UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# "Material alternativo para la enseñanza del cálculo a nivel Bachillerato"

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**M A T E M Á T I C A**

P R E S E N T A

**ANA PATRICIA KURI GONZÁLEZ**

**DIRECTOR DE TESIS: DRA. GABRIELA CAMPERO ARENA**

**MÉXICO, D. F., 2006**

# Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Kuri
   González
   Ana Patricia
   55 73 19 13
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   081610750

2. Datos del tutor
   Dra
   Gabriela
   Campero
   Arena

3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Javier
   Páez
   Cárdenas

4. Datos del sinodal 2
   M en C
   María del Pilar
   Martínez
   Téllez

5. Datos del sinodal 3
   M en C
   Francisco
   Struck
   Chávez

6. Datos del sinodal 4
   Héctor
   Méndez
   Lango

7. Datos del trabajo escrito
   “Material alternativo para la enseñanza del cálculo a nivel Bachillerato”
   p
   2006

# AGRADECIMIENTOS

A mis sinodales: Javier, Pilar, Paco y Héctor, por sus valiosas correcciones y comentarios.

A mi tutora: Gabriela, por el tiempo dedicado, por las pláticas en las que compartimos un poco nuestras vidas y por el apoyo tan grande.

A Juan Manuel por la primer escritura en Word de esta tesis, pero sobre todo por el apoyo, por lo que compartimos, por la amistad y por el cariño.

A Alejandro por las horas que se sentó a escuchar las ideas para escribir esta tesis.

Al Colegio Madrid

A Alejandro Pérez Pascual

A Ramona Compte, por permitirme trabajar cerca de ella, por todas las cosas que me enseño y por su impulso a que terminara con este lastre.

A Rosa Melgar, por la amistad.

A los coordinadores del CCH del Colegio Madrid: Alicia, Ernesto, Josefina, Laura y Lourdes.

A las Orientadoras: Laura y Rosalinda.

A las secretarias: Chelito, Maricela, Marisa y Silvia.

A los alumnos que usaron el material en su curso de cálculo diferencial e integral en el colegio Madrid.

A mi familia por su apoyo y amor.

# DEDICATORIA

A MIS PADRES porque sé que les hubiera gustado ver el límite de este trabajo que me impulsaron a terminar aunque nunca lo entendieron y que parecía que el proceso tendía a infinito.

A YEZMÍN porque tiene la propiedad de densidad en mi pensamiento.

A Dulce y José Antonio por tantas y tantas cosas pero sobre todo porque tuvieron que derivar la función de mis pretextos para encontrar la pendiente de la recta que me indicara la inclinación cuando me iba por la tangente.

A ROCÍO porque siempre está, a pesar de la discontinuidad (por suerte removible).

A ISA que intenta enseñarme que hay discontinuidades de brinco que se pueden convertir en removibles (aunque sé que no es así). Por la cardioide que quiere engordar y redefinir en las discontinuidades y el menor a 3 aunque sea pleonasmo. Y también porque cree que las matemáticas están en todo.

# Índice

Índice

# Introducción

El presente trabajo de tesis es un material de trabajo que se elaboró para ser usado en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I a nivel Bachillerato en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH). Es un material que ha sido probado con varios grupos en el Colegio Madrid pero que podría usarse en cualquier Bachillerato.

Después de varios años de docencia en matemáticas, y algunos de éstos en el Colegio Madrid, hace siete años, me enfrenté con la necesidad de conocer a profundidad el programa de Cálculo diferencial e integral de CCH. De este esfuerzo por conocerlo y tomando en cuenta las ideas y propósitos que mencionaré más adelante, elaboré el material que aquí presento como trabajo de tesis. Es un material que considero novedoso para el curso de Cálculo diferencial e integral I dirigido a estudiantes y profesores de bachillerato en plan de estudios de CCH. Pese a que hay muchos libros de Cálculo para Bachillerato, lo elaboré debido a la enorme carencia que hay de textos en los que se desarrollen los contenidos programáticos con la metodología que se sugiere para el CCH. Es importante aclarar que el material que aquí presento no es un libro de texto que el profesor podrá seguir para dar una clase tradicional, ni un manual de ejercicios para que el alumno resuelva, sino que es un material que presenta actividades mediante las cuales el alumno irá construyendo los conocimientos que aparecen en los programas de la materia con la ayuda del profesor.

*Los propósitos de este material son los siguientes:*

- Presentar al alumno un material flexible que permitirá ser moldeado según las necesidades individuales de cada persona y que, fundamentalmente, lleve al alumno a construir el conocimiento matemático y a reflexionar sobre él, sin que sea un libro de texto acabado o un manual de ejercicios.
- Dar un marco de referencia real al estudiante; es decir, enseñar las matemáticas, y en particular el Cálculo, como un lenguaje y un sistema con el cual se puede modelar el cambio, pues el Cálculo nace justamente como una respuesta ante la necesidad de explicar y modelar fenómenos naturales y sus variaciones y cambios. Entender que vivimos en un entorno, natural y social, que permanentemente se modifica y que por ello es sustancial entender a cabalidad el concepto de cambio.
- Que el estudiante descubra la matemática por sí mismo y haga suya la metodología. Para lograr esto es indispensable la participación constante de los estudiantes en su proceso de aprendizaje.
- Que los estudiantes escriban sus resultados, sus procesos, que aprendan a expresarse y a expresar por escrito las matemáticas, que aprendan a simbolizar la solución de un problema con la idea de crear un método de razonamiento.
- Romper con la actitud pasiva de los estudiantes en la clase de matemáticas.
- Que el estudiante se reconozca capaz de resolver un problema y transmitir a sus compañeros cómo lo hizo.

- Permitir al alumno vincular los conceptos nuevos con aquellos que había trabajado en cursos anteriores; fomentar el uso de ideas y técnicas matemáticas usadas por el alumno con anterioridad en la resolución de nuevos problemas con el fin de que él mismo corrobore que es necesario generar herramienta matemática nueva para poder hacer cada vez más precisa la descripción del mundo, por ejemplo, que se dé cuenta que “la regla de tres” no alcanza para todo.
- Fomentar la discusión sobre el origen y los alcances del Cálculo no sólo como una herramienta matemática sino como una forma de pensamiento matemático y por tanto de interpretación de la realidad. Lograr que el alumno alcance, a través del aprendizaje de esta disciplina, no sólo un dominio correcto de las técnicas sino el desarrollo de la capacidad interpretativa que el cálculo le proporciona.
- Permitir al alumno que en todo momento, tenga claro qué conceptos está estudiando y de qué manera se relacionan éstos con los que ya maneja.
- Lograr que el conocimiento matemático genere, entre los alumnos, asombro, sorpresa y emoción. Convertir el tedio que inicialmente pueda suscitar el resolver un ejercicio en el placer que da leer un poema o contemplar una obra de arte.
- El material está diseñado para lograr establecer “espirales del conocimiento”, es decir, que se transite a través de los conceptos una y otra vez de manera cada vez más profunda y rigurosa.
- Enseñar a los estudiantes a determinar cuándo el aprendizaje ha sido significativo para ellos. Proponerles la reflexión sobre los conceptos adquiridos y el uso que pueden darles.

*¿A quién va dirigido el material?*

Presento, en este trabajo, un material que le permita al profesor desarrollar la clase como mejor le plazca, apoyándose en las actividades que propongo, respetando la libertad de cátedra. El único requisito es que el profesor esté dispuesto a no ser el único miembro activo dentro del aula y permitir, como ya mencioné antes, que los estudiantes descubran y construyan los conceptos.

El material elaborado tiene dos versiones: la del profesor y la del estudiante. La que se presenta en este trabajo de tesis corresponde a la del profesor y la diferencia con la del estudiante son las frases que aparecen en los “cuadros de discusión”. Estos “cuadros de discusión” son unos recuadros que aparecen a lo largo del material y en la versión del profesor contienen sugerencias de temas a discutir, la explicación de la intención de cada uno de los ejercicios y su nivel de profundidad, definiciones, teoremas o resultados que aunque no se manejarán explícitamente en el curso, es conveniente que el profesor tenga a la mano. En la de los estudiantes, estos recuadros aparecen vacíos y deberán ser llenados por ellos mismos, en sus términos y con sus propias palabras, durante los distintos momentos de discusión, con los conceptos y resultados que el alumno considere relevantes. En realidad, estos cuadros, funcionan como guía para el profesor en los momentos de “cierre”. A pesar de que estos cuadros aparecen a lo largo de todo el material, es decisión del profesor elegir los momentos de estos “cierres” y la manera en la que dé la discusión con su grupo. Las exigencias de cada grupo y su carácter

particular son cuestiones que hay que tomar en cuenta para ver qué tan seguido usar estos cuadros o si es preferible dejar pasar algunos.
Además de los “cuadros de discusión” aparecen otro tipo de recuadros a los que he llamado “Notas para el profesor” y como el nombre lo indica son notas que no contiene la versión de alumnos ni siquiera como un recuadro en blanco. En ellos también se dan indicaciones o pautas que pueden ayudar a llevar la clase pero no tienen que ver con “cierres de conceptos”.

Usualmente, cuando un profesor llega a un tema que le gusta le dedica más tiempo y a los que le desagradan no les dedica tanto y los ve con menos profundidad. Los “cuadros de discusión”, como ya mencioné, contienen el grado de profundidad en el tratamiento de cada tema para evitar que esto pase.

Es importante aclarar que el primer año que se usó el material los “cierres” sólo se proponían al final de cada tema y el material no contenía los “cuadros de discusión”. Nos dimos cuenta que había muchos estudiantes que se quedaban con conceptos erróneos a pesar del cierre al final del tema y buscando de dónde venía la falla vimos que habían construido erróneamente algún concepto. Esto nos llevó a revisar poco a poco a lo largo de todo el tema y a través de los pequeños “cierres”, los conceptos que se van estudiando.

*¿Cómo se usa el material?*

Cada uno de los capítulos está dividido en secciones, la manera de abordar cada una de éstas es la siguiente:

Primero, el profesor expondrá los objetivos del tema que se va a trabajar. Es importante que siempre tenga presente que no es él quien va a verter los conceptos ya terminados al grupo sino que, por el contrario, es el grupo quien construirá los conceptos o al menos generará la necesidad de construirlos. Esta es la etapa que llamé “introducción”.
Los alumnos trabajarán los ejercicios propuestos <u>siempre por equipos</u> con el fin de ir construyendo, poco a poco, los conceptos del tema. En la sección en donde menciono las diferencias de lo que se hacía en Preparatoria y lo que se hace en CCH justifico la propuesta del trabajo en equipo. El papel del profesor en esta etapa es el de guía o facilitador del trabajo. Esta etapa es la que llamé “guiar”.
Por último, la tercera etapa llamada “cierre”, es en la que el profesor organizará una mesa de discusión grupal. Dicha “plenaria” será guiada por los puntos que aparecen en el manual del profesor en los recuadros de discusiones. El profesor deberá fomentar el que los alumnos aprendan a verbalizar, escribir y defender ideas y posturas matemáticas. Estas sesiones, permitirán al maestro detectar, evaluar y corregir las estrategias y dinámicas que cada equipo decidió seguir. Además, justamente por la mecánica propuesta para el trabajo, los alumnos no elaboran, a lo largo de las clases, apuntes o notas; en estas discusiones se gestarán las ideas que el alumno anotará en sus recuadros de discusiones y que le quedarán como una sinopsis del tema.

### Contenido del material

El trabajo está dividido en 10 capítulos, el orden de presentación de los temas está determinado por el programa de Cálculo de CCH y aparece en el Apéndice 1 al final del manual.

En el Capítulo 0 pretendo dar una visión global de lo que ha sido hasta el momento el CCH en la UNAM. Expongo las razones por las que se decidió cambiar la incorporación a este sistema en el Colegio Madrid, así como también los cambios que se dieron en el área de matemáticas dentro del Colegio y mi panorama personal del proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de matemáticas.

El Capítulo 1 se divide en dos secciones. La primera presenta el cálculo diferencial e integral a estudiantes que aún habiendo oído de él, no saben lo que es. Las ideas centrales de esta sección son presentar problemas que el alumno, con las herramientas de las que dispone hasta ese momento, no puede resolver o justificar su solución con el objetivo de generar en él la necesidad de la construcción de una herramienta más compleja. En la segunda sección, se aplica un cuestionario que aparece en el Apéndice 2. El cuestionario pretende conocer el nivel que tienen los estudiantes en algunos aspectos que considero básicos o fundamentales para el curso de cálculo. Consta de 12 preguntas de álgebra relacionadas con la simplificación de expresiones, desarrollo de binomios elevados al cuadrado y al cubo, factorización, solución de ecuaciones de primer y segundo grado y 5 preguntas sobre funciones. La idea es retomar conceptos tratados en cursos anteriores que serán necesarios para el estudio del cálculo. Es una etapa propedéutica que se trabajará durante las primeras semanas del curso en la que se retoman los conceptos de dominio, imagen, función, gráfica de relaciones, función lineal y cuadrática. Esto se logra a través de la resolución de 5 ejercicios que resolverán en equipos, la discusión grupal y una tarea para reforzar los conceptos. También se avanza en nuevos conceptos como el de función definida por secciones, llamada también función definida por pedazos o por partes.

El Capítulo 2 se centra, fundamentalmente, en el concepto de límite. Éste se desarrolla desde el punto de vista intuitivo para que sea el mismo alumno el que, dirigido por el maestro, logre dar la definición formal. En este capítulo se trata también, de manera intuitiva, el concepto de continuidad. Sobre este punto se hacen algunas demostraciones muy sencillas y se discute sobre lo que, en matemáticas, significa demostrar.

La primera definición de derivada se construye en el Capítulo 3. Esto se hace, también de forma intuitiva, usando el concepto de límite y a través de la resolución de problemas. Se trabaja con tres ejemplos en apariencia distintos: el de tangente, el de velocidad instantánea y el de razón de cambio, para finalmente construir el concepto de la derivada en sí, haciendo notar que éste es el que está detrás de los tres ejemplos. En este capítulo se comienza con el cálculo de derivadas sencillas y la resolución de problemas de aplicaciones.

En el Capítulo 4 se refuerza el desarrollo de la habilidad técnica que se requiere para el cálculo, es decir, se plantean fórmulas de derivación y se resuelven ejercicios. Por considerarlo importante, he intentado introducir rudimentos de formalismo matemático, por lo que se le pide al alumno que "demuestre" algunas de las propiedades de las derivadas. La idea de presentar la noción de "demostración" si bien no es parte medular de este curso, me pareció interesante pues permite discutir y reflexionar sobre lo que es el rigor lógico y la importancia de su uso. En este capítulo se presenta por primera vez la composición de funciones, así como también la regla de la cadena y derivación implícita.

El objetivo principal del Capítulo 5 es que el estudiante pueda elaborar la gráfica de una función con la mayor precisión posible. Es necesario, entonces, introducir conceptos nuevos como son el de monotonía, concavidad y máximos y mínimos locales. Para lograr esto, el estudiante deberá utilizar todos los conceptos vistos en este curso como asíntotas, derivadas, continuidad, y además, algunos otros de cursos pasados como dominio, imagen, intersecciones con los ejes coordenados; así podrá aplicar toda la herramienta matemática que ha construido hasta ahora en un mismo ejercicio.

Los Capítulos 6 y 7 desarrollan el cálculo integral. El Capítulo 6 es una introducción al concepto de integral y sus aplicaciones. En él se calculan antiderivadas de funciones muy sencillas y así, poco a poco, se va construyendo este concepto. Nunca se menciona la palabra "integral", es decir únicamente se está preparando el terreno para el curso Cálculo Diferencial e Integral II. En el Capítulo 7 se relaciona el concepto de antiderivada con el de "área bajo la curva" para vincular así una idea meramente algebraica con una geométrica.

Sobre los dos últimos capítulos, el 8 y el 9, he pensado mucho; me he debatido entre incluirlos o no porque su contenido no pertenece propiamente al programa de Cálculo Diferencial e Integral I de CCH. Estos capítulos presentan las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas y sus derivadas. Decidí agregarlos pues considero que además del conocimiento matemático que representan son ilustrativas y fundamentales para cumplir el objetivo de "aprender a interpretar la realidad" de formas nuevas. Algunas de estas secciones son temas de semestres anteriores, pero los estudiantes no los manejan con soltura. Las otras secciones son del programa de Cálculo Diferencial e Integral II pero son temas que pueden relacionarse y usarse de manera natural con los temas del programa de Cálculo I.

Finalmente cabría la pregunta ¿por qué Cálculo y no cualquier otra rama de las matemáticas? Pues porque como todos los que hemos dado clase sabemos, hay temas que nos gustan y temas que nos apasionan, yo elegí uno de esta última categoría.

# CAPÍTULO 0

# MARCO TEÓRICO

Antes de presentar como tal el material daré una visión de lo que ha sido hasta el momento el CCH en la UNAM, desde sus orígenes hasta nuestros días. Expondré las razones por las que se decidió cambiar la incorporación del Colegio Madrid de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) al CCH. También presentaré los cambios que se dieron en el área de matemáticas en el Colegio Madrid, y el panorama del proceso enseñanza aprendizaje en el área de matemáticas desde mi perspectiva. Después haré una descripción de lo que es el material como tal, de sus objetivos, de cómo es más conveniente que se utilice, de las experiencias adquiridas al usar el material y los resultados obtenidos.

## Iniciación, proceso y reforma del CCH en la UNAM

En 1971, durante la rectoría del doctor Pablo González Casanova (1970- 1973), el Consejo Universitario de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) aprobó por unanimidad la creación del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH).
Según los investigadores Jorge Bertolucci y Roberto A. Rodríguez, el CCH perseguía cuatro metas:

1) *Estrechar lazos entre educación y vida proporcionando una integración del sujeto más acorde con las necesidades del país y de los propios individuos.*
2) *Promover cambios en la estructura universitaria, para que ésta no sólo acompañe a los cambios que la han de afectar, sino que se adelante a ellos.*
3) *Forjar una nueva manera de alcanzar y desarrollar el conocimiento científico.*

> *4) Establecer una nueva forma de conexión de la institución con la sociedad.*
>
> *En suma, se trata de que los alumnos adquieran los métodos y técnicas para aprender a informarse, de que los apliquen a situaciones concretas en la toma de decisiones y soluciones de problemas, de que sientan la inquietud de acrecentar sus conocimientos, de que desarrollen el pensamiento reflexivo y de que adopten una actitud hacia nuevas experiencias y al proceso de cambio.*
> *Paralelamente, entre los objetivos del CCH está la experimentación de métodos de enseñanza, así como la posibilidad de iniciar a los alumnos en el método de investigación científica.*[1]

El propósito entonces, era formar alumnos de manera integral, capaces de incidir y transformar su realidad histórico-social. El docente estaría encaminado a generar estrategias visionarias e innovadoras, bajo el concepto de "aprender a aprender" y el de la multidisciplina.

A pesar de todo lo anterior, el CCH funcionó hasta 1996 con serias limitantes por diversas razones. Algunas las expresan las autoridades del CCH en su *Síntesis del plan de estudios actualizado para los alumnos* (p. 4-5) y en resumen resaltan que:

1) la idea de que el alumno fuera el responsable de su propio aprendizaje a través de la investigación provocó que se dieran pocas horas de clase, pero se enfrentó con la realidad de que los alumnos no lograban alcanzar la autonomía en el aprendizaje si no recibían mayores apoyos de la institución;
2) los contenidos académicos de las asignaturas habían envejecido a lo largo del tiempo;
3) debido al exceso de contenidos programáticos y a las pocas sesiones de clase, se sustituían las formas de trabajo participativas por prácticas expositivas;
4) había contradicciones entre los enfoques de la docencia y la manera de evaluar;
5) la elección de materias optativas sin ninguna restricción generaba huecos importantes en la formación integral y académica;
6) el perfil de los alumnos y las exigencias de la metodología resultaban contradictorios;
7) con el tiempo se generó un desfase entre el objetivo del proyecto y la aplicación cotidiana del plan.

Después de la fuerte crisis que sufrió la UNAM en la segunda mitad de los ochenta, debido a una serie de reformas propuestas por el rector de la Universidad Nacional, Jorge Carpizo, se realizó en 1990 un Congreso Universitario en donde "se aprobaron múltiples mecanismos de evaluación de la vida académica" y el concepto de "excelencia académica" se impuso. Así, la mayoría de las facultades y escuelas comenzaron la revisión de sus planes de estudio.

[1] Jorge Bertolucci Incico y Roberto A. Rodríguez Gómez Guerra. *El Colegio de Ciencias y Humanidades (1971-1980). Una experiencia de innovación universitaria*. p. XVI-XXI

El CCH emprendió una reforma a fondo que se empezó a aplicar en 1996. Esta reforma ratificaba el modelo educativo del Colegio de Ciencias y Humanidades en donde se buscaba desarrollar en los alumnos los siguientes principios:

1) "aprender a aprender", entendido como hacerlos concientes y partícipes de su propio proceso de conocimiento;
2) "aprender haciendo", que significa desarrollo de habilidades de pensamiento;
3) "aprender a ser", que implica formación autónoma de valores;
4) ser "alumno crítico", entendido como la capacidad de juzgar acerca de la validez del conocimiento;
5) la "interdisciplinariedad", que busca establecer relaciones entre distintos campos del conocimiento.

Además de lo anterior, se buscaba también "*El reconocimiento del alumno como actor de la cultura y de su propia educación, y no como receptor pasivo de las mismas".*[2]

Pero como ya mencionamos el problema no estaba en el proyecto pedagógico sino en cuestiones técnicas. Así, por un lado, se incrementaron las horas de clase para poder cumplir con todo el plan de trabajo. Y por otro lado se buscó *"actualizar, seleccionar y reorganizar los contenidos de los programas de todas las asignaturas y renovar sus enfoques disciplinarios y didácticos"* [3]. Además se reguló la selección de asignaturas para impedir "lagunas de conocimiento" y garantizar ilación y continuidad de los conocimientos y habilidades a desarrollar.

## Las experiencias del sistema CCH en el Colegio Madrid

Desde 1971 el Colegio Madrid, haciendo caso de la solicitud del rector de la UNAM, el Dr. Pablo González Casanova, implementa de manera limitada el plan de estudios de CCH abriendo un grupo con este sistema. Esta experiencia revivió la discusión pedagógica en el Colegio y muchas ideas del CCH se aplicaron en la preparatoria, en especial lo referente a la imagen del profesor en el aula, que *"rompe con ciertas tradiciones educativas como las de la incuestionable autoridad y sabiduría del profesor y las consiguientes limitaciones a la libertad de acción y expresión del alumno."* [4] Otra de las herencias del CCH es la idea de que los conocimientos deben ser descubiertos por los alumnos.

---

[2] José de Jesús Bazán Levy y Rosalinda Rojano Rodríguez. *CCH. Síntesis del plan de estudios actualizado para los alumnos.* p. 3.

[3] *Ibid.* p. 6

[4] Pastor, María Alba. *Los recuerdos de nuestra niñez. 50 años del Colegio Madrid.* México. Colegio Madrid. 1991. p. 144.

Esta experiencia en el Colegio Madrid duró solamente cinco años debido a problemas técnicos y administrativos, aunque también influyó el desprestigio del que el CCH fue objeto, y por lo tanto se tuvo que cerrar este sistema. De 1976 a 1997, en el Colegio sólo se implementaban los planes de estudio de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP).
Después del Congreso Universitario de 1990, las escuelas y facultades iniciaron las reformas a sus planes de estudio. Las escuelas incorporadas tendrían, a partir de 1998, que implementar los nuevos planes. El Colegio Madrid se vio en la tarea de revisar los planes de la ENP, Escuela de Bachilleres y el del CCH para decidir qué sistema era el más conveniente para el futuro de su bachillerato.

> *Es entonces que la Junta de Gobierno y la Dirección General decidieron, en agosto de 1997, por el programa de CCH basándose en:*
> - *La información aportada por la preparatoria de nuestro colegio.*
> - *El dictamen que la propia Junta de Gobierno y Dirección General hicieron de las filosofías, objetivos y programas de la ENP y CCH.*
> - *Las valiosas colaboraciones y observaciones hechas por las autoridades de ambos sistemas.*
> - *Opiniones de especialistas en educación.*[5]

La revisión de los planes de la ENP y del CCH duró todo el ciclo escolar 1996-1997.

> *Por supuesto, esto generó polémica, y hubo profesores a favor y en contra de uno y otro programas. Entre los argumentos a favor del CCH destacaron:*
> - *La profundidad en las reformas de los planes de estudio, considerando que la reforma de la ENP fue superficial y cosmética, ya que, como revisamos en el apartado 2.4.1, ésta sólo significó un aumento de horas y un reacomodo de las asignaturas, pero no hubo cambios significativos en los programas específicos; en tanto, la reforma del CCH fue mucho más a fondo, en el currículo completo, lo que redundó en un plan de estudios auténticamente actualizado, tanto en los principios pedagógicos como en los recursos didácticos y los contenidos académicos.*
> - *La articulación con los programas de la SEP, ya que tanto la primaria como la secundaria habían experimentado importantes cambios a partir del Programa para la Modernización Educativa 1989-1994, con la idea de que el plan de estudios del CCH es mucho más afín al enfoque y propósitos del plan de estudios de la secundaria.*
> - *La compatibilidad con los principios filosóficos y pedagógicos del Colegio Madrid, en particular el "reconocimiento del alumno como sujeto de su cultura y de su propia educación"* [6] *que remite al concepto de «aprender a aprender», es decir "la orientación del plan de estudios y de todas las actividades que rige, a facilitar que los educandos aprendan cómo se aprende, por lo que será primordial ofrecerles la posibilidad de repetir y asimilar su propia experiencia de conocimiento"* [7]*.*

---

[5] *Ibid.* p. 166.
[6] Colegio Madrid. *Bachillerato CCH. p.3*
[7] *Idem.*

- *El énfasis que se hace en los programas del CCH con respecto a la multi e interdisciplina y en el desarrollo de actividades basadas en el trabajo en equipo o colaborativo.*
- *La flexibilidad de horario, dado que el programa de la ENP saturó el tiempo didáctico, imposibilitando a los colegios privados a incluir sus propios contenidos curriculares, en tanto que el CCH, a pesar del aumento de horas clase, permite una mayor movilidad.* [8]

Hubo otros argumentos como las sesiones de trabajo de dos horas que permitían un trabajo modular en las clases o el aumento de horas en las asignaturas de Matemáticas, Historia, Taller de lectura, redacción e iniciación a la investigación documental, que permite mayor profundidad en los temas a lo largo del año.

Pero también había desventajas. Por ejemplo, se eliminaron de los programas de CCH las asignaturas de formación deportiva, talleres artísticos y la de idioma extranjero en el último año. Otra desventaja es que a pesar de que el sistema CCH ofrece más materias para el último año que la ENP, las escuelas privadas con sistema CCH no pueden solventar los gastos que generaría ofrecer todas estas materias. Otra desventaja grande era la reducción de materias en el último año consideradas propedéuticas para las licenciaturas ya que los estudiantes de la ENP podían elegir el área según sus intereses. Es importante aclarar que las materias que incluye el sistema CCH para el último año no son propedéuticas sino formativas. Un ejemplo en matemáticas de esta situación es que en el sistema CCH se dejó de impartir la materia “Temas Selectos de Matemáticas”, una pérdida considerable para los estudiantes que decidan inscribirse a carreras como Matemáticas, Física, Actuaría o alguna Ingeniería.

Cuando estaba incorporado a la ENP, el bachillerato del Colegio Madrid cumplía los requisitos de la incorporación a la UNAM pero modificaba el plan oficial, por ejemplo, aumentando el número de horas de trabajo o incluyendo materias no curriculares. Es importante señalar tres ejemplos respecto a las materias de matemáticas: las asignaturas Matemáticas IV y V tenían mayor número de horas de trabajo de las que pedía la UNAM; la materia de Cálculo Mercantil impartida en Área III, incluía también temas de Cálculo Diferencial e Integral; en Área VI llamada «Bellas Artes» se incluía una materia no curricular llamada «Matemáticas en el arte». Todo esto con el fin de proporcionar una formación integral e interdisciplinaria. El Colegio Madrid adaptó el plan de estudios de CCH según los requerimientos y su filosofía, aprovechando algunas de las experiencias exitosas de la preparatoria.

> *“Coincidimos con esta concepción sobre la educación (la del CCH oficial) pero el CCH del Colegio Madrid no se limitará únicamente al modelo propuesto sino que buscará adaptarse a las propias necesidades y al perfil de egreso que el Colegio desea en sus alumnos. Por lo tanto nuestro sistema de educación no es el del CCH oficial, sino el Bachillerato CCH Colegio Madrid.*
> *El plan de estudios del CCH oficial nos da el punto de partida para desarrollar un modelo educativo, que sin dejar de lado los requisitos de incorporación a la*

---

[8] Rico, Ernesto. *La Labor de Coordinación de Área de Ciencias Sociales Según El Sistema Del Colegio De Ciencias Y Humanidades En El Colegio Madrid, A.C.* 2004. p. 143-144.

> *UNAM, nos permita la formación de alumnos que respondan a las necesidades humanísticas, científicas, tecnológicas y artísticas de nuestro país.”* [9]

En esta adaptación se intentó cubrir esas desventajas que se habían detectado. Se aumentó una hora de clase a la semana a algunas materias para fortalecer sus contenidos. Se incluyeron materias no curriculares consideradas importantes que complementaban el plan oficial. Por ejemplo, deportes y talleres artísticos en los cuatro primeros semestres. En el primer y segundo semestres se mantuvo la asignatura de Geografía no incluida en los planes oficiales y una hora semanal de Apoyo Académico, materia en la cual se orienta y se desarrollan habilidades actitudinales y valorales. En el primer semestre se imparte Dibujo y en el segundo Lógica. En tercero y cuarto se imparte Ética, Anatomía y Cómputo. En el último año se imparte Inglés para completar el ciclo de inglés del Anglo.

> *“El conocimiento y aprendizaje del inglés, como segundo idioma, están basados en el modelo europeo y cuenta con la asesoría del Instituto Anglo Mexicano de Cultura. A partir del segundo año de preescolar comienza esta enseñanza de manera lúdica. Más tarde, se formaliza la metodología y al terminar el bachillerato CCH los alumnos alcanzan el nivel avanzados.”* [10]

Se procuró establecer continuidad entre la preparatoria y el CCH. Esto se logró ensayando varios recursos didácticos propios del CCH con la última generación del sistema de la ENP. Se elaboraron los programas de las diferentes asignaturas cumpliendo con los requisitos oficiales e incluyendo los intereses y necesidades propias del Colegio.

Por otra parte, los profesores tuvieron que prepararse para la dinámica del CCH. Uno de los cambios más difíciles de adaptar fue cambiar las clases de 50 minutos por clases de 100. Se tuvieron que diseñar otro tipo de actividades en donde la participación de los estudiantes fuera más dinámica y se evitaran las clases puramente expositivas.
Otro de los cambios bruscos a los que nos enfrentamos fue el ritmo del trabajo pues estábamos acostumbrados a cursos anuales y tuvimos que acoplarnos al ritmo semestral que era vertiginoso.
Tuvimos muchas asesorías, por un lado de las autoridades del CCH, en particular del director general de los CCH José de Jesús Bazán Levy, y del director del plantel Naucalpan, Enrique Familiar, quien, además nos permitió observar clases de su plantel. Esto se complementó con cursos diversos como por ejemplo “Estrategias constructivistas para el aprendizaje significativo” impartido por los especialistas Frida Díaz Barriga y Gerardo Hernández Rojas. Cada área solicitó y recibió diferentes apoyos. En el caso de matemáticas, tomamos algunos cursos tipo taller. El primer curso que fue sobre el sistema CCH y sobre los programas de matemáticas, impartido por Raúl Núñez Reyes y Miguel Ángel Rodríguez. Después tomamos uno para la elaboración de actividades para la asignatura Matemáticas I, impartido por profesores del CCH Azcapotzalco Alberto Molina Tapia, Dolores Brauer Barba, Carlos Ramírez del

[9] Colegio Madrid. *Bachillerato CCH…* p. 4.
[10] Colegio Madrid. *Folleto explicativo.* p. 9.

Castillo, Guillermo Gómez González y Margarita Lugo Rocha (de Vallejo), con los cuales compartimos materiales pues ellos habían elaborado ya dos libros para Matemáticas I y II. Posteriormente algunos de los profesores recibimos un curso para la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral impartido por el profesor Carlos Hernández.
Tomamos muchos más cursos de los que he mencionado, pero lo que generó y sigue generando más resultados positivos, al menos en el área de matemáticas ha sido el trabajo colegiado de los maestros del área ya que compartimos nuestras experiencias (tanto las viejas como las actuales), estrategias, recursos didácticos y sobre todo la elaboración de nuestros propios materiales.

## El cambio en el área de matemáticas

Ya he mencionado varias ventajas y desventajas generales que se consideraron para determinar el cambio en los programas y a pesar de que muchas de ellas están asociadas al área de matemáticas, hay muchas más específicas de esta área y son las que mencionaré en este apartado.

Una de las cosas que no se quería perder con el cambio de sistema era el enfoque que se tenía de la enseñanza de las matemáticas en el Colegio, el cual proponía la construcción de la matemática en lugar de su presentación como una materia acabada y se enfocaba a desarrollar habilidades operatorias, comunicativas, procedimentales y de descubrimiento para predecir y generalizar; elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas; adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos; reconocer situaciones análogas, etc.
Por un lado ésta es la concepción que se tiene de la enseñanza de las matemáticas en el Colegio, pero por otro lado la ilación tanto con los programas de secundaria como con la forma de trabajo en la secundaria del Colegio Madrid eran puntos importantes a considerar. Los programas de secundaria 1993 proponían un enfoque con características muy similares al que se querían seguir desarrollando.

> *"…Su enseñanza, por lo tanto, no consiste en la pura transmisión de un conocimiento fijo y acabado, sino que debe fomentar en el alumno la misma curiosidad y las actitudes que la hicieron posible y la mantienen viva. (…)*
> *La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria tiene como propósito general el desarrollo de las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos."* [11]

También en el enfoque de secundaria se plantea lo siguiente:

> *"El programa no está concebido como una sucesión de temas que debían agotarse uno a continuación del otro. Sus contenidos podrán organizarse en la forma que el maestro considere más conveniente para su aprendizaje. (…) En particular se recomienda que se procure integrar contenidos de diferentes temas*

[11] Secretaría de Educación Pública. *Plan y programas de estudio 1993 Educación Básica. Secundaria.* p. 37.

> *o áreas del programa, de modo que el alumno pueda percibir las relaciones existentes entre las diferentes partes de las matemáticas y tenga la oportunidad de practicar constantemente los conocimientos adquiridos. De esta manera el aprendizaje de ciertos temas no queda localizado en un solo momento de la enseñanza de esta disciplina."* [12]

Los programas de CCH 1996 no estaban diseñados para enseñar las matemáticas divididas por ramas como en la preparatoria en la que se impartía un año de álgebra, otro de geometría analítica y otro de cálculo, sino que en todos los semestres las distintas ramas se mezclaban, se enlazaban y se apoyaban unas a otras. En un semestre había temas de álgebra, geometría plana y geometría analítica, y éstos a su vez contenían conceptos de cálculo. Esto daba al estudiante más recursos para enfrentarse a problemas de aplicación de la matemática. Además no se agotaba un tema, se avanzaba en los contenidos, siempre relacionándolos con otras áreas y otras asignaturas, y se dejaba para más adelante el retomar el tema para avanzar aún más en sus contenidos y en su profundización. Esta manera de enseñar es llamada la *espiral del conocimiento* y era una coincidencia más con los programas de secundaria y a su vez un punto más a favor de los programas de CCH.

Considero importante hablar un poco más de esta *espiral del conocimiento* ya que la utilizo a lo largo del material que aquí presento.

A la *espiral del conocimiento* también se le llama desarrollo exponencial del conocimiento, y es un proceso personal que no se agota. Se trata de una espiral creciente que no sólo no se agota sino que al aumentar permite una expansión cognoscitiva sin límites. El estudiante que aprende de la realidad, interioriza y desarrolla habilidades que puede transmitir tácitamente, mediante la socialización, y luego a través de la formalización, hasta que los nuevos conocimientos se convierten en punto de partida de otros mejores, generando nuevas expansiones sucesivamente. La espiral del conocimiento estriba en aprender a hacer algo, lo que con el tiempo llega a tomar cuerpo de oficio y de habilidad hecha con maestría. En este momento, ya no se trata de hacer algo, sino de saber qué es y cómo tiene que hacerse.

Ya mencioné que los nuevos programas de preparatoria estaban más cargados de conceptos y la presión por terminar los programas no nos hubiera permitido trabajar con más énfasis en el desarrollo de las habilidades arriba mencionadas o hubiera provocado que termináramos enseñando las matemáticas en una forma tradicional presentándola como fórmulas, reglas y algoritmos que los estudiantes tienen que usar de memoria. Esto era un argumento en contra de los programas de preparatoria.

Consideramos como propósito final de la educación el desarrollo intelectual de los estudiantes enseñándoles a aprender por sí mismos a lo largo de la vida. Por lo que la calidad debe medirse por la habilidad adquirida para seguir aprendiendo. Los programas de CCH atendían más este propósito que los de la preparatoria ya que impulsaban más el desarrollo de habilidades para lograrlo.

[12] *Ibid.* p. 37.

¿Hay alguna diferencia entre lo que hacíamos en preparatoria con lo que hacemos en el CCH en el área de matemáticas?
Sí, hay varias, pero la más importante es que en preparatoria el profesor era quien exponía, hacía las preguntas para guiar en la construcción de los conceptos y controlaba los tiempos que se dedicaban a cada tema, entre otras cosas. En pocas palabras era el centro en el proceso de enseñanza.
En el CCH el profesor tiene tres actividades que se dan en momentos diferentes: introducir, guiar y concluir (“cierres”).
En la introducción, el profesor ubica el tema dentro de las diferentes ramas de la matemática, explica cuáles son sus objetivos de estudio, lo relaciona con otros ya estudiados, plantea los requisitos para su estudio y da un bosquejo histórico. Esto sólo lo hace al inicio de cada nuevo tema.
En el segundo punto, el profesor guía a los equipos de trabajo cuando se han desviado o cuando llegan a algo que no pueden resolver. Es importante mencionar que la manera de hacer esto no es respondiendo a las preguntas que los estudiantes hagan sino problematizando sus dudas conduciéndolos a encontrar una solución por ellos mismos. Para que esto funcione adecuadamente es importante que el profesor encuentre las preguntas adecuadas para guiar y facilitar el camino a los estudiantes. Esta actividad se realiza durante el desarrollo de todo el tema.
El tercer punto, al que llamé “cierres”, consiste en dar una explicación del tema o concepto a manera de conclusión para todo el grupo. Hay dos tipos de “cierres”. El “Cierre de concepto” que se lleva a cabo durante varios momentos del desarrollo del tema tiene dos objetivos principales: ayuda a que no haya equipos que avancen mucho más rápido y otros se queden rezagados, y evita que se queden con conceptos equivocados pues ellos solos van construyendo la matemática a través de las diferentes actividades que realizan en la clase. El otro tipo de “cierre” es el “cierre de tema” que se hace al final de cada unidad programática dando una explicación clara y resumida de todos los conceptos del tema. Es importante mencionar que este “cierre”, a pesar de ser una explicación del profesor, también se hace con preguntas guiadas. Es en este momento que se sistematizan los caminos que los estudiantes encontraron, se simplifican los métodos y se resumen los conceptos.
Hay que recalcar que durante los momentos de “introducción” y “cierres” el profesor está frente al grupo, a diferencia del momento de “guiar” en el que discute con cada equipo de trabajo por separado.
Otra diferencia con lo que hacíamos en preparatoria es que en el sistema CCH los estudiantes trabajan en equipos durante todas las clases. En este material propongo que se trabaje así porque creo que se desarrollan varias habilidades que no se logran de una manera tan natural sino se trabaja en equipos. Considero que es la mejor forma de fomentar una discusión real en la que los estudiantes tienen que proponer resultados o procesos y sus compañeros opinar respecto a cada propuesta, además tienen que aprender a defender posturas matemáticas o el uso de determinada herramienta. La socialización sirve para transmitir experiencias y crear nuevas perspectivas, reorienta los modelos mentales de todos los estudiantes en una misma dirección. El estudiante construye así un método de razonamiento y de análisis, desarrolla su creatividad, verbaliza los conocimientos al explicar sus razonamientos. Además el trabajar con sus pares permite a los estudiantes que unos enseñen a otros reafirmando así sus conocimientos, y el alumno que es enseñando por otro estudiante muchas veces, por

diversos factores, es más receptivo y se siente menos presionado por lo que hay más libertad de preguntar cuando no entiende algo. Otro ventaja es que cada equipo implementa el ritmo de trabajo según sus necesidades. La retroalimentación que se da al trabajar de esta manera contribuye al aprendizaje ya que al externalizar el conocimiento se combina deducción e inducción lo cual es un extra que se gana. Por otro lado, creo que las personas requieren de los demás para aclarar, e incluso, activar su pensamiento. Es importante comentar que el profesor debe estar al pendiente de los equipos constatando que estén avanzando en el trabajo y que todos los integrantes estén participando, pues de lo contrario no se logran los objetivos.

## Panorama del proceso enseñanza aprendizaje en el área de matemáticas desde mi perspectiva

Solemos decir que un estudiante fracasa en la escuela, desde el punto de vista académico, cuando sus calificaciones no son buenas, cuando reprueba una o varias materias, cuando no aprueba matemáticas o, en el peor de los casos, cuando tiene que repetir un ciclo escolar. Con este criterio, el fracaso escolar se vuelve un problema centrado en el alumno y el resto de los componentes quedan olvidados; se pierden de vista los contextos sociales en los que el estudiante está inmerso, sus miedos, sus alegrías, sus expectativas sobre la escuela y, en particular, sobre las matemáticas; en fin se pierde de vista al ser humano que está aprendiendo. Los niveles de fracaso escolar son tan altos que sería imposible pensar que el problema reside únicamente en los alumnos; es necesario considerar este "fracaso en matemáticas" y en general el fracaso escolar desde el punto de vista de los alumnos y de las exigencias a las que se ven sometidos en los distintos medios en los que viven. Bajo el criterio que describíamos, las matemáticas son, sin duda, una de las materias escolares que más inciden en este "fracaso escolar", al grado de que se puede llegar a felicitar a un estudiante que obtiene 6 de calificación porque “las matemáticas son muy difíciles” mientras que se le reprendería por el mismo 6 obtenido en español.

> *Las matemáticas se encuentran en una posición nada envidiable: es una de las materias escolares más importantes que los niños de hoy deben estudiar y, al mismo tiempo, una de las peor comprendidas. Su reputación intimida. Todo el mundo sabe que son importantes y que su estudio es necesario.*[13]

Así comienza Alan Bishop, filósofo y matemático inglés, el prefacio de su libro “Enculturación matemática. La matemática desde una perspectiva cultural”.

Pocas personas se sienten cómodas con las matemáticas; hasta tal punto que en muchos países es totalmente aceptable, en el ámbito social, confesar la ignorancia que se tiene de ellas, fanfarronear sobre la propia incapacidad para enfrentárseles, ¡e incluso afirmar que se les tiene fobia! El estudio escolarizado de las matemáticas

[13] Bishop, Alan. *Enculturación matemática. La matemática desde una perspectiva cultural*. Paidos 1999.

genera sentimientos de aversión, desempeños mediocres, comprensión deficiente, preocupación y angustia. La mayoría de las personas consideran importante aprender matemáticas pero no tienen el "éxito" esperado, las encuentran difíciles y sin sentido. Este sentimiento muchas veces es reforzado por el medio pues muchos padres tienen esta percepción y justifican así las emociones de sus hijos, aunque no dejan de pretender que tengan "éxito" en sus estudios.

El terror por las matemáticas ha robado a muchas personas el disfrute, la sorpresa, la diversión y la inmensa utilidad que pueden darnos.

La educación matemática debería proporcionarle a los estudiantes herramientas para relacionarse con el medio y muchas veces no parece cumplir con esta labor. Es por esto que los estudiantes se sienten defraudados pues el sistema educativo les plantea este objetivo y falla en alcanzarlo.

Aún hay mucho por hacer para resolver el problema de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Alan Bishop comenta en su libro:

> *¿es que los profesores de todo el mundo son unos sádicos legitimados que torturan mentalmente a sus alumnos? ¿O quizás los alumnos son masoquistas y disfrutan con la emoción de la tortura auto inflingida? Hablando más en serio, ¿sabemos realmente en qué razones se basa la actividad matemática que se desarrolla en la escuela? ¿Realmente tenemos confianza en nuestros criterios para juzgar qué es importante y qué no?...* [14]

Desde hace muchos años, en muchos países y en particular en México, pedagogos, matemáticos y psicólogos estudian el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para entenderlo a fondo, y desarrollan teorías y técnicas muy diversas para intentar resolver la gran problemática que hay en torno a él. En nuestro país existen grupos de trabajo e investigación muy fuertes en el campo de la "Matemática Educativa". Los investigadores del Instituto Politécnico Nacional, de la Universidad Pedagógica Nacional, de la Secretaría de Educación Pública y de la Universidad Nacional Autónoma de México, sólo por nombrar algunos, han generado a lo largo de muchos años de trabajo, cientos de artículos, libros y distintos materiales sobre el tema. Las posturas, y por ende los resultados, pueden llegar a ser muy diversos, pero podríamos afirmar que todos ellos coinciden en lo siguiente:
Uno de los objetivos más importantes en una clase de matemáticas debería ser conducir a los alumnos a aprender a "comunicarse matemáticamente" entre ellos, es decir, a que sean capaces de pensar, argumentar y defender una postura en términos matemáticos. El profesor tomaría, entonces, el papel del encargado de facilitar el "discurso matemático", permitiendo que, en muchas ocasiones, fueran los alumnos los que "hicieran" las matemáticas, en lugar de "entregárselas ya hechas". En tales condiciones, los estudiantes tendrían la oportunidad, no nada más de dar respuestas, sino, además, de explicar y justificar matemáticamente lo que piensan sobre el

---

[14] *Ibid.*

problema o tema que se les ha planteado. Cuando se reta a los estudiantes a pensar y razonar sobre matemáticas, y a comunicar los resultados de su reflexión a otros, ya sea verbalmente o por escrito, surge en ellos, inevitablemente, la necesidad de establecer sus ideas y posiciones matemáticas clara y convincentemente; en efecto, también en matemáticas se puede y se debe tomar partido. De esta forma, un aula de matemáticas puede convertirse en un espacio vivo y rico en discusión.

Sin embargo, aunque se han hecho cambios en los programas y en las técnicas de su enseñanza, no se ve una mejoría significativa.
Sabemos que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe construirse a través de una gran diversidad de experiencias; si éstas se diseñan y estructuran de modo que ofrezcan al alumno la posibilidad de formar los conceptos adecuados y desarrollar las habilidades necesarias para aprender y disfrutar las matemáticas, este proceso se verá enriquecido.

En matemáticas lo fundamental es entender y esta tarea no es fácil, requiere de un esfuerzo importante, pero cuando se logra, el placer es inmenso.

El profesor de matemáticas debe partir de que cualquier alumno es capaz de descubrir, comprender y hacer matemáticas, y así romper con el mito de que las matemáticas son difíciles y que sólo unos cuantos son capaces de comprenderlas. Lo importante para lograr esto es conducir y orientar adecuadamente a los estudiantes para hacer suya la metodología y la lógica de las matemáticas.

# CAPÍTULO 1

# ¿QUÉ ES EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL?

Sección 1.1. Introducción.
Sección 1.2. Repaso.

OBJETIVOS:

- Reconocer la importancia y necesidad del cálculo para ampliar los conocimientos de matemáticas.
- Identificar problemas del cálculo.
- Resolver en forma numérica, algebraica y geométrica, problemas relacionados con el cálculo.

# Sección 1.1

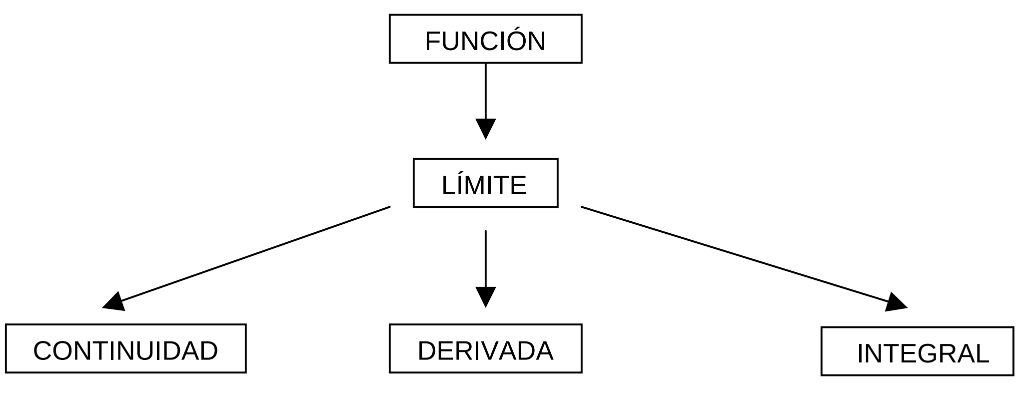
# Introducción al Cálculo Diferencial e Integral

El Cálculo Diferencial e Integral es una rama de las matemáticas que se divide en dos partes:

- El Cálculo Diferencial.- El estudio de la variación de una función respecto a cambios de la variable independiente por medio de los conceptos de derivada y diferencial; en particular, se estudian las pendientes de las rectas tangentes a curvas, las velocidades no uniformes, aproximación a valores de funciones y sus valores máximos y mínimos.

- El Cálculo Integral.- El estudio de la integración y su aplicación para encontrar áreas y volúmenes, centro de gravedad, ecuaciones de curvas y solución a ecuaciones diferenciales.

Este curso incluye conceptos que no han sido estudiados, aunque constituye una extensión del estudio de funciones que iniciamos en cursos pasados. El siguiente esquema es una representación de lo anterior:



Antes de iniciar con conceptos del cálculo, empezaremos resolviendo algunos problemas que nos darán una pequeña idea de lo que se puede resolver usando el cálculo diferencial e integral.

Resuelve, en equipo, los siguientes problemas (si terminan el problema antes del tiempo indicado, no pasen al siguiente):

Problema 1.1.1. Encuentra dos números que sumados den 71 y que su producto sea máximo.

***Discusión***

- *Los 5 problemas que se presentan son para motivar los conceptos de razón de cambio, máximo, mínimo y áreas bajo curvas. Abarcan diferentes estrategias de solución: numérica, gráfica y algebraica. Y por esta razón no se pretende que los estudiantes lleguen al resultado exacto. La idea es que ellos sientan la necesidad de saber un concepto nuevo para poder resolver este tipo de problemas.*
- *Resolver cada problema y discutirlo antes de pasar al siguiente.*
- *Permitir la exploración libre y sólo funcionar como guía en esta etapa.*
- *En la discusión, lo importante es fomentar el concepto más que hacer un análisis cabal de la solución del problema.*
  - *La solución del primer problema es:* $x = y = \frac{71}{2}$. *En esta etapa se aceptan formulaciones de la forma: "si uno de los números aumenta, el otro tiene que disminuir". Si ningún equipo llega al resultado, ayudarlos en la discusión, haciendo énfasis de que con la herramienta que tenemos hasta el momento no podemos estar seguros de que esta es la solución.*
  - *Los resultados de cada uno de los otros 4 problemas están en los cuadros de discusión de cada problema.*

Problema 1.1.2. Encuentra la forma de la curva que una dos puntos dados de tal manera que su longitud sea mínima. Justifica tu respuesta.

***Discusión***

- *Solución: La línea recta. En esta etapa se aceptan formulaciones de la forma: "se tiene que ir pareciendo a una recta"*

Problema 1.1.3. Encuentra la forma de la curva que una dos puntos dados de tal manera que su longitud sea máxima. Justifica tu respuesta.

***Discusión***

- *Solución: No existe. En esta etapa se aceptan formulaciones de la forma: "si proponemos una curva, siempre existe otra cuya longitud es mayor"*

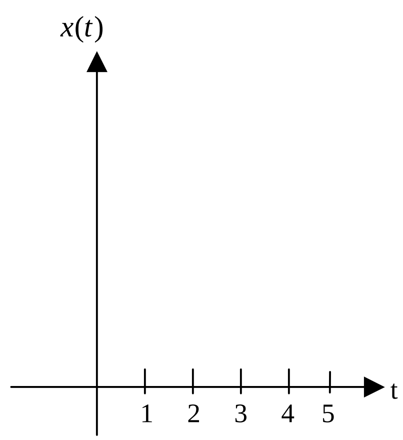
Problema 1.1.4. Calcula el área bajo la gráfica de la parábola $f(x) = 4x - x^2$ entre los puntos $x = 0$ y $x = 4$.

***Discusión***

- *Solución:* $A = \dfrac{32}{3}$ *Esta solución se puede proporcionar en la discusión del problema si en el grupo surge la necesidad de conocerla, aunque no se pueda obtener con las herramientas que tienen hasta este momento.*
- *Motivar el concepto de límite, por ejemplo, preguntando qué pasa si toman figuras geométricas más pequeñas.*

Problema 1.1.5. Si sabes que la distancia recorrida por una persona que va caminando está dada por la ecuación $x(t) = t^2$ y que la persona tiene que caminar 5 minutos:

a) Traza la gráfica de la distancia contra el tiempo.




b) Calcula la velocidad promedio con la que caminaría la persona entre el punto inicial y el punto final.

c) Calcula la velocidad promedio con la que caminaría la persona entre el punto inicial y un minuto.

d) ¿Cuál sería la velocidad que lleva la persona en el instante en que lleva un minuto caminando?

***Discusión***

- *Solución: b) 5 c) 1*
- *Motivar el concepto de límite.*

Proyección del video "Cálculo Diferencial"

***Nota para el profesor:***

- *El objetivo es motivar los conceptos básicos del Cálculo Diferencial.*
- *Hacer una ronda de preguntas después de la exhibición, sin definir conceptos.*
- *En la lectura, el objetivo es mostrar la importancia histórica del cálculo.*
- *Misma estrategia en la lectura que en el video.*

A continuación se presenta una lectura como referencia histórica del surgimiento del cálculo a partir de problemas que no podían ser resueltos con las matemáticas conocidas hasta antes de la invención de éste. **(Pedir investigar qué es la cicloide)**

## ¿Qué es el cálculo de variaciones y cuáles son sus aplicaciones?

Karl Menger.

*El cálculo de variaciones pertenece a aquellas partes de las matemáticas cuyos detalles resultan difíciles de explicar a un no-matemático. Sin embargo, es posible explicar sus problemas principales y trazar para todo mundo sus principales métodos.*

*La reina Dido de Cartago parece haber sido el primer ser humano que resolvió un problema de cálculo de variaciones.*

*Cuando se le prometió tanta tierra como pudiera encontrarse entre los límites de una piel de toro, ella cortó la piel en muchas tiras delgadas, las cosió en una larga tira, cuyos extremos ató, y, luego intentó asegurarse un territorio lo más extenso posible dentro de estos límites. La historia no describe la forma del territorio escogido, pero si fue una buena matemática debe haber abarcado el territorio en forma de círculo; pues actualmente sabemos que de todas las superficies limitadas por curvas de una longitud dada, el círculo es la de mayor área. El cálculo de variaciones es la rama de las matemáticas que establece una demostración rigurosa de esta hipótesis.*

*Newton fue el primer matemático que publicó un resultado en este campo. Si un cuerpo se mueve en el aire, se encuentra con cierta resistencia, que depende de la* *forma del cuerpo. El problema estudiado por Newton era: ¿Qué forma de cuerpo garantiza la menor resistencia posible? Las aplicaciones de este problema son evidentes. La bala de fusil se diseña de forma tal que encuentre la menor resistencia posible por parte del aire. Newton publicó una respuesta correcta a un caso especial de este problema, a saber, que la superficie del cuerpo considerado debe obtenerse haciendo girar una curva en torno a un eje. Pero no dio la prueba de los cálculos que le habían conducido a la respuesta. Así la solución de Newton no tuvo mayor efecto en el desarrollo de las matemáticas.*

*Una nueva rama de las matemáticas se inició con otro problema, formulado y estudiado por los hermanos Bernoulli en el siglo XVII. Si un cuerpo pequeño se mueve, bajo la influencia de la gravedad, de un punto a otro a lo largo de una curva dada, entonces el tiempo necesario depende naturalmente de la forma de la curva. Es distinto que el cuerpo se mueva a lo largo de una línea recta (en un plano inclinado) o a lo largo de una curva. La pregunta de los Bernoulli era: ¿Qué trayectoria requiere menos tiempo? Uno podría creer que el movimiento a lo largo de una línea recta es el más rápido, pero Galileo ya había advertido que el tiempo requerido en algunas curvas es menor que el de la línea recta. Los hermanos Bernoulli determinaron la forma de la curva que requiere el menor tiempo posible. Se trataba de una curva que ya era bien conocida en geometría por otras interesantes propiedades y que había sido denominada cicloide.*

*Lo que tienen en común todos estos problemas es que asocian un número con cada curva de cierta familia de curvas. En el primer ejemplo (el de la reina Dido), la familia consta de todas las curvas cerradas con una longitud dada, y el número asociado es el área de la superficie inscrita; en el segundo ejemplo (el de Newton), el número es la resistencia que encuentra en el aire un cuerpo asociado de alguna forma con la curva; en el tercer ejemplo (el de los hermanos Bernoulli), la familia de las curvas consta de todas las curvas que unen los dos puntos dados, y el número asociado a cada curva es el tiempo que tarda el cuerpo en caer a lo largo de esa curva. El problema consiste en hallar la curva para la cual el número asociado alcanza un máximo o un mínimo –esto es, el valor mayor o menor posible— el área máxima, en el ejemplo de Dido; la resistencia mínima, en el ejemplo de Newton; el tiempo más corto, en el ejemplo de los Bernoulli.*

*En el cálculo diferencial, que se enseña en la escuela, se estudian algunos problemas referentes a los máximos y mínimos. Pueden formularse de la siguiente forma: Dada una curva, ¿dónde se encuentra su punto más alto y dónde el más bajo? (...) A cada punto de la curva (...) se le asocia cierto número, a saber, la altura del punto sobre un eje (...). Estamos buscando aquellos puntos en los cuales esta altura es máxima o mínima. En el cálculo diferencial trabajamos, por tanto, con máximos y mínimos de las llamadas funciones de puntos, esto es, de números asociados a puntos (...).*

*Frecuentemente nos encontramos con que la naturaleza actúa de forma tal que minimiza ciertas longitudes. La película de jabón tomará la forma de una superficie de área mínima. La luz sigue siempre la trayectoria más corta, esto es, la línea recta, e, incluso cuando se la refleja o corta, sigue la trayectoria que requiere un tiempo mínimo. En los sistemas mecánicos encontramos que los movimientos tienen lugar, en realidad, en la forma que requiere menos esfuerzos, en cierto sentido, que el que emplearía*

*cualquier otro movimiento posible. Hubo un período, hace unos 150 años, en que los físicos creían que toda la física podía deducirse de ciertos principios minimizadores, sujetos al cálculo de variaciones, y estos principios se interpretaban como tendencias; tendencias económicas de la naturaleza, por así decir. La naturaleza parece seguir la tendencia de economizar ciertas magnitudes, de obtener efectos máximos con medios dados, o de emplear los medios mínimos para efectos dados.*
*(...)*

*Si hablamos de tendencias o principios económicos de la naturaleza, lo hacemos por analogía con nuestras tendencias y principios económicos humanos. Un fabricante adoptará con mayor frecuencia un modo de producción que requiera un coste mínimo, comparado con otros modos de iguales resultados; o que prometa, con otros métodos de igual coste, una ganancia máxima. Resulta evidente que, por ese motivo, la teoría matemática de la economía es en gran parte una aplicación del cálculo de variaciones.*
*(...)*

*Existen muchos detalles técnicos del cálculo de variaciones que difícilmente se hallan al alcance de un no-matemático. Se trata de un tipo de teoría que con frecuencia conduce a la creencia de que las teorías matemáticas se hallan muy alejadas de los problemas apremiantes del mundo y son inútiles. Los matemáticos verdaderos no se preocupan demasiado por estos reproches que tienen su origen en una falta de conocimiento de la historia de la ciencia. Los matemáticos estudian sus problemas teniendo en cuenta su interés intrínseco, y desarrollan sus teorías de acuerdo con su belleza. La historia muestra que algunas de estas teorías matemáticas, que fueron desarrolladas sin ninguna probabilidad de utilización inmediata, encontraron más adelante aplicaciones muy importantes. Esto es evidentemente cierto en el caso del cálculo de variaciones: Si los automóviles, locomotoras, aviones, etc., que se producen actualmente son distintos en cuanto a la forma de los que solían ser hace quince años, gran parte de este cambio se debe al cálculo de variaciones, ya que se emplea la forma aerodinámica a fin de disminuir al mínimo posible la resistencia del aire durante la conducción. Es a través de la física que aprendemos las leyes reales de esta resistencia. Pero si deseamos descubrir la forma que garantiza la resistencia mínima, entonces precisamos del cálculo de variaciones.*

(MENGER, Karl. "¿Qué es el cálculo de variaciones y cuáles son sus aplicaciones?" en <u>Sigma: El mundo de las matemáticas</u>, Editorial Grijalbo, Barcelona, 1983. Vol. 2 pp. 164 -168.)

***Nota para el profesor:***

- *Hacer ver que en la lectura, en el párrafo en el que habla de lo que tienen en común los problemas que se describen está inmerso el concepto de función.*

***Actividad sugerida para la lectura:***

- *Formar "n" equipos. Pedir a los estudiantes que elaboren, en equipo, "n-1" preguntas y las numeren sin tomar en cuenta el número de su equipo. Después cada equipo responderá las preguntas elaboradas por los otros equipos.*

Algunos matemáticos que trabajaron en la construcción del cálculo son: Newton, Leibniz, Cauchy, Weierstrass, Riemann, L´Hopital, Euler, Lagrange, Lebesgue, Descartes, Pascal, Bernoulli, Agnesi, Gauss, Kovalevsky, entre otros.

***Actividad sugerida:***

- *Solicitar que elaboren una línea del tiempo con los personajes que aportaron en la construcción del cálculo.*

# Sección 1.2

# REPASO

Antes de iniciar con el cálculo diferencial, repasaremos algunos conceptos que son el pilar de este curso.

***Nota para el profesor:***

- *Aplicar el cuestionario diagnóstico C1(se encuentra en el anexo 1) para conocer el nivel de conocimientos considerados básicos para el curso. Es importante que cada estudiante conozca sus limitaciones en cuanto a estos conceptos, por lo cual se propone que al terminar el cuestionario el profesor lo resuelva y cada estudiante califique su cuestionario. Sensibilizar a los estudiantes en cuanto a la importancia de calificarse honestamente explicando que lo importante es que ellos tengan conocimiento de las deficiencias que tienen.*

- *En el curso de Matemáticas IV estudiaron los conceptos de relación, función, dominio, imagen y rango pero es muy probable que no los recuerden bien, los siguientes ejercicios son para refrescar la memoria. En ese curso se definió: relación como la asociacion de elementos de dos conjuntos; Función como una relación en la que a cada elemento del primer conjunto se le asocia uno y sólo un elemento del segundo conjunto. Se trabajó también, por un lado, con parejas ordenadas como otra forma de representar relaciones y funciones, como con ecuaciones como las del siguiente ejercicio considerado como un conjunto de parejas ordenadas formadas por las soluciones de la ecuación. En el caso de las ecuaciones se acordó que los valores que podría tomar la variable $x$ sería considerado el dominio y los valores que podría tomar la variable $y$ sería considerado el rango.*

- *Es un ejercicio de repaso. Han hecho ejercicios similares y de mayor dificultad.*

- *No es necesario hacer énfasis en el desarrollo algebraico.*

**Ejercicio 1.2.1**

Para cada relación:

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ b) $2x^2 + 4x - y + 5 = 0$

Determina:

i) Dominio
ii) Rango o Imagen
iii) Gráfica
iv) Si es función o no.

| |
|---|
| Escribe la definición de función:<br>(Lo siguiente no aparece en la versión del estudiante)<br>*Es una relación entre los conjuntos A y B con la característica de que para cada elemento de A le corresponde uno y sólo uno de B.* |

| |
|---|
| Escribe la definición de Dominio de una relación:<br>(Lo siguiente no aparece en la versión del estudiante)<br>*Son todos los valores que puede tomar la variable independiente.* |

| |
|---|
| Escribe la definición de Imagen de una relación:<br>(Lo siguiente no aparece en la versión del estudiante)<br>*Son todos los valores que puede tomar la variable dependiente.* |

**NOTA**: El cálculo estudia las propiedades de las funciones, por lo que a lo largo del curso estaremos utilizando relaciones que son funciones, y en los casos en que se utilicen relaciones se especificará.

**Ejercicio 1.2.2**

Para la función dada por $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<2 \\ 8-x & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$ determina:

a) Dominio

b) Gráfica

c) Imagen

d) Si tabulas con valores de $x$ menores que 2 tratando de acercarte lo más posible al 2, ¿a qué valor se acercan las $f(x)$ correspondientes? _____

e) Si tabulas con valores de $x$ mayores que 2 tratando de acercarte lo más posible al 2, ¿a qué valor se acercan las $f(x)$ correspondientes? _____

f) ¿Coinciden los valores que obtuviste en d) y e)? _____

***Nota para el profesor:***

- *Nunca han graficado funciones definidas por secciones; es posible que tengan dudas. La ayuda del profesor será por medio de preguntas.*

- *La intención del ejercicio es dar una aproximación al concepto intuitivo de límite y de continuidad.*

- *Hay que aprovechar que el intervalo de definición de $2x+1$ es abierto para motivar el concepto de límite lateral, verificando que grafiquen la función hasta el 2, sin tomarlo en cuenta. (¡No agotar el tema!) Se podrán hacer preguntas como las siguientes:*

- *¿El valor $x=1.9$ es parte del dominio? e ir tomando valores cada vez más cercanos a 2.*
- *¿Cuánto vale f(2)?*
- *Entonces, ¿cómo graficas en $x=2$?*

***Discusión***

- *Es importante, al momento de discutir el ejercicio, introducir una notación de límite no formal, ya que la formal se trabajará más adelante.*
- *A manera de Ejercicio, en la discusión del inciso d), usar:*

$f(x)\rightarrow 5$ *( $f(x)$ tiende a 5 cuando*

$x\rightarrow 2^-$ *$x$ tiende al dos por la izquierda)*

*Entonces la tendencia de $f(x)$ cuando $x$ tiende al dos por la izquierda es 5.*

- *Y, por otro lado, hacer ver que $x=2$ es un punto del dominio y que la gráfica de la función está "rota".*

**Ejercicio 1.2.3**

Para la función dada por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ determina:

a) Dominio

b) Gráfica

c) Imagen

d) Si tabulas con valores de $x$ menores que 2 tratando de acercarte lo más posible al 2, ¿a qué valor se acercan las $f(x)$ correspondientes? _______

e) Si tabulas con valores de $x$ mayores que 2 tratando de acercarte lo más posible al 2, ¿a qué valor se acercan las $f(x)$ correspondientes? _______

f) ¿Coinciden los valores que obtuviste en d) y e)? ________

***Discusión***

- *Al finalizar los Ejercicios, incluyendo la discusión, se recomienda introducir la "notación formal" de límite, intentando hacerlo en forma natural, como consecuencia de la notación que se ha usado hasta el momento y usando los valores que tabularon.*
  *Por ejemplo: para el Ejercicio 1.2.2 teníamos*

$$\begin{array}{c} f(x) \to 5 \\ x \to 2^- \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \underset{x \to 2^-}{Lím} f(x) = 5$$

*y*

$$\begin{array}{c} f(x) \to 6 \\ x \to 2^+ \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \underset{x \to 2^+}{Lím} f(x) = 6$$

- *En el Ejercicio 1.2.3 explicar que sí existen los límites laterales y coinciden y este hecho provoca un huequito en la gráfica en* $x = 2$ *.*

- *Por otro lado, de manera <u>informal</u>, discutir la continuidad en cada ejercicio, por ejemplo, "la gráfica está rota" o "si sigues la gráfica en el dominio con un lápiz no la despegas", etc.*

**Ejercicio 1.2.4**

Para la función dada por $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\neq 2 \\ 3 & \text{si } x=2 \end{cases}$ determina:

a) Dominio

b) Gráfica

c) Imagen

d) Si tabulas con valores de $x$ menores que 2 tratando de acercarte lo más posible al 2, ¿a qué valor se acercan las $f(x)$ correspondientes? ______

e) Si tabulas con valores de $x$ mayores que 2 tratando de acercarte lo más posible al 2, ¿a qué valor se acercan las $f(x)$ correspondientes? ______

f) ¿Coinciden los valores que obtuviste en d) y e)? ______

***Discusión***

- *Revisar el ejercicio con los estudiantes para resolver dudas y para intentar que no se quede ningún equipo resagado.*
- *Utilizar la notación de límite de manera natural y hablar de la tendencia de* $f(x)$.

**Ejercicio1.2.5**

Para la función dada por $f(x)=\begin{cases} x+7 & \text{si } x\le 2 \\ 5 & \text{si } x>2 \end{cases}$ determina:

a) Dominio

b) Gráfica

c) Imagen

d) Si tabulas con valores de $x$ menores que 2 tratando de acercarte lo más posible al 2, ¿a qué valor se acercan las $f(x)$ correspondientes? ______

e) Si tabulas con valores de $x$ mayores que 2 tratando de acercarte lo más posible al 2, ¿a qué valor se acercan las $f(x)$ correspondientes? _______

f) ¿Coinciden los valores que obtuviste en d) y e)? ______

***Discusión***

- *Revisar el Ejercicio.*
- *Dar “cierre global con discusión formal ya que es fin de la Unidad 1.*
  - *Revisar los cinco ejercicios usando la notación formal de límite.*
  - *Hablar de la tendencia de* $f(x)$.
  - *Revisar la continuidad de manera informal en los cinco ejercicios.*

**Tarea 1.2.1**

1. Para cada una de las funciones:

   a) $f(x) = 8$

   b) $f(x) = x - 6$

   c) $f(x) = 56$

   d) $f(x) = \dfrac{3 - x}{x}$

   e) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

   f) $f(x) = 7 - x$

   Encuentra:

   i) $f(0) =$

   ii) $f(2) =$

   iii) $f(-5) =$

   iv) $f(a) =$

   v) $f(x+h) =$

   vi) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

2. Factoriza las siguientes expresiones:

   a) $9 - x^2$

   b) $x^2 - 6x - 16$

   c) $2x^2 - 5x - 3$

   d) $4x^2 - 1$

   e) $x^2 + 12x + 36$

   f) $6x^2 - x - 1$

   g) $27x^2 - 3x$

   h) $x^2 + 9x + 20$

3. En los incisos b), c), d), f) y g), iguala las expresiones a cero y resuelve las ecuaciones sin usar fórmula general.

4. Siguiendo el esquema del ejercicio 1.2.5, resuelve los siguientes incisos. Considera que en cada una de las funciones el punto al que tienes que acercarte es diferente.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x & si\ \ x<3\\ -2x+10 & si\ \ x\geq 3\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2 & si\ \ x\leq 2\\ \dfrac{1}{2}x+3 & si\ \ x>2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}-(x+2)^2+4 & si\ \ x<-2\\ 2 & si\ \ x=-2\\ (x+2)^2+4 & si\ \ x>-2\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}x^3 & si\ \ x<1\\ x^2 & si\ \ x>1\end{cases}$

5. Resuelve este ejercicio en una hoja aparte. Para cada una de las funciones

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x & \text{si } x<3\\ -2x+10 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\leq 2\\ \frac{1}{2}x+3 & \text{si } x>2\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x^3 & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x>1\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}-(x+2)^2+4 & \text{si } x<-2\\ 2 & \text{si } x=-2\\ (x+2)^2+4 & \text{si } x>-2\end{cases}$

Encuentra:

i) Dominio
ii) Gráfica
iii) Imagen
iv) Tendencia

# CAPÍTULO 2

# LÍMITE Y CONTINUIDAD



OBJETIVOS

- Obtener una noción intuitiva de los conceptos de límite y continuidad
- Identificar y emplear las propiedades de los límites
- Utilizar la notación matemática de límite
- Conocer formas para calcular límites y límites laterales
- Comprender el papel del límite en la definición de continuidad
- Determinar la existencia de asíntotas en una función
- Identificar los puntos de discontinuidad de una función

# Sección 2.1

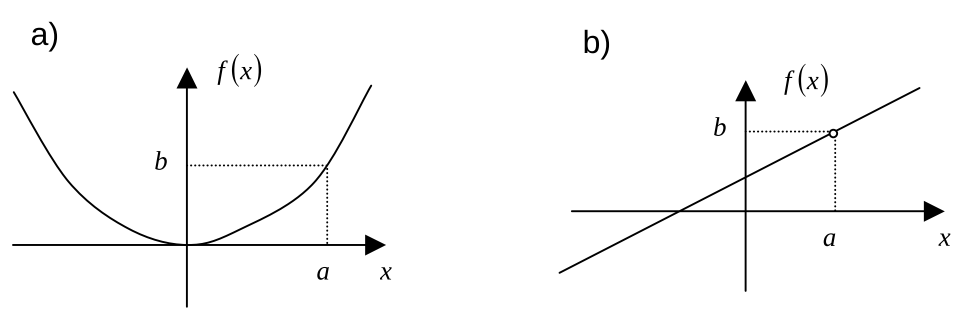
# Concepto de límite

Uno de los conceptos básicos del cálculo es el de límite, mismo que estudiaremos en este capítulo.
Ya se mencionó en el capítulo 1 que este concepto es el pilar que sostiene a otros que se estudiarán durante el curso.
Para hablar un mismo lenguaje definiremos algunos conceptos.

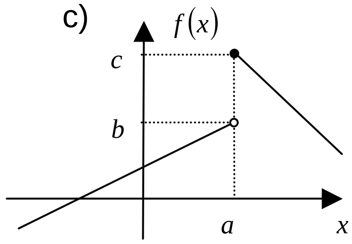
**Definiciones**
A $f(x)$ como valor numérico específico se le llama imagen de $x$ bajo *f*, y al conjunto de todos los valores de $f(x)$ se le llama Rango o Imagen de *f*.

**Ejercicio 2.1.1**
Contesta las cuatro preguntas para cada una de las gráficas que se muestran a continuación.

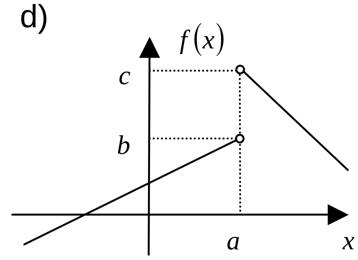
1. Escribe el dominio de cada una de las funciones.
2. Dí a qué valor se acercan las imágenes de *f* mientras $x$ se acerca al valor $a$.
3. Cuánto vale $f(a)$ para cada una de las funciones.



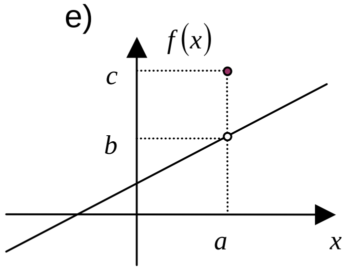
c)



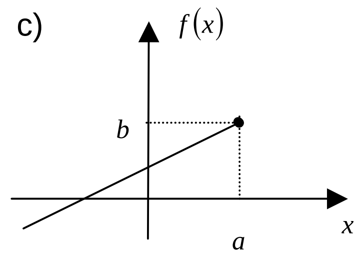

d)



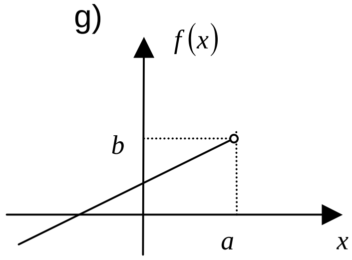

e)




c)




g)




***Discusión***

- *La idea de los ejercicios de esta Sección es que el estudiante:*
  - *Construya una idea intuitiva del concepto de límite*
  - *Se dé cuenta que en el concepto de límite lo importante es el comportamiento de la función alrededor del punto "$a$" sin importar lo que pasa en él.*
  - *Pueda identificar algunos casos de funciones que no tienen límite en algún punto.*
- *Revisar el ejercicio 2.1.1*
- *Es muy probable que en los ejercicios d) y e) digan que las imágenes de $f$ se acercan a "$b$", preguntar, si, de igual manera, se acercan a "$c$". También es probable que algún equipo diga que el límite es "$b$" y que otro diga que es "$c$". En ambos casos no resolver.*
- *Si en la revisión sale que el límite no existe, hacer énfasis en esta discusión pero no concluir.*

**Ejercicio 2.1.2**
Calcula el límite de $f(x) = x+1$ cuando $x$ tiende a $-2$. Esto, en notación matemática, se escribe así: $\lim\limits_{x\to -2}(x+1)$.

Para resolver el Ejercicio completa la tabla. (Repartan los valores de $x$ en los que la función se evaluará entre los integrantes del equipo; con esto ahorrarán tiempo.)

| $x$ | -2.5 | -2.3 | -2.1 | -1.7 | -1.8 | -1.9 | -1.95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x+1$ | | | | | | | |

Ahora analiza el comportamiento de la función.

¿Con esta información puedes saber el valor del límite? _________

Entonces, $\lim\limits_{x\to -2}(x+1) =$ _________

¿Cuánto vale $f(-2)$? _________

***Discusión***

- *Revisar el ejercicio.*
- *Se podrán hacer preguntas como las siguientes:*
  - *¿Qué se concluye de este caso? (Se espera que los estudiantes concluyan que el límite coincide con $f(a)$. No concluir, la idea es que por medio de otro ejercicio, ellos se den cuenta que esto no siempre es cierto)*
  - *¿Será esto válido siempre? (Se espera un “sí”. No concluir)*
- *Hacer énfasis en que lo importante es el comportamiento de la función alrededor del punto en cuestión.*

**Ejercicio 2.1.3**

Si $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ , calcula $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ .

| $x$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | |

¿Cuánto vale el $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$? ___________

¿Cuánto vale $f(3)$? ______________

***Discusión***

- *En el ejercicio anterior, los estudiantes se quedan con la idea de que el valor del límite es $f(a)$, la idea de este ejercicio es que descubran que esto no siempre es cierto.*
- *Revisar el ejercicio.*
- *Se podrán hacer preguntas como las siguientes:*
  - *¿Es el 3 un elemento del dominio de f? ¿Por qué?*
  - *¿Se cumple que $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=f(3)$? ¿Por qué?*

**Ejercicio 2.1.4**

Si $g(x)=x+3$, calcula $\lim\limits_{x\to 3}(x+3)$ usando los mismos valores de $x$ que usaste en la tabla anterior.

| $x$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | | | |

¿Hay alguna relación entre las imágenes que obtuviste para $g$ con las que obtuviste para $f$?

_______________

¿Cuánto vale el $\lim\limits_{x\to 3}(x+3)$? ____________

¿Cuánto vale $g(3)$? _________

***Discusión***

- *La idea de este ejercicio es que el estudiante se dé cuenta que las imágenes de las funciones de los ejercicios 2.1.3 y 2.1.4 son "iguales" excepto en $x = 3$, pero que esto no influye en el comportamiento de la función alrededor de $x = 3$.*
- *Para lograr lo anterior se pueden hacer las siguientes preguntas:*
  - *Compara el resultado del límite de este ejercicio con lo que obtuviste en $\operatorname{Lím}_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$.*
  - *¿Por qué crees que pasa esto?*
  - *¿Cuánto vale $g(3)$?*
  - *¿Es el 3 un elemento del dominio de $g$? ¿Por qué?*
- *No concluir nada hasta que resuelvan el siguiente ejercicio, en donde podrán ver la grafica de las funciones de los ejercicios 2.1.3 y 2.1.4.*

**Ejercicio 2.1.5**

Traza la gráfica de la función dada por $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$.

Traza la gráfica de la función dada por $g(x) = x+3$.

Factoriza y simplifica la expresión $\frac{x^2-9}{x-3}$.

***Discusión***

- *La idea del ejercicio anterior es que los alumnos lleguen a la definición de funciones iguales, lo cual se puede hacer preguntando:*
  - *¿Son $f(x)$ y $g(x)$ funciones iguales? ¿Por qué?*
- *Dar la definición formal: "Dos funciones $f$ y $g$ son iguales si $D_f = D_g$ y si $f(x) = g(x)$ para toda $x$ en $D_f = D_g$ ".*

Entonces, para calcular $\underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(x)$, ¿es necesario que $a$ sea un elemento del dominio de $f(x)$? __________

**Ejercicio 2.1.6**

Escribe, para cada una de las gráficas del ejercicio 2.1.1, el valor de $\underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(x)$.

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

***Discusión***

- *Revisar el ejercicio, si tienen respuestas incorrectas dejarlo así, después de las conclusiones se les pedirá que las corrijan.*
- *Para poder concluir se pueden hacer preguntas como las siguientes:*
  - *¿En todos los casos sucede que* $\operatorname*{Lím}_{x\to a} f(x) = f(a)$*?*
  - *¿Qué puedes concluir acerca de esto?*
  - *¿En cuáles casos la función tuvo límite en* $a$*?*
  - *¿Cuáles son las condiciones para que exista el límite en un punto?*
  - *Para encontrar el límite de una función en* $"a"$*, ¿es necesario que* $"a"$ *sea parte del dominio de la función?*
  - *Para encontrar el límite de una función en* $"a"$*, ¿es importante el comportamiento de la función en* $"a"$*?*

- ***Resultados importantes***
  - *El* $\operatorname*{Lím}_{x\to a} f(x) = L$*, si al acercarnos a* $"a"$ *con puntos del dominio, las imágenes se acercan a* $L$*.*
  - *Además, podemos ver que lo importante para el límite es lo que pasa cerca, muy cerca, tan cerca como se quiera de* $a$ *sin importar qué sucede justo en* $a$*; es más, puede que* $"a"$ *no sea parte del dominio.*
  - *Para que el* $\operatorname*{Lím}_{x\to a} f(x)$ *exista es necesario que, sin importar la forma en que nos acerquemos a* $"a"$*, las imágenes se acerquen a un solo valor del Rango.*
  - *Reiterar la unicidad de un límite.*

Con base en esto, regresa al ejercicio anterior y revisa tus respuestas.

**Tarea 2.1.1**

1. Calcula el valor de $\operatorname*{Lím}_{x\to 0}\left(2x^2+1\right)$.

2. Calcula el valor de $\operatorname*{Lím}_{x\to 0}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$.

**Ejemplos.**

En los siguientes ejemplos calcularemos límites no como lo hicimos en los ejercicios anteriores. Ahora lo haremos sin tabular descubriendo métodos para llegar al valor del límite.

> ***Nota:***
> *Las expresiones numéricas del tipo* $\frac{0}{0}$ *son indeterminaciones, pues no se puede definir su valor.*

Calcula el límite en cada caso.

1. $\underset{x\to 5}{\text{Lím}}\left(x+2\right)=5+2=7$.

2. $\underset{x\to 2}{\text{Lím}}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

   $\underset{x\to 2}{\text{Lím}}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{2^2-4}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ Se obtiene una indeterminación. No se ha llegado al resultado. Busquemos por otro lado:

   $\underset{x\to 2}{\text{Lím}}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\underset{x\to 2}{\text{Lím}}\dfrac{(x-2)\,(x+2)}{x-2}=\underset{x\to 2}{\text{Lím}}(x+2)=2+2=4$

**Ejercicio 2.1.7**
Calcula el límite en cada caso.

1. $\underset{x\to 3}{\text{Lím}}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$

   $\underset{x\to 3}{\text{Lím}}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\dfrac{3^2-5(3)+6}{3-3}=\underline{\qquad}$

   $\underset{x\to 3}{\text{Lím}}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\underset{x\to 3}{\text{Lím}}\dfrac{\qquad\qquad}{x-3}=\underset{x\to 3}{\text{Lím}}\underline{\qquad\quad}=1$

2. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-3x-2}{2x^2+7x+3}$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2-3x-2}{2x^2+7x+3} = \frac{2\,(-1/2)^2 - \qquad}{\qquad +7(\quad)} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2-3x-2}{2x^2+7x+3} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{(\qquad)(\qquad)}{(\qquad)(\qquad)} = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{\qquad}{\qquad} = -1$$

3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\qquad}{\qquad} =$

4. Si $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \neq 2 \\ 7 & si\ x = 2 \end{cases}$

a) ¿Cuál es el dominio de $f$ ? __________

b) Calcula $f(2) =$

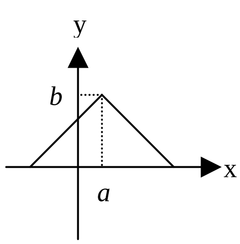
c) Calcula $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

***Discusión***

- *Revisar los resultados y discutirlos con ellos.*
- *Discutir que en el ejercicio 4* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ *a pesar de poder evaluar al 2 en* $f(x)$.
- *Dar "cierre global" y discusión formal pues es fin de sección.*
  - *Indicar los pasos a seguir para calcular un límite de los que se han visto hasta el momento.*

**Tarea 2.1.2**

1. Calcula el valor de los siguientes límites.
   - **a)** $\lim\limits_{x\to 7} 24$
   - **b)** $\lim\limits_{x\to 9} (2x^2 - 5)$
   - **c)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^2 + 8x + 7}$
   - **d)** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 6x - 3}{x^2 - 9}$
   - **e)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 3x - 18}$
   - **f)** $\lim\limits_{x\to -2} 2$
   - **g)** $\lim\limits_{x\to 4} (9x - x^2)$
   - **h)** $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{6x^2 - 2}$
   - **i)** $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{25 - x^2}$
   - **j)** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$




2. Elabora un esquema que muestre los caminos para calcular un límite.

| **Nota para el profesor:** |
| --- |
| ▪ El esquema aparece en el apéndice en la página 213. |

# Sección 2.2

# Propiedades de los límites

Revisemos algunas propiedades de los límites.

1. Límite de una **función constante**

   a) Calcula $\underset{x \to 6}{\text{Lím}}\, 15 =$ ________

   b) Calcula $\underset{x \to -4}{\text{Lím}}\, 37 =$ ________

***Discusión***

- *¿Qué puedes concluir de los límites anteriores?*
- *Generalizando, llegar a enunciar la propiedad 1.*
- *Escribir las propiedades en forma matemática y verbal, es decir, usando notación de límite para la matemática y con palabras para la verbal.*

**Propiedad 1**

$$\underset{x \to a}{Lím}\, k = k$$

El límite de una función constante, cuando x tiende a $a$, es el valor de la constante.

2. Límite del **producto de una constante por una función**

   a) Calcula $\lim\limits_{x \to 5} 2x^2 =$ ________
   b) Calcula $\lim\limits_{x \to 5} x^2 =$ _________
   c) Calcula $2\lim\limits_{x \to 5} x^2 =$ 2·_______ = _________

> ***Discusión***
> - *¿Qué puedes concluir de los resultados obtenidos?*
> - *Generalizando, llegar a enunciar la propiedad 2.*
> - *Hacer notar que la constante y la función involucradas son cualesquiera.*

> **Propiedad 2**
> $\lim\limits_{x \to a} k\ f(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$

3. Límite de la **suma de dos funciones**

   a) Calcula $\lim\limits_{x \to 4}(x^2 + 6x) =$ _________
   b) Calcula $\lim\limits_{x \to 4} x^2 =$ __________
   c) Calcula $\lim\limits_{x \to 4} 6x =$ __________
   d) Calcula $\lim\limits_{x \to 4} x^2 + \lim\limits_{x \to 4} 6x =$ ________+_______=________

> ***Discusión***
> - *¿Existe alguna coincidencia entre los resultados de los tres primeros incisos y el resultado del último?*
> - *Generalizando, llegar a enunciar la propiedad 3.*
> - *Discutir que la propiedad se cumple siempre y cuando los límites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existan ya que si no es así no se cumple la igualdad a pesar de que $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) + g(x)\right]$ existe. Por ejemplo si $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \geq 0 \\ 1 & si \quad x < 0 \end{cases}$ , $\lim\limits_{x \to 0}\left[f(x) + g(x)\right] = 0$ y tanto $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ como $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ no existen.*

**Propiedad 3**

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ Siempre y cuando los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $y$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existan.

4. Límite del **producto de dos funciones**

a) Calcula $\lim\limits_{x\to -2}\left[3x^2(x-1)\right] =$ ______________

b) Calcula $\lim\limits_{x\to -2} 3x^2 =$ ________

c) Calcula $\lim\limits_{x\to -2}(x-1) =$ _________

d) Calcula $\left(\lim\limits_{x\to -2} 3x^2\right)\left(\lim\limits_{x\to -2}(x-1)\right) =$ _________ . ________ =

**_Discusión_**

- *Igual que en las propiedades anteriores.*

**Propiedad 4**

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. Límite del **cociente de dos funciones**

a) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x+2}{6-2x}\right) =$ _________

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}(5x+2) =$ _________

c) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}(6-2x) =$ __________

d) Calcula $\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(5x+2)}{\lim\limits_{x\to 0}(6-2x)} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ __________

***Discusión***
- *Igual que en las propiedades anteriores.*
- *Probablemente los estudiantes no lleguen a la restricción de que el límite del denominador sea distinto de cero. Si este es el caso, mencionar la restricción hasta después del siguiente ejemplo.*

**Propiedad 5**

$\underset{x \to a}{Lím}\left[f(x)/g(x)\right] = \underset{x \to a}{Lím}\, f(x)/\underset{x \to a}{Lím}\, g(x)$ *Siempre y cuando* $\underset{x \to a}{Lím}\ g(x) \neq 0$

Esta propiedad requiere de un análisis más cuidadoso. Por ejemplo, calcula el $\underset{x \to 2}{\text{Lím}}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$.

***Discusión***
- *Revisar cómo resolvieron el límite. Si no usaron la propiedad 5 pedirles que la usen. Si no resolvieron factorizando, también pedirles que lo hagan para poder comparar los dos resultados y discutir cuál es el correcto.*
- *Preguntar si consideraron este caso al enunciar la propiedad 5*
- *Preguntar qué condición debe cumplir* $\underset{x \to a}{\text{Lím}}\, g(x)$ *(considerando que* $g(x)$ *es la función que se encuentra en el denominador del límite a calcular) para poder utilizar la propiedad 5?*

Vuelve a escribir la propiedad 5, considerando esto último.

**Propiedad 5**

Las siguientes dos propiedades se deben tratar con más cuidado pues para que se cumplan se tiene que pedir que la función en cuestión sea continua. La discusión de este requisito no es menester de este curso pero no olvides que es un requisito.

6. Límite de la **raíz de una función**
   a) $\operatorname*{Lím}_{x\to 1}\sqrt{3x^2+x} =$ ____________________
   b) $\operatorname*{Lím}_{x\to 1}\left(3x^2+x\right)=$ ____________________
   c) $\sqrt{\operatorname*{Lím}_{x\to 1}\left(3x^2+x\right)} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} =$ __________

**_Discusión_**
- *Igual que en las propiedades anteriores.*

**Propiedad 6**

$\operatorname*{Lím}_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\operatorname*{Lím}_{x\to a} f(x)}$ *siempre y cuando* $f$ *sea continua en* $a$.

***Nota para el profesor:***
- *Pedir* $\operatorname*{Lím}_{x\to \cdot 3}\sqrt{2x-x^2}$ *, es un límite que no existe pues* $3\notin D_f$*, explicar que la razón es que no podemos acercarnos al 3 con puntos del dominio.*

Enuncia de nuevo la propiedad 6 para el caso de una raíz *n*-ésima. (Esto es, $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ )

**Propiedad 6 bis**

Discutir que la propiedad no se cumple si $\operatorname*{Lím}_{x\to a} f(x) < 0$ y *n* es par pero que el problema es que no nos podemos acercar a "$a$" con puntos del dominio de $f$

7. Límite de la **potencia de una función**
   a) $\lim\limits_{x\to 6}(4-x)=$ ____________
   b) $\lim\limits_{x\to 6}(4-x)^2=$ ____________
   c) $\left[\lim\limits_{x\to 6}(4-x)\right]^2=$ ____________

***Discusión***

- *Igual que en las propiedades anteriores.*
- *Se puede dar como contraejemplo de que la propiedad no se cumple si no se tiene la continuidad de $f$ en $a$ lo siguiente:*

$f(x)=\begin{cases}1 & si\ \ x\geq 0\\ -1 & si\ \ x<0\end{cases}$, *entonces* $(f(x))^2=1$ *pero* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *no existe.*

**Propiedad 7**

$\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$ *siempre y cuando* $f$ *sea continua en* $a$.

***Nota para el profesor:***

- *Ver en el pizarrón ejercicios de límites que se resuelven multiplicando por el conjugado. Algunos ejemplos son:*

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$$

- *Pedir el ejercicio 5 de la tarea 1.2.1 para trabajar con ella la siguiente lección.*
- *Dar "cierre global con discusión formal pues es fin de sección.*
  - *Retomar todas las propiedades enunciándolas verbalmente y matemáticamente y explicar para qué sirven y cómo se usan.*

**Tarea 2.2.1**

1. Elabora una tabla con todas las propiedades de límites.

2. Usando las propiedades 2 y 3, demuestra que $\operatorname*{Lím}_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=\operatorname*{Lím}_{x\to a} f(x)-\operatorname*{Lím}_{x\to a} g(x)$ siempre y cuando los límites $\operatorname*{Lím}_{x\to a} f(x)$ $y$ $\operatorname*{Lím}_{x\to a} g(x)$ existan.

   (**Nota:** Recuerda que $f(x)-g(x)=f(x)+(-1)g(x)$.)

3. Calcula los siguientes límites usando explícitamente todas las propiedades posibles como se muestra en el inciso a).

   a) $\operatorname*{Lím}_{x\to 3}\left(2x^2-6x+\dfrac{3x}{x+1}\right)=$

$$=\operatorname*{Lím}_{x\to 3}(2x^2)-\operatorname*{Lím}_{x\to 3}(6x)+\operatorname*{Lím}_{x\to 3}\frac{3x}{x+1}=$$

$$=2\operatorname*{Lím}_{x\to 3}x^2-6\operatorname*{Lím}_{x\to 3}x+\frac{\operatorname*{Lím}_{x\to 3}3x}{\operatorname*{Lím}_{x\to 3}(x+1)}=$$

$$=2\left(\operatorname*{Lím}_{x\to 3}x\right)^2-6\operatorname*{Lím}_{x\to 3}x+\frac{3\operatorname*{Lím}_{x\to 3}x}{\operatorname*{Lím}_{x\to 3}x+\operatorname*{Lím}_{x\to 3}1}=2(9)-6(3)=\frac{3(3)}{3+1}=\frac{9}{4}$$

   b) $\operatorname*{Lím}_{x\to -2}\left(\dfrac{6x^2-2x+1}{3x+2}\right)=$

   c) $\operatorname*{Lím}_{x\to 0}\left[\,(x-2)(x+3)+\sqrt{2x+1}\,\right]=$

4. Escribe cada límite en su expresión mínima como se muestra en el inciso a.

a) $\frac{2}{3}\operatorname*{Lím}_{x\to 1} x-\left(\operatorname*{Lím}_{x\to 1} x\right)^2+\sqrt{2-\operatorname*{Lím}_{x\to 1} x}=$

$$=\operatorname*{Lím}_{x\to 1}\left(\frac{2}{3}x\right)-\operatorname*{Lím}_{x\to 1} x^2+\sqrt{\operatorname*{Lím}_{x\to 1} 2-\operatorname*{Lím}_{x\to 1} x}=$$

$$=\operatorname*{Lím}_{x\to 1}\left(\frac{2}{3}x\right)-\operatorname*{Lím}_{x\to 1} x^2+\sqrt{\operatorname*{Lím}_{x\to 1}(2-x)}\ =$$

$$=\operatorname*{Lím}_{x\to 1}\left(\frac{2}{3}x\right)-\operatorname*{Lím}_{x\to 1} x^2+\operatorname*{Lím}_{x\to 1}\sqrt{2-x}\ =$$

$$=\operatorname*{Lím}_{x\to 1}\left[\frac{2}{3}x-x^2+\sqrt{2-x}\right]$$

b) $\sqrt{\operatorname*{Lím}_{x\to 0} x+3-4(\operatorname*{Lím}_{x\to 0} x)^2}\ =$

c) $\dfrac{2+\operatorname*{Lím}_{x\to 3} x}{1-\operatorname*{Lím}_{x\to 3} x}=$

5. Calcula los siguientes límites.

a) $\operatorname*{Lím}_{x\to 3}\left(2x^2-5\right)$

b) $\operatorname*{Lím}_{x\to \frac{1}{2}} 4$

c) $\operatorname*{Lím}_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-3}$

d) $\operatorname*{Lím}_{x\to 0}\left(2x^2-5x+6\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2+5x-x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3+2x^2-8x}{x^3-x^2}$

g) $\lim\limits_{w\to -3}\sqrt{w^2-4w+4}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+4x-5\right)}{x^2-2x+2}$

i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3u-u}{9-u^2}$

j) $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r^3-2r^2+4r}{r(r-6)^2}$

k) $\lim\limits_{t\to 2}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{2t-2}{t-1}-\dfrac{t^2}{t^2-9}\right)$

l) $\lim\limits_{s\to 2}\dfrac{s^2-6s+8}{s^2-11s+6}$

m) $\lim\limits_{v\to 1}\dfrac{v^2-1}{\sqrt{3v+1}-2}$

n) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+10x+3}{x^2-2x-15}$

o) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+11x+5}{x^2-25}$

p) $\displaystyle \operatorname*{Lím}_{t\to -1} \frac{t-9}{\sqrt{t}-3}$

q) $\displaystyle \operatorname*{Lím}_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

r) $\displaystyle \operatorname*{Lím}_{u\to 5} \frac{u-5}{\sqrt{u^2-20}-\sqrt{5}}$

s) $\displaystyle \operatorname*{Lím}_{x\to 7} \frac{\sqrt{7}-\sqrt{x^2-42}}{7-x}$

# Sección 2.3

# Límites laterales y continuidad

Hasta el momento hemos calculado límites de la forma $\underset{x\to a}{Lím}\, f(x)$ tabulando puntos "cercanos" a $a$ o usando métodos algebraicos. Ahora profundizaremos en dos conceptos que se trataron en el repaso.

**Ejercicio 2.3.1**

Calcula el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a 3, si $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{si } x<3 \\ -2x+10 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

***Discusión***

- *Los primeros 4 ejercicios corresponden a funciones definidas por secciones que representan casos diferentes. En el primer ejercicio no existe el límite y la función tiene una discontinuidad de brinco. En el segundo el límite existe y la función es continua. En el tercero, el límite existe y la función no es continua. Y en el último, el límite no existe y la función es discontinua. El objetivo de estos ejercicios es motivar la necesidad de definir límites laterales.*
- *Verificar si calcularon el límite usando una sola sección o las dos de la regla de correspondencia.*
- *Verificar, si es que tabularon, que hayan tomado valores mayores y menores que 3.*
- *Verificar si se acercaron al tres lo suficiente para ver qué le pasa a las imágenes cercanas a él.*
- *Analizar dominios de las dos secciones de la regla de correspondencia y discutir la forma de acercamiento al 3, es decir, si nos acercamos al 3 por la izquierda se usa sólo una regla de correspondencia y si nos acercamos por la derecha se usa solamente la otra.*
- *Hacer la gráfica. Mostrar que la gráfica de esta función es del mismo tipo que la de la página 28 ejercicio 2.1.1 inciso e.*
- *Plantear la necesidad de definir los límites por la derecha y por la izquierda.*
- *Llevarlos a que calculen el límite por la derecha y por la izquierda, es decir, que, por un lado, sólo se aproximen al 3 con valores menores y, por otro lado, se aproximen con valores mayores.*
- *Preguntar qué pasa con el límite de la función en 3 y anotar las diferentes respuestas sin hacer análisis y diferir la conclusión.*
- *Usando la idea intuitiva del estudiante, preguntar si la función es continua en $x=3$ y el por qué. Dejar explícito el valor de $f(3)$. A estas alturas el estudiante ya sabe que la función no tiene límite, porque lo ven en la gráfica. La idea de esta lección es que puedan argumentarlo algebraicamente.*

**Ejercicio 2.3.2**

Calcula el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a 2, si $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 2 \\ \frac{1}{2}x+3 & \text{si } x>2 \end{cases}$

***Discusión***

- *Constatar que se haya trabajado con las dos secciones de la regla de correspondencia y que se hayan acercado al 2.*
- *Verificar que se hayan considerado las restricciones de las secciones.*
- *Verificar que hayan graficado. Hacer notar que la gráfica es del mismo tipo que la de la página 28 ejercicio 2.1.1 inciso f.*
- *Preguntar qué pasa con las imágenes de* $f(x)$ *cuando nos acercamos al 2 por la izquierda. Recordar la notación:* $\underset{x\to 2^-}{Lím}\, f(x)$ *que ya habíamos empleado en el repaso. Mencionar que a este límite se le llama "límite lateral izquierdo".*
- *Hacer lo mismo para el derecho.*
- *Preguntar cuánto vale el límite de la función en 2.*
- *Retomar la discusión de la existencia del límite y regresar al ejercicio anterior. Resumir sin agotar el tema.*
- *Preguntar si la función es continua en* $x=2$ *y el por qué. Dejar explícito el valor de* $f(2)$.

**Ejercicio 2.3.3**

Calcula el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a 1, si $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

***Discusión***

- *Constatar que se hayan calculado los límites laterales y que hayan hecho la gráfica. Mostrar que es del mismo tipo que la de la página 28 ejercicio 2.1.1 inciso b.*
- *Preguntar el valor del límite de la función en* $x=1$.
- *Preguntar la diferencia entre este ejemplo y el anterior.*
- *Preguntar si la función es continua en* $x=1$ *y el por qué. Dejar explícito que el valor de* $f(1)$ *no existe. Los estudiantes podrán responder que la función no es continua con criterios de la forma "si al trazar con un lápiz no se despega del papel, es continua"*

**Ejercicio 2.3.4**

Calcula el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $-2$, si

$$f(x)=\begin{cases} -(x+2)^2+4 & \text{si } x<-2 \\ 2 & \text{si } x=-2 \\ (x+2)^2+4 & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

***Discusión***

- *Hacer un análisis similar al del último ejercicio. La gráfica es del mismo tipo que la de la página 28 ejercicio 2.1.1 inciso c.*

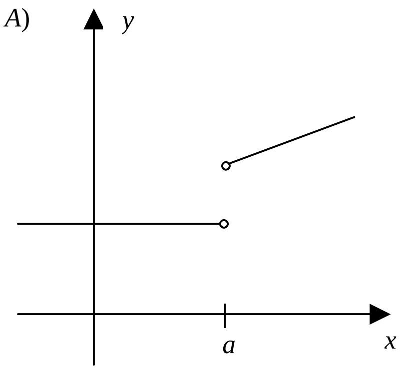
*<u>Conclusiones de los 4 ejercicios.</u>*

- *Preguntar cómo definimos el límite lateral derecho.*
- *Preguntar cómo definimos el límite lateral izquierdo.*
- *Preguntar cómo se puede saber si una función tiene límite en un punto.*
- *Hablar de que el límite es único.*
- *Tener cuidado de que no den el valor del límite lateral evaluándolo en un valor cercano. Hacer referencia al inciso g del ejercicio.*
- *Hablar de que se pueden calcular límites en cualquier punto siempre y cuando nos podamos acercar a él con puntos del dominio, sin importar que el punto sea o no del dominio de la función, y discutir la razón de haber tomado los puntos 3, 2, 1 y –2 en los ejercicios anteriores respectivamente.*
- *Discutir la continuidad en un punto de las funciones de los 4 ejercicios.*
- *Definir la continuidad de una función en un punto estableciendo las tres condiciones.* $f$ *es continua en* $x=a$ *si se cumplen las tres condiciones siguientes: 1)* $a\in D_f$*; 2)* $\underset{x\to a}{Lím}\, f(x)$ exista y 3) $\underset{x\to a}{Lím}\, f(x)=f(a)$
- *Hacer notar que: 1) si la tercer condición se cumple, entonces se cumplen las dos primeras; 2) si falla la primera condición, falla la tercera; 3) si falla la segunda condición, falla la tercera.*
- *Discutir la necesidad de las 3 condiciones arriba mencionadas y llegar a concluir cuándo una función no es continua en un punto.*
- *Llegar a la definición intuitiva de continuidad: “Una función es continua en su dominio si cumple las 3 condiciones de continuidad en un punto, para todos los puntos en los que está definida”.*

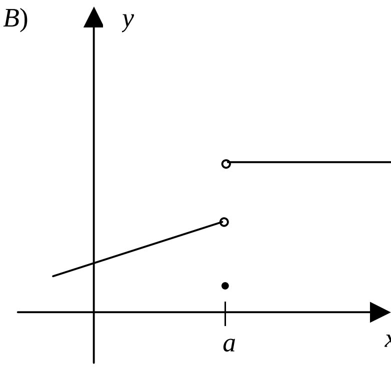
**Tarea 2.3.1**

1. Di cuáles funciones son continuas en el punto *a* y cuáles son funciones continuas en su dominio.
   Si la función es discontinua en *a*, di cuál de las tres condiciones no se cumple.

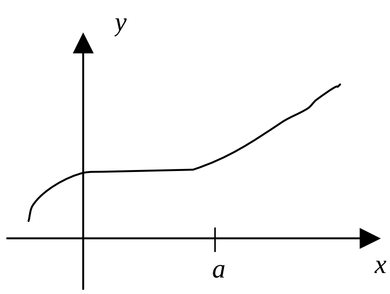
*A*)



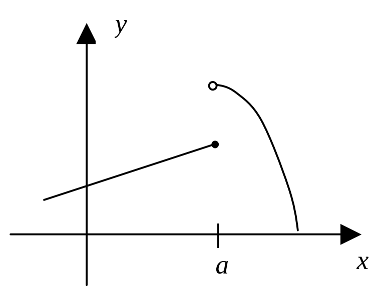

*B*)



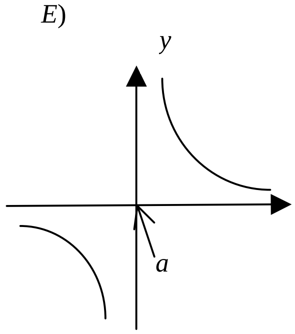

*C*)



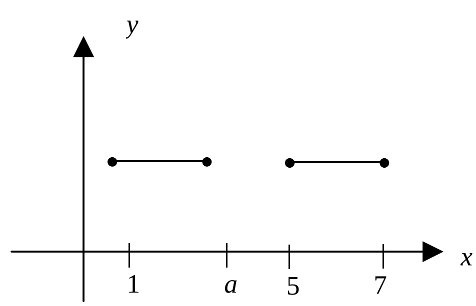

*D*)



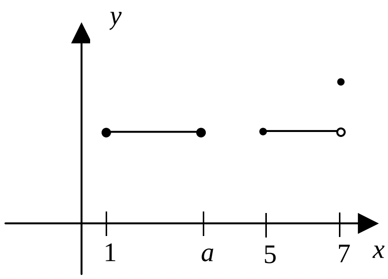

*E*)



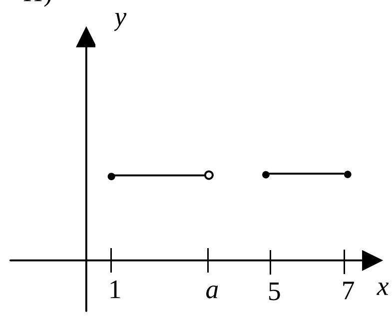

*F*)



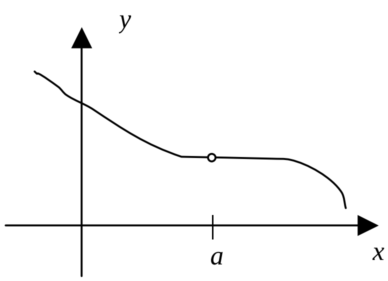
*G*)



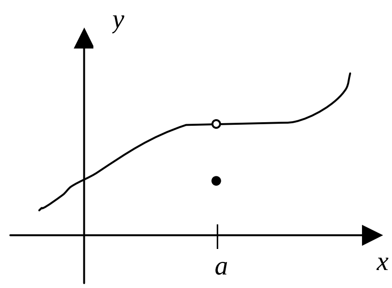

*H*)




*I*)




*J*)




***Discusión***

- *Revisar la tarea. Se propone que los alumnos pasen al pizarrón y se discutan los ejercicios.*
- *Discutir la frase: "Una función es continua si puedes trazar su gráfica sin despegar el lápiz" a la luz de los ejercicios F) y G), pues éstas son continuas.*
- *Dar "cierre global" con discusión formal pues es fin de sección. Ver, a partir de la gráfica de una función, todos los casos de continuidad en un punto, función discontinua en un punto y función continua en su dominio.*

**Tarea 2.3.2**

Para responder el ejercicio 1, considera las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1<x<2 \\ 3 & \text{si} \quad \mathrm{x}\ge 2 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<2 \\ 0 & \text{si} \quad x=2 \\ -x+6 & \text{si} \quad \mathrm{x}>2 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ 1 & \text{si} \quad 1<x<2 \\ \sqrt{\frac{x}{2}} & \text{si} \quad \mathrm{x}\ge 2 \end{cases} \qquad l(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ -3x+4 & \text{si} \quad \mathrm{x}>1 \end{cases}$$

1. Calcula y explica en todos los casos las razones por las que existe o no el límite.

a) $\text{Lím}_{x\to 1} f(x)=$ $f(1)=$

b) $\text{Lím}_{x\to 2} f(x)=$ $f(2)=$

c) $\text{Lím}_{x\to 1} g(x)=$ $g(1)=$

d) $\text{Lím}_{x\to 2} g(x)=$ $g(2)=$

e) $\text{Lím}_{x\to 2} h(x)=$ $h(2)=$

f) $\text{Lím}_{x\to 0} h(x)=$ $h(0)=$

g) $\text{Lím}_{x\to -1} l(x)=$ $l(-1)=$

h) $\text{Lím}_{x\to 1} l(x)=$ $l(1)=$

2. Para cada una de las siguientes funciones, da los puntos en los que es discontinua. Justifica tu respuesta.

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^3+x^2+2x}$

c) $f(x) = \dfrac{-x}{x^2-5x+6}$

d) $f(x) = \dfrac{-x^2-x-12}{\sqrt{x^2-10x+25}}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{(3x+9)^2}$

g) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x < 7 \\ 12-x & \text{si} \quad x > 7 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x > 1 \\ 3x-4 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} 6-5x & \text{si} \quad x \leq -2 \\ 3x^2+4 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$

***Nota para el profesor:***
*Hacer y discutir con ellos el siguiente ejercicio, en cierta forma ya trabajaron con este tipo de ejercicios. (Ver tarea 2.3.1)*

**Ejercicio 2.3.5**
Para la función $f(x)=3x-9$, con dominio $D_f : x \in [4,6)$, calcula

**a)** $\text{Lím}_{x\to 5} f(x)$

**b)** $\text{Lím}_{x\to 4} f(x)$

**c)** $\text{Lím}_{x\to 6} f(x)$

También responde a lo que sigue

**d)** ¿Es $f(x)$ continua en $x=4$?

**e)** ¿Es $f(x)$ continua en $x=6$?

**f)** ¿Es $f(x)$ continua en su dominio?

***Discusión***

- *Dar "cierre global" con discusión formal de:*
  - *Existencia de los límites.*
  - *La continuidad en cada punto y la continuidad de la función en su dominio.*
  - *La definición:* $f$ *es continua en el intervalo abierto* $(a, b)$ *si es continua en cada* $x \in (a, b)$.
  - *Escribir la* ***definición de continuidad en un intervalo:*** $f$ *es continua en el intervalo* $[c, d]$, *si es continua en el intervalo* $(c, d)$ *y* $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$, $\lim\limits_{x \to d^-} f(x) = f(d)$
  - *Discutir cómo sería la definición de continuidad en todo tipo de intervalos, por ejemplo:* $[5, \infty)$, $(-\infty, 7]$, $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, 4)$, *etc.*

- *Hacer un ejercicio en el que la función sea continua en un intervalo cerrado y otro que no lo sea. Proponemos los siguientes:*
  1) *Verificar si la función* $f(x) = x^2 + 2x$ *es continua en el intervalo* $[-1, 3]$.
  2) *Verificar si la función* $f(x) = \begin{cases} 2 - x \ si \ x < -1 \\ -3 \quad si \ x = -1 \end{cases}$ *es continua en el intervalo* $(-\infty, -1]$.

**Tarea 2.3.3**

1. Para la función $f(x)=7-x^2$ donde $D_f : x\in[-2,-1]$.
   a) Determina si $f$ es continua en $x=-2$.
   b) Determina si $f$ es continua en $x=-1$.
   c) Determina si $f$ es continua en su dominio.

2. Para la función $g(x)=6-7x$ donde $D_f : x\in(-\infty,-8]$.
   a) Determina si $g$ es continua en $x=-8$.
   b) Determina si $g$ es continua en su dominio.

3. Para la función $h(x)=7x^2-3$ donde $D_f : x\in[-1,4)$.
   a) Determina si $h$ es continua en $x=-1$.
   b) Determina si $h$ es continua en $x=4$.
   c) Determina si $h$ es continua en su dominio.

4. Para la función $l(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 4\le x<6 \\ 0 & \text{si } x=6 \end{cases}$
   a) Determina si $l$ es continua en $x=4$.
   b) Determina si $l$ es continua en $x=6$.
   c) Determina si $l$ es continua en su dominio.

# Sección 2.4

# Propiedades de las funciones continuas

*Empezaremos por distinguir dos tipos de funciones que merecen atención especial.*

## Funciones polinomiales

Las funciones de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se conocen como *funciones polinomiales*. Algunos ejemplos de este tipo de funciones son:

- $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 7x - 1$
- $g(x) = x$
- $h(x) = -8$

El *grado de un polinomio* está determinado por el mayor de los exponentes de los términos con coeficientes diferentes de cero.

Escribe el grado de los polinomios anteriores:

*Da un ejemplo de una función polinomial que no sea continua.*

***Discusión***

- *Las funciones polinomiales son continuas en todo número real c.*

## Funciones racionales

Una función $f$ se llama *racional* si está construida a partir del cociente de dos funciones polinomiales.
Como ejemplos, tenemos:

- $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{7x^4+6x^2-x}$
- $g(x)=\dfrac{1}{2-x^2}$

Escribe una función racional que no sea continua. $F(x)=$

¿Qué puedes concluir de las funciones racionales? ______________________________

¿Cuál es el dominio de $F$? ______________________

¿Es $F$ continua en su dominio? __________

***Discusión***

- *Las funciones racionales son continuas en su dominio.*
- *Discutir la continuidad de las funciones racionales para evitar la idea de que toda función racional es discontinua en algún punto. Como ejemplo:*
- $f(x)=\dfrac{cualquier\ \ polinomio}{x^2+1}$*, pues* $x^2+1$ *no tiene raíces reales.*

*Teniendo información sobre la continuidad de algunas funciones individualmente se puede saber si ciertas combinaciones de ellas son continuas o no.*

# Propiedades de las funciones continuas

## Multiplicación de un escalar por una función continua.

¿La función $f(x)=x^2$ es continua en cualquier punto del dominio? _____

¿La función $l(x)=5x^2$ es continua en cualquier punto del dominio? _____

*¿La función $h(x)=kx^2$ es continua en cualquier punto del dominio para todo número $k$?*

_____

*Las preguntas anteriores pueden no tener sentido, ya que todas las funciones son polinomiales y ya sabemos que éstas son continuas, pero qué pasa si en lugar de usar polinomios iniciamos con cualquier función continua $f$.*

*En general, ¿ $h(x)=kf(x)$ es continua en cualquier punto del dominio para todo número $k$?* _____

***Discusión***

- Con el ejercicio se pretende que los estudiantes hagan el esbozo para que, en el análisis, se escriba junto con ellos la demostración formal.
- ¿Qué garantiza la continuidad de $h$ en $a$?

  $$\underset{x\to a}{Lím}\, h(x)=h(a)$$

  Al sustituir queda,

  $$\underset{x\to a}{Lím}\, k\,f(x)=k\,f(a).$$

  Esta igualdad está garantizada por la propiedad 2 de los límites.
- Observaciones:
  Serán pocos los estudiantes que escriban la demostración formal. Sin embargo, podrán esbozar verbalmente la estructura de la demostración.
- Demostración: $f(x)$ es continua en $x=a \Rightarrow \underset{x\to a}{Lím}\, f(x)=f(a)$

$\underset{x\to a}{Lím}\, h(x)=\underset{x\to a}{Lím}\big(kf(x)\big)=k\,\underset{x\to a}{Lím}\, f(x)=k\cdot f(a)=h(a) \quad \therefore \quad h$ **es continua en** $x=a$

**Propiedad 1:**

Si $f$ es una función continua en $x=a$ y $k$ es una constante, se cumple que:

$h(x)=k\,f(x)$ es continua en $a$.

## Suma de dos funciones continuas.

Si las funciones $f$ y $g$ son continuas en $x = a$, ¿será $h(x) = f(x) + g(x)$ continua en $x = a$?________

**Propiedad 2:**
Si $f$ y $g$ son funciones continuas en $x = a$, se cumple que:
$h(x) = f(x) + g(x)$ es continua en $a$.

Justifica este hecho de la misma manera en que se hizo en la **Propiedad 1**.

***Nota para el profesor:***

***Justificación***

- *Revisar las justificaciones hechas por los estudiantes. Por ejemplo pasar a un estudiante al pizarrón.*
- *La justificación de las propiedades 3 y 5 siguientes se dejan de tarea.*
- *La justificación de las propiedades 4 y 6 siguientes se dejan como posibles ejercicios para un examen.*
- *Demostración:*
  *Como* $f$ *es continua en* $a$ *sabemos que* $\underset{x \to a}{Lím}\, f(x) = f(a)$

  *Como* $g$ *es continua en* $a$ *sabemos que* $\underset{x \to a}{Lím}\, g(x) = g(a)$

  $$\underset{x \to a}{Lím}\, h(x) = \underset{x \to a}{Lím}\big(f(x) + g(x)\big) = \underset{x \to a}{Lím}\, f(x) + \underset{x \to a}{Lím}\, g(x) = f(a) + g(a) = h(a)$$

  $\therefore \quad h(x)$ *es continua en* $x = a$

## Producto de dos funciones continuas.

**Propiedad 3.** Si las funciones $f$ y $g$ son continuas en $x = a$, entonces $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = a$.

## Cociente de dos funciones continuas.

**Propiedad 4.** Si las funciones $f$ y $g$ son continuas en $x = a$, entonces $h(x) = f(x)/g(x)$ es continua en $x = a$ siempre y cuando $g(a) \neq 0$

Las propiedades 5 y 6 no se cumplen en general. Discútelas con tu equipo para encontrar la condición que se debe agregar para poderla enunciar como propiedad.

## Potencia de una función continua.

**Propiedad 5.** Si $f$ es continua en $x = a$, entonces $h(x) = [f(x)]^n$ es continua en $x = a$.

Condición: ____________________________________________________________

## Raíz de una función continua.

**Propiedad 6.** Si $f(x)$ es continua en $x = a$, entonces $h(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ es continua en $x = a$.

Condición: ____________________________________________________________

***Discusión***

- *Dar "cierre formal pues es fin de sección.*
  - *Discutir en la propiedad 5 que la condición que se debe agregar es "siempre y cuando $n \in \mathbb{N}$ " ya que si $n$ es negativo se tiene que pedir como condición para que se cumpla la propiedad que $f(a) \neq 0$.*
  - *Discutir en la propiedad 6 que la condición que se debe agregar es "siempre y cuando $n$ sea impar" ya que si $n$ es par, $f(a)$ tiene que ser positivo.*
  - *Retomar los conceptos de función polinomial y función racional.*
  - *Discutir la continuidad de las funciones polinomial y racional.*
  - *Enumerar todas las propiedades de las funciones continuas y revisar la demostración de alguna de ellas, no todas pues es importante que se les deje a los estudiantes alguna de tarea. En la Tarea 2.4.1 se les pide las demostraciones de las propiedades 3 y 5.*

**Tarea 2.4.1**

1. Enuncia las propiedades con tus palabras. Por ejemplo, "La suma de funciones continuas es una función continua".

2. Justifica las propiedades 3 y 5.

3. Di si las siguientes funciones son continuas en el punto que se indica. En el caso de que lo sean, justifícalo usando las propiedades de continuidad.

   a) $f(x) = 5x^7 + 8x^2 - 18$ en $x = a \in \Re$.

   b) $g(x) = \dfrac{x+4}{x-8}$, en $x = 3$.

   c) $h(x) = \dfrac{25-x^2}{5-x}$, en $x = 5$.

   d) $l(x) = \dfrac{\sqrt[7]{x^2 - 8x + 9}}{\left(3 - 4x^2 - x^3\right)^4 \left(x^2 + 1\right)}$, en $x = 1$.

# Sección 2.5

# Límites infinitos y asíntotas verticales

**Ejercicio 2.5.1**

Calcula $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$

***Discusión***

- $\displaystyle Lím_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4} = Lím_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = Lím_{x\to 2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0}$
- *Revisar su razonamiento paso a paso; reconocer las diferentes indeterminaciones que aparezcan (si no hicieron la sustitución del 2 en la función, pedirles que la hagan).*
- *En el ejercicio aparece la indeterminación* $a/0$.
- *Reconocer la imposibilidad de eliminar esta indeterminación.*
- *Analizar los cuatro posibles casos que pueden aparecer,*

  $\frac{0}{a}$, $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$ *y* $\frac{a}{b}$ *con* $a$ *y* $b$ *diferentes de cero.*
- *El primero y el último de estos casos tienen resultados inmediatos.*
- *El tercero obliga a factorizar el numerador y el denominador siempre y cuando las funciones sean polinomiales, de tal manera que, si vuelve a suceder que se obtiene* $\frac{0}{0}$, *se vuelve a factorizar hasta que aparezca uno de los otros tres casos.*
- *El segundo no se ha visto; el ejercicio que sigue es para encontrar una interpretación de esto (algunos estudiantes asocian* $a/0$ *con* $\infty$. *Sin embargo, son pocos los que han hecho un análisis cuidadoso de esto.)*

**Ejercicio 2.5.2**

Para $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$, completa la siguiente tabla.

| $x$ | 2.5 | 2.8 | 2.9 | 2.99 | 2.999 | 3.5 | 3.2 | 3.1 | 3.01 | 3.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | | | | | | | | | |
| $x-3$ | | | | | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | | | | | |

a) En la tabla, ¿A qué valor se acerca $x$? __________

b) ¿Cuánto vale $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$? __________ ¿por qué? __________________________

c) ¿Cuánto vale $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$? __________

d) ¿Cuánto vale $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$? __________

e) En la tabla, ¿A qué valor se acerca $x-3$? _________

f) ¿Qué tipo de indeterminación presenta este ejercicio? __________

g) Esboza la gráfica de $f(x)$

h) En este último ejercicio, ¿qué relación tiene la recta $x=3$ con la función? __________

***Discusión***

- *Ya vieron en cursos pasados asíntotas pero no tan profundamente.*
- *Dejar claro que: ni el límite existe. Ni los límites laterales existen.*
- *Es deseable que, al contestar la pregunta b) hayan intentado evaluar la función en 3 para darse cuenta que no es parte del dominio. No es suficiente contestar directamente de la tabla, pues la idea del ejercicio es relacionar la indeterminación $a/0$ con la tendencia a infinito.*
- *Si no valuaron la función en 3 preguntarles si es posible hacerlo.*
- *Hacer la asociación de $a/0$ con $\infty$, aprovechando el comportamiento de la tabla y el resultado del cálculo del límite, pero aclarar que el límite <u>no</u> existe.*
- *Discutir la diferencia de signos que aparece de uno y otro lado de la asíntota.*
- *Regresar al Ejercicio 2.5.1 para terminarlo. Esto es, calcular los límites laterales.*

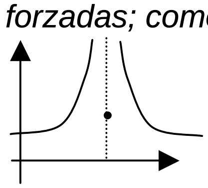
Completa el ejercicio 2.5.1, esto es, indica cuál es el límite.

**Ejercicio 2.5.3**

Calcula $\underset{x\to 5}{\text{Lím}}\dfrac{7}{(x-5)^2}$

***Discusión***

- *La finalidad de este ejercicio es, por un lado, mostrar que hay funciones del mismo tipo que las de los ejercicios anteriores para las que, aunque la tendencia de los límites laterales coinciden, el límite no existe pues no es un número real; y, por otro lado, hacer notar que las asíntotas verticales están en puntos que hacen cero al denominador. Sin embargo, no en todos los puntos que hacen cero al denominador hay asíntotas. Sólo en los que siguen haciendo cero al denominador después de simplificarla. Un ejemplo de este caso es:* $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^2+2x-3}$ *cuya única asíntota es* $x=1$ *a pesar de que* $x=-3$ *también hace cero al denominador.*
- *Mostrar que los valores que hacen cero el denominador de la función después de simplificarla están estrechamente relacionados con valores que no son del dominio (hay excepciones forzadas; como en la gráfica siguiente),*

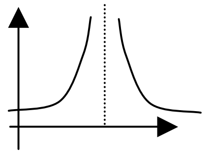


- *Dar "cierre global" con discusión formal pues es fin de sección.*
  - *Definir la asíntota vertical a través del límite:*
    *La recta* $x=a$ *es una asíntota vertical de* $f(x)$ *si la tendencia de algún límite lateral cuando* $x\to a$ *es* $+\infty$ *ó* $-\infty$.

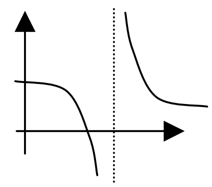
***Continuación de las conclusiones.***

- *Hacer una tabla que muestre los distintos "valores" que pueden tomar los límites laterales cuando la función tiene una asíntota y ejemplificar geométricamente.*

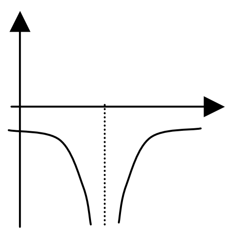
$\underset{x\to a^+}{\text{Lím}}\, f(x) = +\infty$ *y* $\underset{x\to a^-}{\text{Lím}}\, f(x) = +\infty$



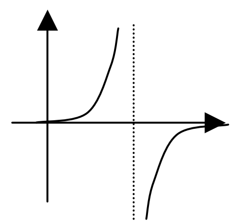
$\underset{x\to a^+}{\text{Lím}}\, f(x) = +\infty$ *y* $\underset{x\to a^-}{\text{Lím}}\, f(x) = -\infty$



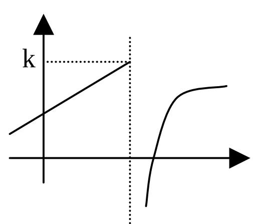
$\underset{x\to a^+}{\text{Lím}}\, f(x) = -\infty$ *y* $\underset{x\to a^-}{\text{Lím}}\, f(x) = -\infty$



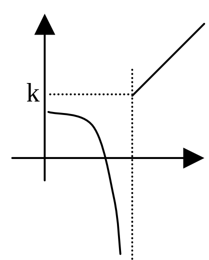
$\underset{x\to a^+}{\text{Lím}}\, f(x) = -\infty$ *y* $\underset{x\to a^-}{\text{Lím}}\, f(x) = +\infty$



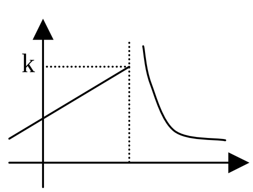
$\underset{x\to a^+}{\text{Lím}}\, f(x) = -\infty$ *y* $\underset{x\to a^-}{\text{Lím}}\, f(x) = k$



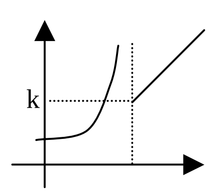

$\underset{x\to a^+}{\text{Lím}}\, f(x) = k$ *y* $\underset{x\to a^-}{\text{Lím}}\, f(x) = -\infty$




$\underset{x\to a^+}{\text{Lím}}\, f(x) = +\infty$ *y* $\underset{x\to a^-}{\text{Lím}}\, f(x) = k$




$\underset{x\to a^+}{\text{Lím}}\, f(x) = k$ *y* $\underset{x\to a^-}{\text{Lím}}\, f(x) = +\infty$



**Tarea 2.5.1**

1. Incluye en el esquema que elaboraste en la tarea 2.1.2 ejercicio 2 página 30, el caso de la indeterminación $\frac{a}{0}$.

| |
|---|
| ***Nota para el profesor:*** <br> ▪ *El esquema está en el apéndice en la página 214.* |

2. Encuentra las asíntotas verticales de las siguientes funciones usando la definición de asíntota:

a) $f(x) = \dfrac{2x-7}{x^2+6x+9}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2-8x-9}{x^2+6x+5}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2-6x}{x^2-12x+36}$

d) $l(x) = \dfrac{3x}{x^2-9}$

# Sección 2.6

# Límites cuando $x \to \pm\infty$ y asíntotas horizontales

**Ejercicio 2.6.1**

Calcula $\underset{x\to\infty}{\text{Lím}} \dfrac{5x^3+2x^2-2}{2x^3-4x-1}$

***Discusión***

- *En los primeros ejercicios de la lección, los grados de los polinomios del numerador y del denominador son iguales.*
- *Plantear la indeterminación* $\frac{\infty}{\infty}$ *(no se espera que lleguen al resultado). Si llegaron al resultado, seguramente usaron una tabla.*
- *Discutir las diferentes respuestas. Se está pensando que lleguen a respuestas del tipo:*

$$\frac{\infty}{\infty}=\infty \quad \frac{\infty}{\infty}=0 \quad \frac{\infty}{\infty}=1$$

- *Si el alumno plantea una de estas tres respuestas, cuestionarlo de por qué esa y no cualquiera de las otras dos.*
- *Los siguientes ejercicios mostrarán que se puede remover la indeterminación.*
- *Cuidar que no concluyan que el límite no existe, en los siguientes ejercicios se verán ejemplos en los que existe y en los que no..*

## Ejercicio 2.6.2

Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 7}{x^2 - 5x}$ utilizando la tabla.

| $x$ | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 | $10^{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

***Discusión***

- *Se espera que lleguen al resultado.*
- *Aclarar que en la tabla se puede poner cualquier valor y no nada más.*

## Ejercicio 2.6.3

Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^3 + 6x}{2x^3 + 9}$

¿Qué relación hay entre el valor del límite y los coeficientes de los términos de la función?

________________________________________

________________________________________

Verifica que esta relación también se cumpla en el ejercicio 2.6.2

***Discusión***

- *Se espera que lleguen al resultado.*
- *Deben relacionar el valor del límite con los coeficientes de los términos de grado mayor.*
- *Se deberá concluir que* $\lim_{x\to\infty}$ *de un cociente de polinomios del mismo grado es igual al cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.*

**Ejercicio 2.6.4**

Calcula $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-1}{3x^2+4}$

¿Por qué crees que pasa esto? ______________________________________________

***Discusión***

- *Deberán usar una tabla para encontrar que la expresión tiende a infinito cuando* $x$ *tiende a infinito.*

### Ejercicio 2.6.5

Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4}{5x^3-1}$

¿Por qué crees que pasa esto? ____________________________________________

***Discusión***

- *Usar una tabla y concluir que la expresión tiende a cero cuando $x$ tiende a infinito.*
- *Generalizar ambos ejercicios y concluir que el exponente mayor determina la tendencia del cociente.*

### Ejercicio 2.6.6

Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$ y calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{k}{x^n}\right)$

***Discusión***

- *Este ejercicio pretende preparar al alumno para poder calcular los límites al infinito de forma algebraica, esto es, dará la herramienta necesaria para hacerlo.*
- *En la segunda parte, verificar que se usan las propiedades de los límites.*

**Ejercicio 2.6.7**

Calcula algebraicamente $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x^3 - 7x^2 + 5x - 6}{12x^4 + 3x^2 - 8x + 1}$

Factoriza, usando como término común, la variable con el mayor exponente en toda la expresión en el numerador y en el denominador,:

Ahora simplifica y usa las propiedades del límite y el resultado del ejercicio 2.6.6 para encontrar el valor del límite:

***Nota para el profesor:***

- *Este ejercicio se resuelve algebraicamente, justificando la conclusión a la que se llegó en los ejercicios pasados.*

- *Se pide comprobar el resultado comparando con el ejercicio 2.6.5.*

Comprueba este resultado con la conclusión que obtuviste para el ejercicio 2.6.5

**Tarea 2.6.1**

Calcula los siguientes límites algebraicamente y comprueba tus resultados con las conclusiones que se habían dado.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^5 - 3x^2 + 2}{4x^3 - x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^9 - 24x + 8}{6 + 11x^5 - 3x^7 - 4x^9}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 - 2x}{4}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9786x + 5}{x^{27}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^8 + 5x^3 - 6}{-2x^{10} + 3x^8 + 5x^3 - 6}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 6x - 8}$

***Nota para el profesor:***

- *Cuidado con el ejercicio 3 al revisar la tarea.*

**Ejercicio 2.6.8**

Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ y calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{k}{x^n}\right)$

***Discusión***

- *El valor de estos límites es igual a los del ejercicio 2.6.6, pero la manera de tender a él es distinta*
- *Analizar la gráfica de* $f(x)=\frac{k}{x}$
- *Debido a esto, el método para resolver un límite cuando* $x\to-\infty$ *es lo mismo que cuando* $x\to\infty$*, a excepción del caso en el que el polinomio del numerador tenga mayor grado que el del denominador.*

**Ejercicio 2.6.9**

Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3+2x^2-2}{2x^3-4x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3-1}{3x^2+4}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+4}{5x^3-1}$

***Nota para el profesor:***

- *Revisar los resultados. Poner atención con el inciso b) de este ejercicio, ya que cuando* $x\to-\infty$, $5x^3$ *tiende a* $-\infty$*, a pesar de que el signo del coeficiente de este término sea positivo. Discutir* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-5x^3-1}{3x^2+4}$.
- *Comparar este ejercicio con los ejercicios 2.6.1, 2.6.4 y 2.6.5.*

**Tarea 2.6.2**

1. Resuelve los ejercicios de la tarea 2.6.1 cambiando $x \to \infty$ por $x \to -\infty$.

2. Elabora un esquema que muestre todos los casos que resultan al calcular el límite de una función racional cuando $x \to \infty$ y otro para cuando $x \to -\infty$.

***Nota para el profesor:***
- *El esquema está en el apéndice en la página 215.*

**Ejercicio 2.6.10**

Calcula:

a) $\text{Lím}_{x\to\infty} \dfrac{4x}{x^2+2}$

b) $\text{Lím}_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{x^2+2}$

c) Esboza la gráfica de $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+2}$

***Discusión***

- *Dar "cierre global" con discusión formal pues es fin de sección. Tocar los siguientes puntos:*
  - *El objetivo del inciso c) es que relacionen los límites encontrados en a) y b) con el comportamiento asintótico de la función.*
  - *Preguntar en este ejercicio qué relación tiene la recta $y = 0$ con la función.*
  - *Definir asíntota horizontal como: la recta $y = a$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si $\text{Lím}_{x\to\infty} f(x) = a$ ó $\text{Lím}_{x\to-\infty} f(x) = a$*
  - *Señalar que la "ó" de la definición puede representar 3 casos.*

***Discusión***

- *Definir tipos de discontinuidad:*
    - *Removible. Es aquella que se puede redefinir de tal manera que la nueva función sea continua en ese punto.*
      $f$ *tiene una discontinuidad removible en* $x = a$ *si*
        a) $a \notin D_f$ *y* $\underset{x \to a}{Lím}\, f(x)$ *existe* *ó*
        b) $a \in D_f$ , $\underset{x \to a}{Lím}\, f(x)$ *existe pero* $\underset{x \to a}{Lím}\, f(x) \neq f(a)$.

      *Es decir que falle la primera condición y la segunda se cumpla ó que falle únicamente la tercera condición de continuidad.*

    - *Esencial. Aquella que no hay manera de redefinirla para que la nueva función sea continua en ese punto.*
      $f$ *tiene una discontinuidad esencial en* $x = a$ *si*
        a) $\underset{x \to a^+}{Lím}\, f(x) \neq \underset{x \to a^-}{Lím}\, f(x)$ *en este caso se dice que la discontinuidad es esencial de brinco.*
        b) $x = a$ *es asíntota de* $f$. *En este caso se dice que es esencial asintótica*

      *Es decir que falle la segunda condición.*

**Tarea 2.6.3**

1. Responde cada uno de los siguientes incisos para cada una de las funciones.
   a) Los puntos donde es discontinua si existen.
   b) Explica por qué es discontinua en esos puntos y argumenta cuál de las tres condiciones de continuidad no se cumple.
   c) Dí cuál es el tipo de discontinuidad que aparece en cada uno de esos puntos.
   d) Encuentra las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
   e) Si existen discontinuidades removibles, redefine la función de tal manera que sea continua.

i) $$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2+9x+8}$$

ii) $$f(x)=\frac{7x}{x^2+6}$$

iii) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+9x+18} & \text{si} \quad x\neq 6 \\ 3 & \text{si} \quad x=6 \end{cases}$$

iv) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x^2-3x-28} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{5}{x^2+3x-10} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

v) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4} & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{x^2+2x-35}{x^2+6x-7} & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

2. Esboza una gráfica de cada función siguiendo los pasos del Ejercicio 2.6.10
   a) $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x^2+8}$
   b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2+x-15}$
   c) $f(x)=\dfrac{2x^2-5x-12}{3x^2+14x+8}$

# Lección 2.7

## Definición formal de límite.

**Definición:**

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

***Discusión***

- *El sentido de la lección es conocer la definición formal de manera intuitiva.*
- *Basarse en la interpretación geométrica de la definición.*
- *Debe ser una mera herramienta para ayudar al alumno a tener una mejor comprensión del concepto de límite.*
- *Los programas indican no hacer uso de la definición para demostrar que una función tiene límite, pero si el grupo o algunos estudiantes se muestran interesados se pueden hacer algunos ejemplos.*
- *Antes de iniciar con la definición, recordar que el valor absoluto se puede interpretar como distancia.*
- *Explicar los símbolos que aparecen en la definición. Es la primera vez que los alumnos encuentran un lenguaje matemático formal.*
- *Mostrar geométricamente la definición con un ejemplo de una función que tenga límite y usar otro ejemplo en el que no haya límite.*

0

# CAPÍTULO 3

# LA DERIVADA Y SUS INTERPRETACIONES

Sección 3.1. Interpretación física y geométrica de la derivada.
Sección 3.2. Cálculo de derivadas sencillas.
Sección 3.3. Aplicaciones de la derivada.

OBJETIVOS:

- Conocer el concepto de derivada.
- Interpretar la derivada física y geométricamente.
- Calcular derivadas sencillas.
- Aplicar la derivada en problemas diversos.

# Sección 3.1

# Interpretación física y geométrica de la derivada.

**Ejercicio 3.1.1**

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en $x_0 = 4$.

***Discusión***

- *Preguntar qué se necesita, qué tenemos y qué nos falta para encontrar la ecuación de la recta tangente. Hacer énfasis en que tenemos un punto y que nos falta la pendiente.*
- *Se espera que usen secantes para aproximarse a la tangente.*
- *En caso de que ningún equipo lo haga de esta forma, no dar la solución y ayudar sugiriendo que calculen la pendiente de las secantes que se forman con los puntos* $x_0 = 4,\ x = 2$*; y con los puntos* $x_0 = 4,\ x = 3$*; y que las dibujen.*
- *Preguntar si esto sugiere algún método.*
- *En caso de que nadie sugiera algo, preguntar lo que sucedería si seguimos calculando la pendiente de las secantes de tal manera que el segundo punto se acerque más y más a 4.*
- *Cuando calculen las pendientes de las secantes, motivarlos a escribirla con la notación* $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}$*. Esto ayudará a que, en el siguiente ejercicio, puedan llegar a la definición con mayor facilidad.*
- *Verificar que estén conscientes de que en el proceso de solución de este problema se usó un límite.*

**Ejercicio 3.1.2**

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = -x^2 + 6x$ en el punto $x_0 = 2$.

***Discusión***

- *Se pretende que usen, implícitamente,* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *para calcular la pendiente.*
- *La idea del ejercicio es que usen el concepto de límite.*
- *Ya tenemos la pendiente y un punto, ¿cuál es la recta tangente?*

**Ejercicio 3.1.3**

Escribe la pendiente de la recta tangente a la función $f$ en el punto $x_0$.

***Discusión***

- *Se pretende que lleguen a que, la pendiente de la recta tangente es*

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- *No hacer referencia a la derivada. Se asociará este límite con la derivada después de los ejercicios de interpretación física.*

**Ejercicio 3.1.4**

Se suelta una pelota desde cierta altura. La función que describe su caída es $y = f(t) = 5t^2$. Queremos encontrar la velocidad instantánea en $t = 1$ ; para esto:

a) Calcula la velocidad media entre los tiempos $t = 1s$ y $t = 2s$

b) Calcula la velocidad media entre los tiempos $t = 1s$ y $t = 1.5s$

c) Calcula la velocidad media entre los tiempos $t = 1s$ y $t = 1.001s$

d) ¿Los incisos anteriores te sugieren algún método para encontrar la velocidad instantánea en $t = 1s$? ______ ¿cuál? ________________________________________

e) ¿Cuánto vale la velocidad instantánea en $t = 1s$? ______

***Discusión***

- *Se pretende que encuentren el valor de la velocidad instantánea usando el concepto de límite. Verificar que tienen claro que se está usando dicho concepto.*
- *Mientras que los estudiantes no escriban la velocidad instantánea con un límite, no hacerlo.*

f) Calcula la velocidad instantánea en $t = 4s$ sin usar una tabla.

g) Calcula la velocidad instantánea en $t = t_0 s$

h) Escribe a qué es igual la velocidad instantánea en $t_0$ para cualquier función $f$

***Discusión***

- *Verificar que en los tres incisos hayan encontrado la velocidad instantánea usando la notación de límite.*
- *Pedir que comparen el resultado del inciso h) con el resultado del ejercicio 3.1.3.*
- *Dar "cierre global" con discusión formal, tocando los siguientes puntos:*
  - *Definir la derivada como* $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
  - *Explicar que la definición anterior y* $f'(x_0)=\lim_{h\to o}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *representan lo mismo.*
  - *Especificar que las definiciones anteriores se refieren a la derivada en un punto. La derivada* $f'$ *se trata en la siguiente Sección.*
  - *Hablar de razón instantánea de cambio como interpretación de derivada.*
- *Discutir, después del siguiente cuadro, que las dos primeras interpretaciones son casos especiales de la tercera, es decir, en realidad sólo hay una interpretación.*

Escribe las diferentes interpretaciones de la derivada: (No van las respuestas en la versión para estudiantes)

- <u>La pendiente de la recta tangente</u>
- <u>La velocidad instantánea</u>
- <u>La razón instantánea de cambio</u>

# Sección 3.2

# Cálculo de derivadas sencillas

En la sección anterior definimos la derivada de una función en un punto específico. Sin embargo, este punto puede tomar varios valores, por lo cual la derivada de una función representa otra función a la que denotaremos con $f'$ y llamaremos función derivada o, simplemente, derivada de $f$.

Definimos la derivada de $f$ en $x_0$ como:

$$f'(x_0) = \operatorname{Lím}_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

¿Cómo escribirías la definición de la función $f'$?

***Discusión***

- *Verificar que hayan escrito* $f'(x) = \operatorname{Lím}_{h\to o} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- *Discutir la derivada como una nueva función. Para esto se podría dar la gráfica de una función y pedir que grafiquen la derivada.*
- *Discutir que el dominio de la función derivada* $f'$ *son aquellos para los que* $\operatorname{Lím}_{h\to o} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *existe.*
- *Hacer énfasis en la diferencia entre* $f'(x_0)$ *y* $f'(x)$*.*
- *Hablar de las diferentes formas para denotar la derivada:*

  $f'(x)$, $\dfrac{d}{dx}f$, $D_x f$ .

**Ejercicio 3.2.1**

Encuentra la derivada de $g(x) = x$.

**Ejercicio 3.2.2**

Encuentra la derivada de $j(x) = 7x - 2$.

**Ejercicio 3.2.3**

Grafica la función $j$ del ejercicio 3.2.2.

¿Cuál es la gráfica de la función $j$? ________________

¿Cuál es su pendiente? ________. Entonces, ¿cuál es la derivada de $k(x) = mx + b$? _______

> ***Discusión***
>
> - *La derivada de* $f(x) = mx + b$ *es* $f'(x) = m$

**Ejercicio 3.2.4**

Encuentra la derivada de $f(x)=7$.

**Ejercicio 3.2.5**

Grafica la función $f$ del ejercicio 3.2.4.

¿Cuál es la gráfica de la función $f$? ________________

¿Cuál es su pendiente? ________. Entonces, ¿cuál es la derivada de $g(x)=k$? _______

***Discusión***

- *Revisar que en el ejercicio 3.2.4 les dé 0.*
- *La derivada de* $g(x)=k$ *es* $g'(x)=0$
- *Analizar la gráfica de la función para ver que es un caso especial de la pendiente de una recta.*

**Ejercicio 3.2.6**

Encuentra la derivada de $g(u)=u^2$.

**Ejercicio 3.2.7**

Encuentra la derivada de $l(t)=t^3$.

***Discusión***

- *Revisar los resultados de los ejercicios 3.2.6 y 3.2.7.*
- *Preguntar cuál sería la derivada de $f(x)=x^{21}$ (no usar aún la "n" en el exponente; sólo hacer énfasis en el patrón que surge).*
- *Preguntar cuál sería la derivada de $f(x)=x^{-4}$.*
- *Calcular la derivada de $f(x)=x^{-2}$ con la definición.*

**Ejercicio 3.2.8**

Encuentra la derivada de $k(v)=\sqrt{v}$ (para calcular el límite, usa conjugados).

***Discusión***

- *Revisar el Ejercicio 3.2.8.*
- *Hacer notar que este ejemplo sigue el mismo patrón que los ejercicios anteriores.*

**Tarea 3.2.1**

Halla la derivada de las siguientes funciones usando la definición:

a) $g(x)=30478$
b) $f(y)=6y^2$
c) Compara los resultados de a) y b) con los resultados de los Ejercicios 3.2.4 y 3.2.6 respectivamente.
d) $h(z)=4z^3+5z^2-2z+8$
e) $l(v)=\dfrac{1}{v}$

# Sección 3.3

# Aplicaciones de la derivada

### Ejercicio 3.3.1

Supón que la frecuencia con la que vibra la cuerda de una guitarra al pulsarla esta dada por $F(T) = 200\sqrt{T}$ , en donde $F(T)$ es el número de oscilaciones por segundo y la tensión $T$ se mide en libras. ¿Cuál es la razón instantánea de cambio de la frecuencia cuando la tensión de la cuerda es de 4 libras? ¿y cuando es de 9 libras?

***Discusión***

- *Verificar que los estudiantes apliquen las interpretaciones de la derivada como razón instantánea de cambio y como tangente a una curva.*
- *En cada problema, dar tiempo suficiente para que ellos lo resuelvan y, después, discutir los resultados.*
- *Los resultados son:* $F(4) = 50$ *y* $F(9) = \dfrac{100}{3}$

**Ejercicio 3.3.2**

Supón que el beneficio $P$ que se obtiene cada semana al vender $x$ unidades de una cierta mercancía está dado por:

$$P(x) = 50\sqrt{x} - 0.5x - 500, \qquad 0 \le x \le 8000$$

Encuentra la razón instantánea de cambio de $P$ respecto de $x$ cuando $x = 900$

> ***Discusión***
>
> - *Revisar el Ejercicio. La razón de cambio es 0.33333 ó* $\frac{1}{3}$

**Ejercicio 3.3.3**

a) Encuentra la ecuación de la recta tangente a $y = 3x^2 - 5$ en el punto $(2, 7)$.

b) Encuentra la ecuación de la recta normal a $y = 3x^2 - 5$ en el punto $(2, 7)$.
(NOTA: La recta que pasa por el punto $(x_0, y_0)$ y es perpendicular a la recta tangente a $y = f(x)$ en $(x_0, y_0)$, se llama recta normal)

> ***Discusión***
>
> - *Revisar el Ejercicio. Los resultados son:*
>   - *La recta tangente es* $y - 7 = 12(x - 2)$
>   - *La recta normal es* $y - 7 = -\frac{1}{12}(x - 2)$
> - *Preguntar si existe la recta tangente en el punto* $(1,1)$*, punto que no pertenece a la curva para mostrar que no existe. Esto con el objetivo de que no asuman que pueden derivar la función y evaluar en cualquier punto.*
> - *El objetivo más importante es hacer ver que los procesos mecánicos no tienen sentido sin un análisis del problema.*

**Tarea 3.3.1**

Resolver los siguientes problemas:

1. Un globo esférico se dilata por el calor del sol. Encuentra la razón instantánea de cambio del volumen del globo con respecto al radio cuando,

   a) el radio mida 10cm.

   b) el radio mida 15cm.

2. Si se deja caer un objeto desde un globo a 500m de altura sobre el suelo, entonces su altura a los $t$ segundos es $g(t) = 500 - 10t^2$,

   a) Encuentra la velocidad en $t = 1s$ y en $t = 3s$.

   b) ¿Con qué velocidad llega el objeto al suelo?

3. Determina si existe la ecuación de las rectas tangente y normal a $y = x^3 - x^2$ en los puntos dados. En caso de existir encuentra las rectas.

   a) $(0, 0)$

   b) $(2, 4)$

   c) $(-2, -10)$

4. Encuentra la ecuación de la recta tangente a $y = 15x - 9$ en el punto $(1, 6)$

**Nota para el profesor:**

- Discutir el ejercicio 3 c) en clase pues el punto $(-2, -10)$ no pertenece a la curva. (Ver discusión anterior).
- Discutir el ejercicio 4 pues es una recta.

# CAPÍTULO 4

# DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS



OBJETIVOS:

- Conocer y aplicar las reglas y propiedades de derivación.
- Conocer y aplicar la regla de la cadena para los casos específicos de $\frac{d}{dx}u^n$ y $\frac{d}{dx}\sqrt{u}$ .
- Resolver ejercicios de derivación implícita.

# Sección 4.1

# Algunas reglas de derivación y propiedades de las derivadas

Reescribe las siguientes expresiones de manera que no haya raíces ni denominadores (los exponentes sí pueden tener denominadores).

1. $k\sqrt[n]{x^m}$

2. $\dfrac{k}{x^n}$

**Ejercicio 4.1.1**

Encuentra la derivada de:

a) $f(x)=k \longrightarrow f'(x)=$

a) $f(x)=x \longrightarrow f'(x)=$

a) $f(x)=x^n;\ (n\in Q) \longrightarrow f'(x)=$

a) $f(x)=\sqrt{x} \longrightarrow f'(x)=$

a) $f(x)=\dfrac{1}{x} \longrightarrow f'(x)=$

a) $f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n};\ (n\in Q) \longrightarrow f'(x)=$

***Discusión***

- *En el capítulo anterior se calcularon derivadas similares. La idea de este ejercicio es que puedan generalizar que si* $f(x)=x^n$, entonces $f'(x)=nx^{n-1}$.
- *Después de revisar el ejercicio, dar la regla anterior.*

**Ejercicio 4.1.2**

Encuentra la derivada de:

a) $f(x)=\sqrt[4]{x}$

a) $h(y)=y^9$

a) $g(t)=247825148976$

a) $l(w)=w^{3/2}$

a) $F(v)=v^{-7}$

a) $G(u)=u^{-1/5}$

a) $H(z)=\frac{1}{z}$

***Discusión***

- *Se presentan casos particulares para ejercitar el uso de la regla. No se pretende que calculen la derivada usando la definición.*

## Propiedades de las derivadas

**Propiedad 1.** Derivada del producto de una constante por una función.

$$(kf(x))'=kf'(x)$$

Escribe la expresión verbal de la Propiedad 1:

(Lo siguiente no aparece en la versión para alumnos.)
La derivada del producto de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.

**Ejemplo.** $\left(5x^2\right)' = 5\left(x^2\right)' = 5\left(2x\right) = 10x$

**Propiedad 2.** Derivada de la suma de dos funciones.

La derivada de la suma de dos funciones es la suma de las derivadas.

Escribe la expresión matemática de la Propiedad 2:

(Lo siguiente no aparece en la versión para alumnos.)

$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$

**Ejemplo.** $\left(x^3+\sqrt{x}\right)' = \left(x^3\right)' + \left(\sqrt{x}\right)' = 3x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

**Propiedad 3.** Derivada del producto de funciones.

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Escribe la expresión verbal de la Propiedad 3:

(Lo siguiente no aparece en la versión para alumnos.)

La derivada del producto de dos funciones es igual a la suma de la derivada de la primera función por la segunda función más la derivada de la segunda función por la primera función.

**Ejemplo.** $\left(x^5\sqrt[4]{x}\right)' = \left(x^5\right)'\left(\sqrt[4]{x}\right) + \left(x^5\right)\left(\sqrt[4]{x}\right)' = 5x^4\sqrt[4]{x} + x^5\dfrac{1}{4}x^{-3/4}$

**Propiedad 4.** Derivada del cociente de dos funciones.

La derivada del cociente de dos funciones $f/g$ es igual al cociente que resulta al dividir la derivada de la función de arriba multiplicada por la de abajo menos la función de arriba por la derivada de la de abajo, entre el cuadrado de la función de abajo.

Escribe la expresión matemática de la Propiedad 4:

(Lo siguiente no aparece en la versión para alumnos.)

$\left(f(x)/g(x)\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

**Ejemplo.** $\left(\dfrac{x^{2/3}}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{\left(x^{2/3}\right)'\left(\sqrt{x}\right)-\left(x^{2/3}\right)\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{\frac{2}{3}x^{-1/3}\sqrt{x}-x^{2/3}\frac{1}{2}x^{-1/2}}{x}$

**Ejercicio 4.1.3**
Encuentra las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x)=5x^7-3x^4+8\sqrt{x}+\dfrac{2}{x^4}+7$

1. $h(t)=3t^{5/3}+\sqrt[3]{t^5}$

1. $g(y)=\dfrac{y^2}{3y+2}$

4. $k(n)=\left(n^2-3\right)\left(n^3-2n\right)$ (no hacer la multiplicación antes de derivar)

5. $k(n)=\left(n^2-3\right)\left(n^3-2n\right)$ (antes de derivar efectúa la multiplicación)

6. Compara los resultados de los puntos 4 y 5.

***Discusión***

- *Son ejercicios donde se mezclan las propiedades con la regla de derivación.*

**Tarea 4.1.1**

1. Demuestra las propiedades 1 y 2 de las derivadas.

2. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $g(z)=\dfrac{7z^2+z}{\sqrt[3]{z^2}}$

   b) $h(y)=y^3-5y^{-2}+4\sqrt{y^7}$

   c) $f(w)=\left(5w^2+1\right)\left(\sqrt[4]{w^3}-w^7\right)+\dfrac{2}{w}$

   d) $l(s)=s+2s^{-3}-3s^{-2/5}+8^2s^{1/3}$

   e) $g(u)=\dfrac{11u^5}{\sqrt{u}}$

   f) $l(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{5x^2-7x+11}$

   g) $k(q)=\dfrac{\left(3q^2-q\right)\left(5q^3+2q^2\right)}{2q^5-3q^2+7}$

   h) $f(x)=\dfrac{-10}{x^6}$

   i) $h(x)=5x^2-\dfrac{6}{x^7}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

   j) $j(r)=\dfrac{4}{\sqrt[5]{r}}\left(9r^7-3r^{-6}\right)$

# Sección 4.2

# Regla de la cadena

Hasta el momento hemos usado funciones que obtuvimos al sumar o restar dos funciones, al multiplicar un escalar por una función, y al multiplicar o dividir dos funciones. A continuación escribiremos las reglas de correspondencia de estas funciones a partir de $f$ y $g$:

1) $(kf)(x) = kf(x)$

2) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4) $\left( f/g \right)(x) = f(x)/g(x)$ si $g(x) \neq 0$

Una "nueva" operación que se puede realizar con dos funciones es la *composición de funciones*. Efectuar esta operación es análogo al proceso que seguimos al ponernos calcetines y zapatos, esto es, primero nos ponemos ("aplicamos") el calcetín y después nos ponemos ("aplicamos") el zapato en el pie con calcetín. De igual manera, en la composición de funciones, primero "aplicamos" una función a una variable y después "aplicamos" la segunda función al resultado de la primera aplicación.

La composición de las funciones $f$ y $g$ se denota por $(g \circ f)(x)$. Su regla de correspondencia es $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, y se lee $f$ compuesta con $g$.

NOTA: La manera de leer esta notación no es universal; se pueden encontrar libros en los que $(g \circ f)(x)$ se lea "$g$ compuesta con $f$". Sin embargo, para este curso utilizaremos $(g \circ f)(x)$ como "$f$ compuesta con $g$".

**Ejercicio 4.2.1**

Para las funciones $f(x) = x + 8$ y $g(y) = y^2$, encuentra $f$ compuesta con $g$:

Queremos encontrar $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Esto representa el pie con el calcetín y el zapato, pero, para obtenerlo, tenemos que hacerlo por partes:
Primero, ponerle el calcetín al pie, es decir, aplicar $f$ a $x$ y obtenemos $f(x) =$ ___________
Después, ponerle el zapato al pie con calcetín, es decir, aplicar $g$ al resultado de la aplicación de $f$ a $x$. Entonces: $g(f(x)) = g(\qquad)$
Para poder hacer esto, considera todo lo que está dentro del paréntesis como la variable de la función $g$ y aplícala para obtener $g(f(x)) =$ ____________

> ***Discusión***
>
> - *Para explicar la regla de la cadena hay que comenzar explicando la composición de funciones, pues no la conocen.*
> - *De los ejercicios siguientes, en los dos primeros se usan distintas variables en cada función. Esto es con la idea de facilitar la comprensión de la "aplicación" de una función sobre otra. En los ejercicios posteriores se usa la misma variable para ambas funciones.*
> - *Revisar que lleguen al resultado correcto en cada ejercicio.*

**Ejercicio 4.2.2**

Para las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(y) = y^3 - 4$, encuentra $f$ compuesta con $g$.

**Ejercicio 4.2.3**

Para las funciones $f(x)=x^3+2$ y $g(x)=\dfrac{2}{x-1}$, encuentra $f$ compuesta con $g$.

**Ejercicio 4.2.4**

Para las funciones $f(x)=x^3+2$ y $g(x)=\dfrac{2}{x-1}$, encuentra $g$ compuesta con $f$.

***Discusión***

- *Discutir que en general* $f\circ g\neq g\circ f$

**Tarea 4.2.1**

En cada inciso calcula $(g\circ f)(x)$:

1. $f(x)=\dfrac{5x-2}{3}$ , $g(x)=x^2+7$
2. $f(x)=\sqrt{2x-5}$ , $g(x)=\dfrac{3x}{x-1}$
3. $f(x)=\sqrt[3]{3x-8}$ , $g(x)=\dfrac{6}{x}$
4. $f(x)=6-9x$ , $g(x)=\dfrac{6-x}{9}$

**Ejercicio 4.2.5**

Para $h(x)=\left(5x^3+7x^2-6\right)^9$ determina quiénes son $f$ y $g$ de tal forma que $g\left(f(x)\right)=h(x)$.

**Ejercicio 4.2.6**

Para $h(x)=\sqrt{x^2+5x-10}$ determina quiénes son $f$ y $g$ de tal forma que $g\left(f(x)\right)=h(x)$.

***Discusión***

- *La regla de la cadena sólo se va a aplicar en los casos:*

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad y \qquad \frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$$

- *Los dos ejercicios anteriores sirven para motivar la relación de la regla de la cadena con la composición de funciones.*

**Ejercicio 4.2.7**

Completa la siguiente tabla.

| $f$ | $g$ | $f(g(x))$ |
|---|---|---|
| $x^2$ | $1-3x$ | |
| $1-3x$ | $x^2$ | |
| | | $\sqrt{x-9}$ |
| | | $(1+x^5)^7$ |

## Tarea 4.2.2

En cada inciso, determina quiénes son $f$ y $g$ de tal forma que $g(f(x)) = h(x)$:

1. $h(x) = \left(7x^9 - 8x^4 - 6x - 100\right)^{-90}$

2. $h(x) = \left(9x^4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^{17}$

3. $h(x) = \left(4x^6 - \frac{3}{x} + 8\right)^{1/2}$

4. $h(x) = \sqrt{11x^{-2} + 8x^3 - 5}$

## Ejercicio 4.2.7

Deriva la función $h(x) = \left(5x^3 + 7x^2 - 6\right)^9$

***Discusión***

- *Por ahora no se pretende que encuentren el resultado. La idea es motivar la necesidad de la regla de la cadena.*

***Teorema de la Regla de la Cadena:***

*(Lo siguiente va vacío en la versión para estudiantes)*

*Para encontrar la derivada de* $(g \circ f)(x)$ *se tiene que* $(g \circ f)'(x) = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$

- *Explicar el teorema; esto es:*
  - *Se derivan* $f$ *y* $g$.
  - *El resultado se expresa con* $g'$ *evaluada en* $f(x)$.
- *En la explicación, resolver el Ejercicio 4.2.7 usando las siguientes recomendaciones, pues esto será la motivación para desarrollar el concepto de derivación implícita en la siguiente sección.*
  - *Reconocer* $f$ *y* $g$.
  - *Derivar* $f$.
  - *Derivar* $g$.
  - *Evaluar* $g'$ *en* $f(x)$. *Esto es, escribir* $g'\left(f(x)\right)$.
  - *Efectuar la multiplicación correspondiente para obtener* $(g \circ f)'(x)$.

**Ejercicio 4.2.8**

Deriva la función $h(x) = \sqrt{7x^4 + 5x^3 - x}$

**Ejercicio 4.2.9**

Deriva la función $h(x) = \left(4x^7 - \frac{9}{x} + 8\right)^{-3}$

**Tarea 4.2.3**

Deriva las funciones de la Tarea 4.2.2.

# Sección 4.3

# Derivación implícita

En esta sección trabajaremos con algunas relaciones que no son funciones.

**Ejercicio 4.3.1**

Encuentra la ecuación de la recta normal a $y^3 + 7y = x^3$ en el punto $(x_0, y_0) = (2,1)$.

***Discusión***

- *Discutir la cuestión de que en esta sección trabajaremos con algunas relaciones que no son funciones.*
- *Probablemente, los estudiantes, no puedan resolverlo.*
- *El siguiente ejercicio pretende guiar la respuesta de este ejercicio por lo que no es necesario resolverlo en pizarrón.*
- *Explicar qué es una función implícita, en contraste con las explícitas.*
- *Hacer ver que no todas las funciones implícitas se pueden reescribir de forma explícita. Por ejemplo:* $y^2 + 5y = x^3 - 3x^2$.
- *Poner un ejemplo en el que se pase de una función explícita a una implícita. La idea es hacer énfasis en que tanto al escribir la función explícitamente como implícitamente la variable dependiente sigue siendo función de la independiente.*
  *Ejemplo:* $f(x) = x^2 - 4$
  *Se puede escribir como:* $y = x^2 - 4$
  *que a su vez se puede escribir como:* $x^2 - y - 4 = 0$
  *Aquí* $y$ *sigue dependiendo de* $x$ *ya que se obtuvo la ecuación implícita a partir de una explícita.*
- *Hay funciones, como* $x + y = 0$*, en las cuales* $x$ *se puede ver como función de* $y$ *o* $y$ *se puede ver como función de* $x$*. En casos como estos, si partimos de una ecuación implícita y no se especifica la dependencia de una variable respecto a la otra, podría darse cualquiera de las dos dependencias.*
- *Discutir que expresiones como* $x^2 - y - 4 = 0$ *o como* $x^2 - y^2 - 4 = 0$ *pueden entenderse como una ecuación o como una relación que podrá ser función respecto a alguna de las variables o no ser función respecto a ninguna.*

**Ejercicio 4.3.2**

Encuentra la ecuación de la recta normal a la circunferencia con centro en el origen y radio 4 en el punto $\left(2,\sqrt{12}\right)$.

a) Escribe la ecuación de la circunferencia en cuestión: ___________________

b) ¿La ecuación está dada en forma implícita o explícita? __________________

c) ¿Qué información necesitas para escribir la ecuación de la recta normal? _________________

d) ¿Qué herramientas puedes utilizar? ___________________

e) ¿Qué representa la derivada de $y$ con respecto a $x$ en el punto $\left(2,\sqrt{12}\right)$? _______________

f) Encuentra la derivada de $y$ respecto a $x$ sin despejar $y$:

g) Despeja $\frac{dy}{dx}$ de la derivada anterior:

h) Evalúa la derivada anterior en el punto dado: ___________ ¿Qué representa? _______________

Termina el Ejercicio

***Discusión***

- *Este es un ejercicio para encontrar la forma de calcular derivadas implícitas.*
- *En el inciso f) es probable que escriban incorrectamente, a partir de* $x^2+y^2=16$, $2x+2y=0$ *como la derivada. Para cuestionar esta manera incorrecta de derivar, en el inciso g) se pide que se despeje* $\frac{dy}{dx}$ *y este término no aparece.*
- *Discutir con el grupo completo los resultados encontrados para la derivada.*
- *Preguntar sobre si hay o no dependencia de* $y$ *respecto de* $x$ *(en una ecuación siempre hay dependencia de cualquiera de las variables respecto a cualquier otra). Preguntar sobre si hay o no dependencia de* $x$ *respecto de* $y$. *Todo esto con el fin de que vean la importancia de especificar la variable respecto a la cual se va a derivar y entonces, explicar que se tendría que usar la regla de la cadena.*
- *Resolver con el grupo el ejercicio.*
- *Se sugiere usar la notación* $\frac{dy}{dx}$ *en los primeros ejercicios para resaltar la dependencia* $y=y(x)$.

Resuelve el Ejercicio 4.3.1

**Tarea 4.3.1**

Deriva con respecto a $x$ las siguientes ecuaciones:

1. $xy = 0$
2. $x^2y^2 = 0$
3. $x^2 + y^2 = 0$
4. $x^2y + y^3 = 0$
5. $\frac{x^2}{y} = 0$
6. $\frac{y^2}{x} = 0$

**Ejercicio 4.3.3**

Deriva implícitamente la ecuación $3x^2y + y^4 = 5$

***Discusión***

- *Observese que no se especificó con respecto a qué variable se quiere derivar. Discutir esto con los estudiantes y pedir que deriven con respecto a la otra variable.*

### Ejercicio 4.3.4

Para $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$, encuentra $\dfrac{dy}{dx}$.

### Ejercicio 4.3.5

Para $x^2 + y^2 = 4$

a) Encuentra $\dfrac{dy}{dx}$ usando derivación implícita.

b) Expresa $\dfrac{dy}{dx}$ sólo en términos de $x$.

c) Despeja $y$ de la ecuación original y deriva.

d) Compara los resultados de b) y c)

***Discusión***

- *En este ejercicio se pide que encuentren la derivada por dos caminos: despejando $y$ y derivando y hallando la derivada implícita. La idea es que encuentren que ambos resultados son iguales.*
- *Retomar la idea de que algunas funciones implícitas se pueden hacer explícitas y otras no.*
- *Discutir cómo la derivada implícita quedará en términos de $x$ y $y$; y que, para poder ver la equivalencia entre ambos métodos, hay que sustituir $y(x)$ cada vez que aparezca $y$ para que $\frac{dy}{dx}$ quede sólo en términos de $x$.*

**Tarea 4.3.2**

1. Deriva implícitamente las siguientes ecuaciones:

   a) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=x^2y^3$

   b) $y^{5/4}+\sqrt[3]{y}+xy=x^6$

   c) $\sqrt{xy}-5y^4+\dfrac{x}{y}+3y^2=x^3$

2. Encuentra $y'$ para cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $6x-\sqrt{2xy}+xy^3=y^2$

   b) $\dfrac{y^2}{x^3}-1=y^{3/2}$

   c) $x^4+4x^2y^2-3xy^3+2x=0$

3. En cada inciso, encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación en el punto $P$ indicado:

   a) $2x^3-x^2y+y^3-1=0 \quad ; P(2,-3)$

   b) $y^2-4x^2=5 \quad ; P(-1,3)$

   c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=1 \quad ; P(2,6)$

4. Para las ecuaciones:

   a) $xy+16x=y$

   b) $4y+2xy=3x$

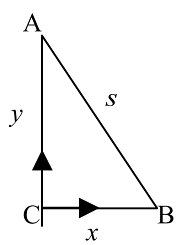
   Encuentra $\dfrac{dy}{dx}$ usando los siguientes procedimientos:

i) Despejar $y$ y después derivar.

ii) Derivar implícitamente y después despejar $\frac{dy}{dx}$.

iii) Comprueba que llegas al mismo resultado.

5. Dos aviones salen de un aeropuerto en C a la misma hora. El avión A viaja hacia el norte con una velocidad de 200km/h, y el avión B viaja hacia el este con una velocidad de 150km/h. Después de 2 horas de viaje, sus posiciones son las que se muestran en la figura (NOTA: Este problema se puede resolver con física. La idea es que lo resuelvas usando los conceptos de cálculo):




Donde:
C es el aeropuerto
$y$ es la distancia del avión A respecto a C (es función del tiempo $t$)
$x$ es la distancia del avión B respecto a C (es función de $t$)
$s$ es la distancia entre los dos aviones (es función de $t$)

Calcula la rapidez $v_s$ con la que se separan los dos aviones entre sí después de 2 horas.

(Recuerda que $v_x = \frac{dx}{dt}$ , $v_y = \frac{dy}{dt}$ , $v_s = \frac{ds}{dt}$ )

# CAPÍTULO 5

# APLICACIONES DE LA DERIVADA



OBJETIVOS:

- Poder aplicar derivadas sucesivas.
- Poder graficar una función a partir de los intervalos donde es creciente y donde es decreciente, su concavidad y sus puntos máximos, mínimos y de inflexión.
- Resolver problemas de optimización con máximos y mínimos.

# Sección 5.1

# Derivadas sucesivas

**Ejercicio 5.1.1**

Encuentra la derivada de la función $f(x) = 6x^7 - 8x^4 + 4x - 1$.

Encuentra la derivada de la función $g(x) = 42x^6 - 32x^3 + 4$.

¿Hay alguna relación entre $g$ y $f'$? _______ ¿Cuál? _______________________

Entonces, ¿cuál es la derivada de $f'$? ____________________

***Discusión***

- *Recordarles que la derivada es una función y por lo tanto se puede volver a derivar.*
- *La derivada de la función derivada se llama segunda derivada de $f$ o derivada de orden 2 de $f$ .*
- *Preguntar si este proceso de "derivar la derivada" tiene fin (no olvidar que en este curso sólo se ven funciones que tienen derivadas de todos los órdenes).*
- *Introducir la notación de derivadas de orden superior:*

  $f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{(IV)}(x)$

**Ejercicio 5.1.2**

Encuentra la derivada de orden 5 de $f(x) = 9x^{11} + 5x^6 - 4x^2 - x$

**Ejercicio 5.1.3**

Encuentra la derivada de orden 2 de $h(x) = \sqrt[5]{3x^2 - 7}$

**Tarea 5.1.1**

Para cada una de las siguientes funciones, encuentra la derivada del orden que se indica.

1. $f(x)=\sqrt{x}, \quad f^{(IV)}(x)=$

2. $g(x)=\dfrac{1}{x}, \quad g'''(x)=$

3. $h(x)=3x^2+5x-6, \quad h^{(V)}(x)=$

4. $l(x)=x\sqrt{x+1}, \quad l''(x)=$

5. $j(x)=\sqrt{8x-1}, \quad j'''(x)=$

6. $k(x)=\left(x^2-5\right)^{87}, \quad k''(x)=$

7. $M(x)=ax^4+bx^2+cx+d, \quad M'''(x)=$

**Ejercicio 5.1.4**

Resuelve el siguiente problema.

La función que describe la distancia con respecto al tiempo de un objeto es $x(t)=1-2t+3t^3$. Calcula la aceleración cuando $t=1s$.

### Ejercicio 5.1.5

Usa la definición $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ para definir la 2ª derivada de $f$ en $x = x_0$.

Escribe de nuevo la definición de la 2ª derivada para $x(t)$ en $t = t_0$.

Si $x'(t_0)$ representa la velocidad de un objeto en $t = t_0$, ¿qué representa $x''(t_0)$? ________________

***Discusión***

- *El ejercicio 5.1.4 es para llegar a la interpretación de la 2ª derivada. Se pide el valor de la aceleración en un tiempo dado. Los alumnos no han resuelto un problema de este tipo.*
- *La idea del problema es que ellos discutan cómo calcular la aceleración a partir de la función de la posición respecto al tiempo* $x(t)$.
- *No es necesario que se llegue a la solución. En este punto sólo se construirá la interpretación física de la 2ª derivada.*
- *Para facilitar la interpretación de la segunda derivada, se piden la interpretación de la primera derivada y los dos casos especiales:*
  - *interpretación geométrica (pendiente de la recta tangente a un punto dado);*
  - *velocidad instantánea en un punto dado;*
  - *razón instantánea de cambio.*
- *Además se pide que usen la definición de la primera derivada para escribir la análoga para la 2ª derivada, y después se toma el caso particular de la aceleración.*

*En general:* $$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_o}$$

*Aceleración:* $$x''(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x'(t) - x'(t_0)}{t - t_o}$$

*o bien:* $$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_o}$$

Resuelve el problema del Ejercicio 5.1.4

**Ejercicio 5.1.6**

Se arroja un objeto hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 10\,{}^{m}/_{s}$. Si la ecuación que describe la trayectoria del objeto está dada por $y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, calcula la aceleración del objeto en $t = 2s$. (Donde $g$ es la gravedad, la cual podrás redondear a $10\,{}^{m}/_{s^2}$ )

***Nota para el profesor:***

- *Este ejercicio se pone para que los estudiantes reconozcan que en un ejercicio de caída libre la aceleración es la gravedad. Este tipo de ejercicios ayuda a reforzar los conceptos.*

**Tarea 5.1.2**

1. Si $s=\frac{1}{10}t^4-\frac{7}{5}t^3+6t^2$ es la función que da el valor de la posición de un objeto respecto al tiempo, calcula el valor de la velocidad cuando la aceleración es cero.

2. Si $s=\frac{1}{2}t^4-5t^3+12t^2$ es la función que da el valor de la posición de un objeto respecto al tiempo, calcula el valor de la velocidad cuando la aceleración es cero.

3. En los incisos a) y b), un objeto se mueve a lo largo del eje coordenado horizontal de acuerdo a la fórmula $s=f(t)$, donde $s$ está dada en metros y $t$ en segundos. Contesta a las siguientes preguntas para cada inciso:

   i) ¿Cuándo es negativa la velocidad?

   ii) ¿Cuándo es positiva la velocidad?

   iii) ¿Cuándo es negativa la aceleración?

   iv) Haz una gráfica que represente el movimiento del objeto.

   a) $s=12t-2t^2$

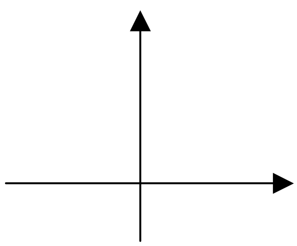
   b) $s=t^3-9t^2+24t$

# Sección 5.2

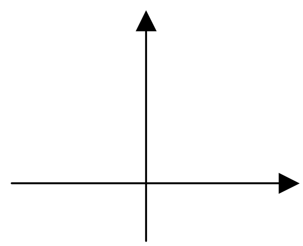
# Función creciente y decreciente

**Ejercicio 5.2.1**

Dibuja una función creciente y una decreciente. No usar rectas.

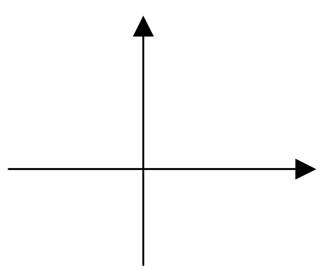


Creciente
(Gráfica 1)



Decreciente
(Gráfica 2)

Dibuja una función que en un intervalo sea creciente y en otro sea decreciente.



(Gráfica 3)

Si $f$ es creciente en $(a,b)$ y $x_1, x_2 \in (a,b)$ son tales que $x_1 < x_2$, compara $f(x_1)$ con $f(x_2)$ ___________

Traza 3 tangentes en la Gráfica 1 anterior.

¿Qué relación tienen las 3 tangentes? ___________________

**_Discusión_**

- *Es un ejercicio que ayuda a definir cuándo una función es creciente y cuándo es decreciente.*
- *La siguiente información no se le tiene que decir a los estudiantes, es por si alguno se da cuenta y pregunta. La propiedad que van a usar para determinar los intervalos en donde la función es creciente y decreciente es usando la primera derivada por lo tanto se darán las definiciones en intervalos abiertos.*
- *En la discusión de función creciente llegar a:*

  *La función $f$ es creciente en $(a,b)$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$.*

  *La función $f$ es creciente en $(a,b)$ si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$.*

- *Se espera que puedan "decir" ambas cosas de función creciente. En la discusión, escribir la definición formal de función creciente y la propiedad.*

Si $f$ es decreciente en $(a,b)$ y $x_1, x_2 \in (a,b)$ son tales que $x_1 < x_2$, compara $f(x_1)$ con $f(x_2)$ __________

Traza tres tangentes en la Gráfica 2.

¿Qué relación tienen las 3 tangentes? ___________________

**_Discusión_**

- *Análogo para la función decreciente.*
- *Para las gráficas que se piden a continuación, la idea es que puedan mostrar en cuáles intervalos la función es creciente y en cuáles, decreciente. La gráfica en sí no es tan importante.*

**Ejercicio 5.2.2**

Encuentra dónde es creciente y dónde decreciente la función $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ y grafícala.

**Tarea 5.2.1**

Encuentra dónde es creciente y dónde es decreciente cada una de las funciones siguientes y grafícalas:

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + 15$

2. $g(x) = x^3$

3. $h(x) = \frac{1}{x+1}$

4. $l(x) = 5x - x^2$

5. $k(x) = \sqrt{x}$

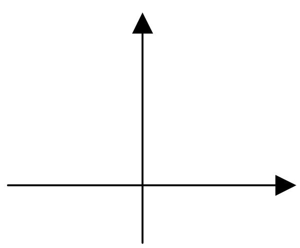
6. $j(x) = 2x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 6$

# Sección 5.3

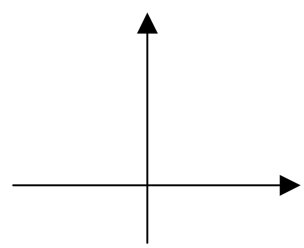
# Concavidad

**Ejercicio 5.3.1**

Dibuja una función que sea cóncava hacia arriba y otra cóncava hacia abajo.

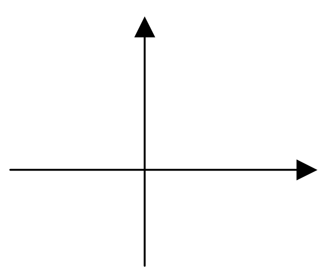


Cóncava hacia arriba
(Gráfica 4)



Cóncava hacia abajo
(Gráfica 5)

Dibuja una función que en un intervalo sea cóncava hacia arriba y en otro sea cóncava hacia abajo.



(Gráfica 6)

Dibuja varias rectas tangentes a lo largo de la Gráfica 4.

¿Qué les pasa a las pendientes de las tangentes que graficaste si las tomas de izquierda a derecha? ____________________

Puesto que $f'(x_0)$ es la pendiente de la tangente en $x_0$, ¿cómo es $f'(x)$? __________

***Discusión***

- *El ejercicio es para definir intuitivamente la concavidad.*
- *Buscamos que la respuesta de la pregunta "¿Cómo es $f'$?" sea que es creciente. Detenerse aquí para revisar que hayan contestado correctamente.*
- *La característica de la que se habla abajo es $f''(x) > 0$.*
- *Escribir el criterio de concavidad hacia arriba:*

  *La función $f$ es cóncava hacia arriba en $(a,b)$ si $\forall x \in (a,b)$ se cumple que $f''(x) > 0$.*
- *Se deja para ellos el desarrollo del criterio de concavidad hacia abajo.*

Aplica la definición de creciente o decreciente a $f'$ dependiendo de tu respuesta a la pregunta anterior.

Escribe el criterio para que $f$ sea cóncava hacia abajo.

***Discusión***

- *Dar el criterio de concavidad hacia abajo usando los intervalos donde la primera derivada es decreciente.*

  *$f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(a,b)$ si $f'$ es decreciente en $(a,b)$*

  *$f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(a,b)$ si $f''(x) < 0$ para toda $x \in (a,b)$*

**Ejercicio 5.3.2**

Encuentra dónde es cóncava hacia arriba y dónde cóncava hacia abajo la función $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$.

Evalúa la segunda derivada de $f$ en el punto donde la función cambia de concavidad.

Si $f$ es continua en $c$ y en el punto $(c, f(c))$ $f$ cambia de concavidad, entonces el punto $(c, f(c))$ se llama ***punto de inflexión***.

***Discusión***

- *Además de encontrar la concavidad, se pide que calculen el valor de $f''$ en los puntos donde cambia la concavidad.*
- *Se definen después los puntos de inflexión.*
- *Discutir el hecho de que si $x_0$ es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$, pero hay funciones para las cuales $f''(x_0) = 0$ y $x_0$ no es punto de inflexión. Se puede discutir el caso de $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^4$.*
- *Hacer notar que para que un punto sea punto de inflexión es necesario que sea parte del dominio. Discutir el caso en el que $x = x_0$ es asíntota vertical y la función cambia de concavidad. Aquí no hay punto de inflexión, pues $x_0 \notin D_f$.*

**Ejercicio 5.3.3**

Usa los resultados del Ejercicio 5.2.2 y 5.3.2 para hacer un esbozo de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$.

¿Qué datos necesitarías para elaborar una gráfica más precisa?

***Discusión***

- *En la discusión, resolver el ejercicio de tal manera que se muestre una organización sistemática de los datos.*
- *La pregunta sobre la forma de conseguir mayor precisión apunta hacia el uso de los valores máximos y mínimos locales. No usar el concepto de derivada aún.*
- *Sustituir en $f$ los valores donde la función cambia de creciente a decreciente o viceversa y discutir su significado (por qué son los máximos y mínimos locales).*
- *Discutir la inconveniencia de tabular para obtener la gráfica de una función. En todo caso, discutir qué puntos son indispensables para graficar una función de manera más precisa y cómo encontrarlos.*

**Tarea 5.3.1**

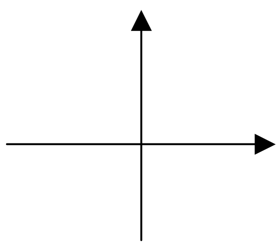
Encuentra dónde es cóncava hacia arriba y dónde cóncava hacia abajo cada una de las funciones de la Tarea 5.2.1, excepto en el ejercicio 6), y grafícalas utilizando también la información que obtuviste en la Tarea 5.2.1.

# Sección 5.4

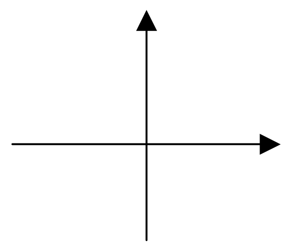
# Máximos y mínimos

**Ejercicio 5.4.1**

Dibuja una función que tenga un máximo y una que tenga un mínimo:

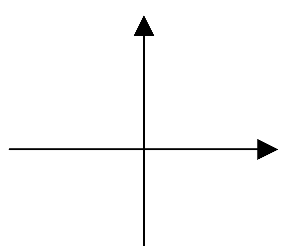


Máximo
(Gráfica 1)



Mínimo
(Gráfica 2)

Dibuja una función que tenga un máximo y un mínimo:



(Gráfica 3)

Traza las tangentes en los máximos y mínimos de las tres gráficas.

¿Qué tienen en común todas estas tangentes? ____________________________

¿Cuánto vale la pendiente en cada recta tangente? _____________________

¿Esto pasará para todas las rectas tangentes en máximos y mínimos? _______
¿Por qué? ______________________________________________________

Escribe esta característica en términos de la primera derivada:

***Discusión***

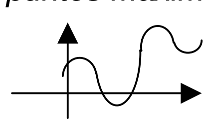
- *Revisar que la característica esté correcta:* $f'(x_0)=0$ *si en* $x_0$ *hay un punto máximo o un punto mínimo.*
- *Discutir la diferencia entre punto máximo o mínimo con valor máximo o mínimo. Punto máximo es el punto del dominio y valor máximo es la ordenada del punto máximo. (Igual para mínimos)*

**Ejercicio 5.4.2**

Da los puntos máximos y mínimos de la función $f(x)=\frac{3}{2}x^4-2x^3-18x^2+14$ :

***Discusión***

- *Se espera que lleguen a decir quién es el punto máximo y el punto mínimo. Normalmente esto lo hacen encontrando las raíces de la primera derivada, sustituyéndolas en la función y deciden erróneamente que el que tiene mayor imagen es el máximo.*
- *Para esto se puede mostrar como ejemplo una gráfica del tipo siguiente, en la cual el valor de la ordenada de algunos de los "puntos mínimos" sea mayor que la de alguna de los " puntos máximos".*



- *La idea es que se den cuenta de que las herramientas que tienen hasta ahora no son suficientes para determinar cuál es el máximo y cuál el mínimo. Es más podría uno de los puntos críticos no ser ni punto máximo ni mínimo sino punto de inflexión.*
- *Discutir sobre la localidad de los puntos máximos y mínimos para que vean que puede haber más de uno de cualquiera de ellos.*

## Criterio de la primera derivada

¿Cómo es la pendiente de las rectas tangentes en puntos que están a la izquierda de un punto máximo? ___________________

¿Cómo es la pendiente de las rectas tangentes en puntos que están a la derecha de un punto máximo? ___________________

¿Será éste un comportamiento de las pendientes de las rectas tangentes alrededor de los puntos máximos de cualquier función? ______ ¿Por qué? _____________________

¿Cómo es la pendiente de las rectas tangentes en puntos que están a la izquierda de un punto mínimo? ___________________

¿Cómo es la pendiente de las rectas tangentes en puntos que están a la derecha de un punto mínimo? ___________________

¿Será éste un comportamiento de las pendientes de las rectas tangentes alrededor de los puntos mínimos de cualquier función? ______ ¿Por qué? ______________________

Escribe el criterio de la primera derivada para puntos máximos:

Escribe el criterio de la primera derivada para puntos mínimos:

***Discusión***

- *Revisar los criterios:.*
- $x_0$ *es un punto máximo si* $f'(x) > 0$ *para puntos cercanos a la izquierda de* $x_0$*, y* $f'(x) < 0$ *para puntos cercanos a la derecha de* $x_0$*.*
- $x_0$ *es un punto mínimo si* $f'(x) < 0$ *para puntos cercanos a la izquierda de* $x_0$*, y* $f'(x) > 0$ *para puntos cercanos a la derecha de* $x_0$*.*

**Ejercicio 5.4.3**

Da los máximos y mínimos de la función $f(x) = -3x^5 + 5x^3$. Usa el criterio de la primera derivada para identificarlos.

***Discusión***

- *Revisar el ejercicio.*
- *Discutir que no siempre que $f'(x) = 0$ se tiene un punto máximo o un punto mínimo. Discutir el caso de $x = 0$ en el caso anterior.*
- *Insistir en que los puntos donde se tiene que $f'(x) = 0$ son los posibles puntos donde puede haber puntos máximos o mínimos.*
- *<u>Definir punto crítico</u>: El punto $x_0$ es punto crítico de $f$ si $f'(x) = 0$.*

**Tarea 5.4.1**

Da los puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones usando el criterio de la primera derivada.

1. $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

2. $g(x) = 6x^4 - 2x^3 - 3x^2$

## Criterio de la segunda derivada

### Ejercicio 5.4.4

Da un intervalo pequeño que contenga a la abscisa de un punto mínimo del ejercicio anterior. _________

¿Cómo es la concavidad en ese intervalo? _______________

¿Este tipo de concavidad será una característica de todos los intervalos que contengan puntos mínimos? _________

Si tomas cualquier punto del intervalo que usaste y evalúas la segunda derivada en él, ¿el resultado es positivo o negativo? _____________

En particular, la segunda derivada evaluada en el punto mínimo es ____________

¿Cambiará el signo de la segunda derivada si se cambia el intervalo usado? ________

Da un intervalo pequeño que contenga a la abscisa de un punto máximo del ejercicio anterior. _________

¿Cómo es la concavidad en ese intervalo? _______________

¿Este tipo de concavidad será una característica de todos los intervalos que contengan puntos máximos? __________

Si tomas cualquier punto del intervalo que usaste y evalúas la segunda derivada en él, ¿el resultado es positivo o negativo? _____________

En particular, la segunda derivada evaluada en el punto máximo es ___________

¿Cambiará el signo de la segunda derivada si se cambia el intervalo usado? ________

Escribe el criterio de la segunda derivada para puntos mínimos:

Escribe el criterio de la segunda derivada para puntos máximos:

***Discusión***

- *Revisar que expresen correctamente el criterio de la segunda derivada.*
- $x_0$ *es un punto máximo si* $f''(x_0) < 0$, *siempre y cuando* $x_0$ *sea punto crítico de* $f$.
- $x_0$ *es un punto mínimo si* $f''(x_0) > 0$, *siempre y cuando* $x_0$ *sea punto crítico de* $f$.

**Ejercicio 5.4.5**

Encuentra los puntos máximos y mínimos de la función $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ usando el criterio de la segunda derivada.

***Discusión***

- *Revisar el ejercicio y discutir lo que pasa en* $x = 0$:
  - *Como* $f'(0) = 0$, *entonces* $x = 0$ *es un punto crítico.*
  - *Como* $f''(0) = 0$, *entonces el criterio no permite saber si en* $x = 0$ *hay un máximo o un mínimo.*
  - *Hacer notar que en* $x = 0$ *hay cambio de concavidad; es decir, es un punto de inflexión.*

**Tarea 5.4.2**

Encuentra los puntos máximos y mínimos usando el criterio de la segunda derivada para las funciones:

1. $f(x) = x^3$

2. $g(x) = x^4$

***Discusión***

- *Revisar los dos ejercicios de tarea y hacer notar que si $f''(x_0) = 0$, el criterio de la segunda derivada no sirve para concluir si $x_0$ es máximo, mínimo.*

**Tarea 5.4.3**

Encuentra los puntos máximos, puntos mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y grafícalas:

1. $f(x) = 3x^4 + 4x^3$
2. $g(x) = x^5 - 5x$
3. $j(x) = 6x - x^2$
4. $l(x) = 5 + 3x^2 - x^3$
5. $h(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$
6. $k(x) = (x-5)^2$

# Sección 5.5

# Trazo de gráficas

**Ejercicio 5.5.1**

Traza la gráfica de $f(x)=\dfrac{3x^5-20x^3}{32}$. Antes de hacer la gráfica completa el siguiente cuadro:

Dominio: ___________________

Intersección con el eje X: __________________

Intersección con el eje Y: __________________

Discontinuidades: __________________

Asíntotas verticales: ________________

Asíntotas horizontales: ________________

$f'(x)=$ __________________

Puntos críticos: ______________________

$f''(x)=$ _______________________

Puntos de inflexión: ____________________

Máximos: __________________

Mínimos: __________________

| Intervalo | Intervalos donde $f$ es Creciente o Decreciente | Concavidad (Arriba/Abajo) |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

***Discusión***

- *Revisar el ejercicio con ellos.*
- *Hacer notar que debe existir coherencia entre los datos del cuadro y la gráfica.*

**Ejercicio 5.5.2**

Traza la gráfica de $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$. Elabora un cuadro análogo al del Ejercicio 5.5.1.

***Discusión***

- *Revisar el ejercicio con ellos.*
- *Apoyar con el álgebra. Sugerir que simplifiquen la primera derivada para que el cálculo de la segunda no sea complicado.*

**Tarea 5.5.1**

Elabora un cuadro análogo al del Ejercicio 5.5.1 como apoyo para trazar la gráfica de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^4 + 4x^3$
2. $g(x) = x^3 - x$
3. $j(x) = \dfrac{3x}{(x+8)^2}$
4. $h(x) = x^4 - 2x^2$
5. $l(x) = 5 - 7x$
6. $k(x) = \dfrac{x^4 + 3}{2x}$

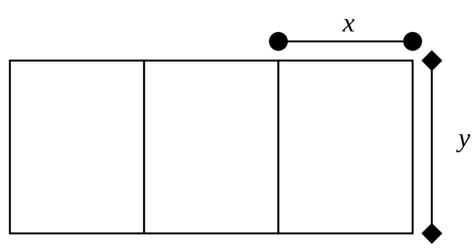
# Sección 5.6

# Problemas de Optimización

## Ejercicio 5.6.1

Resuelve el siguiente problema:

Un granjero necesita construir 3 corrales adyacentes, cada uno de $5{,}400m^2$, como se muestra en la figura. ¿Cuánto deben medir $x$ e $y$ para utilizar la menor cantidad de material? (10 min)



***Discusión***

- *Revisar lo que hicieron.*
- *Si nadie usó la derivada, sugerir su uso a través de preguntas.*
- *Solución:* $x = 60m, \quad y = 90m$

**Ejercicio5.6.2**

Se desea construir una caja de base cuadrada que tenga $1m^3$ de volumen. Encuentra las dimensiones que hagan que la cantidad de material para su construcción sea mínima.

***Discusión***

- *El problema está pensado de tal manera que la caja tiene tapa.*
- *Revisar que lo resuelvan correctamente.*
- *Solución: cubo de arista 1m.*

**Tarea 5.6.1**

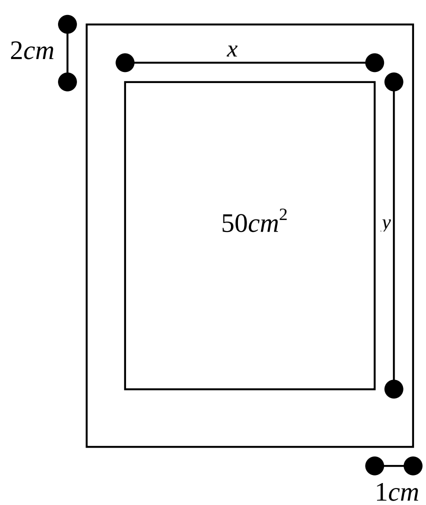
1. Se desea construir una ventana con 5*m* de barras de aluminio, que tenga la forma de un semicírculo sobrepuesto a un rectángulo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la ventana para que tenga área máxima?

2. Encuentra dos números reales cuya diferencia sea 40 y su producto sea mínimo.

3. Se desea construir una caja con base cuadrada, sin tapa, que tenga $4m^3$ de volumen. Encuentra las dimensiones que hagan que la cantidad necesaria de material para su construcción sea mínima.

4. Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal, sin tapa, que tenga capacidad de $1m^3$. Encontrar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material necesario sea mínimo.

5. Una página debe contener $50cm^2$ de impresión, los márgenes superior e inferior tienen un ancho de 2*cm*, los márgenes laterales tienen 1*cm* de ancho. Encontrar las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel. Usa la siguiente figura:




6. Un cable de 100cm de longitud es cortado en dos piezas. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Dónde debe hacerse el corte para que la suma de las dos áreas sea máxima? ¿Y dónde debe hacerse para que la suma de las dos áreas sea mínima?

7. Calcula la distancia más corta desde el punto $A(0, 4)$ a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ y encuentra las coordenadas del punto en la curva que esté más cerca de $A$.

# CAPÍTULO 6

# LA ANTIDERIVADA Y SUS APLICACIONES

OBJETIVOS:

- Resolver problemas sencillos con ecuaciones diferenciales.
- Encontrar y aplicar la antiderivada de funciones polinomiales.

En los capítulos anteriores hemos resuelto una variedad de problemas utilizando la información obtenida a partir de una función conocida y su derivada. Así, por medio de la primera derivada podemos saber si la función es creciente o decreciente y, por medio de la segunda, encontramos la concavidad. ¿Se podrá partir al revés? Esto es, ¿se podrá conocer la función o sus propiedades conociendo únicamente la forma en la que cambia? Existen situaciones en las que se conoce justamente la rapidez de cambio de una cantidad en función de otra. Algunos ejemplos son:

- Se puede saber la tasa de crecimiento de una población a pesar de que no conozcamos el número de habitantes.
- Se puede conocer la razón a la que se debastan los bosques diariamente, sin conocer la superficie que ocupan los bosques en el planeta.
- Podemos conocer, también, la rapidez de asimilación o de desecho de un medicamento en el organismo. Esto es indispensable para calcular las dosis y el lapso entre una toma y la siguiente.

A las ecuaciones que involucran derivadas se les llama *ecuaciones diferenciales*. Como ejemplo, incluimos la ecuación que permite calcular la población de la primera situación:

$$P'(t) = kP(t)$$

Donde $P(t)$ representa la población en el tiempo $t$, $P'(t)$ la razón de cambio de la población en el tiempo $t$ y $k$ la taza de crecimiento de la población.

Escribe un ejemplo de ecuación diferencial.

**Ejercicio 6.1.1**

La cabellera de Sansón mide 20 cm y tiene una rapidez de crecimiento constante de 1.2 cm mensuales. Si $L$ es la longitud del cabello de Sansón, encuentra una ecuación que represente la situación anterior

| **Discusión** |
|---|
| ▪ *Verificar que la ecuación planteada sea algo del tipo* $L'(t)=1.2$ *para poder continuar con el ejercicio.* |
| ▪ *Hacer explícito que la derivada de* $L$ *es respecto a* $t$ *(el tiempo).* |

Encuentra una función que al derivarla obtengas como resultado la constante 1.2.

¿Habrá otra? __________ ¿Cuál? ______________

¿Qué función proporciona la longitud del cabello de Sansón? _________________

¿Cuál es la razón de cambio de esta función? ______________

¿Cuántos meses tiene que esperar Sansón para tener una cabellera de 48 cm?

Verifica, usando la función que proporciona la longitud del cabello de Sansón, que el largo el día de hoy es de 20 cm.

Si al verificar encontraste alguna incongruencia, ajusta tu función para obtener el resultado correcto.

Si realizaste algún cambio, verifica que la razón de cambio de esta nueva función sea la correcta.

***Discusión***

- *Discutir qué significa resolver una ecuación diferencial.*
- *Discutir que hay "varias" soluciones de una ecuación diferencial y que lo que las distingue es la condición inicial.*

**Ejercicio 6.1.2**

Encuentra $f$ tal que $f'(x)=\pi$.

Encuentra otra función que cumpla con $f'(x)=\pi$.

Encuentra una función que cumpla con $f'(x)=\pi$ en la que $f(2)=7\pi$.

Escribe la forma que debe tener una función para que cumpla con $f'(x)=\pi$.

***Discusión***

- *Discutir que la familia de funciones $f(x)=kx+c$ son solución de $f'(x)=k$.*
- *Definir antiderivada: Llamamos antiderivada de $f$ a la función $F$ que cumple que $F'(x)=f(x)$.*

**Tarea 6.1.1**

Completa la siguiente tabla considerando que las derivadas de $f_1$ y $f_2$ son iguales a $f\,'$.

| $f\,'$ | $f_1$ | $f_2$ | Forma general de $f$ |
|---|---|---|---|
| $f\,'(x)=8$ | | | |
| | | $f(x)=471x-9$ | |
| | $f(x)=17x+1$ | | |
| | | | $f(x)=2x+c$ |
| $f\,'(x)=0$ | | | |
| $f\,'(x)=-6$ | | | |

**Ejercicio 6.1.3**

Encuentra $f$ tal que $f\,'(x)=2x$.

Encuentra la forma general de $f$ tal que $f\,'(x)=2x$.

**Ejercicio 6.1.4**

Encuentra una antiderivada de $f(x)=5x$.

Encuentra la forma general de la antiderivada de $f(x)=5x$.

**Ejercicio 6.1.5**

Encuentra la forma general de $f$ tal que $f'(x) = kx$.

**Ejercicio 6.1.6**

Encuentra $f$ tal que $f'(x) = 3x^2$.

**Ejercicio 6.1.7**

Encuentra la forma general de la antiderivada de $f(x) = 7x^2$.

**Ejercicio 6.1.8**

Encuentra la forma general de $f$ tal que $f'(x) = kx^2$.

**Ejercicio 6.1.9**

Encuentra la forma general de $f$ tal que $f'(x) = kx^3$.

**Ejercicio 6.1.10**

Encuentra la antiderivada general de $f(x) = kx^n$.

**Ejercicio 6.1.11**

Encuentra una antiderivada de $f(x) = 7x^5 - x^9 + 4x + 6x^3 + 2$.

**Ejercicio 6.1.12**

Encuentra la forma general de la antiderivada de $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$.

**Ejercicio 6.1.13**

Si $C$ y $F$ denotan la temperatura en grados Celsius y Fahrenheit, respectivamente, entonces la razón de cambio de $F$ con respecto a $C$ está dada por $\frac{dF}{dC} = \frac{9}{5}$. Sabemos que $F = 32$ cuando $C = 0$. Usando antiderivadas, encuentra una ecuación para $F$ en términos de $C$.

| |
|---|
| *Discusión*<br>▪ *Dar un "cierre global" con discusión formal en donde se defina antiderivada y se explique cómo encontrar antiderivadas de polinomios.*<br>▪ *Revisar todos los ejercicios que hicieron.* |

**Tarea 6.1.2**

1. Completa la siguiente tabla de manera similar a la de la Tarea 6.1.1

| $f'$ | $f_1$ | $f_2$ | Antiderivada general |
|---|---|---|---|
| $f'(x)=6x^2-1$ | | | |
| | $f(x)=3x^7-9x+8$ | | |
| | | $f(x)=6x^5-9x^8+1$ | |
| | $f(x)=x^{20}-\frac{1}{2}x^4$ | | |
| $f'(x)=\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{6}x^8$ | | | |
| $f'(x)=x^7-x^6+x^5-x^4+x^3$ | | | |
| | | | $f(x)=14x^7-9x^2+x^4+c$ |

2. Encuentra la antiderivada de la función indicada que cumpla con la condición que se pide.

   a) $f(x)=4x$ $\qquad F(0)=-3$

   b) $g(x)=6x-\frac{8}{3}$ $\qquad G(1)=-\frac{1}{3}$

   c) $h(x)=7x^9-8x^7+1$ $\qquad H(1)=\frac{7}{10}$

3. Supón que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en el punto $P(x,y)$ es igual a dos veces el valor de la abscisa de $P$. Encuentra la función de tal manera que cumpla con $f(1)=2$.

4. Cuando una enfermedad contagiosa se propaga, por ejemplo, el virus de la gripe o influenza, es razonable suponer que la rapidez $\frac{dX}{dt}$ con la cual la enfermedad se propaga es proporcional al número de personas $X(t)$ que han contraído la enfermedad. Escribe la ecuación diferencial que describe una propagación de este tipo.

5. Plantea la ecuación diferencial que describe la caída libre de un objeto cercano a la superficie terrestre (considera que el valor de la atracción gravitatoria es constante). Para esto, recuerda que la 2ª ley de Newton es $F = ma$ y que la aceleración es la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo.

   a) Si la velocidad inicial del objeto en $t_0 = 0$ es $v_0 = 0$, calcula la velocidad que tendrá después de $t = 3s$.

   b) Si la posición inicial del objeto en $t_0 = 0$ es $y_0 = 50m$ y la velocidad inicial es $v_0 = 10\, m/s$, encuentra la altura a la que se hallará en $t = 3s$.

# CAPÍTULO 7

# LA ANTIDERIVADA COMO ÁREA BAJO UNA CURVA

Sección 7.1. Área bajo curvas.
Sección 7.2. Tabla de antiderivadas sencillas.
Sección 7.3. Área entre dos curvas.

OBJETIVOS:

- Elaborar una primera tabla de antiderivadas para aplicarlas al cálculo de áreas bajo curvas y al cálculo de integrales.
- Calcular área entre una curva y el eje X.
- Calcular área entre dos curvas

# Sección 7.1

# Área bajo curvas

**Ejercicio 7.1.1**

Calcula el valor exacto del área bajo la gráfica de la parábola $f(x) = 4x - x^2$ y el eje X, entre los puntos $x = 0$ y $x = 4$.

***Discusión***

- *La idea es que se den cuenta que aún no tienen los elementos para responder.*
- *Tener cuidado de que no se tomen mucho tiempo en este problema.*

**Ejercicio 7.1.2**

a) Calcula el valor exacto del área entre la gráfica de $g(x) = 5$ y el eje X, entre los puntos $x = 3$ y $x = 7$. Grafica antes de calcular el área.

b) Calcula el valor exacto del área entre la gráfica de $g(x)=5$ y el eje X, entre los puntos $x=0$ y $x=3$.

c) Calcula el valor exacto del área entre la gráfica $g(x)=5$ y el eje X, en el intervalo $[0, 7]$.

d) Calcula el valor exacto del área entre la gráfica de $g(x)=5$ y el eje X, en el intervalo $[0, x]$.

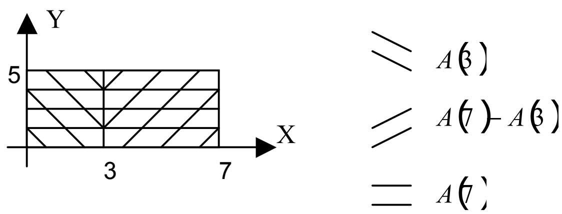
e) ¿Qué representa este resultado? ______________________

En términos de la función $A(x)$ que encontraste en el inciso d), escribe los resultados de a), b) y c).

***Discusión***

- *Verificar los resultados:*
  - *a)* *20*
  - *b)* *15*
  - *c)* *35*
  - *d)* $A(x) = 5x$
  - *e)* *a)* $A(7) - A(3)$ *;* *b)* $A(3)$*;* *c)* $A(7)$

- *Discutir el significado del menos en la solución a) del inciso e) usando el esquema:*




- *Llamar a la solución del inciso d) "función área bajo la curva" y discutir que con ella se obtiene la solución de cualquier área bajo la gráfica de* $g(x) = 5$ *.*

**Ejercicio 7.1.3**

a) Calcula el área entre el eje X y la gráfica de la función $h(x) = x$ en el intervalo $[0, 9]$.

b) Calcula el área entre el eje X y la gráfica de la función $h(x) = x$ en el intervalo $[0, 12]$.

c) Calcula el área entre el eje X y la gráfica de la función $h(x) = x$ en el intervalo $[9, 12]$.

d) Calcula el área entre el eje X y la gráfica de la función $h(x) = x$ en el intervalo $[0, x]$.

e) En términos de la función $A(x)$ que encontraste en el inciso d), escribe los resultados de a), b) y c).

**Ejercicio 7.1.4**

a) Calcula el área entre el eje X y la gráfica de la función $k(x) = 4x + 2$ en el intervalo $[0, 5]$.

b) Calcula el área entre el eje X y la gráfica de la función $k(x) = 4x + 2$ en el intervalo $[0, 3]$.

c) Calcula el área entre el eje X y la gráfica de la función $k(x) = 4x + 2$ en el intervalo $[3, 5]$.

d) Calcula el área entre el eje X y la gráfica de la función $k(x) = 4x + 2$ en el intervalo $[0, x]$.

e) En términos de la función $A(x)$ que encontraste en el inciso d), escribe los resultados de a), b) y c).

| |
|---|
| ***Nota para el profesor:*** <br> ▪ *Revisar los ejercicios anteriores.* |

**Tarea 7.1.1**

Calcula el área entre el eje X y la gráfica de las funciones indicadas en los intervalos $[0, 6]$, $[0, 8]$, $[6, 8]$ y $[0, x]$.

1. $f(x) = 10$

2. $l(x) = 20 - 2x$

3. $p(x) = 4x$

**Ejercicio 7.1.5**

Completa la siguiente tabla:

| Función | Función “área bajo la curva” | Antiderivada |
|---|---|---|
| $g(x) = 5$ | | |
| $h(x) = x$ | | |
| $k(x) = 4x + 2$ | | |
| $f(x) = 10$ | | |
| $l(x) = 20 - 2x$ | | |
| $p(x) = 4x$ | | |

Con base en la tabla anterior, explica cuál sería el procedimiento para encontrar el área bajo una curva.

Resuelve el Ejercicio 7.1.1

***Discusión***

- *Revisar la tabla con ellos y mencionar que en la columna de antiderivadas se podían escribir funciones diferentes. Discutir este caso con ellos.*
- *Concluir que el área bajo la gráfica de* $f(x)$ *en* $[a, b]$ *se obtiene al evaluar* $F(b) - F(a)$ *en donde* $F$ *es una antiderivada o primitiva de* $f$ *.*
- *Comprobar que no importa cuál antiderivada usen el resultado del área es el mismo.*
- *Mencionar que el punto anterior se cumple para cualquier función* $f$ *a pesar de que no haya métodos geométricos para calcular el área.*

**Ejercicio 7.1.6**

Calcula el área entre el eje X y la gráfica de $f(x) = 1 - 7x$ en el intervalo $[2, 6]$.

***Discusión***

- *Discutir que el área es una cantidad positiva y que si se calcula como se ha hecho hasta este momento, en ejercicios como el anterior el resultado dará negativo. Preguntar posibles propuestas para resolver casos como este con la finalidad de concluir que, si la gráfica queda bajo el eje X, es necesario tomar el valor absoluto del cálculo con la antiderivada.*

**Ejercicio 7.1.7**

Calcula el área entre el eje X y la gráfica de $f(x) = 1 - x$ en el intervalo $[-1, 2]$.

***Discusión***

- *Explicar que se debe partir el intervalo cuando una parte del área que se busca queda por arriba y otra por debajo del eje X. Como la parte que queda por debajo del eje X es negativa se toma el valor absoluto y a esta cantidad se le suma la de la parte que queda por arriba para obtener el área. Se podría encontrar el área sumando los valores absolutos de las dos partes.*

**Tarea 7.1.2**

Calcula el área entre el eje X y la gráfica de:

1. $f(x)=1$ en $[1,\ 1.1]$
2. $g(x)=x^7$ en $[2,\ 3]$
3. $h(x)=5x^2$ en $[-3,-1]$
4. $l(x)=-5x^2$ en $[-3,-1]$
5. $j(x)=x^3$ en $[-2,\ 4]$
6. $i(x)=x^5$ en $[-2,\ 2]$
7. $p(x)=6x^4+2x^3+8$ en $[-1,\ 2]$
8. $q(x)=x(x+1)$ en $[0,\ 3]$

# Sección 7.2

# Tabla de antiderivadas sencillas

**Ejercicio 7.2.1**
Completa la siguiente tabla.

| $f$ | $F$ |
|---|---|
| $f(x) = -8$ | |
| $f(x) = 6x$ | |
| $f(x) = -\frac{2}{9} + \frac{5}{4}x$ | |
| $f(x) = 3x^2$ | |
| $f(x) = 4x - 5x^2$ | |
| $f(x) = \frac{2}{3}x^9 - \frac{4}{7}x^2 - 40x^7 - x^{20} + \frac{3}{8}$ | |
| $f(x) = x^{-4}$ | |
| $f(x) = x^{-3} + \frac{8}{x^5}$ | |
| $f(x) = 6x^{5/4}$ | |
| $f(x) = -8\sqrt[4]{x^3}$ | |
| $f(x) = \frac{7}{4}x^{2/3} - \pi x^4 + \frac{8}{3}x^{-1/2} + 2\sqrt[9]{x^6}$ | |
| $f(x) = x^{-1}$ | |

***Discusión***

- *Revisar la tabla con ellos y discutir el caso de $f(x) = x^{-1}$, pues si se aplica la regla que se ha usado hasta el momento se terminaría dividiendo entre cero. Concluir que aún no se tienen los elementos para resolver esta antiderivada.*

**Ejercicio 7.2.2**
Escribe las reglas generales que usaste para completar las tablas anteriores.

***Discusión***

- *Revisar que hayan escrito como reglas:*

  *Regla 1:* $f(x)=ax^n \qquad F(x)=\frac{a}{n+1}x^{n+1}$ *Regla 2:* $h(x)=f(x)+g(x) \qquad H(x)=F(x)+G(x)$

- *Discutir que la Regla 1 engloba todos los casos de exponentes: fraccionarios, negativos y positivos excepto cuando* $n=-1$
- *Discutir la Regla 2 y escribirla como aquí se da.*

**Tarea 7.2.1**

Completa la siguiente tabla.

| $f$ | $F$ |
|---|---|
| $f(x)=15$ | |
| $f(x)=-\frac{1}{4}$ | |
| $f(x)=2-7x$ | |
| $f(x)=-8x^2$ | |
| $f(x)=2+6x+9x^2$ | |
| $f(x)=\frac{6}{5}x^{-2}$ | |
| $f(x)=\frac{4}{\sqrt[5]{x^7}}$ | |
| $f(x)=\frac{6}{\sqrt[4]{x^9}}-8x^7-\frac{3}{8}x^{2/7}$ | |

# Sección 7.3

# Área entre dos curvas

**Ejercicio 7.3.1**

Calcula el área de la región limitada por las gráficas de $f(x)=x^2$ y $g(x)=5x$.
Antes de iniciar los cálculos, grafica las dos funciones, determina el área que se te pide y encuentra los dos puntos de intersección.

**Discusión**

- Revisar el Ejercicio con ellos.

**Ejercicio 7.3.2**

Calcula el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ y $g(x) = 2x - 7$.

***Discusión***

- *Hacer notar y demostrar que, a pesar de que una parte de la región limitada está por debajo del eje X, el área queda determinada por la resta del área limitada por* $f(x)$ *menos el área limitada por* $g(x)$, *sin tener que considerar aparte los signos de las antiderivadas.*

**Tarea 7.3.1**

Calcula el área de la región limitada por las gráficas de las funciones indicadas.

1. $f(x) = x^4 \quad y \qquad g(x) = x^2$

2. $f(x) = x^3 \quad y \qquad g(x) = 3x$ (Considera sólo la región en el tercer cuadrante)

3. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ , $\qquad g(x) = -\frac{3}{4}x + 6$ y el eje Y.

4. $f(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad y \quad g(x) = -x^2 + 2x + 3$

5. $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = $ -x en el intervalo $[0, 2]$.

6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 \qquad y \qquad g(x) = -x^2 + 3x - 1$

# CAPÍTULO 8

# DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA



OBJETIVOS:

- Revisar el comportamiento de las funciones exponenciales y logarítmicas.
- Conocer las propiedades gráficas y algebraicas de las funciones exponenciales y logarítmicas.
- Ubicar que la función $y = e^x$ sirve como modelo a distintas situaciones de crecimiento y decrecimiento.
- Conocer y aplicar las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas.

# Sección 8.1

# Repaso de funciones exponencial

**Ejercicio 8.1.1**

Traza la gráfica de la función $f(x) = 2^x$ y responde las siguientes preguntas.

¿Cuál es el dominio de $f$ ? ________________

¿Cuál es la imagen de $f$ ? _________________

¿Tiene asíntotas la función $f$ ? ____________ ¿Cuáles? __________________

¿Cuáles son las intersecciones con los ejes de $f(x) = 2^x$ ? __________________________

Da los intervalos donde la función $f(x) = 2^x$ es creciente y donde es decreciente:

_____________________________

Da los intervalos donde la función $f(x) = 2^x$ es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo: ___________________________

Si en lugar de tener $f(x) = 2^x$ usamos $g(x) = 5^x$, ¿cuáles son su dominio y su imagen?

________________ ____________________

Da un argumento de por qué pasa esto:

_______________________________________________________________

_______________________________________________________________

¿Tendrá asíntotas la función $g(x) = 5^x$? _______ ¿Cuáles? _________________

Da un argumento de por qué pasa esto: ______________________________________

¿Cuáles serán las intersecciones con los ejes de $g(x) = 5^x$? ______________________

Da un argumento de por qué pasa esto: ______________________________________

¿En qué intervalos la función $g(x) = 5^x$ será creciente y en cuáles será decreciente?

__________________________

¿ En qué intervalos la función $g(x) = 5^x$ será cóncava hacia arriba y en cuáles será cóncava hacia abajo? __________________________

Escribe las características de $h(x) = a^x$ con $a > 1$ con base en tus respuestas anteriores.

***Discusión***

- *Revisar las características y los argumentos:*
  - $D_h : x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Im}_h : y \in \mathbb{R}^+$.
  - *Intersecciones: no hay con el eje X; El punto* $(0,1)$ *con el eje Y.*
  - *Asíntotas: no hay verticales;* $y = 0$ *horizontal.*
  - *Creciente.*
  - *Cóncava hacia arriba.*

### Ejercicio 8.1.2

Traza la gráfica de $f(x) = -2^x$ sin tabular. Escribe sus características.

***Discusión***

- *Revisar la gráfica y sus características.*
- *Mencionar que* $-2^x \neq (-2)^x$

¿Serán iguales las características de $f(x) = -2^x$ y de $g(x) = -5^x$? ____________

¿Por qué? ____________________________________________________________

### Tarea 8.1.1

1. Traza la gráfica de $f(x)=2^{-x}$ y escribe sus características.

2. Traza las gráficas de las funciones

   a) $P(x)=e^{x}$

   b) $Q(x)=10^{x}$

**_Discusión_**

- *Revisar la tarea en clase.*
- *Aclarar que* $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\frac{1}{2^{x}}=2^{-x}$*, y hacer notar entonces que ya se tiene el análisis de* $h(x)=a^{x}\quad \forall a\in(0,1)\cup(1,\infty)$.
- *Mencionar que la familia de funciones llamada "exponenciales" está formada por las funciones* $h(x)=a^{x}\quad \forall a\in(0,1)\cup(1,\infty)$.
- *Dar las características de una función exponencial (Dominio, imagen, intervalos donde es creciente y donde es decreciente, intersecciones con los ejes, asíntotas, intervalos donde es cóncava hacia arriba y hacia abajo).*
- *Hacer notar que las características del punto anterior se encontraron a partir de las gráficas de este tipo de funciones y sin hacer uso de su derivada.*
- *Hablar de las funciones trascendentes para resaltar que estas funciones no se pueden obtener operando funciones racionales.*
- *Analizar, en el Ejercicio 2 de la Tarea 8.1.1, cuál crece más rápido.*
- *Mencionar que las bases* $e$ *y 10 son las más usadas.*
- *Dar el valor de* $e=2.71828182846...$

### TAREA DE INVESTIGACIÓN 8.1.2

Calcula $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

**Nota para el profesor:**

- La tarea es opcional.

**Ejercicio 8.1.3**

Escribe las propiedades algebraicas de la función exponencial y justifícalas.

***Discusión***

- *Las propiedades son, para* $n, m \in \mathbb{R}$*:*

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \qquad (a^n)^m = a^{nm},$$

$$a^0 = 1, \qquad a^n b^n = (ab)^n, \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- *En particular, las propiedades se cumplen para* $a = e$

- *Revisar las justificaciones*

**Tarea 8.1.3**

Usando las propiedades anteriores, encuentra las equivalencias de:

1. $\left(a^{2}\right)^{-3} =$

2. $\dfrac{b^{8}}{\left(b^{3}\right)^{4}} =$

3. $\dfrac{a^{-7}}{a^{-5}} =$

4. $a^{6}b^{6} =$

5. $a^{5}b^{5}c^{5} =$

6. $\dfrac{\left(a^{-5}\right)^{-2}}{a^{10}} =$

7. $\dfrac{(4572)^{97}}{(2754)^{97}} =$

8. $\dfrac{b^{-24}}{\left(c^{3}\right)^{-8}} =$

9. $(57892714692)^{0} =$

10. $\dfrac{(5x+3)^{5}}{(5x+3)^{7}} =$

# Sección 8.2

# Repaso de función logarítmica

**Ejercicio 8.2.1**

Traza la gráfica de la función $f(x) = \log_2 x$

Anota las características de la función logarítmica anterior:

- Dominio:
- Rango:
- Discontinuidades:
- Asíntotas:
- Intersecciones con los ejes:
- Intervalos donde es creciente y donde es decreciente:
- Intervalos donde es cóncava hacia arriba y hacia abajo:
- $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x =$
- $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x =$

***Discusión***

- *Revisar y discutir las características de la función logarítmica.*
- *Tener cuidado de que consideren el caso* $a > 1$ *creciente y* $0 < a < 1$ *decreciente.*
- *Dar la relación de la función logaritmo y exponencial*

  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ $\quad$ $\log_2 x = y \Leftrightarrow 2^y = x$ $\quad$ $\log_{10} x = \log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$

  $\log_e x = \ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$

- *Mencionar que* $\log_a x$ *y* $a^x$ *son funciones inversas, se puede hacer referencia a que* $x^2$ *y* $\sqrt{x}$*, por un lado, y* $\tan$ *y* $ang\tan$*, por otro, son funciones inversas, es decir que* $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ *y* $ang\tan(\tan x) = x$ *y* $e^{\ln a} = a$
- *Discutir que las gráficas de exponenciales y logaritmos son simétricas respecto a la recta* $y = x$

**Tarea 8.2.1**

Traza las gráficas de:

1. $y = \ln x$
2. $y = \log x$
3. $y = \log_3 x$

**Ejercicio 8.2.2**

Escribe las propiedades algebraicas de la función logaritmo.

***Discusión***

- *Las propiedades son:*

Si $a, k \in \mathbb{R}$, y $M$, $N$ son expresiones algebraicas cualesquiera, entonces, se cumple que:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N \qquad \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^k = k\log_a M \qquad \log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

**TAREA DE INVESTIGACIÓN 8.2.2**

Demuestra las propiedades anteriores.

***Nota para el profesor:***

- *La tarea de investigación es optativa.*

### Tarea 8.2.3

Usando las propiedades de los logaritmos, encuentra las equivalencias de:

1. $\log_7 x^{95} =$

2. $\log_8 (ABC) =$

3. $\log_9 1^{6789} =$

4. $\ln e =$

5. $\log_2 \left( \dfrac{27}{9} \right) =$

6. $\dfrac{\log_2 27}{\log_2 9} =$

7. $\log_{42} \left( \dfrac{A}{BC} \right) =$

8. $\log_5 (A + B) =$

9. $\left( \log_3 A^B \right)\left( \log_3 B \right) =$

# Sección 8.3

# Derivada de la función exponencial y de la función logarítmica

La derivada de la función exponencial $y = e^x$ es: $y' = e^x$

La derivada de la función logaritmo natural $y = \ln x$ es: $y' = \frac{1}{x}$

**TAREA DE INVESTIGACIÓN 8.3.1**

Justifica las derivadas de las funciones exponencial y logaritmo.

***Nota para el profesor:***

- *La tarea de investigación es optativa.*

## Ejercicio 8.3.1

Calcula la derivada de:

1. $f(x) = xe^{x}$

2. $g(x) = x \ln x$

3. $h(u) = e^{u^{2}}$

4. $i(u) = \ln(u^{2})$

5. $j(v) = e^{v^{3}-3v-2}$

6. $k(v) = \ln(v^{3} - 3v - 2)$

7. $A(p) = e^{\frac{1}{p}} \ln\left(p^{5} - \sqrt{p}\right)$

8. $K(u) = \sqrt{e^{u}}$

9. $G(n) = \sqrt{\ln n}$

**Tarea 8.3.2**

Calcula la derivada de:

1. $A(p) = e^{-p}$

2. $P(a) = -e^{a}$

3. $f(x) = e^{x} \ln x$

4. $g(z) = 2z + e^{z^3}$

5. $k(u) = \ln\left(\dfrac{u^2 - 3u + 1}{u^7 - 8u^5}\right)$

6. $h(w) = e^{5w + \ln w^2}$

7. $j(z) = e^{\ln z}$

8. $i(y) = \ln e^{y}$

9. $q(x) = e^{\ln e^{\ln e}}$

10. $s(r) = \ln\left(\dfrac{1}{r}\right)$

Hasta el momento sólo hemos trabajado con las derivadas de $e^x$ y $\ln x$; a continuación extenderemos este concepto a cualquier función exponencial o logarítmica.

**Ejercicio 8.3.2**

Justifica que $a^x = e^{x \ln a}$ y deriva implícitamente la igualdad.

Nota para el profesor:
$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

**Ejercicio 8.3.3**

Recuerda que $y = \log_a x$ si y sólo si $x = a^y$.
Deriva implícitamente $x = a^y$ para encontrar $y'$.

Nota para el profesor:
$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

## Ejercicio 8.3.4

Calcula:

1. $\frac{d}{dx}\log_5 x =$

2. $\frac{d}{dx}7^x =$

3. $\frac{d}{dx}6^{x^2} =$

4. $\frac{d}{dx}\log_9\left(3x^2-\frac{1}{x}\right) =$

5. $\frac{d}{dx}\log\left(\frac{1}{3}x^8\right) =$

6. $\frac{d}{dx}15^{\frac{\sqrt{x^3-1}}{6x^5}} =$

7. $\frac{d}{dx}\log_4\left(\frac{1}{x}\right) =$

8. $\frac{d}{dx}8^{\log_7 x} =$

## Tarea 8.3.3

Calcula:

1. $\frac{d}{dx}x^5 \cdot 5^x =$

2. $\frac{d}{dx}6^{x^6} =$

3. $\frac{d}{dx}\frac{x^2-1}{\log_{11}x} =$

4. $\frac{d}{dx}\log\frac{5-x^2}{5-x^3} =$

5. $\frac{d}{dx}4^{3x} =$

6. $\frac{d}{dx}\frac{6^x}{\ln 6} =$

7. $\frac{d}{dx}10^{3x^3+4x-1} =$

8. $\frac{d}{dx}8^x =$

# Sección 8.4

# Aplicaciones

**Ejercicio 8.4.1.**

De acuerdo con una teoría cosmológica, hubo igual cantidad de los dos isótopos de uranio $U^{235}$ y $U^{238}$ cuando la "gran explosión" creó el universo. En la actualidad, hay 137.7 átomos de $U^{238}$ por cada uno de $U^{235}$. Usando como vida media:

4.51 mil millones de años para el $U^{238}$
0.71 mil millones de años para el $U^{235}$

Calcula la edad del universo.

***Discusión***

- *Resolver en clase para definir varios conceptos asociados con este tipo de problemas. Los demás problemas dejarlos a los estudiantes.*
- *Definir el concepto de vida media: La vida media $\tau$ de una muestra es el tiempo requerido para que decaiga la mitad de la muestra original.*
- *Solución:*

*Definir* $N_8(t) = N(0)e^{-kt}$ *representa la cantidad de isótopos de* $U^{238}$ *y*

$N_5(t) = N(0)e^{-ct}$ *representa la cantidad de isótopos de* $U^{235}$.

*Entonces, la condición para la vida media es* $N(\tau) = \frac{N(0)}{2}$. *Con esto, calcular las constantes* $k$ *y* $c$.

*De acuerdo a la teoría cosmológica* $N_8(0) = N_5(0)$

*Para el* $U^{238}$ *:* $\frac{N_8(0)}{2} = N_8(4.51) = N_8(0)e^{-4.51k} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-4.51k} \quad \Rightarrow \quad 2 = e^{4.51k}$

$$\Rightarrow \quad \ln 2 = 4.51k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{4.51}$$

*Para el* $U^{235}$ *:* $\frac{N(0)}{2} = N_5(0.71) = N_5(0)e^{-0.71c}$ *De aquí* $c = \frac{\ln 2}{0.71}$.

*Usando la proporción entre* $N_8$ *y* $N_5$ *de la actualidad, tenemos que:*

$$137.7 = \frac{N_8(\tau)}{N_5(\tau)} = \frac{N(0)e^{-\frac{\ln 2}{4.51}}}{N(0)e^{-\frac{\ln 2}{0.71}}}$$

*De aquí* $137.7 = e^{\left(\frac{\ln 2}{0.71} - \frac{\ln 2}{4.51}\right)t}$

$$\ln 137.7 = \left(\frac{\ln 2}{0.71} - \frac{\ln 2}{4.51}\right)t$$

$$\tau = \frac{\ln 137.7}{\frac{\ln 2}{0.71} - \frac{\ln 2}{4.51}} \approx 5.99$$

*Por lo tanto una estimación para la edad del universo es alrededor de 6 mil millones de años.*

*El valor más aceptado para la edad del universo es aproximadamente de 15 mil millones de años que al menos es del mismo orden de magnitud.*

**Ejercicio 8.4.2**

El número de bacterias en cierto cultivo crece de 600 a 1800 en 2 horas, suponiendo que el crecimiento está dado por $P(t) = P(0)e^{kt}$ (Ley general de crecimiento), encuentra el número de bacterias que habrá al cabo de 4 horas.

Deriva la función $P(t) = P(0)e^{kt}$.

Escribe la derivada en términos de $P$.

***Discusión***

- *Revisar el Ejercicio.*
- *Revisar la derivada de $P$ y hacer notar otra vez que $P'$ está en términos de $P$.*

**Ejercicio 8.4.3**

El carbono 14 es radioactivo y decae a una razón proporcional a la cantidad actual. Su vida media es de 5570 años, es decir, una cantidad dada de carbono 14 tarda 5570 años en reducirse a la mitad de la cantidad original. Si en una muestra estaban presentes, al principio, 10 gramos de carbono 14, ¿cuánto quedará después de 2000 años?

***Discusión***

- *Revisar el Ejercicio.*
- *Hacer notar que $k$ siempre es mayor a cero y que la ecuación $P(t)=P(0)e^{kt}$ representa crecimiento y $P(t)=P(0)e^{-kt}$ representa decaimiento.*

**Tarea 8.4.1**

Resuelve los siguientes problemas.

1. Se sabe que cierta población de bacterias se duplica cada 3 horas. Si la población inicial es de 1000 bacterias, ¿cuándo llegará la población a 10,000?

2. *En muchos casos, la cantidad $D(t)$ de cierta droga en el torrente sanguíneo, medida por el exceso sobre el nivel natural de droga, disminuye a una razón proporcional a la cantidad excedente.*

   a) Plantea la ecuación diferencial que representa la situación anterior. $D(t)$ está dada por $D(t) = D(0)e^{-\lambda t}$, en donde a $\lambda$ se le llama constante de eliminación de la droga, y $T = \frac{1}{\lambda}$ se llama tiempo de eliminación.

   b) Resuelve: El tiempo de eliminación del alcohol varía de una persona a otra. Si el tiempo que tarda una persona para ponerse sobria es $T = \frac{1}{\lambda} = 2.5h$, ¿cuánto tardará en reducirse del 0.10% al 0.02% el exceso de concentración del alcohol en el torrente sanguíneo?

3. El carbono extraído de un cráneo antiguo contiene sólo $\frac{1}{6}$ del isótopo $C^{14}$ que el que se extrajo de un hueso de la actualidad. ¿Cuál es la edad del cráneo? (Recuerda que la vida media del $C^{14}$ es 5570 años).

4. La población mundial en 1984 era de 4.76 mil millones y en 1986 era de 4.92 mil millones. ¿Cuál fue la población mundial en el año 2000?

5. La compañía Sony suspendió, en 1976, la publicidad de grabadoras. Planeó reanudar la publicidad cuando las ventas hubieran bajado al 75% de su promedio inicial. Si después de 2 días sin publicidad las ventas disminuyeron 57.7%, ¿cuántos días debe esperar la compañía para reanudar su publicidad?

6. *La ley del enfriamiento de Newton establece que "la razón de cambio de la diferencia de temperatura con respecto al tiempo, entre un objeto y el medio ambiente, es directamente proporcional a la diferencia de temperatura".*

   a) Escribe la ecuación diferencial que representa la ley anterior.

   b) Suponiendo que en un horno que está a 350°F, una masa que está a 70°F demora exactamente 30 minutos en convertirse en un pastel a 170°F, calcula cuánto tiempo tarda en hornearse un pastel a temperatura de horno de 250°F.

# CAPÍTULO 9

# DERIVADA DE FUNCIONES CIRCULARES Y DE SUS INVERSAS

Sección 9.1. Derivada de funciones circulares
Sección 9.2. Derivada de funciones circulares inversas
Sección 9.3. Problemas de aplicación

OBJETIVOS:

- Profundizar el conocimiento de la derivada.
- Conocer la derivada de las funciones circulares.
- Conocer las derivadas de las funciones circulares inversas.
- Aplicar las derivadas de las funciones circulares a problemas.

# Sección 9.1

# Derivada de funciones circulares

**Ejercicio 9.1.1**

a) Escribe las 6 funciones trigonométricas.

b) Escribe las funciones trigonométricas en términos de seno y coseno.

Para encontrar la derivada de las funciones seno y coseno son necesarias las siguientes identidades trigonométricas:

- $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Y también son necesarios los límites siguientes:

$\operatorname*{Lím}_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}=1$ y $\operatorname*{Lím}_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0$

NOTA: La justificación de las identidades trigonométricas y de los límites anteriores las puedes encontrar en cualquier libro de cálculo.

### Ejercicio 9.1.2

Calcula la derivada de $f\left(x\right)=\operatorname{sen} x$ usando la definición de límites.

#### *Discusión*

- *Revisar la derivada. Hacerla con ellos si no pudieron llegar al resultado.*

$$f'(x)=\underset{h\to 0}{Lím}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{h\to 0}{Lím}\frac{sen(x+h)-senx}{h}=\underset{h\to 0}{Lím}\frac{senx\cosh+senh\cos x-senx}{h}=$$

$$\underset{h\to 0}{Lím}\frac{senx(\cos h-1)+senh\cos x}{h}=\underset{h\to 0}{Lím}\,senx\left[\frac{\cosh-1}{h}\right]+\underset{h\to 0}{Lím}\cos x\frac{senh}{h}=senx(o)+\cos x(1)=\cos x$$

### Ejercicio 9.1.3

Calcula la derivada de $g\left(x\right)=\cos x$ usando la definición de límites.

***Discusión***

- *Revisar que la derivada esté hecha de la misma forma que la del ejercicio 9.1.2.*

**Tarea 9.1.1**

Calcula la derivada de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$ usando las propiedades de derivadas y escribiendo las funciones trigonométricas en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

**Ejercicio 9.1.4**

Completa la tabla.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\operatorname{sen} x$ | |
| $\cos x$ | |
| $\tan x$ | |
| $\cot x$ | |
| $\sec x$ | |
| $\csc x$ | |

### Ejercicio 9.1.5

Calcula las siguientes derivadas.

1. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\left(x^2+5x\right)$

2. $\frac{d}{dx}\cos^3 x$

3. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\left(e^{5x}\right)$

4. $\frac{d}{dx}\ln\left(\cos\left(7x^5\right)\right)$

5. $\frac{d}{dx}\sqrt[9]{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)}$

6. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)$

7. $\frac{d}{dx}\sec^2 x$

8. $\frac{d}{dx}\sec x\tan x$

9. $\frac{d}{dx}\csc\left(\ln x\right)$

10. $\frac{d}{dx}e^{\cot x}$

### Tarea 9.1.2

Calcula lo que se te pide.

1. $\frac{d}{dx}\left(\cos(x+4)+\operatorname{sen}(x+4)\right)$

2. $\frac{d}{dx}\cos^5\left(3x^7+4x^{99}\right)$

3. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x\cos x$

4. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x^3\cos^5 x$

5. $\frac{d}{dx}\tan\left(\sqrt{x}\right)$

6. $\frac{d}{dx}\ln\left(\sec^2 x\right)$

7. $\frac{d}{dx}\frac{1}{\tan^3 x}$

8. $\frac{d}{dx}\cot^4\left(5x^2+x\right)$

9. $\frac{d}{dx}\sec\left(\frac{1}{x}+3x-x^4\right)$

10. $\frac{d}{dx}\csc x^7\tan^6\left(x-8x^2\right)$

11. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x^2\csc x^3$

12. $\frac{d}{dx}\tan\left(e^{\operatorname{sen}x}\right)$

13. $f(x)=\operatorname{sen}x$ y $g(x)=\cos x$, calcula $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$, $g'''(x)$ y $g^{IV}(x)$

**TAREA DE INVESTIGACIÓN 9.1.3 (OBLIGATORIA)**

Busca en libros la derivada de las funciones circulares (o trigonométricas) inversas.

***Discusión***

- *Para poder iniciar la siguiente lección es necesario que los alumnos tengan las derivadas de las funciones circulares inversas.*

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1}x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1}x=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1}x=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

# Sección 9.2

# Derivadas de funciones circulares inversas

**Ejercicio 9.2.1**

Completa la siguiente tabla.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\operatorname{sen}^{-1} x$ | |
| $\cos^{-1} x$ | |
| $\tan^{-1} x$ | |
| $\cot^{-1} x$ | |
| $\sec^{-1} x$ | |
| $\csc^{-1} x$ | |

**Ejercicio 9.2.2**

Deriva las siguientes funciones.

1. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}\left(x^{9}\right)$

2. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}\left(e^{x}\right)$

3. $\dfrac{d}{dx}\csc^{-1}(\ln x)$

4. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(\operatorname{sen} x)$

5. $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1}\left(\sqrt{x^{7}}\right)$

6. $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

7. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(x)\tan^{-1}(x)$

8. $\dfrac{d}{dx}\ln\left(\cot^{-1}(x)\right)$

9. $\dfrac{d}{dx}e^{\operatorname{sen}^{-1}(x)}$

10. $\dfrac{d}{dx}\csc^{-1}\left(e^{x}\right)+\sec^{-1}\left(e^{x}\right)$

**Tarea 9.2.1**

Deriva las siguientes funciones.

1. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}\left(6x^2-8x^7+1\right)$

2. $\dfrac{d}{dx}e^{\cot^{-1}\left(6x^4\right)}$

3. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\tan x\right)$

4. $\dfrac{d}{dx}\ln\left(6x+\csc^{-1}(3x)\right)$

5. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}\left(\log_6 4x\right)$

6. $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1}\left(4^x\right)$

7. $\dfrac{d}{dx}20^{\cot^{-1}\left(x^3\right)}$

8. $\dfrac{d}{dx}\log_6\left(\cos^{-1}(x)\right)$

9. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{x}-8x^7\right)$

10. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}\left(\sqrt{6x^2-8x}\right)$

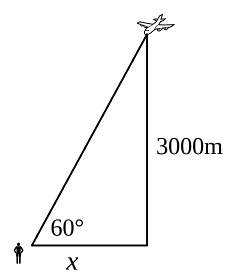
# Sección 9.3

# Problemas de aplicación

**Ejercicio 9.3.1**

Resuelve el siguiente problema.

Un avión vuela con una velocidad constante a una altura de 3000m a lo largo de una trayectoria que lo hará pasar exactamente arriba de un observador que está en el suelo. En un instante dado, el observador nota que el ángulo de elevación es de 60° y que este ángulo cambia a razón de 1° por segundo. ¿Cuál es la velocidad del avión en ese instante?



***Discusión***

- *Revisar la solución, una forma de resolverlo es: Datos:* $\frac{d\theta}{dt} = -1 {}^{\circ}\!/\!_{s} = -\frac{\pi}{180} {}^{rad}\!/\!_{s}$ *(el signo negativo aparece debido al sistema de coordenadas: si el avión se mueve hacia la derecha, el ángulo de elevación disminuye).*

  *Planteamiento:* $\cot\theta = \frac{x}{3000} \quad \Rightarrow \quad x = 3000\cot\theta$

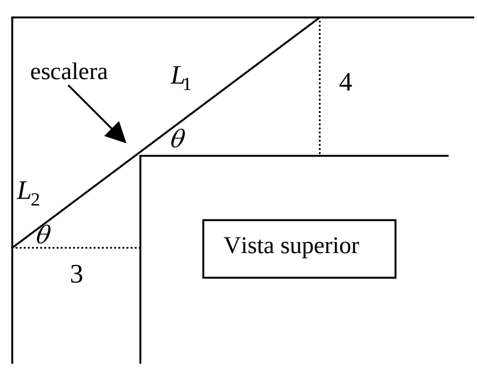
- *Derivar implícitamente y tener cuidado en que usen correctamente la regla de la cadena:* $\frac{dx}{dt} = -3000\csc^2\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 69.3 {}^{m}\!/\!_{s} = 251.3 {}^{km}\!/\!_{h}$

- *Mencionar que la razón de usar radianes en lugar de grados es que lo que se está buscando es la razón de cambio de una distancia y para encontrarla se usará la razón de cambio del ángulo con respecto al tiempo. Además si no se cambia se multiplicarían dos cantidades con diferentes unidades.*

**Ejercicio 9.3.2**

Resuelve el siguiente problema.

Dos pasillos con anchura de 3 y 4 metros, respectivamente, forman una esquina en ángulo recto, tal como se muestra en la figura. ¿Cuál será la longitud de la escalera más larga que puede ser llevada horizontalmente (paralela al suelo) a través de la esquina?



***Discusión***

- *Revisar la solución:* $L = L_1 + L_2$, *donde* $L_1 = \dfrac{4}{\operatorname{sen}\theta}$ *y* $L_2 = \dfrac{3}{\cos\theta}$

  *Entonces* $L(\theta) = \dfrac{4}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{3}{\cos\theta}$

  *Calcular* $\dfrac{dL}{d\theta}$ *para encontrar el máximo:* $\dfrac{dL}{d\theta} = \dfrac{-4\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \dfrac{3\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}$

  *Lo que queremos es encontrar la escalera de longitud máxima, para esto encontraremos los puntos críticos:*

$$\frac{-4\cos\theta}{sen^2\theta} + \frac{3sen\theta}{\cos^2\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad -4\cos^3\theta + 3sen^3\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan^3\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 47.7°$$

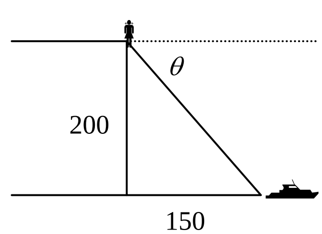
  *Sustituyendo en* $L(\theta)$, *queda* $L(47.7°) = 9.3m$

  *Comprobar que es un máximo.*

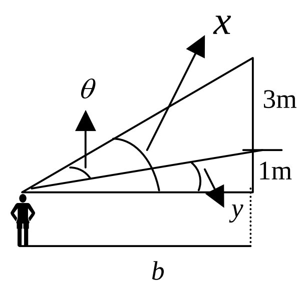
**Tarea 9.3.1**

Resuelve los siguientes problemas.

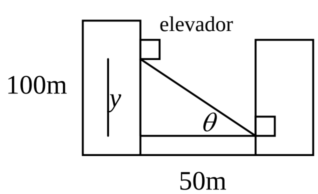
1. Una persona, parada en la cima de un acantilado vertical, está 200m encima de un lago mirando un bote que se aleja del pie del acantilado a razón de $25\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de depresión, $\theta$, de su línea visual cuando el bote está a 150m del pie del acantilado?



2. El borde inferior de una pintura mural de 3m de altura está 1m arriba del nivel del ojo de un observador. Encuentra la distancia ideal, $b$, a la que el observador debe alejarse del muro para ver la pintura; es decir, encuentra la distancia $b$ que maximice el ángulo subtendido por las líneas visuales del observador.
   NOTA: Es necesario usar la identidad trigonométrica para la tangente de la resta de dos ángulos: $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$, puesto que $\theta=x-y$.




3. Un edificio de 100m de altura está equipado con un elevador exterior. El elevador baja con una razón constante de $5\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$. Si tú estás parado contemplando el elevador desde una ventana colocada a 25m sobre el suelo, en un edificio que está a 50m del elevador, ¿a qué altura te parecerá que el elevador se mueve con mayor rapidez?
   NOTA: La velocidad aparente es la velocidad angular $\dfrac{d\theta}{dt}$. Lo que se pide es maximizar la velocidad angular.



***Discusión***

- *Solución: El máximo de velocidad angular se alcanza cuando* $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

  *Así, la solución al problema se da en el máximo relativo, que se refiere al ángulo de la parte superior del edificio (No se ha hablado de máximos relativos anteriormente).*

  *El mínimo de velocidad angular se alcanza cuando* $\theta = 0$.

# APÉNDICES

# PROGRAMA OPERATIVO PARA LA PLANEACIÓN DIDÁCTICA
(Colegio de Ciencias y Humanidades)

## DATOS DE LA ASIGNATURA

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre: | Cálculo Diferencial e Integral I | | | | |
| Clave: | 1501 | Optativa/obligatoria | Obligatoria | Ciclo lectivo: | |
| Horas por semana: | 4 hrs | Horas teóricas | 4 | Horas prácticas | 0 |
| Plan de estudios: | CCH-96 | Grupo (s): | | Clases por semana: | 2 |

## PROPÓSITOS U OBJETIVOS GENERALES DEL CURSO

- El desarrollo de la noción intuitiva de límite.
- El conocimiento de las interpretaciones de la derivada y la integral, en particular, aquellas asociadas al estudio de los fenómenos donde existe variación y cambio.
- La comprensión de las relaciones entre el comportamiento de una función y su derivada y sus aplicaciones, junto con la integral, en la solución de problemas muy diversos.
- La práctica frecuente de procedimientos para derivar y, en casos sencillos, integrar funciones algebraicas, en situaciones que las doten de sentido y permitan avanzar gradualmente hacia su adquisición permanente.

| Unidad/Tema | ¿QUÉ ES EL CÁLCULO DIFERENCIA E INTEGRAL? | | Número | 1 |
|---|---|---|---|---|
| Propósito (s)<br>Objetivo (s) | Contenidos temáticos | Fechas | Actividades de enseñanza-aprendizaje | Fechas reales |
| Particular:<br>El conocimiento de problemas diversos, algunos resueltos por métodos numéricos o utilizando ideas anteriores a las del cálculo, permitirá al alumno introducirse en la problemática de esta materia y darse cuenta del apoyo que brinda a diversas disciplinas.<br>Específico:<br>Al finalizar la unidad, el alumno resolverá algunos problemas sencillos de máximos y mínimos, tangentes a una curva y áreas bajo curvas, usando métodos numéricos, algebraicos y geométricos. | Ejemplos para introducir la problemática del Cálculo Diferencial e Integral: cálculo de velocidades y razón de cambio instantáneo; de tangentes a una curva; de máximos y mínimos; de áreas y volúmenes, etc., enfatizando las situaciones y problemas que permitan:<br><br>El planteo y estudio del comportamiento de funciones, de sucesiones y de series.<br><br>La solución de algunos de los problemas anteriores por métodos numéricos, algebraicos y geométricos. | | Es conveniente que el profesor presente los problemas y los discuta grupalmente con los alumnos sin pretender resolverlos todos ellos.<br><br>Escoger cuidadosamente problemas representativos de la problemática del cálculo de modo que los alumnos ubiquen el objeto de estudio de esta materia y se sientan fuertemente motivados hacia ella.<br><br>Se proyectará el video “Cálculo Diferencial” con la finalidad de motivar los conceptos básicos del cálculo diferencial, así como mostrar algunas de las posibles aplicaciones del cálculo.<br>Se hará la lectura de “¿Qué es el cálculo de variaciones y cuáles son sus aplicaciones? “ con la finalidad de mostrar la importancia histórica del cálculo. | |

| Unidad/Tema | LÍMITE Y CONTINUIDAD | | Número | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Propósito (s) Objetivo (s) | Contenidos temáticos | Fechas | Actividades de enseñanza-aprendizaje | Fechas reales |
| Particular: El estudiante comprenderá intuitivamente los conceptos matemáticos de límite y continuidad y los utilizará en el estudio de algunas funciones.<br>Específico: Al finalizar esta unidad, el alumno<br>Obtendrá una noción intuitiva de los conceptos de límite y continuidad;<br>Identificará algunas propiedades de los límites;<br>Conocerá formas de calcular los límites de algunas funciones polinomiales y racionales.<br>Comprenderá el papel del límite en la definición de continuidad. | Noción y propiedad de los límites de funciones:<br>Significado intuitivo del concepto de límite y cálculo de límites de funciones algebraicas mediante el uso de una tabla de valores alrededor de un punto, para casos donde la función está definida y su valor coincide con el límite; concepto intuitivo de límite lateral.<br>Análisis de casos especiales que se pueden presentar: función no definida en el punto de estudio; la función está definida pero no toma el valor del límite; no coincidencia de los límites laterales.<br>Propiedades básicas de los límites y su empleo.<br>Técnicas algebraicas para el cálculo de límites; casos indeterminados.<br>Noción y propiedades de la continuidad de funciones<br>Revisión intuitiva de la noción de continuidad a través del análisis de gráficas de funciones continuas y discontinuas: trazo sin despegar el lápiz del papel; agujeros, interrupciones y saltos.<br>Examen de las condiciones que debe cumplir una función para que sea continua en uno o en todos sus puntos; ejemplos de casos donde no se cumplen todas o algunas de las condiciones de continuidad. Funciones polinomiales y racionales.<br>Propiedades de las funciones continuas, en particular, valor intermedio y valores extremos.<br>Límites y asíntotas.<br>Nociones de límites infinitos y límites en el infinito.<br>Límites laterales infinitos y asíntotas verticales.<br>Límites en el infinito y asíntotas horizontales.<br>Formas indeterminadas.<br>Definición formal del límite con $\varepsilon-\delta$ y su interpretación geométrica. | | El concepto de límite, si bien es fundamental en la matemática, su tratamiento formal y sistemático debe ser evitado en este nivel de estudios; esto significa que deberá examinarse desde un punto de vista intuitivo.<br><br>La formalización del concepto de límite a través de $\varepsilon-\delta$ se hace con el único fin de que el estudiante precise las ideas y obtenga una mejor comprensión.<br><br>Es conveniente ejemplificar algunos casos de discontinuidades en funciones antes de formalizar el concepto de continuidad. | |

| Unidad/Tema | LA DERIVADA Y SUS INTERPRETACIONES | | Número | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Propósito (s) Objetivo (s) | Contenidos temáticos | Fechas | Actividades de enseñanza-aprendizaje | Fechas reales |
| Particular: En esta unidad, el alumno retomará algunos de los problemas de la primera unidad y a través del análisis de ellos, llegará al concepto de derivada.<br>Específicos: Al finalizar esta unidad, el alumno Aplicará la derivada en problemas sencillos de rapidez de cambio extraídos de la física, la economía y otras disciplinas;<br>Calculará la derivada de funciones sencillas, a manera de ejemplo, derivadas de polinomios de segundo y tercer grado;<br>Calculará, para casos sencillos, tangentes y normales a una curva. | La derivada y sus interpretaciones física y geométrica:<br>Como rapidez de cambio instantáneo en una función, con ejemplos extraídos de la física, la economía, la biología y las diversas disciplinas.<br>Como pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.<br>La tangente como la recta que mejor aproxima a la función alrededor de un punto.<br>Cálculo de derivadas sencillas; por ejemplo, de funciones como:<br>$y = x^2$;<br>$y = 6x^2 + 2x - 1$;<br>$y = x^3$; $y = \sqrt{x}$...<br>Aplicaciones elementales de la derivada: cálculo de tangentes y normales y razones de cambio; primeros cálculos aproximados utilizando la fórmula:<br>$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x)(x - x_0)$ | | Se recomienda retomar algunos de los problemas abordados en la primera unidad para su solución empleando los métodos del Cálculo Diferencial. | |

| Unidad/Tema | DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS. | | | Número 4 |
|---|---|---|---|---|
| Propósito (s)<br>Objetivo (s) | Contenidos temáticos | Fechas | Actividades de enseñanza-aprendizaje | Fechas reales |
| Particular: En esta unidad se busca que el alumno encuentre sus primeras reglas y fórmulas de derivación, que conozca la regla de la cadena y la derivación implícita en casos sencillos.<br><br>Específico: Al terminar esta unidad, el alumno conocerá y aplicará las fórmulas algebraicas de derivación; conocerá y aplicará las reglas para derivar: una suma o resta de funciones, el producto y el cociente y una función por una constante; conocerá y aplicará la regla de la cadena y resolverá ejercicios de derivación implícita. | Primeras fórmulas y reglas de derivación:<br>Derivadas de<br>$y = c; \quad y = x^n; \quad y = \frac{1}{x}; \quad y = \sqrt{x};\ldots$<br>y de polinomios.<br>Derivada de una función por una constante; de la suma, la resta, el producto y el cociente de dos funciones.<br><br>La regla de la cadena y sus aplicaciones para derivar funciones algebraicas, en particular, aplicaciones de las fórmulas:<br>$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}; \qquad \frac{d}{dx}\sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$<br><br>Ejemplos, ejercicios y aplicaciones de la derivada implícita. | | En esta unidad es importante la ejercitación algorítmica por lo que se recomienda evitar los tratamientos teóricos. | |

| Unidad/Tema | APLICACIONES DE LA DERIVADA | | Número | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Propósito (s)<br>Objetivo (s) | Contenidos temáticos | Fechas | Actividades de enseñanza-aprendizaje | Fechas reales |
| Particulares: A través de ejemplos ligados a la interpretación de la derivada, el alumno se ejercitará en el manejo de esta útil herramienta; en particular, la usará para conocer y aplicar el método de Newton al cálculo aproximado de raíces de una ecuación. Usando derivadas sucesivas, el alumno analizará el carácter creciente o decreciente de una función, su concavidad y utilizará los criterios de la primera y segunda derivada para el cálculo de máximos y mínimos.<br>Específicos: Al finalizar esta unidad, el alumno resolverá problemas de rapidez y razón de cambio instantáneo y calculará tangentes y normales a una curva; calculará diferenciales y valores aproximados de funciones; conocerá el significado físico de la segunda derivada y lo aplicará en problemas de movimiento uniformemente acelerado y resolverá problemas de optimización, trazado de gráficas y podrá construir la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de ésta y viceversa. | Aplicaciones ligadas a las interpretaciones de la derivada:<br>Problemas de rapidez y razón de cambio instantáneo.<br>Cálculo de tangentes y normales.<br>Cálculo de diferenciales y valores aproximados de funciones.<br>Conocimiento y aplicación del método de Newton al cálculo aproximado de raíces.<br>Derivadas sucesivas. Significado físico de la segunda derivada; ecuación del movimiento uniformemente acelerado.<br>Relaciones del signo de la primera y la segunda derivadas con el carácter creciente o decreciente y el sentido de la concavidad de una función; en particular, criterios de la primera y segunda derivadas para máximos y mínimos.<br>Aplicaciones a:<br>La solución de problemas de optimización.<br>El tratado de gráficas y el estudio de los puntos críticos de una función, en particular, construcción de la tabla de variación de una función, trazado de la gráfica de la derivada dada de la función y viceversa. | | Graduar los problemas que se presenten a los alumnos, no obstante de lo inmediato del nivel de aplicación.<br>Es importante revisar con detenimiento el método de Newton para asegurar que los estudiantes comprendan cabalmente la base de su operación.<br>Examinar con el grupo los ejemplos que se presenten, de modo que se posibilite el análisis de aquellos aspectos teóricos importantes que permiten al alumno dotar de significado a los conceptos que estudia en esta unidad. | |

| Unidad/Tema | LA ANTIDERIVADA Y SUS APLICACIONES | | Número | 6 |
|---|---|---|---|---|
| Propósito (s)<br>Objetivo (s) | Contenidos temáticos | Fechas | Actividades de enseñanza-aprendizaje | Fechas reales |
| Particular: En esta unidad se establece un primer acercamiento al tema de ecuaciones diferenciales mediante el planteamiento de ecuaciones donde aparece la función y su derivada. También aparece el tema de la antiderivada como operación inversa a la derivación y se busca su aplicación a problemas de la física, la economía y otras disciplinas.<br><br>Específico: Al finalizar la unidad, el alumno resolverá problemas sencillos de ecuaciones diferenciales y encontrará la solución por métodos numéricos o cualitativos; encontrará y aplicará la antiderivada de funciones polinomiales y aplicará los conocimientos anteriores del estudio, en particular, del movimiento rectilíneo. | Ejemplos para introducir las ecuaciones donde aparecen la función y su(s) derivada(s), y, en algunos casos sencillos, estudio de la solución por métodos numéricos o cualitativos.<br><br>La antiderivada y la solución de ecuaciones como:<br>$y = c; \quad y = ax + b; \quad y = ax^n;...$<br><br>Aplicaciones extraídas de la física, la economía y las diversas disciplinas, en particular, el estudio del movimiento rectilíneo (movimiento uniforme y uniformemente acelerado). | | Es importante en esta unidad evitar mencionar prematuramente el concepto de integral; sí, en cambio, debe aprovecharse la ocasión para resaltar, a nivel de comentario solamente, que obtener la antiderivada de una función es resolver una ecuación diferencial. | |

| Unidad/Tema | LA INTEGRAL COMO ÁREA BAJO UNA CURVA E INTEGRAL DEFINIDA. | | Número | 7 |
|---|---|---|---|---|
| Propósito (s) Objetivo (s) | Contenidos temáticos | Fechas | Actividades de enseñanza-aprendizaje | Fechas reales |
| Particular: Usando la función *área bajo una curva* y su derivada, el alumno tendrá una aproximación intuitiva al teorema fundamental del cálculo. Retomando algunos de los ejemplos de la primera unidad, se busca que el alumno aplique la integral a la solución de problemas sencillos.<br>Específicos: Al concluir la unidad, el alumno elaborará una primera tabla de integrales y las aplicará al cálculo de integrales de polinomios y funciones: así como al cálculo del área bajo la curva; calculará el área entre dos curvas; encontrará el volumen de un sólido de revolución y aplicará la integral al cálculo de problemas físicos y numéricos. | La función *área bajo una curva* y su derivada; aproximación intuitiva al teorema fundamental del cálculo.<br><br>Elaboración de una primera tabla de integrales; cálculo de integrales de polinomios y funciones algebraicas sencillas. Aplicaciones al cálculo del área bajo una curva.<br><br>Aplicaciones geométricas: área entre dos curvas; volumen de un sólido de revolución.<br><br>Aplicaciones físicas y mecánicas, por ejemplo, cálculo de presiones, de trabajo, de centros de gravedad, etcétera.<br><br>Cálculo de valor promedio de una función. | | Es importante en esta unidad examinar la noción de función de área a partir de ejemplos sencillos que permitan al estudiante observar cómo su derivada, construida paso a paso mediante incrementos, conduce a la función bajo la cual se encuentra el área. Esto permitirá al estudiante percibir la relación entre la antiderivada y el área calculada, proporcionándole una primera aproximación al teorema fundamental del cálculo.<br><br>Es necesario no perder de vista que las integrales que calculará el estudiante serán inmediatas utilizando fórmulas de antiderivación. | |

## CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

1. Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $6(x+h)-7-(6x-7)$

b) $\dfrac{h^2-2xh}{h}$

c) $\dfrac{(x+h)^2-3(x+h)+1-(x^2-3x+1)}{h}$

d) $(x+h)^2+3-(x^2+3)$

e) $\dfrac{a^2-x^2}{a-x}$

2. Efectúa la operación $4(x+h)^2$
3. Efectúa la operación $(x+h)^3$
4. Efectúa la operación $(2x-5)(3+2x)$
5. Factoriza la expresión $49-x^2$
6. Factoriza la expresión $6x^2-x-15$
7. Resuelve la ecuación $13-5x=0$
8. Resuelve la ecuación $9x^2+6x+1=0$
9. Si $f(x)=x+8$ evalúa $f(5)$
10. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2,-4)$ $y$ $Q(-3,-7)$

Para la relación $x^2+y^2=36$, encuentra

11. Dominio.
12. Imagen.
13. Gráfica.

Nota para el profesor:

El siguiente esquema es para el ejercicio 2 de la tarea 2.1.2. No es la única forma en la que se puede hacer, algunos alumnos harán cosas parecidas a esto, otros elaborarán diagramas de flujo, otros lo dirán con palabras, etc.

$\underset{x \to a}{Lím}\ f(x) = ??$ → Sustituir $a$ en $f(x)$ (1)

- Si $f(a) = \#$, entonces $\underset{x \to a}{Lím}\ f(x) = f(a)$ → FIN
- Si $f(a) = \frac{0}{0}$, → Factorizar el numerador y el denominador de $f(x)$ y simplificar → Regresar al punto (1)
- Si $f(a) = \frac{\#}{0}$ con $\# \neq 0$ → No sabemos aún lo que pasa.

Nota para el profesor:

El siguiente esquema es para el ejercicio 1 de la tarea 2.5.1. No es la única forma en la que se puede hacer, algunos alumnos harán cosas parecidas a esto, otros elaborarán diagramas de flujo, otros lo dirán con palabras, etc.

$\underset{x \to a}{Lím}\ f(x) = ¿?$ → Sustituir $a$ en $f(x)$ (1)

→ Si $f(a) = \#$, → $\underset{x \to a}{Lím}\ f(x) = f(a)$ → FIN

→ Si $f(a) = \frac{0}{0}$, → Factorizar el numerador y el denominador de $f(x)$ y simplificar → Regresar al punto (1)

→ Si $f(a) = \frac{\#}{0}$ con $\# \neq 0$ → $\underset{x \to a}{Lím}\ f(x)$ no existe. La recta $x = a$ es una asíntota vertical → Se pueden calcular los límites laterales para saber más sobre su gráfica

Nota para el profesor:

El siguiente esquema es para el ejercicio 1 de la tarea 2.5.1 página 61. No es la única forma en la que se puede hacer, algunos alumnos harán cosas parecidas a esto, otros elaborarán diagramas de flujo, otros lo dirán con palabras, etc.

$$\underset{x\to\infty}{Lím}\,\frac{f(x)}{g(x)} = ¿?$$

- $g_r(f(x)) > g_r(g(x)) \longrightarrow \underset{x\to\infty}{Lím}\,\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow$ La tendencia del límite es $\pm\infty$. Para determinar el signo es necesario operar los signos de los coeficientes con mayor exponente de $f$ y $g$. Si tienen signos iguales la tendencia será $+\infty$. Si tienen signos diferentes será $-\infty$.
- $g_r(f(x)) = g_r(g(x)) \longrightarrow \underset{x\to\infty}{Lím}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ En donde $a$ y $b$ son los coeficientes de mayor exponente de $f(x)$ y $g(x)$. $\longrightarrow$ $y = \frac{a}{b}$ es una asíntota horizontal de $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $g_r(f(x)) < g_r(g(x)) \longrightarrow \underset{x\to\infty}{Lím}\,\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \longrightarrow$ $y = 0$ es una asíntota horizontal de $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Para el caso $\underset{x\to-\infty}{Lím}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ el esquema es igual excepto el caso $g_r(f(x)) > g_r(g(x))$ que analizaremos aquí.

De la misma manera que en al caso cuando $x \to \infty$, $\underset{x\to-\infty}{Lím}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe . La tendencia del límite es $\pm\infty$. Tenemos que analizar los signos de los coeficientes con mayor exponente y usar el signo que tendrá el término con mayor exponente dependiendo si su exponente es par o impar. $+\infty$. $-\infty$.

Signos de coeficientes iguales y un exponente par y otro impar, entonces $\underset{x\to-\infty}{Lím}\dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

Signos de coeficientes diferentes y un exponente par y otro impar, entonces $\underset{x\to-\infty}{Lím}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Signos de coeficientes iguales y los dos exponentes pares o impares, entonces $\underset{x\to-\infty}{Lím}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Signos de coeficientes diferentes y los dos exponentes pares o impares, entonces $\underset{x\to-\infty}{Lím}\dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

# Experiencias y conclusiones

Este material es producto de varias versiones que fueron modificándose a través de las experiencias y resultados obtenidos con estudiantes de 5° semestre de CCH del Colegio Madrid durante siete años en 25 grupos.
Respecto a las experiencias con el uso del material quiero decir que el Colegio Madrid elabora estadísticas de rendimiento que apuntan a que los grupos que usan este material obtienen mejor puntaje que los grupos que no lo usan. Estas estadísticas son de dos tipos, una es un examen interno para evaluar conocimientos generales de los estudiantes que están por graduarse del Colegio. El mismo examen se aplica año con año para poder comparar el nivel de aprovechamiento de los conocimientos adquiridos de las diferentes generaciones. El otro tipo de estadística se elabora con los resultados del examen de admisión a la UNAM.
Algunas razones por las que considero que los estudiantes que usan este material aprendan mejor son que no sólo aprenden a mecanizar los contenidos del programa de cálculo, sino que consolidan el álgebra que conocen, aprenden los conceptos de cálculo y son capaces de transmitirlos verbalmente. Además aprenden que no hay un solo camino para resolver un problema y que a través de la indagación pueden llegar a construir matemáticas pues no las conciben como una materia acabada.

# BIBLIOGRAFÍA


1. ABREU, G., BISHOP, A.J. & POUPEN, G. What children and teachers count as methematics. En _Learning and teaching mathematics: an international perspective._ T. Nunes and P. Bryant Editores. London: Taylor & Francis, 1997. p. 233-264.

2. BAZÁN LEVY, José de Jusús y ROJANO Rodríguez, Rosalinda. *CCH. Síntesis del plan de estudios actualizado para los alumnos,* México, CCH. DUCAB, 1996 (Cuadernillo número 100).

3. BERTOLUCCI Incico, Jorge y RODRÍGUEZ Gómez Guerra, Roberto A. *El Colegio de Ciencias y Humanidades (1971-1980). Una experiencia de innovación universitaria,* México, Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior (ANUIES), 1983.

4. BISHOP, Alan J. *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural,* México, Paidós, 1999.

5. BISHOP, Alan J. *What values de you teach when you teach mathematics?* In P. Gates (Ed.), Issues in Mathematics Teaching. Routledge Falmer, 2001, p. 93-104.

6. BISHOP, Alan J. *Educating student teachers about values in mathematics education.* In F. L. Lin and T. Cooney (Eds), Making Sense of Mathematics Teacher Education. Kluwer Academic Publishers, Holland, 2001, p. 233-246.

7. BISHOP, Alan J. *Critical challenges in researching cultural issues in mathematics learning.* Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2000, p. 23-29.

8. BISHOP, Alan J. *Mathematics Education Research: past, present and future.* Mathematics Education Research Journal, 1998, p. 76-83.

9. CANTORAL Uriza, Ricardo y FAFÁN Márquez, Rosa María. *Desarrollo conceptual del cálculo,* México, Thomson, 2004.

10. CASANOVA Cardiel, Hugo. *La UNAM entre 1970 y 2000. Crecimiento y complejidad*. en Marsiske, Renate. Coordinadora. _La Universidad Nacional. Un recorrido de la época colonial al presente._ México. Universidad Nacional Autónoma de México. Centro de estudios sobre la Universidad, Plaza y Valdés Editores, 2001, p. 261-325.

11. CUEVAS Vllejo, Armando y MEJÍA Velasco, Hugo. *Cálculo visual,* México, Oxford, 2003.

12. DE LA PEÑA, José Antonio (Compilador). *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México,* México, Siglo XXI editores, 2002.

13. DÍAZ Barriga Arceo, Frida y HERNÁNDEZ Rojas Gerardo. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista,* México, McGraw-Hill, 1998.

14. EDWARDS, C. Y PENNEY, David. *Cálculo y geometría Analítica*, Prentice Hall, México, 1987.

15. FONT, V. *Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Venezuela, 2003.

16. FREIRE, Paulo. *La educación como práctica de la libertad.* Traducción de Lilién Ronzoni, México, Siglo XXI editores, S. A. de C. V., 1969.

17. GÓMEZ, Pedro. *Profesor: no entiendo. Reflexiones alrededor de una experiencia en docencia de las matemáticas,* Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1995.

18. Instituto Mexicano de Investigaciones Educativas, S. C. *Diagnóstico del Colegio Madrid, A. C. Informe Final,* México, 2001.

19. LARSON, Roland y HOSTETLER, Robert. *Cálculo y geometría Analítica,* México, McGraw-Hill, 1986.

20. LIPMAN, Mttew, SHARP, Ann Margaret y OSCANYAN, Frederick S. *La filosofía en el aula.* Traducción Eugenio Echeverría *et al.* Madrid, Ediciones la Torre. 1998. Proyecto didáctico Quiron, No.31).

21. MARTÍN-BARBERO, Jesús. *La educación desde la comunicación. Editorial Norma, 2004.*

22. MERGEN, Karl. *“Qué es el cálculo de variaciones y cuáles son sus aplicaciones?”* en Sigma: El mundo de las matemáticas, Editorial Grijalbo, Barcelona, 1983. Vol. 2.

23. MOCHON, S. *Quiero entender el cálculo (un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones),* México, Grupo Iberoamericano, 1996.

24. NOVAK, J. D. *“Ayudar a los alumnos a cómo aprender. La opinión de un profesor investigador”.* en Séptimo Encuentro Pedagógico Carmen Meda. Antología y memorias, México, Colegio Madrid, 1994, p. 25-28.

25. PASTOR, María Alba. *Los recuerdos de nuestra niñez. 50 años del Colegio Madrid*. México. Colegio Madrid. 1991.

26. PURCELL, Edwin y VARBERG, Dale. *Cálcilo diferencial e integral*, México, Prentice Hall, 1993.

27. RICO, Ernesto. *La labor de la Coordinación de Área de Ciencias Sociales Según El Sistema Del Colegio De Ciencial y Humanidades En El Colegio Madrid, A. C.,* 2004, p. 143-144.

28. RIVAUD, Juan josé (Compilador). *Matemáticas para todos,* Fondo Mexicano para la Educación y el desarrollo, A. C., México, 2003.

29. SAVATER, Fernando. *El valor de educar*, México, Editorial Ariel, S. A., 1997.

30. Secretaría de Educación Pública. *Plan y programas de estudio. Educación Básica. Secundaria.* Elaborado en la Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal, México, Secretaría de Educación Pública,1993.

31. STEWART, James. *Cálculo Diferencial e Integral,* Thomson, México, 1998.

32. SWOKOWSKI, Earl, *Cálculo con Geometría Analítica,* México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1989.

33. VIGOTSKY, Lev S. *"Bases psicológicas del aprendizaje y el desarrollo"* en Psicología y pedagogía. A. R. Luria, A. N. Leontiev, L. S. Vigotsky. Traducción del italiano Ma. Benítez, Madrid, Akal Editor, 1973.


## Páginas de Internet


A. REYES Meleán, Chistian Fernando. *Una breve introducción a la información para la gestión del conocimiento.* Consultado en la página electrónica:
http://www.intangiblecapital.org/Articulos/N4/0026.htm

B. ARTILES Visbal, Sara. *Las redes del conocimiento en ambientes académicos.* Consultado en la página electrónica:
www.redadultosmayores.com.ar/buscador/files/DCRAM028.pdf

*C. Escuela Nacional Preparatoria. Nuestra misión.* Consultado en la página electrónica*:*
http://dgenp.unam.mx/mision.htm

D. *Plan general de desarrollo del CCH 1999-2002.* Consultado en la página electrónica:
http://www.cch.unam.mx/plan99.htm

## Documentos del Colegio Madrid, A. C.

I. *Bachillerato CCH Colegio Madrid.* México. Colegio Madrid. 1997.

II. *Colegio Madrid. Folleto explicativo.* México. 2002.

III. *Declaración de Principios de la asociación Civil Colegio Madrid.* México. 1982.

IV. *Plan de Desarrollo del colegio Madrid, A. C.* 2003-2025. México. 2003.

V. *Proyecto Educativo del colegio Madrid.* México. Colegio Madrid. 2004.