiza el alumno sobre la forma en que emplea las estrategias y la manera en que llega a la solución del problema. Esto era favorecido por la forma de trabajo y por las ayudas que se brindaban al niño en las distintas etapas de la actividad.

[7] Para mayor información consultar el Apéndice A en el que se encuentra la versión modificada del "Cuadernillo de ejercicios para el programa de enseñanza de estrategias cognitivas para la resolución de problemas matemáticos en niños de quinto grado".

Otras modificaciones que se realizaron al programa diseñado por Rodríguez (2004) fueron la reestructuración general del cuadernillo que se le entrega al profesor. Además se modificó la redacción de los problemas sugeridos y se adecuaron las formas de llevar el control de la disciplina y el aprovechamiento del grupo.

Método

Participantes.

Los alumnos que participaron en esta etapa fueron 15 niñas y 19 niños con edades entre los 9 y 11 años que cursaban el 5º grado de primaria y el profesor del grupo.

Instrumentos

“Cuadernillo de ejercicios para el programa de enseñanza de estrategias cognitivas para la resolución de problemas matemáticos en niños de quinto grado”. Se empleó una versión modificada del trabajo de Rodríguez (2004), el cual incluye los procedimientos a seguir para la instrumentación del programa y 74 problemas. Este cuadernillo se incluye en el Apéndice A.

Tarjetas con las estrategias cognitivas. Una tarjeta media carta con la definición de las tres estrategias cognitivas propuestas por Rodríguez (2004).

Tabla de evaluación. Una cartulina con el nombre de cada uno de los equipos y los criterios a evaluar correspondientes a dos aspectos: aprovechamiento y disciplina.

Hoja del problema resuelto de forma individual. Consistió en una hoja con un problema impreso retomado del “Cuadernillo de ejercicios para el programa de enseñanza de estrategias cognitivas para la resolución de problemas matemáticos en niños de quinto grado”.

Hoja del problema resuelto por equipos. Consistió en una hoja en blanco en la que los equipos resolvían el problema que habían resuelto de forma individual.

Hoja de registro de las actividades por sesión. Este registro se realizó empleando la técnica de observación narrativa.

Comentario de los alumnos sobre el programa. Consistió en encuesta de opinión dirigida a los alumnos en donde de forma escrita señalaron lo que les gustó o no de la instrumentación del programa.

Procedimiento.

Los precurrentes del concepto de fracción se trabajaron a través de la resolución de 26 problemas retomados de la versión modificada del “Cuadernillo de ejercicios para el programa de enseñanza de estrategias cognitivas para la resolución de problemas matemáticos en niños de quinto grado”. Los problemas fueron aplicados procurando ir de un menor a un mayor grado de dificultad, aunque en algunas ocasiones, dependiendo del tiempo que los alumnos tardaban en resolver el problema, se combinaba un problema sencillo con uno complicado.

Los problemas se trabajaron durante 15 sesiones con una duración aproximada de hora y media, para lo cual, el grupo fue dividido en seis equipos. La forma en que se realizaban las actividades estaba constituida por tres momentos diferentes:

1. **Trabajo individual.** En esta parte del trabajo se entregaba a cada alumno una hoja con un problema escrito, en donde subrayaban las ideas principales, organizaban la información y resolvían el problema, para lo cual se les daba un tiempo aproximado de 15 minutos de acuerdo con la dificultad del problema; en ese lapso de tiempo, los coordinadores y el profesor se encargaban de ofrecer mediación a los alumnos que lo solicitaban o a los que se observaba que tenían dificultades para resolver el problema. Esta hoja se calificaba como: 1. Correcta: cuando empleaban las estrategias cognitivas de forma correcta; 2. Regular: cuando las emplearon sin llegar a hacerlo de forma totalmente correcta y 3. Nula: cuando no las emplearon. En la Figura 16 se muestra una imagen correspondiente a esta etapa de la actividad.

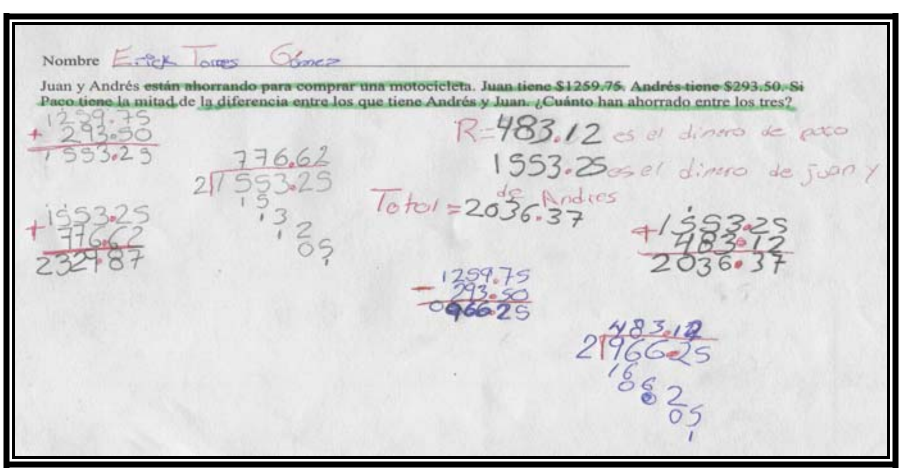


Figura 16. Trabajo individual

1. **Trabajo por equipos.** En esta etapa se repartió a cada equipo una hoja en blanco, en donde, después de llegar a un consenso entre los integrantes, tenían que escribir las ideas principales, la manera en que debían organizar la información, decir cuál había sido la operación más apropiada y dar el resultado correcto. En tanto, los coordinadores pasaban a dar apoyo a los equipos a través del uso de la mediación (Figura 17). Para su realización se otorgaba un plazo que variaba entre 15 y 20 minutos según la dificultad del problema. Esta hoja era evaluada utilizando los mismos criterios que en el problema resuelto de forma individual

Figura 17. Trabajo por equipos.

2. **Trabajo grupal.** En un tercer momento, los alumnos elegían a un representante para que pasara a exponer al pizarrón y explicara al grupo la forma en que habían empleado las estrategias, para llegar a la solución del problema. En esta parte, los coordinadores también servían como mediadores y lanzaban preguntas al resto de los equipos para favorecer la discusión sobre la forma en que se había resuelto el problema (Figura 18).

Figura 18. Exposición por parte del representante de uno de los equipos.

Resultados del programa de precurrentes

Problemas resueltos de forma individual. Como se mencionó en la página 47, estos resultados fueron clasificados en tres categorías: "correcta" "regular" y "nula". La estrategia de selección fue empleada de forma correcta en el 64% de los casos; la de organización en el 4% de los problemas aplicados, aunque en un 73% fue utilizada de forma regular y la estrategia de elaboración se empleó correctamente el 70% de las veces (Figura 19).

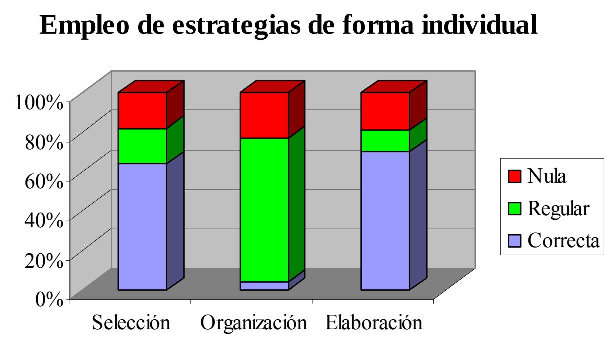


Figura 19. Resultados del empleo de las estrategias en la hoja de trabajo individual.

Problemas resueltos por equipos. La Figura 20 presenta los resultados del manejo de las estrategias cognitivas en el trabajo por equipos: la estrategia de selección fue empleada de forma correcta en el 64% de los problemas, de forma regular en un 22% y de forma nula en un 14%; la estrategia de organización fue empleada de forma correcta en un 75%, de forma regular en un 23% y de forma nula en un 2%; la estrategia de elaboración fue empleada de forma correcta en un 85%, de forma regular en un 2% y de forma nula en un 13%.

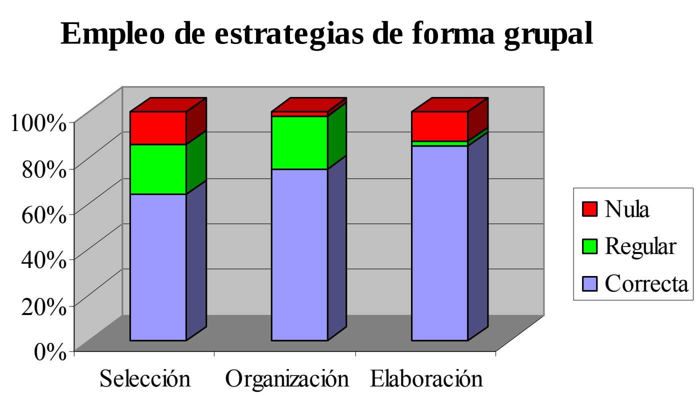


Figura 20. Resultados del uso de las estrategias cognitivas en porcentaje.

En cuanto a la solución de los problemas, se encontró que el 70% de ellos fueron resueltos de forma correcta en el trabajo individual y el 84% en el trabajo por equipos, tal y como se puede apreciar en la Figura 21.

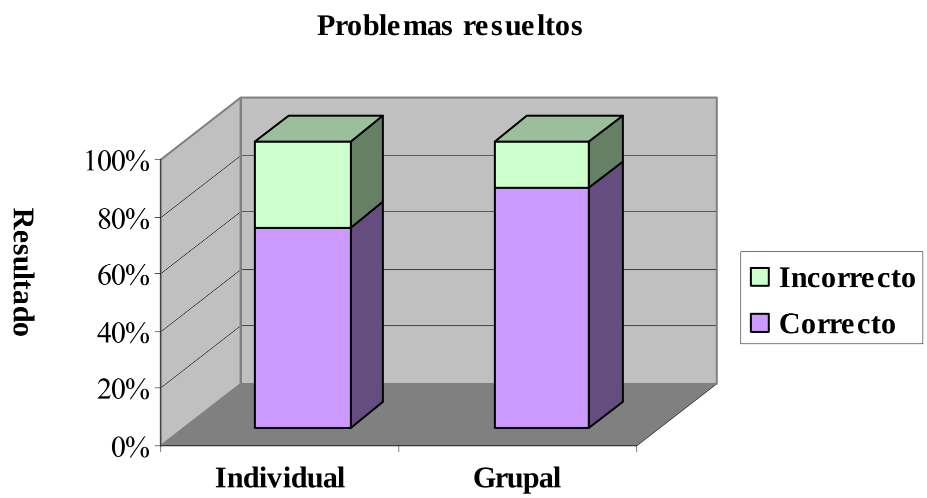


Figura 21. Respuestas correctas en la solución de problemas individuales y por equipos.

Comentario de los alumnos sobre el programa. Finalmente, con respecto a los resultados encontrados a través de la pregunta que se realizó a los alumnos al final de la aplicación del programa de precurrentes, sobre lo que les gustó o no de las actividades, se puede señalar lo siguiente:

El 92% de los comentarios fueron positivos y solo el 8% fueron negativos. Con respecto a los primeros, la mayoría de los alumnos señaló que lo que más le había gustado era:

- El trabajo en el pizarrón
- La actitud de los coordinadores
- El trabajo en equipo
- El apoyo brindado en la resolución de los problemas
- Los problemas planteados

Con respecto a esta etapa, el mayor avance que se presentó fue un cambio favorable de la percepción que el profesor y las autoridades escolares tenían del grupo. Sin embargo, no se logró la consolidación homogénea de todas las estrategias, pese a que se presentaron avances significativos en su uso. En cuanto al objetivo principal de esta etapa, se puede señalar que aunque se observaron resultados positivos en cuanto a la resolución de problemas y operaciones básicas (precurrentes del concepto de fracción), la mayoría de los alumnos continuaron presentando problemas a este respecto sobre todo en operaciones con restas, punto decimal y divisiones, estas últimas forman parte de las interpretaciones del concepto de fracción. En la sección de análisis y conclusión se revisarán de forma más amplia estos resultados.

3. Etapa del programa para la apropiación del concepto de fracción.

Como se ha señalado anteriormente, el programa para la apropiación del concepto de fracción está basado en la teoría histórico-cultural y la adquisición de conceptos científicos desarrollada por Galperín y Tallízina. Además se tomó en cuenta la revisión bibliográfica que se realizó sobre el concepto de fracción. Los objetivos planteados para esta etapa de la intervención fueron los siguientes:

Objetivo general:

> Diseño, aplicación y adecuación de un programa para la apropiación del concepto de fracción en alumnos de 6º grado de primaria con bajo aprovechamiento.

Objetivos particulares

- Evaluar el empleo de las fracciones en los alumnos de 6º grado "A".
- Con base en el marco teórico y las necesidades detectadas en el grupo, diseñar un programa de apropiación de fracciones.
- Elaborar y/o conseguir los materiales necesarios para llevar a cabo las actividades.
- Diseñar el manual para el profesor.
- Aplicar el programa para que los alumnos de 6° se apropien del concepto de fracción.
- Realizar una evaluación continua del programa, con el fin de realizar las adecuaciones pertinentes.
- Generar un ambiente propicio en el interior del aula, a través del trabajo en equipo y la mediación realizada por los coordinadores y el profesor.

Método

Participantes

Se trabajó con el mismo grupo de la fase anterior, que para ese momento ya cursaban el sexto grado y constaba de 33 alumnos con edades entre los 9 y 11 años. Así, la muestra quedó conformada por:

- ✓ La profesora de 6º grado
- ✓ 15 niñas
- ✓ 18 niños

Instrumentos

- ➢ Prueba del uso de fracciones para 5º y 6º de primaria. Este instrumento consta de 26 reactivos que exploran el manejo que tienen los alumnos de las diferentes interpretaciones del concepto de fracción, como parte-todo, cociente, recta numérica, decimales, porcentajes, medida y razón, con unidades continuas y discretas y utilizando diferentes tipos de fracciones (propias, impropias e iguales a la unidad). El instrumento fue validado en el año de 2004 en una población de 200 alumnos de 5º y 6º grado de primaria, de la misma zona en la que se están llevando a cabo las prácticas.

  La prueba se utilizó como pretest-postest. El pretest fue aplicado al inicio del ciclo escolar 2004-2005 cuando los alumnos participantes iniciaban el 6º grado. El postest se aplicó a finales del mismo ciclo escolar, poco antes de que los participantes concluyeran el 6º grado. Esto se hizo con el fin de encontrar cambios significativos en la apropiación del concepto de fracción por parte de los alumnos como efecto de la aplicación del programa[8].

  Cabe señalar que en esta forma de registro se cuenta sólo con 25 de los 33 participantes, por haber sido excluidos ocho alumnos que no realizaron la prueba en alguna de las dos etapas.

- ➢ Cambios en las calificaciones escolares. La maestra de grupo proporcionó las calificaciones que obtuvieron los alumnos en el área de matemáticas, en las cinco

[8] Pese a que se tenía conocimiento de que el lapso mínimo para volver a aplicar la prueba es de 12 meses, se decidió aplicarla en un lapso de 10 meses por cuestiones de tiempo y porque los resultados que esta prueba proporcionara a la investigación podían ser contrastados con los otros instrumentos empleados.

evaluaciones bimestrales del año lectivo 2004-2005. A partir de éstas, se realizó un análisis estadístico con el fin de encontrar cambios significativos (positivos o negativos) en este rubro.

Actividades realizadas en equipo. Cada equipo registraba sus resultados en una hoja, en la que se les presentaba por escrito un problema complejo dividido en partes y se establecían espacios para realizar las operaciones correspondientes a cada parte del ejercicio y escribir los resultados. Estas hojas, correspondientes a 19 actividades, se calificaron con una escala del 0 al 10, tomando en cuenta sólo el número de resultados correctos en cada ejercicio

- Hoja de registro de las actividades por sesión (alumnos). A lo largo de las 32 sesiones se llevó un registro de los hechos más relevantes del trabajo con los alumnos, utilizando para ello la técnica de observación narrativa. En estos registros se incluían, entre otros datos, los problemas que se presentaron en relación con la duración de las actividades, la claridad de las instrucciones, la precisión en la redacción de los problemas y otros aspectos operativos; las soluciones que se adoptaron para resolverlos; los logros observados en los alumnos, el nivel de participación e interés que propiciaba la actividad y el tipo de dificultades que presentaban en la solución de los ejercicios.

- Buzón. Regularmente, al finalizar la sesión, se entregaba a los alumnos un papel en blanco para que de forma anónima escribieran sus comentarios acerca de la sesión del día. Para esto, se les explicó que tenían completa libertad para expresar su opinión sobre lo que les gustaba o no de las actividades, investigadores, materiales, compañeros, etc. y que esto lo podían hacer sin ningún tipo de restricciones, mediante lenguaje escrito, dibujos o que incluso podían dejarla en blanco si no tenían nada que comentar. Estos comentarios fueron clasificados en tres categorías:

  1.- *Positivos*: Aquellos comentarios en donde los alumnos expresaban que les había gustado algo de la sesión.

  2. *Negativos*: Aquellas ocasiones en las que los alumnos expresaban que no les había gustado algo de la sesión.

3. N*eutros*: Aquellos casos en donde los alumnos no expresaban lo que les había gustado o disgustado de la sesión (dejaban el papel en blanco, hacían un dibujo, hacían algún comentario que no expresaba agrado o desagrado, etc.).

- Cuestionario de opinión para los alumnos[9]**.** Consta de 8 reactivos, 3 preguntas tipo likert en donde los alumnos pueden hacer una valoración gradual de lo positivo a lo negativo en una escala del 5 al 1. La primera de estas tres preguntas se refiere a su aprendizaje de fracciones, la segunda al uso de las invariantes y la tercera a lo atractivo de las actividades.

Las preguntas abiertas también fueron tres. Estas se enfocaron en saber sus opiniones sobre lo que les gustó o no del curso y lo que cambiarían de las actividades.

Los últimos dos reactivos exploraban su percepción acerca del desempeño de los coordinadores.

- Hoja de registro de las actividades por sesión (maestra). Se realizó a partir de las conductas más relevantes observadas por la maestra, de sus comentarios sobre el grupo, las actividades, de sus inquietudes, recomendaciones y observaciones en relación con el trabajo realizado durante las 32 sesiones de trabajo con su grupo.

- Cuestionario de opinión de la maestra[10]**.** Consta de 35 reactivos que exploran la opinión de la maestra en relación con los siguientes puntos:

1. Los temas que se incluyeron o no en el programa
2. Las actividades
3. Las invariantes
4. El aprendizaje de los alumnos
5. La viabilidad para llevar a cabo el programa
6. Lo motivante de las actividades
7. Los materiales empleados
8. La disciplina del grupo
9. La influencia del programa en su práctica docente

[9] Un ejemplar del cuestionario aplicado a los alumnos se encuentra en el Apéndice D.
[10] Un ejemplar del cuestionario aplicado a la maestra se encuentra en el Apéndice E.

Las primeras 34 preguntas fueron intercaladas. Una de tipo likert donde la maestra podía realizar una valoración gradual de lo positivo a lo negativo en una escala del 5 al 1 y otra abierta sobre el mismo aspecto, pero que favorecía la expresión de sus comentarios y sugerencias con respecto al tema. Al final del cuestionario se hizo una invitación para que la maestra expresara sus opiniones sobre los temas de su interés que no hubieran sido tratados en el cuestionario.

Procedimiento

Se llevaron a cabo 19 actividades a lo largo de 32[11] sesiones, en donde los alumnos fueron agrupados en 6 equipos de 6 integrantes aproximadamente. Se les exponía una situación problemática para que la resolvieran. Durante la solución de la tarea, los investigadores ofrecían ejemplos, contraejemplos y diversos niveles de ayuda (mediación) para favorecer que llegaran al resultado correcto, sin darles la solución. Una vez que los equipos habían realizado la actividad, anotaban sus procedimientos y resultados en el pizarrón y escogían a alguno de sus integrantes para que pasara a exponer ante el grupo. Durante la exposición, alumnos e investigadores revisaban y comentaban la forma de resolución del equipo que se encontraba al frente. En algunas de las actividades se premiaba al equipo que realizaba mejor el trabajo y/o terminaba primero, entregándole los materiales necesarios para llevar a la práctica sus resultados. Algunas de las características de las actividades eran:

- Se realizaba un recordatorio constante de las invariantes por medio del uso de tarjetas individuales y carteles que se pegaban en el salón. Además, se diseñaron actividades dirigidas específicamente a este fin.
- Dentro de las actividades se empleaban frecuentemente las invariantes para diferenciar entre ejemplos y contraejemplos.
- Siempre se procuró que las actividades fueran atractivas, además de que estuviesen relacionadas con su vida cotidiana.
- Para propiciar la motivación de los alumnos, se utilizaban materiales llamativos, concretos y fácilmente manipulables.

[11] Algunas sesiones se emplearon en la introducción, uso y recordatorio de las invariantes (5); otras dos en el reforzamiento de operaciones básicas y en algunas de las actividades se empleó más de una sesión.

- Se trató de que las actividades fuesen de un menor a un mayor grado de dificultad y en la medida de lo posible, se les brindaban mayores ayudas a los equipos y alumnos que más las necesitaban.

- Con el fin de mantener el interés y la motivación de los alumnos, se realizó una variación permanente de los materiales, las interpretaciones de la fracción y la forma de presentación de los problemas.

Resultados

Prueba del uso de fracciones en 5º y 6º de primaria.

La prueba del uso de fracciones en 5º y 6º de primaria se aplicó como pretest y postest. De los 33 alumnos que participaron, no todos resolvieron la prueba en la primera o la segunda aplicación, por lo que se optó por eliminar a aquellos que no la habían presentado en alguna de las dos ocasiones. Los casos que se analizaron fueron 26. La Tabla 2 muestra que, pese a que las medidas de tendencia central de la calificación global en el postest no muestran resultados aprobatorios, en todas ellas existió un aumento de más del 50%, en relación con el pretest, al igual que en la calificación mínima y máxima. Por otra parte, mientras en el pretest sólo dos de los alumnos obtuvieron una calificación aprobatoria, en el postest 10 de ellos aprobaron.

Tabla 2
Resultados estadísticos del pretest-postest

Estadísticos	Media	Mediana	Moda	Mínima	Máxima
Pretest	2.04	1.15	.77	0	8.85
Postest	4.60	4.04	5.38	1.54	9.62

Con el fin de conocer qué tan importantes eran estos cambios, se utilizó la prueba estadística no paramétrica de Wilcoxon[12] para dos muestras relacionadas que reportó, con un nivel de confianza del 0.05 y aún del 0.01, que sí existen diferencias significativas entre el pretest y el postest.

Debido a que la prueba evaluaba diferentes interpretaciones del concepto de fracción y era importante conocer los avances que los alumnos consiguieron en cada una de éstas, se

[12] Debido a que las calificaciones del pretest no cumplieron con el supuesto de normalidad, se tomó la decisión de aplicar una prueba estadística no paramétrica.

sacaron los porcentajes de cada reactivo y se contrastaron los resultados que los 26 alumnos obtuvieron en el pretest y en el postest. Por medio de este análisis se encontró que:

- Para el caso de 15 de los reactivos, el porcentaje de aciertos se incrementó al doble o más en la segunda aplicación.
- En otros ocho reactivos existen cambios notables, aunque no llegaban al doble.
- En tres casos se presentaron cambios negativos, es decir, un mayor número de alumnos los resolvieron correctamente en la primera aplicación.

Los resultados en porcentaje y el análisis estadístico se encuentran en la Tabla 3.

Tabla 3

Resultados por reactivo de la prueba de fracciones

Número de Reactivo	Porcentaje del Pretest	Porcentaje del Postest	Significancia	Diferencia significativa
1	23.08 %	84.62 %	.000	√
2	19.23 %	38.46 %	.180	*
3	26.92 %	57.69 %	.008	√
4	23.08 %	53.85 %	.008	√
5	15.38 %	38.46 %	.070	*
6	19.23 %	42.31 %	.031	√
7	7.69 %	46.15 %	.000	√
8	7.69 %	44.44 %	.002	√
9	19.23 %	34.62 %	.109	*
10	3.85 %	19.23 %	.125	*
11	34.62 %	57.69 %	.070	*
12	34.62 %	50.00 %	.289	*
13	26.92 %	15.38 %	.219	X
14	3.85 %	53.85 %	.000	√
15	3.85 %	26.92 %	.031	√
16	15.38 %	23.08 %	.625	*
17	30.77 %	69.23 %	.006	√
18	34.62 %	84.62 %	.000	√
19	0.00 %	53.85 %		√
20	7.69 %	50.00 %	.001	√
21	26.92 %	46.15 %	.063	*
22	30.77 %	50.00 %	.125	*
23	42.31 %	38.46 %	1.000	X
24	34.62 %	30.77 %	1.000	X
25	3.85 %	11.54 %	.500	*
26	26.92 %	50.00 %	.146	*

Aunque estos resultados parecían indicar cambios importantes, para comprobarlo se decidió aplicar un análisis por reactivo, a través de la prueba estadística no paramétrica de McNemar[13], esta prueba reportó que en 12 de los reactivos existieron cambios significativos, lo que no se puede aseverar de los 14 restantes, entre estos últimos se encuentran los tres casos reportados como negativos.

Actividades realizadas en equipo.

Las actividades fueron calificadas con una escala de 0 a 10. En la Tabla 4, se puede observar cómo el promedio obtenido por los equipos fue satisfactorio. Sin embargo, es importante recordar que durante la realización de estas actividades, los coordinadores prestaban diferentes ayudas para que los equipos pudieran llegar al resultado correcto.

Tabla 4

Promedio de calificaciones obtenidas por equipo en los 19 ejercicios realizados.

#	Nombre del equipo	Calificación promedio
1	Black White	8,69
2	Cupidos	8,55
3	Dark Shark	8,62
4	Delfines Blancos	8,58
5	Chicas y chico	8,57
6	Tramposos	9,17

Cambios en las calificaciones escolares.

Los resultados encontrados a partir de las cinco evaluaciones bimestrales efectuadas por la maestra en el área de matemáticas reflejan un cambio positivo gradual. Los estadísticos de estos resultados se pueden observar en la Tabla 5, en donde se aprecian cambios positivos en todas las medidas de tendencia central de las calificaciones a medida que transcurrían los semestres. Así por ejemplo, la media del grupo en una escala del 0 al 10 tuvo un cambio de 7.12 en el primer bimestre, aumentando en los subsiguientes hasta llegar a 7.82 en el último.

[13] Debido a que los reactivos sólo podían clasificarse en correctos e incorrectos, se aplicó esta prueba que sirve para encontrar cambios antes y después en datos con un nivel de medición nominal.

A estas calificaciones se les aplicó la prueba estadística no paramétrica de Freedman[14] para muestras relacionadas, con lo cual se demostró la existencia de cambios estadísticamente significativos con un nivel de confianza de 0.01.

Tabla 5.

Estadísticos de las cinco evaluaciones bimestrales.

Bimestre	Media	Moda	Mediana	Calificación mínima	Calificación máxima
Primero	7.12	7.08	7	6	10
Segundo	7.36	7.29	7	5	10
Tercero	7.48	7.45	7	6	10
Cuarto	7.58	7.58	8	5	10
Quinto	7.82	7.80	8	6	10

Hoja de registro de las actividades por sesión (alumnos).

Las observaciones realizadas durante el trabajo de los alumnos, que como antes se mencionó, se registraban cada sesión en una "hoja de registro" fueron categorizadas en dos rubros. El primero de ellos hace referencia a los logros que se observaron en los alumnos en lo referente a aspectos como el uso y manejo de invariantes, el manejo de figuras geométricas; soluciones alternativas a los problemas expuestos por los alumnos y el nivel de confianza con que participaban en sus exposiciones. El segundo rubro se refiere a los problemas que se presentaron durante la aplicación del programa en la realización de operaciones básicas, comprensión lectora y otros aspectos más operativos como la planeación de las actividades y el control de la disciplina.

a) Logros

- Manejo de las invariantes. El uso de las invariantes no era homogéneo en cuanto a la realización de las actividades y la importancia que se les otorgaba, lo cual se debió a que varios de los ejercicios se prestaban más para ser ejemplificados por alguna de las siete invariantes. Por ejemplo, algunas de ellas eran mencionadas de forma más frecuente por los coordinadores al dar ejemplos y contraejemplos (las partes tienen que ser iguales o al juntarlas se vuelve a obtener el todo). Por tal razón, los alumnos se

[14] Debido a que los datos están en un nivel de medición ordinal, se decidió aplicar una prueba estadística no paramétrica.

apropiaron mejor de algunas invariantes y no se puede decir que todos se hayan apropiado de todas ellas.

- Manejo de áreas de figuras geométricas. El trabajo con fracciones de figuras geométricas dio lugar a que tanto la maestra como los investigadores observaran avances relacionados con la comprensión y el manejo de áreas.

- Soluciones alternativas a los problemas. A este respecto se pudo observar que los alumnos ya no pretendían resolver los problemas de una manera única, sino que buscaban opciones diferentes para realizar las actividades. En un principio, aún al alumno más destacado de la clase le costaba trabajo ver que un mismo problema podía tener más de una solución.

- Confianza y seguridad en sí mismos. Se observaron avances significativos en su confianza y seguridad. Alumnos que en un principio no eran capaces de defender sus resultados ante el profesor o los coordinadores, a mediados del programa de fracción, no sólo defendían sus puntos de vista, sino que también señalaban los errores cometidos por las figuras de autoridad.

b)Problemas

- Operaciones básicas. Muchos de los alumnos cometían equivocaciones en la resolución de los problemas debido a un manejo inadecuado de las operaciones básicas, por lo que dentro del programa de fracciones se dedicaron un par de sesiones al trabajo con este tipo de operaciones.

- Comprensión lectora. Debido a que se detectaron problemas en la comprensión de lectura, una de las ayudas más frecuentes que se proporcionaba a los equipos era la guía para la lectura del ejercicio en voz alta, de esta forma, los alumnos comprendían qué era lo que se les pedía y así podían realizarlo.

- Diferentes niveles de dificultad. Las actividades representaron un nivel de dificultad diferente para los equipos, por lo que siempre había alguno(s) que presentaba(n) mayores problemas para la realización de los ejercicios. Esto llegó incluso a repercutir en su motivación. En estos equipos, como en casos particulares, los coordinadores ponían especial atención y prestaban mayores ayudas.

- El control de la disciplina del grupo. Las primeras actividades tenían un objetivo educativo, pero eran de apariencia totalmente lúdica, permitían libertades a los alumnos en la organización y realización de las tareas, lo que en ocasiones llevaba a que se perdiera el control del grupo. Esto contrastaba con el estilo de enseñanza de la maestra y hacía que su actitud fluctuara entre la aceptación y el rechazo del trabajo. Para evitar estos problemas, se diseñaron actividades más estructuradas y con una apariencia más académica, aunque continuaran siendo lúdicas.
- Falta de una buena planeación de la actividad. Las actividades se iban realizando a la par de la aplicación del programa; esto último y la falta de experiencia de los investigadores llevaron, en varias ocasiones, a no planear bien los tiempos o cometer errores en los datos, lo cual, en la medida de lo posible, se fue corrigiendo en el transcurso de las sesiones.
- La falta de continuidad en las sesiones dificultó el avance de los alumnos. Varias veces las sesiones tuvieron que suspenderse debido a la falta de labores por juntas, festejos y otro tipo de eventos que se realizaban. Esto rompía la continuidad del trabajo, sobre todo porque sólo se asistía a la escuela dos veces a la semana y hubo ocasiones en que se dejó de ver a los alumnos hasta por tres semanas, lo que repercutía en forma negativa en el desempeño de los alumnos; en particular en aquellos con mayores problemas de aprovechamiento escolar.

Buzón de alumnos

El buzón nos sirvió como “termómetro” para saber si había que modificar algo. Cuando las actividades resultaban más atractivas para los alumnos, los comentarios positivos eran mayores, cuando la actividad no lograba capturar por completo su interés, los resultados neutros y negativos se incrementaban.

En la Figura 24 se muestran agrupadas las tres categorías: comentarios neutros, negativos y positivos, los cuales fluctúan de acuerdo con su porcentaje por sesión.

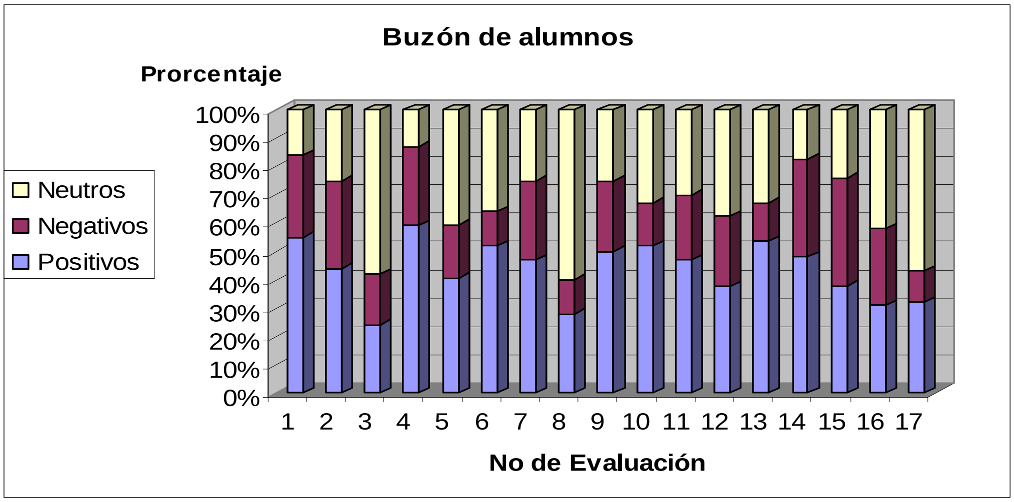


Figura 24. Comentarios que los alumnos realizaban por sesión agrupados en tres categorías.

Cuestionario para los alumnos

En el cuestionario aplicado a los alumnos, la mayoría dijo haber aprendido fracciones (el 61%) en menor cantidad, hubo quien opinó que aprendió algo (31%) y sólo un 8% señaló que aprendió poco o nada. Las actividades fueron lo que más les gustó del curso y la queja más frecuente fue en relación con la conformación de los equipos, pues no se permitió que se hicieran cambios de integrantes. En cuanto a las calificaciones que los alumnos otorgaron a los coordinadores con respecto a la aceptación que éstos tuvieron, en la Figura 25 se puede apreciar que los resultados fueron positivos.

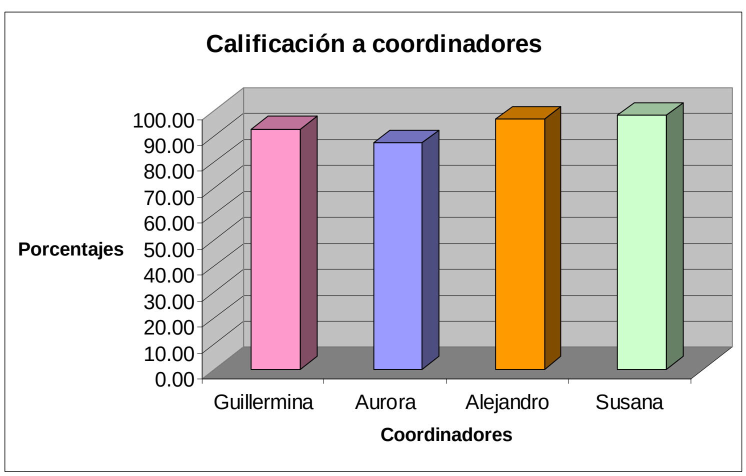


Figura 25. En una escala del 0 al 10, los alumnos calificaron el desempeño en el programa de la maestra y los tres participantes de la residencia.

Percepción de la maestra

La percepción de la maestra se reporta a partir de las respuestas que proporcionó por escrito en el cuestionario que se le aplicó al final del programa, además de las observaciones que se anotaron en la 'hoja de registro' que se llevaba de forma cotidiana sobre sus comentarios y actitudes hacia el trabajo realizado.

- ✓ ***Temas que se incluyeron en el programa.*** La maestra señaló que se revisaron todos los temas referentes a fracciones de acuerdo con el currículo de primaria, aunque opinó que faltó dedicarle más tiempo al tema de decimales.
- ✓ ***Las invariantes.*** La profesora consideró interesante y funcional el uso de las invariantes.
- ✓ ***Las actividades.*** Se observó que su percepción hacia las actividades pasó por tres etapas: una inicial de desconcierto, una segunda en donde no estaba tan de acuerdo con las actividades por considerar que eran más juego que trabajo y porque con ellas se relajaba el control del grupo y finalmente una tercera en donde, con la reestructuración que se hizo de las actividades, la maestra mostró una actitud positiva.
- ✓ ***El aprendizaje de los alumnos.*** Incluso en la segunda etapa, cuando la maestra no estaba del todo satisfecha con las actividades, reconocía el avance de los alumnos. Cuando comenzó la tercera etapa, los comentarios sobre los avances en el aprendizaje de los alumnos fueron mayores. Por ejemplo, la maestra comentó lo sorprendida que estaba de que sus alumnos pudieran resolver actividades con una complejidad elevada. A este respecto, también resaltaron sus comentarios sobre el incremento en la participación de sus alumnos.
- ✓ ***La viabilidad para llevar a cabo el programa.*** La maestra opinó que el programa puede ser aplicado por otros profesores en su escuela o en otras y que es de utilidad.
- ✓ ***Lo motivante de las actividades.*** Consideró que las actividades fueron motivantes y muy atractivas para los alumnos.

- ✓ ***Los materiales empleados.*** Dijo que los materiales empleados eran adecuados y sugirió como material adicional el uso de regletas y también que se dedicaran algunas sesiones para que los propios niños realizaran sus materiales.
- ✓ ***La disciplina del grupo.*** Aunque en el cuestionario la maestra señaló que el manejo de la disciplina fue adecuado, se observó que su percepción fue cambiando positivamente a partir de la reestructuración de las actividades.
- ✓ ***La influencia del programa en su práctica docente.*** La maestra afirmó que el programa repercutió en forma positiva en su práctica docente.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se considera que el modelo de integración educativa, dentro de la educación especial, es el resultado de un largo proceso histórico, en el que se ha pasado por el rechazo, la tolerancia y la aceptación de las personas con algún tipo de limitación física o mental; al igual que por una atención hacia ellas desde un modelo caritativo, asistencial o educativo. En los últimos años la integración educativa ha estado a prueba y coexiste en mayor o menor medida con los otros modelos.

La integración educativa antepone la idea de que en el salón de clases existe la diversidad, en contra de la idea de que los grupos son homogéneos, lo cual se traduce en el hecho de que todos los alumnos tienen necesidades educativas y a su vez estas necesidades pueden ser diferentes, como distintas son las formas de aprender que tienen los alumnos en el salón de clases. Esto nos conduce a la idea de que todos los alumnos pueden necesitar, en algún momento de su vida académica, apoyos especiales para desarrollarse o aprender y no solamente aquellos que presentan algún tipo de discapacidad. En apoyo a esta idea, Álvarez (1993) ha señalado cómo niños sin ningún tipo de discapacidad presentan problemas en la lecto-escritura cuando asisten a escuelas en donde son una minoría cultural y no tienen las herramientas culturales del grupo mayoritario; por lo cual se puede decir que estos niños presentan necesidades educativas especiales.

Otra postura que ha cobrado fuerza dentro el modelo de la integración es el aprendizaje colaborativo, en oposición al aprendizaje individual, en el que se señala que los niños aprenden más cuando comparten experiencias entre ellos, que cuando tratan de aprender de forma aislada. Este presupuesto rescata a su vez la importancia que tiene el aprendizaje entre los alumnos y no solamente entre la díada profesor-alumno. Con base en estos principios se da lugar a la concepción de integrar, más que segregar, a los niños con necesidades educativas especiales (Ovejero, 1998).

Estos son los postulados que llevaron al equipo de la residencia en educación especial, que realizó sus prácticas en la escuela "José Guadalupe Posadas" a tomar la decisión de trabajar con los alumnos de bajo rendimiento académico dentro del grupo y no de forma independiente, además de que la mayor parte del grupo presentaba problemas en el aprendizaje del tema de fracciones, aunque algunos alumnos tenían mayores dificultades que otros. Además, con esta acción se pretendió atender a una mayor población de la escuela, lo cual es relevante si se toma en cuenta el bajo rendimiento encontrado en la evaluación diagnóstica y el difícil contexto en el que se encuentran al vivir en una zona de escasos recursos, donde el promedio de escolarización de los padres es bajo y el tiempo que estos pueden dedicar a apoyar las tareas escolares de sus hijos es limitado por la realización de diversas estrategias para la obtención de recursos económicos. Así mismo, se consideró que atender a un quinto nivel permitiría trabajar más de un año con ellos y al mismo tiempo se estaría realizando una acción preventiva antes de su ingreso a la escuela secundaria.

Pasando al tema de la intervención propiamente dicha, los resultados obtenidos en la etapa de precurrentes sugieren que uno de los mayores logros se originó a partir del trabajo colaborativo, en particular del trabajo en equipo y la discusión en grupo. A través de su realización se observó no sólo un mejor desempeño académico por parte de los alumnos, sino también un incremento en su participación y la seguridad con la que lo hacían, lo cual a su vez favoreció un cambio en la percepción negativa que tenían el profesor, los directivos y los alumnos del grupo hacia algunos de los niños estigmatizados como estudiantes de bajo nivel académico y poca participación.

Otro de los aspectos positivos de la intervención en la etapa de precurrentes fue el cambio en la participación del profesor dentro del programa; en las primeras sesiones el maestro elevaba la voz para controlar al grupo, establecía comparaciones entre los alumnos y utilizaba etiquetas para señalar a quienes cometían errores, además de dirigirse a los alumnos desde lejos. En otras ocasiones se mostraba pasivo y dejaba que el equipo de la residencia se encargara de llevar a cabo las actividades. Sin embargo, estas conductas fueron cambiando gradualmente. En sesiones posteriores se observaba que el maestro se integraba al trabajo con los equipos, los ayudaba a resolver las dudas que tenían, evitaba las comparaciones y etiquetas y al hablar se colocaba a la altura de los niños, como pudo verse en la Figura 19 del apartado de resultados de la etapa de precurrentes.

Es importante resaltar también el cambio de apreciación del profesor sobre el trabajo en equipo. Al comienzo de nuestra intervención afirmó que le disgustaba este método, porque sus alumnos perdían la atención muy fácilmente; sin embargo, la forma de organizar las actividades durante el programa hizo que el profesor reconsiderara positivamente este sistema de trabajo como una opción que ofrece muchas ventajas. Este cambio se debió principalmente al hecho de que el profesor observó una mayor participación y seguridad en los alumnos, además de notar mejoras en las calificaciones de los dos últimos bimestres, en las materias de matemáticas y español.

Con lo mencionado hasta el momento se concluye que la intervención realizada a través de integración de los alumnos con necesidades educativas especiales y el trabajo colaborativo tuvo repercusiones positivas en el aprendizaje y desempeño de los mismos. Esto también conlleva a la reflexión de la importancia que tiene realizar este tipo de prácticas desde los primeros grados escolares cuando los alumnos aún no han sido etiquetados o catalogados como malos estudiantes.

Por otra parte, con respecto a las estrategias cognitivas promovidas en el trabajo con precurrentes y de acuerdo con los resultados obtenidos, se puede afirmar lo siguiente:

- El uso de la estrategia de selección (en la que se hizo especial énfasis) mejoró considerablemente desde las primeras sesiones de trabajo; sin embargo, su empleo fue inconstante, tanto en el trabajo en equipo, como en el individual. En ambos casos se logró un empleo correcto en más de la mitad de los problemas, dato que es importante si se considera el grado de abstracción que se requiere para extraer los datos más importantes de un problema. Esta estrategia era una de las partes en las que los equipos se detenían a discutir con mayor frecuencia, pues lo que resultaba importante para algunos era muchas veces irrelevante o no aportaba nada en la resolución del problema, este hecho era resaltado por los coordinadores, quienes a través de la participación y ayuda a los equipos, conducían a los alumnos a que se dieran cuenta de lo que realmente era relevante para resolver el problema.

- En el trabajo individual, la utilización de la estrategia de organización pocas veces fue correcta, pues la mayoría de los alumnos nunca terminaron por separar los pasos que habían realizado para llegar a la solución del problema, aún así se podía apreciar una constante en cuanto a tratar de organizar las operaciones y un aumento considerable en dar la respuesta completa, pues en un principio los alumnos sólo ponían en el resultado un número y no decían a qué correspondía. A diferencia de esto, su empleo en el trabajo en equipo se realizó correctamente en el 75% de los problemas, debido a que éste era un requisito que se calificaba cuando el equipo pasaba a exponer en el pizarrón, de tal forma que los equipos ponían gran empeño en que la forma de presentar sus datos fuera entendida por el resto del grupo.

- En un principio, la estrategia de elaboración parecía no presentar mayor dificultad, debido a que la complejidad de los problemas y las operaciones necesarias para resolverlos no era muy alta. En la medida en que la complejidad de ambos aspectos aumentaba, el éxito en la solución de los problemas disminuyó, en ocasiones debido a problemas para seleccionar la operación que se requería para llegar a la solución (estrategia de elaboración) y en otras ocasiones porque aún cuando se lograba identificar correctamente la operación necesaria, su realización era incorrecta.

- Una de las estrategias que en un principio no se había considerado, pero que fue muy relevante durante la aplicación del programa de precurrentes, fue la estrategia de autoevaluación, la cual se empleaba, sobre todo, cuando los equipos pasaban a exponer sus resultados. La forma de exposición oral por parte de los equipos y los apoyos escritos utilizados en el pizarrón, hacían que los alumnos fueran más conscientes de la forma en que habían resuelto el problema, del éxito obtenido en su resolución y en algunas ocasiones de los errores que habían cometido. Además, las exposiciones de cada equipo promovían que los demás se dieran cuenta que un problema puede tener múltiples soluciones. Aun cuando este aspecto no se evaluó de la misma forma que las otras estrategias cognitivas, resulta de suma importancia pues propicia el interés de los niños por la supervisión de su propio trabajo.

En lo que concierne a los resultados de los problemas que los alumnos resolvieron en la etapa de precurrentes, hubo un mayor nivel de éxito en problemas cada vez más complejos aunque de manera general se observaba que a mayor complejidad de los problemas, mayor posibilidad de error por parte de los alumnos. Por otra parte, la búsqueda del resultado más adecuado propiciaba una mayor discusión dentro de los distintos equipos.

La estrategia de trabajo empleada por el equipo de la residencia en esta etapa, hizo evidentes los problemas que presentan los niños en cuanto al empleo de operaciones básicas, por ejemplo en problemas que exigían la realización de una resta de varios dígitos, o aquellas con punto decimal.

A manera de conclusión respecto a esta etapa, se afirma que las estrategias cognitivas son una herramienta útil en la resolución de problemas matemáticos. En el caso de la intervención realizada se presentaron avances significativos en el uso de las estrategias, aunque no se logró una consolidación total de ellas, lo cual pudo deberse a la duración del programa. También se observaron resultados positivos en cuanto a la resolución de problemas y operaciones básicas, pero la mayoría de los alumnos continuaba cometiendo errores, incluso al final de las sesiones de trabajo con precurrentes. Además de ello, se observó un cambio favorable en la percepción que el profesor y las autoridades escolares tenían del grupo.

Por otra parte, en cuanto a los logros obtenidos por los alumnos a través del programa para la apropiación del concepto de fracción, se comenzará hablando de los hallazgos encontrados en la 'Prueba del uso de fracciones en 5º y 6º de primaria'. Como se revisó en los resultados correspondientes a este punto, existen cambios notables entre el pretest y el postest. A partir de los 26 casos analizados, el resultado obtenido en la segunda evaluación se incrementó en más de un 100% con respecto a la primera. Las diferencias observadas, entre el pretest y el postest, fueron ratificados por la aplicación de la prueba de Wilcoxon, con ésta se pudo comprobar la existencia de cambios significativos entre la primera y la segunda aplicación de la prueba. Además, mientras en la primera aplicación sólo el 7.2% de alumnos obtuvo una calificación aprobatoria, en la segunda, el porcentaje de alumnos aprobados fue del 42.3%.

Pese a la existencia de dichos cambios, cabe cuestionar a qué se debe que aún en la segunda aplicación el índice de reprobación entre los alumnos fuera tan alto, pues sólo 11 de los 26 alumnos obtuvieron una calificación aprobatoria. A este respecto cabe señalar que aún antes de la instrumentación del programa, se tenía conocimiento de la poca correspondencia que existía entre éste y el tipo de prueba aplicada. Por esta razón, además de la prueba se emplearon otras formas para evaluar la eficiencia del programa.

La falta de congruencia entre la prueba y el programa se debía a que durante la aplicación del programa a los alumnos se les presentaban una serie de situaciones y/o actividades problemáticas, cercanas a su contexto, en las que ellos necesitaban del empleo de las fracciones para poder resolverlas; en la prueba, al ser de rendimiento académico, se plantean una serie de ejercicios o problemas similares a los de exámenes tradicionales, pero alejados de su contexto, lo que hacia que los ejercicios fueran más abstractos. Este tipo de ejercicios implicaba que los alumnos tuvieran que emplear las diversas interpretaciones del concepto de fracción, más no les planteaba una situación que los motivará a resolver los problemas y/o ejercicios de la prueba.

Aunado a la falta de congruencia entre la prueba y el programa, otra de las limitaciones fue que durante la aplicación del programa, no se dedicó el mismo tiempo a la revisión de las diferentes interpretaciones del concepto de fracción, e incluso algunos de los temas (como la realización de sumas con fracciones) no se trataron de forma particular, puesto que no se revisaban temas que implicaran un nivel de complejidad mayor si antes los alumnos no tenían un dominio adecuado del tema que se estaba revisando. Así mismo, desde el comienzo de la aplicación del programa se presentaron problemas en relación con la planeación y la organización de las actividades; esto llevó a replantearlas, es decir, a adecuarlas y conseguir y elaborar los materiales necesarios a la par de la aplicación propiamente dicha. Todo esto impidió igualar la cantidad de tiempo que se dedicaba a cada tema con el peso que se le daba en la prueba.

Por esta razón, se realizó un análisis de la prueba por reactivos, que permitió detectar si los alumnos habían tenido mayores dificultades en los reactivos cuyos contenidos no habían recibido suficiente atención por parte del programa. A través de este análisis se encontró que en 23 de los 26 reactivos existen diferencias positivas entre la primera y segunda aplicación, pese a que sólo en 12 de ellos se encontraron diferencias significativas y en tres de los casos existieron diferencias negativas. Los casos en donde se encontraron cambios positivos, sobre todo aquellos en los que estos cambios fueron significativos, pueden explicarse por el mayor tiempo que se dedicó a los temas relacionados con tales reactivos, ya sea dentro del programa o por la revisión realizada por parte de la maestra. Los reactivos en donde los cambios fueron negativos fueron revisados de forma más exhaustiva y lo que se encontró fue lo siguiente:

- El primero de estos tres casos es el reactivo 13, una suma de fracciones con denominador común; el resultado negativo en este caso puede tener dos causas, la primera de ellas es que en el programa no se revisó el tema de sumas de fracciones de forma particular. La segunda explicación es que la mayoría de alumnos que tuvieron mal este reactivo emplearon un procedimiento tradicional, similar al que se emplea cuando en la suma de fracciones los denominadores son diferentes.

- En otro de los reactivos en el que existieron cambios negativos (el número 23) estos pueden deberse a que el problema se les presentaba por escrito y su redacción era confusa, lo que se conjuntaba con los problemas que los alumnos tenían en comprensión de lectura.
- En el tercer caso (reactivo 24) los resultados negativos pueden deberse a dos factores, uno de ellos es la confusión que los alumnos tenían con los signos "menor que" y "mayor que" y la otra es que como sólo tenían que acomodar dos fracciones en dos casillas, tanto el pretest como el postets hayan sido respondidos de forma azarosa.

Con base en lo señalado hasta el momento, se puede decir que a través de la prueba se obtuvo información valiosa, sobre todo en relación con los temas a los cuales faltó dedicarles más tiempo durante la aplicación del programa. Sin embargo, no es un indicador suficiente para poder señalar los logros alcanzados por el programa de intervención.

Un aspecto más que hay que tener en cuenta para comprobar los alcances obtenidos por el programa es la evaluación realizada de forma cotidiana, a través de las actividades que se trabajaban en equipo. Por medio de dicha evaluación se pudo observar, como se describió en los resultados expuestos a este respecto, que el promedio obtenido por todos los equipos en la resolución de los problemas y/o actividades planteadas fue elevado, aún cuando muchos de estos problemas presentaban un alto nivel de complejidad. Estos resultados favorables pueden justificarse debido a que, en contraste con la resolución individual de la prueba, los alumnos tenían la oportunidad de compartir y discutir las posibles soluciones de los problemas, con lo cual se favorecía que los alumnos que presentaban mayores problemas en la resolución de las actividades fueran auxiliados por sus compañeros de equipo.

En el mismo sentido, es importante señalar el papel importante que jugó la mediación que los coordinadores del programa proporcionaban a todos los equipos y en particular a aquellos alumnos que presentaban mayores dificultades para resolver los problemas. Esta mediación tenía por objetivo que los alumnos pasaran de un estado en el cual resolvieran los problemas con ayuda a otro en donde pudieran resolverlos por sí mismos, lo que al mismo tiempo facilitaba que los alumnos lograran llegar al resultado correcto de las actividades.

De igual manera, con base en el concepto de 'Zona de Desarrollo Próximo' se puede decir que si bien no todos los alumnos lograban resolver los problemas planteados de forma individual, muchos de ellos lo conseguían a través de la mediación que les prestaba otra persona más capaz (compañeros o coordinadores), por lo que se puede afirmar que estos alumnos estaban en el proceso de apropiase de las interpretaciones del concepto de fracción que más se revisaron.

El análisis de estos resultados puede ser complementado con los datos obtenidos mediante el registro de observación de los alumnos que se realizaba durante las sesiones. Estos datos permitieron observar que la metodología de trabajo es funcional para fomentar en los alumnos la búsqueda de soluciones alternativas a un mismo problema, además de que el trabajo colaborativo y la continua exposición por parte de los niños propicia seguridad y la confianza en ellos mismos, a la vez que promueve la discusión y la ayuda entre compañeros. Estos logros fueron comentados reiteradamente por los profesores de grupo, tanto en el trabajo que se realizó en el programa de precurrentes como en el de fracciones.

Del mismo modo, el uso que los alumnos hacían de las invariantes para discriminar entre lo que era y no era fracción resultó ser de gran utilidad en la resolución de las actividades, pues les servía de guía para poder resolver problemas con alto nivel de dificultad, lo que atrajo comentarios positivos de la maestra a este respecto; además, los niños empezaron a hacerlas extensivas para identificar otros conceptos científicos. Por ejemplo, algunos de los alumnos que confundían el cuadrado y el rectángulo cuando perceptualmente tenían un tamaño parecido, hicieron un uso incipiente de las invariantes para poder distinguir uno de otro y no confundirlos, de esta forma el saber que un cuadrado tenía cuatro lados iguales les servía como invariante que podían emplear para discriminar entre éste y otras figuras geométricas parecidas.

Un factor que se tomó en cuenta, aunque con sus reservas debido a que no se puede considerar como resultado directo del programa, son los logros favorables obtenidos por los alumnos en la materia de matemáticas, ya que como se presentó en el apartado de resultados, la prueba de Freedman demostró la existencia de cambios significativos entre las cinco evaluaciones realizadas por la maestra del grupo.

Otro aspecto muy importante con respecto a los logros del programa es la gran aceptación que tuvieron las actividades por parte de los alumnos. Esto se puede concluir con base en las respuestas de los alumnos al cuestionario que se les aplicó al final del programa y de los comentarios que realizaban de forma cotidiana a través del buzón. Este aspecto es muy importante debido a que la motivación mediaba entre los alumnos y la forma en que resolvían la tarea. Si los alumnos estaban motivados se reflejaba en su concentración y en la dedicación con que resolvían la actividad, lo cual a su vez redundaba en la correcta resolución de los problemas.

Los resultados obtenidos a través del buzón fueron importantes para el diseño de las actividades, ya que el tener conocimiento sobre las actividades que no capturaban por completo el interés de los alumnos sirvió para adecuar o modificar las actividades subsecuentes.

Así mismo, una reflexión que se puede hacer a partir de los resultados que aparecen en el buzón, es que hubo algunas sesiones en las que los comentarios neutros eran mayores que los comentarios positivos. En general, los comentarios neutros se incrementaban cuando las actividades no capturaban por completo el interés de los alumnos, otra razón que podía elevarlos era que muchos alumnos, desde el principio del programa, estaban insatisfechos con su equipo (la conformación de los equipos fue establecida desde el programa de precurrentes) y querían cambiarse, pero la organización que se tenía en el interior del equipo (intercalar alumnos con bajo, mediano y alto desempeño académico) impidió realizar cambios a voluntad. Además, en relación con lo anterior, algunos equipos se sentían en desventaja, por considerar que otros tenían más posibilidades de resolver en menor tiempo las actividades que se les planteaban; estas inquietudes por parte de los alumnos se reflejaron permanentemente en el buzón, la mayoría de ellas en forma de comentarios neutros o negativos.

Con respecto a la percepción que los alumnos tuvieron de los coordinadores, se puede señalar que todos, incluyendo a la maestra del grupo, presentaron una aceptación positiva.

Esto es importante si se toma en cuenta que dicha aceptación repercutió directamente en la creación de un ambiente de trabajo favorable y en la motivación que los alumnos tuvieron hacia la realización de las actividades. Cabe recordar que para este trabajo la motivación juega un papel importante ya que se concibe como mediadora en el aprendizaje de los alumnos.

Otro de los aspectos a considerar dentro de los alcances y logros del programa, son las observaciones y los comentarios realizados por la maestra, quien aún cuando en algún momento no estuvo de acuerdo con la forma tan 'lúdica' de trabajo, por percibir que este tipo de organización relajaba la disciplina del grupo, reconoció los avances de los niños, lo cual se hizo aún más evidente a partir de que se matizó el aspecto 'lúdico' del trabajo a través de la mayor estructuración de las actividades. La maestra mostró interés por el uso de las invariantes y señaló que era factible y funcional su utilización para el trabajo en el aula.

Hasta aquí se han señalado varios de los logros y algunas de las limitaciones del programa, pero con respecto a estas últimas, cabe señalar que existieron otras no menos importantes como la necesidad de conocer el tema a profundidad, lo ideal en este sentido es el trabajo interdisciplinario entre especialistas psicólogos, pedagogos, matemáticos y físicos, etc., lo cual no fue posible en este trabajo. En este sentido se realizó una revisión de la literatura con respecto al tema y se consultó a un matemático para comprender algunos aspectos del concepto, por medio de lo cual se dedujeron las invariantes del mismo. Estos hechos, sumados a la complejidad del tema conllevan a la reflexión de si realmente las invariantes utilizadas en este trabajo son las esenciales para la apropiación del concepto de fracción. Este factor pudo haber repercutido directamente en la enseñanza del tema.

Otra de las limitaciones del programa fue que los diseñadores no contaban con la experiencia suficiente para el diseño de un programa como el que se propuso en el presente trabajo, ni dominaban la perspectiva teórica desde la cual se estaba planteando el mismo. Esto, aunado a que la aplicación del programa se hacía a la par del diseño y de conseguir o elaborar los materiales necesarios, provocó que en varias ocasiones los resultados obtenidos no fueran los esperados, al mismo tiempo que estos hechos servían de experiencia para ir perfeccionando y adecuando el programa. Como consecuencia de lo anterior, no siempre se consiguió distribuir uniformemente el grado de dificultad entre las actividades que se les fueron presentando a los alumnos, lo que posiblemente repercutió en el aprendizaje de los alumnos.

Un aspecto más que repercutió en el trabajo desarrollado, fue que por cuestiones de tiempo y de recursos humanos, el programa estuvo centrado en los alumnos y no se pudo realizar un trabajo conjunto con padres y maestros, lo cual se considera importante desde el marco teórico bajo el que se diseñó el programa de intervención. Esto ocurrió debido a que en el diseño de las actividades y la elaboración de materiales para su aplicación se ocupaba la mayor parte del tiempo disponible.

Por otra parte, es preciso mencionar que los alumnos siguieron presentando problemas con las precurrentes del concepto de fracción (operaciones básicas, manejo de áreas de figuras geométricas, lógica y conjuntos) hasta el final de las sesiones, así como con otros temas relacionados con la solución de problemas, como es el caso de la comprensión de lectura, lo que dificultaba en gran medida la enseñanza de un tema tan complejo como lo es el de las fracciones.

En función de las limitaciones presentadas por el programa y de que todo trabajo es perfectible, cabe hacer las siguientes sugerencias:

- Realizar un trabajo interdisciplinario a través del cual se pueda corroborar cuáles de las invariantes presentadas en este programa son las más adecuadas a todas las interpretaciones del concepto de fracción y si existe alguna invariante que no haya sido tomada en consideración, añadirla en subsiguientes aplicaciones del programa.
- Para que la apropiación de las invariantes del concepto de fracción sea homogénea se propone que durante las actividades se den ejemplos y contraejemplos dando un peso similar de cada una de éstas.
- Distribuir mejor el tiempo que se dedica a la revisión de cada tema y agregar una mayor cantidad de actividades a las interpretaciones del concepto de fracción que tienen menor peso en el programa.
- Verificar y adecuar el nivel de dificultad de las actividades para que efectivamente se parta de un menor grado a un mayor grado de dificultad. En relación con esto, se plantean los dos puntos siguientes.

- Previo a la enseñanza de las interpretaciones del concepto de fracción se recomienda realizar actividades, empleando invariantes, para que los alumnos discriminen entre lo qué es un número natural y lo que es un número racional, ya que los alumnos suelen seguir aplicando la misma lógica en ambos casos, es decir, en los números naturales 8 es mayor que 4 y mayor que 2. Lo que en los números racionales no forzosamente implica la misma lógica, ya que $\frac{1}{8}$ es menor que $\frac{1}{4}$ y menor que un $\frac{1}{2}$.
- Previo a la enseñanza de las interpretaciones del concepto de fracción se recomienda realizar actividades empleando las invariantes, para que los alumnos puedan discriminar entre los dos tipos de unidades que hay: continuas y discretas.
- Diseñar actividades en las que los alumnos realicen sus propios materiales (sugerencia de profesora del grupo con el que se llevó a cabo la práctica)
- Consolidar en los alumnos, previo a la aplicación del programa, los precurrentes del concepto de fracción y temas relacionados como el de la comprensión lectora, es indispensable para seguir instrucciones y entender adecuadamente problemas escritos.
- Dedicar tiempo al trabajo con los padres de los alumnos, a la exploración del contexto familiar, e incluir esta información en la adecuación de las actividades del programa, a la vez de diseñar actividades en donde puedan participar los padres de familia.
- Diseñar una prueba más adecuada que permita evaluar no solo el producto del aprendizaje, sino también los avances cualitativos obtenidos por los alumnos, para lo cual se recomienda el método de doble estimulación desarrollado por Sájarov (1930 citado en: Vigotsky 1934) y utilizado por Vigotsky como método para el estudio del desarrollo de conceptos en el niño.
- Probar la eficacia de las invariantes en alumnos que cursan los primeros grados de nivel primaria, con el fin de obtener mayor información sobre la utilidad de las mismas, cuando el concepto que se pretende enseñar aún no depende de su

interconexión con conocimientos previos de un alto nivel de complejidad. Para ello se recomienda partir de la discriminación de unidades (discretas y continuas) y de la interpretación más simple de la fracción (‘como división’).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alegre, O. (2002). *Diversidad humana y educación*. Málaga: Aljibe.

Alisedo, G. (1988) Los disturbios de la audición y su reeducación. En: *Psicopedagogía de la educación especializada: aproximación teórica, investigación y perspectiva*. Labor, Bruxelles: Francia.

Álvarez, A. (1993). *Todos somos inmigrantes: Una aproximación histórico – cultural al tratamiento educativo del problema lingüístico en minorías culturales*. Fundación Infancia y aprendizaje. España: Centro de Investigación para la Educación y el Desarrollo Humano.

Baquero, R. (1999). *Vigotsky y El aprendizaje Escolar*. Argentina: Aique.

Bautista, J. (1993). *Necesidades educativas especiales*. Málaga: Aljibe.

Block, S. (1987). *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria*. Tesis de maestría no publicada, DIE-CINVESTAV-IPN. México.

Bourdieu, P y Passeron. (1996). *La reproducción: Elementos para una teoría del sistema de enseñanza*. (2a. ed.). Fontamara: México.

Botías, P. Higueras, E. & Sánchez, C. (1998). *Evolución histórica de la educación especial: Del modelo clínico al modelo pedagógico.* Madrid: Escuela Española.

Brennan, W. (1988). *El currículo y las necesidades especiales*. Madrid: Siglo Veintiuno Editores.

Bronckart, J. (2000), Las unidades de análisis en psicología y su interpretación: ¿interaccionismo social o interaccionismo lógico? En: Tryphon, A. & Vonèche, J. (comps.). *Piaget-Vygotsky: la génesis social del pensamiento* (pp. 115-143). Argentina: Paidós Educador.

Bühler, J. (1983). *Vida y cultura en la edad media*. Traducción: Wenceslao Roces. México: Fondo de Cultura Económica.

Carretero, M. y García, M. 1998. Principales contribuciones de Vigotsky y la psicología evolutiva soviética. En: Marchesi, A., Carretero, M. y Palacios, J. (Comps.). *Psicología Evolutiva 1. Teorías y métodos* (pp. 155-176). Madrid: Alianza Psicología.

Castorina, J. A. (1996). El Debate Piaget - Vigotsky: La Búsqueda de un Criterio para su Evaluación. En: Castorina, A. Ferreiro, E., Kohl, M. y Lerner, D. *Piaget - Vigotsky: Contribuciones Para Replantear el Debate* (pp. 9-45). México: Paidós Educador.

Clemente, G. (2002). *Las fracciones*. Recuperado el 16/08/2002, de: http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2001/enero/2nosotros56.htm

Cole, M. (1999). *Psicología Cultural*. Morata: España.

Dávila, V. M. (1995). El reparto y las fracciones. En: Block, S. D. (coor.). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas* (pp. 9-45). México: SEP.

Del Río, P. (1990). La Zona de Desarrollo Próximo y La Zona Sincrética de Representación: El espacio Instrumental de la Memoria en Adultos, un Estudio Microgénico, *Infancia y Aprendizaje* Vol. 53, 75-97.

Dettmer, P., Thurston, L. P. & Dyck N. (2002). Consultation, Collaboration and Teamwork for Students whith Special Needs. U.S.A.: Allyn an Bacon.

Durán, R. (2001). Algunas ideas de la teoría socio – cultural pp. 69-78. En: Durán, R. (2001). *Curso-Taller: Recursos y Estrategias para el Desarrollo de Habilidades Matemáticas*. México: SEP.

Durkheim, E. (1990). *Educación y sociología*. Península: Barcelona.

Engels, F. (1999). *El papel del trabajo en la transformación del mono en hombre.* México: Fontamara. (Trabajo original publicado en 1876).

Foucault, M. (1998). *Historia de la locura en la época clásica,* Vol. I. (7a. ed.) México: Fondo de Cultura Económica.

Fuentes, O. (2005). Volver la mirada hacia otro lado: la política educativa frente a los resultados de la prueba PISA. *Cero en conducta Por la reforma de la escuela*. Número 51 Abril 2005, 1-5.

Galperín, P. Ya. (1995) Sobre la formación de las imágenes sensoriales y de los conceptos. En: Quintanar, R. L. *La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño* (pp. 27-41). México: Universidad Autónoma de Tlaxcala.

Galperín, P. Ya. (1995) Sobre la formación de los conceptos y las acciones mentales. En: Quintanar, R. L. *La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño* (pp. 41-56). México: Universidad Autónoma de Tlaxcala.

Gentner, D. & Markman, A. (1997). Structure Mapping in Analogy and Similarity. American Psychologist. Vol. 52, No. 1, 45-56.

González, J. (2001). *Currículum y diversidad*. Málaga: Aljibe.

Gobierno de la Ciudad de México (GDF), (1996). Monografía de Iztapalapa. México: GDF

Guevara, N. M. (1991). México: ¿un país de reprobados? Nexos; 162, pp. 33-44.

Hernández, G. (1998). *Paradigmas en psicología de la educación*. Paidós Ecuador: México.

Kozulin, A. (2000*). Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva sociocultural*. España: Paidós.

Linares M.; Salvador A. y Sánchez V. (1988). Las fracciones diferentes interpretaciones. En: Linares M.; Salvador A. y Sánchez V. *Fracciones. La relación parte todo* (pp. 51-78). Madrid. Síntesis.

Mancera, M. E. (1992). Significados y significantes relativo a las fracciones. *Educación matemática*. 4, 2, pp. 30-54.

Marchesi, A. y Martín E. (1995). Del lenguaje del trastorno a las necesidades educativas especiales. En: *Desarrollo Psicológico y Educación. III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar*. (7a.Reimpresión). Madrid: Alianza Editorial.

Martínez F. (2001) Reformas educativas: mitos y realidades. *La Revista Iberoamericana de Educación.* Número 27 Septiembre - Diciembre, 1-12.

Marx, C. (1973). Tesis sobre Feuerbach. *En: Obras Escogidas Tomo I.* Moscú: Progreso.

Mendoza, A. (1978). *La educación especial. Evolución del concepto*. Madrid: Síntesis.

Nunes T. Y Bryant, P. (1998). *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. México: Siglo XXI Editores.

Ornelas, C. (1995). *El sistema educativo mexicano. La transición del fin de siglo*. México: Fondo de Cultura Económica.

Ovejero, A. (1998) *El aprendizaje cooperativo: una alternativa eficaz a la enseñanza tradicional*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Paris, S. G. & Ayres, L. (1994). *Become reflective students and teachers with portafolios and authentic assement*. Washington, DC: American Psychological Association.

Parra, A. M. (2004). *Solución de problemas con fracciones en una comunidad de aprendizaje en alumnos con problemas de aprendizaje*. Reporte de experiencia profesional de maestría no publicado. UNAM. México.

Peña, A. (2002). *Un gran logro para el movimiento de integración educativa. México: las nuevas normas de la SEP*. Recuperado el 11/01/2004, de: http://www.excelduc.org.mx/index.cfm?GId=37.html.

Pérez, Ch. (2002). *Explotación de los córpora textuales informatizados para la creación de bases de datos terminológicas basadas en el conocimiento*. Málaga, España: Universidad de Málaga.

Piaget, J. Inhelder, B y Szeminska. (1966). *Subdivisión de áreas y el concepto de fracciones* (DIE-CINVESTAV-IPN trad.). México: CINVESTAV

Prieto, S. D. (1992). *La modificabilidad estructural cognitiva y el programa de enriquecimiento instrumental de R. Feuerstein*. Bruño: Madrid.

Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo - United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization – United Nations International Children's Emergency Fund - Banco Mundial. (1990). Declaración mundial sobre educación para todos y Marco de acción para satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje. Jomtién, Tailandia.

Quintana, E. (2003, 19 de septiembre). Contrastes educativos. *Reforma*, pp. 35.

Riviére, A. (1988), *La psicología de Vigotsky*. Recuperado el 16/11/2003, de: http:// e-h.uv.mx/publgilb.htm.

Rodríguez, C. A. (1996). Vigotsky, el enfoque sociocultural y el estado actual de la investigación cognoscitiva. *Revista Latinoamericana de Psicología*. Vol. 28 (3), 455-472

Rodríguez, C. A. (2004). *Enseñanza de estrategias de aprendizaje en matemáticas en niños de sexto año*. Reporte de experiencia profesional de maestría no publicado. UNAM. México.

Rogoff, B. (1990). *Aprendices del pensamiento*. España: Paidós.

Sánchez, E. (1994). *Aproximación al concepto de educación especial*. *Introducción a la educación especial*. España: Complutense.

Secretaria de Educación Pública. (2004). Infamación sobre el Sistema Nacional Educativo. En: http://www.sep.gob.mx

Secretaria de Educación Pública. (2002a). *Programa Nacional de Educación 2001-2006*. México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2002b). *Programa Nacional de fortalecimiento de la educación especial y la integración educativa*. México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2002c). *Cuadernos de integración educativa*. México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2002d). *Planes y Programas de Estudio de Educación Básica.* México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (2000). *Curso nacional de integración educativa. Programa Nacional de Actualización Permanente*. México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (1996). *Programa de Desarrollo Educativo 1995-2000.* México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. – Dirección de Educación Especial. (1994). *Proyecto general para la educación especial en México*. Cuadernos de Integración Educativa. No. 1. México: DEE/SEP.

Secretaria de Educación Pública. (1993). *Ley general de educación.* México: SEP.

Secretaria de Educación Pública. (1992). *La Matemática en la educación primaria. Documento del docente*. México: SEP.

Shuare, M. (1990). *La psicología soviética tal como yo la veo*. Moscú: Editorial progreso.

Shuare, M. (1996). Lev S. Vygotski: Nuevos Desarrollos. *Revista Latinoamericana de Psicología*. *28* (3), 559-567.

Tallízina, N. (1988). *Psicología de la enseñanza*. Moscú: Editorial Progreso.

Tallízina, N. (1994). *Los fundamentos de la enseñanza en la educación superior*. México: Ángeles editores.

Torres, J. A. (1999). *Educación y diversidad. Bases didácticas y organizativas*. Málaga: Aljibe.

Tudge, J. (2000). Vygotsky, la zona de desarrollo próximo y la colaboración entre pares: connotaciones para la práctica del aula. *Evaluación del factor preparación profesional. Antología de educación especia (pp. 86-115)*. México: SEP.

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization - Ministry of Education and Science Spain. (1994). *The Salamanca statement and framework for action on special needs education.* Salamanca, Spain, 7-10 June 1994. Paris: UNESCO

Vigotsky, S. L. (1979). *El Desarrollo de los Procesos Psíquicos Superiores*. Argentina: Grijalbo. (Trabajo original publicado en 1934)

Vigotsky, S. L. (1999). *Pensamiento y lenguaje*. (2a. ed.). Cuba: Editorial pueblo y educación. (Trabajo original publicado en 1934)

Vigotsky, S. L. (2001a). El problema de la conciencia (Bravo, J. M. trad.). En: Álvarez, A. y del Río, P. (Eds.) *Obras Escogidas. Tomo I* (pp.45-73). Madrid: Aprendizaje Visor. (Trabajo original inédito 1930)

Vigotsky, S. L. (2001b). Génesis de las Funciones Psíquicas Superiores (Kuper, L. trad.). En: Álvarez, A. y del Río, P. (Eds.) *Obras Escogidas. Tomo IIII* (pp.139-169). Madrid: Aprendizaje Visor. (Trabajo original publicado en 1931)

Weisstein, E. (2005). "Rational Number." En: MathWorld--A Wolfram Web Resource. En: http://mathworld.wolfram.com/RationalNumber.html.

Wertsch, J. (1984). *Vygotsky y la formación social de la mente*. España: Paidós.

Apéndice A

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN PSICOLOGÍA.

RESIDENCIA EN EDUCACIÓN ESPECIAL

MANUAL PARA EL PROFESOR:

LOS QUEBRADOS SIN QUEBRARSE LA CABEZA

UNA FORMA DIFERENTE Y EFECTIVA DE ENSEÑAR FRACCIONES A ALUMNOS DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA.

Alejandro Octavio Delgado Caballero
Aurora González Granados

JUNIO DE 2005

PRESENTACIÓN

Estimado profesor (a):

Todos los días, maestros y alumnos acudimos a las aulas a realizar nuestras actividades cotidianas y a veces, abrumados por la cantidad de trabajo, caemos en la repetición de rutinas, olvidándonos de buscar nuevas y mejores soluciones para lograr nuestro objetivo primordial.

El objetivo parece obvio: "hacer que los alumnos aprendan". Sin embargo, de esta afirmación a primera vista sencilla, se pueden derivar todo un mundo de preguntas que deberían guiar nuestro quehacer escolar: ¿Cómo hacer que nuestros alumnos aprendan?, ¿cómo motivar su participación?, ¿cómo sabemos que han aprendido, si después de unos días de descanso parecen haber olvidado todo?

Este manual pretende contestar en cierta medida a estas preguntas aplicadas a un caso en particular: *la enseñanza del concepto de fracción en alumnos de 6º de primaria*; el método que se presenta se basa en las características esenciales del concepto, las cuales sirven al alumno para reconocer y diferenciar los ejemplos de los contraejemplos, es decir, le permiten diferenciar los casos en los que realmente se está hablando de fracciones y su aplicación para la resolución de problemas específicos.

Normalmente estamos acostumbrados a leer libros, a revisar teorías y recibir información general sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos. Es decir, se nos dice el ***qué***; sin embargo, a la hora de tratar de aplicar todo este conocimiento en el salón de clases la tarea se vuelve difícil debido a que, o no tenemos acceso a información que nos diga el ***cómo***, o ésta se encuentra escrita en un lenguaje con alto contenido técnico-teórico.

No podemos negar que, a pesar de nuestra preparación profesional, la manera en la que nosotros mismos aprendimos ejerce una gran influencia en nuestra práctica docente, y en muchas ocasiones, aun cuando nos esforzamos por introducir nuevas técnicas de aprendizaje, la situación real con los alumnos no parece mejorar, pues en el fondo seguimos repitiendo el mismo esquema de enseñanza: un sistema mecánico basado sólo en el uso de la memoria más que en la capacidad reflexiva[1].

Este manual no pretender resolver todos los problemas a los que los maestros se enfrentan, pero sí intenta ser una guía que dirija el aprendizaje. Esperamos que las ideas contenidas en él le sean útiles en la vida escolar, ya que provienen de la conjunción entre una revisión y reflexión teórica seria, aunada a la aplicación en un contexto similar al que los maestros nos enfrentamos cotidianamente; esto nos permitió hacer una valoración de la forma en que se realizaban las actividades, con el fin de hacer cambios a partir de los incidentes o sucesos imprevistos que surgieron durante su aplicación. Es por ello que este manual está abierto a perfeccionarse con la experiencia que vayamos adquiriendo de forma concreta en el aula.

El cuadernillo está estructurado de la siguiente manera: en la introducción se da a conocer la manera en la que se llevó a cabo el trabajo que sustenta el programa, posteriormente se habla del concepto de fracción, de sus tipos y sus diferentes interpretaciones. En otro apartado, se trata de forma breve la metodología empleada para la construcción de las actividades. Finalmente, se describen de forma detallada las actividades propuestas para la enseñanza del concepto de fracción, fundamentadas con base en los dos primeros apartados. Dichas actividades son en gran medida una propuesta de trabajo, pues, como se menciona en líneas anteriores, siempre están abiertas a las nuevas ideas que, como profesores, podamos brindar para su enriquecimiento.

[1] Es importante señalar que aun cuando el aprendizaje no debe descansar en la memoria, ésta no debe ser "satanizada" sino incluso debe fomentarse su desarrollo de la misma manera que, por ejemplo, se fomenta el desarrollo del lenguaje.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En muchos momentos de la vida cotidiana empleamos fracciones casi sin darnos cuenta, por ejemplo cuando realizamos alguna compra y pedimos ¼ de queso, cuando recorremos ½ kilómetro hasta el parque, cuando pensamos en que nos falta la "mitad" del pasaje o al realizar un trabajo empleamos una llave de "media".

Además de los casos anteriores, todos los días escuchamos frases que no aparentan ninguna relación con los denominados "quebrados" que se enseñan en la escuela. Por ejemplo: "el pasaje subirá el 10% a partir de mañana", o "la probabilidad de ganarse la lotería es de una en un millón". En realidad, al utilizar estas frases estamos hablando de fracciones y todas estas distintas formas de referirnos a ellas, son precisamente las que generan confusión y aumentan la dificultad de poder enseñarlas o aprenderlas.

En diversas investigaciones (Clemente 2002; Linares, Salvador y Sánchez 1989 y Mancera 1992) se señala la dificultad que representa para los alumnos, tanto en la educación primaria, como en la secundaria, el aprendizaje y empleo de las fracciones. Estas afirmaciones concuerdan con los resultados de las dos evaluaciones realizadas por el autor del presente trabajo con un grupo de 6º de primaria[2] durante el ciclo escolar 2003-2004.

A tales alumnos se les aplicó un examen exploratorio de matemáticas en el cual, en una escala de 0 a 10, obtuvieron una calificación promedio de 5.1 y específicamente, en el apartado correspondiente a fracciones, obtuvieron un promedio de 2.5. Un año después se aplicó a estos mismos niños una prueba construida para determinar el manejo que los alumnos de sexto grado tienen de las fracciones y en ella obtuvieron una calificación promedio de 2.

Los resultados de estas dos evaluaciones plantearon dos problemas: por un lado, todo el grupo presentaba un bajo aprovechamiento académico en el área de matemáticas en general, que se reflejaba en forma más marcada en su dificultad para el aprendizaje de las

[2] Con dicho grupo se realizaron las prácticas que sustentan este manual, las cuales se llevaron a cabo durante el periodo 2003-2005. Los alumnos pertenecían a una escuela que se encuentra ubicada en la delegación Iztapalapa de la Ciudad de México.

fracciones, y por otra parte, se encontraron casos específicos de alumnos que, por las calificaciones obtenidas en las evaluaciones y de acuerdo con las observaciones realizadas en el grupo, requerían de apoyos especiales.

Todo lo anterior hizo que nos diéramos cuenta de que se necesitaba optar por el desarrollo de un programa incluyente, que tomara en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje y fuera coherente con el modelo de integración educativa que promueve la atención de los casos especiales dentro del grupo.

Por tal motivo, el objetivo de este manual es el trabajo en grupo como un factor importante que promueve la "apropiación"[3] del concepto de fracción. Conviene asegurarse, antes de la aplicación del programa, de que los alumnos cuenten con conocimientos previos al estudio del concepto. En nuestro caso, esto motivó la aplicación de un programa antecedente[4], cuyo fin era mejorar su nivel en conocimientos esenciales como las operaciones básicas, el manejo de áreas y el uso de estrategias cognitivas. Dicho programa consta de una serie de problemas matemáticos para que los alumnos se apropien del uso de las estrategias cognitivas al tiempo que los van resolviendo. Los problemas tienen un diferente grado de dificultad y para lograr solucionarlos, los alumnos cuentan con la ayuda del coordinador del programa a partir del proceso de mediación[5].

Tanto en el programa antecedente, como en este manual, se hace uso de la mediación por parte del coordinador de las actividades y de los compañeros de clase como guías del aprendizaje; de esta manera se ofrece además una atención mas personalizada a aquellos alumnos que tengan mayores problemas en la realización de las actividades.

Por otra parte, sabemos que los conceptos matemáticos en general son un tipo de concepto científico; por esta razón, en la elaboración de este programa recurrimos a los trabajos de dos investigadores que se han dedicado precisamente al estudio de la adquisición de los conceptos científicos: Galperin (1995) y Tallízina (1993). Ellos hacen un marcado énfasis

[3] En este manual se entiende por apropiación la forma en la que el niño hace suyos o interioriza los conocimientos, las habilidades y los valores desarrollados a lo largo del tiempo por la cultura con la que interactúa (cfr. Shuare, 1990).

[4] El programa utilizado fue una versión modificada de: "*Enseñanza de estrategias de aprendizaje en matemáticas en niños de sexto año*" (Rodríguez, 2004).

[5] En este trabajo utilizamos el término "mediación" para referirnos a cómo una persona que domina un conocimiento, utiliza preguntas, ejemplos, contraejemplos y otros tipos de ayudas, con el fin de que una persona que no lo domina sea capaz de realizar eficazmente una tarea relacionada con dicho conocimiento.

en la motivación para poder llevar a cabo el aprendizaje, ya que desde la perspectiva cultural histórica (base de los trabajos de estos autores) la interacción entre el proceso de aprendizaje y la emoción es innegable y fundamental. En otras palabras, Galperin y Tallízina consideran que la motivación es el verdadero motor del aprendizaje y por lo tanto siempre lo antecede. Sin motivación el aprendizaje carecería de un móvil que lo ponga en marcha. Por tal motivo, ésta debe promoverse a partir de diversos mecanismos, como son:

- El diseño de problemas adecuados a las capacidades de los alumnos y relacionados con su contexto
- El uso de materiales concretos que resulten atractivos para los alumnos
- La ayuda mutua y la competencia entre los integrantes del equipo
- El reconocimiento y eventualmente la premiación a los equipos que realicen mejor y mas rápido las actividades
- La variación en las formas de organización para el trabajo (individual, por equipos y grupal)

Así pues, una vez presentada la estructura de la investigación que sustenta este trabajo comencemos ahora por platicar un poco sobre **qué son las fracciones,** lo cual facilitará y hará más eficiente la enseñanza del concepto de fracción.

¿QUÉ SON LAS FRACCIONES?

Como mencionábamos al principio el concepto de fracción tiene muchas caras, lo mismo quiere decir un medio que la mitad o el 50% y en todos los casos estamos hablando de lo mismo, pero usando diferentes interpretaciones del concepto. Lo que solemos llamar fracción o quebrado, no es otra cosa que el resultado de dividir un número natural (mayor que cero) entre otro número natural (Weisstein, 2005).

Una vez que hemos definido nuestro objeto de estudio, es necesario considerar que hay dos tipos de unidades, más de una interpretación de lo que es un quebrado o fracción y varios tipos de fracciones. La Tabla 1 muestra en forma conjunta, tres formas de entender la fracción basadas en los planes y programas de estudio vigentes para los grados de quinto y sexto, así como también, algunas de las diversas interpretaciones del concepto de fracción, que han presentado autores como Linares, Salvador y Sánchez, (1989).

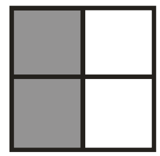
Tabla 1. Formas de entender la fracción

Tipo de unidades	Interpretación de la fracción	Tipo de fracción
Discretas	Como parte-todo	Propias
Continuas	Como cociente	Impropias
	Como recta numérica	Iguales a la unidad
	Como decimales	Mixtas
	Como porcentajes	
	Como expresión numérica (medida)	
	Como razón	

Tipos de unidades.

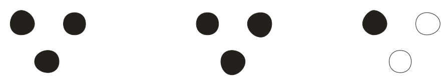
Cuando hablamos de una fracción, estamos haciendo referencia a una **unidad** que será repartida en **elementos o partes iguales**. De acuerdo con ello, una característica especial de la unidad es que puede estar constituida por un elemento o un conjunto de elementos. Según sea el caso, se hará referencia **a unidades continuas** o **discretas**.

Unidades continuas. La unidad asume el valor de un elemento, representa a una sola figura u objeto. Entre las representaciones más frecuentes se encuentran los diagramas circulares o rectangulares de dos dimensiones, en donde se toma una parte del todo, con la condición de que esa parte sea congruente o mida lo mismo que las otras. En el siguiente ejemplo se muestra un cuadrado dividido en cuartos, del que se sombrearon 2 cuartos.



Unidades discretas. La unidad esta constituida por un conjunto de elementos, los cuales al reunirse se constituyen como un "todo". En el siguiente ejemplo, cada grupo de tres círculos representa una unidad. Se muestran tres unidades en las que se han sombreado dos unidades y un tercio de la tercera.

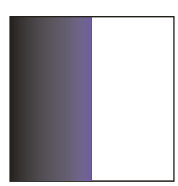
$2\frac{1}{3}$



Interpretaciones del concepto de fracción

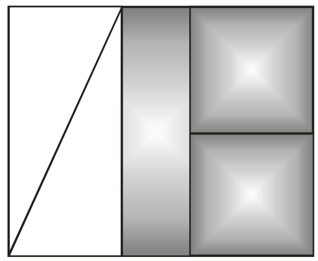
La fracción vista como una relación entre parte-todo

Esta interpretación es la más común, se presenta cuando un objeto o conjunto de objetos considerados como un «todo» o unidad se divide entre cualquier número de partes del mismo tamaño. En este caso, la fracción indica la relación que existe entre un número de partes y la unidad. Por ejemplo cuando dividimos un cuadrado en dos partes iguales y tomamos una, estamos hablando de 1/2 o de la mitad del cuadrado, donde el uno se conoce como numerador y el dos como denominador, el primero hace referencia a lo que se toma y el segundo a las partes en que se divide la unidad.

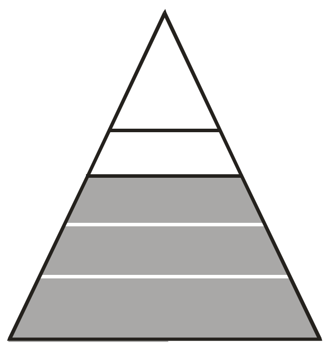


Cuando se aplica este concepto a situaciones de la vida cotidiana, es necesario explicar a los alumnos que no siempre es posible dividir un objeto sin que este pierda sus características funcionales. Por ejemplo si se desea dividir a un grupo de alumnos en mitades y se tiene un número impar de alumnos, no resulta posible dividir a uno de los alumnos en dos.

Otro aspecto importante a considerar en la fracción como relación parte-todo, es que la división se tiene que dar en “partes congruentes”, es decir, iguales en tamaño, lo que no necesariamente indica partes de la misma forma. Por ejemplo en la siguiente figura, la relación entre las partes sombreadas y el número de partes se puede representar como 3/5 (tres quintos) porque las cinco partes son del mismo tamaño, aunque tengan diferente forma.



Una figura, no necesariamente representa 3/5 (tres quintos), aunque se divida en cinco partes y se hayan sombreado tres de ellas, pues un requisito indispensable es que estas partes sean congruentes, es decir, del mismo tamaño. Por ejemplo, el siguiente triángulo no cumple con la condición de que las partes sean iguales y por tanto, NO representa 3/5.

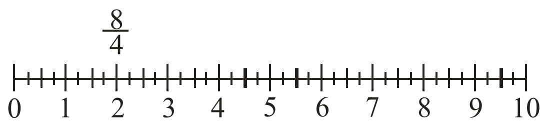


La fracción vista como cociente o división.

En esta interpretación se señala la división de un número natural entre otro, siempre y cuando ambos sean diferentes de cero; de tal modo que 8/4 es igual a 8 ÷ 4 e igual a 2. La comprensión de esta interpretación de la fracción varía en grado de complejidad cuando la unidad es discreta o continua, pues como señala Kieren (1980, citado en: Linares y col. 1988), al niño le resulta difícil entender que repartir tres objetos entre cinco personas es igual que repartir un objeto entre cinco y tomar tres partes.

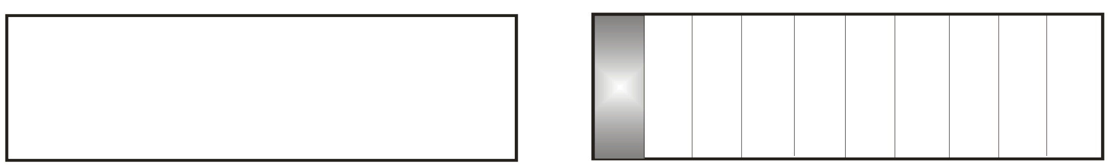
La fracción en la recta numérica

En este caso se hace referencia a la asociación que puede hacerse entre las fracciones y una recta dividida entre un número “X” de partes congruentes, en donde una fracción puede ser localizada en un punto situado sobre la recta. Por ejemplo: en una recta de 10 cm., en donde la unidad es igual a 1 cm., 8/4 se localizaría en el segundo centímetro, como puede verse en la figura de abajo.



La fracción vista como un número decimal

Esta interpretación establece una relación entre la interpretación de la fracción como parte-todo y nuestro sistema de numeración decimal. Por ejemplo, cuando se emplea la representación continua en la figura de un rectángulo, y se considera la unidad como un rectángulo que se divide en diez partes, en relación al todo o unidad cada una de las partes es una de diez, lo que es igual a 0.10, e igual a una décima.



Si cada “parte” (décima) la dividimos en otras diez partes, obtenemos “una de diez de una de diez”. 1 de 10 de 1/10 (una centésima)

La fracción vista como porcentaje

Otra interpretación de las fracciones es la que se refiere al porcentaje, en él asignamos de antemano el valor de nuestra unidad, la cual equivale a 100, por lo que en esta interpretación hablamos de una fracción con denominador 100, es decir $\frac{1}{100}$, donde el uno o numerador se sustituye por el porcentaje que se quiere obtener. Por ejemplo, si queremos saber a cuánto equivale el 50% de 40 alumnos, tenemos que tomar $\frac{50}{100}$, lo que simplificado es igual a $\frac{5}{10}$ e igual a $\frac{1}{2}$; lo que significa que el 50% de 40 alumnos es igual a $\frac{1}{2}$, lo que a su vez es igual a 20 alumnos. El mismo resultado se obtendría si en lugar de simplificar la fracción multiplicáramos el porcentaje o numerador por la cantidad de alumnos (50 x 40) y lo dividiéramos entre el denominador (2000÷100= 20) con lo cual obtendríamos el resultado directo, el 50% de 40 alumnos es igual a 20 alumnos.

Las fracciones vistas como una expresión numérica que expresa medida.

En este caso, las fracciones se asocian con unidades de medición como longitud, peso, tiempo, etc. Por ejemplo ¾ de metro, ½ kilo, ¼ de hora.

Fracción como razón

En este caso las fracciones se emplean para establecer una relación comparativa entre *dos unidades*, en vez de establecer una relación de la "parte" con el "todo" o "unidad". Por ejemplo, Si tenemos 10 dulces y queremos repartirlos entre 30 alumnos, tenemos entonces dos unidades, una de 10 y otra de 30, esto es igual a decir que 1/3 de los niños recibiría un dulce, lo que su vez significa que uno de cada 3 niños recibiría un dulce. Hay que recordar que 1/3 es una fracción equivalente a 10/30.

Unidad 1 = 10 dulces  Unidad 2 = 30 niños 

Niños a los que les tocarán dulces = 10/30 = 1/3

10 dulces =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

30 niños =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\frac{1}{3}$
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\frac{2}{3}$
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	$\frac{3}{3}$

Esto equivale a decir que:

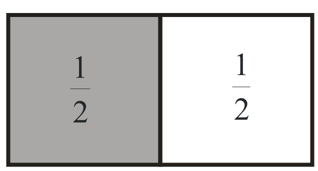
- ✓ Diez de cada 30 niños recibirá dulces
- ✓ Uno de cada tres niños recibirá dulces
- ✓ 10/30 de los niños recibirá dulces
- ✓ 1/3 de los niños recibirá dulces

Esta interpretación puede quedar más clara si comparamos unidades de medición distintas, por ejemplo, En una carrera de velocidad, se recorrieron 100 metros en 10 segundos. La primera es una unidad de longitud, 100 metros, la cual puede tomarse como un todo, en cuyo caso, sólo podría fraccionarse por unidades del sistema métrico decimal, (10 de los 100 metros fueron dominados por el corredor número 3). Sin embargo, al compararse con una unidad de tiempo (segunda unidad), no podemos decir que los 10 segundos sean una parte de los 100 metros. En este caso sólo podemos establecer una relación de comparación entre las dos unidades.

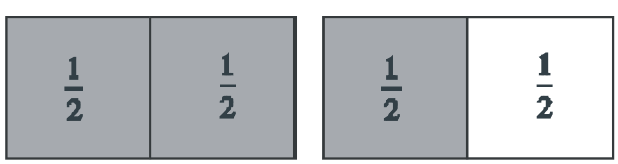
Tipos de fracción

Las fracciones pueden también diferenciarse con base en la relación que se presente entre la "parte" y la "unidad". Desde este punto de vista reciben el nombre de propias, impropias, iguales a la unidad y mixtas.

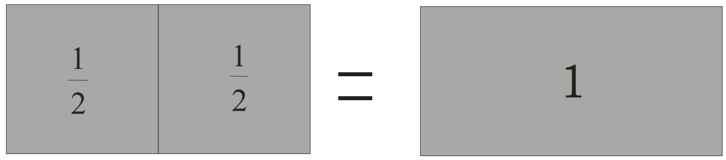
Fracciones propias. Son fracciones donde las partes que se toman (el numerador) son menores a la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad (denominador). Por ejemplo: 1/2.



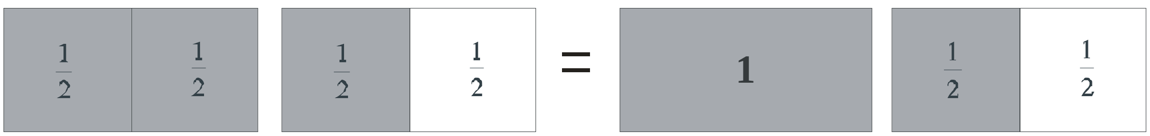
Fracciones impropias. Son fracciones, donde las partes que se toman (el numerador) sobrepasan a la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad (denominador). Por ejemplo: 3/2.



Fracciones iguales a la unidad. Son fracciones donde las partes que se toman (el numerador) igualan a la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad (denominador). Por ejemplo: 2/2 = 1.



Fracciones Mixtas. Al igual que en el caso de las fracciones impropias, las partes que se toman (el numerador) sobrepasan a la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad (denominador). Por ejemplo: 3/2 es igual a 1 ½.



¿Qué nos dice la teoría?

En este apartado se plantearán algunos principios básicos de la teoría que sustenta la aplicación del programa, a través de un formato de preguntas y respuestas. Para empezar queremos dar a conocer a los autores que han influido en la planeación y diseño del presente manual, para lo cual es necesario responder a:

¿Cuál es la teoría de la que parte nuestra propuesta?

Forma parte de la Perspectiva Cultural Histórica, iniciada y desarrollada por L. S. Vigotsky. En ella se basaron Leóntiev, Galperín y Tallízina para formular y desarrollar una teoría más específica denominada "teoría de la actividad", con el fin de explicar la manera en la que los niños se apropian de los conceptos científicos. Esta propuesta resulta adecuada para este caso, pues el concepto de fracción es un tipo particular de concepto científico.

¿Cómo se explica el proceso de apropiación del conocimiento?

Esta perspectiva plantea tres aspectos centrales que sirven como base para poder explicar la manera en la que el niño se apropia del conocimiento:

El primero de ellos es el ***aspecto social*** que se refiere al conocimiento humano como un producto social que se trasmite de un individuo a otro, o del adulto hacia el niño, por medio de la interacción entre ellos. El niño antes de entrar a la escuela cuenta ya con una serie de conocimientos que le ha transmitido no sólo la familia de procedencia, sino también, las personas que lo rodean, sus abuelos, sus tíos, sus primos, los amigos de sus familiares etc. Si por ejemplo, sus papás o sus tíos fueran dueños de una tortillería y el niño estuviera presente o la atendiera desde pequeño, como es el caso de varios de los alumnos con los que trabajamos, lo más seguro es que aprendería a pesar la masa o las tortillas, despacharía fácilmente los kilos o *medios kilos* que le pidieran y sabría también cobrar y dar cambio, entre otras muchas cosas.

El segundo, es el ***aspecto histórico***, el cual no sólo hace referencia a las características físicas que los seres humanos comparten como especie, sino también, a la herencia cultural a la que el individuo tiene acceso como parte de una comunidad. Al igual que en el caso anterior, en el que se ejemplificaba a los niños que vivían en un contexto en donde muchas de las actividades giraban en torno al sostén de la familia, la producción y venta de tortillas, la cultura establece en gran parte los contextos a los que tenemos acceso y cómo nos relacionamos con ellos. Por ejemplo, en el caso de los niños con los que trabajamos, la computación empieza a hacer acto de presencia, pocos niños tienen computadora en su casa e incluso entre los maestros no es muy familiar, por lo cual, el acercamiento y uso de la computadora es diferente, comparado con el de los niños de otras zonas urbanas, en donde la computadora es más común.

El tercer aspecto se refiere al papel central que juegan ***los instrumentos de mediación y la mediación del adulto*** en el desarrollo del niño y en su apropiación del conocimiento. Este aspecto será descrito a continuación de manera más detallada.

¿Qué son los instrumentos de mediación?

Los instrumentos de mediación son las herramientas mentales (signos y símbolos) que el niño utiliza para controlar su conducta, interpretar y entender el mundo, entre otras cosas. Dichas herramientas son una analogía de lo que ocurre con las herramientas que el hombre emplea para realizar trabajo físico. En este sentido, de la misma forma en la que el hombre aumenta su posibilidad de cargar piedras cuando emplea una carretilla en lugar de las manos, también los procesos psicológicos como el pensamiento o la memoria aumentan sus posibilidades biológicamente determinadas, si se emplean herramientas mentales como los signos, los cuales pueden ser tan simples como una marca hecha para ayudar a recordar algo, hasta signos más elaborados como la escritura. En este sentido cabe señalar el papel central del lenguaje como herramienta mental que cumple funciones de planeación, organización y autorregulación de la conducta y el aprendizaje.

Las herramientas mentales han sido construidas de manera social a lo largo de la historia del hombre y son trasmitidas al niño a través de la interacción social. De tal forma, el adulto cumple una función de mediador entre el niño y el mundo, de manera más específica, entre el niño y la cultura o entre el niño y el conocimiento desarrollado por la sociedad. El adulto en primera instancia, sirve como guía de la actividad del niño, al prestarle las herramientas mentales que él aún no posee, hasta que logra apropiarse de ellas y es capaz de utilizarlas por si mismo. Por ejemplo, cuando el niño aún no es capaz de dirigir su atención voluntariamente y el adulto le señala un objeto que puede ser de interés con una frase como: "Mira ese avión", está orientando la atención del niño hacia donde debe dirigirla, proceso que el niño interioriza o hace propio paulatinamente hasta que es capaz de dirigir su atención por si mismo.

¿Cómo se logra la apropiación del conocimiento según esta teoría?

La apropiación del conocimiento se logra mediante la interacción entre el individuo y el mundo. Sin embargo, para que exista una acción es indispensable, que exista también una necesidad que sea motivo de la acción y un objetivo que se pretenda alcanzar. La actividad es posible sólo cuando motivo y objetivo coinciden (Tallízina, 1994).

Tallízina (1994) señaló que la verdadera actividad se consigue cuando se logra motivar al alumno a través de la realización misma de la tarea, vinculando los fines individuales o motivación personal con los fines sociales, en este caso representados por el aprendizaje. De la misma manera, la motivación se consigue de manera más sencilla y natural cuando el aprendizaje logra vincularse a tareas socialmente útiles.

En este sentido, cualquier tarea o acto que emprende el niño comienza con una motivación y pasa por una planeación, organización, ejecución y verificación de la misma. Si el niño aún no tiene bien apropiadas algunas de las partes de la tarea, no podrá realizarla. En este caso, el adulto puede mediar entre el niño y la tarea a través de "ayudas" que lo guíen en alguna de sus partes, que orienten la planeación, busquen formas de organización diferentes, o generen dudas sobre la correcta realización de la misma.

¿De qué manera se guía la actividad del niño?

Otro punto que sobresale por su relación con la enseñanza-aprendizaje es la forma en que el adulto organiza y sistematiza la información que presentará al niño en el contexto educativo. En relación con ello, Tallízina (1994) describió tres métodos principales que se han empleado para guiar la actividad del niño con mayor o menor éxito.

El primero de ellos se caracteriza porque se presenta al alumno el problema sin darle datos o estrategias para su solución, ya que se espera que él mismo pueda descubrirlos por ensayo y error. Se piensa que de esta manera el alumno estará más motivado por la tarea y logrará un aprendizaje significativo.

El segundo tipo se caracteriza por el hecho de que al alumno se le ofrece desde el inicio todo un sistema completo y preelaborado de orientaciones o guías para la resolución del problema, de tal forma que basta con memorizar el procedimiento para que se dé el aprendizaje, pero tiene como desventaja el hecho de que dicho procedimiento no se puede aplicar a casos diferentes, por lo que se tiene que hacer un uso extensivo del aprendizaje memorístico.

El tercer método y el más efectivo, se caracteriza porque se enseña al alumno cuáles son las características ***"invariantes"*** del objeto de estudio, con el fin de que pueda apoyarse en ellas para orientarse en la solución del problema planteado en el momento y generalizar los procedimientos a todos los casos en los que estas invariantes son aplicables, logrando de esta forma la generalización. Este tercer método es el que sirvió de guía en la elaboración del presente manual.

¿Qué es una invariante?

Una invariante es aquello que siempre permanece en el concepto, que no varía. Por ejemplo en el caso de un círculo, podemos encontrar muchas características como son: el tamaño, el color, el grosor de la línea, el material con el que está trazada, etc., pero ¿qué es aquello que nunca cambia en una circunferencia? La respuesta es que ésta es siempre una curva cerrada en la que todos los puntos están a la misma distancia del centro. Si una parte de los puntos que la conforman estuviera a una distancia distinta del centro, dejaría de ser una circunferencia, aunque fuera una curva cerrada.

Tener conocimiento de las invariantes de un concepto sirve para poder guiar la actividad del alumno; retomando el ejemplo de la circunferencia, saber que todos sus puntos están a la misma distancia del centro sirve en primera instancia para no confundirla con otra figura geométrica como una elipse y, en segunda, para resolver problemas orientándonos a partir de las características que en el concepto nunca varían. Si, por ejemplo, al alumno se le diera la distancia que hay de un punto al centro y se le pidiera encontrar el diámetro total de la circunferencia, lo podría realizar fácilmente puesto que conoce que del centro al otro extremo de la circunferencia existe exactamente la misma medida.

No tener conocimiento de las invariantes del concepto frecuentemente conduce a conclusiones erróneas, como lo que sucedió entre un grupo de alumnos, en donde al presentarles un rectángulo, lo confundieron con un cuadrado sólo porque visualmente lo parecía. Esto, pese a que ya habían medido los cuatro lados del cuadrado y tenían conocimiento de que no todos sus lados medían lo mismo.

¿Qué implica la enseñanza bajo este concepto?

La enseñanza bajo este método consiste en presentarle al alumno diversas situaciones en donde estén presentes las invariantes, de tal forma que pueda reconocer el concepto estudiado, en contraposición con casos semejantes en donde no estén presentes las invariantes aunque el concepto parezca el mismo, como en el caso anterior de la confusión entre el cuadrado y el rectángulo.

¿Cuáles son las etapas de la enseñanza de conceptos científicos?

Tallízina (1994) señaló que la enseñanza de conceptos científicos debe presentarse de forma graduada, pasando por lo menos por tres etapas:

Etapa de la acción materializada. En ella se trabaja con objetos concretos para que el alumno experimente de manera directa la forma en que se aplican las invariantes a la solución del problema.

Etapa de la acción en el lenguaje hablado. Es cuando el alumno ya no requiere apoyarse en materiales concretos, pues ya es capaz de utilizar verbalmente las invariantes del concepto para la solución del problema.

Etapa de la acción a nivel mental. Es cuando ya no se requiere la verbalización, pues, en la solución del problema, las invariantes del concepto se utilizan mentalmente.

La información que se ha presentado hasta el momento, fue empleada en el diseño de las actividades sugeridas y debe tomarse en cuenta en la organización del trabajo para la realización de las actividades.

¿Cuáles son las invariantes del concepto de fracción?

Ahora que ya sabemos qué es una fracción y qué es una invariante, ha llegado la hora de señalar aquello que servirá como eje de nuestro trabajo en la enseñanza de fracciones, es decir *las invariantes del concepto de fracción*, aquellas características esenciales del concepto que nos hacen saber que nos referimos a una fracción y no a otra cosa, sin importar que estemos hablando del tipo de unidades discretas o continuas, en su interpretación como cociente o como porcentaje, del tipo de las propias o de las impropias, todas estas formas de entender el concepto de fracción guardan características comunes. Para el presente manual se utilizarán como invariantes las siete siguientes características:

1. **El objeto puede ser dividido.** En el concepto de fracción siempre se parte de una unidad que será dividida, si ésta no es susceptible de serlo entonces no se puede decir que se este hablando de una fracción.

2. **El objeto puede dividirse en las partes que uno quiera**. Esta invariante hace referencia al hecho de que cuando se habla de fracciones se parte de una unidad, sea ésta discreta o continua, la cual puede ser dividida en un número infinito de partes, aunque esto sólo ocurra en el plano de lo abstracto. Por ejemplo, si se tiene un conjunto de cinco gatos y se quiere la mitad de ellos, la invariante se cumple en el plano de lo abstracto porque la mitad es igual a 2.5 gatos, aunque en la realidad no se pueda partir a uno de éstos sin que pierda sus propiedades.

3. **Las partes tienen que ser iguales**. Cuando hablamos de una fracción, las partes en que se divide la unidad tienen que ser proporcionales, es decir del mismo tamaño, cuando esto no se cumple se habla de partes o pedazos, pero no de fracciones.

4. **En la repartición de la unidad no puede sobrar nada**. Comúnmente, cuando se divide en fracciones y sobra "algo", la invariante anterior no se cumple, porque las partes dejan de ser proporcionales, por lo que si la unidad es dividida en partes exactamente iguales es imposible que sobre "algo".

5. **Las partes de la unidad también se pueden considerar como un objeto independiente**. Una vez que la unidad se ha fraccionado, cada parte puede constituirse a su vez en un todo o unidad, por lo que puede volver a fraccionarse de forma independiente.

6. **Si se reúnen todas las partes vuelve a formarse el objeto**. Si se parte de la base de que las partes son congruentes y de que en una fracción no puede sobrar nada, al reunirse las fracciones estas deben de volver a constituirse en la unidad inicial.

7. **Las partes deben ser diferentes de cero**. Esto hace referencia a que no se puede repartir algo que no existe, si la unidad es igual a cero, no hay nada que repartir y por tanto tampoco nada que pueda fraccionarse.

LA ORGANIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD

¿Por dónde empezar?

Para poder comenzar a realizar las actividades se requiere formar un máximo de seis equipos con aproximadamente seis integrantes. Este criterio se basa en el hecho de que cuando hay demasiados alumnos en un mismo equipo se dificulta la participación de todos. Otros aspectos que se han tomado en cuenta son: facilitar el trabajo del coordinador de manera que pueda ayudar a todos los equipos y tener espacio suficiente en el pizarrón, pues éste será dividido en seis partes, para que al término de las actividades, representantes de cada equipo pasen a exponer sus resultados.

Antes de explicar a los alumnos el procedimiento por el cual se formarán los equipos, el profesor les hará saber que una vez formados, estos permanecerán con los mismos integrantes hasta que concluya el ciclo escolar, por esta razón, en su proceso de conformación los alumnos deberán colaborar y elegir muy bien con qué compañeros quieren trabajar.

Para la formación de equipos se seleccionarán a seis de los alumnos con un aprovechamiento académico “regular”, basándose para ello en el conocimiento que el profesor tenga del grupo. Posteriormente se solicitará al resto del grupo que elija con cuál de estos seis alumnos desea formar equipo, procurando que cada equipo quede conformado de manera homogénea, no sólo en cuanto al número de participantes, sino también en cuanto a la variabilidad del nivel académico de los mismos.

Una vez que estén conformados los equipos, los integrantes de cada uno de ellos elegirán un nombre para su equipo y el coordinador les asignará un número progresivo, siguiendo para ello el orden alfabético del nombre de los equipos. Esto con el fin de que en las actividades, el coordinador pueda sortear la participación de los equipos a través del uso de dados.

Se sugiere que al término de cada mes, el coordinador sume los puntos que hayan obtenido los equipos en cuánto a disciplina y aprovechamiento y entregue diplomas o alguna forma de reconocimiento en cada una de estas áreas, a los integrantes de los equipos ganadores.

¿Cómo trabajar las actividades?

La mayoría de las actividades están pensadas para ser trabajadas en equipo, sin embargo, en algunos casos el profesor puede trabajar las actividades de forma combinada, es decir, trabajar el ejercicio, primero, de manera individual y posteriormente pasar al trabajo por equipos, de hecho consideramos que esta es la forma ideal de trabajo.

Las actividades fueron diseñadas para trabajarse en periodos de tiempo de una hora y media. No obstante, algunas de ellas pueden llevarnos más tiempo. Considerando esto, la mayoría de las actividades han sido divididas en pequeños ejercicios, a partir de los cuáles el profesor podrá hacer una pausa en la aplicación de la actividad para continuarla en una sesión subsiguiente. A continuación se presentan los pasos a seguir en la forma de trabajo de las actividades:

1. Equipos de trabajo.

Se ubica a los alumnos por equipos de trabajo, según fueron establecidos en la sesión de organización del grupo.

2. Recordatorio de las reglas y las invariantes de la fracción

Al inicio de la sesión, se recordará a los alumnos las reglas que deben seguir durante las actividades y la manera en que se llevará el control de las mismas. También es importante especificar a los alumnos el uso de las invariantes en la resolución de las actividades. Esto se realizará las veces que sean necesarias, hasta estar seguros de que los alumnos tienen bien asimilada la forma de trabajo.

3. Trabajo individual

En los casos en que se requiera la participación individual, el profesor explicará la actividad que se va a realizar ese día, posteriormente dará a los alumnos los materiales necesarios y les planteará un problema o actividad, dándoles un plazo para su solución, que variará en función de su dificultad (aproximadamente 30 minutos).

Mientras tanto, el profesor pasará entre los equipos brindando ayudas de manera individual, dando preferencia a los alumnos que presenten mayores dificultades o hayan tenido un menor dominio de las invariantes en ejercicios previos. A través de las ayudas guiará la actividad de los alumnos, pero no les dará los pasos o procedimientos que lleven directamente a la solución del problema y menos aún dirá la solución, aún cuando los alumnos no logren encontrarla en el plazo establecido para el trabajo individual; en lugar de ello, el profesor planteará preguntas que recuerden al alumno las invariantes del concepto de fracción y/o su uso, para que centre su atención en algún dato que haya olvidado considerar, o le permita relacionar el problema con sus conocimientos previos o sus experiencias cotidianas.[6]

4. Trabajo por equipo

Transcurrido el tiempo establecido, el profesor entregará una hoja con el ejercicio escrito a cada equipo, en ella los equipos anotarán los procedimientos y resultados realizados por el equipo y asignará un tiempo variable (alrededor de 30 minutos), para que los alumnos compartan sus dudas y alternativas de solución al interior de los equipos, con el fin de obtener un consenso en la respuesta.

Durante el trabajo en equipo, el profesor brindará a cada equipo el mismo tipo de ayuda que durante el trabajo individual, poniendo especial atención en aquellos equipos o alumnos que hayan presentado mayores dificultades en las sesiones anteriores, pero evitando dar la solución.

Antes de concluir la actividad por equipos, el profesor se dará tiempo para separar el pizarrón en tantas partes como equipos haya, para que pueda ser utilizado en el trabajo grupal.

5. Trabajo grupal

Una vez concluido el plazo para el trabajo en equipos, el profesor solicitará que un representante de cada equipo pase al pizarrón a escribir y explicar sus procedimientos y propuestas de solución a la actividad.

Mientras los alumnos pasan a escribir al pizarrón, el profesor puede ir revisando los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos, esto le resultará útil debido a que en esta parte del trabajo se pueden presentar diferentes situaciones que el profesor puede aprovechar para organizar la exposición de los equipos. El profesor debe evitar situaciones que provoquen que el grupo pierda interés por la exposición de los equipos. Por ejemplo, si todos los equipos tienen los mismos procedimientos y resultados no es necesario que pasen todos, lo deseable es que pase sólo uno y que los demás equipos comenten la exposición. En la Tabla 2 se describen algunas de las situaciones que pudieran presentarse y que pueden ayudar al maestro a decidir sobre la participación de cada uno de los equipos.

Durante las exposiciones, el profesor guiará la participación de los alumnos para que en forma grupal se brinde retroalimentación a todos los equipos respecto a las propuestas de solución y el nivel de efectividad de los procedimientos utilizados.

[6] En cada una de las actividades propuestas en este manual se presentan algunas sugerencias que el coordinador puede emplear para llevar a cabo la mediación.

Tabla 2. Formas de dirigir la exposición de los diferentes equipos ante el grupo

# de Equipos	Tipo de Respuesta	Procedimientos empleados	Organización de trabajo grupal
Todos	Correcta	Iguales	Sólo un equipo expone y se pregunta a los demás si existe otra solución.
Todos	Correcta	Diferentes	Se inicia con la exposición del equipo que tiene el procedimiento menos adecuado, hasta llegar al equipo con la mejor solución. Es importante enfatizar que hay diferentes alternativas de solución para llegar a la respuesta correcta, pero que unas son mejores que otras.
Uno o más equipos	Correcta	Iguales	Se inicia con los equipos que tienen un mayor número de errores, hasta llegar al o a los equipos que encontraron la solución y se pregunta si hay otra solución posible.
Uno o más equipos	Correcta	Diferentes	Se inicia con los equipos que tienen un mayor número de errores, posteriormente se incluye a los equipos que encontraron la solución pero cuyo procedimiento no fue el más adecuado hasta llegar a la mejor solución. Es importante enfatizar que hay diferentes alternativas de solución para llegar a la respuesta correcta, pero que unas son mejores que otras.
Todos	Incorrecta	Iguales o diferentes	Se guiara al grupo a través de preguntas y ejemplos para corregir los procedimientos empleados y llegar a la respuesta correcta.

Al finalizar su exposición, se otorgarán puntos de acuerdo a los criterios establecidos en la tabla de aprovechamiento y se les harán dos preguntas sobre la forma en que aplicaron las invariantes, si el equipo logra contestar correctamente se le puede otorgar un punto extra o será considerado para evaluar su exposición. Para esta parte de la actividad se dará un plazo de 30 min.

¿Cuáles son las características de las actividades?

Antes de comenzar a describir las características generales de las actividades de este manual es necesario señalar "la excepción a la regla", es decir, la actividad que difiere con respecto a las demás. Dicha actividad corresponde al recordatorio de las estrategias cognitivas para la resolución de problemas matemáticos[7]. Con esta actividad se pretende facilitar a los alumnos, por medio de la aplicación de las estrategias, la resolución de las subsiguientes actividades. A su vez, esta actividad puede emplearse después de un periodo en el que el programa haya sido suspendido, como por ejemplo las vacaciones o la suspensión de actividades por días festivos.

Las otras 23 actividades se han diseñado con base en las siguientes características:

- **Recordatorio constante de las invariantes.** Es importante, sobre todo en las primeras sesiones o cuando se haya suspendido el programa por periodos prolongados como las vacaciones, explicar a los alumnos qué son las invariantes del concepto de fracción y cómo pueden utilizarlas para reconocer cuándo se está hablando o no de una fracción. De forma adicional es imprescindible que el alumno las tenga muy presentes, por lo que es necesario que el alumno tenga tarjetas individuales con cada una de las invariantes, o que se hagan carteles con ellas y se coloquen en el salón, de tal forma que el profesor al inicio de cada actividad pueda hacer referencia a ellas y a su uso para la resolución de la tarea. En la Figura 2 se muestra un ejemplo de cómo pueden elaborarse estas tarjetas o carteles.

Figura 2. Tarjeta con las invariantes del concepto de fracción.

[7] Para mayor información referirse a la versión modificada de Rodríguez (2004)

- **Uso de las invariantes para diferenciar entre ejemplos y contraejemplos.** De forma constante se deben utilizar las invariantes para que el alumno diferencie entre cuáles sí son fracciones y cuáles no lo son. Para ello el profesor podrá hacer preguntas como: ¿Todas las partes del objeto dividido son iguales?, si no son iguales ¿esta cumpliendo con todas las invariantes del concepto de fracción?
- **Actividades con carácter lúdico, relacionadas con su vida cotidiana.** Todas las actividades han sido diseñadas tomando como base su aspecto lúdico, pero con un objetivo educativo, además se han utilizado situaciones de su entorno cotidiano, desde actividades que tienen que ver con su contexto, hasta retomar eventos como los días festivos.
- **Uso de materiales llamativos, concretos y manipulables.** Con respecto a los materiales se ha optado por utilizar cosas que a los alumnos puedan llamarles la atención, como figuras con personajes de moda o algunos juegos. Lo común en todos ellos es que los alumnos pueden manipularlos y emplearlos como ayuda para la resolución de las actividades.
- **Adecuación de los niveles de dificultad con respecto a las capacidades de los alumnos.** Se ha intentado que las actividades sean lo suficientemente complejas para que motiven a los alumnos para resolverlas, pero que no sean tan difíciles que los frustren y hagan perder el interés.
- **Variación de los materiales, las interpretaciones de la fracción, los niveles de dificultad y la forma de presentación de los problemas.** Con el fin de que los alumnos no se cansen de los materiales o de la revisión del tema, se ha procurado variar el uso de los mismos y espaciar la revisión de las interpretaciones, además se ha procurado partir de problemas sencillos, pero ir incrementando el nivel de dificultad conforme avanza el programa.

Además de las características señaladas, las actividades han sido organizadas bajo los siguientes criterios:

- **Nombre de la actividad**
  - **Objetivos**
  - **Materiales**
- **Descripción de la actividad**
- **Planteamiento del problema**
- **Sugerencia de mediación**
- **Hoja de respuestas**

Tomando en cuenta los aspectos mencionados, daremos paso a la descripción de las actividades que podemos retomar, para dirigir el proceso de apropiación del concepto de fracción.

¿Qué pasa con la disciplina y la evaluación del aprovechamiento de los equipos?

Con respecto a la disciplina es conveniente establecer reglas positivas desde las primeras sesiones de trabajo. Para conseguir este objetivo, el profesor elaborará un cuadro dividido en dos secciones, una para aprovechamiento académico y otra para disciplina. En la parte correspondiente a la disciplina se anotarán las reglas que deben seguir los equipos. El profesor será el encargado de explicar a los alumnos en que consisten estas reglas, además de que por el cumplimiento de cada una de ellas se les otorgará un punto, el cual será registrado al finalizar la sesión de trabajo. Los puntos obtenidos por cada equipo se sumarán al fin de mes y al equipo ganador se le otorgará un diploma.

En la parte correspondiente al aprovechamiento se anotarán los criterios a evaluar, los cuales deben ser explicados a los alumnos por el profesor. Para determinar la puntuación, el profesor puede basarse en el trabajo grupal que realizan los equipos como parte final de las actividades. Las puntuaciones obtenidas por los equipos serán registradas al término de cada sesión y al igual que en la tabla de disciplina, los puntos obtenidos por cada equipo se sumarán al fin de mes y al equipo ganador se le otorgará un diploma. En la figura 1 se muestra un ejemplo del cuadro de evaluación y disciplina.

Evaluación de Abril

Suma de Puntos	Equipos	Disciplina				
		Comunicación	Conducta	Orden	Materiales	Limpieza
Fecha						
	Cupidos					
	Las chicas y el chico black					
	Dark Shark					
	Black White					
	Los delfines blancos y el tiburón que ataca					
	Los tramposos					

Suma de Puntos	Equipos	Aprovechamiento				
		Invariantes	Trabajo	Procedimientos	Exposición	Resultado
Fecha						
	Cupidos					
	Las chicas y el chico black					
	Dark Shark					
	Black White					
	Los delfines blancos y el tiburón que ataca					
	Los tramposos					

Figura 1. Ejemplo de cuadro de evaluación.

Los criterios de evaluación en cuanto a la disciplina pueden ser los siguientes:

- ✓ **Comunicación**. Hablar con un volumen de voz normal, por turnos y con respeto.
- ✓ **Conducta.** Evitar discusiones y conductas violentas.
- ✓ **Orden.** Evitar juegos y otras distracciones del trabajo.
- ✓ **Materiales.** Manejar el mobiliario y demás materiales escolares en forma adecuada.
- ✓ **Limpieza.** Mantener limpio su lugar de trabajo.

Para el caso del aprovechamiento escolar, es importante considerar los siguientes criterios:

- ✓ **Invariantes.** Uso de las invariantes necesarias para cada tarea.
- ✓ **Trabajo**. Participación en el trabajo individual y por equipos en los tiempos asignados.
- ✓ **Procedimientos.** Uso de operaciones y procedimientos correctos para la ejecución de las tareas.
- ✓ **Exposición.** Explicación adecuada de los procedimientos y resultados obtenidos, al resto del grupo.
- ✓ **Resultado**. Resultado correcto.

Además, para la evaluación se sugiere llevar un registro continuo de las actividades realizadas de manera individual y por equipos, para lo cual se puede emplear la técnica de portafolios. Esta técnica consiste en destinar una carpeta por cada alumno o equipo, en donde se incluyan todos los trabajos que los alumnos vayan realizando. Estos trabajos serán revisados por el profesor y les hará las anotaciones que considere pertinentes. El profesor puede designar tiempos específicos para que cada alumno o equipo pueda revisar su carpeta y de este modo ver sus avances y evaluar la forma en que han realizado su trabajo. Estos momentos, pueden servir para que el profesor dé retroalimentación y juntos reconozcan las fortalezas y debilidades del alumno o de los equipos.

ACTIVIDADES DEL PROGRAMA

Actividad 1. Recordatorio de las estrategias cognitivas

Objetivo: Recordar a los alumnos el uso de las estrategias cognitivas para el llenado de las hojas de respuestas de los ejercicios que resuelvan en las siguientes sesiones.

Materiales para la primera parte.

Lámina de estrategias cognitivas de 50 x 65 cm.
Un ejemplo negativo y uno positivo del empleo de las estrategias cognitivas.
Hojas.

Descripción de la actividad

Al principio de la actividad, se pegará al lado del pizarrón una lámina con las estrategias cognitivas, como la que se muestra a continuación.

Estrategias Cognitivas

- **Selección.** Con esta estrategia se separan o resaltan las ideas principales, para distinguirlas de la información que no es necesaria para resolver un problema.
- **Organización**. Esta estrategia consiste en acomodar de forma separada y ordenada los datos, las operaciones y los resultados. Esto nos sirve para entender más fácilmente lo que hicimos para solucionar el problema.
- **Elaboración.** Se trata de recordar lo que hemos aprendido en la escuela, para

Las estrategias cognitivas se leerán en voz alta al grupo. Posteriormente, se comentará su uso a través del ejemplo del reparto de alimentos realizado en "la fiesta" con la que se iniciaron las actividades del programa.

El profesor partirá de una pregunta que lleve al grupo a recordar dicha actividad:

"¿Recuerdan que al principio del curso trajimos un "pastel" (o lo que sea que se haya utilizado para la actividad) y lo repartimos entre todos nosotros?"

En adelante hará preguntas dirigidas a cualquiera de los equipos de manera que cada uno de ellos tenga la oportunidad de participar.

"¿Se acuerdan de qué sabor era?

¿Estaba sabroso?

¿Qué forma tenía?

¿De qué color era?

¿Cuáles eran sus medidas?

¿Entre cuántos se repartió?"

En el caso de que alguno de los equipos no pudiera responder la pregunta que le toca, el profesor se dirigirá al resto de los equipos para saber si alguno la puede responder y en una última instancia, será él quien la conteste.

Retomando los datos que proporcionaron los alumnos, se escribirá en la parte superior del pizarrón el problema, como se muestra a continuación (los espacios en blanco deben ser llenados por el profesor de acuerdo con los datos que correspondan a la actividad, tal como se haya realizado):

El día _________________ el grupo ______________ comió un ___________ que tenía forma rectangular y medía 40 x 36 cm. El ____________se repartió entre 40 personas. ¿De qué tamaño tuvieron que ser partidos los pedazos para que a todos les tocara la misma cantidad?

Abajo del problema, el profesor escribirá los resultados de forma incompleta, para ilustrar un ejemplo negativo, en el que no se utilizan las estrategias cognitivas. El ejemplo puede ser como se muestra a continuación:

Ejemplo negativo

36:10 = 3.5
40:4 = 10
8
5
40

Esas eran las medidas que deberían tener cada uno de los pedazos de pastel.

Posteriormente, repartirá a cada equipo una hoja con las siguientes preguntas:

¿Quién realizó el problema?

¿Se seleccionaron las ideas principales?

¿Cuáles son los datos del problema? ¿Se escribieron por separado?

¿Con los datos que hay en el pizarrón, se puede explicar y decir la respuesta al problema?

¿Qué operaciones se utilizaron para resolver el problema? ¿Se escribieron todas las operaciones? ¿Se especificó su signo?

¿Las operaciones que se utilizaron fueron las adecuadas? ¿Se resolvieron correctamente?

¿Cuál fue la solución que se dio al problema? ¿La solución fue correcta?

¿Se escribió el resultado por separado? ¿Estaba completo el resultado?

Posteriormente, se preguntará a los alumnos si con los resultados escritos en el pizarrón, pueden dar respuesta a las preguntas de la hoja que se les entregó, y se les pedirá que por equipos vayan completando la información del pizarrón, hasta que ésta sea suficiente para responder a todas las preguntas, de tal forma que al final de la actividad, en el pizarrón quedará ilustrado un ejemplo positivo del uso de las estrategias cognitivas.

Actividad 2. La fiesta

Objetivos: Motivar el interés por las fracciones a través de una actividad recreativa en la que se requiere hacer uso de ellas.

Ejemplificar a los niños las invariantes del concepto de fracción a través del reparto de alimentos.

Materiales:

Pastel u otro alimento de forma rectangular de 40 X 36 centímetros.
12 litros de chocolate u otra bebida.
Formatos de respuesta para el reparto por equipos del pastel
Formatos de respuesta para el reparto por equipos del chocolate transmites
Cartulinas de 40 x 36 cm. (1 por equipo participante en el reparto del pastel)
Tijeras para papel (1 por equipo participante en el reparto del pastel)
Reglas (1 por equipo participante en el reparto del pastel)
Cuchillo o palita pasteleros
Servilletas de papel
Vasos con capacidad igual o mayor a 300 ml. (40 vasos por equipo participante en el reparto del chocolate)
Recipiente con escala de 1 litro (1 por equipo participante en el reparto del chocolate)
Recipientes con capacidad para 12 litros (1 por equipo participante en el reparto del chocolate)
Dados

Descripción de la actividad:

Esta actividad se realizará en dos partes, la mitad de los equipos trabajará con el ejercicio del pastel y la otra mitad con el del chocolate. Mediante el reparto de papeles con la inscripción “pastel” o “chocolate” cada equipo podrá elegir al azar una de las dos actividades. Como una sugerencia alterna, también pueden usarse los dados para la elección de la actividad.

Reparto del pastel.

Esta parte del problema se entregará a la mitad de los equipos. Con el fin de que los alumnos puedan simular un reparto con materiales concretos, se hará entrega a cada uno de los equipos de una cartulina de 40 x 36 cm., regla y tijeras.

Planteamiento del Problema

En la fiesta del día de hoy vamos a repartir un pastel que mide 36 X 40 centímetros entre 40 personas. ¿Qué necesitamos hacer para que a todos nos toque un pedazo del mismo tamaño? ¿Cuánto debe medir de largo y cuánto de ancho cada una de las 40 partes?

Sugerencias para la mediación

Para guiar la actividad, el profesor puede hacer a los equipos preguntas como las siguientes:

¿Cómo podemos dividir la cartulina, para obtener cuarenta pedazos del mismo tamaño?

¿Sabemos cuánto mide la cartulina?

¿Sabemos entre cuántos hay que repartirla?

¿Cómo se escribe eso con números?

¿Hay alguna (s) operación (es) matemática (s) que permita (n) dividirla de manera exacta?

Los alumnos deben usar la hoja de respuestas para anotar operaciones y resultados.

Existen varias maneras en que se puede dividir la cartulina para obtener 40 partes iguales. La más sencilla es dividir el lado que mide 40 cm., en 10 partes de 4 cm., y el lado que mide 36 cm., en 4 partes de 9 cm. Otra forma es realizar un corte inverso al anterior. La parte que mide 40 cm. dividirla en 4 partes de 10 cm. y el lado que mide 36 cm. dividirlo en 10 partes de 3.6 cm. cada una. En caso de que los alumnos no logren imaginar los procedimientos, se les puede sugerir que hagan un dibujo o utilicen la cartulina que se les proporcionó para hacer ensayos con dobleces. De cualquier manera es conveniente que hagan las operaciones necesarias para obtener el resultado exacto.

Una tercera forma de realizar la división es obtener el área total del pastel multiplicando la base de 40 cm. por la altura de 36 cm. lo que da como resultado un área de 1440 cm^2. Al dividir el área resultante entre la cantidad de partes que se quiere obtener (40) se tiene como resultado 36 cm^2. Luego tenemos que buscar un número que multiplicado por otro nos de los 36 cm^2. Los más obvios son 6 x 6 y 4 x 9. Estos números nos indican los centímetros en que tendrán que ser divididas cada una de las porciones.

En caso de que los alumnos intenten hacer divisiones por lado, es necesario inducirlos a que reconozcan que la multiplicación de ambos divisores, debe dar 40 y los dividendos deben ser las medidas de cada lado. En caso de que intenten hacerlo por la superficie total, sería conveniente ayudarlos a recordar la fórmula del área del rectángulo.

Cuando los alumnos hayan obtenido la solución al problema planteado y anotado sus datos, operaciones y resultado en la hoja de respuestas, harán la explicación y representación gráfica en el pizarrón y posteriormente el profesor repartirá el pastel conforme a la solución dada por los alumnos.

Reparto del chocolate

Esta segunda parte del problema se entregará a la otra mitad de los equipos. Con el fin de que los alumnos puedan simular un reparto con materiales concretos, se hará entrega a cada uno de los equipos de un recipiente con escala de 1 litro, 1 recipiente con capacidad igual o mayor a 12 litros, 40 vasos con capacidad mayor a 300 mililitros y agua.

Planteamiento del Problema

En la fiesta del día de hoy vamos a repartir 12 litros de chocolate entre 40 personas. ¿Qué necesitamos hacer para que a todos nos toque una porción con la misma cantidad de chocolate? ¿Cuánto chocolate le tocará a cada una de las cuarenta personas?

Sugerencias para la mediación

Para guiar la actividad el profesor puede hacer a los equipos preguntas como las siguientes:

¿Sabemos cuánto chocolate tenemos?

¿Sabemos entre cuántas personas hay que repartirlo?

¿Cómo podemos dividir los doce litros de chocolate para obtener cuarenta porciones con la misma cantidad?

¿Cómo se escribe eso con números?

¿Hay alguna (s) operación (es) matemática (s), que permita (n) dividirlo de manera exacta?

En caso necesario, habrá que inducirlos a recordar cuántos mililitros tiene un litro. La forma más simple de resolver este problema consiste en convertir los 12 litros en mililitros (multiplicando 12 x 1,000) y dividir los 12, 000 mililitros entre las 40 personas, lo que da como resultado que a cada una de las personas les corresponden 300 mililitros.

Cuando los alumnos hayan obtenido la solución al problema planteado y anotado sus datos, operaciones y resultado en la hoja de respuestas, harán la explicación y representación gráfica en el pizarrón y posteriormente el profesor repartirá el chocolate conforme a la solución dada por los alumnos.

HOJA DE RESPUESTAS PARA EL REPARTO DEL PASTEL.

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema: En la fiesta del día de hoy vamos a repartir un pastel que mide 36 X 40 centímetros entre 40 personas. ¿Qué necesitamos hacer para que a todos nos toque un pedazo del mismo tamaño? ¿Cuánto debe de medir de largo y cuánto de ancho cada una de las 40 rebanadas?

Operaciones y/o dibujos.

Resultado: A cada persona le tocará ____de pastel.

HOJA DE RESPUESTAS PARA EL REPARTO DEL CHOCOLATE.

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

En la fiesta del día de hoy vamos a repartir 12 litros de chocolate entre 40 personas. ¿Qué necesitamos hacer para que a todos nos toque una porción con la misma cantidad de chocolate? ¿Cuánto chocolate le tocará a cada una de las cuarenta personas?

Operaciones y/o dibujos.

Resultado: A cada persona le tocará ______________________________________de chocolate.

Actividad 3. La fiesta

Objetivos: Motivar el interés por las fracciones a través de una actividad recreativa en la que se requiere hacer uso de ellas.

Ejemplificar a los niños las invariantes del concepto de fracción a través del reparto de alimentos.

Materiales:

Pastel u otro alimento de forma rectangular de 40 X 36 centímetros.
12 litros de chocolate u otra bebida.
Formatos de respuesta para el reparto por equipos del pastel
Formatos de respuesta para el reparto por equipos del chocolate
Cartulinas de 40 x 36 cm. (1 por equipo participante en el reparto del pastel)
Tijeras para papel (1 por equipo participante en el reparto del pastel)
Reglas (1 por equipo participante en el reparto del pastel)
Cuchillo o palita pasteleros
Servilletas de papel
Vasos con capacidad igual o mayor a 300 ml. (40 vasos por equipo participante en el reparto del chocolate)
Recipiente con escala de 1 litro (1 por equipo participante en el reparto del chocolate)
Recipientes con capacidad para 12 litros (1 por equipo participante en el reparto del chocolate)
Dados

Descripción de la actividad:

Para inducir a los niños a reconocer qué es una invariante, se harán algunas preguntas, como las siguientes:

"¿Conocen los dados? ¿Qué son? "

El profesor presentará a los alumnos un par de dados, con el fin de que los alumnos puedan ver de manera directa sus características.

"¿Cuáles son sus características principales?"

Conforme los alumnos vayan mencionando las características, el profesor las irá anotando en el pizarrón. Es necesario asegurarse de que los niños mencionen las invariantes del concepto de dado (seis lados, forma cúbica, y puntos en cada cara que van del uno al seis). De no ser así, el profesor hará preguntas muy dirigidas para que las mencionen. Posteriormente el profesor dirigirá la actividad para encontrar cuáles son las características esenciales del dado, por ejemplo:

"Aquí tenemos muchas características y hay que escoger sólo las principales. ¿Se acuerdan de la estrategia de selección que empleamos para resolver problemas? Pues así como antes necesitábamos diferenciar las ideas principales del problema, de las que eran menos importantes o no eran necesarias para resolverlo, ahora queremos saber cuáles son las características principales que realmente comparten todos los dados”.

Con base en las anotaciones hechas en el pizarrón, el profesor ira eliminando las características secundarias del concepto, dejando solamente las invariantes, a través de preguntas como:

¿Realmente es importante esa característica?

¿Si el dado fuera de otro color o tamaño dejaría de ser dado?

Cuando haya quedado en el pizarrón únicamente lo esencial, el profesor hará ver que son precisamente esas características las que siempre permanecen, de tal forma que sirven para identificar al concepto.

Una vez que los alumnos hayan comprendido lo que es una invariante, se les explicará que se va a trabajar con fracciones a lo largo del curso y para ello es muy importante conocer primero cuáles son las características esenciales o invariantes de las fracciones. Para ello se hará entrega a los alumnos de las tarjetas con las invariantes del concepto de fracción y se les pedirá que discutan en equipo el significado de cada invariante.

Posteriormente, se discutirán las ideas generadas por cada equipo con el resto del grupo, tratando de rescatar las ideas que más se acerquen al significado de las invariantes.

Con el fin de esclarecer mejor a los alumnos, cuáles son las invariantes del concepto de fracción, se pueden emplear preguntas relacionadas con el reparto del pastel, realizado en la actividad “la fiesta”, como las siguientes:

Invariante	Preguntas
El objeto puede ser dividido	¿Recuerdan qué pasó cuando repartimos el pastel? ¿El pastel se podía dividir? ¿Cuál era el todo y cuáles los elementos separables?
El objeto puede dividirse en las partes que uno quiera	¿Entre cuántas personas se dividió el pastel? ¿Podría haberse repartido entre más o menos personas? ¿Hay algún número de personas entre el cual no pudiera repartirse?
En la repartición del objeto no puede sobrar nada	Cuando fraccionamos el pastel entre las 40 personas, de tal manera que a cada quien le tocara un pedazo del mismo tamaño, ¿sobró algo? En ese caso ¿cuál era el todo? ¿Cuáles eran las partes?
Las partes tienen que ser iguales	¿Recuerdan cuando escribimos la fracción que representaba el número de partes en que se repartió el pastel? De acuerdo con esa representación ¿qué porción correspondía a cada quien? ¿Esto quería decir que a alguien le tocaba más que a otro? ¿El cuarentavo de alguien era mayor que el de otro?
Las partes también se pueden considerar como un objeto independiente	¿Qué hubiera pasado si alguien hubiera decidido compartir con otra persona la mitad de su pastel? ¿En ese caso cuál sería el todo? ¿Cuáles serían las partes? ¿Cada una de las partes puede volver a dividirse (fraccionarse)?
Si se reúnen todas las partes vuelve a formarse el objeto	¿Y si todas las rebanadas de pastel se vuelven a reunir, volverían a formar el todo? ¿Reunir los cuarenta cuarentavos es igual a volver a tener todo el pastel?
Las partes deben ser diferentes de cero	¿Si no tuviéramos ningún pastel, podríamos repartirlo? ¿Podríamos haber repartido nuestro pastel entre 0 personas?

En cada caso es necesario relacionar las respuestas de los alumnos y explicaciones del profesor con las invariantes del concepto, con el fin de asegurarse de que los alumnos comprendan el significado de cada una de ellas.

Actividad 4. Recordatorio de las invariantes del concepto de fracción.

Objetivo: Recordar las invariantes del concepto de fracción a partir de preguntas y ejemplos de un reparto semejante al realizado en la primera actividad "la fiesta".

Materiales.

Tarjetas con las invariantes impresas
Hojas con preguntas impresas (Una por alumno + una por equipo)
Dados

Se entregará a los alumnos una hoja con preguntas impresas y se les solicitará que saquen las tarjetas con las invariantes del concepto de fracción y se apoyen en ellas para resolver las preguntas de forma individual. Mientras lo hacen, el profesor circulará entre los equipos para ofrecer apoyo a partir de preguntas o sugerencias, cuidando siempre de no dar la respuesta. El análisis posterior de estas hojas de respuesta individual será de utilidad al profesor para valorar el nivel de comprensión de las invariantes que han alcanzado sus alumnos.

Una vez que los alumnos hayan concluido el trabajo individual, se recogerán las hojas de respuestas y se entregará una más, para su resolución por equipo, nuevamente contando con la mediación del profesor.

Antes de que termine la actividad por equipos, el profesor dividirá el pizarrón entre tantas partes como equipos haya y anotará el nombre de cada equipo en el espacio que le corresponda para el registro de aciertos y errores.

Posteriormente seleccionará al azar qué equipo pasará a responder y explicar cuáles preguntas. En caso de que su respuesta sea correcta se registrará en el pizarrón un punto bueno para el equipo. Si la respuesta es incorrecta el equipo se quedará sin punto y los integrantes de cualquier otro equipo podrán dar la respuesta correcta. Si ningún equipo puede hacerlo, el profesor brindará diversos niveles de ayuda hasta que la pregunta quede resuelta.

A continuación se presenta un ejemplar de la "Hoja de respuestas para el recordatorio de las invariantes"

HOJA DE RESPUESTAS PARA EL RECORDATORIO DE LAS INVARIANTES.

NOMBRE DEL ALUMNO O EQUIPO:____

Imagina que tenemos 1 ½ litros de agua y los vamos a dividir entre 6 personas:

Pregunta	Respuesta	Número y color de invariante.
¿Los 1 ½ litros de agua pueden ser divididos?		
¿Cuál es el todo y cuáles son las partes?		
¿Entre cuántos se va a dividir el agua?		
¿Puede ser repartida entre más o menos personas?		
¿Hay algún número entre el cual no pueda dividirse?		
Si fraccionamos la cantidad de agua que tenemos entre 6 de tal manera que a todos les toque la misma cantidad, ¿sobrará algo?		
¿Podemos escribir con número la fracción que representa el número de partes en que se va a repartir el agua? ¿Cómo se escribe?		
De acuerdo con esa representación ¿qué porción correspondería a cada quien? ¿Esto quiere decir que a alguien le toca más que a otro?		
Si alguno de ustedes quisiera echarle a una planta la ¼ parte del agua que le tocó, ¿podría hacerlo? ¿En ese caso cuál es el todo y cuáles son las partes?		
Si otro de ustedes quisiera guardar 1/3 de su agua para el recreo ¿podría hacerlo? ¿En ese caso cuál es el todo y cuáles son las partes?		
Si después de hacer el reparto, decidieran volver a juntar toda el agua ¿Les quedaría la misma cantidad que tenían al principio?		
¿Se pueden repartir 0 litros de agua entre 3 personas?		
¿Se pueden repartir 2 litros de agua entre 0 personas?		

Actividad 5. Encuentra las piezas 1.

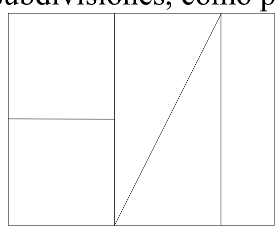
Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para discriminar las piezas que corresponden o no a rompecabezas compuestos por figuras geométricas que constituyen una fracción

Materiales.

Tarjetas con las invariantes impresas
Rompecabezas desarmados con 5 piezas y 2 distractores (un juego por equipo). Incluye las siguientes figuras:

Piezas	Medidas en cm.	Distractores	Medidas en cm.
2 cuadrados	lado = 12	1 rectángulo	base= 12 altura= 10
2 triángulos rectángulos	base= 12 altura= 24	1 rectángulo	base= 12 altura= 14
1 rectángulo	base= 6 altura= 24		

1 cartulina de 24 X 30 cm. (representación del rompecabezas en su versión armada) que en una de sus caras tiene marcadas las subdivisiones, como puede verse en el modelo siguiente:



1 regla por equipo
1 hoja con el problema impreso por equipo

Descripción de la actividad

Esta actividad se trabajará por equipos y se les darán inicialmente 25 minutos para su resolución. A cada equipo se le entregará el rompecabezas desarmado con sus piezas sobrantes y la "hoja de respuestas" para anotar procedimientos, operaciones y resultados.

El modelo del rompecabezas sin las subdivisiones se pegará en el pizarrón para que los alumnos puedan observarlo mientras realizan la tarea y se les explicará que deben hacer uso de su tarjeta con las invariantes del concepto de fracción para poder diferenciar las piezas entre sí y explicar cuáles no corresponden y por qué.

Durante la actividad, el profesor prestará ayuda a los equipos, poniendo especial atención en aquellos equipos o alumnos que hayan tenido un menor dominio de las invariantes en el ejercicio realizado en la actividad anterior.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les mostrarán las subdivisiones del rompecabezas que se encuentran al reverso, con el fin de facilitarles la actividad, dándoles para ello un nuevo plazo de 10 minutos.

Terminado el segundo plazo, un representante de cada equipo pasará a pegar su rompecabezas armado en el pizarrón, las piezas sobrantes por separado y explicar sus procedimientos y resultado. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado.

Planteamiento del problema

La maestra Juana organizó a sus alumnos por equipos y les pidió que hicieran un rompecabezas rectangular de 24 X 30 cm. con figuras diferentes que representaran $\frac{5}{5}$.

Para hacerlo más rápido, el equipo de Omar se dividió el trabajo, pero al terminar la tarea se dieron cuenta de que les sobraban dos piezas que alguien cortó de más. ¿Podrías ayudarles diciéndoles cuáles piezas son las que corresponden a los $\frac{5}{5}$ y cuáles no? ¿Cómo podrías distinguirlas?

Sugerencias para la mediación

Para empezar, sería conveniente inducir a los alumnos a organizar sus datos. Para ello podrían plantearse preguntas como: ¿Cuántos tipos de figuras hay? ¿Cuántos cuadrados? ¿Cuántos rectángulos? ¿Cuántos triángulos?

En caso de que sea necesario, el profesor puede guiar la atención de los alumnos hacia la parte del problema donde se dice que las piezas del rompecabezas deben representar una fracción, y continuar con preguntas como:

¿Qué fracción deben representar las piezas del rompecabezas?

¿Cuáles son las piezas del rompecabezas que cumplen con todas las invariantes del concepto de fracción?

¿En cuanto a qué característica las piezas deben ser iguales? ¿En su color? ¿En su forma?, ¿en sus medidas por lado? ¿En el tamaño de su área?

Una vez que los alumnos hayan llegado a la conclusión de que para resolver este problema necesitan conocer el área de cada una de las piezas, probablemente sea necesario ayudarles a recordar la fórmula del área del cuadrado (*l X l*), del rectángulo (*b X h)* y del triángulo ($\frac{bXh}{2}$) e inducirlos a que organicen sus datos para que puedan comparar las áreas de las distintas figuras.

Actividad 6. Encuentra las piezas 2.

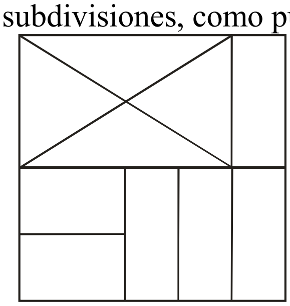
Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para discriminar las piezas que corresponden o no a rompecabezas compuestos por figuras geométricas que constituyen una fracción.

Materiales.

Tarjetas con las invariantes impresas
Rompecabezas desarmados con 10 piezas y 2 distractores (uno por equipo). Incluye las siguientes figuras:

Piezas	Medidas en cm.	Distractores	Medidas en cm.
2 triángulos isósceles	base= 16 altura = 5	1 rectángulo	base = 10 altura = 8
2 triángulos isósceles	base = 10 altura = 8	1 triángulos isósceles	base = 10 altura = 9
4 rectángulos	base = 4 altura = 10		
2 rectángulos	base = 8 altura = 5		

1 cartulina de 20 X 20 cm. (representación del rompecabezas en su versión armada) que en una de sus caras tiene marcadas las subdivisiones, como puede verse en el modelo siguiente:



1 regla por equipo
1 hoja con el problema impreso por equipo

Descripción de la actividad

Esta actividad se trabajará por equipos y se les darán inicialmente 25 minutos para su resolución. A cada equipo se le entregará el rompecabezas desarmado con sus piezas sobrantes y la "hoja de respuestas" para anotar procedimientos, operaciones y resultados.

El modelo del rompecabezas sin las subdivisiones se pegará en el pizarrón para que los alumnos puedan observarlo mientras realizan la tarea y se les explicará que deben hacer uso de su tarjeta con las invariantes del concepto de fracción para poder diferenciar las piezas entre sí y explicar cuáles no corresponden y por qué.

Durante la actividad, el profesor prestará ayuda a los equipos, poniendo especial atención en aquellos equipos o alumnos que hayan tenido más problemas para la resolución de la actividad anterior.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les mostrarán las subdivisiones del rompecabezas que se encuentran al reverso, con el fin de facilitarles la actividad, dándoles para ello un nuevo plazo de 10 minutos.

Terminado el segundo plazo, un representante de cada equipo pasará a pegar su rompecabezas armado en el pizarrón, las piezas sobrantes por separado y a explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado.

Planteamiento del problema

La maestra Juana dejó a sus alumnos como tarea hacer un rompecabezas de 10/10. Cuando Omar fue a ver a Pedro en la tarde, lo encontró tratando de separar las piezas de su rompecabezas, pues se le habían juntado con otras que no eran. ¿Podrías ayudarles, recordándole a Omar cómo distinguir cuáles piezas pertenecen a los 10/10 y cuáles no?

Sugerencias para la mediación

Nuevamente sería conveniente empezar por inducir a los alumnos a organizar sus datos. Para ello podrían plantearse preguntas como: ¿Cuántos tipos de figuras hay? ¿Cuántos cuadrados? ¿Cuántos rectángulos? ¿Cuántos triángulos?

En caso de que sea necesario, el profesor puede guiar la atención de los alumnos hacia la parte del problema donde se dice que las piezas del rompecabezas deben representar una fracción y continuar con preguntas como:

¿Cuáles de las piezas del rompecabezas cumplen con todas las invariantes del concepto de fracción?

¿Cómo sabemos que las piezas son iguales, por su forma, su tamaño, por cuánto miden, porque tienen la misma área?

Una vez que los alumnos hayan recordado que para resolver este problema necesitan conocer el área de cada una de las piezas, probablemente sea necesario ayudarles a recordar la fórmula del área del rectángulo ($b\ X\ h$) y del triángulo ($\frac{bXh}{2}$) e inducirlos a que organicen sus datos para que puedan comparar las áreas de las distintas figuras.

HOJA DE RESPUESTAS PARA "ENCUENTRA LAS PIEZAS 2"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema: La maestra Juana dejó a sus alumnos como tarea hacer un rompecabezas de $\frac{10}{10}$. Cuando Omar fue a ver a Pedro en la tarde, lo encontró tratando de separar las piezas de su rompecabezas, porque se le habían juntado con otras que no eran. ¿Podrías ayudarles recordándole a Omar cómo distinguir cuáles piezas pertenecen a los $\frac{10}{10}$ y cuáles no?

Operaciones:

Resultado:

El número de triángulos es de ___________ y tienen un área de ___________________.
El número de rectángulos es de ____ y tienen un área de _________________________.

Las figuras que si pertenecen a los 10/10 son____________________________________ y las que no pertenecen son ____.

Actividad 7. Encuentra las piezas 3.

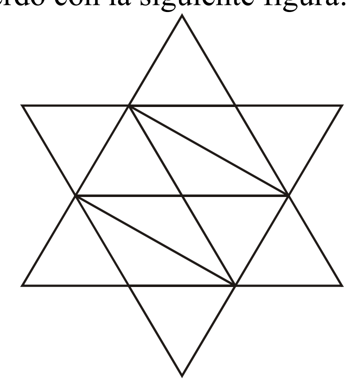
Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para discriminar las piezas que corresponden o no a rompecabezas compuestos por figuras geométricas que constituyen una fracción.

Materiales.

Tarjetas con las invariantes impresas
Rompecabezas desarmados con 12 piezas que forman una estrella y tres distractores (un rompecabezas por equipo). Incluye las siguientes figuras:

Piezas	Medidas en cm.	Distractores	Medidas en cm.
4 triángulos	base= 12 altura= 3	1 trapecio	base a= 12 base b= 9 altura= 3
8 triángulos	base= 6 altura= 6	1 trapecio	base a= 9 base b= 6 altura= 3
		1 triángulo rectángulo	base= 6 altura= 12

1 Modelo del rompecabezas en su versión armada. La estrella está constituida por dos triángulos equiláteros de 12 cm. de base por 12 cm. de altura. Uno con las subdivisiones marcadas y otro sin ellas, de acuerdo con la siguiente figura:



1 Regla por equipo

Descripción de la actividad

Esta actividad se trabajará por equipos y se les darán inicialmente 25 minutos para su resolución. A cada equipo se le entregará el rompecabezas desarmado con sus piezas sobrantes y la "hoja de respuestas" para anotar procedimientos, operaciones y resultados.

El modelo del rompecabezas sin las subdivisiones se pegará en el pizarrón para que los alumnos puedan observarlo mientras realizan la tarea y se les explicará que deben hacer uso de su tarjeta con las invariantes del concepto de fracción para poder diferenciar las piezas entre sí y explicar cuáles no corresponden y por qué.

Durante la actividad, el profesor prestará ayuda a los equipos, poniendo especial atención en aquellos equipos o alumnos que muestren más problemas para resolverla.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les mostrarán las subdivisiones del rompecabezas que se encuentran al reverso, con el fin de facilitarles la actividad, dándoles para ello un nuevo plazo de 10 minutos.

Terminado el segundo plazo, un representante de cada equipo pasará a pegar su rompecabezas armado en el pizarrón, las piezas sobrantes por separado y a explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado.

Planteamiento del problema

Lucía hizo una estrella de 6 picos y para jugar con su hermanita la dividió en 12/12. Mientras la dividía, su hermanita cortó otras piezas y las colocó junto a las piezas de la estrella. ¿Podrías ayudarles a separarlas encontrando cuáles pertenecen a los 12/12?

Sugerencias para la mediación

El profesor puede guiar la actividad por medio de las siguientes preguntas:

¿Cuáles de las piezas del rompecabezas cumplen con todas las invariantes del concepto de fracción?

¿Cómo sabemos que las piezas son iguales, por su forma, su tamaño, por cuánto miden, porque tienen la misma área?

¿Cuántas y cuáles son las figuras que tienen la misma área?

Una vez que los alumnos recuerden que requieren hacer una comparación entre las áreas de las diferentes figuras, es probable que sea necesario ayudarles a recordar las fórmulas para el área del triángulo $\frac{bXh}{2}$ y del trapecio $\frac{a+b\times h}{2}$.

HOJA DE RESPUESTAS PARA "ENCUENTRA LAS PIEZAS 3"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

Lucía hizo una estrella de 6 picos y para jugar con su hermanita la dividió en 12/12. Mientras la dividía, su hermanita cortó otras piezas y las colocó junto a las piezas de la estrella. ¿Podrías ayudarles a separarlas encontrando cuáles pertenecen a los 12/12?

Operaciones:

Resultado:

El número de triángulos es de ________ y tienen un área de ______________________.

El número de trapecios es de ___ y tienen un área de ____________________________.

Por lo tanto las figuras que si pertenecen a los 12/12 son________________________ y las que no pertenecen son ____.

Actividad 8. ¿Cuánta agua nos toca?

Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para el reparto de unidades continuas de volumen.

Materiales:

Tarjetas con las invariantes impresas
1 botella de 1.5 litros de agua por equipo
Vaso o recipiente que marque 100 ml (uno por equipo).
Vasos desechables con capacidad de al menos 150 ml. (12 por equipo)

Descripción de la actividad

Además de la hoja de respuestas para "¿Cuanta agua nos toca"?, a cada equipo se le entregará una botella de agua, el vaso que indica los 100 ml y 12 vasos desechables para que puedan realizar su reparto y corroborar sus resultados de forma concreta.

Se otorgará a los alumnos un plazo de 15 minutos para leer y discutir el problema por equipos. En ese lapso, el profesor prestará ayuda a los equipos, poniendo especial atención en aquellos alumnos que muestren más problemas para comprender o resolver el problema.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor. Posteriormente, un representante de cada equipo pasará a mostrar en uno de los vasos, la cantidad correspondiente a l/12 y a escribir en el pizarrón y explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado. El profesor comparará y comentará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos.

Planteamiento del problema

Laura fue a ver jugar fútbol a sus amigos y llevó una botella de agua de 1 ½ litros, un recipiente que marca hasta donde son 100 ml. y vasos. Laura quiere que a ella y a sus 11 amigos les toque exactamente lo mismo, pero no sabe cuánto le corresponde a cada uno. ¿Podrías ayudarla a repartir el agua en 12/12?

Sugerencias para la mediación

El profesor puede guiar la actividad de sus alumnos a partir de preguntas como las siguientes:

¿Cuántos litros de agua tiene Laura?

¿Entre cuántas personas quiere repartirlos?

Cuando los alumnos hacen directamente la división del 1.5 litros entre las 12 personas, en ocasiones les causa confusión el uso del punto decimal, por lo que probablemente resulte conveniente inducirlos a convertir los litros a mililitros antes de hacer el reparto. Pueden utilizarse preguntas como las siguientes.

¿Cuántos mililitros tienen un litro?

¿Cuántos mililitros de agua tiene Laura?

¿Entre cuántas personas quiere repartir esos mililitros?

¿Qué operación nos ayudaría a saber cuántos mililitros le corresponden a cada persona?

HOJA DE RESPUESTAS PARA “¿CUÁNTA AGUA NOS TOCA?”

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

Laura fue a ver jugar fútbol a sus amigos y llevó una botella de agua de 1 ½ litros, un recipiente que marca hasta donde son 100 ml. y vasos. Laura quiere que a ella y a sus 11 amigos les toque exactamente lo mismo, pero no sabe cuánto le corresponde a cada uno. ¿Podrías ayudarla a repartir el agua en 12/12?

Operaciones:

Resultado:

A Laura y a cada uno de sus amigos les toca un vaso con ____________________ de agua.

Actividad 9. El juego de las fracciones

Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para dividir figuras geométricas diferentes.

Materiales.

Tarjetas con las invariantes impresas
1 transportador por equipo
1 regla por equipo
1 tijeras por equipo
1 ejemplar por equipo, de las 2 figuras geométricas a fraccionar: un rectángulo con base de 28 cm. y altura de 20 cm. y un círculo con un radio trazado de 10 cm.
1 hoja de respuestas por equipo.

Descripción de la actividad

Al inicio de la sesión, se entregarán los materiales necesarios y se les otorgará un plazo de 25 minutos para leer, discutir y dar solución al problema por equipos. Mientras tanto el profesor ofrecerá diversos niveles de ayuda a los equipos que así lo requieran, recordando evitar ofrecer la respuesta o datos que lleven directamente a ella.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor. Posteriormente, un representante de cada equipo pasará a escribir en el pizarrón y explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado. El profesor comparará y comentará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos.

Planteamiento del problema

Camila fue a jugar a la casa de su prima María. Para divertirse, Camila retó a María a resolver un par de problemas de la escuela que le habían gustado mucho. El primero de ellos consistía en repartir un rectángulo de 22 x 28 cm. en 4/4 con forma triangular y luego rellenar uno de los cuartos. En el segundo problema había un círculo con un radio de 10 cm., que se tenía que dividir en 5/5 y luego rellenar la superficie de 2/5. ¿Puedes ayudar a María a resolver estos problemas?

Sugerencias para la mediación

Para el problema del rectángulo, el profesor puede guiar la actividad por medio de preguntas como las siguientes:

¿En cuantas partes hay que dividir el rectángulo?

¿Qué necesitamos para que cada una de esas partes sea un cuarto?

¿Cuánto mide la superficie del rectángulo?

¿Cuánto debe medir la superficie de cada uno de los 4/4?

¿Qué forma debe tener cada cuarto?

¿Cómo lo partiríamos?

¿Qué necesitamos para verificar que las partes son iguales?

¿Cuál es la fórmula para obtener el área de un triángulo?

La forma más fácil de resolver el ejercicio es trazar una cruz partiendo de cada uno de los vértices, lo cual se puede hacer doblando la hoja o por medio de una regla. Podemos comprobar que los cuatro triángulos son iguales al obtener su área.

Para el problema del círculo, el profesor puede guiar la actividad por medio de preguntas tales como:

¿En cuantas partes hay que dividir el círculo?

¿Es necesario conocer el área del círculo?

Para poder resolver esta parte del problema, será necesario inducir a los alumnos a recordar que, independientemente del tamaño del círculo, su circunferencia siempre será igual a 360º, por lo que se puede hacer uso del transportador para fraccionar la circunferencia por grados. Para ello se pueden utilizar preguntas como las siguientes:

¿Sabemos cuánto mide la circunferencia?

¿Qué unidad se utiliza para medir la circunferencia de un círculo?

¿Qué instrumento necesitamos para medir los grados del círculo?

¿La medida de la circunferencia puede ser dividida en cinco partes iguales?

Utilizando el transportador, ¿cómo partirías el círculo para que hubiera la misma distancia entre cada una de las cinco partes?

La forma más fácil de resolver el ejercicio es dividir los 360º de la circunferencia entre cinco. Lo que es igual a 72º y después, con ayuda del transportador y partiendo del centro de la circunferencia ir marcando cada 72º hasta completar las cinco partes. Finalmente con ayuda de la regla se traza una línea que vaya del centro del círculo a cada una de las marcas que hicimos.

HOJA DE RESPUESTAS PARA "EL JUEGO DE LAS FRACCIONES"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

Camila fue a jugar a la casa de su prima María. Para divertirse Camila retó a María a resolver un par de problemas de la escuela que le habían gustado mucho. El primero de ellos consistía en repartir un rectángulo de 22 x 28 cm. en 4/4 con forma triangular y luego rellenar uno de los cuartos. En el segundo problema había un círculo con un radio de 10 cm., que se tenía que dividir en 5/5 y luego rellenar la superficie de 2/5. ¿Puedes ayudar a María a resolver estos problemas?

Operaciones:

Resultados para el rectángulo:

El número de triángulos que se obtuvieron al fraccionar el rectángulo fue de _________.

El área de cada triángulo tenía una superficie de_______________________________cm^2

Resultados para el círculo:

Al fraccionar el círculo se obtuvieron ___________________ número de partes iguales.

Al fraccionar la figura, la circunferencia quedó dividida en ___________________ secciones de grados cada una.

Actividad 10. Hagamos un rompecabezas.

Objetivo: Recordar las invariantes del concepto de fracción de unidades continuas a través de la elaboración de rompecabezas compuestos por distintas figuras geométricas con igual área.

Materiales:

Tarjetas con las invariantes impresas
1 imagen en cartón o cartulina, de 30 X 33 cm. que resulte atractiva para los alumnos
Tijeras (1 por equipo).
Reglas (1 por equipo).
Cartulina de 30 X 33 cm. (1 por equipo).
Hoja de respuestas para "hagamos un rompecabezas" (1 por equipo).

Descripción de la actividad

Al inicio de la sesión, se entregarán los materiales necesarios y se les otorgará un plazo de 25 minutos para leer, discutir y dar solución al problema por equipos. Mientras tanto el profesor ofrecerá diversos niveles de ayuda a los equipos que así lo requieran, recordando evitar ofrecer la respuesta o datos que lleven directamente a ella.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor. Posteriormente, un representante de cada equipo pasará a escribir en el pizarrón y explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado. El profesor comparará y comentará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos.

Planteamiento del problema

Juan llegó a su casa con un póster para pegar en el cuarto de sus dos hijos, pero cuando se los mostró, ambos lo querían para hacer diferentes cosas. Para que no se pelearan por tenerlo, Juan les dijo que se lo daría al que pudiera hacer un rompecabezas en una cartulina del tamaño del póster (30 X 33 cm.), que cumpliera con dos condiciones:

1. Que el rompecabezas representara una fracción de 48/48.
2. Que algunas de las piezas tuvieran forma de triángulo y otras de rectángulo.

Sugerencias para la mediación

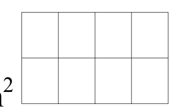
El profesor puede guiar la actividad por medio de preguntas como las siguientes:

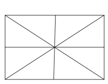
¿En qué fracción hay que dividir la cartulina?

¿Cómo podemos dividirla para obtener 48 pedazos del mismo tamaño?

¿Hay alguna (s) operación (es) matemática (s), que permita (n) dividirla de manera exacta?

¿Qué figuras debemos emplear en el diseño del rompecabezas?

Existen varias maneras en que se puede dividir la cartulina para obtener 48 partes iguales. La más sencilla es dividir el lado que mide 33 cm., en 3 partes de 11 cm. y el lado que mide 30 cm., en 2 partes de 15 cm. Con esto obtendremos 6 rectángulos de 15 por 11 cm. Posteriormente cada uno de estos 6 rectángulos tiene que ser a su vez dividido en 8 partes. Para obtener los cuarentayochoavos de forma rectangular, algunos de estos 6 rectángulos se pueden dividir de la siguiente forma: el lado del rectángulo que mide 15 cm. se divide en cuatro partes de 3.75 cm. y el lado que mide 11 en dos de 5.5 cm. Cada una de estas partes tendrá un área de 20.625 cm^2 .

Para obtener los cuarentayochoavos de forma triangular, algunos de los 6 rectángulos pueden dividirse trazando una cruz y posteriormente dos líneas que pasen exactamente por el centro, una horizontal y otra vertical, como se muestra en la siguiente figura:  De esta forma obtendremos dos tipos de triángulos, unos que midan 5.5 de base por 7.5 de altura y otros con una base de 7.5 cm. y una altura de 5.5 cm, ambos tendrán un área de 20.625 cm^2.

HOJA DE RESPUESTAS PARA "HAGAMOS UN ROMPECABEZAS"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

Juan llegó a su casa con un póster para pegar en el cuarto de sus dos hijos, pero cuando se los mostró, ambos lo querían para hacer diferentes cosas. Para que no se pelearan por tenerlo, Juan les dijo que se lo daría al que pudiera hacer un rompecabezas en una cartulina del tamaño del póster (30 X 33 cm.), que cumpliera con dos condiciones:

1. Que el rompecabezas representara una fracción de 48/48.
2. Que algunas de las piezas tuvieran forma de triángulo y otras de rectángulo.

Operaciones:

Resultado:

El número total de triángulos es de _________________y cada uno de ellos tiene un área de cm^2.

El número total de rectángulos es de ___________________ y cada uno de ellos tiene un área de cm^2.

Actividad 11. Hagamos nuestro logotipo.

Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para realizar el reparto de materiales que involucren unidades de peso, longitud y superficie.

Materiales.

Tarjetas con las invariantes impresas
Hojas de cartulina de 50 X 50 cm. (1 por equipo)
1 báscula gramera
250 g de diamantina dividida en 4 bolsitas de 1/5 y 2 bolsitas de 1/10.
16 m de cinta decorativa dividida en 4 tramos de 1/8 y 2 tramos de 1/4
Pliegos de papel lustre (1 por equipo)
Tijeras (1 por equipo)
Reglas (1 por equipo)
Pegamento (1 por equipo)
Hoja de respuestas para "Hagamos nuestro logotipo" (1 por equipo).
Dados

Descripción de la actividad

Al inicio de la sesión se explicará a los alumnos que van a recibir los materiales necesarios para diseñar un cartel representativo de su equipo, pero que algunos materiales se repartirán de forma equitativa y otros serán divididos en diferentes fracciones antes de ser entregados, pues la decisión de a qué equipo le tocará una mayor o menor cantidad de algunos de los materiales, se tomará con base en qué tan rápido y bien resuelvan el problema.

Para empezar recibirán la hoja de respuestas en la que se encuentra planteado el problema por escrito, para que la lean, discutan y anoten en ella los datos, operaciones y resultados de su equipo. Mientras tanto el profesor ofrecerá las ayudas habituales y hará un registro del orden en que van terminando los equipos. Al finalizar esta parte de la actividad, un representante de cada equipo pasará a explicar y escribir en el pizarrón (previamente dividido) sus procedimientos y resultados. El profesor comentará y comparará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos y tomando en consideración qué equipos terminaron primero y tuvieron un resultado correcto, establecerá el orden en que pasarán a elegir la fracción que quieran de los materiales que se van a repartir en forma desigual (los 250 g, de diamantina dividida en 4 bolsitas de 1/5 y 2 bolsitas de 1/10 y los 16 m de cinta decorativa dividida en 4 tramos de 1/8 y 2 tramos de 1/4). Posteriormente entregará a cada equipo los materiales que se tiene previsto entregar en forma equitativa (la cartulina, el papel lustre, las tijeras, la regla y el pegamento) para que procedan a elaborar su propio logotipo.

Planteamiento del problema

La maestra Carmen dividió a su grupo en 6 equipos y les propuso que eligieran un nombre e hicieran un logotipo que distinguiera a su equipo. Para hacerlo les entregó una cartulina de 50 X 50 cm., diamantina, cinta decorativa y algunos otros materiales.

Les pidió que dividieran la cartulina en las siguientes fracciones: 1/8 para el nombre del equipo, 1/8 para el número del equipo, 1/2 para un dibujo representativo del equipo y 1/4 para el nombre de los integrantes del equipo. ¿De qué tamaño debe ser el tramo de cartulina que usen los alumnos para cada cosa?

De diamantina llevaba en total 250 g y le resultaba difícil dividirla en 6 fracciones iguales, así que decidió pedir a sus alumnos que la repartieran en 4/5 y 2/10. ¿Cuánta diamantina tendrán los equipos que reciban 1/5 y cuánta los que reciban 1/10?

De listón decorativo tenía 16 m de y ese decidió que lo fraccionaran en 4/8 y 2/4.

¿De qué tamaño será el listón de los equipos que reciban 1/8 y de qué tamaño será el de los que reciban 1/4?

Sugerencias para la mediación

Para fraccionar la cartulina, el maestro puede guiar a sus alumnos a partir de preguntas como las siguientes:

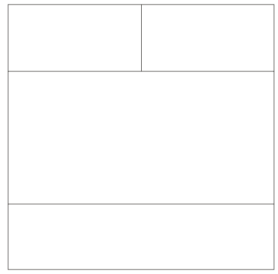
¿Qué medidas tiene la cartulina?

¿Cuánto mide su área?

¿En qué fracciones hay que dividirla?

¿Hay alguna (s) operación (es) matemática (s), que permita (n) dividirla de manera exacta en las fracciones que nos piden?

Existen varias maneras en que se puede dividir la cartulina de acuerdo con lo que nos piden. Una de ellas es dividirla en cuatro rectángulos de 12.5 cm. por 50 cm. Para obtener los octavos, podemos partir en dos uno de estos rectángulos y dejar juntos otros dos rectángulos, con lo que obtendremos ½ y lo que resta será precisamente ¼, como lo muestra la siguiente figura:



Para el caso de la diamantina, el profesor puede utilizar las siguientes preguntas:

¿Cuánta diamantina hay?

¿En qué fracciones hay que dividirla?

¿Qué operaciones hay que hacer?

¿Cómo podemos dividir los 250 g. de diamantina para obtener cinco partes del mismo tamaño?

¿Hay alguna (s) operación (es) matemática (s) que permita (n) dividirla de manera exacta?

El procedimiento más simple para obtener 1/5 es dividir los 250 g. entre 5 lo que es igual a 50 g. En el caso de los décimos el procedimiento es el mismo, dividir los 250 g entre 10 lo que es igual a 25 g. También es posible que los alumnos decidan obtener la mitad de los quintos para conocer el peso de los décimos en lugar de hacer directamente la división.

Para el caso del listón decorativo, el profesor puede utilizar preguntas como las siguientes:

¿Cuánto listón decorativo hay?

¿En qué fracciones hay que dividirlo?

¿Cómo podemos dividir los 16 m. de listón decorativo para obtener 8 partes del mismo tamaño?

¿Hay alguna (s) operación (es) matemática (s), que permita (n) dividirlo de manera exacta?

El procedimiento más simple para obtener 1/4 es que los alumnos dividan los 16 m. entre 4, lo que es igual a 4 m. Para sacar 1/8 es necesario dividir los 16 m entre 8, o sacar la mitad de un cuarto, lo que es igual a 2 m.

HOJA DE RESPUESTAS PARA "HAGAMOS NUESTRO LOGOTIPO"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

Planteamiento del problema: La maestra Carmen dividió a su grupo en 6 equipos y les propuso que eligieran un nombre e hicieran un logotipo que distinguiera a su equipo. Para hacerlo les entregó una cartulina de 50 X 50 cm., diamantina, cinta decorativa y algunos otros materiales.

Les pidió que dividieran la cartulina en las siguientes fracciones: 1/8 para el nombre del equipo, 1/8 para el número del equipo, 1/2 para un dibujo representativo del equipo y 1/4 para el nombre de los integrantes del equipo. ¿De qué tamaño debe ser el tramo de cartulina que usen los alumnos para cada cosa?

De diamantina había en total 250 g. y a la maestra le resultaba difícil dividirla en 6 fracciones iguales, así que decidió pedir a sus alumnos que la repartieran en 4/5 y 2/10. ¿Cuánta diamantina tendrán los equipos que reciban 1/5 y cuánta los que reciban 1/10?

El listón decorativo medía 16 m. y decidió que lo fraccionaran en 4/8 y 2/4.
¿De qué tamaño será el listón de los equipos que reciban 1/8 y de que tamaño será el de los que reciban 1/4?

Operaciones:

Resultados: ____

¿En cuántas partes dividiste la cartulina? ______________________.
¿Cuánto miden los octavos de la cartulina? ______________________ cm^2.
¿Cuánto mide el cuarto de la cartulina? ______________________ cm^2.
¿Cuánto mide el medio de la cartulina? ______________________ cm^2.
¿Cuánto debe pesar cada quinto de la diamantina?______________________g.
¿Cuánto debe pesar cada décimo de la diamantina? ______________________g.
¿Cuántos equipos recibirán una quinta parte de diamantina? ______________________.
¿Cuánto debe medir cada octavo de listón? ______________________m.
¿Cuánto debe medir cada cuarto de listón? ______________________m.
¿Cuánto equipos recibirán un octavo del listón? ______________________.
¿A la maestra le quedará alguna parte del listón? ______________________.

Actividad 12. La tortillería.

Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para realizar el reparto de unidades continuas de peso y volumen.

Materiales.

Tarjetas con las invariantes impresas
500 g. de harina de maíz por equipo
Báscula
1 botella de 1 ½ litros de agua por equipo.
1 contenedor graduado de 1 litro
1 recipiente para batir la masa por equipo
1 recipiente con agua para enjuagarse las manos
Hoja de respuestas para "La tortillería"
Dados

Descripción de la actividad

Al inicio de la sesión, se explicará que ese día vamos a hacer tortillas, pero que antes de hacerlas debemos resolver las preguntas del problema planteado por escrito para que la cantidad de ingredientes y tamaño de las tortillas nos queden como está planeado. Para ello se entregarán las hojas de respuestas por equipo y se otorgará un tiempo aproximado de 30 minutos para que los alumnos lean, discutan el problema y planteen soluciones, mientras el profesor les proporciona las ayudas acostumbradas.

Cuando todos los equipos hayan terminado, pasarán al pizarrón previamente dividido a escribir sus resultados para exponerlos al resto del grupo. Al finalizar su exposición, el profesor puede hacer una o dos preguntas sobre la forma en que aplicaron las invariantes para resolver el problema y con base en las respuestas otorgar puntos extra a la calificación de la actividad.

A continuación se presentan algunos ejemplos de preguntas que se pueden utilizar para el final de la explicación. En todos los casos es necesario solicitar a los alumnos que señalen a qué invariante hace referencia la pregunta que les tocó.

¿Puedo dividir la masa en el número de partes que yo quiera?

¿Todas las tortillas medianas pesaban lo mismo?

Una vez que dividí la masa. ¿No sobró nada?

¿Esta división representa una fracción?

¿Cómo puedo representar numéricamente esa fracción?

¿Cada trozo de masa puede a su vez ser dividido para hacer tortillas más pequeñas?

¿Si vuelvo a reunir todos los trozos de masa, volveré a tener los 1.330 kg., de masa?

Posteriormente, el profesor les otorgará un tiempo aproximado de 20 minutos para la elaboración de las tortillas. Con el fin de evitar que todos terminen llenos de masa, el profesor puede decidir que sólo el equipo que resuelva mejor el problema haga realmente las tortillas o indicarles que elijan a un representante por equipo para elaborarlas mientras sus compañeros lo auxilian.

Para ello repartirá a cada equipo una botella de agua de 1 ½ litro, 500 g, de harina de maíz y un recipiente para batir la masa. El contenedor graduado, la báscula y el recipiente con agua para enjuagarse las manos pueden permanecer frente al escritorio del profesor o en algún lugar en el que los equipos puedan utilizarlo por turnos.

Cuando la masa esté preparada y fraccionada en tres partes (1/10, 5/10 y 2/5), los alumnos se encargarán de pesar las porciones de masa que necesitarán para la realización de los tres tamaños de tortillas y de elaborarlas.

Al término de la actividad de ese día se sugiere pedir a los equipos que realicen la limpieza de su lugar de trabajo.

Planteamiento del problema

La mamá de Karla le dio una botella de 1 1/2 litros de agua y ½ Kg. de harina de maíz para que le ayudara a hacer tortillas. Le explicó que debía mezclar la harina con 3/5 partes del agua. ¿Cuánta agua necesita Karla para hacer la masa?

Al combinar la harina con el agua, Karla obtuvo 1, 330 kg. de masa. Ella quiere utilizar:

1/10 de masa para hacer 1 tortilla grande.

5/10 de masa para hacer 10 tortillas medianas.

2/5 de masa para hacer 14 tortillas chicas.

¿Podrías ayudarla a saber cuánto debe pesar cada una de las fracciones de masa que necesita?

Sugerencias para la mediación

Para resolver la primera parte de la tarea de forma sencilla, los alumnos pueden convertir el agua a mililitros, dividir los 1500 ml entre 5 para obtener el valor de un quinto (300 ml) y multiplicar el resultado por 3 para obtener los 3/5 (900 ml). Para guiar este proceso, el maestro puede utilizar preguntas como las siguientes:

¿Cuánta agua tiene Karla?

¿Qué fracción del agua necesita?

¿En cuántas partes tiene que dividir el agua?

¿Qué necesita hacer para poder dividir los 1 ½ litros de agua?

De ser necesario, el maestro puede preguntar a los alumnos cuántos mililitros de agua tiene un litro, a fin de inducirlos a facilitar la división.

Para fraccionar la masa el profesor puede guiar a los alumnos a partir de preguntas como las siguientes:

¿Cuánta masa tiene Karla?

¿Se pueden dividir los 1, 300 kg. de masa?

¿Qué fracción de la masa necesita para hacer la tortilla grande?

¿Qué fracción de la masa necesita para hacer las tortillas medianas?

¿Qué fracción de la masa necesita para hacer las tortillas chicas?

¿Qué operaciones necesito hacer para poder dividir la masa en quintos y décimos?

HOJA DE RESPUESTAS PARA “LA TORTILLERÍA”

Nombre del equipo: ________________________________ **Fecha:** ____________________

Problema:

La mamá de Karla le dio una botella de 1 1/2 litros de agua y ½ Kg. de harina de maíz para que le ayudara a hacer tortillas. Le explicó que debía mezclar la harina con 3/5 partes del agua. ¿Cuánta agua necesita Karla para hacer la masa?

Al combinar la harina con el agua, Karla obtuvo 1, 330 kg. de masa. Ella quiere utilizar:

1/10 de masa para hacer 1 tortilla grande.

5/10 de masa para hacer 10 tortillas medianas.

2/5 de masa para hacer 14 tortillas chicas.

¿Podrías ayudarla a saber cuánto debe pesar cada una de las fracciones de masa que necesita?

Operaciones:

Resultado:

La cantidad de agua que necesita Karla para hacer las tortillas es: __________ml.
1/10 de la mase es igual a: ____________g.
5/10 es igual a: ____________g.
2/5 es igual a: ____________g.

Actividad 13. La pesca.

Objetivo: Identificar que las unidades discretas pueden constar de cualquier número de elementos para que los alumnos fraccionen dicho tipo de unidades.

Materiales.

Tarjetas con las invariantes impresas
1 caña de pescar (tira de madera de 1 m. de largo con un alambre en forma de gancho adherido en un extremo y forrado con cinta adhesiva para evitar filos riesgosos)
60 peces de cartón o unicel en 3 colores (20 peces rojos, 20 azules y 20 amarillos)
1 tablero de cartón o unicel con 56 ranuras en las que se puedan insertar los peces.
Hojas
Dados

Descripción de la actividad

Se colocará frente al pizarrón el tablero con las 56 ranuras y se irán anotando en el pizarrón los ejercicios contenidos en el siguiente cuadro (uno a la vez).

Número de Unidades	Elementos por unidad.	Fracción	Tiempo (minutos)	Instrucción	Resultado
1	4	½	5	Pescar	2 peces
1	5	1/5	5	Pescar	1 pez
1	12	2/3	5	Pescar	8 peces
1	16	2/8	5	Pescar	4 peces
1	18	1/9	5	Pescar	2 peces
1	20	¾	10	Dejar	15 peces
1	15	4/5	10	Dejar	12 peces
1	14	1/7	10	Dejar	12 peces
2	3	1 ⅓	10	Pescar	4 peces
2	4	1 ¼	10	Pescar	5 peces
2	8	1 ¾	3	Dejar	14 peces

El profesor elegirá al azar a un equipo para dar respuesta al ejercicio, colocará en el tablero el número de unidades y de peces por unidad que correspondan al mismo y les dirá qué fracción de peces deben pescar o dejar en el tablero.

Para facilitar la comprensión, cuando el número de unidades sea mayor que uno, se sugiere emplear un color diferente de peces para cada unidad.

El equipo contará con el tiempo especificado en cada ejercicio para decir su solución al problema. Si la respuesta es correcta, uno de sus integrantes tomará la caña y desde una distancia previamente acordada intentará quitar del tablero los peces que sea necesario para dejar en él los que correspondan al resultado.

Para continuar el juego o utilizarlo en diversas ocasiones, el profesor puede adecuar el número de ejercicios y el nivel de dificultad de los mismos según las características de sus alumnos.

El profesor puede favorecer la competencia entre equipos, otorgando puntos por la respuesta, el resultado de la pesca y si así lo desea, incluir algunas preguntas respecto a las invariantes.

Actividad 14. Los palitos

Objetivo: Identificar que las unidades discretas pueden constar de cualquier número de elementos para que los alumnos fraccionen dicho tipo de unidades.

Materiales.

Tarjetas con las invariantes impresas
100 palitos de paleta pintados en cuatro colores (25 palitos rojos, 25 azules, 25 amarillos y 25 verdes.
Hojas
Dados

Descripción de la actividad

Se colocará frente al pizarrón una mesa donde puedan dejarse caer los palitos y se irán anotando en el pizarrón los ejercicios contenidos en el siguiente cuadro (uno a la vez).

Número de Unidades	Elementos por unidad.	Fracción	Tiempo (minutos)	Instrucción	Resultado
2	16	1 ¼	10	Tomar	20 palillos
2	24	1 ¾	10	Tomar	30 palillos
3	13	2 1/13	10	Tomar	27 palillos
3	25	1 6/5	10	Dejar	55 palillos
2	20	15/10	10	Dejar	30 palillos
3	16	1 6/4	10	Dejar	40 palillos
2	24	8/4	10	Tomar	48 palillos
3	14	1 9/7	10	Dejar	32 palillos
4	12	2 7/6	10	Dejar	38 palillos
4	15	11/3	10	Dejar	55 palillos

Al igual que en el ejercicio anterior, el profesor elegirá al azar a un equipo para dar respuesta al ejercicio, dejará caer sobre la mesa el número de unidades y de palitos por unidad que correspondan al mismo y les dirá qué fracción de palitos deben tomar o dejar en la mesa.

Para facilitar la comprensión, cuando el número de unidades sea mayor que uno, se sugiere emplear un color diferente de palitos para cada unidad.

El equipo contará con el tiempo especificado en cada ejercicio para decir su solución al problema. Si la respuesta es correcta, uno de sus integrantes pasará al frente e intentará retirar de la mesa el número de palitos que sea necesario para dejar en ella los que correspondan al resultado, sin mover el resto.

Para continuar el juego o utilizarlo en diversas ocasiones, el profesor puede adecuar el número de ejercicios y el nivel de dificultad de los mismos según las características de sus alumnos.

El profesor puede favorecer la competencia entre equipos, otorgando puntos por la respuesta, el número de palillos obtenidos y si así lo desea, incluir algunas preguntas respecto a las invariantes.

Actividad 15. Los dulces de María.

Objetivo: Discriminar cuándo una fracción es mayor que otra en el caso de unidades discretas.

Materiales:

Tarjetas con las invariantes impresas
Hoja de respuestas (1 por equipo)

Descripción de la actividad

Al inicio de la sesión, el profesor entregará a los equipos la hoja con el problema impreso y pedirá a algún voluntario que lea el problema. Una vez que haya concluido la lectura el profesor indicará a los alumnos que pueden empezar a resolver el problema por escrito y después pasarán a explicarlo en el pizarrón. Al finalizar, el equipo que tenga el resultado correcto en el menor tiempo será el ganador.

Después de la explicación, se otorgará a los equipos un plazo de 25 minutos para leer, discutir y dar solución al problema. Mientras tanto el profesor ofrecerá diversos niveles de ayuda a los equipos que así lo requieran, recordando evitar ofrecer la respuesta o datos que lleven directamente a ella.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor. Posteriormente, un representante de cada equipo pasará a escribir en el pizarrón y explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado. El profesor comparará y comentará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos.

Planteamiento del problema

Primera parte

Doña María compró una bolsa de dulces que contenía 120 piezas con seis sabores diferentes para repartirla entre sus seis hijos. Doña María les dijo que había diferente número de dulces de cada sabor y que ella sólo les iba a decir qué fracción había de cada uno de los sabores para que ellos eligieran cuál querían. Para poder escoger, ellos quieren saber de qué sabor hay más dulces. ¿Podrías ayudarlos ordenando los seis sabores de mayor a menor cantidad?

Segunda parte

Cuando terminaron de ordenar las fracciones Doña María preguntó: “¿Cuántos dulces hay de cada sabor?”

Tercera parte

Ahora que saben cuántos dulces hay de cada sabor, Doña María quiere saber sí a cada uno de sus hijos puede darle 1/6 de dulces de cada sabor. Empleando las invariantes del concepto de fracción, ¿Podrías ayudarles a decidir si todos los sabores pueden fraccionarse en 6/6 sin necesidad de partir los dulces?

Sugerencias para la mediación

Para saber cuál de las fracciones de los dulces es mayor es necesario saber que en una fracción el denominador representa el número de partes en que esta dividida la unidad y el numerador representa el número de partes que se tiene de la unidad, por lo que si en una serie de varias fracciones el denominador varía y el numerador permanece constante, entre más grande sea el denominador menor será la proporción que se tiene de la unidad, es decir, 1/8 es menor que 1/7 y éste a la vez menor que 1/6.

Con base en lo anterior, otra forma es sacar cuántos dulces hay es preguntar a los alumnos lo siguiente:

¿Cuál es la unidad o el total de dulces que tenemos? R= 120 dulces

Cuando hablamos de 1/6:

¿Qué es lo qué nos está indicando el denominador? R= el número de partes en qué esta dividida la unidad.

Por lo tanto en ¿cuántas partes está divida la unidad? R= 6

Si nuestra unidad es igual a 120 ¿cuántos dulces hay en cada uno de esos sextos? R= 20

¿Qué nos indica el numerador? R= las partes que se tienen de la unidad

¿En 1/6 cuántas partes dice que tenemos? R= 1

Entonces ¿A cuántos dulces equivale 1/6? R= 20

Este procedimiento es necesario para poder resolver la segunda y tercera parte del ejercicio.

HOJA DE RESPUESTAS PARA "LOS DULCES DE MARÍA"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

Doña María compró una bolsa de dulces que contenía 120 piezas con seis sabores diferentes para repartirla entre sus seis hijos. Doña María les dijo que había diferente número de dulces de cada sabor y que ella sólo les iba a decir qué fracción había de cada uno de los sabores para que ellos eligieran cuál querían. Para poder escoger, ellos quieren saber de qué sabor hay más dulces. ¿Podrías ayudarlos ordenando los seis sabores de mayor a menor cantidad?

Estas son las fracciones de cada sabor:

Sabor	Fracción	Orden de mayor a menor
Cereza	1/15	
Naranja	1/4	
Limón	1/12	
Fresa	1/6	
Manzana	1/3	
Uva	1/10	

Operaciones:

Cuando terminaron de ordenar las fracciones, Doña María preguntó: "¿Cuántos dulces hay de cada sabor?"

Sabor	Cantidad de dulces
Cereza	
Naranja	
Limón	
Fresa	
Manzana	
Uva	

Operaciones:

Ahora que saben cuántos dulces hay de cada sabor, Doña María quiere saber sí a cada uno de sus hijos puede darle 1/6 de dulces de cada sabor. Empleando las invariantes del concepto de fracción, ¿Podrías ayudarles a decidir si todos los sabores pueden fraccionarse en 6/6 sin necesidad de partir los dulces?

Sabor	¿Se puede fraccionar en sextos?	¿Cuántos dulces son un sexto?
Cereza		
Naranja		
Limón		
Fresa		
Manzana		
Uva		

Actividad 16. Mi póster favorito

Objetivo: Utilizar las invariantes 4 (las partes tienen que ser iguales) y 5 (las partes también se pueden considerar como un objeto independiente) para que los alumnos fraccionen una fracción de una unidad en partes iguales en tamaño y diferentes en la forma.

Materiales:

Lámina con las invariantes del concepto de fracción.
1 póster de 84 x 56 cm.
Tijeras (una por equipo)
Reglas (una por equipo)
Tiras de cartulina de 14 X 56 cm. (una por equipo)
Hoja con el problema impreso (una por equipo)

Descripción de la actividad

Al inicio de la actividad se repartirá a cada uno de los equipos una hoja con el problema impreso y se les explicará que ese día vamos a trabajar en la elaboración de un rompecabezas. Para motivarlos se mostrará el póster y se pegará en el pizarrón para que quede como modelo. Así mismo, se les aclarará que los equipos deberán resolver el problema en su hoja de evaluación, respetando las estrategias cognitivas y las invariantes del concepto de fracción y que el póster se entregará al equipo que resuelva mejor el problema y en el menor tiempo.

Durante la realización del ejercicio se entregará a cada uno de los equipos una hoja de cartulina de 56 x 14 cm., una regla y tijeras para hacer una simulación de trazo y corte. Después de que hayan decidido las dimensiones y forma de las piezas de su parte del rompecabezas, trazarán y recortarán las divisiones acordadas en la cartulina.

Al término de la actividad, se decidirá cuál de los equipos es merecedor del póster.

Planteamiento del problema

La maestra Laura quiere hacer un rompecabezas de 192 piezas con un póster de 84 x 56 cm. para esto dividió a su grupo en seis equipos y la parte más larga del rompecabezas también la dividió en seis partes iguales. Después, a cada equipo le entregó una de las seis partes y le pidió que la dividiera en 32 partes iguales, utilizando al menos dos tipos de figuras geométricas. Podrías ayudar a los alumnos a responder las siguientes preguntas:

¿Qué fracción del póster le tocó a cada equipo?_______________.

¿De qué tamaño era la fracción que le tocó a cada equipo?

.De largo medía _______________.

De ancho medía______________________.

Su área era de _____________________.

¿Entre cuántas partes tenía que ser dividida la parte del póster que le tocó a cada equipo?

¿Cuál tendría que ser el área de cada una de las 32 partes?____________________.

¿Qué fracción de todo el póster representaba cada una de esas 32 partes? __________.

Sugerencias para la mediación

En este ejercicio un aspecto que deben tener muy presente, es que están trabajando con 1/6 del entero.

Para poder realizar el ejercicio se debe partir el sexto en 32 partes. Para ello, es posible dividir el lado que mide 56 cm. en 8 partes de 7 cm. Después el lado que mide 14 cm. se divide en dos de 7 cm. De esta manera se obtienen 16 piezas; por lo tanto cada uno de los 16 cuadrados resultantes, puede ser dividido por la mitad para obtener rectángulos o puede trazarse una línea diagonal entre dos esquinas para obtener triángulos. Con la división de las 16 piezas en dos se obtendrán las 32 piezas.

Algunas preguntas que el profesor puede hacer para guiar la actividad son:

1. ¿Qué lado de la cartulina podemos dividir en un mayor número de partes iguales?
2. ¿Qué número multiplicado por cuál otro nos daría de forma exacta las 32 partes que necesitamos?
3. ¿Cuál de los dos lados podemos dividir de forma exacta por alguno de los dos factores de la multiplicación?
4. ¿Qué trazos debemos realizar para obtener las dos formas geométricas que nos piden considerando partes del mismo tamaño?

Algunas de las preguntas que el profesor puede hacer a los equipos después de su exposición para reafirmar la comprensión de las invariantes son:

1. ¿Pudieron dividir el póster en el número de partes que querían?

2. ¿Lograron que no les sobrara nada?
3. ¿Lograron que los pedazos del rompecabezas fueran del mismo tamaño?
4. ¿A qué invariante hace referencia el que pudieran fraccionar la parte que les tocó del póster?
5. ¿Qué pasaría si reúno cada uno de los treintaidosavos que recortó cada uno de los equipos? ¿Vuelvo a tener la figura inicial? ¿A que invariante estoy haciendo referencia?
6. A cada equipo le tocó una sexta parte del póster y ese sexto fue fraccionado a su vez en 32/32 para hacer las piezas del rompecabezas. ¿A qué invariante se hizo referencia?
7. ¿Pudieron dividir la fracción que les tocó del póster en el número de partes que querían?

HOJA DE RESPUESTAS PARA "MI PÓSTER FAVORITO"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

La maestra Laura quiere hacer un rompecabezas de 192 piezas con un póster de 84 x 56 cm., para esto dividió a su grupo en seis equipos y la parte más larga del rompecabezas también la dividió en seis partes iguales. Después, a cada equipo le entregó una de las seis partes y le pidió que la dividiera en 32 partes iguales, utilizando al menos dos tipos de figuras geométricas. Podrías ayudar a los alumnos a responder las siguientes preguntas:

Preguntas:

¿Qué fracción del póster le tocó a cada equipo?______________________________________

¿De qué tamaño sería la fracción que le tocó a cada equipo? ___________________________

De largo medía ___________________________

De ancho medía___________________________

Su área era de ____________________________

¿Entre cuántas partes tendría que ser dividida la parte del póster que le tocó a cada equipo? _____.

¿Cuál tendría que ser el área de cada una de esas partes?___________________________________

¿Qué fracción de todo el póster representaría cada una de esas partes? _____________________

Operaciones:

Actividad 17. Competencia de ranas

Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para realizar el reparto de una unidad continua, retomando la interpretación de la fracción como recta numérica.

Materiales:

Hoja por equipo con el problema escrito
1 tira de cualquier material con escala de 36 pulgadas.
Una regla por equipo

Descripción de la actividad

Al inicio de la sesión, el profesor entregará a los equipos la hoja con el problema impreso y pedirá a algún voluntario que lea el problema. Una vez que haya concluido la lectura el profesor indicará a los alumnos que pueden empezar a resolver el problema por escrito y después pasarán a explicarlo en el pizarrón. Al finalizar, el equipo que tenga el resultado correcto en el menor tiempo será el ganador.

Después de la explicación, se otorgará a los equipos un plazo de 25 minutos para leer, discutir y dar solución al problema. Mientras tanto el profesor ofrecerá diversos niveles de ayuda a los equipos que así lo requieran, recordando evitar ofrecer la respuesta o datos que lleven directamente a ella.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor. Posteriormente, un representante de cada equipo pasará a escribir en el pizarrón y explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado. El profesor comparará y comentará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos.

Planteamiento del problema

Primera parte

Carlos quería saber cuánto era lo máximo que podía llegar a saltar su rana. Como no tenía un metro, él utilizó un chicle que tenía una regla de 36 pulgadas. Carlos hizo saltar cinco veces a su rana junto al chicle y fue anotando cada uno de los saltos utilizando fracciones. ¿Podrías ordenar las fracciones para saber cuál fue el mejor salto y cuál el peor?

Segunda parte

Carlos quiere ir a contar a sus amigos cuánto es lo máximo y lo mínimo que puede saltar su rana, pero sus amigos no conocen bien las fracciones, ni tampoco las pulgadas. ¿Puedes ayudarle a convertir las fracciones en pulgadas y centímetros?

Tercera parte

Una vez que Carlos conocía cuántos centímetros podría saltar su rana, fue corriendo a ver a sus amigos para contarles. Carlos les quiso hacer una demostración y colocaron a la rana junto al chicle, para ver cuántos saltos necesitaba para recorrer la distancia total del chicle. Si cada vez que la rana avanza $\frac{2}{6}$**,** regresa $\frac{1}{12}$**.** ¿Cuántos saltos necesita para recorrer la distancia total del chicle?

Sugerencias para la mediación

En la primera parte del ejercicio, para saber cuál de los saltos es mayor es necesario saber que en una fracción el denominador representa el número de partes en que esta dividida la unidad y el numerador representa el número de partes que se tiene de la unidad, por lo que si en una serie de varias fracciones el denominador varía y el numerador permanece constante, entre más grande sea el denominador menor será la proporción que se tiene de la unidad, es decir, 1/8 es menor que 1/7 y éste a la vez menor que 1/6. Con esta información se pueden ordenar las fracciones.

Con base en lo anterior, otra forma es sacar cuál es el mayor salto es preguntar a los alumnos lo siguiente:

¿Cuál es la unidad en este caso? R= la recta de 36 pulgadas

¿Cuánto mide el total de nuestra unidad? R= 36 pulgadas

Cuando hablamos de 1/6:

¿Qué es lo qué nos está indicando el denominador? R= el número de partes en que esta dividida la unidad.

Por lo tanto en ¿cuántas partes está divida la unidad? R= 6

Si nuestra unidad es igual a 36 pulgadas ¿cuántas pulgadas tendría cada parte de esos sextos? R= 6

¿Qué nos indica el numerador? R= las partes que se tienen de la unidad

¿En 1/6 cuántas partes dice que tenemos? R= 1

Entonces ¿A cuántas pulgadas equivale 1/6? R= 6

Para saber cuántos de los mejores, o peores saltos de la rana son necesarios para abarcar el

tamaño de la regla es preciso considerar en cuántas partes está dividida la unidad (en este caso el chicle de 36 pulgadas) de tal forma que si el mejor salto es de 1/3, esto quiere decir que el chicle esta dividido en 3 partes, por lo que la rana tendrá que saltar tres veces.
En la segunda parte del problema, para transformar las pulgadas en centímetros hay que tener en cuenta que éstas son también unidades de longitud y que cada pulgada equivale a 2.54 centímetros. Por lo que el procedimiento es multiplicar el número de pulgadas por 2.54.

En la última sección del problema, el maestro debe hacer énfasis en que los alumnos empleen el dibujo como apoyo para resolverla. El dibujo consiste en una línea dividida en doce partes, en donde se dibujarán saltos de 1/3 y se regresará 1/12, hasta llegar al final de la línea

Actividad 18. Los peces de la feria

Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para realizar el reparto de unidades discretas en sus interpretaciones como parte – todo, como cociente y del tipo de fracciones propias.

Materiales:

Hoja de respuestas
Caña, peces y tabla de la actividad 13
Dados

Descripción de la actividad

Al inicio de la actividad, el maestro le dará a cada uno de los equipos la hoja de respuestas con el problema impreso y mostrará a los alumnos el tablero con los peces, explicándoles que los emplearemos para jugar a pescar, pero en esta ocasión primero resolverán el problema y cuando todos los equipos hayan terminado se utilizará el tablero con los peces para ilustrar el resultado; para saber cuál de los equipos pasará primero se utilizará el dado, los equipos no podrán repetir turno hasta que se haya concluido una ronda.

Después de la explicación, se otorgará a los equipos un plazo de 25 minutos para leer, discutir y dar solución a los ejercicios. Mientras tanto el profesor ofrecerá diversos niveles de ayuda a los equipos que así lo requieran, recordando evitar ofrecer la respuesta o datos que lleven directamente a ella.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor. Terminado el tiempo, el profesor revisara las hojas de los equipos para registrar procedimientos y resultados, con el fin de asignar las puntuaciones del día.

Para realizar la evaluación total de procedimientos y resultados del día, se tendrán en cuenta la cantidad de ejercicios realizados, calificando de acuerdo con lo siguiente:

- 1 punto si el equipo tuvo todos los ejercicios bien o si sólo en uno de ellos obtuvo ½ punto y todos los demás bien.
- ½ punto si tuvo mal alguno o varios de los problemas.
- 0 puntos si no tuvo correcto ninguno de los problemas.

Después de la revisión, el profesor puede utilizar el dado u otro procedimiento al azar para decidir qué equipo pasará primero.

Si el representante o el quipo seleccionado no pueden explicar sus procedimientos o no tienen el resultado correcto, se seleccionará a otro de los equipos usando los dados.

Planteamiento del problema

Juan tiene un puesto de peces en la feria. Como sus hijos tienen problemas en fracciones, inventó un juego en el que tenían que utilizarlas. En una tina Juan colocó 60 peces y les dijo que entre más peces pescaran, les daría más tiempo para realizar la pesca y un premio más grande en dinero, pero en lugar de decirles directamente los datos les dio una tabla con los datos en desorden de fracciones de peces y de tiempo y la cantidad en dinero del premio correspondiente. Los hijos de Juan deben transformar la fracción de peces (fila 1) a cantidad de peces (fila 2) y luego ordenar de mayor a menor (fila 3); el tiempo en fracción de una hora (fila 4) deben transformarlo a minutos (fila 5) y luego también ordenarlo de mayor a menor (fila 6). Finalmente el dinero (fila 7) deben ordenarlo también de mayor a menor (fila 8). De esta manera mientras más peces tengan que pescar, contarán con mayor tiempo y obtendrán más dinero ¿Podrías ayudarles a decidir qué cantidad de peces, se relaciona con el tiempo que se les da para pescarlos y con el premio que deberían ganar?

Sugerencias para la mediación

Para poder ordenar las fracciones de peces y de tiempo que tienen para pescarlos es necesario saber que en una fracción el denominador representa el número de partes en que esta dividida la unidad y el numerador representa el número de partes que se tienen de la unidad, por lo que si en una serie de varias fracciones el denominador varía y el numerador permanece constante, entre más grande sea el denominador menor será la proporción que se tiene de la unidad, es decir, 1/8 es menor que 1/7 y éste a la vez menor que 1/6. Con esta información se pueden ordenar las fracciones.

Con base en lo anterior, otra forma para ordenar las fracciones, es guiar al alumno a través de las siguientes preguntas:
¿Cuáles son las unidades en este caso? R= los peces y el tiempo
¿De cuántos peces está compuesta nuestra unidad? R= de 60 peces
Cuando se habla de fracciones como en el caso de 1/6:
¿Qué es lo que indica el denominador? R= el número de partes en qué esta dividida la unidad.
Por lo tanto en ¿cuántas partes está divida la unidad? R= 6
Si nuestra unidad es igual a 60 peces ¿cuántos peces tendría cada uno de esos sextos? R= 10
¿Qué nos indica el numerador? R= las partes que se tienen de la unidad

¿En 1/6 cuántas partes dice que tenemos? R= 1

Entonces ¿A cuántos peces equivale 1/6? R= 10

En el caso del tiempo ¿A cuánto es igual nuestra unidad? R= a 1 hora

¿Podemos dividir una hora? R= Si

¿Cómo? R= convirtiendo la hora en minutos (60 minutos).

Cuando hablamos de 1/6:

¿Qué es lo qué nos está indicando el denominador? R= el número de partes en qué esta dividida la unidad.

Por lo tanto ¿en cuántas partes está divida la unidad? R= 6

Si nuestra unidad es igual a 60 minutos ¿cuántos minutos tendría cada uno de esos sextos? R= 10

¿Qué nos indica el numerador? R= las partes que se tienen de la unidad

¿En 1/6 cuántas partes dice que tenemos? R= 1

Entonces ¿A cuántos minutos equivale 1/6? R= 10

Para saber la cantidad de peces y de tiempo tienen que transformar las fracciones, para lo cual es necesario que el numerador se multiplique por la cantidad total de peces (60) o de tiempo (1 hora = 60 minutos) y dividir el resultado entre el denominador.

Dado que el problema es de fracciones, en caso de que los alumnos no puedan comprender el problema de forma escrita, el profesor puede detenerse a explicar a los alumnos verbalmente el problema sin dar el resultado ni los procedimientos correctos.

HOJA DE RESPUESTAS PARA "LOS PECES DE LA FERIA"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ____________

Problema:

Juan tiene un puesto de peces en la feria. Como sus hijos tienen problemas en fracciones, inventó un juego en el que tenían que utilizarlas. En una tina Juan colocó 60 peces y les dijo que entre más peces pescaran, les daría más tiempo para realizar la pesca y un premio más grande en dinero, pero en lugar de decirles directamente los datos les dio una tabla con los datos en desorden de fracciones de peces y de tiempo y la cantidad en dinero del premio correspondiente. Los hijos de Juan deben transformar la fracción de peces (fila 1) a cantidad de peces (fila 2) y luego ordenar de mayor a menor (fila 3); el tiempo en fracción de una hora (fila 4) deben transformarlo a minutos (fila 5) y luego también ordenarlo de mayor a menor (fila 6). Finalmente el dinero (fila 7) deben ordenarlo también de mayor a menor (fila 8). De esta manera mientras más peces tengan que pescar, contarán con mayor tiempo y obtendrán más dinero ¿Podrías ayudarles a decidir qué cantidad de peces, se relaciona con el tiempo que se les da para pescarlos y con el premio que deberían ganar?

Fracción a pescar	Cantidad de peces	Orden de las cantidades	Tiempo	Tiempo en minutos	Orden de los tiempos	Premios	Orden de los premios
$\frac{1}{5}$			$\frac{1}{20}$			\$20.00	
$\frac{24}{32}$			$\frac{4}{24}$			\$10.00	
$\frac{1}{12}$			$\frac{2}{8}$			\$120.00	
$\frac{6}{24}$			$\frac{1}{10}$			\$180.00	
$\frac{4}{80}$			$\frac{6}{20}$			\$50.00	
$\frac{1}{10}$			$\frac{1}{12}$			\$80.00	
$\frac{8}{24}$			$\frac{4}{20}$			\$60.00	
$\frac{4}{15}$			$\frac{1}{2}$			\$30.00	
$\frac{2}{15}$			$\frac{1}{60}$			\$70.00	
$\frac{2}{30}$			$\frac{2}{6}$			\$40.00	

Operaciones

Actividad 19. Carmen y el reparto de dulces

Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para realizar el reparto de unidades de peso en su interpretación como parte – todo, cociente y porcentaje utilizando fracciones propias.

Materiales:

Hoja por equipo con el problema escrito
Dados

Descripción de la actividad

Al inicio de la sesión, el profesor entregará a los equipos la hoja con el problema impreso y les explicará que en esta ocasión primero resolverán el problema y una vez que todos hayan terminado pasarán a escribirlo y explicarlo en el pizarrón. Al finalizar, el equipo que haya terminado en el menor tiempo y tenga el resultado correcto será el ganador.

Se otorgará a los equipos un plazo de 25 minutos para leer, discutir y dar solución al problema. Mientras tanto el profesor ofrecerá diversos niveles de ayuda a los equipos que así lo requieran, recordando evitar ofrecer la respuesta o datos que lleven directamente a ella.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor. Posteriormente, un representante de cada equipo pasará a escribir en el pizarrón y explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado. El profesor comparará y comentará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos.

Planteamiento del problema

Primera parte

Carmen y sus amigas cooperaron para comprar dulces. Carmen dio $2.00, María $2.00 y Sara dio $4.00. Con sus $8.00 pesos les alcanzaba para 400 g. de dulces y Carmen se ofreció a ir a comprarlos. ¿Podrías ayudarles diciéndoles cuántos gramos de dulces les corresponden, según la cantidad de dinero que pusieron?

Segunda parte

Ahora que Carmen sabe cuántos gramos de dulces realmente tiene, ella quiere saber cuántos gramos le corresponden a cada quien, para poder explicar a sus amigas qué pasó y cómo resolvió el problema. ¿Podrías ayudarle nuevamente a repartir los dulces entre las tres?

Tercera parte

Después de que Carmen explicó a sus amigas que le robaron el ______ _________% de los dulces, y les dijo la cantidad de gramos que le correspondería a cada una, decidieron ponerse de acuerdo para repartir los sabores. Como a Carmen no le gusta la piña y a María no le gusta la fresa, los repartieron según lo muestra la siguiente tabla. ¿Podrías decir qué fracción de cada sabor le tocó a cada una de ellas?

Sugerencias para la mediación

En la primera sección del problema hay que igualar los 400 gramos de dulces, con los 8 pesos que dieron las tres niñas. Es decir, si Sara dio la mitad de los ocho pesos, le corresponden la mitad de los dulces, lo que es igual al 50%, y si las otras niñas dieron cada una ¼ parte del dinero, les corresponde ¼ parte de los dulces, lo que es igual al 25%.

En la segunda sección del problema hay que considerar que si el 100% son 400 g. el 10% es el resultado de la división del 100% entre 10, lo que a su vez equivale a dividir los 400 g. entre 10 lo que es igual a 40 g. de los dulces. Si a Carmen le robaron 10 g. quiere decir que le quitaron ¼ parte de los 40 g. entre 4. Si el 10% al que es equivalente los 40 g. se divide entre 4 se tiene el 2.5%, Es decir los 10 gramos faltantes equivalen al 2.5%.

En la tercera parte nuevamente hay que igualar los 390 gramos de dulces, con los 8 pesos que dieron las tres niñas. Es decir, si Sara dio la mitad de los ocho pesos, le corresponden la mitad de los dulces, lo que es igual a 195 g. e igual al 50%, y sí las otras niñas dieron cada una ¼ parte del dinero, les corresponde ¼ parte de los dulces, lo que es igual a 95 g. e igual al 25%.

En la última sección del problema tenemos dos casos:

El primero de ellos se da cuando se reparten una cantidad igual de gramos de dulces de algún sabor. Si es este el caso, el profesor puede preguntar a los alumnos, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

¿Cuántos gramos de dulces de sabor frambuesa hay? R= 90 g.

¿Cuántos gramos de dulces sabor frambuesa le tocó a cada niña? R= A Carmen le tocaron 30 g., a María le tocaron 30 g., y a Sara le tocaron 30 g.

¿En cuántas partes se han repartido los 90 g? R= en 3 partes

Si la unidad se ha repartido en tres partes ¿qué fracción le toco a cada una? R= 1/3

El segundo de los casos, se da cuando la cantidad repartida es desigual. Si es este el caso, el profesor puede preguntar a los alumnos, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

¿Cuántos gramos de dulces de sabor cereza hay? R= 60 g.

¿Cuántos gramos de dulces sabor cereza le tocó a cada niña? R= A Carmen le tocaron 2.5 g., a

María le tocaron 2.5 g., y a Sara le tocaron 55 g.

¿A todas las niñas les tocó la misma cantidad? R= No

¿En qué cantidades se ha repartido la fracción? R= En 2.5 g. y 55 g.

Si se reparte los 60 dulces en partes de 55 ¿Se podría hacer sin que sobrara nada? R= No

Si se reparte los 60 dulces en partes de 2.5 g. ¿Se podría? R= Sí

¿En cuántas partes se repartiría? En la primera sección del problema hay que igualar los 400 gramos de dulces, con los 8 pesos que dieron las tres niñas. Es decir, si Sara dio la mitad de los ocho pesos, le corresponden la mitad de los dulces, lo que es igual al 50%, y si las otras niñas dieron cada una ¼ parte del dinero, les corresponde ¼ parte de los dulces, lo que es igual al 25%.

En la segunda sección del problema hay que considerar que si el 100% son 400 g. el 10% es el resultado de la división del 100% entre 10, lo que a su vez equivale a dividir los 400 g. entre 10 lo que es igual a 40 g. de los dulces. Si a Carmen le robaron 10 g. quiere decir que le quitaron ¼ parte de los 40 g. entre 4. Si el 10% al que es equivalente los 40 g. se divide entre 4 se tiene el 2.5%, Es decir los 10 gramos faltantes equivalen al 2.5%.

En la tercera parte nuevamente hay que igualar los 390 gramos de dulces, con los 8 pesos que dieron las tres niñas. Es decir, si Sara dio la mitad de los ocho pesos, le corresponden la mitad de los dulces, lo que es igual a 195 g. e igual al 50%, y sí las otras niñas dieron cada una ¼ parte del dinero, les corresponde ¼ parte de los dulces, lo que es igual a 95 g. e igual al 25%.

En la última sección del problema tenemos dos casos:

El primero de ellos se da cuando se reparten una cantidad igual de gramos de dulces de algún sabor. Si es este el caso, el profesor puede preguntar a los alumnos, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

¿Cuántos gramos de dulces de sabor frambuesa hay? R= 90 g.

¿Cuántos gramos de dulces sabor frambuesa le tocó a cada niña? R= A Carmen le tocaron 30 g., a María le tocaron 30 g., y a Sara le tocaron 30 g.

¿En cuántas partes se han repartido los 90 g? R= en 3 partes

Si la unidad se ha repartido en tres partes ¿qué fracción le toco a cada una? R= 1/3

El segundo de los casos, se da cuando la cantidad repartida es desigual. Si es este el caso, el profesor puede preguntar a los alumnos, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

¿Cuántos gramos de dulces de sabor cereza hay? R= 60 g.

¿Cuántos gramos de dulces sabor cereza le tocó a cada niña? R= A Carmen le tocaron 2.5 g., a

María le tocaron 2.5 g., y a Sara le tocaron 55 g.

¿A todas las niñas les tocó la misma cantidad? R= No

¿En qué cantidades se ha repartido la fracción? R= En 2.5 g. y 55 g.

Si se reparte los 60 dulces en partes de 55 ¿Se podría hacer sin que sobrara nada? R= No

Si se reparte los 60 dulces en partes de 2.5 g. ¿Se podría? R= Sí

¿En cuántas partes se repartiría? R= 24

Si hay 24 partes y cada una de ellas representa 2.5 g. ¿Cuántas partes le tocaron a Carmen? R= 1

¿Cómo se expresa esa cantidad con fracciones? R= 1/24

¿Qué fracción le tocó a María? R= 1/24

Si a Sara le tocó el resto de los dulces ¿Qué fracción le tocó? R= 22/24

R= 24

Si hay 24 partes y cada una de ellas representa 2.5 g. ¿Cuántas partes le tocaron a Carmen? R= 1

¿Cómo se expresa esa cantidad con fracciones? R= 1/24

¿Qué fracción le tocó a María? R= 1/24

Si a Sara le tocó el resto de los dulces ¿Qué fracción le tocó? R= 22/24

HOJA DE RESPUESTAS PARA "CARMEN Y EL REPARTO DE DULCES"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

Carmen y sus amigas cooperaron para comprar dulces. Carmen dio \$2.00, María \$2.00 y Sara dio \$4.00. Con sus \$8.00 pesos les alcanzaba para 400 g. de dulces y Carmen se ofreció a ir a comprarlos. ¿Podrías ayudarles diciéndoles cuántos gramos de dulces les corresponden, según la cantidad de dinero que pusieron?

Operaciones:

A Carmen le corresponden:__________gramos de dulces.
A María le corresponden:____________gramos de dulces.
A Sara le corresponden:_____________gramos de dulces.

Después de haber comprado los dulces, Carmen los pesó para saber si le habían dado la cantidad correcta. Para su sorpresa, descubrió que le habían dado 10 g. menos de dulces ¿Podrías decirle qué porcentaje de los dulces le han robado?

Operaciones:

Le robaron el _________% de los 400 g

Ahora que Carmen sabe cuántos gramos de dulces realmente tiene, ella quiere saber cuántos gramos le corresponden a cada quien, para poder explicar a sus amigas qué pasó y cómo resolvió el problema. ¿Podrías ayudarle nuevamente a repartir los dulces entre las tres?

Operaciones:

A Carmen le corresponden:_________________________gramos de dulces.
A María le corresponden:_________________________gramos de dulces.
A Sara le corresponden:__________________________gramos de dulces.

Después de que Carmen explicó a sus amigas que le robaron el _______ __________% de los dulces, y les dijo la cantidad de gramos que le correspondería a cada una, decidieron ponerse de acuerdo para repartir los sabores. Como a Carmen no le gusta la piña y a María no le gusta la fresa, los repartieron según lo muestra la siguiente tabla. ¿Podrías decir qué fracción de cada sabor le tocó a cada una de ellas?

Cantidad de dulces que hay de cada sabor	**Carmen**	**María**	**Sara**
70 g. de fresa	35 gramos	0 gramos	35 gramos
90 g. de uva	30 gramos	30 gramos	30 gramos
60 g. de naranja	2.5 gramos	2.5 gramos	55 gramos
130 g. de piña	0 gramos	65 gramos	65 gramos
40 g. de limón	30 gramos	0	10 gramos

Operaciones:

Cantidad de dulces que hay de cada sabor	**Fracción que le tocó a Carmen**	**Fracción que le tocó a María**	**Fracción que le tocó a Sara**
70 g. de fresa			
90 g. de uva			
60 g. de naranja			
130 g. de piña			
40 g. de limón			

Actividad 20. El festival de la escuela

Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para realizar el reparto de unidades de peso en su interpretación como parte – todo, como cociente y como decimales.

Materiales:

Hoja por equipo con el problema escrito
Dados

Descripción de la actividad

Al inicio de la actividad, el profesor le dará a cada uno de los equipos el problema impreso y les explicará que tienen un plazo de 25 minutos para leer, discutir y dar solución al problema. Mientras tanto el profesor ofrecerá diversos niveles de ayuda a los equipos que así lo requieran, recordando evitar ofrecer la respuesta o datos que lleven directamente a ella.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor.

Posteriormente, un representante de cada equipo pasará a escribir en el pizarrón y explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado. El profesor comparará y comentará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos.

Planteamiento del problema

Primera parte

Eva y sus amigos han decidido vender fruta picada en el festival de la escuela. Para esto, Eva cooperó llevando una sandia que pesaba 3,200 g. Saúl llevó unos plátanos que pesaban 1/4 de lo que pesaba la sandía, Joel llevó una papaya que pesaba 6/8 del peso de la sandia y Ana tres melones que juntos pesaban 3/8 del peso de la sandía. ¿Cuántos gramos de fruta obtendrán en total?

Segunda parte

Una vez que pelaron y cortaron la fruta, se dieron cuenta de que habían perdido el 10% del peso total al quitar la cáscara ¿Cuánto quedó de fruta?

Tercera parte

La fruta picada se va a vender en cuatro diferentes cantidades. Entre más gramos se utilicen de fruta, mayor será su valor. A continuación se muestran las diferentes fracciones que se van a emplear y los precios ¿Podrías relacionar con una línea el precio y la fracción que corresponden?

Cuarta parte

¿Cuántos gramos de fruta tendrán cada uno de los cuatro tamaños?

Sugerencias para la mediación

En la primera sección del problema para sacar la cantidad de fruta que llevó cada uno es necesario partir de la cantidad que llevó Eva, es decir 3,200 gramos de sandía. A continuación se hace una tabla de equivalencias.

La unidad o el entero son igual a 3, 200 gramos. Es decir:

Eva: 1 = 3,200 gramos

Saúl: 1/4 = 3,200/4 = 800 gramos

Joel: 6/8 = 3,200/8 x 6 = 2400 gramos

Ana; 2/8 = 3,200/8 x 2 = 800 gramos

Luego entonces, si Eva llevó 3,200 g. de sandía y Saúl llevó ¼ del peso de la sandía en plátanos, esto es igual a decir que la sandía es dividida en 4/4, por lo que cada cuarto pesa 800 gramos, que a su vez es igual a la cantidad de gramos que llevó Saúl. Si Joel llevó 6/8 de papaya, en gramos llevó 2,400 y sí Ana llevo 2/8 de melón, en gramos llevó 1200 gramos.

En la segunda sección hay que tener en cuenta que cuando se habla del porcentaje, el total de la unidad o los gramos de la unidad, se iguala con otra unidad cuyo valor es 100, es decir en este caso los 7, 200 gramos equivalen al 100%. Si el 100% son 7, 200 g. el 10% es el resultado de la división del 100% entre 10, lo que a su vez equivale a dividir los 7, 200 g. entre 10, lo que es igual a 720 g. La cantidad que quedó de fruta es igual a la resta del 100% (7, 200 g) menos el 10% (720).

En la última sección del ejercicio, se ordenarán de mayor a menor las fracciones y las cantidades y se establecerá la relación entre la cantidad y el peso. A mayor peso, mayor será su costo.

Para poder ordenar las fracciones de mayor a menor, se deben buscar fracciones equivalentes, lo cual se consigue al convertir todas las fracciones a ochentavos. Esto se logra al encontrar un número que multiplicado por el denominador de ochenta. De tal modo, para encontrar la fracción equivalente de 1/20, es necesario multiplicar el numerador y denominador por cuatro, lo que da como resultado 4/80.

O bien primero se puede realizar la conversión de fracciones a gramos con lo cual se sabrá claramente cual de las fracciones es mayor y se relacionará con el mayor peso, y de igual modo las sucesivas fracciones.

En la última parte del ejercicio, para saber cuántos gramos de fruta hay en cada vaso hay que tener en cuenta que la unidad a repartir es igual a la cantidad total de gramos de fruta, es decir, 6, 480 g. y que lo que corresponde a cada vaso es la unidad dividida entre el número de partes, es decir, entre el denominador, a su vez, la cantidad de los gramos de cada vaso corresponde con el número de partes que se tienen de la unidad, lo cual es representado por el numerador; por esta razón los gramos de cada vaso son el resultado de la división de la unidad entre el denominador, multiplicados por en numerador. Por ejemplo, si en el vaso hay ¾ de fruta, la unidad 6,480 se divide entre 4, lo que es igual a 1, 620, y se multiplica por 3, lo que a su vez es igual a 4, 860, que es la cantidad de gramos que representan los 3/4.

HOJA DE RESPUESTAS PARA "EL FESTIVAL DE LA ESCUELA"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

Eva y sus amigos han decidido vender fruta picada en el festival de la escuela. Para esto, Eva cooperó llevando una sandia que pesaba 3,200 g. Saúl llevó unos plátanos que pesaban 1/4 de lo que pesaba la sandía, Joel llevó una papaya que pesaba 6/8 del peso de la sandia y Ana tres melones que juntos pesaban 2/8 del peso de la sandía. ¿Cuántos gramos de fruta obtendrán en total?

Operaciones:

Eva llevó ____________________ gramos de sandía
Saúl llevó ___________________ gramos de plátano
Joel llevó __________________ gramos de papaya.
Ana llevó ____________________ gramos de melón.
Entre los cuatro juntaron ____________ gramos de fruta

Una vez que pelaron y cortaron la fruta, se dieron cuenta de que habían perdido el 10% del peso total al quitar la cáscara ¿Cuánto quedó de fruta?

Operaciones:

Quedaron _________________________ gramos de fruta.

La fruta picada se va a vender en cuatro diferentes cantidades. Entre más gramos se utilicen de fruta, mayor será su valor. A continuación se muestran las diferentes fracciones que se van a emplear y los precios ¿Podrías relacionar con una línea el precio y la fracción que corresponden?

Fracción que emplearon de fruta picada	Precio
$\frac{1}{20}$	$10.00
$\frac{5}{80}$	$4.00
$\frac{1}{40}$	$6.00
$\frac{3}{80}$	$8.00

Operaciones:

¿Cuántos gramos de fruta tendrán cada uno de los cuatro tamaños?

Fracción que emplearon de fruta picada	Gramos de fruta
$\frac{1}{20}$	
$\frac{5}{80}$	
$\frac{1}{40}$	
$\frac{3}{80}$	

Actividad 21. La pesca II

Objetivo:

Reconocer la relación entre fracciones y porcentajes de unidades discretas

Emplear la representación gráfica como apoyo para que los alumnos refuercen la simplificación de fracciones.

Materiales:

Lámina con las invariantes impresas
Caña, peces y tablero utilizados en la actividad 13
Hojas de respuestas
Dados

Descripción de la actividad

Al inicio de la actividad, se mostrará a los alumnos el tablero con los peces, explicándoles que los emplearemos para jugar a pescar y se les dará una hoja estructurada en la que aparecen los datos de los diez ejercicios sin decir la fracción ni la instrucción ("Tabla de pesca"). En ella deben anotar sus respuestas. El juego consistirá en lo siguiente:

El profesor anotará en el pizarrón el número del ejercicio, la fracción que le corresponde, la instrucción (pescar o dejar) e indicará a los alumnos que tienen cinco minutos para resolverlo. En cada ejercicio los miembros del equipo discutirán y decidirán la simplificación de la fracción, su representación gráfica, el porcentaje y la cantidad de peces que deben pescar o dejar. A continuación se presenta una tabla con los ejercicios que el profesor solicitará a los alumnos.

TABLA DE EJERCICIOS		
Ejercicio	**Fracción**	**Instrucción**
1	1/2	Pescar
2	1/4	Pescar
3	4/16	Pescar
4	5/10	Pescar
5	4/40	Pescar
6	3/4	Dejar
7	16/20	Dejar
8	15/20	Dejar
9	6/30	Pescar
10	3/100	Pescar

Se colocará frente al pizarrón el tablero con las 60 ranuras y se irán anotando en el pizarrón los ejercicios contenidos en el siguiente cuadro (uno a la vez).

El profesor elegirá al azar a un equipo para dar respuesta al ejercicio, colocará en el tablero el número de unidades y de peces por unidad que correspondan al mismo y les dirá qué fracción de peces deben pescar o dejar en el tablero.

Para facilitar la comprensión, cuando el número de unidades sea mayor que uno, se sugiere emplear un color diferente de peces para cada unidad.

Si el representante o el equipo seleccionado no pueden explicar sus procedimientos o no tienen el resultado correcto, se seleccionará a otro de los equipos usando los dados.

El equipo contará con el tiempo especificado en cada ejercicio para decir su solución al problema. Si la respuesta es correcta, uno de sus integrantes tomará la caña y desde una distancia previamente acordada intentará quitar del tablero los peces que sea necesario para dejar en él los que correspondan al resultado.

Para continuar el juego o utilizarlo en diversas ocasiones, el profesor puede adecuar el número de ejercicios y el nivel de dificultad de los mismos según las características de sus alumnos.

El profesor puede favorecer la competencia entre equipos, otorgando puntos por la respuesta, el resultado de la pesca y si así lo desea, incluir algunas preguntas respecto a las invariantes.

Terminado el tiempo, el profesor revisara las hojas de los equipos para registrar procedimientos y resultados, con el fin de asignar las puntuaciones del día.

Como en otros ejercicios se utilizará el dado, para saber el número del equipo que pasará al frente a decir su resultado, explicar sus procedimientos y en su caso realizar la pesca.

Para realizar la evaluación total de procedimientos y resultados del día, se tendrán en cuenta la cantidad de ejercicios realizados, calificando de acuerdo a lo siguiente:

- 1 punto si el equipo tuvo todos los ejercicios bien o si sólo en uno de ellos tuvo un resultado parcial
- ½ punto si tuvo mal alguno o varios de los problemas.
- 0 puntos si no tuvo correcto ninguno de los problemas.

Las puntuaciones de la exposición y de las invariantes sólo se darán a los equipos que pasen al frente, y respondan bien a una pregunta referente a las invariantes. El equipo que salga sorteado una vez, no podrá repetir turno, hasta que le haya tocado pasar al resto de los equipos.

Sugerencias para la mediación

En esta ocasión para una mayor comprensión del ejercicio, antes de iniciar la actividad, el maestro realizará un ejemplo de cómo los equipos deben llenar los apartados de la hoja que se les ha entregado, pidiendo para ello la participación de los equipos para que en conjunto se brinden las respuestas requeridas.

El profesor trazará una tabla en el pizarrón y explicará a los alumnos que en la fila 1 de la tabla se les ha escrito la cantidad de unidades y en la dos la cantidad de peces que tiene la unidad. La fila 3 está en blanco porque el profesor les escribirá en el pizarrón la fracción que deben pescar o dejar. Por ejemplo, les puede pedir que pesquen 6/24. En la fila 4 ellos tienen que simplificar la fracción, para ello tienen que comprobar si existe un numero en el que tanto el numerador y denominar sea divisible, por ejemplo el numerador 6 es divisible entre 2 al igual que el denominador 24, por lo que 6/24 es igual a 3/12; a su vez el 3 y el 12 son divisibles entre 3, por lo que 3/12 es igual a 1/4, el cual ya no puede volver a dividirse salvo entre 1 que daría el mismo resultado.

Una vez que se ha simplificado la fracción, ésta debe representarse gráficamente en la fila 5, para lo cual es necesario representar mediante un dibujo (pueden ser peces o figuras geométricas como un círculo) la unidad o unidades y el número de peces por los que esta compuesta. Por ejemplo, si hay una unidad y tiene 8 peces, se pueden representar por medio de 8 círculos que estén juntos. Después de esto se sombraran el número de peces que indica la fracción. En la unidad descrita, al contar con 8 elementos, si nos piden ¼ se sombrearan únicamente dos elementos, esto es debido a que visualmente podemos separar en cuatro partes nuestra representación gráfica y una de esas cuatro partes está constituida por dos elementos.

En la 6 escribiremos el porcentaje, en este caso, hay que tener en cuenta que cuando se habla del porcentaje, el total de elementos de la unidad o de la suma de unidades, se iguala a una unidad compuesta por 100 elementos, de esta manera si hablamos de 4/4 como se ha visto en los ejemplos anteriores, cada cuarto representa una cuarta parte de 100, es decir 25, 25%. Por ejemplo, en la representación grafica se sombrearon dos peces (1/4), si se sombrean cuatro, se representaría la mitad que es igual al 50% de los peces.

En la fila 7 se anotara el número de peces que se pescó, esto se sabe a través de la cantidad de figuras sombreadas en la representación gráfica y finalmente en la fila ocho anotarán la instrucción la cual puede ser pescar o dejar peces, esta instrucción será dada por el profesor.

Durante el ejemplo el profesor puede apoyarse en la tabla de pesca y puede variar los ejemplos, pidiendo la participación de los alumnos para que sean ellos quienes vayan resolviendo el ejercicio. Por ejemplo, puede decir “que pasaría si en la representación gráfica sombreáramos cuatro peces ¿de qué fracción estaríamos hablando? o ¿qué porcentaje de los peces tendría que pescar si me piden que pesque ½?

Unidades	Elementos	Fracción	Simplificación	Representación gráfica	Porcentaje	Número de peces	Instrucción
1	8	$\frac{6}{24}$	$\frac{6}{24} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	●○○○ ●○○○	25 %	2	Pescar

HOJA DE RESPUESTAS PARA "LA PESCA"

Nombre del equipo: ______________________ **Fecha:** ______________________

TABLA DE PESCA

Unidades	Elementos	Fracción	Simplificación	Representación gráfica	Porcentaje	Número de peces	Instrucción
1	4						
1	20						
1	16						
1	18						
1	40						
1	12						
1	10						
1	20						
1	15						
1	10						

Actividad 22. El juego de peces de Andrés

Objetivo:

Reconocer la relación entre fracciones y porcentajes de unidades discretas

Materiales:

Lámina con las invariantes impresas
Caña, peces y tablero utilizados en la actividad 13
Hojas de respuestas
Dados

Descripción de la actividad

Al inicio de la actividad, el profesor dará a cada uno de los equipos el problema impreso y mostrará a los alumnos el tablero con todos los peces en su lugar, explicándoles que los emplearemos al finalizar el ejercicio.

Después de la explicación, se otorgará a los equipos un plazo de 25 minutos para leer, discutir y dar solución al problema. Mientras tanto el profesor ofrecerá diversos niveles de ayuda a los equipos que así lo requieran, recordando evitar ofrecer la respuesta o datos que lleven directamente a ella.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor.

Posteriormente, un representante de cada equipo pasará a escribir en el pizarrón y explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado. El profesor comparará y comentará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos.

Al terminar, el equipo que haya terminado el problema en el menor tiempo y que tenga los procedimientos y resultados correctos podrá ejemplificar sus resultados ante el grupo utilizando el tablero con los peces.

Planteamiento del problema

Primera parte

Andrés compró un juego de peces para enseñar a sus hijos, Juan y Javier, a sacar porcentajes. El juego tiene 60 peces de colores, 20 azules, 20 amarillos y 20 rojos. Para empezar, Andrés les preguntó a sus hijos lo siguiente:

Si tenemos todos los peces en su lugar el 100% de los peces que hay es de __________________ peces.

El 50% de los peces que hay en el tablero es de __________________ peces.

¿Cómo se representa en fracción el 50%, utilizando el denominador 100? R=______________

¿Cómo puedes simplificarla hasta llegar a la fracción menor? _______

Segunda parte

Con los 60 peces del tablero, Andrés organizó una competencia de porcentajes entre sus dos hijos. Cada uno de ellos va a quitar del tablero un porcentaje de peces y a sacar la cuenta de cuántos van a quedar. El ganador será aquél que no cometa ningún error. ¿Podrías ayudarles a decidir la cantidad de peces que deben quitar y los que van a quedar en cada caso?

Tercera parte

Como ninguno de los hijos cometió errores, Andrés decidió reiniciar el juego, y para hacerlo más difícil les dijo que esta vez sacarían porcentajes y fracciones por color. Ahora cada uno de ellos debe quitar los peces, según lo indica la tabla de abajo ¿Podrías ayudarles a saber cuántos peces deben quitar y cuántos quedan en cada caso?

Sugerencias para la mediación

"El porcentaje es una fracción con denominador 100, es decir $\frac{1}{100}$. Si queremos sacar el 50%, tenemos que tomar $\frac{50}{100}$, lo que es igual a $\frac{5}{10}$ e igual a $\frac{1}{2}$.

El profesor puede partir de las siguientes preguntas:

¿Cuál es la unidad o la cantidad total de los peces que hay en el tablero? R= 60 peces

Si hablamos de que el porcentaje es también una fracción ¿cuál será la unidad o el todo? R= 100%

Para representar el porcentaje como fracción ¿Cuál será el denominador o en cuántas partes estará dividida la fracción? R= la fracción es dividida en 100 partes

Entonces ¿Cómo representarían el porcentaje como fracción? R= $\frac{100\%}{100\%}$

¿Podríamos simplificáramos esa fracción? ¿Qué fracción obtendríamos? R= $\frac{1\%}{1\%}$

Ahora bien supongamos que sólo tenemos el 50% de los peces ¿Cómo representaríamos esa fracción? R= $\frac{50\%}{100\%}$

¿Podríamos simplificáramos esa fracción? ¿Qué fracción obtendríamos? R= $\frac{50\%}{100\%}$, es igual a $\frac{5\%}{10\%}$ e igual a $\frac{1\%}{2\%}$

¿De cuántos peces está compuesta nuestra unidad? R= de 60 peces

Cuando hablamos de $\frac{1\%}{2\%}$:

¿Qué es lo qué nos está indicando el denominador? R= el número de partes en qué esta dividida la unidad.

Por lo tanto en ¿cuántas partes está divida la unidad? R= 2

Si nuestra unidad es igual a 60 peces ¿cuántos peces tendría cada medio? R= 30

¿Qué nos indica el numerador? R= las partes que se tienen de la unidad

¿En $\frac{1\%}{2\%}$ cuántas partes dice que tenemos? R= 1

Entonces ¿A cuántos peces equivale $\frac{1\%}{2\%}$? R= 30 peces

¿Si no hubiésemos simplificado la fracción obtendríamos el mismo resultado? R= sí.

Para la segunda parte de la mediación el profesor podría preguntar:

En este caso ¿Qué es lo primero que debemos de hacer? R= obtener el numero de peces que representa el porcentaje.

Una vez que sabemos el número de peces que representa el porcentaje ¿qué operación se necesita para saber el número de peces que quedan? R= a una resta.

En la última parte del ejercicio el profesor puede volver a emplear las mismas preguntas de los primeros apartados de ejercicio.

HOJA DE RESPUESTAS PARA "EL JUEGO DE PECES DE ANDRÉS"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

Andrés compró un juego de peces para enseñar a sus hijos, Juan y Javier, a sacar porcentajes. El juego tiene 60 peces de colores, 20 azules, 20 amarillos y 20 rojos. Para empezar, Andrés les preguntó a sus hijos lo siguiente:

Si tenemos todos los peces en su lugar el 100% de los peces que hay es de __________________ peces.
El 50% de los peces que hay en el tablero es de __________________ peces.
¿Cómo se representa en fracción el 50%, utilizando el denominador 100? R=______________
¿Cómo puedes simplificarla hasta llegar a la fracción menor? ________________________.

Operaciones:

Con los 60 peces del tablero, Andrés organizó una competencia de porcentajes entre sus dos hijos. Cada uno de ellos va a quitar del tablero un porcentaje de peces y a sacar la cuenta de cuántos van a quedar. El ganador será aquél que no cometa ningún error. ¿Podrías ayudarles a decidir la cantidad de peces que deben quitar y los que van a quedar en cada caso?

El 20% del total de los peces es igual a ______ y al quitarlos quedan _______ Peces.

De los peces que quedaron el 25% es igual a ______ y al quitarlos quedan _______ Peces.

De los peces que quedaron el 25% es igual a ______ y al quitarlos quedan _______ Peces.

De los peces que quedaron el 100% es igual a ______ y al quitarlos quedan _______ Peces.

De los peces que quedaron el 50% es igual a ______ y al quitarlos quedan _______ Peces.

Operaciones:

Como ninguno de los hijos cometió errores, Andrés decidió reiniciar el juego, y para hacerlo más difícil les dijo que esta vez sacarían porcentajes y fracciones por color. Ahora cada uno de ellos debe quitar los peces, según lo indica la tabla de abajo ¿Podrías ayudarles a saber cuántos peces deben quitar y cuántos quedan en cada caso?

Nombre	**% o fracción de peces que deben quitar por color**			**# de peces que hay que quitar de cada color**			**# de peces que quedan de cada color**			**# de peces que quedan en total en el tablero.**
	rojo	***azul***	***amarillo***	***rojo***	***azul***	***amarillo***	***rojo***	***azul***	***amarillo***	
Juan	20%	0%	1/10							
Javier	0%	25%	2/18							
Juan	1/16%	1/3	0%							
Javier	20%	10%	12.5							
Juan	0/12%	1/9	1/7							
Javier	1/3	75%	25%							
Juan	1/8	50%	100%							

Operaciones:

Actividad 23. El día del niño

Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para realizar el reparto de unidades discretas, en su interpretación como parte – todo, como cociente, como porcentaje y como razón del tipo de fracción propia.

Materiales:

Hoja por equipo con el problema escrito
Dados

Descripción de la actividad

Al inicio de la sesión, el profesor entregará a los equipos la hoja con el problema impreso y pedirá a algún voluntario que lea el problema. Una vez que haya concluido la lectura el profesor indicará a los alumnos que pueden empezar a resolver el problema por escrito y después pasarán a explicarlo en el pizarrón. Al finalizar, el equipo que tenga el resultado correcto en el menor tiempo será el ganador.

Después de la explicación, se otorgará a los equipos un plazo de 10 minutos para leer, discutir y dar solución a la primera parte del ejercicio; para la segunda se darán 5 minutos; para la tercera 10 y para la cuarta 10 minutos. Mientras tanto el profesor ofrecerá diversos niveles de ayuda a los equipos que así lo requieran, recordando evitar ofrecer la respuesta o datos que lleven directamente a ella.

En cada una de las partes del ejercicio, si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor.

Posteriormente, un representante de cada equipo pasará a escribir en el pizarrón y explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado. El profesor comparará y comentará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos.

Planteamiento del problema

Primera parte del problema

En la escuela de Pedro se hizo una fiesta con motivo del día del niño. A cada alumno se le pidió que llevara algo para comer. Pedro y su amigo dijeron que juntos podían cooperar con un paquete de 10 cajitas de cereales surtidos. Si 1 de cada 3 niños recibirá una cajita de cereal, ¿Podrías decir cuántos alumnos hay en el salón?

Segunda parte del problema

Su maestro acababa de revisar el tema de porcentajes, y aprovechó para preguntar a sus alumnos la fracción y el porcentaje de alumnos que alcanzarían cajita de cereal ¿Podrías ayudarles a contestar?

Tercera parte del problema

Después, el profesor sugirió que también otros 4 alumnos llevaran 1 paquete de cereal por pareja, para que a todos los alumnos les tocara por lo menos una cajita, y les hizo otras preguntas ¿Podrías ayudarles a contestarlas?

Si Pedro, su amigo y los otros 4 alumnos llevaron cereales:

- ✓ ¿Qué fracción del total de alumnos llevaron cereales?
- ✓ ¿A qué porcentaje del total de alumnos corresponde esa fracción?
- ✓ ¿6 de cada cuántos alumnos se encargaron de llevar paquetes de cereal?
- ✓ ¿3 de cada cuántos alumnos se encargaron de llevar paquetes de cereal?
- ✓ ¿2 de cada cuántos alumnos se encargaron de llevar paquetes de cereal?

Cuarta parte del problema

El profesor preguntó a Pedro si todas las cajitas de cereal eran iguales y Pedro le dijo que había diferentes sabores, pero que sólo recordaba el color de las cajitas. Dijo que de cada 10 cajitas 3 eran amarillas, 3 eran azules, 2 eran rojas y 2 eran cafés

Para decidir cómo repartir los sabores, el profesor puso a sus alumnos a contestar las siguientes preguntas:

Si se compraron 3 paquetes con 10 cajitas cada uno, en total había ___________ cajitas amarillas; ___________ cajitas azules; _____________cajitas rojas y ___________cajitas cafés.

¿Cuántos niños recibieron cajitas por cada uno de los colores?

¿Qué porcentaje de los niños recibieron cajitas de cada color?

¿Qué fracción de niños recibieron cajitas de cada color?

Sugerencias para la mediación

En la primera parte del problema, el maestro puede preguntar a los alumnos:

¿Cuáles son las unidades que tenemos? R= Las 10 cajitas de cereales y los 30 niños.

¿Qué es lo que vamos a repartir entre qué o quiénes? R= Las 10 cajitas entre los 30 niños.

¿Cómo se representaría esta fracción? R= $\frac{10}{30}$

¿Puedes simplificar la fracción? R= $\frac{10}{30} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

Entonces ¿Qué fracción de los niños recibiría una cajita de cereal? R= $\frac{1}{3}$

Para esta parte de la actividad el maestro puede pedir a los niños que realicen un dibujo para ejemplificar la actividad. A continuación se presenta un ejemplo gráfico a partir de la primera parte del ejercicio.

10 dulces =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

30 niños =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\frac{1}{3}$
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\frac{2}{3}$
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	$\frac{3}{3}$

Fracción: Si hay sólo 10 cajitas y hay 30 alumnos; las 10 cajitas se reaparten entre los 30 alumnos, luego entonces la fracción es de 10/30 = 5/15 = 1/3

En la segunda parte del problema el profesor debe recordar a los alumnos el tema de porcentajes, como en otras ocasiones en que han querido saber la cantidad de objetos que una fracción representa, es importante tener en cuenta que la unidad a repartir es igual a la cantidad total de elementos, en este caso la unidad puede representarse con 1/3 alumnos, la división de 1 en 3 partes da como resultado 0.33 y si tenemos en cuenta que al hablar de porcentajes la unidad es 100, ésta será la cantidad que se tiene que multiplicar por el 0.33 lo que da como resultado 33.33%.

En la tercera parte del ejercicio se retoman los procedimientos de la primera y segunda parte, con lo que se tiene procedimientos como los siguientes:

1. La fracción es igual a cuántos alumnos de los que hay en el salón llevaron cereal, esto es igual a 6 de los 30 alumnos igual a 6/30= 2/10 =1/5
2. 1/5 convertido empleando la base 100 del porcentaje es igual a 100/5 lo que es igual a 20%.

3. Si en total hay 30 alumnos y 6 son los que llevaron cereal, entonces 6 de cada 30 alumnos llevaron cereal.
4. La siguiente es una forma simplificada de la anterior. 6 de cada 30 que es igual a 6/30, que es igual a 3/15 o igual a 2/10.

En la última parte del ejercicio el profesor puede preguntar a los alumnos lo siguiente:

¿Qué operación tenemos que hacer para saber el número de cajitas que hay? R= una multiplicación

¿Qué tenemos que multiplicar? R= el numero de paquetes (3) por el número de cajitas que trae cada paquete (10).

¿Cuántas cajitas de cereales tienen? R= 30

¿Cuántas cajitas hay de cada color por paquete de cereales? R= 3 amarillas, 3 azules, 2 rojas y 2 cafés.

¿Qué operación tenemos que realizar para saber la cantidad que hay de cajitas de cada color? R= una multiplicación y una suma.

¿Qué tenemos que multiplicar? R= el número de cajitas que hay de cada color por el número de paquetes:

3 amarillas X 3 paquetes = 9 cajitas amarillas

3 azules X 3 paquetes = 9 cajitas azules

2 rojas X 3 paquetes = 6 cajitas rojas

2 cafés X 3 paquetes = 6 cajitas cafés

Suma del total de las cajitas = 30 cajitas.

¿Cuáles son las unidades que tenemos? R= Los 30 niños y las 30 cajitas de cereales (9 cajitas amarillas, 9 cajitas azules, 6 cajitas rojas, 6 cajitas rojas y 6 cajitas cafés.

¿Qué es lo que vamos a repartir entre qué o quiénes? R= Las 9 cajitas amarillas entre los 30 niños.

¿Cómo se representaría esta fracción? R= $\frac{9}{30}$

¿Puedes simplificar la fracción? R= $\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

Entonces ¿Qué fracción de los niños recibiría una cajita de cereal? R= $\frac{3}{10}$

¿Cómo se puede leer esa fracción? R= 9 de cada 30 o 3 de cada 10

¿Podrías hacer un dibujo para ilustrar cuántos alumnos recibieron las cajitas de cada color?

HOJA DE RESPUESTAS PARA “EL DÍA DEL NIÑO”

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

En la escuela de Pedro se hizo una fiesta con motivo del día del niño. A cada alumno se le pidió que llevara algo para comer. Pedro y su amigo dijeron que juntos podían cooperar con un paquete de 10 cajitas de cereales surtidos. Si 1 de cada 3 niños recibirá una cajita de cereal, ¿Podrías decir cuántos alumnos hay en el salón?

Operaciones

Hay ___________________________ alumnos en el salón.

Su maestro acababa de revisar el tema de porcentajes, y aprovechó para preguntar a sus alumnos la fracción y el porcentaje de alumnos que alcanzarían cajita de cereal ¿Podrías ayudarles a contestar?

Operaciones

La fracción de alumnos que alcanzarían cereal es de ________________________

El porcentaje de alumnos que alcanzarían cereal es de _______________________

Después, el profesor sugirió que también otros 4 alumnos llevaran 1 paquete de cereal por pareja, para que a todos los alumnos les tocara por lo menos una cajita, y les hizo otras preguntas ¿Podrías ayudarles a contestarlas?

Si Pedro, su amigo y los otros 4 alumnos llevaron cereales:

- ✓ ¿Qué fracción del total de alumnos llevaron cereales? Simplifica
- ✓ ¿A qué porcentaje del total de alumnos corresponde esa fracción?
- ✓ ¿6 de cada cuántos alumnos se encargaron de llevar paquetes de cereal?
- ✓ ¿3 de cada cuántos alumnos se encargaron de llevar paquetes de cereal?
- ✓ ¿2 de cada cuántos alumnos se encargaron de llevar paquetes de cereal?

Operaciones

La fracción de alumnos del grupo que llevaron paquetes de cereal fue de________________

El porcentaje de alumnos del grupo que llevaron paquetes de cereal fue de____________________

6 de cada _______________________ alumnos del salón llevaron paquetes de cereal.

3 de cada _______________________ alumnos del salón llevaron paquetes de cereal.

2 de cada _______________________ alumnos del salón llevaron paquetes de cereal.

El profesor preguntó a Pedro si todas las cajitas de cereal eran iguales y Pedro le dijo que había diferentes sabores, pero que sólo recordaba el color de las cajitas. Dijo que de cada 10 cajitas 3 eran amarillas, 3 eran azules, 2 eran rojas y 2 eran cafés

Para decidir cómo repartir los sabores, el profesor puso a sus alumnos a contestar las siguientes preguntas:

Si se compraron 3 paquetes con 10 cajitas cada uno, en total había ___________ cajitas amarillas; ___________ cajitas azules; _____________cajitas rojas y ___________cajitas cafés.

¿De cuántos sabores y colores diferentes de cajitas de cereal recibieron los niños?
¿Qué porcentaje de los niños recibieron cajitas de cada color?
¿Qué fracción de niños recibieron cajitas de cada color?

Color de las cajitas	**# de niños que recibieron cajitas de cada color**	**Porcentaje de niños que recibieron cajitas de cada color**	**Fracción de niños que recibieron cajitas de cada color**
Amarillas			
Azules			
Rojas			
Cafés			

Operaciones

Al final:

______________ de cada 30 niños recibieron cajitas amarillas.
______________ de cada 20 niños recibieron cajitas azules.
______________ de cada 15 niños recibieron cajitas rojas.
______________ de cada 25 niños recibieron cajitas cafés.

Actividad 24. El día de la madre

Objetivo: Aplicar las invariantes del concepto de fracción para realizar el reparto de unidades discretas, en su interpretación como razón (proporción).

Materiales:

Hoja por equipo con el problema escrito
Dados

Descripción de la actividad

Al inicio de la sesión, el profesor entregará a los equipos la hoja con el problema impreso y pedirá a algún voluntario que lea el problema. Una vez que haya concluido la lectura el profesor indicará a los alumnos que pueden empezar a resolver el problema por escrito y después pasarán a explicarlo en el pizarrón. Al finalizar, el equipo que tenga el resultado correcto en el menor tiempo será el ganador.

Después de la explicación, se indicará a los equipos que tienen un plazo de 15 minutos para leer, discutir y dar solución a la primera parte del ejercicio; el plazo para la segunda parte será de 10 y el de la tercera de 15 minutos. Mientras tanto el profesor ofrecerá diversos niveles de ayuda a los equipos que así lo requieran, recordando evitar ofrecer la respuesta o datos que lleven directamente a ella.

Si los equipos no han terminado la actividad en el tiempo establecido, se les otorgará un plazo mayor.

Posteriormente, un representante de cada equipo pasará a escribir en el pizarrón y explicar sus procedimientos y resultados. Para tal efecto, el pizarrón habrá sido dividido en tantas partes como equipos haya, con el nombre del equipo como encabezado. El profesor comparará y comentará los procedimientos y resultados de cada uno de los equipos.

Planteamiento del problema

Primera parte del ejercicio

Mi maestra formó 3 parejas de alumnos para que le ayudaran a hacer galletas para el día de las madres. Ella quería que hicieran 300 galletas con mermelada de cuatro sabores (piña, fresa, uva y frambuesa).

Para calcular cuanto tiempo antes deberían empezar a prepararlas, mi maestra hizo un ensayo para medir cuántas galletas por minuto podía preparar cada pareja.

Si la pareja 1 podía hacer 5 galletas/1 minuto,

La pareja 2 podía hacer 3 galletas/1 minuto.

y la pareja 3 podía hacer 2 galletas/1 minuto.

¿Cuánto tiempo necesitan entre las 3 parejas para hacer las 300 galletas y al terminar cuántas galletas habrá hecho cada equipo?

Segunda parte del ejercicio

Mi maestra tenía todo previsto, pero el día del festival sólo llegaron las parejas 2 y 3, ¿Podrías decir cuanto tiempo se tardaron en hacer las galletas?

Tercera parte del ejercicio

Al terminar de prepararlas, mi maestra se dio cuenta de que no había el mismo número de galletas de cada sabor. Al festival asistieron 280 mamás. Entonces:

1. Si 9 de cada 28 mamás recibieron galletas de piña ¿Cuántas galletas de piña había en total?
2. Si 60 de cada 140 mamás s recibieron galletas de fresa ¿Cuántas galletas de fresa había en total?
3. Si 15 de cada 70 mamás recibieron galletas de uva ¿Cuántas galletas de uva había en total?
4. Si 6 de cada 56 mamás recibieron galletas de frambuesa ¿Cuántas galletas de frambuesa había en total?

Por lo tanto, la cantidad y el porcentaje que había de cada sabor de galletas era de:

Sugerencias para la mediación

En la primera parte del ejercicio se nos pide calcular el tiempo que se tardan 3 parejas en hacer las 300 galletas, por lo que lo primero que se necesita es sumar la fracción de las 300 galletas que puede hacer cada equipo, esto es:

$$\frac{5}{1} + \frac{3}{1} + \frac{2}{1} = \frac{10}{1}$$

La fracción resultante quiere decir que entre todas las parejas pueden hacer 10 galletas en 1 minuto, por lo que ahora necesitamos un número que, multiplicado por el numerador o número de galletas 10, dé las 300 galletas y multiplicarlo también por el denominador o tiempo de 1 minuto. Ese número es 30.

$10 \text{ X } 30 = 300$ y $1 \text{ X } 30 = 30$

Lo que quiere decir que entre las 3 parejas preparan 300 galletas/30 minutos (10 galletas por minuto).

Para saber cuántas galletas realiza cada pareja en el tiempo total, se requiere responder a la siguiente pregunta:

¿Si en 1 minuto una de las parejas realiza 5 galletas, cuántas podrá hacer en 30 minutos?

Para ello se multiplican las 5 galletas por los 30 minutos, el resultado es 150, lo que se puede expresar de la siguiente manera:

- Si en 1 minuto hacen 5 galletas
- En 30 minutos hacen 150 galletas

Dado que en la segunda parte se nos vuelve a pedir lo mismo y lo único que cambia es una cantidad, se empleará un procedimiento similar al de la primera.

En la tercera sección del ejercicio se necesita encontrar la fracción equivalente del entero que conocemos, es decir de las 280 mamás que asistieron al festival. Por tanto:

1. Si 28 mamás son la décima parte de 280, las 9 galletas corresponden también a la décima parte que hay de galletas de piña, por lo que al multiplicarlas por 10 obtendremos la cantidad total que había de galletas.
2. Si 140 mamás son la mitad de 280, las 60 galletas corresponden también a la mitad que hay de galletas de fresa, por lo que al multiplicarlas por 2 obtendremos la cantidad total.
3. Si 70 mamás son la cuarta parte de 280, las 15 galletas corresponden también a la cuarta parte que hay de galletas de uva, por lo que al multiplicarlas por 4 obtendremos la cantidad total.
4. Si 56 mamás son la quinta parte de 280, las 6 galletas corresponden también a la quinta parte que hay de galletas de frambuesa, por lo que al multiplicarlas por 5 obtendremos la cantidad total.

Para obtener el porcentaje, debemos partir de la unidad 100 del porcentaje, por lo que si hay 300 galletas, éstas son igual al 100%. Por ejemplo, si había 300 galletas y sólo 30 eran de frambuesa, esto equivale a 30/300 lo que es igual a 0.1 que multiplicado por la unidad 100 del porcentaje es igual a 10%. El profesor puede emplear también los siguientes puntos:

- Si de las 300 galletas, 30 eran de frambuesa, el 10% era de este sabor.
- Si las 60 galletas de uva, corresponden al doble de las de frambuesa, entonces había un 20% de estas galletas.
- Si las 90 galletas de piña, corresponden al triple de las de frambuesa, entonces

había un 30% de estas galletas.

- Si las 120 galletas de fresa, corresponden al cuádruple de las de frambuesa, entonces había un 40% de estas galletas.

En la última sección como en los casos anteriores el porcentaje también se puede expresar como una fracción. Es decir la fracción de las galletas de piña se puede expresar como:

De las 300 galletas 90 eran de piña = 90 galletas de piña/300 galletas. Lo que es igual a

$$\frac{90}{300} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

De las 300 galletas, 3 décimas partes eran de piña.

En el caso del porcentaje la unidad siempre es 100, por lo que debemos multiplicar el numerador 3 por 100 y dividirlo entre 10. Esto es lo mismo que haríamos para entender el significado de 2/4 de un conjunto de 20 galletas, en este caso es necesario multiplicar el numerador (2) por la unidad a la que hace referencia (20 galletas) y dividirlo entre el denominador (4), con lo que entendemos que 2/4 de las 20 galletas, equivale a 10 galletas.

HOJA DE RESPUESTAS PARA "EL DÍA DE LA MADRE"

Nombre del equipo: ______________________________ **Fecha:** ___________________

Problema:

Mi maestra formó 3 parejas de alumnos para que le ayudaran a hacer galletas para el día de las madres. Ella quería que hicieran 300 galletas con mermelada de cuatro sabores (piña, fresa, uva y frambuesa).

Para calcular cuanto tiempo antes deberían empezar a prepararlas, mi maestra hizo un ensayo para medir cuántas galletas por minuto podía preparar cada pareja.

Si la pareja 1 podía hacer 5 galletas/1 minuto,
la pareja 2 podía hacer 3 galletas/1 minuto.
y la pareja 3 podía hacer 2 galletas/1 minuto.
¿Cuánto tiempo necesitan entre las 3 parejas para hacer las 300 galletas y al terminar cuántas galletas habrá hecho cada equipo?

Operaciones:

Entre las 3 parejas necesitan ______________________ minutos para hacer las 300 galletas.

La pareja 1 puede hacer ___________________ galletas.

La pareja 2 puede hacer ___________________ galletas.

La pareja 3 puede hacer ___________________ galletas.

Mi maestra tenía todo previsto, pero el día del festival sólo llegaron las parejas 2 y 3, ¿Podrías decir cuanto tiempo se tardaron en hacer las galletas?

Operaciones:

Las parejas 2 y 3 se tardaron ______________________ minutos en preparar las galletas.

Al terminar de prepararlas, mi maestra se dio cuenta de que no había el mismo número de galletas de cada sabor. Al festival asistieron 280 mamás. Entonces:

5. Si 9 de cada 28 mamás recibieron galletas de piña ¿Cuántas galletas de piña había en total?
6. Si 60 de cada 140 mamás s recibieron galletas de fresa ¿Cuántas galletas de fresa había en total?
7. Si 15 de cada 70 mamás recibieron galletas de uva ¿Cuántas galletas de uva había en total?
8. Si 6 de cada 56 mamás recibieron galletas de frambuesa ¿Cuántas galletas de frambuesa había en total?

Operaciones:

BIBLIOGRAFÍA

Clemente (2002). Las fracciones, en: http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2001/enero/2nosotros56.htm

Dávila, V. M. (1992). El reparto y las fracciones. Educación matemática (1), vol.4. México, 1992. pp. 32-45.

Galperín (1995) Sobre la formación de las imágenes sensoriales y de los conceptos. En Quintanar, R. L. La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño. pp. 27-41. México. Universidad Autónoma de Tlaxcala.

Galperín (1995) Sobre la formación de los conceptos y las acciones mentales. En Quintanar, R. L. La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño. pp. 41-56. México. Universidad Autónoma de Tlaxcala.

Guevara, N. M. (1991). México: ¿un país de reprobados? Nexos; 162, pp. 33-44.

Kozulin, A. (2000*). Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva sociocultural*. España: Paidós.

Linares M.; Salvador A. y Sánchez V. (1988). Las fracciones diferentes interpretaciones. En Fracciones. La relación parte todo. pp. 51-78. Madrid. Síntesis.

Mancera, M. E. (1992). Significados y significantes relativo a las fracciones. Educación matemática. 4, 2, pp. 30-54.

S.E.P. (2002). *Planes y Programas de Estudio de Educación Básica.*

Shuare, M. (1990). *La psicología soviética tal como yo la veo*. Moscú: Editorial progreso.

Tallízina N. F. (1993). Los fundamentos de la enseñanza en la educación superior. México. Ángeles editores.

Weisstein, E. (2005). "Rational Number." En: MathWorld--A Wolfram Web Resource. En: http://mathworld.wolfram.com/RationalNumber.html.

Apéndice B

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA.

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN PSICOLOGÍA.

RESIDENCIA EN EDUCACIÓN ESPECIAL.

CUADERNILLO DE EJERCICIOS PARA EL PROGRAMA DE ENSEÑANZA DE ESTRATEGIAS COGNITIVAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN NIÑOS DE QUINTO GRADO

(Versión modificada del cuadernillo realizado por la Lic. Alma Rodríguez Castellanos.)

Febrero de 2004

Índice

PRESENTACIÓN

Estimado profesor (a):

El presente cuadernillo está diseñado para servir al profesor de guía en la enseñanza de estrategias cognitivas que sean útiles a los alumnos para resolver problemas matemáticos. Es por ello que en la primera parte se da una breve descripción de lo que son las estrategias de aprendizaje y la utilidad que éstas tienen en el trabajo con la resolución de problemas matemáticos en el aula.

En la segunda parte de este cuadernillo, encontrará de manera detallada la forma en que el profesor puede implementar el programa, siempre al margen de nuevas ideas que él pueda brindar para enriquecer la forma trabajo con su grupo.

Finalmente, en la tercera parte se encuentra una serie de problemas propuestos. Sin embargo, estos también están sujetos a ser modificados, o se puede agregar o quitar alguno de ellos a conveniencia del curso que se esté impartiendo.

¿QUÉ SON LAS ESTRATEGIAS COGNITIVAS?

Las estrategias son distintas herramientas y métodos, de carácter cognitivo, que los individuos tienen a su disposición y usan en el proceso de aprendizaje; es decir, son las encargadas de codificar, almacenar y recuperar la información implicada en el material de estudio[1].

En este sentido el alumno debe aprender a aprender, por medio de la utilización de distintas estrategias cognitivas como ***la selección, la organización y la elaboración***, así como de la aplicación de técnicas existentes que él maneje en la resolución de problemas[2].

El programa de intervención debe formar nuevas situaciones de aprendizaje que lleven al niño a formar nuevos esquemas de conocimiento permeados por la revisión, enriquecimiento, diferenciación, construcción y coordinación progresiva de la educación en la enseñanza-aprendizaje, los cuales a su vez deben llevar al alumno a un constante conflicto cognitivo, en la búsqueda de nuevos aprendizajes significativos. Para ello las estrategias que se espera aprendan a utilizar los alumnos son:

1. *Las estrategias de selección*, permiten al estudiante separar lo relevante de lo irrelevante, favoreciendo la comprensión. Estas estrategias requieren la capacidad de analizar con el objeto de reconocer cómo se relaciona y jerarquiza la información a aprender y seleccionar aquella realmente relevante para cada tarea concreta. Algunas técnicas empleadas para hacer operativa esta estrategia son:

- El vistazo inicial para detectar la estructura textual del material de estudio.
- La selección mediante subrayado, de las ideas principales.
- El resumen. Supone una forma de registrar la información relevante.

[1] Weinstein & Mayer. (1986), citados en: González-Pienda, Núñez, Álvarez & Soler. 2002. Estrategias de aprendizaje. Concepto, evaluación e intervención.
[2] Coll, C. (1999). Psicología y currículum. Una aproximación psicopedagógica a la elaboración del currículum escolar. México. Paidós.

2. ***Las estrategias de organización*** permiten a los estudiantes estructurar los contenidos, planteando conexiones entre ellos y estableciendo, por lo tanto, una coherencia interna para la información. Es esa búsqueda de la combinación de los elementos informativos en un todo coherente y significativo, la que marca la diferencia con la estrategia de selección. Esta estrategia implica técnicas tales como:

   - Seleccionar las ideas principales y secundarias de los materiales de estudio con el fin de estructurarlas en un todo coherente.
   - Seleccionar mediante subrayado del material a aprender, con el objeto de combinar los elementos informativos en una estructura significativa.
   - Esbozar una red o mapa donde se establezca una estructura coherente con las ideas importantes del material de estudio.
   - Identificar la manera en que son expresadas las ideas en las estructuras expositivas de los textos, con objeto de recuperar los contenidos informativos esenciales de una forma organizada.
   - Clasificar la información a aprender en función de un determinado criterio.

3. ***Las estrategias de elaboración***, permiten establecer conexiones externas entre el conocimiento recién adquirido y el conocimiento ya existente en la estructura cognitiva del aprendiz, lo cual potenciará la significatividad para el estudiante, y, en último término, mejorará su recuerdo. Para llevarse a cabo pueden utilizarse técnicas como:

   - Parafrasear el material a aprender.
   - Reelaborar el material de estudio, aportando tópicos y ejemplos conocidos.
   - Crear analogías, vinculando la información nueva con la ya conocida.
   - Explicar a otro las ideas del material a aprender.
   - Hacer preguntas y responderlas acudiendo a la información conocida.

¿PARA QUÉ SIRVEN LAS ESTRATEGIAS COGNITIVAS?

Las estrategias cognitivas tienen como fin desarrollar en el alumno habilidades, tales como la ubicación de las ideas principales o esenciales, la organización de la información obtenida y su reestructuración y la vinculación con información previa para dar solución a diferentes problemas. Es decir, por medio de las estrategias, se pretende que el alumno, no sólo sea capaz de resolver un determinado tipo de problemas, a través de la utilización de técnicas previamente memorizadas, sino que pueda generar sus propios procedimientos para la solución de problemas que le resulten novedosos.

La utilidad de dichas estrategias es tangible cuando se toma en consideración que muchos de los alumnos fracasan en la solución de problemas, porque no logran identificar qué es lo que se les está preguntando o ubicar los datos importantes dentro de la redacción del problema y, por tanto no pueden organizarlos para recuperar su conocimiento previo y así determinar qué tipo de operaciones se deben realizar. Es por eso que en ocasiones los alumnos pueden resolver problemas en clase, sólo en los casos en que el profesor sirve como regulador de la tarea, pero cuando el alumno intenta resolver este mismo tipo de tareas por su cuenta, ya no es capaz de realizar con éxito la actividad, pues no ha adquirido la posibilidad de autorregularse. Así, una de las principales aportaciones de la enseñanza de estrategias cognitivas, radica precisamente en la posibilidad de autorregulación que ofrece el que el alumno pueda identificar, organizar y acomodar la información nueva con la previamente adquirida, para generar sus propios procedimientos y/o propuestas de solución.

Otro aspecto importante a tomar en consideración es la posibilidad que dan al alumno estos procedimientos autorregulados, de autoevaluar las soluciones propuestas, no sólo en términos de la obtención de resultados correctos, sino de las diferentes etapas necesarias para llegar a la obtención de éstos. De tal forma que la evaluación ya no depende únicamente del resultado valorado por el maestro, sino del proceso seguido y evaluado por los propios alumnos.

Como puede observarse por lo anterior, la enseñanza de las estrategias cognitivas, no sólo implica cambios en el rol del alumno en la solución de los problemas, sino también en el del profesor. Para el caso de este último, se considera necesario que favorezca la participación de los alumnos y sirva como hilo conductor para que ellos logren sus propios resultados. Es por ello que en la búsqueda de solución a los problemas, el profesor se limita a ofrecer diversos niveles de ayuda, dando ejemplos, guiando la atención de los alumnos hacia los elementos del problema, realizando preguntas u observaciones que los lleven a la solución de los problemas, pero sin ofrecer los resultados ni técnicas que lleven directamente a ésta.

Asimismo, se considera deseable que la enseñanza de las estrategias pudiera generalizarse a otras materias, con el fin de que los alumnos aprendan a analizar concientemente las características o condiciones de los problemas que se les planteen en diferentes áreas[3].

¿CUÁL ES EL PAPEL DE LA MOTIVACIÓN?

En la enseñanza de las estrategias cognitivas, la motivación juega un papel esencial, ya que ésta deberá plantearse desde la actividad misma y no desde factores externos; es decir el problema en si mismo deberá representar un reto para el alumno, adecuado a su nivel, por lo que no debe ser tan difícil que el alumno no pueda llegar a su solución, pero tampoco tan fácil que llegue a resolverlo sin problemas.

Por otra parte, para poder dar el paso a esta nueva forma de trabajo se propone implementar métodos conductuales que favorezcan el control de grupo por un lado y por otro proporcionen un registro del aprovechamiento en las actividades realizadas. De tal forma, se planea la implementación de dos tablas en donde se lleve un registro de la conducta de los equipos y de su desempeño en la tarea. La descripción de ambos registros se encuentran en página 9.

¿CUÁNTO TIEMPO SE REQUIERE?

Para no interferir con el programa del profesor, se utilizarán los tiempos que él considere disponibles. Se sugiere un número aproximado de 25 sesiones, en espacios de trabajo de 1:30 minutos, preferentemente antes del recreo, con el fin de contar con una mayor atención por parte de los alumnos.

---

[3] Monereo, F.C. (1997). Estrategias de aprendizaje. Madrid. Santillana/Aula XXI.

¿POR DÓNDE EMPEZAR?

Para la realización de las actividades se formarán un máximo de seis equipos de aproximadamente seis integrantes. Este criterio esta pensado de manera que el pizarrón pueda ser dividido de tal forma que puedan participar simultáneamente los representantes de cada equipo, pero que tampoco haya demasiados alumnos en un mismo equipo, porque tal situación dificultaría la participación de todos.

Antes de explicar el procedimiento por el cual se formarán los equipos, el profesor hará saber a los alumnos que una vez formados los equipos, estos permanecerán con los mismos integrantes hasta que concluya el ciclo escolar, por lo cual, en su proceso de conformación los alumnos deberán colaborar y elegir muy bien con qué compañeros quieren trabajar.

Para la formación de equipos se seleccionarán a seis de los alumnos con un aprovechamiento académico regular, basados en los criterios observados dentro del salón de clase. Posteriormente se solicitará al resto del grupo que elija con cuál de estos seis alumnos desea formar equipo, procurando que cada equipo quede conformado de manera homogénea, no sólo en cuanto al número de participantes, sino también, en cuanto a la variabilidad del nivel académico de los mismos.

¿QUÉ PASA CON LA DISCIPLINA?

Se implementarán reglas positivas, diciendo a los alumnos que por el cumplimiento de cada una de ellas se les otorgará un punto. El control del puntaje se llevará a cabo por medio de una tabla dividida en dos secciones, una para aprovechamiento académico y otra para disciplina. En ambas se llevará un registro de la evaluación por equipo, con las reglas designadas

La hoja de registro tendrá columnas en donde se especificará cada uno de los criterios a evaluar, tanto para la disciplina, como para el desempeño académico de los equipos.

Los criterios de evaluación en cuanto a la disciplina serán los siguientes:

1. Manejar el mobiliario y demás materiales en forma adecuada.
2. Comunicarse con un volumen de voz normal.

3. Utilizar un lenguaje apropiado.
4. Respetar los turnos al hablar.
5. Concentrase en el trabajo de su equipo.
6. Evitar conductas violentas.

Los criterios de evaluación en cuanto al aprovechamiento académico serán los siguientes:

1. Trabajo individual de todos los integrantes del equipo en los tiempos asignados.
2. Trabajo colectivo del equipo en los tiempos designados.
3. Utilización adecuada de las estrategias.
4. Procedimientos correctos para la solución del problema.
5. Explicación adecuada de los procedimientos y resultados obtenidos por parte del equipo.
6. Resultado correcto.

¿CÓMO DAR A CONOCER LAS ESTRATEGIAS?

Realizar con los alumnos organizados en equipos un primer ejercicio que sirva a la vez de ejemplo y de punto de partida para entender lo que son las estrategias. Para ello se planteará la siguiente situación (este es sólo un ejemplo y puede ser modificado a criterio del profesor):

> *"Imaginen que en la clase de hoy, el maestro mencionó que la escuela ha organizado una excursión a "Six flags", dentro de dos semanas, para lo cual se han contratado ya varios autobuses. El maestro ha dicho que el transporte no les costará, pues la escuela se ha hecho cargo de estos gastos, pero cada alumno tendrá que pagar su entrada, la cual tiene un costo de $85.00, además de llevar una carta firmada con el permiso del padre o tutor.*
>
> *Al llegar a casa, le platican a su mamá de la excursión. Ella dice que sí les daría permiso, pero no tiene dinero para pagar la entrada, por lo que no podrán ir. Ustedes insisten, pues tienen muchas ganas de ir, y le proponen que ahorrarán o trabajarán para poder conseguir dinero para la excursión. Después de insistir un buen rato su mamá por fin acepta. Ahora sólo tienen que conseguir el dinero ¿Cómo lo harían?"*

El profesor pedirá a los alumnos que cada uno de los equipos discuta el problema y analice las opciones para establecer la mejor solución. Ésta será una sola por cada equipo.

Para llevar a cabo esta parte de la actividad el profesor les dirá que tienen 10 minutos, además de hacerles un recordatorio de las reglas que se tienen que seguir mientras están trabajando en equipo. En tanto el profesor pasará a cada uno de los equipos, para resolver dudas, observar la forma en que están trabajando y orientarlos en la forma en que están resolviendo el problema.

Después del tiempo señalado, el profesor pedirá a cada equipo que nombre un representante, que sea el encargado de explicar la solución a la cual llegó el equipo.

A partir de las soluciones brindadas, el profesor guiará a los alumnos para que ellos mismos se den cuenta de qué es una estrategia, cuáles son algunos ejemplos de estrategias y, cómo las emplearon a través de preguntas tales como:

¿Qué tenían que lograr?
¿Qué cantidad de dinero tenían que reunir?
¿De cuánto tiempo disponían?
¿Qué alternativas de solución tenían para conseguir dinero?
¿Cuánto dinero podían obtener con cada alternativa?
¿Qué operaciones matemáticas se podían realizar para llegar a la solución?
¿Sabían realizar las operaciones requeridas?

Con estas preguntas y otras similares, el profesor guiará a los alumnos para identificar y organizar la información más importante, y esclarecer cómo es que se puede vincular con sus conocimientos previos para elaborar las posibles soluciones, haciendo énfasis en lo que involucra cada una de las tres estrategias cognitivas a trabajar y remarcando su utilidad en la solución del problema.

Asimismo, el profesor promoverá el establecimiento de comparaciones entre las soluciones propuestas por los alumnos, señalando los resultados obtenidos por cada uno de los equipos y, nuevamente a través de preguntas, tratará de que los alumnos formulen sus propias conclusiones con respecto al grado de efectividad de sus propuestas.

A manera de conclusión, los representantes de los equipos pasarán al pizarrón para escribir en forma resumida y con sus propias palabras, cuáles son las tres estrategias cognitivas que se utilizaron en la resolución del problema, en qué consisten y un breve ejemplo. Una vez que la información esté completa, se les dirá que para la próxima sesión se les entregará una tarjeta impresa con el resumen que elaboraron, para que lo puedan utilizar como recordatorio.

¿CÓMO TRABAJAR CON LOS EJERCICIOS?

1. Equipos de trabajo.

Se conforman los equipos de trabajo, según fueron establecidos en la sesión de organización del grupo.

2. Recordatorio de las reglas

Se recordará a los alumnos al inicio de la sesión, las reglas que deben seguir durante las actividades y la manera en que se llevará el control de las mismas. Esto se realizará las veces que sean necesarias, hasta estar seguros de que los alumnos tienen bien asimilada la forma de trabajo.

3. Recordatorio de las estrategias

También se les recordará brevemente cuáles son las estrategias cognitivas y cómo nos ayudan en la resolución de problemas matemáticos, haciendo alusión a los ejemplos tratados en la clase anterior, a través de preguntas como: *¿Se acuerdan del problema de la clase pasada?, ¿Recuerdan cómo lo resolvimos?, ¿Cuáles fueron las estrategias que utilizamos?, ¿Cómo nos ayudaron para resolver el problema?*

4. Trabajo individual

El profesor entregará a los alumnos el problema impreso en una hoja, y les dará un plazo, que variará en función de la dificultad del problema (aproximadamente 10 minutos), para que traten de resolverlo. Los alumnos escribirán todos los procedimientos que realicen además de su resultado individual en la hoja donde se encuentra impreso el problema.

Mientras tanto el profesor pasará entre los equipos brindando ayudas de manera individual, pero nunca dará los pasos o procedimientos que lleven directamente a la solución del problema y menos aún dirá la solución, aún cuando los alumnos no logren encontrarla en el plazo establecido para el trabajo individual. En lugar de ello el profesor planteará preguntas que recuerden al alumno las estrategias cognitivas y/o su uso, centren su atención en algún dato que haya olvidado considerar, o le permitan relacionar el problema con sus conocimientos previos o sus experiencias cotidianas.

Por ejemplo: si el alumno ya ha identificado la información esencial del problema, pero no ha logrado darle una organización lógica, el maestro podría preguntar: *"¿Te queda claro lo que están preguntando?, ¿qué información te están solicitando?, ¿ya tienes reunida toda la información que necesitas?, ¿cómo podrías organizar mejor tú información?, ¿hay algún dibujo o esquema que ayude a ilustrar el problema?¿qué operación se te ocurre que podrías utilizar para resolverlo?, etc.*

6. Trabajo por equipo

Transcurrido el tiempo establecido, el profesor entregará una hoja en blanco a cada equipo, para que en ella registren los procedimientos y resultados realizados por el equipo, y asignará un tiempo variable (alrededor de 20 minutos), para que los alumnos compartan sus dudas y alternativas de solución al interior de los equipos, con el fin de obtener un consenso en la respuesta. Durante este tiempo el profesor brindará a cada equipo el mismo tipo de ayuda que durante el trabajo individual, evitando dar la solución.

Antes de concluir, el profesor se dará tiempo para separar el pizarrón en tantas partes como equipos haya, para que pueda ser utilizado en la siguiente parte del trabajo.

7. Trabajo grupal

Una vez concluido el plazo para el trabajo en equipos, el profesor solicitará que un representante de cada equipo, pase al pizarrón a escribir y explicar sus procedimientos y propuestas de solución al problema.

El profesor guiará la participación de los alumnos, para que en forma grupal se brinde retroalimentación a todos los equipos respecto a las propuestas de solución y el nivel de efectividad de los procedimientos utilizados. En esta parte del trabajo se pueden presentar diferentes situaciones, frente a las cuales es importante ofrecer respuestas diversas. Algunos de estos casos se ilustran en la siguiente Tabla.

Tabla 1. Forma de organizar el trabajo grupal

# de Equipos	**Tipo de Respuesta**	**Procedimientos empleados**	**Organización de trabajo grupal**
Todos	Correcta	Iguales	Sólo un equipo expone y se pregunta a los demás si existe otra solución.
Todos	Correcta	Diferentes	Se inicia con la exposición del equipo que tiene el procedimiento menos adecuado, hasta llegar al equipo con la mejor solución. Es importante enfatizar que hay diferentes alternativas de solución para llegar a la respuesta correcta, pero que unas son mejores que otras.
Uno o más equipos.	Correcta	Iguales	Se inicia con los equipos que tienen un mayor número de errores, hasta llegar al o a los equipos que encontraron la solución y se pregunta sí hay otra solución posible.
Uno o más equipos.	Correcta	Diferentes	Se inicia con los equipos que tienen un mayor número de errores, posteriormente se incluye a los equipos que encontraron la solución, pero cuyo procedimiento no fue el más adecuado, hasta llegar a la mejor solución. Es importante enfatizar que hay diferentes alternativas de solución para llegar a la respuesta correcta, pero que unas son mejores que otras.
Todos	Incorrecta	Iguales o diferentes	Se guiara al grupo a través de preguntas y ejemplos, para corregir los procedimientos empleados y llegar a la respuesta correcta.

PROBLEMAS SUGERIDOS[4]

Como el titulo menciona, estos problemas sólo son una sugerencia, por lo que el profesor puede sentirse en la entera libertad de modificarlos, sustituirlos o agregar otros.

1. Después de ahorrar durante cuatro días, Juan logró juntar $304.00, para lograrlo tuvo que dejar de comprar dulces y refrescos. Como premio a su esfuerzo, el sábado siguiente sus papás decidieron regalarle $723.00. ¿Cuánto dinero tenía Juan después del sábado?

2. Mi papá me mandó a la papelería a comprar las cosas que mis hermanos y yo utilizaremos durante el año en curso. En primer lugar compré tres cajas de pinturas de colores en $134.00, una docena cuadernos en $100.00 y tres juegos geométricos en $70.00. ¿Cuánto pagué en total?

3. Para conocer el número de desayunos que se requieren en la escuela, se revisó el registro de alumnos por grado. Se encontró que de 1° a 3er grado había 264 alumnos, de los cuales 130 eran niñas y 134 niños. De 4° a 6° grado, el número de niños y niñas sumaba 234. ¿Cuántos alumnos en total hay en la escuela?

4. El próximo domingo me van a festejar mi cumpleaños, y además de mis amigos me van a visitar todos mis primos y primas. Si tengo 15 primos y 4 primas, ¿Cuántas primas menos que primos tengo?

5. Después de que nos mudamos a nuestra nueva casa, mi papá le encargó a mi hermano comprar 13 kg de alambre a $256.00, unas pinzas de presión a $160.00 y un bote chico de pintura a $35.00. Todo esto para el arreglo de nuestro nuevo hogar. ¿Cuánto pagó en total mi hermano?

6. El Real Madrid ha marcado 89 goles. Si el Zaragoza marcara 22 goles más, tendría los mismos que el Real Madrid. ¿Cuántos goles ha marcado el Zaragoza?

7. Samuel decidió vender cinco luchadores de colección, después de vender cuatro tenía $1056. Todavía le quedaba uno hasta que su primo Juan le compró el último en 725.50

---

[4] Estos problemas, con algunas modificaciones, fueron retomados por la Lic. Alma Rodríguez Castellanos, de: Secretaría de Educación Pública. (1993). Plan y programas de estudio. Primaria. México: SEP.

pesos. ¿Cuánto dinero tiene después de vender el quinto luchador?

8. Los Pumas han marcado 73 goles. Si el Cruz Azul ha marcado 15 goles menos, y en los próximos partidos anota otros 6. ¿Cuántos goles tendrá el Cruz Azul?

9. A Manuel le gusta mucho jugar a las canicas, pero ha tenido mala suerte y en el último juego perdió 43 canicas. Afortunadamente le quedan 72. ¿Cuántas canicas tenía antes de jugar?

10. La señora Carmelita vende tacos a la hora del recreo. Hoy se vendieron 410 tacos y quedaron 200. ¿Cuántos tacos había al iniciar la venta?

11. Ayer llegaron a mi escuela los libros de texto que nos reparten cada año. A los grupos de 3° llegaron 164 libros. A los grupos de 2° llegaron 32 libros más que a los grupos de 3°. ¿Cuántos libros tiene el grupo de 2°?

12. El viernes pasado fui a la boda de mi tía Elena. La fiesta empezó a las 6 de la tarde. A las 9 de la noche se fueron 25 invitados, y llegaron otros 40. ¿En ese momento había más o menos invitados? ¿Cuántos más o cuántos menos?

13. Ayer hicimos la cuenta de cuantos colores y plumas teníamos entre todos en el salón. Si había 238 lápices de colores y 53 lápices menos que plumas, ¿Cuántas plumas hay?

14. María tiene 135 estampas de las chicas súper poderosas. Su amiga Inés tiene 37. ¿Cuántas estampas más debe tener Inés, para que tenga las mismas que María?

15. Mi hermano y yo estamos ahorrando para el regalo de cumpleaños de mi papá. Yo ya llevo ahorrados $262.00 y mi hermano tiene $28.00 más que yo. ¿Cuánto dinero tiene mi hermano?

16. En la primaria donde estudia mi hermanito, hay 264 niñas y 234 niños. Si se organizan parejas de niño y niña para el baile de fin de año, ¿Cuántas niñas se quedarían sin pareja?

17. Un labrador tiene un surco recién plantado con semillas de maíz, que mide 25 metros de largo. Si coloca una tableta de fertilizante en cada uno de los extremos del surco y después pone una tableta cada 5 metros en el surco, ¿Cuántas tabletas puso en total?

18. Mi papá trabaja en una fábrica de escaleras en la que hay un total de 363 obreros. En la fábrica donde trabaja el compadre de mi papá hay sólo 158 obreros. ¿Cuántos obreros menos trabajan en la segunda fábrica?

19. En una tienda trabajan 5 hombres y 2 mujeres. Si se desea que haya el mismo número de hombres y mujeres, ¿Cuántas mujeres es necesario contratar?

20. El papá de Fernando compró 50 focos, de los cuales 20 están sin estrenar y 4 salieron fundidos. ¿Qué operaciones te permitirían saber con exactitud la cantidad de focos que están en servicio?

21. Miguel tenía 58 estampas de futbolistas famosos. Durante el recreo se puso a jugar con sus amigos. Al terminar el recreo tenía 97. ¿Cuántas estampas ganó?

22. Ayer vino a la casa mi tío Juan y, como es su costumbre, nos regaló muchos caramelos a mis hermanos y a mí, en total. En total yo tengo 107 caramelos, 23 son de chile, a mí me gustan más los de tamarindo, y afortunadamente los demás son de éste sabor. ¿Cuántos caramelos son de tamarindo?

23. Mí mamá compró en el mercado 3 ollas, 2 cazuelas y 12 vasos, pagó en total $185.00. Si pagó con un billete de $500.00 ¿Cuánto dinero le dieron de cambio?

24. En una parada subieron a un autobús 17 personas. Cuando arranca el autobús, van 5 personas más que antes de que parara. ¿Cuántas personas bajaron del autobús en esa parada?

25. Después de ahorrar varios domingos yo tenía $653.00, pero ayer en la tarde mi mamá me llevo al supermercado. Ahí compré varias cajas de caramelos y solamente me quedaron $394.00. ¿Cuánto dinero me gasté?

26. Mí tío me dio por mi cumpleaños $245.50, con lo que tengo, reúno $1000.00. ¿Cuánto

dinero tenía antes de ver a mí tío?

27. Karina tenía en su jardín 125 rosas, de las cuales 14 destruyó una plaga, 16 se secaron, 18 destrozó el granizo y 15 se robaron. ¿Cuántas rosas le quedaron?

28. Después de ahorrar $248.00, me invitaron a la fiesta de cumpleaños de la hermanita de Maribel. Le compré un regalo y me gasté $115.00. ¿Cuánto dinero me queda?

29. Todos los fines de semana, entre lo que me dan mis cinco tíos logro juntar $624.00 de domingo. Como esta semana me porté muy bien mí mamá también me dio dinero. Ahora tengo 1049 pesos. ¿Cuánto dinero me dio mí mamá?

30. En la secundaria de mi prima hay 1564 alumnos. La maestra les pidió de tarea que llevaran la cantidad de hombres y mujeres que asisten a la escuela. Sin embargo, mi prima solamente encontró la cantidad de mujeres, que es de 315, ¿le podrías ayudar, diciéndole cuántos hombres van a la escuela?

31. Hasta el día de hoy, antes del recreo, había reunidos $19,518.00 en la cooperativa escolar. Al hacer la cuenta después del recreo, había $87,625.00. ¿Cuánto se vendió hoy en el recreo?

32. Juan y Andrés están ahorrando para comprar una motocicleta. Juan tiene $1259.00. Andrés tiene $293.00. ¿Cuántos pesos más tiene que tener Andrés, para tener los mismos que Juan?

33. En una tienda de dulces hay 168 chicles. Si venden 23 caramelos, quedan los mismos chicles que caramelos. ¿Cuántos caramelos hay?

34. Tengo $2212.00 pesos. Si me gasto $1343.00 me queda el mismo dinero que a Jaime. ¿Cuánto dinero tiene Jaime?

35. Un caracol está en el fondo de un pozo que tiene 5 metros de profundidad. Si durante el día sube 3 metros y por la noche baja dos ¿Cuántos días tardará el caracol en salir del pozo?

36. Para hacer un pastel con motivo del cumpleaños de la hermanita de Maribel, su mamá le encargó que fuera a la tienda y comprara 3 kg de azúcar, cada kg costó $4.00. También

compró 2 kg de huevo, cada kg costó 9.00 y ya de regreso a su casa se compró un tlacoyo que le costó 6.00, ¿cuánto gastó Maribel en total?

37. Mi mamá compró 5 bolsas de arroz a $9.00 cada una, 3 bolsas de frijol a $12.00 cada una, 2 kg de tortillas a $6.00 por kilo y 5 kilos de jitomate cada uno a $4.00. ¿Cuánto pagó?

38. Juana compra en la papelería 5 cajas de esferas a $17.00 cada caja, 3 series de luces a $39.00 cada serie y 7 rollos de escarcha a $178.00 cada rollo, ¿Cuánto pagó por lo que compró?

39. Maribel fue a la tienda y compró 12 refrescos grandes a $13.00 cada uno, 4 bolsas de papas grandes a $11.00 cada una, 1 paquete mediano de servilletas a $16.00, 5 paquetes de vasos desechables a $8.00 cada paquete y un paquete de platos medianos a $7.00, sí pagó con un billete de $500.00, ¿cuánto pagó y cuánto le sobró?

40. Hoy en la ceremonia, el maestro nos formó a todos de manera diferente a la usual, colocando en cada fila un mismo número de alumnos. ¿Cuántos niños hay en 19 filas, si en cada una de ellas hay 39 niños?

41. En el mercado, Micaela compró 18 kg de papas, a $6.00 el kilo. Si le sobraron $92.00. ¿Cuánto pagó por los 18 kg y cuánto dinero llevaba?

42. Manuel compró en la farmacia 3 cajas de penicilina a $36.00 cada una, un frasco de jarabe para la tos a $75.00, una bolsa mediana de algodón a $10.00 y tres jeringas a $2.50 cada una. Sí llevaba $600.00 ¿cuánto pagó y cuánto le sobró?

43. Marcos es el encargado de la biblioteca de la escuela, y desea hacer tres grupos iguales de libros. La biblioteca tiene tan sólo 69 libros. ¿Cuántos libros tendrá que colocar en cada grupo?

44. A mí papá le pagaron $3,000.00 por vender 20 escaleras y $350.00 por vender 30 escobas. En total ¿cuánto recibió y cuánto costó cada escoba y cada escalera?

45. Don Augusto siempre compra mucha leche, para elaborar deliciosos quesos que vende en el mercado. Un litro de leche cuesta \$8.50. Si Don Augusto tiene \$1530.00 para comprar leche, ¿Cuántos litros podrá comprar?

46. La mamá de Adrianita tiene siete veces la edad de su hija. La diferencia entre sus edades es de 24 años. ¿Cuáles son las edades de Adrianita y su mamá?

47. Doña Conchita necesitó 90 madejas de estambre para tejer 15 suéteres del mismo tamaño. ¿Cuántas madejas necesitará para hacer otros 3 suéteres iguales?

48. En la librería de Don Jacinto pagaron \$5720.00 por 7 paquetes de libros. ¿Cuánto tendrían que pagar por 15 paquetes de los mismos libros?

49. Carmela gastó en la tienda de dulces la mitad del dinero que tenía. Después fue a la paletería y ahí gastó la mitad del dinero que le sobró. Al salir de ahí aún le quedaban \$24.00. ¿Cuánto dinero tenía antes de entrar a la tienda de dulces?

50. En mi escuela van a comprar sillas y mesas para renovar el mobiliario que ya se encuentra en muy malas condiciones. Si cada silla cuesta \$90.00 y una mesa cuesta el doble de lo que cuesta una silla, ¿Cuánto se tendrá que pagar por 14 sillas y 8 mesas?

51. Mi amigo Ramón fue a una tienda de ropa en la que vio un suéter que costaba \$200.00, una playera de la mitad del valor del suéter y un saco del doble del valor del suéter. Si en la compra que hizo Ramón pago \$700.00, ¿Qué fue lo que compró?

52. En su fiesta de cumpleaños, a Gloria le regalaron 3 blusas y 4 faldas que le gustaron mucho ¿De cuántas maneras se puede vestir con ellas?

53. Cada vez que Néstor guarda \$120.00, Nicolás ahorra \$40.00. ¿Cuánto tendrá Néstor cuando Nicolás haya ahorrado \$160.00?

54. Felipe gastó \$132.00 en una docena de gorras. ¿Cuánto habría gastado si hubiera comprado $\frac{3}{4}$ partes de la docena de gorras?

55. En una canasta llevo $\frac{1}{4}$ kg de manteca, $\frac{1}{2}$ kg de carne y $\frac{3}{4}$ kg de jitomate. ¿Cuánto peso llevo en dicha canasta?

56. A continuación se te presenta un grupo de números en serie. Se dice que están en serie porque en medio de cada uno de ellos existe una operación matemática, y entre dichas operaciones hay un patrón que siempre se repite. ¿Cuál es el número que completa la serie? 1,7,6,12,11,17,___,22.

57. A continuación se te presenta un grupo de números en serie. Se dice que están en serie porque en medio de cada uno de ellos existe una operación matemática, y entre dichas operaciones hay un patrón que siempre se repite. ¿Qué par de números completa la serie? 2, 0, 7, 4, 2, 9, 6, 4, ___, ___.

58. Mi tío Pepe tiene una granja en un pequeño pueblo en el Estado de Hidalgo. En vacaciones fuimos a conocer la granja y vimos que había gallinas y conejos. Juntos, eran 13 animales que tenían 36 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos había en la granja?

Apéndice C

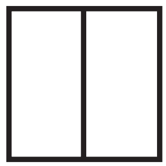
PRUEBA EXPLORATORIA DEL USO DE FRACCIONES
EN 5º Y 6º DE PRIMARIA

NOMBRE DEL ALUMNO ____

GRADO Y GRUPO ____

1. Observa las siguientes figuras y divídelas como se muestra en el ejemplo.

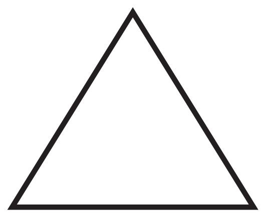
Ejemplo



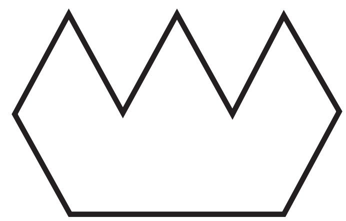
En medios

Ejercicios:

En séptimos



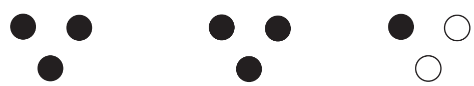
En tercios



En octavos

2. Representa con figuras las siguientes fracciones, según lo muestra el ejemplo.

Ejemplo $2\frac{1}{3}$



Ejercicios:

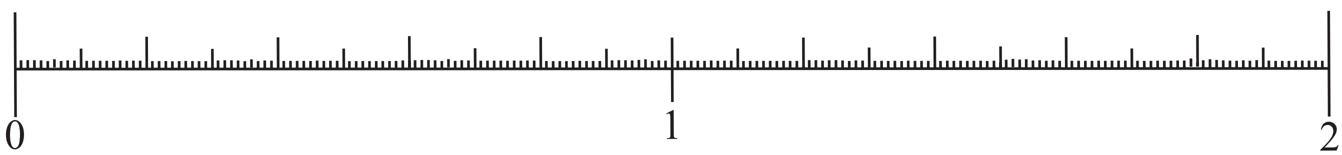
$1\frac{2}{4}$	$3\frac{3}{5}$
$4\frac{3}{4}$	

3. Escribe con número decimal las siguientes fracciones.

$\frac{4}{10}$ = ________________ $\frac{75}{100}$ = ________________

5. Coloca los siguientes números y fracciones en la recta numérica que se encuentra abajo.

0.5	$\frac{8}{4}$



6. Completa las siguientes expresiones.

$\frac{1}{4}$ de metro es igual a ______________ centímetros

1 metro es igual a ______________ decímetros

7. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones.

$\frac{4}{8} + \frac{3}{8} =$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$	$\frac{6}{8} - \frac{2}{4} =$	$\frac{7}{3} - \frac{5}{3} =$

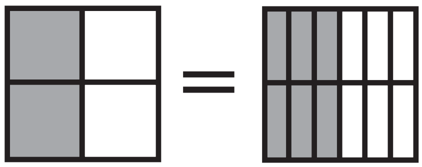
8. Coloca en la línea la respuesta correcta.

Una quinta parte de 100 es igual al _____________%

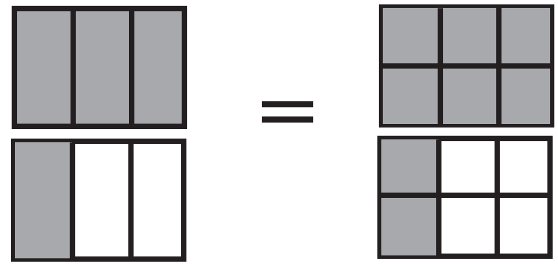
El 50% de 300 es ______________

9. Comprueba de forma gráfica las siguientes fracciones equivalentes, como lo muestran los ejemplos.

Ejemplos $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$



$\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$



Ejercicios:

$\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$

$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

10. Contesta las siguientes preguntas.

Tenemos 3 barras de chocolate y vamos a repartirlas de forma equitativa entre 5 amigos. ¿Cuánto nos toca a cada uno?
R=____

Se han comprado dos pizzas y a cada niño le corresponden 2/4 de una pizza. ¿A cuántos niños les ha tocado pizza?
R=____

En la fiesta de mi prima compraron 2 pasteles iguales. Si estábamos 7 niños, ¿en cuántas partes se debería partir cada pastel para que nos tocara lo mismo a cada uno?
R=____

11. Coloca en los espacios las fracciones que se puedan acomodar obedeciendo a los signos.

$\frac{3}{1}$ $\frac{6}{4}$ $\qquad \frac{\square}{\square} > \frac{\square}{\square}$

$\frac{7}{7}$ $\frac{8}{7}$ $\frac{7}{8}$ $\qquad \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square} < \frac{\square}{\square}$

$\frac{12}{2}$ $\frac{20}{4}$ $\frac{24}{4}$ $\frac{6}{1}$ $\frac{9}{10}$ $\qquad \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

¡Muchas gracias por tu participación!

OPINIÓN DE LOS ALUMNOS SOBRE EL PROGRAMA DE FRACCIONES

¿Qué te pareció el curso? Nos interesa saber tu opinión. Ayúdanos contestando las siguientes preguntas.

1. ¿Aprendiste sobre fracciones?
   Muchísimo( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

2. ¿Las invariantes de la fracción te fueron de ayuda para realizar las actividades y resolver los problemas?
   Muchísimo( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

3. ¿Te gustaron las actividades?
   Muchísimo( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

4. ¿Qué fue lo que más te gustó del curso?

____

____

____

____

5. ¿Qué fue lo que menos te gusto del curso?

____

____

____

____

6.- ¿Qué cambiarías de las actividades?

____

____

____

____

Del 1 al 10, qué calificación le podrías a:

Maestra (o)	**Guillermina**	**Aurora**	**Alejandro**	**Susana**
Calificación				

¿Por qué?

¡MUCHAS GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!

Apéndice E

OPINIÓN DEL MAESTRO DEL GRUPO RESPECTO
AL PROGRAMA DE APROPIACIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN

Instrucciones: Con el propósito de mejorar el programa, nos gustaría conocer su opinión sobre diversos aspectos del mismo. Por favor, marque la opción que mejor indique su respuesta y escriba sus sugerencias. Si requiere más espacio, puede utilizar el reverso de la hoja ¡Su opinión nos es muy importante!

1. ¿Se revisaron todos los temas relacionados con fracciones que marcan los planes y programas de estudio de nivel primaria?

   Totalmente( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

2. ¿Qué temas relacionados con fracciones le gustaría que se incluyeran?

___

___

___

3. ¿Los temas revisados fueron de utilidad para los alumnos?

   Totalmente( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

4. ¿Cuáles de los temas revisados fueron de utilidad para los alumnos?

___

___

___

5. ¿El tiempo dedicado a la revisión de los temas fue el adecuado?

   Totalmente( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

6. ¿En su opinión cuánto tiempo sería adecuado para la revisión de cada tema?

___

___

___

7. ¿Las actividades realizadas en clase fueron las adecuadas para apoyar el aprendizaje de los alumnos?

   Totalmente( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

8. ¿Qué sugiere para mejorar las actividades?

___

___

___

9. ¿El empleo de las invariantes fue de utilidad para el aprendizaje de las fracciones?

Totalmente( )   mucho( )   algo( )   poco( )   nada( )

10. ¿Qué sugiere para que los alumnos mejoren su uso de las invariantes del concepto de fracción?

____

____

____

11. ¿Considera que los alumnos aprendieron los temas revisados?

Totalmente( )   mucho( )   algo( )   poco( )   nada( )

12. ¿Qué sugiere para mejorar el aprendizaje de los temas revisados?

____

____

____

13. ¿Considera que el programa favoreció el desempeño académico de los alumnos que más lo necesitaban?

Totalmente( )   mucho( )   algo( )   poco( )   nada( )

14. ¿Qué estrategias sugeriría para mejorar el desempeño académico de los alumnos que más lo necesitan?

____

____

____

15. ¿Las actividades realizadas pueden ser aplicadas sin problema por el maestro del grupo?

Totalmente( )   mucho( )   algo( )   poco( )   nada( )

16. ¿Qué sugiere para mejorar el diseño de las actividades?

____

____

____

17. ¿Las actividades fueron atractivas para los alumnos?

Totalmente( )   mucho( )   algo( )   poco( )   nada( )

18. ¿Qué sugiere para mejorar el interés de los alumnos por las actividades?

____

____

____

19. ¿Considera que el trabajo por equipos es el más adecuado para este tipo de actividades?

Totalmente( ) mucho( ) regular( ) poco( ) nada( )

20. ¿Qué opina de la forma en que quedaron organizados los equipos?

____

____

____

21. ¿Los materiales empleados en el programa fueron útiles para favorecer el aprendizaje de las fracciones?

Totalmente( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

22. ¿Qué cambios propondría para mejorar la utilidad de los materiales del programa?

____

____

____

23. ¿Los materiales fueron atractivos para los alumnos?

Totalmente( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

24. ¿Qué materiales sugeriría para mejorar el interés de los alumnos?

____

____

____

25. ¿Los materiales empleados en el programa son accesibles para que el maestro del grupo aplique el programa?

Totalmente( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

26. ¿Qué sugiere para mejorar la accesibilidad de los materiales a utilizar?

____

____

____

27. ¿Se tuvo un control adecuado de la disciplina del grupo?

Totalmente( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

28. ¿Qué sugiere para mejorar la disciplina?

____

____

____

29. ¿La evaluación por sesión de la disciplina y el aprovechamiento sirvió para fomentar el control y aprovechamiento del grupo?

Totalmente( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

30. ¿Qué sugiere para mejorar la evaluación por sesión?

____

____

____

31. ¿Los diplomas sirvieron para mejorar la motivación del grupo?

Totalmente( ) mucho( ) algo( ) poco( ) nada( )

32. ¿Qué sugiere para mejorar el empleo de los diplomas?

____

____

____

33. ¿La aplicación de este programa ha influido positivamente en su práctica docente?

Totalmente( ) mucho( ) regular( ) poco( ) nada( )

34. ¿Qué sugiere para que el programa sea de mayor utilidad para el trabajo que realiza en el aula?

____

____

____

35. ¿Hay algo más que desee comentar?

____

____

____

____

____

____

____

¡MUCHAS GRACIAS POR SU COLABORACIÓN!