



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“Fenómenos Ópticos no Lineales en Cristales
Líquidos Quirales”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

CARLOS GABRIEL AVENDAÑO LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. GERARDO JORGE VÁZQUEZ FONSECA

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. MARCELO DEL CASTILLO MUSSOT



posgrado en ciencias físicas
UNAM

MÉXICO, D.F., AGOSTO DE 2006



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

- A mi asesor de Tesis:
 - Dr. Juan Adrian Reyes Cervantes. Por su constante motivación moral y académica, su total apoyo científico y por el tiempo dedicado para que esta tesis se pudiera realizar. Pero sobre todo, por su grandeza como ser humano, la cual no sólo radica en su sabiduría que comparte a manos llenas, sino en su sencillez como persona y amigo.

- Al comité tutorial:
 - Dr. Gerardo Jorge Vázquez Fonseca. Por su apoyo académico, el cual me permitió enriquecer mis conocimientos; y porque cada vez que lo consultaba, además de despejarme la duda, lograba sacarme una sonrisa.
 - Dr. Marcelo del Castillo Mussot. Por sus atinadas discusiones científicas que me permitieron pensar más allá de lo trivial.

A los tres, por plantearme nuevos retos intelectuales y brindarme los primeros elementos necesarios para afrontarlos y resolverlos.

- Al Honorable Jurado:
 - Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes
 - Dr. Rosalío Rodríguez Zepeda
 - Dra Catherine García Reimbert
 - Dr. Peter Halevi
 - Dr. Rubén Ramos García
 - Dr. Gerardo Jorge Vázquez Fonseca
 - Dr. Carlos Mendoza Ruíz

Por su paciencia en la revisión de esta tesis y por su opinión crítica y acertada para el mejoramiento de la misma.

- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT). Por la beca brindada durante todos mis estudios.

- A la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP). Por la beca complementaria asignada durante toda esta investigación.
- Al Posgrado en Ciencias Físicas. Por todo el apoyo y asesorías recibidos.
- Al Dr. Claudio Oldano, quién con su calidad humana, aportaciones y gran experiencia científica, logró que parte de esta tesis se llevara a cabo.
- Dr. Giovanni Barbero. Por su apoyo incondicional durante mi estancia de investigación en la cual se realizó parte de esta tesis.
- A la Universidad Nacional Autónoma de México, que me abrió las puertas de su casa para desarrollarme como científico y me brindó siempre ayuda a través de su infraestructura, así como de su personal académico y administrativo.
- Finalmente, a mi familia y amigos, de los cuales me ocuparé en una página especial.

A todos las más sinceras **GRACIAS**.

DE MANERA ESPECIAL...

Carlos Gabriel Avendaño López

Índice general

Introducción	v
1. Cristales Líquidos	1
1.1. Nemáticos	2
1.2. Colestéricos	4
1.2.1. Agentes externos y algunas aplicaciones de los CLC	6
1.3. Esméticos	9
2. La energía libre de distorsión	13
2.1. Nemáticos	15
2.1.1. La aproximación de constantes elásticas iguales	17
2.1.2. Ecuaciones de equilibrio	17
2.2. Colestéricos	21
3. Medios anisotrópicos y quirales	23
3.1. Ecuaciones de Maxwell	23
3.2. Representación de Marcuvitz-Schwinger	25
3.2.1. Incidencia Normal en un CLC	33
3.3. Propagación de ondas electromagnéticas en CLC	37
3.3.1. Planteamiento del problema	37
4. Óptica lineal de medios helicoidales	41
4.1. Propiedades ópticas: medio no magnético	42
4.1.1. Modos Propios Para Ondas Viajeras	45

4.1.2.	Modos Propios Evanescentes	50
4.2.	Propiedades ópticas: medio magnético	54
4.2.1.	La ecuación de propagación y sus soluciones	54
4.2.2.	Representación de amplitud y métrica del espacio de estado	57
4.2.3.	Propiedades de las ondas estacionarias dentro de la banda prohibida	58
4.2.4.	Matrices métricas	59
4.3.	Matriz de transferencia y de dispersión	60
5.	Defectos de torsión	63
5.1.	Singuletes	64
5.1.1.	Muestra infinita	65
5.1.2.	Longitud de onda del modo de defecto	68
5.1.3.	Muestras delgadas	70
5.2.	Dobletes	75
5.2.1.	Propiedades de dispersión de la capa con dos defectos de torsión	75
5.2.2.	Frecuencias de defecto	76
5.2.3.	Muestra Finitas	80
5.3.	Multipletos	84
6.	Óptica no lineal de sistemas quirales	87
6.1.	Energía libre de Helmholtz	88
6.2.	Ecuación de Amplitud	92
6.3.	Cantidades Conservadas	97
6.3.1.	Fuera de la banda de reflexión	97
6.3.2.	Dentro de la banda de reflexión	100
6.4.	Algunas Soluciones Particulares	100
6.4.1.	Análisis Fuera de la Banda de Reflexión	100
6.4.2.	Análisis Dentro de la Banda de Reflexión	103
6.4.3.	Método de Solución Numérico	104
6.4.4.	Método de Aproximación Variacional	109

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
7. Conclusiones y comentarios finales	113
A. Parámetros y leyes de escalamiento	121
B. Coeficientes de la ecuación de amplitud fuera de la banda de reflexión	123
C. Coeficientes de la ecuación de amplitud dentro de la banda de reflexión	127
D. Método de dos pasos	131

RESUMEN

Se estudian analíticamente los fenómenos ópticos lineales y no lineales presentes en muestras que tienen una estructura periódica helicoidal (de tipo colestérico) y en donde se considera que la luz se propaga paralelamente al eje de la muestra. Se deducen expresiones analíticas para una onda electromagnética que se propaga en un medio, el cual es al mismo tiempo, dieléctrico y magnético; el conjunto de soluciones para este sistema exhibe un intervalo de longitudes de onda, dentro del cual, dos de las cuatro ondas propias son evanescentes (*banda de reflexión*). Dentro de este intervalo y usando el formalismo de la matriz de transferencia, se estudian las propiedades ópticas de un material helicoidal con un número n_0 de defectos de torsión idénticos y equidistantes. Se dan expresiones analíticas para la transmitancia y reflectancia de muestras con $n_0=1$. Para $n_0=1, 2, 3$, se definen analíticamente las longitudes de onda del defecto λ_d para las cuales, las ondas evanescentes, en los planos del defecto, son por mucho las que dominan, dando origen a un confinamiento de energía en las proximidades de los planos del defecto. Las matrices de transferencia y de dispersión de n_0 defectos de torsión se escriben en términos de la matriz de transferencia de un solo defecto de torsión. Se obtiene que n_0 defectos de torsión generan n_0 longitudes de onda del defecto λ_d , para los cuales existe un confinamiento de energía alrededor de los n_0 planos del defecto. Se estudia la propagación óptica de un paquete estrecho de ondas en un cristal líquido colestérico puro considerando un acoplamiento débilmente no lineal entre el campo óptico y el medio elástico. Se construye la solución como la superposición de cuatro paquetes de onda estrechos centrados alrededor de las ondas propias lineales de la estructura helicoidal y, cuyas correspondientes envolventes A , son funciones que varían lentamente con sus argumentos. Se encuentra un conjunto de cuatro ecuaciones acopladas que describen el paquete de ondas vectorial resultante, el cual tiene algunas constantes de integración y que bajo condiciones especiales, se reduce a la ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes que dependen de la coordenada espacial. Esta ecuación se resuelve de dos maneras; aplicando un método variacional y usando un método numérico. Se observa que ambos métodos proporcionan el mismo tipo de solución estable: un solitón oscuro. Se obtiene analíticamente la dependencia con la longitud de onda del índice de refracción no lineal demostrando que tiene máximos en las fronteras de la banda de reflexión. También se exhibe la existencia de otras soluciones exactas pero que no presentan autoenfocamiento.

ABSTRACT

Linear and nonlinear optical phenomena are theoretically studied for light propagation along the helix axis of a sample which possesses a helical periodic structure (cholesteric-like). Analytical expressions are deduced for an electromagnetic wave propagating through a sample which is, at the same time, dielectric and magnetic one; the complete solution of this system exhibits a wavelength range, in which, two of the four eigenwaves are evanescent (*reflection band*). Within this range, the optical properties of a helical material with a finite number n_0 of identical and equidistant twist defects are studied by using the transfer matrix formalism. Exact and analytical expressions are given for the transmittance and reflectance of samples with $n_0=1$. For $n_0=1, 2, 3$, the defect wavelengths λ_d are analytically defined, for which, the evanescent eigenwaves, at the defect planes, are by far the dominant ones giving rise to the energy confinement near the defect planes. The transfer and scattering matrices of n_0 twist defects are written in terms of the transfer matrix of a single twist defect. It is obtained that n_0 twist defects generate n_0 defect wavelengths λ_d , for which, the energy is confined around the n_0 defect planes. By considering a weakly nonlinear coupling between the optical field and the elastic media, the propagation of a narrow optical wave packet through a pure cholesteric liquid crystal is studied. The solution is constructed as the superposition of four narrow wave packets centered around the linear eigenwaves of the helical structure whose corresponding envelopes A are slowly varying functions of their arguments. A set of four coupled equations to describe the resulting vector wave packet are found, which has some integration constants and that under special conditions reduces to the nonlinear Schrödinger equation with space-dependent coefficients. This equation is solved, both, by using a variational approach and by performing numerical calculations. It is observed that both methods give the same type of stable solution: a dark soliton. The wavelength dependence of the nonlinear refraction index is analytically computed showing that this has its maxima at the edges of the reflection band. The existence of some other exact but non-self-focused solutions are also exhibited.

Introducción

En las últimas décadas, el diseño y la fabricación de materiales artificiales con nuevas e interesantes propiedades, no estudiadas previamente con suficiente amplitud y profundidad, han motivado que exista un creciente interés dentro de la comunidad científica en la investigación tanto teórica como experimental de estos nuevos materiales. Como primer ejemplo se tienen los llamados metamateriales. Estos materiales tienen la peculiaridad de poseer $\varepsilon < 0$ y $\mu < 0$, en donde ε y μ son la permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética del medio, respectivamente. Si en estos metamateriales incide un haz electromagnético con vector de onda \vec{k} , el correspondiente vector de Poynting \vec{S} apunta en la dirección opuesta a \vec{k} [1]. De esta manera, luz que incide sobre un metamaterial experimentará refracción pero opuesta a la que se observa usualmente. La fase de una onda viajando en un material normal se incrementa, en cambio, en un metamaterial decrece. Estos medios podrían utilizarse en la fabricación de lentes planas casi perfectas. En efecto, mientras que en una lente convencional la resolución de la imagen está limitada por la longitud de onda, en una lente construída con un metamaterial la resolución es infinita. Un segundo conjunto de materiales que aparecieron desde los 80's son los medios quirales y bianisotrópicos que surgieron como algunos de los temas más novedosos e interesantes por sus propiedades ópticas no locales. El origen de estas nuevas propiedades radica principalmente en las relaciones constitutivas que gobiernan a los campos electromagnéticos en estos medios [2] y que son causa del comportamiento peculiar de estos materiales. Una de las características más destacadas de estos medios es su gran actividad óptica, es decir, la capacidad de una molécula o grupo de moléculas para hacer girar el plano de polarización de una onda electromagnética conforme ésta se propaga en la muestra [2, 3].

En la presente tesis se estudian teóricamente los fenómenos ópticos lineales y no lineales presentes en cristales líquidos colestéricos (*CLC*), así como en materiales sólidos artificiales contruídos de tal forma que presentan simetría helicoidal. Ambas son algunas de las estructuras periódicas más interesantes encontradas en la literatura debido a sus propiedades ópticas, tanto teórica como experimentalmente, y es por ello el motivo de esta investigación.

Las investigaciones enfocadas al análisis de propiedades ópticas en medios con simetría helicoidal es muy amplia y relativamente reciente. Soluciones analíticas y exactas, para propagación axial, se han conocido perfectamente desde hace más de medio siglo [4, 5], para medios no magnéticos, y más recientemente en [6], para medios magnéticos. Las soluciones en este caso son cuatro ondas de Bloch que, escritas en un marco de referencia apropiado, se pueden escribir como ondas planas con vectores de onda constante. Hasta donde se sabe, nada similar se encuentra para otro medio periódico, pues en el caso más simple de capas isotrópicas periódicamente espaciadas, la solución es una superposición de un número infinito de ondas planas. Se encuentra que, a incidencia normal, hay una región de longitudes de onda (*banda de reflexión total* o *banda parcialmente prohibida*), en donde hay reflexión total para una componente de luz polarizada circularmente, a la vez que la otra componente del haz es transmitida completamente. En medios con simetría helicoidal las propiedades ópticas dependen mucho de la relación que existe entre la longitud de onda incidente λ_0 y el periodo espacial p : cuando p corresponde a una λ_0 en el rango visible, la muestra emite colores brillantes por reflexión total; de tal modo que si se hace incidir luz blanca sobre una muestra de CLC, el color reflejado puede ser elegido cambiando simplemente el valor de p .

Los avances en las técnicas de fabricación de materiales con simetría helicoidal, así como la posibilidad de insertar defectos en ellos, ha sido motivo de primeras inves-

tigaciones que darán origen a dispositivos con gran potencial en aplicaciones fotónicas. Un defecto en una estructura se presenta cuando la periodicidad de dicha estructura se rompe abruptamente. Un posible defecto puede lograrse haciendo que la configuración del director \hat{n} , que describe la rotación de la hélice, cambie abruptamente de un valor $\theta_-(z_0) = q_0 z_0$, a un valor $\theta_+(z_0) = q_0 z_0 + \phi_t$, en un punto z_0 sobre el eje de la hélice, donde ϕ_t es el *ángulo de torsión*. Experimentalmente, este tipo de defectos se pueden obtener de la siguiente manera: (1) primero se considera una muestra helicoidal sin defectos entre planos ortogonales al eje de la hélice; (2) enseguida se corta la muestra de manera que se obtengan dos o más capas entre planos paralelos; y (3) finalmente se gira cualquier capa con respecto a la precedente un cierto ángulo a lo largo del eje común. Muestras con solo un defecto de torsión han recibido gran atención tanto teórica [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14], como experimentalmente [15, 16, 17, 18]. En estos trabajos se encuentra que un defecto en una estructura puede dar origen a un modo resonante dentro de la banda de reflexión, esto es, ondas estacionarias con una alta densidad de energía localizada en la proximidad del defecto (*modo de defecto*), haciéndolos susceptibles de considerarse para el diseño de láseres con umbral de intensidad de activación bajo. Para un cierto valor de la longitud de onda incidente λ_0 , existen picos de transmitancia y reflectancia en función del ángulo de torsión. Resultados similares se han encontrado para la propagación de ondas acústicas en sistemas helicoidales sólidos [19, 20, 21].

En los modelos considerados en la literatura, el haz electromagnético que incide sobre la muestra porta una energía que se puede despreciar en comparación con la energía elástica del medio. Sin embargo, la disponibilidad de láseres como generadores de ondas electromagnéticas de potencia moderada, así como el posible confinamiento de energía óptica en las proximidades de un defecto de torsión discutido en el párrafo anterior, requiere de un análisis en el cual se debe tomar en cuenta el acoplamiento entre la densidad de energía elástica del medio y la densidad de energía electromagnética. En ciertos láseres, la potencia P puede fácilmente llegar a valores del orden de $I = 3 \times 10^5$ W/m justo en la región de la cintura del haz de área $30\mu m^2$. Bajo estas condiciones,

la energía electromagnética es comparable con la energía elástica del medio y, por lo tanto, su contribución debe tomarse en cuenta y ahora las ecuaciones resultantes son no lineales dando lugar a fenómenos más complejos e igualmente interesantes. Aquí, y considerando un acoplamiento débil entre el campo óptico y el medio elástico, se muestra uno de tales fenómenos: los solitones [22, 23, 24, 25, 26]. Los solitones son un resultado de la dinámica no lineal cuando se alcanza un equilibrio entre la dispersión y el autoenfocamiento. Soluciones de este tipo se han considerado previamente solo en cristales líquidos nemáticos, encontrando efectos no lineales gigantes [27, 28]. Aquí, además de considerar la gran actividad no lineal que presentan los cristales líquidos, se aprovecha el grado de libertad extra que se tiene en los CLC, el cual llevará a encontrar resultados muy interesantes: su periodicidad.

En general, el modo de defecto en medios periódicos es la superposición de ondas de Bloch y su descripción requiere del uso de cálculos o ecuaciones complicadas, con la única excepción de estructuras helicoidales con defectos de torsión. Este hecho es una motivación muy importante para la realización de la presente tesis, pues la obtención de soluciones analíticas y exactas, permite un entendimiento más profundo de la física del sistema. Varios resultados numéricos se han encontrado previamente para el caso de un defecto de torsión, sin embargo, aquí se extiende el análisis de manera sistemática para una muestra con cualquier número de defectos, con la gran ventaja que los resultados presentados aquí son analíticos y exactos. Asimismo, el uso apropiado de las soluciones exactas conocidas desde hace más de medio siglo, para propagación axial, permite deducir expresiones que describen la óptica no lineal, en la cual el acoplamiento entre la energía electromagnética y la energía elástica del medio se debe tomar en cuenta. Aunque las expresiones obtenidas en este caso son más complejas, ellas son analíticas.

La investigación original presentada en esta tesis se enfoca sobre estructuras con simetría helicoidal que son, al mismo tiempo, dieléctricas y magnéticas, de tal modo que los resultados obtenidos aquí, son válidos para cualquier longitud de onda. La adición

de un tensor de permeabilidad al tensor de permitividad permite obtener ecuaciones que son a la vez más simples y generales, al menos en el sentido de que son más simétricas. Adicionalmente, una elección de un marco de referencia apropiado, simplifica enormemente las ecuaciones.

En base a lo expuesto, se puede plantear el objetivo general de este trabajo de la siguiente manera:

”Estudiar teórica y analíticamente los fenómenos ópticos lineales y no lineales, para propagación axial, presentes en medios con simetría helicoidal.”

Y como objetivos particulares los siguientes:

- Generalización de las soluciones obtenidas en el régimen de la óptica lineal para medios que son, al mismo tiempo, dieléctricos y magnéticos.
- Óptica lineal de medios con un número finito de defectos de torsión.
- Óptica en el régimen débilmente no lineal de CLC puros.

El lineamiento a seguir en el presente trabajo a fin de cumplir con los objetivos establecidos, se muestra a continuación.

En el capítulo 1 se hace una breve revisión sobre la clasificación y descripción de algunas de las propiedades de los cristales líquidos (*CL*), poniendo particular énfasis en los CLC, los cuales debido a su simetría helicoidal, son de especial interés.

En el capítulo 2 se obtienen las expresiones para la energía libre de distorsión y las ecuaciones de equilibrio para CL nemáticos y CLC. Estas ecuaciones serán posteriormente acopladas con las ecuaciones que obedecen el campo óptico.

Enseguida, en el capítulo 3 y tomando en cuenta que se estudiará la propagación axial de ondas electromagnéticas, se escriben las ecuaciones de Maxwell y sus correspondientes relaciones constitutivas para medios anisotrópicos y quirales en una representación más apropiada, la cual permitirá analizar de una manera sistemática los sistemas aquí mostrados, además de aprovechar la propiedad de transversalidad del campo óptico. La finalidad será separar el conjunto de ecuaciones de Maxwell en dos partes: 1) una ecuación en la que estén involucradas sólo las componentes transversales de los campos, las cuales son perpendiculares al eje de la hélice; y 2) una ecuación en la que esté involucrada sólo la componente longitudinal. Antes de finalizar este capítulo y basado en los capítulos anteriores, se planteará el problema más general de interacción entre el campo electromagnético y un cristal líquido.

El capítulo 4 de esta tesis presenta una revisión sobre la óptica lineal de medios con simetría helicoidal que ya ha sido estudiada previamente por otros autores, incluyendo una aportación original en donde se considera que la muestra es, tanto dieléctrica, como magnética. A diferencia de los análisis encontrados en la literatura, en los cuales solo se considera el tensor de permitividad, aquí también se toma en cuenta el tensor de permeabilidad. Esto permite obtener ecuaciones más generales. Esta última parte es esencial, pues representa la base para el planteamiento y solución de los sistemas analizados posteriormente.

El capítulo 5 presenta la segunda parte original de la investigación: se analiza la óptica lineal axial de un material con simetría helicoidal con varios defectos de torsión. Usando la solución más general obtenida en el capítulo 4, y exigiendo la continuidad tangencial del campo electromagnético en el plano de cada uno de los defectos, se obtienen las correspondientes matrices de transferencia y de dispersión, y a partir de aquí se deducen expresiones analíticas de diversas propiedades ópticas, como son la transmitancia y reflectancia.

La tercera aportación original se encuentra en el capítulo 6, en donde se estudia la óptica débilmente no lineal de un paquete de ondas que se propaga axialmente en CLC puros. Nuevamente, las soluciones más generales encontradas en el capítulo 4, permiten obtener una ecuación no lineal vectorial que describe la interacción débilmente no lineal entre el paquete de ondas y la muestra. Se hace una clara distinción entre la propagación de un paquete de ondas con vector de onda central dentro y fuera de la banda de reflexión.

Finalmente, se resumen ciertos resultados importantes, se presentan algunas conclusiones y se señalan algunas perspectivas derivadas del presente trabajo.

Es importante destacar que los resultados obtenidos y mostrados en la presente tesis sirvieron como base para la escritura y publicación de dos artículos de investigación en revistas de arbitraje internacional; las referencias de estos artículos son [6] y [29].

Capítulo 1

Cristales Líquidos

Además de los tres estados de agregación más estudiados que presenta la materia, los cuales son el sólido, líquido y gaseoso, existen las llamadas mesofases, esto es, fases intermedias que algunas sustancias presentan y que se forman durante la transición de un estado a otro. Un cristal líquido (*CL*) es una mesofase formada en la transición sólido-líquido. Dependiendo de la geometría molecular particular, la sustancia puede experimentar una o más mesofases antes de transformarse en la fase líquida. Como es bien sabido, un cristal sólido posee orden posicional, es decir, despreciando las vibraciones térmicas, los centros de masa de las moléculas o grupos de moléculas en esta fase están condicionados a ocupar solo ciertas posiciones para formar una red periódica. Si adicionalmente las moléculas constituyentes del cristal no presentan simetría esférica y existe cierta interacción que permite que cada una de éstas se oriente con respecto a sus vecinas, existirá de forma natural un cierto grado de orden o simetría orientacional. Cuando un sólido se funde en un líquido, ambos tipos de orden se pierden completamente. En cambio, cuando un sólido se transforma en un cristal líquido, el orden orientacional prevalece, mientras que los centros de masa de los elementos de la red periódica pueden ahora moverse en forma análoga a como lo hace un líquido [30]. La transición a este estado intermedio puede obtenerse fundamentalmente ya sea por procesos térmicos (*fases termotrópicas*) o por la influencia de solventes (*fases liotrópicas*). Los primeros conocimientos sobre cristales líquidos se remontan a finales del siglo XIX mediante los descubrimientos de Reintzer y Lehmann [31, 32] y sus primeras aplicaciones en

termografía y pantallas electro-ópticas en la década de los 60's a través de los trabajos de Fergason [33, 34].

Aunque en la literatura existen diferentes tipos de cristales líquidos, aquí se describen brevemente sólo los tres tipos principales: *nemáticos*, *colestéricos* y *esméticos* [35, 36, 37], haciendo especial énfasis en los cristales líquidos colestéricos.

Un requisito esencial para obtener un cristal líquido es que las moléculas o grupos de moléculas constituyentes sean altamente anisotrópicas. Los nemáticos, colestéricos y esméticos están frecuentemente conformados por objetos alargados (tipo rodillo), sin embargo, otro tipo de fases (no presentadas aquí) y algunos tipos de nemáticos, pueden estar conformados por objetos discóticos. Las moléculas en cada una de estas mesofases se ordenan en tal forma que el sistema presenta un orden orientacional manifestado por una dirección promedio en la cual están orientados localmente los ejes moleculares. Esta orientación preferencial se describe macroscópicamente por un vector unitario o comúnmente llamado *director* \hat{n} y representa la orientación promedio de alineamiento de los centros de masa cada punto de la muestra.

1.1. Nemáticos

Cinco características principales distinguen a los cristales líquidos nemáticos [38]:

- Los grupos de moléculas no tienen orden de largo alcance traslacional y, por lo tanto, no se observan máximos y mínimos en el patrón de difracción de rayos X como lo haría comúnmente un cristal sólido. En otras palabras, el nemático se comporta como un líquido convencional. Para un nemático termotrópico típico tal como el PAA (p-azoxyanisol), con fórmula química representada en la Fig. 1.1, la viscosidad es del orden de $\sim 10^{-1}$ Poise a temperatura ambiente (~ 10 veces más grande que la viscosidad del agua).
- Hay un orden *direccional* de las moléculas, es decir, tienden a ser paralelas a cierto

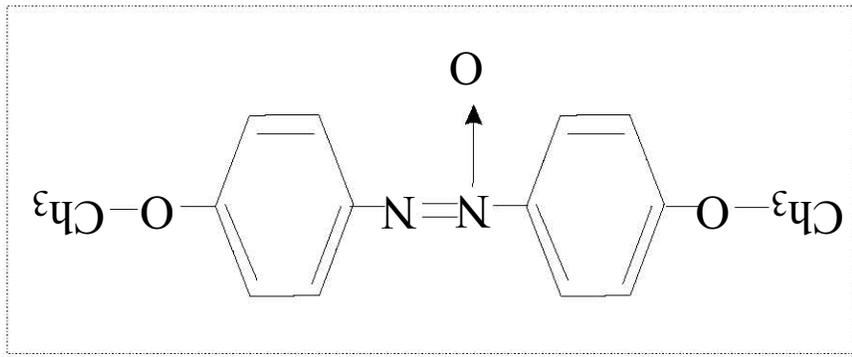


Figura 1.1: Fórmula química del PAA (*p-azoxyanisole*). Nótese que el centro constituido por 2 anillos de benceno con un enlace fuerte, es un elemento rígido, mientras que en los extremos se encuentran enlaces flexibles llamados radicales.

eje común, el cual se ha definido anteriormente como director \hat{n} (Fig. 1.2). Óptica- mente, un nemático es un medio uniaxial con el eje óptico a lo largo de \hat{n} . Se ha observado experimentalmente que la diferencia entre índices de refracción medidos con polarizaciones paralelas o perpendiculares a \hat{n} es de alrededor 0,2 para el PAA. En todos los casos conocidos, hay una simetría rotacional completa alrededor del eje \hat{n} .

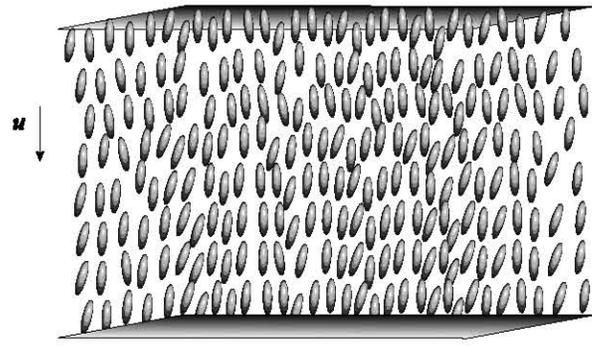


Figura 1.2: El arreglo de moléculas en la fase nemática (centros aleatorios pero con dirección promedio preferencial de las moléculas \hat{n}).

- La dirección de \hat{n} es arbitraria en el espacio, impuesta por fuerzas pequeñas tales como las paredes del contenedor.

- Los estados \hat{n} y $-\hat{n}$ son indistinguibles debido a que las contribuciones dipolares promedio de las moléculas son nulas para nemáticos no ferroeléctricos.
- Esta fase se presenta solamente en materiales que no distinguen entre derecha e izquierda, ésto es, cada molécula o grupo de moléculas constituyentes, es idéntica a su imagen espejo. Cuando una molécula o grupo de moléculas *no* es idéntica a su imagen espejo se dice que es *quiral*.

1.2. Colestéricos

Si en un material nemático se disuelven moléculas que son quirales, ésto es, que son ópticamente activas, se encuentra que la estructura original sufre una distorsión en forma de hélice; así, el director \hat{n} gira en función de la posición en torno a un eje común¹. El mismo tipo de distorsión se encuentra también en ésteres colestéricos puros y por esta razón, a la fase helicoidal de un nemático se le conoce como *crystal líquido colestérico (CLC)*. La primera fase colestérica, llamada *colesterol benzoato*, fue reportada por Reinitzer en el año 1888 [31].

Localmente, un colestérico es muy similar a un nemático, sin embargo, ahora el director \hat{n} no es constante en el espacio, sino que la configuración preferencial de las moléculas es helicoidal (Fig. 1.3). Haciendo el eje de la hélice coincidir con el eje z , tenemos la siguiente expresión para \hat{n}

$$\begin{aligned}n_x &= \cos(q_0 z + \phi) \\n_y &= \text{sen}(q_0 z + \phi) \\n_z &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

en donde q_0 está relacionado con el *paso* o periodo espacial $p = 2\pi/q_0$ de la hélice y ϕ es una fase arbitraria.²

¹A nivel molecular, uno de los enlaces flexibles del nemático (ver Fig. 1.1) adopta una molécula chiral de tal modo que cada nueva molécula formada interactúa con su vecina en tal forma que las fuerzas intermoleculares permiten el alineamiento entre ellas haciendo un ángulo pequeño. Esto se repite con cada molécula y su vecina ocasionando una distorsión en forma de hélice. El colestérico puede ser derecho o

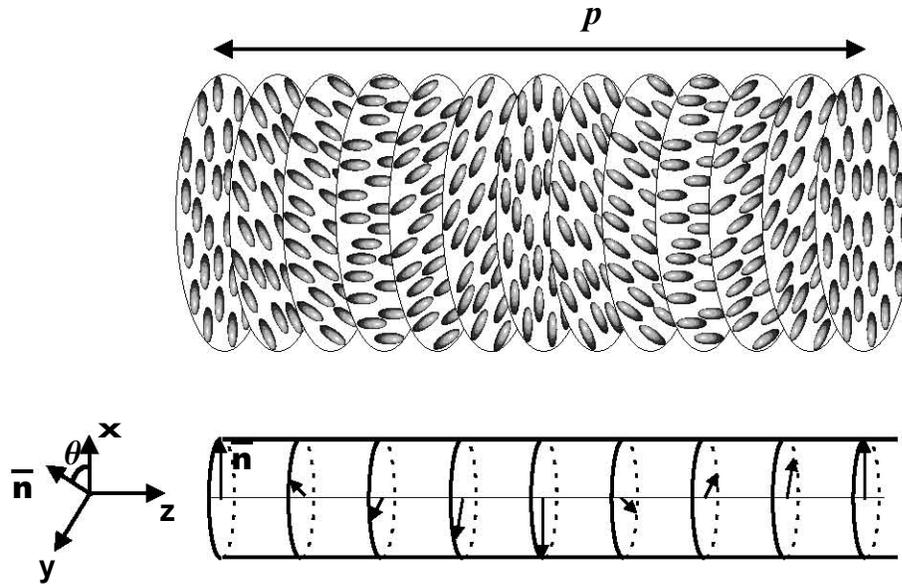


Figura 1.3: El arreglo de moléculas en la fase colestérica. En cada plano sucesivo las moléculas se comportan como en la fase nemática. Aquí p representa el periodo espacial de la hélice.

Un valor típico para p es de 6000 \AA , mucho mayor que las dimensiones moleculares de unos cuantos angstroms. El orden del valor de p es la causa de actividad óptica de interés en el intervalo de radiación visible. Para un material dado, el valor de p depende de la temperatura, siendo más pequeño conforme la temperatura aumenta. El signo de q_0 distingue entre hélices derecha e izquierda; un material dado a una temperatura T específica siempre produce una hélice del mismo signo. Si T cambia, entonces q_0 cambia. En algunos casos particulares q_0 puede cambiar de signo a una temperatura T^* . A la temperatura T^* , el colestérico se comporta como un nemático convencional y arriba de T^* las propiedades físicas, tales como el calor específico, no cambian abruptamente con la posición, demostrando que el arreglo molecular local es muy similar en los estados nemático y colestérico.

Se encuentra también que la diferencia entre la molécula constituyente y su imagen espejo en un colestérico típico es pequeña. Por otra parte, termodinámicamente, el colestérico izquierdo dependiendo del tipo de molécula quiral agregada.

²Debido a que los estados \hat{n} y $-\hat{n}$ son equivalentes, en la literatura es común encontrar redefinido el periodo espacial como $L = p/2 = \pi/q_0$. En la presente tesis se usará el periodo p .

co es muy similar al nemático; la energía de torsión forma sólo una diminuta parte de la energía total asociada con el alineamiento paralelo de las moléculas ($\sim 10^{-5}$). Un cristal colestérico, frecuentemente puede ser obtenido con muestras de grosor aproximado de $100\mu m$, con tal de que las condiciones de frontera sobre ambas placas sean tangenciales.

1.2.1. Agentes externos y algunas aplicaciones de los CLC

La presencia de agentes externos, tales como la temperatura, la composición química, campos electromagnéticos, etc, modifican las propiedades del CLC. La más representativa es el periodo espacial p . Aquí se presentan algunos agentes que se usan para modificar esta propiedad y se explicarán algunas de sus posibles aplicaciones.

Temperatura

Se ha demostrado teóricamente (ver Cap. 4) que las propiedades ópticas de los CLC dependen, además de otros parámetros, de la relación existente entre la longitud de onda incidente λ_0 y el periodo espacial p : cuando λ_0 es del orden de p en el intervalo visible del espectro, la muestra emite un color brillante por reflexión total (reflexión de Bragg), de tal modo que si luz blanca incide sobre el CLC, el color reflejado se puede escoger cambiando el valor de p . Experimentalmente se encuentra que el paso p y entonces la longitud de onda de la luz reflejada λ_0 , dependen inversamente con el aumento de la temperatura; el color del material puede cambiar drásticamente en un intervalo de temperatura de unos cuantos grados, por ejemplo, para el nonanoato colesterol [39], en cierto intervalo de temperatura alrededor de $74,6^\circ C$, se pueden alcanzar valores de

$$\frac{1}{p} \left| \frac{dp(T)}{dT} \right| \sim 100 (^\circ C)^{-1}.$$

Una aplicación posible de este comportamiento es la detección de puntos calientes en microcircuitos [40], localización de fracturas y tumores [41]; la superficie bajo estudio es recubierta con una *película delgada* de material colestérico, y cualquier diferencia de temperatura entre dos puntos sobre la superficie, mostrará una diferencia en coloración. La dependencia de p con la T también es usada en la conversión de imágenes en infrarojo

a una imagen en visible; la imagen infraroja es enfocada sobre una película colestérica; en las áreas irradiadas de la película, calor es liberado, T incrementa y el paso disminuye; el cambio local de p se manifiesta por una fuente de luz visible que se observa ya sea por reflexión o transmisión.

Composición Química

Cuando una pequeña concentración c de material ópticamente activo se disuelve en un CL nemático, el resultado es un CLC de periodo espacial grande p . Para bajas concentraciones, el periodo p es lineal e inversamente proporcional a la concentración c [42],

$$pc = a,$$

en donde a es una constante que depende de la naturaleza del soluto (material ópticamente activo) y del solvente (CL nemático). A concentraciones altas esta relación lineal ya no se obedece.

Una pequeña cantidad de un compuesto ópticamente activo no mesomórfico puede también transformar un nemático en un colestérico [43]. Sin embargo, el signo de q_0 no está directamente relacionado con la configuración absoluta de la molécula soluto. Por ejemplo, *(S)*-*s-amy**l-p-aminocinnamato* y *(S)*-*2-(octyl)-p-aminocinnamato*, los cuales tienen la misma configuración absoluta, generan colestéricos de distinto signo cuando son disueltos en el nemático *MBBA*.

Se encuentra experimentalmente que para la mayoría de las mezclas entre derivados de colesterol en soluciones concentradas, el valor de $\bar{q} = 2\pi/\bar{p}$ de la muestra es casi igual al promedio del peso de las q_i de cada componente sin mezclar [44]

$$\bar{q}(T) \simeq \sum_i c_i q_i(T), \quad (1.2)$$

en donde c_i es la concentración (en peso) del componente i . Nótese que las diferentes q_i pueden ser positivas o negativas: en particular, si se tienen dos componentes, uno con $q_1 > 0$ y otro con $q_2 < 0$, una apropiada mezcla de los dos, formará un nemático: $\bar{q} = 0$. Por ejemplo, considere una mezcla 1.75:1.00 de cloruro de colesterol-myristato de colesterol

a $40^{\circ}C$; el cloruro puro tiene $q_0 > 0$, mientras que el myristato tiene $q_0 < 0$. Esta mezcla particular tiene $q_0 = 0$, es decir, es un nemático. Sin embargo, hay algunas excepciones a la regla de aditividad (1.2). Mezclas de cloruro de colesterol-laureato de colesterol son un ejemplo de ello; en este caso, una gráfica de \bar{q} vs. c muestra un extremo bien definido [45]. Una explicación de este fenómeno aún no se ha establecido.

Ciertos gases, cuando son absorbidos en una película colestérica, causan un cambio significativo en el periodo espacial p y por lo tanto, de coloración [33]. Basado en este principio, el grupo Xerox [46] inventó un dispositivo que es capaz de transformar una imagen ultravioleta en una imagen en el visible. La imagen UV se enfoca sobre una película que contiene una mezcla de ésteres colestéricos y, en particular, algún ioduro de colesterol; este componente se descompone fotoquímicamente en las regiones irradiadas con luz UV. Así, en estas regiones, tenemos un cambio en la composición química y un cambio resultante en p . La imagen se observa ahora en el visible.

Campos electromagnéticos

Los CL en general son muy sensibles a campos externos, ya sean eléctricos o magnéticos; constantes o variables. Uno de los primeros estudios con campo magnético constante fue hecho por Fredericks y Tsvetkov [47].

Una transición colestérico-nemático³ se puede llevar a cabo mediante la aplicación de un campo eléctrico o magnético constante en la dirección perpendicular al eje de la hélice. Esta transición se observó primeramente por Sackmann [48] bajo la influencia de un campo magnético y por el equipo de Xerox [49] bajo un campo eléctrico y posteriormente fue explicada teóricamente en las referencias [50] y [51], en donde muestran que el campo crítico necesario para obtener tal transición depende inversamente con el periodo p_0 , en donde p_0 es el periodo espacial en ausencia de campo del colestérico. Este fenómeno se conoce comunmente como transición de Fredericks. Tipicamente, para una solución diluida de moléculas quirales en un nemático convencional, para un $p = 20\mu m$ la transición de Fredericks puede observarse con campos magnéticos del orden de $15 kG$.

³Esto es, cuando el periodo p de la muestra colestérica tiende a ser infinito $p \rightarrow \infty$.

Si la muestra es una película delgada, con el eje de la hélice perpendicular a las paredes y un campo paralelo a este eje, arriba de un cierto campo umbral se presenta una distorsión periódica de los planos perpendiculares al eje. Esta idea fue propuesta por Helfrich [52] para campo eléctrico constante y posteriormente profundizada por Hurault [53] para campos magnéticos.

Quizás, una de las aplicaciones más conocidas de los CL en presencia de campos electromagnéticos constantes, son los sistemas de pantalla (*displays*), como los relojes, calculadoras y muy recientemente los monitores. Además de estas características, en general, los CL no son caros y operan con un voltaje bajo de alimentación. Incluso, pueden operar con luz solar [54].

En la literatura se encuentra una amplia variedad de análisis de CL bajo la influencia de campos electromagnéticos, sin embargo, en la presente tesis sólo se tratarán casos en los cuales se encuentra presente el campo electromagnético generado por una onda electromagnética, esto es, un campo externo oscilante en el tiempo.

1.3. Esmécticos

Primeramente reconocidos por G. Friedel [55], los esmécticos son estructuras con cierto orden posicional que presentan una estructura en capas de espaciamiento bien definido. Para un material dado, la fase esméctica siempre ocurre a una temperatura inferior a la fase nemática. Aunque pueden observarse algunas variantes, los cristales líquidos esmécticos se clasifican en tres tipos principales: esmécticos *tipo A*, *tipo B* y *tipo C*.

- *Tipo A*

- i) Presentan una estructura en capas (planos xy) con grosor l cercano a la longitud de las moléculas que lo constituyen como puede verse en la Fig. 1.4.
- ii) Cada capa es un líquido bidimensional ($2D$) y no muestra un orden de largo alcance dentro de la capa. El orden se presenta de manera unidimensional ($1D$) en la dirección perpendicular a las capas.

- iii) El sistema es ópticamente uniaxial, con el eje óptico perpendicular a los planos que limitan las capas, es decir, el eje z .
- iv) Las direcciones z y $-z$ son equivalentes.

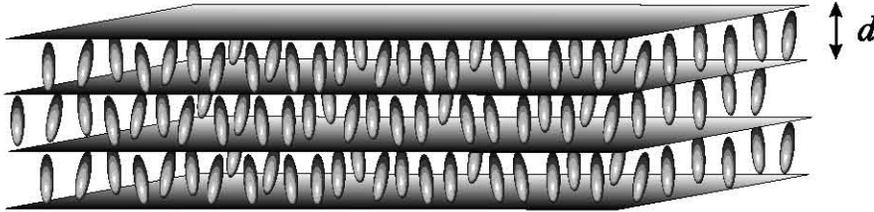


Figura 1.4: Arreglo de moléculas en un esméctico *tipo A*. Aquí d representa el grosor de cada capa.

■ *Tipo B*

En esta fase las capas, además del orden ($1D$) especificado arriba, presentan la periodicidad y rigidez de un sólido ($2D$), que se puede observar usando difracción de rayos X. La diferencia a nivel microscópico, entre un esméctico de este tipo y un sólido no se ha entendido claramente.

■ *Tipo C*

- i) Cada capa es un líquido ($2D$).
- ii) El material es ópticamente biaxial [56]. Esto debido a que el eje de las moléculas está inclinado un ángulo promedio ω con respecto al eje z (Fig. 1.5), en el plano xz , dando origen a un tensor dieléctrico con dos ejes principales en el plano xz perpendiculares entre ellos y perpendiculares a su vez al eje y . El espesor de las capas se reduce a $d = l \cos \omega$.
- iii) Si adicionalmente se agregan moléculas que tienen actividad óptica, la estructura se distorsiona; la dirección que representa la inclinación promedio precesa alrededor del eje z , obteniendo una configuración de hélice (Fig. 1.6)

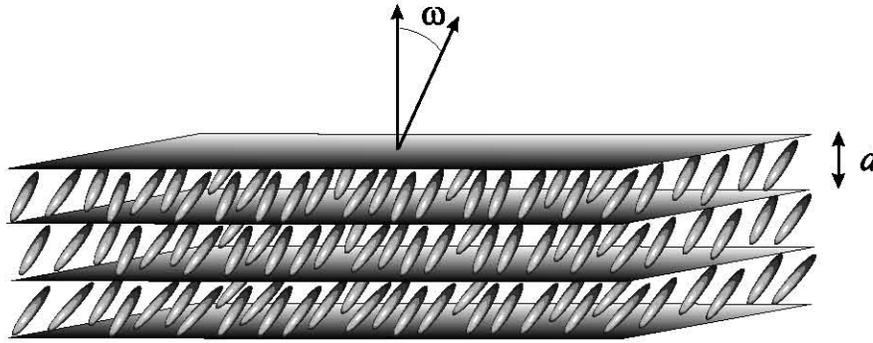


Figura 1.5: Arreglo de moléculas en un esméctico *tipo C*. Las moléculas están inclinadas con respecto al eje un ángulo promedio ω .

Es interesante destacar que si un material es capaz de presentar las tres fases, la secuencia seguida cuando se incrementa la temperatura es siempre

$$S \rightleftharpoons B \rightleftharpoons C \rightleftharpoons A, \quad (1.3)$$

en donde S indica la fase sólida. Las fases descritas arriba pertenecen al grupo de las fases termotrópicas, o equivalentemente, indica que la transición de fase es inducida mediante un cambio de temperatura.

La influencia de los agentes externos en las propiedades de los CL y sus posibles aplicaciones son algunas de las principales causas que motivaron la realización de la presente tesis. Como se dijo anteriormente, aquí se estudiarán nuevas e interesantes propiedades ópticas de los CLC. Para tal finalidad, en los tres capítulos siguientes se establecerán todas las bases necesarias para analizar detalladamente los modelos originales aquí estudiados. En particular, en el siguiente capítulo revisaremos ciertas propiedades elásticas de los nemáticos y de allí extenderemos el análisis a los CLC.

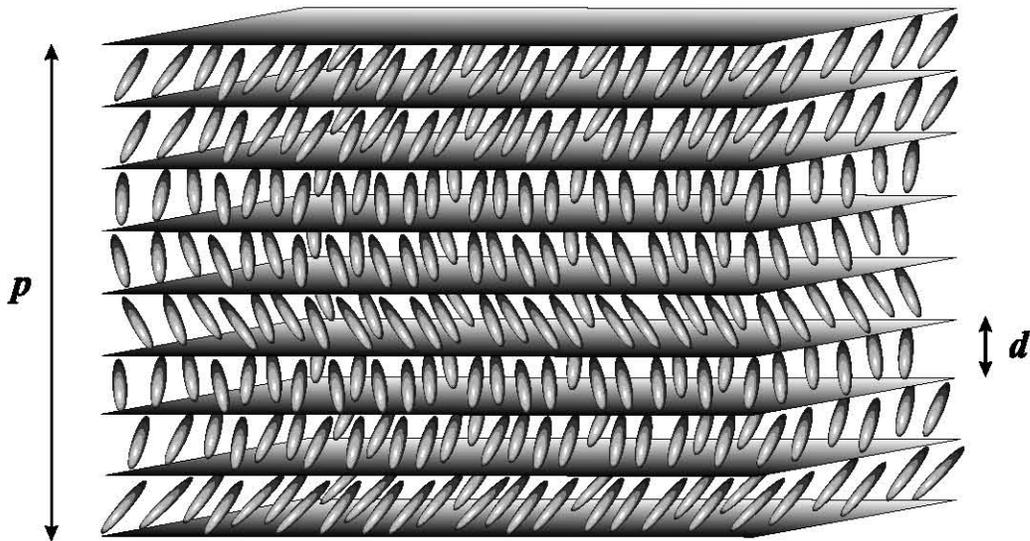


Figura 1.6: Torsión inducida en un esméctico *tipo C* debido a la presencia de un agente quiral

Capítulo 2

La energía libre de distorsión

En general, los cristales líquidos son fácilmente perturbados por agentes externos, o bien, pueden ser modificados en su estructura por manipulación directa de las superficies que los limitan. Por ejemplo, cuando se le aplica un esfuerzo perpendicular a una de las superficies de una película delgada de cristal líquido se provoca lo que es conocida como una compresión o una elongación; o bien, cuando se gira una de las superficies con respecto a la otra, se realiza una torsión de la muestra. Si ahora se define a la fase isotrópica como un estado totalmente desordenado (tanto traslacional como orientacionalmente), entonces se dice que un estado con un cierto grado de orden solamente será obtenido mediante una deformación del estado isotrópico. En nemáticos, tres tipos básicos de deformación son reconocidos: *Apertura (Splay)*, *Pandeamiento (Bend)* y *Torsión (Twist)* (Fig 2.1), los cuales pueden ser combinados para obtener deformaciones más complejas. Es necesario señalar que el estado de deformación tipo *torsión no* es equivalente a la fase colestérica. Esta última adquiere dicha estructura en forma espontánea al agregar moléculas quirales a un material nemático o debido a la quiralidad estructural o intrínseca del arreglo de moléculas, en cambio, la torsión en un nemático se logra a través de la manipulación de las superficies que limitan a la muestra¹. Para la mayoría de las situaciones de interés, las distancias l sobre las cuales ocurren variaciones significativas de la deformación del estado isotrópico son mucho mayores que las dimensiones moleculares a ($l \sim 1\mu m$, mientras

¹Adicionalmente, se demostrará más adelante que en un CLC la densidad de energía libre mínima para obtener este estado se encuentra en un valor $q_0 \neq 0$, mientras que el estado nemático tiene su energía mínima justo en $q_0 = 0$. Recuérdese que $q_0 = 2\pi/p$, en donde p es el periodo espacial de la muestra.

que $a \sim 20A^0$). Así, los detalles de la estructura a escala molecular pueden ser despreciados y las deformaciones pueden ser estudiados mediante una *teoría del continuo*. Asimismo, los cambios en la densidad del líquido, inducidas por una distorsión son muy pequeños. De este modo, el estado distorsionado puede ser descrito totalmente en términos del campo director o vector de campo $\hat{n}(\mathbf{r})$, en donde \mathbf{r} indica el vector posición². Aquí se supone que \hat{n} es una función que varía suave y lentamente con la posición \mathbf{r} . El objetivo será pues, mediante aproximaciones adecuadas, utilizar una teoría del continuo que permita obtener una expresión para la configuración de cada uno de estos estados de deformación. La idea es iniciar con la densidad de energía libre de Helmholtz F del sistema en términos del campo director $\hat{n}(\mathbf{r})$ y utilizar el método de Lagrange para encontrar el estado o configuración natural en la cual la energía es mínima³.

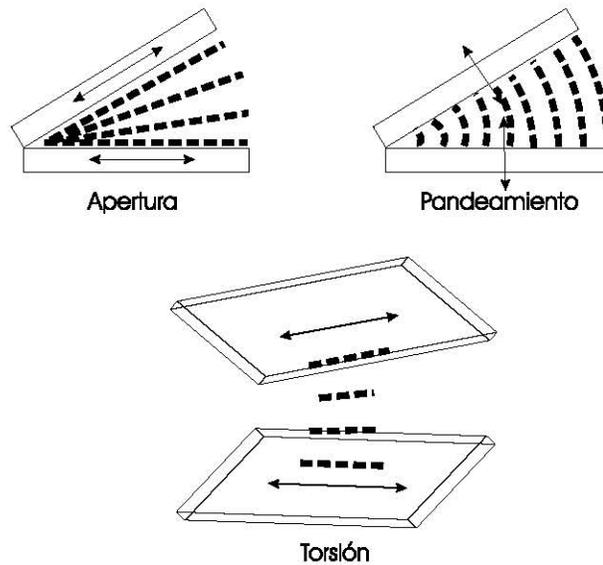


Figura 2.1: Los tres tipos de deformación básicos que se presentan en un material nemático. Se muestra como cada tipo puede ser obtenido separadamente moviendo apropiadamente las paredes de la celda.

²El director $\hat{n}(\vec{r})$ tiene longitud unitaria, pero orientación variable.

³Descripción iniciada por Oseen [57], Zocher [58] y seguida por Frank [59] y Ericksen [60].

2.1. Nemáticos

A continuación se procederá a encontrar una expresión para la energía libre de distorsión para los CL nemáticos tomando como grado de libertad el vector de campo $\hat{n}(\mathbf{r})$ y a partir de aquí, escribir las ecuaciones que describen el estado de equilibrio del sistema distorsionado.

Como se mencionó en la sección anterior, las variaciones de \hat{n} son lentas a escala molecular, esto es, $a\nabla\hat{n} \ll 1^4$. Asimismo, entre moléculas las únicas fuerzas de importancia son aquellas de corto alcance.

La densidad de energía libre de Helmholtz F (por unidad de volumen m^{-3}) de un nemático se conforma de la energía libre F_0 del estado sin distorsión y de la energía F_d del sistema distorsionado. En el estado de equilibrio sin distorsión, las variaciones de \hat{n} con la posición en promedio son cero y por lo tanto la densidad energía libre de deformación también lo será, esto es, $F_d = \nabla\hat{n} = 0$. Un estado ligeramente distinto a éste, cambiará el valor de F muy poco, lo cual permite expresar de manera apropiada la densidad de energía libre en serie de potencias de $\nabla\hat{n}^5$

$$\begin{aligned} F_d &= F - F_0 \\ &= c_1\nabla\hat{n} + c_2(\nabla\hat{n})^2 + \dots \end{aligned}$$

en donde c_1 y c_2 son constantes. La energía libre F_d debe satisfacer las siguientes condiciones adicionales:

- i) Debe ser una función par de \hat{n} , pues los estados \hat{n} y $-\hat{n}$ son indistinguibles.
- ii) No hay términos lineales en $\nabla\hat{n}$; la condición i) así lo exige, ésto es, se necesita un estado de equilibrio local en donde $\hat{n} = const$. De tal modo que la primera contribución a la energía libre es del orden $(\nabla\hat{n})^2$. Los únicos términos que son invariantes ante rotaciones son: $\nabla \cdot \hat{n}$, pero es excluído por i); $\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n}$ cambia de signo ante la transformación

⁴La cantidad $\nabla\hat{n}$ es un tensor de rango dos y tiene la forma $e_{\alpha\beta} = \partial_\alpha n_\beta$ (en donde se ha definido $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x_\alpha$).

⁵Aquí es conveniente hacer una aclaración. Aparentemente, no hay concordancia entre los rangos de la cantidad escalar F y el tensor de rango 2, $\nabla\hat{n}$, del desarrollo aquí mostrado. Sin embargo, la cantidad que se toma para la expresión de la energía libre F no es en sí mismo el tensor $\nabla\hat{n}$, si no sus componentes y la suma de ellas en un sistema de referencia apropiado, tal que cumplan con ciertas condiciones que se declaran en el texto.

$x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$ y por lo tanto, es prohibido en un material centrosimétrico. Sin embargo, los colestéricos, no son centrosimétricos y por lo tanto este término aparecerá.

iii) Términos en F_d que son de la forma $\nabla \cdot \mathbf{u}$, con $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ un campo vectorial arbitrario, pueden ser descartados. Recuérdese que F_d representa la energía libre de distorsión por unidad de volumen, es decir, se está interesado en las contribuciones a la energía total del bulto. El teorema de Gauss

$$\int \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{r} = \int \mathbf{u} \, d\sigma, \quad (2.1)$$

en donde $\int d\sigma$ representa una integral de superficie sobre el límite del nemático, muestra que sólo hay contribuciones de energía superficial y no volumétrica.

Con las condiciones anteriores, la densidad de energía libre de distorsión para nemáticos puede ser escrita como [35]

$$F_d = \frac{1}{2}K_1 (\nabla \cdot \hat{n})^2 + \frac{1}{2}K_2 (\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n})^2 + \frac{1}{2}K_3 (\hat{n} \times \nabla \times \hat{n})^2. \quad (2.2)$$

Cada una de las constantes elásticas K_i ($i = 1, 2, 3$) está asociada con uno de los tipos de deformación básicos mostrados en la Fig. 2.1. i) K_1 se asocia con deformaciones tipo *apertura*; esto implica que $\nabla \cdot \hat{n} \neq 0$. ii) K_2 se asocia con deformaciones de *torsión*; esto implica que $\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n} \neq 0$. iii) K_3 se asocia con deformaciones tipo *pandeamiento*; esto implica que $\hat{n} \times \nabla \times \hat{n} \neq 0$.⁶ Así, cada deformación básica puede ser obtenida por hacer uno de los términos de la expresión (2.2) distinto de cero. Es preciso recordar que para el estado sin distorsión, se consideró que la energía libre F_d es cero, de tal modo que para cumplir la condición de mínima energía de un estado distorsionado, cada constante K_i debe ser *positiva* o de lo contrario se puede obtener un extremal de la función F_d pero no garantizar un mínimo.

⁶Nótese que la manera de manipular las placas en las deformaciones de tipo apertura y pandeamiento es exactamente la misma, pero la configuración original de las moléculas en el nemático sin distorsión, es distinta. En efecto, antes de la deformación tipo apertura, las moléculas se alinean paralelamente a las placas de la muestra (*estructura planar*); mientras que antes de la deformación tipo pandeamiento, las moléculas se alinean perpendicularmente a las placas (*estructura homeotrópica*). La deformación tipo torsión se obtiene manipulando las placas de un nemático inicialmente en estructura planar.

Una consideración acerca de las dimensiones de las constantes elásticas K_i : F_d tiene unidades de energía/volumen y \hat{n} es una cantidad sin unidades de tal modo que de la expresión (2.2) las constantes K_i tienen unidades de energía/longitud; en el sistema MKS esto equivale a un *Newton*.

Las constantes K_i dependen de la temperatura y se encuentra experimentalmente que su valor decrece conforme la temperatura aumenta, y en la mayoría de los casos, el cociente entre cualquiera de ellos, permanece cercanamente independiente de T . Para el PAA a $120^\circ C$ los valores de las constantes elásticas, con dimensión molecular $a \simeq 14A^\circ$, son [61]: $K_1 = 0,7 \times 10^{-13} N$, $K_2 = 0,43 \times 10^{-13} N$, $K_3 = 1,7 \times 10^{-13} N$.

Es útil estimar la energía libre F_d por molécula de dimensión a , en una distancia l del nemático: ésta es $F_d a^3 \sim \left(\frac{K}{l^2}\right) a^3 \sim U \left(\frac{a}{l}\right)^2$, donde U es la energía de interacción molecular. Así, en el límite cuando $a \ll l$, F_d representa sólo una pequeña fracción de la energía total.

2.1.1. La aproximación de constantes elásticas iguales

En muchos casos, la forma de la expresión (2.2) es demasiado complicada para ser de uso práctico, debido a que las ecuaciones de equilibrio derivadas de ésta pueden llegar a ser difíciles de resolver. En tales casos, es conveniente aproximar las constantes elásticas a un mismo valor, esto es, $K_1 = K_2 = K_3 = K$. Bajo esta consideración, la energía libre se escribe como

$$F_d = \frac{1}{2} K \left\{ (\nabla \cdot \hat{n})^2 + (\nabla \times \hat{n})^2 \right\}. \quad (2.3)$$

Los valores numéricos de las K_i para el PAA, muestran que la expresión (2.3) no puede ser cuantitativamente correcta. Sin embargo, su forma más simple permite analizar cualitativamente las distorsiones presentes en los CL nemáticos.

2.1.2. Ecuaciones de equilibrio

La expresión (2.2) permite calcular las condiciones para el equilibrio del nemático distorsionado. Para esto, se pide que la energía de distorsión total de bulto $\mathcal{F}_d = \int F_d dV$ sea un mínimo con respecto a todas las variaciones del director $\hat{n}(\mathbf{r})$ con la restricción de

vector unitario $\hat{n}^2 = 1$. Los multiplicadores de Lagrange permiten tomar en cuenta esta restricción [62], de manera que la variación

$$\delta \left(\mathcal{F}_d - \int \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{r}) \delta(\hat{n}^2) \right) dV, \quad (2.4)$$

deba igualarse a cero, en donde $\lambda(\mathbf{r})$ es una función arbitraria de \mathbf{r} . De aquí

$$\delta \mathcal{F}_d = \int \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{r}) \delta(\hat{n}^2) dV = \int \lambda(\mathbf{r}) \hat{n}(\mathbf{r}) \cdot \delta \hat{n}(\mathbf{r}) dV. \quad (2.5)$$

Por otro lado, es necesario recordar que, por construcción, F_d es una función cuadrática de $\nabla \hat{n}$, y es también una función de $\hat{n}(\mathbf{r})$ en sí misma. Escribiendo el gradiente en notación índice $\nabla \hat{n} = g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha n_\beta$, con $\alpha, \beta = x, y, z$, una pequeña variación $\delta \hat{n}(\mathbf{r})$ en $\delta \mathcal{F}_d = \delta \mathcal{F}_d(g_{\alpha\beta}, \hat{n}(\mathbf{r}), \mathbf{r})$ brinda como resultado

$$\delta \mathcal{F}_d = \int \left\{ \frac{\partial F_d}{\partial n_\beta} \delta n_\beta + \frac{\partial F_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \partial_\alpha (\delta n_\beta) \right\} dV. \quad (2.6)$$

Integrando por partes el segundo término y usando el teorema de Gauss (2.1)

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}_d &= \int \left\{ \frac{\partial F_d}{\partial n_\beta} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial F_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \right) \right\} \delta n_\beta dV + \int \partial_\alpha \left(\frac{\partial F_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta n_\beta \right) dV \\ &= \int \left\{ \frac{\partial F_d}{\partial n_\beta} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial F_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \right) \right\} \delta n_\beta dV + \oint \left(\frac{\partial F_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta n_\beta \right) da_\alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

El último término, una integral sobre la superficie del nemático, es importante sólo cuando se toman en cuenta los términos de superficie. Si por el momento sólo se consideran las contribuciones del bulto, esto es, $\delta \hat{n}(\mathbf{r}) = 0$ en las fronteras, se tiene

$$\delta \mathcal{F}_d = \int \left\{ \frac{\partial F_d}{\partial n_\beta} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial F_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \right) \right\} \delta n_\beta dV, \quad (2.8)$$

e igualando las expresiones (2.5) y (2.8) obtenemos

$$\int \{ \lambda(\mathbf{r}) n_\beta \} \delta n_\beta dV = \int \left\{ \frac{\partial F_d}{\partial n_\beta} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial F_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \right) \right\} \delta n_\beta dV.$$

Debido a que la igualdad anterior debe cumplirse para cualquier variación $\delta \hat{n}(\mathbf{r}) \neq 0$ en el bulto, se obtiene la ecuación de equilibrio

$$h_\beta \equiv -\frac{\partial F_d}{\partial n_\beta} + \partial_\alpha \left(\frac{\partial F_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \right) = -\lambda(\mathbf{r}) n_\beta. \quad (2.9)$$

Al vector h_β se le conoce como *campo molecular*. La ecuación (2.9) declara que, en equilibrio, el director debe ser en cada punto paralelo al campo molecular. El vector h actúa como un campo el cual tiende a alinear la dirección de \hat{n} en todo el cristal líquido. La ecuación (2.9) se escribe como

$$\lambda = -h_\beta n_\beta,$$

de manera que la condición de equilibrio (2.4) puede ser escrita como

$$H_\beta \equiv h_\beta + (h_\alpha n_\alpha) n_\beta = 0, \quad (2.10)$$

con un vector H_β el cual satisface $n_\beta H_\beta = 0$.

Ahora, insertando la Ec. (2.2) en (2.9), se obtiene la forma del campo molecular h , que permite determinar la configuración del director \hat{n} para el nemático en estado de equilibrio

$$h = h_S + h_T + h_B,$$

en donde cada uno de los términos están asociados con las distorsiones tipo *apertura*, *torsión* y *pandeamiento* respectivamente y están dados por

$$\begin{aligned} h_S &= K_1 \nabla(\nabla \cdot \hat{n}), \\ h_T &= -K_2 \{ \mathbf{A} \nabla \times \hat{n} + \nabla \times (\mathbf{A} \hat{n}) \}, \\ h_B &= K_3 \{ \mathbf{B} \times \nabla \times \hat{n} + \nabla \times (\hat{n} \times \mathbf{B}) \}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

con $\mathbf{A} = \hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n}$ y $\mathbf{B} = \hat{n} \times \nabla \times \hat{n}$.

Para el caso de constantes elásticas iguales, el campo molecular tiene la forma

$$h = K \nabla^2 \hat{n}. \quad (2.12)$$

En la práctica, las ecuaciones de equilibrio son raramente usadas en la forma general (2.11); es más conveniente expresar el vector \hat{n} en términos de ángulos polares apropiadamente escogidos y pedir la condición de que F_d sea un mínimo con respecto a todas las variaciones de estos ángulos. A continuación se presenta un ejemplo para mostrar este procedimiento.

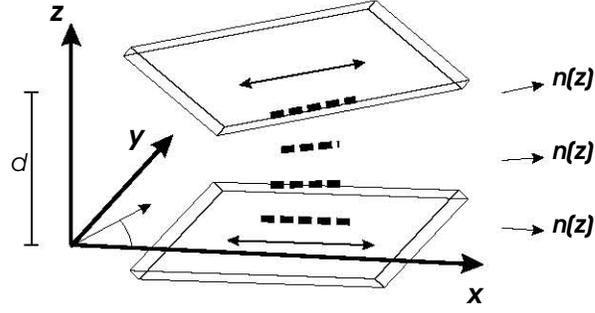


Figura 2.2: Deformación pura tipo twist de una muestra de material nemático de ancho d . Las placas se encuentran paralelas al plano xy y el director \hat{n} es una función sólo de la coordenada z .

Se considera una deformación pura tipo twist (véase Fig. 2.2) con cada una de las placas del nemático paralelas al plano xy .

El director \hat{n} es una función sólo de la coordenada z , con las siguientes componentes

$$n_x = \cos \theta(z), \quad n_y = \text{sen} \theta(z), \quad (2.13)$$

en donde θ es el ángulo que hace el campo director \hat{n} con el eje x .

Sustituyendo esta expresión en (2.2) obtenemos

$$F_d = \frac{1}{2} K_2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2. \quad (2.14)$$

La energía por unidad de área se obtiene integrando a lo largo de la muestra (dirección z)

$$\mathcal{F}_d = \frac{1}{2} K_2 \int_0^d \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 dz. \quad (2.15)$$

Ahora se pide la condición de minimización de la energía $\delta \mathcal{F}_d = 0$ para una variación arbitraria del campo director, o equivalentemente, de la coordenada $\delta \theta(z)$. Esto da

$$\mathcal{F}_d = K_2 \int_0^d \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial (\delta \theta)}{\partial z} dz,$$

e integrando por partes

$$\mathcal{F}_d = -K_2 \int_0^d \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \delta \theta dz + K_2 \int_0^d \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \delta \theta \right) dz. \quad (2.16)$$

El segundo término de la expresión anterior puede escribirse como una integral de superficie. Aquí se hace esta integral igual a cero, ya que sólo se toman en cuenta las contribuciones en el bulto, de manera que $\delta\theta = 0$ en las fronteras. Así, la ecuación de equilibrio viene escrita como

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0,$$

e integrando

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = c_1. \quad (2.17)$$

Como se mostró anteriormente en la Ec. (2.9), el campo molecular h debe ser paralelo en cada punto al director \hat{n} . En el ejemplo aquí mostrado, esto se cumple. En efecto, $\nabla \cdot \hat{n}$ y B son iguales a cero y así, el valor de h se reduce solamente a calcular h_T dada en la expresión (2.11): $A = -\frac{\partial\theta}{\partial z} = -c_1$ y por lo tanto $h = h_T = 2K_2c_1\hat{n}$. De este modo se demuestra que el campo molecular h es paralelo al campo director.

2.2. Colestéricos

Como se dijo anteriormente, los colestéricos no son centrosimétricos y de este modo, los términos lineales en el $\nabla\hat{n}$ ahora deben ser incluidos en la expresión para la energía libre de distorsión F_d . Para un colestérico no se mantiene la condición de $\hat{n} = const$, ya que la configuración en equilibrio tiene cierta distorsión. Hay dos términos los cuales son lineales en $\nabla\hat{n}$ y rotacionalmente invariantes: $\nabla \cdot \hat{n}$ y $\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n}$. Los términos proporcionales a $\nabla \cdot \hat{n}$ son descartados debido a que los estados \hat{n} y $-\hat{n}$ son indistinguibles. Por el otro lado, la cantidad $\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n}$ puede aparecer en F_d con la condición de que las moléculas sean diferentes de sus imágenes espejo, es decir, quirales. Teniendo esto en mente, la Ec. (2.2) se modifica ligeramente a

$$F_d = \frac{1}{2}K_1 (\nabla \cdot \hat{n})^2 + \frac{1}{2}K_2 (\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n} + q_0)^2 + \frac{1}{2}K_3 (\hat{n} \times \nabla \times \hat{n})^2. \quad (2.18)$$

en donde q_0 está relacionado directamente con el *paso* o periodo espacial de la hélice p ($q_0 = 2\pi/p$). Nótese que, en efecto, F_d incluye un término lineal en las derivadas de valor

$K_2 q_0 (\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n})$ y un término constante $\frac{1}{2} K_2 q_0^2$. La Ec. (2.18) es válida cuando $\nabla \hat{n}$ y q_0 son pequeños a escala molecular; experimentalmente se encuentra que para la mayoría de los casos, esto se cumple, $q_0 a \sim 10^{-3}$.

En lo sucesivo, y a menos que se indique lo contrario, en la presente tesis siempre se considerará el eje de la hélice, paralelo al eje z . Si el material está descrito por la siguiente configuración

$$\hat{n} = (\cos \theta(z), \text{sen} \theta(z), 0), \quad (2.19)$$

y se sustituye en la Ec. (2.18), se encuentra de manera directa que la densidad de energía libre toma la forma

$$F_d = \frac{1}{2} K_2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - q_0 \right)^2. \quad (2.20)$$

Insertando la Ec. (2.20) en la expresión (2.9), se llega a la ecuación diferencial que satisface el grado de libertad $\theta(z)$

$$\partial \theta / \partial z = q_0, \quad (2.21)$$

e integrando

$$\theta(z) = q_0 z + \theta_0. \quad (2.22)$$

Finalmente, insertando la solución $\theta(z)$ en el director \hat{n} dado por (2.19), se concluye que la configuración del colestérico describe, como era de esperarse, una hélice⁷. Al igual que una deformación pura tipo *torsión*, en un CLC los términos asociados con las constantes elásticas K_1 y K_3 son en efecto nulos.

Antes de finalizar esta sección, nótese que, de la expresión (2.20) una gráfica de F_d vs. q (con $q = \partial \theta / \partial z$), muestra que el mínimo de energía se obtiene cuando $q = q_0$ para un CLC; en cambio para un CL nemático, la expresión (2.14) muestra que dicho mínimo se encuentra cuando $q = 0$, es decir, el periodo espacial $p \rightarrow \infty$.

⁷Es necesario remarcar que esta configuración helicoidal se obtiene, ya sea insertando moléculas quirales en un CL nemático o variando la temperatura en ciertas sustancias, independientemente de la manipulación de las superficies.

Capítulo 3

Medios anisotrópicos y quirales

La interacción de los campos electromagnéticos con la materia está gobernada por cuatro relaciones fundamentales conocidas como ecuaciones de Maxwell y sus correspondientes ecuaciones constitutivas, las cuales describen la respuesta del medio a la presencia del campo electromagnético. En particular, estas ecuaciones permiten describir la interacción existente entre la radiación electromagnética y los cristales líquidos.

El diseño y fabricación de nuevos materiales con nuevas propiedades ópticas no locales hace necesario generalizar las relaciones constitutivas presentadas en los libros más comunmente estudiados. Los objetivos de este capítulo serán presentar la forma generalizada de estas ecuaciones constitutivas¹ y escribir las ecuaciones de Maxwell en una representación más apropiada, en donde la propiedad de transversalidad de las ondas electromagnéticas pueda ser convenientemente aprovechada en los diferentes casos que serán analizados en la presente tesis. Finalmente, se presentará el planteamiento más general de interacción entre el campo electromagnético y el cristal líquido.

3.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes se escriben como (sistema de unidades *MKS*)

¹Las relaciones constitutivas presentadas aquí se deben a Tellegen [63] y representan las relaciones constitutivas más generales.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
 \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

en donde el vector de desplazamiento \mathbf{D} y el vector de flujo magnético \mathbf{B} en un *medio bianisotrópico*, están relacionados con los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{H} por las relaciones constitutivas siguientes [2]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E} + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \bar{\bar{\chi}} \cdot \mathbf{H}, \\
 \mathbf{B} &= \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \bar{\bar{\eta}} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \bar{\bar{\mu}} \cdot \mathbf{H},
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

con $\bar{\bar{\varepsilon}}$ y $\bar{\bar{\mu}}$ son los tensores de permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética y la presencia de los tensores $\bar{\bar{\chi}}$ y $\bar{\bar{\eta}}$ enfatizan el hecho de que en un medio, conocido como *bianisotrópico*, el campo eléctrico \mathbf{E} puede inducir una polarización magnética y un campo magnético \mathbf{H} puede inducir una polarización eléctrica. Adicionalmente, la quiralidad del medio está incluida en los tensores $\bar{\bar{\chi}}$ y $\bar{\bar{\eta}}$ los cuales satisfacen la siguiente relación

$$\bar{\bar{\chi}} = -\bar{\bar{\eta}}^T, \tag{3.3}$$

en donde el índice superior T denota el transpuesto, y son idénticamente igual a cero para medios no quirales. Aquí ε_0 y μ_0 son las constantes de permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética del vacío. Particularmente, si cada uno de los tensores incluidos en (3.2) se pueden escribir como una función escalar f por la matriz identidad de 3×3 , el medio se llama *bi-isotrópico*.

Es bien sabido que en problemas con condiciones a la frontera, las ecuaciones de Maxwell exigen la continuidad de la componente tangencial de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en la frontera [64]. Así, la forma simétrica de las relaciones (3.2) es apropiada para problemas en donde sean impuestas condiciones a la frontera en términos de estos campos.

Es necesario recordar una característica importante de una onda electromagnética que se propaga en el vacío: es transversal. Esto es, si la onda se propaga en la dirección z , sus vectores de polarización \mathbf{E} y \mathbf{H} se encuentran oscilando en el plano xy . De este modo, en una interface aire-material perpendicular a la dirección de propagación, las condiciones a la frontera deben imponerse sobre estos vectores de polarización. En la presente tesis se estudia este tipo de sistemas: la propagación de ondas electromagnéticas con campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en medios con simetría helicoidal, los cuales se encuentran confinados entre paredes perpendiculares a la propagación de las ondas. Así, es conveniente escribir el conjunto de Ecs. (3.1) en una representación donde sólo aparezcan las componentes transversales de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} . El objetivo de la siguiente sección será éste.

3.2. Representación de Marcuvitz-Schwinger

La naturaleza transversal de las ondas electromagnéticas y la simetría misma del sistema analizado² motiva a reescribir en una representación más conveniente las ecuaciones de Maxwell (3.1)³ la cual permitirá analizar al mismo tiempo el comportamiento de las cuatro componentes transversales de una onda electromagnética (2 componentes para \mathbf{E} y 2 componentes para \mathbf{H}). Esta sección se limitará a deducir las ecuaciones de Marcuvitz-Schwinger a partir de las ecuaciones de Maxwell para una onda electromagnética que incide oblicuamente en una muestra cualquiera y después se deducirá el caso particular a incidencia normal en un CLC.

Es conveniente escribir el par de relaciones constitutivas (3.2) en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{e} + \bar{\chi} \cdot \mathbf{h}, \\ \mathbf{b} &= \bar{\eta} \cdot \mathbf{e} + \bar{\mu} \cdot \mathbf{h}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

en donde se ha definido

²Como se dijo en la sección precedente, en la presente tesis se analizan sistemas confinados entre placas perpendiculares a la dirección de propagación z de la onda electromagnética.

³Esta representación fué originalmente iniciada por Marcuvitz y Schwinger en 1951 [65].

CAPÍTULO 3. MEDIOS ANISOTRÓPICOS Y QUIRALES
3.2. REPRESENTACIÓN DE MARCUVITZ-SCHWINGER

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= Z_0^{-1/2} \mathbf{E}, & \varepsilon_0 \mathbf{d} &= Z_0^{-1/2} \mathbf{D}, \\ \mathbf{h} &= Z_0^{1/2} \mathbf{H}, & \mu_0 \mathbf{b} &= Z_0^{1/2} \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

con $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ la impedancia del espacio libre. Así, se pueden escribir las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes (3.1) en términos de los nuevos campos como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{d} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{h} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

en donde $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ es la velocidad de la luz en el vacío.

Ahora, se escriben explícitamente las componentes de los campos \mathbf{e} y \mathbf{h}

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

y la finalidad será separar las ecuaciones de Maxwell en dos partes: 1) una ecuación en la que estén involucradas solo las componentes transversales x, y de los campos y 2) una ecuación en la que esté involucrada solo la componente longitudinal z de los campos. Para lograr ésto, primero se propone el campo electromagnético \mathbf{e}, \mathbf{h} con una dependencia temporal armónica en la forma

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} e^{-i\omega t}, \quad (3.8)$$

de tal modo que cualquier derivada temporal de estos campos implicará un factor multiplicativo $-i\omega$, con ω la frecuencia de la onda electromagnética. Así, sustituyendo los campos (3.8) en las dos últimas ecuaciones de (3.6) se obtiene

CAPÍTULO 3. MEDIOS ANISOTRÓPICOS Y QUIRALES
3.2. REPRESENTACIÓN DE MARCUVITZ-SCHWINGER

$$\begin{aligned}\sigma_{ijk}\partial_j e_k &= i\frac{\omega}{c}b_i, \\ \sigma_{ijk}\partial_j h_k &= -i\frac{\omega}{c}d_i,\end{aligned}\tag{3.9}$$

en donde cada uno de los subíndices i, j, k adoptan cada una de las coordenadas x, y, z . Aquí se ha usado la convención de notación índice en la cual dos índices repetidos implican suma sobre todo el rango (en este caso x, y, z), esto es

$$a_i b_i = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

y σ_{ijk} es el tensor antisimétrico de Levi-Civita⁴.

Ahora, sustituyendo las relaciones constitutivas (3.4) en Ecs. (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_{ijk}\partial_j e_k &= ik_0(\eta_{ij}e_j + \mu_{ij}h_j), \\ \sigma_{ijk}\partial_j h_k &= -ik_0(\varepsilon_{ij}e_j + \chi_{ij}h_j),\end{aligned}\tag{3.10}$$

con $k_0 = \omega/c$ el número de onda. Hasta este punto sólo se han escrito en notación índice las ecuaciones de Maxwell y usado las relaciones constitutivas generales para un medio bianisotrópico. El siguiente paso es separar las componentes transversales x, y de la longitudinal z en las Ecs. (3.10). Se separa el tensor de Levi-Civita de la siguiente manera:

i) $\sigma_x, \sigma_y \rightarrow \sigma_t$ en donde el subíndice t puede ser cualquier símbolo griego y puede adoptar las dos componentes transversales x, y . Por ejemplo, σ_α , con $\alpha = x, y$

ii) $\sigma_z \rightarrow \sigma_z$.

Entonces, (3.10) pueden separarse en sus componentes:

4

$$\sigma_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el número de permutaciones es par} \\ -1 & \text{si el número de permutaciones es impar} \\ 0 & \text{si dos índices son iguales} \end{cases}$$

Con esta notación, la componente i -ésima el operador rotacional $\nabla \times$ de un campo vectorial \mathbf{A} se puede escribir como

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \sigma_{ijk}\partial_j A_k.$$

i) longitudinal

$$\begin{aligned}\sigma_{zjk}\partial_j e_k &= ik_0 [\eta_{zj}e_j + \mu_{zj}h_j], \\ \sigma_{z\alpha\beta}\partial_\alpha e_\beta &= ik_0 [(\eta_{zz}e_z + \eta_{z\alpha}e_\alpha) + (\mu_{zz}h_z + \mu_{z\alpha}h_\alpha)],\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zjk}\partial_j h_k &= -ik_0 [\varepsilon_{zj}e_j + \chi_{zj}h_j], \\ \sigma_{z\alpha\beta}\partial_\alpha h_\beta &= -ik_0 [(\varepsilon_{zz}e_z + \varepsilon_{z\alpha}e_\alpha) + (\chi_{zz}h_z + \chi_{z\alpha}h_\alpha)],\end{aligned}\quad (3.12)$$

ii) transversal

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha jk}\partial_j e_k &= ik_0 [\eta_{\alpha j}e_j + \mu_{\alpha j}h_j], \\ (\sigma_{\alpha z\beta}\partial_z e_\beta + \sigma_{\alpha\beta z}\partial_\beta e_z) &= ik_0 [(\eta_{\alpha z}e_z + \eta_{\alpha\beta}e_\beta) + (\mu_{\alpha z}h_z + \mu_{\alpha\beta}h_\beta)],\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha jk}\partial_j h_k &= -ik_0 [\varepsilon_{\alpha j}e_j + \chi_{\alpha j}h_j], \\ (\sigma_{\alpha z\beta}\partial_z h_\beta + \sigma_{\alpha\beta z}\partial_\beta h_z) &= -ik_0 [(\varepsilon_{\alpha z}e_z + \varepsilon_{\alpha\beta}e_\beta) + (\chi_{\alpha z}h_z + \chi_{\alpha\beta}h_\beta)].\end{aligned}\quad (3.14)$$

Como se ha hecho hincapié anteriormente, se desea obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales las cuales contengan solo componentes transversales de los campos e y h de la siguiente manera

$$\psi = \begin{pmatrix} e_x \\ h_x \\ e_y \\ h_y \end{pmatrix}.\quad (3.15)$$

Para lograr ésto, primero se despejan las componentes e_z, h_z de las Ecs. (3.11) y (3.12)

$$\begin{aligned}ik_0 (\eta_{zz}e_z + \mu_{zz}h_z) &= \sigma_{z\alpha\beta}\partial_\alpha e_\beta - ik_0 (\eta_{z\alpha}e_\alpha + \mu_{z\alpha}h_\alpha), \\ -ik_0 (\varepsilon_{zz}e_z + \chi_{zz}h_z) &= \sigma_{z\alpha\beta}\partial_\alpha h_\beta + ik_0 (\varepsilon_{z\alpha}e_\alpha + \chi_{z\alpha}h_\alpha),\end{aligned}\quad (3.16)$$

y lo mismo se hace con las Ecs. (3.13) y (3.14)

$$\begin{aligned} -\sigma_{\alpha\beta z}\partial_\beta e_z + ik_0[\eta_{\alpha z}e_z + \mu_{\alpha z}h_z] &= \sigma_{\alpha z\beta}\partial_z e_\beta - ik_0(\eta_{\alpha\beta}e_\beta + \mu_{\alpha\beta}h_\beta), \\ -\sigma_{\alpha\beta z}\partial_\beta h_z - ik_0[\varepsilon_{\alpha z}e_z + \chi_{\alpha z}h_z] &= \sigma_{\alpha z\beta}\partial_z h_\beta + ik_0(\varepsilon_{\alpha\beta}e_\beta + \chi_{\alpha\beta}h_\beta). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nótese que en realidad el sistema (3.17) es un sistema de cuatro ecuaciones, debido a que α es un índice libre y corre sobre las coordenadas transversales x, y .

Es conveniente escribir el sistema de ecuaciones (3.16) y (3.17) en forma matricial como

$$(\mathbf{1}_2\sigma_{z\alpha\beta}\partial_\alpha - ik_0J_2\gamma_{z\beta}) \begin{pmatrix} e_\beta \\ h_\beta \end{pmatrix} = ik_0J_2\gamma_{zz} \begin{pmatrix} e_z \\ h_z \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$$(\mathbf{1}_4\sigma_{\alpha z\beta}\partial_z - ik_0\mathbf{1}_2 \otimes J_2\gamma_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} e_\beta \\ h_\beta \end{pmatrix} = (-\mathbf{1}_4\sigma_{\alpha\beta z}\partial_\beta + ik_0\mathbf{1}_2 \otimes J_2\gamma_{\alpha z}) \begin{pmatrix} e_z \\ h_z \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

en donde $\mathbf{1}_{2,4}$ son las matrices identidad de 2×2 y 4×4 , respectivamente, J_2 es la matriz de inversión antisimétrica dada por

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -J_2^{-1},$$

las matrices γ_{ij} tienen elementos

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ij} & \chi_{ij} \\ \eta_{ij} & \mu_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

con $i, j = \alpha, \beta, z$ y $A \otimes B$ representa el producto de Kronecker con elementos $a_{ij}B$.⁵ De la Ec. (3.18) se despeja el vector $(e_z, h_z)^T$ para obtener

⁵Dada una matriz \mathbf{A} de $m \times n$ con elementos a_{ij} y una matriz \mathbf{B} de $p \times q$ con elementos b_{kl} , el producto de Kronecker $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ es una matriz de $(m \times p) \times (n \times q)$ con elementos definidos por

$$c_{\alpha\beta} = a_{ij}b_{kl},$$

en donde

$$\alpha = p(i-1) + k \text{ y } \beta = q(j-1) + l.$$

$$\begin{pmatrix} e_z \\ h_z \end{pmatrix} = \gamma_{zz}^{-1} \left[(ik_0)^{-1} J_2^{-1} \mathbf{1}_2 \sigma_{z\alpha\beta} \partial_\alpha - \gamma_{z\beta} \right] \begin{pmatrix} e_\beta \\ h_\beta \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Continuando, se etiqueta el lado derecho de la Ec. (3.19) con un Ξ entre paréntesis (Ξ) y se sustituye la igualdad obtenida en (3.21)

$$\begin{aligned} (\Xi) &= (-\mathbf{1}_4 \sigma_{\alpha\beta z} \partial_\beta + ik_0 \mathbf{1}_2 \otimes J_2 \gamma_{\alpha z}) \begin{pmatrix} e_z \\ h_z \end{pmatrix} \\ &= (-\mathbf{1}_4 \sigma_{\alpha\beta z} \partial_\beta + ik_0 \mathbf{1}_2 \otimes J_2 \gamma_{\alpha z}) \gamma_{zz}^{-1} \left[(ik_0)^{-1} J_2 \sigma_{z\beta\alpha} \partial_\alpha - \gamma_{z\beta} \right] \begin{pmatrix} e_\beta \\ h_\beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

en donde se ha usado el hecho que $J_2^{-1} = -J_2$ y $\sigma_{z\alpha\beta} = -\sigma_{z\beta\alpha}$.

Así, la ecuación diferencial que contiene solamente términos transversales α, β de los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} puede ser escrita como

$$\mathbf{1}_4 \sigma_{\alpha z \beta} \partial_z \begin{pmatrix} e_\beta \\ h_\beta \end{pmatrix} = [ik_0 \mathbf{1}_2 \otimes J_2 \gamma_{\alpha\beta} + (\Xi)] \begin{pmatrix} e_\beta \\ h_\beta \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Desarrollando explícitamente y posteriormente multiplicando ambos lados de la ecuación por $J_2 \otimes \mathbf{1}_2$ se puede escribir cada uno de los términos del conjunto (3.23) de la siguiente manera

i) el término izquierdo

$$\begin{aligned} (J_2 \otimes \mathbf{1}_2) \mathbf{1}_4 \sigma_{\alpha z \beta} \partial_z \begin{pmatrix} e_\beta \\ h_\beta \end{pmatrix} &= (J_2 \otimes \mathbf{1}_2) \partial_z \begin{pmatrix} -e_y \\ -h_y \\ e_x \\ h_x \end{pmatrix} \\ &= \partial_z \begin{pmatrix} e_x \\ h_x \\ e_y \\ h_y \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

ii) el primer término del lado derecho

$$ik_0 (J_2 \otimes \mathbf{1}_2) (\mathbf{1}_2 \otimes J_2) \gamma_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} e_\beta \\ h_\beta \end{pmatrix} = ik_0 (J_2 \otimes J_2) \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ h_x \\ e_y \\ h_y \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

en donde se ha usado la propiedad $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$,

iii) el primer término de (Ξ)

$$\begin{aligned}
 -(J_2 \otimes \mathbf{1}_2) \mathbf{1}_4 \sigma_{\alpha\beta z} \partial_\beta &= (J_2 \otimes \mathbf{1}_2) \begin{pmatrix} -\partial_y & 0 \\ 0 & -\partial_y \\ \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_x \end{pmatrix} \\
 &= (J_2 \otimes \mathbf{1}_2) (\mathbf{1}_2 \otimes J_2) \begin{pmatrix} 0 & \partial_y \\ -\partial_y & 0 \\ 0 & -\partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix} \\
 &= (J_2 \otimes J_2) \left[\left(J_2 \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right) \otimes J_2 \right] \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

iv) el segundo término de (Ξ)

$$ik_0 (J_2 \otimes \mathbf{1}_2) (\mathbf{1}_2 \otimes J_2) \gamma_{\alpha z} = ik_0 (J_2 \otimes J_2) \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

v) el tercer término de (Ξ) no debe ir multiplicado por $(J_2 \otimes \mathbf{1}_2)$ debido a que está operado por los dos primeros términos

$$\begin{aligned}
 (ik_0)^{-1} J_2 \sigma_{z\beta\alpha} \partial_\alpha \begin{pmatrix} e_\beta \\ h_\beta \end{pmatrix} &= (ik_0)^{-1} J_2 \left[\partial_y \begin{pmatrix} e_x \\ h_x \end{pmatrix} - \partial_x \begin{pmatrix} e_y \\ h_y \end{pmatrix} \right] \\
 &= (ik_0)^{-1} (J_2 \partial_y, -J_2 \partial_x) \begin{pmatrix} e_x \\ h_x \\ e_y \\ h_y \end{pmatrix} \\
 &= (ik_0)^{-1} \left[\left(J_2 \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \right) \otimes J_2 \right]^T \begin{pmatrix} e_x \\ h_x \\ e_y \\ h_y \end{pmatrix} \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

en donde, como se ha dicho anteriormente, A^T denota el transpuesto del vector A .

vi) el cuarto término de (Ξ)

$$-\gamma_{z\beta} \begin{pmatrix} e_\beta \\ h_\beta \end{pmatrix} = - \left[\gamma_{zx} \begin{pmatrix} e_x \\ h_x \end{pmatrix} + \gamma_{zy} \begin{pmatrix} e_y \\ h_y \end{pmatrix} \right]$$

CAPÍTULO 3. MEDIOS ANISOTRÓPICOS Y QUIRALES
3.2. REPRESENTACIÓN DE MARCUVITZ-SCHWINGER

$$= -(\gamma_{zx}, \gamma_{zy}) \begin{pmatrix} e_x \\ h_x \\ e_y \\ h_y \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Finalmente, la ecuación diferencial que contiene solamente términos transversales x, y de los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} se puede escribir como

$$\partial_z \psi = ik_0 J_4 L \psi, \quad (3.30)$$

en donde ψ es el cuadvivector definido en (3.15),

$$J_4 = J_2 \otimes J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_4 = J_4^{-1} = J_4^T \quad (3.31)$$

$$L = \gamma_{tt} - (D_t + \gamma_{tz}) \gamma_{zz}^{-1} (D_t^\dagger + \gamma_{zt}), \quad (3.32)$$

con

$$\begin{aligned} \gamma_{tt} &= \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} \end{pmatrix}, & \gamma_{tz} &= \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}, & \gamma_{zt} &= \begin{pmatrix} \gamma_{zx} & \gamma_{zy} \end{pmatrix}, \\ D_t &= (ik_0)^{-1} ((J_2 \partial_t) \otimes J_2), & \partial_t &= \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \end{pmatrix}^T, \end{aligned} \quad (3.33)$$

el índice superior \dagger indica el Hermitiano adjunto, los elementos γ_{ij} ($i, j = x, y, z$) de $\gamma_{tt}, \gamma_{zt}, \gamma_{tz}$ son las matrices cuadradas de 2×2 dadas previamente por (3.20).

Si además de la forma armónica de los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} dada por (3.8) se separan explícitamente el vector de onda incidente \mathbf{k} en su parte transversal k_t mas la longitudinal k_z como

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_t + k_z z - \omega t)}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_t + k_z z - \omega t)}, \quad (3.34)$$

entonces, el operador L dado por (3.32) se escribe ahora de la siguiente manera

$$L = \gamma_{tt} - (D_t + \Gamma_t + \gamma_{tz}) \gamma_{zz}^{-1} (D_t^\dagger + \Gamma_t^\dagger + \gamma_{zt}), \quad (3.35)$$

con

$$\Gamma_t = (J_2 \kappa_t) \otimes J_2, \quad \kappa_t = \begin{pmatrix} \kappa_x & \kappa_y \end{pmatrix}^T \quad (3.36)$$

y $\kappa = \mathbf{k}/k_0$ es el vector de onda incidente normalizado.

El conjunto de ecuaciones dado por (3.30) y (3.35) es el equivalente al conjunto de ecuaciones de Maxwell en la representación de Marcuvitz-Schwinger para una onda electromagnética monocromática que se propaga con vector de onda \mathbf{k} en un medio bianisotrópico.

3.2.1. Incidencia Normal en un CLC

En la presente sección se escribe la forma simplificada de las ecuaciones de Marcuvitz-Schwinger para el caso de una onda electromagnética que incide axialmente sobre una muestra de CLC.

Si una onda electromagnética se propaga en dirección paralela al eje de la hélice de un CLC (sea z), entonces debido a la simetría del sistema, los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} (y por lo tanto el cuadvectores ψ) sólo dependen de la coordenada longitudinal z y el vector de onda sólo tiene componente longitudinal, $\mathbf{k} = k_z$. Por lo tanto, en la Ec. (3.35) las derivadas transversales son igual a cero, esto es, $D_t = 0$ y el término Γ_t es también nulo.

Por otro lado, como se verá en el Cap. 4, los CLC presentan una actividad óptica muy grande. Sin embargo, estas rotaciones ópticas observadas en esta fase no son debidas a propiedades intrínsecas de las moléculas constituyentes⁶, sino que solamente reflejan las propiedades de la luz propagándose en un medio anisotrópico el cual presenta cierta torsión [4]. Como se dijo en la Sec. 1.2, los CLC se comportan localmente como un CL nemático, esto es, desde un punto de vista óptico, en cada punto \mathbf{r} de la muestra el CLC se comporta localmente como un material uniaxial y por lo tanto, los tensores $\overline{\overline{\chi}}$ y $\overline{\overline{\eta}}$ son igual a cero[2].⁷

Bajo estas consideraciones, las relaciones constitutivas (3.4) se reducen a

⁶En efecto, esta actividad óptica solo es observada en esta mesofase; cuando tiene la estructura helicoidal.

⁷En lo que resta de la presente tesis se impondrá siempre esta condición: los tensores $\overline{\overline{\chi}}$ y $\overline{\overline{\eta}}$ son igual a cero.

CAPÍTULO 3. MEDIOS ANISOTRÓPICOS Y QUIRALES
3.2. REPRESENTACIÓN DE MARCUVITZ-SCHWINGER

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{e}, \\ \mathbf{b} &= \bar{\bar{\mu}} \cdot \mathbf{h},\end{aligned}\tag{3.37}$$

caracterizadas por los tensores uniaxiales dieléctrico y magnético [35]

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_{\perp} \delta_{ij} + \epsilon_a \hat{n} \hat{n},\tag{3.38}$$

$$\bar{\bar{\mu}} = \mu_{\perp} \delta_{ij} + \mu_a \hat{n} \hat{n}.\tag{3.39}$$

Aquí δ_{ij} es el tensor identidad, ϵ_{\perp} , μ_{\perp} indican la permitividad dieléctrica y susceptibilidad magnética perpendicular al vector director \hat{n} ; $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ y $\mu_a = \mu_{\parallel} - \mu_{\perp}$ son las anisotropías dieléctrica y magnética del medio, respectivamente, con ϵ_{\parallel} , μ_{\parallel} la permitividad dieléctrica y susceptibilidad magnética paralela al director.⁸

Si el director \hat{n} adopta la configuración dada por (2.19), con la fase inicial $\phi = 0$, los tensores uniaxiales dieléctrico y magnético se pueden escribir como

$$\bar{\bar{\epsilon}}(z) = \epsilon_m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp}/\epsilon_m \end{pmatrix} + \frac{\epsilon_a}{2} \begin{pmatrix} \cos 2q_0 z & \text{sen} 2q_0 z & 0 \\ \text{sen} 2q_0 z & -\cos 2q_0 z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\tag{3.40}$$

$$\bar{\bar{\mu}}(z) = \mu_m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\perp}/\mu_m \end{pmatrix} + \frac{\mu_a}{2} \begin{pmatrix} \cos 2q_0 z & \text{sen} 2q_0 z & 0 \\ \text{sen} 2q_0 z & -\cos 2q_0 z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\tag{3.41}$$

con

$$\epsilon_m \equiv \frac{(\epsilon_{\parallel} + \epsilon_{\perp})}{2}; \quad \mu_m \equiv \frac{(\mu_{\parallel} + \mu_{\perp})}{2}.\tag{3.42}$$

Analizando directamente la forma de los tensores $\bar{\bar{\epsilon}}$ y $\bar{\bar{\mu}}$, se observa que las matrices cuadradas γ_{zt} y γ_{tz} son igual a cero.

⁸Para una onda propagándose paralela al eje del CLC, los campos \mathbf{d} y \mathbf{e} (o bien, \mathbf{b} y \mathbf{h}) se restringen al plano xy y por lo tanto las relaciones (3.37), las cuales incluyen los dos parámetros ϵ_{\perp} y ϵ_{\parallel} son la forma local mas general y exacta. Por otro lado, a incidencia oblicua, las relaciones (3.37) representan solo una aproximación: en cada punto \mathbf{r} , el CLC se comporta como un cristal uniaxial (con eje \hat{n}), mientras por simetría, el CLC podría considerarse como un cristal biaxial (con constantes dieléctricas ϵ_{\perp} y ϵ_{\parallel} en el plano xy y otra ϵ_z a lo largo del eje de la hélice). Sin embargo, las desviaciones de la uniaxialidad ($\epsilon_{\perp} - \epsilon_z$) son en la mayoría de los casos del orden de $\sim 10^{-4}$, y la aproximación puede considerarse como muy buena.

CAPÍTULO 3. MEDIOS ANISOTRÓPICOS Y QUIRALES
3.2. REPRESENTACIÓN DE MARCUVITZ-SCHWINGER

Finalmente, tomando en cuenta todas las consideraciones anteriores, la matriz L de la expresión (3.35) se reduce a

$$L = \gamma_{tt}, \quad (3.43)$$

y la ecuación que gobierna la propagación axial de una onda electromagnética en un CLC es

$$\partial_z \psi = ik_0 J_4 \gamma_{tt} \psi, \quad (3.44)$$

con

$$\begin{aligned} \gamma_{tt} &= \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \chi_{xx} & \varepsilon_{xy} & \chi_{xy} \\ \eta_{xx} & \mu_{xx} & \eta_{xy} & \mu_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \chi_{yx} & \varepsilon_{yy} & \chi_{yy} \\ \eta_{yx} & \mu_{yx} & \eta_{yy} & \mu_{yy} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ 0 & \mu_{xx} & 0 & \mu_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & \mu_{yx} & 0 & \mu_{yy} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

en donde los elementos x, y de los tensores $\bar{\varepsilon}$ y $\bar{\mu}$ están dados por las expresiones (3.40) y (3.41), respectivamente.

La Ec. (3.44) permite describir la dinámica de una onda electromagnética propagándose axialmente en un CLC; sin embargo, en la mayoría de los casos es conveniente escribir esta ecuación en un sistema de referencia en donde la matriz γ_{tt} es diagonal e independiente de la coordenada de propagación z . Esto se logra realizando una rotación⁹ del vector ψ alrededor del eje z de la siguiente manera

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_x \\ \tilde{h}_x \\ \tilde{e}_y \\ \tilde{h}_y \end{pmatrix} = U^{-1} \psi, \quad (3.46)$$

⁹Cuando se aplica la rotación del cuadvectores ψ , se está logrando que las cuatro componentes transversales del campo electromagnético giren sólida y uniformemente con la estructura helicoidal.

$$\gamma_{tt}^d = U^{-1}\gamma_{tt}U, \quad (3.47)$$

en donde U es la matriz de rotación

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

con $\theta = q_0z$ y

$$\gamma_{tt}^d = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{\perp} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Sustituyendo ψ y γ_{tt} en las Ecs. (3.44) se obtiene

$$\partial_z (U\tilde{\psi}) = ik_0 J_4 U \gamma_{tt}^d U^{-1} U\tilde{\psi}, \quad (3.50)$$

y despues de realizar algunos pasos algebraicos simples se obtiene la ecuación buscada

$$\partial_z \tilde{\psi} = ik_0 H \tilde{\psi}, \quad (3.51)$$

con

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -iq_0/k_0 & \mu_{\perp} \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{\perp} & -iq_0/k_0 \\ iq_0/k_0 & -\mu_{\parallel} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\parallel} & iq_0/k_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Nótese que la matriz H es independiente de la coordenada de propagación z y por lo tanto la Ec. (3.51) representa una ecuación de valores propios cuyo método de solución es bien conocido. La solución a la ecuación de valores propios (3.51) se presenta en el Cap. 4

Particularmente, en los capítulos originales de la presente tesis (Cap. 5 y 6) se usará convenientemente la Ec. (3.51).

3.3. Propagación de ondas electromagnéticas en CLC

Los capítulos precedentes representaron la base fundamental para poder formular una teoría acerca de la propagación axial de ondas electromagnéticas en CLC. En efecto, un acoplamiento apropiado entre las ecuaciones de Maxwell en su representación de Marcuvitz-Schwinger (Ecs. (3.44) y (3.51)) con la ecuación de equilibrio para un CLC (Ec. (2.21)), mediante el uso de las relaciones constitutivas (Ecs. (3.4)), permitirá obtener una ecuación que describa la interacción entre el campo electromagnético y el CLC. Sin embargo, como se discutirá mas adelante en este capítulo, las ecuaciones así obtenidas serán válidas solamente en cierto *régimen de propagación lineal*, es decir, en el cual la interacción de la onda electromagnética con el CLC es lo suficientemente débil como mantener sin distorsión la configuración original de la muestra. Aquí se plantearán y establecerán las ecuaciones que gobiernan la dinámica para el problema más general de interacción entre el campo electromagnético y la muestra.

3.3.1. Planteamiento del problema

En la Sec. 2.2 se obtuvo una expresión para la densidad de energía libre de Helmholtz F_d en un CLC. Si ahora en la muestra se propagan ondas electromagnéticas transversas a lo largo del eje de la hélice con campo eléctrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ y campo magnético $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)$ dependientes de las coordenadas espaciales x, y, z y del tiempo t , la densidad de energía del sistema acoplado F_C se obtiene agregando a la expresión (2.18) los términos correspondientes a la contribución electromagnética, es decir, $F_C = F_d + F_{em}$. En donde F_{em} está dado por

$$\begin{aligned} F_{em} &= -\frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*\} \\ &= -\frac{1}{2c}\text{Re}\{\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}^* + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^*\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

en donde se han escrito los campos $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}$ y \mathbf{B} en términos de los campos $\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{d}$ y \mathbf{b} definidos en (3.5). $\text{Re}\{x\}$ denota la parte real del argumento x y significa que se ha hecho un promedio temporal sobre el vector de Poynting de la onda electromagnética. Es

CAPÍTULO 3. MEDIOS ANISOTRÓPICOS Y QUIRALES
3.3. PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN CLC

necesario recordar que las relaciones constitutivas para un CLC están dadas por las expresiones (3.37) y caracterizadas por los tensores dieléctrico y magnético de las expresiones (3.38) y (3.39).

Nótese que a través de la energía electromagnética F_{em} , la energía libre de Helmholtz F_C del sistema acoplado, depende, además del vector director \hat{n} , de los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} directamente.¹⁰ Por lo tanto, después de minimizar F_C usando la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange dada por (2.9), la ecuación de equilibrio resultante dependerá de estas variables.

Si se considera el vector director en la forma

$$\hat{n} = (\cos \theta(x, y, z), \sin \theta(x, y, z), 0) \quad (3.54)$$

el procedimiento delineado arriba permitirá encontrar una ecuación diferencial parcial en términos de cinco variables: $\theta(x, y, z)$ y las componentes de los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} . Así, se presenta el problema básico en el cual sólo se tiene una ecuación y cinco incógnitas por resolver; el sistema se cierra con las ecuaciones de Maxwell en su forma estándar o en la representación de Marcuvitz-Schwinger (3.30). En efecto, este conjunto de ecuaciones diferenciales, además de contener las componentes transversales de los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} , dependen de la variable $\theta(x, y, z)$ a través de las relaciones constitutivas. De este modo, se obtienen cinco ecuaciones diferenciales escalares en términos de cinco variables y por lo tanto el sistema está completamente determinado.

Nótese que la expresión para F_{em} , es cuadrática en los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} , y por lo tanto, las ecuaciones obtenidas para la onda electromagnética son *no lineales*, puesto que los tensores $\bar{\bar{\epsilon}}$ y $\bar{\bar{\mu}}$ dependen de \hat{n} y éstos a su vez de \mathbf{e} y \mathbf{h} .¹¹

Se encuentran en la literatura soluciones analíticas de las ecuaciones descritas arriba, para el *régimen de propagación lineal*, es decir, aunque el campo electromagnético

¹⁰Se encuentra que las moléculas del CL tienden a alinearse con la dirección del campo \mathbf{e} o \mathbf{h} . Esto implica que en presencia de campos electromagnéticos, la energía del sistema acoplado $F_C = F_d + F_{em}$ es mínima cuando el director \hat{n} es paralelo a \mathbf{e} o \mathbf{h} . Así, en el estado de equilibrio y considerando $\epsilon_a, \epsilon_{\perp}, \chi_a, \chi_{\perp}$ positivos, la contribución de F_{em} a la energía total F_C debe ser negativa.

¹¹Recuérdese que de ahora en adelante solo se mencionará la forma de los tensores $\bar{\bar{\epsilon}}$ y $\bar{\bar{\mu}}$, ya que para un CLC los tensores $\bar{\bar{\chi}}$ y $\bar{\bar{\eta}}$ son igual a cero (ver Sec. 3.2.1).

CAPÍTULO 3. MEDIOS ANISOTRÓPICOS Y QUIRALES

3.3. PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN CLC

esté presente, su contribución a la energía no es lo suficientemente intensa como para producir una distorsión en la configuración original del CLC, esto es, $F_{em} \ll F_d$ ¹²; de tal forma que se puede utilizar la solución mostrada previamente (Sec. 2.2) en ausencia de campo para el director $\hat{n} = (\cos \theta(z), \sin \theta(z), 0)$, con $\theta(z) = q_0 z + \phi$, junto con las ecuaciones deducidas para la propagación axial del campo electromagnético dadas en Ec.(3.44). Así, el problema se reduce considerablemente, pues ahora, las ecuaciones obtenidas son lineales en \mathbf{e} y \mathbf{h} .

Un análisis más detallado sobre las soluciones de las ecuaciones lineales encontradas en la literatura se verá en el siguiente capítulo. En el Cap. 5 se usará esta aproximación lineal para resolver la propagación de ondas electromagnéticas en un CLC en el cual se han insertado n_0 defectos de torsión. Un tratamiento no lineal de estas ecuaciones se presentará en el Cap. 6

¹² F_d es del orden de $10^{-4} \text{ Joules/m}^3$ y F_{em} del orden de $10^{-7} \text{ Joules/m}^3$

Capítulo 4

Óptica lineal de medios helicoidales

Como se mencionó en el capítulo anterior, los primeros resultados analíticos que describen la propagación de ondas electromagnéticas en CLC, fueron obtenidos en el régimen de la aproximación lineal, es decir, $F_{em} \ll F_d$. Dentro de este régimen, el conjunto de ecuaciones dado por Ec.(3.44)¹, permite resolver completamente este sistema, en el caso más general en donde el CLC es, al mismo tiempo, dieléctrico y magnético. Sin embargo, en la literatura es más común encontrar resultados en los cuales se supone al medio como un medio no magnético, tal que $\bar{\mu} = \mu_0 \delta_{ij}$. Esta suposición es bastante buena en el intervalo de frecuencias en el visible, pero los resultados originales presentados en la presente tesis son válidos para cualquier frecuencia.

En la primera parte de este capítulo se presentarán algunos de los resultados más relevantes encontrados en la literatura sobre la óptica lineal de un CLC no magnético. Para esto, se desacoplarán las ecuaciones de Maxwell en su representación usual y de este modo, se podrá tratar independientemente la dinámica de los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} . Los primeros trabajos rigurosos al respecto fueron tratados por de Vries [4] y Kats [5].

En la segunda parte del capítulo se presentará la solución de las Ecs. de Marcuvitz-Schwinger dadas por la Ec. (3.51) para un CLC el cual es, a la vez, dieléctrico y magnético, en el sistema que gira uniformemente a lo largo del eje de la hélice. Estos resultados fueron obtenidos de la ref. [6] y forman una primera parte de la investigación original presentada aquí.

¹O bien, Ec. (3.51) en el sistema de referencia el cual gira uniformemente a lo largo del eje de la hélice.

Finalmente, se expone de manera breve el formalismo de matriz de transferencia y dispersión, el cual servirá para obtener algunas de las propiedades ópticas del material.

4.1. Propiedades ópticas: medio no magnético

Considerése un CLC no magnético, esto es, $\bar{\mu} = \mu_0 \delta_{ij}$. Desacoplando en la manera usual las ecuaciones de Maxwell dadas por (3.6), se pueden encontrar dos ecuaciones vectoriales de onda, cada una correspondiente a un campo,

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \frac{1}{c^2} \bar{\epsilon} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} = 0, \quad (4.1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.2)$$

en donde se ha usado la relación constitutiva (3.37) y el tensor dieléctrico ϵ está dado por la relación (3.38).

Ahora, se supone al campo director en un estado de deformación pura representado por la expresión (2.19). Nuevamente se hace hincapié en que en la presente tesis siempre se hará coincidir el eje de la hélica con el eje z . Se hace incidir una onda electromagnética con dirección de propagación paralela a este eje: así, los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} están restringidos al plano xy . Finalmente, se supone que los campos dependen sólo de la dirección de propagación z .

Por otro lado, se escriben las componentes del campo eléctrico \mathbf{e} para una onda electromagnética con frecuencia ω como

$$\begin{aligned} e_x(z, t) &= \text{Re} \left\{ e_x(z) e^{-i\omega t} \right\}, \\ e_y(z, t) &= \text{Re} \left\{ e_y(z) e^{-i\omega t} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

en donde, Re significa la parte real del argumento.

Sustituyendo directamente esta expresión en la ecuación de onda (4.1) y utilizando (3.38) se obtiene

$$\frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \bar{\epsilon}(z) \cdot \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

con $\epsilon(z)$ dado explícitamente por la expresión (3.40).

Nótese que los operadores de ambos lados de la Ec. (4.4) permanecen invariantes mediante una translación de longitud $p/2 = \pi/q_0$ sobre la coordenada z y por lo tanto puede usarse el teorema de Bloch-Floquet [66]²; se pueden encontrar un conjunto completo de soluciones, tales que, para cada una de ellas se debe satisfacer la siguiente condición

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}_z = \exp(-ilp/2) \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}_{z+p/2}, \quad (4.5)$$

donde el número de onda de Bloch l puede ser real para una onda viajera, o imaginario para una onda evanescente.

Ahora, se reescriben las soluciones en términos de ondas circularmente polarizadas izquierda y derecha; para ésto se escogen nuevas variables

$$\begin{aligned} e^+ &= e_x + ie_y, \\ e^- &= e_x - ie_y. \end{aligned}$$

que sustituyendo en la ecuación de onda (4.4) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} e^+ \\ e^- \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} k_0^2 & k_1^2 \exp(2iq_0z) \\ k_1^2 \exp(-2iq_0z) & k_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^+ \\ e^- \end{pmatrix}, \\ k_0^2 &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_m, \quad k_1^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\varepsilon_a}{2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tomando en cuenta la condición de periodicidad (4.5) en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{aligned} e^+ &= a \exp\{i(l + q_0)z\}, \\ e^- &= b \exp\{i(l - q_0)z\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Es directo demostrar que cuando se sustituye ésta solución en la Ec. (4.6), la componente e^+ , con número de onda $l+q_0$, sufre un cambio y se transforma en una onda con número de

²El teorema de Bloch-Floquet para este caso se escribe como

$$\mathbf{e}(z) = \mathbf{u}_l(z)e^{ilz},$$

en donde $\mathbf{u}_l(z)$ una función periódica de periodo $p/2$ que satisface

$$\mathbf{u}_l(z) = \mathbf{u}_l\left(z + \frac{p}{2}\right),$$

y l es el número de onda de Bloch, el cual queda determinado por las condiciones a la frontera periodicas.

CAPÍTULO 4. ÓPTICA LINEAL DE MEDIOS HELICOIDALES

4.1. PROPIEDADES ÓPTICAS: MEDIO NO MAGNÉTICO

onda $l - q_0$. El proceso inverso ocurre con la onda e^- , de tal modo que las dos componentes forman un conjunto completo de soluciones. Las constantes a y b se determinan al resolver las siguientes ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} -k_1^2 b + \{(l + q_0)^2 - k_0^2\} a &= 0, \\ \{(l - q_0)^2 - k_0^2\} b - k_1^2 a &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Calculando el determinante de las ecuaciones anteriores e igualándolo a cero, se obtiene la *relación de dispersión* $\omega = \omega(l)$:

$$(-k_0^2 + l^2 + q_0^2)^2 - 4q_0^2 l^2 - k_1^4 = 0. \quad (4.9)$$

Recuérdese que k_0 y k_1 están relacionados directamente con la frecuencia ω a través de las relaciones (4.6). Para un valor fijo de ω , k_0 y k_1 quedan determinadas y la relación de dispersión proporciona cuatro posibles valores para l (Fig. 4.1).

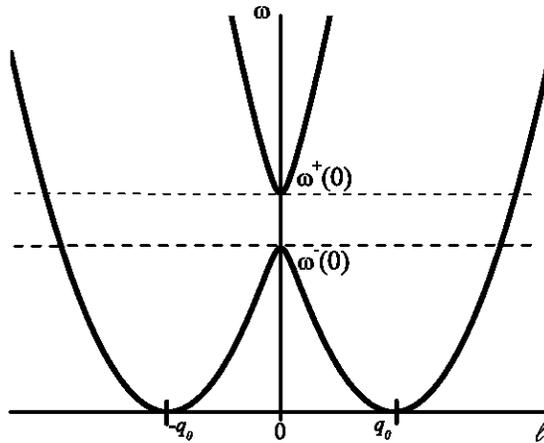


Figura 4.1: Relación entre la frecuencia ω y el número de onda de Bloch l . Cada modo l definido por la ecuación (4.7) es una superposición de dos ondas planas con vectores de onda $l \pm q_0$.

Nótese que hay dos distintas ramas y una región de la frecuencia en la cual solo hay dos posibles valores reales para l . El mínimo de la gráfica de dispersión se encuentra

haciendo $\omega = 0$. Esto conduce a la siguiente relación

$$l^2 - q_0^2 = 0,$$

con valores $l = \pm q_0$. Si ahora, se toma $l = 0$, se encuentra que

$$\begin{aligned} k_0^2 \pm k_1^2 &= q_0^2, \\ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\varepsilon_m \pm \frac{\varepsilon_a}{2}\right) &= q_0^2, \end{aligned}$$

con valores

$$\begin{aligned} \varpi^+(l = 0) &= \frac{q_0 c}{n_o}, & n_o &\equiv \sqrt{\varepsilon_\perp} \equiv \text{índice de refracción ordinario}, \\ \varpi^-(l = 0) &= \frac{q_0 c}{n_e}, & n_e &\equiv \sqrt{\varepsilon_\parallel} \equiv \text{índice de refracción extraordinario}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

en donde se han omitido las soluciones negativas y se ha supuesto que $\varepsilon_\perp < \varepsilon_\parallel$, es decir, $\varepsilon_a > 0$. El sistema acoplado (4.8) justo en las frecuencias $\varpi^+(l = 0)$ y $\varpi^-(l = 0)$, corresponden a la solución $a = -b$ (eje ordinario) y $a = b$ (eje extraordinario) respectivamente, y describen ambos estados una onda polarizada linealmente.

4.1.1. Modos Propios Para Ondas Viajeras

Al intervalo $\varpi^-(l = 0) < \omega < \varpi^+(l = 0)$, donde dos de los cuatro posibles valores de l son imaginarios puros, se le conoce como la *banda parcial de frecuencias prohibidas*. Por ahora, se escoge una frecuencia ω fuera de este intervalo. Entonces, como se puede ver de la Fig. 4.1, hay cuatro valores reales de l , los cuales se pueden agrupar como $l_1, -l_1, l_2, -l_2$. Para obtener las soluciones que correspondan a ondas que viajan a lo largo de la dirección $+z$, se deben escoger solo aquellas raíces que dan una velocidad de grupo positiva, $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial l} > 0$. Hay dos raíces que cumplen esta condición, sean l_1 y l_2 ³. Cada una de tales raíces definen un modo l_i propio de vibración y a cada uno de ellos le corresponde vector propio

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}.$$

³Por convención se llamará l_1 a la raíz más grande.

CAPÍTULO 4. ÓPTICA LINEAL DE MEDIOS HELICOIDALES

4.1. PROPIEDADES ÓPTICAS: MEDIO NO MAGNÉTICO

En el caso considerado (l real) la Ec. (4.8) muestra que los valores de a y b pueden tomarse ambos reales. Así, regresando de las variables (4.7) a las expresiones (4.3), se puede ver que el campo eléctrico asociado con el modo propio está polarizado elípticamente; además en cada punto, los ejes de la elipse coinciden con los ejes ópticos locales del CLC. Un parámetro útil para describir la elipse es el número real

$$\rho = \frac{-a + b}{a + b}.$$

La razón axial de la elipse es $|\rho|$, y el signo de ρ proporciona la dirección de rotación en el plano xy (en un punto espacial z_0 fijo y tiempo variable t). Para calcular ρ en términos de ω o l , se inicia de las Ecs. (4.8) escritas en la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{k_1^2}{A} = \frac{B}{k_1^2}, \quad (4.11)$$

en donde

$$\begin{aligned} A &= (l + q_0)^2 + k_0^2, \\ B &= (l - q_0)^2 - k_0^2. \end{aligned}$$

Entonces se puede escribir ρ como

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{-k_1^2 + A}{k_1^2 + A} = \frac{-B + k_1^2}{B + k_1^2} \\ &= \frac{-B + A}{B + A + 2k_1^2} = \frac{-2lq_0}{k_0^2 - l^2 - q_0^2 - k_1^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Si se define una cantidad positiva s^2 como

$$s^2 = \sqrt{k_1^4 + 4q_0^2 l^2}, \quad (4.13)$$

y usando la relación (4.9), la Ec. (4.12) se puede transformar en

$$\rho = \frac{-2lq_0}{\pm s^2 - k_1^2}. \quad (4.14)$$

En donde el signo \pm depende de la rama usada para $\omega(l)$ (Fig. 4.1). El aspecto general de las dos elipses asociadas con una frecuencia ω se muestra en la Fig. 4.2. El signo y

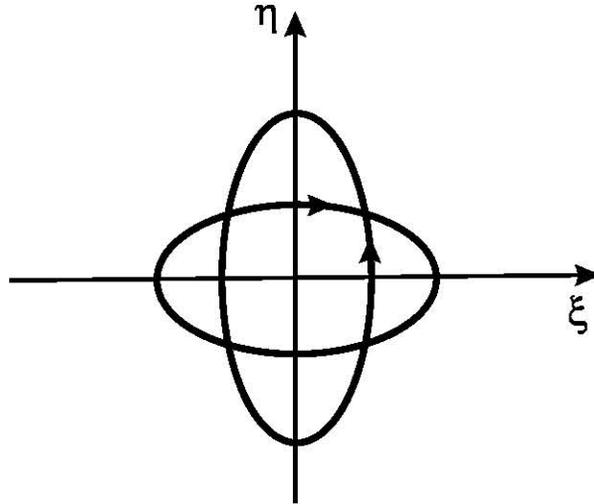


Figura 4.2: El aspecto general de las dos elipses para el campo eléctrico $E(t)$ en un punto de observación fijo. Las dos curvas corresponden a dos modos propios con la misma frecuencia ω pero diferente l . Nótese que las dos elipses no tienen la misma razón axial.

magnitud de ρ sobre las diversas ramas asociadas con ondas viajeras (l real) se muestran en la Fig. 4.3.

Nótese que la razón del eje largo con respecto al eje corto no es la misma para las elipses asociadas con cada valor de ω . Esto se puede ver directamente si se comparan los puntos A_+ y B_+ (ambos correspondientes a $\omega = \omega^+(l = 0)$) en la Fig. 4.3. Como se explicó arriba, en el punto A_+ se tiene polarización lineal. En el punto B_+ se puede ver de la Ec. (4.13) que $s^2 \sim 2lq_0$ y $\rho \sim 1$, es decir, polarización circular.

Matemáticamente, para tener dos elipses de forma idéntica (con un ángulo de 90° entre ellas sobre el plano xy), se debe pedir que $\rho_1\rho_2 = -1$. Esto puede también escribirse como

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

Sin embargo esta relación no se mantiene; los vectores propios $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de las relaciones (4.8) correspondientes a la misma frecuencia ω y diferente l no son ortogonales. Este punto ha sido enfatizado en particular por Billard [67].

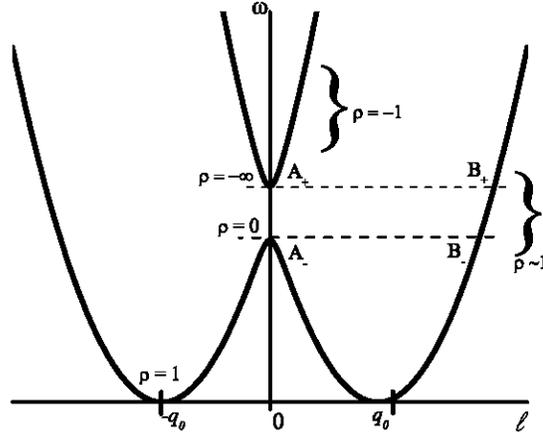


Figura 4.3: La razón axial de las elipses asociadas con los diversos modos.

Régimen de guía de onda

Las Ecs. (4.13) y (4.14) muestran que la estructura de los modos dependen críticamente del valor del parámetro

$$x = \frac{2q_0 l}{k_1^2}. \quad (4.15)$$

Se considera primero el régimen donde $x \ll 1$. Esto puede ser obtenido de dos maneras:

- haciendo los valores de l muy pequeños, ésto es, en la vecindad de los puntos A_+ y A_- de la Fig. 4.3.
- haciendo los valores de l muy grandes. Entonces, $l \sim k_0$ y por lo tanto

$$x \sim \frac{2q_0 (n_e^2 + n_o^2)}{k_0 (n_e^2 - n_o^2)} = \frac{4\pi}{k_0} \left(\frac{n_e^2 + n_o^2}{n_e + n_o} \right) \left(\frac{1}{p(n_e - n_o)} \right). \quad (4.16)$$

El criterio $x \ll 1$ es conocido como el criterio para el *límite de Mauguin* $\lambda \ll p(n_e - n_o)$ [68].

En ambos casos se encuentra un modo asociado con la rama (+) la cual tiene $\rho \rightarrow \infty$, y representa una onda ordinaria de polarización lineal guiada por la estructura ⁴. El modo

⁴Es decir, donde la polarización permanece en cada punto z_0 paralela al eje ordinario.

(-) tiene $\rho \rightarrow 0$, y representa una onda extraordinaria de polarización lineal guiada en la misma manera.

Actividad Óptica

Una de las características más destacadas de los CLC es su gran actividad óptica. A continuación se deduce una expresión que permite calcular la rotación óptica por unidad de longitud del plano de polarización de onda linealmente polarizada propagándose en el material.

En muchos de los casos prácticos, el valor de los dos índices n_e y n_o es muy parecido. Entonces k_1^2 , definido en Ec. (4.6), tiende a ser pequeño y el parámetro x definido en Ec. (4.15) tiene un valor grande para la mayor parte de las frecuencias de interés. Entonces, la cantidad s^2 definida en Ec. (4.13) tiende al valor $2q_0 |l|$ y por lo tanto, de la Ec. (4.14), se tiene que $\rho \rightarrow \pm 1$. En este régimen, los modos propios tienden a ser circulares.

Ya que $k_1^2 \rightarrow 0$, del par de Ecs. (4.8) se encuentra el par de valores de l

$$\begin{aligned} l_1 &= k_0 + q_0 \text{ Asociado con } a_1 = 0 \text{ y } B_1 = 1, \\ l_2 &= k_0 - q_0 \text{ Asociado con } a_2 = 1 \text{ y } B_2 = 0. \end{aligned}$$

Ahora, de la ecuación de dispersión (4.9) se tiene

$$\begin{aligned} l_1 &= k_0 + q_0 + \frac{k_1^4}{8k_0q_0(k_0 + q_0)} + O(k_1^8), \\ l_2 &= k_0 - q_0 + \frac{k_1^4}{8k_0q_0(k_0 - q_0)} + O(k_1^8) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ya que $a_1 = 0$, el modo 1 es, según las expresiones (4.7), una onda circularmente polarizada con vector de onda $l_1 - q_0$. Este vector de onda se asocia con un índice de refracción n_1

$$l_1 - q_0 = \frac{\omega}{c} n_1. \quad (4.18)$$

CAPÍTULO 4. ÓPTICA LINEAL DE MEDIOS HELICOIDALES

4.1. PROPIEDADES ÓPTICAS: MEDIO NO MAGNÉTICO

Similarmente, para el modo 2, se tiene una onda circularmente polarizada, en dirección opuesta y con vector de onda $l_2 + q_0$, al cual se le asocia también un índice de refracción n_2

$$l_2 + q_0 = \frac{\omega}{c} n_2. \quad (4.19)$$

La rotación óptica ψ por unidad de longitud d , se obtiene, al igual que en los libros de óptica [3], tomando la mitad de la diferencia entre estos dos vectores de onda

$$\frac{\psi}{d} = \frac{\omega}{2c} (n_1 - n_2) = \frac{k_1^4}{8q_0 (k_0^2 - q_0^2)}. \quad (4.20)$$

Esta fórmula se expresa frecuentemente en términos de una longitud de onda reducida $\tilde{\lambda} = \lambda/p = q_0/k_0$. Usando la expresión para k_1 dada por (4.6), se obtiene

$$\frac{\psi}{d} = \frac{q_0}{32} \left(\frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e^2 + n_o^2} \right) \frac{1}{\tilde{\lambda} (1 - \tilde{\lambda}^2)}. \quad (4.21)$$

La Ec. (4.21) tiene las siguientes propiedades:

- La rotación por unidad de longitud para un CLC es muy grande: para $\tilde{\lambda} = 0,7$, $q_0 = 6 \times 10^4$ y $(n_e^2 - n_o^2) / (n_e^2 + n_o^2) = 0,1$, se tiene $\psi/d \sim 10^{-3} q_0 \sim 60 \text{ rad cm}^{-1}$, o bien, $\sim 3,5 \times 10^3$ grados cm^{-1} . Un valor verdaderamente grande si se compara con un líquido isotrópico ópticamente activo del orden de ~ 1 grado cm^{-1} .
- De la expresión (4.20) se ve que para longitudes de onda λ grandes, la rotación óptica por unidad de longitud es proporcional a p^3/λ^4 .
- A longitudes de onda $\lambda \ll p$ (pero suficientemente grandes como para no ser incluido dentro del límite de Mauguin) la rotación es proporcional a p/λ^2 .

4.1.2. Modos Propios Evanescentes

Ahora, se toma una frecuencia ω dentro de la banda parcialmente prohibida

$$\frac{cq_0}{n_e} < \omega < \frac{cq_0}{n_o}. \quad (4.22)$$

CAPÍTULO 4. ÓPTICA LINEAL DE MEDIOS HELICOIDALES

4.1. PROPIEDADES ÓPTICAS: MEDIO NO MAGNÉTICO

En tal caso, se ve de la Fig. 4.1 que la expresión (4.9) tiene solo dos raíces reales ($l = \pm l_1$). Las raíces restantes son imaginarias puras ($l = \pm i\kappa$).

Se considera ahora que una muestra de CLC derecha ($q_0 > 0$) llena el espacio en la región $z > 0$ (Fig. 4.4), en la cual incide normalmente desde el aire ($z < 0$) un haz de luz de polarización lineal (e_x, e_y). Esto en general induce en la muestra dos ondas:

- Una onda viajera (de amplitud proporcional a e^{il_1z}). De acuerdo a la Ec. (4.14), el parámetro ρ asociado con esta onda es cercano a +1 (para un CLC derecho): entonces, la onda está polarizada circularmente.
- Una onda evanescente (de amplitud proporcional a $e^{-\kappa z}$).

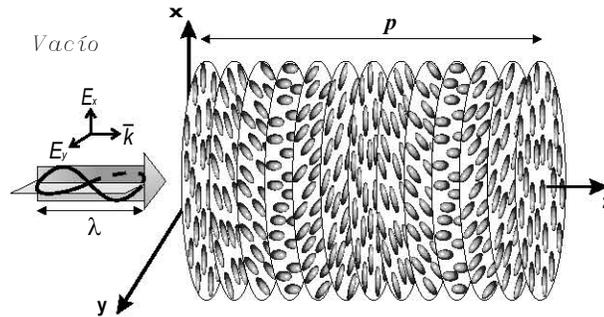


Figura 4.4: Una muestra de CLC que llena el espacio en la región $z > 0$.

Mediante una apropiada elección de la polarización, por ejemplo circular derecha, es posible extinguir la componente de la onda viajera: esto significa que un haz de polarización circular derecha será totalmente reflejado. Así, la región de frecuencias prohibidas $[\omega^-(l=0), \omega^+(l=0)]$ corresponde al intervalo de frecuencias para posibles reflexiones totales o comúnmente llamada *reflexión de Bragg*. Es necesario notar que esta propiedad concuerda con una descripción mas elemental hecha en [69] en un límite apropiado cuando $n_e \rightarrow n_o$. Aquí, la brecha se colapsa a una sola frecuencia $\omega = cq_0/\bar{n}$, con \bar{n} el índice de refracción promedio.

A continuación se analiza con detalle el problema de la reflexión de una onda electromagnética que incide normalmente desde el aire sobre una muestra de CLC (Fig. 4.4).

CAPÍTULO 4. ÓPTICA LINEAL DE MEDIOS HELICOIDALES

4.1. PROPIEDADES ÓPTICAS: MEDIO NO MAGNÉTICO

La onda incidente con campo transversal $e = (e_x, e_y)$ tiene la forma⁵

$$\begin{aligned} e_x &= Z_0^{-1/2} f_x e^{iQz}, & h_x &= -e_y, \\ e_y &= Z_0^{-1/2} f_y e^{iQz}, & h_y &= e_x, \end{aligned} \quad (4.23)$$

y la onda reflejada

$$\begin{aligned} e_x^r &= Z_0^{-1/2} f_x^r e^{-iQz}, & h_x^r &= e_y^r, \\ e_y^r &= Z_0^{-1/2} f_y^r e^{-iQz}, & h_y^r &= -e_x^r, \end{aligned} \quad (4.24)$$

en donde, se ha usado la relación de ortogonalidad $\hat{k} \times \mathbf{e} = \mathbf{h}$; el vector de onda \hat{k} es unitario y determina la dirección de propagación de la onda incidente desde el aire (en este caso $z < 0$), h_x, h_y son las componentes transversales del campo magnético. Por otro lado, la onda transmitida en el medio, se escribe en la forma

$$e_x^t = Z_0^{-1/2} A e^{i\gamma z}, \quad e_y^t = Z_0^{-1/2} A f e^{i\gamma z}, \quad (4.25)$$

donde las cantidades A, f y γ , quedan completamente determinadas por las Ecs. (4.7), (4.8) y (4.9); en efecto, para un valor dado de la frecuencia ω , estas relaciones determinan el número de onda γ y el estado de polarización de la onda. Aquí f es un número complejo que caracteriza la elipticidad de la onda en el medio.

La tercera ecuación de Maxwell (Ecs. (3.1)), permite obtener las expresiones para el campo magnético \mathbf{h} en el medio:⁶

$$\frac{\partial h_x^t}{\partial t} = c \frac{\partial e_y^t}{\partial z}, \quad \frac{\partial h_y^t}{\partial t} = -c \frac{\partial e_x^t}{\partial z}. \quad (4.26)$$

Las amplitudes correspondientes a los campos, justo en la frontera del CLC ($z = 0$), se obtienen al girar por un ángulo $q_0 z$ los campos de las expresiones (4.25) y evaluarlos en $z = 0$:

$$\left. \frac{\partial h_x^m}{\partial t} \right|_{z=0} = c \left. \frac{\partial e_y^m}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \left. \frac{\partial h_y^m}{\partial t} \right|_{z=0} = -c \left. \frac{\partial e_x^m}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (4.27)$$

en donde

$$\begin{pmatrix} e_x^m \\ e_y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos q_0 z & -\text{sen} q_0 z \\ \text{sen} q_0 z & \cos q_0 z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x^t \\ e_y^t \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

⁵Se omite por el momento la parte armónica temporal de la expresión (4.3).

⁶Nuevamente, se omite la parte armónica temporal en la expresión de los campos.

CAPÍTULO 4. ÓPTICA LINEAL DE MEDIOS HELICOIDALES

4.1. PROPIEDADES ÓPTICAS: MEDIO NO MAGNÉTICO

y las componentes e_x^t y e_y^t están dadas por las expresiones (4.25). Así, y después de substituir (4.28) en (4.27), se obtiene en la frontera

$$\omega h_x^m = i c \left(q_0 e_x^t + i \gamma e_y^t \right) \Big|_{z=0}, \quad \omega h_y^m = i c \left(q_0 e_y^t - i \gamma e_x^t \right) \Big|_{z=0}. \quad (4.29)$$

Ahora se exige que las componentes tangenciales de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} se conserven en la frontera, ésto es,

$$\begin{aligned} e_x + e_x^r &= e_x^m, \\ e_y + e_y^r &= e_y^m, \\ h_x + h_x^r &= h_x^m, \\ h_y + h_y^r &= h_y^m. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Lo cual lleva, respectivamente, a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} f_x + f_x^r &= A, \\ f_y + f_y^r &= Af, \\ f_y - f_y^r &= -\frac{icA}{\omega} (q_0 + i\gamma f), \\ f_x - f_x^r &= \frac{icA}{\omega} (q_0 f - i\gamma). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Así, resolviendo este sistema de ecuaciones, se puede encontrar directamente el valor del coeficiente de reflexión en cada una de las componentes cartesianas. En la componente x :

$$R_x = \frac{f_x^r}{f_x} = \frac{1 - c (ifq_0 + \gamma) / \omega}{1 + c (ifq_0 + \gamma) / \omega}, \quad (4.32)$$

y en la componente y :

$$R_y = \frac{f_y^r}{f_y} = \frac{f - c (-iq_0 + f\gamma) / \omega}{f + c (-iq_0 + f\gamma) / \omega}. \quad (4.33)$$

Las fórmulas (4.32) y (4.33) resuelven el problema; sólo es necesario determinar la elipticidad de la onda a través de f , y el vector de onda en el medio a través de γ .

En resumen, las propiedades ópticas observadas en una muestra de CLC son muy interesantes: cuando p corresponde a una longitud de onda en el espectro visible, el CLC muestra colores brillantes por reflexión. También se vió que la actividad óptica debida a la estructura macroscópica de los CLC es grande cuando se compara con otros materiales.

4.2. Propiedades ópticas: medio magnético

Considerése una onda propagándose axialmente en un CLC el cual es, al mismo tiempo, dieléctrico y magnético. La dinámica de la onda propagándose en este medio está determinada por las Ecs. (3.51).

Como se dijo anteriormente, en el intervalo de frecuencias visibles, no existe diferencia esencial entre un medio magnético y uno que no lo es. Así que los resultados que pudieran obtenerse usando las Ecs. (3.51), en vez de las Ecs. (4.4), serían prácticamente los mismos. Sin embargo, la forma explícita de las Ecs. (3.51) permite obtener soluciones las cuales son más generales y simples en el sentido de que éstas son más simétricas. Adicionalmente, la representación de Marcuvitz-Schwinger facilita la implementación y solución de problemas con condiciones a la frontera, en los cuales se exige la continuidad de las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos.

A continuación se presenta un resumen de los resultados obtenidos de la ref. [6]

4.2.1. La ecuación de propagación y sus soluciones

Nótese que la disposición de las componentes transversales de los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} en el cuadrivector rotado $\tilde{\psi} = (\tilde{e}_x, \tilde{h}_x, \tilde{e}_y, \tilde{h}_y)^T = U^{-1}\psi = U^{-1}(e_x, h_x, e_y, h_y)^T$, definido en (3.15) y (3.46), fué arbitraria y a partir de ésta se obtuvo el conjunto de Ecs. (3.51). Sin embargo, por razones que serán mencionadas y ejemplificadas en el Cap. 5, es más conveniente reescribir las Ecs. (3.51) definiendo el cuadrivector

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_x \\ \tilde{e}_y \\ \tilde{h}_x \\ \tilde{h}_y \end{pmatrix} = \mathcal{R}(-\theta)\beta. \quad (4.34)$$

en donde, la matriz $\mathcal{R}(-\theta)$ es una matriz de rotación apropiada para el nuevo cuadrivector

$$\beta = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ h_x \\ h_y \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

CAPÍTULO 4. ÓPTICA LINEAL DE MEDIOS HELICOIDALES
4.2. PROPIEDADES ÓPTICAS: MEDIO MAGNÉTICO

Para lograr tal objetivo cada una de las cantidades involucradas en las Ecs. (3.51) deben ser operadas por la siguiente matriz simétrica

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

esto es,

$$\begin{aligned} U^{-1} &\rightarrow \mathcal{R}(-\theta) = \Lambda^{-1}U^{-1}\Lambda, \\ \psi &\rightarrow \beta = \Lambda^{-1}\psi, \\ H &\rightarrow H_\beta = \Lambda^{-1}H\Lambda. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Después de realizar las transformaciones necesarias, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones en el sistema que gira uniformemente a lo largo del eje de la hélice

$$\partial_{z'}\tilde{\beta} = iH_\beta\tilde{\beta}, \quad (4.38)$$

en donde se ha definido una nueva variable adimensional

$$z' = k_0z, \quad (4.39)$$

y la matriz H_β está dada por

$$H_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -i\tilde{\lambda} & 0 & \mu_\perp \\ i\tilde{\lambda} & 0 & -\mu_\parallel & 0 \\ 0 & -\varepsilon_\perp & 0 & -i\tilde{\lambda} \\ \varepsilon_\parallel & 0 & i\tilde{\lambda} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

$\mathcal{R}(\varphi)$ es la matriz de rotación definida como⁷

$$\mathcal{R}(\theta) = \exp(\mathbf{R}\theta) \equiv \cos\theta\mathbf{I}_4 + \sin\theta\mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (4.41)$$

\mathbf{I}_4 es la matriz identidad de 4×4 y

⁷Cuyo significado se discutió en la Sec. 3.2.1

$$\tilde{\lambda} = \lambda/p. \quad (4.42)$$

Recuérdese que debido a una apropiada rotación de los ejes x, y , se logró obtener una matriz H_β independiente de la coordenada de propagación z' . En lo subsecuente y para simplificar notación, se omitirá la comilla (') de la variable z' , sobreentendiendo siempre que se trata de una coordenada adimensional. Se omitirá también el símbolo (\sim) del cuadvivector $\tilde{\beta}$ y de los campos $\tilde{\mathbf{e}}$ y $\tilde{\mathbf{h}}$. A menos que se diga lo contrario, se sobreentenderá que se trata de los campos en el eje de sistemas el cual gira a lo largo del eje de la hélice.

Ya que la matriz H_β es independiente de z , la ecuación de propagación (4.38) admite cuatro soluciones las cuales tienen la forma de ondas planas

$$\beta^j(z) = t^j \exp(in_j z), \quad (4.43)$$

en donde n_j, t^j son los valores propios y vectores propios de H , respectivamente. Ellos están dados por las siguientes relaciones:

$$n_{1,2}^2 = \frac{\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp} + \varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}}{2} + \tilde{\lambda}^2 \mp u \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} t_1^{\pm} &= c_1 \left(\pm n_1 u_1, i\tilde{\lambda}(2\varepsilon_{\parallel}\mu_m - u_2), \mp 2in_1\tilde{\lambda}\varepsilon_m, 2\tilde{\lambda}^2\varepsilon_m + u_1\varepsilon_{\parallel} \right) \\ t_2^{\pm} &= c_2 \left(\pm n_2 u_2, i\tilde{\lambda}(2\varepsilon_{\parallel}\mu_m - u_1), \mp 2in_2\tilde{\lambda}\varepsilon_m, 2\tilde{\lambda}^2\varepsilon_m + u_2\varepsilon_{\parallel} \right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

donde ε_m y μ_m fueron previamente definidos en (3.42) y

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{4\varepsilon_m\mu_m\tilde{\lambda}^2 + a_c^2}; \quad u_{1,2} = a_c \mp u; \\ c_k &= \left| 4n_k u \left(u_k \varepsilon_{\parallel} + 2\tilde{\lambda}^2 \varepsilon_m \right) \right|^{-1/2}; \quad (k = 1, 2) \end{aligned}$$

$$a_c = \frac{\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp} - \varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}}{2}. \quad (4.46)$$

Nótese que la relación de dispersión dada por (4.44) es el equivalente a la relación dada por (4.9), pero generalizada para medios magnéticos.

4.2.2. Representación de amplitud y métrica del espacio de estado

El campo interno se puede representar como una superposición de los cuatro vectores propios (*representación de amplitud*), mediante

$$\tilde{\beta}(z) = a_j t^j \exp(in_j z) \equiv T\alpha(z) \quad (4.47)$$

en donde T es la matriz cuya j -ésima columna coincide con t^j y $\alpha(z)$ es el cuadvectores con componentes $a_j \exp(in_j z)$. Obviamente, α y $\beta = T\alpha$ representan el mismo estado en dos diferentes conjuntos de vectores base. La métrica del espacio de estado se obtiene definiendo un tensor métrico G y un producto escalar $\beta_1^\dagger G \beta_2 \equiv \alpha_1^\dagger G \alpha_2$, en donde G_β y

$$G_\alpha = T^\dagger G_\beta T \quad (4.48)$$

son las matrices que representan a G en los dos conjuntos de vectores base. Haciendo

$$G_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

la norma del vector de estado representa el promedio temporal de la componente z del vector de Poynting y el tensor G satisface las relaciones

$$G \equiv G^\dagger \equiv G^{-1}. \quad (4.50)$$

En un medio no disipativo, la derivada espacial z de la norma es idénticamente cero y la matriz $G_\beta H_\beta$ es auto-adjunta:

$$G_\beta H_\beta = (G_\beta H_\beta)^\dagger \equiv H_\beta^\dagger G_\beta. \quad (4.51)$$

Esta propiedad y el hecho de que la ecuación de valores propios para H_β , dada por (4.44), es bicuadrática, implica que los valores propios son $n_1, n_2, n_3 = -n_1, n_4 = -n_2$, con n_j real o puramente imaginario.

4.2.3. Propiedades de las ondas estacionarias dentro de la banda prohibida

Obsérvese de la relación (4.44) que la estructura helicoidal aquí considerada admite solo una banda parcialmente prohibida, en donde n_1 es imaginario y n_2 real (ver la analogía en Fig. 4.1 con $\omega \rightarrow \tilde{\lambda}$ y $l \rightarrow n$). En los extremos de la banda el valor propio n_1 es igual a cero, los extremos de las bandas $\tilde{\lambda}_k$ ($k = 1, 2$) están dados por $\tilde{\lambda}_1 = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}}$ y $\tilde{\lambda}_2 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}}$,⁸ respectivamente, y los correspondientes vectores propios 1^{\pm} definen ondas estacionarias polarizadas linealmente cuyas amplitudes decrecen exponencialmente en la *dirección de propagación*.⁹ Nótese que los campos \mathbf{e} y \mathbf{h} son paralelos y oscilan a lo largo del eje x cuando $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1$ y a lo largo del eje y cuando $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_2$. Más concretamente, los campos \mathbf{e}^+ , \mathbf{h}^+ experimentan una diferencia de fase $\Delta\varphi = \pi/2$, cuando $\tilde{\lambda}$ incrementa de $\tilde{\lambda}_1$ a $\tilde{\lambda}_2$, mientras que los campos \mathbf{e}^- , \mathbf{h}^- cambian la fase en $\Delta\varphi = -\pi/2$. En realidad, la Ec. (4.45) proporciona vectores propios 1^{\pm} con \mathbf{h}^{\pm} reales y \mathbf{e}^{\pm} puramente imaginarios. En el caso particular $a_c = 0$, se observa que el campo \mathbf{e}^+ es paralelo a \mathbf{h}^+ y \mathbf{e}^- a \mathbf{h}^- para cualquier valor de $\tilde{\lambda}$ dentro de la banda prohibida. Los ángulos entre tales vectores y el eje y son $\pm\phi$, donde

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_m + \tilde{\lambda}_a \cos 2\phi, \quad (4.52)$$

con

$$\tilde{\lambda}_m = \frac{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}{2}, \quad \tilde{\lambda}_a = \frac{\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1}{2}. \quad (4.53)$$

Por lo tanto, los vectores de campo de los modos 1^+ y 1^- giran un ángulo de $\pi/2$ en direcciones opuestas cuando $\tilde{\lambda}$ aumenta de $\tilde{\lambda}_1$ a $\tilde{\lambda}_2$. El sentido de esta rotación satisface la regla de la mano derecha con respecto a la dirección de propagación positiva de las dos ondas propias.

⁸En el presente trabajo y sin pérdida de generalidad se asumirá que $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$.

⁹Aquí "dirección de propagación" no se refiere a la dirección del flujo de energía, ya que el vector de Poynting es cero. Las ondas 1^+ y 1^- deben ser consideradas como propagándose a la derecha y a la izquierda respectivamente, aunque ellas sean estacionarias, debido a que una onda incidente sobre un plano de discontinuidad desde la izquierda (propagación a la derecha) genera una onda 1^+ transmitida y una onda 1^- reflejada.

En el caso general $a_c \neq 0$ los vectores e y h ya no son paralelos durante la rotación, sino que su bisector $\phi \equiv (\phi_e + \phi_h)/2$ hace un ángulo con el eje y el cual está aproximadamente dado por Ec. (4.52). El ángulo θ_0 entre e y h juega un papel muy importante en las propiedades ópticas que se discutirán en el Cap. 5. Su dependencia con a_c y $\tilde{\lambda}$ se analizan en la ref. [8].

Finalmente, se observa que dentro de la banda prohibida la polarización de las ondas viajeras 2^\pm es casi circular, en consistencia con lo comentado en la Sec. 4.1.2.

4.2.4. Matrices métricas

En la representación α , los vectores base serán escogidos en el orden 1^+ , 2^+ , 1^- , 2^- .¹⁰ Usando esta elección, la matriz G_α está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

en las regiones fuera y dentro de la banda prohibida, respectivamente.

En ciertas circunstancias una elección mas apropiada será el orden 1^+ , 1^- , 2^+ , 2^- .¹¹ En este caso, la matriz G_α está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Estas matrices resumen las propiedades más importantes del producto escalar entre los vectores propios de H_β . Obsérvese que la norma de las ondas estacionarias 1^\pm dentro de la banda prohibida es igual a cero y la energía es compartida a los modos propagantes 2^\pm . Una manera de definir el producto escalar consiste en suponer a G_β como la matriz diagonal con elementos ε_\parallel , ε_\perp , μ_\parallel y μ_\perp . Con tal definición, la norma del vector de estado representa el promedio temporal de la densidad de energía¹² multiplicado por la velocidad

¹⁰Esta elección particular será usada en el Cap. 5

¹¹Por ejemplo, ver Cap. 6

¹²Aquí se desprecia la dispersión. Para una definición de la densidad de energía en medios con dispersión ver por ejemplo ref. [75].

de la luz en el vacío.

Basado en este formalismo más elegante, en el siguiente capítulo se resolverá el problema de una onda electromagnética propagándose axialmente en un CLC en el cual se han insertado n_0 defectos de torsión.

Este mismo formalismo servirá para describir la propagación no lineal de una onda electromagnética en un CLC puro.

4.3. Matriz de transferencia y de dispersión

En esta sección se presenta el formalismo de la matriz de transferencia y de dispersión, el cual es útil en problemas en donde se deben satisfacer condiciones a la frontera [70]. Particularmente, se usará un defecto de torsión como plano de discontinuidad y siempre se considerará el sistema de referencia girando rígidamente con el CLC.

Nuevamente, suponga que una onda electromagnética se propaga axialmente, a lo largo del eje z , en una muestra de CLC, en la cual existe un defecto de torsión en un punto, que por simplicidad se tomará como $z = 0$ (véase la Fig. 5.1 en la Sec. 5.1). El ángulo de torsión es θ .

La solución en la región a , según la Ec. (4.47), es simplemente $\beta_a = T\alpha_a$. Sin embargo, en la región b , debido al defecto, la solución está ahora girada por un ángulo θ ; aplicando una matriz de rotación a la expresión (4.47), la solución en la región b es $\beta_b = \mathcal{R}(\theta)T\alpha_b = \exp(\mathcal{R}\theta)T\alpha_b$, en donde $\mathcal{R}(\theta)$ y \mathcal{R} se definieron mediante la expresión (4.41).

La continuidad de las componentes tangenciales del campo electromagnético implica la continuidad del campo $\beta(z)$ en el plano del defecto, es decir,

$$\beta_a(z = 0^-) = \beta_b(z = 0^+). \quad (4.56)$$

Esta condición permite obtener una expresión para las componentes α_b en términos de α_a como sigue

$$\alpha_b(0^-) = T^{-1}\mathcal{R}(\theta)^{-1}T\alpha_a(0^+) = T^{-1}\exp(-\mathcal{R}\theta)T\alpha_a(0^+). \quad (4.57)$$

De la Ec. (4.57) la matriz de transferencia U se define como

$$U = T^{-1} \exp(-R\theta)T. \quad (4.58)$$

Para encontrar los elementos de U se expresa T^{-1} como una función de T usando la relación $G_\alpha = T^\dagger G_\beta T$ de la Sec. 4.2.2 y las ecuaciones que definen los elementos de T, G_α, G_β (ver Sec. 4.2.4), del tal forma que

$$U = G_\alpha T^\dagger G_\beta \exp(-R\theta)T. \quad (4.59)$$

Si en la representación α , los vectores base se escogen en el orden $1^+, 2^+, 1^-, 2^-$, la matriz G_α viene dada por la expresión (4.54) y los elementos (i, j) de la matriz de transferencia U se pueden escribir como

$$U = \begin{pmatrix} u_{1+1+} & u_{1+2+} & u_{1+1-} & u_{1+2-} \\ u_{2+1+} & u_{2+2+} & u_{2+1-} & u_{2+2-} \\ u_{1-1+} & u_{1-2+} & u_{1-1-} & u_{1-2-} \\ u_{2-1+} & u_{2-2+} & u_{2-1-} & u_{2-2-} \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Nótese que la matriz U relaciona los coeficientes α_b , en la región b , en términos de los coeficientes α_a , en la región a . El elemento (i, j) de U corresponde a ondas incidentes desde la región a cuando $j = 1, 2$ y proporciona la propiedad de transmisión en la región b cuando $i = 1, 2$. Sin embargo, la propiedad de reflexión no se puede obtener de las componentes de U de la expresión (4.60), ya que no se tienen elementos en la región b , cuando $i = 1, 2$, en términos de las ondas incidentes desde la región a . Para resolver este problema se reescribe la relación (4.57) de tal modo que se obtenga una matriz de dispersión S , la cual permite escribir los coeficientes asociados con las ondas reflejadas en el plano del defecto (en ambas regiones), en términos de los coeficientes asociados con las ondas incidentes sobre el plano (en ambas regiones). El resultado de resolver (4.57) es

$$\begin{pmatrix} 1_b^+ \\ 2_b^+ \\ 1_a^- \\ 2_a^- \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} 1_a^+ \\ 2_a^+ \\ 1_b^- \\ 2_b^- \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

en donde 1_b^+ denota el modo 1 reflejado sobre el plano del defecto en la región b ; 1_a^- denota el modo 1 reflejado sobre el plano del defecto en la región a ; etc. La matriz de

CAPÍTULO 4. ÓPTICA LINEAL DE MEDIOS HELICOIDALES
4.3. MATRIZ DE TRANSFERENCIA Y DE DISPERSIÓN

dispersión S se puede escribir en términos de la matriz de transferencia U de la siguiente manera

$$S = (P_1 - U \cdot P_2)^{-1} (U \cdot P_1 - P_2). \quad (4.62)$$

en donde P_1 y P_2 son las matrices diagonales definidas como

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente ($P_1\alpha$ y $P_2\alpha$ representan entonces las componentes derecha e izquierda de α , respectivamente). De este modo, el elemento (i, j) de S corresponde a ondas incidentes desde la izquierda cuando $j = 1, 2$ y provee las propiedades de transmisión y reflexión de la capa cuando $i = 1, 2$ y $i = 3, 4$, respectivamente. Las amplitudes al cuadrado de tales elementos dan la transmitancia y reflectancia de la capa para ondas que inciden desde la izquierda.

Capítulo 5

Defectos de torsión

Como se mostró en la Sec. 4.2, en el régimen lineal se tienen soluciones exactas para una onda electromagnética que se propaga axialmente en un medio con simetría helicoidal. Particularmente, la forma de las soluciones obtenidas es útil para su aplicación en sistemas en los cuales se deban satisfacer condiciones a la frontera debido a la presencia de un plano de discontinuidad perpendicular a la dirección de propagación; esto es, la representación de Marcuvitz-Schwinger permite plantear y analizar de manera directa el problema de una onda electromagnética transversal propagándose en dirección z , la cual debe satisfacer condiciones a la frontera tangenciales a un plano de discontinuidad xy en un punto z_0 . En este capítulo se estudia la propagación axial de una onda electromagnética con longitud de onda λ_0 dentro de la banda prohibida en una muestra con simetría helicoidal, en la cual se generan un número finito n_0 de *defectos de torsión*, los cuales se pueden ver como N_0 planos de discontinuidad.

En la Sec. 5.1 se discuten las propiedades ópticas de muestras con solo un defecto de torsión, dando por primera vez ecuaciones exactas para el *modo del defecto* y para las matrices de transferencia y dispersión del plano del defecto. Muestras con dos o más defectos de torsión serán discutidos en las Secs. 5.2 y 5.3, respectivamente.¹

¹El material original presentado en este capítulo sirvió como base para la escritura y publicación de un artículo de investigación (véase la ref. [6]).

5.1. Singuletes

Considérese una muestra con simetría helicoidal entre los planos $z = -l$ y $z = +l$ con solo un defecto de torsión en $z = 0$, el cual divide la muestra en dos regiones: a para $z < 0$ y b para $z > 0$ (Fig. 5.1). Las principales propiedades del modo de defecto de

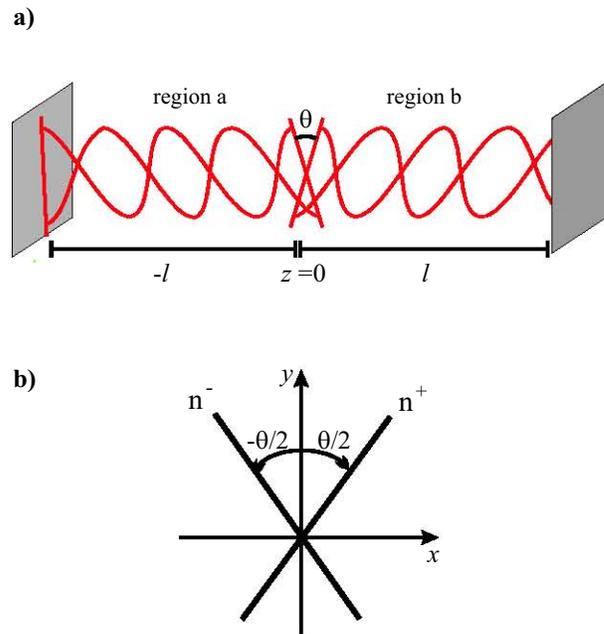


Figura 5.1: Una muestra con simetría helicoidal de ancho $2l$ con un defecto de torsión en $z = 0$. *a)* El defecto se puede generar de la siguiente manera: *i)* se considera una muestra helicoidal sin defectos entre planos ortogonales al eje de la hélice (eje z); *ii)* enseguida se corta la muestra de manera que se obtengan dos capas entre planos paralelos; y *iii)* se gira cualquier capa con respecto a la precedente un cierto ángulo θ a lo largo del eje común. *b)* Se muestra el plano del defecto perpendicular al eje z . Nótese como la dirección del director \hat{n} cambia abruptamente de \hat{n}^- a \hat{n}^+ por un ángulo de torsión θ . El defecto forma un plano de discontinuidad en donde se debe satisfacer la continuidad de las componentes tangenciales del campo electromagnético.

este sistema se han encontrado numéricamente en las refs. [8, 12, 13, 16]. Sin embargo, aquí se atacará el problema analíticamente mediante el análisis de ecuaciones exactas, las cuales permitirán verificar tales propiedades y tener una visión más profunda de la física del problema.

5.1.1. Muestra infinita

Considérese una estructura infinita, es decir, se toma el límite $l \rightarrow \infty$. La solución más general para este sistema es una combinación lineal de las soluciones previamente encontradas en Ec. (4.47). Esta se puede escribir como

$$\Theta(z) = \begin{cases} \sum_{j=1}^4 c_j^a \beta^j(z) = \sum_{j=1}^4 c_j^a t^j \exp(in_j z), & z < 0 \\ \sum_{j=1}^4 c_j^b \beta^j(z) = \sum_{j=1}^4 c_j^b t^j \exp(in_j z), & z > 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Haciendo referencia a la Sec. 4.2.4, es necesario señalar que particularmente en el presente capítulo, en la representación α , los vectores base serán escogidos en el orden 1^+ , 2^+ , 1^- , 2^- . Debido a que se está considerando una longitud de onda λ_0 dentro de la banda prohibida, las ondas propias 1^\pm representan ondas evanescentes, ya que sus correspondientes valores propios $\pm n_1$ son imaginarios puros y, por lo tanto, los factores exponenciales de la expresión (4.47) son reales. Los vectores propios t_a^j y t_b^j están dados por Ec. (4.45) en dos diferentes sistemas de referencia a y b cuyos ejes y_a, y_b hacen un ángulo θ (ver Fig. 5.3 en Sec. 5.1.2). En un sistema de referencia con el eje y como el bisector de y_a, y_b , tales vectores se obtienen aplicando la matriz de rotación $\mathcal{R}(-\theta/2)$ y $\mathcal{R}(\theta/2)$ a los vectores t^j definidos en la Ec. (4.45).

Las matrices T_a y T_b correspondientes están dadas por

$$T_a = \mathcal{R}(-\phi)T, \quad T_b = \mathcal{R}(\phi)T, \quad (5.2)$$

en donde $\phi = \theta/2$ y T fué definida previamente en la expresión (4.47).

En el límite $l \rightarrow \infty$ los factores exponenciales de la primera componente de $\alpha_a = T_a^{-1}\beta_a$ y de la tercera componente de $\alpha_b = T_b^{-1}\beta_b$ (correspondiendo a los modos 1^+ en la región a y 1^- en la región b), divergen cuando z tiende a $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente. Por lo tanto, sus amplitudes deben ser cero (ver Fig. 5.2). La continuidad tangencial de los vectores e y h (sistema de referencia del laboratorio) en $z = 0$ proporciona cuatro ecuaciones homogéneas para las seis componentes. Sin pérdida de generalidad, se puede hacer igual a 1 la amplitud del modo 1^- en $z = 0^-$. Las amplitudes de los modos 2^\pm en $z = 0^-$ y $z = 0^+$ se puede expresar fácilmente como una función de la amplitud s del modo 1^+ en $z = 0^+$, y el campo interno más general se puede escribir como una

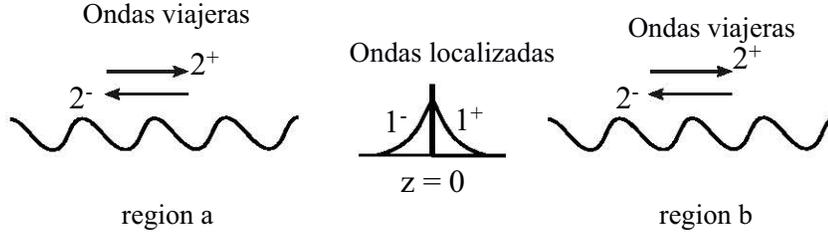


Figura 5.2: Un defecto de torsión en $z = 0$. La muestra es infinita, es decir, en el límite cuando $l \rightarrow \infty$. Se muestran los modos que existen en cada lado del plano del defecto. Nótese que los modos 1^+ en la región a y 1^- en la región b divergen cuando z tiende a $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente; y por lo tanto, sus amplitudes deben ser nulas.

combinación lineal de las soluciones correspondientes a $s = \pm 1$. Para cada uno de tales valores, los vectores de amplitud $\alpha_a(s)$ y $\alpha_b(s)$ tienen componentes $(0, A^+(s), 1, A^-(s))$ y $(s, B^+(s), 0, B^-(s))$, respectivamente, donde:

$$\begin{aligned} A^\pm(s) &= a'(s) \pm ia''(s), \\ B_b^\pm(s) &= sA_a^\mp(s), \end{aligned} \quad (5.3)$$

con

$$\begin{aligned} a'(s) &= -\frac{c_2}{a_c c_1} \frac{2\tilde{\lambda}^2 \varepsilon_m + \varepsilon_{\parallel} u_1}{2\tilde{\lambda}^2 \varepsilon_m + \varepsilon_{\parallel} u_2} \left[\frac{in_1 \tilde{\lambda} u \varepsilon_m (\cot \phi)^s s}{2\tilde{\lambda}^2 \varepsilon_m + \varepsilon_{\parallel} u_1} + \frac{u_2}{2} \right] \\ a''(s) &= \frac{c_2}{a_c c_1} \frac{2\tilde{\lambda}^2 \varepsilon_m + \varepsilon_1 u_1}{4\tilde{\lambda} \varepsilon_m n_2} \left[u (\tan \phi)^s s - \frac{2in_1 \tilde{\lambda} \varepsilon_m u_1}{2\tilde{\lambda}^2 \varepsilon_m + \varepsilon_{\parallel} u_1} \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

En cada lado del plano del defecto, las amplitudes A^\pm y B^\pm , relacionadas a los modos 2^\pm , tienen el mismo módulo $m = \sqrt{a'^2 + a''^2}$. Entonces, su superposición es una onda estacionaria. Esta onda está linealmente polarizada y oscilante (*no localizada*), mientras que los modos 1^\pm definen una onda estacionaria *localizada* en la cual la amplitud de los campos dependen de la coordenada de propagación z como $\exp(-|z|/\ell_d)$, en donde

$$\ell_d = 1/|n_1| \quad (5.5)$$

será definida como la *longitud de atenuación*.

Un análisis de estas amplitudes, muestra que para $s = 1$, la razón

$$\rho(\tilde{\lambda}) = 1/2m^2 \quad (5.6)$$

entre las amplitudes al cuadrado de las componentes localizada y no localizada en el plano del defecto, dependen fuertemente del valor $\tilde{\lambda}$ y alcanza un máximo muy pronunciado a un valor bien definido $\tilde{\lambda}_d$ de $\tilde{\lambda}$. De este modo, se define un modo de defecto *cuasilocalizado*, que tiene la estructura de un singulete en el cual las componentes localizadas o evanescentes 1^- y 1^+ son las que dominan debido a que tienen una amplitud mucho mayor que las otras. El hecho de que el modo de defecto en un medio con simetría helicoidal con un defecto de torsión no es un *modo localizado* en el sentido estricto, ya que este contiene una pequeña componente no localizada, se mostró primero en la ref. [72] para ondas acústicas y se extendió para ondas electromagnéticas en las refs. [8, 13, 16]. Algunas dudas acerca de la existencia de una componente no localizada, es expresada en la ref. [14], debido a que no hay evidencia de esta componente en la región b cuando el modo de defecto es excitado por ondas que inciden desde la izquierda sobre una muestra infinita. La ausencia de tal componente será explicada en la próxima subsección. A continuación se hacen algunos comentarios sobre el uso de las soluciones encontradas.

i) Siempre es posible encontrar una combinación lineal de las dos soluciones en la cual el modo 2^- no existe en b y el modo 2^+ tiene amplitud unitaria en a (en $z = 0^-$). Ya que ese último modo es el único que incide sobre el plano del defecto, las amplitudes de los otros cuatro modos, coinciden con cuatro de los 16 elementos de la matriz de dispersión S del plano del defecto. En la Sec. 5.1.2, se definirá la frecuencia del defecto usando esta propiedad. En la Sec. 5.1.3 se definirá la matriz de dispersión con una diferente consideración.

ii) Las soluciones encontradas aquí, definen dos de los cuatro modos propios encontrados para campos electromagnéticos propagándose en muestras finitas. Las otras dos se pueden encontrar considerando también a los modos que han sido despreciados (1^+ en a y 1^- en b). En muestras infinitas (con $l \gg l_d$), se pueden escoger tales modos como modos independientes. Ellos son diferentes de cero solamente cerca de las fronteras de la

muestra (modos propios de frontera). Sin embargo, en muestras delgadas, tales modos no son modos propios, ya que es imposible satisfacer las condiciones de continuidad en el plano del defecto sin considerar los otros modos.

iii) El campo interno generado por ondas externas, es la superposición de los cuatro modos, los cuales en muestras infinitas tienen la estructura simple definida en (ii).

5.1.2. Longitud de onda del modo de defecto

En la ref. [12], el autor muestra que la longitud del modo de defecto $\tilde{\lambda}_d$ viene dado aproximadamente por la expresión:

$$\tilde{\lambda}_d = \tilde{\lambda}_m + \tilde{\lambda}_a \cos \theta. \quad (5.7)$$

Aquí se muestra que esta ecuación es exacta solo cuando $a_c = 0$. En efecto, en este caso particular es posible satisfacer la continuidad de las componentes tangenciales de los campos \mathbf{e} and \mathbf{h} considerando solo los modos 1^- en a y 1^+ en b . La posibilidad de satisfacer cuatro relaciones con solo dos parámetros libres se debe al hecho de que la continuidad de \mathbf{e} implica la continuidad de \mathbf{h} (se recuerda que tales vectores son paralelos cuando $a_c = 0$). La Fig. 5.3a muestra que \mathbf{e}^+ y \mathbf{e}^- coinciden cuando ellos son paralelos al eje y , el cual es el bisector del ángulo de torsión θ . Esto sucede en un valor bien definido $\tilde{\lambda}_c$ de $\tilde{\lambda}$, y el cual se relaciona con el ángulo $\phi = \theta/2$ mediante la Ec. (4.52). Entonces, Ec. (5.7) define el valor exacto de la frecuencia de defecto. En conclusion, el modo de defecto está localizado en el sentido estricto y su frecuencia se define perfectamente cuando $a_c = 0$.

La Fig. 5.3b ilustra el hecho de que para $a_c \neq 0$ los vectores \mathbf{e} y \mathbf{h} ya no son paralelos durante su rotación. Esto corresponde al caso en que $s = 1$ (en el caso $s = -1$ los vectores \mathbf{e}^- , \mathbf{h}^- permanecen sin cambio, mientras que \mathbf{e}^+ , \mathbf{h}^+ tienen direcciones opuestas). Obviamente, no existe ningún valor de $\tilde{\lambda}$ para el cual \mathbf{e}^+ coincide con \mathbf{e}^- y \mathbf{h}^+ coincide con \mathbf{h}^- . La solución encontrada en la Sec. 5.1.1 se obtuvo agregando a los modos 1^\pm una combinación lineal de los modos 2^\pm , tal que los vectores \mathbf{e} y \mathbf{h} fueran paralelos, y a lo largo del eje y , y desfasados por $\pm\pi/2$ (para $s = -1$ ellos son paralelos al eje x). La

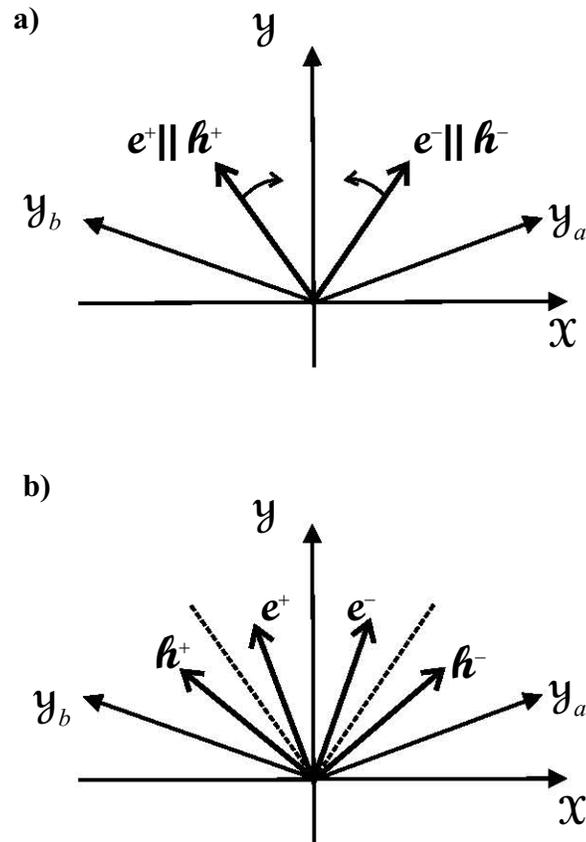


Figura 5.3: Rotación de los vectores $(\mathbf{e}^+, \mathbf{h}^+)$ and $(\mathbf{e}^-, \mathbf{h}^-)$ de los modos 1^+ y 1^- para $a_c = 0$ (Fig. a) y $a_c \neq 0$ (Fig. b). Los vectores $(\mathbf{e}^-, \mathbf{h}^-)$ están a lo largo del eje y_a y $(\mathbf{e}^+, \mathbf{h}^+)$ a lo largo del eje y_b para $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_2$. Cuando $\tilde{\lambda}$ decrece, ellos rotan hacia el eje y manteniéndose paralelos solo cuando $a_c = 0$. Para $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_d$ los vectores $(\mathbf{e}^-, \mathbf{h}^-)$ coinciden con $(\mathbf{e}^+, \mathbf{h}^+)$ y se encuentran a lo largo del eje y en la Fig. a. En la Fig. b tales vectores nunca coinciden pero para $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_d$ sus bisectores se encuentran paralelos al eje y . Se hace hincapié en que el ángulo entre y_a y y_b , es el ángulo de torsión θ y tienen como bisector al eje y .

figura sugiere también que el valor mínimo de los coeficientes A^\pm y B^\pm se obtiene cuando los bisectores de los campos $(\mathbf{e}^+, \mathbf{h}^+)$ y $(\mathbf{e}^-, \mathbf{h}^-)$ (líneas punteadas) coinciden con el eje y , generando de este modo un máximo para la función $\rho(\tilde{\lambda})$ definida en (5.6). Valores aproximados para $\tilde{\lambda}_d$ y para $\rho(\tilde{\lambda})$ se obtuvieron en la ref. [8] usando argumentos similares.

Ahora se define el valor exacto de $\tilde{\lambda}_d$ para $a_c \neq 0$ considerando una propiedad interesante de los defectos de torsión primeramente encontrada en forma numérica por Kopp y Genack [9]: para $\lambda = \tilde{\lambda}_d$ el plano del defecto refleja totalmente los modos 2^\pm . Para tomar en cuenta esta consideración, basta tomar la solución definida en el punto (i) de la Sec. 5.1.1, correspondiente a un campo en el cual el modo 1^- no existe en b , y se busca el valor $\tilde{\lambda}_d$ de $\tilde{\lambda}$ para el cual, la amplitud del modo 1^+ en b sea igual a cero. Cálculos directos proveen la siguiente relación entre θ y $\tilde{\lambda}_d$

$$\theta = \cot^{-1} \left[\frac{i}{2} \left(\frac{u_2 (u_1 \varepsilon_{\parallel} + 2\varepsilon_m \tilde{\lambda}_d^2)}{4n_1 u \varepsilon_m \tilde{\lambda}_d} - \frac{2n_1 u_1 \varepsilon_m \tilde{\lambda}_d}{u (u_1 \varepsilon_{\parallel} + 2\varepsilon_m \tilde{\lambda}_d^2)} \right) \right] + m\pi, \quad (5.8)$$

en donde m es un entero, ya que θ se define módulo π . En el presente trabajo se encuentra numéricamente que esta ecuación es completamente equivalente a la ecuación dada en la ref. [8]² para $\tilde{\lambda}_d$ y que la aproximación dada por la Ec. (5.7) es en cualquier caso muy buena, como se muestra en Fig. 5.4.

5.1.3. Muestras delgadas

Cuando el grosor $2l$ de la muestra es comparable con la longitud de atenuación l_d de los modos 1^\pm , todas las ondas pueden alcanzar el plano del defecto (ver Fig. 5.5). Así, es imposible definir todos los elementos de la matriz de dispersión usando las soluciones dadas por Ecs. (5.3, 5.4) en donde solo tres de los cuatro modos son considerados. De acuerdo al procedimiento mostrado en la Sec. 4.3, se considera la *matriz de transferencia* (o *propagador*) U , la cual se define implícitamente por la ecuación $\alpha_b(0^+) = U\alpha_a(0^-)$. Tomando en cuenta la Ec. (5.2), la relación $\beta = T\alpha$, y la continuidad de $\beta(z)$ en el plano

²Pero en la ref. [8] el ángulo de torsión se define considerando la rotación opuesta, tal que se obtiene un valor opuesto.

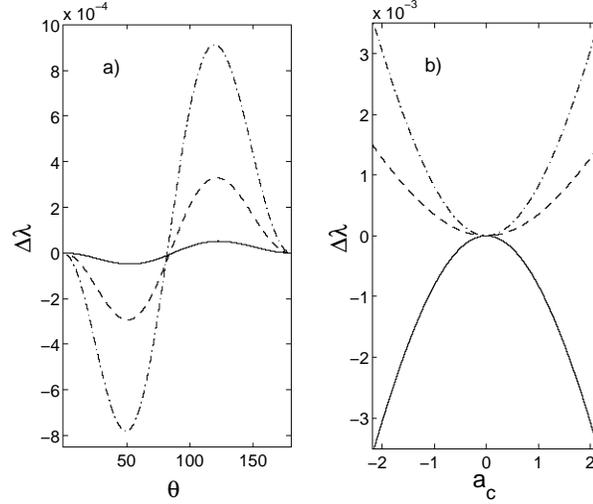


Figura 5.4: Diferencia $\Delta\tilde{\lambda}$ entre los valores exactos de $\tilde{\lambda}_d$ y la aproximada (dada por Eq. (5.7)) *vs.* el ángulo de torsión θ en (a) y *vs.* el parámetro de anisotropía a_c en (b). En (a) las líneas continua, discontinua y punto-raya corresponden a $\varepsilon_2 = 2, 5, 3, 3, 5$, respectivamente, para $\varepsilon_1 = 2, \mu_1 = \mu_2 = 1$. En (b) estos corresponden a $\theta = \pi/4, 2\pi/4, 3\pi/4$, con $\tilde{\lambda}_1 \equiv \sqrt{\varepsilon_1\mu_1} = 1, 7, \tilde{\lambda}_2 \equiv \sqrt{\varepsilon_2\mu_2} = 2, 3$, y $Z_m = 0,67$, donde $Z_m \equiv 1/2 \left(\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2} - \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1} \right)$. El significado físico del parámetro Z_m se discute en el apéndice A.

del defecto, en $z = 0$, se obtiene:

$$U = U(0^+, 0^-) = T^{-1} \exp(-R\theta)T \equiv \cos\theta \mathbf{I}_4 - \text{sen}\theta R_S, \quad (5.9)$$

con

$$R_S = T^{-1}RT.$$

La matriz de rotación R_S es similar a la matriz R definida en Ec.(4.41). Entonces: $R_S^{-1} = -R_S$ y su determinante es igual a 1. Al igual que el procedimiento seguido en la Sec. 4.3, para encontrar los elementos de R_S se expresa T^{-1} como una función de T usando la relación $G_\alpha = T^\dagger G_\beta T$ de la Sec. 4.2.2 y las ecuaciones que definen los elementos de T, G_α, G_β (ver Sec. 4.2.4). Cálculos directos conducen a³

³Recuérdese que los vectores base que se escogen en el presente capítulo están en el orden $1^+, 2^+, 1^-, 2^-$, de tal modo que la expresión usada para G_α viene dada por la expresión (4.54)

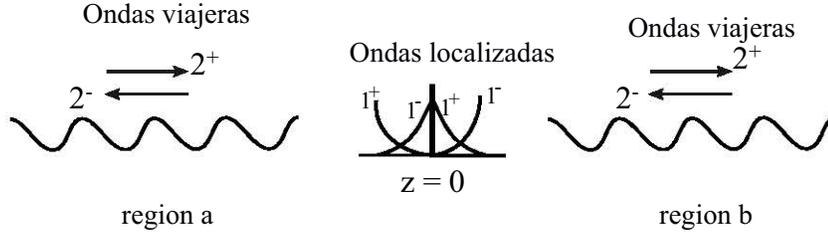


Figura 5.5: Un defecto de torsión en $z = 0$. En este caso la muestra es finita y todos los modos existen en cada lado del plano del defecto.

$$R_S = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_5^* & -r_3 & -r_5 \\ ir_5^* & ir_2 & ir_5 & ir_4 \\ r_3 & r_5 & r_1 & r_5^* \\ -ir_5 & -ir_4 & -ir_5^* & -ir_2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

en donde las cantidades r_j ($j = 1, \dots, 5$) son

$$\begin{aligned} r_{1,3} &= 2\tilde{\lambda}c_1^2[(2\tilde{\lambda}^2\varepsilon_m + u_1\varepsilon_{\parallel})(u_2 - 2\varepsilon_{\parallel}\mu_m) \mp 2n_1^2u_1\varepsilon_m], \\ r_{2,4} &= 2\tilde{\lambda}c_2^2[(2\tilde{\lambda}^2\varepsilon_m + u_2\varepsilon_{\parallel})(u_1 - 2\varepsilon_{\parallel}\mu_m) \mp 2n_2^2u_2\varepsilon_m], \\ r_5 &= 4\tilde{\lambda}c_1c_2a_c(\varepsilon_{\parallel}(a_c - \varepsilon_{\parallel}\mu_m) + \varepsilon_m(\tilde{\lambda}^2 + n_1n_2)), \end{aligned} \quad (5.11)$$

y satisfacen la relación $r_3^2 + r_4^2 = r_1^2 + r_2^2$.

El procedimiento para calcular la matriz de dispersión S a partir de U se discutió en la Sec. 4.3. Es conveniente escribir la matriz U de 4×4 como

$$U = \begin{pmatrix} U_{ff} & U_{fb} \\ U_{bf} & U_{bb} \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

en donde f y b indican a la derecha e izquierda,⁴ respectivamente, y considerar también la matriz $U^{-1} \equiv \cos\theta\mathbf{I} + \text{sen}\theta R_S$. La matriz S_{ff} de 2×2 es la inversa de $(U^{-1})_{ff}$, y que está dada por

$$(U^{-1})_{ff} = \begin{pmatrix} \cos\theta - r_1\text{sen}\theta & -r_5^* \\ ir_5^* & \cos\theta + ir_2\text{sen}\theta \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

⁴los subíndices f y b se deben a que son las primeras letras de las palabras "forward" y "backward"

Como ya se ha mencionado, para $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_d$ el modo 2^+ se refleja totalmente en el plano del defecto. Esto significa que el elemento $(2, 2)$ de S , el cual coincide con el elemento $(2, 2)$ de S_{ff} , es igual a cero. Es fácil mostrar que este elemento es cero cuando el elemento $(1, 1)$ de su matriz inversa $(U^{-1})_{ff}$, dada por Ec.(5.13), es cero. Entonces, la cantidad $\tilde{\lambda}_d$ se define implícitamente por la siguiente ecuación

$$\theta = \cot^{-1} [r_1(\tilde{\lambda}_d)] + m\pi, \quad (5.14)$$

la cual es completamene equivalente a la Ec. (5.8).

El procedimiento usado aquí para obtener la longitud de onda del defecto $\tilde{\lambda}_d$ haciendo igual a cero el elemento $(2, 2)$ de la matriz de dispersión S merece algunos comentarios importantes. Para la definición de $\tilde{\lambda}_d$ es razonable considerar las propiedades de dispersión de la muestra, debido a que las curvas definidas como $f_{ij}(\tilde{\lambda}) = |S_{ij}(\tilde{\lambda})|^2$, en donde S_{ij} son los elementos de la matriz de dispersión, muestran máximos o mínimos sólo en la presencia de los defectos. La definición de $\tilde{\lambda}_d$ es obvia si y sólo si todos los máximos y mínimos coinciden en el mismo valor $\tilde{\lambda}$. Un análisis numérico muestra que esto no es el caso en general y no es simple tener una idea intuitiva del origen de la diferencia entre la posición de los dos diferentes picos. De hecho, para definir la matriz S , se debe calcular primero la matriz de transferencia U , cuyos elementos dependen muy suavemente de $\tilde{\lambda}$ aún en la presencia del defecto. Aquí se igualó a cero el elemento $(1, 1)$ de la matriz de transferencia inversa que viene dada por la expresión (5.13). En este caso, las cantidades f_{ij} que dan las transmitancias del plano del defecto son

$$\begin{aligned} f_{11} &= (\cos^2 \theta + r_2^2 \sin^2 \theta) / |r_5|^4, \\ f_{12} &= f_{21} = 1 / |r_5|^2, \\ f_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

La cantidad r_5 definida en la Ec. (5.11), contiene el factor a_c . Así, las cantidades f_{11} , f_{12} , f_{21} divergen cuando a_c tiende a cero. En este caso la frecuencia del defecto se define sin ambigüedad debido a que las funciones $f_{ij}(\tilde{\lambda})$, finitas por definición, son ahora

proporcionales a la función de Dirac $\delta(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_d)$. En el caso general $a_c \neq 0$ los valles y crestas de las funciones $f_{ij}(\tilde{\lambda})$ tienen un ancho finito y sus máximos y mínimos no coinciden en un mismo valor $\tilde{\lambda}$, aunque la diferencia entre tales valores sea pequeña cuando el módulo de a_c lo sea también. Para valores típicos de los parámetros de anisotropía, las diferencias son tan pequeñas que se puede escoger uno de estos valores como una posible definición de $\tilde{\lambda}_d$. Aquí se escogió el mínimo de la componente f_{22} debido a que ésta se define por una ecuación más simple. En conclusión, la frecuencia del defecto se puede definir exactamente, sin ninguna ambigüedad, solo cuando $a_c = 0$, y en muestras reales, se define de manera muy exacta debido a que a_c es un parámetro pequeño.

Aquí se consideró la matriz de dispersión del plano del defecto para las ondas propias *internas*. El interés del presente análisis puede parecer puramente académico, debido a que en experimentos solo se consideran muestras finitas y ondas *externas*. Obviamente los máximos y mínimos de tales curvas coinciden en una longitud de onda bien definida solo cuando $a_c = 0$. Este hecho confirma el papel principal que ocupa el parámetro a_c en las propiedades ópticas de muestras con defectos de torsión. Recuérdese que en medios no magnéticos el ancho de la banda prohibida de longitudes de onda es cero cuando $a_c = 0$. Así, fué posible usar a_c como un parámetro libre para entender más claramente su papel debido a que el medio considerado aquí es, al mismo tiempo, dieléctrico y magnético.

La reflectancia y transmitancia de la muestra se definen a través de la matriz de dispersión de la muestra completa. Las curvas que proporcionan estas cantidades dependiendo de λ para diferentes valores de l, θ, a_c y para los diferentes estados de polarización se han encontrado numéricamente en las refs. [8, 9, 12] y no serán reportadas en la presente tesis. Cabe señalar que tales curvas muestran máximos o mínimos $\tilde{\lambda} \approx \tilde{\lambda}_d$, cuyo ancho espectral $\Delta\omega$ es igual a τ^{-1} , donde τ es el tiempo de decaimiento del modo de defecto. Cuando $l \gg l_d$, con l_d la longitud de atenuación de los modos 1^\pm , τ prácticamente es independiente de l , pero depende fuertemente de a_c , ya que la energía almacenada por el modo de defecto puede escapar solamente debido a la presencia de la componente no localizada. Para $a_c = 0$ tal componente desaparece, τ tiende a infinito y $\Delta\omega$ tiende a cero.

5.2. Dobletes

Ahora se considera un medio helicoidal infinito con dos defectos de torsión idénticos en $z = 0$ y $z = z_1$. Realizando el mismo procedimiento de en la Sec. (5.1.3), la matriz de transferencia que relaciona los vectores α en $z = 0^-$ y $z = z_1^+$ está dada por

$$U = U(z_1^+, 0^-) = U_1 \exp(iNz_1) U_1 \quad (5.16)$$

en donde U_1 es la matriz de transferencia para cada uno de los planos del defecto, dados por Eq.(5.9), y N es la matriz diagonal con elementos igual a n_j . La matriz $\exp(iNz_1)$ es la matriz de transferencia $U(z_1^-, 0^+)$ de la capa entre los dos defectos de torsión.

5.2.1. Propiedades de dispersión de la capa con dos defectos de torsión

La matriz de dispersión $S = S(z_1^+, 0^-)$ deducida y discutida en la Sec. 4.3 y dada por la expresión (4.62) permite obtener la transmitancia y reflectancia de la capa para ondas que inciden desde la izquierda. Las curvas resultantes de tales cantidades como función de $\tilde{\lambda}$ son muy similares a las curvas encontradas en las refs. [8, 9, 12] para un solo defecto de torsión, excepto que las primeras curvas tienen la estructura de un doblete con dos frecuencias de defecto $\tilde{\lambda}_{d1}, \tilde{\lambda}_{d2}$. Las curvas de las componentes (1, 1) y (2, 2), las cuales brindan la transmitancia para los modos 1 y 2, respectivamente, se muestran en la Fig. 5.6. Para $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_{d1}$ y $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_{d2}$ el modo 1 genera en el otro lado de la capa, un modo 1 con gran amplitud, mientras que el modo 2 se refleja totalmente ya que este modo tiene transmitancia igual a cero. Recuérdese que un solo defecto de torsión refleja totalmente el modo 2 solo para $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_d$, en donde $\tilde{\lambda}_d$ está entre $\tilde{\lambda}_{d1}$ y $\tilde{\lambda}_{d2}$. Notablemente, la presencia del otro defecto cambia drásticamente tal propiedad de reflexión.

El comportamiento de las otras curvas se puede resumir como sigue. Muestran máximos con el mismo ancho espectral que el de las curvas presentadas en la Fig. 5.6. El máximo valor de la curva (3, 1) es casi igual al máximo valor de la curva (1, 1). Esto implica que el modo 1 genera también un modo 1 de gran amplitud en reflexión. Las curvas mixtas, las cuales dan las amplitudes al cuadrado de los modos 1 generados por

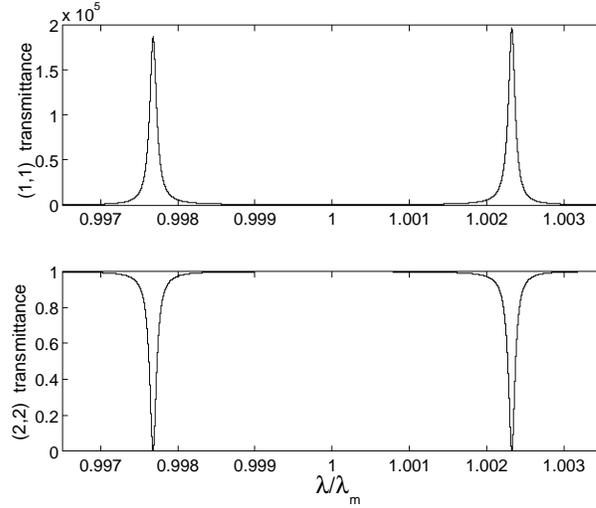


Figura 5.6: Transmitancia de la capa incluyendo dos defectos de torsión idénticos *vs.* la longitud de onda reducida $\tilde{\lambda}/\tilde{\lambda}_m$ para el modo 1 (curva superior) y 2 (curva inferior) para $\varepsilon_1 = 3, \varepsilon_2 = 3,6, \mu_1 = \mu_2 = 1, \theta = \pi/2, z_1 = 3l_d$. En las frecuencias de defecto, el modo 1^+ genera en el otro lado de la capa un modo 1^+ con gran amplitud, mientras que el modo 2^+ se refleja totalmente, ya que su transmitancia es cero. Aquí, transmitancia no se refiere a la razón entre el flujo de energía de las ondas transmitida e incidente, las cuales para el modo 1 es cero, sino al cociente de sus densidades de energía.

los modos 2 y *viceversa*, muestran máximos cuyos valores son más pequeños (éstos son rigurosamente igual a la raíz cuadrada del máximo de la componente (1, 1)). El hecho de que una simple onda con amplitud unitaria incidente incidente sobre la capa pueda generar ondas transmitidas y reflejadas con gran amplitud es sorprendente, sin embargo, en todo momento, la energía es conservada.

5.2.2. Frecuencias de defecto

Las frecuencias de defecto $\tilde{\lambda}_{d1}, \tilde{\lambda}_{d2}$ se pueden encontrar usando el mismo procedimiento de la Sec. 5.1.3. La Fig. 5.6 muestra que en las frecuencias de defecto, el elemento (2, 2) de la matriz S es igual a cero. Este hecho implica que el elemento (1, 1) de la matriz U^{-1} es cero. De este modo, tomando igual a cero tal elemento se obtiene la siguiente relación:

$$\cot \theta = r_1 \pm \exp(-z_1/(2l_d)) \left(r_3^2 \exp(-z_1/l_d) + 2\text{Im} \left(r_5^2 \exp(in_2 z_1) \right) \right)^{1/2}, \quad (5.17)$$

la cual se satisface para dos distintos valores $\tilde{\lambda}_{d1}, \tilde{\lambda}_{d2}$ de $\tilde{\lambda}$, para cualquier valor de θ (nótese que las cantidades $l_d \equiv 1/|n_1|, r_3, r_5$ y n_2 son funciones de $\tilde{\lambda}$). Los términos que contienen el factor común $\exp(-z_1/(2l_d))$ actúan aquí como términos perturbativos. En efecto, para $z_1 \gg l_d$, tales términos se eliminan y Ec. (5.17) es idéntica a Ec. (5.14), la cual proporciona la frecuencia $\tilde{\lambda}_d$ del singulete. En otras palabras, cuando los dos defectos de torsión están muy separados, actúan independientemente uno de otro y los dos modos de defecto se vuelven degenerados, ya que en este caso $\tilde{\lambda}_{d1} = \tilde{\lambda}_{d2} = \tilde{\lambda}_d$. Recuérdese que l_d es la longitud de atenuación de los modos 1^\pm , los cuales constituyen las componentes dominantes de los modos de defecto y se encuentran localizados cerca de los planos de defecto. Cuando $z_1 \gg l_d$, la componente centrada en $z = 0$ no alcanza el plano del defecto en $z = z_1$, y *viceversa*. Este hecho sugiere que la "interacción" entre los dos defectos se debe principalmente a las componentes localizadas de los modos de defecto, lo cual en Ec. (5.17) se representa a través del primero de los dos términos perturbativos. Despreciando el otro término, la Ec. (5.17) asume la simple forma

$$\cot \theta = r_1 \pm r_3 \exp(-z_1/l_d), \quad (5.18)$$

que define las frecuencias de defecto en una buena aproximación (con un error del 0.1 % para valores razonables de los parámetros del material).

Para $a_c = 0$, las condiciones de continuidad de los vectores \mathbf{e} y \mathbf{h} en los dos planos de defecto se puede satisfacer considerando solo los modos 1^\pm (por las mismas razones discutidas en la Sec. 5.1.2 (ver Fig. 5.7). Los modos de defecto contienen solo el modo 1^- para $z < 0$ (región a), ambos modos 1^+ y 1^- en región b ($0 < z < z_1$), y el modo 1^+ en la región c ($z > z_1$). Solo los vectores \mathbf{e} se considerados en la Fig. 5.7 debido a que para $a_c = 0$ la continuidad de \mathbf{e} implica la continuidad de \mathbf{h} , ya que ambos son paralelos. La figura explica claramente la presencia de los dos diferentes modos de defecto y sugiere que las cantidades $\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_{d2}, \tilde{\lambda}_d, \tilde{\lambda}_{d1}$, y $\tilde{\lambda}_1$ están ordenadas en forma decreciente (así, las correspondientes frecuencias están en orden creciente).

Las curvas que resultan de tomar el cuadrado de los elementos de la matriz de dispersión $S(z_1^+, 0^-)$ vs. $\tilde{\lambda}$ son grandemente asimétricas. Estas llegan a ser muy simétricas

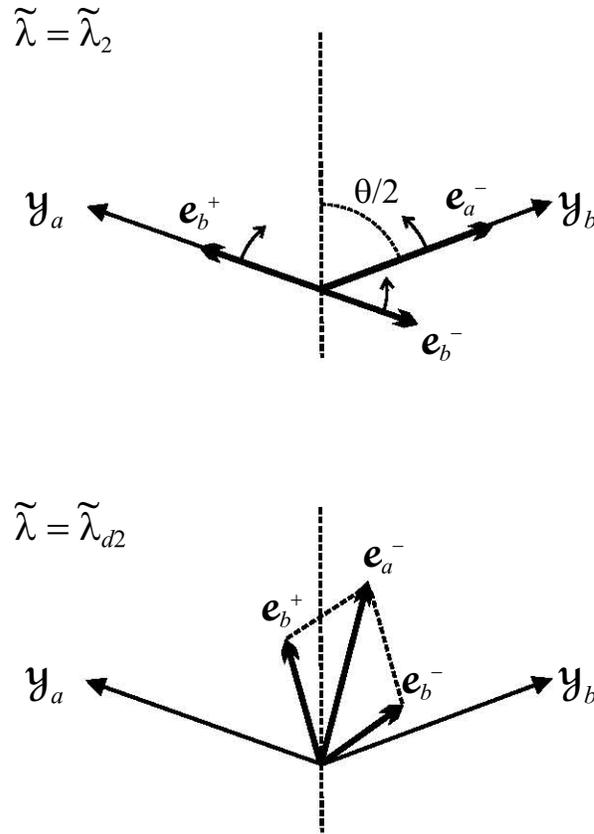


Figura 5.7: La rotación de los vectores e en las regiones a, b del plano del defecto $z = 0$. Para $a_c = 0$ las condiciones de continuidad para los vectores e, h se pueden satisfacer considerando solo los modos 1^\pm . En (a) $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_2$, los vectores e_a^- y e_b^+ son paralelos a los ejes y_a y y_b , pero en la región b también se tiene el vector e_b^- , debido a la presencia del otro defecto de torsión. Las longitudes de defecto $\tilde{\lambda}_{d1}, \tilde{\lambda}_{d2}$ de los dos defectos de torsión corresponden a e_b^- paralelo y antiparalelo, respectivamente, a e_b^+ . Aquí se considera el segundo caso. En (b) se muestra como la condición en la frontera $e_b^+ + e_b^- = e_a^-$ se puede satisfacer y sugiere que ésta ocurre después de una rotación $\phi < \theta/2$. Esto implica que $\tilde{\lambda}_{d2}$ se encuentra entre $\tilde{\lambda}_2$ y la frecuencia de defecto $\tilde{\lambda}_d$ de muestras con solo un defecto de torsión, ya que $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_d$ cuando $\phi = \theta/2$.

solo en el caso particular de $\theta = \pi/2$. Este hecho se muestra en la Fig. 5.8, la cual provee la transmitancia para la componente (1, 1) para diferentes valores de la distancia z_1 entre los planos de defecto. La separación $\tilde{\lambda}_{d2} - \tilde{\lambda}_{d1}$ entre los máximos decrece cuando aumenta z_1 . Se encuentra que para $\theta = \pi/2$ y $a_c = 0$, esta separación está dada aproximadamente por la simple relación

$$\tilde{\lambda}_{d2} - \tilde{\lambda}_{d1} = (\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1) \exp(-z_1/l_d) \quad (5.19)$$

en donde $l_d = 1/|n_1|$ y $n_1 = n_1(\tilde{\lambda}_{d1}) = n_1(\tilde{\lambda}_{d2})$. El grado de validez de la Ec. (5.19), mostrada en la Fig. 5.9, no depende esencialmente de los parámetros del material $\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}, \mu_{\parallel}, \mu_{\perp}$.

Finalmente, se observa que la ecuación que define la frecuencia del defecto para dos defectos de torsión con rotación opuesta es:

$$\cot^2 \theta = r_1^2 - \exp(-z_1/l_d) \left(r_3^2 \exp(-z_1/l_d) - 2\text{Im} \left(r_5^2 \exp(in_2 z_1) \right) \right). \quad (5.20)$$

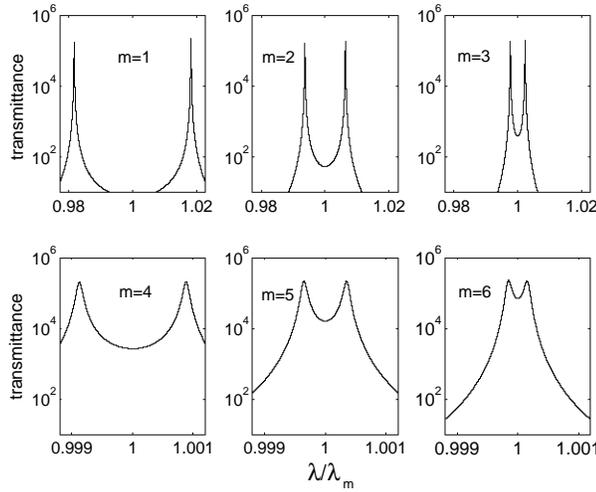


Figura 5.8: Curvas de transmitancia para el elemento (1, 1) como función de la longitud de onda reducida $\tilde{\lambda}/\tilde{\lambda}_m$ para $z_1 = ml_d$, en donde l_d es la longitud de atenuación de los modos 1^{\pm} y $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Los otros parámetros son los mismos que los de la Fig. 5.6. Nótese que para mejor apreciación de las curvas, se ha usado escala logarítmica en el eje y .

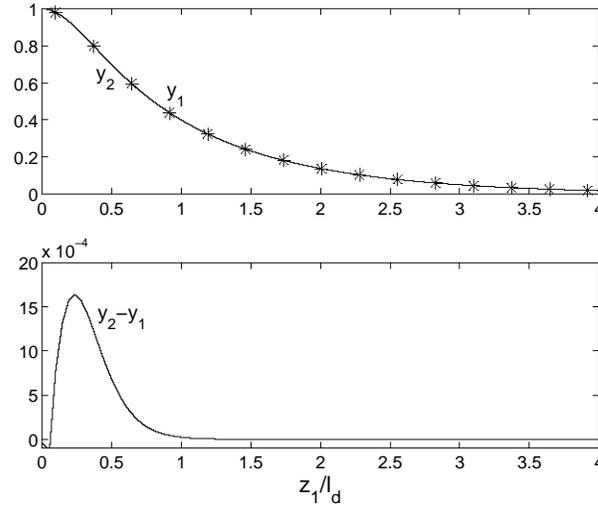


Figura 5.9: Comparación entre la expresión exacta (y_1) y aproximada (y_2) para la separación entre los máximos *vs.* la distancia normalizada z_1/l_d : $y_1 = (\tilde{\lambda}_{d2} - \tilde{\lambda}_{d1}) / (\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)$ (estrellas); $y_2 = \exp(-z_1/l_d)$ (línea continua). Los parámetros son los mismos que en la Fig. 5.6. En el límite $z_1 = 0$, los máximos se trasladan a los extremos de la banda, esto es, $\tilde{\lambda}_{d1} = \tilde{\lambda}_1$ y $\tilde{\lambda}_{d2} = \tilde{\lambda}_2$, debido a que $y_1 = 1$.

5.2.3. Muestra Finitas

A continuación se discuten las propiedades de dispersión y la polarización del campo interno para muestras finitas con dos defectos de torsión, los cuales dividen la muestra entera en las regiones, a para $(-z_a < z < 0)$, b para $(0 < z < z_1)$, y c para $(z_1 < z < z_c)$, en donde z_a and z_c definen las fronteras de la muestra. Para poder explicar el comportamiento de las curvas de dispersión es necesario hacer hincapié que una onda externa que incide desde la izquierda genera los modos internos 1^+ , 2^+ en el primer plano frontera ($z = -z_a$). Cuando el acoplamiento de impedancias entre el medio externo y la estructura, es pequeño, ondas polarizadas circularmente prácticamente generan sólo uno de tales modos. En estructuras con $q_0 > 0$, polarización circular derecha (por sus siglas en inglés *rcp*) y polarización circular izquierda (por sus siglas en inglés *lcp*) generan los modos 1^+ y 2^+ , respectivamente. Por otro lado, una onda que incide sobre un plano del defecto genera todos los modos: dos reflejados y dos transmitidos, debido a que el acoplamiento de impedancias es muy grande.

Para poder exhibir el papel principal que juega el tamaño de la muestra, en la Fig. 5.10 se presentan las curvas de transmitancia de dos muestras con los mismos parámetros del material y las mismas frecuencias de defecto, pero con un grosor distinto. La diferencia más evidente se refiere al ancho de los máximos y mínimos. En la muestra con espesor más grande (curvas de la izquierda, $z_a = z_c = 6l_d$, $z_1 = 2l_d$ donde l_d es la longitud de atenuación de los modos 1^\pm) el ancho es prácticamente el mismo que para las curvas que dan las amplitudes al cuadrado de los elementos de la matriz de dispersión $S(z_1^+, 0^-)$. De hecho, cuando z_a y z_c son mucho más grandes que l_d solo la componente no localizada alcanza la frontera de la muestra. Ya que en medios no disipativos, la amplitud de tal componente es independiente de z , el tiempo de decaimiento y los anchos de línea permanecen sin cambio. El tiempo de decaimiento comienza a disminuir (y el ancho de línea a incrementarse) cuando al menos uno de los parámetros z_a , z_c es tal que la amplitud de las componentes localizadas en la frontera de la muestra ya no son despreciablemente pequeños. Las curvas superiores muestran que una onda con polarización circular derecha, la cual genera el modo 1^+ , se transmite solo cerca de su frecuencia de defecto. De hecho, dentro de cualquiera de las tres regiones, el modo 1^+ reduce drásticamente su intensidad, pero en la frecuencia de defecto, esta intensidad se incrementa bastante cuando se alcanza un plano de defecto. Este mecanismo implica que una muestra con cualquier grosor puede transmitir el modo atenuado 1^+ si se insertan en la muestra muchos defectos de torsión a una distancia comparable con l_d . Las curvas inferiores muestran que los defectos de torsión ya no reflejan totalmente los modos 2^+ para muestras delgadas.

Las principales propiedades del campo electromagnético interno generado por una onda con polarización circular izquierda lcp y flujo de energía unitario en la misma muestra finita de la Fig. 5.10, se muestran en la Fig. 5.11. Las propiedades de polarización del campo se definen mediante los parámetros de Stokes s_1 , s_2 , s_3 , esto es, por un punto sobre la esfera de Poincaré. Aquí se omite la curva representando s_3 ya que este parámetro es muy pequeño en todo el intervalo z de la muestra. Esto significa que la polarización del campo interno es casi lineal a lo largo de la muestra. El ángulo entre el campo eléctrico e y el eje x es casi igual a 45° alrededor del primer defecto de torsión (en donde s_2 es casi

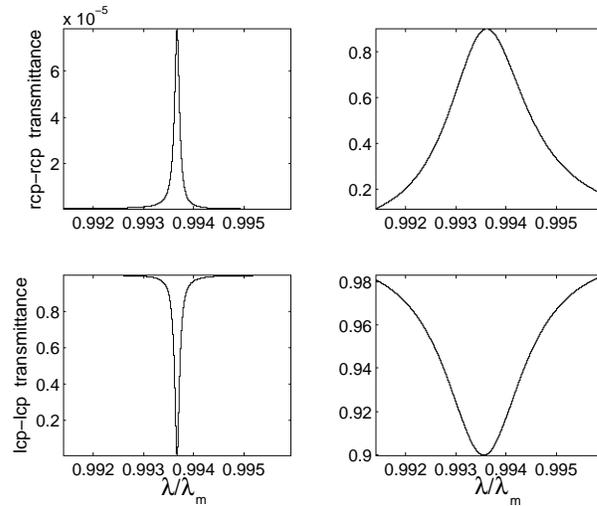


Figura 5.10: Curvas de transmitancia cerca de la primera frecuencia de defecto para ondas con polarización circular derecha (*rcp*, curvas superiores) y ondas con polarización circular izquierda (*lcp*, curvas inferiores) en una muestra de ancho finito dado (curvas del lado izquierdo) y otra muestra con ancho menor que la primera (curvas del lado derecho). Los parámetros del material y el ángulo de torsión son los mismos que en la Fig. 5.6. Las fronteras de la muestra se encuentran en $z = -z_a$ y $z = z_1 + z_a$, los defectos de torsión se localizan en $z = 0$ y $z = z_1$, donde $z_1 = 2l_d$ en ambas muestras, z_a es $6l_d$ y $2l_d$ en la primera y segunda muestra, respectivamente. Las propiedades de las curvas (ancho y altura de los máximos y mínimos) se discuten en el texto.

igual a $+1$ y s_1 es pequeño), y casi igual a -45° alrededor del otro defecto ($s_2 \approx -1$, $s_1 \approx 0$). Los vectores e giran por casi $\pm 90^\circ$ en la región entre los planos de defecto. En el punto medio de esta región. En el punto medio de esta región, ellos son casi paralelos al eje x ($s_1 \approx 1$) o al eje y ($s_1 \approx -1$). Las oscilaciones son debidas a la presencia de las componentes pequeñas de los modos 2^\pm , los cuales interfieren con las componentes dominantes 1^\pm . La ausencia de esta oscilaciones en la región c ($z > z_1 = 2l_d$) indica que los modos 2^\pm son casi inexistentes en esta región, confirmando el hecho de que la muestra finita refleja totalmente la onda incidente lcd (la densidad de energía relativa en la segunda frontera de la muestra es del orden de 0,005).

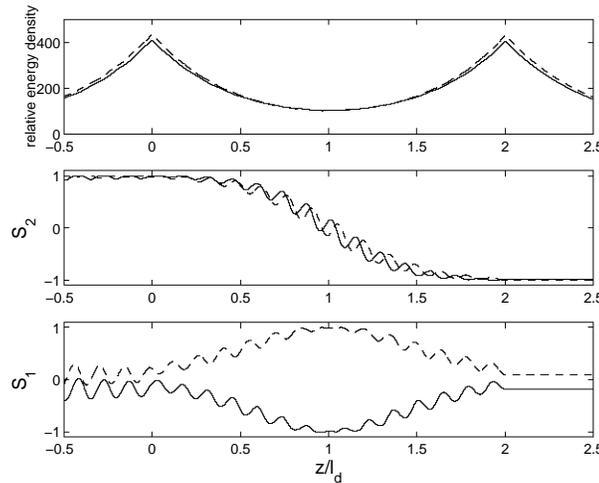


Figura 5.11: Propiedades del campo interno generadas por una onda incidente desde la izquierda con polarización circular izquierda y densidad de energía unitaria. El grosor de la muestra es el mismo que el considerado en la muestra finita de la Fig. 5.10. Las curvas muestran la parte central de la muestra, la cual incluye los defectos de torsión (en $z = 0$ y $z = z_1 = 2l_d$). Como era de esperarse, las curvas superiores muestran que la densidad de energía relativa es máxima en los planos del defecto. Las curvas inferiores definen las propiedades de polarización (a través de los parámetros de Stokes s_1 y s_2) de los dos modos de defecto, cuyas longitudes de onda reducidas $\tilde{\lambda}$ son $\tilde{\lambda}_{d1} = 0,9937\tilde{\lambda}_m$ (lineas continuas) y $\tilde{\lambda}_{d2} = 1,0066\tilde{\lambda}_m$ (lineas punteadas).

5.3. Multipletes

Generalizando, la ecuación que proporciona la matriz de transferencia para n_0 defectos de torsión idénticos y equidistantes en $z = nz_1$, con $n = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1$, se puede escribir como

$$U = U \left((n_0 - 1)z_1^+, 0^- \right) = U_1 \left[(\exp(iNz_1)) U_1 \right]^{n_0-1}. \quad (5.21)$$

Para $n_0 = 2$, la Ec. (5.21) es idéntica a la Ec. (5.16). Las amplitudes al cuadrado de los elementos (1, 1) y (2, 2) de la matriz de dispersión se muestran en la Fig. 5.12 para $N = 3, \theta = \pi/2$ y $z_1 = 3l_d$. La figura despliega tres diferentes defectos de torsión con sus respectivas frecuencias de defecto $\tilde{\lambda}_{d1}, \tilde{\lambda}_{d2}, \tilde{\lambda}_{d3}$, donde $\tilde{\lambda}_{d2}$ es aproximadamente igual al valor promedio de $\tilde{\lambda}_{d1}, \tilde{\lambda}_{d3}$. En las frecuencias de defecto, la estructura refleja totalmente el modo 2. Esto permite definir las frecuencias de defecto haciendo igual a cero el elemento (1, 1) de la matriz U^{-1} . En el caso particular $a_c = 0$, los defectos de torsión contienen solo los modos localizados 1^\pm para cualquier valor de n_0 y las frecuencias de defecto se pueden encontrar usando simplemente matrices de 2×2 (ver Apéndice A). Esta es la expresión que provee la frecuencia de defecto para cada uno de los defectos de torsión:

$$\frac{(\cot \theta - r_1)^3}{r_3^2} = (\cot \theta - r_1) (\exp(-2z_1/l_d) + \exp(-4z_1/l_d) + \exp(-6z_1/l_d)) + 2r_1 \exp(-6z_1/l_d). \quad (5.22)$$

Para cualquier valor de $\tilde{\lambda}$ dentro de la banda prohibida, la Ec. (5.22) brinda tres valores diferentes para un ángulo de torsión θ_0 en el intervalo $[0, \pi]$. Este hecho justifica que para cualquier valor de θ dado, la Ec. (5.22) admita tres valores diferentes para $\tilde{\lambda}$ dentro de la banda prohibida.

Las curvas de transmitancia para $n_0 = 5$ se muestran en la Fig. 5.13, en donde los cinco defectos de torsión tienen amplitudes y anchos diferentes aún para el caso particularmente simétrico $\theta = \pi/2$.

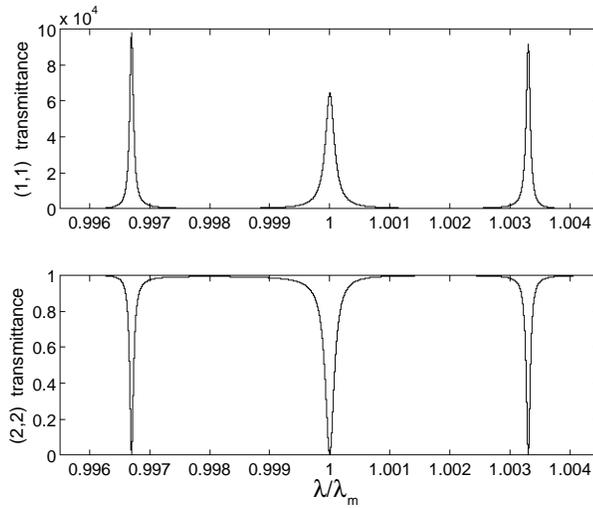


Figura 5.12: Transmitancia de una muestra incluyendo $n_0 = 3$ defectos de torsión idénticos y separados equidistantemente *vs.* la longitud de onda reducida $\tilde{\lambda}/\tilde{\lambda}_m$ para el modo 1 (curva superior) y 2 (curva inferior) $\theta = \pi/2$, $z_1 = 3l_d$. Los valores de los otros parámetros son los mismos que los de la Fig. 5.6. Aquí transmitancia no se refiere a la razón entre el flujo de energía de las ondas transmitida e incidente, las cuales para el modo 1 es cero, sino al cociente de sus densidades de energía.

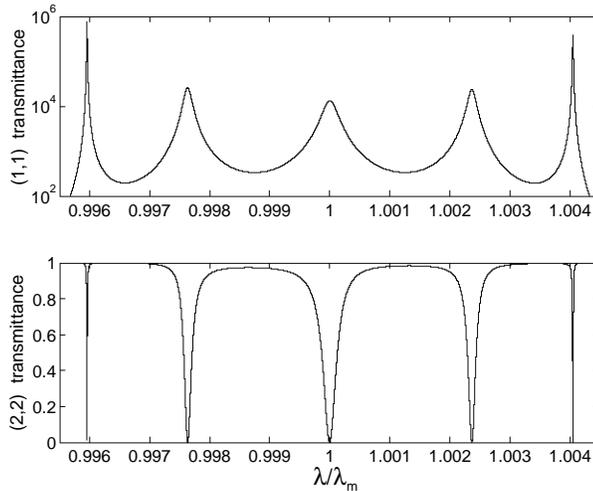


Figura 5.13: Lo mismo que en la Fig. 5.12 pero para $n_0 = 5$ defectos de torsión idénticos y equidistantes.

Capítulo 6

Óptica no lineal de sistemas quirales

Hasta ahora se han presentado algunos de los resultados más importantes obtenidos sobre el estudio de los medios con simetría helicoidal en el régimen donde la energía electromagnética del haz incidente es lo suficientemente pequeña como para mantener la configuración original de la muestra. Sin embargo, cuando la onda electromagnética que se propaga en el medio es generada por un laser de potencia moderada, o bien la onda se encuentra en las proximidades del plano de un defecto de torsión,¹ la energía electromagnética e_{em} es comparable con la energía elástica del medio y por lo tanto su contribución no debe despreciarse si se quiere describir de una manera apropiada el modelo. Como se dijo anteriormente, las ecuaciones de onda obtenidas en este caso son no lineales y permiten describir *fenómenos ópticos no lineales*.

En este capítulo se estudia la óptica no lineal de un CLC en el régimen de la dinámica débilmente no lineal [22, 23], es decir, sólo se consideran los términos de orden no lineal más bajo en las ecuaciones resultantes del acoplamiento entre el campo electromagnético y el CLC.

El objetivo de este capítulo es deducir la ecuación no lineal que gobierna la estructura de un paquete de ondas óptico espacial que se propaga axialmente en una muestra de CLC cuya disipación de energía es despreciable.

Desarrollos semejantes al presentado a continuación se han aplicado en diversos modelos para obtener la ecuación de la envolvente de dicho paquete de ondas [24, 25, 26]

¹Recuérdese que, como se vió en el capítulo anterior, en la proximidad del plano del defecto la densidad de energía electromagnética es alta

y muchos de los resultados obtenidos llevan al mismo tipo de soluciones: *los solitones*. Los solitones son un resultado del balance entre la no linealidad y la dispersión del medio que ocasiona que las componentes de diferentes vectores de onda del paquete se separen debido a su distinta velocidad y tiendan a esparcirse. Así, este equilibrio da lugar a una estructura robusta que avanza en el espacio sin distorsionarse. Este capítulo también se abocará a analizar posibles soluciones de este tipo.²

6.1. Energía libre de Helmholtz

En la presente sección se deducirá una expresión para la densidad de energía libre de Helmholtz, la cual toma en cuenta el acoplamiento débilmente no lineal de la muestra con el CLC.

Considerérese una muestra de CLC de grosor L cuyo eje de simetría es perpendicular a las caras de la muestra como se puede ver en la Fig. 6.1.

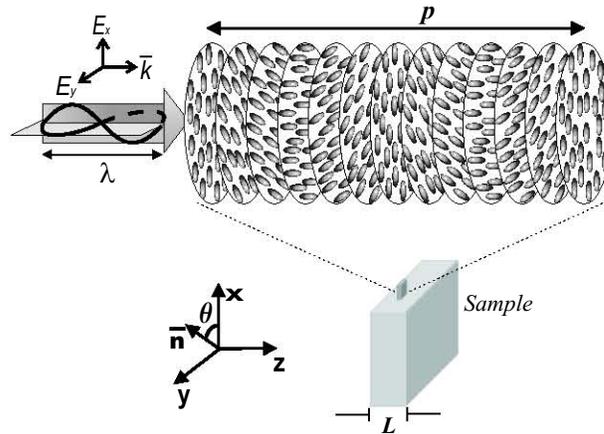


Figura 6.1: Un haz láser de longitud de onda central λ se propaga en una muestra de material colestérico de ancho L y periodo espacial p . Aquí se considera una haz propagándose en la dirección axial.

Se restringe nuevamente el campo director al plano xy , cuya configuración viene dada por la relación (3.54). Si un haz laser se propaga en la muestra con campos electromagnéticos $\mathbf{e} = (e_x, e_y, 0)$ y $\mathbf{h} = (h_x, h_y, 0)$ dependientes de las coordenadas espaciales

²El material original presentado en este capítulo se publicó en la ref. [29].

x, y, z ,³ la densidad de energía libre del sistema acoplado F_C se obtiene agregando a la expresión (2.18) el término correspondiente a la contribución electromagnética dada por (3.53), esto es

$$\begin{aligned}
 F_C &= F_d - \frac{1}{2c} \int \text{Re}\{\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}^* + \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}^*\} dV \\
 &= \frac{1}{2} \int \left[K_1 (\nabla \cdot \hat{n})^2 + K_2 (\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n} + q)^2 + K_3 (\hat{n} \times \nabla \times \hat{n})^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2c} \varepsilon_o (\varepsilon_{\perp} |\mathbf{e}|^2 + \varepsilon_a |\hat{n} \cdot \mathbf{e}|^2) - \frac{1}{2c} \mu_o (\mu_{\perp} |\mathbf{h}|^2 + \mu_a |\hat{n} \cdot \mathbf{h}|^2) \right] dV,
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

en donde se han usado las ecuaciones constitutivas (3.38) y (3.39).

Es bien sabido que las fluctuaciones térmicas en \hat{n} inducen dispersión del campo óptico. Para reducir este efecto, mediante la disminución de la longitud de correlación en \hat{n} , es conveniente aplicar un campo eléctrico adicional de baja frecuencia perpendicular al eje de la hélice. La intensidad de este campo adicional debe ser mucho más pequeña que el valor crítico para distorsionar completamente una muestra colestérica, es decir, en el límite cuando $p \rightarrow \infty$ (ver Sec. 1.2.1). Aquí, no se considera el efecto del campo extra agregando su correspondiente contribución a la energía libre, sino que solamente se reemplaza el periodo p de la muestra por el correspondiente a una muestra distorsionada por este campo. Es interesante mencionar que si el sistema es un sólido helicoidal preparado artificialmente [15], o bien es un colestérico elastómero, dichas fluctuaciones térmicas no existen [77].

La presencia de campos ópticos suficientemente fuertes, modifica la estructura en equilibrio. La nueva configuración se obtiene minimizando la energía libre total F dada por Ec. (6.1) con la Ec. de equilibrio (2.9), ésto proporciona

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} &= -\frac{1}{q^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \varepsilon_a \left((|\tilde{e}_x|^2 - |\tilde{e}_y|^2) \text{sen} 2\theta - (\tilde{e}_x^* \tilde{e}_y + \tilde{e}_y^* \tilde{e}_x) \cos 2\theta \right) \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \mu_a \left((|\tilde{h}_x|^2 - |\tilde{h}_y|^2) \text{sen} 2\theta - (\tilde{h}_x^* \tilde{h}_y + \tilde{h}_y^* \tilde{h}_x) \cos 2\theta \right), \tag{6.2}
 \end{aligned}$$

³Aquí se omite la parte armónica temporal en el entendido de que siempre se supondrá la forma dada por las expresiones (3.8).

en donde se ha usado la aproximación de constantes elásticas iguales $K_1 = K_2 = K_3 = K$ y se escribieron los campos en términos de las variables adimensionales

$$\begin{aligned}\tilde{e} &\equiv \frac{\mathbf{e}}{e_0}, & \tilde{d} &\equiv \frac{\mathbf{d}}{\varepsilon_0 e_0}, \\ \tilde{h} &\equiv \frac{\mathbf{h}}{e_0}, & \tilde{b} &\equiv \frac{\mathbf{b}}{\mu_a e_0},\end{aligned}\tag{6.3}$$

con $e_0 \equiv Z_0^{-1/2} E_0$, E_0 la amplitud del haz incidente. $\zeta \equiv q_0 z$ y $\sigma^2 \equiv e_0^2 / (2cKq_0^2)$ es un parámetro adimensional el cual es igual a la razón entre la densidad de energía del campo electromagnético y la densidad de energía elástica del colestérico, es decir, es una medida del acoplamiento entre el campo óptico y el colestérico.⁴ Nuevamente, para simplificar notación, se dejarán las variables originales de los campos \mathbf{e} , \mathbf{d} , \mathbf{h} , \mathbf{b} para indicar que los campos son adimensionales, en vez de la notación \tilde{e} , \tilde{d} , \tilde{h} , \tilde{b} .

Como ya se dijo arriba, el presente análisis se restringe a considerar solo el límite débilmente no lineal (el cual describe un medio de Kerr [3]). Esto implica que $\sigma \ll 1$, cuya cantidad requiere una densidad de energía óptica mucho más pequeña que la densidad de energía elástica. De tal modo que se puede resolver la Ec. (6.2) por aproximaciones sucesivas en σ^2 . Esto se puede llevar a cabo suponiendo que

$$\theta(\zeta) = \theta^{(0)}(\zeta) + \sigma^2 \theta^{(1)}(\zeta) + \sigma^4 \theta^{(2)}(\zeta) + \dots\tag{6.4}$$

donde la aproximación a orden cero $\theta^{(0)}(\zeta) = \zeta$ se corrige por los órdenes sucesivos $\sigma^2 \theta^{(1)}(\zeta)$, $\sigma^4 \theta^{(2)}(\zeta)$, ... Nótese por un lado que al resolver iterativamente la Ec.(6.5), con $\theta^{(0)}$ una función dependiente de ζ , se encuentran correcciones: $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$, ..., las cuales tienen la misma dependencia. Entonces, al suponer distorsiones configuracionales pequeñas, se logra mantener la estructura estratificada. Por el otro lado, si $\sigma \ll 1$ la presencia de las potencias de σ implica que la contribución de los términos de más alto orden son más pequeños que el término dominante. Así, en el régimen débilmente no lineal, se deben retener términos de la Ec. (6.4) hasta primer orden en σ . Una interacción entre el

⁴Es importante hacer hincapié que al tomar ambas componentes transversales del campo electromagnético distintas de cero, se está excluyendo tácitamente el caso en el cual el campo es perpendicular al vector director y evitando a la vez una posible transición configuracional de primer orden (ver Sec. 1.2.1). De este modo, no solo se está evitando la presencia de un campo umbral sino que también se está impidiendo una probable bi-estabilidad reorientacional.

campo óptico y la reorientación en el cristal líquido más fuerte que el régimen débilmente no lineal, da origen a diferentes jerarquías de ecuaciones diferenciales parciales de más alto orden. Tal sistema ha sido previamente estudiado para una fibra nemática [78]. En ese caso, el análisis permitió a los autores deducir una ecuación modificada compleja de Korteweg-de Vries cuyas soluciones son solitones doblemente embebidos que describen pulsos ultrarápidos.

Al insertar esta expresión en Ec.(6.2), se encuentra la siguiente ecuación diferencial que satisface $\theta^{(1)}(\zeta)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta^{(1)}(\zeta)}{d\zeta^2} = & \frac{1}{2}\varepsilon_a \left((|e_x|^2 - |e_y|^2) \text{sen}2\zeta - (e_x^*e_y + e_y^*e_x) \cos 2\zeta \right) \\ & + \frac{1}{2}\mu_a \left((|h_x|^2 - |h_y|^2) \text{sen}2\zeta - (h_x^*h_y + h_y^*h_x) \cos 2\zeta \right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

lo cual conduce a

$$\begin{aligned} \theta^{(1)}(\zeta) = & -\frac{1}{8}\varepsilon_a \left((|e_x|^2 - |e_y|^2) \text{sen}2\zeta - (e_x^*e_y + e_y^*e_x) \cos 2\zeta \right) \\ & -\frac{1}{8}\mu_a \left((|h_x|^2 - |h_y|^2) \text{sen}2\zeta - (h_x^*h_y + h_y^*h_x) \cos 2\zeta \right) \\ & + B\zeta + C, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde B y C son constantes de integración.

Aquí se supone que la muestra satisface condiciones a la frontera de anclaje fuerte en ambas caras dadas por $\theta(z=0) = \theta(z=L) = 0$. Esto puede ser válido solo si la muestra de ancho finito, contiene un número entero m de periodos espaciales, tal que $qL = 2m\pi$. Entonces $B = 0$ y C está completamente determinada, de tal modo que la solución de la Ec. (6.2) hasta primer orden en σ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \theta(z) & \approx \theta^{(0)}(z) + \sigma'^2\theta^{(1)}(z) \\ & = qz + \sigma'^2 f(z) \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde $\sigma'^2 \equiv \frac{\sigma^2}{8}$ y

$$\begin{aligned} f(z) \equiv & \varepsilon_a \left((|e_y|^2 - |e_x|^2) \text{sen}2qz + (e_x^*e_y + e_y^*e_x) (\cos 2qz - 1) \right) \\ & + \mu_a \left((|h_x|^2 - |h_y|^2) \text{sen}2qz + (h_x^*h_y + h_y^*h_x) (\cos 2qz - 1) \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Nótese que el parámetro σ'^2 está directamente relacionado con el parámetro de acoplamiento σ^2 ; en lo que sigue, se tomará el primero como como el parámetro de desarrollo y para simplificar notación, se omitirá el índice superior ' en σ . Entonces, la Ec. (6.7) proporciona la configuración del colestérico distorsionado por los campos dados. Es conveniente expresar $f(z)$ como la forma bilineal

$$f(z) = (e_x^*, h_x^*, e_y^*, h_y^*) \cdot M \cdot (e_x, h_x, e_y, h_y)^T, \quad (6.9)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} -\varepsilon_a \text{sen} 2qz & 0 & \varepsilon_a (\cos 2qz - 1) & 0 \\ 0 & -\mu_a \text{sen} 2qz & 0 & \mu_a (\cos 2qz - 1) \\ \varepsilon_a (\cos 2qz - 1) & 0 & \varepsilon_a \text{sen} 2qz & 0 \\ 0 & \mu_a (\cos 2qz - 1) & 0 & \mu_a \text{sen} 2qz \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

Aquí nuevamente el índice superior T indica la transpuesta del vector o matriz involucrado.

En la siguiente sección se deduce la ecuación de amplitud que gobierna la propagación de un paquete de ondas estrecho.

6.2. Ecuación de Amplitud

La interacción entre el campo óptico y el colestérico para propagación axial, está gobernada por las Ecs.(6.2) y (3.30).⁵ Sin embargo, como se mencionó arriba, el presente análisis se restringe a considerar solo el régimen débilmente no lineal. Para tal fin, se sustituye $\theta(z)$ dada por Ec. (6.7) en Ecs. (3.30) y se desarrolla el resultado en series de Taylor hasta primer orden en σ^2 . Esto permite escribir la matriz L en la forma

$$L = \gamma_{tt} - D_t \gamma_{zz}^{-1} D_t^\dagger, \quad (6.11)$$

donde

$$\gamma_{tt} \approx \gamma_{tt}^0 + \sigma^2 f(z) M_1. \quad (6.12)$$

⁵Recuérdese que en un CLC, los tensores $\bar{\chi}$ y $\bar{\eta}$ son iguales a cero, al igual que Γ_t . Para campos que dependen también de las coordenadas espaciales transversales, la cantidad $D_t = 0$ es distinta de cero.

γ_{tt}^0 se puede expresar, como era de esperarse, en términos de la matriz de rotación U , la cual relaciona esta matriz con la diagonal γ_{tt}^d (ver Sec. 3.2.1). Esto es

$$\gamma_{tt}^0 = U\gamma_{tt}^dU^{-1}, \quad (6.13)$$

con U y γ_{tt}^d dadas por las relaciones (3.48) y (3.49), respectivamente. Finalmente, M_1 se expresa como

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon_a \text{sen} 2qz & 0 & \varepsilon_a \cos 2qz & 0 \\ 0 & -\mu_a \text{sen} 2qz & 0 & \mu_a \cos 2qz \\ \varepsilon_a \cos 2qz & 0 & \varepsilon_a \text{sen} 2qz & 0 \\ 0 & \mu_a \cos 2qz & 0 & \mu_a \text{sen} 2qz \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

Aquí se ha aprovechado el hecho de que para propagación axial, los elementos de γ_{zz}^{-1} permanecen constantes, de tal forma que la única dependencia con \hat{n} o $\theta(z)$ de la Ec.(3.30), radica en los elementos de la matriz γ_{tt} , en la cual se ha insertado Ec. (6.7). Bajo la aproximación débilmente no lineal, la Ec. (3.30) toma la forma

$$ik_0 J_4 \partial_z \psi + k_0^2 \left(U \gamma_{tt}^d U^{-1} + \sigma^2 f(z) M_1 \right) \psi - k_0^2 D_t \gamma_{zz}^{-1} D_t^\dagger \psi = 0. \quad (6.15)$$

Al igual que en la Sec. 3.2.1, es útil expresar esta ecuación en un sistema de coordenadas los cuales giran con la hélice de la muestra colestérica y en donde γ_{tt}^0 es diagonal. Para ésto, se introduce la variable dada por la relación (3.46), junto con la transformación análoga a la relación (3.47) para cada una de las matrices involucradas en la Ec. (6.15). Después de efectuar las derivadas y haciendo algunas simplificaciones, la Ec. (6.15) se puede escribir como

$$0 = ik_0 J_4 \partial_z \psi + ik_0 J_4 \cdot (U^{-1} \cdot \partial_z U) \psi + k_0^2 \gamma_{tt}^d \psi + k_0^2 \sigma^2 f(z) \left(U^{-1} M_1 U \right) \psi - k_0^2 \left(U^{-1} D_t \gamma_{zz}^{-1} D_t^\dagger U \right) \psi. \quad (6.16)$$

en donde se usó la siguiente identidad para una rotación

$$U^{-1} J_4 U = J_4. \quad (6.17)$$

Nótese que los últimos dos términos de la Ec. (6.16) incluyen la no linealidad y la dependencia transversal de la amplitud ψ , respectivamente. Así, si se desprecian estos dos

términos, la Ec. (6.16) se restringe a describir la propagación axial lineal.⁶ Es necesario recordar que la dinámica para el régimen de propagación lineal está gobernada por la Ec. (3.51) y cuya solución analítica se obtuvo en la Sec. 4.2 resolviéndola como una ecuación de valores propios. Los correspondientes vectores propios son ondas planas que tienen dos diferentes números de onda $k_0 n_i$ ($i = 1, 2$) y dos direcciones \pm .⁷ Como se discutió en la misma sección, existe una región de longitudes de onda λ para la cual dos de estos modos representan ondas evanescentes. Esta región está comprendida entre los valores $\lambda_1 = p\sqrt{\epsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}}$ y $\lambda_2 = p\sqrt{\epsilon_{\perp}\mu_{\perp}}$.

Si se toma en cuenta que $T \cdot \alpha$, dada por la Ec. (4.47), es la matriz cuyas columnas son estos vectores propios, entonces se puede escribir la solución general para propagación axial lineal como

$$\psi_{lin} = T \cdot \alpha \cdot A^T, \quad (6.18)$$

donde A^T es un vector columna dependiente de las coordenadas cuyas componentes son⁸

$$A(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = (A_1^+, A_1^-, A_2^+, A_2^-). \quad (6.19)$$

La amplitud adimensional A^T , la cual representa la envolvente de un paquete de ondas estrecho de ancho $\kappa \equiv (k - k_0)/k_0 \ll 1$, con k_0 el vector de onda central (Ver. Fig. 6.2), es una función que varía lentamente con sus argumentos $\mathcal{X} \equiv \kappa x$, $\mathcal{Y} \equiv \kappa y$, $\mathcal{Z} \equiv \kappa z$. Aquí κ es un parámetro pequeño que mide la dispersión estadística de la distribución del paquete de ondas en el espacio de Fourier. En este sentido, el paquete de ondas está formado por una superposición de ondas planas cuyos vectores propios no están necesariamente alineados con el eje z sino limitados a un cono estrecho cuyo eje es paralelo al mismo eje z (Ver. Fig. 6.3). Alternativamente, este paquete de ondas podría también describir un haz incidente que muestra fluctuaciones isotrópicas en el plano perpendicular a la dirección de propagación, siempre que estas fluctuaciones tengan una dispersión estadística κ .

⁶En efecto, es inmediato demostrar que la suma de los tres primeros términos de la Ec. (6.16) e igualados a cero, conducen a la misma Ec. (3.50)

⁷Nótese que hay un factor k_0 extra en los números de onda $k_0 n_i$ con respecto a los mostrados en la Ec. (4.43), debido a que la Ec. (6.16) no tiene la coordenada longitudinal z normalizada, como en la caso de la Ec. (4.38)

⁸Es necesario señalar que, a diferencia de la elección hecha en el Cap. 5, ahora el orden en el cual se escogen las componentes del cuadvectores A son: $(A_1^+, A_1^-, A_2^+, A_2^-)$, de tal modo que la matriz métrica G_α que debe usarse viene dada por la expresión (4.55).

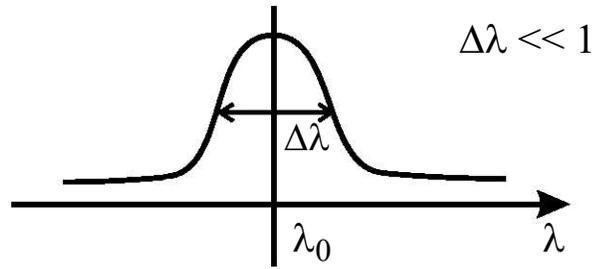


Figura 6.2: Paquete de ondas en el espacio de Fourier. El paquete tiene ancho $\Delta\lambda \ll 1$ y está centrado alrededor de la longitud de onda λ_0 .

Intencionalmente se selecciona la siguiente condición de acoplamiento $\kappa = \sigma$ debido a que se ha mostrado que hasta orden $O(\sigma^3)$ esta elección, en medios con no linealidad de 3^{er} orden, conduce a la *ecuación de Schrödinger no lineal estándar (SNL)*[22, 80]. Debe señalarse que debido a esta condición de acoplamiento, una vez que ha sido fijada la dispersión espectral del paquete, κ debe tomar el mismo valor.

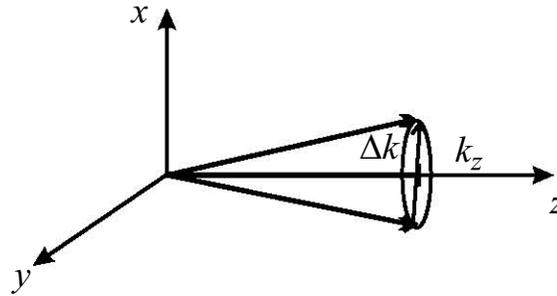


Figura 6.3: Representación esquemática de un paquete de ondas el cual está formado por una superposición de ondas planas cuyos vectores propios no están necesariamente alineados con el eje z sino limitados a un cono estrecho cuyo eje es paralelo al mismo eje z . Aquí Δk representa el ancho del paquete de ondas y k_z es el vector de onda central paralelo al eje z

Es importante notar que este modelo puede ser generalizado tomando estos dos parámetros de desarrollo pequeños relacionados por la expresión $\kappa \equiv \sigma^a$, con a un número positivo. De esta manera $a = 1/2$ representa un paquete de ondas más ancho y $a = 2$ un paquete de ondas más estrecho, pero solo $a = 1$ permite obtener la SNL para un medio tipo Kerr [78]. Nótese que la presencia de potencias de más alto orden en

σ implica que estas contribuciones son más pequeñas que el término dominante, el cual describe un paquete de ondas estrecho de amplitud pequeña. Así, se propone la solución

$$\psi = T \cdot \alpha \cdot A^T, \quad (6.20)$$

la cual representa la superposición de cuatro paquetes de onda estrechos cuyos vectores de onda centrales son los vectores propios lineales $T \cdot \alpha$. En consecuencia, cada componente de A^T es la envolvente de cada paquete de onda asociado con cada modo propio lineal. Para simplificar la notación, en lo que sigue, se mantendrán las coordenadas originales de A .

Nuevamente, se ha usado al índice superior \pm para representar la propagación a la derecha y a la izquierda de la muestra y los índices inferiores 1, 2 para distinguir entre los modos que están dentro o fuera de la región de frecuencias prohibidas, respectivamente.

La sustitución de Ec.(6.20) en (6.16) permite escribir

$$ik_0 N \cdot \partial_z B + k_0^2 N \cdot R \cdot B + k_0^2 M_t \cdot B - k_0^2 \sigma^2 f(z) M_{NL} \cdot B = 0, \quad (6.21)$$

donde $B = \alpha \cdot A$, $f(z) = B^{*T} \cdot M \cdot B$, $M_{NL} = T^\dagger \cdot U^{-1} \cdot M_1 \cdot U \cdot T$, $M_t = T^\dagger \cdot U^{-1} \cdot D_t \cdot \gamma_{zz}^{-1} \cdot D_t^\dagger \cdot U \cdot T$ y R_{ij} es la matriz diagonal cuyos elementos r_i^\pm con $(i = 1, 2)$ son los valores propios de T , es decir,

$$\begin{pmatrix} n_1^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_2^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} in_1^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & in_1^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_2^- \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

en las regiones fuera y dentro de la banda prohibida, respectivamente. Al escribir Ec.(6.21) se ha tomado en cuenta consistentemente que $T \cdot \alpha$ satisface la ecuación de propagación lineal comentada anteriormente

$$ik_0 J_4 \partial_z (T \cdot \alpha) + ik_0 J_4 (U^{-1} \partial_z U) (T \cdot \alpha) + k_0^2 \gamma_{tt}^d (T \cdot \alpha) = 0, \quad (6.23)$$

además de la siguiente relación de ortogonalidad

$$T^\dagger J_4 T = T^\dagger G_\beta T = G_\alpha \equiv N, \quad (6.24)$$

la cual ha sido explicada en la Sec. 4.2.2 y que representa el promedio temporal de la componente z del vector de Poynting asociado con cada uno de los vectores propios lineales. Si estos vectores se eligen en el orden $A_1^+, A_1^-, A_2^+, A_2^-$, la matriz N toma la forma dada por las relaciones (4.55), en las regiones fuera y dentro de la banda prohibida.

La Ec. (6.21), gobierna la interacción no lineal entre cuatro paquetes de onda cuyos vectores de onda central las cuatro ondas propias lineales en un cristal líquido colestérico. Nótese que la Ec. (6.21) está escrita en términos de las matrices de 4×4 , M_{NL} y M_t definidos en los Apéndices B y C para las regiones fuera y dentro de la banda prohibida, respectivamente, que caracteriza el autoenfocamiento o no linealidad y la difracción del paquete de ondas vectorial. En la siguiente sección se formulará una representación Lagrangiana para obtener las cantidades conservadas de este paquete de ondas vectorial.

6.3. Cantidades Conservadas

Se sabe que la ecuación de SNL satisface una jerarquía infinita de cantidades conservadas [82]. En esta sección, para la ecuación de amplitud vectorial obtenida, se demostrará que el análogo a las dos primeras constantes conservadas de esta jerarquía son satisfechas para modos que se encuentran fuera de la región prohibida; y que se cumple la primera cantidad para modos que se encuentran dentro.

6.3.1. Fuera de la banda de reflexión

Primero considérese longitudes de onda λ fuera de la región prohibida. Para este fin, se usa la Ec. (6.21) con la primera expresión para R y N dadas por (4.41) y (4.55), respectivamente. Se multiplica Ec. (6.21) por B^{T*} , esto es, el transpuesto conjugado de B . A la ecuación resultante le tomamos el hermitiano \dagger , es decir, el transpuesto conjugado del vector o matriz involucrados y se suman ambas ecuaciones para obtener

$$ik_0 B^{T*} \cdot N \cdot \partial_z B + ik_0 B \cdot N \cdot \partial_z B^{T*} + B^{T*} \cdot k_0^2 M_t \cdot B - B \cdot k_0^2 M_t^{T*} \cdot B^{T*} = 0. \quad (6.25)$$

donde se ha empleado el hecho de que $M_{NL} = M_{NL}^{T*}$ y $f^*(z) = f(z)$ ya que M es también una matriz Hermitiana. La integración de la Ec.(6.25) sobre el todo el dominio

de la coordenadas transversales x y y lleva a

$$(d/dz) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B^{T*} \cdot N \cdot B dx dy = 0 \quad (6.26)$$

lo cual se basa en el hecho de que M_t es también Hermitiana. Esto se puede mostrar fácilmente notando que M_t se puede escribir como $M_t = M_{L1}\partial_{xx} + M_{L2}\partial_{yy} + M_{L3}\partial_{xy}$ donde M_{Lk} ($k = 1, 2, 3$) son matrices hermitianas tales que los conmutadores $[\partial_{ij}, M_{Lk}] = 0$ ($i, j = x, y$) son iguales a cero. Es importante resaltar que la Ec. (6.26) establece la conservación de la energía a lo largo de la dirección z como se puede ver recordando que el paquete de ondas vectorial B se normalizó al correspondiente vector de Poynting, tal que el signo de N , proporciona la dirección de propagación.

Para encontrar la segunda constante de integración, se reescribe la Ec. (6.25) en la siguiente forma

$$0 = \partial_z(B^{T*} \cdot N \cdot B) + \partial_x \left[B^{T*} \cdot (M_{L1}\partial_x + \frac{1}{2}M_{L3}\partial_y)B - B \cdot (M_{L1}\partial_x + \frac{1}{2}M_{L3}\partial_y)B^{T*} \right] \\ + \partial_y \left[B^{T*} \cdot (M_{L2}\partial_y + \frac{1}{2}M_{L3}\partial_x)B - B \cdot (M_{L2}\partial_y + \frac{1}{2}M_{L3}\partial_x)B^{T*} \right]. \quad (6.27)$$

Después, integrando sobre todo el dominio transversal y usando Ec.(6.26), se encuentra que el vector de densidad de corriente \vec{J} debe tener divergencia nula

$$\vec{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[B^{T*} \cdot (M_{L1}\partial_x + \frac{1}{2}M_{L3}\partial_y)B - B \cdot (M_{L1}\partial_x + \frac{1}{2}M_{L3}\partial_y)B^{T*}, \right. \\ \left. B^{T*} \cdot (M_{L2}\partial_y + \frac{1}{2}M_{L3}\partial_x)B - B \cdot (M_{L2}\partial_y + \frac{1}{2}M_{L3}\partial_x)B^{T*} \right] dx dy. \quad (6.28)$$

Esto es, esta corriente se conserva después de atravesar la muestra de CLC.

Se pueden encontrar constantes de integración adicionales calculando una densidad Lagrangiana \mathcal{L} para el sistema sistema, ya que de aquí se pueden obtener cantidades conservadas usando las simetrías del sistema y el teorema de Noether [83]. Se puede obtener una densidad Lagrangiana para la Ec.(6.21) si se aproxima la configuración del colestérico dada por Ec.(6.8), la cual satisface estrictamente las condiciones a la frontera de anclaje fuerte. Esto significa, que si se desprecian los términos provenientes de la constante de integración C , las condiciones mencionadas ya no son satisfechas exactamente, pero si de una forma aproximada que es consistente aún con el hecho de que se está estudiando el

límite débilmente no lineal. Además, si se considera una muestra colestérica conteniendo un gran número de periodos espaciales p , (~ 50) el efecto de esta aproximación sobre las condiciones a la frontera es casi despreciable. La última aproximación permite reemplazar M por M_1 dadas por Ecs.(6.10) y (6.14), respectivamente. Entonces $f(z)$ puede ser ahora expresado en el sistema de coordenadas en rotación como

$$f(z) = B^{*T} \left(T^\dagger U^{-1} M_1 U T \right) B = B^{*T} M_{NL} B. \quad (6.29)$$

Para encontrar la densidad lagrangiana de la Ec.(6.21) se debe observar por un lado que los coeficientes de los dos primeros términos son matrices constantes, mientras que los coeficientes del tercero (término de difracción) dependen solo de z . Esto permite obtenerlos tomando la derivada variacional de una densidad Lagrangiana muy similar a la de la ecuación de SNL. Por el otro lado, el término no lineal de la misma ecuación puede obtenerse calculando la derivada $\partial(f(z))^2/\partial B^T$. Por lo tanto, la correspondiente densidad Lagrangiana \mathcal{L}_{ac} es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ac} = & \frac{1}{2} i k_0 \left(B^* \cdot N \cdot B_{,z} - B \cdot N \cdot B_{,z}^* \right) + k_0^2 B \cdot N \cdot R \cdot B^* - \frac{1}{2} \sigma^2 k_0^2 f'^2(z) \\ & - k_0^2 \left(B_{,x}^* \cdot M_{L1} \cdot B_{,x} + B_{,y}^* M_{L2} B_{,y} + \frac{1}{2} B_{,y}^* M_{L3} B_{,x} + \frac{1}{2} B_{,x}^* M_{L3} B_{,y} \right), \end{aligned} \quad (6.30)$$

donde se usó la notación $\frac{\partial B}{\partial x_k} \equiv B_{,x_k}$, $k = 1, 2, 3$ y el hecho que $M_t = M_{L1} \partial_{xx} + M_{L2} \partial_{yy} + M_{L3} \partial_{xy}$.

De acuerdo al teorema de Noether, si $d\mathcal{L}_{ac}/dx^\alpha = 0$, las constantes de movimiento están dadas por

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}_{ac}}{\partial B_{\lambda,\alpha}} B_{\lambda,\beta} - \mathcal{L}_{ac} \delta_{\alpha,\beta}. \quad (6.31)$$

Para el sistema considerado aquí $d\mathcal{L}_{ac}/dx = d\mathcal{L}_{ac}/dy = 0$ tal que las siguientes componentes de $T^{\alpha\beta}$ se conservan:

$$\begin{aligned} T^{xx} &= -k_0^2 B_{,x}^* \cdot \left(M_{L1} B_{,x} + \frac{1}{2} M_{L3} B_{,y} \right) - k_0^2 \left(B_{,x}^* M_{L1} + \frac{1}{2} B_{,y}^* M_{L3} \right) \cdot B_{,x} - \mathcal{L}_{ac} \\ T^{yy} &= -k_0^2 B_{,y}^* \cdot \left(M_{L2} B_{,y} + \frac{1}{2} M_{L3} B_{,x} \right) - k_0^2 \left(B_{,y}^* M_{L2} + \frac{1}{2} B_{,x}^* M_{L3} \right) \cdot B_{,y} - \mathcal{L}_{ac} \\ T^{xy} &= -k_0^2 B_{,y}^* \cdot \left(M_{L1} B_{,x} + \frac{1}{2} M_{L3} B_{,y} \right) - k_0^2 \left(B_{,x}^* M_{L1} + \frac{1}{2} B_{,y}^* M_{L3} \right) \cdot B_{,y} \end{aligned}$$

$$T^{yx} = -k_0^2 B_{,x}^* \cdot \left(M_{L2} B_{,y} + \frac{1}{2} M_{L3} B_{,x} \right) - k_0^2 \left(B_{,y}^* M_{L2} + \frac{1}{2} B_{,x}^* M_{L3} \right) \cdot B_{,x}. \quad (6.32)$$

Después de restar las componentes T^{xx} y T^{yy} , se llega a

$$\begin{aligned} T^{xxyy} = & -k_0^2 B_{,x}^* \left(M_{L1} B_{,x} + \frac{1}{2} M_{L3} B_{,y} \right) - k_0^2 \left(B_{,x}^* M_{L1} + \frac{1}{2} B_{,y}^* M_{L3} \right) B_{,x} \\ & + k_0^2 B_{,y}^* \left(M_{L2} B_{,y} + \frac{1}{2} M_{L3} B_{,x} \right) + k_0^2 \left(B_{,y}^* M_{L2} + \frac{1}{2} B_{,x}^* M_{L3} \right) B_{,y}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Debido a su simplicidad, más adelante se usará esta última constante de movimiento para verificar la consistencia de los cálculos numéricos realizados.

6.3.2. Dentro de la banda de reflexión

Si ahora se consideran longitudes de onda dentro de la región prohibida, se debe notar que las diferencias sustanciales con el caso anterior se presentan en las matrices de valores propios R y de normalización N dadas por (4.41) y (4.55), respectivamente. La primera matriz ya no es hermitiana. Nuevamente, realizando el mismo análisis mostrado arriba sobre la Ec.(6.21), se encuentran expresiones idénticas a las dadas por Ec.(6.21) para la primera cantidad conservada, Ec. (6.30) para la densidad Lagrangiana y expresiones (6.32) y (6.33) para las cantidades conservadas obtenidas usando el teorema de Noether. Estos resultados son una consecuencia del hecho de que las matrices N , $(N \cdot R)$, M_t , M_{NL} , son hermitianas y $f^*(z) = f(z)$, ya que M también es hermitiana. Además, nótese que por si misma la matriz R no es hermitiana, pero el producto $N \cdot R$ sí lo es, lo cual nos permite obtener al menos la primera cantidad conservada que expresa la conservación de la energía a lo largo de la dirección de propagación.

6.4. Algunas Soluciones Particulares

6.4.1. Análisis Fuera de la Banda de Reflexión

Algunas características interesantes de la interacción no lineal gobernada por Ec. (6.21) proviene de la forma explícita de M_{NL} , la cual tiene estructura matricial en bloques

de 2×2 con dos bloques diagonales iguales a cero. Una consecuencia de esta estructura es que un paquete de ondas centrado alrededor de un único modo propio lineal no presenta autoenfocamiento, esto es, un paquete de ondas puro que incide sobre la muestra se dispersa conforme avanza en la dirección de propagación paralela al eje de la hélice. Lo mismo ocurre cuando el paquete de ondas se forma ya sea por la superposición de los modos B_1^+ y B_1^- o por B_2^+ y B_2^- , con lo cual combinamos modos viajeros a la derecha y a la izquierda. Entonces, el término no lineal de Ec. (6.21) es distinto de cero, cuando se mezclan modos que se propagan en la misma dirección o cuando ellos tienen diferentes números de onda. Propiedades adicionales de esta interacción no lineal pueden ser analizadas desarrollando explícitamente $f(z)$, esto es

$$f(z) = i \left\{ m_1(B_1^+ B_2^{+*} - B_1^{+*} B_2^+) + m_1(B_1^- B_2^{-*} - B_1^{-*} B_2^-) + m_2(B_1^- B_2^{+*} - B_1^{-*} B_2^+) + m_2(B_1^+ B_2^{-*} - B_1^{+*} B_2^-) \right\}. \quad (6.34)$$

Esta expresión muestra que $f(z)$ es cero aún cuando se suponga la presencia de los cuatro paquetes de onda, a menos que exista un acoplamiento de fase entre dos de los paquetes de onda. Esta expresión también muestra que otra solución sin autoenfocamiento de la Ec. (6.21) se obtiene si se toma la misma amplitud para todos los paquetes de onda $B_1^+ = B_2^+ = B_1^- = B_2^-$ y el acoplamiento de fase entre los paquetes de onda que se propagan a la derecha $B_1^+ B_2^{+*} - B_1^{+*} B_2^+$ igual a menos los paquetes que se propagan a la izquierda $-(B_1^- B_2^{-*} - B_1^{-*} B_2^-)$.

Ahora, como un ejemplo simple de una solución con autoenfocamiento, se restringe el presente análisis a considerar solo dos modos propios $B_2^+ = \exp(i\alpha z) B_1^+$ teniendo un acoplamiento de fase α : si adicionalmente se toman amplitudes que solo dependen de una coordenada transvesal, se llega a que

$$2ik_0 \partial_z B_1^+ + k_0^2 (n_1^+ + n_2^+ - \alpha/k_0) B_1^+ + k_0^2 \eta(z) \partial_{x,x} B_1^+ - 4k_0^2 m_1^2 \sigma^2 \text{sen}^2(\alpha z) |B_1^+|^2 B_1^+ = 0, \quad (6.35)$$

donde

$$\eta(z) = \frac{1}{h_2} \left((c_{22} r_1^2 + c_{12} r_2^2 + 2c_{52} r_1 r_2 \cos(\alpha z)) \cos^2(qz) \right)$$

CAPÍTULO 6. ÓPTICA NO LINEAL DE SISTEMAS QUIRALES
6.4. ALGUNAS SOLUCIONES PARTICULARES

$$\begin{aligned}
 &+ \left(c_{21}r_1^2 + c_{11}r_2^2 + 2c_{51}r_1r_2 \cos(\alpha z) \right) \text{sen}^2(qz) \\
 &+ c_{53}r_1r_2 \text{sen}(\alpha z) \text{sen}(2qz). \tag{6.36}
 \end{aligned}$$

Entonces, recordando que $B_1^+ = A_1^+ \exp(ik_0n_1^+z)$ e introduciendo la variable $G = A_1^+ \exp\left(-\frac{ik_0}{2}(n_2^+ - \alpha/k_0)z\right)$ se encuentra la siguiente ecuación de Schrödinger no lineal cuyos coeficientes dependen de la posición⁹

$$i\partial_z G + \frac{k_0}{2}\eta(z)\partial_{x,x}G - 2k_0m_1^2\sigma^2 \text{sen}^2(\alpha z) |G|^2 G = 0. \tag{6.37}$$

La Ec. (6.37) puede ser reescrita en términos de variables adimensionales como

$$i\partial_{z'} G + \frac{1}{2}D(z')\partial_{x',x'}G - \gamma(z') |G|^2 G = 0 \tag{6.38}$$

$$x' \equiv \frac{x}{x_0}, \quad z' \equiv \frac{z}{z_0}, \tag{6.39}$$

donde $x' \equiv x/x_0$, $z' \equiv z/z_0$. Aquí x_0 y z_0 son escalas espaciales dadas por

$$x_0^2 \equiv \frac{1}{2k_0^2m_1^2\sigma^2}, \quad z_0 \equiv \frac{1}{2k_0m_1^2\sigma^2} \tag{6.40}$$

y

$$D(z') \equiv k_0^2\eta(z'), \quad qz \rightarrow 2\pi \left(\frac{z_0}{p} \right) z', \quad \alpha z \rightarrow \alpha z_0 z', \tag{6.41}$$

$$\gamma(z') \equiv \text{sen}^2(\alpha z_0 z')$$

y el ancho de la muestra es ahora $L' = L/z_0$. Es interesante mencionar que en el caso de la ecuación de SNL estándar x_0 representa el ancho de la estructura óptica en la cual el autoenfocamiento y la difracción espacial se balancean una con otra. Sin embargo, en el presente caso existe una dependencia espacial longitudinal en los coeficientes de la ecuación, lo cual hace que el ancho de la estructura, oscile con una escala espacial z_0 .

Nuevamente, para simplificar la notación, en lo que sigue se omite el índice superior $'$ en la Ec. (6.38).

⁹Es necesario recordar que, debido a las definiciones hechas en (6.3), la amplitud G en la Ec. (6.37) es adimensional con normalización e_0 .

6.4.2. Análisis Dentro de la Banda de Reflexión

Recuérdese que los modos B_1^+ y B_1^- en este caso son evanescentes y los modos los modos B_2^+ y B_2^- son propagantes.

Por un lado, nuevamente la forma estructural por bloques de M_{NL} , muestra que un paquete de ondas centrado alrededor de un único modo propio lineal no presenta autoenfocamiento de tal forma que un paquete de ondas puro que incide sobre la muestra se dispersa conforme avanza en la dirección de propagación paralela al eje de la hélice.

Ahora calculando explícitamente $f(z)$

$$f(z) = i \left\{ m_1^* (B_1^+ B_2^{+*} + B_1^- B_2^{-*}) - m_1 (B_1^{+*} B_2^+ + B_1^{-*} B_2^-) \right\} + i \left\{ m_2^* (B_1^- B_2^{+*} + B_1^+ B_2^{-*}) - m_2 (B_1^{-*} B_2^+ + B_1^{+*} B_2^-) \right\}, \quad (6.42)$$

se muestra que $f(z)$ también es cero aún cuando se tenga la presencia de los cuatro paquetes de onda. Si por ejemplo, se supone la misma amplitud para todos los paquetes de onda y considerando la forma de m_1 y m_2 , definidos en el apéndice C, se puede ver directamente que $f(z)$ es cero, a menos que exista un acoplamiento de fase entre dos de los paquetes. Particularmente $f(z)$ es también cero cuando el paquete de ondas está formado ya sea por la superposición de solo los modos B_1^+ y B_1^- estacionarios o por los modos B_2^+ y B_2^- propagantes.

Como un ejemplo de una solución que presenta el fenómeno de autoenfocamiento, se restringe la solución considerada a solo dos modos propios $B_2^+ = \exp(i\alpha z) B_1^+$ teniendo un acoplamiento de fase α : si solo se considera la dependencia en una coordenada transversal, se llega a que

$$ik_0 \partial_z B_1^+ + k_0^2 (n_2^+ - \alpha/k_0) B_1^+ + \eta(z) \partial_{x,x} B_1^+ + k_0^2 \sigma^2 \xi(z) |B_1^+|^2 B_1^+ = 0, \quad (6.43)$$

donde

$$\begin{aligned} \eta(z) \equiv & c_0 \left((c_{22} r_1^2 + c_{12} r_2^2 + (c_{52} + c_{52}^*) r_1 r_2 \cos(\alpha z) + i (c_{52} - c_{52}^*) r_1 r_2 \text{sen}(\alpha z)) \cos^2(qz) \right. \\ & + (c_{21} r_1^2 + c_{11} r_2^2 + (c_{52} + c_{52}^*) r_1 r_2 \cos(\alpha z) + i (c_{52} - c_{52}^*) r_1 r_2 \text{sen}(\alpha z)) \text{sen}^2(qz) \\ & \left. - ((c_{53} + c_{53}^*) \cos(\alpha z) + i (c_{53} - c_{53}^*) \text{sen}(\alpha z)) r_1 r_2 \cos(qz) \text{sen}(qz) \right). \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\xi(z) \equiv ((m_1 - m_1^*) \cos(\alpha z) + i (m_1 + m_1^*) \operatorname{sen}(\alpha z))^2. \quad (6.45)$$

y $c_0 = k_0^2 / (h_2 r_1 r_2)$.

Así, recordando que dentro de la banda de reflexión $n_1^\pm \rightarrow \pm i n_1$, $B_1^+ = A_1^+ \exp(-k_0 n_1 z)$ e introduciendo la variable $G = A_1^+ \exp(-ik_0(n_2^+ - \alpha/k_0)z - k_0 n_1 z)$ se encuentra la siguiente ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes dependientes de la coordenada longitudinal

$$ik_0 \partial_z G + \eta(z) \partial_{x,x} G + k_0^2 \sigma^2 \xi(z) \exp\left(ik_0 \left(n_2^+ - \alpha/k_0\right)\right) |G|^2 G = 0, \quad (6.46)$$

la cual incluye un factor de amortiguamiento en el término no lineal. Esto es consistente con el hecho de que se expresó el modo propagante B_2^+ en términos del modo evanescente B_1^+ y por lo tanto la ecuación describe la dinámica de un paquete de ondas cuya amplitud decae conforme se propaga. La forma de $\xi(z)$ muestra que el término no lineal es un término de autodesenfocamiento.

Por otro lado, si se consideran solo dos modos propios de propagación pero ahora en términos de un modo propagante de tal forma que $B_1^+ = \exp(i\alpha z) B_2^+$, con las mismas condiciones mencionadas arriba y recordando que $B_2^+ = A_2^+ \exp(ik_0 n_2^+ z)$ se llega a

$$ik_0 \partial_z A_2^+ + \eta(z) \partial_{x,x} A_2^+ + k_0^2 \sigma^2 \xi(z) |A_2^+|^2 A_2^+ = 0, \quad (6.47)$$

la cual es una ecuación de SNL con coeficientes dependientes de la posición y con autodesenfocamiento, en donde los coeficientes $\eta(z)$ y $\xi(z)$ son los definidos previamente.

6.4.3. Método de Solución Numérico

En lo que resta del presente capítulo se limitará a analizar en detalle solo la ecuación de SNL escalar obtenida en el caso cuando se escogen longitudes de onda fuera de la banda de reflexión y la cual está dada por la Ec. (6.38). Sin embargo, es necesario señalar que el tratamiento presentado a continuación puede emplearse para analizar el caso en que la longitud de onda se encuentra dentro de la banda de reflexión.

El procedimiento numérico, conocido como *método de dos pasos (split-step method)*, para resolver la ecuación de SNL con autoenfocamiento cuando sus coeficientes son constantes está bien establecido (ver por ejemplo [22, 84]). Aquí, se extiende este método para considerar el caso de autodesenfocamiento ($\gamma(z) > 0$) además de que ambos coeficientes $D(z)$ y $\gamma(z)$ dependen de la coordenada longitudinal z (ver Apéndice D). Siguiendo los trabajos originales de [82, 85], el solitón oscuro de la ecuación de SNL viene dado por el siguiente perfil tipo *tangente hiperbólica*:

$$G(x, z) = A_0 \tanh \left[\sqrt{\frac{\gamma(z)}{D(z)}} A_0 x \right] + i \sqrt{1 - A_0^2}, \quad (6.48)$$

en donde A_0 es una amplitud arbitraria tal que el ancho del pulso es proporcional a $A_0^{-1} \sqrt{D(z)/\gamma(z)}$. Nótese de esta expresión que el pulso inicial está localizado en $z = 0$ y su "centro de masa" está también en $x_0 = 0$.

Se tomó como condición inicial el perfil de la expresión (6.48) para integrar numéricamente la Ec.(6.38) usando el método de dos pasos. El cálculo numérico fué realizado usando un arreglo bidimensional cuyos pasos transversales y longitudinales son $\Delta x = 10/32$ y $\Delta z = 1/8000$.

Los resultados se obtuvieron usando valores para una muestra con periodo espacial $p = 0,29\mu m$, ancho $L = 5,2\mu m$, permitividades dieléctricas $\epsilon_{\parallel} = 2,62$, $\epsilon_{\perp} = 2,31$ y constante elástica $K = 5,2 \times 10^{-12} N$. El cristal líquido colestérico usado fué hecho mediante la mezcla del cristal líquido Merck ZLI 2293 con dopantes quirales ZLI 811 en la razón de 2 : 1 [86]. Aquí se restringe el cálculo a valores dentro del rango visible y, como se dijo arriba, fuera de la brecha. Se sabe muy bien que en el rango visible, la anisotropía magnética μ_a es cercana a cero, aquí se hace $\mu_a = 0,1$.

Del tercer término en la Ec. (6.37) se puede obtener el índice de refracción no lineal n_2^{chol} como [22]

$$n_2^{chol} = \frac{\epsilon_0 m_1^2 p^2}{32\pi^2 K_2}, \quad (6.49)$$

Para los valores de los parámetros dados arriba y una longitud de onda óptica $\lambda_0 = 0,5\mu m$, se obtiene $n_2^{chol} = 3,85 \times 10^{-23} (km/V)^2$, la cual es dos órdenes de magnitud más pequeño que en nemáticos ($n_2^{nem} = 1,43 \times 10^{-21} (km/V)^2$ [87]) pero cinco órdenes más grande que

CAPÍTULO 6. ÓPTICA NO LINEAL DE SISTEMAS QUIRALES
6.4. ALGUNAS SOLUCIONES PARTICULARES

en el óxido de silicio $n_2^{\text{SiO}_2} = 1,2 \times 10^{-28} (\text{km}/V)^2$. Esto muestra la existencia de la gran no linealidad esperada para cristales líquidos [88]. Esto también indica cómo la estructura helicoidal del CLC, para la cual la densidad de energía elástica es más grande que en los nemáticos, no permite fácilmente distorsionar la muestra y, como una consecuencia, su no linealidad es más pequeña que en los nemáticos.

El índice de refracción no lineal n_2^{chol} se relaciona con la longitud de onda λ_0 , de una manera no trivial, a través del coeficiente m_1^2 , el cual se grafica en la Fig. 6.4. Como se puede ver, este coeficiente diverge en ambos extremos de la banda: $\lambda_{\text{mín}} = p\sqrt{\epsilon_{\perp}\mu_{\perp}}$ and $\lambda_{\text{máx}} = p\sqrt{\epsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}}$. Este hecho se puede demostrar directamente desarrollando $m_1^2(\lambda)$

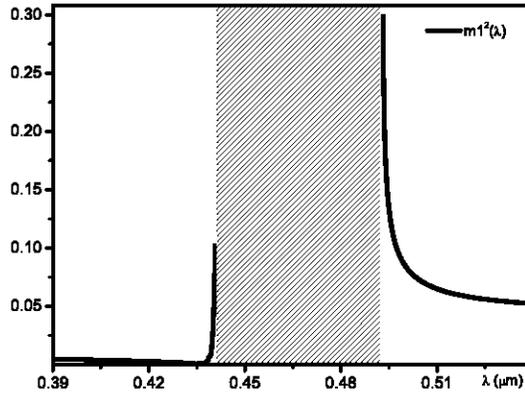


Figura 6.4: Gráfica del coeficiente adimensional $m_1^2(\lambda)$ como una función de la longitud de onda λ . La región sombreada representa el bandgap que vá desde $\lambda_{\text{mín}} = 0,441\mu m$ hasta $\lambda_{\text{máx}} = 0,492\mu m$. Aquí $m_1^2(\lambda_v) = 0$ cuando $\lambda_v = 0,434\mu m$.

alrededor de $\lambda_{\text{mín}}$ y $\lambda_{\text{máx}}$. Esto conduce a

$$m_1^2(\lambda)_{\lambda \rightarrow \lambda_{\text{mín}, \text{máx}}} \approx \sqrt{p} \begin{cases} \aleph_{\text{mín}} (-\lambda + \lambda_{\text{mín}})^{-1/2} \\ \aleph_{\text{máx}} (\lambda - \lambda_{\text{máx}})^{-1/2} \end{cases}, \quad (6.50)$$

donde $\aleph_{\text{mín}, \text{máx}}$ están dadas en el Apéndice B. Para entender intuitivamente el por qué el sistema muestra esta divergencia, es conveniente hacer notar que el vector de Poynting de los modos propios lineales son cero precisamente en los extremos de la banda, de tal modo que el flujo de energía es bloqueado allí y por ende la distorsión del colestérico alcanza su máximo, así como la no linealidad. Si se realizara un cálculo más detallado en

donde se tomara en cuenta la pequeña absorción del medio, las divergencias de m_1 serían reemplazadas por máximos. Este análisis muestra como los efectos no lineales se incrementan y tienen una respuesta más grande en longitudes de onda cercanas a los extremos de la banda prohibida. Es relevante mencionar que estos resultados son consistentes, al menos cualitativamente, con experimentos en donde se utiliza como medio resonante al CLC [89] en los cuales la longitud de onda del haz láser de excitación y la longitud de onda de emisión de la muestra casi coinciden con los extremos de la banda de reflexión.

Se debe comentar también que, en contraste al incremento de los efectos no lineales en los extremos de la brecha, existe un valor específico λ_v donde m_1^2 se hace cero, es decir, la no linealidad desaparece y la Ec. (6.37) simplemente se transforma en una ecuación lineal de dispersión. Explícitamente, $\lambda_v = p\sqrt{(\epsilon_{\perp}\mu_{\perp}\epsilon_a^2 - \epsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}\mu_a^2)/((\epsilon_a + \mu_a)(\epsilon_a - \mu_a))} = 0,434\mu m$.

Una importante cantidad que caracteriza estos solitones oscuros es la potencia P_s requerida para generarlos. Se puede mostrar que [22]

$$P_s = \frac{1}{2}\epsilon_o c s_0 E_0^2, \quad (6.51)$$

donde s_0 es el área transversal de la muestra y la amplitud inicial E_0 se relaciona con el ancho espacial del solitón x_0 a través de las relaciones (6.40) por

$$E_0 = \frac{\lambda_0}{x_0} \sqrt{\frac{8K_2}{\epsilon_o m_1^2 p^2}} = \frac{\lambda_0}{2\pi x_0} \sqrt{\frac{1}{n_2^{chol}}}.$$

Si se toma el grosor de la muestra $x_0 = 5\mu m$ y $s_0 = 400\mu m^2$, se obtiene $E_0 = 2,56 \times 10^6 V/m$ y por ende la potencia es $P_s = 3,48W$, la cual se puede producir por un haz laser de potencia moderada. Se debe mencionar que P_s es aproximadamente un orden de magnitud más grande que la potencia usada para inducir solitones espaciales en nemáticos [90]. Tomando en cuenta P_s y una cintura de haz igual a $20\mu m$, se obtiene la escala espacial longitudinal $z_0 = 3,1 \times 10^{-4}m$ la cual es un orden más grande que x_0 . Así, para observar esta oscilación longitudinal, debe utilizarse una muestra gruesa. Se debe recordar además que se tiene una solución tipo solitón oscuro, tal que las dimensiones calculadas caracterizan una región de densidad de energía baja, inmersa dentro de la trayectoria del haz incidente.

CAPÍTULO 6. ÓPTICA NO LINEAL DE SISTEMAS QUIRALES
6.4. ALGUNAS SOLUCIONES PARTICULARES

Como se dijo arriba, el parámetro de desarrollo σ^2 debe ser suficientemente pequeño para que sean aplicables los resultados presentados aquí. En efecto, sustituyendo los valores dados previamente se obtiene $\sigma^2 = 0,003$. Así, el paquete de ondas que se está analizando es un paquete de ondas estrecho de ancho $\kappa = \sqrt{\sigma^2} = 0,054$ centrado alrededor del vector de onda central k_0 .

Como se puede notar de la Ec. (6.38), los coeficientes D y γ dependen de la longitud de onda λ_0 . La Fig. 6.5 muestra esta dependencia, en donde se ha evaluado en uno de las múltiples posiciones de z , en donde estos coeficientes oscilatorios tienen sus máximos ($z_{\text{máx}} = \pi/(2\alpha z_0)$). Nótese que estos coeficientes son del mismo orden de magnitud, de tal modo que existe un balance entre el autoenfocamiento o no linealidad y la difracción del paquete de ondas. Finalmente, la Fig. 6.6 muestra varios perfiles de un solitón ob-

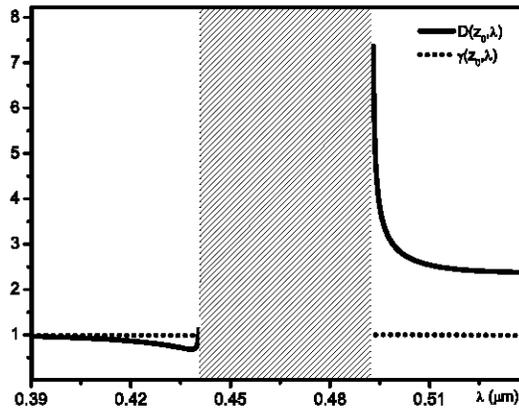


Figura 6.5: Gráfica de los coeficientes adimensionales $D(z_{\text{máx}}, \lambda)$ y $\gamma(z_{\text{máx}}, \lambda)$ como función de la longitud de onda λ . El valor de $z_{\text{máx}}$ se escoge en un punto en donde $\gamma(z_{\text{máx}}, \lambda)$ tiene un máximo.

scuro calculado de la Ec. (6.38) como una función de z . Como se discutió arriba, la Ec. (6.38) predice que cada perfil transversal de la solución tiene un ancho diferente b , el cual oscila con z , alcanzando un valor máximo $b_{\text{máx}} = x_0 = 5\mu m$. Nótese que, debido al balance entre la no linealidad y la difracción, el efecto promedio sobre el pulso incidente es mantener su perfil tipo tangente hiperbólico conforme se propaga en la dirección z .

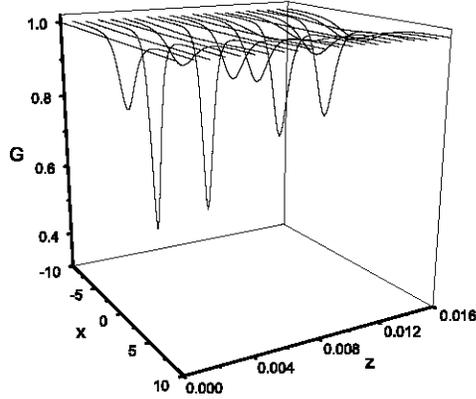


Figura 6.6: Gráfica que muestra un solitón oscuro propagándose a través de una muestra de CLC de ancho adimensional igual a $\frac{L}{z_0} = 1,6 \times 10^{-2}$. Aquí se tomó la amplitud $A_0 = 1$.

6.4.4. Método de Aproximación Variacional

Este formalismo parte de postular una función de prueba analítica (*ansatz*). En el caso de la ecuación de SNL un *ansatz* comunmente adoptado [85, 91] que aproxima un solitón perturbado es

$$\begin{aligned} G(x, z)_{ansatz} &= B \tanh(F(x - x_0)) + iA \\ A^2 + B^2 &= 1. \end{aligned} \quad (6.52)$$

La variable x representa la coordenada transversal y los parámetros son funciones de la variable de evolución z . B es la amplitud real, F^{-1} representa el ancho del pulso y x_0 es la posición del centro de masa. Las ecuaciones que gobiernan la evolución de los parámetros libre pueden obtenerse calculando un *Lagrangiano efectivo* L_{eff} por medio de de integración directa de la *densidad Lagrangiana* \mathcal{L} sobre las coordenadas transversales, para finalmente minimizar L_{eff} con respecto a estos parámetros. La solución obtenida de las ecuaciones diferenciales para cada parámetro nos permiten conocer el comportamiento del sistema [92].

Un análisis directo muestra que una aplicación del formalismo variacional usando una densidad Lagrangiana estándar \mathcal{L} de la ecuación de SNL ($\gamma(z) > 0$), no funciona correc-

CAPÍTULO 6. ÓPTICA NO LINEAL DE SISTEMAS QUIRALES
6.4. ALGUNAS SOLUCIONES PARTICULARES

tamente [85], de tal modo que este método debe ser modificado; por ejemplo, usando integrales de movimiento renormalizadas [93] de las cuales una densidad Lagrangiana apropiada puede ser obtenida para deducir la Ec. (6.38) para el caso $D(z) = \gamma(z) = 1$. Aquí, se considera el caso en el cual $D(z)$ es una función de z y $\gamma(z) = cte$. Renormalizando la Ec. (6.38) haciendo $G \rightarrow G \exp(-i\gamma z)$ se obtiene

$$i\partial_z G + \frac{1}{2}D(z)\partial_{x,x}G - \gamma(|G|^2 - 1)G = 0, \quad (6.53)$$

cuya densidad Lagrangiana apropiada es

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (G^* G_{,z} - G G_{,z}^*) \left(1 - \frac{1}{|G|^2}\right) - \frac{1}{2}D(z) |G_{,x}|^2 - \frac{1}{2}\gamma(z) (|G|^2 - 1)^2. \quad (6.54)$$

Ahora, la sustitución de $G(x, z)_{ansatz}$ en \mathcal{L} y la integración sobre las coordenadas transversales $L_{eff} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(G) dx$ lleva al Lagrangiano efectivo

$$L_{eff} = 2x'_0 \left(-AB + \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right) - \frac{2}{3} \left(B^2 F D + \frac{B^4}{F} \gamma\right) \quad (6.55)$$

y las correspondientes ecuaciones de movimiento se pueden obtener de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L_{eff}}{\partial p_j} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L_{eff}}{\partial p'_j} = 0, \quad p_j \equiv x_0, F, B, \quad p'_j \equiv \partial_z p_j,$$

de forma que finalmente se llega a los siguientes resultados

$$\begin{aligned} B'(z) &= 0, \\ x'_0(z) &= \sqrt{\gamma D(z)} A(z), \\ F(z) &= \sqrt{\frac{\gamma}{D(z)}} B(z), \end{aligned} \quad (6.56)$$

los cuales coinciden con aquellos dados por la solución analítica en el caso $D(z) = cte$.

Como se mencionó con anterioridad, el ancho del pulso viene dado por $F^{-1}(z) = \sqrt{\frac{D(z)}{\gamma}} B^{-1}(z)$. Tomando en cuenta que dentro de la muestra de ancho L hay varios periodos espaciales p , el ancho del pulso mostrará tales oscilaciones; así se puede suponer que la solución G será perturbada por el promedio de tales oscilaciones. Como resultado se

CAPÍTULO 6. ÓPTICA NO LINEAL DE SISTEMAS QUIRALES
6.4. ALGUNAS SOLUCIONES PARTICULARES

puede usar la solución de prueba (6.52) con los parámetros variables (6.56) y los valores promediados de $D \equiv \langle D(z) \rangle$, $\gamma \equiv \langle \gamma(z) \rangle$

$$D \equiv \frac{1}{2}k_0^2 \left(\frac{1}{h_2} \right) \left((c_{22} + c_{21}) r_1^2 + (c_{12} + c_{11}) r_2^2 \right), \quad (6.57)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{2}. \quad (6.58)$$

Después de calcular los valores promediados $D \equiv \langle D(z) \rangle$, $\gamma \equiv \langle \gamma(z) \rangle$ en la Ec. (6.38) se llega a la ecuación de Schrödinger no lineal con coeficientes constantes cuya solución exacta está dada por Ec.(6.48). La comparación directa de las soluciones numérica y variacional llevan a un buen acuerdo.

Capítulo 7

Conclusiones y comentarios finales

Se analizó la propagación axial lineal y débilmente no lineal de ondas electromagnéticas en medios con simetría helicoidal, con y sin defectos, respectivamente.

En la sección 4.2.2 se definió para los medios helicoidales puros: (1) el espacio de Hilbert de los vectores de estado para el campo electromagnético generado dentro de la muestra por las ondas incidentes; (2) las cuatro ondas propias de la estructura periódica y; (3) un producto escalar el cual representa el promedio temporal de la componente longitudinal del vector de Poynting. Con estas definiciones resulta más fácil calcular las propiedades de dispersión de muestras con cualquier número de defectos, así como, permite un planteamiento más apropiado y sistemático de la óptica no lineal en base a los modos propios lineales.

Muchas propiedades interesantes se han encontrado previamente en la literatura de manera numérica, pero una aproximación puramente numérica es de poca ayuda para su entendimiento. Los resultados analíticos y más generales aquí presentados permiten una visión más profunda a la física del problema.

En el capítulo 5 se estudió la propagación axial de un haz electromagnético cuya longitud de onda λ_0 se encuentra dentro de la banda de reflexión en una muestra con simetría helicoidal en la cual se generan un número finito n_0 de defectos de torsión.

Para uno y dos defectos de torsión se obtuvieron expresiones exactas y analíticas para la transmitancia y reflectancia mediante el cálculo de las matrices de transferencia y dispersión del plano del defecto. Se definió de manera analítica la longitud de onda $\tilde{\lambda}_d$ para la cual los modos evanescentes, en el plano del defecto, tienen una amplitud mucho mayor que los modos oscilatorios, dando lugar a un alto confinamiento de la energía en la proximidad del plano del defecto.

Se generalizaron estas cantidades para n_0 defectos de torsión: (1) fué posible escribir las matrices de transferencia y dispersión en términos de la matriz de transferencia de un solo defecto y; (2) n_0 defectos de torsión generan n_0 modos de defecto, es decir, n_0 longitudes de onda $\tilde{\lambda}_d$ para las cuales se observa un alto confinamiento de la energía alrededor de los planos del defecto.

Todos los resultados obtenidos dependen solo de tres parámetros independientes: (1) un parámetro x_a , definido en la expresión (A.3), el cual define el ancho relativo de la banda prohibida; (2) un parámetro z_a , definido también en la expresión (A.3), el cual define el ancho de las líneas de defecto y juega el mismo papel que el parámetro de anisotropía a_c y; (3) la longitud de onda reducida $\tilde{\lambda} = \lambda/p$.

La disponibilidad de láseres como generadores de ondas electromagnéticas de potencia moderada, así como el confinamiento de energía óptica alrededor de los planos de defecto estudiados en el capítulo 5, motivó a realizar un análisis que tomara en cuenta el acoplamiento entre la densidad de energía elástica del medio y la densidad de energía electromagnética. En particular, en el capítulo 6 se analizó la óptica débilmente no lineal de un paquete de ondas electromagnético que se propaga axialmente en una muestra de CLC sin defectos. Se dedujo una ecuación de amplitud la cual describe la interacción débilmente no lineal entre los cuatro paquetes de onda cuyo número de onda central está centrado alrededor de los modos electromagnéticos lineales que caracterizan la

estructura. Se mostró que, bajo ciertas aproximaciones, la ecuación de amplitud vectorial que gobierna la dinámica del sistema se puede obtener de una densidad Lagrangiana, y a partir de ésta, calcular sus cantidades conservadas usando sus simetrías y el teorema de Noether. También se mostró que el análogo a las dos primeras integrales de movimiento de la jerarquía que satisfacen la ecuación de SNL se satisfacen también para el vector de onda deducido aquí.

Se discutió la manera en que el término no lineal de la envolvente de la Ec. (6.21) es tal que existen varias soluciones exactas las cuales no presentan autoenfocamiento. Se dedujo una ecuación de SNL con coeficientes dependientes de la coordenada de propagación z bajo ciertas condiciones específicas de acoplamiento de fase y relaciones de amplitud para un paquete de ondas de dos componentes. Se encontraron de manera numérica y analítica (pero aproximada) una solución de tipo solitón oscuro la cual tiene una estructura oscilante longitudinal que, debido al balance entre la no linealidad y difracción, el efecto promedio sobre el pulso incidente es mantener su perfil tipo tangente hiperbólico conforme éste se mueve en la dirección de propagación.

Para la solución tipo solitón, se obtuvieron algunas propiedades físicas importantes tales como el índice de refracción no lineal n_2^{chol} , para el cual se encontró ser dos órdenes de magnitud más pequeño que para los nemáticos, pero cinco órdenes de magnitud más grande que los valores típicos para el $n_2^{SiO_2}$. Así, los resultados obtenidos muestran la existencia de la no linealidad grande para los cristales líquidos. Adicionalmente, se mostró que esta no linealidad grande se incrementa en ambos extremos de la banda de reflexión como una consecuencia directa del hecho que el vector de Poynting de dos de los cuatro modos propios lineales se hace cero precisamente allí, de manera que el flujo de energía se detiene y la distorsión del colestérico es la más grande, así como, la no linealidad. Cualitativamente, éste comportamiento es consistente con experimentos en donde se utiliza como medio resonante al CLC, en los cuales, la longitud de onda del haz láser de excitación y la longitud de onda de emisión de la muestra casi coinciden con los

extremos de la banda de reflexión. Por supuesto, el análisis realizado aquí, no describe la interacción del colestérico con dos haces de diferentes frecuencias, como en los sistemas reportados en los experimentos mencionados; sin embargo, los máximos de n_2^{chol} en los extremos de la banda hace plausible una mejor descripción teórica, la cual, debe ser confirmada.

Se estimó la potencia necesaria P para generar estos solitones oscuros. Se encontró que pueden generarse mediante un láser de potencia moderada del orden de $3,5W$.

Finalmente, se mostró que efectivamente el paquete de ondas generado aquí es estrecho: su ancho es $\kappa = 0,054$ alrededor del vector de onda central k_0 .

Las analogías encontradas entre las estructuras helicoidales analizadas aquí y los medios quirales homogéneos, con y sin defectos, merece algunos comentarios finales.

En el marco de referencia x, y, z girando sólidamente con los tensores $\bar{\bar{\epsilon}}$ y $\bar{\bar{\mu}}$, la ecuación de propagación del campo electromagnético dentro de la estructura helicoidal coincide con la de un medio *homogéneo*. Ya que los defectos considerados en el capítulo 5 tienen ancho cero, reduciendo el defecto a planos de discontinuidad dentro del medio, el problema se puede identificar con el problema bien conocido de propagación de ondas en un conjunto de capas homogéneas separadas por planos de discontinuidad. El medio "equivalente" es de este modo anisotrópico y quiral. El parámetro quiral en este caso es el periodo espacial p , el cual está incluido en la definición de $\tilde{\lambda} = \lambda/p$, y juega exactamente el mismo papel como el parámetro quiral k en un medio isotrópico [2].

Entonces, las ecuaciones que definen los valores y vectores propios de H son válidos también para el medio homogéneo equivalente simplemente sustituyendo p con k . La consecuencia mas sorprendente de esta analogía es debida al hecho de que una banda de reflexión puede aparecer también en medios homogéneos. El medio homogéneo

equivalente es isotrópico para sus propiedades quirales, ya que solo aparece un parámetro quiral, y anisotrópico para las otras propiedades. Esto es un caso muy inusual. Si se considera un medio que es isotrópico para todas sus propiedades, la banda de reflexión desaparece, pues sus extremos $\lambda_1 = k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ y $\lambda_2 = k\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ coinciden. Sin embargo, el punto más importante a considerar es el siguiente: en medios helicoidales p puede tener cualquier valor, mientras que en la mayoría de los medios quirales el valor real de k es tal que λ_1 y λ_2 son muy pequeños (del orden de tamaño molecular). Para tales valores de λ , la analogía podría fallar. De hecho, los modelos continuos usados en aproximaciones macroscópicas, los cuales desprecian la estructura molecular de la materia, son válidos sólo para valores de λ más grandes que el tamaño molecular. En conclusión, la posibilidad de que la teoría desarrollada aquí pudiera ser útil también para medios homogéneos, no se puede excluir, pero merece investigación adicional.

Aprovechando la analogía entre medios homogéneos y estructuras periódicas consideradas aquí, no es de sorprenderse que haya sido posible encontrar expresiones analíticas exactas para tales estructuras y que juegan un papel único entre los medios periódicos (nada similar es posible para cualquier otra estructura periódica con defectos). Esta es una buena razón para su estudio. La diferencia principal entre las ecuaciones deducidas aquí y las ecuaciones encontradas en la literatura para medios homogéneos es que en el presente trabajo se presentan soluciones dentro de la banda parcialmente prohibida, mientras que en la literatura no se ha considerado esto para medios homogéneos. Desde el punto de vista de las aplicaciones, la principal diferencia entre las estructuras helicoidales y los demás cristales $1D$ está relacionada con sus propiedades de polarización. De hecho, la presencia de un parámetro de quiralidad hace que la polarización de las ondas propias sea cercanamente circular, mientras que en la mayoría de los medios anisotrópicos, es lineal o cercanamente lineal.

Finalmente, recuérdese que los medios helicoidales se asemejan, en sus propiedades, a un medio homogéneo y admiten soluciones de ondas planas solo en el marco de

referencia en rotación. En el sistema de laboratorio las soluciones son obviamente ondas de Bloch.

Es necesario remarcar que al escribir las ecuaciones de Maxwell en la representación de Marcuvitz-Schwinger (véase Sec. 3.2), se pudo analizar de una manera más sistemática los sistemas mostrados aquí. Particularmente, fue posible obtener la ecuación y la solución general que obedece una onda electromagnética que se propaga axialmente en un medio con simetría helicoidal, el cual es al mismo tiempo, dieléctrico y magnético (véase Sec. 4.2). Este resultado permitió a su vez plantear sistemas más complejos y encontrar sus soluciones, como los mostrados en los capítulos 5 y 6. Como es de esperarse, variantes y extensiones a estos sistemas pueden ser abordados y analizados en forma análoga a la presentada en esta investigación. En realidad, la dinámica de ondas electromagnéticas que se propagan en la dirección perpendicular a las placas que limitan a un medio bianisotrópico en general, se pueden abordar usando este formalismo.

Los modelos analizados en la presente tesis no toman en cuenta explícitamente los efectos inevitables de absorción lineal y no lineal. Además se ignoraron los efectos transitorios inducidos por la reorientación del campo director, así como, el acoplamiento hidrodinámico resultante de estos efectos. Como ya se comentó, el formalismo presentado aquí puede servir como punto de partida para un análisis más profundo en el cual se requiriera tomar en cuenta todas estas consideraciones.

La óptica no lineal de una muestra helicoidal con defectos de torsión es una extensión directa de los modelos analizados en los capítulos 5 y 6 que puede ser estudiada en detalle y la cual seguramente proporcionará resultados muy interesantes con posibles aplicaciones en dispositivos electrónicos.

Aunque se ha puesto especial énfasis en la utilidad de obtener soluciones analíticas para los modelos investigados, no se descarta un análisis puramente numérico el cual

permita abordar y resolver problemas más complejos. Uno ejemplo de ello es la posibilidad de analizar la óptica no lineal de un sistema helicoidal con y sin defectos para propagación oblicua, así como la solución completa del sistema presentado en el capítulo 6 sin la aproximación de acoplamiento débilmente no lineal. Obviamente, este tipo de análisis proporcionará el resultado correcto, aunque menos elegante e ilustrativo que un resultado puramente analítico.

Se espera que el análisis teórico de los sistemas presentados en este trabajo sirva como motivación para la fabricación de dichos modelos así como el diseño y fabricación de nuevos dispositivos tecnológicos basados en ellos, tales como memorias de cristal líquido colestérico o bien láseres de bajo umbral de activación basados en sistemas helicoidales con defectos de torsión.

Apéndice A

Parámetros y leyes de escalamiento

Los parámetros que definen la propagación de una onda electromagnética en una estructura helicoidal sin defectos son $\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}, \mu_{\parallel}, \mu_{\perp}, p$ y λ . Nótese que en la presente tesis se definió una nueva cantidad: la longitud de onda reducida $\tilde{\lambda} = \lambda/p$ la cual siempre aparece en esta forma. Este hecho implica que las propiedades discutidas en el Cap. (5), no dependen separadamente de los parámetros λ y p , sino de la razón entre ellos λ/p : un cambio en p simplemente *reescala* las longitudes de onda que definen el ancho de la banda prohibida y las frecuencias de defecto. Es interesante explorar otras posibles *leyes de escalamiento*. Para tal fin, se reescriben todas las ecuaciones encontradas previamente usando un nuevo conjunto de parámetros:

$$\tilde{\lambda}_1 = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}}; \quad \tilde{\lambda}_2 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}}; \quad Z_1 = \sqrt{\mu_{\parallel}/\varepsilon_{\parallel}}; \quad Z_2 = \sqrt{\mu_{\perp}/\varepsilon_{\perp}}; \quad (\text{A.1})$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_m &= (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2)/2; & \tilde{\lambda}_a &= (\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)/2; \\ Z_m &= (Z_1 + Z_2)/2; & Z_a &= (Z_2 - Z_1)/2; \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

en lugar de los parámetros del material $\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}, \mu_{\parallel}, \mu_{\perp}$. Los resultados encontrados pueden resumirse como sigue.

i) Haciendo $x = \tilde{\lambda}/\tilde{\lambda}_m$ la ecuación que define los modos de defecto y sus propiedades dependen solo de los cocientes

$$x_a = \tilde{\lambda}_a / \tilde{\lambda}_m; \quad z_a = Z_a / Z_m. \quad (\text{A.3})$$

Esto es, solo dos de los cuatro parámetros del material, son independientes, y por lo tanto se tienen otras dos leyes de escalamiento.

El parámetro x_a define el ancho relativo de la banda prohibida, el parámetro z_a define el ancho de las líneas de defecto y juega el mismo papel que el parámetro de anisotropía a_c , el cual puede ser escrito como

$$a_c = 2 \frac{1 - x_a^2}{1 - z_a^2} \tilde{\lambda}_m^2 z_a. \quad (\text{A.4})$$

ii) Los parámetros Z_1 y Z_2 juegan el papel de impedancias de los modos 1^\pm . De hecho, en el extremo de la banda prohibida $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1$, la razón $|\mathbf{e}_1| / |\mathbf{h}_1|$ es igual a $Z_1 = \sqrt{\mu_{\parallel} / \varepsilon_{\parallel}}$, ya que ambos vectores, \mathbf{e}_1 and \mathbf{h}_1 son paralelos a x . Lo mismo ocurre en el otro extremo de la banda prohibida, con el subíndice 2 en lugar de 1. Cuando $a_c = z_a = 0$, $Z_1 = Z_2$ y $|\mathbf{e}_1| / |\mathbf{h}_1| = |\mathbf{e}_2| / |\mathbf{h}_2|$, un hecho que ayuda a entender el porque para $a_c = 0$, los vectores \mathbf{e} y \mathbf{h} giran rígidamente dentro de la banda prohibida, manteniéndose paralelos entre ellos.

iii) Cuando $a_c = z_a = 0$, la cantidad r_5 que aparece en las matrices R_S y U , Ecs. (5.9) y (5.10), respectivamente, es idénticamente cero. Si ahora se escriben los modos 1^\pm , 2^\pm en el orden 1^+ , 1^- , 2^+ , 2^- la matriz de transferencia U del plano del defecto, se simplifica como:

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\begin{aligned} U_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos \theta - \begin{pmatrix} -r_1 & -r_3 \\ r_3 & r_1 \end{pmatrix} \sin \theta, \\ U_{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos \theta - i \begin{pmatrix} r_2 & r_4 \\ -r_4 & -r_2 \end{pmatrix} \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Los modos 1^\pm y 2^\pm se desacoplan y los modos de defecto combinan solo las componentes localizadas 1^\pm . Así, el modo de defecto se puede definir usando matrices de 2×2 , en lugar de matrices de 4×4 . Un hecho que ayuda enormemente a simplificar los cálculos.

Apéndice B

Coeficientes de la ecuación de amplitud fuera de la banda de reflexión

Aquí se muestran las expresiones explícitas de las matrices M_t y M_{NL} involucradas en la ecuación vectorial de la envolvente dada por Ec. (6.21). Insertando U , la matriz de vectores propios T , M_1 y D_t dadas por Ecs. (3.48), (4.45), (6.14) y (3.33), respectivamente, en las expresiones $M_t = T^\dagger \cdot U^{-1} \cdot D_t \cdot \gamma_{zz}^{-1} \cdot D_t^\dagger \cdot U \cdot T$ y $M_{NL} = T^\dagger \cdot U^{-1} \cdot M_1 \cdot U \cdot T$, se llega a

$$M_t = M_{L1}\partial_{xx} + M_{L2}\partial_{yy} + M_{L3}\partial_{xy}, \quad (\text{B.1})$$

en donde las matrices Hermitianas M_{L1} , M_{L2} and M_{L3} están definidas como

$$M_{L1} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{13} & F_{15} & F_{16} \\ F_{13} & F_{11} & F_{16} & F_{15} \\ F_{15}^* & F_{16}^* & F_{12} & F_{14} \\ F_{16}^* & F_{15}^* & F_{14} & F_{12} \end{pmatrix}, \quad M_{L2} = \begin{pmatrix} F_{21} & F_{23} & F_{25} & F_{26} \\ F_{23} & F_{21} & F_{26} & F_{25} \\ F_{25}^* & F_{26}^* & F_{22} & F_{24} \\ F_{26}^* & F_{25}^* & F_{24} & F_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$M_{L3} = \begin{pmatrix} F_{31} & F_{33} & F_{35} & F_{36} \\ F_{33} & F_{31} & F_{36} & F_{35} \\ F_{35}^* & F_{36}^* & F_{32} & F_{34} \\ F_{36}^* & F_{35}^* & F_{34} & F_{32} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M_{NL} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m_1 & -m_2 \\ 0 & 0 & -m_2 & -m_1 \\ m_1 & m_2 & 0 & 0 \\ m_2 & m_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

Aquí las componentes m_i y F_{ij} de estas matrices están dadas por

$$m_{1,2} \equiv \frac{\tilde{q}(u_1 - u_2) \left(\pm 4n_1 n_2 \epsilon \epsilon_a + \left(4\tilde{q}^2 \epsilon + \epsilon_{\parallel} (u_1 + u_2 - 4\epsilon_{\parallel} \mu) \right) \mu_a \right)}{r_1 r_2}, \quad (\text{B.4})$$

**APÉNDICE B. COEFICIENTES DE LA ECUACIÓN DE AMPLITUD FUERA
DE LA BANDA DE REFLEXIÓN**

$$\begin{aligned}
 F_{1j} &\equiv \frac{(c_{j2} \cos^2 qz + c_{j1} \sin^2 qz)}{h}, \\
 F_{2j} &\equiv \frac{(c_{j1} \cos^2 qz + c_{j2} \sin^2 qz)}{h}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \\
 F_{3j} &\equiv \frac{(c_{j3} \cos qz \sin qz)}{h}, \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{1k} &\equiv \frac{c_{k2} \cos^2 qz + c_{k1} \sin^2 qz - ic_{k3} \cos qz \sin qz}{h_3}, \\
 F_{2k} &\equiv \frac{c_{k1} \cos^2 qz + c_{k2} \sin^2 qz + ic_{k3} \cos qz \sin qz}{h_3}, \quad k = 5, 6 \\
 F_{3k} &\equiv \frac{c_{k4} \cos qz \sin qz - ic_{k3}(\sin^2 qz - \cos^2 qz)}{h_3} \quad (B.6)
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 c_{(1,2)1} &\equiv 16n_{1,2}^2 \tilde{q}^2 \epsilon^2 \epsilon_{\perp} + (4\tilde{q}^2 \epsilon + u_{1,2} \epsilon_{\parallel}) \mu_{\perp}, \\
 c_{(1,2)2} &\equiv n_{1,2}^2 u_{1,2}^2 \epsilon_{\perp} + \tilde{q}^2 (u_{2,1} - 4\epsilon_{\parallel} \mu)^2 \mu_{\perp}, \\
 c_{(1,2)3} &\equiv 2n_{1,2}^2 (u_{1,2}^2 - 16\tilde{q}^2 \epsilon^2) \epsilon_{\perp} \\
 &\quad - 2(16\tilde{q}^4 \epsilon^2 + u_{1,2}^2 \epsilon_{\parallel}^2 - \tilde{q}^2 (u_{2,1}^2 - 8u_{1,2} \epsilon \epsilon_{\parallel} - 8u_{2,1} \epsilon_{\parallel} \mu + 16\epsilon_{\parallel}^2 \mu^2)) \mu_{\perp}, \\
 c_{(3,4)1} &\equiv -16n_{1,2}^2 \tilde{q}^2 \epsilon^2 \epsilon_{\perp} + (4\tilde{q}^2 \epsilon + u_{1,2} \epsilon_{\parallel}) \mu_{\perp}, \\
 c_{(3,4)2} &\equiv -n_{1,2}^2 u_{1,2}^2 \epsilon_{\perp} + \tilde{q}^2 (u_{2,1} - 4\epsilon_{\parallel} \mu)^2 \mu_{\perp}, \\
 c_{(3,4)3} &\equiv -2n_{1,2}^2 (u_{1,2}^2 - 16\tilde{q}^2 \epsilon^2) \epsilon_{\perp} \\
 &\quad - 2(16\tilde{q}^4 \epsilon^2 + u_{1,2}^2 \epsilon_{\parallel}^2 - \tilde{q}^2 (u_{2,1}^2 - 8u_{1,2} \epsilon \epsilon_{\parallel} - 8u_{2,1} \epsilon_{\parallel} \mu + 16\epsilon_{\parallel}^2 \mu^2)) \mu_{\perp}, \\
 c_{(5,6)1} &\equiv \pm 16n_1 n_2 \tilde{q}^2 \epsilon^2 \epsilon_{\perp} + (4\tilde{q}^2 \epsilon + u_1 \epsilon_{\parallel})(4\tilde{q}^2 \epsilon + u_2 \epsilon_{\parallel}) \mu_{\perp}, \\
 c_{(5,6)2} &\equiv \pm n_1 n_2 u_1 u_2 \epsilon_{\perp} + \tilde{q}^2 (u_1 - 4\epsilon_{\parallel} \mu)(u_2 - 4\epsilon_{\parallel} \mu) \mu_{\perp}, \\
 c_{(5,6)3} &\equiv \tilde{q}^2 (u_1 - u_2) (\pm 4n_1 n_2 \epsilon \epsilon_{\perp} + (4\tilde{q}^2 \epsilon + \epsilon_{\parallel} (u_1 + u_2 - 4\epsilon_{\parallel} \mu)) \mu_{\perp}), \\
 c_{(5,6)4} &\equiv \pm 2n_1 n_2 (u_1 u_2 - 16\tilde{q}^2 \epsilon^2) \epsilon_{\perp} \\
 &\quad - 2(16\tilde{q}^4 \epsilon^2 + u_1 u_2 \epsilon_{\parallel}^2) \mu_{\perp} \\
 &\quad - 2\tilde{q}^2 (4\epsilon_{\parallel} (-4\epsilon_{\parallel} \mu^2 + u_2 (\epsilon + \mu)) + u_1 (-u_2 + 4\epsilon_{\parallel} (\epsilon + \mu))) \mu_{\perp}, \quad (B.7)
 \end{aligned}$$

**APÉNDICE B. COEFICIENTES DE LA ECUACIÓN DE AMPLITUD FUERA
DE LA BANDA DE REFLEXIÓN**

$$h = h_1 \text{ si } j \text{ impar}$$

$$h = h_2 \text{ si } j \text{ par}$$

$$h_1 \equiv k_0^2 r_1^2 \epsilon_{\perp} \mu_{\perp}, \quad h_2 \equiv k_0^2 r_2^2 \epsilon_{\perp} \mu_{\perp}, \quad h_3 \equiv k_0^2 r_1 r_2 \epsilon_{\perp} \mu_{\perp} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathfrak{N}_{\text{mín}} = \frac{(\epsilon_{\parallel} \mu_{\parallel} - \epsilon_{\perp} \mu_{\perp})^{1/2}}{(\epsilon_{\perp} \mu_{\perp})^{1/4}} \frac{\mu_a^2}{t^2} (\epsilon_{\perp} \mu_{\perp} - \epsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}) (a_1 + \epsilon_{\perp} \mu_{\perp}),$$

$$\mathfrak{N}_{\text{máx}} = \frac{(\epsilon_{\parallel} \mu_{\parallel} - \epsilon_{\perp} \mu_{\perp})^{1/2}}{(\epsilon_{\parallel} \mu_{\parallel})^{1/4}} \frac{\epsilon_{\parallel}^2 \epsilon_a^2}{2^{5/2} \epsilon^2},$$

donde $t = 2^{5/4} \left(2\epsilon_{\perp} \mu^2 + \epsilon \mu_{\perp} (\epsilon_{\parallel} \mu_{\parallel} - \epsilon_{\perp} (\mu_{\perp} + 2\mu)) \right)^{1/2}$.

**APÉNDICE B. COEFICIENTES DE LA ECUACIÓN DE AMPLITUD FUERA
DE LA BANDA DE REFLEXIÓN**

Apéndice C

Coeficientes de la ecuación de amplitud dentro de la banda de reflexión

Al igual que en el apéndice B, aquí se escriben explícitamente las expresiones que vienen involucradas en la Ec. (6.21), pero ahora tomando en cuenta que $n_1^\pm \rightarrow \pm in_1$. Insertando U , la matriz de vectores propios T , M_1 y D_t dadas por Ecs. (3.48), (4.45), (6.14) y (3.33), respectivamente, en las expresiones $M_t = T^\dagger \cdot U^{-1} \cdot D_t \cdot \gamma_{zz}^{-1} \cdot D_t^\dagger \cdot U \cdot T$ y $M_{NL} = T^\dagger \cdot U^{-1} \cdot M_1 \cdot U \cdot T$, se llega a

$$M_t = M_{L1} \partial_{xx} + M_{L2} \partial_{yy} + M_{L3} \partial_{xy}, \quad (\text{C.1})$$

donde las matrices hermitianas M_{L1} , M_{L2} y M_{L3} están definidas por

$$M_{L1} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{13} & F_{15} & F_{16} \\ F_{13} & F_{11} & F_{16} & F_{15} \\ F_{15}^* & F_{16}^* & F_{12} & F_{14} \\ F_{16}^* & F_{15}^* & F_{14} & F_{12} \end{pmatrix}, \quad M_{L2} = \begin{pmatrix} F_{21} & F_{23} & F_{25} & F_{26} \\ F_{23} & F_{21} & F_{26} & F_{25} \\ F_{25}^* & F_{26}^* & F_{22} & F_{24} \\ F_{26}^* & F_{25}^* & F_{24} & F_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$M_{L3} = \begin{pmatrix} F_{31} & F_{33} & F_{35} & F_{36} \\ F_{33} & F_{31} & F_{36} & F_{35} \\ F_{35}^* & F_{36}^* & F_{32} & F_{34} \\ F_{36}^* & F_{35}^* & F_{34} & F_{32} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M_{NL} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m_1 & -m_2 \\ 0 & 0 & -m_2 & -m_1 \\ m_1^* & m_2^* & 0 & 0 \\ m_2^* & m_1^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

Aquí las componentes m_i y F_{ij} de estas matrices están dadas por

$$m_{1,2} \equiv \frac{\tilde{q}(u_1 - u_2) \left(\mp i 4 n_1 n_2 \epsilon \epsilon_a + \left(4 \tilde{q}^2 \epsilon + \epsilon_{\parallel} (u_1 + u_2 - 4 \epsilon_{\parallel} \mu) \right) \mu_a \right)}{r_1 r_2}, \quad (\text{C.4})$$

**APÉNDICE C. COEFICIENTES DE LA ECUACIÓN DE AMPLITUD DENTRO
DE LA BANDA DE REFLEXIÓN**

$$\begin{aligned}
 F_{1j} &\equiv \frac{(c_{j2} \cos^2 qz + c_{j1} \sin^2 qz)}{h}, \\
 F_{2j} &\equiv \frac{(c_{j1} \cos^2 qz + c_{j2} \sin^2 qz)}{h}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \\
 F_{3j} &\equiv \frac{(c_{j3} \cos qz \sin qz)}{h},
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
 F_{1k} &\equiv \frac{c_{k2} \cos^2 qz + c_{k1} \sin^2 qz - c_{k3} \cos qz \sin qz}{h_3}, \\
 F_{2k} &\equiv \frac{c_{k1} \cos^2 qz + c_{k2} \sin^2 qz + c_{k3} \cos qz \sin qz}{h_3}, \quad k = 5, 6 \\
 F_{3k} &\equiv \frac{-c_{k4} \cos qz \sin qz - c_{k3}(\sin^2 qz - \cos^2 qz)}{h_3}
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

con

$$\begin{aligned}
 c_{(1,2)1} &\equiv 16n_{1,2}^2 \tilde{q}^2 \epsilon^2 \epsilon_{\perp} + (4\tilde{q}^2 \epsilon + u_{1,2} \epsilon_{\parallel}) \mu_{\perp}, \\
 c_{(1,2)2} &\equiv n_{1,2}^2 u_{1,2}^2 \epsilon_{\perp} + \tilde{q}^2 (u_{2,1} - 4\epsilon_{\parallel} \mu)^2 \mu_{\perp}, \\
 c_{(1,2)3} &\equiv 2n_{1,2}^2 (u_{1,2}^2 - 16\tilde{q}^2 \epsilon^2) \epsilon_{\perp} \\
 &\quad - 2 \left(16\tilde{q}^4 \epsilon^2 + u_{1,2}^2 \epsilon_{\parallel}^2 - \tilde{q}^2 (u_{2,1}^2 - 8u_{1,2} \epsilon \epsilon_{\parallel} - 8u_{2,1} \epsilon_{\parallel} \mu + 16\epsilon_{\parallel}^2 \mu^2) \right) \mu_{\perp}, \\
 c_{(3,4)1} &\equiv -16n_{1,2}^2 \tilde{q}^2 \epsilon^2 \epsilon_{\perp} + (4\tilde{q}^2 \epsilon + u_{1,2} \epsilon_{\parallel}) \mu_{\perp}, \\
 c_{(3,4)2} &\equiv -n_{1,2}^2 u_{1,2}^2 \epsilon_{\perp} + \tilde{q}^2 (u_{2,1} - 4\epsilon_{\parallel} \mu)^2 \mu_{\perp}, \\
 c_{(3,4)3} &\equiv -2n_{1,2}^2 (u_{1,2}^2 - 16\tilde{q}^2 \epsilon^2) \epsilon_{\perp} \\
 &\quad - 2 \left(16\tilde{q}^4 \epsilon^2 + u_{1,2}^2 \epsilon_{\parallel}^2 - \tilde{q}^2 (u_{2,1}^2 - 8u_{1,2} \epsilon \epsilon_{\parallel} - 8u_{2,1} \epsilon_{\parallel} \mu + 16\epsilon_{\parallel}^2 \mu^2) \right) \mu_{\perp}, \\
 c_{(5,6)1} &\equiv \mp 16i n_1 n_2 \tilde{q}^2 \epsilon^2 \epsilon_{\perp} + (4\tilde{q}^2 \epsilon + u_1 \epsilon_{\parallel})(4\tilde{q}^2 \epsilon + u_2 \epsilon_{\parallel}) \mu_{\perp}, \\
 c_{(5,6)2} &\equiv \mp i n_1 n_2 u_1 u_2 \epsilon_{\perp} + \tilde{q}^2 (u_1 - 4\epsilon_{\parallel} \mu)(u_2 - 4\epsilon_{\parallel} \mu) \mu_{\perp}, \\
 c_{(5,6)3} &\equiv \tilde{q}^2 (u_1 - u_2) \left(\pm 4n_1 n_2 \epsilon \epsilon_{\perp} + i \left(4\tilde{q}^2 \epsilon + \epsilon_{\parallel} (u_1 + u_2 - 4\epsilon_{\parallel} \mu) \right) \mu_{\perp} \right), \\
 c_{(5,6)4} &\equiv \pm 2i n_1 n_2 (u_1 u_2 - 16\tilde{q}^2 \epsilon^2) \epsilon_{\perp} \\
 &\quad + 2 \left(16\tilde{q}^4 \epsilon^2 + u_1 u_2 \epsilon_{\parallel}^2 + \tilde{q}^2 \left(4\epsilon_{\parallel} \left(-4\epsilon_{\parallel} \mu^2 + u_2 (\epsilon + \mu) \right) + u_1 \left(-u_2 + 4\epsilon_{\parallel} (\epsilon + \mu) \right) \right) \right) \mu_{\perp},
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

**APÉNDICE C. COEFICIENTES DE LA ECUACIÓN DE AMPLITUD DENTRO
DE LA BANDA DE REFLEXIÓN**

$$h = h_1 \text{ si } j \text{ impar}$$

$$h = h_2 \text{ si } j \text{ par}$$

$$h_1 \equiv k_0^2 r_1^2 \epsilon_{\perp} \mu_{\perp}, \quad h_2 \equiv k_0^2 r_2^2 \epsilon_{\perp} \mu_{\perp}, \quad h_3 \equiv k_0^2 r_1 r_2 \epsilon_{\perp} \mu_{\perp} \quad (\text{C.8})$$

**APÉNDICE C. COEFICIENTES DE LA ECUACIÓN DE AMPLITUD DENTRO
DE LA BANDA DE REFLEXIÓN**

Apéndice D

Método de dos pasos

Considérese el problema general de condiciones iniciales descrito por la ecuación de tipo Schrödinger no lineal

$$\partial_z A = iLA + iN(z)A, \quad (\text{D.1})$$

en donde $A = A(x, z)$, z la coordenada de propagación y x la coordenada transversal. L es un operador lineal que depende de la coordenada x y $N(z)$ es un operador no lineal que depende de la solución A . Si se integra formalmente esta ecuación sobre un pequeño intervalo espacial Δz se obtiene

$$A(x, \Delta z) = \left(\text{Exp}[iL\Delta z + i \int_0^{\Delta z} N(z')dz'] \right) A(x, 0). \quad (\text{D.2})$$

La expresión anterior permite propagar la solución en un intervalo Δz , sin embargo su evaluación es en general complicada, por lo que se aproxima el operador exponencial de la siguiente manera [22]

$$e^{i(B+C)} \approx e^{iB/2} e^{iC} e^{iB/2},$$

en donde se puede identificar $B = L\Delta z$ y $C = \int_0^{\Delta z} N(z')dz'$. Con esto se logra dividir el operador compuesto en un conjunto de operaciones exponenciales simples que se pueden aplicar sobre la función $A(x, 0)$ de manera secuencial con un error aproximado del orden de $(\Delta z)^3$ con respecto al operador original.

Nótese que el operador C requiere implícitamente conocer la solución de A al paso Δz . Sin embargo, en el caso especial cuando $N(z) = N(|A|^2)$, N es una constante de movimiento con respecto a la coordenada de propagación z y por lo tanto se puede evaluar directamente el operador no lineal como $C = N(|A(x, 0)|^2)\Delta z$. Adicionalmente, si $N(z) = N(f(z)|A|^2)$, con $f(z)$ una función periódica, entonces, la recta que representa la constante de movimiento para $N(z) = N(|A|^2)$ tendrá pequeñas oscilaciones alrededor de ella cuando tengamos involucrada la dependencia periódica en N y en consecuencia seguirá cumpliéndose, en promedio, la característica de constante de movimiento para $N(z) = N(f(z)|A|^2)$. De esta manera, el operador no lineal se puede escribir simplemente como $C = N(f(z)|A(x, 0)|^2)\Delta z$. Recuérdese que la Ec. (6.38) tiene coeficientes que dependen de funciones periódicas.

Ahora se escribe de manera explícita el operador lineal $L = \gamma(z)\partial^2/\partial x^2$, con $\gamma(z)$ un coeficiente que depende exclusivamente de la coordenada longitudinal z ; justo como en la Ec. (6.38). Ecuaciones en las que intervienen operadores lineales de este tipo se resuelven fácilmente usando la transformada de Fourier FT . En este caso, la transformada de Fourier del operador L es simplemente $-\gamma(z)k^2$. En otras palabras, en el espacio de Fourier, el efecto del operador exponencial es simplemente el de multiplicar por un escalar $e^{-i\gamma(z)k^2\Delta z/2}$. Nótese además que, la dependencia de γ de la coordenada longitudinal z no afecta la transformada de Fourier, la cual se realiza únicamente sobre coordenada transversal x . El regreso al espacio real se obtiene mediante una transformada de Fourier inversa IFT . Debido a que se calculará numéricamente la transformada de Fourier a partir de valores discretos es conveniente usar la transformada de Fourier rápida FFT cuya eficiencia es máxima cuando la cantidad de datos involucrados son exactamente 2^n , con n un número entero.

Un algoritmo para propagar un pulso sobre un intervalo espacial L se presenta a continuación.

Paso 1. Se define el pulso inicial en $z = 0$ como $A(x, 0)$ que sirva como arreglo de valores discretos para iniciar la propagación espacial; comúnmente se usa una función gaussiana o secante hiperbólica, ya que son las soluciones analíticas de la ecuación de

SNL.

Paso 2. Se propaga espacialmente medio paso $\Delta z/2$, es decir, se aplica la *FFT* al pulso inicial $A(x, 0)$, enseguida se multiplica por el factor exponencial $e^{-i\gamma(z)k^2\Delta z/2}$ y después se aplica la transformada inversa.

Paso 3. Se multiplica por el operador exponencial no lineal $e^{iN(f(z)|A(x,0)|^2)\Delta z}$ a los datos.

Paso 4. Se propaga espacialmente un paso completo Δz , es decir, se aplica la *FFT* a los datos, enseguida se multiplica por el factor exponencial $e^{-i\gamma(z)k^2\Delta z}$ y después se aplica la transformada inversa.

Paso 5. Se repite desde el *paso 3* hasta que el punto $L - \Delta z/2$ sea alcanzado, entonces se pasa al *paso 6*.

Paso 6. Se propaga espacialmente medio paso $\Delta z/2$, esto es, se aplica la *FFT* a los datos obtenidos, enseguida se multiplica por el factor exponencial $e^{-i\gamma(z)k^2\Delta z/2}$ y finalmente se invierte la transformada de Fourier, alcanzando el otro extremo del intervalo en $z = L$.

La propagación en un paso completo Δz se resume simbólicamente como

$$A(x, \Delta z) = FFT^{-1}[e^{-i\gamma k^2\Delta z/2} FFT[e^{iN(f(z)|A(x,0)|^2)\Delta z} FFT^{-1}[e^{-i\gamma k^2\Delta z/2} FFT[A(x, 0)]]]]. \quad (D.3)$$

Nótese que el algoritmo aquí presentado y la expresión dada por (D.3) son procedimientos completamente equivalentes. En efecto, si se aplica el algoritmo a un solo paso Δz , se sigue estrictamente el procedimiento dado, excepto el *paso 4*, y en éste caso se comprueba directamente la equivalencia. Por otro lado, si se desea propagar mas allá de un paso Δz , el paso intermedio descrito por el *paso 4* se justifica de la siguiente manera: enseguida del *paso 3* se aplica la *FFT* a los datos, luego se multiplica por el factor exponencial $e^{-i\gamma(z)k^2\Delta z/2}$ y se aplica la *IFFT*. Enseguida se comienza en el *paso 2*, es decir, se aplica nuevamente la *FFT*, se multiplica por el factor exponencial $e^{-i\gamma(z)k^2\Delta z/2}$ y se aplica la *IFFT*. Finalmente se realiza el *paso 3*. Lo anterior se representa como

$$e^{iN(f(z)|A(x,0)|^2)\Delta z} FFT^{-1}[e^{-i\gamma(z)k^2\Delta z/2} FFT[FFT^{-1}[e^{-i\gamma(z)k^2\Delta z/2} FFT[\dots]]]], \quad (D.4)$$

en donde [...] indica que el arreglo de datos están en el *paso 3*. Nótese que en la expresión anterior la transformada inversa y la transformada directa se anulan, con lo cual se puede escribir a (D.4) de manera más compacta

$$e^{iN(f(z)|A(x,0)|^2)\Delta z} FFT^{-1}[e^{-i\gamma(z)k^2\Delta z} FFT[\dots]],$$

de donde se sigue inmediatamente la justificación del *paso 4*.

En el caso especial cuando el coeficiente que multiplica al término no lineal de la Ec. (6.38) es constante, se ha demostrado que este algoritmo proporciona resultados satisfactorios con 2^7 ó 2^8 datos.

Bibliografía

- [1] J. B. Pendry, Phys. Rev. Lett., **85** 3966 (2000).
- [2] I. V. Lindel, *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media*, (Artech House, Boston USA, 1994).
- [3] E. Hecht y A. Zajac, *Optica*, (Addison-Wesley Iberoamericana, Delaware USA, 1986).
- [4] H. de Vries, Acta Crystallogr. **4**, 219 (1951).
- [5] E. I. Kats, Soviet Physics JETP, **32** 5, 1004 (1971).
- [6] C. G. Avendaño, S. Ponti, J. A. Reyes y C. Oldano, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 8821-8840 (2005).
- [7] J. J. Hodgkinson, Q. H. Wu, K. E. Thorn, A. Lakhtakia y M. W. McCall, *Opt. Commun.* **184**, 57 (2000).
- [8] M. Becchi, S. Ponti, J. A. Reyes y C. Oldano, Phys. Rev. B **70**, 033103 (2004).
- [9] V. I. Kopp y A. Z. Genack, Phys. Rev. Lett. **89**, 33901 (2002).
- [10] V. I. Kopp, P. V. Shibaev, R. Bose y A. Z. Genack, Proceedings of SPIE **4655**, 141 (2002).
- [11] F. Wang y A. Lakhtakia, Opt. Commun. **215**, 79 (2003).
- [12] J. Schmidtke y W. Stille, Eur. Phys. J. E **12**, 553 (2003).

- [13] C. Oldano, Phys. Rev. Lett. **91**, 259401 (2003).
- [14] V. I. Kopp y A. Z. Genack, Phys. Rev. Lett. **91**, 259402 (2003).
- [15] A. Lakhtakia, Sensors and Actuators, A **80**, 216 (2000).
- [16] J. Schmidtke, W. Stille y H. Finkelmann, Phys. Rev. Lett. **90**, 83902 (2003).
- [17] M. Ozaki, R. Ozaki, T. Matsui y K. Yoshino, Jpn J. Appl. Phys, Part 2 **42**, L472 (2003).
- [18] M. H. Song, K. C. Shin, B. Park, Y. Takanishi, K. Ishikawa, J. Watanabe, S. Nishimura, T. Toyooka, Z. G. Zhu, T. M. Swager y H. Takezoe, Science and technology of Advanced Materials **5**(4), 437 (2004).
- [19] S. F. Nagle, A. Lakhtakia y W. J. Thompson, J. Acoust. Soc. Am. **97**, 42 (1995).
- [20] C. Oldano y S. Ponti, Phys. Rev. E **63**, 011703 (2000).
- [21] C. Oldano, J. A. Reyes, S. Ponti y Phys. Rev. E, **67**, 056624 (2003).
- [22] A. C. Newell, *Nonlinear Optics*, (Addison-Wesley Publishing Company, California USA, 1992).
- [23] I. C. Khoo y S. T. Wu, *Optics and Nonlinear Optics of Liquid Crystals*, (Addison-Wesley, New York USA, 1992).
- [24] R. K. Dodd, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, (Academic Press, Great Britain, 1988).
- [25] J. Fujioka, *NLS una introducción a la ecuación no lineal de Schrödinger*, (FENOMECA, México D. F., 2003).
- [26] L. Lam y J. Prost, *Solitons in Liquid Crystals*, (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [27] N. V. Tabiryan, A. V. Sukhov and B. Ya. Zeldovich, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **136**, 1 (1986); I. C. Khoo, Prog. Opt **26**, 108 (1988).

- [28] I. C. Khoo y H. Li, Appl. Phys. B: Lasers Opt. **59**, 573 (1993).
- [29] C. G. Avendaño y J. A. Reyes, Phys. Rev. E **70** 061701 (2004).
- [30] P. J. Collings, *Liquid Crystals*, (Princeton University Press, New Jersey USA, 1990).
- [31] F. Reintzer, Monatsheft fur Chemie **2**, 421 (1888).
- [32] O. Lehmann, Z. Krist. **18**, 464 (1890).
- [33] J. Fergason, Scient. Am. **211**, 77 (1964).
- [34] J. Fergason, Mol. Cryst. **1**, 309 (1966).
- [35] P. G. de Gennes, *The Physics of Liquid Crystals*, (Oxford University Press, Oxford USA, 1993).
- [36] S. Chandrasekhar, *Liquid Crystals*, (Cambridge University Press, Cambridge USA, 1977).
- [37] P. M. Chaikin and T. Lubensky, *Principles of condensed matter physics*, (Cambridge University Press, Cambridge USA, 1995).
- [38] G. Friedel, Anns. Phys. **18**, 273 (1922).
- [39] J. Fergason, *Liquid Crystals, Proceedings of the 2nd. Kent Conference* (edit. G. Brown, G. Dienes y M. Labes, p. 89, Gordon and Breach, New York, 1966).
- [40] U. Kopp, Prakt. Metallogr. **9**, 370 (1972).
- [41] M. Gautherie, Phys. (Fr.) **30**, (Suppl. C4) 122 (1969).
- [42] R. Cano y P. Chatelain, Acad. Sci. Paris **B259**, 252 (1964).
- [43] G. P. Ceaser y M. B. Dunn, Chem. Phys. Letters, **8**, 425 (1971).
- [44] H. Baessler y M. Labes, J. Chem. Phys. **52**, 631 (1970); J. Adams y W. Haas, Mol. Cryst. Liquid Cryst. **15**, 27 (1971).

- [45] J. Adams, W. Hass y J. Wysocki, Phys. Rev. Lett. **22**, 92 (1969).
- [46] J. Adams, W. Hass y J. Wysocki, J. Mol. Cryst. Liq. Cryst. **7**, 371 (1969).
- [47] V. K. Frederiks y V. Zolina, J. R. F. Kharkov Phys. **62**, 457 (1969); V.N. Tsvetkov y A. Sosnovskii, Acta Phys. Chim. URSS **18**, 358 (1943).
- [48] E. Sackmann, S. Meiboom y L. C. Snyder, J. Am. Chem. Soc. **89**, 5892 (1967).
- [49] J. Wysocki, J. Adams y W. Haas, Phys. Rev. Lett. **20**, 1025 (1968); **21**, 1791 (1968).
- [50] P. G. de Gennes, Solid State Commun. **6**, 163 (1968).
- [51] R. B. Meyer, Appl. Phys. Lett. **14**, 208 (1969).
- [52] W. Helfrich, Appl. Phys. Lett. **17**, 531 (1970).
- [53] J. P. Hurault, J. Chem. Phys. **59**, 2068 (1973).
- [54] R. Williams, J. Chem. Phys. **39**, 384 (1963); G.H. Hellmeier, J. Zanoni y L. Barton, Proc. Inst. Elect. Electron. Engrs. **56**, 1162 (1968); J. Van Raulte, Proc. Inst. Elect. Electro. Engrs. **56**, 2146 (1968).
- [55] G. Friedel, C.r. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris, **180**, 269 (1925).
- [56] T. R. Taylor, Ferguson J. y Arora S.L., Phys. Rev. Lett. **24**, 359 (1970); **25**, 722 (1970).
- [57] C. W. Oseen, Trans. Faraday Soc. **29**, 883 (1933).
- [58] H. Zocher, Trans. Faraday Soc. **29**, 945 (1933).
- [59] F. C. Frank, Discuss. Faraday Soc. **25**, 19 (1958).
- [60] J. L. Ericksen, Archs. Ration. Mech. Analysis **23**, 266 (1966).
- [61] V. Svetkov, Acta Phys. Chim. URSS **6**, 866 (1937).

- [62] J. B. Marion y S.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, (3rd. Ed., Harcourt Brace Jovanovich Publishers, San Diego USA, 1988).
- [63] B. D. H. Tellegen, Phillips Research Reports, **3**, 81 (1948).
- [64] J. Kong, *Electromagnetic Wave Theory*, (Krieger Publishing Company, Florida USA, 1993).
- [65] N. Marcuvitz y J. Schwinger, J. Appl. Phys **22** 806 (1951).
- [66] A. Mckelvey, *Introduction to Solid State Physics*, (Wiley, New York USA, 1986).
- [67] J. Billard, Mol. Cryst. **3**, 227 (1968).
- [68] C. Mauguin, Bull. Soc. fr. Miner. Cristallogr. **34**, 3 (1911).
- [69] J. P. Mathieu, Bull. Soc. fr. Miner. Cristallogr. **62**, 172 (1939).
- [70] C. Altman y K. Sucky, *Reciprocity, Spatial Mapping and Time Reversal in Electromagnetics*, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht The Netherlands, 1991).
- [71] A. Lakhtakia, Sensors and Actuators A: Physical **87**, 78 (2000); Letter to the Editor, Sensors and Actuators A: Physical **87**, 78 (2000).
- [72] C. Oldano, J. A. Reyes y S. Ponti, Phys. Rev. E **67**, 056624 (2003).
- [73] Para bibliografía adicional sobre cristales acústicos con defectos de torsión ver: A. Lakhtakia, Sensors and Actuators A: Physical **104**, 188 (2003).
- [74] D. R. Smith, R. Dalichaouch, N. Kroll y S. Schultz, J. Opt Soc. Am. **B** 10, 314 (1993).
- [75] L. Landau y E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, (Pergamon, Oxford Great Britain, 1984)
- [76] G. B. Arfken, *Mathematical Methods For Physicists*, (Academic Press, New York U.S.A., 1968).

- [77] M. Warner y E. M. Teretjev, *Liquid Crystals Elastomers*, (Oxford Sciences, Oxford, 2003).
- [78] R. F. Rodríguez, J. A. Reyes, A. Espinosa-Cerón J. Fujioka y B. Malhomed, *Phys. Rev. E* **68** 036606 (2003).
- [79] M. Becchi, S. Ponti, J. A. Reyes y C. Oldano, *Phys Rev. B* **70** 1 033103 (2004).
- [80] J. A. Reyes y R. F. Rodríguez, *Phys. Rev. E* **65**, 051701 (2002); R. F. Rodríguez y J. A. Reyes, *Opt. Commun.* **197**(1-3) 103-108 (2001); J. A. Reyes y R. F. Rodríguez, *Physica D* **141** (3-4) 333-343 (2000).
- [81] C. Oldano, *Phys. Rev. A* **40** 10, 6014 (1989).
- [82] V. E. Zakharov y A. B. Shabat, *Sov. Phys. JETP* **37** 5, 823 (1973).
- [83] Goldstein Herbert, *Classical Mechanics*, (Addison-Wesley, USA, 1980).
- [84] F. D. Tappert y C. N. Judice, *Phys. Rev. Lett.* **29** 1308 (1972).
- [85] Y. S. Kivshar y V. Królikovski, *Optics Comm.* **114** 353 (1995).
- [86] Min-Hyong Lee, Young-Chol Yang, Jac-Eun Kim y Hae Yong Park, *Phys. Rev. E* **68** 51701 (2003).
- [87] J. A. Reyes y P. Palffy-Muhoray, *Phys. Rev. E* **58** 5, 5855 (1998).
- [88] N. V. Tabiryan, A. V. Sukhov y B. Ya. Zeldovich, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, **136** 1 (1986); Khoo I. C. *Prog. Optics*, **26** 108 (1988).
- [89] A. Muñoz, P Palffy-Muhoray y B. Taheri *Opt Lett* **26** (11) 804-806 2001; E. Alvarez, M. He, A. Muñoz, et al., *Mol Cryst. Liq. Cryst.* **369** 75-82 2001.
- [90] C. Conti et al, *Phys. Rev. E* **91** 73901, (2003); G. Assanto and M. Peccianti, *IEEE J. Quantum Elect.* **39** 1, 13, (2003).
- [91] P. Öhberg y L. Santos, *J. Phys. B* **34** 4721 (2001).

[92] D. Anderson, Phys. Rev. A **27** 3135 (1983).

[93] Yu. S. Kivshar y X. Yang, Phys. Rev. E **49** 1657 (1994).