UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

INFINIDAD DE SOLUCIONES DE PROBLEMAS ELÍPTICOS CON PERTURBACIÓN DE SIMETRÍAS EN DOMINIOS SIMÉTRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

M. en C. ERIC FABIÁN HERNÁNDEZ MARTÍNEZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA

MÉXICO, D. F. **SEPTIEMBRE, 2006**

Agradecimientos

A mis padres por que sin ellos no se que sería de mi.

A Vero por su amor, compañía, comprensión y todo lo que me ha brindado.

A mi hermano Emmanuel, por sus ganas de vivir día a día sin importar las adversidades.

A mi hermano Ever y a su familia por ser un apoyo incondicional.

A Mónica Clapp por su enorme paciencia y dedicación, muchas gracias.

A mis sinodales, por tomarse el tiempo de revisar este trabajo.

A Nils Ackermann por sus atinadas observaciones y sugerencias.

A mis amigos de hoy y siempre, Checo, Canito, Marcos y Gera.

A mis amigos y compañeros que por sus consejos imparciales y objetivos me han ayudado a ser mejor cada día, siempre los llevaré en mi mente, gracias.

A Toño Gómez por la amistad brindada desde mis inicios en esta Facultad.

A Natasha por darme esa experiencia de vida invaluable, PESCER (Programa de Educación Superior para Centros de Readaptación Social del Distrito Federal).

Al IMATE por otorgarme un espacio para trabajar y por todo el apoyo brindado.

Esta tesis se desarrolló bajo el auspicio de la UNAM a través de una beca de la DGEP. Con el apoyo del proyecto PAPIIT IN105106-3, Conacyt 43724 y el SNI expediente 1169.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. El problema

Consideremos el problema

$$(\wp_G) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f & \text{en } \Omega \\ \quad u = u_0, & \text{en } \partial\Omega \\ u(gx) = u(x) & x \in \Omega,\ g \in G \end{cases}$$

donde G es un subgrupo cerrado del grupo $O(N)$ de todas las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto, acotado, suave y G-invariante, $N \geq 3$, $2 < p < 2^* := \frac{2N}{N-2}$ y $f, u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas G-invariantes.

Recordemos que un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^N$ es G-invariante si $gx \in \Omega$ para toda $x \in \Omega$, $g \in G$ y que una función $h : \Omega \to \mathbb{R}$ es G-invariante si $h(gx) = h(x)$ para toda $x \in \Omega$, $g \in G$.

El objetivo de esta tesis es investigar la existencia de una infinidad de soluciones G-invariantes para este problema.

1.2. Antecedentes

El problema

$$(\wp) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f & \text{en } \Omega \\ \quad u = 0, & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio abierto, acotado y suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $2 < p < 2^*$ y $f \in L^2(\Omega)$, ha sido estudiado por muchos especialistas durante los últimos 25 años. Se trata de un problema interesante y difícil que aún no ha sido resuelto del todo.

Es bien sabido que, si $f = 0$, este problema tiene una infinidad de soluciones para toda $p \in (2, 2^*)$, véase por ejemplo [28]. En este caso el problema es simétrico, es decir, u es solución de $(\wp)$ si y sólo si $-u$ lo es. Esto permite usar métodos conocidos para obtener una infinidad de puntos críticos del problema variacional asociado.

Cuando $f \neq 0$ el problema ya no es simétrico y los invariantes topológicos que se usan en el caso simétrico como el género de Krasnoselskii o la categoría equivariante de Lusternik-Schnirelmann, no funcionan en este caso. Los primeros resultados para este problema se deben a Bahri y Berestycki [2], Struwe [26] y Rabinowitz [22]. Mencionamos el siguiente:

Teorema 1.1 (Bahri-Berestycki, 1981) *Para toda $f \in L^2(\Omega)$ el problema $(\wp)$ tiene una infinidad de soluciones si*

$$2 < p < p_N$$

donde p_N es la solución más grande de la ecuación $2(N-1)p^2 - (N+2)p - N = 0$.

Es fácil ver que $p_N < 2^*$. Por otro lado, Bahri [4] probó el siguiente resultado:

Teorema 1.2 (Bahri, 1981) *Para casi toda $f \in L^2(\Omega)$ el problema $(\wp)$ tiene una infinidad de soluciones si*

$$2 < p < 2^*.$$

Es razonable conjeturar que el problema $(\wp)$ tiene una infinidad de soluciones para toda $f \in L^2(\Omega)$ y para toda $p \in (2, 2^*)$ pero este resultado, a la fecha, no ha sido demostrado. El mejor resultado que se conoce respecto de p se debe a Bahri y Lions [3] quienes, utilizando estimaciones fuertes para el índice de Morse de operadores de Schrödinger obtenidas por Cwickel [13], Lieb [20] y Rosenbljum [24] demostraron el siguiente resultado:

Teorema 1.3 (Bahri-Lions, 1988) *Para toda $f \in L^2(\Omega)$ el problema $(\wp)$ tiene una infinidad de soluciones si*

$$2 < p < \frac{2N-2}{N-2}.$$

Por otra parte, el problema

$$(\wp') \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f & \text{en } \Omega \\ u = u_0, & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

con condición no homogénea a la frontera $u_0 \in C^2(\partial\Omega)$ ha sido también muy estudiado. Candela y Salvatore [11] obtuvieron un resultado semejante al de Bahri y Berestycki citado arriba. El mejor resultado que se conoce hasta la fecha es el siguiente resultado de Bolle, Ghoussoub y Tehrani [6], que se basa en un método desarrollado por Bolle [5] y en las estimaciones de Cwickel [13], Lieb [20] y Rosenbljum [24].

Teorema 1.4 (Bolle-Ghoussoub-Tehrani, 2000) *El problema* $(\wp')$ *tiene una infinidad de soluciones si*

$$2 < p < \frac{2N}{N-1}.$$

1.3. Resultados de la tesis

En esta tesis consideraremos dominios Ω que son invariantes bajo la acción de un subgrupo cerrado G de $O(N)$ y supondremos que f y u_0 son G-invariantes. Es de esperarse que en este caso la condición sobre p pueda ser mejorada. Probaremos que, en efecto, si Ω contiene una G-órbita de dimensión suficientemente grande, entonces las condiciones sobre p dadas en los Teoremas 1.3 y 1.4 pueden ser mejoradas. A continuación enunciaremos en detalle los resultados principales de esta tesis.

Consideremos el problema

$$(\wp_G) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f & \text{en } \Omega \\ \quad u = u_0, & \text{en } \partial\Omega \\ u(gx) = u(x) & x \in \Omega,\ g \in G \end{cases}$$

donde G es un subgrupo cerrado del grupo $O(N)$ de todas las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto, acotado, suave y G-invariante, $N \geq 3$, $2 < p < 2^* := \frac{2N}{N-2}$, $f \in C^0(\overline{\Omega})$ y $u_0 \in C^2(\partial\Omega)$.

Denotamos por

$$Gx := \{gx : g \in G\}$$

a la G-órbita de un punto $x \in \mathbb{R}^N$ y por

$$m = m(G, \Omega) := \text{máx}\{\dim(Gx) : x \in \Omega\}$$

a la máxima dimensión de una G-órbita de Ω.

Denotamos por $p'_{N,m}$ a la máxima raíz de la ecuación

$$(2N - m - 2)p^2 - (5N - 2m - 2)p + 2N = 0,$$

es decir,

$$p'_{N,m} := \frac{5N - 2m - 2 + \sqrt{(5N - 2m - 2)^2 - 8N(2N - m - 2)}}{2(2N - m - 2)},$$

y denotamos por

$$p_{N,m} := \text{máx}\left\{p'_{N,m}, \frac{2N-2}{N-2}\right\}, \qquad \widetilde{p}_{N,m} := \text{máx}\left\{\frac{6N-4m}{3N-2m-2}, \frac{2N}{N-1}\right\}.$$

Denotamos además por

$$\|u\|^2 := \int_\Omega |\nabla u|^2 ,$$

a la norma en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Probaremos los siguientes resultados.

Teorema 1.5 *Si $p \in (2, \widetilde{p}_{N,m})$ entonces el problema $(\wp_G)$ tiene una sucesión no acotada (u_k) de soluciones G-invariantes que satisfacen*

$$\|u_k\|^2 \leq ak^\gamma,$$

donde a es una constante positiva y $\gamma = 2p/(N-m)(p-2)$.

Teorema 1.6 *Si $u_0 = 0$ y $p \in (2, p_{N,m})$ entonces el problema $(\wp_G)$ tiene una sucesión no acotada (u_k) de soluciones G-invariantes que satisfacen*

$$\|u_k\|^2 \leq ak^\gamma,$$

donde a es una constante positiva y $\gamma = 2p/(N-m)(p-2)$.

Se tiene que

$$p_{N,m} > \frac{2N-2}{N-2} \quad \text{si} \;\; m > \frac{N^2}{2(N-1)},$$

y que

$$\widetilde{p}_{N,m} > \frac{2N}{N-1} \quad \text{si} \;\; m > \frac{N}{2},$$

es decir, las condiciones sobre p dadas por los Teoremas 1.5 y 1.6 son mejores que las obtenidas por Bahri-Lions [3] y Bolle-Ghoussoub-Tehrani [6] si Ω contiene una G-órbita de dimensión suficientemente grande. Notemos, sin embargo que, en todos los casos, $p_{N,m} < 2^*$ y $\widetilde{p}_{N,m} < 2^*$ (véase la Sección 3.6).

En el caso radial $G = O(N)$, Candela, Palmieri y Salvatore [10] probaron que, si $N \geq 4$, el problema $(\wp_{O(N)})$ tiene infinidad de soluciones para toda $p \in (2, 2^*)$. Su demostración se basa en estimaciones análogas a las de Cwickel [13], Lieb [20] y Rosenbljum [24] para el índice de Morse de operadores de Schrödinger en $H_0^1(\Omega)^{O(N)}$.

Aquí usaremos una fórmula asintótica para los valores propios del Laplaciano en $H_0^1(\Omega)^G$ obtenida por Brüning y Heinze [7, 8] y por Donnelly [14].

Queremos hacer notar que, para el grupo trivial $G = \{1\}$ la estimación $\|u_k\|^2 \leq ak^\gamma$ es idéntica a la obtenida por Castro y Clapp en [9].

Esta tesis está organizada como sigue: En el Capítulo 2 daremos la demostración de un resultado abstracto debido a Bolle, Ghoussoub y Tehrani [6] que será la base de nuestros resultados. En el Capítulo 3 probaremos las afirmaciones de existencia de sucesiones no acotadas de soluciones de los Teoremas 1.5 y 1.6. En el Capítulo 4 probaremos las estimaciones para la norma de tales soluciones.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. El teorema de Bolle, Ghoussoub y Tehrani

Sea X un espacio de Hilbert de dimensión infinita y sea $\Phi : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^2. Podemos pensar a Φ como una trayectoria de funcionales

$$\Phi_t : X \to \mathbb{R}, \quad \Phi_t(u) = \Phi(u,t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

y denotar por $\Phi_t'(u) = \frac{\partial}{\partial u}\Phi(u,t)$ la derivada de Φ_t. Supongamos que Φ_t cumple las siguientes propiedades.

(**P1**) Toda sucesión $(u_n, t_n) \in X \times [0,1]$ tal que $(\Phi_{t_n}(u_n))$ está acotada y $\left\|\Phi_{t_n}'(u_n)\right\| \to 0$ tiene una subsucesión convergente.

(**P2**) Para todo $b \in \mathbb{R}$ existe una constante C tal que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t)\right| \leq C(\|\Phi_t'(u)\| + 1)(\|u\| + 1) \qquad \text{si } |\Phi_t(u)| \leq b.$$

(**P3**) Existen dos funciones continuas $\theta_1, \theta_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta_1 \leq \theta_2$, las cuales son Lipschitz continuas en la segunda variable, θ_2^- es monótona en la segunda variable y tales que

$$\theta_1(t, \Phi_t(u)) \leq \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t) \leq \theta_2(t, \Phi_t(u)) \quad \text{si } \Phi_t'(u) = 0,$$

donde $h^- := \max\{-h, 0\}$

(**P4**) Φ_0 es par y para todo subespacio W de dimensión finita de X, se tiene que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \Phi_t(w) \to -\infty \qquad \text{si } w \in W, \ \|w\| \to \infty.$$

Fijemos una sucesión de subespacios lineales $X_1 \subset \cdots \subset X_k \subset \cdots$ de X, con $\dim X_k = k$ y definamos

$$c_k = \inf_{\varphi \in \Gamma} \sup_{x \in X_k} \Phi_0(\varphi(x)) \tag{2.1}$$

donde

$$\Gamma = \{\varphi \in C(X,X) : \varphi \text{ es impar y } \exists\ R > 0 \text{ tal que } \varphi(x) = x \text{ para } \|x\| > R\}.$$

Sean $\zeta_i : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, definidas por

$$\begin{cases} \zeta_i(0,s) = s \\ \frac{\partial}{\partial t}\zeta_i(t,s) = \theta_i(t, \zeta_i(t,s)). \end{cases} \tag{2.2}$$

El siguiente resultado fue probado en [6] (ver Teorema 2.2).

Teorema 2.1 ***(Bolle, Ghoussoub, Tehrani).*** *Supongamos que Φ_t cumple (**P1**)-(**P4**). Si $\zeta_2(1, c_k + \varepsilon) < \zeta_1(1, c_{k+1})$ para alguna $\varepsilon > 0$, entonces para toda $\varphi \in \Gamma$ tal que $\sup_{\varphi(X_k)} \Phi_0 < c_k + \varepsilon$ existe un valor crítico $\widetilde{c}_k$ de Φ_1 tal que*

$$\zeta_2(1, c_k) < \zeta_1(1, c_{k+1}) \leq \widetilde{c}_k \leq \zeta_2(1, \sup_{x \in X_{k+1}} \Phi_0(\varphi(x))). \tag{2.3}$$

Más aún, si la sucesión

$$\left(\frac{c_{k+1} - c_k}{\max\limits_{0 \leq t \leq 1} |\theta_1(t, c_{k+1})| + \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |\theta_2(t, c_k)| + 1} \right) \tag{2.4}$$

no esta acotada, entonces $\widetilde{c}_k \to \infty$.

Antes de ver la demostración veremos algunas propiedades de los valores c_k definidos por (2.1). Supondremos de aqui en adelante que se cumplen (**P1**)-(**P4**).

Lema 2.2 *Sea W un subespacio de X de dimensión finita y $\varphi \in \Gamma$ entonces existe $x_0 \in W$ tal que*

$$\sup_W \Phi_0(\varphi(x)) = \Phi_0(\varphi(x_0)).$$

Demostración: Por (**P4**) existe una bola $\bar{B} \subset W$, tal que

$$\sup_W \Phi_0(\varphi(x)) = \sup_{\bar{B}} \Phi_0(\varphi(x)).$$

Por ser W de dimensión finita $\bar{B}$ es compacta, como $\Phi_0 \circ \varphi$ es continua alcanza su máximo, es decir existe $x_0 \in W$ tal que

$$\sup_W \Phi_0(\varphi(x)) = \Phi_0(\varphi(x_0)).$$

■

Definamos por

$$\Phi_0^{\geq b} := \{u \in X : \Phi_0(u) \geq b\}.$$

Sea $e \in X_{k+1} \setminus X_k$. Usando el Lema anterior es fácil ver que para toda $\varphi \in \Gamma$ se tiene que

$$\Phi_0^{\geq c_{k+1}} \cap \{\varphi(u + se) \ : (u, s) \in X_k \times [0, +\infty)\} \neq \varnothing,$$

ya que por la definición de c_{k+1} se sigue que

$$\sup_{X_{k+1}} \Phi_0(\varphi(x)) = \Phi_0(\varphi(x_0)) \geq c_{k+1}.$$

Proposición 2.3 *Sea $e \in X_{k+1} \setminus X_k$ y sea*

$$\vartheta : \{v + se \in X_{k+1} : v \in X_k, \ s \in [0, +\infty)\} \rightarrow X$$

una función continua con las siguientes propiedades:

i) $\vartheta|_{X_k}$ es impar,

ii) Existe $R > 0$ tal que $\vartheta(u) = u$ si $\|u\| > R$.

Entonces existe un punto $(v_0, s_0) \in X_k \times [0, +\infty)$ tal que

$$\Phi_0(\vartheta(v_0 + s_0 e)) \geq c_{k+1}.$$

Demostración: Consideremos a $\tilde{\vartheta} : X_{k+1} \rightarrow X$, la extensión de ϑ definida por

$$\tilde{\vartheta}(v + se) := \begin{cases} \vartheta(v + se) \text{ si } s \geq 0 \\ \\ -\vartheta(-v - se) \text{ si } s \leq 0. \end{cases}$$

recordemos que la $\dim(X_{k+1}) = \dim(X_k) + 1$. Dado que $\vartheta|_{X_k}$ es impar, $\tilde{\vartheta}$ está bien definida, es continua y satisface que $\tilde{\vartheta}(v) = v$, si $\|v\| > R$. Por el Teorema de Tietze la podemos extender a una función impar en todo el espacio X tal que $\tilde{\vartheta}(v) = v$ para $\|v\|$ grande, es decir, $\tilde{\vartheta} \in \Gamma$. Por el Lema 2.2 y la definición de c_k (véase 2.1), existe $u_0 \in X_{k+1}$, tal que

$$\Phi_0\left(\tilde{\vartheta}(u_0)\right) \geq c_{k+1}.$$

Como Φ_0 es par y $\tilde{\vartheta}$ es impar podemos suponer que $u_0 = v_0 + s_0 e$, con $(v_0, s_0) \in X_k \times [0, +\infty)$. ■

Proposición 2.4 *Los valores c_k cumplen las siguientes propiedades:*

i) Existen M_k, tal que $c_k \leq \sup_{X_k} \Phi_0 (u) \leq M_k$ para todo k.

ii) $\Phi_0 (0) \leq c_k \leq c_{k+1}$.

Demostración: Para demostrar la primera afirmación observemos que la identidad pertenece a Γ y por la definición de c_k (véase 2.1) y el Lema 2.2 se obtiene (i). Ahora para la segunda afirmación tenemos que

$$\Phi_0 (0) = \Phi_0 (\varphi (0)) \leq \sup_{X_k} \Phi_0 (\varphi (u)) \quad \text{para toda } \varphi \in \Gamma,$$

y además como $X_k \subset X_{k+1}$, se sigue que $c_k \leq c_{k+1}$. ■

Sea $t \in [0, 1]$, denotamos por

$$K_c = \{u \in X : \Phi_t (u) = c \text{ y } \Phi_t' (u) = 0\}.$$

Proposición 2.5 *Si Φ satisface (**P1**) entonces K_c es compacto.*

Demostración: Como Φ satisface (**P1**), entonces Φ_t satisface la condición de Palais-Smale es decir toda sucesión $(u_n) \subset K_c$, tiene una subsucesión que converge a un punto crítico de Φ_t. Y por la continuidad de Φ_t, se cumple que $u \in K_c$. ■

Proposición 2.6 *c_k es valor crítico de Φ_0.*

Demostración: Por definición de c_k (véase 2.1) para toda $\varepsilon > 0$, existe $\varphi \in \Gamma$, tal que

$$\sup_{X_k} \Phi_0 (\varphi (u)) \leq c_k + \varepsilon, \tag{2.5}$$

como $\varphi \in \Gamma$ y Φ_0 cumple (**P4**) existe $R > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi (u) &= u, \quad \text{si } \|u\| \geq R, \\ \Phi_0 (u) &\leq c_k - \varepsilon \quad \text{si } \|u\| \geq R \text{ y } u \in X_k. \end{aligned}$$

Supongamos que c_k es valor regular Φ_0, como Φ_0 satisface (**P1**), existe $\varepsilon > 0$ tal que Φ_0 no tiene valores críticos en $[c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$. Usando el Lema de Deformación ([28, Lema 3.1]). Entonces existe una homotopía continua $\eta : X \times [0, 1] \to X$ tal que:

i) $\eta(u, t) = u$ si $t = 0$ ó $u \notin \Phi_0^{-1} ([c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon])$ ó $\|u\| \geq R$,

ii) $\eta(u, 1) \in \Phi_0^{\leq c_k - \varepsilon}$ para todo $u \in \Phi_0^{\leq c_k + \varepsilon}$,

iii) $\eta(\cdot, t)$ es impar para todo $t \in [0,1]$.
Sea $\hat{\varphi}(u) := \eta(\varphi(u), 1)$, como η satisface (i) y (iii) entonces $\hat{\varphi} \in \Gamma$, pero por (ii) y (2.5)

$$\sup_{X_k} \Phi_0 (\hat{\varphi}(u)) \leq c_k - \varepsilon,$$

contradiciendo la definición de c_k. ■

Observemos que el hecho de que Φ_0 es par implica que η es impar y por lo tanto tenemos que $\hat{\varphi} \in \Gamma$, esto fue fundamental en la demostración anterior. Los valores c_k no son valores críticos de Φ_1, por que este funcional no es par, entonces no podemos usar el mismo argumento, que usamos para Φ_0.

De las hipótesis (**P1**) y (**P3**) se obtiene el siguiente resultado.

Lema 2.7 *Para cada $b, \delta > 0$ existe $\rho > 0$ tal que*

$$\theta_1(t, \Phi_t(u)) - \delta \leq \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t) \leq \theta_2(t, \Phi_t(u)) + \delta$$

para toda $(u,t) \in X \times [0,1]$, con $|\Phi_t(u)| < b$ y $\|\Phi_t'(u)\| < \rho$.

Demostración: Argumentando por contradicción, supongamos que existen $b, \delta > 0$ y $(u_k, t_k) \in X \times [0,1]$ tales que

$$t_k \to t, \quad |\Phi_{t_k}(u_k)| < b, \quad \text{y} \quad \left\|\Phi_{t_k}'(u_k)\right\| \to 0 \quad \text{si } k \to +\infty$$

y además cumplen que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u_k, t_k) \leq \theta_1(t_k, \Phi_{t_k}(u_k)) - \delta \qquad \text{ó} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u_k, t_k) \geq \theta_2(t_k, \Phi_{t_k}(u_k)) + \delta.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que (u_k, t_k) satisface

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u_k, t_k) \leq \theta_1(t_k, \Phi_{t_k}(u_k)) - \delta.$$

Por (**P1**) existe una subsucesión de (u_k) que converge a un punto crítico u de Φ_t y por continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t) \leq \theta_1(t, \Phi_t(u)) - \delta,$$

y esto contradice (**P3**). ■

Fijemos $\delta > 0$. Para θ_1 y θ_2 como en (**P3**) consideramos los flujos $\bar{\zeta}_i : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, definidos por

$$\begin{cases} \bar{\zeta}_1(0,s) = s \\ \\ \frac{\partial}{\partial t}\bar{\zeta}_1(t,s) = \theta_1(t, \bar{\zeta}_1(t,s)) - \delta \end{cases} \tag{2.6}$$

y

$$\begin{cases} \bar{\zeta}_2(0,s) = s \\ \\ \frac{\partial}{\partial t}\bar{\zeta}_2(t,s) = \theta_2(t, \bar{\zeta}_2(t,s)) + \delta \end{cases} \tag{2.7}$$

Observemos que $\bar{\zeta}_1$, $\bar{\zeta}_2$ son continuas, $\bar{\zeta}_1 \leq \bar{\zeta}_2$ y que $\bar{\zeta}_1(t,\cdot)$, $\bar{\zeta}_2(t,\cdot)$ son no decrecientes en la segunda variable.

Lema 2.8 *Si existe $\varepsilon > 0$, tal que $\zeta_2(1, c_k + \varepsilon) < \zeta_1(1, c_{k+1})$ entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$\bar{\zeta}_2(t, c_k + \varepsilon) < \bar{\zeta}_1(t, c_{k+1}) \text{ para toda } t \in [0,1].$$

Demostración: Usando [1, Teorema 8.3] podemos escoger $\delta > 0$ tal que $\bar{\zeta}_2(1, c_k+\varepsilon) < \bar{\zeta}_1(1, c_{k+1})$. Ahora supongamos que existe $t_0 \in [0,1)$ tal que $\bar{\zeta}_2(t, c_k + \varepsilon) < \bar{\zeta}_1(t, c_{k+1})$ para toda $t \in (t_0, 1]$ y que $\bar{\zeta}_2(t_0, c_k + \varepsilon) = \bar{\zeta}_1(t_0, c_{k+1})$. Entonces se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\zeta}_2(t_0, c_k + \varepsilon) \leq \frac{\partial}{\partial t}\bar{\zeta}_1(t_0, c_{k+1})$$

es decir

$$\theta_2(t_0, \bar{\zeta}_2(t_0, c_k + \varepsilon)) + \delta \leq \theta_1(t_0, \bar{\zeta}_1(t_0, c_{k+1})) - \delta,$$

y esto contradice que $\theta_1 - \delta < \theta_2 + \delta$, por lo tanto obtenemos el resultado. ■

En el siguiente resultado usamos el método de Bolle [5], para definir deformaciones que preserven los conjuntos de subnivel y supernivel de la familia Φ_t usando el flujo gradiente.

Proposición 2.9 *Para cada $\tilde{d} \in \mathbb{R}$ y cada par de números reales $d_1 \leq d_2$ existen homotopias*
$\eta_\nu : X \times [0,1] \to X$ con $\nu = 1,2$ tales que

i) $\eta_\nu(u, 0) = u$ para toda $u \in X$,

ii) $\eta_\nu(u,t) = u$ si $\Phi_t(u) \leq \min_{0\leq t\leq 1} \bar{\zeta}_\nu\left(t, \bar{d}_1\right) - 1$ ó $\Phi_t(u) \geq \max_{0\leq t\leq 1} \bar{\zeta}_\nu\left(t, \bar{d}_2\right) + 1$, donde $\bar{d}_1 = \min\left\{\tilde{d}, d_1\right\}$ y $\bar{d}_2 = \max\left\{\tilde{d}, d_2\right\}$

iii) $\eta_\nu(\cdot,t) : X \to X$, *es un homeomorfismo para cada* $t \in [0,1]$ *y el mapeo* $X \times [0,1] \to X$ *definido por* $(u,t) \to (\eta_\nu)_t^{-1}(u) := (\eta_\nu(\cdot,t))^{-1}(u)$ *es continuo,*

iv) Si $\Phi_0(u) \geq \tilde{d}$ *entonces* $\Phi_t(\eta_1(u,t)) \geq \bar{\zeta}_1\left(t,\tilde{d}\right)$ *para toda* $t \in [0,1]$,

v) Si $c \in [d_1,d_2]$ *y* $\Phi_0(u) \leq c$ *entonces* $\Phi_t(\eta_2(u,t)) \leq \bar{\zeta}_2(t,c)$ *para toda* $t \in [0,1]$.

Demostración: Denotemos por

$$\alpha_\nu = \min_{0\leq t\leq 1}\left\{\bar{\zeta}_\nu\left(t,\bar{d}_1\right)\right\} \text{ y } \beta_\nu = \max_{0\leq t\leq 1}\bar{\zeta}_\nu\left(t,\bar{d}_2\right),$$

sea $b = \max\{|\alpha_\nu|,|\beta_\nu| : \nu = 1,2\}+1$ y la δ que fijamos en el Lema 2.8, escojamos $\rho > 0$ como en el Lema 2.7.

Sean $\lambda_\nu, \mu \in C^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ tales que $\lambda_\nu \equiv 0$ en $\left(-\infty,\alpha_\nu - \frac{1}{2}\right] \cup \left[\beta_\nu + \frac{1}{2},+\infty\right)$ $\lambda_\nu \equiv 1$ en $[\alpha_\nu,\beta_\nu]$ y $\mu \equiv 0$ en $\left[-\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}\right]$, $\mu \equiv 1$ en $(-\infty,-\rho]\cup[\rho,+\infty)$. Supongamos que θ_2^- es creciente en la segunda variable entonces consideremos los campos vectoriales definidos por

$$V_1(u,t) = \left(\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\Phi\right)^-(u,t) + 1 + \theta_1^+\left(t,\bar{\zeta}_1(t,\tilde{c})\right)\right)\lambda_1(\Phi_t(u))\,\mu(\|\nabla\Phi_t(u)\|)\,\frac{\nabla\Phi_t(u)}{\|\nabla\Phi_t(u)\|^2}$$

$$V_2(u,t) = -\left(\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\Phi\right)^+(u,t) + 1 + \theta_2^-\left(t,\bar{\zeta}_2\left(t,\bar{d}_2\right)\right)\right)\lambda_2(\Phi_t(u))\,\mu(\|\nabla\Phi_t(u)\|)\,\frac{\nabla\Phi_t(u)}{\|\nabla\Phi_t(u)\|^2}$$

donde $h^\pm := \max\{\pm h, 0\} \geq 0$.
Observemos que $V_\nu = 0$ si $\Phi_t(u) \notin \left[\alpha_\nu - \frac{1}{2},\beta_\nu + \frac{1}{2}\right]$ ó $\|\nabla\Phi_t(u)\| \leq \frac{\rho}{2}$, esto se sigue de la definición de μ y de λ_ν. Por otro lado, si $\Phi_t(u) \in \left[\alpha_\nu - \frac{1}{2},\beta_\nu + \frac{1}{2}\right]$ y $\|\nabla\Phi_t(u)\| \geq \frac{\rho}{2}$, implica

$$-b \leq \alpha_\nu - \frac{1}{2} \leq \Phi_t(u) \leq \beta_\nu + \frac{1}{2} \leq b$$

es decir

$$|\Phi_t(u)| \leq b$$

entonces usando (**P2**) y como $\left|\theta_\nu\left(t,\bar{\zeta}_\nu(t,c)\right)\right|$ es continua se sigue que

$$\begin{aligned}
\|V_\nu(u,t)\| &\leq \frac{\left(\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right)(u,t)\right| + 1 + \left|\theta_\nu\left(t,\bar{\zeta}_\nu(t,c)\right)\right|\right)}{\|\nabla\Phi_t(u)\|} \\
&\leq \frac{C_1\left(\|\nabla\Phi_t(u)\|+1\right)\left(\|u\|+1\right)}{\|\nabla\Phi_t(u)\|} \\
&\leq C_1\left(1+\frac{1}{\|\nabla\Phi_t(u)\|}\right)\left(\|u\|+1\right) \\
&\leq C_1\left(1+\frac{2}{\rho}\right)\left(\|u\|+1\right) \\
&\leq C_2\left(\|u\|+1\right)
\end{aligned}$$

para algunas constantes positivas C_1 y C_2. Usando lo anterior y como V_ν es continua y localmente Lipschitz con respecto a la segunda variable, ya que $\Phi_t \in C^2$, implica la existencia del siguiente flujo global continuo $\eta_\nu : X \times [0,1] \to X$, dado por

$$\begin{cases} \eta_\nu(u,0) = u \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\eta_\nu(u,t) = V_\nu\left(\eta_\nu(u,t),t\right) \end{cases}$$

(véase [25, Capítulo 4]). Es claro que η_ν cumple $i)$ y $ii)$, ya que

$$\begin{aligned}
\Phi_t(u) &\leq \min_{0\leq t\leq 1}\bar{\zeta}_\nu\left(t,\bar{d}_1\right) - 1 \\
\Phi_t(u) &\leq \alpha_\nu - 1 < \alpha_\nu - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

por lo tanto $\eta_\nu(u,t) = u$ el otro caso es análogo. La propiedad (iii), se sigue de la definición de η_ν como flujos. Demostremos la propiedad (v). Sea $u \in X$ tal que $\Phi_0(u) \leq c$, con $c \in [d_1, d_2]$. Sea

$$f(t) := \Phi_t\left(\eta_2(u,t)\right).$$

Dado que

$$f(0) = \Phi_0(u) \leq c = \bar{\zeta}_2(0,c)$$

es suficiente demostrar que si

$$f(t) = \bar{\zeta}_2(t,c) \text{ entonces } f'(t) < \frac{\partial}{\partial t}\bar{\zeta}_2(t,c) = \theta_2\left(t,\bar{\zeta}_2(t,c)\right) + \delta. \tag{2.8}$$

Supongamos que $f(t) = \bar{\zeta}_2(t,c)$, como

$$\alpha_2 \leq \bar{\zeta}_2\left(t,\bar{d}_1\right) \leq \bar{\zeta}_2(t,c) \leq \bar{\zeta}_2\left(t,\bar{d}_2\right) \leq \beta_2$$

que se sigue que $\alpha_2 \leq f(t) \leq \beta_2$, de donde $\lambda_2(f(t)) = 1$, es decir, $\lambda_2(\Phi_t(\eta_2(u,t))) = 1$, denotemos por

$$\varphi(t) := -\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right)^+ (\eta_2(u,t),t) + 1 + \theta_2^-\left(t,\bar{\zeta}_2\left(t,\bar{d}_2\right)\right)\right) \leq 0,$$

entonces

$$V_2(\eta_2(u,t),t) = \varphi(t)\,\mu(\|\nabla\Phi_t(\eta_2(u,t))\|)\,\frac{\nabla\Phi_t(\eta_2(u,t))}{\|\nabla\Phi_t(\eta_2(u,t))\|^2}. \tag{2.9}$$

Ahora

$$f'(t) = \Phi_t'(\eta_2(u,t))(V_2(\eta_2(u,t),t)) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_2(u,t),t)$$

usando (2.9)

$$\begin{aligned} f'(t) &= \Phi_t'(\eta_2(u,t))\left(\varphi(t)\,\mu(\|\nabla\Phi_t(\eta_2(u,t))\|)\,\frac{\nabla\Phi_t(\eta_2(u,t))}{\|\nabla\Phi_t(\eta_2(u,t))\|^2}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_2(u,t),t) \end{aligned}$$

es decir

$$f'(t) = \varphi(t)\,\mu(\|\nabla\Phi_t(\eta_1(u,t))\|) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_1(u,t),t).$$

Si $\|\nabla\Phi_t(\eta_2(u,t))\| < \rho$, entonces por el Lema 2.7

$$f'(t) \leq \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_2(u,t),t) < \theta_2\left(t,\bar{\zeta}_2(t,c)\right) + \delta.$$

Si $\|\nabla\Phi_t(\eta_2(u,t))\| \geq \rho$ entonces $\mu(\|\nabla\Phi_t(\eta_2(u,t))\|) = 1$ y entonces

$$\begin{aligned} f'(t) &= \varphi(t) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_2(u,t),t) \\ &= -\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right)^+ (\eta_2(u,t),t) + 1 + \theta_2^-\left(t,\bar{\zeta}_2\left(t,\bar{d}_2\right)\right)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_2(u,t),t). \end{aligned}$$

Como $\bar{\zeta}_2(t,c) \leq \bar{\zeta}_2\left(t,\bar{d}_2\right)$ y θ_2^- es creciente en la segunda variable se sigue que

$\theta_2^-\left(t,\bar{\zeta}_2\left(t,c\right)\right) \leq \theta_2^-\left(t,\bar{\zeta}_2\left(t,\bar{d}_2\right)\right)$ de donde

$$\begin{aligned} & -\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right)^+\left(\eta_2\left(u,t\right),t\right)+1+\theta_2^-\left(t,\bar{\zeta}_2\left(t,\bar{d}_2\right)\right)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\Phi\left(\eta_2\left(u,t\right),t\right) \\ \leq \; & -\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right)^+\left(\eta_2\left(u,t\right),t\right)+1+\theta_2^-\left(t,\bar{\zeta}_2\left(t,c\right)\right)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\Phi\left(\eta_2\left(u,t\right),t\right) \\ \leq \; & \theta_2\left(t,\bar{\zeta}_2\left(t,c\right)\right) < \theta_2\left(t,\bar{\zeta}_2\left(t,c\right)\right)+\delta. \end{aligned}$$

Esto prueba (2.8), el caso en que θ_2^- es decreciente en la segunda variable se hace un procedimiento análogo. Por lo tanto η_2 satisface (v). Para probar que η_1 satisface (iv) no es necesaria la hipótesis de monotonía en la segunda variable de θ_1^+ y el procedimiento también es análogo. ■

Definición 2.10 *Dado un subconjunto $A \subset X$, denotamos por $\Gamma\left(A\right)$ como el conjunto de todas las funciones continuas $\tau \in C^0\left(X,X\right)$ tales que:*
$i)$ $\tau\left(u\right)=u$ para toda $u \in A$,
$ii)$ Existe $R>0$ tal que $\tau\left(u\right)=u$ si $\|u\| \geq R$.

Proposición 2.11 *Si existe $\varepsilon>0$ tal que*

$$\zeta_2\left(1,c_k+\varepsilon\right)<\zeta_1\left(1,c_{k+1}\right)$$

entonces para toda $\varphi \in \Gamma$ tal que $\sup\limits_{\varphi(X_k)}\Phi_0 < c_k+\varepsilon$ existen dos subconjuntos $A_k \subset B_k \subset X$, con las siguientes propiedades:
$i)$ $\sup\limits_{A_k}\Phi_1 \leq \bar{\zeta}_2\left(1,c_k+\varepsilon\right)<\bar{\zeta}_1\left(1,c_{k+1}\right)$
$ii)$ $\sup\limits_{B_k}\Phi_1 \leq \bar{\zeta}_2\left(1,\sup\limits_{\varphi(X_{k+1})}\Phi_0\right)$,
$iii)$ $\inf\limits_{\tau\in\Gamma(A_k)}\sup\limits_{\tau(B_k)}\Phi_1 \geq \bar{\zeta}_1\left(1,c_{k+1}\right)$

Demostración: Por el Lema 2.8 existe $\delta>0$ tal que

$$\bar{\zeta}_2(t,c_k+\varepsilon)<\bar{\zeta}_1(t,c_{k+1}) \text{ para toda } t\in[0,1].$$

Sea $\varphi \in \Gamma$ tal que $\sup\limits_{\varphi(X_k)}\Phi_0 < c_k+\varepsilon$. Como

$$\bar{\zeta}_2\left(1,c_k+\varepsilon\right)<\bar{\zeta}_1\left(1,c_{k+1}\right)\leq\bar{\zeta}_2\left(1,c_{k+1}\right)$$

y por definición de c_{k+1} (véase 2.1) se tiene que

$$c_k + \varepsilon < c_{k+1} \leq \sup_{\varphi(X_{k+1})} \Phi_0.$$

Por la Proposición 2.9, existen homotopias $\eta_\nu : X \times [0,1] \to X$, con $\tilde{d} = c_{k+1}$, si $\nu = 1$ y $d_1 = c_k + \varepsilon$, $d_2 = \sup_{\varphi(X_{k+1})} \Phi_0$, si $\nu = 2$, es decir η_1, η_2 cumplen que

$$\text{si } \Phi_0(u) \geq c_{k+1} \text{ entonces } \Phi_t(\eta_1(u,t)) \geq \bar{\zeta}_1(t, c_{k+1}) \ \ \forall\ t \in [0,1] \tag{2.10}$$

y

$$\text{si } c \in \left[c_k + \varepsilon, \sup_{\varphi(X_{k+1})} \Phi_0\right] \text{ y } \Phi_0(u) \leq c \text{ entonces } \Phi_t(\eta_2(u,t)) \leq \bar{\zeta}_2(t,c) \ \ \forall\ t \in [0,1]. \tag{2.11}$$

Como $\Phi_0(\varphi(u)) \leq c_k + \varepsilon$ para toda $u \in X_k$, entonces por (2.11) se tiene que

$$\Phi_t(\eta_2(\varphi(u), t)) \leq \bar{\zeta}_2(t, c_k + \varepsilon), \text{ para toda } t \in [0,1] \text{ y } u \in X_k \tag{2.12}$$

y por (2.10)

$$\Phi_t(\eta_1(u,t)) \geq \bar{\zeta}_1(t, c_{k+1}), \text{ para toda } t \in [0,1], \ u \in \Phi_0^{\geq c_{k+1}}$$

donde $\Phi_0^{\geq c_{k+1}} := \{u \in X : \Phi_0(u) \geq c_{k+1}\}$. Por hipótesis obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_t(\eta_2(\varphi(u), t)) &\leq \bar{\zeta}_2(t, c_k + \varepsilon) \\
&< \bar{\zeta}_1(t, c_{k+1}) \\
&\leq \inf \Phi_t\left(\eta_1\left(\Phi_0^{\geq c_{k+1}}, t\right)\right) \text{ para toda } u \in X_k, \ t \in [0,1]
\end{aligned}$$

es decir

$$\eta_2(\varphi(X_k), t) \cap \eta_1\left(\Phi_0^{\geq c_{k+1}}, t\right) = \varnothing, \text{ para toda } t \in [0,1]. \tag{2.13}$$

Sea $e \in X_{k+1} \setminus X_k$ y definamos a los conjuntos A_k y B_k como sigue

$$\begin{aligned}
A_k &: = \{\eta_2(\varphi(u), 1) : u \in X_k\} \\
B_k &: = \{\eta_2(\varphi(u + te), 1) : u \in X_k, \ t \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Por definición se tiene que $A_k \subset B_k \subset X$, veamos que estos conjuntos satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii). Veremos que se cumple (i)

$$\sup_{A_k} \Phi_1 = \sup_{X_k} \Phi_1(\eta_2(\varphi(u), 1))$$

como $\Phi_0(\varphi(u)) \leq c_k + \varepsilon$ para toda $u \in X_k$ y (2.12) se tiene que

$$\Phi_1(\eta_2(\varphi(u), 1)) \leq \bar{\zeta}_2(1, c_k + \varepsilon) \text{ para toda } u \in X_k$$

es decir

$$\sup_{A_k} \Phi_1 = \sup_{X_k} \Phi_1(\eta_2(\varphi(u), 1)) \leq \bar{\zeta}_2(1, c_k + \varepsilon) < \bar{\zeta}_1(1, c_{k+1}).$$

Para (ii)

$$\sup_{B_k} \Phi_1 = \sup\{\Phi_1(\eta_2(\varphi(u + te), 1)) : u \in X_k,\ t \geq 0\}$$

$$\Phi_0(\varphi(u + te)) \leq \sup\{\Phi_0(\varphi(u + te)) : u \in X_k,\ t \geq 0\} \leq \sup_{\varphi(X_{k+1})} \Phi_0$$

por (2.11)

$$\sup_{B_k} \Phi_1 \leq \bar{\zeta}_2\left(1, \sup_{\varphi(X_{k+1})} \Phi_0\right)$$

de donde se obtiene (ii).
Para demostrar (iii) es suficiente probar que para todo $\tau \in \Gamma(A_k)$ existe $w_0 \in B_k$ tal que

$$\bar{\zeta}_1(1, c_{k+1}) \leq \Phi_1(\tau(w_0)). \tag{2.14}$$

Sea $\tau \in \Gamma(A_k)$, es decir, $\tau : X \to X$, $\tau(u) = u$ para toda $u \in A_k$ y existe $R > 0$ tal que $\tau(u) = u$ si $\|u\| \geq R$. Definimos la función $\vartheta : \{u + te : u \in X_k,\ t \geq 0\} \to X$ como

$$\vartheta(u + te) := \begin{cases} (\eta_1)_{2t}^{-1}(\eta_2(\varphi(u), 2t)), & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ (\eta_1)_1^{-1} \circ \tau(\eta_2(\varphi(u + (2t - 1)e), 1)), & \text{si } t \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Esta función esta bien definida por que si $t = \dfrac{1}{2}$, entonces $\eta_2(\varphi(u), 1) \in A_k$ y $\tau(\eta_2(\varphi(u), 1)) = \eta_2(\varphi(u), 1)$ además por la (Proposición 2.9 (iii)) es continua.
Veremos que ϑ satisface las hipótesis de la Proposición 2.3. Sea $u \in X_k$, es decir $t = 0$ y como $\eta_\nu(u, 0) = u$ para toda $u \in X$, $\nu = 1, 2$ se tiene que $\vartheta(u) = \varphi(u)$, es decir $\vartheta|_{X_k}$ es impar.
Por definición de φ, τ y la propiedad **(P4)**, existe $\tilde{R} > 0$ tal que si $u \in X_{k+1}$ y $\|u\| \geq \tilde{R}$, entonces $\varphi(u) = u$, $\tau(u) = u$ y

$$\Phi_t(u) \leq \min\left\{\min_{0\leq t\leq 1} \bar{\zeta}_2(t, c_k + \varepsilon), \min_{0\leq t\leq 1} \bar{\zeta}_1(t, c_{k+1})\right\} - 1 \quad \text{para toda } t \in [0, 1]$$

por la Proposición (2.9) (ii), se tiene que $\eta_\nu(u, t) = u$ si $u \in X_{k+1}$ y $\|u\| \geq \tilde{R}$. Por lo tanto ϑ satisface la Proposición (2.3), entonces existe un punto $(u_0, t_0) \in X_k \times [0, +\infty)$ tal que

$$\Phi_0(\vartheta(u_0 + t_0 e)) \geq c_{k+1}.$$

Si $t_0 \leq \dfrac{1}{2}$ entonces

$$(\eta_1)_{2t_0} \vartheta (u_0 + t_0 e) = (\eta_2 (\varphi (u_0), 2t_0)),$$

contradiciendo (2.13) por que $\vartheta (u_0 + t_0 e) \in \Phi_0^{\geq c_{k+1}}$. Por lo tanto $t_0 > \dfrac{1}{2}$ y

$$(\eta_1)_1 \circ \vartheta (u_0 + t_0 e) = \tau (\eta_2 (\varphi (u_0 + (2t_0 - 1) e), 1))$$

de donde

$$\Phi_1 (\tau (\eta_2 (\varphi (u_0 + (2t_0 - 1) e), 1))) = \Phi_1 ((\eta_1)_1 \circ \vartheta (u_0 + t_0 e))$$

y como $\vartheta (u_0 + t_0 e) \in \Phi_0^{\geq c_{k+1}}$, por (2.10) se sigue que

$$\Phi_1 ((\eta_1)_1 \circ \vartheta (u_0 + t_0 e)) \geq \bar{\zeta}_1 (1, c_{k+1}),$$

definimos a $w_0 := \eta_2 (\varphi (u_0 + (2t_0 - 1) e), 1) \in B_k$ con esto se cumple (2.14) y esto prueba (iii) ■

La Proposición anterior garantiza que los conjuntos A_k y B_k tienen la siguiente propiedad de enlace respecto al funcional Φ_1

$$\tau (B_k) \cap (\Phi_1)^{\geq \bar{\zeta}_1 (1, c_{k+1})} \neq \varnothing \quad \text{para toda } \tau \in \Gamma (A_k),$$

donde $(\Phi_1)^{\geq \bar{\zeta}_1 (1, c_{k+1})} := \left\{ u \in X : \Phi_1 (u) \geq \bar{\zeta}_1 (1, c_{k+1}) \right\}$. Esta propiedad junto con la condición de Palais-Smale **(P1)** garantiza lo siguiente:

Teorema 2.12 *Supongamos que Φ_t cumple* ***(P1)-(P4)****. Si $\zeta_2(1, c_k + \varepsilon) < \zeta_1(1, c_{k+1})$ para alguna $\varepsilon > 0$, entonces para toda $\varphi \in \Gamma$ tal que $\sup_{\varphi(X_k)} \Phi_0 < c_k + \varepsilon$ existe un valor crítico $\widetilde{c}_k$ de Φ_1 tal que*

$$\zeta_2(1, c_k) < \zeta_1(1, c_{k+1}) \leq \widetilde{c}_k \leq \zeta_2(1, \sup_{x \in X_{k+1}} \Phi_0(\varphi(x))). \tag{2.15}$$

Demostración: Como $\zeta_2(1, c_k + \varepsilon) < \zeta_1(1, c_{k+1})$, por el Lema (2.8) se sigue que $\bar{\zeta}_2(t, c_k + \varepsilon) < \bar{\zeta}_1(t, c_{k+1})$ para toda $t \in [0, 1]$. Por el Lema anterior existen A_k, $B_k \subset X$ que satisfacen $(i) - (iii)$. Si definimos a

$$\tilde{c}_k := \inf_{\tau \in \Gamma(A_k)} \sup_{u \in B_k} \Phi_1 (\tau (u))$$

como se cumple el Lema anterior tenemos que

$$\sup_{A_k} \Phi_1 \leq \bar{\zeta}_2 (1, c_k + \varepsilon) < \bar{\zeta}_1 (1, c_{k+1}) \leq \tilde{c}_k \leq \sup_{B_k} \Phi_1 \leq \bar{\zeta}_2 \left(1, \sup_{\varphi(X_{k+1})} \Phi_0 \right) \tag{2.16}$$

para toda $\varphi \in \Gamma$ tal que $\sup_{\varphi(X_k)} \Phi_0 < c_k + \varepsilon$, ya que la identidad pertenece a $\Gamma(A_k)$. Supongamos que $\tilde{c}_k$ es un valor regular de Φ_1. Entonces por la condición de Palais-Smale **(P1)** existe $h > 0$ tal que Φ_1 no tiene valores críticos en $[\tilde{c}_k - h, \tilde{c}_k + h]$. Escogemos $h > 0$ de modo que, $\bar{\zeta}_2(1, c_k + \varepsilon) < \tilde{c}_k - h$. Por el Lema de Deformación (véase Proposición 2.6) existe una homotopía continua $\eta : X \times [0,1] \to X$ tal que:

$(D1)$ $\eta(u,0) = u$ para toda $u \in X$,
$(D2)$ $\eta(u,t) = u$ si $\|u\| \geq R_1$, (véase la demostración de Proposición 2.6)
$(D3)$ $\eta(u,r) = u$ para toda $u \in \Phi_1^{\leq \tilde{c}_k - h}$, $r \in [0,1]$
$(D4)$ $\eta(u,1) \in \Phi_1^{\leq \tilde{c}_k - h}$ para todo $u \in \Phi_1^{\leq \tilde{c}_k + h}$.

Sea $\tau \in \Gamma(A_k)$ tal que

$$\sup_{u \in B_k} \Phi_1(\tau(u)) \leq \tilde{c}_k + h$$

y sea $\tilde{\tau}(u) = \eta(\tau(u), 1)$, si probamos que $\tilde{\tau} \in \Gamma(A_k)$, entonces por la desigualdad anterior y por $(D3)$ se sigue que

$$\sup_{u \in B_k} \Phi_1(\tilde{\tau}(u)) = \sup_{u \in B_k} \Phi_1(\eta(\tau(u), 1)) \leq \tilde{c}_k - h$$

y esto es una contradicción por la definición de $\tilde{c}_k$ y entonces $\tilde{c}_k$ es un valor crítico de Φ_1.
Probaremos que $\tilde{\tau} \in \Gamma(A_k)$ sea $u \in A_k$ entonces por (2.16) se tiene que

$$\sup_{A_k} \Phi_1 \leq \bar{\zeta}_2(1, c_k + \varepsilon) < \tilde{c}_k - h$$

y como $\tau \in \Gamma(A_k)$ y $(D2)$ tenemos que $\tilde{\tau}(u) = \eta(\tau(u), 1) = \eta(u,1) = u$.
Por $(D2)$ existe $R_1 > 0$ tal que $\eta(u,t) = u$ si $\|u\| \geq R_1$. Y también existe $R_2 > 0$ tal que $\tau(u) = u$ si $u \in X$ y $\|u\| > R_2$, entonces tomando $\tilde{R}$ suficientemente grande tenemos que

$$\tilde{\tau}(u) = \eta(\tau(u), 1) = \eta(u,1) = u \text{ si } \|u\| \geq \tilde{R}.$$

Con esto demostramos que $\tilde{\tau} \in \Gamma(A_k)$. Ahora haciendo tender δ y ε a cero en (2.16) obtenemos que

$$\sup_{A_k} \Phi_1 \leq \zeta_2(1, c_k) < \zeta_1(1, c_{k+1}) \leq \tilde{c}_k \leq \sup_{B_k} \Phi_1 \leq \zeta_2\left(1, \sup_{\varphi(X_{k+1})} \Phi_0\right).$$

■

Para demostrar el Teorema de **(Bolle, Ghoussoub, Tehrani)** solo hace falta el siguiente Lemma.

Lema 2.13 *Si se cumple (2.4) entonces las sucesiones*

$$\left(\min_{0\leq t\leq 1}\left(\zeta_1\left(t,c_{k+1}\right)-\zeta_2\left(t,c_k\right)\right)\right) \quad y \quad \left(\min_{0\leq t\leq 1}\zeta_2\left(t,c_k\right)\right)$$

no están acotadas superiormente

Demostración: Por la Definición 2.2 de ζ_i y por el Teorema 4.1.5 de [25] se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\zeta_i\left(t,s\right)-s\right| &\leq e^{k_i t}\int_0^t \left|\theta_i\left(\xi,s\right)\right| d\xi \quad \text{para toda } t\in[0,1] \\ &\leq A_i \max_{0\leq t\leq 1}\left|\theta_i\left(t,s\right)\right| \end{aligned}$$

donde k_i es la constante de Lipschitz para θ_i y $A_i = e^{k_i}$. Si denotamos a $\bar{\theta}_i(s) := \max\limits_{0\leq t\leq 1} |\theta_i(t,s)|$, tenemos que

$$\left|\zeta_i\left(t,s\right)-s\right| \leq A\bar{\theta}_i(s) \quad \text{para toda } t\in[0,1] \tag{2.17}$$

donde $i = 1, 2$ y $A = \max\{A_1, A_2\} > 0$. Haciendo $s = c_{k+1}$ para $i = 1$ y $s = c_k$ para $i = 2$, se tiene que

$$0 \leq c_{k+1}-c_k = \left(c_{k+1}-\zeta_1\left(t,c_{k+1}\right)\right)+\zeta_1\left(t,c_{k+1}\right)-\zeta_2\left(t,c_k\right)+\left(\zeta_2\left(t,c_k\right)-c_k\right)$$

aplicando (2.17) tenemos que

$$\left|c_{k+1}-\zeta_1\left(t,c_{k+1}\right)\right| \leq A\bar{\theta}_1(c_{k+1}) \quad \text{y} \quad \left|\zeta_2\left(t,c_k\right)-c_k\right| \leq A\bar{\theta}_2(c_k)$$

es decir

$$0 \leq \frac{c_{k+1}-c_k}{\bar{\theta}_1(c_{k+1})+\bar{\theta}_2(c_k)+1} \leq \frac{\zeta_1(t,c_{k+1})-\zeta_2(t,c_k)}{\left(\bar{\theta}_1(c_{k+1})+\bar{\theta}_2(c_k)+1\right)}+A$$

y como

$$\left(\frac{c_{k+1}-c_k}{\bar{\theta}_1(c_{k+1})+\bar{\theta}_2(c_k)+1}\right) \tag{2.18}$$

no está acotada, entonces la sucesión

$$\min_{0\leq t\leq 1}\left(\zeta_1\left(t,c_{k+1}\right)-\zeta_2\left(t,c_k\right)\right)$$

no está acotada superiormente. Además como $\zeta_1 \leq \zeta_2$, entonces

$$\min_{0\leq t\leq 1}\left(\zeta_1\left(t,c_{k+1}\right)-\zeta_2\left(t,c_k\right)\right) \leq \min_{0\leq t\leq 1}\left(\zeta_2\left(t,c_{k+1}\right)-\zeta_2\left(t,c_k\right)\right)$$

es decir

$$\min_{0\leq t\leq 1} \zeta_2\,(t, c_k)$$

tampoco está acotada superiormente. ■

Demostración del Teorema (2.1) (Bolle, Ghoussoub, Tehrani)

Demostración: Por el Teorema 2.12 tenemos que $\widetilde{c_k}$ es valor crítico de Φ_1 y además

$$\min_{0\leq t\leq 1} \zeta_2\,(t, c_k) \leq \zeta_2(1, c_k) < \widetilde{c_k}$$

y por el Lema anterior se sigue que $(\widetilde{c_k})$ no está acotada superiormente es decir $\widetilde{c_k} \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$. ■

Capítulo 3

Multiplicidad de soluciones simétricas

3.1. El problema

Consideremos el problema

$$(\wp_G) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f & \text{en } \Omega \\ u = u_0, & \text{en } \partial\Omega \\ u(gx) = u(x) & x \in \Omega,\ g \in G \end{cases}$$

donde G es un subgrupo cerrado del grupo $O(N)$ de las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^N$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto, acotado, suave y G-invariante, $N \geq 3$, $2 < p < 2^* := \frac{2N}{N-2}$, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $u_0 \in C^2(\partial\Omega)$, f y u_0 son G-invariantes.

Recordemos que un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^N$ es G-invariante si $gx \in \Omega$ para toda $x \in \Omega$, $g \in G$ y que una función $h : \Omega \to \mathbb{R}$ es G-invariante si $h(gx) = h(x)$ para toda $x \in \Omega$, $g \in G$.

Sea $\widehat{u}_0 \in H^1(\Omega)$ la única solución del problema

$$-\Delta\widehat{u}_0 = 0 \ \text{ en } \Omega, \qquad \widehat{u}_0 = u_0 \ \text{ en } \partial\Omega, \tag{3.1}$$

entonces $\widehat{u}_0 \in C^2(\overline{\Omega})$, (veáse [17, Teorema 9.19]). Para cada $g \in G$ la función $\widehat{u}_0 \circ g$ es también una solución de (3.1), ya que $\partial\Omega$ es G-invariante, $\widehat{u}_0(gx) = u_0(gx) = u_0(x)$ para toda $x \in \partial\Omega$ y $-\Delta(\widehat{u}_0 \circ g) = 0$ en Ω. De la unicidad de la solución de (3.1) concluimos que

$$\widehat{u}_0(gx) = \widehat{u}_0(x) \qquad \forall g \in G,\ x \in \Omega.$$

En consecuencia, el cambio de variable $u = v + \widehat{u}_0$ transforma al problema $(\wp_G)$ en el problema equivalente

$$(\wp'_G) \quad \begin{cases} -\Delta v = |v + \widehat{u}_0|^{p-2}(v + \widehat{u}_0) + f & \text{en } \Omega \\ \quad v = 0, & \text{en } \partial\Omega \\ v(gx) = v(x) & x \in \Omega,\ g \in G \end{cases}$$

con condición homogénea de Dirichlet en la frontera.

3.2. Formulación variacional del problema

Denotaremos por

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega \nabla u \nabla v, \qquad \|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2},$$

al producto escalar y la norma en $H_0^1(\Omega)$, por

$$|u|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}$$

a la norma en $L^p(\Omega)$. Consideremos el funcional $I_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$\begin{aligned} I_1(v) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - \frac{1}{p} |v + \widehat{u}_0|^p - fv \right) \\ &= \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{1}{p} |v + \widehat{u}_0|_p^p - \int_\Omega fv. \end{aligned}$$

Es bien sabido que I_1 es de clase C^2 (véase [28, Proposición 1.12]) y que las soluciones del problema

$$(\wp') \quad \begin{cases} -\Delta v = |v + \widehat{u}_0|^{p-2}(v + \widehat{u}_0) + f & \text{en } \Omega \\ \quad v = 0, & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

son los puntos críticos de I_1.

Fijemos $t \in [0, 1]$ y consideremos el funcional $I_t : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ de clase C^2 dado por

$$I_t(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{1}{p} |v + t\widehat{u}_0|_p^p - t \int_\Omega fv.$$

La acción de G en Ω induce una acción de G en $H_0^1(\Omega)$ como sigue: Dados $v \in H_0^1(\Omega)$ y $g \in G$, definimos

$$(gv)(x) := v\left(g^{-1}x\right).$$

Esta acción es isométrica tanto para la norma $\|\cdot\|$ como para la norma $|\cdot|_p$. En efecto,

$$\nabla (gv)(x) = g\nabla v\left(g^{-1}x\right) \qquad \forall g \in G,\ x \in \Omega,$$

y por la invariancia de la integral bajo transformaciones ortogonales se tiene que

$$\begin{aligned} \|gv\|^2 &= \int_\Omega |\nabla (gv)|^2 = \int_\Omega \left|g\nabla v\left(g^{-1}x\right)\right|^2 dx = \int_\Omega |\nabla v|^2 = \|v\|^2, \\ |gv|_p^p &= \int_\Omega |gv|^p = \int_\Omega \left|v(g^{-1}x)\right|^p dx = \int_\Omega |v|^p = |v|_p^p. \end{aligned}$$

Además, como f es G-invariante,

$$\int_\Omega f(gv) = \int_\Omega f(x)v(g^{-1}x)dx = \int_\Omega f(g^{-1}x)v(g^{-1}x)dx = \int_\Omega fv,$$

en consecuencia, dado que $\widehat{u}_0$ es G-invariante, obtenemos

$$\begin{aligned} I_t(gv) &= \frac{1}{2}\|gv\|^2 - \frac{1}{p}|gv + t\widehat{u}_0|_p^p - t\int_\Omega f(gv) \\ &= \frac{1}{2}\|gv\|^2 - \frac{1}{p}|gv + gt\widehat{u}_0|_p^p - t\int_\Omega f(gv) \\ &= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{p}|v + t\widehat{u}_0|_p^p - t\int_\Omega fv \\ &= I_t(v), \end{aligned}$$

para toda $g \in G$, $v \in H_0^1(\Omega)$, es decir, el funcional $I_t : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es G-invariante. Notemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla I_t(gv), u\rangle &= \lim_{s\to 0} \frac{I_t(gv + su) - I_t(gv)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{I_t(v + sg^{-1}u) - I_t(v)}{s} \\ &= \left\langle \nabla I_t(v), g^{-1}u\right\rangle \qquad \forall g \in G,\ u, v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

y como la acción de G en $H_0^1(\Omega)$ es una isometría, obtenemos que

$$\langle \nabla I_t(gv), u\rangle = \langle g\nabla I_t(v), u\rangle \qquad \forall g \in G,\ u, v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir,

$$\nabla I_t(gv) = g\nabla I_t(v) \qquad \forall g \in G,\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$

Denotemos por

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega)^G : &= \{v \in H_0^1(\Omega) : gv = v \ \ \forall g \in G\} \\ &= \{v \in H_0^1(\Omega) : v(gx) = v(x) \ \ \forall g \in G, \ x \in \Omega\}, \end{aligned}$$

al espacio de puntos fijos de $H_0^1(\Omega)$ bajo la acción de G. Este es un subespacio vectorial cerrado de $H_0^1(\Omega)$ y por tanto, es un espacio de Hilbert. Una consecuencia de (3.2) es el siguiente resultado que, en un contexto más general, se debe a Palais (véase [28, Teorema 1.28]).

Proposición 3.1 (Principio de criticalidad simétrica) *Si $v \in H_0^1(\Omega)^G$ entonces, para toda $t \in [0,1]$, se cumple que*

$$\nabla(I_t \mid_{H_0^1(\Omega)^G})(v) = \nabla I_t(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)^G.$$

En particular, las soluciones de $(\wp_G')$ son los puntos críticos de la restricción del funcional I_1 al espacio de puntos fijos $H_0^1(\Omega)^G$.

Demostración: Si $v \in H_0^1(\Omega)^G$, se sigue de (3.2) que

$$\nabla I_t(v) = \nabla I_t(gv) = g\nabla I_t(v) \qquad \forall g \in G,$$

es decir, $\nabla I_t(v) \in H_0^1(\Omega)^G$. Por lo tanto,

$$\nabla(I_t \mid_{H_0^1(\Omega)^G})(v) = \nabla I_t(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)^G.$$

Las soluciones de $(\wp_G')$ son los puntos críticos de $I_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ que están en $H_0^1(\Omega)^G$. Por lo anterior, éstos son precisamente los puntos críticos de la restricción $I_1 \mid_{H_0^1(\Omega)^G}$: $H_0^1(\Omega)^G \to \mathbb{R}$. ■

3.3. Propiedades de la trayectoria de funcionales

De aquí en adelante denotaremos por $I_t : H_0^1(\Omega)^G \to \mathbb{R}$ a la restricción de I_t a $H_0^1(\Omega)^G$. Consideremos la familia de funcionales $I_t : H_0^1(\Omega)^G \to \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, definidos en la sección anterior,

$$\begin{aligned} I_t(v) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - \frac{1}{p} |v + t\widehat{u}_0|^p - tfv \right) \\ &= \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{1}{p} |v + t\widehat{u}_0|_p^p - t \int_\Omega fv. \end{aligned}$$

Claramente el funcional $I : H_0^1(\Omega)^G \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dado por $I(v,t) := I_t(v)$ es de clase C^2. A continuación veremos que I satisface las condiciones (**P1**)-(**P4**) del Teorema 2.1.

Proposición 3.2 *I_t cumple **(P1)** y **(P2)**.*

Demostración: Si $|I_t(v)| \leq b$, usando las desigualdades de Hölder y Sobolev obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\left|v+t\widehat{u}_0\right|_p^p &= \frac{1}{2}\left\|v\right\|^2 - t\int_\Omega fv - I_t(v) \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|v\right\|^2 + \alpha_0\left|f\right|_2\left\|v\right\| + b \\
&\leq \alpha_1\left(\left\|v\right\|+1\right)^2.
\end{aligned}$$

Dado que Ω es acotado, usando de nuevo la desigualdad de Hölder y la desigualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|v+t\widehat{u}_0\right|_{p-1}^{p-1} &\leq \alpha_2\left|v+t\widehat{u}_0\right|_p^{p-1} \\
&\leq \alpha_3\left(\left\|v\right\|+1\right)^{2(p-1)/p}
\end{aligned}$$

donde α_i son constantes positivas. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
I_t'(v)v &= \left\|v\right\|^2 - \int_\Omega \left|v+t\widehat{u}_0\right|^{p-2}\left(v+t\widehat{u}_0\right)v - t\int_\Omega fv \\
&= \left\|v\right\|^2 - \left|v+t\widehat{u}_0\right|_p^p + t\int_\Omega \left|v+t\widehat{u}_0\right|^{p-2}\left(v+t\widehat{u}_0\right)\widehat{u}_0 - t\int_\Omega fv,
\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}
pI_t(v) - I_t'(v)v &= \left(\tfrac{p}{2}-1\right)\left\|v\right\|^2 - t\int_\Omega \left|v+t\widehat{u}_0\right|^{p-2}\left(v+t\widehat{u}_0\right)\widehat{u}_0 - (p-1)\,t\int_\Omega fv \\
&\geq \alpha_4\left\|v\right\|^2 - \alpha_5\left(\left\|v\right\|+1\right)^{2(p-1)/p} - \alpha_6\left\|v\right\|.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Por tanto, si (v_n, t_n) es una sucesión en $H_0^1(\Omega)^G \times [0,1]$ tal que $|I_{t_n}(v_n)| \leq b$ y $\left\|I_{t_n}'(v_n)\right\| \to 0$, entonces

$$\left\|v_n\right\|^2 \leq \alpha_7\left(1+\left\|v_n\right\|\right)^{2(p-1)/p},$$

de donde se sigue que (v_n) está acotada en $H_0^1(\Omega)$.
Claramente (t_n) contiene una subsucesión convergente $t_n \to t$ en $[0,1]$. Probaremos ahora que (v_n) contiene una subsucesión convergente en $H_0^1(\Omega)^G$. Como (v_n) está acotada en $H_0^1(\Omega)^G$, contiene una subsucesión tal que $v_n \rightharpoonup v$ débilmente en $H_0^1(\Omega)^G$. Por el Teorema de Rellich-Kondrakov (véase [28, Teorema1.9]) se tiene que $v_n \to v$ en $L^2(\Omega)^G$

y en $L^p(\Omega)^G$. Denotemos por $F(u) := u\,|u|^{p-2}$. Entonces $F(v_n) \to F(v)$ en $L^q(\Omega)$ con $q = \frac{p}{p-1}$ [28, Teorema A.2] y usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (F(v_n) - F(v))(v_n - v)\right| &\leq |F(v_n) - F(v)|_q\,|v_n - v|_p \to 0, \\
\left|(t_n - t)\int_\Omega f(v_n - v)\right| &\leq |t_n - t|\,|f|_2\,|v_n - v|_2 \to 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\left\langle I'_{t_n}(v_n) - I'_t(v), v_n - v\right\rangle &= \|v_n - v\|^2 - |v_n|_p^p + |v|_p^p \\
&\quad - \int_\Omega (F(v_n) - F(v))(v_n - v) - (t_n - t)\int_\Omega f(v_n - v).
\end{aligned}$$

Como $I'_{t_n}(v_n) \to 0$, (v_n) está acotada en $H_0^1(\Omega)$ y $v_n \rightharpoonup v$ débilmente en $H_0^1(\Omega)^G$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle I'_{t_n}(v_n) - I'_t(v), v_n - v\right\rangle\right| &\leq \left|\left\langle I'_{t_n}(v_n), v_n - v\right\rangle\right| + \left|\langle I'_t(v), v_n - v\rangle\right| \\
&\leq \|\nabla I_{t_n}(v_n)\|\,\|v_n - v\| + \|\nabla I_t(v)\|\,\|v_n - v\| \to 0,
\end{aligned}$$

y como $v_n \to v$ en $L^p(\Omega)^G$ se tiene que $|v_n|_p \to |v|_p$. En consecuencia,

$$\|v_n - v\|^2 \to 0,$$

y por tanto, se cumple (**P1**).
Para demostrar (**P2**) observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} I(v,t) &= -\int_\Omega |v + t\widehat{u}_0|^{p-2}(v + t\widehat{u}_0)\,\widehat{u}_0 - \int_\Omega fv \\
&= -\int_\Omega |v + t\widehat{u}_0|^{p-2}(v + t\widehat{u}_0)\,\widehat{u}_0 - \int_\Omega f(v + t\widehat{u}_0) + t\int_\Omega f\widehat{u}_0,
\end{aligned}$$

por lo tanto, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial t} I(v,t)\right| &\leq \beta_1\,|v + t\widehat{u}_0|_p^{p-1} + \beta_2\,|v + t\widehat{u}_0|_p + \beta_3 \\
&\leq \beta_4(|v + t\widehat{u}_0|_p^{p-1} + 1). \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
2I_t(v) - I_t'(v)v &= (1-\frac{2}{p})\left|v+t\widehat{u}_0\right|_p^p - t\int_\Omega \left|v+t\widehat{u}_0\right|^{p-2}(v+t\widehat{u}_0)\,\widehat{u}_0 - t\int_\Omega fv \\
&\geq (1-\frac{2}{p})\left|v+t\widehat{u}_0\right|_p^p - \beta_5\left|v+t\widehat{u}_0\right|_p^{p-1} - \beta_6\left|v+t\widehat{u}_0\right|_p \\
&\geq \beta_7\left|v+t\widehat{u}_0\right|_p^p - \beta_8, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

donde β_i son constantes positivas. Por tanto, de las desigualdades (3.4) y (3.5) concluimos que, para todo $v \in H_0^1(\Omega)^G$ tal que $|I_t(v)| \leq b$, se cumple que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} I(v,t)\right| \leq \beta_9(\|I_t'(v)\|\,\|v\| + 1) \leq \beta_{10}(\|I_t'(v)\| + 1)(\|v\| + 1),$$

lo que demuestra la propiedad (**P2**). ∎

Para demostrar que I_t satisface (**P3**) requerimos el siguiente lema.

Lema 3.3 *Si v es punto crítico de I_t entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2\right)d\sigma \leq C\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^p + 1\right),$$

donde $u = v + t\widehat{u}_0$.

Demostración: Sea v punto crítico de I_t. Entonces

$$\begin{cases} -\Delta v = |v+t\widehat{u}_0|^{p-2}(v+t\widehat{u}_0) + tf & \text{en } \Omega \\ \quad v = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por resultados clásicos de regularidad se tiene que v, $u = v + t\widehat{u}_0 \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Para $x \in \overline{\Omega}$, sea $l(x) = d(x, \partial\Omega)$ la distancia de x a la frontera de Ω. Como Ω es de clase C^2, existe $\delta > 0$ tal que $l \in C^2(\{x \in \overline{\Omega} : l(x) < 2\delta\})$. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función suave tal que $\varphi \equiv 1$ en $(-\infty, 0]$ y $\varphi \equiv 0$ en $[\delta, +\infty)$. Definimos el campo vectorial $\eta(x) := \varphi(l(x))\nabla l(x)$ de clase C^1 en $\overline{\Omega}$. Nótese que η coincide con la normal interior en $\partial\Omega$. Como $u = v + t\widehat{u}_0$ es solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u + tf & \text{en } \Omega \\ \quad u = t\widehat{u}_0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

se tiene que

$$\int_\Omega -\Delta u(\nabla u\cdot\eta)=\int_\Omega |u|^{p-2}\,u(\nabla u\cdot\eta)+\int_\Omega f(\nabla u\cdot\eta) \tag{3.6}$$

Usando la fórmula de Green obtenemos

$$\int_\Omega -\Delta u(\nabla u\cdot\eta)dx=\int_{\partial\Omega} -\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2 d\sigma+\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\left(\nabla u\cdot\eta\right)dx. \tag{3.7}$$

Observemos que

$$\nabla\left(\nabla u\cdot\eta\right)=\nabla\left(\sum_j u_{x_j}\eta_j\right),$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\left(\nabla u\cdot\eta\right)dx &= \int_\Omega\sum_{i,j} u_{x_i}\left(u_{x_j}\eta_j\right)_{x_i}dx\\ &= \int_\Omega\sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_j}\left(\eta_j\right)_{x_i}dx+\int_\Omega\sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_jx_i}\eta_j. \end{aligned}\tag{3.8}$$

Ahora observemos que

$$\int_\Omega\sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_j}\left(\eta_j\right)_{x_i}dx\le C_1\int_\Omega\sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_j}dx\le C_2\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\right). \tag{3.9}$$

y usando el teorema de cambio de variable [16, Appendix C, Theorem 2], obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega\sum_{i,j} u_{x_i}u_{x_jx_i}\eta_j dx &= \sum_{i,j}\int_\Omega\left(\frac{1}{2}u_{x_i}^2\right)_{x_j}\eta_j dx\\ &= -\sum_{i,j}\int_\Omega\frac{1}{2}u_{x_i}^2\eta_j dx+\sum_{i,j}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}u_{x_i}^2\eta_j^2 d\sigma\\ &= O\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\right)+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2\,|\eta|^2\,d\sigma\\ &= O\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\right)+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2\,d\sigma. \end{aligned}\tag{3.10}$$

De (3.8), (3.9) y (3.10) se sigue que

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\left(\nabla u\cdot\eta\right)=O\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\right)+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^2\,d\sigma,$$

sustituyendo en (3.7) obtenemos

$$\int_\Omega -\Delta u(\nabla u\cdot\eta)dx=\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2-\left|\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|^2\right)d\sigma+O\left(\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2\right). \tag{3.11}$$

De manera análoga obtenemos que

$$\int_\Omega |u|^{p-2}u(\nabla u\cdot\eta)dx=t^p\int_{\partial\Omega}\frac{|\widehat{u}_0|^p}{p}d\sigma+O\left(\int_\Omega|u|^p\right), \tag{3.12}$$

$$\int_\Omega f(\nabla u\cdot\eta)dx=t\int_{\partial\Omega}f\widehat{u}_0d\sigma+O\left(\left(\int_\Omega|u|^p\right)^{1/p}\right), \tag{3.13}$$

juntando (3.6), (3.11), (3.12) y (3.13) obtenemos el resultado. ■

Proposición 3.4 *Existe $a>0$ tal que*

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}I(t,v)\right|\le a\left(I_t(v)^2+1\right)^{1/4}\qquad si\ I_t'(v)=0.$$

*Es decir, I_t cumple (**P3**) con $\theta_2(t,s)=a\left(s^2+1\right)^{1/4}=-\theta_1(t,s)$, por lo tanto $\theta_2^-=0$.*

Demostración: Sea v punto tal que $I_t'(v)=0$. Entonces v cumple que

$$\begin{cases}-\Delta v=|v+t\widehat{u}_0|^{p-2}(v+t\widehat{u}_0)+tf & \text{en }\Omega,\\ v=0 & \text{en }\partial\Omega,\end{cases}$$

usando la fórmula de Green,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}I(v,t) &= -\int_\Omega |v+t\widehat{u}_0|^{p-2}(v+t\widehat{u}_0)\widehat{u}_0-\int_\Omega fv\\ &= \int_\Omega(\Delta v+tf)\widehat{u}_0-\int_\Omega fv\\ &= -\int_\Omega\nabla v\nabla\widehat{u}_0+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\eta}\widehat{u}_0d\sigma+t\int_\Omega f\widehat{u}_0-\int_\Omega fv.\end{aligned}$$

Por definición de $\widehat{u}_0$ y v tenemos que

$$0=\int_\Omega v\Delta\widehat{u}_0=-\int_\Omega\nabla v\nabla\widehat{u}_0+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\widehat{u}_0}{\partial\eta}vd\sigma=-\int_\Omega\nabla v\nabla\widehat{u}_0,$$

es decir

$$\frac{\partial}{\partial t} I(v,t) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} \widehat{u}_0 d\sigma + t \int_{\Omega} f \widehat{u}_0 - \int_{\Omega} f v.$$

Observemos que

$$\left| \int_{\Omega} f v \right| \leq |f|_{\frac{p}{p-1}} |v|_p \leq c_1 \left(|v + t\widehat{u}_0|_p \right),$$

de modo que, usando (3.5) y que v cumple $I_t'(v) = 0$, obtenemos que existe $c_2 > 0$ tal que

$$\left| \int_{\Omega} f v \right| \leq c_1 \left(|v + t\widehat{u}_0|_p \right) \leq c_2 \left(|I_t(v)|^{1/p} + 1 \right).$$

Como $p > 2$ es suficiente probar que

$$\left| \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} \widehat{u}_0 d\sigma \right| \leq c_3 \left(|I_t(v)|^2 + 1 \right)^{1/4}, \tag{3.14}$$

de hecho, probaremos a continuación que

$$\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|^2 d\sigma \leq c_4 \left(|I_t(v)| + 1 \right) \tag{3.15}$$

y esta desigualdad implica (3.14).
Como

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - t \frac{\partial \widehat{u}_0}{\partial \eta},$$

es suficiente probar (3.15) para $\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 d\sigma$. Sea $\nabla_{\partial\Omega} u := \nabla u - \frac{\partial u}{\partial \eta}$ la componente de ∇u tangencial a $\frac{\partial u}{\partial \eta}$. Nótese que $\nabla_{\partial\Omega} u = \nabla_{\partial\Omega} \widehat{u}_0$. En consecuencia,

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 \right) d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla_{\partial\Omega} \widehat{u}_0|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 \right) d\sigma,$$

por el Lema (3.3) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 d\sigma &\leq c_5 \left(\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^p \right) + 1 \right) \\ &\leq c_6 \left(\left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 + |v|^p \right) + 1 \right), \end{aligned}$$

usando(3.5) y (3.3) obtenemos

$$\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\sigma \leq c_7 \left(I_t\left(v\right)+1\right),$$

esto concluye la demostración. ■

En el caso en que la condición de frontera es cero obtenemos mejores estimaciones para $\frac{\partial}{\partial t}I(t,u)$.

Proposición 3.5 *Si $u_0 = 0$ entonces existe $a > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}I(t,v)\right| \leq a\left(I_t(v)^2+1\right)^{\frac{1}{2p}} \qquad \text{si } I_t'(v) = 0.$$

*Es decir, I_t cumple (**P3**) con $\theta_2(t,s) = a\left(s^2+1\right)^{\frac{1}{2p}} = -\theta_1(t,s)$, por lo tanto $\theta_2^- = 0$..*

Demostración: Sea v un punto crítico de I_t en $H_0^1\left(\Omega\right)$. Entonces, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} I_t\left(v\right) &= I_t\left(v\right) - \frac{1}{2}I_t'\left(v\right)v \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)|v|_p^p - \frac{t}{2}\int_\Omega fv \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)|v|_p^p - a_1\left|v\right|_p \\ &\geq a_2\int_\Omega |v|^p\,dx - a_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|v|_p^p \leq a_4\left(I_t\left(v\right)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.16}$$

donde a_i son constantes positivas. Por otro lado, de la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}I(t,v)\right| = \left|\int_\Omega fv\right| \leq a_5\left|v\right|_p,$$

esta desigualdad y la desigualdad (3.16) implican que existe $a > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}I(t,v)\right| \leq a\left(I_t\left(v\right)^2+1\right)^{\frac{1}{2p}}$$

para todo punto crítico v de I_t. ■

Proposición 3.6 *I_t satisface (**P4**).*

Demostración: Notemos primero que el funcional I_0 es par:

$$I_0(-v) = \frac{1}{2}\left\|-v\right\|^2 - \frac{1}{p}\left|-v\right|_p^p = I_0\left(v\right).$$

Además

$$\begin{aligned} I_t(v) &= \frac{1}{2}\left\|v\right\|^2 - \frac{1}{p}\left|v + t\widehat{u}_0\right|_p^p - t\int_\Omega fv \\ &\geq \frac{1}{2}\left\|v\right\|^2 - \frac{1}{p}(\left|v\right|_p + \left|\widehat{u}_0\right|_p)^p - \alpha_1\left|v\right|_p, \end{aligned}$$

sea W un subespacio de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)^G$. Como en un espacio de dimensión finita todas las normas son equivalentes, existe $\alpha_2 > 0$ tal que

$$I_t(w) \geq \alpha_2\left|w\right|_p^2 - \frac{1}{p}(\left|w\right|_p + \left|\widehat{u}_0\right|_p)^p - \alpha_1\left|w\right|_p \qquad \forall w \in W$$

y como $p > 2$, concluimos que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} I_t(w) \to -\infty \qquad \text{si } w \in W \text{ y } \left\|w\right\| \to \infty,$$

es decir, I_t satisface (**P4**). ■

3.4. Estimaciones de los valores minimax G-invariantes

Consideremos el problema G-invariante de valores propios

$$(\mathcal{EV}_G) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega \\ u(gx) = u(x) & x \in \Omega,\ g \in G. \end{cases}$$

Denotemos por

$$0 < \lambda_1^G \leq \lambda_2^G \leq \ldots \leq \lambda_k^G \leq \ldots$$

a los valores propios del problema $(\mathcal{EV}_G)$ contados con su multiplicidad y por $e_k^G \in H_0^1(\Omega)^G$ a una función propia correspondiente al valor propio λ_k^G tal que $\left|e_k^G\right|_2 = 1$. Denotemos por

$$X_k := \operatorname{span}\{e_1^G, \ldots, e_k^G\}$$

al subespacio de $H_0^1(\Omega)^G$ generado por las primeras k funciones propias. Por tanto, $\dim X_k = k$.

Definimos

$$c_k^G = \inf_{\varphi\in\Gamma^G}\sup_{X_k} I_0(\varphi(x)), \tag{3.17}$$

donde

$$\Gamma^G := \{\varphi \in C^0(H_0^1(\Omega)^G, H_0^1(\Omega)^G) : \varphi \text{ es impar y } \exists\ R > 0 \text{ tal que } \varphi(x) = x \text{ si } \|x\| > R\}.$$

El objetivo de esta sección es obtener cotas para estos valores. Empecemos probando el siguiente resultado.

Lema 3.7 *Para toda $\rho > 0$ se tiene que*

$$c_k^G \geq \inf\{I_0(u) : u \in X_{k-1}^\perp,\ \ \|u\| = \rho\},$$

donde $X_k^\perp$ denota al complemento ortogonal de X_k en $H_0^1(\Omega)^G$.

Demostración: Vamos a hacer la demostración por contradicción. Supongamos que existe $\rho > 0$ tal que

$$c_k^G < \inf\{I_0(u) : u \in X_{k-1}^\perp,\ \ \|u\| = \rho\},$$

entonces, por definición de c_k^G, podemos escoger $\varepsilon > 0$ y $\varphi : H_0^1(\Omega)^G \to H_0^1(\Omega)^G$ en Γ^G tales que

$$I_0(\varphi(u)) \leq c_k^G + \varepsilon < \inf\{I_0(u) : u \in X_{k-1}^\perp,\ \ \|u\| = \rho\}.$$

Por lo tanto $\varphi(X_k) \cap S_\rho X_{k-1}^\perp = \emptyset$, donde $S_\rho X_{k-1}^\perp := \{u \in X_{k-1}^\perp : \|u\| = \rho\}$. Denotemos por $E_R := \{u \in H_0^1(\Omega)^G : \|u\| \geq R\}$ y consideremos la función

$$\eta : H_0^1(\Omega)^G \setminus S_\rho X_{k-1}^\perp \longrightarrow X_{k-1} \cup E_R =: Y$$

definida de la siguiente manera: Sea $\pi(u)$ la proyección ortogonal de u sobre $X_{k-1}^\perp$, sea

$$\pi_\rho(u) := \rho\frac{\pi(u)}{\|\pi(u)\|}, \quad u \notin X_{k-1},$$

y sea $t_u := \min\{t \geq 0 : \pi_\rho(u) + t(u - \pi_\rho(u)) \in Y\}$. Definimos

$$\eta(u) := \begin{cases} \pi_\rho(u) + t_u(u - \pi_\rho(u)) & \text{si } u \in H_0^1(\Omega)^G \setminus (S_\rho X_{k-1}^\perp \cup Y) \\ u & \text{si } u \in Y. \end{cases}$$

Observemos que η es impar ya que π_ρ es impar y

$$\begin{aligned} \eta(-u) &= \pi_\rho(-u) + t_u(-u - \pi_\rho(-u)) \\ &= -\pi_\rho(u) - t_u(u - \pi_\rho(u)) \\ &= -\eta(u). \end{aligned}$$

La composición $\eta \circ \varphi : X_k \to Y$, está bien definida ya que $\varphi(X_k) \cap S_\rho X_{k-1}^{\perp} = \emptyset$, es impar, continua y si $\|u\| \geq R$, se tiene que $(\eta \circ \varphi)(u) = u$. En consecuencia, $\eta \circ \varphi$ induce una función en los espacios cocientes obtenidos identificando a E_R en un punto. Componiendo esta función con homeomorfismos radiales, obtenemos una función

$$X_k \cup \{\infty\} \cong X_k/(X_k \cap E_R) \xrightarrow{\eta\circ\varphi} Y/E_R \cong X_{k-1} \cup \{\infty\},$$

impar en X_k que manda al ∞ al ∞. Esto contradice el teorema de Borsuk-Ulam con puntos fijos. [21, 12]. ■

Denotemos por $Gx := \{gx : g \in G\}$ a la G-órbita de x y por

$$m = m(G,\Omega) := \text{máx}\{\dim(Gx) : x \in \Omega\}.$$

Es decir, $m(G,\Omega)$ es la dimensión de las G-órbitas principales en Ω. Brüning y Heinze [7, 8] y Donelly [14] estudiaron el comportamiento asintótico de los valores propios λ_k^G, probaron el siguiente resultado

Teorema 3.8 (Brüning-Heintze 1978, Donelly 1978) *Para $k \to \infty$ se tiene la fórmula asintótica*

$$\lambda_k^G \sim \beta_0 k^{2/(N-m)},$$

donde β_0 es una constante positiva que depende únicamente de Ω, de G y $m = m(G,\Omega)$ es la dimensión de las G-órbitas principales en Ω.

La expresión $\lambda_k^G \sim \beta_0 k^{2/(N-m)}$ significa que

$$\frac{\lambda_k^G}{\beta_0 k^{2/(N-m)}} \to 1 \qquad \text{cuando } k \to \infty,$$

en consecuencia se cumple lo siguiente.

Corolario 3.9 *Existen $\beta_1, \beta_2 > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\beta_1 k^{2/(N-m)} \leq \lambda_k^G \leq \beta_2 k^{2/(N-m)} \qquad \forall k \geq k_0,$$

donde m es la dimensión de las G-órbitas principales en Ω.

Demostración: Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{1}{2} < \frac{\lambda_k^G}{\beta_0 k^{2/(N-m)}} < \frac{3}{2} \qquad \forall k \geq k_0,$$

es decir, existen $\beta_1, \beta_2 > 0$, tal que

$$\beta_1 k^{2/(N-m)} \leq \lambda_k^G \leq \beta_2 k^{2/(N-m)} \qquad \forall k \geq k_0,$$

como afirma el corolario. ■

La cota superior fue obtenida también por Kajikiya [19] usando métodos más elementales que los de [7, 8, 14]. Usando este resultado obtenemos las siguientes estimaciones para los valores c_k^G.

Corolario 3.10 *Existen $\beta_3 > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\beta_3 k^{\alpha} \leq c_k^G \qquad \forall k \geq k_0,$$

donde $\alpha = \max\left\{\frac{(N+2)-(N-2)(p-1)}{(N-m)(p-2)}, \frac{2p}{N(p-2)}\right\}$ y m es la dimensión de las G-órbitas principales en Ω.

Demostración: Por el Lema 3.7, para toda $\rho > 0$ se tiene que

$$c_k^G \geq \inf\{I_0(v) : v \in X_{k-1}^{\perp}, \ \ \|v\| = \rho\}, \tag{3.18}$$

donde $X_k^{\perp}$ denota al complemento ortogonal de X_k en $H_0^1(\Omega)^G$. Queremos encontrar $\rho > 0$ que optimice esta cota. Usaremos la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg

$$|v|_p \leq \alpha_p \|v\|^{1-s} |v|_2^s, \tag{3.19}$$

donde α_p es una constante positiva y $s \in (0,1)$ es tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-s}{2^*} + \frac{s}{2}. \tag{3.20}$$

Ahora, si $v \in X_{k-1}^{\perp}$, tenemos que

$$|v|_2 \leq \left(\lambda_k^G\right)^{-1/2} \|v\|$$

y en consecuencia, usando (3.19) obtenemos

$$\begin{aligned} I_0(v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{p}|v|_p^p \\ &\geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\alpha_p^p}{p}\|v\|^{p(1-s)} |v|_2^{ps} \\ &\geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\alpha_p^p}{p}\left(\lambda_k^G\right)^{-ps/2} \|v\|^p. \end{aligned} \tag{3.21}$$

La función $t \mapsto \frac{1}{2}t^2 - \frac{\alpha_p^p}{p}\left(\lambda_k^G\right)^{-ps/2} t^p$ alcanza su máximo en

$$\rho := \left(\alpha_p^{-p}\left(\lambda_k^G\right)^{ps/2}\right)^{1/(p-2)},$$

por tanto, si $v \in X_{k-1}^{\perp}$ y $\|v\| = \rho$, obtenemos de (3.21) que

$$I_0(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_p^p}{p}\left(\lambda_k^G\right)^{-ps/2}\rho^{p-2}\right)\rho^2 = \frac{p-2}{2p}\rho^2 = \alpha_0\left(\lambda_k^G\right)^{ps/(p-2)}.$$

Del Corolario 3.9 se sigue que existe una constante positiva β_3 tal que

$$I_0(v) \geq \beta_3 k^{2ps/(N-m)(p-2)} \qquad \forall v \in X_{k-1}^{\perp},\ \|v\| = \rho,$$

y de la desigualdad (3.18) concluimos que

$$c_k^G \geq \beta_3 k^{2ps/(N-m)(p-2)}.$$

Se sigue de (3.20) que

$$s = \frac{N}{p} - \frac{N-2}{2},$$

por tanto, $2ps = 2N - p(N-2) = (N+2) - (N-2)(p-1)$ y en consecuencia,

$$c_k^G \geq \beta_3 k^{\gamma}, \qquad \text{con } \gamma := \frac{(N+2)-(N-2)(p-1)}{(N-m)(p-2)}, \tag{3.22}$$

Por otro lado, cuando el grupo G es trivial denotamos a los valores c_k^G simplemente por c_k. Bahri y Lions [3], probaron que existen $b_1, b_2 > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$b_1 k^{2p/N(p-2)} \leq c_k \leq b_2 k^{2p/N(p-2)} \qquad \forall k \geq k_0,$$

de donde

$$c_k^G \geq c_k \geq b_1 k^{2p/N(p-2)}. \tag{3.23}$$

Por lo tanto usando (3.22) y (3.23) obtenemos que existen $\beta_3 > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\beta_3 k^{\alpha} \leq c_k^G \qquad \forall k \geq k_0,$$

donde $\alpha = \max\left\{\frac{(N+2)-(N-2)(p-1)}{(N-m)(p-2)}, \frac{2p}{N(p-2)}\right\}$. ■

Corolario 3.11 *Existen $\beta_4 > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que*

$$c_k^G \leq \beta_4 k^\gamma \qquad \forall k \geq k_0,$$

donde $\gamma = \dfrac{2p}{(N-m)(p-2)}$ *y m es la dimensión de las G-órbitas principales en Ω.*

Demostración: Por definición de X_k tenemos que

$$\|u\|^2 \leq \lambda_k^G |u|_2^2 \qquad \text{para } u \in X_k,$$

como $p > 2$ existe $a_1 > 0$ tal que

$$|u|_2 \leq a_1 |u|_p \,,$$

entonces

$$\|u\|^p \leq \left(\lambda_k^G\right)^{p/2} |u|_2^p \leq (a_1)^p \left(\lambda_k^G\right)^{p/2} |u|_p^p \,,$$

es decir, existe $a_2 > 0$ tal que

$$a_2 \left(\lambda_k^G\right)^{-p/2} \|u\|^p \leq |u|_p^p \,.$$

Usando esta desigualdad y como $u \in X_k$, tenemos que

$$\begin{aligned} I_0(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{a_2\left(\lambda_k^G\right)^{-p/2}}{p}\|u\|^p \,. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Sea $f(t)$ la función real de variable real dada por

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{a_2\left(\lambda_k^G\right)^{-p/2}}{p}t^p,$$

como $p > 2$, esta función tiene un único máximo t^* dado por

$$f'(t^*) = t^*\left(1 - a_2\left(\lambda_k^G\right)^{-p/2}(t^*)^{p-2}\right) = 0,$$

de donde

$$t^* = \left(a_2^{-1}\left(\lambda_k^G\right)^{p/2}\right)^{1/p-2},$$

además

$$
\begin{aligned}
f\left(t^{*}\right) &= \frac{1}{2}\left(a_2^{-1}\left(\lambda_k^G\right)^{p/2}\right)^{2/p-2} - \frac{a_2\left(\lambda_k^G\right)^{-p/2}}{p}\left(a_2^{-1}\left(\lambda_k^G\right)^{p/2}\right)^{p/p-2} \\
&= \left(a_2^{-1}\left(\lambda_k^G\right)^{p/2}\right)^{2/p-2}\left(\frac{1}{2} - \frac{a_2\left(\lambda_k^G\right)^{-p/2}}{p}\left(a_2^{-1}\left(\lambda_k^G\right)^{p/2}\right)\right) \\
&= \left(a_2^{-1}\left(\lambda_k^G\right)^{p/2}\right)^{2/p-2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \\
&= \left(\lambda_k^G\right)^{p/p-2} a_2^{-2/p-2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right).
\end{aligned}
$$

De esto y de (3.24) se sigue que existe $a_3 > 0$, independiente de u y de k, tal que

$$I_0\left(u\right) \leq a_3\left(\lambda_k^G\right)^{p/p-2} \qquad \text{para } u \in X_k,$$

usando el Corolario 3.9 tenemos que existe $\beta_4 > 0$ tal que

$$c_k^G \leq \sup_{X_k} I_0(u) \leq \beta_4 k^{\gamma} \qquad \forall k \geq k_0,$$

con $\gamma = \dfrac{2p}{(N-m)(p-2)}$. ■

3.5. Infinidad de soluciones G-invariantes.

Probaremos ahora los dos primeros teoremas de la Introducción que enunciamos nuevamente a continuación. Requeriremos el siguiente lema.

Lema 3.12 *Sea (b_k) es una sucesión de números reales positivos tales que existen $\gamma_1 > 0$, $\mu > 1$, $k_0 \in \mathbb{N}$, con la siguiente propiedad*

$$0 \leq b_{k+1} - b_k \leq \gamma_1 b_k^{1/\mu} \qquad \forall k \geq k_0,$$

entonces existe $\gamma_0 > 0$ tal que

$$b_k \leq \gamma_0 k^{\mu/(\mu-1)} \qquad \forall k \geq 1.$$

Demostración: Denotemos por

$$\delta_k := \frac{b_k}{k^{\mu/(\mu-1)}} > 0,$$

demostraremos que la sucesión (δ_k) está acotada superiormente. Sabemos que para $t > 0$

$$1 + \frac{\mu}{\mu - 1} t \leq (1+t)^{\mu/(\mu-1)},$$

ya que $\frac{\mu}{\mu-1} > 1$. En particular,

$$1 + \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)\frac{1}{k} \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\mu/(\mu-1)} = \frac{(k+1)^{\mu/(\mu-1)}}{k^{\mu/(\mu-1)}},$$

de donde

$$\left(1 + \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)\frac{1}{k}\right)(k+1)^{-\mu/(\mu-1)} \leq k^{-\mu/(\mu-1)},$$

y como $\delta_k = \frac{b_k}{k^{\mu/(\mu-1)}}$ se tiene que

$$\left(1 + \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)\frac{1}{k}\right)\delta_{k+1} \leq b_{k+1} k^{-\mu/(\mu-1)},$$

es decir,

$$\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)\frac{\delta_{k+1}}{k} + \delta_{k+1} - \delta_k \leq b_{k+1} k^{-\mu/(\mu-1)} - \delta_k = k^{-\mu/(\mu-1)}\left(b_{k+1} - b_k\right).$$

Por hipótesis $b_{k+1} - b_k \leq \gamma_1 b_k^{1/\mu}$, de modo que

$$\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)\frac{\delta_{k+1}}{k} + \delta_{k+1} - \delta_k \leq k^{-\mu/(\mu-1)}\gamma_1 b_k^{1/\mu} = \gamma_1 \frac{\delta_k^{1/\mu}}{k},$$

es decir

$$\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)\frac{\delta_{k+1}}{k} + \delta_{k+1} - \delta_k \leq \gamma_1 \frac{\delta_k^{1/\mu}}{k} \quad \text{para } k \geq k_0. \tag{3.25}$$

Si $\delta_k \leq \delta_{k+1}$, $k \geq k_0$, obtenemos que

$$\delta_k \leq \delta_{k+1} \leq \frac{\mu - 1}{\mu}\gamma_1 \delta_k^{1/\mu}, \tag{3.26}$$

de donde se sigue que

$$\delta_k \leq \left(\frac{\mu-1}{\mu}\gamma_1\right)^{\mu/(\mu-1)} =: M, \tag{3.27}$$

ahora supongamos que

$$\delta_{k+1} > M = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\gamma_1\right)^{\mu/(\mu-1)},$$

por (3.26), se sigue que

$$\left(\frac{\mu-1}{\mu}\gamma_1\right)^{\mu/(\mu-1)} < \frac{\mu-1}{\mu}\gamma_1\delta_k^{1/\mu},$$

es decir

$$M = \left(\frac{\mu-1}{\mu}\gamma_1\right)^{\mu/(\mu-1)} < \delta_k,$$

y esto contradice (3.27) por lo tanto tenemos que

$$\delta_{k+1} \leq M.$$

Solo falta el caso cuando $\delta_{k+1} < \delta_k$, por lo tanto en ambos casos obtenemos que

$$\delta_{k+1} \leq \max\left\{\delta_{k_0}, M\right\}, \text{ para toda } k \geq k_0,$$

por lo tanto la sucesión (δ_k) esta acotada, es decir existe $\gamma_0 > 0$ tal que

$$b_k \leq \gamma_0 k^{\mu/(\mu-1)} \qquad \forall k \geq 1.$$

■

Definimos

$$\widetilde{p}_{N,m} := \max\left\{\frac{6N-4m}{3N-2m-2}, \frac{2N}{N-1}\right\}$$

donde $m := \max\{\dim(Gx) : x \in \Omega\}$.

Teorema 3.13 *Para toda $p \in (2, \widetilde{p}_{N,m})$ el funcional $I_1 : H_0^1(\Omega)^G \to \mathbb{R}$ dado por*

$$I_1(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2 - \frac{1}{p}\left|u + t\widehat{u}_0\right|^p - fu\right)$$

tiene una sucesión no acotada de valores críticos $\widetilde{c}_k^G$. Es decir, el problema $(\wp_G)$ tiene una sucesión no acotada de soluciones.

Demostración: Como vimos en la Sección 3.1, las soluciones de $(\wp_G)$ corresponden a las soluciones de $(\wp_G')$ vía el cambio de variable $u = v + \widehat{u}_0$. Y por la Proposición 3.1, éstas últimas son justamente los puntos críticos del funcional $I_1 : H_0^1(\Omega)^G \to \mathbb{R}$. Para obtener nuestro resultado aplicaremos el Teorema 2.1 a la familia de funcionales $I_t : H_0^1(\Omega)^G \to \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$. Vimos en la Sección 3.3 que esta familia satisface las condiciones (**P1**)-(**P4**) del Teorema 2.1 con $\theta_2(t,s) = a\,(s^2+1)^{1/4} = -\theta_1(t,s)$ y que por lo tanto $\theta_2^- = 0$. Resta probar que la sucesión

$$\left(\frac{c_{k+1}^G - c_k^G}{a((c_{k+1}^G)^2+1)^{1/4} + a((c_k^G)^2+1)^{1/4}}\right) \tag{3.28}$$

no está acotada. Supongamos, por contradicción, que sí lo está. Entonces, como $c_k^G \leq c_{k+1}^G$, se tiene que

$$c_{k+1}^G - c_k^G \leq \gamma_1((c_k^G)^{1/2}+1)$$

para alguna constante positiva γ_1. Del Lema 3.12 se sigue entonces que, para k suficientemente grande,

$$c_k^G \leq \gamma_0 k^2$$

Por otra parte, el Corolario 3.10 afirma que, para k suficientemente grande, se tiene que

$$\beta k^\alpha \leq c_k^G, \qquad \text{con } \alpha = \text{máx}\left\{\frac{(N+2)-(N-2)(p-1)}{(N-m)(p-2)}, \frac{2p}{N(p-2)}\right\}.$$

Por tanto $\alpha \leq 2$. Si $\alpha = \frac{(N+2)-(N-2)(p-1)}{(N-m)(p-2)}$ se sigue que

$$\begin{aligned}(N+2)-(N-2)(p-1) &\leq 2(N-m)(p-2)\\ 6N-4m &\leq p\,(3N-2m-2)\\ p &\geq \frac{6N-4m}{3N-2m-2}.\end{aligned}$$

Si $\alpha = \frac{2p}{N(p-2)}$ se sigue que

$$p \geq \frac{2N}{N-1}.$$

Por lo tanto $p \geq \widetilde{p}_{N,m}$, contradiciendo nuestra hipótesis. En consecuencia, la sucesión (3.28) no está acotada y se sigue del Teorema 2.1 que el funcional $I_1 : H_0^1(\Omega)^G \to \mathbb{R}$ tiene una sucesión no acotada de valores críticos. Por tanto, el problema $(\wp_G)$ tiene una sucesión no acotada de soluciones. ■

Denotamos por $p'_{N,m}$ a la máxima raíz de la ecuación

$$(2N-m-2)p^2 - (5N-2m-2)p + 2N = 0,$$

es decir,

$$p'_{N,m} := \frac{5N-2m-2+\sqrt{(5N-2m-2)^2 - 8N(2N-m-2)}}{2(2N-m-2)},$$

denotamos por

$$p_{N,m} := \max\left\{p'_{N,m}, \frac{2N-2}{N-2}\right\},$$

donde $m := \max\{\dim(Gx) : x \in \Omega\}$.

Teorema 3.14 *Para toda $p \in (2, p_{N,m})$, el funcional $I_1 : H_0^1(\Omega)^G \to \mathbb{R}$ dado por*

$$I_1(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p}|u|^p - fu\right)$$

tiene una sucesión no acotada de valores críticos $\widetilde{c}_k^G$. Es decir, el problema $(\wp_G)$ con $u_0 = 0$ tiene una sucesión no acotada de soluciones.

Demostración: Argumentando como en la demostración del teorema anterior, donde ahora la propiedad (**P3**) se cumple para $\theta_2(t,s) = a\left(s^2+1\right)^{1/2p} = -\theta_1(t,s)$ y que por lo tanto $\theta_2^- = 0$ la demostración se reduce a probar que la sucesión

$$\left(\frac{c_{k+1}^G - c_k^G}{a((c_{k+1}^G)^2+1)^{1/2p} + a((c_k^G)^2+1)^{1/2p}}\right) \tag{3.29}$$

no está acotada. Suponiendo, por contradicción, que sí lo está y aplicando el Lema 3.12, concluimos que, para k suficientemente grande,

$$c_k^G \leq \gamma_0 k^{p/(p-1)}.$$

Por otra parte, el Corolario 3.10 afirma que, para k suficientemente grande,

$$\beta k^\alpha \leq c_k^G, \quad \text{con } \alpha = \max\left\{\frac{(N+2)-(N-2)(p-1)}{(N-m)(p-2)}, \frac{2p}{N(p-2)}\right\}..$$

Por tanto $\alpha \leq p/(p-1)$. Si $\alpha = \frac{(N+2)-(N-2)(p-1)}{(N-m)(p-2)}$ se sigue que

$$(2N-m-2)p^2 - (5N-2m-2)p + 2N \geq 0.$$

Si $\alpha = \frac{2p}{N(p-2)}$ se sigue que

$$p \geq \frac{2N-2}{N-2},$$

contradiciendo nuestra hipótesis. En consecuencia, la sucesión (3.29) no está acotada y se sigue del Teorema 2.1 que el funcional $I_1 : H_0^1(\Omega)^G \to \mathbb{R}$ tiene una sucesión no acotada de valores críticos. Por tanto, el problema $(\wp_G)$ con $u_0 = 0$ tiene una sucesión no acotada de soluciones. ■

3.6. Comparación con resultados previos

Bolle, Ghoussoub y Tehrani [6], probaron que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una infinidad de soluciones si $p \in \left(2, \frac{2N}{N-1}\right)$, $N \geq 3$. Vamos a ver para qué valores de $m \in \{0, 1, ..., N-1\}$ obtenemos un mejor resultado.

Observación 1. Se cumple que

$$\frac{2N}{N-1} < \widetilde{p}_{N,m} \Longleftrightarrow \frac{N}{2} < m.$$

Para comprobar esta afirmación basta observar que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$\begin{aligned} \frac{2N}{N-1} &< \frac{6N-4m}{3N-2m-2} \\ 2N\,(3N-2m-2) &< (6N-4m)\,(N-1) \\ 6N^2 - 4Nm - 4N &< 4m - 6N - 4Nm + 6N^2 \\ \frac{N}{2} &< m. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notemos también que $\widetilde{p}_{N,m}$ es siempre subcrítica:

Observación 2. Se cumple que

$$\widetilde{p}_{N,m} \leq \frac{2N+4}{N} < 2^* := \frac{2N}{N-2}.$$

Para demostrar la primera desigualdad consideremos la función

$$p(t) := \frac{6N-4t}{3N-2t-2},$$

su derivada

$$p'(t) = \frac{8}{(3N-2t-2)^2}$$

es siempre positiva, de modo que,

$$p(m) \leq p(N-1) = \frac{2N+4}{N} \qquad \forall m \in \{0, 1, ..., N-1\}.$$

Notemos ahora que

$$\frac{2(N+2)}{N} < \frac{2N}{N-2} \Longleftrightarrow N^2 - 4 = (N+2)(N-2) < N^2. \quad \blacksquare$$

Bahri y Lions [3] probaron que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una infinidad de soluciones si $p \in \left(2, \frac{2N-2}{N-2}\right)$. Vamos a ver para qué valores de $m \in \{0, 1, ..., N-1\}$ se tiene que

$$\frac{2N-2}{N-2} < p_{N,m}.$$

Observación 3. Se cumple que

$$\frac{2N-2}{N-2} < p_{N,m} \Longleftrightarrow \frac{N^2}{2(N-1)} < m \leq N-1.$$

Para demostrar esta afirmación consideremos la ecuación

$$(2N-t-2)p(t)^2 - (5N-2t-2)p(t) + 2N = 0, \qquad t \in [0, N-1],$$

derivando implícitamente obtenemos

$$[2(2N-t-2)p(t) - 5N + 2t + 2]\, p'(t) = p(t)^2 - 2p(t).$$

Para $p(t) > 2$ y $N \geq 4$ se cumple que $p(t)^2 - 2p(t) > 0$ y que

$$2(2N-t-2)p(t) - 5N + 2t + 2 > 4(2N-t-2) - 5N + 2t + 2 = 3N - 2t - 6 \geq N - 4 > 0,$$

por tanto,

$$p'(t) = \frac{p(t)^2 - 2p(t)}{2(2N-t-2)p(t) - 5N + 2t + 2} > 0 \quad \text{si } N \geq 4. \tag{3.30}$$

Por otra parte, las siguientes identidades son equivalentes:

$$\begin{aligned} (2N-t-2)\left[\frac{2N-2}{N-2}\right]^2 - (5N-2t-2)\left[\frac{2N-2}{N-2}\right] + 2N &= 0 \\ (2N-2)\left[(2N-t-2)(2N-2) - (5N-2t-2)(N-2)\right] + 2N(N-2)^2 &= 0 \\ (2N-2)(-N^2 + 4N - 2t) + 2N(N-2)^2 &= 0 \\ 2N^2 - 4t(N-1) &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$p\left(\frac{N^2}{2(N-1)}\right) = \frac{2N-2}{N-2}.$$

Nótese que

$$N \geq 4 \Rightarrow \frac{N^2}{2(N-1)}.$$

Como $p'(t) > 0$ si $N \geq 4$, obtenemos que

$$p_{N,m} := p(m) > \frac{2N-2}{N-2} \Longleftrightarrow m > \frac{N^2}{2(N-1)}. \quad \blacksquare$$

También se tiene que $p_{N,m}$ es siempre subcrítica:

Observación 4. $p_{N,m} < 2^*$.
Se tiene que

$$(N-1)p_{N,N-1}^2 - 3Np_{N,N-1} + 2N = 0$$

En consecuencia,

$$p_{N,N-1} = \frac{3N + \sqrt{9N^2 - 8N(N-1)}}{2(N-1)} < \frac{3N + (N+4)}{2(N-1)} = \frac{2N+2}{N-1} < \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

Se sigue de (3.30) que $p_{N,m} \leq p_{N,N-1} < 2^*$ si $m \leq N-1$ y $N \geq 4$. Se comprueba directamente que esto también se cumple si $m \leq N-1$ y $N = 3$. $\blacksquare$

Observación 5. Si Ω es una bola, f es radial y $u_0 = 0$, Candela, Palmieri y Salvatore [10] probaron que $(\wp_{O(N)})$ tiene una infinidad de soluciones si $2 < p < 2^*$ para $N \geq 4$.
Para obtener este resultado encuentran una cota inferior para los valores $c_k^{O(N)}$ mejor que la que obtuvimos en el Corolario 3.10. Esto lo hacen estimando el número de los valores propios menores o iguales que cero del operador de Schrödinger $-\Delta + V$ en $H_0^1(B_R)^{O(N)}$, donde $V = -p(p-1)|u|^{p-2}$.
Conjeturamos que debe ser válido que el número de valores propios menores o iguales que cero de este operador en $H_0^1(\Omega)^G$ es $\geq \beta_5 k^\gamma$, donde $\gamma = \dfrac{2p}{(N-m)(p-2)}$ y m es la dimensión de las G-órbitas principales en Ω. Esto permitiría mejorar nuestros teoremas, obteniendo una infinidad de soluciones para toda p subcrítica cuando m es suficientemente grande.

Capítulo 4

Cotas superiores para la energía de soluciones G-invariantes

4.1. Cotas superiores

Estimaremos la energía de las soluciones dadas por los Teoremas 3.13 y 3.14. Como antes denotamos por

$$m := \text{máx}\{\dim(Gx) : x \in \Omega\},$$

probaremos el siguiente resultado.

Teorema 4.1 *Los valores críticos de $I_1 : H_0^1(\Omega)^G \to \mathbb{R}$ dados por los Teoremas 3.13 y 3.14 satisfacen*

$$\widetilde{c}_k^G \leq \beta k^\gamma,$$

donde $\beta > 0$ es una constante que no depende de k y $\gamma = 2p/(N-m)(p-2)$.

Para simplificar notación escribimos $I := I_0$, es decir,

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

Denotemos por

$$I_C(u) := \frac{C}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p, \qquad C > 0.$$

Para cada $u \in H_0^1(\Omega)^G$ consideremos las funciones reales de variable real

$$\begin{aligned} f_u(t) &:= I(tu) \\ g_u(t) &:= I_C(tu). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Lema 4.2 *Sean f_u y g_u como en (4.1) entonces*

$$\underset{t\geq 0}{\text{máx}} g_u(t) = C^{p/p-2} \underset{t\geq 0}{\text{máx}} f_u(t).$$

Demostración: Como

$$g_u(t) := I_C(tu) = \frac{C}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p,$$

$t > 0$ y $p > 2$, existe un único $\hat{t}_u^{\#} > 0$ tal que g_u alcanza su máximo, como

$$g_u'(t) = t\left(C\|u\|^2 - t^{p-2}|u|_p^p\right),$$

se sigue que $\hat{t}_u^{\#} = \left(\frac{C\|u\|^2}{|u|_p^p}\right)^{1/p-2}$ y además

$$\begin{aligned} g_u\left(\hat{t}_u^{\#}\right) &= \left(\frac{C\|u\|^2}{|u|_p^p}\right)^{2/p-2}\left(\frac{C\|u\|^2}{2} - \frac{C\|u\|^2}{p}\right) \\ &= \left(\frac{C\|u\|^2}{|u|_p^2}\right)^{p/p-2}\frac{(p-2)}{2p}. \end{aligned}$$

Haciendo $C = 1$, encontramos el único $\hat{t}_u > 0$ tal que f_u alcanza su máximo

$$\begin{aligned} \hat{t}_u &= \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p}\right)^{1/p-2} \\ f_u\left(\hat{t}_u\right) &= \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^2}\right)^{p/p-2}\frac{(p-2)}{2p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

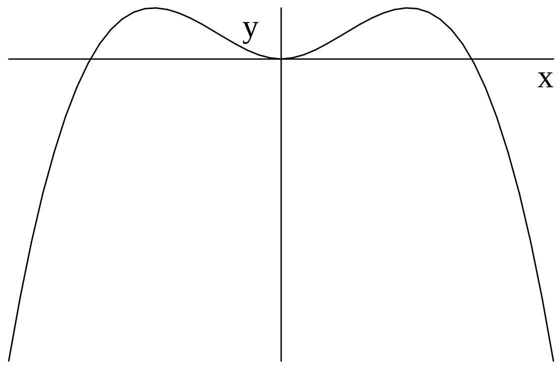
$$\frac{g_u\left(\hat{t}_u^{\#}\right)}{f_u\left(\hat{t}_u\right)} = C^{p/p-2}.$$

como afirma el lema. ■

Lema 4.3 *Si $C \geq 1$ entonces existe una función continua $\lambda : H_0^1(\Omega)^G \to [0,\infty)$ con las siguientes propiedades:*
(i) $I([(1-s) + s\lambda(u)]u) \leq I(u)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)^G$, $s \in [0,1]$.
(ii) Si $I_C(u) \leq 0$ entonces $\lambda(u) = 1$.
(iii) Existe una constante $\alpha_1 \geq 1$ tal que

$$I_C(\lambda(u)u) \leq \begin{cases} 0 & si\ 2I(u) \leq \text{máx}_{t\geq 0} I(tu) \\ \alpha_1 I(u) & si\ 2I(u) \geq \text{máx}_{t\geq 0} I(tu). \end{cases}$$

Demostración: Para cada $v \in H_0^1(\Omega)^G$ con $\|v\| = 1$ consideremos la función real de variable real $f_v(t) := I(tv)$. Como $p > 2$, su gráfica tiene la siguiente forma:



(4.2)

En consecuencia existen únicos $0 < t_v^- < \widehat{t}_v < t_v^+ < T_v < \infty$ tales que

$$\begin{aligned} I(\widehat{t}_v v) &= \max_{t \geq 0} I(tv), \\ 2I(tv) &\geq \max_{t \geq 0} I(tv) \Longleftrightarrow t \in [t_v^-, t_v^+], \\ I_C(T_v v) &= 0. \end{aligned}$$

Definimos $\rho_v : [0, \infty) \to [0, \infty)$ como:

$$\rho_v(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq t_v^- \\ \dfrac{t - t_v^-}{\hat{t}_v - t_v^-} \hat{t}_v & \text{si } t_v^- \leq t \leq \hat{t}_v \\ \dfrac{\left(T_v - \hat{t}_v\right)\left(t - \hat{t}_v\right)}{t_v^+ - \hat{t}_v} + \hat{t}_v & \text{si } \hat{t}_v \leq t \leq t_v^+ \\ T_v & \text{si } t_v^+ \leq t \leq T_v \\ t & \text{si } T_v \leq t. \end{cases}$$

Para cada $u \in H_0^1(\Omega)^G$,denotemos por $t := \|u\|$ y por $v := \frac{u}{\|u\|}$ si $u \neq 0$. Definimos la función $\lambda : H_0^1(\Omega)^G \to [0, \infty)$ mediante

$$\lambda(u) := \begin{cases} \dfrac{\rho_v(t)}{t} & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

Vamos a demostrar que λ cumple $(i) - (iii)$. Para (i) hay dos casos:
$a)$ Si $\lambda(u) \leq 1 \Leftrightarrow \rho_v(t) \leq t \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \hat{t}_v$. Sea $0 \leq s \leq 1$ entonces

$$\tau = (1 - s) + s\lambda(u) \leq 1 \Rightarrow \tau t \leq t,$$

de donde

$$I(\tau u)=I(\tau tv)=f_v(\tau t)\leq f_v(t)=I(u),$$

ya que f_v es creciente si $0\leq t\leq \hat{t}_v$.
b) Si $\lambda(u)\geq 1\Leftrightarrow \rho_v(t)\geq t\Leftrightarrow \hat{t}_v\leq t$. Sea $0\leq s\leq 1$ entonces

$$\tau=(1-s)+s\lambda(u)\geq 1\Rightarrow \tau t\geq t,$$

de donde

$$I(\tau u)=I(\tau tv)=f_v(\tau t)\leq f_v(t)=I(u),$$

ya que f_v es decreciente si $t\geq \hat{t}_v$. Por lo tanto se cumple (i).
Para demostrar (ii), por definición de T_v, se tiene que $I_C(T_v v)=0$ y

$$I_C(u)=I_C(tv)\leq 0\Leftrightarrow t\geq T_v,$$

y por lo tanto $\lambda(u)=1$.
Ahora demostraremos la primera parte de (iii). Por definición de t_v^-, t_v^+, T_v, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}2I(tv) &= 2I(u)\leq \max_{t\geq 0} I(tu)=\max_{s\geq 0} I(stv)\\ &\Leftrightarrow 0\leq t\leq t_v^- \quad \text{o} \quad t\geq t_v^+.\end{aligned}$$

Si $0\leq t\leq t_v^-$ entonces $\lambda(u)=0$ por lo tanto $I_C(\lambda(u)u)=0$.
Si $t\geq t_v^+$ entonces $\rho_v(t)\geq T_v$ por lo tanto

$$\frac{C}{2}\|\lambda(u)u\|^2=\frac{C}{2}\|\rho_v(t)v\|^2\leq \frac{1}{p}|\rho_v(t)v|_p^p=\frac{1}{p}|\lambda(u)u|_p^p,$$

es decir $I_C(\lambda(u)u)\leq 0$. Por lo tanto $I_C(\lambda(u)u)\leq 0$ si $2I(u)\leq \max\limits_{t\geq 0} I(tu)$.
Para la segunda parte de (iii), tenemos $\max_{t\geq 0} I(tu)\leq 2I(u)$ y por el Lema (4.2), se sigue que

$$\begin{aligned}I_C(\lambda(u)u) &\leq \max_{t\geq 0} I_C(tu)=\max_{t\geq 0} g_u(t)\\ &= C^{p/p-2}\max_{t\geq 0} f_u(t)\\ &= C^{p/p-2}\max_{t\geq 0} I(tu)\\ &\leq 2C^{p/p-2}I(u),\end{aligned}$$

con $\alpha_1=2C^{p/p-2}\geq 1$, se obtiene el resultado. ■

Denotamos por

$$R := \text{máx}\{|x| : x \in \overline{\Omega}\},$$

y por

$$K := \{x \in \overline{\Omega} : |x| = R\},$$

Lema 4.4 *Existe $r \in (0, R)$ tal que si $x \in \partial\Omega$, $|x| > r$ entonces*
i) $tx \in \Omega$ para todo $t \in (r\,|x|^{-1}, 1)$,
ii) $tx \notin \Omega$ para todo $t > 1$.

Demostración: Como la norma es continua, K es cerrado en $\overline{\Omega}$ y por tanto, compacto. Además, $K \subset \partial\Omega$. Sea $\eta : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ el campo vectorial normal unitario exterior a Ω y sea $A := \{x \in \partial\Omega : \langle \eta(x), x \rangle > 0\}$. Dado que η es continua, se tiene que A es abierto en $\partial\Omega$. Observemos que, si $x \in K$, entonces $\eta(x) = \frac{x}{|x|}$. Por tanto, $K \subset A$.
Dado que $\partial\Omega$ es compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $M := \{x \in \partial\Omega : |x| \geq R - \varepsilon\} \subset A$. De no ser así, existiría una sucesión (x_n) tal que $R - \frac{1}{n} \leq x_n \leq R$, $x_n \in \partial\Omega \setminus A$, $x_n \to x$, $x \in \partial\Omega$ y por continuidad de la norma, $|x| = R$. Es decir, $x \in K$ y $x \in \partial\Omega \setminus A$. Esto contradice el hecho de que $K \subset A$.
Sea $r = R - \varepsilon$, vamos a demostrar que si $x \in \partial\Omega$, $|x| > r$ entonces $tx \notin \Omega$ para todo $t > 1$. Supongamos que no, es decir, que existe $t_0 > 1$ y $x \in \partial\Omega$, $|x| > r$, tal que $t_0 x \in \Omega$, entonces existen $t_1, t_2 > 1$ tal que $t_1 x, t_2 x \in \partial\Omega$, estos puntos tiene la siguiente propiedad, $\langle \eta(t_1 x), t_1 x \rangle < 0$ y $\langle \eta(t_2 x), t_2 x \rangle > 0$ por el teorema del valor intermedio existe $t^* > 1$ tal que $t^* x \in \partial\Omega$ y $\langle \eta(t^* x), t^* x \rangle = 0$, es decir $t^* x \in M$ y $t^* x \notin A$, esto es una contradicción. El otro caso es análogo. ■

Sea $\chi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función no decreciente de clase C^∞ tal que $\chi(t) = 0$ si $t \in [0, r]$ y $\chi(R) = 1$. Para cada $s \in [1, 2]$, sea $\tau_s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ la función dada por

$$\tau_s(x) := (1 + (s-1)\chi(|x|))\, x. \tag{4.3}$$

Lema 4.5 *La función τ_s, $s \in [1, 2]$, definida en (4.3) satisface:*
(i) $\tau_s(x) = x$ si $|x| \leq r$ ó $s = 1$,
(ii) $\tau_s(\partial\Omega) \subset \mathbb{R}^N \smallsetminus \Omega$,
(iii) Existe $d \in (r, R)$ tal que $|\tau_2(x)| \geq R$ si $|x| \geq d$,
(iv) $\tau_s(gx) = g\tau_s x$ para toda $g \in G$ y $x \in \mathbb{R}^N$.

Demostración: Las propiedades *(i)* y *(iv)* se siguen inmediatamente de la definición (4.3). Para probar la propiedad *(ii)* observemos que, si $x \in \partial\Omega$ y $|x| \leq r$ entonces, por el inciso *(i)*, $\tau_s(x) = x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^N \smallsetminus \Omega$ y si $x \in \partial\Omega$ con $|x| > r$, como $(1 + (s-1)\chi(|x|)) > 1$ para toda $s \in [1, 2]$, se sigue del Lema 4.4 que $\tau_s(x) \subset \mathbb{R}^N \smallsetminus \Omega$. Para probar *(iii)* basta tomar $d \in (r, R)$ tal que $d \geq \frac{2R}{3}$ y $\chi(d) \geq \frac{1}{2}$. Entonces, si $|x| \geq d$, se tiene que $|\tau_2(x)| = (1 + \chi(|x|))\,|x| \geq (1 + \chi(d))\, d \geq \frac{3d}{2} \geq R$. ■

Denotamos por

$$C_1 := \max\{\|D\tau_s(x)\|^2 : x \in \overline{\Omega}, s \in [1,2]\}, \tag{4.4}$$

y por

$$C_2 := \max\{|\det D\tau_s(x)| : x \in \overline{\Omega}, s \in [1,2]\}. \tag{4.5}$$

Lema 4.6 *Existe una función continua*

$$H_0^1(\Omega)^G \times [0,2] \to H_0^1(\Omega)^G, \qquad (u,s) \longmapsto u_s,$$

tal que, para toda $u \in H_0^1(\Omega)^G$, satisface:
(i) $u_0 = u$.
(ii) $\Omega \smallsetminus \operatorname{supp}(u_2) \neq \emptyset$.
(iii) Existe una constante $\alpha > 0$ tal que $I(u_s) \leq \max\{\alpha I(u), 0\}$ para todo $u \in H_0^1(A)^G$, $s \in [0,2]$.

Demostración: Sea $C := C_1 C_2$ y sea $\lambda : H_0^1(\Omega)^G \to [0,\infty)$ la función dada por el Lema (4.3). Pensaremos a $H_0^1(\Omega)^G$ como subespacio de $H^1(\mathbb{R}^N)^G$, es decir, consideraremos a cada $u \in H_0^1(\Omega)^G$ como la función definida en $\mathbb{R}^N$ que se obtiene extendiendo a u como 0 fuera de Ω. Definimos

$$u_s(x) := \begin{cases} [(1-s) + s\lambda(u)]\, u(x) & \text{si } s \in [0,1] \\ \lambda(u) u(\tau_s x) & \text{si } s \in [1,2] \end{cases}.$$

Sea $s \in [1,2]$. Por definición de u_s tenemos que

$$\nabla u_s(x) = \lambda(u) \nabla u(\tau_s(x)) D\tau_s(x)$$

Por tanto,

$$|\nabla u_s(x)|^2 \leq \lambda(u)^2 |\nabla u(\tau_s(x))|^2 \|D\tau_s(x)\|^2 \leq C_1 \lambda(u)^2 |\nabla u(\tau_s(x))|^2,$$

donde C_1 es la constante definida en (4.4). En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int |\nabla u_s|^2 &\leq \int |\nabla u_s(x)|^2 |\det D\tau_s(x)|\, dx \\ &\leq C_1 \int |\lambda(u) \nabla u(\tau_s(x))|^2 |\det D\tau_s(x)|\, dx = C_1 \int |\nabla(\lambda(u) u)|^2. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\int|\lambda(u)u|^p &= \int|\lambda(u)u(\tau_s(x))|^p\,|\mathrm{det}D\tau_s(x)|\,dx\\ &= \int|u_s(x)|^p\,|\mathrm{det}D\tau_s(x)|\,dx\leq C_2\int|u_s|^p\,.\end{aligned}$$

donde C_2 es la constante definida en (4.5). En consecuencia,

$$\begin{aligned}I(u_s) &= \frac{1}{2}\int|\nabla u_s|^2-\frac{1}{p}\int|u_s|^p\\ &\leq C_2^{-1}\left[\frac{C}{2}\int_A|\nabla(\lambda(u)u)|^2-\frac{1}{p}\int_A|\lambda(u)u|^p\right]\\ &= C_2^{-1}I_C(\lambda(u)u)\\ &\leq \text{máx}\{\alpha I(u),0\}\qquad\text{si } s\in[1,2],\end{aligned}$$

donde $C:=C_1C_2$ y $\alpha:=\text{máx}\{C_2^{-1}\alpha_1,1\}$ con α_1 como en el lema anterior. Por otra parte, el lema anterior también implica que

$$I\left(\left[(1-s)+s\lambda(u)\right]u\right)\leq I(u)\leq\text{máx}\{\alpha I(u),0\}\quad\text{ si } s\in[0,1].$$

Esto concluye la demostración. ■

Lema 4.7 *a) Si* $u\in I^0:=\{u\in H_0^1(\Omega)^G:I(u)\leq 0\}$ *y* $t\geq 1$ *entonces* $tu\in I^0$.
b) $I^0\smallsetminus\{0\}$ *es homotópicamente equivalente a la esfera unitaria en* $H_0^1(\Omega)^G$.

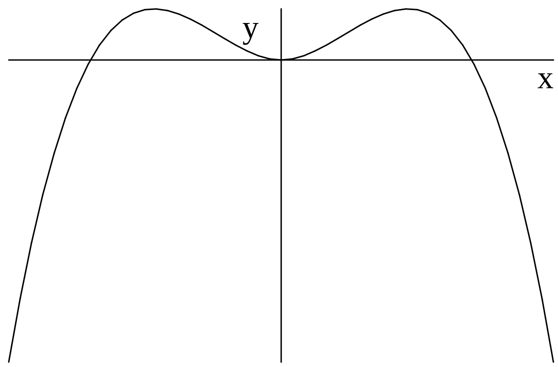
Demostración: a) Sean $u\in I^0$ y $t\geq 1$. Entonces, como $p>2$, se tiene que $t^2\leq t^p$. Por lo tanto

$$I(tu)=\frac{t^2}{2}\|u\|^2-\frac{t^p}{p}|u|_p^p\leq\frac{t^2}{2}\|u\|^2-\frac{t^2}{p}|u|_p^p=t^2I(u)\leq 0,$$

es decir, $tu\in I^0$.
b) Sea $u\in H_0^1(\Omega)^G$ con $\|u\|=1$. Definimos

$$f_u(t)=I(tu),$$

como $p > 2$, la gráfica de f_u tiene la siguiente forma:



(4.6)

En particular, existe un único $t_u > 0$ tal que $f_u(t_u) = 0$. Denotemos por S a la esfera unitaria en $H_0^1(\Omega)^G$. Entonces la función

$$\begin{aligned} S &\to \partial(I^0 \setminus \{0\}) \\ u &\mapsto t_u u \end{aligned}$$

es continua y de hecho, es un homeomorfismo con inverso

$$\begin{aligned} \partial(I^0 \setminus \{0\}) &\to S \\ w &\mapsto \tfrac{w}{\|w\|} \end{aligned}$$

Por el inciso *a)* se tiene que $\partial(I^0 \setminus \{0\})$ es un retracto por deformación de $I^0 \setminus \{0\}$, de modo que $I^0 \setminus \{0\}$ es homotópicamente equivalente a S. ■

Proposición 4.8 *Existen constantes $\alpha, \beta > 0$, que dependen sólo de Ω y de p, con la siguiente propiedad: Para todo par de subespacios $V \subset W$ de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)^G$ con $\dim W = \dim V + 1$ y para toda función impar $\varphi : V \to H_0^1(\Omega)^G$ y $R > 0$ que cumplen que $\varphi(v) = v$ si $\|v\| \geq R$, existen $\widetilde{R} > R$ y una función impar $\widetilde{\varphi} : W \to H_0^1(\Omega)^G$ tales que*
(i) $\widetilde{\varphi}(v) = \varphi(v)$ para toda $v \in V$,
(ii) $\widetilde{\varphi}(w) = w$ para toda $w \in W$ con $\|w\| \geq \widetilde{R}$,
(iii) $\max_{w \in W} I(\widetilde{\varphi}(w)) \leq \alpha \max_{v \in V} I(\varphi(v)) + \beta$.

Demostración: Sean $V \subset W$ subespacios vectoriales de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)^G$, tales que $\dim W = \dim V + 1$ y sea $\varphi : V \to H_0^1(\Omega)^G$ una función impar y continua tal que $\varphi(v) = v$ si $\|v\| \geq R$. Fijemos $e \in W$ ortogonal a V tal que $\|e\| = 1$. Extendemos primero φ al semiespacio $W^+ = \{v + re : v \in V,\, r \geq 0\}$ como sigue:

$$\psi(v + se) = \begin{cases} \varphi(v)_s & v \in V,\ s \in [0, 2] \\ \varphi(v)_2 + (s-2)\omega & v \in V,\ s \in [2, \infty), \end{cases}$$

donde u_s es la función de el Lema 4.6 y $\omega \in H_0^1(\Omega \setminus supp(u_2))^G$, $\omega \neq 0$ es una función tal que

$$\int_\Omega |\nabla\omega|^2 = \int_\Omega |\omega|^p$$

además cumple que

$$\max_{t \geq 0} I(t\omega) \leq I(\omega) =: \beta \tag{4.7}$$

(véase la figura 4.2). Observemos que

$$\psi(v) = \varphi(v)_0 = \varphi(v) \qquad \forall v \in V.$$

Además, como los soportes de $\varphi(v)_2$ y ω son ajenos, usando la Proposición 4.6 obtenemos que

$$I(\psi(v + se)) \leq \begin{cases} \max\{\alpha I(\varphi(v)), 0\} & v \in V,\ s \in [0, 2] \\ \max\{\alpha I(\varphi(v)), 0\} + I((s-2)\omega) & v \in V,\ s \in [2, \infty). \end{cases}$$

Se sigue de (4.7) que

$$I(\psi(v + se)) \leq \max\{\alpha I(\varphi(v)), 0\} + \beta \qquad \forall v \in V,\ s \in [0, \infty). \tag{4.8}$$

Además, como $\dim V < \infty$, $\varphi(v) = v$ si $\|v\| \geq R$ y $I(v) \to -\infty$ cuando $\|v\| \to \infty$, se tiene que la función $v \mapsto I(\varphi(v))$ alcanza su máximo en V y que existe $R_1 \geq R$ tal que

$$\begin{array}{ll} \alpha I(v) \leq -\beta & \text{si } \|v\| \geq R_1, \\ I((s-2)\omega) \leq -\max_{v \in V} \alpha I(\varphi(v)) & \text{si } s \geq R_1. \end{array}$$

En consecuencia,

$$I(\psi(v + se)) \leq 0 \quad \text{si } \|v\| \geq R_1 \text{ o si } s \geq R_1.$$

Sea $R_2 \geq R_1$ tal que $\psi(w) \in I^0 \setminus \{0\}$, para toda $w \in W^+$ con $\|w\| \geq R_2$. Como $I^0 \setminus \{0\}$ es homotópicamente equivalente a la esfera unitaria en $H_0^1(\Omega)^G$ (Lema 4.7), $I^0 \setminus \{0\}$ es contraible y en consecuencia, existe una homotopía

$$\Psi : \{w \in W^+ : \|w\| = R_2\} \times [0, 1] \to I^0 \setminus \{0\}$$

tal que $\Psi(w,0)=\psi(w)$, $\Psi(w,1)=w$ y $\Psi(v,t)=v$ para toda $v\in V$ y $t\in[0,1]$. Definimos $\widetilde{R}:=R_2+1$ y $\widetilde{\varphi}:W\to H_0^1(\Omega)^G$ como sigue:

$$\widetilde{\varphi}(w)=\begin{cases}\psi(w) & \text{si } w\in W^+,\ \ \|w\|\le R_2\\ \frac{\|w\|}{R_2}\Psi(R_2\frac{w}{\|w\|},\|w\|-R_2) & \text{si } w\in W^+,\ R_2\le\|w\|\le\widetilde{R}\\ w & \text{si } w\in W^+,\ \widetilde{R}\le\|w\|\\ -\widetilde{\varphi}(-w) & \text{si } -w\in W^+.\end{cases}$$

Entonces $\widetilde{\varphi}(v)=\varphi(v)$ para toda $v\in V$ y como φ es impar, $\widetilde{\varphi}$ está bien definida y es continua. Por definición, $\widetilde{\varphi}$ es impar y $\widetilde{\varphi}(w)=w$ para toda $w\in W$ con $\|w\|\ge\widetilde{R}$. Como I es par y $I\left(\widetilde{\varphi}(w)\right)\le 0$ si $\|w\|\ge R_2$, se sigue de (4.8) que

$$\max_{w\in W} I(\widetilde{\varphi}(w))\le\alpha\max_{v\in V} I(\varphi(v))+\beta.$$

Esto concluye la demostración. ■

Demostración del Teorema 4.1. Sean $\zeta_i:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=1,2$, definidas por

$$\begin{cases}\zeta_1(0,s)=s\\ \frac{\partial}{\partial t}\zeta_1(t,s)=-\theta(\zeta_1(t,s))\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\zeta_2(0,s)=s\\ \frac{\partial}{\partial t}\zeta_2(t,s)=\theta(\zeta_2(t,s))\end{cases}$$

donde $\theta(s)=a\left(s^2+1\right)^{1/4}$ si $u_0\neq 0$ y $a\left(s^2+1\right)^{1/2p}$ si $u_0=0$. Sea c_k^G es valor definido en (3.17). Si $\zeta_2(1,c_k^G+\varepsilon)<\zeta_1(1,c_{k+1}^G)$ para alguna $0<\varepsilon<1$, escogemos $\varphi\in\Gamma^G$ tal que

$$\sup_{u\in X_k} I(\varphi(u))<c_k^G+\varepsilon$$

(recordemos que hemos denotado $I_0=I$). Aplicando la proposición anterior obtenemos una función impar $\tilde{\varphi}:X_{k+1}\to H_0^1(\Omega)^G$ tal que $\tilde{\varphi}(u)=\varphi(u)$ para toda $u\in X_k$, $\tilde{\varphi}(u)=u$ si $\|u\|>R$ y

$$\sup_{u\in X_{k+1}} I\left(\tilde{\varphi}(u)\right)\le\alpha\left(c_k^G+\varepsilon\right)+\beta<\alpha c_k^G+\alpha+\beta.$$

Por el teorema de extensión de Tietze $\tilde{\varphi}$ se puede extender a una función impar $\tilde{\varphi}$: $H_0^1(\Omega)^G\to H_0^1(\Omega)^G$ tal que $\tilde{\varphi}(u)=u$ si $\|u\|>R$. El Teorema 2.1 asegura que

$$\widetilde{c}_k^G\le\zeta_2(1,\sup_{u\in X_{k+1}} I\left(\tilde{\varphi}(u)\right))\le\zeta_2(1,\alpha c_k^G+\alpha+\beta). \tag{4.9}$$

Por definición ζ_2 se cumple que

$$|s-\zeta_2(t,s)|\le C_1\left|\theta(s)\right|\le C_1(s^2+1)^{\frac{1}{4}} \tag{4.10}$$

por (4.9), (4.10), haciendo $s = \alpha c_k^G + \alpha + \beta$ y $t = 1$ obtenemos que

$$\widetilde{c}_k^G \le C_1(\big(\alpha c_k^G + \alpha + \beta\big)^2 + 1)^{\frac{1}{4}} + \alpha c_k^G + \alpha + \beta \tag{4.11}$$

Por otra parte, el Corolario 3.11, afirma que

$$c_k^G \le \beta_4 k^{\frac{2p}{(N-m)(p-2)}}. \tag{4.12}$$

Usando (4.11) y (4.12) se obtiene que existe $\beta > 0$ tal que

$$\widetilde{c}_k^G \le \beta k^{\gamma},$$

con $\gamma = 2p/(N-m)(p-2)$. ■

Para el grupo trivial, el Teorema 4.1 fue probado por Castro y Clapp en [9].

4.2. Demostración de los teoremas principales

El Teorema 1.5 se obtiene inmediatamente del Teorema 3.13 y el Teorema 4.1.

El Teorema 1.6 se obtiene inmediatamente del Teorema 3.14 y el Teorema 4.1.

Bibliografía

[1] H. Amann, *Ordinary differential equations : An introduction to nonlinear analysis,* De gruyter studies in mathematics **13,** De Gruyter, Berlin 1990.

[2] A. Bahri, H. Berestycki, *A perturbation method in critical point theory and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 1-32.

[3] A. Bahri, P. L. Lions, *Morse index of some min-max critical points. I. Application to multiplicity results*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988),1027-1037.

[4] A. Bahri, *Topological results on certainclass of functionals and applications,* J. Funct. Anal. **41** (1981),397-427.

[5] Ph. Bolle, *On the Bolza problem,* J. Diff. Eq. **152** (1999), 274-288.

[6] Ph. Bolle, N. Ghoussoub, H. Tehrani, *The multiplicity of solutions to non-homogeneous boundary value problems*, Manuscripta Math. **101** (2000), 325-350.

[7] J. Brüning, E. Heintze, *Représentations des groupes d'isométries dans les sous-espaces propres du laplacien,* C. R. Acad. Sc. Paris **286** (1978), 921-923.

[8] J. Brüning and E. Heintze, *Representations of compact Lie groups and elliptic operators*, Inventiones math. **50** (1979), 169-203.

[9] A. Castro, M. Clapp, *Upper estimates for the energy of solutions of nonhomogeneous boundary value problems*, Proceedings of the American Mathematical Society **134** (2006), 167-175.

[10] A. M. Candela, G. Palmieri, A. Salvatore, *Radial solutions of semilinear elliptic equations with broken symmetry,* Topol. Meth. Nonlinear Anal. **27** (2006) 117-132.

[11] A. M. Candela, A. Salvatore, *Multiplicity results of an elliptic eqaution with non-homogeneus boundary conditions,* Topol. Meth. Nonlinear Anal. **78** (1998) 1-18.

[12] M. Clapp, *Borsuk-Ulam theorems for perturbed symmetric problems*, Nonl. Anal. **47** (2001), 3749-3758.

[13] M. Cwickel, *Weak type estimates and the number of bound states of Schrodinger operators,* Ann. Math. **106** (1977), 93-102.

[14] H. Donnelly, *G-spaces, the asymptotic splitting of $L^2(M)$ into irreducibles*, Math. Ann. **237** (1978), 23-40.

[15] R. Engelking, *General topology*, Sigma Series in Pure Mathematics **6**, Henderman Verlag, Berlin, 1989.

[16] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies Math. 19, Amer. Math. Soc., Providence 1998.

[17] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order,* Springer, 2001.

[18] R. Kajikiya, *Radially symmetric solutions of semilinear elliptic equations, existence and Sobolev estimates,* Hiroshima Math. J. **21** (1991), 111-161.

[19] R. Kajikiya, *Orthogonal group invariant solutions of the Emden-Fowler equation,* Nonlinear Analysis TMA **44** (2001), 845-896.

[20] E. H. Lieb, *Bounds of eigenvalues of the Laplace and Schrodinger operators,* Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 751-753.

[21] W. Marzantowicz, *A Borsuk-Ulam theorem for orthogonal T^k and Z_p^k actions with applications*, J. Math. Anal. and Appl. **137** (1989), 99-121.

[22] P. H. Rabinowitz, *Multiple critical points of perturbed symmetric functionals,* Trans. Amer. Math. Soc. **272** (1982), 753-770.

[23] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differentoal equations,* Reg. Conf. Ser. Math.**65** Amer. Math. Soc., Providence, RI 1986.

[24] G. Rosenbljum, *The distribution of the discrete spectrum for singular differential operators*, Soviet Math. Dokl. **13** (1972), 245-249.

[25] L. Schwartz, *Analyse II,* Hermann, Paris 1992.

[26] M. Struwe, *Infinitely many critical points for functionals wich are not even and applications to superlinear boundary value problems,* Manuscripta Math. **32** (1980), 335-364.

[27] K. Tanaka, *Morse indices at critical points related to the symmetric mountain pass theorem and applications*, Commun. in Partial Diff. Eq. **14** (1989), 99-128.

[28] M. Willem, *Minimax theorems,* PNLDE **24**, Birkhāuser, Boston-Basel-Berlin 1996.