



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CLASIFICACIÓN DERIVADA DE ÁLGEBRAS

GENTILES CON DOS CICLOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

DIANA AVELLA ALAMINOS

DIRECTOR DE TESIS: DR. CHRISTOF GEISS HAHN

MÉXICO, D. F.

AGOSTO 2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Capítulo 0. Introducción	ix
Capítulo 1. Álgebras gentiles e invariantes	1
1. Notación y definiciones previas	1
2. Álgebras de caminos	2
3. Álgebras gentiles	3
4. Hilos de un álgebra gentil	4
5. El álgebra repetitiva de un álgebra gentil	7
6. Cálculo combinatorio de los invariantes	9
7. Resultados principales	14
Capítulo 2. Representantes	15
1. Tres parejas de naturales	15
2. Una pareja de naturales	17
Capítulo 3. Interpretación teórica de los invariantes	21
1. Componentes características	21
2. Justificación del algoritmo	22
Capítulo 4. Grupos de automorfismos	29
Capítulo 5. Transformaciones de álgebras gentiles	37
1. Transformaciones sobre un vértice	37
2. Transformaciones sobre una flecha	39
3. Transformaciones sobre un lazo	40
4. Descripción de las transformaciones con los hilos de A	41
5. Justificación teórica de las transformaciones	44
Capítulo 6. Reducciones de un álgebra a la forma normal	51
1. Simplificación de ramas en el carcaj	51
2. Formas de agregar un vértice a los representantes	63
Capítulo 7. Justificación de la clasificación	73
Capítulo 8. Apéndice	77
1. Programa de GAP	77
2. Clasificación para dos ciclos y menos de seis vértices	112

CAPÍTULO 0

Introducción

Actualmente uno de los temas centrales del álgebra contemporánea es el estudio de categorías trianguladas. Cabe mencionar que, más allá de sus orígenes en la geometría algebraica, recientemente se vislumbran conexiones con la física matemática. El ejemplo clásico de una categoría triangulada es la categoría derivada de una categoría abeliana A , $D(A)$. Filosóficamente, la importancia de $D(A)$ es que contiene la esencia homológica de A . Por ello resulta atractivo clasificar álgebras con respecto a equivalencia derivada, o en otras palabras estudiar cuándo las categorías derivadas de sus categorías de módulos son equivalentes. Para ello se buscan invariantes de las álgebras que se preserven bajo equivalencia derivada, aunque hasta ahora se conocen muy pocos y resulta complicado distinguir si dos álgebras son o no derivadamente equivalentes. Un ejemplo reciente de invariantes obtenidos combinatoriamente se presenta en el trabajo [BH05].

En la presente investigación se estudia este problema para las álgebras gentiles, que forman una familia de álgebras cerrada bajo equivalencia derivada [SZ03]. Esta familia es importante ya que aparece de modo natural en la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita; por ejemplo las álgebras derivadamente equivalentes a álgebras del tipo \mathbb{A} o del tipo $\tilde{\mathbb{A}}$ son álgebras gentiles definidas por árboles en el primer caso y por carcajes con un solo ciclo en el segundo (como se detallará más adelante), ver [BH05]. El problema ha sido entendido en el caso de álgebras gentiles cuyos carcajes asociados son árboles o tienen un ciclo. En esta tesis se definen nuevos invariantes para álgebras gentiles que se obtienen de un modo combinatorio muy sencillo a partir de los carcajes con relaciones que definen a las álgebras y que permiten, en algunos casos, dar la clasificación completa bajo equivalencia derivada.

En las investigaciones sobre este tema, juega un papel importante el funtor de Happel

$$F : D^b(\text{mod } A) \rightarrow \hat{A} - \underline{\text{mod}}$$

que permite obtener información de la categoría derivada mediante el estudio de la categoría de módulos estable $\hat{A} - \underline{\text{mod}}$ y el carcaj

estable de Auslander-Reiten del álgebra repetitiva \hat{A} , $\Gamma_{\hat{A},s}$. Éste es un funtor pleno, fiel y exacto, además se trata de una equivalencia de categorías trianguladas si y sólo si la dimensión global del álgebra es finita. A lo largo de esta tesis se trabajará con módulos izquierdos. A continuación resumiremos los resultados que se tienen hasta este momento con respecto al caso de árboles y carcajes de un sólo ciclo que podemos encontrar en [GP99, 3] y en [BGS04]. Aquellos que se refieren a álgebras definidas por árboles se tienen gracias a [AH81], los que se refieren a álgebras definidas por carcajes con un solo ciclo se deben a los trabajos de investigaciones como [AS87] y [Vo01]. Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q un carcaj finito y conexo de n vértices.

- A es derivadamente equivalente a un álgebra hereditaria de tipo \mathbb{A}_n si y sólo si Q es un árbol. En este caso $\Gamma_{\hat{A},s}$ consiste de una sola componente de tipo $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$.
- – A es derivadamente equivalente a un álgebra hereditaria de tipo $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$ para algunos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p + q = n$ si y sólo si Q tiene un único ciclo C y el número de relaciones en C en el sentido de las manecillas del reloj coincide con el número de relaciones en C en sentido opuesto (se dice entonces que Q cumple la condición del reloj). En este caso $\Gamma_{\hat{A},s}$ consiste de varias familias numerables de componentes: un familia de componentes del tipo $\mathbb{Z}\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$, una familia de tubos $\mathbb{Z}A_\infty/\langle \tau^p \rangle$, una familia de tubos $\mathbb{Z}A_\infty/\langle \tau^q \rangle$ y una cantidad numerable de familias de tubos homogéneos $\mathbb{Z}A_\infty/\langle \tau \rangle$ provenientes de módulos banda, parametrizadas por el campo.
 - Si Q tiene un único ciclo C , y no se cumple la condición del reloj denotemos por c al número de relaciones en C en el sentido de las manecillas del reloj, por a al número de relaciones en C en sentido opuesto y definamos $r := |c - a|$. Entonces $\Gamma_{\hat{A},s}$ consiste exactamente de: $2r$ componentes $\mathbb{Z}A_\infty$ y r componentes $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$.

En este último caso es posible describir las clases de equivalencia derivada mediante el estudio de las componentes $\mathbb{Z}A_\infty$ y $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ de $\Gamma_{\hat{A},s}$ como se hace en [BGS04] donde además se presenta una forma normal para el estudio del mismo.

En el caso de álgebras gentiles con más de un ciclo se sabe que $\Gamma_{\hat{A},s}$ tiene una infinidad de componentes del tipo $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty^\infty$, una infinidad de familias de tubos homogéneos $\mathbb{Z}A_\infty/\langle \tau \rangle$ provenientes de módulos

banda, ver [BR87] pero aún un número finito de componentes $\mathbb{Z}A_\infty$, ver [GP99].

La investigación consiste en estudiar más a fondo el problema para álgebras gentiles de más de un ciclo. Como se mencionó anteriormente, en la tesis se definen ciertos invariantes bajo equivalencia derivada formados a partir de parejas de naturales y que son calculados combinatoriamente de modo muy directo a partir del carcaj con relaciones que define al álgebra; básicamente se obtienen de hacer recorridos sobre el carcaj avanzando por caminos sin relaciones y retrocediendo por caminos donde cada par de flechas consecutivas forman una relación. Además, a partir de ellas se puede obtener información sobre el álgebra, por ejemplo, la suma de las segundas coordenadas de las parejas corresponde al número de flechas del carcaj (que se prueba es también invariante bajo equivalencia derivada), la suma de las primeras coordenadas y las segundas es dos veces el número de vértices y las parejas de la forma $(0, m)$ aparecen en el caso de álgebras de dimensión global infinita. De hecho las parejas están íntimamente ligadas a la estructura de $\Gamma_{\hat{A},s}$ y permiten saber cuántas familias de componentes $\mathbb{Z}A_\infty$ y de tubos que provienen de módulos cuerda tiene y cómo es la acción del funtor de Heller, Ω , sobre las mismas.

Con estos invariantes podemos recuperar los resultados antes mencionados y se prueba que salvo en un caso degenerado éstos permiten distinguir las diferentes clases de equivalencia derivada de las álgebras gentiles definidas por carcajes con dos ciclos. Para esta investigación se utilizaron transformaciones combinatorias sobre los carcajes con relaciones asociados a un álgebra gentil, definidas en [HSZ01], que fueron esenciales para probar los resultados obtenidos.

El trabajo consta de ocho capítulos. En el primero se introducen algunas definiciones básicas del área y ciertos conceptos nuevos que se usan a lo largo del texto. Además se definen de forma combinatoria las parejas de naturales asignadas a un carcaj con relaciones asociado a un álgebra gentil. En su última sección se enuncian los teoremas principales de la investigación: el hecho de que estas parejas de naturales son invariantes bajo equivalencia derivada, que en el caso de álgebras gentiles definidas por carcajes de dos ciclos se tienen una o tres parejas asociadas al álgebra y que en el caso de que se tengan tres parejas de naturales asociadas, éstas permiten distinguir las diferentes clases de equivalencia derivada.

En el segundo capítulo se construyen álgebras gentiles definidas por carcajes de dos ciclos, asociadas a todos los posibles casos en que se presentan tres parejas de naturales como invariantes. Debido a los

resultados que se obtienen en este trabajo, éstas conforman de hecho una lista de representantes para todas las diferentes clases de equivalencia derivada de álgebras gentiles de dos ciclos y con tres parejas de naturales como invariantes. Al final de este capítulo se dan algunos ejemplos de álgebras cuyos invariantes constan de una sólo pareja de naturales, se presentan casos en que esta pareja coincide pero no se sabe si las álgebras son o no derivadamente equivalentes, sólo se sabe que no es posible obtener una en otra mediante transformaciones elementales.

En el capítulo 3 se estudian ciertos grupos de automorfismos para probar al final del mismo que el número de flechas en el carcaj que define a un álgebra gentil es un invariante derivado, lo cual, además de ser un resultado original e importante en sí mismo, se usa durante el siguiente capítulo.

Más adelante, durante el capítulo 4, se estudia la conexión que tienen las parejas de naturales mencionadas con la estructura de $\Gamma_{\hat{A},s}$ y se prueba con ello que son invariantes bajo equivalencia derivada.

En la investigación se prueba que si dos álgebras gentiles definidas por carcajes de dos ciclos tienen los mismos invariantes, entonces son derivadamente equivalentes. Más aún, a partir de 5 vértices, las transformaciones elementales antes mencionadas, definidas por primera vez en [HSZ01], permiten obtener una a partir de la otra. El estudio de dichas transformaciones, se realiza a lo largo del capítulo 5.

El material presentado en los capítulos 6 y 7 permite justificar que cualquier álgebra gentil definida a partir de un carcaj de dos ciclos, a la cual se asocian tres parejas de naturales, puede modificarse mediante transformaciones elementales hasta obtener uno de los representantes del capítulo 4. En el primero de ellos se desarrollan básicamente lemas técnicos para lograr este objetivo y en el segundo se presenta la prueba de esta afirmación con un argumento de inducción sobre el número de vértices; además se demuestra también que para las álgebras gentiles definidas por carcajes con dos ciclos sólo se presentan una o tres parejas de naturales como invariantes asociados.

El último capítulo es de hecho un anexo donde se presenta el programa de GAP que se desarrolló en este trabajo para obtener, a partir de un álgebra gentil, todas aquellas álgebras derivadamente equivalentes a ella mediante transformaciones elementales y así poder entender en este caso cómo son las distintas clases de equivalencia derivada. Se muestran también los cálculos realizados con él, que se presentan ocupando la descripción combinatoria de las álgebras gentiles que se introduce en el primer capítulo. Éstos cálculos son usados como base de la prueba por inducción que se realiza en el penúltimo capítulo.

Por último, es importante mencionar que los resultados desarrollados en esta tesis, permiten continuar con el estudio del problema planteado inicialmente. Si bien es cierto que se logra entender la clasificación bajo equivalencia derivada de álgebras gentiles definidas por carcajes de dos ciclos cuando se tienen tres parejas de naturales como invariante asociado, queda abierta la pregunta de qué es lo que ocurre cuando se presenta sólo una pareja. De acuerdo a los cálculos realizados encontramos álgebras con estas características, asociadas a la misma pareja de naturales pero que no son derivadamente equivalentes mediante transformaciones elementales. Hasta el momento no se sabe si pertenecen o no a la misma clase de equivalencia derivada.

Otra pregunta interesante que surge a partir de este trabajo es entender el problema para álgebras gentiles definidas por carcajes de más de dos ciclos. Los invariantes mencionados son bastante útiles y ayudan a estudiar este problema pero habría que desarrollar otro tipo de técnicas para entenderlo por completo, ya que simplemente los cálculos de cómputo que se podrían desarrollar continuando por este camino rebasarían la capacidad del programa de GAP usado para este trabajo.

CAPÍTULO 1

Álgebras gentiles e invariantes

En este primer capítulo se introducirán, por un lado, algunos conceptos básicos que se ocuparán a lo largo del trabajo, algunos de los cuales están presentes en la literatura que trata este tema. Otros, se definieron específicamente para este texto con el fin de manipular de un modo más sencillo ciertos objetos. Por otro lado se establecerá un modo combinatorio de asignar parejas de naturales a los carcajes con relaciones asociados a álgebras gentiles que permiten estudiar las clases de equivalencia derivada de dichas álgebras, como se enunciará en los teoremas de éste capítulo y que forman parte de los resultados centrales de la investigación.

1. Notación y definiciones previas

A lo largo de este texto denotaremos por $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ a un carcaj, o simplemente por Q siempre que no exista confusión al hacerlo, donde Q_0 es el conjunto de vértices, Q_1 el de flechas y $s, e : Q_1 \rightarrow Q_0$ las funciones que determinan el principio y el final de cada flecha respectivamente.

Definición 1.1. Consideremos $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ un carcaj finito (es decir con un número finito de vértices y de flechas) y conexo. El **número de ciclos de Q** es $c(Q) := \#Q_1 - \#Q_0 + 1$.

Observación 1.2. La condición descrita en la definición anterior es equivalente a decir que basta quitar $c(Q)$ flechas de Q para obtener un árbol.

Definición 1.3. Sea Q un carcaj. Diremos que dos vértices $u, v \in Q_0$ son **vecinos** si existe $\alpha \in Q_1$ tal que $\{s(\alpha), e(\alpha)\} = \{u, v\}$; a u se le llama un vecino de v y viceversa.

Definición 1.4. Consideremos $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ un carcaj finito y conexo. Sea S la colección de vértices que pertenecen a un ciclo o a una trayectoria que une a dos vértices pertenecientes a ciclos. Diremos que un subcarcaj Q' de Q es un **árbol enraizado en $v \in Q_0$** si Q' es un árbol, v es el único vértice de Q' que pertenece a S ; además

$\#Q'_1$ es máximo con respecto a esta propiedad. La **profundidad del árbol enraizado en v** es el número de aristas de una trayectoria que comienza en v de longitud máxima, en la gráfica subyacente. Diremos que Q' un árbol enraizado en v es una **rama** si todos los vértices tienen grado menor o igual a dos en Q' .

2. Álgebras de caminos

Un **camino** en Q es una secuencia $C = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ de flechas en Q de modo que $s(\alpha_{i+1}) = e(\alpha_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$, diremos entonces que el **principio de C** es $s(C) := s(\alpha_1)$, su **flecha inicial** es α_1 , el **final** de C es $e(C) := e(\alpha_n)$, su **flecha final** es α_n y la **longitud de C** $l(C) := n$. Diremos que el camino pasa por v si $v = s(\alpha_i)$ o $v = e(\alpha_i)$ para alguna $i = 1, 2, \dots, n$. Para cada vértice $v \in Q_0$ tenemos un **camino trivial** 1_v que comienza y termina en v que denotaremos por 1_v . Dada $\alpha \in Q_1$ denotaremos por α^{-1} al **inverso formal de α** donde $s(\alpha^{-1}) := e(\alpha)$ y $e(\alpha^{-1}) := s(\alpha)$ y $(\alpha^{-1})^{-1} := \alpha$. Para $C = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ un camino en Q , su **inverso** es la secuencia $C^{-1} := \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} \dots \alpha_n^{-1}$. En el caso de un camino trivial $1_v^{-1} := 1_v$.

Dados dos caminos C_1 y C_2 en Q tales que $s(C_2) = e(C_1)$ definimos la composición $C_2 C_1$ como la concatenación de los caminos; los caminos triviales funcionan como idempotentes con respecto a la composición. Si k es un campo el **álgebra de caminos de Q** , kQ , es aquella cuya base son los caminos en Q y la multiplicación es la inducida por la composición antes mencionada, donde $C_2 C_1 = 0$ si $s(C_2) \neq e(C_1)$. Una **relación en Q** es una combinación lineal no nula de caminos de longitud mayor o igual a dos que tienen el mismo principio y el mismo final. Sea \mathcal{P} un conjunto de relaciones en Q y $\langle \mathcal{P} \rangle$ el ideal de kQ generado por \mathcal{P} . Denotaremos al carcaj con relaciones mediante la pareja Q, \mathcal{P} . Consideramos el álgebra dada por el cociente $kQ / \langle \mathcal{P} \rangle$. Haciendo un abuso de notación identificaremos a un camino de Q con su correspondiente clase en $kQ / \langle \mathcal{P} \rangle$.

Un **camino permitido máximo** del álgebra $A = kQ / \langle \mathcal{P} \rangle$ o del carcaj con relaciones (Q, \mathcal{P}) es un camino $C = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1 \in kQ \setminus \langle \mathcal{P} \rangle$ tal que no existen $\beta, \gamma \in Q_1$ con $\beta \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ o $\alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1 \gamma$ sean caminos en $kQ \setminus \langle \mathcal{P} \rangle$. Un **camino prohibido** en A es una secuencia $P = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ de flechas distintas en Q de modo que $\alpha_{i+1} \alpha_i \in \mathcal{P}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Un **camino prohibido máximo** en A es un camino prohibido $\alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ de modo que no existen $\beta, \gamma \in Q_1$ tales que $\beta \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ o $\alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1 \gamma$ sean caminos prohibidos¹.

¹No en todos los casos existen estos caminos máximos, depende de cómo sea el álgebra de carcaj A . Sin embargo, para las álgebras gentiles de dimensión finita

Trabajaremos con álgebras cuyos carcajes correspondientes cumplen algunas condiciones que se describirán a continuación.

3. Álgebras gentiles

Las álgebras gentiles con las que se trabajará más adelante son un tipo especial de las llamadas álgebras biseriales especiales. A lo largo de esta tesis, se hará un abuso de notación y se hablará de álgebras gentiles refiriéndonos en realidad a los carcajes con relaciones que las definen, ya que esto no afecta la generalidad de los resultados obtenidos.

Definición 1.5. Decimos que $kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ es un **álgebra biserial especial** si se cumplen:

- (1) Para cada $v \in Q_0$, $\#\{\alpha \in Q_1 | s(\alpha) = v\} \leq 2$ y $\#\{\alpha \in Q_1 | e(\alpha) = v\} \leq 2$.
- (2) Para cada $\beta \in Q_1$, $\#\{\alpha \in Q_1 | s(\beta) = e(\alpha) \text{ y } \beta\alpha \notin \mathcal{P}\} \leq 1$ y $\#\{\gamma \in Q_1 | s(\gamma) = e(\beta) \text{ y } \gamma\beta \notin \mathcal{P}\} \leq 1$.
- (3) Para cada $\beta \in Q_1$ existe una cota $n(\beta)$ tal que cualquier camino $\beta_{n(\beta)} \dots \beta_2 \beta_1$ con $\beta_{n(\beta)} = \beta$ contiene un subcamino en \mathcal{P} , y cualquier camino $\beta_{n(\beta)} \dots \beta_2 \beta_1$ con $\beta_1 = \beta$ contiene un subcamino en \mathcal{P} .

Observación 1.6. Un álgebra biserial especial $kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ es de dimensión finita si y sólo si Q es finito, ver [Ri97, 1].

Definición 1.7. Decimos que un álgebra biserial especial $kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ es un **álgebra de cuerda** si se cumple:

- (1) Todas las relaciones en \mathcal{P} son caminos en Q .

Definición 1.8. Decimos que $kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ es un **álgebra gentil** si es un álgebra biserial especial que cumple:

- (1) Todas las relaciones en \mathcal{P} son monomios de longitud 2.
- (2) Para cada $\beta \in Q_1$, $\#\{\alpha \in Q_1 | s(\beta) = e(\alpha) \text{ y } \beta\alpha \in \mathcal{P}\} \leq 1$ y $\#\{\gamma \in Q_1 | s(\gamma) = e(\beta) \text{ y } \gamma\beta \in \mathcal{P}\} \leq 1$.

Observación 1.9. Se puede definir un álgebra biserial especial, de cuerda o gentil A como aquella isomorfa a una del tipo $kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ biserial especial, de cuerda o gentil respectivamente de acuerdo a la definición anterior, pero para los fines de nuestra investigación no es necesario, ver [Ri97, 1].

que se estudiarán en este trabajo, existirán siempre los caminos máximos permitidos debido al inciso 3 de la definición 1.5) y los prohibidos gracias a la restricción de considerar flechas distintas

4. Hilos de un álgebra gentil

A partir de este momento consideraremos sólo álgebras gentiles $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ donde Q es un carcaj finito y conexo, y k un campo algebraicamente cerrado.

Fijémonos en los caminos permitidos máximos de un álgebra gentil $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$, a los cuales también llamaremos los **hilos permitidos no triviales** de A . Sea $v \in Q_0$ un vértice para el cual $\#\{\alpha \in Q_1 | s(\alpha) = v\} \leq 1$, $\#\{\alpha \in Q_1 | e(\alpha) = v\} \leq 1$ y si $\beta, \gamma \in Q_1$ son tales que $s(\gamma) = v = e(\beta)$ entonces $\gamma\beta \notin \mathcal{P}$, diremos que existe un **hilo permitido trivial** en v que denotaremos por h_v y cuya longitud es cero, $l(h_v) := 0$. Sea \mathcal{H}_A el conjunto de todos los hilos permitidos de A , triviales y no triviales. Observamos que este conjunto describe por completo al álgebra A .

Utilizaremos también la colección de caminos prohibidos máximos que llamaremos **hilos prohibidos no triviales** de A . Nuevamente, sea $v \in Q_0$ de modo que $\#\{\alpha \in Q_1 | s(\alpha) = v\} \leq 1$, $\#\{\alpha \in Q_1 | e(\alpha) = v\} \leq 1$ y si $\beta, \gamma \in Q_1$ son tales que $s(\gamma) = v = e(\beta)$ entonces $\gamma\beta \in \mathcal{P}$, diremos que existe un **hilo prohibido trivial** en v que denotaremos por p_v , con longitud cero, $l(p_v) := 0$. Sea P_A el conjunto de todos los hilos prohibidos de Q , triviales y no triviales.

Daremos otra presentación de A usando los hilos del álgebra. Será útil escribir los caminos de un carcaj Q , con $\#Q_0 \geq 2$, usando los vértices por los que pasa el camino, en lugar de las flechas. Queremos describir una flecha $\alpha \in Q_1$ mediante el par $(e(\alpha), s(\alpha))$, pero evitando confusiones en el caso de que existan flechas múltiples en el carcaj (sólo se pueden presentar dos flechas que comiencen y terminen en el mismo vértice debido a que se trata de un álgebra gentil). Para ello hacemos lo siguiente. Elegimos $\sigma, \eta : Q_1 \rightarrow \{1, -1\}$ con las propiedades:

- (1) Si $\beta_1 \neq \beta_2$ son flechas con $s(\beta_1) = s(\beta_2)$, entonces $\sigma(\beta_1) = -\sigma(\beta_2)$.
- (2) Si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ son flechas con $e(\gamma_1) = e(\gamma_2)$, entonces $\eta(\gamma_1) = -\eta(\gamma_2)$.
- (3) Si $\beta \neq \gamma$ son flechas con $s(\gamma) = e(\beta)$ y $\gamma\beta \notin P$, entonces $\sigma(\gamma) = \eta(\beta)$.

Estas funciones existen debido a que A es gentil [BR87, 3] (la función anterior σ es la que aparece en el texto referido mientras que $-\eta$ es la función ε que se presenta en el artículo).

Extenderemos ahora estas funciones a los hilos permitidos e hilos prohibidos de A de la siguiente forma. Dado $C = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ un hilo permitido en A definimos $\sigma(C) := \sigma(\alpha_1)$ y $\eta(C) := \eta(\alpha_n)$. Si hay un hilo permitido trivial h_v para algún $v \in Q_0$, como Q es conexo,

existe $\gamma \in Q_1$ con $s(\gamma) = v$ o $\beta \in Q_1$ con $e(\beta) = v$, en el primer caso definiremos $\sigma(h_v) = \eta(h_v) = -\sigma(\gamma)$, y en el segundo caso $\sigma(h_v) = \eta(h_v) = -\eta(\beta)$. Para los hilos prohibidos $P = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ definiremos $\sigma(P) := \sigma(\alpha_1)$ y $\eta(P) := \eta(\alpha_n)$. Si se presenta un hilo prohibido trivial p_v para algún $v \in Q_0$, como en el caso anterior, existe $\gamma \in Q_1$ con $s(\gamma) = v$ o $\beta \in Q_1$ con $e(\beta) = v$, en el primer caso definiremos $\sigma(p_v) = \eta(p_v) := \sigma(\gamma)$, y en el segundo caso $\sigma(p_v) = \eta(p_v) := -\eta(\beta)$.

Identificaremos a $\alpha \in Q_1$ con $(e(\alpha)^{\eta(\alpha)}, s(\alpha)^{\sigma(\alpha)})$. De modo más general, identificaremos al hilo permitido no trivial $\alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ con el vector

$$(e(\alpha_n)^{\eta(\alpha_n)}, s(\alpha_n)^{\sigma(\alpha_n)}, \dots, s(\alpha_2)^{\sigma(\alpha_2)}, s(\alpha_1)^{\sigma(\alpha_1)})$$

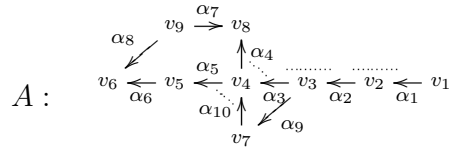
y a su inverso con

$$(s(\alpha_1)^{\sigma(\alpha_1)}, s(\alpha_2)^{\sigma(\alpha_2)}, \dots, s(\alpha_n)^{\sigma(\alpha_n)}, e(\alpha_n)^{\eta(\alpha_n)}).$$

Si existe un hilo permitido trivial h_v para algún $v \in Q_0$ lo identificaremos con $(v^{\sigma(h_v)})$. Para simplificar la notación escribiremos v^+ en lugar de v^{+1} y v^- en lugar de v^{-1} . Podemos describir entonces a \mathcal{H}_A mediante cualquier arreglo $[c_1 c_2 \dots c_r]$ donde los c_i son los inversos de los distintos elementos de \mathcal{H}_A escritos con la notación anterior, a manera de columnas y $r = \#\mathcal{H}_A$.

Debido a que trabajaremos con relaciones monomiales de longitud dos, éstas serán indicadas en el carcaj con líneas punteadas, uniendo a través de ellas cada par de flechas que formen una relación.

Ejemplo 1.10.



Definimos $\sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_4) = \sigma(\alpha_6) = \sigma(\alpha_8) = \sigma(\alpha_9) = \sigma(\alpha_{10}) = +1$, $\sigma(\alpha_2) = \sigma(\alpha_3) = \sigma(\alpha_5) = \sigma(\alpha_7) = -1$, $\eta(\alpha_1) = \eta(\alpha_2) = \eta(\alpha_4) = \eta(\alpha_5) = \eta(\alpha_6) = \eta(\alpha_9) = \eta(\alpha_{10}) = +1$ y $\eta(\alpha_3) = \eta(\alpha_7) = \eta(\alpha_8) = -1$.

En este caso \mathcal{H}_A está formado por (v_2^+, v_1^+) , $(v_8^+, v_4^+, v_7^+, v_3^+, v_2^-)$, $(v_6^+, v_5^+, v_4^-, v_3^-)$, (v_6^-, v_9^+) , (v_8^-, v_9^-) , (v_1^-) , (v_7^-) y (v_5^-) y se puede representar mediante la expresión

$$\begin{bmatrix} v_2^- & v_3^- & v_1^+ & v_9^+ & v_9^- & v_1^- & v_7^- & v_5^- \\ v_3^+ & v_4^- & v_2^+ & v_6^- & v_8^- & & & \\ v_7^+ & v_5^+ & & & & & & \\ v_4^+ & v_6^+ & & & & & & \\ v_8^+ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Usualmente se omitirán en dicha presentación los hilos triviales. En este caso escribiremos

$$\begin{bmatrix} v_2^- & v_3^- & v_1^+ & v_9^+ & v_9^- \\ v_3^+ & v_4^- & v_2^+ & v_6^- & v_8^- \\ v_7^+ & v_5^+ & & & \\ v_4^+ & v_6^+ & & & \\ v_8^+ & & & & \end{bmatrix}$$

Cabe recalcar que hay muchas formas distintas de representar a \mathcal{H}_A , de acuerdo al orden en que elijamos escribir a los elementos de dicho conjunto.

Aunque en los ejemplos y resultados que se mencionarán más adelante se usará esta forma de codificar a las álgebras gentiles, se dará otro modo de visualizar esta presentación, cuya importancia para el trabajo radica en que los cálculos que se hicieron con ayuda de la computadora se obtuvieron con dicha presentación. Consideremos $\mathcal{P}(2n)$, la colección de particiones² de $2n$, con n el número de vértices de Q , es decir, $\mathcal{P}(2n) := \{\lambda | \lambda \vdash 2n\}$. Denotemos por $\mathcal{R}(2n)$ a la colección de particiones³ del conjunto $[2n] = \{1, 2, \dots, 2n\}$ cuyos elementos tienen cardinalidad 2, es decir

$$\mathcal{R}(2n) := \{R | R \text{ es partición de } [2n] \text{ } |p| = 2 \forall p \in R\}$$

Se puede definir una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(2n) \times \mathcal{R}(2n)$ y una biyección $\Phi : \mathcal{A}(n) \rightarrow \mathcal{P}(2n) \times \mathcal{R}(2n) / \sim$ donde $\mathcal{A}(n)$ es la colección de álgebras gentiles cuyo carcaj asociado es conexo de n vértices. Para cada $A = kQ / \langle \mathcal{P} \rangle \in \mathcal{A}(n)$ sean H_1, H_2, \dots, H_r los distintos hilos de A ordenados de una forma no decreciente de acuerdo a su longitud, y definamos $\lambda := (l(H_1) + 1, l(H_2) + 1, \dots, l(H_r) + 1)$. Sean $Q_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, σ y η como se describió anteriormente, y definamos $f : \{v_i^\epsilon | 1 \leq i \leq n, \epsilon \in \{+1, -1\}\} \rightarrow [2n]$ como $f(v_i^\epsilon) := (l(H_1) + 1) + (l(H_2) + 1) + \dots + (l(H_j) + 1) - m + 1$ si v_i^ϵ es el elemento m -ésimo del vector H_j . Sea $\gamma \in \mathcal{R}(2n)$ tal que $\{c, d\} \in \gamma$ si y sólo si existe $v_i \in Q_0$ de modo que $f(v_i^\epsilon) = c$ y $f(v_i^{-\epsilon}) = d$. Entonces $\Phi(A)$ es la clase de equivalencia de la pareja (λ, γ) .

²Una partición de un natural m es una sucesión $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ de naturales tales que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, con sólo un número finito de términos no cero y de modo que $\sum_i \lambda_i = m$; lo denotaremos por $\lambda \vdash m$.

³Para un conjunto A , la colección $\{A_i\}_i$ de subconjuntos no vacíos de A es una partición de A si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$ y $\cup_i A_i = A$.

Ejemplo 1.11. Sea A el álgebra cuyo carcaj con relaciones es

$$v_5 \xrightarrow{\alpha_5} v_4 \xleftarrow{\alpha_4} v_3 \xleftarrow{\alpha_3} v_2 \xleftarrow{\alpha_1} v_1 \xrightarrow{\alpha_2} v_2$$

Tomemos $\sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2) = \sigma(\alpha_5) = +1$, $\sigma(\alpha_3) = \sigma(\alpha_4) = -1$, $\eta(\alpha_1) = \eta(\alpha_5) = +1$ y $\eta(\alpha_2) = \eta(\alpha_3) = \eta(\alpha_4) = -1$. Los hilos de A son $H_1 = (v_1^-, v_2^+, v_1^+)$, $H_2 = (v_4^-, v_3^-, v_2^-)$, $H_3 = (v_5^+, v_4^+)$, $H_4 = (v_3^+)$ y $H_5 = (v_5^-)$, por lo cual $\lambda = (3, 3, 2, 1, 1)$. Como $f(v_1^+) = 1$, $f(v_2^+) = 2$, $f(v_1^-) = 3$, $f(v_2^-) = 4$, $f(v_3^-) = 5$, $f(v_4^-) = 6$, $f(v_4^+) = 7$, $f(v_5^+) = 8$, $f(v_3^+) = 9$, $f(v_5^-) = 10$. Entonces $\gamma = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 9\}, \{6, 8\}, \{7, 10\}\}$.

5. El álgebra repetitiva de un álgebra gentil

El material presente en esta sección proviene del artículo [GP99] y puede revisarse también de manera más detallada en [Ri97]. Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil con Q conexo. Ésta se puede expresar como el k espacio vectorial $\bigoplus_{u,v \in Q_0} 1_u A 1_v$. Definimos

$$DA := \bigoplus_{u,v \in Q_0} \text{Hom}(1_u A 1_v, k)$$

que tiene una estructura de $A - A$ bimódulo dada por

$$\lambda_1 \phi \lambda_2(\lambda) := \phi(\lambda_2 \lambda \lambda_1)$$

para $\phi \in DA$ y $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in A$. El **álgebra repetitiva**⁴ de A se define como el espacio vectorial

$$\hat{A} := (\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A) \oplus (\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} DA)$$

con la multiplicación dada por

$$(\lambda_i, \phi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \cdot (\lambda'_i, \phi'_i)_{i \in \mathbb{Z}} := (\lambda_i \lambda'_i, \lambda_{i+1} \phi'_i + \phi_i \lambda'_i).$$

Debido a que estamos trabajando con un álgebra gentil existe una forma de describir a su álgebra repetitiva construyendo un nuevo carcaj a partir de un número infinito de copias de Q . De modo más preciso, sea \mathcal{M} la colección de caminos máximos permitidos de A , $M := \{1, 2, \dots, \#\mathcal{M}\}$ y denotemos a sus elementos por $p_i = \alpha_{i,l(p(i))} \dots \alpha_{i,2} \alpha_{i,1}$

⁴Esta construcción se puede hacer en el caso más general de un álgebra localmente acotada, es decir, de modo que para cualquier idempotente e , eA y Ae son de dimensión finita sobre k . En el caso de un álgebra $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$, esto corresponde a decir que para todo vértice $v \in Q_0$ casi todos los caminos del carcaj que empiezan y terminan en v pertenecen a $\langle \mathcal{P} \rangle$. DA es independiente de la colección de idempotentes que se elija.

para cada $i \in M$. La **expansión** $\mathbb{Z}(Q, \mathcal{P})$ se define como el carcaj con relaciones $\mathbb{Z}(Q, \mathcal{P}) := (\hat{Q}, \mathbb{Z}\mathcal{P})$ donde \hat{Q} está dado por

$$\hat{Q}_0 := \{v[z] | v \in Q_0, z \in \mathbb{Z}\},$$

$$\hat{Q}_1 := \{\alpha[z] | \alpha \in Q_1, z \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha_{i,0}[z] | i \in M, z \in \mathbb{Z}\}$$

con $\alpha[z] : v[z] \rightarrow w[z]$ para cada $\alpha : v \rightarrow w, z \in \mathbb{Z}$ y las flechas de conexión $\alpha_{i,0}[z] : e(\alpha_{i,0})[z+1] \rightarrow s(\alpha_{i,0})[z]$ para cada $i \in M, z \in \mathbb{Z}$. Sea $f : \hat{Q}_1 \rightarrow M$ la función tal que $f(\alpha_{i,j}[z]) = i$. Definimos

$$\mathbb{Z}\mathcal{P} := \{\beta\alpha | \alpha, \beta \in \hat{Q}_1, f(\alpha) \neq f(\beta)\}.$$

En $(\hat{Q}, \mathbb{Z}\mathcal{P})$ existe un automorfismo ν dado por $\nu(v[z]) = v[z+1]$ y $\nu(\alpha_{i,j}[z]) = \alpha_{i,j}[z+1]$, que corresponde al funtor de Nakayama. Decimos que un camino permitido en $(\hat{Q}, \mathbb{Z}\mathcal{P})$ es **pleno** si comienza en algún $v \in \hat{Q}_0$ y termina en $\nu^{-1}(v)$. Definimos dos conjuntos de relaciones

$$\hat{\mathcal{P}} := \mathbb{Z}\mathcal{P} \cup \{p-p' | p, p' \text{ son caminos plenos con } s(p) = s(p') \text{ y } e(p) = e(p')\} \\ \cup \{q | q \text{ es un camino permitido que contiene propiamente un camino pleno}\},$$

$$\bar{\mathcal{P}} := \mathbb{Z}\mathcal{P} \cup \{p | p \text{ es un camino pleno}\}.$$

El álgebra biserial especial $k\hat{Q}/\langle \hat{\mathcal{P}} \rangle$ es el álgebra repetitiva asociada a A , es decir, \hat{A} , mientras que el álgebra de cuerdas $\bar{\bar{A}} := k\hat{Q}/\langle \bar{\mathcal{P}} \rangle$ se obtiene de \hat{A} formando el cociente sobre el soclo de \hat{A} vista como módulo sobre sí misma. Observamos que para cada flecha β en $\bar{\bar{A}}$ existen flechas α y γ tales que $\beta\alpha$ y $\gamma\beta$ son caminos permitidos en $\bar{\bar{A}}$, decimos entonces que $\bar{\bar{A}}$ es **expandida**. En esta situación sólo tenemos dos tipos de vértices:

- (1) **Vértices de transición:** Existe una sola flecha α que termina en el vértice y una única flecha β que comienza en él con $\beta\alpha \notin \bar{\mathcal{P}}$.
- (2) **Vértices de encrucijada:** Existen exactamente dos flechas que terminan en el vértice y dos flechas que empiezan en él.

Debido a la construcción de $\bar{\bar{A}}$, en cada vértice de transición t comienza un único hilo permitido no trivial de $\bar{\bar{A}}$, $\mathbf{p}(t)$, y termina un único hilo permitido no trivial de $\bar{\bar{A}}$, $\mathbf{i}(t)$, mientras que en un vértice de encrucijada comienzan y terminan exactamente dos hilos permitidos no triviales de $\bar{\bar{A}}$. Observamos que

$$\mathcal{H}_{\bar{\bar{A}}} = \{p | p \text{ es un camino permitido máximo de } \bar{\bar{A}}\}$$

$$\cup \{t \in \hat{Q}_0 | t \text{ es un vértice de transición}\}.$$

Para cada flecha $\beta \in \hat{Q}_1$ definimos dos elementos de $\mathcal{H}_{\bar{A}}$ como sigue:

$$\mathbf{u}(\beta) := \begin{cases} 1_{e(\beta)}, & \text{si } e(\beta) \text{ es un vértice de transición} \\ \text{el hilo permitido no trivial que termina en } e(\beta) \\ \text{y que no contiene a } \beta, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\mathbf{v}(\beta) := \begin{cases} 1_{s(\beta)}, & \text{si } s(\beta) \text{ es un vértice de transición} \\ \text{el hilo permitido no trivial que comienza en } s(\beta) \\ \text{y que no contiene a } \beta, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces, $\mathcal{H}_{\bar{A}}$ es la unión disjunta de los conjuntos $\{\mathbf{v}(\beta) | \beta \in \hat{Q}_1\}$ y $\{\mathbf{p}(t) | t \text{ es un vértice de transición}\}$, o también la unión disjunta de $\{\mathbf{u}(\beta) | \beta \in \hat{Q}_1\}$ y $\{\mathbf{i}(t) | t \text{ es un vértice de transición}\}$. Se puede definir una correspondencia biyectiva $\tau : \mathcal{H}_{\bar{A}} \rightarrow \mathcal{H}_{\bar{A}}$ como

$$\tau(\mathbf{r}) := \begin{cases} \mathbf{u}(\beta) & \text{si } \mathbf{r} = \mathbf{v}(\beta) \\ \mathbf{i}(\nu^{-1}(t)) & \text{si } \mathbf{r} = \mathbf{p}(t) \end{cases}$$

El conjunto $\mathcal{H}_{\bar{A}}$ parametriza de modo natural los vértices del carcaj estable de Auslander-Reiten de \hat{A} que son extremos de sucesiones de Auslander-Reiten con término medio indescomponible y τ es la acción del trasladado de Auslander-Reiten, ver [BR87]. Si Q no es un árbol, las τ -órbitas infinitas de $\mathcal{H}_{\bar{A}}$ parametrizan las componentes $\mathbb{Z}A_\infty$ del carcaj estable de Auslander-Reiten de \hat{A} , mientras que las τ -órbitas finitas de $\mathcal{H}_{\bar{A}}$ parametrizan las componentes $\mathbb{Z}A_\infty / \langle \tau^n \rangle$ que no provienen de módulos banda.

6. Cálculo combinatorio de los invariantes

Describiremos a continuación un algoritmo combinatorio para obtener ciertas parejas de naturales, usando el carcaj con relaciones que define a A sin necesidad de calcular explícitamente el carcaj de Auslander-Reiten de \hat{A} . Su justificación teórica se da a partir de la descripción que se realiza en [GP99, 2.3] y [BR87, 3] de los módulos que aparecen en las fronteras de las componentes características de dicho carcaj, es decir, módulos correspondientes a sucesiones de Auslander-Reiten con un solo término medio, como se explicará en la sección 2 del capítulo 3.

En el algoritmo se procede de la siguiente manera. Se harán recorridos sobre el carcaj asociado al álgebra, avanzando por hilos permitidos y retrocediendo a través de hilos prohibidos de modo que cada flecha

y su inversa se recorran exactamente una vez. Se procede como se muestra a continuación:

- (1) Comenzamos por un hilo permitido H_0 de A .
- (2) Teniendo definido H_i consideramos Π_i el hilo prohibido que termina en $e(H_i)$ y tal que $\eta(H_i) = -\eta(\Pi_i)$.
- (3) Sea H_{i+1} el hilo permitido que empieza en $s(\Pi_i)$ y tal que $\sigma(H_{i+1}) = -\sigma(\Pi_i)$, en caso de que Π_i no sea un hilo prohibido trivial, o H_{i+1} el único hilo permitido que inicia en $s(\Pi_i)$ en caso de que Π_i sea trivial.

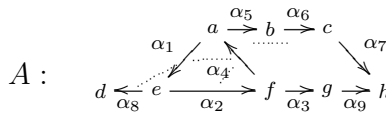
El algoritmo se detiene en el momento en que $H_n = H_0$ para algún natural n . Sea $m = \sum_{1 \leq i \leq n} l(\Pi_{i-1})$ obteniendo así la pareja (n, m) .

- (4) Si existen ciclos dirigidos en el carcaj, en donde cada par de flechas consecutivas forman una relación, se agrega una pareja de la forma $(0, m)$ para cada uno, donde m es el número de flechas que conforman el ciclo.

Se repiten los primeros tres puntos del algoritmo hasta que sean considerados todos los hilos permitidos de A . Definimos $\phi_A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ donde $\phi_A(n, m)$ es el número de veces que se obtuvo la pareja (n, m) en el algoritmo. Dicha función es invariante bajo equivalencia derivada, como se enunciará en la siguiente sección. Observamos que el soporte de ϕ_A es siempre finito. Sea $\{(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_k, m_k)\}$ el soporte de ϕ_A , denotaremos por $[(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_k, m_k)]$ a ϕ_A donde cada (n_j, m_j) está escrito $\phi_A(n_j, m_j)$ veces y el orden es arbitrario. Definiremos además $\#\phi_A := \sum_{1 \leq j \leq k} \phi_A(n_j, m_j)$.

Observación 1.12. El caso donde se presentan ciclos dirigidos en el carcaj, en los cuales cada par de flechas consecutivas forman una relación, es cuando se trata de un álgebra gentil de dimensión global infinita. De acuerdo al algoritmo anterior para un hilo prohibido Π determinado por uno de estos ciclos se agrega la pareja $(0, m)$, donde $m = l(\Pi)$, lo cual correspondería a un proceso degenerado de los primeros tres pasos del algoritmo en el que se regresa a través de dicho hilo prohibido pero no hay ningún avance por hilos permitidos.

Ejemplo 1.13. Consideramos



Sean $\sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2) = \sigma(\alpha_3) = \sigma(\alpha_7) = \sigma(\alpha_9) = +1$, $\sigma(\alpha_4) = \sigma(\alpha_5) = \sigma(\alpha_6) = \sigma(\alpha_8) = -1$, $\eta(\alpha_1) = \eta(\alpha_2) = \eta(\alpha_3) = \eta(\alpha_5) = \eta(\alpha_6) = \eta(\alpha_8) = \eta(\alpha_9) = +1$ y $\eta(\alpha_4) = \eta(\alpha_7) = -1$.

una descripción de A en términos de sus caminos máximos es

$$\mathcal{H}_A : \begin{bmatrix} a^+ & f^- & b^- & e^- & c^- & d^- & g^- \\ e^+ & a^- & c^+ & d^+ & & & \\ f^+ & b^+ & h^- & & & & \\ g^+ & & & & & & \\ h^+ & & & & & & \end{bmatrix}$$

Tomamos $H_0 = (b^+, a^-, f^-)$ y $\Pi_0 = (b^-)$ el hilo prohibido trivial en b . Entonces H_1 es el único hilo permitido que empieza en b , es decir, (h^-, c^+, b^-) . Tenemos que $\Pi_1 = (h^+, g^+)$ pues es el hilo prohibido que termina en h con $\eta(\Pi_1) = -\eta(H_1)$. Entonces H_2 , el hilo permitido que empieza en $s(\Pi_1)$ y tal que $\sigma(H_2) = -\sigma(\Pi_1)$ es el hilo permitido trivial en g , (g^-) . Ahora, Π_2 , el hilo prohibido que termina en g con $\eta(\Pi_2) = -\eta(H_2)$ es (g^+, f^+) . Entonces $H_3 = (b^+, a^-, f^-) = H_0$, por lo cual $n = 3$ y $m = l(\Pi_0) + l(\Pi_1) + l(\Pi_2) = 0 + 1 + 1 = 2$. Obtenemos la pareja $(3, 2)$.

Repetimos el algoritmo, comenzando ahora con $H_0 = (d^+, e^-)$, entonces $\Pi_0 = (d^-)$ es el hilo prohibido que termina en d tal que $\eta(H_0) = -\eta(\Pi_0)$. H_1 es el único hilo permitido que comienza en d , el hilo permitido trivial en ese vértice (d^-) . Por tanto tenemos entonces que $\Pi_1 = (d^+, e^-)(e^+, a^+)(a^-, f^-)(f^+, e^+)$ y $H_2 = (d^+, e^-) = H_0$. Así $n = 2$ y $m = l(\Pi_0) + l(\Pi_1) = 0 + 4 = 4$. La pareja correspondiente es $(2, 4)$.

Aplicando una vez más el algoritmo consideramos el hilo permitido $H_0 = (h^+, g^+, f^+, e^+, a^+)$, entonces Π_0 , el hilo prohibido que termina en h tal que $\eta(\Pi_0) = -\eta(H_0)$ es (h^-, c^+) . Entonces H_1 es el hilo permitido trivial en c , (c^-) , y $\Pi_1 = (c^-, b^+)(b^-, a^-)$. Por lo tanto $H_2 = (h^+, g^+, f^+, e^+, a^+) = H_0$. Se tiene que $n = 2$ y $m = l(\Pi_0) + l(\Pi_1) = 1 + 2 = 3$, que determinan a la pareja $(2, 3)$. Por lo tanto $\phi_A = [(3, 2), (2, 4), (2, 3)]$.

De modo más sintético, escribiremos el algoritmo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl}
H_0 = & (b^+, a^-, f^-) & \Pi_0^{-1} = & (b^-) \\
H_1 = & (h^-, c^+, b^-) & \Pi_1^{-1} = & (g^+, h^+) \\
H_2 = & (g^-) & \Pi_2^{-1} = & (f^+, g^+) \\
H_3 = & H_0 & & \\
& & \rightarrow & (3, 2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
H_0 = & (d^+, e^-) & \Pi_0^{-1} = & (d^-) \\
H_1 = & (d^-) & \Pi_1^{-1} = & (e^+, f^+)(f^-, a^-)(a^+, e^+)(e^-, d^+) \\
H_2 = & H_0 & & \\
& & \rightarrow & (2, 4)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
H_0 = & (h^+, g^+, f^+, e^+, a^+) & \Pi_0^{-1} = & (c^+, h^-) \\
H_1 = & (c^-) & \Pi_1^{-1} = & (a^-, b^-)(b^+, c^-) \\
H_2 = & H_0 & & \\
& & \rightarrow & (2, 3)
\end{array}$$

$$\phi_A = [(3, 2), (2, 4), (2, 3)]$$

O bien, usando la notación de flechas:

$$\begin{array}{lcl}
H_0 = & \alpha_5 \alpha_4 & \Pi_0^{-1} = & 1_b \\
H_1 = & \alpha_7 \alpha_6 & \Pi_1^{-1} = & \alpha_9^{-1} \\
H_2 = & 1_g & \Pi_2^{-1} = & \alpha_3^{-1} \\
H_3 = & H_0 & & \\
& & \rightarrow & (3, 2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
H_0 = & \alpha_8 & \Pi_0^{-1} = & 1_d \\
H_1 = & 1_d & \Pi_1^{-1} = & \alpha_2^{-1} \alpha_4^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_8^{-1} \\
H_2 = & H_0 & & \\
& & \rightarrow & (2, 4)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
H_0 = & \alpha_9 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 & \Pi_0^{-1} = & \alpha_7^{-1} \\
H_1 = & 1_c & \Pi_1^{-1} = & \alpha_5^{-1} \alpha_6^{-1} \\
H_2 = & H_0 & & \\
& & \rightarrow & (2, 3)
\end{array}$$

$$\phi_A = [(3, 2), (2, 4), (2, 3)]$$

Observación 1.14. Sea $\phi_A = [(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_k, m_k)]$. Debido a que estas parejas son las que se obtienen en el algoritmo tenemos que $\sum_{1 \leq j \leq k} n_j = \#\mathcal{H}_A$ pues en él son considerados todos los hilos permitidos de A exactamente una vez. Además $\sum_{1 \leq j \leq k} m_j = \#Q_1$, ya

7. Resultados principales

Usaremos las parejas de naturales antes descritas para clasificar las álgebras gentiles de dos ciclos. El primer resultado importante producto de esta investigación es que las parejas de naturales que se mencionan en la sección anterior son invariantes bajo equivalencia derivada, en otras palabras:

Teorema 1.17. *Sean A y B álgebras gentiles. Si A y B son derivadamente equivalentes entonces $\phi_A = \phi_B$.*

Justificaremos este resultado en la última sección del siguiente capítulo. Al final de este trabajo se probará además lo siguiente:

Teorema 1.18. *Si $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ es un álgebra gentil, con Q un carcaj con dos ciclos, entonces $\#\phi_A \in \{1, 3\}$.*

Más aún, se verá que, en el caso en que $\#\phi_A = 3$, estos invariantes asociados a álgebras gentiles con carcajes de dos ciclos, permiten distinguir las clases de equivalencia derivada. De modo más preciso:

Teorema 1.19. *Sean $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ y $B = kQ'/\langle \mathcal{P}' \rangle$ álgebras gentiles, con Q y Q' carcajes de dos ciclos. Si $\#\phi_A = 3$ entonces, A y B son derivadamente equivalentes si y sólo si $\phi_A = \phi_B$.*

La fuerza de este resultado radica en que el método combinatorio para calcular estos invariantes asociados a las álgebras con las cuales estamos trabajando, a partir del carcaj con relaciones que las define, es bastante accesible y no se necesita recurrir al carcaj de Auslander-Reiten del álgebra repetitiva.

CAPÍTULO 2

Representantes

1. Tres parejas de naturales

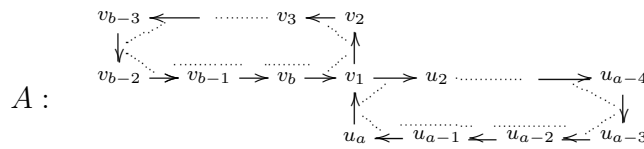
Si A es un álgebra gentil definida por un carcaj de dos ciclos y $\phi_A = [(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)]$, sabemos por la Observación 1.15 que $a_1 + b_1 + c_1 + 2(2) - 2 = a_2 + b_2 + c_2$, o bien $a_1 + b_1 + c_1 + 2 = a_2 + b_2 + c_2$. A continuación veremos que, de modo recíproco, a partir de parejas de naturales (a_1, a_2) , (b_1, b_2) y (c_1, c_2) tales que $a_1 + b_1 + c_1 + 2 = a_2 + b_2 + c_2$ es posible construir álgebras gentiles A de modo que $\phi_A = [(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)]$. En la prueba de este resultado se da una lista de representantes o formas normales de las distintas clases de equivalencia derivada que aparecen en este caso.

Teorema 2.1. *Sea $[(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)] \subset \mathbb{N}^2$ tal que $a_1 + b_1 + c_1 + 2 = a_2 + b_2 + c_2$. Existe un álgebra gentil A tal que $\phi_A = [(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)]$.*

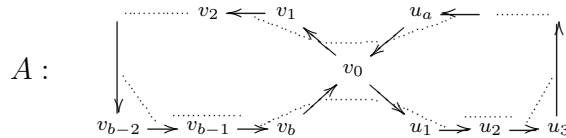
DEMOSTRACIÓN:

Se construirá un álgebra gentil A para cada posible colección de invariantes. Trabajaremos primero con el caso de parejas de naturales de la forma $(0, a)$, $(a, 0)$ o $(1, 1)$.

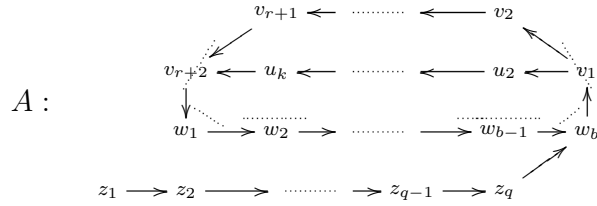
- (1) Un álgebra gentil A tal que $\phi_A = [(0, a), (0, b), (a + b - 2, 0)]$ y $a > b \geq 1$ es



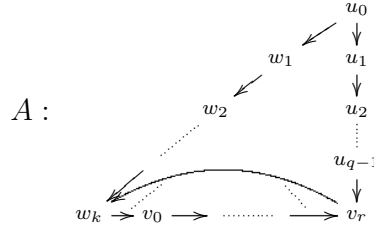
- (2) Un álgebra gentil A tal que $\phi_A = [(a, 0), (b, 0), (0, a + b + 2)]$ es



- (8) Un álgebra gentil A tal que $\phi_A = [(k, k), (b+q, q), (r, b+2+r)]$ es



- (9) Un álgebra gentil A tal que $\phi_A = [(k, k), (q, q), (r, r+2)]$ con $k \leq q$ es



- (10) Un álgebra gentil A tal que $\phi_A = [(k, k), (q, q+1), (r, r+1)]$ con $q \leq r$ es



Veamos por último que con esto se cubren todos los posibles casos que pueden presentarse en ϕ_A :

Supongamos que A es un álgebra gentil definida por un carcaj con dos ciclos de modo que $\phi_A = [(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)]$. Si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$ tenemos (9). Por otro lado si $a_1 = a_2$ pero $b_1 \neq b_2$ y $c_1 \neq c_2$, puede ser que $b_1 > b_2$ y $c_1 < c_2$, o que $b_1 \leq b_2$ y $c_1 < c_2$, que corresponden a (8) y a (10) respectivamente; debido a que $a_1 + b_1 + c_1 + 2 = a_2 + b_2 + c_2$ no es posible que $b_1 > b_2$ y $c_1 > c_2$.

Otra opción es que $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$ y $c_1 \neq c_2$ ya sea que $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ y $c_1 > c_2$, o bien que $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$ y $c_1 < c_2$, que dan lugar a los casos (6) y (7) respectivamente; como $a_1 + b_1 + c_1 + 2 = a_2 + b_2 + c_2$ no es posible que $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$ y $c_1 < c_2$, o que $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$ y $c_1 > c_2$.

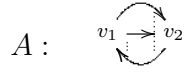
□

2. Una pareja de naturales

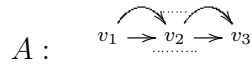
En esta sección mostraremos algunas álgebras gentiles definidas por carcajes con dos ciclos de 2, 3, 4 y 5 vértices con $\#\phi_A = 1$. Éstas son representantes de las distintas clases de equivalencia derivada bajo

las transformaciones elementales que se estudiarán en el capítulo 5, es decir, cualquier álgebra con dichas características es derivadamente equivalente a una de las que presentaremos a continuación y se puede transformar en ella mediante operaciones elementales. Sin embargo, no se sabe si aquellas álgebras en la siguiente lista, que presentan el mismo invariante asociado, son o no derivadamente equivalentes.

- (1) Un álgebra gentil A tal que $\phi_A = [(1, 3)]$ es

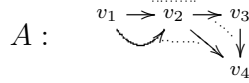


- (2) Un álgebra gentil A tal que $\phi_A = [(2, 4)]$ es

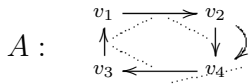


- (3) Algunas álgebras gentiles A tales que $\phi_A = [(3, 5)]$ son

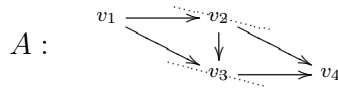
(a)



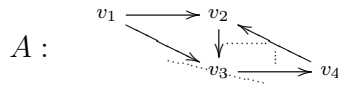
(b)



(c)

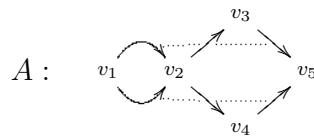


(d)

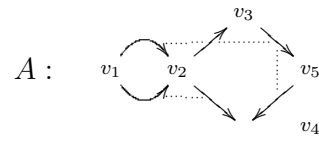


- (4) Algunas álgebras gentiles A tales que $\phi_A = [(4, 5)]$ son

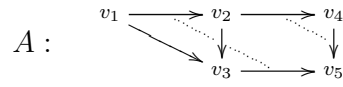
(a)



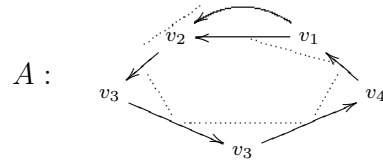
(b)



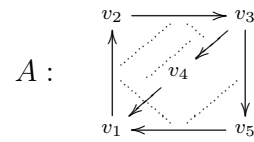
(c)



(d)



(e)



Interpretación teórica de los invariantes

1. Componentes características

Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil con Q un carcaj de al menos un ciclo y \hat{A} el álgebra repetitiva asociada, que es un álgebra autoinyectiva. Consideremos el carcaj estable de Auslander-Reiten de \hat{A} , que denotaremos por $\Gamma_{\hat{A},s}$. Sean τ la traslación de Auslander-Reiten y Ω el funtor de lazos en la categoría de módulos estable $\hat{A}\text{-mod}$; como τ y Ω conmutan, Ω permuta las componentes de $\Gamma_{\hat{A},s}$. Llamaremos **componentes características** de $\Gamma_{\hat{A},s}$ a las componentes de la forma $\mathbb{Z}A_\infty$ o $\mathbb{Z}A_\infty/\langle \tau^p \rangle$ con $p \geq 2$ ¹, ver [GP99, 2.3].

Es posible definir una relación de equivalencia en la colección de las componentes características de $\Gamma_{\hat{A},s}$ del siguiente modo: dadas C_1 y C_2 componentes características de $\Gamma_{\hat{A},s}$, C_1 está relacionada con C_2 si se encuentran en la misma Ω órbita. Llamaremos **series de componentes** a las clases de equivalencia de dicha relación.

Asociaremos a cada serie de componentes $[C]$ una pareja de naturales (n, m) , que denotaremos por $i_{[C]}$, como se explica a continuación. Sabemos por [GP99, 2.3] que $\Gamma_{\hat{A},s}$ contiene una cantidad finita de componentes $\mathbb{Z}A_\infty$, y en consecuencia cada serie de este tipo de componentes $[C]$ tiene una cantidad finita de elementos, en este caso tomamos $i_{[C]} := (n, m)$ donde $|n - m| = \#[C]$ y $\Omega^{n-m}(M) = \tau^n(M)$ para todo M un módulo cuya clase de isomorfía se encuentra en dicha serie. Para una serie de componentes $[C]$ con C del tipo $\mathbb{Z}A_\infty/\langle \tau^n \rangle$ y $n \geq 2$, consideramos $i_{[C]} := (n, n)$ que corresponde de hecho a un caso límite de lo anterior; aquí la serie consiste de una cantidad numerable de componentes y debido a que se trata de tubos de rango n , $\Omega^0(M) = M = \tau^n(M)$ para todo M un módulo cuya clase de isomorfía se encuentra en dicha serie. Estamos interesados en las parejas de naturales asociadas a las distintas series de componentes y en el número de veces que aparecen. Definimos entonces $N_A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

¹Notemos que todas las componentes $\mathbb{Z}A_\infty$ y las componentes $\mathbb{Z}A_\infty/\langle \tau^p \rangle$ con $p \geq 2$ provienen de módulos cuerda, sólo aquellas del tipo $\mathbb{Z}A_\infty/\langle \tau \rangle$ consisten posiblemente de módulos banda.

con $N_A(n, m) = \#\{[C] \text{ serie de componentes de } \Gamma_{\tilde{A}, s} \mid i_{[C]} = (n, m)\}$ si $(n, m) \neq (1, 1)$ y $N_A(1, 1)$ como el número de Ω órbitas de tubos homogéneos que provienen de módulos cuerda. Aunque el hecho de que un tubo homogéneo consista o no de módulos cuerda dependa de la presentación del álgebra, el número de ellos es de hecho un invariante derivado como se prueba en el capítulo 4. Al igual que para la función ϕ_A de la sección 6 del capítulo 1, observamos que el soporte de N_A es siempre finito. Sea $\{(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_k, m_k)\}$ el soporte de N_A , denotaremos por $[(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_k, m_k)]$ a N_A donde cada (n_j, m_j) está escrito $N_A(n_j, m_j)$ veces y el orden es arbitrario. Definiremos además $\#N_A := \sum_{1 \leq j \leq k} N_A(n_j, m_j)$, es decir, el número de series de componentes de A .

2. Justificación del algoritmo

De acuerdo a lo mencionado en la sección 5 del capítulo 1, para un álgebra gentil, un módulo en el carcaj estable de Auslander-Reiten del álgebra repetitiva que es extremo de una sucesión de Auslander-Reiten con término medio inescindible, corresponde a un hilo permitido de \tilde{A} ; identificando a estos módulos con los hilos permitidos correspondientes analicemos ahora cómo actúa el funtor de lazos sobre la colección de hilos permitidos. Por definición, si M es un módulo sobre un álgebra A , $\Omega^{-1}(M) = \text{coker}(M \rightarrow I)$ donde I es la envolvente inyectiva de M . Sea H un hilo permitido de \tilde{A} . Observamos que, o bien H es trivial, o se obtiene de un camino pleno suprimiendo su flecha final que, siguiendo la notación de la sección 5 del capítulo 1, es de la forma $\alpha_{i,j}[z]$ para algunas $i \in M$, $j \in \{0, 1, \dots, l(H)\}$, $z \in \mathbb{Z}$, y que denotaremos por $\alpha_{i,j}^H[z]$. En este caso, si $j \neq 0$, $\alpha_{i,j} \in Q_1$ e identificaremos a H con $\alpha_{i,j}^H[z]^{-1}$; si no, se trata de una flecha de conexión (ver la sección 5 del capítulo 1) y entonces H corresponde a una de las copias de un hilo permitido h de A en el carcaj asociado a \tilde{A} , es decir, $H = \alpha_{i,l(H)}[z] \cdots \alpha_{i,2}[z] \alpha_{i,1}[z]$ con $h = \alpha_{i,l(H)} \cdots \alpha_{i,2} \alpha_{i,1}$ un hilo permitido en A y $z \in \mathbb{Z}$, denotemos entonces $H = h[z]$. Debido a la estructura de \tilde{A} se tiene

$$\Omega^{-1}(H) = \begin{cases} \mathfrak{p}(v[z+1]) & \text{si } H = 1_{v[z]} \text{ con } v \in Q_0, z \in \mathbb{Z} \\ \mathfrak{v}(\alpha_{i,j}^H[z+1]) & \text{si } H \text{ no es trivial} \end{cases}$$

de modo más específico,

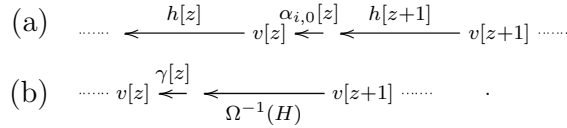
$$\Omega^{-1}(H) = \begin{cases} \mathbf{p}(v[z+1]) \text{ si } H = 1_{v[z]} \text{ con } v \in Q_0, z \in \mathbb{Z} \\ 1_{\nu(e(H))} \text{ si } H \text{ no es trivial y } \nu(e(H)) \text{ es un vértice} \\ \text{de transición} \\ \text{el hilo permitido que comienza en } \nu(e(H)) \text{ que no} \\ \text{involucra a } \alpha_{i,j}^H[z+1] \text{ si } H \text{ no es trivial y} \\ \nu(e(H)) \text{ es un vértice de encrucijada} \end{cases}$$

donde \mathbf{p} y \mathbf{v} son como en la sección 5 del capítulo 1.

Observación 3.1. A partir de lo anterior y debido a que A es un álgebra gentil podemos describir $\Omega^{-1}(H)$ para H un hilo permitido de \hat{A} en los diferentes casos:

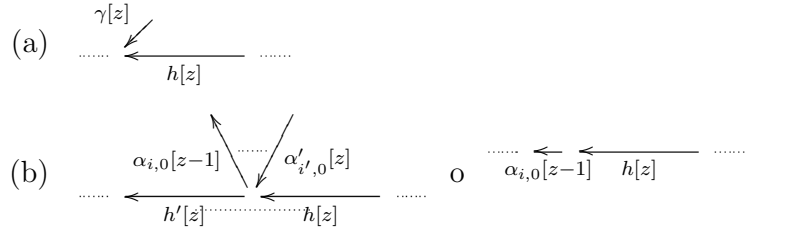
- (1) Para H trivial, $H = 1_{v[z]}$ con $v \in Q_0$, $z \in \mathbb{Z}$ (en este caso 1_v es un hilo permitido trivial de A):
 - (a) Si $v = s(h)$ para algún h hilo permitido no trivial de A , $\Omega^{-1}(H) = h[z+1]$.
 - (b) Si v no es el inicio de un hilo permitido no trivial en A , $\Omega^{-1}(H)$ se identifica con $\gamma[z]$ donde γ es la única flecha de Q tal que $e(\gamma) = v$.

Gráficamente:



- (2) En el caso $H = h[z]$ para algún h hilo permitido no trivial en A :
 - (a) Si existe $\gamma \in Q_1$ tal que $e(h) = e(\gamma)$ con $\eta(h) = -\eta(\gamma)$, $\Omega^{-1}(H)$ se identifica con $\gamma[z]^{-1}$, y γ corresponde al final de un hilo prohibido de A .
 - (b) Si no existe $\gamma \in Q_1$ tal que $e(h) = e(\gamma)$ con $\eta(h) = -\eta(\gamma)$, $\Omega^{-1}(H)$ es de la forma $h'[z+1]$ donde h' es el hilo permitido tal que $s(h') = e(h)$, que es $1_{\nu(e(H))}$ si $e(h)$ es de grado uno.

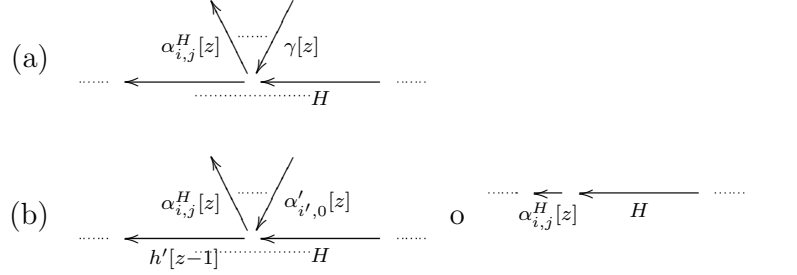
Gráficamente:



- (3) Por otro lado, en el caso en que H se identifique con $\alpha_{i,j}^H[z]^{-1}$:

- (a) Si existe $\gamma \in Q_1$ tal que $e(\gamma[z]) = s(\alpha_{i,j}^H[z]) = e(H)$ con $\eta(\gamma) = -\sigma(\alpha_{i,j}^H)$, $\Omega^{-1}(H)$ se identifica con $\gamma[z]^{-1}$ y $\alpha_{i,j}^H \cdot \gamma$ es un camino prohibido en A .
- (b) Si no existe $\gamma \in Q_1$ tal que $e(\gamma[z]) = s(\alpha_{i,j}^H[z]) = e(H)$ con $\eta(\gamma) = -\sigma(\alpha_{i,j}^H)$, $\alpha_{i,j}^H$ es el inicio de un hilo prohibido en A y $\Omega^{-1}(H) = h'[z+1]$ donde h' es el hilo permitido de A tal que $s(h') = s(\alpha_{i,j}^H)$ que no involucra a $\alpha_{i,j}^H$, es decir, tal que $\sigma(h') = -\sigma(\alpha_{i,j}^H)$, que es $1_{\nu(e(H))}$ si $e(H)$ es de transición.

Gráficamente:



Con esto, podemos justificar el siguiente resultado:

Teorema 3.2. Sean A un álgebra gentil y $\phi_A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ la función definida en la sección 6 del capítulo 1, entonces $\phi_A = N_A$.

DEMOSTRACIÓN:

Recordemos el algoritmo mencionado en la sección 6 del capítulo 1. Comparando las Observaciones 1.16 y 3.1 nos damos cuenta que, si H es un hilo de \tilde{A} , las potencias $\Omega^i(H)$ dan lugar a los distintos hilos permitidos de A que aparecen en el algoritmo, o bien, se identifican con los inversos de las flechas de Q que conforman los hilos prohibidos no triviales de A , apareciendo en el mismo orden que surgen durante el algoritmo. De modo más detallado, sean H_0 un hilo permitido de A y H_0, H_1, \dots, H_n los hilos permitidos obtenidos en el proceso al iniciar con H_0 . Denotemos por $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}$ a los hilos prohibidos no triviales de A involucrados en esta parte del algoritmo, donde

$$\Pi_i = \pi_{i,l(\Pi_i)} \cdots \pi_{i,2} \pi_{i,1}$$

con $\pi_{i,j} \in Q_1$ para $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, l(\Pi_i)\}$, $m = \sum_{0 \leq i \leq n-1} l(\Pi_i)$ y (n, m) es la pareja de naturales obtenida a partir de H_0 . Esta etapa del algoritmo puede ser descrita entonces mediante el arreglo

$$\begin{array}{l}
H_0[0] \quad \pi_{1,1}^{-1}[0] \cdots \pi_{1,l(\Pi_0)}^{-1}[0] \\
H_1[1] \quad \pi_{2,1}^{-1}[1] \cdots \pi_{2,l(\Pi_1)}^{-1}[1] \\
H_2[2] \quad \dots \\
\vdots \\
H_n[n]
\end{array}$$

donde se omiten los hilos prohibidos triviales (y esto se indicará poniendo en su lugar un asterisco). Haciendo la identificación de los hilos permitidos de \tilde{A} que contienen una flecha de conexión con su correspondiente $\alpha_{i,j}^H[z]^{-1}$ y gracias a las observaciones previas, esto corresponde al arreglo

$$\begin{array}{ll}
H_0[0] & \Omega^{-l(\Pi_0)}(H_0[0]) \cdots \Omega^{-1}(H_0[0]) \\
\Omega^{-l(\Pi_0)-1}(H_0[0]) & \Omega^{-l(\Pi_0)-l(\Pi_1)-1}(H_0[0]) \cdots \Omega^{-l(\Pi_0)-2}(H_0[0]) \\
\Omega^{-l(\Pi_0)-l(\Pi_1)-2}(H_0[0]) & \dots \\
\vdots & \\
\Omega^{-l(\Pi_0)-l(\Pi_1)-\dots-l(\Pi_{n-1})-n}(H_0[0]) &
\end{array}$$

donde el último elemento es $\Omega^{-m-n}(H_0[0])$ debido a la definición de m . Como el algoritmo se detiene en el primer momento en que $H_n = H_0$, $\Omega^{-n-m}(H_0[0])$ es el primer módulo que se encuentra en la misma ν -órbita que $H_0[0]$ al aplicar cierto número de veces Ω^{-1} , de hecho $\Omega^{-n-m}(H_0[0]) = H_n[n] = \nu^n(H_0[0])$. Debido a que Ω es una equivalencia, a partir de la información que tenemos para los módulos en el carcaj de Auslander-Reiten que son extremo de una secuencia de Auslander-Reiten con término medio indescomponible, podemos concluir que $\Omega^{-n-m} = \nu^n$ en todos los módulos de la serie de componentes donde se encuentra $H_0[0]$. Como $\tau = \Omega^2 \circ \nu$ y Ω conmuta con ν se tiene

$$\tau^n = (\Omega^2 \circ \nu)^n = \Omega^{2n} \circ \nu^n \Rightarrow \Omega^{-2n} \circ \tau^n = \nu^n = \Omega^{-n-m}$$

lo que prueba que $\tau^n = \Omega^{n-m}$. Este desarrollo es válido incluso si los naturales n y m coinciden y en este caso $\tau^n = \Omega^0 = id$ en los módulos de la serie de componentes donde se encuentra $H_0[0]$, con n el menor natural para el cual esto ocurre, así estas componentes son tubos de rango n . Si $n \neq m$, al aplicar Ω^{-1} a $H_0[0]$, obtenemos módulos en las distintas componentes que aparecen en la serie de componentes asociada a $H_0[0]$ hasta llegar, después de $n - m$ pasos, de nuevo a la componente donde se encuentra la clase de isomorfía de $H_0[0]$. Así $|n - m|$ corresponde al número de componentes en dicha serie. En el caso de un álgebra gentil de dimensión global infinita, sabemos que existe un ciclo dirigido en el que cada par de flechas consecutivas forman una relación. Sea α cualquiera de dichas flechas y H el hilo permitido en \tilde{A} con el que se identifica $\alpha[0]^{-1}$. Por las observaciones hechas,

las potencias $\Omega^{-1}(H), \Omega^{-2}(H) \dots \Omega^{-m}(H)$ se identifican precisamente con las flechas que conforman el ciclo dirigido mencionado, con m la longitud del ciclo dirigido y $\Omega^{-m}(H) = H$. Esto nos indica que $\Omega^{-m} = id = \tau^0$ para aquellos módulos en la serie de componentes donde se encuentra H , que se conforma por exactamente m componentes. \square

Ejemplo 3.3. Para el álgebra presentada en el ejemplo de la sección 6, tomando $H_0 = \alpha_5\alpha_4$ el algoritmo quedaría codificado como

$$\begin{array}{ll} (\alpha_5\alpha_4)[0] & * \\ (\alpha_7\alpha_6)[1] & \alpha_9[1]^{-1} \\ 1_g[2] & \alpha_3[2]^{-1} \\ (\alpha_5\alpha_4)[3] & * \end{array}$$

para $H_0 = \alpha_8$ como

$$\begin{array}{ll} \alpha_8[0] & * \\ 1_d[1] & \alpha_2[1]^{-1}\alpha_4[1]^{-1}\alpha_1[1]^{-1}\alpha_8[1]^{-1} \\ \alpha_8[2] & \end{array}$$

y para $H_0 = \alpha_9\alpha_3\alpha_2\alpha_1$

$$\begin{array}{ll} (\alpha_9\alpha_3\alpha_2\alpha_1)[0] & \alpha_7[0]^{-1} \\ 1_c[1] & \alpha_5[1]^{-1}\alpha_6[1]^{-1} \\ (\alpha_9\alpha_3\alpha_2\alpha_1)[2] & \end{array}$$

que corresponden a los arreglos

$$\begin{array}{ll} (\alpha_5\alpha_4)[0] & * \\ \Omega^{-1}((\alpha_5\alpha_4)[0]) & \Omega^{-2}((\alpha_5\alpha_4)[0]) \\ \Omega^{-3}((\alpha_5\alpha_4)[0]) & \Omega^{-4}((\alpha_5\alpha_4)[0]) \\ \Omega^{-5}((\alpha_5\alpha_4)[0]) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha_8[0] & * \\ \Omega^{-1}(\alpha_8[0]) & \Omega^{-5}(\alpha_8[0])\Omega^{-4}(\alpha_8[0])\Omega^{-3}(\alpha_8[0])\Omega^{-2}(\alpha_8[0]) \\ \Omega^{-6}(\alpha_8[0]) & \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ll} (\alpha_9\alpha_3\alpha_2\alpha_1)[0] & \Omega^{-1}((\alpha_9\alpha_3\alpha_2\alpha_1)[0]) \\ \Omega^{-2}((\alpha_9\alpha_3\alpha_2\alpha_1)[0]) & \Omega^{-4}((\alpha_9\alpha_3\alpha_2\alpha_1)[0])\Omega^{-3}((\alpha_9\alpha_3\alpha_2\alpha_1)[0]) \\ \Omega^{-5}((\alpha_9\alpha_3\alpha_2\alpha_1)[0]) & \end{array}$$

Observación 3.4. De acuerdo al resultado previo, podríamos ree-nunciar el Teorema 1.18 del siguiente modo: Si $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ es un álgebra gentil, con Q un carcaj conexo de dos ciclos, A tiene una o tres series de componentes.

2.1. Prueba del Teorema 1.17. Consideremos $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ y $B = kQ'/\langle \mathcal{P}' \rangle$ dos álgebras gentiles derivadamente equivalentes, ϕ_A y ϕ_B las funciones definidas a partir de las parejas obtenidas al aplicar el algoritmo descrito en la sección 6 del capítulo 1 a los carcajes con relaciones de las álgebras.

Como A y B son derivadamente equivalentes entonces \hat{A} y \hat{B} también lo son, ver [As97, Thm. 1.5] and [As98], y debido a que éstas últimas son autoinyectivas, por [Ric89] se tiene que $\hat{A} - \underline{\text{mod}}$ y $\hat{B} - \underline{\text{mod}}$ son equivalentes como categorías trianguladas. Entonces, una serie de componentes $\mathbb{Z}A_\infty$ que tiene a (n, m) como pareja asociada se corresponde mediante la equivalencia a una serie de componentes del mismo tipo con igual número de elementos, $|n - m|$, y de forma que $\Omega^{n-m}(M) = \tau^n(M)$ para todo M un módulo cuya clase de isomorfía se encuentra en dicha serie. Por otro lado, una serie de componentes de tubos de rango n , con $n > 1$ que tiene a (n, n) como pareja asociada se corresponde mediante la equivalencia a una serie de componentes de tubos del mismo rango, a la cual se le asocia también la pareja (n, n) .

Denotemos por ϕ'_A a la restricción de ϕ_A a $\mathbb{N}^2 \setminus \{(1, 1)\}$, como $\phi'_A = N'_A$ por el Teorema 3.2, ϕ'_A describe la acción de Ω^{-1} sobre las componentes $\mathbb{Z}A_\infty$ y $\mathbb{Z}A/\langle \tau^p \rangle$ de \hat{A} con $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y debido a lo anterior, concluimos que $\phi'_A = \phi'_B$.

Por otro lado, usando la Observación 1.14 sabemos que

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \phi_A(n, m) p_2(n, m) = \#Q_1,$$

así $\phi_A(1, 1) = \#Q_1 - \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(1,1)\}} \phi'_A(n, m) p_2(n, m)$ y análogamente para B . Por el capítulo 4 sabemos que el número de flechas es un invariante derivado por lo cual $\#Q_1 = \#Q'_1$, además $\phi'_A(n, m) = \phi'_B(n, m)$, por tanto $\phi_A(1, 1) = \phi_B(1, 1)$. Con esto se tiene que $\phi_A = \phi_B$ y se concluye la prueba. □

Grupos de automorfismos

En el presente capítulo se darán algunos resultados de geometría algebraica para justificar que el número de flechas es un invariante derivado en el caso de álgebras gentiles. Este hecho es necesario al trabajar con componentes características en el capítulo 3. Se sabe por un resultado presentado en [HS01] y en [Ro00], que el grupo $\text{Out}^o(A)$ (que será definido más adelante) de una k -álgebra de dimensión finita, con k un campo algebraicamente cerrado, es invariante bajo equivalencia derivada. Se verá que en el caso de un álgebra gentil éste es de la forma $S \rtimes \mathcal{U}$ con $S \cong (k^*)^{c(Q)}$ y \mathcal{U} un subgrupo nilpotente, de donde se obtiene el resultado. Veamos con detalle el desarrollo del argumento.

Dada una k -álgebra A denotaremos por $\text{Aut}(A)$ al grupo de automorfismos de A , por $\text{Inn}(A)$ al grupo de automorfismos internos de A , es decir $\text{Inn}(A) := \{\iota_x | x \in A^*\}$ donde $\iota_x(a) = x^{-1}ax$ para toda $a \in A$, y por $\text{Out}(A)$ al grupo de automorfismos externos de A , $\text{Out}(A) := \text{Aut}(A)/\text{Inn}(A)$. Debido a que $\text{Out}(A)$ es un grupo afín podemos considerar la componente conexas que contiene a la identidad llamada su componente neutral y denotada por $\text{Out}^o(A)$.

Teorema 4.1. [HS01],[Ro00] *Sea A una k -álgebra de dimensión finita. El grupo afín $\text{Out}^o(A)$ es invariante bajo equivalencia derivada.*

Para facilitar ciertos argumentos trabajaremos con un subgrupo de $\text{Out}(A)$ cuya componente neutral coincide con la de este grupo. Trabajaremos con un álgebra gentil $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$. Siguiendo el trabajo [GS99] definimos

$$\begin{aligned} \text{Aut}^l(A) &:= \{f \in \text{Aut}(A) | f(v) = v \forall v \in Q_0\} \\ \text{Inn}^l(A) &:= \text{Inn}(A) \cap \text{Aut}^l(A) = \{\iota_x \in \text{Inn}(A) | x \in \bigoplus_{v \in Q_0} vAv\} \\ \text{Out}^l(A) &:= \text{Aut}^l(A)/\text{Inn}^l(A) \end{aligned}$$

Teorema 4.2. [GS99, Thm.15] *Si A es una k -álgebra de dimensión finita, entonces $\text{Out}^l(A)$ es un subgrupo de $\text{Out}(A)$ de índice finito y tiene la misma componente neutral $\text{Out}^o(A)$.*

Debido a que estamos trabajando con un álgebra gentil, podemos considerar como base a todos los caminos distintos de cero en A , es decir, que no están en $\langle \mathcal{P} \rangle$, colección que denotaremos por Γ ; sea $\Gamma_{\geq 1}$ el conjunto de los elementos de Γ de longitud mayor o igual a uno. Así, $A = \bigoplus_{C \in \Gamma} kC$ y su radical es $\mathcal{J} = \bigoplus_{C \in \Gamma_{\geq 1}} kC$. Debido a que un elemento f en $\text{Aut}^l(A)$ fija los vértices de Q , éste queda determinado por completo por el valor que toma en las flechas de Q . Más específicamente, para $f \in \text{Aut}^l(A)$ y $\alpha \in Q_1$

$$f(\alpha) = \sum_{C \in \Gamma} f_C(\alpha)C = \sum_{C \in e(\alpha)\Gamma s(\alpha)} f_C(\alpha)C$$

donde $f_C(\alpha) \in k$ y la segunda igualdad se debe a que f fija los vértices de Q . En general se tiene entonces que para un camino $D = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$

$$f(D) = \sum_{C_i \in e(\alpha_i)\Gamma s(\alpha_i)} f_{C_n}(\alpha_n) \dots f_{C_2}(\alpha_2) f_{C_1}(\alpha_1) C_n \dots C_2 C_1$$

y denotamos por $f_C(D)$ al escalar $f_{C_n}(\alpha_n) \dots f_{C_2}(\alpha_2) f_{C_1}(\alpha_1)$, si se tiene que $C_n \dots C_2 C_1 = C$.

Recordemos que al hablar de los caminos estamos identificando a los caminos de Q con sus correspondientes clases en el cociente $kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$; a pesar de ello, los escalares $f_C(\alpha)$ están bien definidos ya que A es gentil y por tanto monomial, lo que implica que no existen dos caminos distintos que representen al mismo elemento en $kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$.

Buscamos entender ahora cómo es la componente neutral de $\text{Out}^l(A)$. Para ello será clave el siguiente resultado:

Teorema 4.3. *Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q conexo distinto del carcaj de Kronecker. Existe un orden total $<$ en $\Gamma_{\geq 1}$ tal que si $f \in \text{Aut}^l(A)$ con $f_\alpha(\alpha) \neq 0$ para toda $\alpha \in Q_1$,*

$$C < D \Rightarrow f_C(D) = 0.$$

para $C, D \in \Gamma_{\geq 1}$.

DEMOSTRACIÓN:

El primer paso para definir el orden total buscado es ocupar la longitud de los caminos, si $C, D \in \Gamma_{\geq 1}$ y $l(C) < l(D)$ entonces consideramos $C < D$. Veremos que también podemos ordenar los caminos que son de la misma longitud de modo que se cumpla la condición requerida. Haremos la prueba en varios pasos:

- (1) Probaremos que para $C, D \in \Gamma_{\geq 1}$ con $l(C) < l(D)$ se tiene $f_C(D) = 0$. Primero veamos que es cierto si $D = \alpha \in Q_1$.

Sean $C \in \Gamma_{\geq 1}$ y $\alpha \in Q_1$ con $l(C) < l(\alpha) = 1$, es decir, $l(C) = 0$. Como

$$f(\alpha) = \sum_{E \in e(\alpha)\Gamma s(\alpha)} f_E(\alpha)E,$$

si α no es un lazo C no aparece en la suma anterior porque los caminos considerados en ésta comienzan y terminan en distintos vértices, a diferencia de C . Por otro lado, si α es un lazo $e(\alpha)\Gamma s(\alpha) = \{1_{s(\alpha)}, \alpha\}$ y como $\alpha^2 = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 = f(\alpha^2) &= (f(\alpha))^2 = (f_{1_{s(\alpha)}}(\alpha)1_{s(\alpha)} + f_\alpha(\alpha)\alpha)^2 = \\ &= (f_{1_{s(\alpha)}}(\alpha))^2 1_{s(\alpha)} + 2f_{1_{s(\alpha)}}(\alpha)f_\alpha(\alpha)\alpha \end{aligned}$$

entonces $(f_{1_{s(\alpha)}}(\alpha))^2 = 0$ y por ser k un campo $f_{1_{s(\alpha)}}(\alpha) = 0$. En cualquier caso $l(C) < l(\alpha)$ implica que $f_C(\alpha) = 0$. Consideremos ahora $D = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$, al aplicar f tenemos $f(D) = f(\alpha_n) \dots f(\alpha_2)f(\alpha_1)$ y cada $f(\alpha_i)$ es de la forma

$$\sum_{C_i \in e(\alpha_i)\Gamma s(\alpha_i)} f_{C_i}(\alpha_i)C_i.$$

Al desarrollar el producto anterior tenemos

$$f(D) = \sum_{C_i \in e(\alpha_i)\Gamma s(\alpha_i)} f_{C_n}(\alpha_n) \dots f_{C_2}(\alpha_2)f_{C_1}(\alpha_1)C_n \dots C_2C_1.$$

Así, $f_C(D) \neq 0$ si y sólo si $C = C_n \dots C_2C_1$ para algunos $C_i \in e(\alpha_i)\Gamma s(\alpha_i)$ con $f_{C_i}(\alpha_i) \neq 0$ para toda i ; usando lo anterior tenemos entonces que $l(C_i) \geq l(\alpha_i) = 1$ y entonces $l(C) \geq n = l(D)$.

En resumen, si $C, D \in \Gamma_{\geq 1}$ con $l(C) < l(D)$ se tiene $f_C(D) = 0$.

Analicemos ahora qué ocurre con los caminos de la misma longitud; debido a la descripción de $f(C)$ basta estudiar caminos que comienzan y terminan en el mismo vértice. Veamos primero el caso de las flechas.

- (2) Sean $\alpha, \beta \in Q_1$ tales que $s(\alpha) = s(\beta)$ y $e(\alpha) = e(\beta)$. Debido a que A es gentil, conexa y no es la de Kronecker, podemos suponer sin perder generalidad que existe $\gamma \in Q_1$ tal que $s(\gamma) = e(\alpha)$ con $\gamma\alpha = 0$ y $\gamma\beta \neq 0$ (si esto no ocurre se trabaja de manera análoga con el caso dual). Afirmamos que $f_\beta(\alpha) = 0$ y entonces ordenamos $\beta < \alpha$ para cumplir la

condición requerida en el orden total. Tenemos que

$$0 = f(\gamma\alpha) = f(\gamma)f(\alpha) = \left(\sum_{C \in e(\gamma)\Gamma e(\alpha)} f_C(\gamma)C \right) \left(\sum_{C \in e(\alpha)\Gamma s(\alpha)} f_C(\alpha)C \right)$$

y al realizar este producto el coeficiente de $\gamma\beta$ es $f_\gamma(\gamma)f_\beta(\alpha)$ ya que por (1) no aparecen caminos triviales en las sumatorias anteriores y el álgebra es monomial. Por hipótesis sabemos que $f_\gamma(\gamma) \neq 0$, así que $f_\beta(\alpha) = 0$.

- (3) Consideremos ahora C, D caminos de longitud mayor que uno, con $s(C) = s(D)$ y $e(C) = e(D)$. Veremos que $f_C(D) = f_D(C) = 0$ y entonces podemos ordenar a estos caminos del modo que querramos. Sea $C = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$, y cada $f(\alpha_i)$ es de la forma $\sum_{E \in e(\alpha_i)\Gamma s(\alpha_i)} f_E(\alpha_i)E$, así que al calcular el producto de todas ellas obtenemos una combinación lineal de caminos del tipo $E_n \dots E_2 E_1$ acompañados del coeficiente $f_{E_n}(\alpha_n) \dots f_{E_2}(\alpha_2) f_{E_1}(\alpha_1)$, con cada $E_i \in e(\alpha_i)\Gamma s(\alpha_i)$. Sea $D = \beta_n \dots \beta_2 \beta_1$. Si para alguna $i \in \{2, \dots, n\}$ $s(\alpha_i) \neq s(\beta_i)$, entonces D no aparece en dicha combinación lineal (nuevamente debido a que A es monomial). Si por el contrario, $s(\alpha_i) = s(\beta_i)$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, por (2) $f_{\beta_i}(\alpha_i) = 0$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y entonces el coeficiente de D en la combinación lineal, $f_{\beta_n}(\alpha_n) \dots f_{\beta_2}(\alpha_2) f_{\beta_1}(\alpha_1)$, es cero, es decir, $f_D(C) = 0$. En cualquier caso tenemos $f_D(C) = 0$, y por simetría $f_C(D) = 0$. □

Consideremos ahora a los elementos f de $\text{Aut}^l(A)$ tales que $f_\alpha(\alpha) \neq 0$ para toda α una flecha en Q , es decir

$$\text{Aut}_*^l(A) := \{f \in \text{Aut}^l(A) \mid f_\alpha(\alpha) \neq 0 \ \forall \alpha \in Q_1\}.$$

Como consecuencia del teorema anterior podemos saber cómo es esta colección.

Corolario 4.4. *Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q conexo distinto del carcaj de Kronecker.*

- (1) *El abierto $\text{Aut}_*^l(A)$ es un subgrupo de índice finito de $\text{Aut}^l(A)$ y es isomorfo a un subgrupo de matrices triangulares inferiores.*
- (2) *$\text{Aut}_*^l(A) = S(Q_1) \rtimes N(A)$ donde*

$$\begin{aligned} S(Q_1) &:= \{f \in \text{Aut}_*^l(A) \mid f(\alpha) \in k^* \alpha \ \forall \alpha \in Q_1\} \cong (k^*)^{\#Q_1} & y \\ N(A) &:= \{f \in \text{Aut}_*^l(A) \mid f(\alpha) \in 1\alpha + \sum_{C \in e(\alpha)\Gamma s(\alpha) \setminus \{\alpha\}} f_C(\alpha)kC\} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN:

- (1) Por el Teorema 4.3 sabemos que existe un orden total en $\Gamma_{\geq 1}$ de modo que en términos de la base ordenada correspondiente de los caminos en A , las matrices que describen a los elementos de $\text{Aut}_*^l(A)$ son invertibles y triangulares inferiores. Vemos entonces que éste es un subgrupo de $\text{Aut}^l(A)$, ya que el producto de dos matrices de estas características es nuevamente de esa forma.
- (2) Debido a que A es monomial cada elemento $(c_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in (\mathbb{k}^*)^{\#Q_1}$ determina un automorfismo f en $\text{Aut}_*^l(A)$ definido por $f(\alpha) = c_\alpha \alpha$ para toda $\alpha \in Q_1$ y esta correspondencia establece un isomorfismo entre $(\mathbb{k}^*)^{\#Q_1}$ y $S(Q_1)$. Veamos ahora que $\text{Aut}_*^l(A) = S(Q_1) \rtimes N(A)$. Sea $f \in \text{Aut}_*^l(A)$. Para cada $\alpha \in Q_1$ se tiene $f(\alpha) = c_\alpha \alpha + \sum_{C \in e(\alpha)\Gamma_s(\alpha) \setminus \{\alpha\}} f_C(\alpha)C$. Consideremos $g \in S(Q_1)$ definido por $g(\alpha) = c_\alpha \alpha$ para toda $\alpha \in Q_1$. Observamos que $fg^{-1} \in N(A)$ ya que

$$\begin{aligned} fg^{-1}(\alpha) &= f(g^{-1}(\alpha)) = f(c_\alpha^{-1}\alpha) = \\ &= c_\alpha^{-1}f(\alpha) = 1\alpha + \sum_{C \in e(\alpha)\Gamma_s(\alpha) \setminus \{\alpha\}} c_\alpha^{-1}f_C(\alpha)C \end{aligned}$$

entonces $f = fg^{-1}g \in N(A)S(Q_1)$. Además, si $f \in N(A) \cap S(Q_1)$, $f(\alpha) = 1\alpha$ para toda $\alpha \in Q_1$ y por tanto $f = id$. Veamos que $N(A) \triangleleft \text{Aut}_*^l(A)$. Para ello consideremos $g \in S(Q_1)$ tal que $g(\alpha) = c_\alpha \alpha$ con $c_\alpha \in \mathbb{k}^*$ para toda $\alpha \in Q_1$, y $h \in N(A)$ tal que

$$h(\alpha) = 1\alpha + \sum_{C \in e(\alpha)\Gamma_s(\alpha) \setminus \{\alpha\}} h_C(\alpha)C.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g^{-1}hg(\alpha) &= g^{-1}h(c_\alpha \alpha) = c_\alpha g^{-1}h(\alpha) = \\ &= c_\alpha g^{-1}(1\alpha + \sum_{C \in e(\alpha)\Gamma_s(\alpha) \setminus \{\alpha\}} h_C(\alpha)C) = \\ &= c_\alpha(1g^{-1}(\alpha) + \sum_{C \in e(\alpha)\Gamma_s(\alpha) \setminus \{\alpha\}} h_C(\alpha)g^{-1}(C)) = \\ &= 1\alpha + \sum_{C \in e(\alpha)\Gamma_s(\alpha) \setminus \{\alpha\}} h_C(\alpha)c_\alpha g^{-1}(C) \end{aligned}$$

que es un elemento de $N(A)$ pues si $g^{-1}(C) = \alpha$, $C = g(\alpha) = c_\alpha \alpha$ y así $C = \alpha$. Entonces $S(Q_1)$ normaliza a $N(A)$. Consideremos ahora $f \in \text{Aut}_*^l(A)$ y $h \in N(A)$; sabemos que f

es de la forma $f = \tilde{h}g$ para algunos $\tilde{h} \in N(A)$ y $g \in S(Q_1)$. Tenemos que

$$f^{-1}hf = (\tilde{h}g)^{-1}h(\tilde{h}g) = g^{-1}\tilde{h}^{-1}h\tilde{h}g = g^{-1}(\tilde{h}^{-1}h\tilde{h})g$$

que es un elemento de $N(A)$ ya que $\tilde{h}^{-1}h\tilde{h} \in N(A)$ y $S(Q_1)$ normaliza a $N(A)$. Se tiene así que $N(A) \trianglelefteq \text{Aut}_*^l(A)$. Con esto se prueba que $\text{Aut}_*^l(A) = S(Q_1) \times N(A)$. \square

Ahora podemos entender finalmente cómo es la componente neutral de $\text{Out}(A)$.

Teorema 4.5. *Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q conexo distinto del carcaj de Kronecker. $\text{Out}^o(A)$ es isomorfo a un subgrupo de matrices invertibles triangulares inferiores de la forma $S \times \mathcal{U}$ con $S \cong (k^*)^{c(Q)}$ un toro maximal y \mathcal{U} un subgrupo nilpotente de $\text{Out}^o(A)$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $x \in \bigoplus_{v \in Q_0} vAv$ un elemento invertible. Tenemos que su componente en v es $x_v = c_v 1_v + \sum_{C \in v\Gamma_{\geq 1}v} c_C C$ con $c_v, c_C \in k$. Por ser x invertible, $c_v \neq 0$ para toda $v \in Q_0$, y entonces $x_v = c_v 1_v (1_v + c_v^{-1} \sum_{C \in v\Gamma_{\geq 1}v} c_C C)$ con $c_v^{-1} \sum_{C \in v\Gamma_{\geq 1}v} c_C C$ un elemento nilpotente que denotaremos por $n_v \in vAv$ y $c_v \in k^*$. Definamos $s := \sum_{v \in Q_0} (c_v 1_v)$ y $u := \sum_{v \in Q_0} (1_v + n_v)$ observamos que $su = x$ ya que $c_v 1_v 1_w = 0 = c_v 1_v n_w$ para $v, w \in Q_0$ con $v \neq w$ y entonces $su = \sum_{v \in Q_0} x_v = x$; tenemos así que $\iota_x = \iota_u \iota_s$ y observamos que $\iota_u \in N(A)$, $\iota_s \in S(Q_1)$.

Definamos

$$\text{Inn}_N^l(A) := \{ \iota_u | u = \sum_{v \in Q_0} (1_v + n_v), n_v \in vAv \text{ nilpotente} \}$$

$$\text{Inn}_S^l(A) := \{ \iota_s | s = \sum_{v \in Q_0} (c_v 1_v), c_v \in k^* \}$$

Observamos que para $f \in \text{Aut}_*^l(A)$, $\iota_x \in \text{Inn}^l(A)$, $y \in A$

$$(f \iota_x f^{-1})(y) = f(\iota_x f^{-1}(y)) = f(x^{-1} f^{-1}(y)x) = f(x^{-1}) y f(x) = \iota_{f(x)}(y)$$

y entonces $f \iota_x f^{-1} = \iota_{f(x)}$. De aquí se desprenden las siguientes observaciones:

- (1) $\text{Inn}_S^l(A) \trianglelefteq S(Q_1)$ ya que $\text{Inn}_S^l(A) \subset Z(\text{Aut}^l(A))$. Esto se debe a que si $f \in \text{Aut}^l(A)$ y $\iota_s \in S(Q_1)$ $f \iota_s f^{-1} = \iota_{f(s)} = \iota_s$ ya que s es de la forma $\sum_{v \in Q_0} (c_v 1_v)$, con $c_v \in k^*$ y entonces $f(s) = s$.
- (2) $\text{Inn}^l(A) \trianglelefteq \text{Aut}_*^l(A)$ ya que si $f \in \text{Aut}_*^l(A)$ y $x \in \bigoplus_{v \in Q_0} vAv$ $f(x) \in \bigoplus_{v \in Q_0} vAv$, así $f \iota_x f^{-1} = \iota_{f(x)} \in \text{Inn}^l(A)$.

- (3) $\text{Inn}_N^l(A) \trianglelefteq N(A)$ pues de hecho $\text{Inn}_N^l(A)$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}_*^l(A)$. Para justificarlo consideremos $u = \sum_{v \in Q_0} (1_v + n_v)$ con $n_v = c_v^{-1} \sum_{C \in v\Gamma_{\geq 1}v} c_C C$ un elemento nilpotente y $f \in \text{Aut}_*^l(A)$; entonces $f(n_v) = c_v^{-1} \sum_{C \in v\Gamma_{\geq 1}v} c_C f(C)$ que es nuevamente nilpotente porque en el desarrollo de $f(C)$ no aparecen caminos triviales y A es gentil. Así, $f(u) = \sum_{v \in Q_0} (1_v + \hat{n}_v)$ con \hat{n}_v nilpotente, y entonces $f \iota_u f^{-1} = \iota_{f(u)} \in \text{Inn}_N^l(A)$.

Podemos considerar el morfismo

$$\varphi : S(Q_1) \rightarrow \text{Aut}(N(A))$$

donde, para cada $g \in S(Q_1)$ $\varphi(g)$ es tal que $\varphi(g)(h) := g^{-1}hg$ para toda $h \in N(A)$. Éste induce un morfismo

$$\bar{\varphi} : S(Q_1)/\text{Inn}_S^l(A) \rightarrow \text{Aut}(N(A)/\text{Inn}_N^l(A)).$$

Por otro lado definamos

$$\psi : S(Q_1) \times N(A) \rightarrow S(Q_1)/\text{Inn}_S^l(A) \times_{\bar{\varphi}} N(A)/\text{Inn}_N^l(A)$$

dado por $\psi(gh) = (g \text{Inn}_S^l(A), h \text{Inn}_N^l(A))$. Es un morfismo de grupos ya que si $g, \hat{g} \in S(Q_1)$ y $h, \hat{h} \in N(A)$

$$\begin{aligned} \psi((gh)(\hat{g}\hat{h})) &= \psi(g\hat{g}(\hat{g}^{-1}h\hat{g})\hat{h}) = (g\hat{g} \text{Inn}_S^l(A), (\hat{g}^{-1}h\hat{g})\hat{h} \text{Inn}_N^l(A)) \\ &= (g\hat{g} \text{Inn}_S^l(A), \varphi(g)(h)\hat{h} \text{Inn}_N^l(A)) \\ &= (g \text{Inn}_S^l(A), h \text{Inn}_N^l(A))(\hat{g} \text{Inn}_S^l(A), \hat{h} \text{Inn}_N^l(A)) \\ &= \psi(gh)\psi(\hat{g}\hat{h}) \end{aligned}$$

y $\ker \psi = \text{Inn}^l(A)$. Esto se debe a que el núcleo consta de los elementos de la forma gh con $g \in \text{Inn}_S^l(A)$ y $h \in \text{Inn}_N^l(A)$, es decir $g = \iota_s$ donde $s = \sum_{v \in Q_0} (c_v 1_v)$ con $c_v \in \mathbf{k}^*$, $h = \iota_u$ donde $u = \sum_{v \in Q_0} (1_v + n_v)$ con $n_v \in vAv$ nilpotente, y como se observó en la primera parte de esta prueba $gh = \iota_s \iota_u = \iota_{su}$ con $su \in \bigoplus_{v \in Q_0} vAv$ un elemento invertible y de hecho cualquier elemento invertible en $\bigoplus_{v \in Q_0} vAv$ es de esta forma. Así

$$\begin{aligned} \text{Aut}_*^l(A)/\text{Inn}^l(A) &= (S(Q_1) \times N(A))/\text{Inn}^l(A) \\ &\cong S(Q_1)/\text{Inn}_S^l(A) \times_{\bar{\varphi}} N(A)/\text{Inn}_N^l(A). \end{aligned}$$

Por ser $N(A)$ nilpotente, $N(A)/\text{Inn}_N^l(A)$ también lo es. Por otro lado, consideremos un vértice $v_0 \in Q_0$, si $s = \sum_{v \in Q_0} (c_v 1_v)$ con $c_v \in \mathbf{k}^*$, y $s' := 1_{v_0} + \sum_{v \in Q_0 \setminus \{v_0\}} (c'_v 1_v)$ con $c'_v := c_{v_0}^{-1} c_v$, tenemos que $\iota_s = \iota_{s'}$ y

si consideramos otro elemento de la forma $s'' = 1_{v_0} + \sum_{v \in Q_0 \setminus \{v_0\}} (c''_v 1_v)$ para algunas $c''_v \in \mathbf{k}^*$, $\iota_{s'} = \iota_{s''}$ implica que $c'_v = c''_v$ para toda $v \in Q_0 \setminus \{v_0\}$ ya que Q es conexo. Esto quiere decir que cada uno de los automorfismos en $\text{Inn}_S^l(A)$ puede ser determinado por la elección de los escalares c_v en los vértices distintos a v_0 y entonces $\text{Inn}_S^l(A) \cong (\mathbf{k}^*)^{\#Q_0-1}$. Así, $S(Q_1)/\text{Inn}_S^l(A) \cong (\mathbf{k}^*)^{\#Q_1-(\#Q_0-1)} = (\mathbf{k}^*)^{c(Q)}$. Sabemos por el Teorema 4.2 que $\text{Out}^o(A) = (\text{Out}^l)^o(A)$. Por otro lado $\text{Aut}_*^l(A)$ es por definición un abierto de $\text{Aut}^l(A)$ y usando [Hu95, 7.4] sabemos que es a su vez cerrado y por ello $(\text{Aut}^l(A))^o = \text{Aut}_*^l(A)$. Debido a esto $(\text{Out}^l(A))^o = (\text{Aut}^l(A))^o / \text{Inn}^l(A) = \text{Aut}_*^l(A) / \text{Inn}^l(A)$ y se tiene entonces completada la prueba. \square

Como consecuencia del resultado anterior tenemos:

Corolario 4.6. *El número de ciclos y el número de flechas es un invariante derivado para la colección de álgebras gentiles.*

DEMOSTRACIÓN:

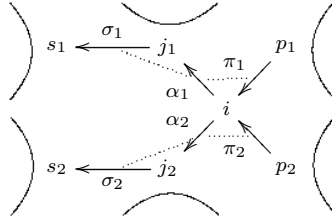
Sabemos por el Teorema 4.1 que $\text{Out}^o(A)$ es invariante bajo equivalencia derivada, y de acuerdo al resultado anterior, éste contiene un toro maximal de rango $c(Q)$. Además en un grupo soluble los toros maximales son conjugados y por tanto tienen todos el mismo rango, así, $c(Q)$ es invariante bajo equivalencia derivada. Como $\#Q_1 = \#Q_0 + c(Q) - 1$ y el número de vértices es un invariante derivado, el número de flechas también es invariante bajo equivalencia derivada. \square

Transformaciones de álgebras gentiles

Describiremos de manera combinatoria algunas transformaciones sobre álgebras gentiles que preservan equivalencia derivada. El siguiente material aparece en [HSZ01], pero en la investigación fue necesario agregar algunos casos que no estaban contemplados en el artículo. A pesar de que son transformaciones sencillas de calcular (más aún si se describe al álgebra mediante sus hilos), nos permiten obtener, a partir de cualquier álgebra gentil $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ con Q de dos ciclos, $\#N_A = 3$ y más de 4 vértices toda su clase de equivalencia derivada.

1. Transformaciones sobre un vértice

Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil con Q conexo tal que existen $\alpha_1, \alpha_2 \in Q_1$ distintas con $s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$. Denotaremos a dicho vértice por i , $j_1 := e(\alpha_1)$ y $j_2 := e(\alpha_2)$. Supongamos también que $j_1 \neq i \neq j_2$ (aunque no es necesario que $j_1 \neq j_2$). La situación más general que puede tenerse en el correspondiente carcaj con relaciones alrededor del vértice i es la que se presenta a continuación:



Definiremos una nueva álgebra $V_i(A) = kQ'/\langle \mathcal{P}' \rangle$ tomando $Q'_0 = Q_0$, Q'_1 y \mathcal{P}' de acuerdo a cada uno de los casos siguientes:

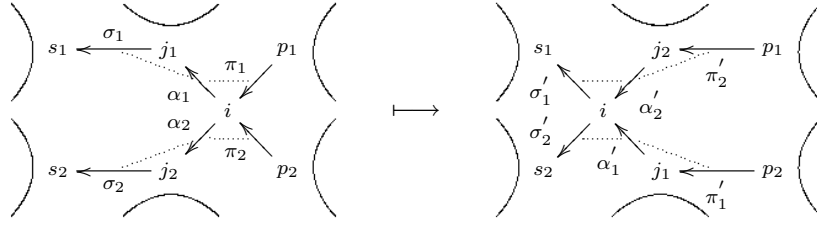
- (1) Si $s_1 \neq i \neq s_2$ sean $\alpha'_m, \pi'_m, \sigma'_m$ para $m \in \{1, 2\}$ flechas tales que $j_m = s(\alpha'_m) = e(\pi'_m)$, $i = s(\sigma'_m) = e(\alpha'_m)$, $p_m = s(\pi'_{3-m})$ y $s_m = e(\sigma'_m)$. Definimos

$$Q'_1 := (Q_1 \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \pi_1, \pi_2, \sigma_1, \sigma_2\}) \cup \{\alpha'_1, \alpha'_2, \pi'_1, \pi'_2, \sigma'_1, \sigma'_2\}$$

y

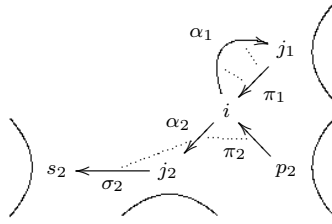
$$\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{\sigma_1\alpha_1, \sigma_2\alpha_2, \alpha_1\pi_1, \alpha_2\pi_2\}) \cup \{\sigma'_1\alpha'_2, \sigma'_2\alpha'_1, \alpha'_1\pi'_1, \alpha'_2\pi'_2\}$$

es decir



(2) Si $s_1 = i$ tenemos

(a)



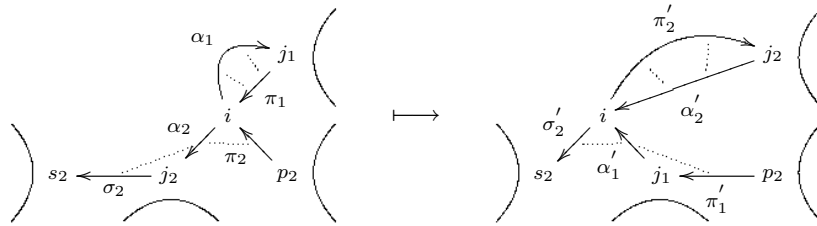
en cuyo caso tomamos α'_m, π'_m para $m \in \{1, 2\}$ y σ'_2 flechas tales que $j_m = s(\alpha'_m) = e(\pi'_m)$, $i = s(\sigma'_2) = s(\pi'_2) = e(\alpha'_m)$, $p_2 = s(\pi'_1)$ y $s_2 = e(\sigma'_2)$. Definimos

$$Q'_1 := (Q_1 \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \pi_1, \pi_2, \sigma_2\}) \cup \{\alpha'_1, \alpha'_2, \pi'_1, \pi'_2, \sigma'_2\}$$

y

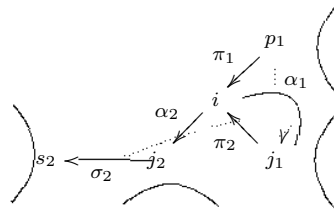
$$\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{\pi_1\alpha_1, \sigma_2\alpha_2, \alpha_1\pi_1, \alpha_2\pi_2\}) \cup \{\pi'_2\alpha'_2, \sigma'_2\alpha'_1, \alpha'_1\pi'_1, \alpha'_2\pi'_2\}$$

es decir



o bien

(b)



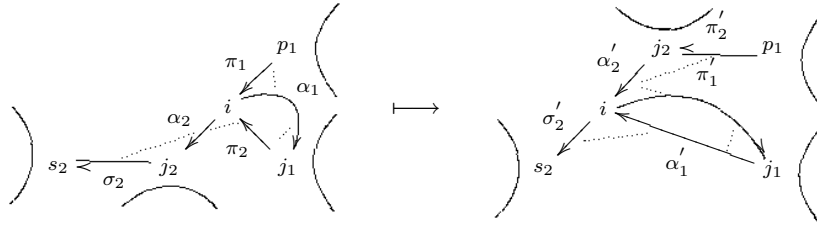
en cuyo caso tomamos α'_m, π'_m para $m \in \{1, 2\}$ y σ'_2 flechas tales que $j_m = s(\alpha'_m) = e(\pi'_m)$, $i = s(\sigma'_2) = s(\pi'_1) = e(\alpha'_m)$, $p_1 = s(\pi'_2)$ y $s_2 = e(\sigma'_2)$. Definimos

$$Q'_1 := (Q_1 \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \pi_1, \pi_2, \sigma_2\}) \cup \{\alpha'_1, \alpha'_2, \pi'_1, \pi'_2, \sigma'_2\}$$

y

$$\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{\pi_2\alpha_1, \sigma_2\alpha_2, \alpha_1\pi_1, \alpha_2\pi_2\}) \cup \{\pi'_1\alpha'_2, \sigma'_2\alpha'_1, \alpha'_1\pi'_1, \alpha'_2\pi'_2\}$$

es decir

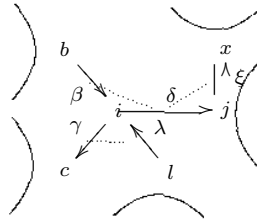


(3) Si $s_1 = s_2 = i$ el álgebra queda invariante.

Denotaremos por V_i^{-1} a la transformación inversa.

2. Transformaciones sobre una flecha

Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil con Q conexo y $\delta \in Q_1$ con $i := s(\delta)$ $j := e(\delta)$, $i \neq j$. La situación más general que puede tenerse en el correspondiente carcaj con relaciones alrededor de δ es la que se presenta a continuación:



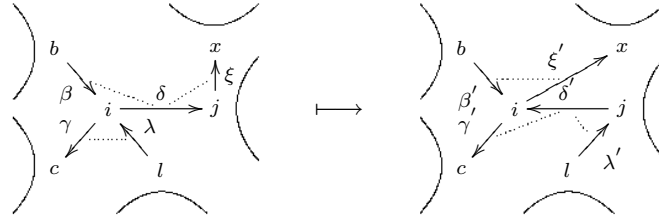
Sean \hat{Q} el carcaj obtenido al eliminar las flechas β y γ , es decir $\hat{Q}_0 = Q_0$, $\hat{Q}_1 = Q_1 \setminus \{\beta, \gamma\}$, y $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \setminus \{\delta\beta, \gamma\lambda\}$. Consideremos los subcarcajes conexos máximos de \hat{Q} que contienen a los vértices b y c y sea Q^1 la unión de los mismos. Definamos también Q^2 como el subcarcaj conexo máximo de \hat{Q} que contiene al vértice i . En caso de que $Q_0^1 \cap Q_0^2 = \emptyset$ definimos una nueva álgebra $F_\delta(A) = kQ'/\langle \mathcal{P}' \rangle$ tomando $Q'_0 = Q_0$, Q'_1 y \mathcal{P}' de la siguiente manera. Sean $\delta', \beta', \gamma', \lambda', \xi'$ flechas tales que $j = s(\delta') = e(\lambda')$, $i = s(\gamma') = s(\xi') = e(\beta') = e(\delta')$, $b = s(\beta')$, $c = e(\gamma')$, $l = s(\lambda')$ y $x = e(\xi')$. Definimos

$$Q'_1 := (Q_1 \setminus \{\delta, \beta, \gamma, \lambda, \xi\}) \cup \{\delta', \beta', \gamma', \lambda', \xi'\}$$

y

$$\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{\delta\beta, \gamma\lambda, \xi\delta\}) \cup \{\gamma'\delta', \xi'\beta', \delta'\lambda'\}$$

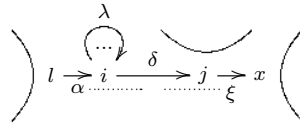
es decir



Denotaremos por $F_{\delta'}^{-1}$ a la transformación inversa.

3. Transformaciones sobre un lazo

Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil con Q conexo y $\lambda \in Q_1$ un lazo de Q , es decir $i := s(\lambda) = e(\lambda)$. La situación más general que puede tenerse en el correspondiente carcaj con relaciones en torno al lazo λ es la que se presenta a continuación:



Definiremos una nueva álgebra $L_\lambda(A) = kQ'/\langle \mathcal{P}' \rangle$ tomando $Q'_0 = Q_0$, Q'_1 y \mathcal{P}' de la siguiente forma. Consideramos α', δ', ξ' flechas tales que $j = s(\delta') = e(\alpha')$, $i = s(\xi') = e(\delta')$, $l = s(\alpha')$ y $x = e(\xi')$. Definimos

$$Q'_1 := (Q_1 \setminus \{\alpha, \delta, \xi\}) \cup \{\alpha', \delta', \xi'\}$$

y

$$\mathcal{P}' := (\mathcal{P} \setminus \{\delta\alpha, \xi\delta\}) \cup \{\delta'\alpha', \xi'\delta'\}$$

es decir

$$\left(\begin{array}{c} \lambda \\ \curvearrowright \\ l \xrightarrow{\alpha} i \xrightarrow{\delta} j \xrightarrow{\xi} x \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{c} \lambda \\ \curvearrowright \\ l \xrightarrow{\alpha'} j \xrightarrow{\delta'} i \xrightarrow{\xi'} x \end{array} \right)$$

Denotaremos por L_λ^{-1} a la transformación inversa.

Diremos que T es una **transformación elemental** si se trata de una transformación de vértice, de flecha, de lazo o es la inversa de alguna de éstas. Además, dos álgebras gentiles A y B se llamarán **derivadamente equivalentes mediante transformaciones elementales** si existe una sucesión finita de operaciones elementales T_1, T_2, \dots, T_r tales que $B = T_r(\dots T_1(A))$.

4. Descripción de las transformaciones con los hilos de A

Ahora, describiremos cada una de las transformaciones anteriores mediante la presentación que se tiene de las álgebras gentiles en términos de sus hilos. En esta descripción todas las funciones mencionadas parten de una transformación combinatoria más elemental o su correspondiente dual. Ello permitirá un mejor manejo de las mismas.

Definición 5.1. Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil con Q conexo $u, v \in Q_0$ vértices consecutivos distintos. Consideremos una descripción de A mediante sus hilos permitidos:

$$\mathcal{H}_A : \begin{bmatrix} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & s(H_{v^-}) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & u^+ & u^- & v^- & \dots \\ & v^+ & \vdots & \vdots & \\ & \vdots & e(H_{u^-}) & e(H_{v^-}) & \\ e(H_{u^+}) & & & & \end{bmatrix}$$

donde H_{u^-} y H_{v^-} son los hilos en A que involucran a u y a v que no involucran a la flecha (v^+, u^+) y H_{u^+} el hilo en A que involucra a dicha flecha. Denotaremos por $m_{u^+}(\mathcal{H}_A)$ al correspondiente arreglo que se obtiene quitando a u^+ de su posición y colocándolo debajo de v^- , es

decir

$$m_{u^+}(\mathcal{H}_A) : \begin{bmatrix} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & s(H_{v^-}) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & v^+ & u^- & v^- & \dots \\ \vdots & \vdots & u^+ & & \\ e(H_{u^+}) & e(H_{u^-}) & \vdots & & \\ & & e(H_{v^-}) & & \end{bmatrix}.$$

Diremos que u^+ es movido después de v^- . La transformación inversa se denotará por $m_{u^+}^{-1}$, en este caso diremos que u^+ es movido antes de v^- . Definiremos m_{u^-} y su inversa de manera análoga.

Observemos ahora que estas transformaciones combinatorias permiten describir a las que se presentaron en la sección anterior.

4.1. Transformación sobre un vértice. Sea A como en la Sección 1. Veamos que en cualquier caso, la transformación sobre un vértice i corresponde a aplicar m_{i^+} seguida de m_{i^-} .

(1) Si $s_1 \neq i \neq s_2$. Un arreglo asociado a \mathcal{H}_A se ve de la forma

$$\begin{bmatrix} s(H_{i^+}) & s(H_{i^-}) & s(H_{j_1^-}) & s(H_{j_2^-}) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & p_1^+ & p_2^+ & j_1^- & j_2^- & \dots \\ & i^+ & i^- & s_1^+ & s_2^+ & \\ & j_2^+ & j_1^+ & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & e(H_{j_1^-}) & e(H_{j_2^-}) & & \\ e(H_{i^+}) & e(H_{i^-}) & & & & \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{i^+}} \begin{bmatrix} s(H_{i^+}) & s(H_{i^-}) & s(H_{j_1^-}) & s(H_{j_2^-}) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & p_1^+ & p_2^+ & j_1^- & j_2^- & \dots \\ & j_2^+ & i^- & s_1^+ & i^+ & \\ & \vdots & j_1^+ & \vdots & s_2^+ & \\ e(H_{i^+}) & \vdots & e(H_{j_1^-}) & \vdots & & \\ & e(H_{i^-}) & & e(H_{j_2^-}) & & \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{m_{i^-}} \begin{bmatrix} s(H_{i^+}) & s(H_{i^-}) & s(H_{j_1^-}) & s(H_{j_2^-}) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & p_1^+ & p_2^+ & j_1^- & j_2^- & \dots \\ & j_2^+ & j_1^+ & i^- & i^+ & \\ \vdots & \vdots & s_1^+ & s_2^+ & & \\ e(H_{i^+}) & e(H_{i^-}) & \vdots & \vdots & & \\ & & e(H_{j_1^-}) & e(H_{j_2^-}) & & \end{bmatrix}$$

(2) Si $s_1 = i$ el arreglo \mathcal{H}_A se ve de la forma

(a)

$$\begin{bmatrix} s(H_{i+}) & s(H_{i-}) & s(H_{j_2-}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & j_1^+ & p_2^+ & j_2^- & \dots \\ & i^+ & i^- & s_2^+ & \\ & j_2^+ & j_1^- & \vdots & \\ \vdots & \vdots & e(H_{j_2-}) & & \\ e(H_{i+}) & e(H_{i-}) & & & \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{i+}} \begin{bmatrix} s(H_{i+}) & s(H_{i-}) & s(H_{j_2-}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & j_1^+ & p_2^+ & j_2^- & \dots \\ & j_2^+ & i^- & i^+ & \\ & \vdots & j_1^- & s_2^+ & \\ e(H_{i+}) & \vdots & \vdots & & \\ e(H_{i-}) & e(H_{j_2-}) & & & \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{m_{i-}} \begin{bmatrix} s(H_{i+}) & s(H_{i-}) & s(h_{j_2-}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & j_1^+ & p_2^+ & j_2^- & \dots \\ & i^- & j_1^- & i^+ & \\ & j_2^+ & \vdots & s_2^+ & \\ \vdots & e(H_{i-}) & \vdots & & \\ e(H_{i+}) & & e(H_{j_2-}) & & \end{bmatrix}$$

o bien

(b)

$$\begin{bmatrix} s(H_{i+}) & s(H_{i-}) & s(H_{j_2-}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & p_1^+ & j_1^- & j_2^- & \dots \\ & i^+ & i^- & s_2^+ & \\ & j_2^+ & j_1^+ & \vdots & \\ \vdots & \vdots & e(H_{j_2-}) & & \\ e(H_{i+}) & e(H_{i-}) & & & \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{i+}} \begin{bmatrix} s(H_{i+}) & s(H_{i-}) & s(H_{j_2-}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & p_1^+ & j_1^- & j_2^- & \dots \\ & j_2^+ & i^- & i^+ & \\ & \vdots & j_1^+ & s_2^+ & \\ e(H_{i+}) & \vdots & \vdots & & \\ e(H_{i-}) & e(H_{j_2-}) & & & \end{bmatrix}$$

 que al aplicar m_{i-} queda invariante

- (3) Si $s_1 = s_2 = i$ el arreglo \mathcal{H}_A queda invariante al aplicar m_{i+} y m_{i-} .

En cualquiera de los casos, los arreglos obtenidos corresponden a $H_{V_i(A)}$.

4.2. Transformación sobre una flecha. Sea A como en la Sección 2. Veamos que la transformación sobre una flecha (j^+, i^+) corresponde a aplicar m_{i+} .

El arreglo \mathcal{H}_A se ve de la forma

$$\begin{bmatrix} s(H_{i+}) & s(H_{i-}) & s(H_{j-}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & l^+ & b^+ & j^- & \dots \\ & i^+ & i^- & x^+ & \\ & j^+ & c^+ & \vdots & \\ \vdots & \vdots & e(H_{j-}) & & \\ e(H_{i+}) & e(H_{i-}) & & & \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{i+}} \begin{bmatrix} s(H_{i+}) & s(H_{i-}) & s(H_{j-}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & l^+ & b^+ & j^- & \dots \\ & j^+ & i^- & i^+ & \\ & \vdots & c^+ & x^+ & \\ e(H_{i+}) & \vdots & \vdots & & \\ & e(H_{i-}) & e(H_{j-}) & & \end{bmatrix}$$

que es el arreglo correspondiente a $H_{F_{(j^+, i^+)}}(A)$.

4.3. Transformación sobre un lazo. Sea A como en la Sección 3. Veamos que la transformación sobre un lazo (i^-, i^+) corresponde a aplicar m_{i^-} seguida de m_{i^+} . El arreglo \mathcal{H}_A se ve de la forma

$$\begin{bmatrix} s(H_{i+}) & s(H_{j-}) \\ \vdots & \vdots \\ \dots & l^+ & j^- & \dots \\ & i^+ & x^+ & \\ & i^- & \vdots & \\ & j^+ & e(H_{j-}) & \\ \vdots & & & \\ e(H_{i+}) & & & \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{i^-}} \begin{bmatrix} s(H_{i+}) & s(H_{j-}) \\ \vdots & \vdots \\ \dots & l^+ & j^- & \dots \\ & i^+ & i^- & \\ & j^+ & x^+ & \\ \vdots & \vdots & & \\ e(H_{i+}) & e(H_{j-}) & & \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{m_{i^+}} \begin{bmatrix} s(H_{i+}) & s(H_{j-}) \\ \vdots & \vdots \\ \dots & l^+ & j^- & \dots \\ & j^+ & i^+ & \\ & \vdots & i^- & \\ e(H_{i+}) & x^+ & & \\ & \vdots & & \\ & e(H_{j-}) & & \end{bmatrix}$$

que corresponde al arreglo $H_{L_{(i^-, i^+)}}(A)$.

5. Justificación teórica de las transformaciones

En esta sección probaremos que las transformaciones elementales del presente capítulo dan lugar a álgebras derivadamente equivalentes a aquellas sobre las que se aplica la transformación. Las pruebas que se muestran son parte del material que aparece en [HSZ01], aunque para la transformación de vértice se trabajan algunos casos que no se incluyen en este artículo.

Teorema 5.2. *Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra como aquella definida en (1) o (2) de la sección 1. Consideremos*

$$T := T_c \oplus \bigoplus_{l \in Q_0 \setminus \{i\}} P_l[1]$$

con

$$T_c := \cdots \rightarrow 0 \rightarrow P_{j_1} \oplus P_{j_2} \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots.$$

Entonces T es un complejo inclinado y $\text{End}_{D^b(A)}(T) \simeq V_i(A)$.

DEMOSTRACIÓN:

Por construcción T es un complejo inclinado y sabemos por [SZ03] que el álgebra $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ es gentil y entonces $\text{End}_{D^b(A)}(T) = \mathbb{k}Q'' / \langle \mathcal{P}'' \rangle$ con $Q''_0 = Q_0$. Denotemos por P''_m a los $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ -módulos proyectivos indescomponibles para $m \in Q''_0$, que se identifican con los sumandos indescomponibles de T . Sea F una equivalencia de categorías trianguladas $D^b(\text{End}_{D^b(A)}(T)) \rightarrow D^b(A)$ tal que $F(\text{End}_{D^b(A)}(T)) = T$ y

$$\begin{aligned} F(P''_i) &= T_c \\ F(P''_m) &= P_m[1], \quad m \in Q_0 \setminus \{i\} \end{aligned}$$

y así identificamos a $V_i(A)$ con $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ como se verá a continuación. Analicemos cómo son los morfismos irreducibles en $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ -mod en cada uno de los distintos casos. Tenemos los siguientes morfismos irreducibles:

(1)

$$\begin{aligned} \alpha'_1 := & \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \longrightarrow & P_{j_1} & \longrightarrow & 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & (id, 0) \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \end{array} \\ \alpha'_2 := & \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \longrightarrow & P_{j_2} & \longrightarrow & 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & (0, id) \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \end{array} \\ \pi'_1 := & \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_2} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow \alpha_1 \pi_2 \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \end{array} \\ \pi'_2 := & \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow \alpha_2 \pi_1 \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_2} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \end{array} \\ \sigma'_1 := & \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & \left(\begin{smallmatrix} \sigma_1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{s_1} & \longrightarrow & 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \end{array} \end{aligned}$$

$$\sigma'_2 := \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\ & & & & \uparrow & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{s_2} & \longrightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

que son morfismos irreducibles pues no se factorizan a través de ningún otro sumando indescomponible de T . Los morfismos $\sigma_1 : P_{s_1} \rightarrow P_{j_1}$ y $\sigma_2 : P_{s_2} \rightarrow P_{j_2}$ que son irreducibles en A , inducen morfismos que se factorizan a través de α'_1 y α'_2 respectivamente. Además, las composiciones $\sigma'_1 \alpha'_2$ y $\sigma'_2 \alpha'_1$ son cero y $\alpha'_1 \pi'_1$ y $\alpha'_2 \pi'_2$ son homotópicas a cero:

$$\alpha'_1 \pi'_1 \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{p_2} & \longrightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\ & & & & \uparrow & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} & \xrightarrow{\pi_2} & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\ & & & & \uparrow & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

$$\alpha'_2 \pi'_2 \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{p_1} & \longrightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\ & & & & \uparrow & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_2} & \xrightarrow{\pi_1} & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\ & & & & \uparrow & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

(2) (a) Sean α'_1 , α'_2 , π'_1 y σ'_2 como en (1), y

$$\pi'_2 := \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\ & & & & \uparrow & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_2} & \longrightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

que es también un morfismo irreducible pues no se factoriza a través de ningún otro sumando indescomponible de T . El morfismo $\sigma_2 : P_{s_2} \rightarrow P_{j_2}$ es irreducible en A , pero induce un morfismo que se factoriza a través de α'_2 , mientras que $\alpha_2 \pi_1$ induce un morfismo que se factoriza a través de α'_1 . Además, las composiciones $\sigma'_2 \alpha'_1$ y $\pi'_2 \alpha'_2$ son cero y $\alpha'_1 \pi'_1$ es homotópica a cero como en (1) al igual que

$\alpha'_2 \pi'_2:$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & \uparrow (\alpha_2 \pi_1) & \nearrow & \uparrow (\pi_1) & & \uparrow & & \\
 \alpha'_2 \pi'_2 & & \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_2} & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & \uparrow (0, id) & \nearrow & \uparrow (\alpha_1, \alpha_2) & & \uparrow & & \\
 \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \rightarrow & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots
 \end{array}$$

(b) Sean α'_1 , α'_2 , π'_2 y σ'_2 como en (1), y

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\
 \pi'_1 := & & & & \uparrow (\alpha_1 \pi_2) & \nearrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots
 \end{array}$$

que es también un morfismo irreducible pues no se factoriza a través de ningún otro sumando indescomponible de T . El morfismo $\sigma_2 : P_{s_2} \rightarrow P_{j_2}$ que es irreducible en A , induce un morfismo que se factoriza a través de α'_2 , mientras que $\alpha_1 \pi_2$ induce un morfismo que se factoriza a través de α'_1 . Además, las composiciones $\sigma'_2 \alpha'_1$ y $\pi'_1 \alpha'_2$ son cero y nuevamente $\alpha'_2 \pi'_2$ es homotópica a cero como en (1) así como $\alpha'_1 \pi'_1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & \uparrow (\alpha_1 \pi_2) & \nearrow & \uparrow (\pi_1) & & \uparrow & & \\
 \alpha'_1 \pi'_1 & & \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & \uparrow (id, 0) & \nearrow & \uparrow (\alpha_1, \alpha_2) & & \uparrow & & \\
 \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_{j_1} \oplus P_{j_2} & \rightarrow & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Para cada caso, los demás morfismos irreducibles en $A - \text{mod}$ dan lugar a morfismos irreducibles en $\text{End}_{D^b(A)}(T) - \text{mod}$ debido a que los correspondientes módulos proyectivos indescomponibles son sumandos directos de T en grado uno. Tenemos así que $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ se puede identificar con $V_i(A)$. □

Observación 5.3. En el caso (3) de la sección 1, usando el complejo inclinado antes mencionado, $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ se identifica con un álgebra definida por el mismo carcaj con relaciones que determina a A .

Teorema 5.4. Sea $A = kQ / \langle \mathcal{P} \rangle$ como en la sección 2. Definamos

$$T := T_c \oplus \bigoplus_{m \in Q_0^1} P_m \oplus \bigoplus_{r \in Q_0^2 \setminus \{i\}} P_r[1]$$

con

$$T_c := \cdots \rightarrow 0 \rightarrow P_j \xrightarrow{\delta} P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Entonces T es un complejo inclinado y $\text{End}_{D^b(A)}(T) \simeq F_\delta(A)$.

DEMOSTRACIÓN:

Por construcción T es un complejo inclinado. Sabemos por [SZ03] que el álgebra $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ es gentil, escribimos entonces $\text{End}_{D^b(A)}(T) = \mathbb{k}Q'' / \langle \mathcal{P}'' \rangle$ con $Q''_0 = Q_0$. Denotemos por P''_m a los $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ -módulos proyectivos indescomponibles para $m \in Q''_0$, que se identifican con los sumandos indescomponibles de T . Sea F una equivalencia de categorías trianguladas $D^b(\text{End}_{D^b(A)}(T)) \rightarrow D^b(A)$ tal que $F(\text{End}_{D^b(A)}(T)) = T$ y

$$\begin{aligned} F(P''_i) &= T_c \\ F(P''_m) &= P_m[1], \quad m \in Q''_0 \setminus \{i\} \\ F(P''_r) &= P_r, \quad r \in Q''_0 \end{aligned}$$

veremos que se logra una identificación de $F_\delta(A)$ con $\text{End}_{D^b(A)}(T)$. Analicemos cómo son los morfismos irreducibles en $\text{End}_{D^b(A)}(T) - \text{mod}$. Tenemos por ejemplo a los siguientes:

$$\begin{aligned} \beta' := & \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_b \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j & \xrightarrow{\delta} & P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow & \nearrow \delta & \uparrow \beta \\ & & & & & & \uparrow \end{array} \\ \\ \gamma' := & \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j & \xrightarrow{\delta} & P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \gamma \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_c \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & & & \uparrow \end{array} \\ \\ \delta' := & \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j & \rightarrow & 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & id \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j & \xrightarrow{\delta} & P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & & & \uparrow \end{array} \\ \\ \xi' := & \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j & \xrightarrow{\delta} & P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & \xi \uparrow & & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_x & \rightarrow & 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & & & \downarrow \end{array} \\ \\ \lambda' := & \begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_l \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow & \delta \lambda \uparrow & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ & & & & & & \uparrow \end{array} \end{aligned}$$

que no se factorizan a través de ningún otro sumando indescomponible de T y son por ello irreducibles. El morfismo $\xi : P_x \rightarrow P_j$ que es irreducible en A , da lugar a un morfismo que se factoriza a través de δ' . Además, las composiciones $\xi' \beta'$ y $\gamma' \delta'$ son cero y $\delta' \lambda'$ es homotópica a cero:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & & \delta\lambda \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \delta' \lambda' & \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & & id \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j & \rightarrow & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Los demás morfismos irreducibles en $A - \text{mod}$ dan lugar a morfismos irreducibles en $\text{End}_{D^b(A)}(T) - \text{mod}$ ya que los correspondientes módulos proyectivos indescomponibles son sumandos directos de T en los grados adecuados y $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ se identifica de este modo con $F_\delta(A)$. □

Teorema 5.5. *Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ como en la sección 3. Definamos*

$$T := T_c \oplus \bigoplus_{m \in Q_0 \setminus \{i\}} P_m[1]$$

con

$$T_c := \cdots \rightarrow 0 \rightarrow P_j \oplus P_j \xrightarrow{(\delta, \delta\lambda)} P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Entonces T es un complejo inclinado y $\text{End}_{D^b(A)}(T) \simeq L_\lambda(A)$.

DEMOSTRACIÓN:

Por construcción T es un complejo inclinado y por el artículo [SZ03] el álgebra $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ es gentil y así $\text{End}_{D^b(A)}(T) = kQ''/\langle \mathcal{P}'' \rangle$ con $Q''_0 = Q_0$. Denotemos por P''_m a los $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ -módulos proyectivos indescomponibles para $m \in Q''_0$, que se identifican con los sumandos indescomponibles de T . Sea F una equivalencia de categorías trianguladas $D^b(\text{End}_{D^b(A)}(T)) \rightarrow D^b(A)$ tal que $F(\text{End}_{D^b(A)}(T)) = T$ y

$$\begin{aligned}
 F(P''_i) &= T_c \\
 F(P''_m) &= P_m[1], \quad m \in Q_0 \setminus \{i\}
 \end{aligned}$$

y podemos identificar a $L_\lambda(A)$ con $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ como se probará a continuación. Analicemos cuáles son los morfismos irreducibles en $\text{End}_{D^b(A)}(T) - \text{mod}$. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \alpha' := & \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & & \uparrow & \delta\lambda \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\
 \\
 \delta' := & \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\
 & & & & & (0, id) \uparrow & (\delta, \delta\lambda) \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_j \oplus P_j & \rightarrow & P_i & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\lambda' := & \cdots & \rightarrow 0 & \rightarrow P_j \oplus P_j & \xrightarrow{(\delta, \delta\lambda)} & P_i & \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\
& & & \uparrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \uparrow (\delta, \delta\lambda) & \uparrow \lambda & \uparrow \\
& \cdots & \rightarrow 0 & \rightarrow P_j \oplus P_j & \rightarrow P_i & \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\
\\
\xi' := & \cdots & \rightarrow 0 & \rightarrow P_j \oplus P_j & \xrightarrow{(\delta, \delta\lambda)} & P_i & \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\
& & & \uparrow \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} & & \uparrow & \uparrow \\
& \cdots & \rightarrow 0 & \rightarrow P_x & \rightarrow 0 & \rightarrow 0 \rightarrow \cdots
\end{array}$$

son morfismos irreducibles pues no se factorizan a través de ningún otro sumando indescomponible de T . El morfismo $\xi : P_x \rightarrow P_j$ que es irreducible en A , determina un morfismo en $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ que se factoriza a través de δ' y el morfismo inducido por la proyección de $P_j \oplus P_j$ en la primera componente, se factoriza a través de λ' . Además, las composiciones $\xi'\delta'$ y $\lambda'\lambda'$ son cero y $\delta'\alpha'$ es homotópica a cero:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \cdots & \rightarrow 0 & \rightarrow P_l & \rightarrow 0 & \rightarrow 0 & \rightarrow \cdots \\
& & & \uparrow \delta\lambda\alpha & \nearrow & \uparrow & \uparrow \\
\delta'\alpha' & \cdots & \rightarrow 0 & \rightarrow P_j & \xrightarrow{\alpha} & 0 & \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\
& & & \uparrow (0, id) & & \uparrow (\delta, \delta\lambda) & \uparrow \\
& \cdots & \rightarrow 0 & \rightarrow P_j \oplus P_j & \rightarrow P_i & \rightarrow 0 \rightarrow \cdots
\end{array}$$

Los demás morfismos irreducibles en $A - \text{mod}$ dan lugar a morfismos irreducibles en $\text{End}_{D^b(A)}(T) - \text{mod}$ debido a que los correspondientes módulos proyectivos indescomponibles son sumandos directos de T en grado uno; identificamos a $\text{End}_{D^b(A)}(T)$ con $L_\lambda(A)$. \square

CAPÍTULO 6

Reducciones de un álgebra a la forma normal

En este capítulo se estudian ciertas simplificaciones sobre las álgebras gentiles de dos ciclos, usando las transformaciones del capítulo anterior, para modificarlas y llevarlas a alguna de las formas normales presentadas en el Capítulo 2. Debido a la diversidad de álgebras que se presentan, incluso cuando se trabaja con carcajes de pocos vértices, no se desarrolló un algoritmo para transformarlas a su forma normal. En cambio se realizarán más adelante pruebas por inducción en las cuales, si se conocen las transformaciones elementales para llevar a un álgebra cuyo carcaj tiene n vértices a su forma normal, se pueden modificar ciertas álgebras asociadas a carcajes con $n+1$ vértices, obtenidas agregando de modo adecuado un vértice a un carcaj de n vértices, hasta obtener sus respectivas formas normales. A lo largo del presente capítulo se muestran los resultados técnicos necesarios para dichas pruebas.

1. Simplificación de ramas en el carcaj

Debido a que se realizarán pruebas por inducción sobre el número de vértices del carcaj asociado a un álgebra necesitaremos lo siguiente:

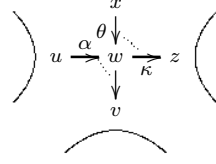
Definición 6.1. Sea Q un carcaj. El **grado de un vértice** es la suma del número de flechas que comienzan en v y el número de flechas que terminan en v .

Definición 6.2. Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q un carcaj conexo y $x \in Q_0$ un vértice de transición (ver la sección 5), o bien, un vértice de grado 1 que es el inicio de una flecha; gráficamente tenemos alguno de los siguientes casos:

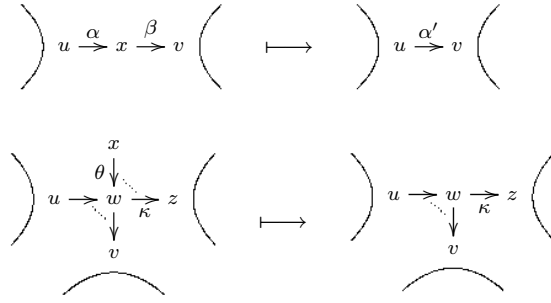
(1)

$$\left. \vphantom{\int} \right) u \xrightarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} v \left(\vphantom{\int} \right.$$

(2)

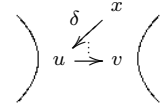


Consideramos el correspondiente carcaj con relaciones que se obtiene quitando al vértice x , es decir, formamos un álgebra $A \setminus \{x\} := kQ' / \langle \mathcal{P}' \rangle$ donde $Q'_0 = Q_0 \setminus \{x\}$, $Q'_1 = (Q_1 \setminus \{\alpha, \beta\}) \cup \{\alpha'\}$ con $s(\alpha') = u$, $e(\alpha') = v$ $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus (\{\alpha\gamma \mid \gamma \in Q_1\} \cup \{\gamma\beta \mid \gamma \in Q_1\}) \cup \{\alpha'\gamma \mid \alpha\gamma \in \mathcal{P}\} \cup \{\gamma\alpha' \mid \gamma\beta \in \mathcal{P}\}$ para el caso (1); para el caso (2) tomamos $Q'_0 = Q_0 \setminus \{x\}$, $Q'_1 = (Q_1 \setminus \{\theta\})$ $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{\kappa\theta\}$. Es decir:

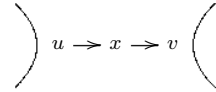


Observación 6.3. Si $A = kQ / \langle \mathcal{P} \rangle$ es un álgebra gentil, con Q un carcaj de dos ciclos y $x \in Q_0$ como en la definición anterior, $A \setminus \{x\} = kQ' / \langle \mathcal{P}' \rangle$ también es un álgebra gentil con Q' un carcaj de dos ciclos, ya que tiene exactamente un vértice y una arista menos que Q .

Observación 6.4. Si tenemos



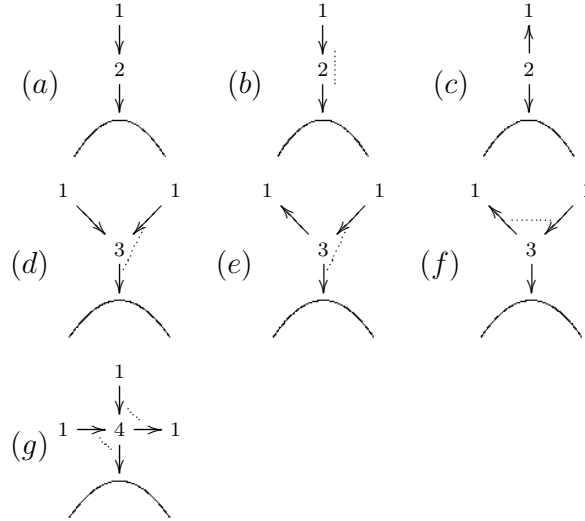
al aplicar una transformación de flecha F_δ obtenemos



es decir, un vértice como en la primera parte de la Definición 6.2. Análogamente en el caso dual.

Veamos ahora cómo se comportan los árboles enraizados de un carcaj asociado a un álgebra gentil, ver Definición 1.4:

Lema 6.5. *Sea Q un carcaj de dos ciclos y más de cinco vértices, asociado a un álgebra gentil. Si existen árboles enraizados de profundidad mayor a uno se presenta alguna de las siguientes formas:*



o alguno de los respectivos duales. En los diagramas anteriores los números indican el grado de cada vértice.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $u \in Q_0$ de grado 1 tal que el único vecino de u, v , es de grado mínimo. Como el álgebra es gentil, el carcaj conexo y de al menos 5 vértices, el grado de v es 2, 3 o 4. Si v es de grado 2, las únicas posibilidades son (a), (b) o (c), o sus respectivos duales, si es de grado 3 las posibilidades son (d), (e) o (f) o alguno de sus duales, y si es de grado 4, las opciones son (g) o su correspondiente dual.

□

Más específicamente:

Lema 6.6. *Sea Q un carcaj de dos ciclos y más de cinco vértices, asociado a un álgebra gentil A . Si existen árboles enraizados de profundidad mayor a uno, A es derivadamente equivalente mediante transformaciones elementales a un álgebra $B = kQ' / \langle \mathcal{P}' \rangle$ donde existe $x \in Q'_0$ como en el inciso (1) de la Definición 6.2.*

DEMOSTRACIÓN: Basta analizar cada uno de los casos que se presentan en el Lema 6.5. Para (a) no hay nada que probar y en (b),(d), (e), (f) y (g) el resultado se sigue de la Observación 6.4. Para (c) tenemos:

$$(c) \quad \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} x \\ \delta' \uparrow \\ u \\ \downarrow \\ v \end{array} & \begin{array}{c} F_{\delta'}^{-1} \\ \longleftarrow \end{array} & \begin{array}{c} u \\ \downarrow \\ x \\ \downarrow \\ v \end{array} \\ \text{---} & & \text{---} \end{array}$$

y para los casos duales se aplican las transformaciones inversas. \square

Analicemos lo que ocurre con los árboles enraizados de profundidad uno.

Lema 6.7. *Sea $A = kQ / \langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q un carcaj con dos ciclos. Si en Q se tiene un árbol enraizado de profundidad uno, existe $x \in Q_0$ de modo que A es derivadamente equivalente mediante transformaciones elementales a $B = kQ' / \langle \mathcal{P}' \rangle$ donde el correspondiente x se presenta en alguna de las siguientes situaciones:*

(1)

$$\left(\begin{array}{c} u \xrightarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} v \end{array} \right)$$

con x de grado 2, o

(2)

$$\left(\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ u \xrightarrow{\alpha} w \xrightarrow{\beta} v \end{array} \right)$$

con w de grado 3 y α y β pertenecientes a un ciclo.

DEMOSTRACIÓN:

Analicemos los posibles casos en que puede presentarse el árbol enraizado de profundidad 1. Si se presenta una situación como en la Observación 6.4 no hay nada que probar, así que habrá que analizar qué ocurre si la rama de profundidad 1 se ve de la forma:

$$\left(\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ u \xrightarrow{\alpha} w \xrightarrow{\beta} v \end{array} \right)$$

con w de grado 3. Si α y β pertenecen a un ciclo se tiene el resultado. Si no, podemos aplicar F_{β} para obtener

$$\left. \right) u \xrightarrow{\quad} w \xleftarrow{\quad} v \left(\begin{array}{c} x \\ \swarrow \end{array} \right.$$

y concluir la afirmación nuevamente a partir de la Observación 6.4. En el caso dual se aplica la transformación inversa respectiva. \square

Veamos ahora cómo, bajo determinadas situaciones, podemos asegurar la existencia de un vértice x para el cual tenga sentido considerar el álgebra $A \setminus \{x\}$ como en la Definición 6.2.

Proposición 6.8. *Sea $A = \mathbb{k}Q / \langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q un carcaj de dos ciclos y más de 5 vértices. Entonces A es derivadamente equivalente mediante transformaciones elementales a $B = \mathbb{k}Q' / \langle \mathcal{P}' \rangle$ donde existe $x \in Q'_0$ del siguiente tipo:*

(1)

$$\left. \right) u \xrightarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} v \left(\right.$$

con x de grado 2

(2)

$$\left. \right) u \xrightarrow{\alpha} \underset{\dots\dots}{w} \xrightarrow{\beta} v \left(\begin{array}{c} x \\ \downarrow \end{array} \right.$$

con w de grado 3 y α y β pertenecientes a un ciclo

(3)

$$\left. \right) u \xrightarrow{\alpha} \underset{\dots\dots}{x} \xrightarrow{\beta} v \left(\right.$$

con x de grado 2 y α y β pertenecientes a un ciclo.

DEMOSTRACIÓN:

Si existen árboles enraizados el resultado se sigue de los Lemas 6.6 o 6.7.

Por otro lado, si no existen árboles enraizados todos los vértices tienen grado 2, 3 o 4. Sabemos que

$$\sum_{v \in Q_0} gr(v) = 2\#Q_1 = 2(\#Q_0 + 1) = 2\#Q_0 + 2$$

Entonces los vértices son de grado 2, salvo uno que es de grado 4 o dos de grado 3. Por hipótesis hay al menos 6 vértices, entonces tenemos al menos dos vértices consecutivos de grado 2 (ver Definición 1.3) denotémoslos por u y v . Si en ninguno de estos dos vértices se presenta la situación (1) tenemos entonces alguna de las siguientes:

$$\left. \right) \leftarrow u \rightarrow v \leftarrow \left($$

$$\left. \right) \xrightarrow[\dots]{u} \xrightarrow[\dots]{\delta} v \xrightarrow{\dots} \left($$

$$\left. \right) \xrightarrow[\dots]{u} \xrightarrow[\dots]{\delta} v \leftarrow \left($$

o su dual:

$$\left. \right) \leftarrow u \xrightarrow[\dots]{\delta} v \xrightarrow{\dots} \left($$

En la primera situación aplicamos la transformación de vértice

$$\left. \right) \leftarrow u \rightarrow v \leftarrow \left(\begin{array}{c} V_u \\ \longmapsto \end{array} \right) u \leftarrow v \leftarrow \left($$

donde el grado del vértice u puede variar pero el de v es 2, así, se tiene (1). Para los demás casos, si la arista δ pertenece a un ciclo se tiene (3); si no, podemos aplicar la transformación de flecha:

$$\left. \right) \xrightarrow[\dots]{u} \xrightarrow[\dots]{\delta} v \xrightarrow{\dots} \left(\begin{array}{c} F_\delta \\ \longmapsto \end{array} \right) \xrightarrow[\dots]{\alpha} \begin{array}{c} v \\ \downarrow \\ u \end{array} \xrightarrow{\beta} \left($$

y por el Lema 6.7 se tiene el resultado, o bien

$$\left. \right) \xrightarrow[\dots]{u} \xrightarrow[\dots]{\delta} v \leftarrow \left(\begin{array}{c} F_\delta \\ \longmapsto \end{array} \right) \rightarrow u \leftarrow v \leftarrow \left($$

para el caso dual se aplica la transformación inversa correspondiente y se presenta una situación previamente analizada. \square

Refinando un poco el resultado anterior se tiene:

Proposición 6.9. *Sea $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q un carcaj de dos ciclos y más de 5 vértices. Si A no es derivadamente equivalente a un álgebra $B = kQ'/\langle \mathcal{P}' \rangle$ donde existe $x \in Q'_0$ del siguiente tipo:*

(1)

$$\left(\begin{array}{c} u \xrightarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} v \end{array} \right)$$

con x de grado 2

(2)

$$\left(\begin{array}{c} u \xrightarrow{\alpha} w \xrightarrow{\beta} v \\ \quad \quad \downarrow x \\ \quad \quad \dots \end{array} \right)$$

con w de grado 3 y α y β pertenecientes a un ciclo

entonces $\#\phi_A = 1$ o A es derivadamente equivalente a uno de los representantes (1), (2) o (3) del Capítulo 2.

DEMOSTRACIÓN:

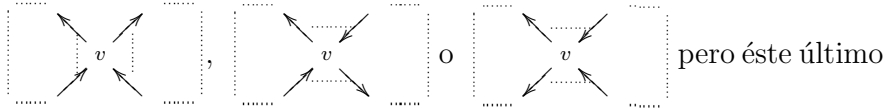
Supongamos que A no es derivadamente equivalente a un álgebra cuyo carcaj asociado tenga un vértice x como el descrito, sabemos entonces por los Lemas 6.6 y 6.7 que Q no tiene ramas. Como $\#Q_0 \geq 6$ sabemos por la prueba de la Proposición 6.8 que debe existir una secuencia de 3 flechas del tipo

$$\left(\begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_0} u \xrightarrow{\alpha_1} v \xrightarrow{\alpha_2} \end{array} \right)$$

con u y v de grado 2 y α_0 , α_1 y α_2 pertenecientes a un mismo ciclo; más aún, cualquier secuencia formada por vértices u_1, u_2, \dots, u_n consecutivos de grado 2, $n \geq 2$ debe ser de la forma

$$\left(\begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_0} u_1 \xrightarrow{\alpha_1} u_2 \xrightarrow{\dots} u_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} u_n \end{array} \right)$$

y debe estar formada por flechas que pertenezcan a un mismo ciclo, pues en caso contrario, el argumento presentado en la prueba de la Proposición 6.8 permitiría transformar el carcaj con relaciones en uno con un vértice x como el descrito. Sabemos también que todo vértice en A es de grado dos, salvo uno de grado 4 o dos de grado 3. Si se tiene un vértice v de grado 4, éste puede presentarse en alguna de las siguientes formas

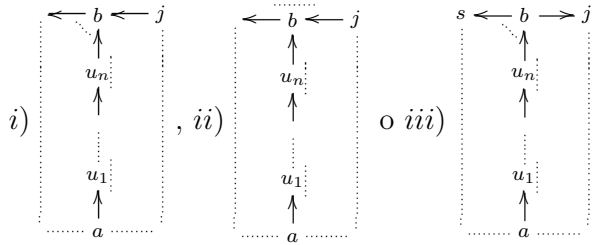


no se da porque en alguno de los dos ciclos aparecen más de tres flechas y, por el sentido de las mismas, aparecería una secuencia distinta a la mencionada anteriormente. En el primer caso se tiene un representante del tipo (1) y en el segundo uno del tipo (2). Analicemos ahora qué ocurre si aparecen dos vértices de grado 3, a y b :

Observamos de acuerdo a lo anterior que todas las flechas forman parte de un ciclo salvo quizás una o dos. Veamos que en cualquier caso, dadas las condiciones del carcaj con relaciones, $\#\phi_A = 1$ o bien A es derivadamente equivalente a uno de los representantes (1), (2) o (3) del Capítulo 2:

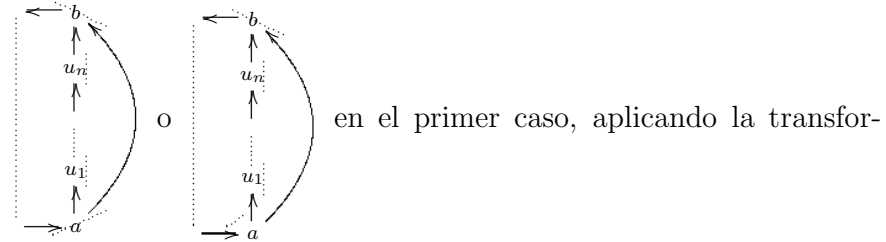
Caso 1.- Todas las flechas forman parte de algún ciclo.

Sabemos que existe una secuencia de al menos tres flechas como la mencionada anteriormente y sus extremos deben ser precisamente a y b . Se presenta alguna de las siguientes tres situaciones:



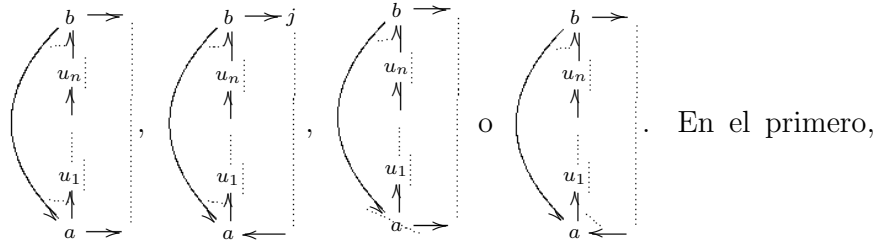
i) Aplicando la transformación V_b^{-1} obtenemos un hilo permitido trivial en u_n .

ii) Si $j \neq a$, aplicando también la transformación V_b^{-1} obtenemos un hilo permitido trivial en j ; por otro lado, si $j = a$ se tiene



mación V_b^{-1} obtenemos un hilo permitido trivial en a , y en el segundo, debido al algoritmo para calcular ϕ_A tenemos que $\#\phi_A = 1$.

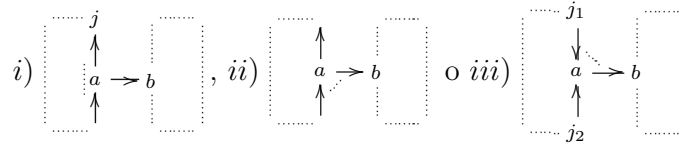
iii) Si $s \neq a$, al aplicar la transformación V_b obtenemos un hilo permitido trivial en s . Por otro lado, si $s = a$ tenemos alguno de los siguientes casos:



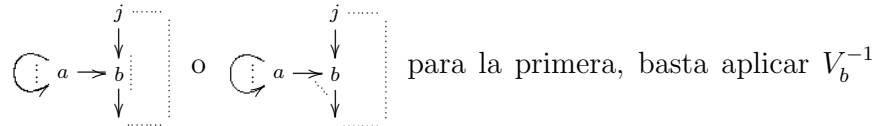
aplicando V_a obtenemos un hilo permitido trivial en u_1 , en el segundo, si $j = a$ se tiene un representante del tipo (3) y si $j \neq a$ al aplicar V_a^{-1} obtenemos un hilo permitido trivial en b . Los últimos dos casos corresponden a álgebras con $\#\phi_A = 1$.

Caso 2.- Todas las flechas forman parte de un ciclo salvo una, aquella determinada por los vértices b y a .

Tenemos una de las siguientes opciones



i) Si $j \neq a$ aplicando V_a al álgebra obtenemos un hilo permitido trivial en j . Si $j = a$, es decir, si se tiene un lazo λ en a hay dos posibilidades



para obtener un hilo permitido trivial en j y para la segunda es posible aplicar L_λ para obtener un hilo permitido trivial en b .

ii) Como el álgebra es de dimensión finita no puede existir un lazo en a , y al aplicar V_a se obtiene un hilo permitido trivial en b .

iii) Si $j_1 \neq j_2$, basta aplicar V_a^{-1} para obtener un hilo permitido trivial en j_1 . Si $j_1 = j_2$ hay sólo dos opciones



tiene un hilo permitido trivial en c y en la segunda, aplicando F_δ^{-1} se obtiene un carcaj donde todas las flechas pertenecen a un ciclo, es decir, se reduce al caso 1.

Caso 3.- Hay exactamente dos flechas que no pertenecen a un ciclo. Tenemos alguna de las siguientes opciones:

$$i) \begin{array}{|c|} \hline a \leftarrow b \rightarrow c \\ \hline \end{array} \quad ii) \begin{array}{|c|} \hline a \rightarrow b \xleftarrow{\delta'} c \\ \hline \end{array}, \text{ o } iii) \begin{array}{|c|} \hline a \rightarrow b \xrightarrow{\delta} c \\ \hline \end{array}$$

i) Si se tiene

$$\begin{array}{|c|} \hline a \leftarrow b \rightarrow c \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ c \\ \uparrow \\ x \end{array}$$

aplicando V_c^{-1} se tiene un hilo permitido trivial en x , si se tiene

$$\begin{array}{|c|} \hline a \leftarrow b \rightarrow c \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ c \\ \uparrow \\ x \end{array} \begin{array}{c} \delta \\ \rightarrow \\ c \end{array}$$

aplicando F_δ se reduce al caso 2.

ii) Es dual a i).

iii) Aplicando F_δ se tiene un álgebra como en i) o bien se reduce al caso 2.

Finalmente vemos que los hilos permitidos triviales corresponden a carcajes con relaciones donde aparecen vértices de transición o ramas y debido a la hipótesis que se tiene sobre A y a los Lemas 6.6 y 6.7 esto no puede ocurrir. Las únicas opciones posibles son entonces que $\#\phi_A = 1$, o bien, A es derivadamente equivalente a uno de los representantes (1), (2) o (3) del Capítulo 2. □

Con los resultados anteriores podemos estudiar qué ocurre al aplicar una transformación elemental a un álgebra gentil A y cómo se relaciona con aquella que se obtiene de aplicar la misma transformación a una que se construye a partir de A quitando adecuadamente uno de sus vértices:

Lema 6.10. Sean $A = kQ/\langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q un carcaj de dos ciclos y $\#Q_0 \geq 6$. Sean $x \in Q_0$ como en la Definición 6.2 y T una transformación elemental que sea factible aplicar a $A \setminus \{x\}$. Entonces A es derivadamente equivalente mediante transformaciones elementales a un álgebra $B = kQ'/\langle \mathcal{P}' \rangle$ de modo que el correspondiente $x \in Q'_0$ es también un vértice como en la Definición 6.2 y tal que $T(A \setminus \{x\}) = B \setminus \{x\}$.

DEMOSTRACIÓN:

Analicemos cada uno de los casos que se presentan para el vértice x . Observamos que cualquier transformación elemental que se aplique

a $A \setminus \{x\}$ puede aplicarse también a A . Sean H_{u^-} y H_{v^-} los hilos permitidos en A que involucran a u y a v que no involucran a α y a β , H_{u^+} y H_{v^+} los hilos permitidos en A que involucran a α y a β respectivamente. En las correspondientes presentaciones de $A \setminus \{x\}$ y A con los hilos permitidos tenemos, para cada caso:

(1) En $A \setminus \{x\}$

$$\begin{bmatrix} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & s(H_{v^-}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & u^+ & u^- & v & \dots \\ & v^+ & \vdots & \vdots \\ \vdots & e(H_{u^-}) & e(H_{v^-}) \\ e(H_{u^+}) \end{bmatrix}$$

en A

$$\begin{bmatrix} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & s(C_{v^-}) & x^- \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & u^+ & u^- & v^- & \dots \\ & x^+ & \vdots & \vdots \\ & v^+ & e(H_{u^-}) & e(H_{v^-}) \\ \vdots \\ e(H_{u^+}) \end{bmatrix}$$

Cuando la transformación T no desplaza u^+ después de v^- , o bien v^+ antes de u^- , al aplicar T a A el hilo permitido trivial x^- no desaparece, x sigue siendo un vértice como en la primera parte de la Definición 6.2 y se tiene el resultado definiendo $B = T(A)$. Veamos qué ocurre si u^+ es desplazado después de v^- :

$$\begin{bmatrix} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & s(H_{v^-}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & u^+ & u^- & v^- & \dots \\ & v^+ & \vdots & \vdots \\ \vdots & e(H_{u^-}) & e(H_{v^-}) \\ e(H_{u^+}) \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} s(H_{u^+}) & \vdots & s(H_{v^-}) \\ \vdots & u^- & \vdots \\ \dots & v^+ & \vdots & v^- & \dots \\ & \vdots & u^+ \\ e(H_{u^+}) & \vdots \\ e(H_{v^-}) \end{bmatrix}$$

En A hacemos lo siguiente

$$\begin{array}{ccc}
\left[\begin{array}{cccc} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & s(H_{v^-}) & x^- \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & u^+ & u^- & v^- & \dots \\ & x^+ & \vdots & \vdots & \\ & v^+ & e(H_{u^-}) & e(H_{v^-}) & \\ \vdots & & & & \\ e(H_{u^+}) & & & & \end{array} \right] & \xrightarrow{F_{(v^+,x^+)}} & \left[\begin{array}{cccc} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & s(H_{v^-}) & x^- \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & u^+ & u^- & v^- & \dots \\ & v^+ & \vdots & x^+ & \\ & \vdots & e(H_{u^-}) & \vdots & \\ e(H_{u^+}) & & & e(H_{v^-}) & \end{array} \right] \\
& & \xrightarrow{T} & \left[\begin{array}{cccc} s(H_{u^+}) & \vdots & s(H_{v^-}) & x^- \\ \vdots & u^- & \vdots & \\ \dots & v^+ & \vdots & v^- & \dots \\ & \vdots & & u^+ & \\ & e(H_{u^+}) & & x^+ & \\ & & & \vdots & \\ & & & e(H_{v^-}) & \end{array} \right]
\end{array}$$

o bien, en caso de que $e(H_{v^-}) = v^-$

$$\begin{array}{ccc}
\left[\begin{array}{cccc} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & s(H_{v^-}) & x^- \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & u^+ & u^- & v^- & \dots \\ & x^+ & \vdots & \vdots & \\ & v^+ & e(H_{u^-}) & & \\ \vdots & & & & \\ e(H_{u^+}) & & & & \end{array} \right] & \xrightarrow{F_{(v^+,x^+)}} & \left[\begin{array}{cccc} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & s(H_{v^-}) & x^- \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & u^+ & u^- & v^- & \dots \\ & v^+ & \vdots & x^+ & \\ & \vdots & e(H_{u^-}) & & \\ e(H_{u^+}) & & & & \end{array} \right] \\
& & \xrightarrow{T} & \left[\begin{array}{cccc} s(H_{u^+}) & \vdots & s(H_{v^-}) & x^- \\ \vdots & u^- & \vdots & \\ \dots & v^+ & \vdots & v^- & \dots \\ & \vdots & & u^+ & \\ & e(H_{u^+}) & & x^+ & \end{array} \right] & \xrightarrow{F_{(x^+,u^+)}} & \left[\begin{array}{cccc} s(H_{u^+}) & \vdots & s(H_{v^-}) & x^- \\ \vdots & x^+ & \vdots & \\ \dots & v^+ & u^- & v^- & \dots \\ & \vdots & \vdots & u^+ & \\ e(H_{u^+}) & & & & \end{array} \right]
\end{array}$$

De cualquier forma, el arreglo final describe un álgebra B que se obtiene del de $T(A \setminus \{x\})$ agregando al hilo permitido trivial x^- que corresponde a un vértice $x \in Q'_0$ como el descrito en la Definición 6.2. Si T involucra un desplazamiento de v^+ antes de u^- , procedemos de manera similar pero usando la transformación $F_{(x^+,u^+)}^{-1}$.

(2) En $A \setminus \{x\}$

$$\begin{bmatrix} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & w^- & & \\ \vdots & \vdots & v^- & & \\ \dots & u^+ & u^- & \vdots & \dots \\ & w^+ & \vdots & e(H_{v^-}) & \\ & z^+ & e(H_{u^-}) & & \\ & \vdots & & & \\ & e(H_{u^+}) & & & \end{bmatrix}$$

en A

$$\begin{bmatrix} s(H_{u^+}) & s(H_{u^-}) & x^+ & x^- & \\ \vdots & \vdots & w^- & & \\ \dots & u^+ & u^- & v^- & \dots \\ & w^+ & \vdots & \vdots & \\ & z^+ & e(H_{u^-}) & e(H_{v^-}) & \\ & \vdots & & & \\ & e(H_{u^+}) & & & \end{bmatrix}$$

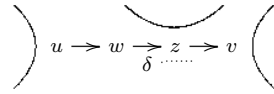
El único movimiento que podría desaparecer al hilo permitido trivial en x sería el desplazamiento de w^- antes de x^- , pero esto no ocurre ya que w es el inicio de un hilo permitido en $A \setminus \{x\}$. En este caso $B := T(A)$ es el álgebra buscada. \square

Aplicando repetidas veces el lema anterior tenemos:

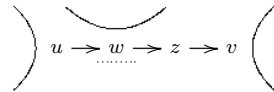
Corolario 6.11. *Sean $A = \mathbb{k}Q / \langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q un carcaj de dos ciclos y $\#Q_0 \geq 6$. Sean $x \in Q_0$ como en la Definición 6.2 y T la composición de transformaciones elementales de modo que $T(A \setminus \{x\})$ tenga sentido. Entonces A es derivadamente equivalente mediante operaciones elementales a un álgebra $B = \mathbb{k}Q' / \langle \mathcal{P}' \rangle$ de modo que el correspondiente $x \in Q'_0$ es también como en la Definición 6.2 y tal que $T(A \setminus \{x\}) = B \setminus \{x\}$.*

2. Formas de agregar un vértice a los representantes

A continuación se analizarán cuáles son las distintas formas de agregar un vértice del tipo de la Definición 6.2 a los representantes de la primera sección del Capítulo 2 y se probará que en cualquier caso es posible aplicar transformaciones elementales a las álgebras obtenidas para llegar nuevamente a un representante. Necesitamos entender primero qué ocurre si se agrega un vértice de transición a un álgebra gentil. Para ello será útil lo siguiente:

Observación 6.12.

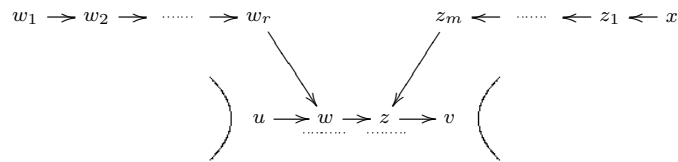
es derivadamente equivalente a



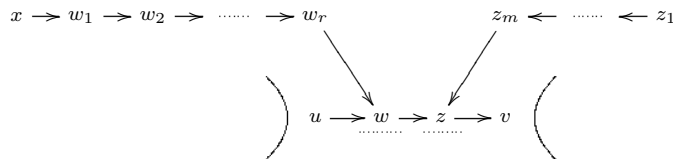
mediante la transformación F_δ .

A continuación se verá que, bajo ciertas condiciones, al agregar a una rama un vértice que define a un hilo permitido trivial y quitarlo en otra se obtienen álgebras derivadamente equivalentes.

Lema 6.13. *El álgebra gentil correspondiente al carcaj con relaciones*

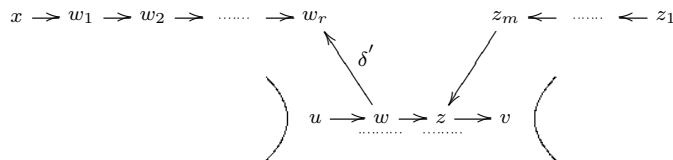


es derivadamente equivalente mediante transformaciones elementales a un álgebra definida por

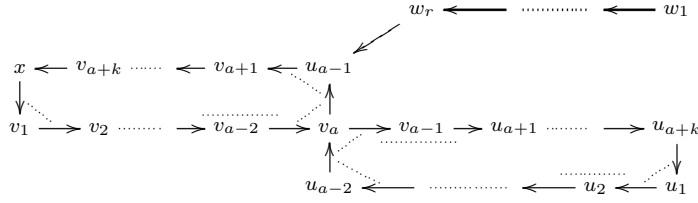


DEMOSTRACIÓN:

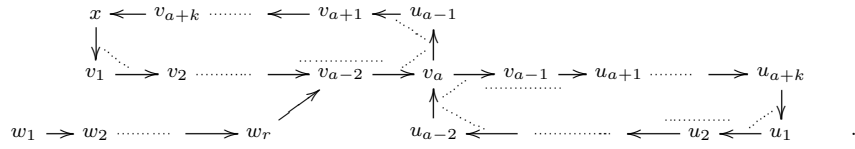
Aplicando primero V_z^{-1} y renombrando los vértices tenemos



es decir

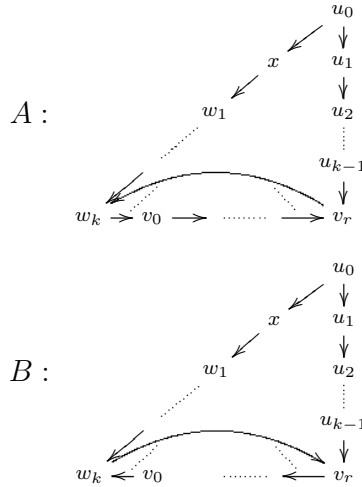


Usando el Lema 6.13 y las Observaciones 6.12 y 6.14 tenemos que es derivadamente equivalente a



Observamos que renombrando los vértices, éste es precisamente el carcaj asociado a B . □

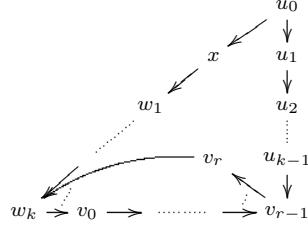
Proposición 6.17. *Las álgebras asociadas a los siguientes carcajes con relaciones son derivadamente equivalentes.*



Observación 6.18. $\phi_A = \phi_B = [(k, k), (k + 1, k + 1), (r, r + 2)]$.

DEMOSTRACIÓN:

Usando la Observación 6.12 tenemos que A es derivadamente equivalente a



Después de aplicar este resultado r veces y de renombrar a los vértices tenemos precisamente B . □

Proposición 6.19. *Las álgebras asociadas a los siguientes carcajes con relaciones son derivadamente equivalentes.*

$$A: \quad x \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} v_1 \cdots v_{q-1} \rightarrow v_q \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} u_k \leftarrow \cdots u_1 \leftarrow u_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} w_q \leftarrow w_{q-1} \cdots w_2 \leftarrow w_1$$

$$B: \quad x \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} v_1 \cdots v_{q-1} \rightarrow v_q \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} u_k \rightarrow \cdots u_1 \rightarrow u_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} w_q \leftarrow w_{q-1} \cdots w_2 \leftarrow w_1$$

Observación 6.20. $\phi_A = \phi_B = [(k, k), (q+1, q+2), (q, q+1)]$.

DEMOSTRACIÓN:

Usando la Observación 6.4 varias veces tenemos que A es derivadamente equivalente a

$$x \rightarrow v_1 \cdots v_{q-1} \rightarrow v_q \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} u_k \leftarrow \cdots u_1 \leftarrow u_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} w_q \leftarrow w_{q-1} \cdots w_2 \leftarrow w_1$$

y reescribiendo tenemos

$$\begin{bmatrix} u_0^+ & x^+ & w_1^+ \\ w_q^- & v_1^+ & \vdots \\ u_0^- & \vdots & w_q^+ \\ \vdots & v_q^+ & \\ u_k^+ & & \\ v_q^+ & & \\ u_k^- & & \end{bmatrix} \xrightarrow{V_{u_0}} \begin{bmatrix} w_q^- & x^+ & w_1^+ & u_1^- \\ u_1^+ & v_1^+ & \vdots & u_0^- \\ \vdots & \vdots & w_q^+ & \\ u_k^+ & v_q^+ & u_0^+ & \\ v_q^+ & & & \\ u_k^- & & & \end{bmatrix} \xrightarrow{V_{w_q}} \begin{bmatrix} u_1^+ & x^+ & w_1^+ & u_1^- \\ \vdots & v_1^+ & \vdots & w_q^- \\ u_k^+ & \vdots & w_{q-1}^+ & u_0^- \\ v_q^+ & v_q^- & u_0^+ & w_q^+ \\ u_k^- & & & \end{bmatrix}$$

es decir

$$x \rightarrow v_1 \cdots v_{q-1} \rightarrow v_q \xrightarrow{\curvearrowright} u_k \leftarrow \cdots \leftarrow u_2 \leftarrow u_1 \rightarrow w_q \xrightarrow{\curvearrowright} u_0 \leftarrow w_{q-1} \cdots w_2 \leftarrow w_1$$

y aplicando V_{u_1} es derivadamente equivalente a

$$x \rightarrow v_1 \cdots v_{q-1} \rightarrow v_q \xrightarrow{\curvearrowright} u_k \leftarrow \cdots \leftarrow u_2 \rightarrow u_1 \leftarrow w_q \xrightarrow{\curvearrowright} u_0 \leftarrow w_{q-1} \cdots w_2 \leftarrow w_1$$

o bien, renombrando los vértices

$$x \rightarrow v_1 \cdots v_{q-1} \rightarrow v_q \xrightarrow{\curvearrowright} u_k \leftarrow \cdots \leftarrow u_2 \rightarrow u_1 \leftarrow u_0 \xrightarrow{\curvearrowright} w_q \leftarrow w_{q-1} \cdots w_2 \leftarrow w_1$$

Aplicando ahora las transformaciones V_{u_0} y V_{w_q} tenemos

$$x \rightarrow v_1 \cdots v_{b-1} \rightarrow v_b \xrightarrow{\curvearrowright} u_a \leftarrow \cdots \leftarrow u_2 \rightarrow u_1 \rightarrow u_0 \xrightarrow{\curvearrowright} w_q \leftarrow w_{q-1} \cdots w_2 \leftarrow w_1$$

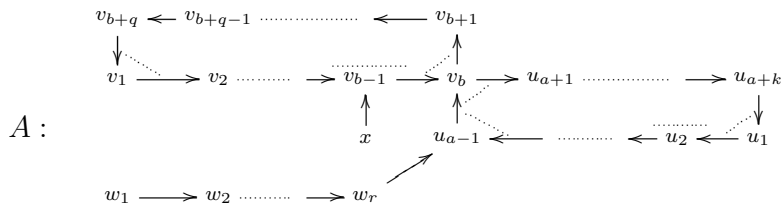
Siguiendo con este procedimiento, después de k pasos obtenemos

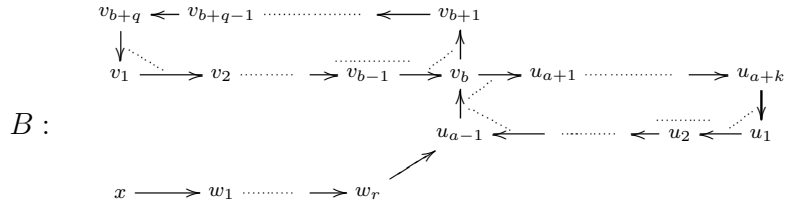
$$x \rightarrow v_1 \cdots v_{q-1} \rightarrow v_q \xrightarrow{\curvearrowright} u_k \rightarrow \cdots \rightarrow u_1 \rightarrow u_0 \xrightarrow{\curvearrowright} w_q \leftarrow w_{q-1} \cdots w_2 \leftarrow w_1$$

que, por la Observación 6.4, es derivadamente equivalente a B . □

Por otro lado, si el vértice que se agrega al álgebra es como en el inciso (2) de la Definición 6.2, y está presente la flecha κ mencionada en la misma, por la Observación 6.4 se reduce todo al caso de un vértice de transición, previamente analizado. Si no es así, debido a las formas normales con las que estamos trabajando y a la Observación 6.14 basta ver el siguiente resultado:

Proposición 6.21. *Las álgebras asociadas a los siguientes carcajes con relaciones son derivadamente equivalentes.*

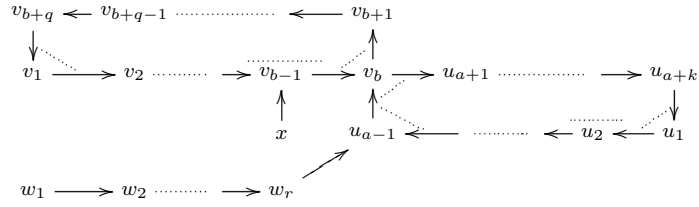




Observación 6.22. $\phi_A = \phi_B = [(k, a + k), (q, b + q), (a + b - 2 + r + 1, r)]$.

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que A es derivadamente equivalente a

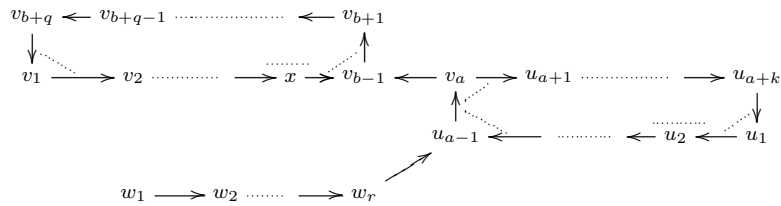


Usaremos el proceso presentado en la demostración anterior tenemos, reescribiendo A y usando transformaciones

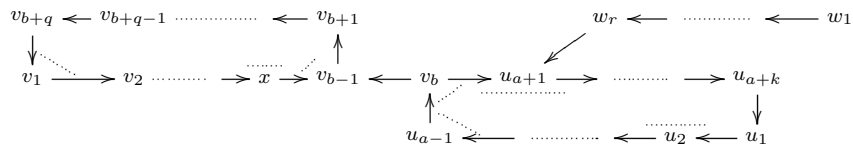
$$\begin{bmatrix} w_1^+ & x^+ & v_1^- & v_2^- & \dots & v_{b-2}^- & u_1^- & u_2^- & \dots & u_{a-2}^- \\ \vdots & v_{b-1}^- & v_2^+ & v_3^+ & \dots & v_{b-1}^+ & u_2^+ & u_3^+ & \dots & u_{a-1}^- \\ w_r^+ & v_b^- & & & & & & & & \\ u_{a-1}^+ & u_{a+1}^+ & & & & & & & & \\ v_b^+ & \vdots & & & & & & & & \\ v_{b+1}^+ & u_{a+k}^+ & & & & & & & & \\ \vdots & u_1^+ & & & & & & & & \\ v_{b+q}^+ & & & & & & & & & \\ v_1^+ & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 F_{(v_{b-1}^-, x^+)} \mapsto \begin{bmatrix} w_1^+ & v_{b-1}^- & v_1^- & v_2^- & \dots & v_{b-2}^- & u_1^- & u_2^- & \dots & u_{a-2}^- \\ \vdots & v_b^- & v_2^+ & v_3^+ & \dots & v_{b-1}^+ & u_2^+ & u_3^+ & \dots & u_{a-1}^- \\ w_r^+ & u_{a+1}^+ & & & & x^+ & & & & \\ u_{a-1}^+ & \vdots & & & & & & & & \\ v_b^+ & u_{a+k}^+ & & & & & & & & \\ v_{b+1}^+ & u_1^+ & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & \\ v_{b+q}^+ & & & & & & & & & \\ v_1^+ & & & & & & & & & \end{bmatrix} \\
 \\
 V_{v_{b-1}} \mapsto \begin{bmatrix} w_1^+ & v_b^- & v_1^- & v_2^- & \dots & v_{a-2}^- & u_1^- & u_2^- & \dots & u_{a-2}^- & x^- \\ \vdots & u_{a+1}^+ & v_2^+ & v_3^+ & \dots & x^+ & u_2^+ & u_3^+ & \dots & u_{a-1}^- & v_{b-1}^- \\ w_r^+ & \vdots & & & & & & & & & \\ u_{a-1}^+ & u_{a+k}^+ & & & & & & & & & \\ v_b^+ & u_1^+ & & & & & & & & & \\ v_{b-1}^- & & & & & & & & & & \\ v_{a+1}^+ & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ v_{b+q}^+ & & & & & & & & & & \\ v_1^+ & & & & & & & & & & \end{bmatrix}
 \end{array}$$

es decir



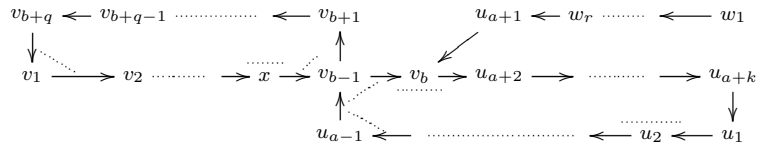
que por el Lema 6.13 y la Observación 6.14 es derivadamente equivalente a



o bien

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 u_{a-1}^+ & w_1^+ & v_1^- & v_2^- & \dots & v_{a-2}^- & u_2^- & \dots & u_{a-2}^- & x^- & v_a^- \\
 v_b^+ & \vdots & v_2^+ & v_3^+ & \dots & x^+ & u_3^+ & \dots & u_{a-1}^- & v_{b-1}^+ & u_{a+1}^- \\
 v_{b-1}^- & w_r^+ & & & & & & & & & \\
 v_{b+1}^+ & u_{a+1}^+ & & & & & & & & & \\
 \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\
 v_{b+q}^+ & u_{a+k}^+ & & & & & & & & & \\
 v_1^+ & u_1^+ & & & & & & & & & \\
 & u_2^+ & & & & & & & & &
 \end{array} \right] \\
 \\
 V_{v_a} \mapsto \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 u_{a-1}^+ & w_1^+ & v_1^- & v_2^- & \dots & v_{a-2}^- & u_2^- & \dots & u_{a-2}^- & x^- & \\
 v_{b-1}^- & \vdots & v_2^+ & v_3^+ & \dots & x^+ & u_3^+ & \dots & u_{a-1}^- & v_{b-1}^- & \\
 v_{b+1}^+ & w_r^+ & & & & & & & & & v_b^+ \\
 \vdots & u_{a+1}^+ & & & & & & & & & \\
 v_{b+q}^+ & v_b^- & & & & & & & & & \\
 v_1^+ & u_{a+2}^+ & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & \\
 & u_{a+k}^+ & & & & & & & & & \\
 & u_1^+ & & & & & & & & & \\
 & u_2^+ & & & & & & & & &
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

es decir



que por el Lema 6.13 y la Observación 6.14 es derivadamente equivalente a B .

□

CAPÍTULO 7

Justificación de la clasificación

En el presente capítulo se desarrollan las pruebas por inducción de los Teoremas 1.18 y 1.19, se usan para ello los lemas y proposiciones del Capítulo 6. A continuación se muestra la prueba del Teorema 1.18, recordemos su enunciado:

Si $A = kQ / \langle \mathcal{P} \rangle$ es un álgebra gentil, con Q un carcaj con dos ciclos, entonces $\#\phi_A \in \{1, 3\}$.

DEMOSTRACIÓN:

Haremos la prueba por inducción sobre el número de vértices. Para $\#Q_0 \leq 5$ presentamos en el Capítulo 8 los cálculos explícitos de ϕ_A de cada álgebra A con dichas características, y en todos los casos $\#\phi_A \in \{1, 3\}$. Consideremos entonces $A = kQ / \langle \mathcal{P} \rangle$ un álgebra gentil, con Q un carcaj conexo de dos ciclos y $\#Q_0 \geq 6$. Sabemos por la Proposición 6.8 que existe $x \in Q'_0$ del siguiente tipo:

(1)

$$\left) u \xrightarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} v \left($$

con x de grado 2

(2)

$$\left) u \xrightarrow{\alpha} w \xrightarrow{\beta} v \left(\begin{array}{c} x \\ \downarrow \eta \end{array} \right)$$

con α y β pertenecientes a un ciclo y w de grado 3

(3)

$$\left) u \xrightarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} v \left($$

con α y β pertenecientes a un ciclo y x de grado 2

y si no aparece ningún vértice x del tipo (1) o (2), por la Proposición 6.9 tenemos que $\#\phi_A = 1$ o bien A es derivadamente equivalente a uno de los representantes (1), (2) o (3) y entonces $\#\phi_A \in \{1, 3\}$.

Trabajemos entonces con el caso en que aparece un vértice x del tipo (1) o (2). Consideramos el álgebra $A \setminus \{x\}$. Sabemos, por la Observación 6.3 que $A \setminus \{x\}$ es un álgebra gentil asociada a un carcaj de dos ciclos con un vértice menos que el que define a A ; así, usando la hipótesis de inducción $\#\phi_{A \setminus \{x\}} \in \{1, 3\}$, es decir, el algoritmo para calcular los invariantes de $A \setminus \{x\}$ da lugar a tres parejas de números naturales. Analizaremos las diferencias que se presentan al desarrollar ahora el algoritmo para calcular los invariantes asociados a A .

Caso 1.-

Observamos que el proceso sólo se modifica cuando α y β se recorren en sentido contrario a las flechas, es decir, cuando aparecen como parte de hilos prohibidos. Sean $\Pi_\alpha = \alpha\rho_s \dots \rho_1$ y $\Pi_\beta = \gamma_r \dots \gamma_1\beta$ los hilos prohibidos de A que involucran a α y a β respectivamente, \hat{H} el hilo permitido tal que $s(\hat{H}) = s(\Pi_\alpha)$ y $\sigma(\hat{H}) = -\sigma(\Pi_\alpha)$, y H el hilo permitido tal que $e(H) = e(\Pi_\beta)$ y $\eta(H) = -\eta(\Pi_\beta)$. En el algoritmo tenemos:

$$\begin{aligned} H_i^{A \setminus \{x\}} &= H & (\Pi_i^{A \setminus \{x\}})^{-1} &= (\gamma_r \dots \gamma_1 \alpha' \rho_s \dots \rho_1)^{-1} \\ H_{i+1}^{A \setminus \{x\}} &= \hat{H} \end{aligned}$$

para algún natural i , donde α' es una flecha como en la Definición 6.2. Esta etapa del algoritmo da lugar a una pareja (n, m) . En el correspondiente algoritmo para A tenemos

$$\begin{aligned} H_i^A &= H & (\Pi_i^A)^{-1} &= (\Pi_\beta)^{-1} = (\gamma_r \dots \gamma_1 \beta)^{-1} \\ H_{i+1}^A &= 1_x & (\Pi_{i+1}^A)^{-1} &= (\Pi_\alpha)^{-1} = (\alpha\rho_s \dots \rho_1)^{-1} \\ H_{i+2}^A &= \hat{H} \end{aligned}$$

y por tanto obtenemos la pareja $(n+1, m+1)$.

Caso 2.-

Observamos que el proceso sólo se modifica cuando α y β se recorren en el sentido de las flechas, es decir, cuando aparecen como parte de hilos permitidos. Sean $H_\alpha = \alpha\rho_s \dots \rho_1$ y $H_\beta = \gamma_r \dots \gamma_1\beta$ los hilos permitidos de A que involucran a α y a β respectivamente. En el algoritmo tenemos:

$$\begin{aligned} H_i^{A \setminus \{x\}} &= H_\alpha = \alpha\rho_s \dots \rho_1 & (\Pi_i)^{-1} &= 1_w \\ H_{i+1}^{A \setminus \{x\}} &= H_\beta = \gamma_r \dots \gamma_1\beta \end{aligned}$$

para algún natural i , y esta etapa del algoritmo da lugar a una pareja (n, m) . En el correspondiente algoritmo para A tenemos

$$\begin{aligned} H_i^A &= H_\alpha = \alpha \rho_s \dots \rho_1 & (\Pi_i^A)^{-1} &= \eta^{-1} \\ H_{i+1}^A &= 1_x & (\Pi_{i+1}^A)^{-1} &= 1_x \\ H_{i+2}^A &= \gamma_r \dots \gamma_1 \beta \eta \end{aligned}$$

y por tanto obtenemos la pareja $(n+1, m+1)$.

De este modo, $\#\phi_{A \setminus \{x\}} = \#\phi_A$, de hecho aparecen exactamente las mismas parejas en el algoritmo para calcular ϕ_A , salvo una, que difiere de la que aparece en el cálculo de $\phi_{A \setminus \{x\}}$ por un sumando $(1, 1)$. \square

Ahora, daremos la prueba del Teorema 1.19 que permite la clasificación de álgebras gentiles con carcajes de dos ciclos y tres series de componentes características de acuerdo a equivalencia derivada. Antes recordemos el enunciado de este teorema:

Sean $A = \mathbf{k}Q / \langle \mathcal{P} \rangle$ y $B = \mathbf{k}Q' / \langle \mathcal{P}' \rangle$ álgebras gentiles, con Q y Q' carcajes de dos ciclos. Si $\#\phi_A = 3$ entonces,

A y B son derivadamente equivalentes si y sólo si $\phi_A = \phi_B$.

DEMOSTRACIÓN:

Para $\#Q_0 \leq 5$ tenemos los cálculos explícitos de la clasificación de las álgebras gentiles $A = \mathbf{k}Q / \langle \mathcal{P} \rangle$, con carcajes de dos ciclos, en clases de equivalencia derivada que se presenta en el Capítulo 8. En este caso observamos que el resultado se cumple y de hecho, para $\#Q_0 = 5$ dadas dos álgebras con estas características, que sean derivadamente equivalentes, lo son mediante transformaciones elementales, es decir, existe una composición de transformaciones elementales que convierte a una en la otra.

Consideremos ahora un álgebra gentil $A = \mathbf{k}Q / \langle \mathcal{P} \rangle$ con Q un carcaj de dos ciclos, $\#Q_0 \geq 6$ y $\#\phi_A = 3$. Probaremos que es derivadamente equivalente a un representante de los descritos en el Capítulo 2. Si existe $x \in Q_0$ como en (1) o (2) de la Proposición 6.8 consideramos el álgebra $A \setminus \{x\}$, ver la Definición 6.2. Sabemos que $A \setminus \{x\}$ es un álgebra gentil con un carcaj de dos ciclos, un vértice menos que A y, debido a la prueba del Teorema 1.18, con exactamente tres series de componentes. Podemos aplicar entonces la hipótesis de inducción a $A \setminus \{x\}$, y concluir que es derivadamente equivalente a uno de los representantes descritos en el Capítulo 2, llamémosle $R_{A \setminus \{x\}}$ a dicho representante; más aún, existe una composición de transformaciones elementales T , de modo que $T(A \setminus \{x\}) = R_{A \setminus \{x\}}$. Por el Corolario 6.11, sabemos que A es derivadamente equivalente a un álgebra $\hat{R}_A = \mathbf{k}Q' / \langle \mathcal{P}' \rangle$ de modo que el correspondiente $x \in Q'_0$ es como en la Definición 6.2 y tal que $T(A \setminus$

$\{x\}) = \hat{R}_A \setminus \{x\}$, es decir $R_{A \setminus \{x\}} = \hat{R}_A \setminus \{x\}$. Tenemos entonces que \hat{R}_A se obtiene del representante $R_{A \setminus \{x\}}$ agregando un vértice como el de la Definición 6.2. Por los resultados del capítulo anterior, o bien \hat{R}_A es ya un representante de los descritos en el Capítulo 2 o se puede modificar mediante transformaciones elementales hasta llevarlo a uno de ellos, con lo cual se concluye la prueba.

□

CAPÍTULO 8

Apéndice

1. Programa de GAP

77

En la primera parte de este apéndice se muestra por escrito el programa que se desarrolló en Groups Algorithms and Programming para realizar los cálculos necesarios para la investigación. La versión que se usó de GAP fue la del 18 de mayo del 2000.

```
Listan:=function(n)
  local B;
  B:=[1..n];
  return B;
end;
```

```
Parte:=function(A,i)
  local B,D,f,j;
  f:=1;
  B:=0;
  for j in [1..i] do
    D:=B+A[f];
    f:=f+1;
    B:=D;
  od;
  return B;
end;
```

```

Parten:=function(A,i)
  local B;
  B:=Listan(Parte(A,i));
  SubtractSet(B,Listan(Parte(A,i-1)));
  return B;
end;
Particion:=function(A)
  local B,D,j;
  B:=[];
  for j in [1..Length(A)] do
    D:=Parten(A,j);
    Add(B,D);
  od;
  return B;
end;

Listadeparticiones:=function(n)
  local B;
  B:=List(Partitions(n),Particion);
  return B;
end;

Listadeparticionesbi:=function(n)
  local B,C,i;
  B:=[];
  C:=Listadeparticiones(n);
  for i in [1..Length(C)] do
    if Length(C[i])=(1/2)*n-1 then
      Add(B,C[i]);
    fi;
  od;
  return B;
end;

```

```

PartBuena:=function(A)
  local B;
  B:=IsSubset(Cartesian(Listan(20),Listan(20)),A);
  return B;
end;
RelacionesBuenas:=function(n)
  local B;
  B:=Filtered(PartitionsSet(Listan(n)),PartBuena);
  return B;
end;
Todaspart:=function(n)
  local B;
  B:=Cartesian(Listadeparticiones(n),
    RelacionesBuenas(n));
  return B;
end;
Todaspartbi:=function(n)
  local B;
  B:=Cartesian(Listadeparticionesbi(n),
    RelacionesBuenas(n));
  return B;
end;
Todaspartdeforma:=function(A)
  local B,f,C;
  C:=Particion(A);
  f:=Length(C);
  B:=Cartesian([C],
    RelacionesBuenas(C[f][Length(C[f])]));
  return B;
end;
Forma:=function(A)
  local B,D,j;

```

```

B:=[];
for j in [1..Length(A[1])] do
  D:=Length(A[1][j]);
  Add(B,D);
od;
return B;
end;
Sumparcial:=function(A,n)
local f,d,i;
f:=0;
for i in [1..n] do
  d:=Forma(A)[i];
  f:=f+d;
od;
return f;
end;
Enterop:=function(A)
local C,g,n;
C:=Particion(A);
g:=Length(A);
n:=Sumparcial([C,1,1],g);
return n;
end;
Bip:=function(A)
local G,Flechas,i,j,k,f,r;
G:=NullGraph(Group(()),6*Length(A[2]));
Flechas:=[];
f:=2*Length(A[2])+1;
for j in [1..Length(A[1][1])-1] do
  Append(Flechas,[[j,f],[f,j+1]]);
  f:=f+1;
od;

```

```

for i in [2..Length(A[1])] do
  for j in [1..Length(A[1][i])-1] do
    Append
      (Flechas,[[j+Sumparcial(A,i-1),f],
        [f,j+Sumparcial(A,i-1)+1]]);
    f:=f+1;
  od;
od;
for k in [1..Length(A[2])] do
  Append(Flechas,
    [[A[2][k][1],f],[f,A[2][k][2]]]);
  f:=f+1;
  Append(Flechas,[[A[2][k][2],f],
    [f,A[2][k][1]]]);
  f:=f+1;
od;
for r in [1..Length(A[1])] do
  Append(Flechas,[[f,A[1][r][1]]]);
  f:=f+1;
od;
AddEdgeOrbits(G,Flechas);
return G;
end;
Relpart:=function(A)
local B,D,E,j;
B:=[];
for j in [1..Length(A[2])] do
  D:=A[2][j][1];
  Add(B,D);
  E:=A[2][j][2];
  Add(B,E);
od;

```

```

return B;
end;
Todasparticiones0:=function(n)
local B,f,i,j;
B:=Todaspart(n);
f:=1;
for i in [1.. Length(B)] do
if Length(B[i])=2 then
Add(B[i],f);
for j in [i+1..Length(B)] do
if Length(B[j])=2 and
Forma(B[i])=Forma(B[j]) and
IsIsomorphicGraph
(UnderlyingGraph(Bip(B[i])),
UnderlyingGraph(Bip(B[j])),false)
then
Add(B[j],f);
fi;
od;
f:=f+1;
fi;
od;
return B;
end;
Todasparticiones:=function(n)
local B;
B:=Todasparticiones0(n);
Read("borra.g");
return B;
end;
Todasparticionesdeforma0:=function(A)
local B,f,i,j;

```

```

B:=Todaspartdeforma(A);
f:=1;
for i in [1.. Length(B)] do
if Length(B[i])=2 then
Add(B[i],f);
for j in [i+1..Length(B)] do
if Length(B[j])=2 and IsIsomorphicGraph
(UnderlyingGraph(Bip(B[i])),
UnderlyingGraph(Bip(B[j])),false)
then
Add(B[j],f);
fi;
od;
f:=f+1;
fi;
od;
return B;
end;
Todasparticionesdeforma:=function(A)
local B;
B:=Todasparticionesdeforma0(A);
Read("borra.g");
return B;
end;
Extremos:=function(A)
local B,i,j;
B:=[1];
for i in [1..Length(Forma(A))] do
Add(B,A[1][i][Length(A[1][i])]);
od;
for j in [1..Length(Forma(A))] do
Add(B,A[1][i][1]);

```

```

od;
B:=Union([B]);
return B;
end;
Extremoss:=function(A)
local B,i;
B:=[1];
for i in [1..Length(Forma(A))] do
Add(B,A[1][i][1]);
od;
B:=Union([B]);
return B;
end;
Extremosi:=function(A)
local B,i;
B:=[];
for i in [1..Length(Forma(A))] do
Add(B,A[1][i][Length(A[1][i])]);
od;
B:=Union([B]);
return B;
end;
Nexti:=function(A)
local B,D,i;
B:=Extremosi(A);
D:=Listan(2*Length(A[2]));
SubtractSet(D,B);
return D;
end;
Nexts:=function(A)
local B,D,i;
B:=Extremoss(A);

```

```

D:=Listan(2*Length(A[2]));
SubtractSet(D,B);
return D;
end;
Next:=function(A)
local B,D,i,C;
B:=Extremoss(A);
C:=Extremosi(A);
D:=Listan(2*Length(A[2]));
SubtractSet(D,B);
SubtractSet(D,C);
return D;
end;
Verticesbuenos:=function(A)
local B,D,i;
B:=[];
D:=Listan(2*Length(A[2]));
for i in [1..Length(A[2])] do
if A[2][i][1] in Extremosi(A) or
A[2][i][2] in Extremosi(A) then
Add(B,A[2][i][1]);
Add(B,A[2][i][2]);
fi;
od;
SubtractSet(D,B);
return D;
end;
lazos:=function(A)
local D,B,i;
D:=Next(A);
B:=[];
for i in D do

```



```

        if IsSubset(A[2],[[i-1,i]]) or
        IsSubset(A[2],[[i,i-1]]) then
            Add(B,i);
        fi;
    od;
    return B;
end;
verticesbuenos:=function(A)
    local B,i,f;
    B:=[];
    f:=0;
    for i in [1..Length(A[2])] do
        if A[2][i][1] in Nexti(A) and A[2][i][2]
        in Nexti(A) then
            if A[2][i][2] in lazos(A) then
                f:=f+1;
            fi;
            if f=0 then
                Add(B,A[2][i][2]);
            fi;
        fi;
    od;
    return B;
end;
Dondeesta:=function(A,i)
    local f,L,k;
    f:=0;
    L:=Forma(A);
    for k in [1..Length(L)] do
        if IsSubset(A[1][k],[i]) then
            f:=f+k;
        fi;
    end;
end;

```

```

    od;
    return f;
end;
dondeesta:=function(A,i)
    local f,s,k;
    f:=0;
    s:=Dondeesta(A,i);
    for k in [1..Length(A[1][s])] do
        if A[1][s][k]=i then
            f:=f+k;
        else
            f:=f;
        fi;
    od;
    return f;
end;
Ins:=function(A,i,k)
    local x,l,C,r,H,s,D,t,E,p,j,m;
    l:=Dondeesta(A,k);
    C:=[];
    for r in [1..l-1] do
        Add(C,A[1][r]);
    od;
    H:=[];
    for s in [1+1..Length(Forma(A))] do
        Add(H,A[1][s]);
    od;
    x:=(Length(A[1][l])+A[1][l][1]-1-k);
    if x<>0 then
        D:=[];
        for t in [1..k-A[1][l][1]+1] do
            Add(D,A[1][l][t]);
        end;
    end;
end;

```

```

od;
E:=[];
for p in [1..(Length(A[1][1])-k+A[1][1][1]-1)]
do
    Add(E,A[1][1][p+k-A[1][1][1]+1]);
od;
od;
Add(D,i);
Append(D,E);
fi;
if x=0 then
    D:=[];
    for m in [1..Length(A[1][1])] do
        Add(D,A[1][1][m]);
    od;
    Add(D,i);
fi;
Add(C,D);
Append(C,H);
G:=[];
Add(G,C);
for j in [2..Length(A)] do
    Add(G,A[j]);
od;
return(G);
end;
ins:=function(A,i,k)
local l,C,r,H,s,D,t,E,p,j,n;
l:=Dondeesta(A,k);
n:=dondeesta(A,k);
C:=[];
for r in [1..l-1] do
    Add(C,A[1][r]);

```

```

od;
H:=[];
for s in [1+1..Length(Forma(A))] do
    Add(H,A[1][s]);
od;
D:=[];
for t in [1..n] do
    Add(D,A[1][1][t]);
od;
Add(D,i);
for p in [1..Length(A[1][1])-n] do
    Add(D,A[1][1][p+n]);
od;
Add(C,D);
Append(C,H);
G:=[];
Add(G,C);
for j in [2..Length(A)] do
    Add(G,A[j]);
od;
return(G);
end;
Mueve:=function(A,i,k)
local t,p,H,l,B,C,j,D,E,r,s,F,G;
H:=A;
l:=Dondeesta(H,i);
B:=Ins(H,i,k);
C:=[];
for j in [2..Length(B)] do
    Add(C,B[j]);
od;
D:=[];

```

```

for r in [1..l-1] do
  Add(D,B[1][r]);
od;
E:=[];
for s in [1+1..Length(Forma(H))] do
  Add(E,B[1][s]);
od;
F:=[];
for t in [1..i-H[1][1][1]] do
  Add(F,H[1][1][t]);
od;
for p in [1..(Length(H[1][1])-i+A[1][1][1]-1)]
do
  Add(F,H[1][1][p+i-H[1][1][1]+1]);
od;
Add(D,F);
Append(D,E);
G:=[D];
Append(G,C);
return(G);
end;
mueve:=function(A,i,k)
local t,p,H,l,B,C,j,D,E,r,s,F,G,m,n,u,v;
H:=A;
l:=Dondeesta(H,i);
B:=ins(H,i,k);
m:=dondeesta(H,i);
n:=Dondeesta(H,k);
u:=dondeesta(H,k);
if l=n and u<m then
  v:=m+1;
else

```

```

  v:=m;
fi;
C:=[];
for j in [2..Length(B)] do
  Add(C,B[j]);
od;
D:=[];
for r in [1..l-1] do
  Add(D,B[1][r]);
od;
E:=[];
for s in [1+1..Length(Forma(B))] do
  Add(E,B[1][s]);
od;
F:=[];
for t in [1..v-1] do
  Add(F,B[1][1][t]);
od;
for p in [1..(Length(B[1][1])-v)] do
  Add(F,B[1][1][p+v]);
od;
Add(D,F);
Append(D,E);
G:=[D];
Append(G,C);
return(G);
end;
Bip20:=function(A)
local G,Flechas,i,j,k,f;
G:=NullGraph(Group(()),4*Length(A[2]));
Flechas:=[];
f:=2*Length(A[2])+1;

```

```

for j in [1..Length(A[1][1])-1] do
  Append(Flechas, [[A[1][1][j], A[1][1][j+1]]]);
od;
for i in [2..Length(A[1])] do
  for j in [1..Length(A[1][i])-1] do
    Append(Flechas, [[A[1][i][j], A[1][i][j+1]]]);
  od;
od;
for k in [1..Length(A[2])] do
  Append(Flechas, [[A[2][k][1], f], [f, A[2][k][2]]]);
  f:=f+1;
  Append(Flechas, [[A[2][k][2], f], [f, A[2][k][1]]]);
  f:=f+1;
od;
AddEdgeOrbits(G, Flechas);
return G;
end;
Bip2:=function(A)
  local B;
  B:=Bip20(A);
  Read("borra.g");
  return B;
end;
Todaspartc0:=function(n)
  local B,C,i;
  B:=Todaspart(n);
  C:=[];
  for i in [1.. Length(B)] do
    if IsConnectedGraph(UnderlyingGraph
      (Bip2(B[i]))) then
      Add(C,B[i]);
    fi;
  od;
  return C;
end;
Todaspartcdeforma0:=function(A)
  local B,C,i;
  B:=Todaspartdeforma(A);
  C:=[];
  for i in [1.. Length(B)] do
    if IsConnectedGraph(UnderlyingGraph
      (Bip2(B[i]))) then
      Add(C,B[i]);
    fi;
  od;
  return C;
end;
Todaspartcdeforma:=function(A)
  local B;
  B:=Todaspartcdeforma0(A);
  Read("borra.g");
  return B;
end;
Todasparticionescdeforma0:=function(A)
  local B,f,i,j;
  B:=Todaspartcdeforma(A);
  f:=1;
  for i in [1.. Length(B)] do

```

```

    if Length(B[i])=2 then
        Add(B[i],f);
        for j in [i+1..Length(B)] do
            if Length(B[j])=2 and IsIsomorphicGraph
                (Bip2(B[i]),Bip2(B[j]),false) then
                Add(B[j],f);
            fi;
        od;
        f:=f+1;
    fi;
od;
return B;
end;
Todasparticionescdeforma:=function(A)
local B;
B:=Todasparticionescdeforma0(A);
Read("borra.g");
return B;
end;
todasparticiones0:=function(n)
local B,f,i,j;
B:=Todaspart(n);
f:=1;
for i in [1.. Length(B)] do
    if Length(B[i])=2 then
        Add(B[i],f);
        for j in [i+1..Length(B)] do
            if Length(B[j])=2 and
                Forma(B[i])=Forma(B[j]) and
                IsIsomorphicGraph
                    (Bip2(B[i]),Bip2(B[j]),false) then
                Add(B[j],f);
            fi;
        od;
        f:=f+1;
    fi;
od;
return B;
end;
fi;
od;
f:=f+1;
fi;
end;
return B;
end;
todasparticiones:=function(n)
local B;
B:=todasparticiones0(n);
Read("borra.g");
return B;
end;
end;
todasparticionesdeforma0:=function(A)
local B,f,i,j;
B:=Todaspartdeforma(A);
f:=1;
for i in [1.. Length(B)] do
    if Length(B[i])=2 then
        Add(B[i],f);
        for j in [i+1..Length(B)] do
            if Length(B[j])=2 and IsIsomorphicGraph
                (UnderlyingGraph(Bip2(B[i])),
                UnderlyingGraph(Bip2(B[j])),false)
            then
                Add(B[j],f);
            fi;
        od;
        f:=f+1;
    fi;
od;
return B;
end;

```

```

Read("borra.g");
end;
todasparticionesdeforma:=function(A)
local B;
B:=todasparticionesdeforma0(A);
Read("borra.g");
return B;
end;
todasparticionesc0:=function(n)
local B,f,i,j;
B:=Todaspartc(n);
f:=1;
for i in [1.. Length(B)] do
if Length(B[i])=2 then
Add(B[i],f);
for j in [i+1..Length(B)] do
if Length(B[j])=2 and
Forma(B[i])=Forma(B[j]) and
IsIsomorphicGraph(Bip2(B[i]),
Bip2(B[j]),false) then
Add(B[j],f);
fi;
od;
f:=f+1;
fi;
od;
return B;
end;
todasparticionesc:=function(n)
local B;
B:=todasparticionesc0(n);
Read("borra.g");

```

```

return B;
end;
ctodasparticionesc:=function(n)
local B,C,i;
B:=[];
C:=todasparticionesc(n);
Add(B,C[1]);
for i in [2..Length(C)] do
if C[i][3]>B[Length(B)][3] then
Add(B,C[i]);
fi;
od;
return B;
end;
todasparticionescdeforma0:=function(A)
local B,f,i,j;
B:=Todaspartcdeforma(A);
f:=1;;
for i in [1.. Length(B)] do
if Length(B[i])=2 then
Add(B[i],f);
for j in [i+1..Length(B)] do
if Length(B[j])=2 and IsIsomorphicGraph
(Bip2(B[i]),Bip2(B[j]),false)
then
Add(B[j],f);
fi;;
od;
f:=f+1;;
fi;
od;
return B;

```

```

    Exec("bash borrar.bash");
    end;
todasparticionescdeforma:=function(A)
    local B;
    B:=todasparticionescdeforma0(A);
    Read("borra.g");
    return B;
end;
vecino:=function(A,i)
    local j,g,h,f;
    g:=0;
    h:=0;
    for j in Listan(Length(A[2])*2) do
        if IsSubset(A[2],[[j,i]]) then
            g:=g+j;
        else g:=g;
        fi;
        if IsSubset(A[2],[[i,j]]) then
            h:=h+j;
        else h:=h;
        fi;
    od;
    f:=g+h;
    return f;
end;
transvertice:=function(A,i)
    local j,k,r,B,C;
    j:=vecino(A,i);
    if i in Next(A) then
        if IsSubset(A[2],[[i-1,i+1]]) or
        IsSubset(A[2],[[i+1,i-1]]) then
            if j in Next(A) then

```

```

                if IsSubset(A[2],[[j-1,j+1]]) or
                IsSubset(A[2],[[j+1,j-1]]) then
                    B:=A;
                else
                    k:=vecino(A,i+1);
                    B:=mueve(A,i,k);
                fi;
            else
                k:=vecino(A,i+1);
                B:=mueve(A,i,k);
            fi;
        else
            if IsSubset(A[2],[[i-1,j+1]]) or
            IsSubset(A[2],[[j+1,i-1]]) then
                if j in Next(A) then
                    if IsSubset(A[2],[[i+1,j-1]]) or
                    IsSubset(A[2],[[j-1,i+1]]) then
                        B:=A;
                    else
                        k:=vecino(A,i+1);
                        B:=mueve(A,j,k);
                    fi;
                else
                    k:=vecino(A,i+1);
                    B:=mueve(A,j,k);
                fi;
            else
                k:=vecino(A,i+1);
                r:=vecino(A,j+1);
                C:=mueve(A,i,k);
                B:=mueve(C,j,r);
            fi;
        fi;
    fi;
end;

```

```

fi;
else
if j in Next(A) then
  if IsSubset(A[2],[[j-1,j+1]]) or
  IsSubset(A[2],[[j+1,j-1]]) then
    B:=A;
  else
    if IsSubset(A[2],[[j-1,i+1]]) or
    IsSubset(A[2],[[i+1,j-1]]) then
      B:=A;
    else
      k:=vecino(A,i+1);
      r:=vecino(A,j+1);
      C:=mueve(A,i,k);
      B:=mueve(C,j,r);
    fi;
  fi;
else
k:=vecino(A,i+1);
r:=vecino(A,j+1);
C:=mueve(A,i,k);
B:=mueve(C,j,r);
fi;
return B;
end;
Transvertice:=function(A,i)
local u,v,l,t,j,k,r,B,C;
j:=vecino(A,i);
l:=Dondeesta(A,i);
t:=dondeesta(A,i);
u:=Dondeesta(A,j);

```

```

v:=dondeesta(A,j);
k:=vecino(A,A[1][l][t+1]);
r:=vecino(A,A[1][u][v+1]);
C:=mueve(A,i,k);
B:=mueve(C,j,r);
return B;
end;
quita:=function(A,i,k)
local l,C,r,H,s,D,t,E,p,j,n;
l:=Dondeesta(A,k);
n:=dondeesta(A,k);
C:=[];
for r in [1..l-1] do
  Add(C,A[1][r]);
od;
H:=[];
for s in [l+1..Length(Forma(A))] do
  Add(H,A[1][s]);
od;
D:=[];
for t in [1..n] do
  Add(D,A[1][l][t]);
od;
Add(D,i);
for p in [1..Length(A[1][l])-n] do
  Add(D,A[1][l][p+n]);
od;
Add(C,D);
Append(C,H);
G:=[];
Add(G,C);
for j in [2..Length(A)] do

```



```

        Add(G,A[j]);
    od;
    return(G);
end;
Quita0:=function(A,i)
    local G,Flechas,Flechas2,j,r,s;
    G:=Bip2(A);
    Flechas:=[];
    Flechas2:=[];
    j:=vecino(A,i);
    r:=Dondeesta(A,j);
    s:=dondeesta(A,j);
    if j in Nexti(A) then
        Append(Flechas,[[j,A[1][r][s+1]]]);
    fi;
    if j in Nexts(A) then
        Append(Flechas,[[A[1][r][s-1],j]]);
    fi;
    if j in Nexts(A) and j in Nexti(A) then
        Append(Flechas2,[[A[1][r][s-1],A[1][r][s+1]]]);
    fi;
    RemoveEdgeOrbits(G,Flechas);
    AddEdgeOrbits(G,Flechas2);
    return G;
end;
Quita:=function(A,i)
    local B;
    B:=Quita0(A,i);
    Read("borra.g");
    return B;
end;

```

```

vbuenos0:=function(A)
    local B,D,i,C,E,U,G,j,f;
    D:=Nexti(A);
    B:=[];
    C:=Extremoss(A);
    E:=Extremosi(A);
    G:=[];
    for i in [1..Length(D)] do
        if IsConnectedGraph
            (UnderlyingGraph(Quita(A,D[i]))) then
            Add(B,D[i]);
        fi;
    od;
    SubtractSet(D,B);
    SubtractSet(C,E);
    for j in Nexti(A) do
        f:=vecino(A,j);
        if f in Extremoss(A) and
            f in Extremosi(A) then
            Add(G,j);
        fi;
    od;
    U:=Union(D,G);
    return U;
end;
vbuenos:=function(A)
    local B;
    B:=vbuenos0(A);
    Read("borra.g");
    return B;
end;

```

```

Transflecha:=function(A,i)
  local l,t,k,C;
  l:=Dondeesta(A,i);
  t:=dondeesta(A,i);
  k:=vecino(A,A[1][1][t+1]);
  C:=mueve(A,i,k);
  return C;
end;
Translazo:=function(A,i)
  local l,t,k,B,C,D;
  l:=Dondeesta(A,i);
  t:=dondeesta(A,i);
  k:=vecino(A,A[1][1][t+1]);
  C:=mueve(A,i,k);
  D:=mueve(C,A[1][1][t+1],i);
  B:=mueve(D,k,A[1][1][t+1]);
  return B;
end;
clases:=function(n)
  local A,f,D,i,C,j,b,F,k,l,I,J,u,r,v,t,E,R,H,
  w,q,M,N,T,x,y,z;
  A:=ctodasparticionesc(n);
  f:=1;
  D:=[];
  T:=[];
  for i in [1.. Length(A)] do
    x:=0;
    y:=0;
    z:=0;
    C:=A[i];
    for j in verticesbuenos(A[i]) do
      b:=Transvertice(A[i],j);

```

```

F:=Forma(b);
for k in [1..Length(A)] do
  if x=0 then
    if IsEqualSet(Forma(A[k]),F) and
    IsIsomorphicGraph(Bip2(A[k]),
    Bip2(b),false) then
      Add(C,A[k]);
      x:=1;
      Add(T,k);
    fi;
  fi;
od;
for l in vbuenos(A[i]) do
  b:=Transflecha(A[i],l);
  I:=Forma(b);
  for u in [1..Length(A)] do
    if y=0 then
      if IsEqualSet(Forma(A[u]),I) and
      IsIsomorphicGraph(Bip2(A[u]),
      Bip2(b),false) then
        Add(C,A[u]);
        y:=1;
        Add(T,u);
      fi;
    fi;
  od;
od;
for r in lazos(A[i]) do
  b:=Translazo(A[i],r);
  J:=Forma(b);
  for v in [1..Length(A)] do

```

```

        if z=0 then
            if IsEqualSet(Forma(A[v]),J) and
               IsIsomorphicGraph(Bip2(A[v]),
               Bip2(b),false) then
                Add(C,A[v]);
                z:=1;
                Add(T,v);
            fi;
        fi;
    od;
od;
Add(D,C);
E:=[];
R:=[];
for t in [1..Length(D)] do
    H:=IntersectionSet(C,D[t]);
    if Length(H)>0 then
        Add(E,t);
        Add(R,D[t]);
    fi;
od;
K:=[];
for w in [1..Length(E)] do
    Add(K,D[E[w]]);
od;
M:=Union(R);
D:=Difference(D,R);
Add(D,M);
od;
return D;
end;

```

```

clasesrr:=function(n)
    local A,f,D,i,C,j,b,F,k,l,I,J,u,r,v,t,E,R,H,
           w,q,M,N,T,x,y,z,L,S,X,Y,Z;
    A:=ctodasparticionesc(n);
    f:=1;
    D:=[];
    T:=[];
    x:=0;
    y:=0;
    z:=0;
    for i in [1.. Length(A)] do
        C:=A[i];
        L:=[];
        for j in verticesbuenos(A[i]) do
            b:=Transvertice(A[i],j);
            F:=Forma(b);
            for k in [1..Length(A)] do
                if x=0 then
                    if Forma(A[k])=F and
                       A[k][2]=b[2] and
                       IsIsomorphicGraph(Bip2(A[k]),
                       Bip2(b),false) then
                        Add(C,A[k]);
                        x:=1;
                        Add(L,k);
                    fi;
                fi;
            od;
        od;
        for l in vbuenos(A[i]) do
            b:=Transflecha(A[i],l);
            I:=Forma(b);

```

```

for u in [1..Length(A)] do
  if y=0 then
    if Forma(A[u])=I and
      A[u][2]=b[2] and
      IsIsomorphicGraph(Bip2(A[u]),
        Bip2(b),false) then
      Add(C,A[u]);
      y:=1;
      Add(L,u);
    fi;
  fi;
od;
for r in lazos(A[i]) do
  b:=Translazo(A[i],r);
  J:=Forma(b);
  for v in [1..Length(A)] do
    if z=0 then
      if Forma([v])=J and
        A[v][2]=b[2] and
        IsIsomorphicGraph(Bip2(A[v]),
          Bip2(b),false) then
        Add(C,A[v]);
        z:=1;
        Add(L,v);
      fi;
    fi;
  od;
od;
Add(D,C);
Add(T,L);
E:=[];

```

```

R:=[];
S:=[];
for t in [1..Length(D)] do
  H:=IntersectionSet(C,D[t]);
  if Length(H)>0 then
    Add(E,t);
    Add(R,D[t]);
    Add(S,T[t]);
  fi;
od;
K:=[];
Z:=[];
for w in [1..Length(E)] do
  Add(K,D[E[w]]);
  Add(Z,T[E[w]]);
od;
M:=Union(K);
X:=Union(Z);
N:=Difference(D,R);
Y:=Difference(T,S);
Add(N,M);
Add(Y,X);
od;
return Y;
end;
clasesr:=function(n)
  local A,C,B,i,j;
  A:=clases(n);
  C:=[];
  for i in [1..Length(A)] do
    B:=[];
    for j in [1..Length(A[i])] do

```

```

        UniteSet(B,[A[i][j][3]]);
    od;
    Add(C,B);
od;
return C;
end;
clas:=function(A)
local f,D,i,C,j,b,F,k,l,I,J,u,r,v,t,E,R,H,
w,q,M,N,T,x,y,z,d;
C:=[A];
d:=ctodasparticionesc(6);
t:=verticesbuenos(A);
for j in [1..Length(t)] do
    b:=Transvertice(A,t[j]);
    F:=Forma(b);
    for k in [1..Length(d)] do
        if IsEqualSet(Forma(d[k]),F) and
            IsIsomorphicGraph(Bip2(d[k]),
                Bip2(b),false) then
            Add(C,d[k]);
        fi;
    od;
od;
return C;
end;
comp:=function(A,i)
local a,j,k,f,C,l;
a:=Nexti(A);
j:=i;
k:=0;
f:=0;
C:=[];

```

```

l:=0;
while f=0 and j in Nexti(A) do
    j:=vecino(A,j+1);
    if i=j then
        f:=f+1;
        fi;
        k:=k+1;
    od;
if f=0 then
    while i<>j do
        if j in Extremosi(A) then
            if j in Extremoss(A) then
                j:=vecino(A,j);
                l:=l+1;
            fi;
            if j in Nexti(A) then
                j:=vecino(A,j+1);
                k:=k+1;
            else
                while j in Extremosi(A) do
                    j:=vecino(A,A[1][Dondeesta(A,j)][1]);
                    l:=l+1;
                od;
            fi;
        fi;
    else
        while j in Extremosi(A) do
            j:=vecino(A,A[1][Dondeesta(A,j)][1]);
            l:=l+1;
        od;
    fi;
else
    j:=vecino(A,j+1);
    k:=k+1;

```

```

        fi;
    od;
    Add(C, [1,k]);
fi;
if f=1 then
    Add(C, [0,k]);
fi;
return C;
end;
comp2:=function(A,i)
    local j,l,f;
    j:=i;
    l:=0;
    f:=0;
    j:=vecino(A,A[1][Dondeesta(A,j)][1]);
    l:=l+1;
    while i<>j and j in Extremosi(A) do
        j:=vecino(A,A[1][Dondeesta(A,j)][1]);
        l:=l+1;
    od;
    if i=j then
        return [l,0];
    fi;
end;
inv:=function(A)
    local a,j,k,f,C,l,D,i,b,L;
    a:=Nexti(A);
    D:=[];
    while Length(a)>0 do
        i:=a[1];
        j:=i;
        k:=0;

```

```

f:=0;
C:=[];
l:=0;
SubtractSet(a,[j]);
while f=0 and j in Nexti(A) do
    j:=vecino(A,j+1);
    SubtractSet(a,[j]);
    if i=j then
        f:=f+1;
    fi;
    k:=k+1;
od;
if f=0 then
    while i<>j do
        if j in Extremosi(A) then
            if j in Extremoss(A) then
                j:=vecino(A,j);
                l:=l+1;
                SubtractSet(a,[j]);
            if j in Nexti(A) then
                j:=vecino(A,j+1);
                k:=k+1;
                SubtractSet(a,[j]);
            else
                while j in Extremosi(A) do
                    j:=vecino(A,A[1][Dondeesta(A,j)][1]);
                    l:=l+1;
                od;
                SubtractSet(a,[j]);
            fi;
        else
            while j in Extremosi(A) do

```

```

        j:=vecino(A,A[1][Dondeesta(A,j)][1]);
        l:=l+1;
    od;
    SubtractSet(a,[j]);
fi;
else
    j:=vecino(A,j+1);
    k:=k+1;
    SubtractSet(a,[j]);
fi;
od;
C:=[1,k];
fi;
if f=1 then
    C:=[0,k];
fi;
Add(D,C);
f:=0;
od;
b:=Intersection(Nexts(A),Extremosi(A));
while Length(b)>0 do
    i:=b[1];
    j:=i;
    l:=0;
    f:=0;
    SubtractSet(b,[j]);
    j:=vecino(A,A[1][Dondeesta(A,j)][1]);
    l:=l+1;
    SubtractSet(b,[j]);
    while i<>j and j in Intersection
        (Nexts(A),Extremosi(A)) do
        j:=vecino(A,A[1][Dondeesta(A,j)][1]);
        l:=l+1;
        SubtractSet(b,[j]);
    od;
    if i=j then
        L:=[1,0];
        Add(D,L);
    fi;
    od;
    return D;
end;
ctodasparticionesc2:=function(n)
    local A,B,i,a;
    A:=ctodasparticionesc(n);
    B:=[];
    for i in [1..Length(A)] do
        a:=SortedList(inv(A[i]));
        Add(A[i],a);
        Add(B,A[i]);
    od;
    return B;
end;
ctodasparticionesc3:=function(n)
    local A,B,i,C;
    A:=ctodasparticionesc2(n);
    B:=[];
    C:=[];
    while Length(A)>0 do
        for i in [1..Length(A)] do
            if IsEqualSet(A[1][4],A[i][4]) then
                Add(B,A[i]);
                Add(C,A[i]);
            fi;

```

```

        od;
        SubtractSet(A,C);
    od;
    return B;
end;
ctodasparticionesc4:=function(n)
local A,B,E,f,l,i,a,C,j,D;
A:=ctodasparticionesc3(n);
D:=ctodasparticionesc3(n);
B:=[];
f:=1;
l:=1;
C:=[];
while Length(D)>0 do
    for i in [1..Length(A)] do
        if Length(A[i][4])=f then
            Add(A[i],1);
            l:=l+1;
            Add(B,A[i]);
            Add(C,i);
        fi;
    od;
    E:=Listan(Length(A));
    SubtractSet(E,C);
    D:=[];
    for j in E do
        Add(D,A[j]);
    od;
    f:=f+1;
od;
return B;
end;

```

```

Todaspartbii:=function(n)
local A,B,i,a;
A:=Todaspartbi(n);
B:=[];
for i in [1..Length(A)] do
    a:=SortedList(inv(A[i]));
    Add(A[i],a);
    Add(B,A[i]);
od;
return B;
end;
Todaspartbii2:=function(D)
local A,B,i,j,C,n;
n:=0;
for j in [1..Length(D)] do
    n:=n+D[j][1]+D[j][2];
od;
A:=Todaspartbii(n);
B:=[];
C:=[];
for i in [1..Length(A)] do
    if IsEqualSet(D,A[i][3]) then
        Add(B,A[i]);
    fi;
od;
return B;
end;
Todaspartbiic0:=function(n)
local B,C,i;
B:=Todaspartbii(n);
C:=[];
for i in [1.. Length(B)] do

```



```

        if IsConnectedGraph
            (UnderlyingGraph(Bip2(B[i]))) then
            Add(C,B[i]);
        fi;
    od;
    return C;
end;
Todaspartbiic:=function(n)
    local B;
    B:=Todaspartbiic0(n);
    Read("borra.g");
    return B;
end;
Todaspartbii2c0:=function(D)
    local B,C,i;
    B:=Todaspartbii2(D);
    C=[];
    for i in [1.. Length(B)] do
        if IsConnectedGraph
            (UnderlyingGraph(Bip2(B[i]))) then
            Add(C,B[i]);
        fi;
    od;
    return C;
end;
Todaspartbii2c:=function(D)
    local B;
    B:=Todaspartbii2c0(D);
    Read("borra.g");
    return B;
end;

```

```

invariantes:=function(n)
    local A,B,i,C;
    A:=Todaspartbiic(n);
    B=[];
    for i in [1..Length(A)] do
        Add(B,[A[i][3]]);
    od;
    C:=Union(B);
    return C;
end;
invariantes2:=function(n)
    local A,B,E,f,l,i,a,C,j,D;
    A:=invariantes(n);
    D:=invariantes(n);
    B=[];
    f:=1;
    l:=1;
    C=[];
    while Length(D)>0 do
        for i in [1..Length(A)] do
            if Length(A[i])=f then
                l:=l+1;
                Add(B,A[i]);
                Add(C,i);
            fi;
        od;
        E:=Listan(Length(A));
        SubtractSet(E,C);
        D=[];
        for j in E do
            Add(D,A[j]);
        od;
    end;

```

```

        f:=f+1;
    od;
    return B;
end;
todasparticionesbiic0:=function(n)
    local B,f,i,j;
    B:=Todaspartbiic(n);
    f:=1;
    for i in [1.. Length(B)] do
        if Length(B[i])=3 then
            Add(B[i],f);
            for j in [i+1..Length(B)] do
                if Length(B[j])=3 and
                    Forma(B[i])=Forma(B[j]) and
                    IsIsomorphicGraph
                    (Bip2(B[i]),Bip2(B[j]),false) then
                    Add(B[j],f);
                    fi;
                od;
            f:=f+1;
            fi;
        od;
    return B;
end;
end;
todasparticionesbiic:=function(n)
    local B;
    B:=todasparticionesbiic0(n);
    Read("borra.g");
    return B;
end;
todasparticionesbii2c0:=function(D)
    local B,f,i,j;

```

```

    B:=Todaspartbii2c(D);
    f:=1;
    for i in [1.. Length(B)] do
        if Length(B[i])=3 then
            Add(B[i],f);
            for j in [i+1..Length(B)] do
                if Length(B[j])=3 and
                    Forma(B[i])=Forma(B[j]) and
                    IsIsomorphicGraph
                    (Bip2(B[i]),Bip2(B[j]),false) then
                    Add(B[j],f);
                    fi;
                od;
            f:=f+1;
            fi;
        od;
    return B;
end;
todasparticionesbii2c:=function(D)
    local B;
    B:=todasparticionesbii2c0(D);
    Read("borra.g");
    return B;
end;
ctodasparticionesbiic:=function(n)
    local B,C,i;
    B:=[];
    C:=todasparticionesbiic(n);
    Add(B,C[1]);
    for i in [2..Length(C)] do
        if C[i][4]>B[Length(B)][4] then
            Add(B,C[i]);

```

```

        fi;
    od;
    return B;
end;
ctodasparticionesbii2c:=function(D)
    local B,C,i;
    B:=[];
    C:=todasparticionesbii2c(D);
    Add(B,C[1]);
    for i in [2..Length(C)] do
        if C[i][4]>B[Length(B)][4] then
            Add(B,C[i]);
        fi;
    od;
    return B;
end;
clases3:=function(n)
    local A,f,D,i,C,j,b,F,k,l,I,J,u,r,v,t,E,R,H,
    w,q,M,N,T,x,y,z;
    A:=ctodasparticionesc4(n);
    f:=1;
    D:=[];
    T:=[];
    for i in [1.. Length(A)] do
        x:=0;
        y:=0;
        z:=0;
        C:=[A[i]];
        for j in verticesbuenos(A[i]) do
            b:=Transvertice(A[i],j);
            F:=Forma(b);
            for k in [1..Length(A)] do

```

```

                if x=0 then
                    if IsEqualSet(Forma(A[k]),F) and
                    IsEqualSet(A[k][4],b[4])
                    and IsIsomorphicGraph
                    (Bip2(A[k]),Bip2(b),false) then
                        Add(C,A[k]);
                        x:=1;
                        Add(T,k);
                    fi;
                fi;
            od;
            x:=0;
        od;
        for l in vbuenos(A[i]) do
            b:=Transflecha(A[i],l);
            I:=Forma(b);
            for u in [1..Length(A)] do
                if y=0 then
                    if IsEqualSet(Forma(A[u]),I) and
                    IsEqualSet(A[u][4],b[4])
                    and IsIsomorphicGraph
                    (Bip2(A[u]),Bip2(b),false) then
                        Add(C,A[u]);
                        y:=1;
                        Add(T,u);
                    fi;
                fi;
            od;
            y:=0;
        od;
        for r in lazos(A[i]) do
            b:=Translazo(A[i],r);

```

```

J:=Forma(b);
for v in [1..Length(A)] do
  if z=0 then
    if IsEqualSet(Forma(A[v]),J) and
       IsEqualSet(A[v][4],b[4])
       and IsIsomorphicGraph
          (Bip2(A[v]),Bip2(b),false) then
      Add(C,A[v]);
      z:=1;
      Add(T,v);
    fi;
  fi;
od;
Add(D,C);
E:=[];
R:=[];
for t in [1..Length(D)] do
  H:=IntersectionSet(C,D[t]);
  if Length(H)>0 then
    Add(E,t);
    Add(R,D[t]);
  fi;
od;
K:=[];
for w in [1..Length(E)] do
  Add(K,D[E[w]]);
od;
M:=Union(R);
D:=Difference(D,R);
Add(D,M);

```

```

od;
return D;
end;
clasesri:=function(n)
  local A,C,B,i,j;
  A:=clases3(n);
  C:=[];
  for i in [1..Length(A)] do
    B:=[];
    for j in [1..Length(A[i])] do
      UniteSet(B,[A[i][j][5]]);
    od;
    UniteSet(B,[A[i][1][4]]);
    Add(C,B);
  od;
  C:=Union([C]);
  return C;
end;
clasri:=function(n)
  local A,B,C,D,i,f;
  A:=clasesri(n);
  B:=ctodasparticionesc4(n);
  C:=[];
  for i in [1..Length(A)] do
    f:=Length(A[i]);
    D:=[B[A[i][1]],A[i][Length(A[i])],Length(A[i])-1];
    Add(C,D);
  od;
  return C;
end;
Todaspartcciclos:=function(n,m)
  local A,B,i;

```

```

A:=Todaspartc(n);
B:=[];
for i in [1..Length(A)] do
  if Length(A[i][1])=n/2-m+1 then
    Add(B,A[i]);
  fi;
od;
return B;
end;
todasparticionescciclos0:=function(n,m)
local B,f,i,j;
B:=Todaspartcciclos(n,m);
f:=1;
for i in [1.. Length(B)] do
  if Length(B[i])=2 then
    Add(B[i],f);
    for j in [i+1..Length(B)] do
      if Length(B[j])=2 and
        Forma(B[i])=Forma(B[j]) and
        IsIsomorphicGraph
          (Bip2(B[i]),Bip2(B[j]),false) then
        Add(B[j],f);
      fi;
    od;
    f:=f+1;
  fi;
od;
return B;
end;
todasparticionescciclos:=function(n,m)
local B;
B:=todasparticionescciclos0(n,m);

```

```

Read("borra.g");
return B;
end;
ctodasparticionescciclos:=function(n,m)
local B,C,i;
B:=[];
C:=todasparticionescciclos(n,m);
Add(B,C[1]);
for i in [2..Length(C)] do
  if C[i][3]>B[Length(B)][3] then
    Add(B,C[i]);
  fi;
od;
return B;
end;
ctodasparticionescciclos2:=function(n,m)
local A,B,i,a;
A:=ctodasparticionescciclos(n,m);
B:=[];
for i in [1..Length(A)] do
  a:=SortedList(inv(A[i]));
  Add(A[i],a);
  Add(B,A[i]);
od;
return B;
end;
ctodasparticionescciclos3:=function(n,m)
local A,B,i,C;
A:=ctodasparticionescciclos2(n,m);
B:=[];
C:=[];
while Length(A)>0 do

```

```

    for i in [1..Length(A)] do
        if IsEqualSet(A[1][4],A[i][4]) then
            Add(B,A[i]);
            Add(C,A[i]);
        fi;
    od;
    SubtractSet(A,C);
od;
return B;
end;
ctodasparticionescciclos4:=function(n,m)
    local A,B,E,f,l,i,a,C,j,D;
    A:=ctodasparticionescciclos3(n,m);
    D:=ctodasparticionescciclos3(n,m);
    B:=[];
    f:=1;
    l:=1;
    C:=[];
    while Length(D)>0 do
        for i in [1..Length(A)] do
            if Length(A[i][4])=f then
                Add(A[i],l);
                l:=l+1;
                Add(B,A[i]);
                Add(C,i);
            fi;
        od;
        E:=Listan(Length(A));
        SubtractSet(E,C);
        D:=[];
        for j in E do
            Add(D,A[j]);

```

```

    od;
    f:=f+1;
od;
return B;
end;
clasesciclos3:=function(n,m)
    local A,f,D,i,C,j,b,F,k,l,I,J,u,r,v,t,E,R,H,
    w,q,M,N,T,x,y,z;
    A:=ctodasparticionescciclos4(n,m);
    f:=1;
    D:=[];
    T:=[];
    for i in [1.. Length(A)] do
        x:=0;
        y:=0;
        z:=0;
        C:=A[i];
        for j in verticebuenos(A[i]) do
            b:=Transvertice(A[i],j);
            F:=Forma(b);
            for k in [1..Length(A)] do
                if x=0 then
                    if IsEqualSet(Forma(A[k]),F) and
                    IsEqualSet(A[k][4],b[4])
                    and IsIsomorphicGraph
                    (Bip2(A[k]),Bip2(b),false) then
                        Add(C,A[k]);
                        x:=1;
                        Add(T,k);
                    fi;
                fi;
            od;
        od;

```

```

        x:=0;
    od;
    for l in vbuenos(A[i]) do
        b:=Transflecha(A[i],l);
        I:=Forma(b);
        for u in [1..Length(A)] do
            if y=0 then
                if IsEqualSet(Forma(A[u]),I) and
                    IsEqualSet(A[u][4],b[4])
                    and IsIsomorphicGraph
                    (Bip2(A[u]),Bip2(b),false) then
                    Add(C,A[u]);
                    y:=1;
                    Add(T,u);
                fi;
            fi;
        od;
        y:=0;
    od;
    for r in lazos(A[i]) do
        b:=Translazo(A[i],r);
        J:=Forma(b);
        for v in [1..Length(A)] do
            if z=0 then
                if IsEqualSet(Forma(A[v]),J) and
                    IsEqualSet(A[v][4],b[4])
                    and IsIsomorphicGraph
                    (Bip2(A[v]),Bip2(b),false) then
                    Add(C,A[v]);
                    z:=1;
                    Add(T,v);
                fi;
            fi;
        od;
    od;
end;

```

```

        fi;
    od;
    z:=0;
    Add(D,C);
    E:=[];
    R:=[];
    for t in [1..Length(D)] do
        H:=IntersectionSet(C,D[t]);
        if Length(H)>0 then
            Add(E,t);
            Add(R,D[t]);
        fi;
    od;
    K:=[];
    for w in [1..Length(E)] do
        Add(K,D[E[w]]);
    od;
    M:=Union(R);
    D:=Difference(D,R);
    Add(D,M);
od;
return D;
end;
clasesciclosri:=function(n,m)
    local A,C,B,i,j;
    A:=clasesciclos3(n,m);
    C:=[];
    for i in [1..Length(A)] do
        B:=[];
        for j in [1..Length(A[i])] do
            UniteSet(B,[A[i][j][5]]);
        od;
    od;
end;

```

```

        od;
        UniteSet(B, [A[i][1][4]]);
        Add(C,B);
    od;
    C:=Union([C]);
    return C;
end;
clasciclosri:=function(n,m)
    local A,B,C,D,i,f;
    A:=clasesciclosri(n,m);
    B:=ctodasparticionescciclos4(n,m);
    C=[];
    for i in [1..Length(A)] do
        f:=Length(A[i]);
        D:=[B[A[i][1]],A[i][Length(A[i])],
            Length(A[i])-1];
        Add(C,D);
    od;
    return C;
end;
clasesbii2c:=function(G)
    local A,f,D,i,C,j,b,F,k,l,I,J,u,r,v,t,E,R,H,
    w,q,M,N,T,x,y,z;
    A:=ctodasparticionesbii2c(G);
    f:=1;
    D=[];
    T=[];
    for i in [1.. Length(A)] do
        x:=0;
        y:=0;
        z:=0;
        C:=[A[i]];

```

```

    for j in verticesbuenos(A[i]) do
        b:=Transvertice(A[i],j);
        F:=Forma(b);
        for k in [1..Length(A)] do
            if x=0 then
                if IsEqualSet(Forma(A[k]),F) and
                    IsIsomorphicGraph(Bip2(A[k]),Bip2(b),false)
                then
                    Add(C,A[k]);
                    x:=1;
                    Add(T,k);
                fi;
            fi;
        od;
        x:=0;
    od;
    for l in vbuenos(A[i]) do
        b:=Transflecha(A[i],l);
        I:=Forma(b);
        for u in [1..Length(A)] do
            if y=0 then
                if IsEqualSet(Forma(A[u]),I) and
                    IsIsomorphicGraph(Bip2(A[u]),Bip2(b),false)
                then
                    Add(C,A[u]);
                    y:=1;
                    Add(T,u);
                fi;
            fi;
        od;
        y:=0;
    od;

```



```

for r in lazos(A[i]) do
  b:=Translazo(A[i],r);
  J:=Forma(b);
  for v in [1..Length(A)] do
    if z=0 then
      if IsEqualSet(Forma(A[v]),J) and
        IsIsomorphicGraph(Bip2(A[v]),Bip2(b),false)
      then
        Add(C,A[v]);
        z:=1;
        Add(T,v);
      fi;
    fi;
  od;
  Add(D,C);
  E:=[];
  R:=[];
  for t in [1..Length(D)] do
    H:=IntersectionSet(C,D[t]);
    if Length(H)>0 then
      Add(E,t);
      Add(R,D[t]);
    fi;
  od;
  K:=[];
  for w in [1..Length(E)] do
    Add(K,D[E[w]]);
  od;
  M:=Union(R);
  D:=Difference(D,R);

  Add(D,M);
od;
return D;
end;
clasesbii2cr:=function(G)
  local A,C,B,i,j;
  A:=clasesbii2c(G);
  C:=[];
  for i in [1..Length(A)] do
    B:=[];
    for j in [1..Length(A[i])] do
      UniteSet(B,[A[i][j][4]]);
    od;
    UniteSet(B,[A[i][1][3]]);
    Add(C,B);
  od;
  C:=Union([C]);
  return C;
end;
clbii2cr:=function(n)
  local A,B,i,c;
  A:=invariantes2(n);
  B:=[];
  for i in [1..Length(A)] do
    c:=clasesbii2cr(A[i]);
    Add(B,c);
  od;
  return B;
end;
clbii2c:=function(n)
  local A,B,i,c;
  A:=invariantes2(n);

```

```

B:=[];
for i in [1..Length(A)] do
  c:=clasesbii2c(A[i]);
  Add(B,c);
od;
return B;
end;

ctpartbii2c:=function(n)
local A,B,i,c;
A:=invariantes2(n);
B:=[];
for i in [2..Length(A)] do
  c:=ctodasparticionesbii2c(A[i]);
  Add(B,c);
od;
return B;
end;

dual:=function(A)
local i,P,C,j,k,F;
P:=[];
F:=[];
for i in [1..Length(A[1])] do
  C:=[];
  for j in [1..Length(A[1][i])] do
    Add(C,A[1][i][Length(A[1][i])-j+1]);
  od;
  Add(P,C);
od;
Add(F,P);
for k in [2..Length(A)] do

```

```

  Add(F,A[k]);
od;
return F;
end;

clasesdep:=function(P,Q)
local S,B,c,d,n,A,f,D,i,C,j,b,F,k,l,I,J,
u,r,v,t,E,R,H,w,q,M,N,T,x,y,z;
n:=Length(P[2])*2;
f:=1;
Add(P,0);
D:=[P];
S:=[P];
d:=1;
c:=1;
while d=1 and Length(D)>0 and f<12 do
  T:=[];
  for i in [1.. Length(D)] do
    x:=0;
    y:=0;
    z:=0;
    if d=1 then
      for j in verticesbuenos(D[i]) do
        B:=Transvertice(D[i],j);
        F:=Forma(B);
        for k in [1..Length(S)] do
          if x=0 and d=1 then

```

```

        if IsEqualSet
          (Forma(S[Length(S)-k+1]),F)
        and IsIsomorphicGraph
          (Bip2(S[Length(S)-k+1]),Bip2(B),false)
        then
          x:=1;
        fi;
      fi;
    od;
  if x=0 and d=1 then
    Add(B,[[1,j],f,c]);
    c:=c+1;
    if IsEqualSet (Forma(Q),Forma(B))
      and IsIsomorphicGraph
        (Bip2(Q),Bip2(B),false) then
      d:=2;
      Add(B,100);
    fi;
    Add(T,B);
    Add(S,B);
  fi;
  x:=0;
od;
fi;
if d=1 then for j in
verticesbuenos(dual(D[i])) do

```

```

B:=dual(Transvertice(dual(D[i]),j));
F:=Forma(B);
for k in [1..Length(S)] do
  if x=0 and d=1 then
    if IsEqualSet (Forma(S[Length(S)-k+1]),F)
      and IsIsomorphicGraph
        (Bip2(S[Length(S)-k+1]),Bip2(B),false)
      then
        x:=1;
      fi;
    fi;
  od;
  if x=0 and d=1 then
    Add(B,[[10,j],f,c]);
    c:=c+1;
    if IsEqualSet (Forma(Q),Forma(B))
      and IsIsomorphicGraph
        (Bip2(Q),Bip2(B),false) then
      d:=2;
      Add(B,100);
    fi;
    Add(T,B);
    Add(S,B);
  fi;
  x:=0;
od;

```

```

fi;
if d=1 then
  for l in vbuenos(D[i]) do
    b:=Transflecha(D[i],l);
    I:=Forma(b);
    if d=1 then
      for u in [1..Length(S)] do
        if y=0 and d=1 then
          if IsEqualSet
            (Forma(S[Length(S)-u+1]),I)
          and IsIsomorphicGraph
            (Bip2(S[Length(S)-u+1]),Bip2(b),false)
          then
            y:=1;
            fi;
          fi;
        od;
      if y=0 and d=1 then
        Add(b,[[2,1],f,c]);
        c:=c+1;
        if IsEqualSet(Forma(Q),Forma(b))
          and IsIsomorphicGraph
            (Bip2(Q),Bip2(b),false) then
          d:=2;
          Add(b,100);
        fi;
      fi;
    Add(T,b);
    Add(S,b);
    fi;
    y:=0;
    fi;
  od;
fi;
if d=1 then
  for l in vbuenos(dual(D[i])) do
    b:=dual(Transflecha(dual(D[i]),l));
    I:=Forma(b);
    if d=1 then
      for u in [1..Length(S)] do
        if y=0 and d=1 then
          if IsEqualSet
            (Forma(S[Length(S)-u+1]),I)
          and IsIsomorphicGraph
            (Bip2(S[Length(S)-u+1]),Bip2(b),false)
          then
            y:=1;
            fi;
          fi;
        od;
      if y=0 and d=1 then
        Add(b,[[20,1],f,c]);
        c:=c+1;

```

```

        if IsEqualSet(Forma(Q),Forma(b))
        and IsIsomorphicGraph
        (Bip2(Q),Bip2(b),false) then
            d:=2;
            Add(b,100);
            fi;
            Add(T,b);
            Add(S,b);
        fi;
        y:=0;
        fi;
    od;
fi;
if d=1 then
    for r in lazos(D[i]) do
        b:=Translazo(D[i],r);
        J:=Forma(b);
        if d=1 then
            for v in [1..Length(S)] do
                if z=0 and d=1 then
                    if IsEqualSet(Forma(S[Length(S)-v+1]),J)
                    and IsIsomorphicGraph
                    Bip2(S[Length(S)-v+1],Bip2(b),false)
                    then
                        z:=1;
                    fi;
                fi;
            fi;
        fi;
    fi;
fi;

```

```

        fi;
    od;
    if z=0 and d=1 then
        Add(b,[[3,r],f,c]);
        c:=c+1;
        if IsEqualSet(Forma(Q),Forma(b))
        and IsIsomorphicGraph(Bip2(Q),Bip2(b),false)
        then
            d:=2;
            Add(b,100);
            fi;
            Add(T,b);
            Add(S,b);
        fi;
        z:=0;
    fi;
od;
fi;
if d=1 then
    for r in lazos(dual(D[i])) do
        b:=dual(Translazo(dual(D[i]),r));
        J:=Forma(b);
        if d=1 then
            for v in [1..Length(S)] do
                if z=0 and d=1 then
                    if IsEqualSet

```

```

        (Forma(S[Length(S)-v+1]),J)
and IsIsomorphicGraph
        (Bip2(S[Length(S)-v+1]),
        Bip2(b),false) then
            z:=1;
            fi;
        fi;
od;
if z=0 and d=1 then
    Add(b,[[30,r],f,c]);
    c:=c+1;
    if IsEqualSet(Forma(Q),Forma(b))
    and IsIsomorphicGraph
        (Bip2(Q),Bip2(b),false) then
            d:=2;
            Add(b,100);
        fi;
    Add(T,b);

        Add(S,b);
        fi;
        z:=0;
        fi;
        od;
        fi;
        od;
        f:=f+1;
        D:=T;
    od;
    if d=1 then
        return S;
    else
        return S;
    fi;
end;

```

2. Clasificación para dos ciclos y menos de seis vértices

En esta sección se muestra la lista de las clases de equivalencia derivada de álgebras gentiles definidas por carcajes de dos ciclos con a lo mucho cinco vértices. Para aquellas de 2, 3 y 4 vértices se dan primero las clases de equivalencia derivada bajo transformaciones elementales, mostrando el número de cada álgebra que pertenece a dicha clase y el invariante ϕ_A , de acuerdo a la lista que se presenta inmediatamente, donde aparecen numeradas todas las diferentes álgebras gentiles con dos ciclos asociadas a un invariante específico. Estos datos fueron calculados usando las instrucciones `clbii2cr(2n)` y `clpartbii2c(2n)` respectivamente, donde n es el número de vértices. En el caso de álgebras gentiles con dos ciclos y 5 vértices, por cuestiones de espacio sólo se muestra la primera de estas dos listas, la segunda puede ser consultada en la página de internet www.matem.unam.mx/avella

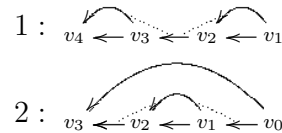
Se observa que todas las clases de equivalencia derivada bajo transformaciones elementales presentan distintos invariantes salvo en el caso de 4 vértices para $\phi_A = [[1, 1], [1, 1], [1, 3]]$, donde encontramos dos clases con el mismo invariante. Como se verifica de acuerdo a las listas siguientes,

$$[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 6], [3, 7], [4, 8]], [[1, 1], [1, 1], [1, 3]], 1]$$

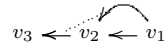
aparece en la primera de estas clases y

$$[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 7], [3, 8], [4, 6]], [[1, 1], [1, 1], [1, 3]], 2]$$

en la segunda. Éstas álgebras corresponden a los siguientes carcajes con relaciones:



pero éstas se construyen como una coextensión y una extensión en un vértice del álgebra asociada al carcaj con relaciones



así que son de hecho derivadamente equivalentes, ya que por [HW83] las álgebras repetitivas correspondientes son isomorfas y debido a que la dimensión global es finita tenemos la equivalencia derivada deseada. Sin embargo no podemos transformar una en la otra mediante operaciones elementales.

2.1. Clases de equivalencia derivada bajo transformaciones elementales de álgebras gentiles de dos vértices.

```
clbii2cr(4);
[[ [ 1, [ [ 1, 3 ] ] ] ],
 [ [ 1, [ [ 0, 1 ], [ 0, 1 ], [ 1, 1 ] ] ] ],
 [ [ 1, [ [ 0, 1 ], [ 0, 2 ], [ 1, 0 ] ] ] ] ]
```

```
clpartbii2c(4);
[[ [ [ [ [ 1, 2, 3, 4 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 4 ] ], [ [ 1, 3 ] ], 1 ] ],
 [ [ [ [ 1, 2, 3, 4 ] ], [ [ 1, 2 ], [ 3, 4 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 1 ], [ 1, 1 ] ], 1 ] ],
 [ [ [ [ 1, 2, 3, 4 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 3 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 2 ], [ 1, 0 ] ], 1 ] ] ]
```

2.2. Clases de equivalencia derivada bajo transformaciones elementales de álgebras gentiles de tres vértices.

```
clbii2cr(6);
[[ [ [ 1, [ [ 2, 4 ] ] ] ], [ 2, [ [ 2, 4 ] ] ] ], [ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, [ [ 2, 4 ] ] ] ],
```



```

[[ [1- 6, [[ 0, 1 ], [ 0, 1 ], [ 2, 2 ] ] ] ],
[[ [1- 4, [[ 0, 1 ], [ 0, 2 ], [ 2, 1 ] ] ] ] ],
[[ [1,   [[ 0, 1 ], [ 0, 3 ], [ 2, 0 ] ] ] ] ],
[[ [1- 4, [[ 0, 1 ], [ 1, 0 ], [ 1, 3 ] ] ] ] ],
[[ [1- 5, [[ 0, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 2 ] ] ] ] ],
[[ [1,   [[ 0, 2 ], [ 0, 2 ], [ 2, 0 ] ] ] ] ],
[[ [1, 2, [[ 0, 2 ], [ 1, 0 ], [ 1, 2 ] ] ] ] ],
[[ [1, 2, [[ 0, 2 ], [ 1, 1 ], [ 1, 1 ] ] ] ] ],
[[ [1,   [[ 0, 3 ], [ 1, 0 ], [ 1, 1 ] ] ] ] ],
[[ [1,   [[ 0, 4 ], [ 1, 0 ], [ 1, 0 ] ] ] ] ] ]

clpartbii2c(6);
[[ [ [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 5 ], [ 3, 6 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 1 ],
    [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 6 ], [ 3, 4 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 2 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 5 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 3 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 6 ], [ 4, 5 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 4 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 4 ], [ 3, 6 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 5 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 4 ], [ 3, 5 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 6 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 7 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 5 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 8 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 5 ], [ 3, 6 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 9 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 6 ], [ 3, 5 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 10 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 4 ], [ 3, 5 ] ], [ [ 2, 4 ] ], 11 ] ],
  [ [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 2 ], [ 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 1 ], [ 2, 2 ] ], 1 ],
    [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 2 ], [ 3, 6 ], [ 4, 5 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 1 ], [ 2, 2 ] ], 2 ],
    [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 3 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 1 ], [ 2, 2 ] ], 3 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 2 ], [ 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 1 ], [ 2, 2 ] ], 4 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 2 ], [ 3, 6 ], [ 4, 5 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 1 ], [ 2, 2 ] ], 5 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 3 ], [ 4, 5 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 1 ], [ 2, 2 ] ], 6 ] ],
  [ [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 2 ], [ 3, 6 ], [ 4, 5 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 2 ], [ 2, 1 ] ], 1 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 5 ], [ 3, 4 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 2 ], [ 2, 1 ] ], 2 ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 3 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 2 ], [ 2, 1 ] ], 3 ],

```

```

    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 5 ], [ 3, 4 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 2 ], [ 2, 1 ] ], 4 ] ],
  [ [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 3 ], [ 4, 5 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 0, 3 ], [ 2, 0 ] ], 1 ] ],
  [ [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 2 ], [ 3, 5 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 1, 0 ], [ 1, 3 ] ], 1 ] ],
    [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 1, 0 ], [ 1, 3 ] ], 2 ] ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 3 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 1, 0 ], [ 1, 3 ] ], 3 ] ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 6 ], [ 3, 4 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 1, 0 ], [ 1, 3 ] ], 4 ] ],
  [ [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 2 ], [ 3, 5 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 2 ] ], 1 ] ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 3 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 2 ] ], 2 ] ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 6 ], [ 3, 4 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 2 ] ], 3 ] ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 2 ], [ 3, 5 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 2 ] ], 4 ] ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 6 ], [ 4, 5 ] ], [ [ 0, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 2 ] ], 5 ] ],
  [ [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 5 ], [ 3, 4 ] ], [ [ 0, 2 ], [ 0, 2 ], [ 2, 0 ] ], 1 ] ],
  [ [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 6 ], [ 3, 5 ] ], [ [ 0, 2 ], [ 1, 0 ], [ 1, 2 ] ], 1 ] ],
    [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 4 ], [ 3, 6 ] ], [ [ 0, 2 ], [ 1, 0 ], [ 1, 2 ] ], 2 ] ],
  [ [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 6 ], [ 3, 5 ] ], [ [ 0, 2 ], [ 1, 1 ], [ 1, 1 ] ], 1 ] ],
    [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 4 ], [ 3, 6 ] ], [ [ 0, 2 ], [ 1, 1 ], [ 1, 1 ] ], 2 ] ],
  [ [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 5 ], [ 3, 6 ] ], [ [ 0, 3 ], [ 1, 0 ], [ 1, 1 ] ], 1 ] ],
  [ [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 5 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 0, 4 ], [ 1, 0 ], [ 1, 0 ] ], 1 ] ] ]

```

2.3. Clases de equivalencia derivada bajo transformaciones elementales de álgebras gentiles de cuatro vértices.

```

clbii2cr(8);
[ [ [ 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 33, 34, 38, 39, 46, 47, 48,
    49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76,
    77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, [ [ 3, 5 ] ] ], [ 3, [ [ 3, 5 ] ] ],
    [ 16, 30, 31, 32, 43, [ [ 3, 5 ] ] ], [ 17, 20, 21, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 44, 45, [ [ 3, 5 ] ] ] ],
  [ [ 1- 28, [ [ 0, 1 ], [ 0, 1 ], [ 3, 3 ] ] ] ],
  [ [ 1- 21, [ [ 0, 1 ], [ 0, 2 ], [ 3, 2 ] ] ] ] ],

```

```

[[ 1- 6, [[ 0, 1 ], [ 0, 3 ], [ 3, 1 ] ] ] ],
[[ 1,    [[ 0, 1 ], [ 0, 4 ], [ 3, 0 ] ] ] ],
[[ 1- 21, [[ 0, 1 ], [ 1, 0 ], [ 2, 4 ] ] ] ],
[[ 1- 24, [[ 0, 1 ], [ 1, 1 ], [ 2, 3 ] ] ] ],
[[ 1- 24, [[ 0, 1 ], [ 1, 2 ], [ 2, 2 ] ] ] ],
[[ 1- 16, [[ 0, 1 ], [ 1, 3 ], [ 2, 1 ] ] ] ],
[[ 1- 5,  [[ 0, 1 ], [ 1, 4 ], [ 2, 0 ] ] ] ],
[[ 1- 3,  [[ 0, 2 ], [ 0, 2 ], [ 3, 1 ] ] ] ],
[[ 1,     [[ 0, 2 ], [ 0, 3 ], [ 3, 0 ] ] ] ],
[[ 1- 9,  [[ 0, 2 ], [ 1, 0 ], [ 2, 3 ] ] ] ],
[[ 1- 9,  [[ 0, 2 ], [ 1, 1 ], [ 2, 2 ] ] ] ],
[[ 1- 9,  [[ 0, 2 ], [ 1, 2 ], [ 2, 1 ] ] ] ],
[[ 1- 3,  [[ 0, 2 ], [ 1, 3 ], [ 2, 0 ] ] ] ],
[[ 1- 4,  [[ 0, 3 ], [ 1, 0 ], [ 2, 2 ] ] ] ],
[[ 1- 4,  [[ 0, 3 ], [ 1, 1 ], [ 2, 1 ] ] ] ],
[[ 1, 2,  [[ 0, 3 ], [ 1, 2 ], [ 2, 0 ] ] ] ],
[[ 1- 3,  [[ 0, 4 ], [ 1, 0 ], [ 2, 1 ] ] ] ],
[[ 1,     [[ 0, 4 ], [ 1, 1 ], [ 2, 0 ] ] ] ],
[[ 1,     [[ 0, 5 ], [ 1, 0 ], [ 2, 0 ] ] ] ],
[[ 1- 3,  [[ 1, 0 ], [ 1, 0 ], [ 1, 5 ] ] ] ],
[[ 1- 6,  [[ 1, 0 ], [ 1, 1 ], [ 1, 4 ] ] ] ],
[[ 1- 8,  [[ 1, 0 ], [ 1, 2 ], [ 1, 3 ] ] ] ],
[[ 1,     [[ 1, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 3 ] ] ] ], [ 2, 3, 4, [[ 1, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 3 ] ] ] ],
[[ 1- 6,  [[ 1, 1 ], [ 1, 2 ], [ 1, 2 ] ] ] ] ]

```

```
clpartbii2c(8);
```

```

[[ [[ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 5 ], [ 3, 7 ], [ 6, 8 ] ], [ [ 3, 5 ] ], 1 ],
   [[ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 7 ], [ 3, 6 ], [ 5, 8 ] ], [ [ 3, 5 ] ], 2 ],
   [[ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 6 ], [ 3, 7 ], [ 4, 8 ] ], [ [ 3, 5 ] ], 3 ],
   [[ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 6 ], [ 3, 8 ], [ 4, 7 ] ], [ [ 3, 5 ] ], 4 ],
   [[ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 7 ], [ 3, 4 ], [ 6, 8 ] ], [ [ 3, 5 ] ], 5 ],
   [[ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 8 ], [ 3, 4 ], [ 6, 7 ] ], [ [ 3, 5 ] ], 6 ],

```

[[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 7], [3, 5], [4, 8]], [[3, 5]], 7],
[[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 8], [3, 5], [4, 7]], [[3, 5]], 8],
[[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8]], [[1, 7], [2, 5], [3, 6], [4, 8]], [[3, 5]], 9],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 3], [2, 5], [4, 7], [6, 8]], [[3, 5]], 10],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 3], [2, 5], [4, 8], [6, 7]], [[3, 5]], 11],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 3], [2, 6], [4, 7], [5, 8]], [[3, 5]], 12],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 3], [2, 6], [4, 8], [5, 7]], [[3, 5]], 13],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 4], [3, 7], [6, 8]], [[3, 5]], 14],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 4], [3, 8], [6, 7]], [[3, 5]], 15],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 7], [3, 6], [4, 8]], [[3, 5]], 16],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 8], [3, 6], [4, 7]], [[3, 5]], 17],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 4], [3, 7], [5, 8]], [[3, 5]], 18],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 4], [3, 8], [5, 7]], [[3, 5]], 19],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 7], [3, 5], [4, 8]], [[3, 5]], 20],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 8], [3, 5], [4, 7]], [[3, 5]], 21],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 3], [2, 5], [4, 6], [7, 8]], [[3, 5]], 22],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 3], [2, 5], [4, 7], [6, 8]], [[3, 5]], 23],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 3], [2, 6], [4, 5], [7, 8]], [[3, 5]], 24],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 3], [2, 6], [4, 7], [5, 8]], [[3, 5]], 25],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 3], [2, 7], [4, 5], [6, 8]], [[3, 5]], 26],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 3], [2, 7], [4, 6], [5, 8]], [[3, 5]], 27],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 4], [3, 6], [7, 8]], [[3, 5]], 28],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 4], [3, 7], [6, 8]], [[3, 5]], 29],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 6], [3, 7], [4, 8]], [[3, 5]], 30],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 6], [3, 8], [4, 7]], [[3, 5]], 31],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 8], [3, 6], [4, 7]], [[3, 5]], 32],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 4], [3, 5], [7, 8]], [[3, 5]], 33],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 4], [3, 7], [5, 8]], [[3, 5]], 34],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 7], [3, 5], [4, 8]], [[3, 5]], 35],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 7], [3, 8], [4, 5]], [[3, 5]], 36],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 8], [3, 7], [4, 5]], [[3, 5]], 37],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 4], [3, 5], [6, 8]], [[3, 5]], 38],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 4], [3, 6], [5, 8]], [[3, 5]], 39],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 5], [3, 6], [4, 8]], [[3, 5]], 40],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 5], [3, 8], [4, 6]], [[3, 5]], 41],
[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 8], [3, 5], [4, 6]], [[3, 5]], 42],

[[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 8], [3, 4], [5, 7]], [[0, 1], [1, 1], [2, 3]], 20],
 [[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 8], [2, 3], [4, 6], [5, 7]], [[0, 1], [1, 1], [2, 3]], 21],
 [[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 8], [2, 6], [3, 7], [4, 5]], [[0, 1], [1, 1], [2, 3]], 22],
 [[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 2], [3, 6], [4, 7], [5, 8]], [[0, 1], [1, 1], [2, 3]], 23],
 [[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 4], [2, 7], [3, 8], [5, 6]], [[0, 1], [1, 1], [2, 3]], 24]],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 2], [3, 5], [4, 7], [6, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 1],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 2], [3, 6], [4, 8], [5, 7]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 2],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 3], [4, 8], [6, 7]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 3],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 7], [3, 4], [6, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 4],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 8], [3, 4], [5, 7]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 5],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 2], [3, 5], [4, 6], [7, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 6],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 2], [3, 6], [4, 7], [5, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 7],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 3], [2, 8], [4, 5], [6, 7]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 8],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 3], [2, 8], [4, 7], [5, 6]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 9],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 3], [4, 7], [6, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 10],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 4], [3, 8], [6, 7]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 11],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 6], [3, 4], [7, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 12],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 7], [3, 4], [5, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 13],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 4], [3, 8], [5, 6]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 14],
 [[[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 2], [3, 6], [4, 8], [5, 7]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 15],
 [[[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 3], [4, 7], [5, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 16],
 [[[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 8], [3, 7], [4, 5]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 17],
 [[[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 8], [2, 6], [3, 4], [5, 7]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 18],
 [[[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 2], [3, 5], [4, 7], [6, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 19],
 [[[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 2], [3, 7], [4, 6], [5, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 20],
 [[[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 3], [2, 7], [4, 5], [6, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 21],
 [[[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 3], [2, 7], [4, 8], [5, 6]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 22],
 [[[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 7], [2, 3], [4, 6], [5, 8]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 23],
 [[[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 7], [2, 4], [3, 8], [5, 6]], [[0, 1], [1, 2], [2, 2]], 24]],
 [[[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 2], [3, 5], [4, 8], [6, 7]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 1],
 [[[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 3], [4, 7], [6, 8]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 2],
 [[[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 8], [3, 4], [6, 7]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 3],
 [[[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 3], [4, 8], [5, 7]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 4],
 [[[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 2], [3, 7], [4, 5], [6, 8]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 5],
 [[[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 3], [2, 5], [4, 8], [6, 7]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 6],
 [[[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 3], [2, 7], [4, 8], [5, 6]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 7],

[[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 5], [3, 4], [6, 8]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 8],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 8], [2, 4], [3, 5], [6, 7]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 9],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 8], [2, 4], [3, 7], [5, 6]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 10],
 [[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 2], [3, 7], [4, 8], [5, 6]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 11],
 [[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 8], [3, 6], [4, 5]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 12],
 [[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 5], [2, 3], [4, 7], [6, 8]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 13],
 [[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 5], [2, 7], [3, 4], [6, 8]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 14],
 [[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 7], [2, 6], [3, 4], [5, 8]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 15],
 [[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 7], [2, 6], [3, 8], [4, 5]], [[0, 1], [1, 3], [2, 1]], 16]],
 [[[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8]], [[1, 2], [3, 5], [4, 8], [6, 7]], [[0, 1], [1, 4], [2, 0]], 1],
 [[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 3], [4, 8], [6, 7]], [[0, 1], [1, 4], [2, 0]], 2],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 3], [4, 5], [6, 8]], [[0, 1], [1, 4], [2, 0]], 3],
 [[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 3], [4, 8], [5, 6]], [[0, 1], [1, 4], [2, 0]], 4],
 [[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 8], [3, 4], [5, 6]], [[0, 1], [1, 4], [2, 0]], 5]],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 5], [3, 8], [4, 7]], [[0, 2], [0, 2], [3, 1]], 1],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 7], [2, 6], [3, 5], [4, 8]], [[0, 2], [0, 2], [3, 1]], 2],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 8], [2, 7], [3, 6], [4, 5]], [[0, 2], [0, 2], [3, 1]], 3]],
 [[[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 5], [3, 7], [4, 8]], [[0, 2], [0, 3], [3, 0]], 1]],
 [[[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8]], [[1, 3], [2, 4], [5, 8], [6, 7]], [[0, 2], [1, 0], [2, 3]], 1],
 [[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8]], [[1, 3], [2, 6], [4, 8], [5, 7]], [[0, 2], [1, 0], [2, 3]], 2],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 4], [2, 6], [3, 5], [7, 8]], [[0, 2], [1, 0], [2, 3]], 3],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 4], [2, 7], [3, 6], [5, 8]], [[0, 2], [1, 0], [2, 3]], 4],
 [[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 4], [3, 6], [7, 8]], [[0, 2], [1, 0], [2, 3]], 5],
 [[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 4], [3, 7], [6, 8]], [[0, 2], [1, 0], [2, 3]], 6],
 [[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 7], [3, 6], [4, 8]], [[0, 2], [1, 0], [2, 3]], 7],
 [[[1, 2, 3, 4, 5], [6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 8], [3, 7], [4, 6]], [[0, 2], [1, 0], [2, 3]], 8],
 [[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [7], [8]], [[1, 6], [2, 5], [3, 7], [4, 8]], [[0, 2], [1, 0], [2, 3]], 9]],
 [[[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 6], [3, 8], [4, 7]], [[0, 2], [1, 1], [2, 2]], 1],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 5], [2, 8], [3, 7], [4, 6]], [[0, 2], [1, 1], [2, 2]], 2],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6], [7, 8]], [[1, 6], [2, 5], [3, 7], [4, 8]], [[0, 2], [1, 1], [2, 2]], 3],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 7], [3, 6], [4, 8]], [[0, 2], [1, 1], [2, 2]], 4],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 5], [2, 8], [3, 7], [4, 6]], [[0, 2], [1, 1], [2, 2]], 5],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 5], [3, 7], [4, 8]], [[0, 2], [1, 1], [2, 2]], 6],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 6], [2, 5], [3, 8], [4, 7]], [[0, 2], [1, 1], [2, 2]], 7],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 8], [2, 5], [3, 7], [4, 6]], [[0, 2], [1, 1], [2, 2]], 8],
 [[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8]], [[1, 8], [2, 6], [3, 5], [4, 7]], [[0, 2], [1, 1], [2, 2]], 9]],


```

[ [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 5 ], [ 3, 7 ], [ 6, 8 ] ], [ [ 1, 0 ], [ 1, 2 ], [ 1, 3 ] ], 1 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 6 ], [ 3, 8 ], [ 5, 7 ] ], [ [ 1, 0 ], [ 1, 2 ], [ 1, 3 ] ], 2 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6, 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 8 ], [ 4, 6 ], [ 5, 7 ] ], [ [ 1, 0 ], [ 1, 2 ], [ 1, 3 ] ], 3 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6, 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 7 ], [ 3, 5 ], [ 6, 8 ] ], [ [ 1, 0 ], [ 1, 2 ], [ 1, 3 ] ], 4 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6, 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 4 ], [ 3, 8 ], [ 5, 7 ] ], [ [ 1, 0 ], [ 1, 2 ], [ 1, 3 ] ], 5 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6, 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 7 ], [ 3, 8 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 1, 0 ], [ 1, 2 ], [ 1, 3 ] ], 6 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ], [ 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 4 ], [ 3, 7 ], [ 5, 8 ] ], [ [ 1, 0 ], [ 1, 2 ], [ 1, 3 ] ], 7 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ], [ 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 7 ], [ 3, 5 ], [ 4, 8 ] ], [ [ 1, 0 ], [ 1, 2 ], [ 1, 3 ] ], 8 ] ],
[ [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 6 ], [ 3, 7 ], [ 4, 8 ] ], [ [ 1, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 3 ] ], 1 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 7 ], [ 3, 8 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 1, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 3 ] ], 2 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6, 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 7 ], [ 3, 8 ], [ 4, 6 ] ], [ [ 1, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 3 ] ], 3 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4 ], [ 5, 6, 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 8 ], [ 3, 5 ], [ 4, 7 ] ], [ [ 1, 1 ], [ 1, 1 ], [ 1, 3 ] ], 4 ] ],
[ [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 4 ], [ 2, 6 ], [ 3, 8 ], [ 5, 7 ] ], [ [ 1, 1 ], [ 1, 2 ], [ 1, 2 ] ], 1 ],
  [ [ [ 1, 2, 3 ], [ 4, 5, 6 ], [ 7, 8 ] ], [ [ 1, 5 ], [ 2, 8 ], [ 3, 6 ], [ 4, 7 ] ], [ [ 1, 1 ], [ 1, 2 ], [ 1, 2 ] ], 2 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6, 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 8 ], [ 4, 6 ], [ 5, 7 ] ], [ [ 1, 1 ], [ 1, 2 ], [ 1, 2 ] ], 3 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6, 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 4 ], [ 3, 8 ], [ 5, 7 ] ], [ [ 1, 1 ], [ 1, 2 ], [ 1, 2 ] ], 4 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5 ], [ 6, 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 6 ], [ 2, 7 ], [ 3, 5 ], [ 4, 8 ] ], [ [ 1, 1 ], [ 1, 2 ], [ 1, 2 ] ], 5 ],
  [ [ [ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ], [ 7 ], [ 8 ] ], [ [ 1, 3 ], [ 2, 7 ], [ 4, 6 ], [ 5, 8 ] ], [ [ 1, 1 ], [ 1, 2 ], [ 1, 2 ] ], 6 ] ] ]

```

2.4. Clases de equivalencia derivada bajo transformaciones elementales de álgebras gentiles con carcajes de dos ciclos y cinco vértices.

clbiicr2(10)

```

[ [ [ 1, 3, 4, 8, 11, 29, 38, 143, 144, 145, 147, 151, 152, 153, 156, 184, 231, 233, 234, 239, 255, 306, 307, 308, 309,
  310, 311, 316, 318, 322, 339, 407, 408, 409, 417, 455, 504, 505, 506, 509, 510, 511, 550, 551, 552, 563,
  [ [ 4, 6 ] ] ], [ 2, 5, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 30, 157, 158, 173, 174, 175, 177, 181, 183, 186,
  188, 189, 203, 204, 205, 207, 211, 212, 213, 216, 217, 218, 236, 238, 241, 243, 244, 257, 258, 260, 262, 263,
  265, 267, 268, 315, 317, 319, 320, 321, 323, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 336, 337, 338, 340, 412, 413, 414,
  418, 437, 438, 439, 442, 443, 444, 447, 448, 456, 459, 460, 519, 520, 521, 524, 525, 526, 534, 535, 536, 539,
  540, 541, 555, 556, 557, 560, 561, 562, 564, 565, [ [ 4, 6 ] ] ],

```

[6, 7, 15, 16, 19, 20, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 146, 148, 149, 150, 154, 155, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 178, 180, 182, 185, 187, 190, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 206, 208, 209, 210, 214, 215, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 232, 235, 237, 240, 242, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 261, 264, 266, 269, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 312, 313, 314, 324, 325, 326, 333, 334, 335, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 410, 411, 415, 416, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 440, 441, 445, 446, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 457, 458, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 507, 508, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 522, 523, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 537, 538, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 553, 554, 558, 559, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, [[4, 6]]],

[10, [[4, 6]]], [23, 52, 53, 54, 83, 93, 176, 179, 191, 256, 259, 270, 277, 288, [[4, 6]]]]

[[170, [[0, 1], [0, 1], [4, 4]]]],

[[120, [[0, 1], [0, 2], [4, 3]]]],

[[36, [[0, 1], [0, 3], [4, 2]]]],

[[8, [[0, 1], [0, 4], [4, 1]]]],

[[1, [[0, 1], [0, 5], [4, 0]]]],

[[120, [[0, 1], [1, 0], [3, 5]]]],

```

[[ 132, [[ 0, 1 ], [ 1, 1 ], [ 3, 4 ] ] ] ],
[[ 132, [[ 0, 1 ], [ 1, 2 ], [ 3, 3 ] ] ] ],
[[ 83, [[ 0, 1 ], [ 1, 3 ], [ 3, 2 ] ] ] ],
[[ 31, [[ 0, 1 ], [ 1, 4 ], [ 3, 1 ] ] ] ],
[[ 6, [[ 0, 1 ], [ 1, 5 ], [ 3, 0 ] ] ] ],
[[ 28, [[ 0, 1 ], [ 2, 0 ], [ 2, 5 ] ] ] ],
[[ 84, [[ 0, 1 ], [ 2, 1 ], [ 2, 4 ] ] ] ],
[[ 113, [[ 0, 1 ], [ 2, 2 ], [ 2, 3 ] ] ] ],
[[ 20, [[ 0, 2 ], [ 0, 2 ], [ 4, 2 ] ] ] ],
[[ 8, [[ 0, 2 ], [ 0, 3 ], [ 4, 1 ] ] ] ],
[[ 1, [[ 0, 2 ], [ 0, 4 ], [ 4, 0 ] ] ] ],
[[ 48, [[ 0, 2 ], [ 1, 0 ], [ 3, 4 ] ] ] ],
[[ 48, [[ 0, 2 ], [ 1, 1 ], [ 3, 3 ] ] ] ],
[[ 48, [[ 0, 2 ], [ 1, 2 ], [ 3, 2 ] ] ] ],
[[ 20, [[ 0, 2 ], [ 1, 3 ], [ 3, 1 ] ] ] ],
[[ 4, [[ 0, 2 ], [ 1, 4 ], [ 3, 0 ] ] ] ],
[[ 14, [[ 0, 2 ], [ 2, 0 ], [ 2, 4 ] ] ] ],
[[ 40, [[ 0, 2 ], [ 2, 1 ], [ 2, 3 ] ] ] ],
[[ 26, [[ 0, 2 ], [ 2, 2 ], [ 2, 2 ] ] ] ],
[[ 1, [[ 0, 3 ], [ 0, 3 ], [ 4, 0 ] ] ] ],
[[ 20, [[ 0, 3 ], [ 1, 0 ], [ 3, 3 ] ] ] ],
[[ 20, [[ 0, 3 ], [ 1, 1 ], [ 3, 2 ] ] ] ],
[[ 13, [[ 0, 3 ], [ 1, 2 ], [ 3, 1 ] ] ] ],
[[ 3, [[ 0, 3 ], [ 1, 3 ], [ 3, 0 ] ] ] ],
[[ 8, [[ 0, 3 ], [ 2, 0 ], [ 2, 3 ] ] ] ],
[[ 17, [[ 0, 3 ], [ 2, 1 ], [ 2, 2 ] ] ] ],
[[ 13, [[ 0, 4 ], [ 1, 0 ], [ 3, 2 ] ] ] ],
[[ 6, [[ 0, 4 ], [ 1, 1 ], [ 3, 1 ] ] ] ],
[[ 2, [[ 0, 4 ], [ 1, 2 ], [ 3, 0 ] ] ] ],
[[ 4, [[ 0, 4 ], [ 2, 0 ], [ 2, 2 ] ] ] ],
[[ 7, [[ 0, 4 ], [ 2, 1 ], [ 2, 1 ] ] ] ],
[[ 5, [[ 0, 5 ], [ 1, 0 ], [ 3, 1 ] ] ] ],

```

```

[[ 1, [[ 0, 5 ], [ 1, 1 ], [ 3, 0 ] ] ] ],
[[ 3, [[ 0, 5 ], [ 2, 0 ], [ 2, 1 ] ] ] ],
[[ 1, [[ 0, 6 ], [ 1, 0 ], [ 3, 0 ] ] ] ],
[[ 1, [[ 0, 6 ], [ 2, 0 ], [ 2, 0 ] ] ] ],
[[ 20, [[ 1, 0 ], [ 1, 0 ], [ 2, 6 ] ] ] ],
[[ 36, [[ 1, 0 ], [ 1, 1 ], [ 2, 5 ] ] ] ],
[[ 43, [[ 1, 0 ], [ 1, 2 ], [ 2, 4 ] ] ] ],
[[ 35, [[ 1, 0 ], [ 1, 3 ], [ 2, 3 ] ] ] ],
[[ 24, [[ 1, 0 ], [ 1, 4 ], [ 2, 2 ] ] ] ],
[[ 20, [[ 1, 0 ], [ 1, 5 ], [ 2, 1 ] ] ] ],
[[ 7, [[ 1, 0 ], [ 1, 6 ], [ 2, 0 ] ] ] ],
[[ 24, [[ 1, 1 ], [ 1, 1 ], [ 2, 4 ] ] ] ],
[[ 56, [[ 1, 1 ], [ 1, 2 ], [ 2, 3 ] ] ] ],
[[ 36, [[ 1, 1 ], [ 1, 3 ], [ 2, 2 ] ] ] ],
[[ 23, [[ 1, 1 ], [ 1, 4 ], [ 2, 1 ] ] ] ],
[[ 7, [[ 1, 1 ], [ 1, 5 ], [ 2, 0 ] ] ] ],
[[ 31, [[ 1, 2 ], [ 1, 2 ], [ 2, 2 ] ] ] ],
[[ 35, [[ 1, 2 ], [ 1, 3 ], [ 2, 1 ] ] ] ],
[[ 10, [[ 1, 2 ], [ 1, 4 ], [ 2, 0 ] ] ] ],
[[ 7, [[ 1, 3 ], [ 1, 3 ], [ 2, 0 ] ] ] ] ];

```

Bibliografía

- [As97] H. Asashiba, *A covering technique for derived equivalence*, Journal of Algebra **191** (1997), no. 1, 382-415.
- [As98] H. Asashiba, *Derived equivalence and stable equivalence of repetitions of finite global dimension. Algebras and modules II* (Geiranger, 1996), CMS Conf. Proc. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1998), 7-15.
- [AH81] I. Assem, D. Happel, *Generalized tilted algebras of type \mathbb{A}_n* , Comm. Algebra **9** (1981), 2101-2125.
- [AS87] I. Assem, A. Skowroński, *Iterated tilted algebras type $\tilde{\mathbb{A}}_n$* , Math. Z. **195** (1987), 269-290.
- [BH05] C. Bessenrodt, T. Holm, *q-Cartan matrices and combinatorial invariants of derived categories for skewed-gentle algebras*, arXiv:math.RT/0504547 v1.
- [BGS04] G. Bobiński, C. Geiss, A. Skowroński, *Classifications of discrete derived categories*, Cent. Eur. J. Math. **2** (2004), no. 1, 19-49.
- [BR87] M.C.R. Butler, C.M. Ringel, *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*, Comm. Algebra **15** (1987), no. 1-2, 145-179.
- [GP99] C. Geiss, J.A. de la Peña, *Auslander-Reiten components for clans*, Bol. Soc. Mexicana (3) **5** (1999), 307-326.
- [Ge02] C. Geiss, *On components of type $\mathbb{Z}A_\infty$ for string algebras*, Communications in algebra **26** (2002), no. 3, 749-758.
- [GS99] F. Guil-Asencio, M. Saorín, *The group of outer automorphisms and the Picard group of an algebra*, Algebras and Representation Theory **2** (1999), 313-330.
- [Ha88] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Math. Soc. LN Series, 119 Cambridge University Press, 1988.
- [HSZ01] T. Holm, J. Schröer, A. Zimmermann, *Combinatorial derived equivalences between gentle algebras*, preprint (2001), 1-14.
- [HW83] D. Hughes, J. Waschbüsch, *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. London Math. Soc (3) **series 46** (1983), no.2, 347-363.

- [HS01] B. Huisgen-Zimmermann, M. Saorín, *Geometry of chain complexes and outer automorphisms under derived equivalence*, Transactions of the American Mathematical Society **353** (2001), no. 12, 4757-4777.
- [Hu95] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic groups*, Springer Graduate Text in Mathematics, v. 21, New York, 1995.
- [Ric89] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), no. 3, 303-317.
- [Ri97] C. M. Ringel, *The repetitive algebra of a gentle algebra*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **3** (1997), no. 2, 235-253.
- [Ro00] R. Rouquier, *Groupes d'automorphismes et équivalences stables ou dérivés*.
- [SZ03] J. Schröer, A. Zimmermann, *Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras*, Math. Z. **244** (2003), no. 3, 515-530.
- [Vo01] D. Vossieck, *The algebras with discret derived category*, Journal of Algebra **243** (2001), 168-176.
- [We97] C.A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Adv. Math., 38, Cambridge University Press, 1997.