Cuantización covariante de la supercuerda.

por

Alejandro Gaona Ordóñez

Tesis entregada para satisfacer parcialmente los
requisitos para obtener el título de

Maestro en Ciencias (Física)

en la

FACULTAD DE CIENCIAS
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Comité de tesis:

Dr. José Antonio García Zenteno
Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero
Dr. Axel Ricardo de la Macorra Pettersson
Dr. Alberto Güijosa Hidalgo
Dra. Myriam Mondragón Ceballos.

2005

La tesis de Alejandro Gaona Ordóñez es aprobada:

Director de tesis Fech

Fecha

Fecha

Fecha

Date

Universidad Nacional Autónoma de México

2005

Cuantización covariante de la supercuerda.

Agradecimientos

Agradezco al Dr.José Antonio García Zenteno, quien me ha brindado su amistad y apoyo desde que lo conocí. Él ha sido mi guia en mi formación científica y como persona. En los últimos años hemos aprendido juntos varios aspectos de la física matemática que están expuestos en este trabajo. De igual forma agradezco al Dr. José David Vergara Oliver y al Dr. Alberto Güijosa Hidalgo el apoyo y conocimiento que me brindaron para enriquecer esta tesis.

Agradezco a mis profesores del ICN-UNAM y del IF-UNAM por las catedras que impartieron en el Posgrado en Ciencias Físicas. En particular agradezco al Dr. Rafael P'erez Pascual por su excelente curso de Mecánica y al Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros por su claridad en la exposición de los conceptos en Teoría de Campos Cuánticos.

Agradezco a todo el personal del ICN-UNAM por la ayuda que me brindaron al permitirme utilizar la Biblioteca, la Sala de Computo y todas las instalaciones. De forma especial agradezco a Trinidad Ramirez, secretaria del departamento de Gravitación y Campos, por su desempeño en el trabajo y por la atención que me brindo.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología **CONACyT** por el apoyo económico que me otorgaron para realizar los estudios de Maestría dentro del Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM. De igual forma agradezco a la **DGAPA** por el apoyo económico que me otorgo para la realización de esta tesis dentro del proyecto de investigación **PAPIIT** con número **IN 104503** del ICN.

Índice general

Prefacio

En los últimos años se ha venido discutiendo un nuevo método desarrollado por Berkovits para lograr la cuantización covariante de la supercuerda. Este método presentado por vez primera en el año 2000 [19] consiste en un método BRST modificado, el cual contiene una variable adicional (bosón espinorial) que satiface una constricción y es conocida en la literatura como "espinor puro". Sorprendentemente el método de cuantización desarrollado por Berkovits ha demostrado ser efectivo en varios aspectos, como el de simplificar los cálculos de las amplitudes de dispersión con más de cuatro fermiones externos, y el poder incluir fondos más complicados como los que contienen flujos Ramond-Ramond. Otro aspecto que indica que este método apunta en la dirección correcta consiste en que Berkovits ha probado que la cohomología de la carga BRST modificada corresponde con el espectro de la supercuerda Green-Schwarz GS [23, 27]. También se a demostrado usando transformaciones de similaridad la equivalencia que hay entre la teoría conforme libre con la carga BRST modificada y la acción de Green-Schwarz (GS) con la carga BRST usual [29, 30].

En esta tesis presentaremos una exposición de los avances hechos en la cuantización covariente de la supercuerda, además daremos una explicación clara y sistemática de como se obtiene el álgebra de primera clase que se presenta en [29] y [30]. El método que usaremos para obtener el álgebra de primera clase se conoce como expansión BFT (Batalin-Fradkin-Tuytin), el cual consiste en agregar variables fermiónicas (con estructura simpléctica bien determinada) al espacio configuración para transformar las constricciones originales (de primera y segunda clase) en un conjunto de nuevas constricciones que cierran en un álgebra de primera clase efectiva. El álgebra de primera clase obtenida en esta tesis con el método BFT corresponde con el álgebra de primera clase presentada en [29, 30], que permite cerrar el álgebra de Lorentz en D=10, y además representa el álgebra de norma efectiva que da lugar a las simetrías de la teoría GS (difeomorfismos y simetría-κ).

Pero antes de obtener este resultado, es necesario saber los orígenes de la supercuerda GS, y las ventajas que presenta esta teoría respecto al formalismo RNS para hacer la cuantización covariante de la supercuerda. Para esto presentaremos una introducción en donde se expondrán las dos formulaciones básicas que introducen la supersimetría en la cuerda bosónica de Polyakov. Estos formalismos presentán ventajas y desventajas, las cuales harán evidente cual de los dos formalismos es el más adecuado para realizar una cuantización covariante que preserve la simetría de Lorentz en las variables del espacio-tiempo.

De este análisis se concluye que el mejor formalismo para implementar la cuantización covariante es el formalismo de la supercuerda Green-Schwarz (GS), el cual manifiesta la supersimetría en el espacio-tiempo. En consecuencia es más fácil de visualizar la invariancia de Lorentz en las variables del superespacio (x^μ, θ^α) a partir del grupo super-Poincaré.

Antes de entrar de lleno a la cuantización covariante implementada por Berkovits, presentamos la estructura canónica que tiene la supercuerda GS. Obtendremos las constricciones de la teoría y seguiremos la formulación de Dirac [5] para separar (de forma no covariante) las constricciones de esta teoría en primera y segunda clase. Una vez que se tienen separadas las constricciones se construye el paréntesis de Dirac, y se verifican las propieades que tiene.

Como en esta tesis estamos trabajando con la cuantización BRST, presentaremos una guia introductoria de como se introducen las variables fantasmas, y como construir la carga BRST a partir de un álgebra de Lie. Se exponen las propiedades que tiene que satisfacer la carga BRST y como se definen los estados físicos a partir de esta carga. A continuación presentamos un resumén del programa BFT, que consiste en aumentar el espacio configuración con el fin de poder transformar las constricciones de segunda clase a constricciones de primera clase. Al hacer esto, uno también tiene que transformar las constricciones de primera clase originales, con el fin de obtener un álgebra primera clase efectiva.

Una vez que se conoce como trabaja el método BFT, podemos aplicarlo a las constricciones de la supercuerda GS, al hacerlo obtenemos un álgebra de primera clase efectiva que coincide con el álgebra presentada en [29, 30]. En las conclusiones hablaremos más de este resultado.

Al final hacemos una exposición de las transformaciones de similaridad usadas en [29, 30] para probar la equivalencia que hay entre la supercuerda GS con la carga BRST estándar y la acción de la teoría conforme libre con la carga BRST con espinor puro de Berkovits. De igual forma se presentan los generadores de Lorentz SO(9,1) para esta teoría y el camino a seguir para lograr que esta simetría se preserve a nivel cuántico.

La importancia del capítulo final (antes de las conclusiones) radica en que se puede relacionar el método BRST estándar con el método BRST modificado por Berkovits a partir de transformaciones de similaridad. El mismo resultado se obtiene con la expansión BFT a nivel clásico, lo cual permite entender el origen y funcionamiento del espinor puro dentro de este nuevo método desarrollado por Berkovits para cuantizar covariantemente la supercuerda GS.

En las conclusiones se dirá más acerca de los resultados obtenidos en cada uno de los capítulos, además presentaremos con mayor claridad la relación que hay entre el método BRST estándar con el método BRST que presenta Berkovits. Además es muy importante saber el origen del espinor puro y porque funciona para lograr la cuantización covariante de la supercuerda GS.

A continuación presentamos la estructura y organización que tiene esta tesis, para que el lector pueda encontrar más facilmente los tópicos de esta tesis que desea estudiar.

En el capítulo 1 se presenta una introducción, en donde se exponen las motivaciones de este trabajo. Se presenta en forma breve los dos caminos para introducir la supersimetría en la teoría de cuerdas (formalismos RNS y GS) y la relación que hay entre estos formalismos (ventajas y desventajas).

El siguiente capítulo es una revisión de la teoría GS en el formalismo de Dirac de constricciones hamiltonianas.

Entrando ya en materia, el capítulo 3 es una guía del método de cuantización BRST, y una exposisión breve del programa BFT de transformación de constricciones de segunda clase a primera clase.

El capítulo 4 es una exposisión organizada del método de Berkovits, presentando los métodos de cálculo de las amplitudes y la construcción de los operadores de vértice, los cuales representan los estados a los que se les aplicará el operador BRST de Berkovits. Aquí se da una breve explicación de como se obtiene el espectro de la supercuerda con el método de Berkovits.

El capítulo 5 correponde al más importante de esta tesis, ya que aquí se presenta la expansión BFT de la supercuerda GS, en donde se muestra como el método sistemático BFT aplicado a las constricciones de la supercuerda GS reproduce el álgebra de primera clase presentado en [29], y no sólo eso, ya que también logramos explicar el trabajo de Aisaka y Kazama [30].

El capítulo 6 correponde al capítulo de consistencias respecto a la simetría de Lorentz y a la equivalencia existente entre el método de cuantización BRST estándar y el método de Berkovits usando transformaciones de similaridad.

El capítulo 7 son las conclusiones de esta tesis.

Parte I

Introducción

Capítulo 1

Introducción

La cuantización covariante de la supercuerda es un problema que tiene su origen en la formulación de la acción clásica covariante de la supercuerda, hecha por Green-Schwarz en 1984. Como se verá en este capítulo existen dos formalismos de la supercuerda a nivel clásico, uno que implementa la supersimetría en el espacio tiempo, conocida como supercuerda Green-Schwarz (GS); y otro que implementa la supersimetría en la hoja mundo conocida como supercuerda Ramond-Neveu-Schwarz (RNS), las cuales son equivalentes cuánticamente al truncar el espectro del formalismo RNS (proyección GSO).

La formulación de la supercuerda RNS permite que se haga una cuantización covariante [1] y canónica. Sin embargo para el formalismo de la supercuerda GS la cuantización covariante no es un problema sencillo, y hasta la fecha no se conoce como hacer esta cuantización de una forma satisfactoria.

El problema de la cuantización covariante fue atacado desde diferentes perspectivas sin tener un resultado existoso que permitiera hacer cálculos simples con la herramienta matemática que se contaba a mediados de 1980. A principios de 1990 ya se tenían algunos modelos de cuantización covariante de la supercuerda (GS), sobre todo gente como Green, Schwarz, Carlip, Kallosh, Grisaru, Siegel habían trabajado en el problema de la cuantización de la cuerda heterótica (GS) pero los cálculos a nivel covariante son muy complicados, y sobre todo el problema de constricciones de la teoría no se podía resolver, debido principalmente a que no había una forma de separar las constricciones de primera y segunda clase de la teoría en forma covariante.

En esas fechas no se conocía la forma de cuantizar la supercuerda covariantemente, sin embargo, mediante la imposición de una norma adecuada que resolviera las constricciones uno podía obtener el espectro de la teoría. La norma usada para obtener el espectro se conoce como norma del cono de luz, esta norma es una reescritura de los campos en el grupo SO(8). Esta norma era el único método conocido para obtener el espectro, y desafortunadamente este cambio de coordenadas rompe la covariancia

[1] Covariantemente en el sentido que se puede hacer la cuantización BRST estándar.

de Lorentz de la teoría, evitando con esto tener una cuantización que preserve la invariancia de Lorentz a nivel cuántico.

Para el año 2000 surge una nueva formulación hecha por Berkovits para cuantizar covariantemente la supercuerda GS. El nuevo método consiste en usar el formalismo de la carga BRST, en donde se introduce una nueva variable λ^α que satisface la constricción $\lambda\gamma^m\lambda = 0$. La variable que satisface la constricción antes mencionada es conocida como "espinor puro". La primera vez que se da a conocer este novedoso método es en [19], en donde se esbozan algunas de las propiedades de este método, sus posibles alcances para lograr la cuantización covariante, y de la simplificación de los cálcudos de las amplitudes de dispersión. En los trabajos subsecuentes [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28], Bekovits aplicó este método a la superparícula de Brink-Schwarz [25], en donde muestra como su método funciona al obtener el espectro de la superpartícula y ver que corresponde a una teoría de super-Yang-Mills en el superespacio de diez dimensiones, y que al mismo tiempo corresponde con el modo cero de la supercuerda GS. En [22, 23, 24, 27] Bekovits se dedica de lleno a hacer pruebas de consistencia del método con la supercuerda GS, encontrando que la cohomología de la carga BRST del espinor puro reproduce los primeros niveles del espectro de la supercuerda GS. Se construyen los operadores de vértice para la cuantización, y se verifica la invariancia de Lorentz de estos operadores.

Otro grupo de investigación interesado en la cuantización covariante de la supercuerda es el grupo del profesor Grassi, Policastro y van Nieuwenhuizen, quienes han tratado de obtener una cuantización covariante a partir de métodos más algebráicos [43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51], usando propideades de grupos y cocientes de norma "Gaugin Cosets". Estos trabajos han permitido un mejor entendimiento de la cuantización covariante de la supercuerda, y de sus posibles ramificaciones a los modelos σ no lineales.

Como se puede ver, existen varios motivos para hacer esta cuantización covariante. Uno es simplificar los cálculos para poder calcular las amplitudes de dispersión a orden alto. Otra motivación es poder construir una acción cuantizable para modelos σ en espacios-tiempo curvos con flujos Ramond-Ramond, cuyo ejemplo más importante es la teoría de supercuerdas tipo IIB en un espacio AdS_5xS^5. La importancia de cuantizar esta teoría proviene de la correspondencia AdS/CFT, la cual establece la equivalencia entre la teoría de cuerdas IIB en un espacio AdS_5xS^5 y una teoría de super-Yang-Mills con supersimetría $N = 4$.

El objetivo de este proyecto es enteder todos los aspectos de la cuantización covariante de la supercuerda GS con el método de Berkovits, para poder hacer una análisis de las ventajas (y equivalencias) que presenta este método respecto a la cuantización BRST estándar. Para eso se puede estudiar también el método BRST modificado como lo hace Grassi et al. Esta modificación esta basada en los trabajos de Berkovits [19, 22, 28] y los trabajos de Grassi et al [43, 46, 47, 48], de donde hay métodos y técnicas que permiten calcular todos los aspectos de la supercuerda. Uno de los puntos difíciles de la cuantización covariante de la supercuerda consiste en la separación entre constricciones de primera y segunda clase, cuya separación en forma covariante parmitirá tener un mejor entendimiento de la simetría-κ y el papel que juega en la cuantización covariante de la supercuerda.

Se han hecho varias propuestas respecto a esta cuantización basadas en fijar las simetrías fermiónicas (simetría-κ) en la norma del "semi cono de luz", la cual tiene la característica de preservar la supersimetría del espacio-tiempo y simplificar la expresión de la acción original. Sin embargo esta acción no puede cuantizarse fácilmente debido a que el propagador fermiónico no esta bien definido.

Aún falta mucho por hacer en el entendimiento de la cuantización covariante de la supercuerda Green-Schwarz, y sobre todo construir una herramienta matemática que simplifique los cálculos y que permita hacer los cálculos con sencillez y elegancia, y al mismo tiempo aclare los conceptos e ideas físicas que están involucrados.

Otro de los aspectos que falta por entender, es cómo la cuantización covariante de la supercuerda está conectado con los modelos σ no lineales, y que ventajas ofrece respecto a otros formalismos.

1.1. Supercuerdas.

La supersimetría, es la simetría existente entre los grados de libertad bosónicos y fermiónicos. Como sabemos la cuerda de Polyakov, es una teoría que tiene sólo grados de libertad bosónicos y cuya teoría cuántica es consistente en D=26 dimensiones espacio-tiempo. Como introducir los grados de libertad fermiónicos a esta teoría será lo que veremos a continuación.

Existen dos formalismos básicos para describir la cuerda con fermiones, el formalismo (RNS) Ramond-Neveu-Schwarz y el de Green-Schwarz (GS). El formalismo RNS tiene supersimetría en la hoja mundo pero la supersimetría en espacio-tiempo no es manifiesta. Esta característica hace que este formalismo sea muy complicado para obtener a partir de él amplidudes de dispersión con más de cuantro fermiones externos. Además no se sabe como incorporar fondos con campos Ramond-Ramond en el formalismo RNS. Por otra parte es este el formalismo que se presenta comunmente en los libros de texto de cuerdas. La razón es que calcular el espectro de manera covariante usando técnicas de BRST es relativamente simple y directo. De esta cuantización resulta un espectro que leído desde la perspectiva del espacio-tiempo tiene taquiones y estados no físicos. Estos estados aparecen debido a que esta teoría no es invariante supersimétrica en el espacio tiempo. Hay que añadir a mano una proyección conocida como proyección GSO para obtener el espectro físico correcto invariante supersimétrico e invariante de Lorentz.

Por otro lado el formalismo GS tiene la supersimetría realizada en el espacio tiempo pero la supersimetría en la hoja mundo no es manifiesta. Esto resuleve muchos problemas que el formalismo RNS no puede resolver. Sin embargo, no se sabe como cuantizar GS de manera covariante. Este formalismo puede cuantizarse consistentemente en la norma del cono de luz. En esta norma el espectro es relativamente simple de obtener pero las amplitudes de dispersión son bastente complicadas de calcular. Por esta razón sólo las amplitudes con cuatro fermiones externos a nivel árbol y a un loop han podido calcularse explícitamente. Además sólo pueden tratarse fondos que son compatibles con la norma del cono de luz, que impiden obtener las propiedades y simetrías generales de esta teoría a nivel cuántico.

1.1.1. La supercuerda RNS.

El formalismo supersimétrico de la cuerda RNS tiene su origen en la interpretación de la acción de Polyakov como una teoría de campos bosónicos de dos dimensiones que describe D campos escalares x^μ acoplados a la gravedad. Teniendo una acción invariante bajo cambios de coordenadas en la hoja mundo (difeomorfismos), es posible aumentar esta simetría a una supersimetría local en la hoja mundo al introducir los compañeros supersimétricos θ_α y ψ^μ de la métrica g_{ij} y de los campos escalares x^μ respectivamente. Aquí, θ_α es un campo espinorial de dos dimensiones y espín $3/2$, mientras que ψ^μ es un vector de dimensión D y un espinor de dos dimensiones. En este modelo los únicos grados de libertad los constituyen el "supermultiplete de materia" (x^μ, ψ^μ). Los campos de supergravedad (g_{ij}, θ_α), representan una norma pura en dos dimensiones. Esta formulación de cuerda fermiónica lleva el nombre de modelo Ramond-Neveu-Schwarz (RNS). El principio de acción que surge de este modelo tiene una supersimetría en la hoja mundo $N = 1$ que en la norma conforme se escribe como

$$S[x^\mu, \psi^\mu] = -\frac{1}{2\pi} \int \left(\partial_i x^\mu \partial^i x_\mu - i\bar{\psi}^\mu \gamma^i \partial_i \psi_\mu\right) d^2\sigma, \tag{1.1}$$

y produce una teoría de cuerdas consistente con dimensión crítica $D = 10$. Donde γ^i son las matrices de Dirac en dos dimensiones, y obedecen el álgebra

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\eta^{ij}, \tag{1.2}$$

donde los indices i, j corren de $0, 1$ en la hoja mundo. Cuando se cuantiza esta teoría aparece un taquión en su espectro, que puede ser eliminado al truncar el espectro en la forma que hicieron Gliozzi, Scherk y Olive (proyección GSO). Se eliminan entre otros estados al taquión y se obtiene la supersimetría en el espacio-tiempo de dimensión $D = 10$, con una o dos supercargas de Majorana-Weyl ($N = 1$ o $N = 2$) dependiendo de la elección de las condiciones de frontera. A pesar de que el formalismo RNS es simple y elegante, y puede ser cuantizado covariantemante y canónicamente (cuantización BRST), este formalismo no presenta la supersimetría en el espacio-tiempo, la cual es el tema principal de muchas de las propiedades importantes de la teoría de cuerdas, no es manifiesta en esta formulación , llevó a buscar un formalismo que diera origen a la misma teoría, pero con una supersimetría explícita en el espacio-tiempo.

1.1.2. La supercuerda GS.

En la sección anterior vimos las pricipales características que tiene la supercuerda RNS, ahora expondemos las propiedades más importantes de la supercuerda GS. La segunda manera de introducir la supersimetría se basa en el hecho de que la cuerda bosónica es invariante bajo transformaciones globales de Poincaré en D dimensiones. Es posible aumentar esta simetría a una invariancia global bajo el grupo de super-Poincaré, lo cual lleva a la supercuerda de Green-Schwarz (GS). En esta formulación la supersimetría en el espacio-tiempo es manifiesta y las condiciones GSO están automáticamente incorporadas sin necesidad de hacer una truncación. El principio de acción en este caso puede involucrar una o dos supercargas de Majorana-Weyl ($N = 1$ o $N = 2$) y produce teorías de cuerdas consistentes en dimensión crítica $D = 10$.

En esta sección vamos a introducir la supersimetría en el espacio-tiempo. La forma de hacerlo es generalizando el espacio de Minkowski, con coordenadas bosónicas x^μ, al superespacio con coordenadas fermiónicas y bosónicas. Si hay en general N supersimetrias, introducimos N espinores que anticonmutan $\theta^{Aa}(\tau)$, $A = 1, 2, ..., N$. El índice a es para introducir un espinor apropiado para las D dimensiones espacio-tiempo. Para un espinor de Dirac en general se tiene $a = 1, ..., 2^{D/2}$. En la mayoria de los casos estaremos más interesados en los epinores que satisfacen las restricciones de Majorana y Weyl.

La supersimetría se realiza en el superespacio de la forma usual. Introduciendo parámetros de Grassmann ϵ^A a los espinores del mismo tipo que le corresponden coordenadas θ^A, y las reglas de transformación

$$\delta\theta^A = \epsilon^A, \qquad \delta x^\mu = i\bar{\epsilon}^A\Gamma^\mu\theta^A, \tag{1.3}$$

$$\delta\bar{\theta}^A = \bar{\epsilon}^A, \qquad \delta e = 0. \tag{1.4}$$

Aquí ϵ^A es un espinor constante y Γ^μ son las matrices de Dirac. Y ahora deseamos generalizar una cuerda bosónica propagandose en el esapcio de Minkowski a una cuerda propagandose en el superespacio.

En el formalismo GS el estudiar la superpartícula a nivel clásico permite entender con más claridad como está involucrada la simetría κ en esta teoría. Esta no es una supersimetría ordinaria ni simple, y de hecho la acción no contiene espinores en la hoja mundo.

Lo primero es ver como se ve transformada la acción de la cuerda bosónica a la cuerda supersimétrica. Para supersimetrizar la cuerda bosónica clásica es necesario introducir los generadores de supersimetría. La acción para la supercuerda es

$$S_1[X^\mu, \theta^{A\alpha}, h^{ij}] = -\frac{1}{2\pi}\int \sqrt{h}h^{ij}\Pi_i^\mu\Pi_{j\mu}d^2\zeta \tag{1.5}$$

donde

$$\Pi_i^\mu = \partial_i X^\mu - i\theta^A\Gamma^\mu\partial_i\theta^A, \tag{1.6}$$

que es invariante ante reparametrizaciones locales y tiene N supersimetrías globales. Esta no es todavía la acción que queremos. Y la simetría local κ se pierde en la generalización de superpartícula a supercuerda. Como resultado θ describe el doble de grados de libertad de los que debería. También, las ecuaciones de movimiento constituyen un sistema no lineal complicado de resolver. Afortunadamente es posible sumar un segundo término S_2 de tal forma que la acción total $S = S_1 + S_2$ contenga la simetría κ local. Y como resultado de esto, la mitad de las componentes de θ se desacoplan otra vez, y las ecuaciones de movimiento se pueden resolver, almenos en una norma en particular y en el espacio plano.

La construcción que reestablece la simetría κ no funciona para una supersimetría arbitraria N. La N no puede ser mayor a 2, es decir que sólo tenemos dos supersimetrías. Para estudiar el caso $N = 2$ se presentaran formulas en términos de las coordenadas θ^1 y θ^2. Los casos $N = 0$ y $N = 1$ pueden obtenerse imponiendo uno a ambos $\theta's$ igual a cero. El término extra en la acción que completa la acción de la cuerda supersimétrica es

$$\begin{aligned} S_2[X^\mu, \theta^{A\alpha}] &= \frac{1}{\pi}\int \big[-i\epsilon^{ij}\partial_i X^\mu(\overline{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_j\theta^1 - \overline{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_j\theta^2) \qquad (1.7) \\ &+ \epsilon^{ij}\overline{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_i\theta^1\overline{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_j\theta^2\big] d^2\zeta. \qquad (1.8) \end{aligned}$$

El símbolo ϵ^{ij} es el tensor antisimétrico de Levi-Civita, el cual explica porque no hay un factor $\sqrt{h}$. De hecho, el término S_2 es completamente independiente de h^{ij} y no contribuye al tensor de energía momento T_{ij}.

Por lo tanto S_2 es supersimétrica sólo en los siguientes cuatro casos
(i) $D = 3$ y θ es de Majorana;
(ii) $D = 4$ y θ es de Majorana o Weyl;
(iii) $D = 6$ y θ es de Weyl;
(iv) $D = 10$ y θ es de Majorana-Weyl.
Entonces el formalimso clásico de la supercuerda existe sólo en estos cuatro casos.

La forma más general de escribir la acción de Green-Schwarz para una supersimetría $N = 2$, con métrica de hoja mundo h^{ij} es

$$\begin{aligned} S[X^\mu, \theta^{A\alpha}, h^{ij}] &= -\frac{T}{2}\int d^2\zeta \big[\sqrt{-h}h^{ij}\Pi_i^\mu\Pi_{j\mu} + 2i\epsilon^{ij}\Pi_i^\mu\big(\overline{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_j\theta^1 - \overline{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_j\theta^2\big) \\ &+ 2\epsilon^{ij}\overline{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_i\theta^1\overline{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_j\theta^2\big]. \qquad (1.9) \end{aligned}$$

La descripción de esta teoría por medio de los paréntesis de Dirac nos lleva a constricciones complicadas que aparentemente son imposibles de estudiar sin romper la covariancia de Lorentz manifiesta en las ecuaciones. Lo mismo sucede para la supercuerda RNS, y esa es la razón que hace necesario imponer la norma del cono de luz para poder cuantizarla.

En el siguiente capítulo estudiaremos la supercuerda GS en el formalismo de Dirac, obtendermos todas las constricciones de la teoría y su separación en constricciones de primera y segunda clase. Obtendremos el paréntesis de Dirac de la teoría y sus aplicaciones.

1.1.3. La simetría fermiónica local.

Se ha dicho que para cierto tipo de espinores en $D = 3, 4, 6$ ó 10 la acción S_2 preserva las simetrías globales de super-Poincaré y la acción S_1 las reparametrizaciones locales. Ahora veremos que la suma $S_1 + S_2$ tiene una simetría local fermiónica que no tiene cada acción por separado. En el caso de la superpartícula esta simetría esta relacionada con $\delta\theta^A = i\Gamma_\mu p^\mu \kappa^A$. En el caso de la supercuerda el análogo de p^μ es la expresión Π_i^μ. Con el fin de tener una fórmula para la hoja-mundo covariante se necesita que el parámetro κ lleve un índice vectorial en la hoja-mundo.

Los parámetros κ ahora llevan tres índices $\kappa^{Ai\alpha}$. El índice $A = 1, 2$ corresponde a la etiqueta supersimétrica sobre θ^A, que puede truncarse a un único valor para describir el caso $N = 1$. El índice $i = 0, 1$ coresponde a la hoja-mundo y α es un índice espacio-tiempo D-dimensional correspondiente a uno de los cuatro posibles tipos de espinores. En la supercuerda $D = 10$, $\alpha = 1, .., 16$ componentes reales de los espinores de Majorana-Weyl. La descomposición de un vector en lo que se puede llamar las piezas auto-dual y anti-auto-dual se logra convenientemente usando los proyectores

$$P_\pm^{ij} = \frac{1}{2}(h^{ij} \pm \frac{1}{\sqrt{h}}\epsilon^{ij}), \tag{1.10}$$

que satisfacen las condiciones de proyección

$$\begin{aligned} P_\pm^{ik} h_{kl} P_\pm^{lj} &= P_\pm^{ij} & (1.11)\\ P_\pm^{ik} h_{kl} P_\mp^{lj} &= 0. & (1.12)\end{aligned}$$

Los parámetros κ^A se restringen para ser anti-auto-dual para $A = 1$ y auto-dual para $A = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} \kappa^{1i} &= P_-^{ij}\kappa_j^1 & (1.13)\\ \kappa^{2i} &= P_+^{ij}\kappa_j^2. & (1.14)\end{aligned}$$

Esto nos indica que $A = 1$ describe los modos de movimiento derecho y sus simetrías mientras que $A = 2$ describe los modos de movimiento izquierdo y sus simetrías.

1.1.4. Cuantización de la supercuerda GS.

La estructura de las constricciones en el espacio fase de la acción en la cuerda supersimétrica hacen la cuantización covariante muy complicada. Afortunadamente la cuantización se puede hacer razonablemente en la norma del cono de luz.

Una de las ventajas que tenemos en este formalismo, es que tenemos una supersimetría manifiesta en todo el espacio-tiempo, entonces la generalización del álgebra de Poincaré al álgebra de Super-Poincaré es simple y directa.

El análsis del espectro de esta teoría tiene que hacerse por separado (para cuerdas abietas y para cuerda cerradas).

Supercuerdas abiertas.

Las condiciones de frontera de las cuerdas abiertas nos llevan a un conjunto de modos bosónicos y fermiónicos, que corresponden a las ondas estacionarias de la cuerda. Los estados sin masa pertenecen necesariamente a la representación adjunta en cada caso. Al separar las componentes en la norma del cono de luz, se elige una representación del grupo SO(8). Ahora obtengamos el espectro sin masa en la formulación supersimétrica. En la descripción de espín(8), el estado base debe representar el álgebra

$$\{S_0^a, S_0^b\} = \delta^{ab}, \tag{1.15}$$

donde S_0^a representa el modo cero de la expansión en modos de la supercuerda. Debido a la trialidad, esto se puede lograr de igual forma que en un álgebra de Clifford $\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij}$, y esta se puede representar como

$$\mathbf{S_0^a} \approx \begin{pmatrix} 0 & \gamma^a_{i\dot{a}} \\ \gamma^a_{\dot{a}i} & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso la representación de este espacio es $8_v + 8_c$, el cual es un supermultiplete completo obtenido a partir del formalismo RNS. Denotemos el multiplete 16-dimensional sin masa del estado base en la notación del espacio de Fock como $|\phi_0\rangle$.

Los estados base sin masa descritos por $|\phi_0\rangle$ consisten de ocho estados Bose 8_v en la representación de espín(8) denotada por $|i\rangle$, y ocho estados Fermi 8_c en la representación denotada por $|\dot{a}\rangle$, estos estados están normalizados

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \qquad \langle \dot{a}|\dot{b}\rangle = \delta_{\dot{a}\dot{b}}, \tag{1.16}$$

y estos estados representan un espacio completo

$$I = |i\rangle\langle i| + |\dot{a}\rangle\langle \dot{a}|. \tag{1.17}$$

De este espacio completo se extraen todos los estados físicos sin masa de la supercuerda, y el modo cero concuerda con la teoría de super-Yang-Mills.

Ahora examinemos el espectro masivo de la supercuerda, los primeros estados excitados de la supercuerda son

$$\alpha^i_{-1}|\phi_o\rangle, \qquad S^a_{-1}|\phi_0\rangle, \tag{1.18}$$

los cuales describen un total de 128 bosones y 128 fermiones, y los cuales pueden se estudiados sistemáticamente por medio de las tablas Young.

En los siguientes niveles de estados excitados ($\alpha' M^2 = 2$), el espectro físico con tiene

$$\alpha^i_{-2}|\phi_o\rangle, \qquad S^a_{-2}|\phi_o\rangle, \qquad \alpha^i_{-1}\alpha^j_{-1}|\phi_o\rangle, \tag{1.19}$$

$$S^a_{-1}S^b_{-1}|\phi_o\rangle, \qquad \alpha^i_{-1}S^a_{-1}|\phi_o\rangle, \tag{1.20}$$

describiendo un total de 2304 modos, los cuales hay que escribir en sus representa ciones irreducibles usdando las tablas de Young, para poder dar un significado a cad uno de estos modos.

Supercuerdas cerradas.

La descripción de las cuerdas cerradas requiere que se tomen en cuenta los modo izquierdos y derechos. En particular, los estados sin masa son descritos por el product directo de $|\phi_0\rangle \otimes |\tilde{\phi_0}\rangle$, donde $|\phi_0\rangle$ son los estados base. Hay dos casos que deben distin guirse deacuerdo a si los dos espinores de Majorana-Weyl tienen la misma quiralida o quiralidad opuesta. En el caso donde son distintos no se pueden simetrizar los do factores y el multiplete sin masa contiene necesariamente 16×16=256 modos.

1.1.5. Comparación del formalismo RNS y GS.

La forma más adecuda de hacer la comparación entre estos dos formalismos, e mediante la cuantización de ambas teorías y la comparación de sus espectros. Com sabemos, el formalismo RNS y GS manifiestan una supersimetría en la hoja mund y en el espacio tiempo respectivamente. Actualmente se ha encontrado que hay un relación más intrinseca entre ambos formalismo a partir de una redefinición de campo [26]. Esta redefinición puede brindar información que aclare la cuantización covariant de ambos formalismos.

1.2. El método de Berkovits.

El método de Berkovits consiste en cuantizar covariantemente la supercuerda G usando el método BRST. El trabajo original de Berkovits es formular un nuevo méto do de cuantizar covariantemente la supercuerda GS, este método consiste en usa "espinores puros", y cerrar el álgebra de la carga BRST. Una ventaja que present este método consiste en poder calcular las amplitudes de dispersión de la supercuerd a ordenes altos.

La acción con la que trabaja Berkovits, es la acción conforme libre

$$S[x^\mu, \theta, \lambda] = \int (\frac{1}{2}\partial x^\mu \bar{\partial} x_\mu + p_\alpha \bar{\partial}\theta^\alpha + \omega_\alpha \bar{\partial}\lambda^\alpha) d^2\zeta, \tag{1.21}$$

la cual permite definir el operador BRST que Berkovits usa para cuantizar, y que utiliza el espinor puro λ

$$Q = \int \lambda^{\alpha} d_{\alpha} dz. \tag{1.22}$$

En el formalismo desarrollado por Berkovits se introducen tres nuevos conceptos para cuantizar covariantemente la superceurda GS:

1.- Se cálcula el momento canónico fermiónico d_{α} de las variables de Grassmann θ^{α} del superespacio, las cuales permiten escribir la acción en forma cuadrática después de introducir las constricciones adecuadas.

2.- Se introduce el espinor puro λ^{α}, el cual juega el papel de una variable fantasma, además este espinor satisface la constricción $\lambda\gamma^{m}\lambda = 0$.

3.- Se construye el operador nilpotente BRST $Q = \int \lambda^{\alpha} d_{\alpha} dz$ cuya cohomología se usa para definir los estados físicos, $\alpha = 1, ..., 16$ componentes reales.

Antes de entrar más en detalle, es conveniente explicar el origen de estas ideas.

La formulación covariante a nivel clásico de la cuerda heterótica se conoce desde mediados de 1980, lo que no se conocía en ese tiempo, era una forma de cuantizar esta teoría en forma covariante, y aún en la actualidad no se conoce una solución satisfactoria a este problema. Lo que se hacía en esos tiempos era fijar la norma, y con esto romper la covariancia que tienen las constricciones de esta teoría. En el caso de la supercuerda GS se fija la norma del cono de luz.

Con el fin de entender mejor las simetrías de la hoja mundo de la supercuerda GS, en 1989 Sorokin, Tkach, Volkov y Zheltukhin reemplazaron la simetría kappa en la línea mundo de la superpartícula Brink-Schwarz con la supersimetría en la línea mundo. El supercompañero bosónico en la línea mundo para θ^{α} fue llamado λ^{α}, y la línea mundo supersimétrica de la acción implica que λ^{α} satisface la relación de torsión (twistor)

$$\lambda\gamma^{m}\lambda = \dot{x}^{m} + \frac{1}{2}\theta\gamma^{m}\dot{\theta}. \tag{1.23}$$

Esta forma de atacar el problema con la relación de torsión fue entonces generalizada por varios autores a la supercuerda heterótica clásica con supersimetrías de N=1 a N=8 en la hoja mundo, y se argumentó que la cuantización de esta teoría con dos supersimetrías en la hoja mundo conducen a una teoría de campo superconforme crítica con N=2. Para dos supersimetrías en la hoja mundo, θ^{α} tiene dos supercompañeros λ^{α} y $\overline{\lambda}^{\alpha}$ que satisfacen las relaciones

$$\lambda\gamma^{m}\lambda = \overline{\lambda}\gamma^{m}\overline{\lambda} = 0 \qquad\qquad \lambda\gamma^{m}\overline{\lambda} = \partial x^{m} + \frac{1}{2}\theta\gamma^{m}\partial\theta. \tag{1.24}$$

En diez dimensiones, un espinor complejo de Weyl λ^{α} que satisface la condición $\lambda\gamma^{m}\lambda = 0$ es llamado un espinor puro, el cual es útil para describir constricciones on-shell de las teorías de supergravedad y super-Yang-Mills.

Desafortunadamente, la cuantización directa de la teoría de campo superconforme con supersimetría N=2 en la hoja mundo requiere que se resuelvan las constricciones

(1.24) y con esto se rompe la invariancia de Lorentz manifiesta SO(9,1) a un grupo U(4). En artículos posteriores, este formalismo U(4) se relacionó a otra teoría de campo superconforme crítica N=2, llamados formalismos "híbridos" con subgrupos del grupo de Lorentz SO(3,1)xU(3), SO(5,1)xU(2), SO(1,1)xU(4) ó U(5).

Finalmente Berkovits [19], encontró que estos formalismos híbridos son equivalentes a un formalismo covariante super-Poincaré SO(9,1) usando el operador BRST $Q = \int \lambda^\alpha d_\alpha$ construido a partir de las variables de la hoja mundo $[x^m, \theta^\alpha, d_\alpha, \lambda^\alpha, w_\alpha]$ donde d_α es el momento conjugado de θ^α, w_α es el momento conjugado de λ^α, y λ^α es un espinor puro que satisface $\lambda\gamma^m\lambda = 0$. En [28] se muestra que λ^α y w_α tienen 11 componentes independientes cada uno, de tal forma que el formalismo covariante contiene 32 bosones y 32 fermiones. Entonces Berkovits hace una proposición sobre el formalismo híbrido, que dice que todo el formalismo híbrido contiene 12 bosones y 12 fermiones los cuales están relacionados por una redefinición de campos a las variables del formalismo RNS $[x^m, \Psi^m, b, c, \beta, \gamma]$, ésta propuesta se basa en la siguiente conjetura, con el fin de obedecer las condiciones usuales de estados físicos, los estados en la cohomología $Q = \int \lambda^\alpha d_\alpha$ son independientes de los 20 bosones y 20 fermiones extras.

Otra forma elegante de ver la consistencia de los formalismos RNS y GS es a partir del conteo de grados de libertad bosónicos y fermiónicos.

Otra de las ventajas del formalismo, es que permite hacer cálculos de amplitud de dispersión de la supercuerda a ordenes altos. Estos cálculos pueden dar información de la interacción que hay entre cuerdas, y de la posible formulación de una teoría de campos de cuerdas. Con una teoría de campos de cuerdas consistente, se podrían hacer los cálculos que se hacen actualmente en teoría de campos. Por eso también la cuantización covariante de la supercuerda puede dar indicios de una formulación de teoría de campos para cuerdas. De hecho la formulación de Berkovits construye los operadores de vértice a partir de los campos de la teoría, esto con el fin de construir invariantes de Lorentz que preserven la covariacia de Lorentz a nivel cuántico. En consecuancia se puede decir que la cuantización covariante con la carga BRST del espinor puro es una cuantización a nivel de los campos de la supercuerda GS.

1.2.1. El método BRST modificado.

El método BRST formulado por Berkovits [19, 20, 21, 22, 24, 25, 28] para cuantizar la supercuerda de forma covariante puede ser modificado de varias maneras, dependiendo de que resultados espera uno obtener. Una de las primeras modificaciones hechas a este formalismo fue hecha por Grassi et al [43, 44, 45], en el cual quitan las constricciones del espinor puro propuesta por Berkovits. Pero como se ha descubierto, los espinores puros λ^α son necesarios para cancelar la carga central del álgebra conforme (+10 de las coordenadas bosónicas x^m,-32 de las variables espinoriales d_α y θ^α y +22 de los espinores puros λ^α), con el fin de obtener los polos correctos en el álgebra de Lorentz y satisface que el operador Q sea nilpotente.

El problema de la cuantización covariante de la supercuerda es uno de los problemas fundamentales en la teoría de cuerdas, y el tema ha sido atacado con la cuantización BRST modificada de Berkovits. Ni aún con el método de Berkovits modificado por Grassi et al contamos con un método claro y satisfactorio de la cuantización covariante de la supercuerda.

Como Berkovits mostró [21], la cohomología de la carga BRST contiene exactamente el espectro físico de la supercuerda, y en particular, para los estados sin masa, esta nos da las ecuaciones de movimiento covariantes de la teoría super-Yang-Mills en 10 dimensiones para la cuerda abierta, o de la supergravedad N=2 para la cuerda cerrada.

Aunque la formulación de Brekovits nos da un camino que resuelve muchas de las dificultades del formalismo GS para describir de forma covariante la supercuerda, es necesaria una parametrización explícita de los espinores puros λ^α en varios puntos de su construcción. Usando tal parametrización de los espinores puros, el fue capaz de definir corrientes de Lorentz las cuales satisfacen el álgebra covariante de Lorentz [24]. Sin embargo, la solución de las constricciones de los espinores puros rompe la covariancia explícita y algunas expresiones no se pueden escribir de forma covariante. Por ejemplo, la acción es no covariante y los cálculos de las amplitudes son afectados por esta falta de covariancia.

Por esto, la cohomología [19, 20, 21, 22] que presenta Berkovits, es una cohomología constreñida. Entonces Grassi et al [43] relajan las condiciones de los espinores puros y construyen un nuevo operador BRST que tenga una cohomología sin constricciones y que coincida con la cohomología constreñida de Berkovits. La extensión de la simetría BRST al eliminar la constricción del espinor puro λ^α, hace que el operador BRST ya no sea nilpotente, y en consecuencia tenemos que agrandar el espacio de los campos para encontrar los campos fantasmas que hacen que el operador BRST sea nilpotente. Estos campos fantasma son: un vector que anticonmuta π^m, un espinor que conmuta χ_α, una 1-forma que anticonmuta w_z^m, y sus correspondientes antifantasmas, y además un sistema que anticonmuta $b - c_z$ con pesos conformes 0 y 1 respectivamente.

La carga BRST es lineal en c_z, y sin condiciones adicionales sobre los estados físicos la teoría es simple de calcular. En [45] se propone que los estados físicos no sólo pertenezcan a la cohomología BRST, sino también al tensor de esfuerzos deformado, el cual contiene un operador de vértice que satisface el OPE usual (expansión en producto de operadores) de un tensor conforme con espín 2. (Esta última condición es más débil que pedir que los operadores de vértice sean campos primarios con espín conforme igual a 1).

El entendimiento de la cohomología de la carga BRST y de los operadores de vértice es fundamental para poder resolver la cuantización covariante de la supercuerda GS, además de el dominio de las técnicas de constricciones hamiltonianas. Un formalismo útil dentro de la teoría GS es el método de Batalin-Fradkin-Tyutin (BFT) para transformar las constricciones de segunda a primera clase introduciendo variables apropiadas que forman un espacio fase extendido, de tal forma que las nuevas constricciones transformadas cierran en un álgebra de primera efectiva clase en el espacio fase extendido. Como veremos la aplicación de este formalismo a la supercuerda GS permite obtener la redefinición de variables canónicas que obtienen Berkovits y Marchioro para explicar el origen del espinor puro dentro del formalismo de cuantización covariante de la supercuerda GS.

Capítulo 2

Formalismo de Dirac de la supercuerda GS.

2.1. La acción de la supercuerda GS y sus simetrías.

La forma más general de escribir la acción de Green-Schwarz para una supersimetría $N = 2$, con métrica de hoja mundo g^{ij} es

$$\begin{aligned} S[x^\mu, \theta^{A\alpha}, g^{ij}] &= -\frac{1}{2}\int d^2\zeta \big[\sqrt{-g}g^{ij}\Pi_i^\mu \Pi_{j\mu} + 2i\epsilon^{ij}\Pi_i^\mu \big(\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_j\theta^1 - \overline{\theta}^2\gamma_\mu\partial_j\theta^2\big) \\ &+ 2\epsilon^{ij}\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_i\theta^1\overline{\theta}^2\gamma_\mu\partial_j\theta^2\big], \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde θ^1 y θ^2 son espinores de Majorana-Weyl y Π_i^μ esta dado por

$$\Pi_i^\mu = \partial_i X^\mu - i(\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_i\theta^1 - \overline{\theta}^2\gamma_\mu\partial_i\theta^2). \tag{2.2}$$

Las simetrías globales de esta acción (bosónicas y fermiónicas) están determinadas por las simetrías de Killing del espacio-tiempo supersimétrico de 10 dimensiones. En el caso plano, éstas simetrías corresponden a las transformaciones de Poincaré en el superespacio

$$\delta X^\mu = \Lambda_\nu^\mu X^\nu - i\overline{\theta}^a\gamma^\mu\epsilon^a + a^\mu, \tag{2.3}$$

$$\delta\theta^a = \frac{1}{4}\Lambda_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\theta^a + \epsilon^a, \tag{2.4}$$

donde a^μ y ϵ^a son parámetros constantes que corresponden a translaciones en el espacio-tiempo y a las transformaciones de supersimetría respectivamente; donde $\Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}$ son las matrices de Lorentz.

Por otro lado tenemos las simetrías bosónicas locales que están asociadas con la invariancia bajo reparametrizaciones de las coordenadas del volumen mundo a lo largo de un campo vectorial bosónico $\eta^i(\xi)$, dadas por

$$\begin{aligned}
\delta X^\mu &= \eta^i \partial_i X^\mu, && (2.5)\\
\delta \theta^a &= \eta^i \partial_i \theta^a, && (2.6)\\
\delta(\sqrt{-g} g^{ij}) &= \partial_k\big(\eta^k \sqrt{-g} g^{ij}\big) - \sqrt{-g} g^{kj} \partial_k \eta^i - \sqrt{-g} g^{ik} \partial_k \eta^j, && (2.7)
\end{aligned}$$

donde la cantidad $\sqrt{-g} g^{ij}$ es invariante de Weyl.

La acción GS también es invariante ante las siguientes transformaciones fermiónicas conocidas como simetría κ

$$\begin{aligned}
\delta X^\mu &= i\bar{\theta}^1 \gamma^\mu (1+\gamma)\kappa^1 + i\bar{\theta}^2 \gamma^\mu (1-\gamma)\kappa^2, && (2.8)\\
\delta \theta^1 &= (1+\gamma)\kappa^1, && (2.9)\\
\delta \theta^2 &= (1-\gamma)\kappa^2, && (2.10)\\
\delta(\sqrt{-g} g^{kj}) &= -4i\delta\bar{\theta}^1 \gamma_\mu \partial_k \theta^1 g^{k(i}\epsilon^{j)l} \Pi^\mu_l + 4i\delta\bar{\theta}^2 \gamma_\mu \partial_k \theta^2 g^{k(i}\epsilon^{j)l} \Pi^\mu_l, && (2.11)
\end{aligned}$$

donde $\kappa^1(\xi)$ y $\kappa^2(\xi)$ son parámetros fermiónicos infinitesimales, los cuales, son espinores en el espacio-tiempo de dimensión $D = 10$ y escalares en la hoja mundo de dos dimensiones.

La variación de la acción (2.1) está dada por la expresión

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \Big[-\frac{1}{2}\delta\big(\sqrt{-g} g^{ij}\big)\big(\Pi^\mu_i \Pi_{j\mu} - g_{ij}\big) + \partial_i P^i_\mu \delta X^\mu \\
&+ i\delta\bar{\theta}^a \Big(2\sqrt{-g} g^{ij}(1+(-1)^a\gamma)\gamma_\mu \partial_i \theta^a \Pi^\mu_j + \gamma^\mu \theta^a \partial_i P^i_\mu \\
&- (-1)^a 2\gamma_\mu \partial_i \theta^a g^{ik}\epsilon^{jl}(\Pi^\nu_k \Pi_{l\nu} - g_{kl})\Pi^\mu_j\Big) \\
&- \partial_i \Big(P^i_\mu \delta X^\mu + \delta\theta^a\big(i\gamma^\mu \theta^a P^i_\mu + S^{ai}\big)\Big)\Big], && (2.12)
\end{aligned}$$

donde el índice a corresponde a las dos supersimetrías de la teoría, y además hemos definido las siguientes variables consistentes con la variación de la acción

$$\begin{aligned}
P^i_\mu &\equiv \sqrt{-g} g^{ij} \Pi^\mu_j - i\epsilon^{ij}(\bar{\theta}^1 \gamma_\mu \partial_j \theta^1 - \bar{\theta}^2 \gamma_\mu \partial_j \theta^2), && (2.13)\\
S^{1i} &\equiv i\epsilon^{ij}\gamma_\mu \theta^1(\partial_j X^\mu - i\bar{\theta}^1 \gamma_\mu \partial_j \theta^1), && (2.14)\\
S^{2i} &\equiv -i\epsilon^{ij}\gamma_\mu \theta^2(\partial_j X^\mu - i\bar{\theta}^2 \gamma_\mu \partial_j \theta^2). && (2.15)
\end{aligned}$$

A partir de la variación de la acción (2.1) se obtienen las ecuaciones de movimiento lagrangianas de los campos g_{ij}, X^μ, θ^1 y θ^2, que están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}
0 &= \Pi^\mu_i \Pi_{j\mu} - g_{ij}, && (2.16)\\
0 &= \partial(\sqrt{-g} g^{ij} \Pi_{j\mu}) + i\epsilon^{ij}(\partial_i \bar{\theta}^1 \gamma_\mu \partial_j \theta^1 - \partial_i \bar{\theta}^2 \gamma_\mu \partial_j \theta^2), && (2.17)\\
0 &= \big((1-\gamma)\gamma_\mu \partial_i \theta^1\big)_\alpha g^{ij} \Pi^\mu_j, && (2.18)\\
0 &= \big((1+\gamma)\gamma_\mu \partial_i \theta^2\big)_\alpha g^{ij} \Pi^\mu_j, && (2.19)
\end{aligned}$$

con estas ecuaciones concluimos el análisis de la parte lagrangiana de la teoría GS.

2.2. Constricciones y formalismo Hamiltoniano

La acción (2.1) se puede escribir de muchas formas, para poder obtener el hamiltoniano, separaremos en las componentes espaciales y temporales de la hoja mundo. La lagrangiana de Green-Schwarz se puede rescribir como

$$\begin{aligned} L_{GS} &= -\frac{1}{2}\Big[\Pi_1^\mu \Pi_{1\mu} - \Pi_0^\mu \Pi_{0\mu} \\ &+ 2i\Pi_0^\mu\big(\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_1\theta^1 - \overline{\theta}^2\gamma^\mu\partial_1\theta^2\big) - 2i\Pi_1^\mu\big(\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_0\theta^1 - \overline{\theta}^2\gamma^\mu\partial_0\theta^2\big) \\ &+ 2\big(\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_0\theta^1\overline{\theta}^2\gamma_\mu\partial_1\theta^2 - \overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_1\theta^1\overline{\theta}^2\gamma_\mu\partial_0\theta^2\big)\Big] \end{aligned} \tag{2.20}$$

los momentos que se derivan de esta acción son

$$P_\mu = \Pi_{0\mu} - i\big(\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_1\theta^1 - \overline{\theta}^2\gamma_\mu\partial_1\theta^2\big), \tag{2.21}$$

$$p_{1\alpha} = i\Big(P_\mu - \big(\Pi_{1\mu} + i\overline{\theta}^2\gamma_\mu\partial_1\theta^2\big)\Big)\big(\overline{\theta}^1\gamma^\mu\big)_\alpha, \tag{2.22}$$

$$p_{2\alpha} = i\Big(P_\mu + \big(\Pi_{1\mu} + i\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_1\theta^1\big)\Big)\big(\overline{\theta}^2\gamma^\mu\big)_\alpha, \tag{2.23}$$

donde las dos últimas son constricciones, que denotaremos como

$$d_{1\alpha} = p_{1\alpha} - i\big(\Pi_{0\mu} - \Pi_{1\mu} - i\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_1\theta^1\big)\big(\overline{\theta}^1\gamma^\mu\big)_\alpha \approx 0, \tag{2.24}$$

$$d_{2\alpha} = p_{2\alpha} - i\big(\Pi_{0\mu} + \Pi_{1\mu} + i\overline{\theta}^2\gamma_\mu\partial_1\theta^2\big)\big(\overline{\theta}^2\gamma^\mu\big)_\alpha \approx 0. \tag{2.25}$$

Es conveniente simplificar la notación con el fin de que las ecuaciones sean más compactas, para esto definimos las siguientes cantidades

$$W_i^{1\mu} = i\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_i\theta^1, \qquad W_i^{2\mu} = i\overline{\theta}^2\gamma^\mu\partial_i\theta^2. \tag{2.26}$$

El hamiltoniano canónico que se obtiene es

$$\begin{aligned} H_{GS} &= \frac{1}{2}\big(P^2 + X'^2\big) - d_{1\alpha}\partial_0\theta^{1\alpha} - d_{2\alpha}\partial_0\theta^{2\alpha} \\ &+ i\partial_1 X^\mu\big(\overline{\theta}^a\gamma_\mu\partial_1\theta^a\big) - iP_\mu\big(\overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_1\theta^1 - \overline{\theta}^2\gamma^\mu\partial_1\theta^2\big) \\ &+ \overline{\theta}^1\gamma^\mu\partial_1\theta^1\overline{\theta}^1\gamma_\mu\partial_1\theta^1 + \overline{\theta}^2\gamma^\mu\partial_1\theta^2\overline{\theta}^2\gamma_\mu\partial_1\theta^2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

En la referencia de los austriacos la teoría de Green-Schwarz se puede ver como una teoría libre de la siguiente manera. La lagrangiana libre es

$$L_l = L_{GS} - d_{1\alpha}\big(\partial_1\theta^{1\alpha} + \partial_0\theta^{1\alpha}\big) + d_{2\alpha}\big(\partial_1\theta^{2\alpha} - \partial_0\theta^{2\alpha}\big), \tag{2.28}$$

de tal forma que al hacer las constricciones fuertes, $d_{1\alpha} = d_{2\alpha} = 0$ regresamos a la acción GS. Ahora haciendo los cálculos uno obtiene el hamiltoniano libre

$$H_l = \frac{1}{2}\big(P^2 + X'^2\big) + p_{1\alpha}\partial_1\theta^{1\alpha} - p_{2\alpha}\partial_1\theta^{2\alpha}, \tag{2.29}$$

que es la misma que tienen los austriacos [14], pero ellos estan en variables conformes, y en este trabajo estamos en variables del espacio fase. El origen de este hamiltoniano es más simple, ya que este viene de una redefinición de los multiplicadores de Lagrange.

El hamiltoniano de Dirac se escribe de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}[P_\mu, p^{A\alpha}, X^\mu, \theta^{A\alpha}] &= \int d\sigma\Big[\dot{X}^\mu P_\mu + \dot{\theta}^{1\alpha}p_{1\alpha} + \dot{\theta}^{2\alpha}p_{2\alpha} - L\Big], \qquad (2.30)\\
&= \int d\sigma\Big[\lambda^0 H + \lambda^1 H_1 - d_{1\alpha}\Lambda^{1\alpha} - d_{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}\Big], \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

donde H y H_1 son constricciones de primera clase dadas por

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\Big(\Pi_0^\mu\Pi_{0\mu} + \Pi_\mu^1\Pi_{1\mu}\Big), \qquad (2.32)\\
H_1 &= \Pi_0^\mu\Pi_{1\mu}, \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

$d_{1\alpha}$ y $d_{2\alpha}$ son constricciones y λ^0, λ^1, $\Lambda^{1\alpha}$ y $\Lambda^{2\alpha}$ son multiplicadores de Lagrange.

Para obtener la teoría libre necesitamos encontrar una redefinición de las constricciones $\Lambda^{1\alpha}$ y $\Lambda^{2\alpha}$. Sabemos de mecánica clásica que la evolución dinámica de cualquier variable A esta dado por el paréntesis de Poisson entre la variable A y el hamiltoniano $\mathcal{H}$

$$\frac{dA}{dt} = \{A, \mathcal{H}\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \qquad (2.34)$$

y para hacer bien los cálculos necesitamos saber como conmutan las variables de Grassmann $\theta^{a\alpha}$ y $p_{a\alpha}$. La definición del paréntesis de Poisson para funciones F y G que tienen variables que conmutan y anticonmutan esta dado por:

$$\begin{aligned}
\{F, G\} &= \Big(\frac{\partial F}{\partial X^\mu}\frac{\partial G}{\partial P_\mu} - \frac{\partial F}{\partial P_\mu}\frac{\partial G}{\partial X^\mu}\Big)\\
&+ (-)^{\epsilon_F}\Big(\frac{\partial^L F}{\partial\theta^{a\alpha}}\frac{\partial^L G}{\partial p_{a\alpha}} + \frac{\partial^L F}{\partial p_{a\alpha}}\frac{\partial^L G}{\partial\theta^{a\alpha}}\Big), \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

donde ϵ_F es la paridad de Grassmann de la función F, y las parciales con L representan la derivada izquierda de las funciones.

Con esta definición del paréntesis de Poisson para funciones con paridad de Grassmann par o impar, tenemos que

$$\{X^\mu, P_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \qquad \{\theta^{a\alpha}, p_{b\beta}\} = -\delta^a_b\delta^\alpha_\beta, \qquad (2.36)$$

entonces al usar los paréntesis de Poisson antes definidos obtenemos los siguientes resultados

$$
\begin{aligned}
\dot{X}^{\mu} &= \lambda^0\Pi_0^{\mu} + \lambda^1\Pi_1^{\mu} + i(\theta^1\gamma^{\mu}\Lambda^1) + i(\theta^2\gamma^{\mu}\Lambda^2), && (2.37)\\
\dot{P}_{\mu} &= \partial_1\Big(\lambda^0\Pi_{1\mu} + \lambda^1\Pi_{0\mu} - i(\theta^1\gamma^{\mu}\Lambda^1) + i(\theta^2\gamma^{\mu}\Lambda^2)\Big), && (2.38)\\
\dot{p}_{a\alpha} &= (-)^a i\Big[(\lambda^0 + (-)^a\lambda^1)(\Pi_{0\mu} + (-)^a\Pi_{1\mu}) + i(\theta^a\gamma_{\mu}\Lambda^a)\Big](\gamma^{\mu}\partial_1\theta^a)_{\alpha} \\
&+ (-)^a i\partial_1\Big[\big[(\lambda^0 + (-)^a\lambda^1)(\Pi_{0\mu} + (-)^a\Pi_{1\mu}) + i(\theta^a\gamma_{\mu}\Lambda^a)\big](\gamma^{\mu}\theta^a)_{\alpha}\Big] \\
&- i(\gamma^{\mu}\Lambda^a)_{\alpha}\Big(P_{\mu} + (-)^a(X'_{\mu} - W^a_{1\mu})\Big), && (2.39)\\
\dot{\theta}^{a\alpha} &= \Lambda^{a\alpha}, && (2.40)
\end{aligned}
$$

que al sustituir en $\dot{d}_{1\alpha}$ y $\dot{d}_{2\alpha}$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\dot{d}_{1\alpha} &= -2i\Big[(\lambda^0 - \lambda^1)(\gamma^{\mu}\partial_1\theta^1) + (\gamma^{\mu}\Lambda^1)\Big]_{\alpha}\big(\Pi_{0\mu} - \Pi_{1\mu}\big) = 0, && (2.41)\\
\dot{d}_{2\alpha} &= -2i\Big[-(\lambda^0 - \lambda^1)(\gamma^{\mu}\partial_1\theta^2) + (\gamma^{\mu}\Lambda^2)\Big]_{\alpha}\big(\Pi_{0\mu} + \Pi_{1\mu}\big) = 0, && (2.42)
\end{aligned}
$$

que nos de la redefinición de los multiplicadores de Lagrange $\Lambda^{1\alpha}$ y $\Lambda^{2\alpha}$ como

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}^1 &= (\lambda^0 - \lambda^1)\partial_1\theta^1 + \Lambda^1, && (2.43)\\
\tilde{\Lambda}^2 &= -(\lambda^0 + \lambda^1)\partial_1\theta^2 + \Lambda^2, && (2.44)
\end{aligned}
$$

con lo cual queda redefinido todo el hamiltoniano (2.31) como

$$
\mathcal{H} = \int d\sigma\Big[\lambda^0\tilde{H} + \lambda^1\tilde{H}_1 - d_{1\alpha}\tilde{\Lambda}^{1\alpha} - d_{2\alpha}\tilde{\Lambda}^{2\alpha}\Big], \qquad (2.45)
$$

que al sustituir las redefiniciones de los multiplicadores de Lagrange (2.43) y (2.44) en el hamiltoniano (2.45) uno obtiene

$$
\begin{aligned}
\tilde{H} &= H + d_{1\alpha}\partial_1\theta^1 - d_{2\alpha}\partial_1\theta^2, && (2.46)\\
\tilde{H}_1 &= H_1 - d_{1\alpha}\partial_1\theta^1 - d_{2\alpha}\partial_1\theta^2, && (2.47)
\end{aligned}
$$

y al sustituir las constricciones (2.24) y (2.25) en las constricciones de primera clase $\tilde{H}$ y $\tilde{H}_1$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\tilde{H} &= \frac{1}{2}\Big(P^2 + X'^2\Big) + p_{1\alpha}\partial_1\theta^{1\alpha} - p_{2\alpha}\partial_1\theta^{2\alpha}, && (2.48)\\
\tilde{H}_1 &= P_{\mu}X'^{\mu} - p_{1\alpha}\partial_1\theta^{1\alpha} - p_{2\alpha}\partial_1\theta^{2\alpha}, && (2.49)
\end{aligned}
$$

donde (2.48) es el hamiltoniano que los Austriacos [14] llaman hamiltoniano libre. Entonces hemos visto que $\tilde{H}$ y $\tilde{H}_1$ son cantidades conservadas para cualquier λ^0, λ^1 y $\tilde{\Lambda}^{a\alpha}$, por lo que no se necesitan constricciones secundarias ni condiciones adicionales en los multiplicadores de Lagrange. Por lo tanto, el hamiltoniano (2.45) es consistente con las constricciones $\tilde{H} = \tilde{H}_1 = d_{a\alpha} = 0$.

Ahora lo que falta es separar las constricciones $d_{a\alpha}$ en constricciones de primera y de segunda clase.

2.3. Separación de constricciones y paréntesis de Dirac

Como se sabe hay dos tipos de constricciones en el formalismo de Dirac. Las constricciones de primera clase que cierran en un álgebra y generán las simetrías de norma de la teoría, y las constricciones de segunda clase que no forman un álgebra cerrada y que pueden usarse para eliminar variables redundantes modificando el paréntesis de Poisson por el paréntesis de Dirac.

En el modelo GS tenemos las constricciones $d_{a\alpha}$ que forman el álgebra siguiente

$$\begin{aligned} \{d_{1\alpha}, d_{1\alpha}\} &= 2i\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\big(\Pi_{0\mu} - \Pi_{1\mu}\big) \equiv 2i\Gamma^{1}_{\alpha\beta}, && (2.50)\\ \{d_{2\alpha}, d_{2\alpha}\} &= 2i\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\big(\Pi_{0\mu} + \Pi_{1\mu}\big) \equiv 2i\Gamma^{2}_{\alpha\beta}, && (2.51)\\ \{d_{a\alpha}, \Pi^{-}_{\mu}\} &= 2i\gamma_{\mu\alpha\beta}\partial_1\theta^{a\beta}, && (2.52)\\ \{d_{a\alpha}, \Pi^{+}_{\mu}\} &= 0, && (2.53)\\ \{\Pi^{+}_{\mu}, \Pi^{-}_{\nu}\} &= 2\eta_{\mu\nu}\partial_1\delta(\sigma-\sigma'), && (2.54)\\ \{d_{a\alpha}, \partial_1\theta^{a\beta}\} &= \delta^{\beta}_{\alpha}\partial_1\delta(\sigma-\sigma'), && (2.55) \end{aligned}$$

la cual no es un álgebra de Lie cerrada, y aún no sabemos cuales son las constricciones de segunda clase ya que se encuentran mezcladas en las constricciones $d_{1\alpha}$ y $d_{2\alpha}$

Sabiendo esto, ahora uno desea separar las constricciones en primera y segunda clase, para esto usaremos los proyectores

$$\Gamma^{a}_{\alpha\beta} \equiv \gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\big(\Pi_{0\mu} - \Pi_{1\mu}\big), \tag{2.56}$$

la forma de este proyector ayudará a separar las constricciones $d_{a\alpha}$ en constricciones de primera clase y en constricciones de segunda clase, de tal forma que

$$\tilde{d}^{1\alpha} = d_{1\beta}\Gamma^{1\beta\alpha}, \qquad\qquad \tilde{d}^{2\alpha} = d_{2\beta}\Gamma^{2\beta\alpha}, \tag{2.57}$$

resultan ser constricciones de primera clase.

Veamos como cierra el álgebra de primera clase. La forma de las constricciones $\tilde{H}$ y $\tilde{H}_1$ se obtuvo en la sección anterior, y cierran en el álgebra de la cuerda de Polyakov

$$\begin{aligned} \{\tilde{H}[\xi_1], \tilde{H}[\xi_2]\} &= \tilde{H}_1[\xi_1\xi_2' - \xi_1'\xi_2],\\ \{\tilde{H}[\xi_1], \tilde{H}_1[\xi_2]\} &= \tilde{H}[\xi_1\xi_2' - \xi_1'\xi_2],\\ \{\tilde{H}_1[\xi_1], \tilde{H}_1[\xi_2]\} &= \tilde{H}_1[\xi_1\xi_2' - \xi_1'\xi_2]. && (2.58) \end{aligned}$$

Esta es una consecuencia de la invariancia de la acción ante reparametrizaciones, bajo la cual x^{μ} y θ^{a} transforman como escalares. Las constricciones fermiónicas de primera clase cierran como

$$\begin{aligned} \{\tilde{H}[\xi_1], \tilde{d}^{a\alpha}[\xi_2]\} &= -(-)^{a}\tilde{d}^{a\alpha}[\xi_1\xi_2' - \xi_1'\xi_2],\\ \{\tilde{H}_1[\xi_1], \tilde{d}^{a\alpha}[\xi_2]\} &= -\tilde{d}^{a\alpha}[\xi_1\xi_2' - \xi_1'\xi_2]. && (2.59) \end{aligned}$$

Y el cierre del álgebra de $\tilde{d}^{a\alpha}$ con ella misma

$$\begin{aligned}\{\tilde{d}^a_\alpha[\xi_1], \tilde{d}^b_\beta[\xi_2]\} &= 4i\delta^{ab}\Big[\big(\tilde{H} + (-)^a\tilde{H}_1\big)\Gamma^a_{\alpha\beta} \\ &- (-)^a\big(2\tilde{d}^a_{(\alpha}\theta'^a_{\beta)} + \tilde{d}^a\gamma_\mu\theta'^a\gamma^\mu_{\alpha\beta)}\big)\Big][\xi_1\xi_2]. \end{aligned} \tag{2.60}$$

De esta forma se verifica la cerradura del álgebra de primera clase. Al aplicar la proyección (2.57) uno separa la mitad de las constricciones de $d_{1\alpha}$, al hacer esto las 16 componentes de las constricciones fermiónicas se dividieron en 2; esto quiere decir que $\tilde{d}^{1\alpha}$ son 8 constricciones de primera clase, y que $\tilde{d}^{2\alpha}$ son 8 constricciones de primera clase. Entonces las componentes sobrantes son constricciones de segunda clase

$$\chi^{1\alpha} = d^{1\beta}\Gamma^2_{\beta\alpha}, \qquad \chi^{2\alpha} = d^{2\beta}\Gamma^1_{\beta\alpha}. \tag{2.61}$$

El paréntesis de Poisson de $\chi^{a\alpha}$ con $\tilde{H}$, $\tilde{H}_1$ y $\tilde{d}^{a\alpha}$ son nulos usando las constricciones de la teoría. Por lo tanto la prueba de las constricciones de primera clase $\tilde{H}$, $\tilde{H}_1$ y $\tilde{d}^{a\alpha}$ esta completa. El paréntesis de Poisson entre las variables $\chi^{a\alpha}$ esta dado por

$$\{\chi^1_\alpha, \chi^1_\beta\} = -4i\Big(\Pi^2_0 - \Pi^2_1\Big)\Gamma^2_{\alpha\beta}, \tag{2.62}$$

$$\{\chi^2_\alpha, \chi^2_\beta\} = -4i\Big(\Pi^2_0 - \Pi^2_1\Big)\Gamma^1_{\alpha\beta}, \tag{2.63}$$

y como las matrices Γ^1 y Γ^2 son no singulares, entonces tienen inversa, y podemos construir el paréntesis de Dirac. Tenemos

$$\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = C_{\alpha\beta}, \tag{2.64}$$

y el paréntesis de Dirac esta definido como

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\}(C_{\alpha\beta})^{-1}\{\chi_\beta, B\}. \tag{2.65}$$

Entonces en nuestro caso el paréntesis de Dirac es

$$\begin{aligned}\{A, B\}^* &= \{A, B\} + \int \{A, \chi^1_\alpha\}\frac{(\Gamma^2_{\alpha\beta})^{-1}}{4i\big(\Pi^2_0 - \Pi^2_1\big)}\{\chi^1_\beta, B\}d\sigma \\ &+ \int \{A, \chi^2_\alpha\}\frac{(\Gamma^1_{\alpha\beta})^{-1}}{4i\big(\Pi^2_0 - \Pi^2_1\big)}\{\chi^2_\beta, B\}d\sigma. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Este es el paréntesis de Dirac de la supercuerda GS, el cual si cumple con la propidad de que una constricción de segunda clase con cualquier variable dinámica es cero.

$$\{\chi^1_\alpha, B\}^* = \{\chi^2_\alpha, B\}^* = 0, \tag{2.67}$$

con esto queda probado el formalismo de Dirac, en consecuencia las constricciones de primera clase son

$$
\begin{aligned}
\tilde{H} &= \frac{1}{2}\left(P^2 + X'^2\right) + p_{1\alpha}\partial_1\theta^{1\alpha} - p_{2\alpha}\partial_1\theta^{2\alpha}, && (2.68)\\
\tilde{H}_1 &= P_\mu X'^\mu - p_{1\alpha}\partial_1\theta^{1\alpha} - p_{2\alpha}\partial_1\theta^{2\alpha}, && (2.69)\\
\tilde{d}^{1\alpha} &= d_{1\beta}\Gamma^{1\beta\alpha}, && (2.70)\\
\tilde{d}^{2\alpha} &= d_{2\beta}\Gamma^{2\beta\alpha}, && (2.71)
\end{aligned}
$$

y las constricciones de segunda clase

$$
\chi^{1\alpha} = d^{1\beta}\Gamma^2_{\beta\alpha}, \qquad \chi^{2\alpha} = d^{2\beta}\Gamma^1_{\beta\alpha}. \tag{2.72}
$$

Ahora que nos hemos familiarizado con el formalismo canónico y de Dirac de la teoría GS, podemos pasar al método de Berkovits para cuantizar covariantemente esta teoría.

2.4. Conteo de Grados de libertad

Una vez que hemos separado las constricciones de la teoría GS en primera y en segunda clase, es fácil hacer el conteo de grados de libertad bosónicos y fermiónicos. Como la supercuerda GS es una teoría supersimétrica el número de grados de libertad bosónicos y fermiónicos deben ser iguales.

Tenemos las variables bosónicas en el espacio fase x^μ y p_μ que dan un total de 20, las constricciones bosónicas de primera clase son $\tilde{H}$ y $\tilde{H}_1$, entonces el conteo de grados de libertad es $10 * 2 - 2 * 2 = 8 * 2$, que son 8 grados de libertad bosónico.

Las variables fermiónicas θ^a son espinores de Majorana-Weyl que tienen 16 componentes reales, tomando en cuenta $a = 1, 2$ tenemos el par canónico de variables p^a. Las constricciones fermiónicas d_a tienen la mitad que son de primera clase $\tilde{d}_a$ y la mitad que son de segunda χ^a, de tal forma que los grados de libertad fermiónicos son $(16 * 2) * 2 - 16 * 2 - 16 = 8 * 2$, que son 8 grados de libertad fermiónicos, que concuerda con lo eperado en una teoría supersimétrica.

Capítulo 3

Cuantización BRST.

3.1. Agregando variables fantasmas a la acción.

La cuantización BRST estándar consiste en agregar variables fantasmas a la acción que cierran un álgebra de Lie. Después hay que encontar la carga BRST nilpotente cuya cohomología representa los estados físicos. En este capítulo presentaremos un resumen del método BRST estándar, si el lector desea obtener mayor información sobre el tema se recomienda las siguientes lecturas [8, 9, 10, 11]. Antes de presentar formalmente el método de cuantización BRST veamos una introducción. Los fantasmas fueron introducidos por primera vez por Feynman, con el fin de mantener la unitaridad de una teoría de Yang-Mills. Se les dió el nombre de fantasmas porque, a pesar de ser escalares bajo transformaciones de coordenadas, no tienen estadística de bosoón, es decir, violan el teorema de espín-estadística por lo cual no son observables. Estos campos adquirieron más sentido cuando Faddeev y Popov mostraron que los fantasmas podían obtenerse como resultado de un cálculo correcto de la medida de la integral de trayectoria, y por ésto se les dió el nombre de fantasmas de Faddeev-Popov. Posteriormente con el trabajo de Becchi-Rouet-Stora y Tyutin, éstos adquirieron un caracter más formal ya que se mostró que son parte esencial de una nueva simetría, que actualmente se conoce con el nombre de simetría BRST. Esta simetría tiene dos caraterísticas importantes: 1.- Esta es el residuo de la simetría de norma una vez que ésta se ha fijado, es decir, es una simetría que prevalece aún a pesar de que se haya elegido una norma. 2.- A diferencia de la simetría de norma, esta simetrái es de caracter global, es decir, el parámetro de la transformación no depende de la posición. Además este parámetro es un número de Grassmann, por lo cual la simetría BRST es un tipo de supersimetría ya que la transformación relaciona bosones con fermiones. Las variables de Grassmann pueden considerarse como el límite clásico de campos fermiónicos, que están cuantizados con anticonmutadores con el objeto de satisfacer la estadística de Fermi-Dirac. En efecto, si consideramos el límite clásico ($\hbar \to 0$) del anticonmutador $\{\psi_a, \psi_b\} = \hbar\delta_{ab}$ obtenemos que el álgebra satisfecha por las variables $\theta_a = \lim_{\hbar \to 0} \psi_a$ está dada por $\theta_a\theta_b + \theta_b\theta_a = 0$. En particular $\theta_a^2 = 0$. Las relaciones anterioares definen la estructura básica de un álgebra de Grassmann.

3.2. Método BRST estándar

La cuantización BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tyupin) fue intrdocida para cuantizar sistemas con una simetría de norma local G. Después de fijar la norma, la simetría BRST es un remanente de la simetría de norma local. Veamos como atacar el problema. Considere un sistema con invariancia de norma generada por las constricciones K_i las cuales forman un álgebra cerrada de Lie de dimensión finita

$$\{K_i, K_k\} = f^k_{ij} K_k \tag{3.1}$$

con f^k_{ij} las constantes de estructura del grupo G. Uno ahora define un operador hermitiano nilpotente que conmuta con el hamiltoniano, y el cual actúa sobre todos los campos como una transformación de norma fermiónica. El parámetro de norma es reemplazado por una variable que anticonmuta c^i llamada fantasma. El operador a nivel cuántico cuya cohomología representa los estados físicos se llama operador BRST $\hat{Q}$. Una expresión explícita para la carga BRST a nivel clásico esta dada por

$$\begin{aligned} Q &= c^i\big(K_i - \frac{1}{2} f^k_{ij} c^j b_k\big) \\ &= c^i\big(K_i + K_i^{\text{fantasma}}\big), \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde hemos introducido los llamados antifantasmas b_i, los cuales obedecen la regla de conmutación con c^i

$$\{c^i, b_j\} = \delta^i_j. \tag{3.3}$$

En los cálculos siguientes, c^i y b_j serán colectivamente referidos como fantasmas. La primera parte de Q claramente actúa en los caminos que corresponden a los campos. La segunda parte es necesaria para hacer Q nilpotente. Este actúa como una transformación de norma sobre los campos fantasma. La nilpotencia de Q se verifica fácilmente usando la simetría del álgebra. Con las relaciones de anticonmutación y la antisimetría de las constantes de estructura, encontramos sin dificultad que el cuadrado de Q es

$$Q^2 = \frac{1}{4} f^k_{[ij} f^m_{l]k} (c^j c^i c^l b_m) = 0. \tag{3.4}$$

donde en el último paso fue utilizada la identidad de Jacobi. La transformación BRST actúa sobre los fantasmas como

$$\delta c^i = \{Q, c^i\} = -\frac{1}{2} f^i_{kl} c^k c^l \tag{3.5}$$

$$\delta b_i = \{Q, b_i\} = K_i - \frac{1}{2} f^k_{ij} c^j b_k = K_i + K_i^{fantasma} = \tilde{K}_i, \tag{3.6}$$

donde estas variables $\tilde{K}_i$ obedecen

$$\{\tilde{K}_i, \tilde{K}_j\} = f_{ij}^k \tilde{K}_k, \tag{3.7}$$

es decir, las $\tilde{K}_i$ también satisfacen la simetría del álgebra, pero en contraste a las K_i, estas incorporan los grados de libertad de los fantasmas. La contribución de los fantasmas en la acción puede escribirse para ser la transformada BRST de un término de la forma $(b^i F_i)$ donde F_i se llama la función para fijar la norma; es decir, $\mathcal{L}^{(fantasma)} \approx \delta(b^i F_i)$. Esto garantiza la invariancia BRST de la acción total. Por lo tanto la invariancia BRST es una simetría de la acción con la norma fija. Finalmanete, uno también introduce el operador de número fantasma

$$N_{(fan)} = \sum_{i=1}^{\text{dim G}} b_i c^i, \tag{3.8}$$

donde b_i y c^i tienen número fantasma $+1$ y -1 respectivamente.

Ahora consideremos el espacio de Hilbert de la teoría. Se dice que los eigenestados del hamiltoniano son invariantes BRST si estos son aniquilados por Q

$$Q|\psi\rangle = 0, \tag{3.9}$$

estos estados son independientes de la elección de norma y es un requerimiento para los estados físicos. Hay dos tipos de esatdos que son invariantes BRST.

Los primeros son estados cualquiera con la forma

$$|\psi\rangle = Q|\lambda\rangle \tag{3.10}$$

que trivialmente es invariante BRST debido a la nilpotencia de Q, y los estados $|\psi\rangle$ y $|\lambda\rangle$ forman un doblete BRST. Ellos difieren en la carga fantasma por una unidad, $|\psi\rangle$ tiene norma cero, debido a la hermiticidad y nilpotencia de la carga BRST $\langle\lambda|Q^\dagger Q|\lambda\rangle = 0$. Estos son elementos desacoplados en los elementos de la matriz S. (Recordemos que Q conmuta con el hamiltoniano). Ahora miremos los segundos estados que tienen la forma

$$Q|\psi\rangle = 0, \qquad |\psi\rangle \neq Q|\lambda\rangle, \tag{3.11}$$

estos estados forman singletes BRST. Estos estados también serán llamados estados físicos. Dos estados $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle$ se dice que son equivalentes si

$$|\psi\rangle - |\psi'\rangle = Q|\lambda\rangle. \tag{3.12}$$

Las clases de equivalencia de estos estados son llamadas las clases de la cohomología BRST. Claramente todos los estados con una clase de cohomología dada tienen el mismo número fantasma. Los elementos de la matriz S son independientes, los cuales uno usa para representar una clase cohomológica $\langle\psi_1|S|\psi_2\rangle = \langle\psi_1'|S|\psi_2'\rangle$, para ψ y ψ' relacionados como en (3.12). Si $|\psi\rangle = \psi|0\rangle$ es un singlete BRST físico, entonces $\{Q,\psi\} = 0$. Para estados son excitaciones fantasmas esto implica $\{K_i,\psi\} = 0$, donde estos estados son identificados como las partículas físicas.

Otra forma de estudiar la simetría BRST es por medio de la integral de trayectoria, para esto cosideramos una teoría con campos ϕ_α los cuales tienen una simetría de norma. La transformación de norma satisface el álgebra de Lie (3.1), donde podemos fijar la norma imponiendo alguna condición de norma apropiada

$$F^A(\phi_\alpha) = 0. \tag{3.13}$$

Ahora usando el truco de Fadeeve-Popov, podemos escribir la integral de trayectoria como

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathcal{D}\phi}{V_{(norma)}} e^{-S_0} &\approx \int \mathcal{D}\phi\big(F^A(\phi)=0\big)\mathcal{D}b_A\mathcal{D}c^i e^{S_0-\int b_A\left(K_iF^A\right)c^i} \\ &\approx \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}B_A\mathcal{D}b_A\mathcal{D}c^i e^{S_0-i\int B_AF^A(\phi)-\int b_A\left(K_iF^A\right)c^i} \\ &= \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}B_A\mathcal{D}b_A\mathcal{D}c^i e^{S_{cla}},\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde

$$S_{cla} = S_0 + S_1 + S_2, \qquad S_1 = i\int B_AF^A(\phi), \qquad S_2 = \int b_A\big(K_iF^A\big)c^i, \tag{3.15}$$

notemos que el índice i esta asociado con el fantasma c^i que es una correspondencia uno a uno con los parámetros de la transformación de norma en (3.1). El índice A esta asociado con el fantasma b_A y el antifantasma B^A que es una correspondencia uno a uno con la condición de fijar la norma (3.13).

La acción completa en la norma fija es invariante bajo la transformación BRST

$$\delta_{BRST}\phi_\alpha = -i\epsilon c^i K_i\phi_\alpha \tag{3.16}$$

$$\delta_{BRST}b_A = -\epsilon B_A \tag{3.17}$$

$$\delta_{BRST}c^i = -\frac{1}{2}\epsilon c^j c^k f^i_{jk} \tag{3.18}$$

$$\delta_{BRST}B_A = 0. \tag{3.19}$$

En esta transformación ϵ tiene que ser una variable anticonmutativa. La primera transformación es sólo la transformación de norma original sobre ϕ_α, pero con el parámetro de norma remplazado por el fantasma c^i.

Los términos extra en la acción se deben a los fantasmas y a la norma fija en la integral de trayectoria que puede ser escrita en términos de la trnasformación BRST

$$\delta_{BRST}\big(b_AF^A\big) = \epsilon\big[B_AF^a(\phi) + b_Ac^iK_iF^A(\phi)\big]. \tag{3.20}$$

El concepto de la simetría BRST es importante por la siguiente razón. Cuando introducimos los fantasmas duarante la fijación de la norma de la teoría, esta ya no es invariante bajo la simetría original. La simetría BRST es una extensión de la simetría original, que permanece intacta.

Ahora consideremos una pequeña variación en la condición de fijar la norma δF, y miremos este cambio en la amplitud física.

$$\begin{aligned} \epsilon\delta_F\langle\psi|\psi'\rangle &= -i\langle\psi|\delta_{BRST}\big(b_A\delta F^A\big)|\psi'\rangle \\ &= \langle\psi|\{Q_{BRST}, b_A\delta F^A\}|\psi'\rangle, \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde Q_{BRST} es la carga conservada correspondiente a la variación BRST. La amplitud no debe variar ante variaciones de las condiciones de norma y de esto se concluye que

$$Q^\dagger_{BRST} = Q_{BRST}, \qquad Q_{BRST}|\Psi\rangle = 0, \tag{3.22}$$

donde $|\Psi\rangle$ es un estado físiso, entonces todos los estados físicos deben ser invariantes BRST.

Lo que sigue es checar que esta carga BRST es conservada, o equivalentemente que ésta conmuta con el cambio en el hamiltoniano ante la variación de las condiciones de norma. La conservación de la carga BRST es equivalente a afirmar que nuestra simetría de norma original permanece intacta, y no queremos comprometer esta simetría en la teoría cuántica al cambiar nuestras condiciones de fijar la norma

$$0 = \big[Q_{BRST}, \delta H\big] = \big[Q_{BRST}, \delta_{BRST}(b_A F^A)\big] \tag{3.23}$$

$$= \big[Q_{BRST}, \{Q_{BRST}, b_A\delta F^A\}\big] = \big[Q^2_{BRST}, b_A\delta F^A\big]. \tag{3.24}$$

Esto debe ser cierto para cualquier cambio arbitrario en la condición de norma y se concluye que

$$Q^2_{BRST} = 0, \tag{3.25}$$

esto quiere decir que la carga BRST debe ser nilpotente para que nuestra descripción de la teoría cuántica sea consistente. Si por ejemplo hay una anomalía en la simetría de norma a nivel cuántico, esto dará como consecuancia que el operador BRST sea no nilpotente en la teoría cuántica. Esto implica que la teoría cuántica así establecida es inconsistente: entonces tenemos que fijar una simetría clásica que no es simetría a nivel cuántico.

La nilpotencia de la carga BRST tiene consecuencias fuertes. Considere el estado $Q|\chi\rangle$, este estado será aniquilado por Q si $|\chi\rangle$ es un estado físico. Sin embargo, este estado es ortogonal a todos los estados físicos incluyendose él mismo y en consecuencia este representa un estado nulo. Por lo tanto, este estado debe ser ignorado cuando se discute la teoría cuántica. Dos estdos relacionados por

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle + Q|\chi\rangle \tag{3.26}$$

tienen el mismo producto interno y son indistinguibles. Este es un remanente en la versión de la norma fija de la simetría de norma original. El espacio de Hilbert de los estados físicos es la cohomología de la carga BRST Q, es decir, los estados físicos son estados cerrados BRST módulo estados exactos BRST

$$Q|\text{físico}\rangle = 0, \qquad |\text{físico}\rangle \neq Q|\text{algo}\rangle, \tag{3.27}$$

que deja ver que la cohomología de la carga BRST Q representa solamenete estados físicos de una teoría.

3.3. Método BFT: constricciones de segunda clase a primera clase.

El objetivo del formalismo Batalin-Fradkin-Tyutin (BFT) consiste en desarrollar un método sistemático de conversión de un conjunto general de constricciones en un álgebra de constricciones de primera clase, para esto uno añade un número apropiado de nuevas variables al espacio fase original. Estas nuevas variables tienen su propia estructura simpléctica. Este formalismo nos proporciona un procedimiento para la conversión de constricciones de segunda clase a primera clase en un espacio fase extendido, y un procedimiento para modificar cualquier observable, incluida cualquier constricción de primera clase previa, de tal forma que podemos construir un álgebra de norma efectiva de primera clase, y una acción efectiva consistente con el procedimiento de conversión completo. Este método esta basado en la teoría de perturbación homológica y es en este aspecto muy similar a la construcción iterativa de la carga BRST dada en un álgebra de norma.

Supongamos que tenemos un conjunto de constricciones donde algunas constricciones son de segunda clase χ_α

$$\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} = C_{\alpha\beta}, \tag{3.28}$$

y algunas son de primera clase ϕ_m en el espacio fase definido por las coordenadas z^i con la forma simpléctica estándar σ^{ij}. Ahora añadiendo nuevas variables ξ_α con estructura simpléctica $\omega^{\alpha\beta}$ al espacio fase original. La idea es construir un nuevo conjunto de constricciones $\tilde{\chi}_\alpha$ que satisfagan el álgebra

$$\{\tilde{\chi}_\alpha, \tilde{\chi}_\beta\} = 0. \tag{3.29}$$

Para resolver $\tilde{\chi}_\alpha$ se propone una solución en serie de potencias de las nuevas variables

$$\tilde{\chi}_\alpha(z,\xi) = \sum_n X_\alpha^{(n)}, \tag{3.30}$$

donde el término $n=0$ coincide con la constricción original χ_α y $X_\alpha^{(n)}$ es un término proporcional a ξ^n en la expansión de la serie. La solución, salvo una transformación canónica en el espacio fase extendido es

$$X_\alpha^{(0)} = \chi_\alpha, \qquad X_\alpha^{(1)} = X_{\alpha\beta}\xi^\beta, \qquad X_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma\delta}X_{\beta\delta} = -C_{\alpha\beta}(z), \tag{3.31}$$

y para los siguientes términos $n \geq 2$ en la serie de potencias

$$X_\alpha^{(n+1)} = -\frac{1}{n+2}\xi^\beta\omega_{\beta\gamma}X^{\gamma\delta}X_{\delta\alpha}^{(n)}, \tag{3.32}$$

donde

$$X_{\alpha\beta}^{(1)} = \{\chi_{[\alpha}, X_{\beta]}^{(1)}\}, \tag{3.33}$$

$$X_{\alpha\beta}^{(n)} = \sum_{m=0}^{n}\{X_\alpha^{(n-m)}, X_\beta^{(m)}\} + \sum_{m=0}^{n-2}\{X_\alpha^{(n-m)}, X_\beta^{(m+2)}\}_\xi, \tag{3.34}$$

donde el primer término de (3.34) esta evaluado usando sólo las variables del espacio fase original y el segundo usa sólo las nuevas variables.

La misma idea también trabaja para cualquier función extendida $f(z)$ de las variables orginales z a una nueva función $\tilde{f}(z,\xi)$ como una solución en serie de potencias de las nuevas variables ξ. Esta serie debe satisfacer la condición

$$\{\tilde{\chi}_\alpha, \tilde{f}\} = 0, \qquad \tilde{f} = \sum_n F^{(n)}, \tag{3.35}$$

donde $F^0 = \tilde{f}(z,0) = f(z)$ y $F^{(n)}$ es el término proporcional a ξ^n. La solución es

$$F^{(n+1)} = -\frac{1}{n+1}\xi^\beta\omega_{\beta\gamma}X^{\gamma\delta}F_\delta^{(n)}, \tag{3.36}$$

donde

$$F_\alpha^{(0)} = \{\chi_\alpha, f(z)\}, \tag{3.37}$$

$$F_\alpha^{(1)} = \{X_\alpha^{(1)}, f(z)\} + \{X_\alpha^{(2)}, F^{(1)}\}_\xi, \tag{3.38}$$

$$F_\alpha^{(n)} = \sum_{m=0}^{n}\{X_\alpha^{(n-m)}, F^m\} + \sum_{m=0}^{n-2}\{X_\alpha^{(n-m)}, F^{(m+2)}\}_\xi + \{X_\alpha^{(n+1)}, F^{(1)}\}_\xi. \tag{3.39}$$

En particular, podemos extender las constricciones de primera clase originales ϕ_m a un nuevo conjunto de constricciones $\tilde{\phi}_m$ de tal forma que todas las constricciones nuevas cierren en un álgebra de norma nueva en el espacio fase extendido. En los cálculos que haremos para la supercuerda GS sólo será necesario transformar las constricciones de segunda clase hasta términos de segundo orden en las nuevas variables.

Para hacer consistentemente el álgebra de primera clase efectiva, es necesario transformar las constricciones de primera clase originales a un nuevo conjunto de constricciones de primera clase en el espacio fase extendido. De tal forma que las nuevas constricciones $\tilde{\phi}_m$ sean compatibles con las constricciones obtenidas anteriormente $\tilde{\chi}$. Como se hizo con las constricciones de segunda clase χ_α para pasarlas a primera clase $\tilde{\chi}$, proponemos una solución de $\tilde{\phi}$ en serie de potencias

$$\tilde{\phi}_m(z,\xi) = \sum_n Y_m^{(n)} \tag{3.40}$$

donde

$$Y_m^{(0)} = \phi_m, \qquad Y_m^{(1)} = Y_{mn}\xi^n, \qquad etc, \tag{3.41}$$

son las correcciones a orden cero, a primer orden y así sucesivamente. La construcción de estas nuevas constricciones se sigue igual que el el caso de las constricciones de segunda clase, con la diferencia que ahora debe satisfacer las siguientes dos condiciones

$$\{\tilde{\phi}_m, \tilde{\phi}_n\} = 0, \qquad \{\tilde{\phi}_m, \tilde{\chi}_\alpha\} = 0, \tag{3.42}$$

ó proporcional a constricciones. De tal forma que todas las constricciones originales (ϕ_m, χ_α) de primera y segunda clase, se transforman a un conjunto de nuevas constricciones de primera clase $(\tilde{\phi}_m, \tilde{\chi}_\alpha)$, que cierran en un álgebra de norma efectiva en un espacio fase extendido.

Un corolario interesante del formalismo BFT es que uno puede recuperar el paréntesis de Dirac original usando

$$\{\tilde{A}, \tilde{B}\}\big|_{\xi=0} = \{A, B\}_D, \tag{3.43}$$

para cualquiera dos funciones A y B en el espacio fase original, que se pueden extender a $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$. Lo cual permite enteder la relación que hay entre el álgebra en este espacio fase extendido y el paréntesis de Dirac construido a partir de las constricciones de segunda clase originales.

Una aplicación del formalismo BFT a la supercuerda GS se hará en un capítulo posterior.

Parte II

Cuantización covariante de la supercuerda GS

Capítulo 4

La cuantización covariante de la supercuerda GS y el formalismo de Berkovits.

La cuantización de la supercuerda en el formalimso GS puede realizarse usando coordenaras del cono de luz. Esto rompe la covariancia manifiesta del formalismo. El otro formalismo para cuantizar la supercuerda el RNS puede usarse con éxito para obtener el espectro y en algunos casos las amplitudes de dispersión. Este es el formalismo más usado actualmente y puede encontrarse en los libros de texto de cuerdas usuales. La desventaja de este formalismo es que no es manifiestamente covariante en el espacio tiempo. Esto implica serios problemas para la cuantización en fondos no triviales como AdS y fondos que tienen asociados flujos tipo Ramond-Ramond. En el caso de fondos planos o triviales un mecanismo de cuantización apoyado en la proyección GSO puede implementarse obteniendo el resultado correcto (estados físicos) para el espectro de la supercuerda.

Podríamos preguntarnos si es posible construir un formalismo intermedio que tenga las virtudes de la formulación GS y RNS sin sus respectivas desventajas. Una propuesta en esta dirección fue realizada por Berkovits en el 2000 [19].

A continuación veremos las propiedades que tiene este formalismo para lograr la cuantización covariante de la supercuerda.

4.1. El formalismo de Berkovits

Existen dos perspectivas distintas para estudiar el método de Berkovits. Una de éstos consiste en relacionar la propuesta de Berkovits con el formalismo RNS y/o el GS. En particular la relación entre el formalismo GS y el formalismo de Berkovits ha sido estudiado en [29]. Estos autores han probado que el formalismo propuesto inicialmente por Berkovits es equivalente al formalismo GS y por tanto todos los resultados obtenidos usando GS pueden aplicarse también para el formalismo de Berkovits. El inconveniente de esta prueba de equivalencia es que solo puede realizarse en coordenadas del cono de luz. El objetivo del último capítulo de esta Tesis "Transformaciones de similaridad" será exponer esta prueba de equivalencia.

En esta sección realizaremos una introducción a los principales ingredientes del formalismo de Berkovits y veremos los problemas que este formalismo puede atacar y que antes resultaban muy difíciles, o imposibles usando RNS ó GS.

El formalismo de Berkovits parte de una teoría conforme libre cuyo contenido de campos es: x^μ para las coordenadas del espacio-tiempo, θ^a espinores de Majorana-Weyl de 16 componentes con dos supersimetrías $a = 1, 2$ y sus momentos asociados, λ^a que es un bosón espinorial con 16 componentes complejas y sus momentos asociados.

La acción libre de la que se parte es

$$S[x^\mu, \theta^\alpha, \lambda^\alpha] = \int (\frac{1}{2}\partial x^\mu \bar{\partial} x_\mu + p_\alpha \bar{\partial}\theta^\alpha + \omega_\alpha \bar{\partial}\lambda^\alpha) d^2\zeta, \tag{4.1}$$

donde p_α son los momentos asociados a θ^α y ω_α son los momentos asociados a λ^α. Aquí el índice $\alpha = 1, 2, .., 16$ y estamos considerando el sector con una sola supersimetría $a = 1$. El otro sector puede tratarse de manera completamente análoga. La notación para las variables de la hoja de mundo esta escrita en variables holomorfas $z, \bar{z}$ y denotamos por ∂ la parcial respecto a z y $\bar{\partial}$ la parcial respecto a $\bar{z}$. Berkovits introduce un acoplamiento en esta teoría libre usando la definición del momento p_α de la teoría GS. Como mostramos en el capítulo 2 este momento produce una constricción fermiónica en el formalismo GS que tiene constricciones de primera y segunda clase denotadas por d_α

$$d_\alpha = p_\alpha + (\gamma^\mu \theta)_\alpha \big(\partial x_\mu + \frac{1}{2}(\theta \gamma_\mu \partial \theta)\big). \tag{4.2}$$

Sorprendentemente Berkovits propone que la carga BRST

$$Q = \int \lambda^\alpha d_\alpha d\zeta, \tag{4.3}$$

reproduce el espectro de la teoría GS usando la teoría conforme libre dada por la acción (4.1). La expansión en productos de operadores OPE asociada a la acción libre da como resultado

$$x^\mu(y)x^\nu(z) \;\to\; -2\eta^{\mu\nu}\ln(y-z), \qquad p_\alpha(y)\theta^\beta(z) \to \frac{\delta_\alpha^\beta}{(y-z)}, \tag{4.4}$$

$$d_\alpha(y)d_\beta(z) \;\to\; -\frac{1}{(y-z)}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\Pi_\mu(z), \qquad d_\alpha(y)\Pi^\mu(z) \to \frac{1}{(y-z)}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial\theta^\beta(z), \tag{4.5}$$

donde $\Pi^\mu = \partial x^\mu + \frac{1}{2}\theta^\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial\theta^\beta$ son combinaciones supersimétricas de los momentos. Es importante notar que el OPE entre λ y ω no será el OPE libre que puede leerse en la acción (4.1). La razón es para que la carga BRST defina un subespacio del espacio de Hilbert, la cual debe tener la propiedad $Q^2 = 0$. Esto implica que la variable λ introducida en (4.1) no es libre. De hecho esta debe satisfacer la constricción que caracteriza a la variable λ como espinor puro. La constricción del espinor puro es

$$\lambda^\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} \lambda^\beta = 0. \tag{4.6}$$

Esta constricción debe implementarse en las ecuaciones de movimento libres asociadas a la acción inicialmente propuesta (4.1). Contando la contribución a la carga central del contenido de campos en la acción (4.1) y la constricción (4.6) resulta: 10 asociados a los x^μ, 32 asociados a las θ^a, (32-10) asociados a las λ^a. Esto da como resultado para la carga central $10 - 32 + 22 = 0$. Notese que es crucial que las λ sean bosones y tengan componentes reales ya como solución de la constricción (4.6). Como son espinores tienen número de fantasma 1. A un espinor que satisface (4.6) se le llama espinor puro [7].

Esta teoría con los ingredientes mencionados es consistente y reproduce el espectro y las amplitudes del formalismo RNS y GS [19, 22, 26, 28].

Comentarios: a) El formalismo de Berkovits no parte de una acción con las interacciones contenidas y no se conoce la acción local que reproduce la dinámica propuesta por el formalismo de Berkovits. Una acción no-local ha sido propuesta en [13]. b) Aunque el formalismo es completamente covariante por construcción, contiene las constricciones (4.6) que es necesario resolver para obtener ciertos resultados. Estas constricciones pueden resolverse usando una descomposición de λ en SO(8) ó en U(5). En ambos casos la covariancia no es explícita. c) El verdadero poder deductivo del formalismo de Berkovits puede apreciarse en el cálculo de amplitudes de dispersión. Importantes pruebas de consistencia de la teoría de cuerdas pueden realizarse en este formalismo (consistencia a dos lazos) [15],[16]. d) Las constricciones bosónicas responsables de la invariancia ante difeomorfismos (4.6) se implementan a mano. La carga BRST de Berkovits contiene información sobre la simetría-κ (a través de las constricciones d que son de primera clase y contienen la información asociada a las constricciones de segunda clase. La carga BRST de Berkovits no impone las constricciones asociadas a la invariancia de difeomorfismos. Esta invariancia puede implementarse usando el álgebra de Virasoro. Sin embargo este no es el procedimiento usado por Berkovits para reproducir el espectro de la supercuerda. El enfoque usado por Berkovits es más parecido a la teoría de campos de cuerdas que a la primera cuantización.

Antes de estudiar el espectro de la supercuerda GS con el método de Bekovits cabe mencionar que se ha investigado la cuantización covariante a partir de una variante de éste método. Introduciendo más variables es posible eliminar la constricción (4.6), y trabajar con un método BRST sin constricción. Esta línea de investigación (Grassi, Porrati y van Nieuwenhuizen) [42, 43, 47, 50] busca una explicación algebráica al problema de la cuantización covariante de la supercuerda GS. Ellos han llegado a resultados interesantes en el sentido de la simetrías de norma obtenidas a partir de esta formulación de (Gauging Cosets) [51].

4.2. El espectro y las amplitudes de la supercuerda en el formalismo de Berkovits.

4.2.1. La superpartícula en el formalismo de Berkovits

La acción estándar para la superpartícula en D=10 dimensiones espacio-tiempo es

$$S[x^\mu, \theta^\alpha] = \int (\Pi^\mu P_\mu + eP^\mu P_\mu) d\tau, \tag{4.7}$$

donde Π^μ esta definido como

$$\Pi^\mu = \dot{x}^\mu - \frac{i}{2}\dot{\theta}^\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta}\theta^\beta, \tag{4.8}$$

P_μ es el momento canónico de x^μ, y e es el multiplicador de Lagrange que satisface las condiciones de capa de masa. Las matrices gamma $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ y $\gamma^{\alpha\beta}_\mu$ son matrices simétricas de 16×16 que satisfacen

$$\gamma^{(\mu}_{\alpha\beta}\gamma^{\nu)\beta\gamma} = \eta^{\mu\nu}\delta^\gamma_\alpha. \tag{4.9}$$

En la representación de Weyl, $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ y $\gamma^{\alpha\beta}_\mu$ son los bloques fuera de la diagonal de matrices Γ^μ de 32×32.

La acción de (4.7) es invariante supersimétrica en el espacio-tiempo

$$\delta\theta^\alpha = \epsilon^\alpha, \qquad \delta x^\mu = \frac{i}{2}\theta\gamma^\mu\epsilon, \qquad \delta P_\mu = \delta\epsilon = 0, \tag{4.10}$$

también es invariante bajo la simetría-κ local

$$\delta\theta^\alpha = P^\mu(\gamma_\mu\kappa)^\alpha, \quad \delta x^\mu = -\frac{i}{2}\theta\gamma^\mu\delta\theta, \quad \delta P_\mu = 0, \quad \delta e = i\dot{\theta}^\beta\kappa_\beta. \tag{4.11}$$

El momento canónico de θ^α, al cual llamaremos p_α, se obtiene directamente de la acción (4.7) y satisface

$$p_\alpha = \frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}^\alpha} = -\frac{i}{2}P_\mu(\gamma^\mu\theta)_\alpha, \tag{4.12}$$

de tal forma que la quantización canónica requiere que los estados físicos sean aniquilados por las constricciones fermiónicas de Dirac definidas por

$$d_\alpha = p_\alpha + \frac{i}{2}P_\mu(\gamma_\mu\theta)_\alpha. \tag{4.13}$$

Dado que estamos tomando la estructura simpléctica como $\{p_\alpha, \theta^\beta\} = -i\delta^\beta_\alpha$, estas constricciones satisfacen el paréntesis de Poisson

$$\{d_\alpha, d_\beta\} = P_\mu\gamma^\mu_{\alpha\beta}, \tag{4.14}$$

y debido a que $P^\mu P_\mu = 0$ también es constricción, ocho de las dieciseis constricciones de Dirac son de primera clase y ocho son de segunda clase. Uno puede checar con fácilidad que las constricciones de Dirac de primera clase generan la simetría-κ (4.11) pero no se conoce una forma covariante de separar las constricciones en primera y segunda clase.

Sin embargo, a este nivel uno puede cuantizar fácilmente la superpartícula de una forma no covariante de Lorentz y obtener el espectro físico de la teoría. Separando en la variables del cono de luz del grupo SO(8), y asumiendo que P^+ es no cero, la simetría fermiónica local generada por la transformación de simetría-κ puede usarse para fijar la norma $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$, donde $\gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 \pm \gamma^9)$. En ésta norma, la acción (4.7) se simplifica a la acción cuadrática

$$S = \int (\dot{x}^\mu P_\mu + \frac{i}{2} P^+(\dot{\theta}\gamma^- \theta) + eP^\mu_\mu) d\tau = \int (\dot{x}^\mu P_\mu + \frac{i}{4}\dot{\sigma}_a \sigma_a + eP^\mu P_\mu) d\tau, \qquad (4.15)$$

donde $\sigma_a = \sqrt{2P^+}(\gamma^-\theta)_a$ y $a = 1,..,8$ es un índice espinorial quiral del grupo SO(8).

La cuantización canónica de (4.15) implica que $\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab}$. Entonces σ_a actúa como una versión "epinorial" de las matrices de Pauli $\sigma^j_{a\dot{b}}$ en el grupo SO(8), las cuales satisfacen

$$\sigma^j_{a\dot{c}}\sigma^j_{b\dot{d}} + \sigma^j_{b\dot{c}}\sigma^j_{a\dot{d}} = 2\delta_{ab}\delta_{\dot{c}\dot{d}} \qquad (4.16)$$

donde j y $\dot{b}$ son los índices vectorial y espinorial antiquiral del grupo SO(8). Uno puede entonces definir la función de onda cuántica $\Psi(x)$ que puede llevar el índice vectorial SO(8) $\Psi_j(x)$, ó un índice espinorial antiquiral SO(8) $\Psi_{\dot{a}}(x)$, y las relaciones de anticonmutación de σ_a se reproducen al definir

$$\sigma_a \Psi_j(x) = \sigma^{a\dot{b}}_j \Psi_{\dot{b}}(x), \qquad \sigma_a \Psi_{\dot{b}}(x) = \sigma^j_{a\dot{b}} \Psi_j(x). \qquad (4.17)$$

Además la constricción en la capa de masa $P^\mu P_\mu = 0$ nos lleva a las ecuaciones de movimiento linearizadas

$$\partial_\mu \partial^\mu \Psi_j = \partial_\mu \partial^\mu \Psi_{\dot{b}} = 0. \qquad (4.18)$$

Entonces los estados físicos de la superpartícula están descritos por un vector sin masa $\Psi_j(x)$ en SO(8) y un espinor antiquiral sin masa $\Psi_{\dot{b}}(x)$ en SO(8), los cuales son los estados físicos de la teoría super-Yang-Mills en D=10. Sin embargo, esta descripción de la teoría super-Yang-Mills sólo preserva las simetrías del subgrupo SO(8) del grupo de super-Poincaré, y uno desearía tener un método más covariante para cuantizar la teoría. La cuantización covariante puede ser extremadamente útil si uno quiere calcular más que el espectro físico en un fondo plano. Por ejemplo, los métodos no-covariantes para calcular las amplitudes de dispersión o para trabajar en fondos curvos son extremadamente engorrosos y largos.

Dado que el espectro de la teoría super-Yang-Mills contiene un vector sin masa, uno espera que las constricciones covariantes de la superpartícula generen las invariancias de norma de este vector en el espacio-tiempo. Notemos que estas constricciones no están presentes al fijar la norma en la acción (4.15) debido a que Ψ_j describe sólo los grados de libertad transversales del vector SO(9,1).

La cuantización covariante de la superpartícula usando el método de Berkovits, permite ver el poder que tiene para simplificar los cálculos en este método. Ya que permite calcular las amplitudes de dispersión con mayor facilidad y reproduce perfectamente el espectro de la teoría super-Yang-Mills, que corresponde al modo cero de la supercuerda GS. En la siguiente sección se expondrá de manera breve los mecanismos usados para obtener el espectro de la supercuerda GS con el método BRST desarrollado por Berkovits.

4.2.2. Estados físicos de la supercuerda a la Berkovits.

Los estados físicos en el formalismo del espinor puro para las supercuerdas abiertas están definidos como los estados con número fantasma uno en la cohomología de Q. La constricción del espinor puro (4.6) implica que el momento canónico a λ^α, denotado por ω_α, sólo aparece en combinación con cantidades que son invariantes bajo la "transformación de norma"

$$\delta\omega_\alpha = (\gamma^\mu\lambda)_\alpha\Lambda_\mu, \tag{4.19}$$

para un Λ_μ arbitrario. Esto implica que ω_α sólo aparece en las combinaciones covariantes de Lorentz $N_{\mu\nu} = \frac{1}{2} : \omega\gamma_{\mu\nu}\lambda :$ y $J =: \omega_\alpha\lambda^\alpha :$ donde el orden normal de estas expresiones puede ser definido usando las parametrizaciones del grupo U(5) separando $N_{\mu\nu}$ en $(N, N^a_b, N^{ab}, N_{ab})$ [28]. Aquí $N_{\mu\nu}$ representa los generadores del grupo de Lorentz SO(9,1) y J viene del tensor de esfuerzos en términos de los campos libres

$$T_\lambda = \frac{1}{2}v^{ab}\partial u_{ab} + \partial t\partial s + \partial^2 s, \tag{4.20}$$

este tensor tiene carga central +22, y puede escribirse en una notación que tenga invariancia de Lorentz manifiesta como

$$T_\lambda = \frac{1}{10}N_{\mu\nu}N^{\mu\nu} - \frac{1}{8}J^2 - \partial J, \tag{4.21}$$

donde J esta definido en términos de los campos libres

$$J = \frac{1}{2}u_{ab}v^{ab} + \partial t + 3\partial s. \tag{4.22}$$

Donde t y v^{ab} son los momentos conjugados de s y u_{ab} y satisfacen los siguientes OPE's

$$t(y)s(z) \to \ln(y-z), \qquad v^{ab}(y)u_{ab}(z) \to \frac{\delta_c^{[a}\delta_d^{b]}}{(y-z)}. \tag{4.23}$$

Cuando uno determina los estados con masa $M^2 = n/2$ donde M es la masa y n es el peso conforme, los operadores de vértice para las supercuerdas abiertas se construyen con combinaciones arbitrarias de los campos $(x^\mu, \theta^\alpha, d_\alpha, \lambda^\alpha, N_{\mu\nu}, J)$ que tienen número fantasma uno y peso conforme n a momento igual a cero. Note que $(d_\alpha, N_{\mu\nu}, J)$ tienen peso conforme uno y λ^α tiene número fantasma uno.

El operador de vértice más general para los estados sin masa $M^2 = 0$ es

$$U = \lambda^\alpha A_\alpha(x, \theta), \tag{4.24}$$

donde $A_\alpha(x,\theta)$ es un espinor en el superespacio. Aplicando el operador BRST Q a estos operadores de vértice, resulta que los estados físicos serán los estados cuya cohomología satisfaga $QU = 0$, la cual es una constricción que implica

$$\lambda^\alpha \lambda^\beta D_\alpha A_\beta = 0, \tag{4.25}$$

donde D_α es el operador diferencial en el superespacio

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu, \tag{4.26}$$

el producto de biespinores de la ecuación (4.25) se puede escribir en términos de vectores y formas de la siguiente manera. Si $f_{\alpha\beta}$ es un biespinor simétrico, entonces $f_{\alpha\beta}$ puede descomponerse en la siguiente expresión

$$f_{\alpha\beta} = \gamma^\mu_{\alpha\beta} f_\mu + \gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau}_{\alpha\beta} f_{\mu\nu\rho\sigma\tau}, \tag{4.27}$$

donde $f_\mu(f_{\alpha\beta})$ es un vector espacio tiempo y $f_{\mu\nu\rho\sigma\tau}(f_{\alpha\beta})$ es una 5 forma, donde ambas son funciones del biespinor $f_{\alpha\beta}$. Ahora si $f_{\alpha\beta}$ es un biespinor antisimétrico, este puede descomponerse en la siguiente expresión

$$f_{\alpha\beta} = \gamma^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta} f_{\mu\nu\rho}, \tag{4.28}$$

donde $f_{\mu\nu\rho}(f_{\alpha\beta})$ es una tres forma que depende del biespinor. Aplicando este resultado al biespinor $\lambda^\alpha\lambda^\beta$ de la ecuación (4.25) tenemos

$$\lambda^\alpha \lambda^\beta = \gamma^{\alpha\beta}_\mu (\lambda \gamma^\mu \lambda) + \gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\rho\sigma\tau} (\lambda \gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \lambda), \tag{4.29}$$

donde sabemos que $(\lambda\gamma^\mu\lambda) = 0$ es la constricción del espinor puro, por lo tanto la última ecuación se transforma a

$$\lambda^\alpha \lambda^\beta = \gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\rho\sigma\tau} (\lambda \gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \lambda), \tag{4.30}$$

donde además sabemos que $(\lambda\gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau}\lambda) \neq 0$. Por lo tanto la ecuación (4.25) se transforma a

$$\gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\rho\sigma\tau} D_\alpha A_\beta = 0, \tag{4.31}$$

que son las ecuaciones de movimiento de la teoría super-Yang-Mills (modo cero de la supercuerda GS). En consecuencia las invariancias de norma

$$\delta A_\alpha = D_\alpha \Omega(x,\theta), \tag{4.32}$$

quedan escritas en términos del supercampo espinorial. En resumen la constricción $QU = 0$ implica (4.25), y la constricción del espinor puro implica (4.31), la cual es la constricción en la capa de masa para los espinores prepotenciales de la teoría super-Yang-Mills. Además la transformación de norma

$$\delta U = Q\Omega(x,\theta) = \lambda^\alpha D_\alpha \Omega(x,\theta), \tag{4.33}$$

el cual reproduce las transformaciones de norma usuales (4.32), donde $\Omega(x,\theta)$ es un supercampo escalar genérico.

El siguiente nivel masivo corresponde a los estados físicos de la supercuerda abierta forman un multiplete masivo de espín 2 que contiene 128 bosones y 128 fermiones. Aunque no se conocía con anterioridad como describir covariantemente este multiplete en el superespacio de D=10, se encontró que cuando $M^2 = \frac{1}{2}$, el operador de vértice más general en términos de los campos del superespacio es

$$\begin{aligned} U &= \partial\lambda^\alpha A_\alpha(x,\theta) + :\partial\theta^\beta\lambda^\alpha B_{\alpha\beta}(x,\theta): + :d_\beta\lambda^\alpha C^\beta_\alpha(x,\theta): \\ &+ :\Pi^\mu\lambda^\alpha H_{\mu\alpha}(x,\theta): + :J\lambda^\alpha E_\alpha(x,\theta): + :N^{\mu\nu}\lambda^\alpha F_{\alpha\mu\nu}(x,\theta):, \end{aligned} \tag{4.34}$$

como vemos es un operador muy complicado, y de igual forma que como se obtuvo las ecuaciones de movimiento para los estados sin masa $M^2 = 0$, en este primer estado masivo $M^2 = \frac{1}{2}$ al aplicar el operador BRST Q al operador de vértice (4.34) se obtienen un conjunto de ecuaciones de movimiento y de invariacias de norma, que describen correctamente al multiplete masivo de espín dos con $M^2 = \frac{1}{2}$ [27], [28]. La forma de construir operadores de vértice para estados masivos de orden mayor se complica cada vez más, de tal forma que obtener el espectro de todos los estados es muy difícil.

Para calcular las amplitudes de dispersión, uno también necesita los operadores de vértice en forma integrada $\int V d\zeta$, donde V se obtiene usualmente del operador de vértice sin integrar U al anticonmutarlo con el fantasma b. Pero debido a que no hay un candidato natural para el fantasma b dentro de este formalismo, uno necesita usar un método alterno para obtener V el cual cumple la relación $[Q,V] = \partial U$. Usando este método alterno, uno encuentra que para la supercuerda abierta los operadores de vértice sin masa son [19]

$$V = \partial\theta^\alpha A_\alpha(x,\theta) + \Pi^\mu B_\mu(x,\theta) + d_\alpha W^\alpha(x,\theta) + \frac{1}{2} N_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x,\theta), \tag{4.35}$$

donde W^α y $F^{\mu\nu}$ son el campo de fuerza del espinor y del gluón respectivamente. Para mostrar que $QV = \partial U$ uno encuentra que los supercampos deben satisfacer las ecuaciones de movimiento de la teoría super-Yang-Mills.

Para la supercuerda Tipo II, el operador de vértice no masivo sin integrar es $U = \lambda^\alpha \hat{\lambda}^{\hat{\beta}} A_{\alpha\hat{\beta}}(x, \theta, \hat{\theta})$ donde $\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}$ y $\hat{\theta}^{\hat{\alpha}}$ son los movimientos derechos de los campos de la hoja-mundo, y la quiralidad del índice $\hat{\alpha}$ depende si se trata de la supercuerda Tipo IIA ó IIB. La condición de los estados físicos $QU = \hat{Q}U = 0$ y la invariancia de norma $\delta U = Q\hat{\Omega} + \hat{Q}\Omega$ donde $\hat{Q}\hat{\Omega} = Q\Omega = 0$ implica que

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\rho\sigma\tau} D_\alpha A_{\beta\hat{\gamma}} &= \gamma^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}_{\mu\nu\rho\sigma\tau} \hat{D}_{\hat{\alpha}} A_{\beta\hat{\gamma}} = 0, \qquad (4.36) \\ \delta A_{\alpha\hat{\beta}} &= D_\alpha \hat{\Omega}_{\hat{\beta}} + \hat{D}_{\hat{\beta}} \Omega_\alpha, \qquad (4.37) \\ \gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\rho\sigma\tau} D_\alpha \Omega_\beta &= \gamma^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}_{\mu\nu\rho\sigma\tau} \hat{D}_{\hat{\alpha}} \Omega_{\hat{\gamma}} = 0, \qquad (4.38) \end{aligned}$$

para cualquier dirección de la cinco forma $\mu\nu\rho\sigma\tau$, las cuales con las ecauciones de movimiento y las invariacias de norma linearizadas del multiplete de supergravedad Tipo IIA ó IIB [19, 28].

Las amplitudes de dispersión a nivel árbol son otro problema a resolver con este formalismo. Como es usual, la amplitud de dispersión de N puntos a nivel árbol de la supercuerda abierta será definida como la función de correlación de tres operadores de vértice U_r y de $N-3$ operadores de vértice integrados $\int V_r dz$ como

$$A = \langle U_1(z_1) U_2(z_2) U_3(z_3) \prod_{r=4}^{N} \int V_r(z_r) dz_r \rangle. \qquad (4.39)$$

Para los estados externos sin masa, los operadores de vértice están dados por (4.24) y (4.35).

El primer paso para evaluar la función de correlación es eliminar todos los campos de dimensión no-nula usando los OPE's. Entonces uno tiene que integrar sobre los modos ceros de x^μ para obtener la fórmula

$$A = \int \langle \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma f_{\alpha\beta\gamma}(z_r, k_r, \eta_r, \theta) \rangle dz_4 ... dz_N \qquad (4.40)$$

donde $\lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma$ viene de los operadores de vértice sin integrar y $f_{\alpha\beta\gamma}$ es una función de z_r, los momentos k_r, las polarizaciones η_r, y los remanentes de los modos ceros de θ.

Al final uno quiere definir la función de correlación $\langle \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma f_{\alpha\beta\gamma} \rangle$ de tal forma que A sea un invariante supersimétrico. Un camino obvio de hacer A un invariante supersimétrico es pedir que $Y = \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma f_{\alpha\beta\gamma}$ satisfaga la constricción $QY = 0$ cuando los estados externos están en la capa de masa. Además, la invariancia de norma implica que $\langle Y \rangle$ se elimina cuando $Y = Q\Omega$. Existe precisamente un estado $(\lambda\gamma^\mu\theta)(\lambda\gamma^\nu\theta)(\lambda\gamma^\rho\theta)(\theta\gamma_{\mu\nu\rho}\theta)$ en la cohomología de Q con momento cero y número fantasma tres, de tal forma que si hacemos la expoansión en serie de f

$$f_{\alpha\beta\gamma}(\theta) = A_{\alpha\beta\gamma} + \theta^\delta B_{\alpha\beta\gamma\delta} + ... + (\gamma^\mu\theta)_\alpha (\gamma^\nu\theta)_\beta (\gamma^\rho\theta)_\gamma (\theta\gamma_{\mu\nu\rho}\theta) F + ..., \qquad (4.41)$$

de tal forma que escogemos la siguiente definición

$$\langle \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma f_{\alpha\beta\gamma}(z_r, k_r, \eta_r, \theta) \rangle \equiv F(z_r, k_r, \eta_r). \qquad (4.42)$$

Obtenemos que esta definición es supersimétrica cuando todos los estados externos están en la capa de masa, debido a que

$$(\gamma^\mu\theta)_\alpha(\gamma^\nu\theta)_\beta(\gamma^\rho\theta)_\gamma(\theta\gamma_{\mu\nu\rho}\theta) \tag{4.43}$$

no puede ser escrito como la variación de una cantidad que sea aniquilada por Q. Y la definición es invariante de norma dado que

$$(\lambda\gamma^\mu\theta)(\lambda\gamma^\nu\theta)(\lambda\gamma^\rho\theta)(\theta\gamma_{\mu\nu\rho}\theta) \neq Q\Omega \tag{4.44}$$

para cualquier $\Omega(x,\theta)$. Y en consecuencia uno puede elegir la siguiente norma

$$\langle(\lambda\gamma^\mu\theta)(\lambda\gamma^\nu\theta)(\lambda\gamma^\rho\theta)(\theta\gamma_{\mu\nu\rho}\theta)\rangle \equiv 1. \tag{4.45}$$

Para la dispersión a tres puntos $A = \langle\lambda^\alpha A^1_\alpha(z_1\lambda^\beta A^2_\beta(z_2)\lambda^\gamma A^3_\gamma(z_3)\rangle$, es fácil checar que la prescripción (4.42) reproduce el vértice cúbico de super-Yang-Mills usual [28].

4.3. Estado actual del método de Berkovits.

Este nuevo método parece simplificar en gran medida los cálculos para las amplitudes de dispersión. La consistencia a dos lazos de la cuerda RNS esta comprobada [15], [16]. Actualmente se está estudiando el formalismo del espinor puro en dimesnisones bajas, esto con el fin de tener una conexión con la carga BRST en D=10, y las teorías de norma en D=2,4,6.

Aun falta mucho por hacer, como poder simplificar los cálculos de dipersión a orden grande. Aunque se ha obtenido el espectro de la supercuerda GS en forma covariante, sólo se han podido hacer cálculos con los operadores de vértice para los primeros estados masivos, es de importancia poder obtener los operadores de vértice de orden mayor, para tener un espectro más completo y poder checar más consistencias de este métdodo.

El formalismo BRST del espinor puro ha demostrado ser un buen método para cuantizar covariantemente la supercuerda GS [19]. Este formalismo ha pasado varias pruebas desde su formulación en el año 2000. Ésta describe correctamente el espectro de la supercuerda en la norma del cono de luz [21, 24], en el semi-cono de luz [29] y con covariancia manifiesta a nivel cuántico en D=10 a partir de la construcción de los operadores de vértice con los campos [27]. También ha sido posible calcular con mayor facilidad las amplitudes de dispersión usando este formalismo. Las amplitudes de dispersión a nivel árbol coinciden con los resultados el la supercuerda RNS [20] y las amplitudes de lazo fueron definidas y usadas para probar ciertos teoremas de no-renormalización para términos de baja energía en la acción efectiva [32].

El formalismo se ha usado para construir modelos sigma en fondos curvos que se puedan cuantizar. La acción para un fondo de supergravedad/super-Yang-Mills general fue estudiada en [33] a nivel clásico y su invariancia conforme a nivel cuántico fue verificada en [34]. Fondos con flujos Ramond-Ramond pueden ser construidos en este formalismo. Formalmente, el caso $AdS_5 \times S^5$ se estudió clásicamente en [23] y cuánticamente en [35].

Intentar extraer una supersimetría manifiesta en el espacio-tiempo a partir del formalismo RNS es sólo posible si la cuerda es compactificada a D=4 [36] o a D=6 dimensiones [37]. En D=10 es posible preservar un subgrupo U(5) de SO(10) [38] debido a que el formalismo del espinor puro es supersimétrico en D=10. Es tentador encontrar una compactificación adecuada y relacionar los resultados de esta teoría a una cuerda híbrida. Actualmente este es uno de los objetivos dentro del formalismo del espinor puro, y se ha investigado el comportamiento del espinor puro en D=2,4,6 [39], [40], [41]. Dentro de estas investigaciones se ha encontrado que el espinor puro de la cuerda D=4 tiene las mismas variables de la hoja mundo como el híbrido de la supercuerda, estas sólo difieren en las variables fantasmas. En el caso del espinor puro, los fantasmas están dados por c-números sin constricción, mientras que para la cuerda híbrida el fantasma es un bosón quiral.

Capítulo 5

Aplicación del formalismo BFT a la supercuerda GS.

La acción GS que presentamos en al Capítulo 2 de esta tesis se puede escribir de la siguiente forma

$$S[x^\mu,\theta^A,g^{ij}]=\frac{1}{2}\int\Big[\sqrt{-g}g^{ij}\Pi_i^\mu\Pi_{j\mu}+2\epsilon^{ij}\Pi_i^\mu(W^1_{j\mu}-W^2_{j\mu})-2\epsilon^{ij}W_i^{1\mu}W^2_{j\mu}\Big]d^2\zeta, \quad (5.1)$$

donde

$$W_i^{A\mu}=i\theta^A\gamma^\mu\partial_i\theta^A, \qquad \Pi_i^\mu=\partial_i x^\mu-\sum_A W_i^{A\mu}. \quad (5.2)$$

Las constricciones bosónicas de la teoría se obtienen de forma usual imponiendo a cero el tensor de energía-momento. Tomando la norma conforme, la lagrangiana de primer orden asociada es

$$\mathcal{L}=\dot{x}^\mu p_\mu+\dot{\theta}^A_\alpha p^A_\alpha-H_c-\lambda^A_\alpha d^A_\alpha, \quad (5.3)$$

donde el momento asociado es

$$p_\mu=\Pi_{0\mu}-(W^1_{1\mu}-W^2_{1\mu}), \quad (5.4)$$

y

$$\begin{aligned} d^1_\alpha &= p^1_\alpha-i(\theta^1\gamma^\mu)_\alpha\big(p_\mu-x'_\mu+W^1_{1\mu}\big), && (5.5)\\ d^2_\alpha &= p^2_\alpha-i(\theta^2\gamma^\mu)_\alpha\big(p_\mu+x'_\mu-W^2_{1\mu}\big), && (5.6)\end{aligned}$$

son las constricciones fermiónicas obtenidas directamente de la acción de primer orden. El hamiltoniano canónico es

$$H_c=\frac{1}{2}\Big[\Big(p_\mu+W^1_{1\mu}-W^2_{1\mu}\Big)^2+\Big(x'_\mu-\sum_A W^A_{1\mu}\Big)^2\Big]=\frac{1}{2}\Big(\Pi_0^2+\Pi_1^2\Big), \quad (5.7)$$

donde $\Pi_{0\mu}$ viene de (5.2) y $\Pi_{1\mu}$ viene de (5.4). Las constricciones bosónicas que satisfacen el álgebra de Virasoro son

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Big(\Pi_0^2 + \Pi_1^2\Big), \qquad \mathcal{H}_1 = \Pi_0^\mu \Pi_{1\mu}, \tag{5.8}$$

tomando en cuenta que se puede formar un cuadrado perfecto de las cantidades $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_1$,las constricciones bosónicas se pueden escribir de la forma siguiente,

$$\hat{T} = \mathcal{H} + \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\hat{\Pi}^2, \tag{5.9}$$

$$T = \mathcal{H} - \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\Pi^2, \tag{5.10}$$

donde las variables Π están dadas por

$$\Pi_\mu = p_\mu - x'_\mu + 2W^1_{1\mu}, \tag{5.11}$$

$$\hat{\Pi}_\mu = p_\mu + x'_\mu - 2W^2_{1\mu}. \tag{5.12}$$

De tal forma que el álgebra de constricciones se divide en dos sectores supersimétricos

$$\{d_{1\alpha}, d_{1\beta}\} = 2i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\Pi_\mu, \qquad \{d_{2\alpha}, d_{2\beta}\} = 2i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\hat{\Pi}_\mu \tag{5.13}$$

$$\{d_{1\alpha}, d_{2\beta}\} = 0, \qquad \{d_{1\alpha}, \hat{\Pi}_\mu\} = 0, \qquad \{d_{2\alpha}, \Pi_\mu\} = 0, \qquad \{\Pi_\mu, \hat{\Pi}_\mu\} = 0 \tag{5.14}$$

5.1. Transformación de constricciones de segunda a primera clase.

Para separar las constricciones en primera y segunda clase, éstas las escribiremos en las coordenadas del cono de luz, y dividiremos los índices espinoriales α, β usando la representación espinorial del grupo SO(8). El resultado es que las constricciones $d^A_a = 0$, ($\Pi^+ \neq 0$) son constricciones de segunda clase, mientras que el resto $d^A_{\dot{a}} = 0$, $T = 0$, $\hat{T} = 0$ son constricciones de primera clase. Este hecho nos permite contar el número de grados de libertad de la supercuerda dandonos el resultado correcto como esperabamos. En lo que sigue no necesitaremos en detalle esta álgebra de primera clase, debido a que nuestro proposito es construir una nueva álgebra de norma efectiva.

5.2. Álgebra de norma efectiva.

Para construir un álgebra de norma efectiva necestitamos aumentar variables en el espacio configuración $x^\mu, p_\mu, \theta^A_\alpha, p^A_\alpha$, al hacer esto el espacio fase queda automáticamente extendido debido a los momentos asociados a estas nuevas variables. Lo que haremos es aplicar el método BFT a la supercuerda. El tipo de variables que se agregán son fermiónicas S_a y sólo tienen componentes en la parte quiral del grupo SO(8), la estructura simpléctica de estas nuevas variables es [1]

$$\{S_a, S_b\} = i\delta_{ab}. \tag{5.15}$$

Buscando una solución para las nuevas constricciones $\tilde{d}_\alpha$, de tal forma que satisfagan la suguiente condición

$$\{\tilde{d}_a, \tilde{d}_a\} = 0, \tag{5.16}$$

la serie de potencias en S tiene una solución muy simple, la solución es lineal en S_a y se encuentra que la nueva constricción es

$$\tilde{d}_a = d_a + i\sqrt{2\Pi^+}S_a. \tag{5.17}$$

Veamos como esta solución satisface la relación (5.16), primero tenemos que calcular el paréntesis de Poisson de

$$\{d_a + i\sqrt{2\Pi^+}S_a, d_b + i\sqrt{2\Pi^+}S_b\} = \{d_a, d_b\} - 2\Pi^+\{S_a, S_b\}, \tag{5.18}$$

ahora usaremos el álgebra de constricciones, y la estructura simpléctica de las nuevas variables (5.15), obteniendo la siguiente equivalencia

$$\begin{aligned} \{d_a, d_b\} - 2\Pi^+\{S_a, S_b\} &= 2i\gamma^\mu_{ab}\Pi_\mu - 2i\Pi^+\delta_{ab} \\ &= 2i(-2\delta_{ab})(-\frac{1}{2}\Pi^+) - 2i\Pi^+\delta_{ab} = 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

en este último paso hemos usado el sector de la métrica $g^{\mu\nu}$ que corresponde al grupo SO(8), y que se puede consultar en el apéndice. Por lo tanto hemos probado que la solución (5.17) satisface la condición (5.16).

El siguiente paso consiste en deformar las otras constricciones de primera clase $d_{\dot{a}} = 0$ y $T = 0$ con el fin de que sean consistentes con las nuevas constricciones $\tilde{d}_a$. Consideremos el caso de $d_{\dot{a}}$, necesitamos encontrar una solución a la condición

$$\{\tilde{d}_{\dot{a}}, \tilde{d}_{\dot{a}}\} = 0. \tag{5.20}$$

La solución a esta condición tiene la forma general, que es de segundo orden en las variables S_a

$$\tilde{d}_{\dot{a}} = d_{\dot{a}} + A_{\dot{a}b}S_b + B_{\dot{a}[bc]}S_bS_c, \tag{5.21}$$

donde para satisfacer la condición (5.20), las cantidades $A_{\dot{a}b}$ y $B_{\dot{a}[bc]}$ deben ser

$$A_{\dot{a}b} = \frac{2i\gamma^i_{\dot{a}b}\Pi^i}{\sqrt{2\Pi^+}}, \qquad B_{\dot{a}[bc]} = \frac{2\gamma^i_{\dot{b}[a}\gamma^i_{c]\dot{a}}\theta'_b}{\Pi^+}. \tag{5.22}$$

[1] Aquí sólo estamos colocando el sector 1 de las variables fermiónicas, y en consecuencia no estasmo escribiendo el índice de supersimetría $A = 1, 2$.

Por lo tanto la constricción de primera clase extendida para $\tilde{d}_{\dot{a}}$ es

$$\tilde{d}_{\dot{a}} = d_{\dot{a}} + \frac{2i\Pi^i}{\sqrt{2\Pi^+}}(\gamma^i S)_{\dot{a}} + \frac{2(\theta'\gamma^i S)(\gamma^i S)_{\dot{a}}}{\Pi^+}, \tag{5.23}$$

tomando en cuenta que el último término tiene que ser antisimetrizado en los índices espinoriales sin punto, esta solución de segundo orden se prueba de igual forma en que se probó la solución (5.17).

Ahora para encontrar la constricción extendida asociada con T será más fácil obtener la extensión de las variables Π_μ, definidas en (5.11). Para ver esto necesitamos resolver la condición para $\tilde{\Pi}_\mu$

$$\{\tilde{d}_a, \tilde{\Pi}_\mu\} = 0. \tag{5.24}$$

Haciendo el cálculo con detalle (tomando en cuenta las identidades de Fierz, y usando los sectores de la métrica en el grupo SO(8)) en la serie de potencias de S para $\tilde{\Pi}_\mu$, uno encuentra que la solución tiene términos de segundo orden en S, de tal forma que la variable extendida es

$$\tilde{\Pi}^\mu = \Pi^\mu + 4i\frac{(\theta'\gamma^\mu S)}{\sqrt{2\Pi^+}} + i\frac{S\gamma^\mu S}{\Pi^+}. \tag{5.25}$$

Ahora usando esta solución podremos encontrar la nueva constricción de primera clase $\tilde{T}$ de tal forma que esta nueva constricción cerrará con todas las constricciones antes obtenidas en un álgebra de Lie (álgebra de norma efectiva) en un espacio fase extendido. La nueva constricción es

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{\Pi}^2}{\Pi^+} = -\frac{\Pi^-}{4} + \frac{\Pi^i\Pi^i}{4\Pi^+} + 2i\frac{\theta'_a S_a}{\sqrt{2\Pi^+}} + i\frac{S_a S'_a}{2\Pi^+} + 4i\frac{\Pi^i(\theta'\gamma^i S)}{(2\Pi^+)^{3/2}} - 2\frac{(\theta'\gamma S)^2}{(\Pi^+)^2}. \tag{5.26}$$

Con esta nueva constricción, todas las constricciones que se han extendido usando el método BFT cierran en un álgebra de primera clase efectiva. Por lo tanto esta transformación permite obtener un álgebra de norma efectiva en el espacio fase extendido como

$$\{\tilde{T}, \tilde{T}\} = 0, \qquad \{\tilde{d}_a, \tilde{d}_b\} = 0, \qquad \{\tilde{d}_{\dot{a}}, \tilde{d}_a\} = 0, \tag{5.27}$$

$$\{\tilde{d}_a, \tilde{T}\} = 0, \qquad \{\tilde{d}_{\dot{a}}, \tilde{d}_{\dot{b}}\} = -8i\tilde{T}\delta_{\dot{a}\dot{b}}. \tag{5.28}$$

La acción de norma de Green-Schwarz de primer orden es

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2}\int \left(\dot{x}^\mu p_\mu + \dot{\theta}^A_\alpha p^A_\alpha + \frac{i}{2}\dot{S}^A_a S^A_a - \lambda\tilde{T} - \hat{\lambda}\hat{\tilde{T}} - \lambda^A_\alpha \tilde{d}^A_\alpha\right) d^2\zeta, \tag{5.29}$$

donde se han incluido los dos sectores supersimétricos. Las simetrías de norma que contiene son los difeomorfismos de la hoja mundo que son generados por $\tilde{T}$ y $\hat{\tilde{T}}$, y una nueva simetría de norma fermiónica que es generada por $\tilde{d}^A_\alpha$. Obviamente la transformación que se ha hecho con el método BFT es altamente no covariante, de tal forma que la teoría obtenida no manifiesta la covariancia de Lorentz en sus ecuaciones, pero la invariancia de Lorentz se garantiza hasta una transformación BRST sencilla como señala Berkovits [29].

Ahora nosotros tenemos las 17 constricciones de primera clase por sector y como era de esperarse el modelo es equivalente a la acción original GS y por construcción tiene el mismo número de grados de libertad. Dos comentarios hay que hacer al respecto. El primero consiste en que esta aplicación del método BFT a la supercuerda GS es equivalente a la acción clásica de Berkovits y Marchioro [29] cuya cuantización puede hacerse siguiendo las mismas lineas de la cuantización obtenida en [29]. Problemas relacionados con las ambigüedades de ordenamiento deben ser tomados en cuenta con el fin de hacer una cuantización consistente de esta acción. Segundo, como el modelo BM puede ser relacionado con el formalismo del espinor puro via transformaciones de similaridad entre las cargas BRST asociadas, el modelo que obtenemos también puede relacionarse con el formalismo de espinor puro usando la misma secuencia de transformaciones de similaridad entre estas cargas BRST asociadas. La ventaja de nuestra perspectiva es que hemos desarrollado una teoría de norma en una forma completamente sistemática comenzado directamente de la acción de la supercuerda Green-Schwarz, en consecuencia nosotros tenemos más control sobre cualquier cambio en el procedimiento BFT que puede ser de ayuda para relacionar la supercuerda GS y el formalismo del espinor puro de una manera más clara y directa. Este procedimiento también puede ser de ayuda para tener un mejor entendimiento de varios aspectos del formalismo del espinor puro, como su interpretación geométrica y su medida en la integral de trayectoria.

Por otro lado nuestras nuevas constricciones (5.17),(5.23),(5.26) son las mismas que las obtenidas en [30]. Es sorprendente para nosotros que las constricciones sean exactamente las mismas, debido a que los dos métodos son completamente diferentes. En [30] el número de fermiones es duplicado y una interacción entre ellos es puesta a mano en la acción. Después de fijar la norma del simi-cono de luz y hacer una transformación de Darboux complicada que simplifica el paréntesis de Dirac, el resultado de [30] coincide con el procedimiento BFT realizado en esta tesis. Trataremos de explicar esta relación en la siguiente sección aplicando el método BFT a las variables del espacio configuración de la teoría GS.

5.3. Comparación de los resultados obtenidos con los modelos BM y AK

Que el procedimieto BFT a la supercuerda GS tenga algo que ver con la acción interactuante propuesta en [30] parece a primera vista algo muy sorprendente. Aquí vamos a eleborar un procedimiento un poco diferente al usado para transformar las constricciones de segunda a primera clase. Los argumentos presentados en esta sección no son aplicables al caso general de sistemas con constricción, pero son válidos en algunos tipos especiales de sistemas como el de la supercuerda GS.

Comencemos notando que otro camino de aplicar el método BFT es el de buscar unas nuevas coordenadas extendidas $\tilde{x}^\mu, \tilde{p}_\mu, \tilde{\theta}^A_\alpha, \tilde{p}^A_\alpha$ de tal forma que satisfagan la condición

$$\{\tilde{d}^A_a, \tilde{z}\} = 0 \tag{5.30}$$

donde $\tilde{z}(x^\mu, p_\mu, \theta_\alpha, p_\alpha, S_a)$ es cualquiera de las nuevas variables en el espacio fase extendido. Si podemos resolver estas condiciones, entonces podemos usar estas soluciones para extender observables en el espacio fase original al espacio fase extendido. El procedimiento es el siguiente: suponga que tenemos una función en el espacio fase original $A(z)$. Primero escribimos esta como $A(\tilde{z})$, entonces substituimos $\tilde{z}$ por la solución de (5.30) y encontramos $\tilde{A}(z, S)$. Para la supercuerda GS la solución para la condición (5.30) de las variables en el espacio fase original es

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu - i\frac{(\theta\gamma^\mu S)}{\sqrt{2\Pi^+}}, \qquad \tilde{\theta}_a = \theta_a - \frac{S_a}{\sqrt{2\Pi^+}}, \qquad \tilde{\theta}_{\dot{a}} = \theta_{\dot{a}}, \tag{5.31}$$

para las variables del espacio configuración. Para los momentos bosónicos y fermiónicos las soluciones son

$$\tilde{p}^\mu = p^\mu + i\Big(\frac{\theta\gamma^\mu S}{\sqrt{2\Pi^+}}\Big)' \tag{5.32}$$

$$\tilde{p}_\alpha = p_\alpha - i\frac{(\gamma^\mu S)_\alpha}{\sqrt{2\Pi^+}}(\Pi_\mu - W_{1\mu} + P_\mu) + i(\gamma^\mu\theta)_\alpha P_\mu + C_\alpha, \tag{5.33}$$

donde

$$P_\mu = 2i\frac{\theta'\gamma_\mu S}{\sqrt{2\Pi^+}} + i\frac{S\gamma_\mu S'}{2\Pi^+} + i\Big(\frac{\theta\gamma_\mu S}{\sqrt{2\Pi^+}}\Big)', \tag{5.34}$$

y

$$C_a = i\sqrt{2\Pi^+}S_a, \qquad C_{\dot{a}} = \frac{2i\Pi^i}{\sqrt{2\Pi^+}}(\gamma^i S)_{\dot{a}} + \frac{2(\theta'\gamma^i S)(\gamma^i S)_{\dot{a}}}{\Pi^+}, \tag{5.35}$$

donde el último término debe ser antisimetrizado con respecto a los índices espinoriales sin punto. Los nuevos momentos en (5.32), (5.33) son muy similares a la transformación de Darboux propuesta en [30] para simplificar el paréntesis de Dirac, pero hay pequeñas diferencias que explicaremos a continuación. Lo que es más interesante es que la transformación en el espacio configuración (5.31) puede ser usada para obtener, a partir de la acción GS, la acción interactuante del modelo AK. De hecho, si se redefine S_a como ξ_a de la siguiente manera

$$\xi_a = \frac{S_a}{\sqrt{2\Pi^+}} \tag{5.36}$$

y se substituye la transformación (5.31) en la acción de GS uno obtiene la siguient acción

$$S=-\frac{1}{2}\int\left[\sqrt{-g}g^{ij}\Pi_i^{\mu}\Pi_{j\mu}+2\epsilon^{ij}\Pi_i^{\mu}(W^1_{j\mu}-W^2_{j\mu})-2\epsilon^{ij}W_i^{1\mu}W_j^2\mu\right]d^2\zeta, \qquad (5.37$$

donde

$$W_i^{A\mu}=i\Theta^A\gamma^{\mu}\partial_i\Theta^A, \qquad \Pi_i^{\mu}=\partial_i x^{\mu}-\sum_A W_i^{A\mu}-i\sum_A\partial_i(\theta^A\gamma^{\mu}\xi^A), \qquad (5.38$$

con $\Theta^A_\alpha=\theta^A_\alpha-\xi^A_\alpha$ como en el modelo AK presentado en [30][2] .Notando que el efect de la substitución de las nuevas variables del espacio configuración (5.31) en término de las viejas variables en la acción original GS (5.1) produce una deformación d la estructura simpléctica y en consecuencia una deformación de las constriccione bosónicas originales. La acción de primer orden tiene ahora la forma

$$S=-\frac{1}{2}\int\left(\dot{x}^{\mu}p_{\mu}+\dot{\theta}^A_\alpha\Delta^A_\alpha+\dot{\xi}^A_a\Xi^A_a-\lambda\tau-\hat{\lambda}\hat{\tau}\right)d^2\zeta, \qquad (5.39$$

donde el momento espacio tiempo es

$$p_{\mu}=\Pi_{0\mu}-(W^1_{1\mu}-W^2_{1\mu}), \qquad (5.40$$

y las funciones en el término cinético son

$$\begin{aligned}\Delta^1_\alpha &= -(\gamma^{\mu}\xi^1)_\alpha p_\mu+i(p^{\mu}-\Pi_1^{\mu}-W_1^{2\mu})(\Theta^1\gamma_\mu)_\alpha, && (5.41\\ \Delta^2_\alpha &= -(\gamma^{\mu}\xi^2)_\alpha p_\mu+i(p^{\mu}+\Pi_1^{\mu}+W_1^{1\mu})(\Theta^2\gamma_\mu)_\alpha, && (5.42\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Xi^1_a &= -(\gamma^{\mu}\theta^1)_a p_\mu+i(p^{\mu}-\Pi_1^{\mu}-W_1^{2\mu})(\Theta^1\gamma_\mu)_a, && (5.43\\ \Xi^2_a &= -(\gamma^{\mu}\theta^2)_a p_\mu+i(p^{\mu}+\Pi_1^{\mu}+W_1^{1\mu})(\Theta^2\gamma_\mu)_a. && (5.44\end{aligned}$$

Donde τ y $\hat{\tau}$ son las constricciones bosónicas deformadas después de la substitució de las ecuaciones (5.31) en las constricciones bosónicas originales T y $\hat{T}$. Definiend como es usual los momentos fermiónicos como las expresiones que multiplican a $\dot{\theta}$ e (5.37), encontramos las constricciones fermiónicas

$$D^A_\alpha=p^A_\alpha-\Delta^A_\alpha, \qquad (5.45$$

que corresponden a las constricciones d^A_α de la acción original GS. Integrando po partes los términos cinéticos encontramos la acción

$$S=-\frac{1}{2}\int\left(\dot{x}^{\mu}(p_\mu-P_\mu)+\dot{\theta}^A_\alpha(p^A_\alpha-P^A_\alpha)+i\Pi^+\dot{\xi}^A_a\xi^A_a-\lambda\tau-\hat{\lambda}\hat{\tau}-\lambda^A_\alpha D^A_\alpha\right)d^2\zeta, \quad (5.46$$

[2] Aquí nosotros denotamos por ξ la variable que es denotada como $\tilde{\theta}$ en [30] para evitar algun confusión con las variables tilde que estamos usando en esta tesis.

donde

$$P_\mu = -i(\theta\gamma^\mu\xi)'_1 + i(\theta\gamma^\mu\xi)'_2, \tag{5.47}$$

y $()_1$ denota las variables del sector 1 y, $()_2$ las del sector 2 supersimétrico. La redefinición de los momentos fermiónicos es

$$\begin{aligned} P_a &= ix'^+\xi_a + R_a, && (5.48)\\ P_{\dot a} &= (\gamma^i\xi)_{\dot a}\Big(ix'_i + (\theta\gamma_i\xi)_2\Big) + R_{\dot a}, && (5.49) \end{aligned}$$

donde

$$R_\alpha = (\theta\gamma^\mu)_\alpha\Big(-2(\xi\gamma_\mu\theta') + \xi\gamma_\mu\xi' + (\theta\gamma_\mu\xi)'\Big) + (\xi\gamma^\mu)_\alpha\Big(3(\theta\gamma_\mu\theta') - 2(\theta\gamma_\mu\xi')\Big). \tag{5.50}$$

La redefinición de los momentos en el espacio-tiempo son los mismos que la redefinición que hemos usado en el método BFT pero la redefinición de los momentos fermiónicos es un poco diferente. La razón es que las constricciones fermiónicas D^A_α no son las mismas que las constricciones fermiónicas d^A_α después de la substitución de las nuevas coordenadas (5.31). Ahora es fácil checar que la redefinición de campos

$$\begin{aligned} p_\mu &\longrightarrow p_\mu - P_\mu, && (5.51)\\ p^A_\alpha &\longrightarrow p^A_\alpha - P^A_\alpha, && (5.52)\\ \xi_a &= \frac{S_a}{\sqrt{2\Pi^+}}, && (5.53) \end{aligned}$$

produce la acción de primer orden (5.29) obtenida con el método BFT. El camino eficiente para analizar la estructura de constricciones de la acción (5.37) fue inspirado en el método Faddeev-Jackiw que es equivalente al método de Dirac para una clase más amplia de sistemas con constricción. De tal forma que hemos obtenido el modelo interactuante [30] a partir del método BFT usando las variables del espacio configuración $\tilde{x}^\mu, \tilde{\theta}^A_\alpha$ obtenidas a partir de la condición (5.30). Haciendo notar que este método no funciona para sistemas con constricciones generales. El hecho de que la acción GS es lineal en las velocidades de las variables fermiónicas y que la solución de (5.30) depende sólo de las variables en el espacio configuración, después de redefinir la relación entre S y ξ son los elementos cruciales en la construcción de una acción lagrangiana compatible con la dinámica de la acción hamiltoniana original.

Cabe señalar que para obtener la acción del modelo AK [30] después de la substitución de las nuevas variables del espacio configuración (5.31) en la acción GS original (5.1), uno debe hacer uso de la norma del semi-cono de luz para reconstruir las componentes faltantes de los espinores de Majorana-Weyl en las variables ξ, ya que estas originalmente al hacer la redefinición (5.36) estas variables sólo tienen la componente quiral del grupo SO(8), entonces para insertar estas variables en la acción interactuate (5.37) como $\Theta^A_\alpha = \theta^A_\alpha - \xi^A_\alpha$ uno tiene que hacer la transformación inversa, y pasar de la parte quiral ξ_a y antiquiral $\xi_{\dot a}$ del grupo SO(8) a los espinores de Majorana-Weyl ξ^A_α definidos como espinores en un grupo SO(9,1) con supersimetrías $A = 1, 2$ y $\alpha = 1, 2, .., 16$ componentes reales.

Capítulo 6

Las transformaciones de similaridad.

En este capítulo expondremos la propuesta de Berkovits y Marchioro (BM) [29] para relacionar a partir de primeros principios el origen del espinor puro. La carga BRST de Berkovits con la formulación usual de la supercuerda GS y su cuantización usando el método BRST para teorías de norma. La idea básica consiste en relacionar la carga BRST del formalismo GS y la carga BRST de Berkovits usando transformaciones de similaridad. Este tipo de transformaciones incluso a nivel cuántico son transformaciones de simetría en el sentido de que no cambian la cohomología del operador BRST [53].

En este capítulo expliacaremos como proceden BM para implementar dichas transformaciones de similaridad.

El método de BM para probar la equivalencia entre la cuantización BRST de la supercuerda GS en la norma del semi-cono de luz y la cuantización BRST usando el formalismo del espinor puro para la supercuerda es directo usando las transformaciones de similaridad. Desafortunadamente este método no aclara mucho la construcción de las nuevas constricciones que cierran en un álgebra de primera clase, y como a partir de ellas se pueden relacionar los dos métodos BRST.

6.1. Transformaciones de Similaridad.

Partiendo de la acción GS con las constricciones convertidas a primera clase, quedan como vimos 17 constricciones por sector que son

$$\tilde{d}_a = d_a + i\sqrt{2\Pi^+}S_a, \tag{6.1}$$

$$\tilde{d}_{\dot{a}} = d_{\dot{a}} + i\sqrt{\frac{2}{\Pi^+}}\Pi^i(\gamma^i S)_{\dot{a}} + \frac{2}{\Pi^+}(\gamma^i S)_{\dot{a}}(S\gamma^i\theta'), \tag{6.2}$$

$$\tilde{T} = \frac{1}{4}\frac{\Pi^\mu\Pi_\mu}{\Pi^+}, \tag{6.3}$$

Para la notación referimos al capítulo anterior. Un punto que es notable del proceso de conversión BFT es que el álgebra de primera clase efectiva es muy simple, de hecho el único paréntesis de Poisson distinto de cero es $\tilde{d}_{\dot{a}}$ con $\tilde{d}_{\dot{b}}$ que resulta proporcional a $\tilde{T}$. Esto permite que la cuantizacón de esta teoría sea relativamente simple. Primero hacemos una transformación conforme de todos los campos, de tal forma que todos quedan redefinidos como

$$p^{\mu} + (\frac{1}{4\pi})\partial_{\sigma}x^{\mu} \rightarrow (\frac{i}{2\pi})\partial x^{\mu} \quad p_{\alpha} \rightarrow \frac{p_{\alpha}}{(2\pi i)} \quad S_a \rightarrow -\frac{iS_a}{\sqrt{2\pi}}, \tag{6.4}$$

donde $\partial \equiv \partial_z$. Con esta transformación la expansión en producto de operadores OPE's para las variables básicas se convierte en

$$x^{\mu}(y)x^{\nu}(z) = -\eta^{\mu\nu}\ln(y-z), \quad p_{\alpha}(y)\theta^{\beta}(z) = \frac{\delta_{\alpha}^{\beta}}{y-z}, \quad S_a(y)S_b(z) = \frac{\delta_{ab}}{y-z}. \tag{6.5}$$

De igual forma, es conveniente reescalar las constricciones por

$$\tilde{d}_{\alpha} \rightarrow \frac{1}{2\pi i}\tilde{d}_{\alpha}, \qquad d_{\alpha} \rightarrow \frac{1}{2\pi i}d_{\alpha}, \qquad \tilde{\Pi}^{\mu} \rightarrow \frac{1}{2\pi}\tilde{\Pi}^{\mu}, \tag{6.6}$$

y después reescalar $\tilde{T}$, de tal forma que $\tilde{T} \equiv (1/2)\tilde{\Pi}^{\mu}\tilde{\Pi}_{\mu}/\tilde{\Pi}^{+}$. Además introduciremos la cantidad π^{μ} definida por

$$\pi^{\mu} \equiv i\partial x^{\mu} + \theta\gamma^{\mu}\partial\theta, \tag{6.7}$$

de tal forma que $\tilde{\Pi}^{\mu}$ con esta nueva definición será

$$\tilde{\Pi}^{\mu} = \pi^{\mu} + i\Big(\frac{i}{2\pi^{+}}S\gamma^{\mu}\partial S - \sqrt{\frac{2}{\pi^{+}}}S\gamma^{\mu}\partial\theta\Big), \tag{6.8}$$

note que se satisface $\tilde{\Pi}^{+} = \pi^{+}$ al hacer la separación en el grupo SO(8). De tal forma que las constricciones redefinidas en términos de los campos cuantizados tomán la forma

$$\begin{aligned} d_{\alpha} &= p_{\alpha} + (\gamma^{\mu}\theta)_{\alpha}\big(i\partial x_{\mu} + \frac{1}{2}(\theta\gamma_{\mu}\partial\theta)\big), & (6.9)\\ \tilde{d}_a &= d_a + i\sqrt{\pi^{+}}S_a, & (6.10)\\ \tilde{d}_{\dot{a}} &= d_{\dot{a}} + i\sqrt{\frac{2}{\pi^{+}}}\pi^{i}(\gamma^{i}S)_{\dot{a}} - \frac{1}{\pi^{+}}(\gamma^{i}S)_{\dot{a}}(S\gamma^{i}\partial\theta), & (6.11)\\ \tilde{T} &= \frac{1}{2}\frac{\pi^{\mu}\pi_{\mu}}{\pi^{+}} - \frac{1}{2\pi^{+}}S_a\partial S_a + i\sqrt{\frac{2}{\pi^{+}}}S_a\partial\theta_a \\ &+ i\frac{\sqrt{2}}{(\pi^{+})^{3/2}}\pi^{i}(S\gamma^{i}\partial\theta) - \frac{1}{(\pi^{+})^{2}}(S\gamma^{i}\partial\theta)^{2}. & (6.12) \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores son las expresiones clásicas después de reescalar y pasar a la notación $z, \bar{z}$ en la hoja mundo. Como pasa comunmente, necesitamos añadir algunos términos extras con el fin de realizar la simetría local cuánticamente (nos referimos a la simetría generada por estas 17 constricciones de primera clase). Las modificaciones necesarias están relacionadas con las ambigüedades de ordenamiento y deben cancelar los polos dobles y de orden mayor que vienen de términos adicionales que están ausentes en los cálculos a nivel clásico. Para $\tilde{d}_\alpha$ sólo hay un término que requiere ordenamiento normal en $\tilde{d}_{\dot{a}}$, que llamamos $(-1/\pi^+)(\gamma^i S)_{\dot{a}}(S\gamma^i\partial\theta)$. Entonces esperamos que los términos que hay que añadir sean del tipo $\partial^2\theta_{\dot{a}}/\pi^+$ y $\partial\theta_{\dot{a}}\partial(1/\pi^+)$. De hecho para ajustar sus coeficientes apropiadamente, el polo doble y triple en $\tilde{d}_{\dot{a}}(z)\tilde{d}_{\dot{b}}(w)$ puede ser cancelado exactamente. De esta forma las constricciones cuánticas completas son

$$\begin{aligned} \tilde{d}_a &\rightarrow \tilde{d}_a, && (6.13)\\ \tilde{d}_{\dot{a}} &\rightarrow \tilde{d}_{\dot{a}} + \frac{4\partial^2\theta_{\dot{a}}}{\pi^+} - \frac{2\partial\pi^+\partial\theta_{\dot{a}}}{(\pi^+)^2}, && (6.14)\\ \tilde{T} &\rightarrow \tilde{T} + \frac{4\partial^2\theta_{\dot{a}}\partial\theta_{\dot{a}}}{(\pi^+)^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\ln\pi^+}{\pi^+}. && (6.15)\end{aligned}$$

Ahora estas constricciones cuánticas cierran bajo el OPE

$$\tilde{d}_{\dot{a}}(z)\tilde{d}_{\dot{b}}(w) = -\frac{4\delta_{\dot{a}\dot{b}}\tilde{T}(w)}{(z-w)}, \tag{6.16}$$

y todos los otros OPE's son regulares. Una manera distinta pero completamente equivalente de decir lo mismo que explicamos en el párrafo anterior es escribir la carga BRST con las 17 constricciones (6.1, 6.2, 6.3) y teniendo en cuenta el álgebra de constricciones (5.27, 5.28), la carga BRST usual se escribe como

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2\pi i}\int \big(\tilde{\lambda}^\alpha\tilde{d}_\alpha + \tilde{T}c - (\tilde{\lambda}\gamma^+\tilde{\lambda})b\big)dz, \tag{6.17}$$

donde $\tilde{\lambda}^\alpha$ es un espinor bosónico fanstasma sin constricción y (b,c) es el par canónico de fermiones fantasmas que satisfacen $b(z)c(w) = 1/(z-w)$. Exigiendo que $\tilde{Q}^2$ sea nilpotente se obtienen las correcciones (6.13, 6.14, 6.15).

Salvo algunas diferencias en las convenciones, este resultado concuerda exactamente con el construido por [29] al añadir campos libres $(p_\alpha, \theta^\alpha)$ a la teoría GS en la norma del semi-cono de luz.

El resto del procedimiento para llegar al formalismo del espinor puro PS se obtiene utilizando ciertas transformaciones de similaridad [29] y [30]. Por completez reproduciremos aquí de forma breve como llegar al formalismo del espinor puro al restringir la teoría al sector holomorfo.

La teoría está definida en un espacio de Hilbert extendido por las variables de conversion S y por los fantasmas añadidos $\tilde{\lambda}, c, b$ usando el método BRST estándar.

El OPE entre $\tilde{\lambda}$ y su momento conjugado $\tilde{\omega}$ es

$$\tilde{\lambda}^\alpha(z)\tilde{\omega}_\beta(w) = \frac{\delta^\alpha_\beta}{(z-w)}. \tag{6.18}$$

El siguiente paso es mostrar que la cohomología de $\tilde{Q}$ es la misma que de la carga

$$Q^{(1)} = \frac{1}{2\pi i}\int \left(\tilde{\lambda}_a \tilde{d}_a + \lambda_{\dot{a}} \tilde{d}_{\dot{a}}\right) dz, \qquad \lambda_{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} = 0, \tag{6.19}$$

que se obtiene de $\tilde{Q}$ sin los términos que contienen (b, c) e imponiendo la constricción $\lambda_{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} = 0$ ó $\lambda\gamma^+\lambda = 0$. Se ha removido el tilde de la variable λ para indicar que esta tiene una constricción que satisfacer. Notemos también que esta es una de las cinco constricciones independientes expresadas por la condición del espinor puro $\lambda\gamma^\mu\lambda = 0$. Un camino para hacer esto consiste en usar la teoría de perturbaciones homológicas [8], el cual no veremos aquí. Un método más directo es conectar $\tilde{Q}$ y $Q^{(1)}$ por medio de la siguiente transformación de similaridad

$$e^X \tilde{Q} e^{-X} = \delta_b + Q^{(1)}, \tag{6.20}$$

$$\delta_b = 2\int \frac{dz}{2\pi i}\tilde{\lambda}_{\dot{b}}\tilde{\lambda}_{\dot{b}} b, \qquad X = \int \frac{dz}{8\pi i} c(l_{\dot{a}}\tilde{d}_{\dot{a}}), \tag{6.21}$$

aquí $l_{\dot{a}}$ es un espinor auxiliar antiquiral SO(8) con la propiedad $\tilde{\lambda}_{\dot{a}} l_{\dot{a}} = 1$, $l_{\dot{a}} l_{\dot{a}} = 0$ y $\lambda_{\dot{a}}$ en $Q^{(1)}$ esta dado por

$$\lambda_{\dot{a}} = \tilde{\lambda}_{\dot{a}} - \frac{1}{2}(\tilde{\lambda}_{\dot{b}}\tilde{\lambda}_{\dot{b}}) l_{\dot{a}}, \tag{6.22}$$

de hecho esta variable satisface la constricción $\lambda_{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} = 0$, y a partir de aquí podemos olvidarnos de $l_{\dot{a}}$, ya que este aparece sólo en $\lambda_{\dot{a}}$. Dado que δ_b es completamente independiente de $Q^{(1)}$ y tiene una cohomología trivial, podemos cancelarla para obtener $Q^{(1)}$.

El proceso final es desacoplar S_a cohomológicamente junto con cuatro grados de libertad más de $\tilde{\lambda}^\alpha$ por medio de una transformación de similaridad adecuada. Para lograr esto, definimos los siguientes operadores de proyección P^1 y P^2 en el espacio quiral SO(8)

$$\delta_{ab} = P^1_{ab} + P^2_{ab}, \qquad P^1_{ab} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^i\lambda)_a(\gamma^i r)_b \equiv P^2_{ba}, \tag{6.23}$$

donde otra vez se ha introducido un espinor antiquiral $r_{\dot{a}}$ con las propiedades $\tilde{\lambda}_{\dot{a}} r_{\dot{a}} = 1$ y $r_{\dot{a}} r_{\dot{a}} = 0$. Usando estos operadores de proyección, uno puede descomponer los campos auto-conjugados S_a en un "par conjugado" (S^1_a, S^2_a) como $S^I_a = P^I_{ab} S_b$, con $(I = 1, 2)$. Esta descomposión satisface los OPE's $S^1_a(z)S^1_b(w) = S^2_a(z)S^2_b(w) =$(regular), y los combinados

$$S^1_a(z)S^2_b(w) \;\; \rightarrow \;\; \frac{P^1_{ab}}{(z-w)} \tag{6.24}$$

$$S^2_a(z)S^1_b(w) \;\; \rightarrow \;\; \frac{P^2_{ab}}{(z-w)}. \tag{6.25}$$

Similarmente, $\tilde{\lambda}_a$ se descompone en $\tilde{\lambda}_a = \lambda_a^1 + \lambda_a^2$, donde $\lambda_a^I = P_{ab}^I \tilde{\lambda}_b$. Es importante notar que λ_a^1 satisface

$$\lambda_a^1 \gamma_{a\dot{b}}^i \lambda_{\dot{b}} = 0, \tag{6.26}$$

que son las cuatro ecuaciones independientes remanentes que contiene la constricción del espinor puro.

La transformación de similaridad se puede implementar en dos pasos . Primero, hacemos una transformación de similaridad $Q^{(2)} = e^Y Q^{(1)} e^{-Y}$ con

$$Y = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{2\pi i} S_a^1 S_a^2 \ln \pi^+. \tag{6.27}$$

El efecto de hacer esta transformación es remplazar

$$S_a^1 \to \frac{S_a^1}{\sqrt{\pi^+}}, \qquad S_a^2 \to \sqrt{\pi^+} S_a^2, \tag{6.28}$$

los cuales cambian el peso conforme para el par (S_a^1, S_a^2) de $(1/2, 1/2)$ a $(1, 0)$. Incluyendo estos efectos , $Q^{(2)}$ se convierte en

$$\begin{aligned} Q^{(2)} &= \delta + Q + d, & (6.29)\\ \delta &= \sqrt{2} i \lambda_a^2 S_a^1, \qquad Q = \lambda_a^1 d_a + \lambda_{\dot{a}} d_{\dot{a}}, & (6.30)\\ d &= \frac{4\lambda_{\dot{a}} \partial^2 \theta_{\dot{a}}}{\pi^+} - \frac{4\partial\pi^+ \lambda_{\dot{a}} \partial\theta_{\dot{a}}}{(\pi^+)^2} + \lambda_a^2 d_a & (6.31)\\ &+ i\sqrt{2}\big(\pi^+ \lambda_a^1 S_a^2 + \pi^i (\lambda\gamma^i S^2)\big) - (\lambda\gamma^i S^2)(S^2 \gamma^i \partial\theta), & (6.32) \end{aligned}$$

donde los dos primeros términos en d vienen únicamente de contribuciones cuánticas. Note que si nosotros asignamos los grados $\deg(S_a^1, S_a^2) = (-1, +1)$, d incluye todos los términos de grado positivo, mientras δ y Q tienen grados -1 y 0 respectivamente. Con esta estructura gradada en mente, es relativamente fácil encontrar una transformación de similaridad que remueve d completamente, la transformación de similaridad es

$$\begin{aligned} Q^{(3)} &= e^Z Q^{(2)} e^{-Z} = \delta + Q, & (6.33)\\ Z &= -\frac{d_a S_a^2}{i\sqrt{2}} + \frac{4(\partial\theta_{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}})(\partial\theta_{\dot{b}} r_{\dot{b}})}{\pi^+}. & (6.34) \end{aligned}$$

Ahora debido a que δ es completamente independiente de Q y su cohomología es relativamente trivial, podemos cancelar δ también. Finalmente, renombrando $\lambda_a^1 \to \Lambda_a$, y denotando $\lambda^\alpha = (\lambda_a, \lambda_{\dot{a}})$, obtenemos el operador BRST del formalismo del espinor puro

$$\begin{aligned} Q &= \int \frac{dz}{2\pi i} \lambda^\alpha d_\alpha, \qquad \lambda^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\mu \lambda^\beta = 0, & (6.35)\\ d_\alpha &= p_\alpha + (\gamma^\mu \theta)\big(i\partial x_\mu + \frac{1}{2}(\theta\gamma_\mu \partial\theta)\big). & (6.36) \end{aligned}$$

donde claramente tenemos la carga BRST propuesta por Berkovits para realizar la cuantización covariante de la supercuerda, y donde el espinor puro λ^α satisface la constricción del espiror puro con el fin de tener un operador BRST Q nilpotente.

6.2. La simetría de Lorentz en la carga BRST.

Incluimos esta sección por la gran importancia que tiene el grupo de Lorentz SO(9,1) en el análisis de la comparación entre la acción GS en el cono de luz y el modelo BM. Una pregunta importante es cuál es la acción del grupo de Lorentz en la norma del semicono de luz y cuales son sus correcciones cuánticas. Para detalles de los cálculos en esta sección referimos al lector a [29].

Haciendo uso del método BRST estándar, a la acción de la supercuerda GS se le puede fijar la norma, donde la carga BRST estándar se construye aumentando variables espinoriales llamadas fantasmas. Notemos que los fantasmas de la simetría-κ no se propagan en la norma del semi-cono de Luz, debido a esto el operador BRST sólo involucra reparametrizaciones en los fantasmas (b, c). Debido a que la norma del semi-cono de luz no manifiesta la invariancia de Lorentz, las transformaciones de Lorentz que cambian la condición de fijar la norma $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$ necesitan ser compensadas por una transformación-κ, al hacer esto [29], uno encuentra como resultado los generadores de Lorentz que satisfacen el álgebra de Lorentz SO(9,1) excepto por $[N^{i-}, N^{j-}]$ que están relacionados con la carga BRST.

Como sabemos la supercuerda GS contiene constricciones de primera y segunda clase las cuales son difíciles de separar de forma covariante, la cuantización de ésta teoría puede hacerse invariante conforme fijando la norma de la simetría-κ, esto se logra usando la condición $(\gamma^+\theta)_\alpha = 0$ y asegurando que $\partial X^+ \neq 0$. En la norma sel semi-cono de luz la acción GS se puede escribir de la forma

$$S[X^\mu, S_a] = \frac{1}{\pi}\int d^2z \Big[\frac{1}{2}\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \frac{1}{2} S_a \bar{\partial} S_a + \text{términos anti-holomorfos}\Big],$$

donde $S_a = \sqrt{\frac{\partial X^+}{2}}(\gamma^-\theta)_a$ es un espinor quiral SO(8), los términos anti-holomorfos dependen si uno esta discutiendo la supercuerda heterótica ó la Tipo II, cosa que no haremos aquí.

En la norma del semi-cono de luz, uno construye la carga BRST estándar como

$$Q = \int dz(cT_m + bc\partial c) \tag{6.37}$$

con la acción

$$S[X^\mu, S_a, b, c] = \frac{1}{\pi}\int d^2z \Big[\frac{1}{2}\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \frac{1}{2} S_a \bar{\partial} S_a + b\bar{\partial}c + \text{términos anti-holomorfos}\Big],$$

donde

$$T_m = -\partial X^- \partial X^+ + \partial X^i \partial X^i - \frac{1}{2} S_a \partial S_a + \frac{1}{2}\partial^2(\log \partial X^+) \tag{6.38}$$

es el tensor de energía momento. El término $\frac{1}{2}\partial^2(\log \partial X^+)$ viene de la no covariancia al fijar la norma, y como se verá, será necesario para preservar la invariancia conforme y la invariancia de Lorentz a nivel cuántico. Usando los OPE's

$$X^{\mu}(y,\overline{y})X^{\nu}(z,\overline{z}) \longrightarrow \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\log|y-z|^2 \tag{6.39}$$

$$S_a(y)S_b(z) \longrightarrow \frac{\delta_{ab}}{y-z} \tag{6.40}$$

uno encuentra que T_m tiene carga central $c = 26$, entonces Q es nilpotente a nivel cuántico. Aunque la invariancia de norma no es manifiesta, uno puede construir los generadores de Lorentz que conmutan con Q. Las componentes holomorfas de las corrientes para estos generadores son

$$N^{ij} = -\partial X^{-}\partial X^{+} + \partial X^{i}\partial X^{i} - \frac{1}{4}(S\sigma^{ij}S), \tag{6.41}$$

$$N^{+-} = \frac{1}{2}X^{-}\partial X^{+} - \frac{1}{2}\partial X^{+}\partial X^{-}, \tag{6.42}$$

$$N^{i+} = X^{+}\partial X^{i} - X^{i}\partial X^{+}, \tag{6.43}$$

$$N^{i-} = X^{-}\partial X^{i} - X^{i}\partial X^{-} - \frac{(S\sigma^{i})_{\dot{a}}(S\sigma^{j})_{\dot{a}}\partial X^{j}}{2\partial X^{+}}. \tag{6.44}$$

Con estos generadores el álgebra de Lorentz SO(9,1) cierra salvo por un operador BRST que satisfacen

$$\Big[\int N^{i-}(y)dy, \int N^{j-}(z)dz\Big] = \Big[Q, -\int \Big(\frac{b(S\sigma^{i})_{\dot{a}}(S\sigma^{j})_{\dot{a}}}{(\partial X^{+})^2}\Big)(z)dz\Big]. \tag{6.45}$$

Como esta cantidad es trivial BRST, el álgebra de Lorentz cierra salvo transformaciones de norma cuando actúa sobre estados invariantes BRST, en otras palabras $QV = 0$ implica que $[N^{i-}, N^{j-}]V = Q\Omega$ para alguna función en el superespacio $\Omega(x,\theta)$. De tal forma que después de incluir el término $\frac{1}{2}\partial^2(\log\partial X^{+})$ en T_m, el álgebra de Lorentz cierra hasta transformaciones de norma.

Capítulo 7

Conclusiones.

En esta tesis hemos hecho una revisión de los programas y métodos para obtener la cuantización covariante de la supercuerda GS. Hemos visto como el método de Berkovits permite entender un poco más como se debe atacar el problema. El principal resultado de esta tesis, consistió en obtener un método sistemático para obtener la redefinición de campos que obtienen Berkovits y Marchioro para explicar el origen del espinor puro [29]. La forma de trabajar de BM es un poco oscura, y no explica la forma en que se obtuvo esta redefinición de campos. Aunque si explica como se relacionan las cargas BRST estándar y del espinor puro a partir de transformaciones de similaridad. Él demuestra a partir de esto que los operdaores BRST en ambos formalismos dan lugar a la misma cohomología de estados físicos y en consecuencia ambos formalismos dan origen al espectro de la supercuerda GS.

Un aspecto que es importante señalar, consiste en que la cuantización covariante de la supercuerda GS implementada por Berkovits, parte de una acción conforme libre (no es la acción GS) cuya carga BRST corresponde a la carga BRST del espinor puro $Q = \int \lambda^\alpha d_\alpha$. Sorprendentemente la cohomología que genera corresponde a los estados físicos de la supercuerda GS. La equivalencia entre la acción conforme libre con la carga BRST del espinor puro y la acción GS con la carga BRST estándar esta demostrada a partir de transformaciones de similaridad [29].

La tesis presentada aquí, implementa el método BFT en las constricciones de la supercuerda GS. Al hacer esto las constricciones de la teoría cierran en un álgebra efectiva de primera clase en un espacio fase extendido. Sorprendentemente la redefinición de constricciones coincide con la obtenida por BM [29]. Esta redefinición permite escribir las constricciones en términos de campos libres, y en consecuencia cierran en un álgebra de primera clase efectiva que hace evidente todas las simetrías de norma de la teoría (difeomorfismos y simetría-κ), además que este método permite construir los generadores del álgebra de Lorentz y reconstruir la invariancia de Lorentz a nivel cuántico.

El camino que se ha seguido para resolver las constricciones es altamente no covariante [29, 30, 31], y es evidente que la invariancia de Lorentz en el espacio-tiempo

$D = 10$ ya no es manifiesta. Sin embargo, es posible construir los generadores de Lorentz que dejan invariante al operador BRST, de tal forma que el álgebra de Lorentz cierra salvo transformaciones de norma cuando actúa sobre estados invariantes BRST, lo cual permite reconstruir la simetría de Lorentz a nivel cuántico.

Otra forma de visualizar la redefinción de campos obtenida por BM es mediante el formalismo AK [30], el cual también tiene una explicación sistemática usando el método BFT a las variables del espacio configuración [31].

El formalismo AK [30] presenta una acción GS con el doble de campos fermiónicos. Esta acción esta escrita en términos de la variable Θ, que es la diferencia de dos campos independientes $(\tilde{\theta} - \theta)$. Al mismo tiempo introducen una interacción apropiada entre ellas a mano, la cual genera una supersimetría local extra. A partir de esta acción ellos encuentran una redefinición de campos (no trivial), bajo la cual las variables básicas se vuelven canónicamente libres (campos libres), esto les permite cuantizar la teoría de forma directa salvo pequeñas modificaciones cuánticas debidas a la forma de las constricciones. Este formalismo reproduce la redefinición de campos obtenida en [29], donde uno puede construir inmediatamente el operador BRST estándar y mostrar que la cohomología es equivalente a la obtenida mediante el formalismo del espinor-puro.

Como vimos los métodos presentados en esta tesis, permiten dar una explicación clara y concisa de los resultados presentados por BM [29] y AK [30]. Como ya se mencionó, la extensión BFT que se implementó en las constricciones de la supercuerda GS es completamente general, ya que no fue necesario fijar la norma del semi-cono de luz. El álgebra de primera clase efectiva obtenida a partir del método general BFT coincide exactamente con la presentada por BM, dando una explicación algebráica para obtener esta redefinición de campos (en términos de campos libres). La relación que hay entre el formalismo AK [30] y el método de conversión BFT, es la siguiente. Si aplicamos el método BFT a las variables del espacio configuración de la supercuerda GS, encontramos una redefinición de estas variables. Al sustituir estas variables redefinidas en la acción GS uno encuentra una acción GS deformada que corresponde a la acción presentada en [30]. Claro que uno tiene que inteprentar las variables fermiónicas que añadimos en el método BFT S_a con las variables $\tilde{\theta}$ que doblan el espacio fermiónico en [30]. Además como en [30] se uso la norma del semi-cono de luz en el grupo SO(8), tenemos que agregar los términos que son cero $S_{\dot{a}}$ para reconstruir todas las componentes de los espinores de Majorana-Weyl, y al final reconstruir la estructura covariante de las variables fermiónicas $(\theta^{\alpha}\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\xi^{\beta})$.

El método BFT que se ha implemantado en la supercuerda GS permite explicar la redefinición de campos obtenida por [29, 30], que representa el álgebra efectiva de primera clase de la teoría GS. El método es completamente general ya que no fue necesario fijar la norma del semi-cono de luz. De igual forma da una explicación de por qué se trabajó con la acción con interacción en [30]. Es verdaderamente sorprendente ver como funciona el método de conversión de constricciones BFT, y como permite aclarar la filosofía seguida por Berkovits para entender el origen del espinor puro en la carga BRST y su aplicación en la cuantización covariante de la sueprcuerda GS.

De tal forma que con el método BFT aplicado a la supercuerda GS es posible explicar el origen del álgebra de norma efectiva y obtener de forma sistemática la aplicación que tiene para entender el origen del espinor puro.

Aún queda mucho por hacer, la cuantización covariante de la supercuerda tiene muchas vertientes para seguir estudiando. Uno de los aspectos que sería interesente estudiar es el formalismo del espinor puro aplicado a la supermembrana. Actualmente se han estudiado las propiedades que tiene el espinor puro en dimensiones bajas [39, 40, 41], y sería interesante ver el alcance del método BFT en estas dimensiones, y si puede decir algo más acerca de las simetrías de norma y de la invariancia de Lorentz de la teoría GS.

Parte III

Apéndices

Apéndice A

Separación del grupo SO(9,1).

La notación usada en esta tesis para la acción de Green-Schwarz es $\epsilon^{01} = 1$, θ^A_α es un espinor SO(9,1) con $A = 1, 2$ supersimetrías y $\alpha = 1, 2, .., 16$ componentes reales. Estos espinores son espinores de Majorana-Weyl reales con la misma quiralidad. Las variables x^μ son las coordenadas espacio-tiempo en 10 dimensiones $\mu = 0, 1, 2, .., 9$ que representan junto con los espinores de Majorana-Weyl las variables del espacio configuración de la supercuarda GS. Las coordenadas de la hoja mundo $\zeta = (\tau, \sigma)$, y las derivadas respecto al tiempo serán denotadas por un punto y respecto a sigma por una prima. Las matrices γ^μ son matrices de Dirac de 16×16 reales y simétricas. En este trabajo estamos usando la convensión de derivadas izquierdas, de tal forma que la estructura simpléctica para las variables fermiónicas esta dado por

$$\{\theta^A_\alpha, p^B_\beta\} = -\delta_{\alpha\beta}\delta^{AB}, \tag{A.1}$$

esta convensión fija el orden $\dot{\theta}$ y p en el término cinético de la acción de primer orden.

Las coordenadas en el cono de luz separan el índice espinorial α en las componentes quirales a y antiquirales $\dot{a}$ del grupo SO(8). Las variables de espacio tiempo se descomponen deacuerdo a

$$\gamma^\pm = \gamma^0 \pm \gamma^9, \qquad x^\pm = x^0 \pm x^9, \tag{A.2}$$

y γ^i, x^i con $i = 1, 2, .., 8$ para las otras componentes del vector. El álgebra de Dirac se descompone deacuerdo a

$$\gamma^+_{\dot{a}\dot{b}} = -2\delta_{\dot{a}\dot{b}}, \qquad \gamma^-_{ab} = -2\delta_{ab}, \qquad \gamma^i_{\dot{a}a}\gamma^j_{\dot{a}b} + \gamma^j_{a\dot{a}}\gamma^i_{\dot{a}b} = 2\delta^{ij}\delta_{ab}, \tag{A.3}$$

y

$$\gamma^i_{a\dot{b}}\gamma^i_{c\dot{d}} + \gamma^i_{a\dot{d}}\gamma^i_{c\dot{b}} = 2\delta_{ac}\delta_{\dot{b}\dot{d}}, \tag{A.4}$$

con $\gamma_{\dot{a}a}$ simétrica. En esta tesis se usa repetidamente la identidad de Fierz

$$\left(\gamma_{(\alpha\beta}\right)^\mu \left(\gamma_{\gamma)\delta}\right)_\mu = 0, \tag{A.5}$$

que satisfacen las matrices γ^{μ}.

En la representación del grupo SO(8), existe el sector de la métrica $g^{\mu\nu}$ quesube y baja los índices de las cantidades $\Pi^{\pm}$, ya sea con el índice covariante o contravariante. Las métricas que hacen este trabajo están definidas como

$$\mathbf{g_{kl}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g^{kl}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

donde los índices k, l corren en $\pm$ y satisfacen

$$g_{ml}g^{ln} = \delta^{n}_{m}. \tag{A.6}$$

Esta métrica es muy curiosa, ya que sube y baja el índice, pero al mismo tiempo lo cambia. Por ejemplo, si tenemos la cantidad Π^{+}, y deseamos bajar el índice, usamos la métrica y obtenemos

$$\Pi_{-} = g_{-+}\Pi^{+} = -\frac{1}{2}\Pi^{+}, \tag{A.7}$$

un resultado muy curioso, que es muy útil para calcular los paréntesis de Poisson de las constricciones corregidas.

Bibliografía

[1] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory Vol. 1*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, CUP New York (1987).

[2] J. Polchinski, *String Theory Vol. 1*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, CUP Cambrdige, England (1998).

[3] J.C. Johnson, *D-Branes*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, CUP Canbridge, England (2003).

[4] T. Ortín, *Gravity and String*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, CUP Cambridge, England (2004).

[5] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York (1964).

[6] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, chapter 8 Canonical Transformation, Addison-Wesley, U.S.A. (1950).

[7] E. Cartan, *Lecons sur la Theorie des Spineurs*, Hermann, Paris, 1937.

[8] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, 1992.

[9] M. Henneaux and L. Brink, *Principles of String Theory.* Plenum Press, New York-London (1988).

[10] M. Henneaux. BRST symmetry in classical and quantum theories of gauge systems. en *Quantum mechanics of Fundamental Systems* Ed. C. Teiltelboim. Plenum Press, New York-London (1988).

[11] D. Lüst and S. Theisen, *Lectures on String Theory*, Lectures Notes in Physics 346. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1989).

[12] W. Siegel, Classical Superstring Mechanics,*Nucl. Phys. B263* (1986) 93.

[13] I. Oda and M. Tonin, On the Berkovits Covariant Quantization of GS Superstring, *Phys. Lett. B520* (2001) 398, hep-th/0109051.

[14] S. Guttenberg, J. Knapp and M. Kreuzer, On Covariant Quantization of Type II Superstrings, *JHEP 0406 (2004) 030*, hep-th 0405007.

[15] E. D'Hoker and D.H. Phong, Two-Loop Superstring 1, *Main Formulas*, *Phys. Lett. B529* (2002) 241. hep-th/0110247.
E. D'Hoker and D.H. Phong, Two-Loop Superstring 2, *The Chiral Measure on Moduli Space*, *Phys. Lett. B636* (2002) 3. hep-th/0110283.
E. D'Hoker and D.H. Phong, Two-Loop Superstring 3, *Slice Independence and Absence of Ambiguities*, *Phys. Lett. B636* (2002) 61. hep-th/0111016.
E. D'Hoker and D.H. Phong, Two-Loop Superstring 4, *The Cosmological Constant and Modular Forms*, *Phys. Lett. B639* (2002) 129. hep-th/0111040.
E. D'Hoker and D.H. Phong, Two-Loop Superstring 5, *Gauge-Slice Independence of the N-Points Function*. hep-th/0501196.
E. D'Hoker and D.H. Phong, Two-Loop Superstring 6, *Non-Renormalization Theorems and the Four-Points Function*. hep-th/0501197.

[16] N. Berkovits and C.R. Mafra, Equivalence of Two-Loop Superstring Amplitudes in the Pure Spinor and RNS Formalisms. hep-th/0509234

[17] D. Friedan, E. Martinec and S. Shenker, Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory, *Nucl. Phys. B271* (1986) 93.

[18] N. Berkovits, Quantization of the Superstring with Manifest U(5) Super-Poincaré Invariance, *Phys. Lett. B457* (1999) 94, hep-th/9902099.

[19] N. Berkovits, Super-Poincaré Covariant Quantization of the Superstring, *JHEP 0004 (2000) 018*, hep-th 0001035.

[20] N. Berkovits and B.C. Vallilo, Consistency of Super-Poincaré Covariant Superstring Tree Amplitudes, *JHEP 0007 (2000) 015*, hep-th 0004171.

[21] N. Berkovits, Cohomology in the Pure Spinor Formalism for the Superstring, *JHEP 0009 (2000) 046*, hep-th 0006003.

[22] N. Berkovits, Covariant Quantization of the Superstring, hep-th 0008145.

[23] N. Berkovits and O. Chandía, Superstring Vertex Operators in an AdS_5xS^5 Background, hep-th 0009168.

[24] N. Berkovits and O. Chandía, Lorentz Invariance of the Pure Spinor BRST Cohomology for the Superstring, *Phys. Lett. B514 (2001) 394*, hep-th 0105149.

[25] N. Berkovits, Covariant Quantization of the Superparticle using Pure Spinors, *JHEP 0109 (2001) 016*, hep-th 0105050.

[26] N. Berkovits, Relating the RNS and Pure Spinor Formalism for the Superstring, *JHEP 0108 (2001) 026*, hep-th 0104247.

[27] N. Berkovits and O. Chandía, Massive Superstring Vertex Operador in D=10 Superspace. hep-th 0204121.

[28] N. Berkovits, ICTP Lextures on Covariant Quantization of the Superstring, hep-th 0209059.

[29] N. Berkovits and D. Z. Marchioro, Relating the Green-Schwarz and Pure Spinor Formalism for the Superstring. *JHEP 0501 (2005) 018*, hep-th 0412198.

[30] Y. Aisaka and Y. Kazama, Origin of the Pure Spinor Superstring., hep-th 0502208.

[31] A. Gaona and J.A. García, BFT embedding of the Green-Schwarz superstring and the pure spinor formalism. *JHEP 0509 (2005) 083*, hep-th 0507076.

[32] N. Berkovits, Multiloops Amplitudes and Vanishing Theorems Using the Pure Spinor Formalism for the Superstring. *JHEP 0409 (2004) 047*, hep-th 0406055.

[33] N. Berkovits and P.S. Howe, Ten-dimensional Supergravity Constraints from the Pure Spinor Formalism for the Superstring. *Nucl. Phys. B635 (2002) 75.* hep-th 0112160.

[34] O. Chandía and B.C. Vallilo, Conformal Invariance of the Pure Spinor Superstring in a Curved Background. *JHEP 0404 (2004) 041*, hep-th 0401226.

[35] B.C. Vallilo, One Loop Conformal Invariance of the Superstring in an $AdS_5 \times S^5$ Background. *JHEP 0212 (2002) 042*, hep-th 0210064.
N. Berkovits, Quantum Consistency of the Superstring in $AdS_5 \times S^5$ Background. *JHEP 0503 (2005) 041*, hep-th 0411170.

[36] N. Berkovits, A New Description of the Superstring. hep-th 9604123.
N. Berkovits, M. Bershadsky, T. Hauer, S. Zhukov and B. Zwiebach, Superstring Theory on $AdS_2 \times S^2$ as a Coset Supermanifold, *Nucl. Phys. B537 (2000) 61*, hep-th 9907200.

[37] N. Berkovits, C. Vafa and E. Witten, Conformal Field Theory of AdS ackground with Ramond-Ramond Flux. *JHEP 9903 (1999) 018*, hep-th 9902098.
N. Berkovits, Quantization of the Type II Superstring in a Cuervd Six-dimensional Background. *Nucl. Phys. B565 (2000) 333*, hep-th 9908041.

[38] N. Berkovits, Quantization of the Superstring with Manifest U(5) Super-Poincaré Invariance. *Phys. Lett. B457 (1999) 94*, hep-th 9902099.

[39] N. Berkovits, Pure Spinor Formalism as an N=2 Topological String. hep-th 0509120.

[40] P.A. Grassi and N. Wyllard, Lower-dimensional Pure Spinor Superstrings. hep-th 0509140.

[41] N. Wyllard, Pure Spinor Superstrings in d=2,4,6. hep-th 0509165.

[42] P.A. Grassi, G. Policastro and M. Porrati, Covariant Quantization of the Brink-Schwarz Superparticle, hep-th 0009239.

[43] P.A. Grassi, G. Policastro, M. Porrati and P. van Nieuwenhuizen, Covariant Quantization of Superstring without Pure Spinors Constrains, hep-th 0112162.

[44] P.A. Grassi, G. Policastro and P. van Nieuwenhuizen, The Massless Spectrum of Covariant Superstring, hep-th 0202123.

[45] P.A. Grassi, G. Policastro and P. van Nieuwenhuizen, On the BRST Cohomology of Superstring with/without Pure Spinors, hep-th 0206216.

[46] P.A. Grassi, G. Policastro and P. van Nieuwenhuizen, The Covariant Quantum Superstring and Superparticle from their Classical Actions, hep-th 0209026.

[47] P.A. Grassi, G. Policastro and P. van Nieuwenhuizen, Yang-Mills Theory as an Illustration of the Covariant Quantization of Superstring. hep-th 0211095.

[48] P.A. Grassi, G. Policastro and P. van Nieuwenhuizen, An introduction to the Covariant Quantization of Superstrings, hep-th 0302147.

[49] P.A. Grassi, G. Policastro and P. van Nieuwenhuizen, The Quantum Superstring as a WZNW Model with N=2 Superconformal Symmetry, hep-th 0307056.

[50] P.A. Grassi, G. Policastro and P. van Nieuwenhuizen, Superstrings and WZNW Models, hep-th 0402122.

[51] P.A. Grassi and P. van Nieuwenhuizen, Gauging Cosets, hep-th 0403209.

[52] P.A. Grassi and P. van Nieuwenhuizen, N=4 Superconformal Symmetry for the Covariant Quantum Superstring, hep-th 0408007.

[53] M. Kato, Physical Spectra in String Theories: BRST Operators and Similarity Transformations, hep-th/9512201.

[54] I.A. Batalin and I.V. Tyutin, Existence Theorem for the Effective Gauge Algebra in the Generalized Canonical Formalism with Abelian Conversion of Second-Class Constraints, *International Journal of Modern Physics A Vol.6 No.18 (1991)*, pp. 3255-3282.