



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**“Análisis Cinemático y Dinámico de un  
Robot Delta de 3 Grados de Libertad”**

**T E S I S**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN INGENIERIA**

**CAMPO DE CONOCIMIENTO – MECANICA APLICADA**

**P R E S E N T A :**

**SHAIR      MENDOZA      FLORES**



**Tutor: M. en I. Francisco Cuenca Jiménez**

**Cd. Universitaria. México, D.F.**

**2006**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. López Parra Marcelo  
Secretario: M.I. González González Leopoldo Adrián  
Vocal: M.I. Cuenca Jiménez Francisco  
1<sup>er</sup> Suplente: M.C. Riestra Martínez Ernesto  
2<sup>do</sup> Suplente: Dr. Rojas Salgado Ángel Alfonso

México D.F.

Ciudad Universitaria

## **TUTOR DE TESIS:**

M.I. Cuenca Jiménez Francisco

---

Firma



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

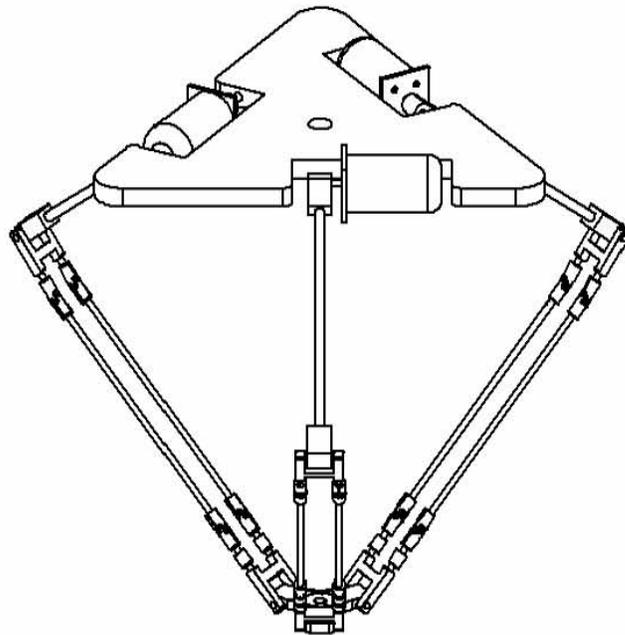
---

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

**“Análisis Cinemático y Dinámico de un  
Robot Delta de 3 Grados de Libertad”**



**Shair Mendoza Flores**

Cd. Universitaria. México, D.F.

2006

## **Agradecimientos**

A Dios por permitirme alcanzar este objetivo y saber que siempre ha estado en cada paso que doy, gracias Señor.

A mi familia porque me han brindado su apoyo incondicionalmente y me han alentado día a día para no rendirme y seguir esforzandome, gracias Mamá, Papá y Yidel por estar siempre conmigo y ser la familia mas hermosa que me ha dado Dios.

A ti Brenda porque espero que cada triunfo que logres podamos compartirlo juntos.

A la familia Cortés Aguilar por brindarme su amistad y su cariño cuando lo necesite, a cada integrante por llenar mi vida de recuerdos agradables e inolvidables.

A mi tutor Francisco Jiménez Cuenca por su apoyo y ser el guía durante mi estancia en este etapa de mi vida.

A cada amigo de esta magnífica Universidad que me ha mostrado su amistad mas allá de las palabras y que no terminaría de mencionar a todos ellos, pero saben que los considero mis amigos.

Reconocimiento a la DGAPA por su apoyo al proyecto PAPIIT IN-116105 “Diseño y manufactura de mecanismos indexados para aplicaciones en cuartos limpios”.

# Índice general

## Capítulo 1. Generalidades

1.1 Justificación.....	5
1.2 ObjetivoGeneral.....	5
1.3 Metodología.....	6
1.4 Manipuladores Paralelos, Movimientos y Restricciones.....	6
1.5 Arquitectura.....	8
1.6 Grados de Libertad.....	9

## Capítulo 2. Análisis Cinemático

2.1 Introducción.....	10
2.2 Posición.....	10
2.2.1 Ángulo $\theta_{3i}$ .....	18
2.2.2 Ángulo $\theta_{8i}$ .....	22
2.2.3 Ángulo $\theta_{7i}$ .....	25
2.2.4 Ángulo $\theta_{11i}$ .....	27
2.2.5 Ángulo $\theta_{12i}$ .....	28
2.2.6 Ángulo $\theta_{10i}$ .....	30
2.3 Velocidad	
2.3.1 Velocidad de $\theta_{3i}$ .....	32
2.3.2 Velocidad de $\theta_{8i}$ .....	33
2.3.3 Velocidad de $\theta_{7i}$ .....	35
2.3.4 Velocidad de $\theta_{11i}$ .....	36
2.3.5 Velocidad de $\theta_{12i}$ .....	38
2.3.6 Velocidad de $\theta_{10i}$ .....	40
2.4 Aceleración	
2.4.1 Aceleración de $\theta_{3i}$ .....	43
2.4.2 Aceleración de $\theta_{8i}$ .....	48
2.4.3 Aceleración de $\theta_{7i}$ .....	50
2.4.4 Aceleración de $\theta_{11i}$ .....	52
2.4.5 Aceleración de $\theta_{12i}$ .....	54
2.4.6 Aceleración de $\theta_{10i}$ .....	58

### **Capítulo 3. Análisis Dinámico** **Formulación Newton-Euler**

3.1 Introducción.....	62
3.2 Dinámica del Robot Delta Paralelo.....	68
3.2.1 Análisis del Cuerpo 1i.....	69
3.2.2 Análisis del Cuerpo 2i.....	76
3.2.3 Análisis del Cuerpo 3i.....	82
3.2.4 Análisis del Cuerpo 5i.....	87
3.2.5 Análisis del Cuerpo 6i.....	90
3.2.6 Análisis de la Plataforma Móvil p.....	92
3.3 Solución del Método de Newton – Euler.....	94

### **Capítulo 4. Análisis Dinámico Formulación Trabajo Virtual**

4.1 Introducción.....	97
4.1.1 El Principio del Trabajo Virtual.....	97
4.1.2 Desplazamiento Virtual.....	98
4.2 Formulación de Trabajo Virtual en la Dinámica del Robot Delta Paralelo.....	100
4.2.1 Desplazamientos Virtuales de Centros de Gravedad.....	101
4.2.2 Velocidad de Centros de Gravedad.....	111
4.2.3 Aceleracion de Centros de Gravedad.....	113
4.2.4 Fuerzas y Momentos Inerciales.....	116
4.2.5 Desplazamientos Virtuales $\delta Q_{1i}$ , $\delta Q_{2i}$ , $\delta Q_{3i}$ .....	117
4.3 Solución de la Ecuación de Trabajo Virtual.....	123

## **Capítulo 5. Análisis Dinámico**

### **Formulación Euler -Lagrange**

5.1 Introducción.....	125
5.2 Velocidad de Centros de Gravedad.....	127
5.3 Función Lagrangiana.....	133
5.4 Fuerzas Generalizadas.....	158
5.5 Determinación de los Torques.....	161

## **Resultados**

## **Conclusiones**

## **Bibliografía**

## **Apéndice A**

## **Apéndice B**

## **Apéndice C**

## Lista de Símbolos

$d_{ji}$	Distancia $j$ de la cadena cinemática $i$
$\theta_{ji}$	Ángulo $j$ de la cadena cinemática $i$
$\mathbf{T}_{zi}$	Matriz de transformación homogénea
$\mathbf{R}_\theta$	Matriz de rotación
$(x_0, y_0, z_0)$	Marco de referencia inercial
$(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji})$	Base local $j$ de la cadena cinemática $i$
$s$	Seno
$c$	Coseno
$t$	Tangente
$\mathbf{R}_{CGji}$	Vector de posición del centro de gravedad del cuerpo $j$ de la cadena cinemática $i$
$\Omega_{0,3i}^1$	Velocidad angular del cuerpo 1 definida en sistema inercial $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ asociada a la base local $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$
$\mathbf{a}_{Gji}$	Vector de aceleración de centro de gravedad del cuerpo $j$ de la cadena cinemática $i$
$\delta\mathbf{Q}_{ji}$	Desplazamiento virtual rotacional
$\delta\mathbf{R}_{ji}$	Desplazamiento virtuales del punto de aplicación de la fuerza
$\omega_{k,ij}^c$	velocidad angular del cuerpo $c$ , medida en el marco de $ij$ referencia $k$ , con respecto al marco de referencia
$\dot{\omega}_{k,ji}^c$	aceleración angular del cuerpo $c$ , medida en el marco de referencia $k$ con respecto al marco de referencia $ij$
$\omega_{ji}$	Velocidad angular relativa del cuerpo $j$ en la cadena cinemática $i$
$\alpha_{ji}$	Aceleración angular relativa del cuerpo $j$ en la cadena cinemática $i$
$L_j$	Función Lagrangiana de la cadena $j$
$K_{ji}$	Energía cinemática del cuerpo $j$ de la cadena cinemática $i$
$U_{ji}$	Energía potencial del cuerpo $j$ de la cadena cinemática $i$
$\tau$	Torque

# Capítulo I

## Generalidades

En este capítulo se plantea la justificación de los temas a desarrollar, análisis cinemático y análisis dinámico en sus diferentes propuestas, método de Newton - Euler, Trabajo Virtual y Euler Lagrange, por otra parte se muestra el objetivo general y la metodología empleada.

### 1.1 Justificación

El análisis dinámico de mecanismos paralelos es complicado por la existencia de múltiples cadenas cerradas, se han descrito varias metodologías y aproximaciones, incluyendo la formulación de Newton-Euler, Trabajo Virtual y Euler Lagrange, para la solución de la dinámica de mecanismos paralelos dentro de esta investigación.

Esta investigación surge de la necesidad de crear uno o varios modelos dinámicos del robot delta paralelo que permitan cuantificar todos los efectos que provocan cada elemento constituyente del robot y comprobar de manera alterna con otros modelos los resultados obtenidos. Por tal razón los modelos de Newton-Euler, Trabajo Virtual y Formulación Euler Lagrange son descritos durante esta investigación. Algunas simplificaciones se han hecho por otros investigadores [1], de manera que se han obtenido modelos más simplificados que permiten un análisis más sencillo pero que no es una solución generalizada.

### 1.2 Objetivo General

El siguiente proyecto de investigación tiene como objetivo realizar el análisis cinemático y dinámico de un mecanismo espacial paralelo. La cinemática descrita en este proyecto, es la representación de la cinemática inversa, común en los robots paralelo. El objetivo de la cinemática inversa es definir un mapa de la posición de la plataforma móvil en el espacio cartesiano a un conjunto de ángulos de las juntas que alcanzan dicha posición, a diferencia de la cinemática directa que involucra el mapeo de un conjunto de variables de entrada conocidas de las juntas a una posición de la plataforma móvil. Dentro del análisis dinámico se plantean varios modelos que permitan conocer el comportamiento dinámico del robot paralelo. Se proponen tres modelos dinámicos, el primero de ellos el método de Newton - Euler, el segundo método es mediante Trabajo virtual, y como tercer método la formulación de Euler - Lagrange. Este último nace de la necesidad de encontrar un modelo dinámico que permita llegar a la ecuación general de control.

## 1.3 Metodología

1. Análisis Cinemático
  - a) Análisis de Posición
  - b) Análisis de Velocidad
  - c) Análisis de Aceleración
2. Análisis Dinámico
  - a) Formulación Newton-Euler
  - b) Trabajo Virtual
    - b.1) Desplazamientos Virtuales
  - c) Formulación Euler - Lagrangiana
    - c.1) Energía Cinética
    - c.2) Energía Potencial
    - c.3) Función Lagrangiana

## 1.4 Manipuladores Paralelos, Movimientos y Restricciones

Un mecanismo o manipulador mecánico está compuesto por diferentes eslabones conectados por juntas[1]. El número de grados de libertad (GDL) de un mecanismo depende del número de eslabones y el tipo de juntas usadas para la construcción del mecanismo.

Las juntas, también llamadas articulaciones, proveen algunas restricciones físicas o movimientos relativos entre los eslabonamientos. Estas articulaciones son causa del movimiento relativo entre los eslabones, el tipo de movimiento que permite una junta está gobernado por la forma de las superficies de contacto entre los eslabones.

Se puede representar una articulación como un punto, línea o área entre dos cuerpos que pueden o no tener movimiento relativo entre ellos. Las articulaciones que permiten movimiento se llaman pares cinemáticos. En la figura 1,1 se tienen los 6 tipos diferentes de pares cinemáticos posibles. De entre ellos, únicamente la articulación rotacional y la prismática son las básicas, a partir de las cuales se pueden formar las otras cuatro restantes.

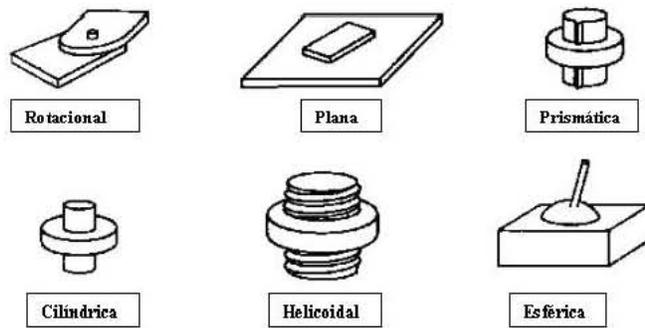


Fig. 1.1 Tipos de articulaciones

Los mecanismos espaciales con múltiples grados de libertad son llamados manipuladores paralelos [2] igual que los manipuladores seriales. Un mecanismo espacial paralelo es aquel en el cual dos o más cadenas cinemáticas conectan una plataforma móvil a una base fija. Los mecanismos paralelos ofrecen ventajas sobre los mecanismos seriales en terminos de rigidez, representación dinámica y exactitud.[2].

Típicamente el número de cadenas es igual al número de grados de libertad, de tal forma cada cadena es controlada por un actuador y todos los actuadores pueden ser montados cerca de la base fija. Debido a que las cargas externas pueden ser distribuidas entre los actuadores, los manipuladores paralelos tienden a soportar grandes cargas.

El diseño de mecanismos muy similares llamados manipuladores en paralelo data de 1962, cuando Gough y Whitehall [2], inventan la máquina universal para prueba de neumáticos. Stewart [3], diseña un manipulador de plataforma para usarse como simulador de vuelo en 1965. Hunt [4], hace un estudio sistemático de la cinemática de manipuladores en paralelo. Desde entonces, el estudio de los manipuladores en paralelo ha sido tema de estudio para varios investigadores (Clearly y Arai [5], Fitcher [6], Griffis y Duffy [7] Innocenti y Parenti Castelli [8], Mohamend y Duffy [9], Nanua [10], Zhang y Song [11]).

## 1.5 Arquitectura

La figura 1.2 muestra el manipulador delta a estudiar, el cual consiste en un arreglo en paralelo de tres cadenas cinemáticas idénticas. Estas cadenas están distribuidas en un arreglo triangular, dispuestas a  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  y  $240^\circ$ , respectivamente y están conectadas de la base fija a la plataforma móvil. Cada cadena consiste en un eslabón rígido de entrada o brazo superior (eslabón  $1i$ ) conectado a una junta rotacional, brazo inferior (eslabón  $2i$  y  $3i$ ) que están unidos al brazo superior a través de una junta universal, desacoplamiento de una junta esférica en una junta universal y una rotacional provocando la existencia del eslabón  $4i$  y  $5i$ , y la plataforma móvil. A este arreglo y disposición de eslabones se le denomina configuración delta. Debido a que las tres cadenas cinemáticas son idénticas, solo será descrita a detalle una de ellas. Todos los eslabones y plataformas son considerados cuerpos rígidos.

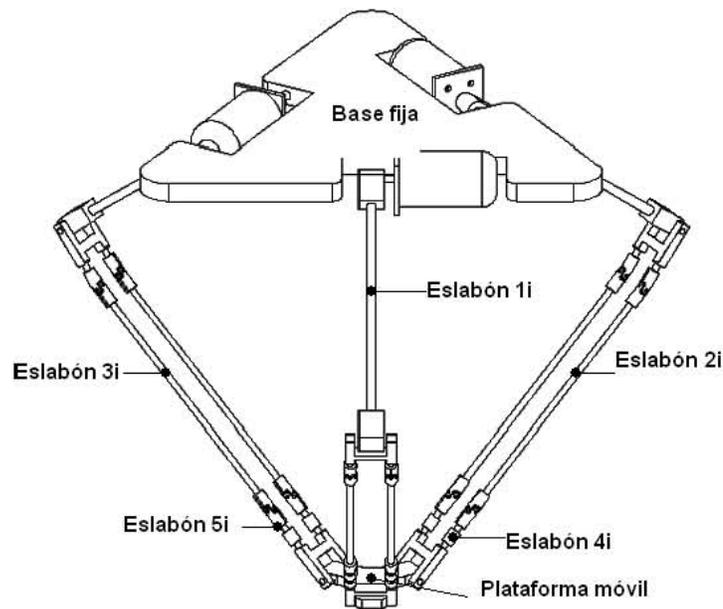


Fig. 1.2 Robot delta paralelo

## 1.6 Grados de Libertad

Los grados de libertad de un mecanismo son el número de parámetros independientes o entradas necesarias para especificar la configuración del mecanismo completamente. Los grados de libertad de un mecanismo paralelo pueden ser determinados con la aplicación de la fórmula de Chebyshev-Grübler-Kutzbach.

$$L = 6(b - g - 1) + \sum_k f_k$$

donde  $b$  y  $g$  son respectivamente, número de cuerpos (incluyendo la base), número de juntas del mecanismo y  $f_k$  el número de grados de libertad de la junta  $k$ . Por lo tanto para la plataforma se tiene:

$$\begin{aligned} b &= 17 \\ g &= 21 \\ \sum_k f_k &= 33 \end{aligned}$$

sustituyendo estos valores:

$$\begin{aligned} L &= 6(17 - 21 - 1) + 33 \\ L &= 3 \end{aligned}$$

De esta manera el manipulador paralelo en estudio posee 3 grados de libertad.

# Capítulo 2

## Análisis Cinemático

### 2.1 Introducción

La cinemática analiza los aspectos de movimiento sin importar los efectos externos, fuerzas y/o torques que causan este movimiento. La cinemática trata la posición, la velocidad y aceleración de los cuerpos. En los robots manipuladores las articulaciones están relacionadas a la posición y orientación del efector final por restricciones impuestas por estas mismas. En el estudio de la cinemática de robots manipuladores, constantemente se busca la localización de cuerpos en el espacio. Los cuerpos de interés incluyen eslabones de un manipulador, herramientas, piezas de trabajo, efectores finales, etc.

Sistemas de referencia son empleados para identificar la localización de un cuerpo. En la descripción de la presente investigación se emplean dos sistemas de referencia cartesianos, sistemas de referencia fijos o marcos inerciales y sistemas de referencia relativos o marcos locales. En el presente capítulo se desarrolla el análisis de posición, de velocidad y aceleración de los ángulos encontrados entre los eslabones.

### 2.2 Posición

La determinación de la posición y orientación de los eslabones del sistema es desarrollado dentro de esta sección. Para alcanzar este objetivo se emplea el análisis de la cinemática inversa.

**Cinemática Inversa.** Dada la posición del vector de localización del efector final  $(x_p, y_p, z_p)$  determinar la orientación de los ángulos de las articulaciones de los eslabones, a este proceso se le denomina cinemática inversa. El uso del análisis de la cinemática inversa para los robots paralelos es una manera sencilla y práctica de encontrar estos ángulos.

Para hacer el análisis de posición de la configuración delta se tomarón como herramienta las matrices homogéneas, las cuales nos proporcionan desplazamiento y rotación de un cuerpo. Dicha matriz de transformación homogénea tiene la siguiente definición:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde:

- $\mathbf{R}$  = matriz de rotación
- $\mathbf{d}$  = vector de desplazamiento

Las matrices de transformación de traslación básicas en los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente son [12]:

$$\mathbf{T}_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{T}_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{T}_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

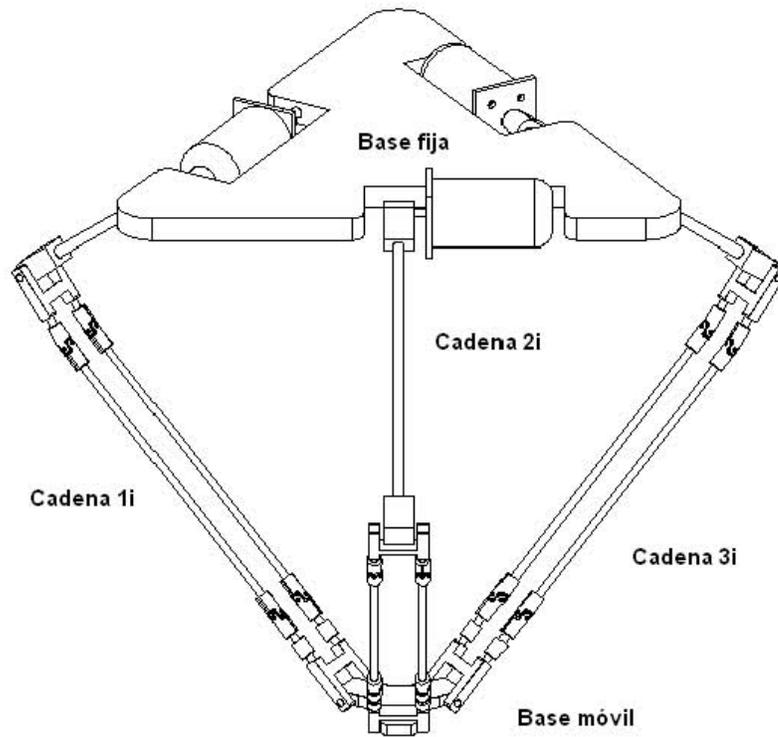
Y las matrices de transformación de rotación básicas en los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente son [12]:

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & 0 \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{T}_{z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{T}_{z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Se hace el análisis sólo a una cadena cinemática por existir simetría entre ellas, sólo variando un iterador  $i$  es posible diferenciar a cada cadena serial, como se muestra en la figura siguiente (fig. 2.1):



2.1 Robot delta simétrico

En la figura (2.2) tenemos la posición del marco de referencia inicial para cada cadena. Es decir que a partir de una base inercial  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ , y aplicando la matriz de transformación homogénea que representa giro en  $z$ , podemos formar la base local  $(\mathbf{x}_{1i}, \mathbf{y}_{1i}, \mathbf{z}_{1i})$ . Es decir:

$$\mathbf{T}_{0,1i} = \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i}) \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{T}_{0,1i}$  significa matriz de transformación que lleva de la base inercial 0 a la base local 1i.

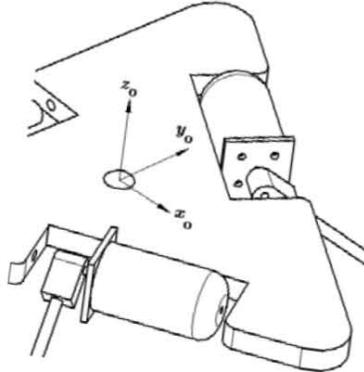


Fig. 2.2 Sistema Inercial

Observando la figura (2.3) las transformaciones correspondientes necesarias para alcanzar el sistema de referencia local  $(\mathbf{x}_{2i}, \mathbf{y}_{2i}, \mathbf{z}_{2i})$  partiendo de  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  son:

$$\mathbf{T}_{0,2i} = \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i}) \quad (2.9)$$

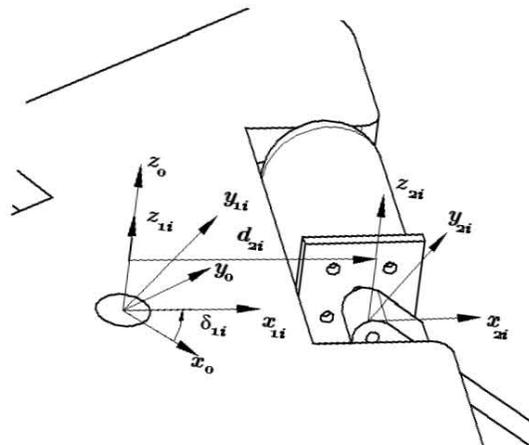


Fig. 2.3 Sistemas de referencia 2i

Para las figuras (2.4) y (2.5) respectivamente, tenemos las transformaciones que nos permiten llegar a la marco local  $(\mathbf{x}_{6i}, \mathbf{y}_{6i}, \mathbf{z}_{6i})$ , partiendo del marco local  $(\mathbf{x}_{2i}, \mathbf{y}_{2i}, \mathbf{z}_{2i})$ .

$$\mathbf{T}_{2,6i} = \mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{T}_{z1}(d_{4i})\mathbf{T}_{z2}(-d_{5i})\mathbf{T}_{z3}(-d_{6i}) \quad (2.10)$$

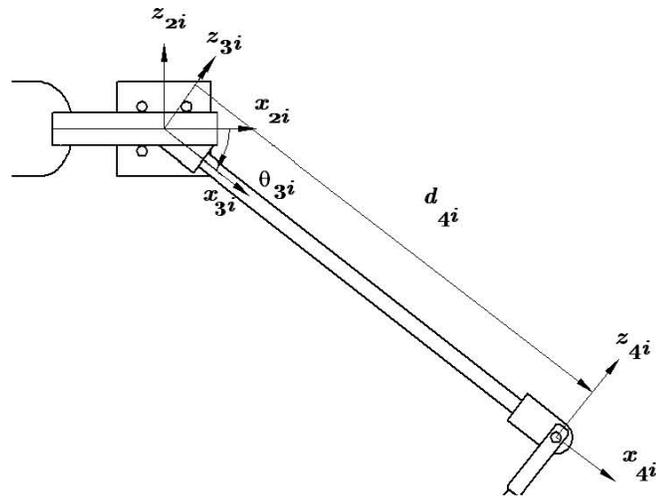


Fig.2.4 Sistemas locales 2i, 3i, 4i

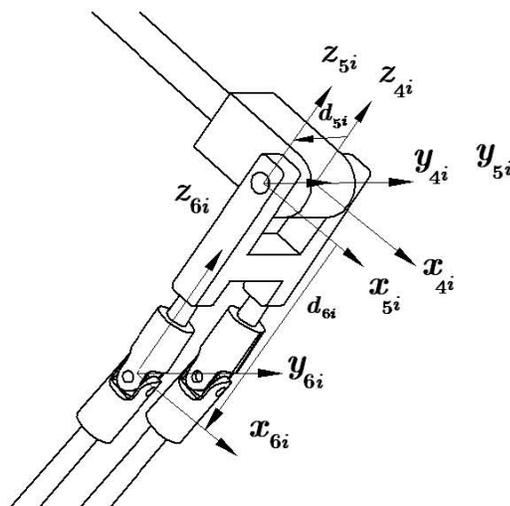


Fig. 2.5 Sistemas locales 4i, 5i, 6i

Transformaciones empleadas para los marcos de referencia local  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i}) - (\mathbf{z}_{8i}, \mathbf{y}_{8i}, \mathbf{z}_{8i})$ , figura (2.6).

$$\mathbf{T}_{6,8i} = \mathbf{T}_{z5}(-\theta_{7i})\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{8i}) \quad (2.11)$$

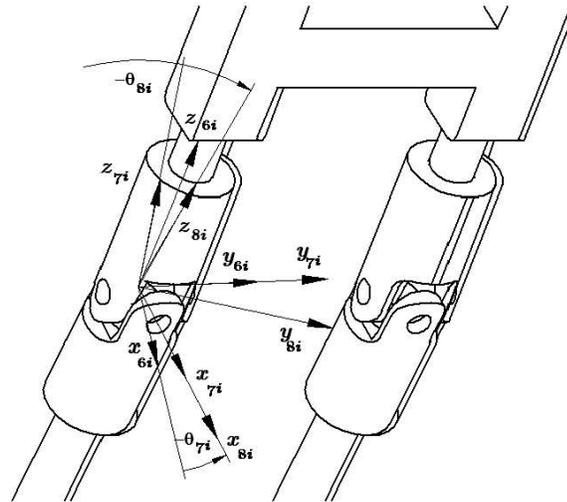


Fig. 2.6 Sistemas locales 6i, 7i, 8i

En la figura (2.7) apreciamos una sola transformación de desplazamiento, que es el desplazamiento de  $(\mathbf{x}_{8i}, \mathbf{y}_{8i}, \mathbf{z}_{8i}) - (\mathbf{x}_{9i}, \mathbf{y}_{9i}, \mathbf{z}_{9i})$ .

$$\mathbf{T}_{8,9i} = \mathbf{T}_{z3}(-d_{9i}) \quad (2.12)$$

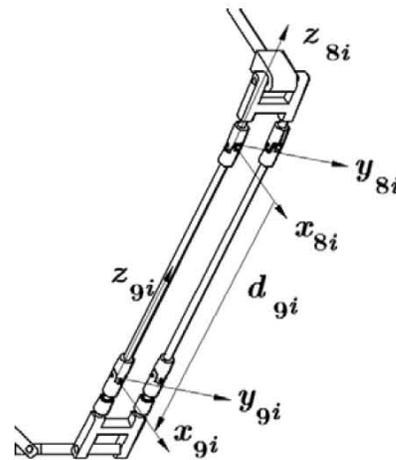


Fig. 2.7 Sistemas locales 8i, 9i

Trasformaciones del sistema  $(x_{9i}, y_{9i}, z_{9i}) - (x_{12i}, y_{12i}, z_{12i})$ , figura (2.8).

$$\mathbf{T}_{912i} = \mathbf{T}_{z4}(\theta_{10i})\mathbf{T}_{z5}(-\theta_{11i})\mathbf{T}_{z6}(-\theta_{12i}) \quad (2.13)$$

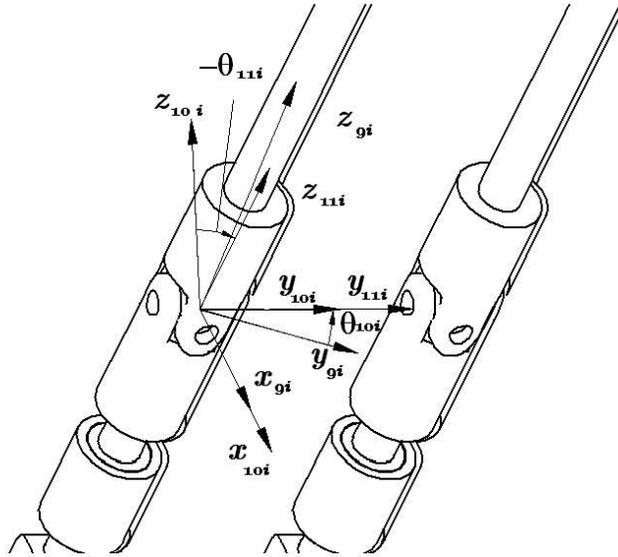


Fig. 2.8 Sistemas locales 9i, 10i, 11i

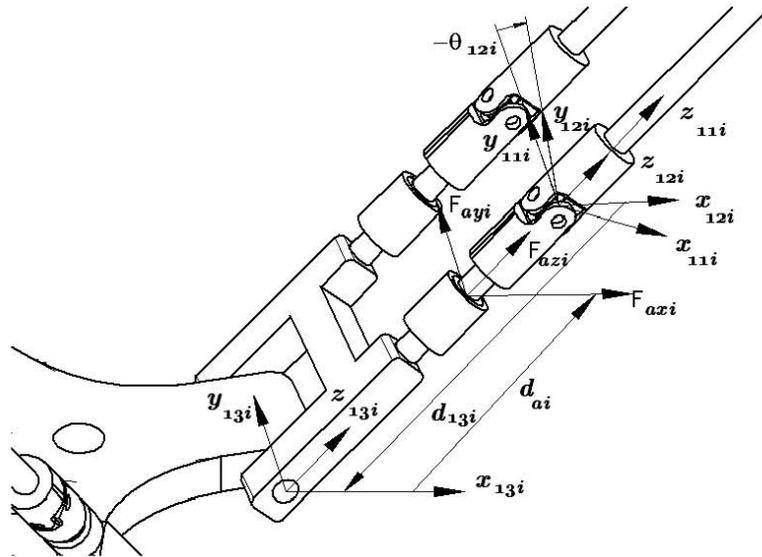


Fig. 2.9 Sistemas locales 11i,12i, ai,13i

Transformaciones de sistemas  $(x_{12i}, y_{12i}, z_{12i}) - (x_{15i}, y_{15i}, z_{15i})$  y  $(x_p, y_p, z_p) - (x_{17i}, y_{17i}, z_{17i})$ , fig. (2.9) y (2.10) respectivamente:

$$\mathbf{T}_{12,15i} = \mathbf{T}_{z3}(-d_{13i})\mathbf{T}_{z2}(d_{14i})\mathbf{T}_{z5}(-\delta_{15i}) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{T}_{0p} = \mathbf{T}_{z1}(x_p)\mathbf{T}_{z2}(y_p)\mathbf{T}_{z3}(z_p) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{T}_{p,17i} = \mathbf{T}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{T}_{z1}(d_{17i}) \quad (2.16)$$

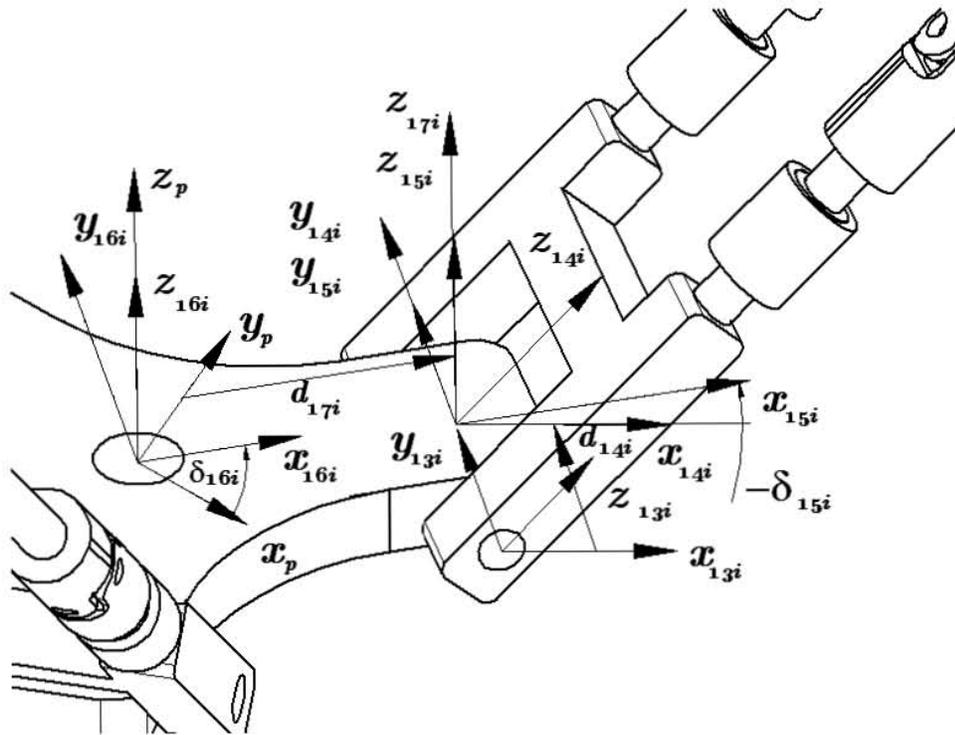


Fig. 2.10 Sistemas 13i, 14i, 15i, 17i, p

De manera que podemos observar que las incógnitas a determinar son los ángulos que nos permiten orientar el robot delta en el espacio que son:

$$\theta_{3i}, \theta_{7i}, \theta_{8i}, \theta_{10i}, \theta_{11i}, \theta_{12i}.$$

### 2.2.1 Solución del Ángulo $\theta_{3i}$

Para obtener este ángulo en función de desplazamientos conocidos y ángulos de construcción del prototipo, se tuvo que emplear la construcción de lazos vectoriales de modo que sólo este ángulo estuviera presente en una ecuación.

La figura siguiente muestra el lazo vectorial empleado para obtener el ángulo antes mencionado:

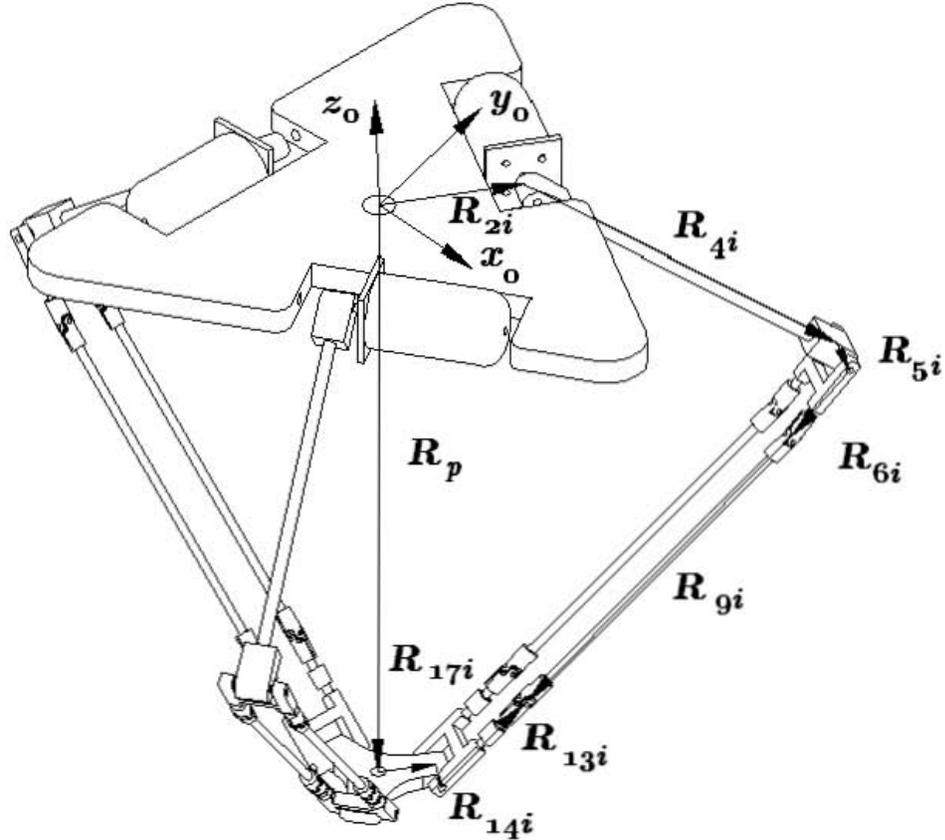


Fig. 2.11 Lazo vectorial

Tomando en consideración que las juntas (Hook y esférica) alojan dos y tres incógnitas respectivamente, se buscan eliminar estas incógnitas por lo cual se hizo la construcción vectorial como sigue:

$$\mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}_{4i} + \mathbf{R}_{5i} + \mathbf{R}_{6i} + \mathbf{R}_{9i} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{17i} + \mathbf{R}_{14i} + \mathbf{R}_{13i} \quad (2.17)$$

Se sabe que el vector  $\mathbf{R}_{9i}$  tiene magnitud constante debido a la geometría del prototipo, además con la ecuación anterior es posible calcular su valor, se despeja  $\mathbf{R}_{9i}$ , entonces:

$$\mathbf{R}_{9i} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{17i} + \mathbf{R}_{14i} + \mathbf{R}_{13i} - (\mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}_{4i} + \mathbf{R}_{5i} + \mathbf{R}_{6i}) \quad (2.18)$$

Si utilizamos las transformaciones homogéneas para lograr dichos desplazamientos vectoriales, la

formulación resultante es:

$$\mathbf{R}_{9i} = \mathbf{N} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{T}_{p17i} \mathbf{T}_{1512i} \mathbf{n} - (\mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{26i} \mathbf{n}) \quad (2.19)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= [ 0, 0, 0, 1 ]^T \\ \mathbf{T}_{1512i} &= \mathbf{T}_{1215i}^{-1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

calculando la magnitud de  $\mathbf{R}_{9i}$ :

$$\|\mathbf{R}_{9i}\| = \|(\mathbf{T}_{0p} \mathbf{T}_{p17i} \mathbf{T}_{1512i} - \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{26i}) \mathbf{n}\| = \|\mathbf{N}\| \quad (2.21a)$$

donde sabemos que tambien  $d_{9i} = \|\mathbf{R}_{9i}\|$  por restricción geométrica y simplifando obtenemos respectivamente:

$$\begin{aligned} d_{9i} &= \|(\mathbf{T}_{0p} \mathbf{T}_{p17i} \mathbf{T}_{1512i} - \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{26i}) \mathbf{n}\| = \|\mathbf{N}\| \\ (d_{9i})^2 &= \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{aligned} \quad (2.21b)$$

Agrupando y simplificando  $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$  para  $s\theta_{3i}$ ,  $c\theta_{3i}$  se tiene:

$$\begin{aligned} (d_{9i})^2 &= (d_{13i})^2 + (d_{14i})^2 + (d_{17i})^2 + (d_{2i})^2 + (d_{4i})^2 + (d_{5i})^2 + (d_{6i})^2 + x_p^2 \\ &+ y_p^2 + z_p^2 + 2d_{13i} z_p c\delta_{15i} + 2d_{17i} x_p c\delta_{16i} - 2d_{14i} y_p c\delta_{16i} - 2d_{2i} \\ &x_p c\delta_{1i} + 2d_{5i} y_p c\delta_{1i} - 2d_{17i} d_{2i} c\delta_{16i} c\delta_{1i} - 2d_{14i} d_{5i} c\delta_{16i} c\delta_{1i} + \\ &2d_{13i} d_{17i} s\delta_{15i} - 2d_{13i} d_{2i} c\delta_{16i} c\delta_{1i} s\delta_{15i} + 2d_{14i} x_p s\delta_{16i} + 2d_{17i} \\ &y_p s\delta_{16i} - 2d_{14i} d_{2i} c\delta_{1i} s\delta_{16i} + 2d_{17i} d_{5i} c\delta_{1i} s\delta_{16i} + 2d_{13i} y_p s\delta_{15i} \\ &s\delta_{16i} + 2d_{13i} d_{5i} c\delta_{1i} s\delta_{15i} s\delta_{16i} - 2d_{5i} x_p s\delta_{1i} - 2d_{2i} y_p s\delta_{1i} + 2d_{14i} \\ &d_{2i} c\delta_{16i} s\delta_{1i} - 2d_{17i} d_{5i} c\delta_{16i} s\delta_{1i} - 2d_{17i} d_{2i} s\delta_{16i} s\delta_{1i} - 2d_{14i} d_{5i} \\ &s\delta_{16i} s\delta_{1i} - d_{13i} d_{2i} s\delta_{15i} s\delta_{16i} s\delta_{1i} + 2d_{13i} c\delta_{16i} s\delta_{15i} (x_p - d_{5i} s\delta_{1i}) + \\ &c\theta_{3i} (2d_{2i} d_{4i} + 2d_{6i} z_p + 2d_{13i} d_{6i} c\delta_{15i} - 2d_{17i} d_{4i} c(\delta_{16i} - \delta_{1i}) - 2d_{4i} \\ &x_p c\delta_{1i} - 2d_{14i} d_{4i} s(\delta_{16i} - \delta_{1i}) - d_{13i} d_{4i} s(\delta_{15i} + \delta_{16i} - \delta_{1i}) - 2d_{4i} y_p \\ &s\delta_{1i} - d_{13i} d_{4i} s(\delta_{15i} - \delta_{16i} + \delta_{1i})) + (-2d_{2i} d_{6i} + 2d_{4i} z_p + 2d_{13i} d_{4i} \\ &c\delta_{15i} + 2d_{17i} d_{6i} c(\delta_{16i} - \delta_{1i}) + 2d_{6i} x_p c\delta_{1i} + 2d_{14i} d_{6i} s(\delta_{16i} - \delta_{1i}) + \\ &d_{13i} d_{6i} s(\delta_{15i} + \delta_{16i} - \delta_{1i}) + 2d_{6i} y_p s\delta_{1i} + d_{13i} d_{6i} s(\delta_{15i} - \delta_{16i} + \delta_{1i})) \\ &s\theta_{3i} \end{aligned} \quad (2.22a)$$

Obtenemos una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned} A_{1i} c\theta_{3i} + B_{1i} s\theta_{3i} + C_{1i} &= (d_{9i})^2 \\ A_{1i} c\theta_{3i} + B_{1i} s\theta_{3i} + (C_{1i} - (d_{9i})^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.22b)$$

$$A_{1i}c\theta_{3i} + B_{1i}s\theta_{3i} + D_{1i} = 0 \quad (2.22c)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{1i} &= 2(d_{2i} d_{4i} + d_{6i} z_p + d_{13i} d_{6i} c\delta_{15i} - d_{4i} (x_p \\ &\quad c\delta_{1i} + c(\delta_{16i} - \delta_{1i})(d_{17i} + d_{13i} s\delta_{15i}) + d_{14i} \\ &\quad s(\delta_{16i} - \delta_{1i}) + y_p s\delta_{1i})) \\ B_{1i} &= 2(-d_{2i} d_{6i} + d_{4i} z_p + d_{13i} d_{4i} c\delta_{15i} + d_{6i} (x_p c\delta_{1i} + \\ &\quad c(\delta_{16i} - \delta_{1i})(d_{17i} + d_{13i} s\delta_{15i}) + d_{14i} s(\delta_{16i} - \delta_{1i}) + \\ &\quad y_p s\delta_{1i})) \\ D_{1i} &= (d_{13i})^2 + (d_{14i})^2 + (d_{17i})^2 + (d_{2i})^2 + (d_{4i})^2 + \\ &\quad (d_{5i})^2 + (d_{6i})^2 - (d_{9i})^2 + x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 + \\ &\quad 2(d_{17i} x_p - d_{14i} y_p) c\delta_{16i} - 2(d_{17i} d_{2i} + d_{14i} d_{5i}) \\ &\quad c(\delta_{16i} - \delta_{1i}) - 2d_{2i} x_p c\delta_{1i} + 2d_{5i} y_p c\delta_{1i} + \\ &\quad 2(d_{13i} z_p c\delta_{15i} + d_{14i} x_p s\delta_{16i} + d_{17i} y_p s\delta_{16i} - \\ &\quad d_{14i} d_{2i} s(\delta_{16i} - \delta_{1i}) + d_{17i} d_{5i} s(\delta_{16i} - \delta_{1i}) + \\ &\quad d_{13i} s\delta_{15i}(d_{17i} + x_p c\delta_{16i} - d_{2i} c(\delta_{16i} - \delta_{1i}) + \\ &\quad y_p s\delta_{16i} + d_{5i} s(\delta_{16i} - \delta_{1i})) - (d_{5i} x_p + d_{2i} y_p) s\delta_{1i}) \end{aligned}$$

La solución de la ec. (2. 22c) se muestra a continuación:

$$\theta_{3i} = \arctan\left(\frac{B_{1i}}{A_{1i}}\right) \pm \arccos\left(\frac{D_{1i}}{\sqrt{A_{1i}^2 + B_{1i}^2}}\right) \quad (2.23)$$

el desarrollo de la ecuación trascendental se muestra en el apéndice A.

La siguiente tabla muestra los características geométricas del robot delta paralelo.

$d_{2i} =$	0,3 m	$d_{a6i} =$	0,0638 m
$d_{4i} =$	0,5 m	$\delta_{11} =$	0°
$d_{5i} =$	0,1 m	$\delta_{12} =$	120°
$d_{6i} =$	0,05 m	$\delta_{13} =$	240°
$d_{9i} =$	0,6 m	$\delta_{15i} =$	45°
$d_{13i} =$	0,0923 m	$\delta_{161} =$	0°
$d_{14i} =$	0,0923 m	$\delta_{162} =$	120°
$d_{17i} =$	0,2 m	$\delta_{163} =$	240°
$d_{a5i} =$	0,0638 m		

La trayectoria de línea recta descrita en el ápndice B, es empleada para el robot delta paralelo, teniendo un tiempo de recorrido de:

$$t_f = 30 \text{ seg}$$

con intervalos de  $t_i = 1 \text{ seg}$ , y los puntos iniciales y finales de la trayectoria son respectivamente:

$$p_i = [0, 0, -0,7]^T \quad p_f = [0,3, -0,3, -0,5]^T$$

En la fig.(2.12) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{3i}$  del robot delta, al recorrer la trayectoria descrita en el ápndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{31}$ , la línea punteada a  $\theta_{32}$  y la línea gris es para  $\theta_{33}$ .

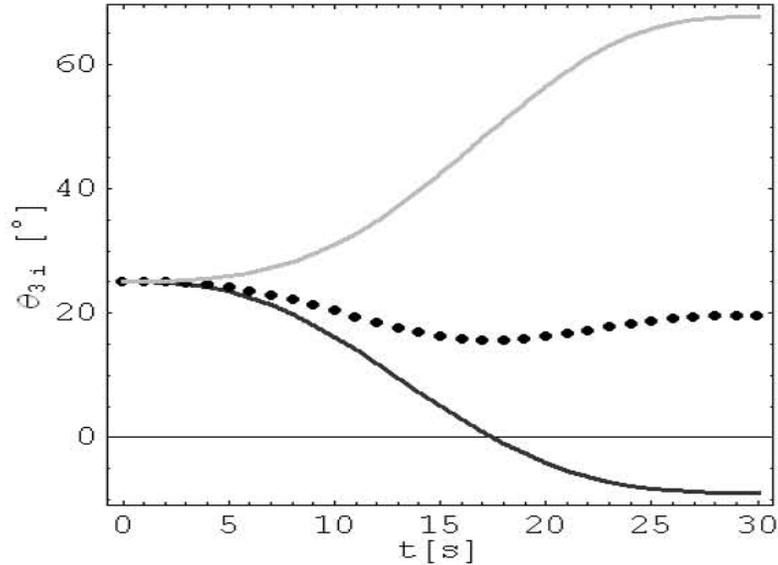


Fig. 2.12 Gráfica de  $\theta_{3i}$

### 2.2.2 Solución del Angulo $\theta_{8i}$

De la misma manera en que se encontró el ángulo  $\theta_{3i}$ , formulando lazos vectoriales, ahora se hallarán los ángulos  $\theta_{7i}, \theta_{8i}$ , que corresponden a la junta universal superior del robot delta, mostrados en la siguiente figura (2.13).

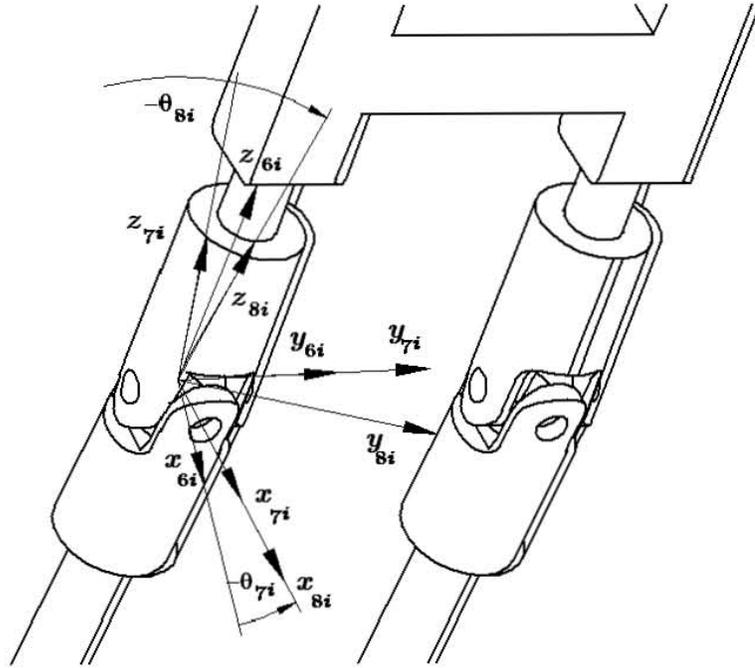


Fig. 2.13 Angulos  $\theta_{7i}, \theta_{8i}$

A partir de la ec. (2. 17):

$$\mathbf{L}_I = \mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}_{4i} + \mathbf{R}_{5i} + \mathbf{R}_{6i} + \mathbf{R}_{9i} \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{L}_D = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{17i} + \mathbf{R}_{14i} + \mathbf{R}_{13i} \quad (2.24b)$$

estas ecuaciones pueden escribirse también en función de las matrices de transformación, las cuales dan como resultado:

$$\mathbf{L}_I = \mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{26i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{89i} \mathbf{n} \quad (2.24c)$$

$$\mathbf{L}_D = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{T}_{p17i} \mathbf{T}_{1513i} \mathbf{T}_{z3}(d_{13i}) \mathbf{n} \quad (2.24d)$$

entonces:

$$\mathbf{L}_I = [li_x, li_y, li_z, 1]^T \quad (2.24e)$$

$$\mathbf{L}_D = [ld_x, ld_y, ld_z, 1]^T \quad (2.24f)$$

para la ecuación  $\mathbf{L_I}$  tenemos:

$$\begin{aligned} li_x &= d_{2i} c\delta_{1i} + d_{5i} s\delta_{1i} + c\delta_{1i} (d_{4i} c\theta_{3i} - d_{6i} s\theta_{3i}) - \\ &\quad d_{9i}(c\delta_{1i} c\theta_{7i} c\theta_{8i} s\theta_{3i} - c\delta_{1i} c\theta_{3i} c\theta_{8i} s\theta_{7i} - s\delta_{1i} s\theta_{8i}) \end{aligned} \quad (2.25a)$$

$$\begin{aligned} li_y &= -d_{5i} c\delta_{1i} + d_{2i} s\delta_{1i} + s\delta_{1i}(d_{4i} c\theta_{3i} - d_{6i} s\theta_{3i}) - \\ &\quad d_{9i}(c\theta_{7i} c\theta_{8i} s\delta_{1i} s\theta_{3i} - c\theta_{3i} c\theta_{8i} s\delta_{1i} s\theta_{7i} + c\delta_{1i} s\theta_{8i}) \end{aligned} \quad (2.25b)$$

$$li_z = -d_{6i} c\theta_{3i} - d_{4i} s\theta_{3i} - d_{9i}(c\theta_{3i} c\theta_{7i} c\theta_{8i} + c\theta_{8i} s\theta_{3i} s\theta_{7i}) \quad (2.25c)$$

para la ecuación  $\mathbf{L_D}$  tenemos:

$$\begin{aligned} ld_x &= x_p + d_{17i} c\delta_{16i} + d_{13i} c\delta_{16i} s\delta_{15i} + d_{14i} s\delta_{16i} \\ ld_y &= y_p - d_{14i} c\delta_{16i} + d_{17i} s\delta_{16i} + d_{13i} s\delta_{15i} s\delta_{16i} \\ ld_z &= z_p + d_{13i} c\delta_{15i} \end{aligned}$$

ambos vectores deben tener componente a componente el mismo valor debido a que llegan al mismo punto y ambos parten del mismo sistema de referencia, por lo cual:

$$\begin{aligned} li_x &= ld_x \\ li_y &= ld_y \\ li_z &= ld_z \end{aligned}$$

Se aprecia en las ecuaciones anteriores que únicamente hay valores y datos conocidos que son proporcionados por la geometría del prototipo.

De  $li_z$  despejando  $s\theta_{7i}$ :

$$s\theta_{7i} = \frac{1}{d_{9i}} (csc\theta_{3i} sec\theta_{8i}(ld_z + d_{6i} c\theta_{3i} + d_{9i} c\theta_{3i} c\theta_{7i} c\theta_{8i} + d_{4i} s\theta_{3i})) \quad (2.25d)$$

sustituyéndolo en  $li_x$  y  $li_y$  resulta:

$$\begin{aligned} ld_y + (-d_{2i} + ld_z cot\theta_{3i} + (d_{6i} + d_{9i} c\theta_{7i} c\theta_{8i})csc\theta_{3i}) s\delta_{1i} + \\ c\delta_{1i}(d_{5i} + d_{9i} s\theta_{8i}) = 0 \end{aligned} \quad (2.25e)$$

$$\begin{aligned} ld_x + c\delta_{1i}(-d_{2i} + ld_z cot\theta_{3i} + (d_{6i} + d_{9i} c\theta_{7i} c\theta_{8i}) csc\theta_{3i}) = \\ s\delta_{1i}(d_{5i} + d_{9i} s\theta_{8i}) \end{aligned} \quad (2.25f)$$

de ec. (2. 25f) despejando  $c\theta_{7i}$ :

$$\begin{aligned} c\theta_{7i} = \frac{1}{d_{9i}}(sec\delta_{1i} sec\theta_{8i} s\theta_{3i}(-ld_x + c\delta_{1i}(d_{2i} - ld_z cot\theta_{3i} - \\ d_{6i} csc\theta_{3i}) + s\delta_{1i}(d_{5i} + d_{9i} s\theta_{8i}))) \end{aligned} \quad (2.25g)$$

y sustituyendo en ec. (2. 25e), simplificando:

$$ld_y + sec\delta_{1i}(d_{5i} + d_{9i} s\theta_{8i}) = ld_x t\delta_{1i} \quad (2.25h)$$

Despejando de ec. (2. 25h)  $s\theta_{8i}$ :

$$s\theta_{8i} = \frac{1}{d_{9i}} (ld_x s\delta_{1i} - ld_y c\delta_{1i} - d_{5i})$$

utilizando la siguiente identidad:

$$s\theta^2 + c\theta^2 = 1$$

se tiene:

$$c\theta_{8i} = \left[ 1 - \left( \frac{1}{d_{9i}} (ld_x s\delta_{1i} - ld_y c\delta_{1i} - d_{5i}) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.25i)$$

usando la función tangente:

$$t\theta_{8i} = \frac{s\theta_{8i}}{c\theta_{8i}} \quad (2.25j)$$

$$\theta_{8i} = \arctan \left( \frac{s\theta_{8i}}{c\theta_{8i}} \right) \quad (2.25k)$$

En la fig.(2.14) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{8i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{81}$ , la línea punteada a  $\theta_{82}$  y la línea gris es para  $\theta_{83}$ .

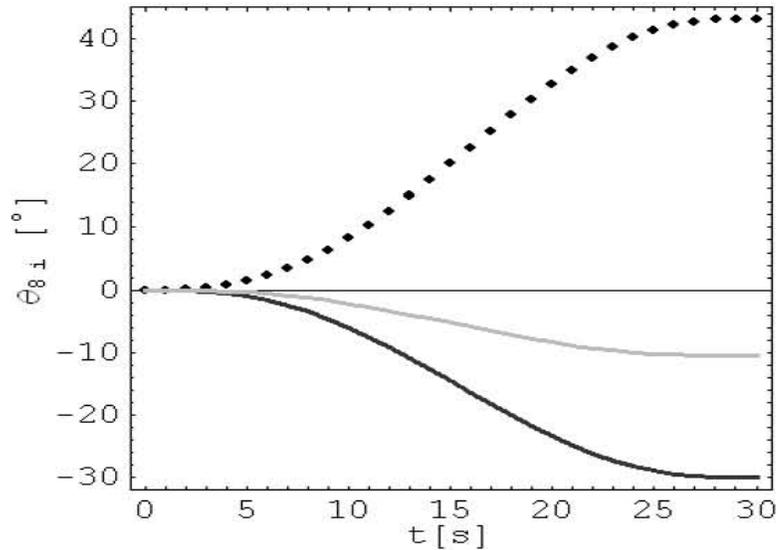


Fig. 2.14 Gráfica de  $\theta_{8i}$

### 2.2.3 Solución de $\theta_{7i}$

Teniendo ya conocido los ángulos  $\theta_{3i}, \theta_{8i}$ , podemos resolver para  $\theta_{7i}$  empleando los mismos lazos vectoriales. Considerando las ecuaciones obtenidas podemos encontrar dicho ángulo restante que corresponde a la primera junta de Hooke..

De ec. (2. 25a) despejando ahora  $s\theta_{8i}$ :

$$s\theta_{8i} = \frac{1}{d_{9i}}(d_{5i} - ld_x \csc\delta_{1i} + \cot\delta_{1i}(d_{2i} - (d_{6i} + d_{9i} c\theta_{7i} c\theta_{8i}) s\theta_{3i} + c\theta_{3i}(d_{4i} + d_{9i}c\theta_{8i} s\theta_{7i}))) \quad (2.26a)$$

y sustituyendo en ec. (2. 25b) y (2. 25c) respectivamente

$$ld_y + ld_x \cot\delta_{1i} = \csc\delta_{1i}(d_{2i} - (d_{6i} + d_{9i} c\theta_{7i} c\theta_{8i}) s\theta_{3i} + c\theta_{3i}(d_{4i} + d_{9i} c\theta_{8i} s\theta_{7i})) \quad (2.26b)$$

$$ld_z + d_{6i} c\theta_{3i} + d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i} + d_{4i} s\theta_{3i} = 0 \quad (2.26c)$$

despejando  $c\theta_{8i}$  de ec. (2. 26b) y sustituyendo en ec. (2. 28c):

$$\begin{aligned} ld_z + d_{6i} c\theta_{3i} + d_{4i} s\theta_{3i} + \cot(\theta_{3i} - \theta_{7i}) = \\ (d_{2i} - ld_x \csc\delta_{1i} + d_{4i} c\theta_{3i} - ld_y s\delta_{1i} - d_{6i} s\theta_{3i}) \end{aligned} \quad (2.26d)$$

despejando  $\cot(\theta_{3i} - \theta_{7i})$  de ec. (2. 28d) y obteniendo su inversa:

$$t(\theta_{3i} - \theta_{7i}) = \frac{-d_{2i} + ld_x \csc\delta_{1i} - d_{4i} c\theta_{3i} + ld_y s\delta_{1i} + d_{6i} s\theta_{3i}}{ld_z + d_{6i} c\theta_{3i} + d_{4i} s\theta_{3i}} \quad (2.26e)$$

por último despejando  $\theta_{7i}$ :

$$\theta_{7i} = \theta_{3i} - \arctan\left(\frac{-d_{2i} + ld_x \csc\delta_{1i} - d_{4i} c\theta_{3i} + ld_y s\delta_{1i} + d_{6i} s\theta_{3i}}{ld_z + d_{6i} c\theta_{3i} + d_{4i} s\theta_{3i}}\right) \quad (2.26f)$$

En la fig.(2.15) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{7i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{71}$ , la línea punteada a  $\theta_{72}$  y la línea gris es para  $\theta_{73}$ .

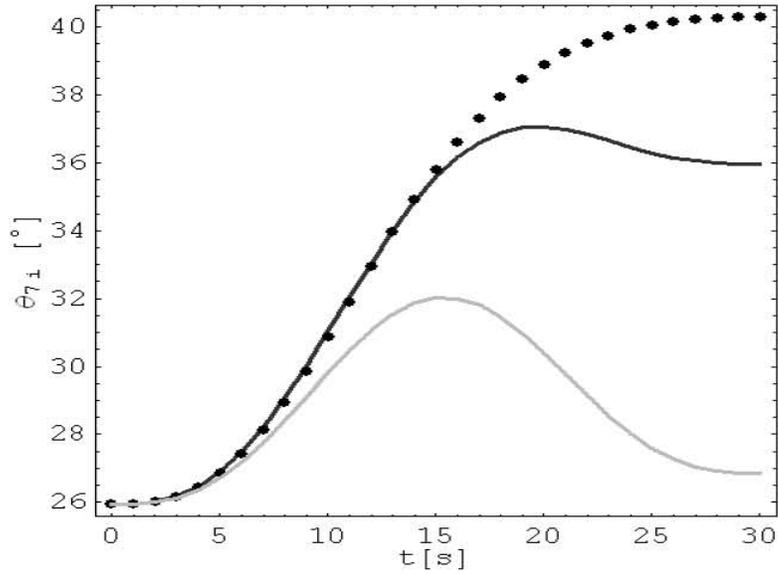


Fig. 2.15 Gráfica de  $\theta_{7i}$

### Solución de Ángulos Junta Esférica $\theta_{10i}$ , $\theta_{11i}$ , $\theta_{12i}$

Estos ángulos se obtienen mediante una formulación de lazos matriciales, es decir, hacer un lazo que parta del sistema de referencia inercial o absoluto y a través de transformaciones homogéneas crear las rotaciones de las juntas así como los desplazamientos necesarios para alcanzar cada sistema relativo, hasta cerrar el lazo en un punto específico.

Por ejemplo tenemos la siguiente formulación:

$$\mathbf{T}_{02i} \mathbf{T}_{26i} \mathbf{T}_{68i} \mathbf{T}_{89i} \mathbf{T}_{912i} \mathbf{T}_{1215i} = \mathbf{T}_{0p} \mathbf{T}_{p17i} \quad (2.27a)$$

Esta ecuación matricial está siendo cerrada en el marco de referencia  $(\mathbf{x}_{17i}, \mathbf{y}_{17i}, \mathbf{z}_{17i})$  a diferencia de la construcción de un lazo vectorial es que en esta última la empleamos para eliminar ángulos que no necesitamos ec. (2.21); sin embargo ahora esta formulación matricial involucra todos los ángulos que orientan al robot, de modo que por la estructura de estas matrices homogéneas tenemos 9 ecuaciones con 3 incógnitas lo que facilita el encontrar el resto de los ángulos.

### 2.2.4 Solución del ángulo $\theta_{11i}$

Como la matriz de transformación  $\mathbf{T}_{912i}$  trae consigo los ángulos de interés  $\theta_{10i}, \theta_{11i}, \theta_{12i}$  despejaremos esta transformación.

$$\mathbf{T}_{912i} = \mathbf{T}_{89i}^{-1} \mathbf{T}_{68i}^{-1} \mathbf{T}_{26i}^{-1} \mathbf{T}_{02i}^{-1} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{T}_{p17i} \mathbf{T}_{1215i}^{-1} \quad (2.27b)$$

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta_{10i}) \mathbf{T}_{z5}(-\theta_{11i}) \mathbf{T}_{z6}(-\theta_{12i}) = \mathbf{T}_{89i}^{-1} \mathbf{T}_{68i}^{-1} \mathbf{T}_{26i}^{-1} \mathbf{T}_{02i}^{-1} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{T}_{p17i} \mathbf{T}_{1215i}^{-1} \quad (2.27c)$$

dejando solo dos incógnitas del lado derecho de la ec. (2. 27a)

$$\mathbf{T}_{z5}(-\theta_{11i}) \mathbf{T}_{z6}(-\theta_{12i}) = \mathbf{T}_{z4}(-\theta_{10i}) \mathbf{T}_{89i}^{-1} \mathbf{T}_{68i}^{-1} \mathbf{T}_{26i}^{-1} \mathbf{T}_{02i}^{-1} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{T}_{p17i} \mathbf{T}_{1215i}^{-1} \quad (2.27d)$$

donde:

$$\mathbf{T}_{z4}(-\theta_{10i}) = \mathbf{T}_{z4}(\theta_{10i})^{-1}$$

Reescribiendo ec (2. 29b):

$$\mathbf{LM}_{1i} = \mathbf{LM}_{1d}$$

estas matrices tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Del término  $a_{13} = b_{13}$  se tiene:

$$s\theta_{11i} = -(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} - c\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \quad (2.27e)$$

utilizando nuevamente la identidad trigonométrica, despejamos  $c\theta$ :

$$s\theta^2 + c\theta^2 = 1$$

$$c\theta_{11i} = \left(1 + (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} - c\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.27f)$$

usando la función tangente:

$$t\theta_{11i} = \frac{s\theta_{11i}}{c\theta_{11i}} \quad (2.27g)$$

usando la función tangente:

$$\theta_{11i} = \arctan\left(\frac{s\theta_{11i}}{c\theta_{11i}}\right) \quad (2.27h)$$

En la fig.(2.16) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{11i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{11i}$ , la línea punteada a  $\theta_{112}$  y la línea gris es para  $\theta_{113}$ .

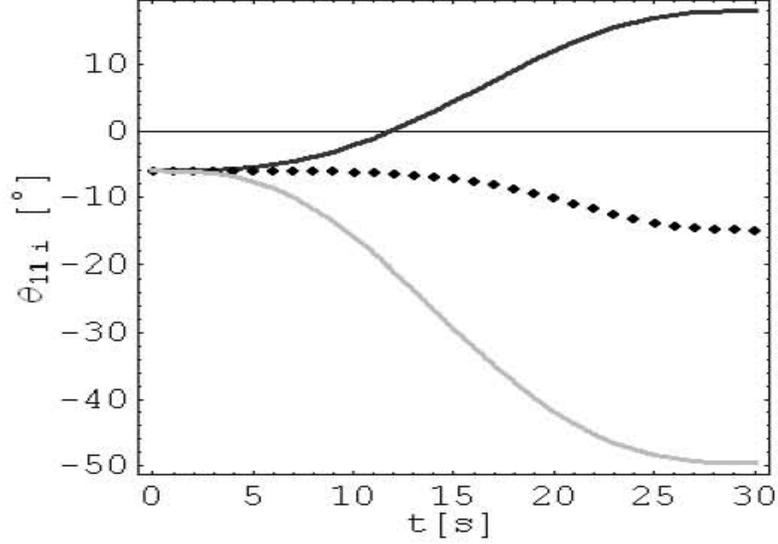


Fig. 2.16 Angulo  $\theta_{11i}$

### 2.2.5 Solución de $\theta_{12i}$

Teniendo la ec. (2. 27c) ahora dejaremos solo la variable  $\theta_{10i}$  de modo que:

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta_{10i}) = \mathbf{T}_{89i}^{-1} \mathbf{T}_{68i}^{-1} \mathbf{T}_{26i}^{-1} \mathbf{T}_{02i}^{-1} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{T}_{p17i} \mathbf{T}_{1215i}^{-1} \mathbf{T}_{z6}(\theta_{12i}) \mathbf{T}_{z5}(\theta_{11i}) \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{LM}_{2i} = \mathbf{T}_{z4}(\theta_{10i}) \quad (2.28b)$$

$$\mathbf{LM}_{2d} = \mathbf{T}_{89i}^{-1} \mathbf{T}_{68i}^{-1} \mathbf{T}_{26i}^{-1} \mathbf{T}_{02i}^{-1} \mathbf{T}_{0p} \mathbf{T}_{p17i} \mathbf{T}_{1215i}^{-1} \mathbf{T}_{z6}(\theta_{12i}) \mathbf{T}_{z5}(\theta_{11i}) \quad (2.28c)$$

la matriz resultante es:

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta_{10i}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_{10i} & -s\theta_{10i} & 0 \\ 0 & s\theta_{10i} & c\theta_{10i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la ecs. (2. 28b) y (2. 28c) se seleccionó la componente (1, 1) por lo que:

$$1 = s\theta_{11i}(-c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} + c\delta_{15i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \\ + c\theta_{11i} (c\delta_{15i} c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) c\theta_{12i} c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\ s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) s\theta_{12i} + c\theta_{12i} s\delta_{15i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \quad (2.28d)$$

de la ecs.(2. 28b) y (2. 28c) se selecciono la componente (2, 2) por lo que:

$$\begin{aligned}
0 = & -s\theta_{11i}(c\delta_{1i} c\theta_{8i} s\delta_{15i} s\delta_{16i} - (c\delta_{15i} c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + s\delta_{1i} \\
& s\delta_{15i} s\delta_{16i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i} - c\delta_{16i} s\delta_{15i}(c\theta_{8i} s\delta_{1i} + \\
& c\delta_{1i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i})) + c\theta_{111i}(s\theta_{12i}(s\delta_{1i}(c\theta_{8i} s\delta_{16i} - \\
& c\delta_{16i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + c\delta_{1i}(c\delta_{16i} c\theta_{8i} + s\delta_{16i} \\
& s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i})) + c\theta_{12i} (c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} \\
& s\theta_{8i} - c\delta_{15i}(c\delta_{16i}(c\theta_{8i} s\delta_{1i} + c\delta_{1i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + \\
& s\delta_{16i}(-c\delta_{1i} c\theta_{8i} + s\delta_{1i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i})))
\end{aligned} \tag{2.28e}$$

Resolviendo para las ecs.(2. 28d), (2. 28e), para  $s\theta_{12i}$ ,  $c\theta_{12i}$  queda:

$$\begin{aligned}
s\theta_{12i} = & (-\sec\theta_{11i} s\delta_{15i} s\theta_{3i} s\theta_{7i} s\theta_{8i} + c\delta_{15i} \sec\theta_{11i}(c\delta_{16i}(c\theta_{8i} s\delta_{1i} + \\
& c\delta_{1i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + s\delta_{16i}(-c\delta_{1i} c\theta_{8i} + s\delta_{1i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i})) - \\
& c\delta_{16i} c\theta_{7i} c\theta_{8i} s\delta_{1i} s\theta_{3i} t\theta_{11i} + c\delta_{1i} c\theta_{7i} c\theta_{8i} s\delta_{16i} s\theta_{3i} t\theta_{11i} - \\
& c\delta_{1i} c\delta_{16i} s\theta_{8i} t\theta_{11i} - s\delta_{1i} s\delta_{16i} s\theta_{8i} t\theta_{11i} + c\theta_{3i}(-c\theta_{7i} \sec\theta_{11i} s\delta_{15i} \\
& s\theta_{8i} + c\theta_{8i} s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{7i} t\theta_{11i}))/ (c\delta_{15i} c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i} + s\delta_{15i}(c\theta_{7i} \\
& c\theta_{8i} s\delta_{1i} s\delta_{16i} s\theta_{3i} - s\delta_{1i}(c\theta_{3i} c\theta_{8i} s\delta_{16i} s\theta_{7i} + c\delta_{16i} s\theta_{8i}) + c\delta_{1i} \\
& (c\delta_{16i} c\theta_{8i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + s\delta_{16i} s\theta_{8i}))) \\
c\theta_{12i} = & (c\delta_{16i} s\delta_{1i} s\theta_{8i}(-c\theta_{7i} \sec\theta_{11i} s\theta_{3i} + c\theta_{3i} \sec\theta_{11i} s\theta_{7i} + c\delta_{15i} t\theta_{11i}) + \\
& c\theta_{8i}(\sec\theta_{11i} s\delta_{1i} s\delta_{16i} + (c\theta_{3i} c\theta_{7i} s\delta_{15i} - c\delta_{15i} c\theta_{7i} s\delta_{1i} s\delta_{16i} s\theta_{3i} + \\
& c\delta_{15i} c\theta_{3i} s\delta_{1i} s\delta_{16i} s\theta_{7i} + s\delta_{15i} s\theta_{3i} s\theta_{7i})t\theta_{11i}) + c\delta_{1i}(s\delta_{16i} s\theta_{8i} \\
& (c\theta_{7i} \sec\theta_{11i} s\theta_{3i} - c\theta_{3i} \sec\theta_{11i} s\theta_{7i} - c\delta_{15i} t\theta_{11i}) + c\delta_{16i} c\theta_{8i}(\sec\theta_{11i} - \\
& c\delta_{15i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) t\theta_{11i}))/ (c\delta_{15i} c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) c\theta_{8i} + s\delta_{15i} (c\theta_{7i} c\theta_{8i} s\delta_{1i} \\
& s\delta_{16i} s\theta_{3i} - s\delta_{1i}(c\theta_{3i} c\theta_{8i} s\delta_{16i} s\theta_{7i} + c\delta_{16i} s\theta_{8i}) + c\delta_{1i}(c\delta_{16i} \\
& c\theta_{8i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + s\delta_{16i} s\theta_{8i})))
\end{aligned}$$

Por último :

$$t\theta_{12i} = \frac{s\theta_{12i}}{c\theta_{12i}} \tag{2.28f}$$

$$\theta_{12i} = \arctan\left(\frac{s\theta_{12i}}{c\theta_{12i}}\right) \tag{2.28g}$$

En la fig.(2.17) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{12i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{121}$ , la línea punteada a  $\theta_{122}$  y la línea gris es para  $\theta_{123}$ .

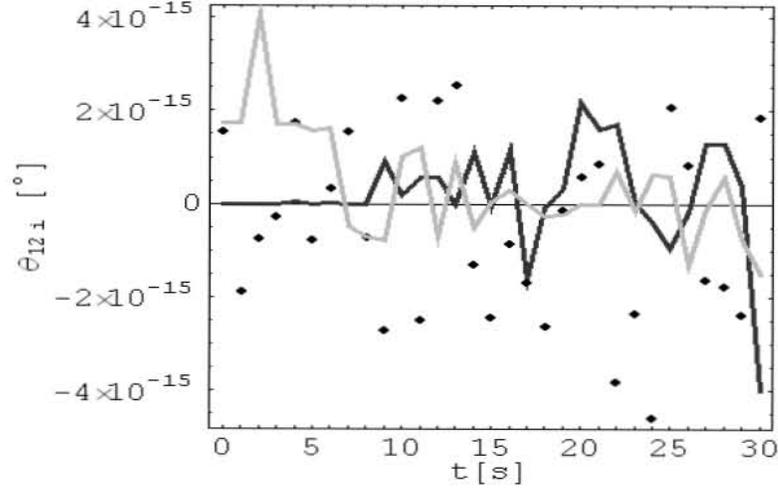


Fig. 2.17 Ángulo  $\theta_{12i}$

En esta gráfica se observa que el desplazamiento angular de esta junta rotacional, no presenta ningún movimiento.

## 2.2.6 Solución de $\theta_{10i}$

De ecs. (2. 28b) y (2. 28c) tomando las componentes (2, 2) y (3, 2) para obtener  $c\theta_{10i}$  y  $s\theta_{10i}$  respectivamente:

$$\mathbf{LM}_{2i}(2, 2) = c\theta_{10i} \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{LM}_{2i}(3, 2) = s\theta_{10i}$$

v

$$\begin{aligned} \mathbf{LM}_{2d}(2, 2) &= c\theta_{12i}(s\delta_{1i}(c\theta_{8i} s\delta_{16i} - c\delta_{16i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) s\theta_{8i}) + c\delta_{1i}(c\delta_{16i} c\theta_{8i} + \\ &\quad s\delta_{16i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) s\theta_{8i})) - s\theta_{12i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} s\theta_{8i} - c\delta_{15i}(c\delta_{16i} \\ &\quad (c\theta_{8i} s\delta_{1i} + c\delta_{1i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + s\delta_{16i}(-c\delta_{1i} c\theta_{8i} + s\delta_{1i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}))) \\ \mathbf{LM}_{2d}(3, 2) &= c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i} s\delta_{15i} s\theta_{12i} - s\delta_{16i}(c\delta_{15i} s\theta_{12i}(c\theta_{7i} c\theta_{8i} s\delta_{1i} s\theta_{3i} - \\ &\quad c\theta_{3i} c\theta_{8i}s\delta_{1i} s\theta_{7i} + c\delta_{1i} s\theta_{8i}) + c\theta_{12i}(c\delta_{1i} c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - s\delta_{1i} s\theta_{8i})) + \\ &\quad c\delta_{16i}(c\theta_{12i}(c\theta_{7i} c\theta_{8i} s\delta_{1i} s\theta_{3i} - c\theta_{3i} c\theta_{8i} s\delta_{1i}s\theta_{7i} + c\delta_{1i}s\theta_{8i}) + \\ &\quad c\delta_{15i}s\theta_{12i}(-c\delta_{1i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + s\delta_{1i}s\theta_{8i})) \end{aligned}$$

Estas últimas expresiones tienen el valor de  $c\theta_{10i}$  y  $s\theta_{10i}$  respectivamente, sustituyendo los valores correspondientes:

$$\begin{aligned}
s\theta_{10i} &= c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i} s\delta_{15i} s\theta_{12i} - s\delta_{16i}(c\delta_{15i} s\theta_{12i} \\
&\quad (c\theta_{7i} c\theta_{8i} s\delta_{1i} s\theta_{3i} - c\theta_{3i} c\theta_{8i} s\delta_{1i} s\theta_{7i} + c\delta_{1i} s\theta_{8i}) + \\
&\quad c\theta_{12i}(c\delta_{1i} c\theta_{8i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - s\delta_{1i} s\theta_{8i})) + c\delta_{16i}(c\theta_{12i} \\
&\quad (c\theta_{7i} c\theta_{8i} s\delta_{1i} s\theta_{3i} - c\theta_{3i} c\theta_{8i} s\delta_{1i} s\theta_{7i} + c\delta_{1i} s\theta_{8i}) + \\
&\quad c\delta_{15i} s\theta_{12i}(-c\delta_{1i} c\theta_{8i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + s\delta_{1i} s\theta_{8i})) \\
c\theta_{10i} &= c\theta_{12i}(s\delta_{1i}(c\theta_{8i} s\delta_{16i} - c\delta_{16i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) s\theta_{8i}) + c\delta_{1i}(c\delta_{16i} \\
&\quad c\theta_{8i} + s\delta_{16i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) s\theta_{8i})) - s\theta_{12i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} \\
&\quad s\theta_{8i} - c\delta_{15i}(c\delta_{16i}(c\theta_{8i} s\delta_{1i} + c\delta_{1i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + \\
&\quad s\delta_{16i}(-c\delta_{1i} c\theta_{8i} + s\delta_{1i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i})))
\end{aligned}$$

Obteniendo la  $t\theta_{10i}$ :

$$t\theta_{10i} = \frac{s\theta_{10i}}{c\theta_{10i}} \quad (2.29b)$$

$$\theta_{10i} = \arctan\left(\frac{s\theta_{10i}}{c\theta_{10i}}\right) \quad (2.29c)$$

En la fig.(2.18) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de los ángulos  $\theta_{10i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\theta_{101}$ , la línea punteada a  $\theta_{102}$  y la línea gris es para  $\theta_{103}$ .

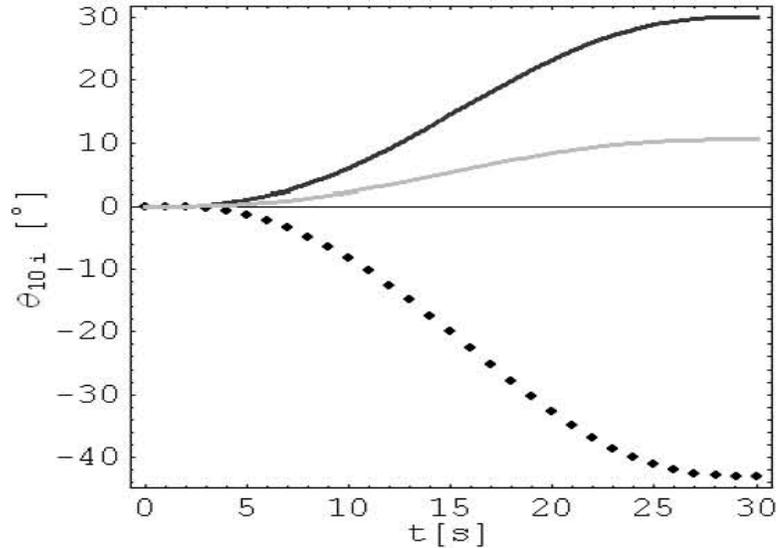


Fig 2.18 Ángulo  $\theta_{10i}$

## 2.3 Velocidad

El problema **cinemático inverso** para la **velocidad** es:

Dada la velocidad  $(\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p)$  del centroide de la base móvil, hallar la velocidad de los ángulos  $\dot{\theta}_{3i}, \dot{\theta}_{7i}, \dot{\theta}_{8i}, \dot{\theta}_{10i}, \dot{\theta}_{11i}, \dot{\theta}_{12i}$  que definen la velocidad de las juntas.

En el análisis de velocidad, se asume que la posición y la orientación de los cuerpos ya son totalmente conocidos y que son resultado del análisis de posición. La velocidad de un punto o un cuerpo rígido que experimenta movimiento, puede ser obtenida por la derivada respecto al tiempo. Con base en las ecuaciones obtenidas en el análisis de posición, se obtendrá la velocidad al derivar con respecto al tiempo cada una de ellas.

### 2.3.1 Velocidad $\dot{\theta}_{3i}$

Tomando la ec. (2. 22c) y derivando con respecto al tiempo obtenemos:

$$A_{1i}c\theta_{3i} + B_{1i}s\theta_{3i} + D_{1i} = 0$$

$$\dot{A}_{1i}c\theta_{3i} - A_{1i}s\theta_{3i}\dot{\theta}_{3i} + \dot{B}_{1i}s\theta_{3i} + B_{1i}c\theta_{3i}\dot{\theta}_{3i} + \dot{D}_{1i} = 0 \quad (2.30a)$$

reagrupando y despejando  $\dot{\theta}_{3i}$  se tiene:

$$\dot{\theta}_{3i} = \frac{-\left(\dot{A}_{1i}c\theta_{3i} + \dot{B}_{1i}s\theta_{3i} + \dot{D}_{1i}\right)}{B_{1i}c\theta_{3i} - A_{1i}s\theta_{3i}} \quad (2.30b)$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{1i} &= 2(-d_{4i}(c\delta_{1i}\dot{x}_p + s\delta_{1i}\dot{y}_p) + d_{6i}\dot{z}_p) \\ \dot{B}_{1i} &= 2(d_{6i}(c\delta_{1i}\dot{x}_p + s\delta_{1i}\dot{y}_p) + d_{4i}\dot{z}_p) \\ \dot{D}_{1i} &= -2d_{2i}c\delta_{1i}\dot{x}_p + 2x_p\dot{x}_p + 2d_{5i}c\delta_{1i}\dot{y}_p + 2y_p\dot{y}_p + 2c\delta_{16i}(d_{17i}\dot{x}_p - \\ &\quad d_{14i}\dot{y}_p) + 2z_p\dot{z}_p + 2(d_{14i}s\delta_{16i}\dot{x}_p + d_{17i}s\delta_{16i}\dot{y}_p - s\delta_{1i}(d_{5i}\dot{x}_p + \\ &\quad d_{2i}\dot{y}_p) + d_{13i}s\delta_{15i}(c\delta_{16i}\dot{x}_p + s\delta_{16i}\dot{y}_p) + d_{13i}c\delta_{15i}\dot{z}_p) - \\ &\quad s\delta_{1i}(d_{5i}\dot{x}_p + d_{2i}\dot{y}_p) + d_{13i}s\delta_{15i}(d_{17i} - d_{2i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - \\ &\quad d_{5i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{16i}\dot{x}_p + s\delta_{16i}\dot{y}_p) + d_{13i}c\delta_{15i}\dot{z}_p) \end{aligned} \quad (2.30c)$$

Sustituyendo ec.(2. 32c) en (2. 32b) y agrupando en  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p$

$$\dot{\theta}_{3i} = \frac{1}{E_{1i}}(E_{2i}\dot{x}_p + E_{3i}\dot{y}_p + E_{4i}\dot{z}_p) \quad (2.30d)$$

con:

$$\begin{aligned}
E_{1i} &= B_{1i}c\theta_{3i} - A_{1i}s\theta_{3i} \\
E_{2i} &= -2(d_{17i}c\delta_{16i} - d_{5i}s\delta_{1i} + d_{13i}c\delta_{16i}s\delta_{15i} + d_{14i} \\
&\quad s\delta_{16i} - c\delta_{1i}(d_{2i} + d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p) \\
E_{3i} &= -2(d_{5i}c\delta_{1i} - d_{14i}c\delta_{16i} - d_{2i}s\delta_{1i} - d_{4i}c\theta_{3i} \\
&\quad s\delta_{1i} + d_{17i}s\delta_{16i} + d_{13i}s\delta_{15i}s\delta_{16i} + d_{6i}s\delta_{1i} \\
&\quad s\theta_{3i} + y_p) \\
E_{4i} &= -2(d_{13i}c\delta_{15i} + d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i} + z_p)
\end{aligned}$$

En la fig.(2.19) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las velocidades angulares  $\dot{\theta}_{3i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{31}$ , la línea punteada a  $\dot{\theta}_{32}$  y la línea gris es para  $\dot{\theta}_{33}$ .

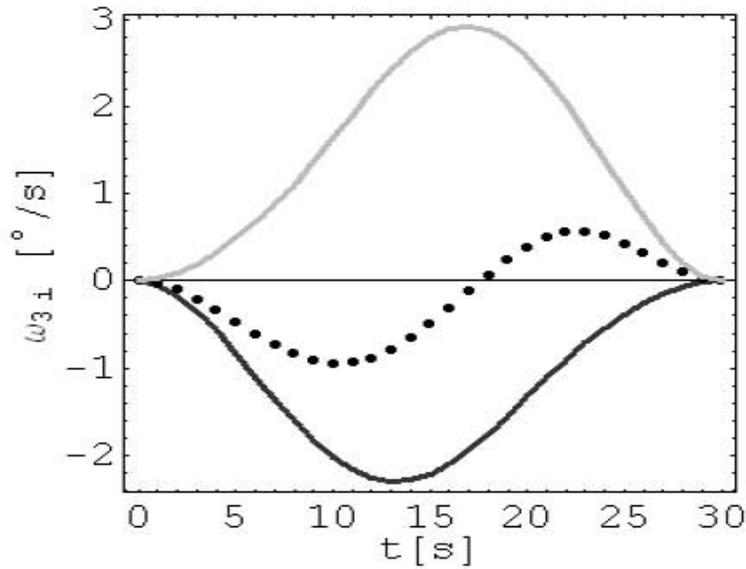


Fig. 2.19 Velocidad  $\dot{\theta}_{3i}$

### 2.3.2 Velocidad $\dot{\theta}_{8i}$

De la ecuación (2. 25h), tenemos:

$$ld_y + sec\delta_{1i}(d_{5i} + d_{9i}s\theta_{8i}) = ld_x t\delta_{1i}$$

derivando esta última expresión:

$$\dot{ld}_y + sec\delta_{1i}d_{9i}c\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i} = \dot{ld}_x t\delta_{1i} \quad (2.31a)$$

donde  $\dot{l}d_x$  y  $\dot{l}d_y$  son respectivamente:

$$\begin{aligned}\dot{l}d_x &= \dot{x}_p \\ \dot{l}d_y &= \dot{y}_p \\ \dot{l}d_z &= \dot{z}_p\end{aligned}\tag{2.31b}$$

sustituyendo (2. 31b) en (2. 31a):

$$\dot{y}_p + d_{9i}c\theta_{8i}sec\delta_{1i}\dot{\theta}_{8i} = t\delta_{1i}\dot{x}_p$$

despejando a  $\dot{\theta}_{8i}$

$$\dot{\theta}_{8i} = \frac{1}{F_{1i}}(F_{2i}\dot{x}_p + F_{3i}\dot{y}_p + F_{4i}\dot{z}_p)\tag{2.31c}$$

con las definiciones siguientes:

$$\begin{aligned}F_{1i} &= d_{9i} \\ F_{2i} &= sec\theta_{8i}s\delta_{1i} \\ F_{3i} &= -c\delta_{1i}sec\theta_{8i} \\ F_{4i} &= 0\end{aligned}$$

En la fig.(2.20) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las velocidades angulares  $\dot{\theta}_{8i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el ápndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{81}$ , la línea punteada a  $\dot{\theta}_{82}$  y la línea gris es para  $\dot{\theta}_{83}$ .

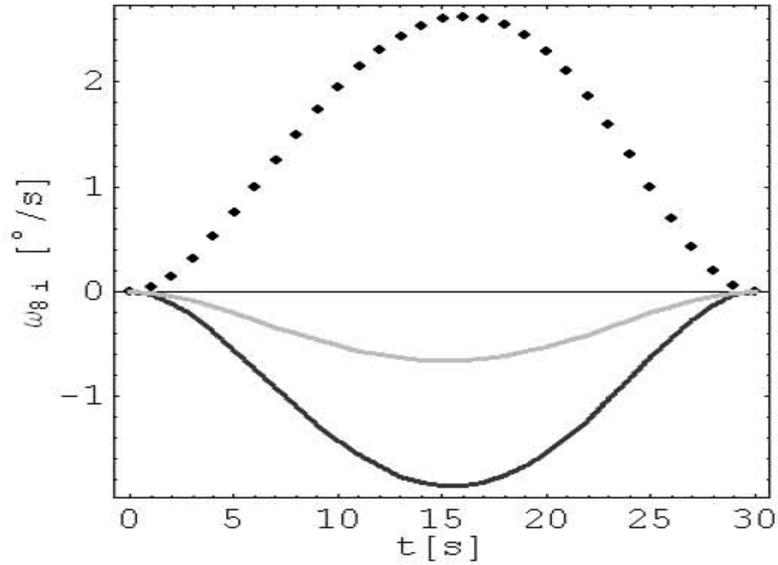


Fig. 2.20 Velocidad  $\dot{\theta}_{8i}$

### 2.3.3 Velocidad $\dot{\theta}_{7i}$

Tomando ahora la ecuacion desarrollada con anterioridad (2. 26c):

$$ld_z + d_{6i}c\theta_{3i} + d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i} + d_{4i}s\theta_{3i} = 0$$

y derivando para obtener  $\dot{\theta}_{7i}$  :

$$0 = \dot{l}d_z + d_{4i}c\theta_{3i}\dot{\theta}_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}\dot{\theta}_{3i} + d_{9i}c\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) - d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i} \quad (2.32a)$$

sustituyendo (2. 31b) en la ecuacion anterior y agrupando en  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p, \dot{\theta}_{3i}, \dot{\theta}_{8i}$ , obtenemos:

$$G_{4i}\dot{z}_p + G_{5i}\dot{\theta}_{3i} + G_{6i}\dot{\theta}_{7i} + G_{7i}\dot{\theta}_{8i} = 0 \quad (2.32b)$$

con los siguientes valores definidos:

$$\begin{aligned} G_{4i} &= 1 \\ G_{5i} &= d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i} - d_{9i}c\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\ G_{6i} &= d_{9i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\ G_{7i} &= d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i} \end{aligned}$$

sustituyendo ec. (2. 30d) y (2. 31c) en (2. 32b) tenemos:

$$G_{4i}\dot{z}_p + \frac{G_{5i}(E_{2i}\dot{x}_p + E_{3i}\dot{y}_p + E_{4i}\dot{z}_p)}{E_{1i}} + \frac{G_{7i}(F_{2i}\dot{x}_p + F_{3i}\dot{y}_p + F_{4i}\dot{z}_p)}{F_{1i}} + G_{6i}\dot{\theta}_{7i} = 0$$

Despejando a  $\dot{\theta}_{7i}$  de la ecuación anterior y agrupando en términos de  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p$  :

$$\dot{\theta}_{7i} = \frac{1}{H_{1i}}(H_{2i}\dot{x}_p + H_{3i}\dot{y}_p + H_{4i}\dot{z}_p) \quad (2.32c)$$

donde los coeficientes tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} H_{1i} &= -E_{1i}F_{1i}G_{6i} \\ H_{2i} &= E_{2i}F_{1i}G_{5i} + E_{1i}F_{2i}G_{7i} \\ H_{3i} &= E_{3i}F_{1i}G_{5i} + E_{1i}F_{3i}G_{7i} \\ H_{4i} &= E_{4i}F_{1i}G_{5i} + E_{1i}F_{4i}G_{7i} + G_{4i} \end{aligned}$$

En la fig.(2.21) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las velocidades angulares  $\dot{\theta}_{7i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{71}$ , la línea punteada a  $\dot{\theta}_{72}$  y la línea gris es para  $\dot{\theta}_{73}$ .

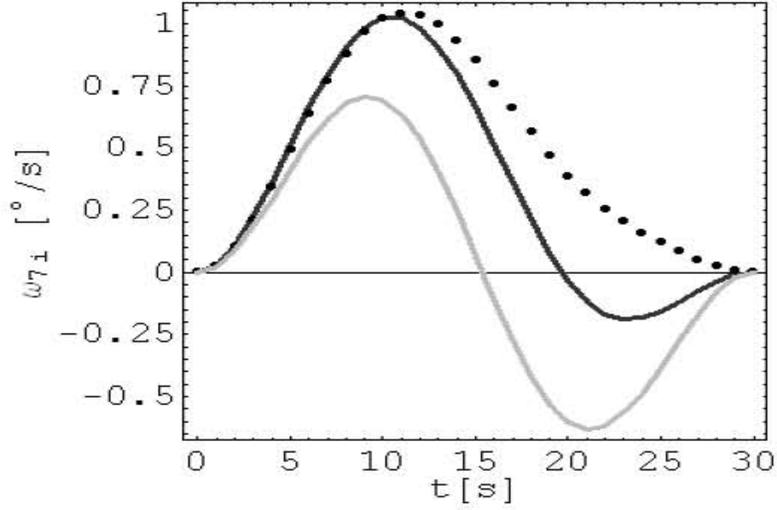


Fig. 2.21 Velocidad  $\dot{\theta}_{7i}$

### 2.3.4 Velocidad $\dot{\theta}_{11i}$ ,

Tomando la ecuación de posición (2. 27e):

$$s\theta_{11i} = -(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} - c\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))$$

derivando esta expresión conseguimos:

$$\begin{aligned} c\theta_{11i}\dot{\theta}_{11i} &= c(\delta_{15i})c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) - \\ & c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s(\delta_{15i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})(-\dot{\theta}_{3i} + \dot{\theta}_{7i}) \end{aligned} \quad (2.33a)$$

despejando  $\dot{\theta}_{11i}$  de (2. 33a):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{11i} &= \sec\theta_{11i}(c\delta_{15i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + \\ & c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) \end{aligned} \quad (2.33b)$$

renombrando términos:

$$\dot{\theta}_{11i} = I_{1i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) \quad (2.33c)$$

con el término:

$$I_{1i} = \sec\theta_{11i}(c\delta_{15i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))$$

sustituyendo ec. (2. 30d), (2. 32c) en (2. 33c) :

$$\dot{\theta}_{11i} = I_{1i} \left( \frac{E_{2i}\dot{x}_p + E_{3i}\dot{y}_p + E_{4i}\dot{z}_p}{E_{1i}} - \frac{H_{2i}\dot{x}_p + H_{3i}\dot{y}_p + H_{4i}\dot{z}_p}{H_{1i}} \right)$$

agrupando en  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p$ :

$$\dot{\theta}_{11i} = \frac{1}{J_{1i}} (J_{2i}\dot{x}_p + J_{3i}\dot{y}_p + J_{4i}\dot{z}_p) \quad (2.33d)$$

donde:

$$\begin{aligned} J_{1i} &= 1 \\ J_{2i} &= \left( \frac{E_{2i}}{E_{1i}} - \frac{H_{2i}}{H_{1i}} \right) I_{1i} \\ J_{3i} &= \left( \frac{E_{3i}}{E_{1i}} - \frac{H_{3i}}{H_{1i}} \right) I_{1i} \\ J_{4i} &= \left( \frac{E_{4i}}{E_{1i}} - \frac{H_{4i}}{H_{1i}} \right) I_{1i} \end{aligned}$$

En la fig.(2.22) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las velocidades angulares  $\dot{\theta}_{11i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{111}$ , la línea punteada a  $\dot{\theta}_{112}$  y la línea gris es para  $\dot{\theta}_{113}$ .

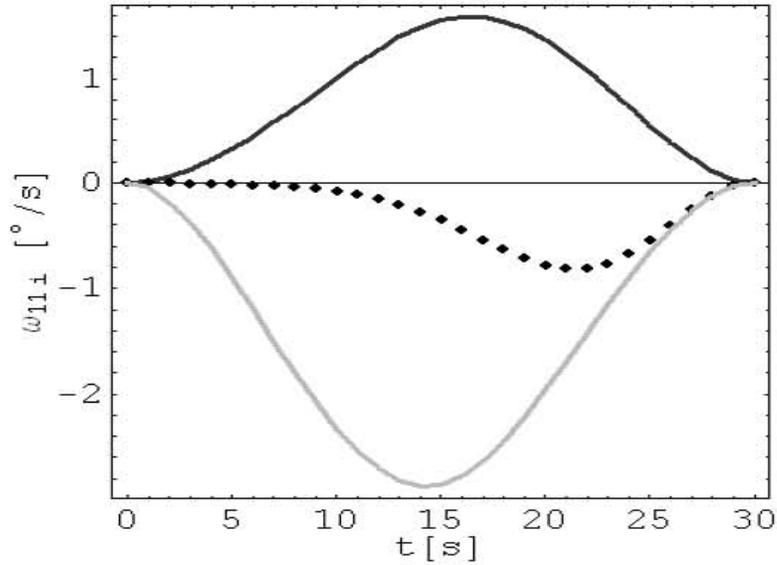


Fig. 2.22 Velocidad  $\dot{\theta}_{11i}$

### 2.3.5 Velocidad $\dot{\theta}_{12i}$ ,

Tomando la ecuación de posición (2. 28e):

$$\begin{aligned}
0 = & -s\theta_{11i}(c\delta_{1i}c\theta_{8i}s\delta_{15i}s\delta_{16i} - (c\delta_{15i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + s\delta_{1i}s\delta_{15i}s\delta_{16i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \\
& s\theta_{8i} - c\delta_{16i}s\delta_{15i}(c\theta_{8i}s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i})) + c\theta_{11i}(s\theta_{12i}(s\delta_{1i}(c\theta_{8i} \\
& s\delta_{16i} - c\delta_{16i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + c\delta_{1i}(c\delta_{16i}c\theta_{8i} + s\delta_{16i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i})) + \\
& c\theta_{12i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{8i} - c\delta_{15i}(c\delta_{16i}(c\theta_{8i}s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + \\
& s\delta_{16i}(-c\delta_{1i}c\theta_{8i} + s\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}))))
\end{aligned}$$

y derivando con respecto al tiempo nos queda:

$$\begin{aligned}
0 = & -c\theta_{11i}(c\delta_{1i}c\theta_{8i}s\delta_{15i}s\delta_{16i} - (c\delta_{15i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + s\delta_{1i}s\delta_{15i}s\delta_{16i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \\
& s\theta_{8i} - c\delta_{16i}s\delta_{15i}(c\theta_{8i}s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}))\dot{\theta}_{11i} - s\theta_{11i}(s\theta_{12i}(s\delta_{1i}(c\theta_{8i} \\
& s\delta_{16i} - c\delta_{16i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + c\delta_{1i}(c\delta_{16i}c\theta_{8i} + s\delta_{16i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i})) + \\
& c\theta_{12i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{8i} - c\delta_{15i}(c\delta_{16i}(c\theta_{8i}s\delta_{1i} + c\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + \\
& s\delta_{16i}(-c\delta_{1i}c\theta_{8i} + s\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}))))\dot{\theta}_{11i} - s\theta_{11i}(-s\theta_{8i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{1i} \\
& s\delta_{15i}s\delta_{16i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) + c\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})(-\dot{\theta}_{3i} + \dot{\theta}_{7i})) - c\theta_{8i}(c\delta_{15i}c(\theta_{3i} - \\
& \theta_{7i}) + s\delta_{1i}s\delta_{15i}s\delta_{16i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))\dot{\theta}_{8i} - c\delta_{1i}s\delta_{15i}s\delta_{16i}s\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i} - c\delta_{16i}s\delta_{15i} \\
& (c\delta_{1i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) + c\delta_{1i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})\dot{\theta}_{8i} - s\delta_{1i}s\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i})) + \\
& c\theta_{11i}(c\theta_{12i}(s\delta_{1i}(c\theta_{8i}s\delta_{16i} - c\delta_{16i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + c\delta_{1i}(c\delta_{16i}c\theta_{8i} + s\delta_{16i} \\
& s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}))\dot{\theta}_{12i} - s\theta_{12i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{8i} - c\delta_{15i}(c\delta_{16i}(c\theta_{8i}s\delta_{1i} + \\
& c\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}) + s\delta_{16i}(-c\delta_{1i}c\theta_{8i} + s\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}))))\dot{\theta}_{12i} + s\theta_{12i} \\
& (c\delta_{1i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{16i}s\theta_{8i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) + c\theta_{8i}s\delta_{16i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})\dot{\theta}_{8i} - c\delta_{16i}s\theta_{8i} \\
& \dot{\theta}_{8i}) + s\delta_{1i}(-c\delta_{16i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) - c\delta_{16i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})\dot{\theta}_{8i} - \\
& s\delta_{16i}s\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i})) + c\theta_{12i}(s\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}(-\dot{\theta}_{3i} + \dot{\theta}_{7i}) + c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i} \\
& s\delta_{15i}\dot{\theta}_{8i} - c\delta_{15i}(s\delta_{16i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{1i}s\theta_{8i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) + c\theta_{8i}s\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
& \dot{\theta}_{8i} + c\delta_{1i}s\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i}) + c\delta_{16i}(c\delta_{1i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) + c\delta_{1i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \\
& \theta_{7i})\dot{\theta}_{8i} - s\delta_{1i}s\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i}))))
\end{aligned} \tag{2.34a}$$

agrupando en  $\dot{\theta}_{3i}$ ,  $\dot{\theta}_{8i}$ ,  $\dot{\theta}_{11i}$   $\dot{\theta}_{12i}$  tenemos:

$$K_{11i}\dot{\theta}_{11i} + K_{1i}\dot{\theta}_{12i} + K_{57i}(\dot{\theta}_{7i} - \dot{\theta}_{3i}) + K_{8i}\dot{\theta}_{8i} = 0 \tag{2.34b}$$

donde:

$$\begin{aligned}
K_{57i} &= ((c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\delta_{15i}c\theta_{11i}c\theta_{12i} - s\delta_{15i}s\theta_{11i}) + \\
&\quad c\theta_{11i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) + (c\theta_{11i}c\theta_{12i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i}s\theta_{11i})) \\
&\quad s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i}) \\
K_{8i} &= ((c\theta_{8i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c\theta_{11i}c\theta_{12i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i}s\theta_{11i}) - \\
&\quad (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\delta_{15i}c\theta_{11i}c\theta_{12i} - s\delta_{15i}s\theta_{11i}) + c\theta_{11i} \\
&\quad s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) + (s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
&\quad (c\delta_{15i}c\theta_{11i}c\theta_{12i} - s\delta_{15i}s\theta_{11i}) - c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{11i}s\theta_{12i})s\theta_{8i})) \\
K_{11i} &= (c\theta_{8i}(s(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\theta_{11i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i}c\theta_{12i}s\theta_{11i}) - \\
&\quad c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{11i}s\theta_{12i}) + (c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c\delta_{15i}c\theta_{11i} - \\
&\quad c\theta_{12i}s\delta_{15i}s\theta_{11i}) + (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\theta_{11i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i} \\
&\quad c\theta_{12i}s\theta_{11i}) + s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{11i}s\theta_{12i}))s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i}) \\
K_{12i} &= (c\theta_{11i}(c\theta_{8i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i} + c\delta_{15i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) - \\
&\quad (c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{12i} + (c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i} \\
&\quad c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i}))
\end{aligned}$$

sustituyendo ec. (2. 30d), (2. 31c), (2. 32c) y (2. 33d) en (2. 34b):

$$\begin{aligned}
& - \frac{K_{57i}(E_{2i}\dot{x}_p + E_{3i}\dot{y}_p + E_{4i}\dot{z}_p)}{E_{1i}} + \frac{K_{8i}(F_{2i}\dot{x}_p + F_{3i}\dot{y}_p + F_{4i}\dot{z}_p)}{F_{1i}} + \\
& \frac{K_{57i}(H_{2i}\dot{x}_p + H_{3i}\dot{y}_p + H_{4i}\dot{z}_p)}{H_{1i}} + \frac{K_{11i}(J_{2i}\dot{x}_p + J_{3i}\dot{y}_p + J_{4i}\dot{z}_p)}{J_{1i}} + K_{12i}\dot{\theta}_{12i} = 0
\end{aligned}$$

agrupando en  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p$  y despejando  $\dot{\theta}_{12i}$  :

$$\dot{\theta}_{12i} = \frac{1}{K_{1i}}(K_{2i}\dot{x}_p + K_{3i}\dot{y}_p + K_{4i}\dot{z}_p) \quad (2.34c)$$

donde:

$$\begin{aligned}
K_{1i} &= -E_{1i}F_{1i}H_{1i}K_{12i} \\
K_{2i} &= -E_{2i}F_{1i}H_{1i}K_{57i} + E_{1i}(F_{1i}H_{1i}J_{2i}K_{11i} + F_{1i}H_{2i}K_{57i} + F_{2i}H_{1i}K_{8i}) \\
K_{3i} &= E_{1i}F_{1i}H_{1i}J_{3i}K_{11i} - E_{3i}F_{1i}H_{1i}K_{57i} + E_{1i}F_{1i}H_{3i}K_{57i} + E_{1i}F_{3i}H_{1i}K_{8i} \\
K_{4i} &= E_{1i}F_{1i}H_{1i}J_{4i}K_{11i} - E_{4i}F_{1i}H_{1i}K_{57i} + E_{1i}F_{1i}H_{4i}K_{57i} + E_{1i}F_{4i}H_{1i}K_{8i}
\end{aligned}$$

En la fig.(2.23) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las velocidades angulares  $\dot{\theta}_{12i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{121}$ , la línea punteada a  $\dot{\theta}_{122}$  y la línea gris es para  $\dot{\theta}_{123}$ .

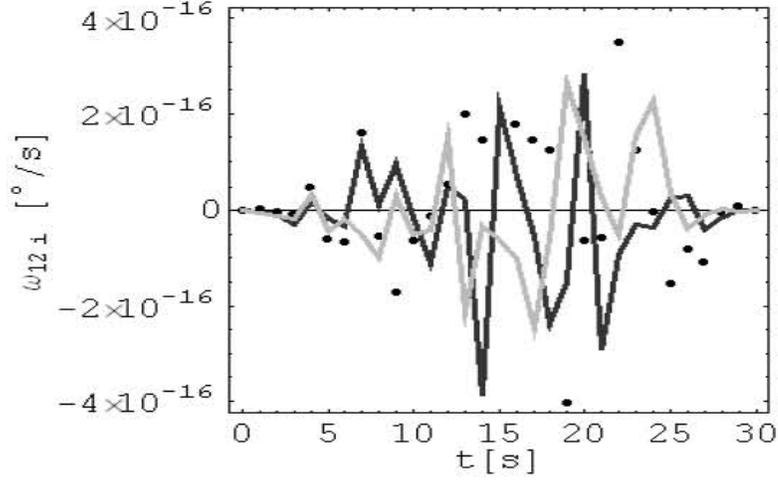


Fig. 2.23 Velocidad  $\dot{\theta}_{12i}$

De acuerdo a los resultados obtenidos para la posición angular  $\theta_{12i}$  fig. (2.17), la variación con respecto al tiempo de estos ángulos es nula, como se aprecia en la fig. (2.23).

### 2.3.6 Velocidad $\dot{\theta}_{10i}$ ,

Refiriendonos a la ecuación (2. 29a):

$$\begin{aligned}
s\theta_{10i} = & c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}s\delta_{15i}s\theta_{12i} - s\delta_{16i}(c\delta_{15i}s\theta_{12i}(c\theta_{7i}c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\theta_{3i} - \\
& c\theta_{3i}c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\theta_{7i} + c\delta_{1i}s\theta_{8i}) + c\theta_{12i}(c\delta_{1i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - \\
& s\delta_{1i}s\theta_{8i})) + c\delta_{16i}(c\theta_{12i}(c\theta_{7i}c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\theta_{3i} - c\theta_{3i}c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\theta_{7i} + \\
& c\delta_{1i}s\theta_{8i}) + c\delta_{15i}s\theta_{12i}(-c\delta_{1i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + s\delta_{1i}s\theta_{8i}))
\end{aligned}$$

derivando con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
& c\theta_{10i}\dot{\theta}_{10i} + (c\theta_{8i}(-c\theta_{12i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} + (c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
& c\theta_{12i} + s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) + (-c\delta_{15i}c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + \\
& c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s\theta_{8i})\dot{\theta}_{12i} + c\theta_{8i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(-c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + \\
& c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) + s\delta_{15i}s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) = (c\theta_{8i} \\
& (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i} + c\delta_{15i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{12i} + \\
& (c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i})\dot{\theta}_{8i}
\end{aligned} \tag{2.35a}$$

agrupando en  $\dot{\theta}_{3i}$ ,  $\dot{\theta}_{7i}$ ,  $\dot{\theta}_{8i}$ ,  $\dot{\theta}_{11i}$ ,  $\dot{\theta}_{12i}$  y  $\dot{\theta}_{10i}$  tenemos:

$$L_{1i}\dot{\theta}_{10i} + L_{12i}\dot{\theta}_{12i} + L_{57i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) = L_{8i}\dot{\theta}_{8i} \tag{2.35b}$$

donde:

$$\begin{aligned}
L_{1i} &= -c\theta_{10i} \\
L_{57i} &= c\theta_{8i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(-c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) + \\
&\quad s\delta_{15i}s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \\
L_{8i} &= (c\theta_{8i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i} + c\delta_{15i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) - \\
&\quad (c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{12i} + (c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) \\
&\quad s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i})\dot{\theta}_{8i} \\
L_{12i} &= c\theta_{10i}\dot{\theta}_{10i} + (c\theta_{8i}(-c\theta_{12i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} + (c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i} + \\
&\quad s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) + (-c\delta_{15i}c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + \\
&\quad c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s\theta_{8i})
\end{aligned}$$

sustituyendo ec. (2. 30d), (2. 31c), (2. 32c), (2. 33d) y (2. 34d) en (2. 35d) obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{L_{57i}(E_{2i}\dot{x}_p + E_{3i}\dot{y}_p + E_{4i}\dot{z}_p)}{E_{1i}} + \frac{L_{12i}(K_{2i}\dot{x}_p + K_{3i}\dot{y}_p + K_{4i}\dot{z}_p)}{K_{1i}} + L_{1i}\dot{\theta}_{10i} \\
&= \frac{L_{8i}(F_{2i}\dot{x}_p + F_{3i}\dot{y}_p + F_{4i}\dot{z}_p)}{F_{1i}} + \frac{L_{57i}(H_{2i}\dot{x}_p + H_{3i}\dot{y}_p + H_{4i}\dot{z}_p)}{H_{1i}}
\end{aligned}$$

agrupando en  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p$  y despejando  $\dot{\theta}_{10i}$  conseguimos:

$$\dot{\theta}_{10i} = \frac{1}{L_{1i}}(L_{2i}\dot{x}_p + L_{3i}\dot{y}_p + L_{4i}\dot{z}_p) \tag{2.35c}$$

donde:

$$\begin{aligned}
L_{2i} &= \left( \frac{K_{2i}L_{12i}}{K_{1i}} + \frac{E_{2i}L_{57i}}{E_{1i}} - \frac{H_{2i}L_{57i}}{H_{1i}} - \frac{F_{2i}L_{8i}}{F_{1i}} \right) \\
L_{3i} &= \left( \frac{K_{3i}L_{12i}}{K_{1i}} + \frac{E_{3i}L_{57i}}{E_{1i}} - \frac{H_{3i}L_{57i}}{H_{1i}} - \frac{F_{3i}L_{8i}}{F_{1i}} \right) \\
L_{4i} &= \left( \frac{K_{4i}L_{12i}}{K_{1i}} + \frac{E_{4i}L_{57i}}{E_{1i}} - \frac{H_{4i}L_{57i}}{H_{1i}} - \frac{F_{4i}L_{8i}}{F_{1i}} \right)
\end{aligned}$$

En la fig.(2.24) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las velocidades angulares  $\dot{\theta}_{10i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{101}$ , la línea punteada a  $\dot{\theta}_{102}$  y la línea gris es para  $\dot{\theta}_{103}$ .

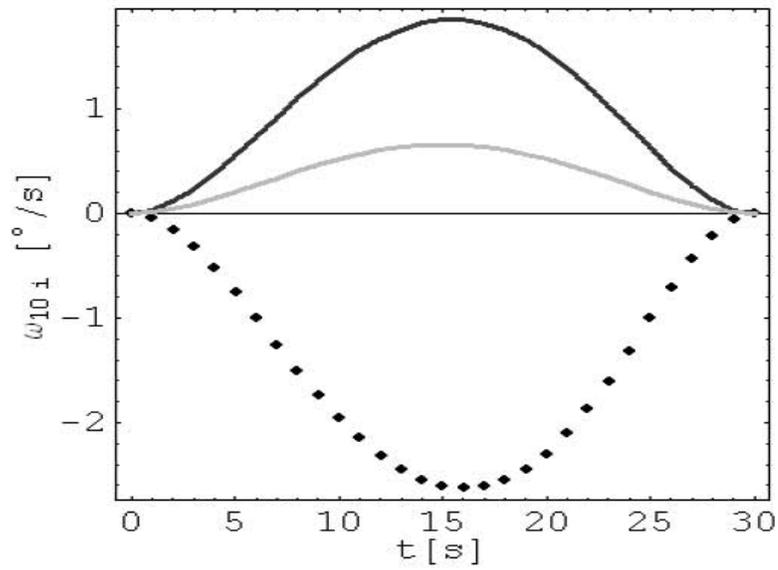


Fig. 2.24 Velocidad  $\dot{\theta}_{10i}$

## 2.4 Aceleración

El problema **cinamático inverso** para la **aceleración** es:

Dada la aceleración  $(\ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p)$  del centroide de la base móvil, hallar las aceleraciones angulares  $\ddot{\theta}_{3i}, \ddot{\theta}_{7i}, \ddot{\theta}_{8i}, \ddot{\theta}_{10i}, \ddot{\theta}_{11i}, \ddot{\theta}_{12i}$  que definen la aceleración de las juntas.

En el análisis de aceleración, se asume que la posición, orientación, y velocidad de los cuerpos ya son totalmente conocidos y que son resultado del análisis de posición y velocidad. La aceleración de un punto o un cuerpo rígido que experimenta movimiento, puede ser obtenida por la derivada respecto al tiempo. Con base en las ecuaciones obtenidas en el análisis de posición y velocidad se obtendrá la aceleración al derivar con respecto al tiempo cada una de ellas.

### 2.4.1 Aceleración $\ddot{\theta}_{3i}$

Derivando la expresión (2. 30d) :

$$\ddot{\theta}_{3i} = -\frac{\dot{E}_{1i}((E_{2i}\dot{x}_p + E_{3i}\dot{y}_p + E_{4i}\dot{z}_p))}{E_{1i}^2} + \frac{\dot{E}_{2i}\dot{x}_p + \dot{E}_{3i}\dot{y}_p + \dot{E}_{4i}\dot{z}_p + E_{2i}\ddot{x}_p + E_{3i}\ddot{y}_p + E_{4i}\ddot{z}_p}{E_{1i}} \quad (2.36a)$$

agrupando en términos de  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p, \ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p$  tenemos:

$$\ddot{\theta}_{3i} = M_{2i}\dot{x}_p + M_{3i}\dot{y}_p + M_{4i}\dot{z}_p + M_{13i}\ddot{x}_p + M_{14i}\ddot{y}_p + M_{15i}\ddot{z}_p \quad (2.36b)$$

donde:

$$\begin{aligned} M_{2i} &= -\frac{E_{2i}\dot{E}_{1i}}{E_{1i}^2} + \frac{\dot{E}_{2i}}{E_{1i}} \\ M_{3i} &= -\frac{E_{3i}\dot{E}_{1i}}{E_{1i}^2} + \frac{\dot{E}_{3i}}{E_{1i}} \\ M_{4i} &= -\frac{E_{4i}\dot{E}_{1i}}{E_{1i}^2} + \frac{\dot{E}_{4i}}{E_{1i}} \\ M_{13i} &= \frac{E_{2i}}{E_{1i}}, \quad M_{14i} = \frac{E_{3i}}{E_{1i}}, \quad M_{15i} = \frac{E_{4i}}{E_{1i}} \end{aligned}$$

Donde las componentes  $\dot{E}_{1i}, \dot{E}_{2i}, \dot{E}_{3i}, \dot{E}_{4i}$  se obtienen de derivar los términos  $E_{1i}, E_{2i}, E_{3i}, E_{4i}$  respectivamente, por lo tanto tenemos:

$$\dot{E}_{1i} = a_{2i}\dot{x}_p + a_{3i}\dot{y}_p + a_{4i}\dot{z}_p$$

donde los valores  $a_{2i}$ ,  $a_{3i}$  y  $a_{4i}$  son:

$$\begin{aligned}
a_{2i} &= 2c\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i}) - (2(d_{17i}c\delta_{16i} - d_{5i}s\delta_{1i} + d_{13i}c\delta_{16i}s\delta_{15i} + \\
&\quad d_{14i}s\delta_{16i} - c\delta_{1i}(d_{2i} + d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p)(-2s\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + \\
&\quad d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + \\
&\quad c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2c\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i} \\
&\quad (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + \\
&\quad d_{6i}z_p)))/(2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
&\quad (d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2s\theta_{3i} \\
&\quad (d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
&\quad d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)) \\
a_{3i} &= 2s\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i}) - (2(d_{5i}c\delta_{1i} - d_{14i}c\delta_{16i} - d_{2i}s\delta_{1i} - d_{4i}c\theta_{3i} \\
&\quad s\delta_{1i} + d_{17i}s\delta_{16i} + d_{13i}s\delta_{15i}s\delta_{16i} + d_{6i}s\delta_{1i}s\theta_{3i} + y_p)(-2s\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + \\
&\quad d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + \\
&\quad c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2c\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i} \\
&\quad (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + \\
&\quad d_{6i}z_p)))/(2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + \\
&\quad d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - \\
&\quad 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
&\quad d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)) \\
a_{4i} &= 2(d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i} - ((d_{13i}c\delta_{15i} + d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i} + z_p)(-2s\theta_{3i} \\
&\quad (-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
&\quad d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2c\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + \\
&\quad d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + \\
&\quad c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)))/(2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + \\
&\quad d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + \\
&\quad s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + \\
&\quad d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p))
\end{aligned}$$

el siguiente término  $\dot{E}_{2i}$ :

$$\dot{E}_{2i} = b_{2i}\dot{x}_p + b_{3i}\dot{y}_p + b_{4i}\dot{z}_p$$

donde:

$$\begin{aligned}
b_{2i} &= -2(1 - (2c\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})(d_{17i}c\delta_{16i} - d_{5i}s\delta_{1i} + d_{13i}c\delta_{16i}s\delta_{15i} + \\
&\quad d_{14i}s\delta_{16i} - c\delta_{1i}(d_{2i} + d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p))/(2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + \\
&\quad d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + \\
&\quad os[\delta_{11}x_p + s\delta_{1i}y_p] + d_{4i}z_p) - 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - \\
&\quad d_{4i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + \\
&\quad c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p))) \\
b_{3i} &= (4c\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})(d_{5i}c\delta_{1i} - d_{14i}c\delta_{16i} - d_{2i}s\delta_{1i} - d_{4i}c\theta_{3i} \\
&\quad s\delta_{1i} + d_{17i}s\delta_{16i} + d_{13i}s\delta_{15i}s\delta_{16i} + d_{6i}s\delta_{1i}s\theta_{3i} + y_p))/(2c\theta_{3i} \\
&\quad (-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
&\quad d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + \\
&\quad d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i} \\
&\quad s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)) \\
b_{4i} &= (4c\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})(d_{13i}c\delta_{15i} + d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i} + z_p))/ \\
&\quad (2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
&\quad d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + \\
&\quad d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + \\
&\quad c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p))
\end{aligned}$$

el siguiente término  $\dot{E}_{3i}$ :

$$\dot{E}_{3i} = c_{2i}\dot{x}_p + c_{3i}\dot{y}_p + c_{4i}\dot{z}_p$$

y los términos:

$$\begin{aligned}
c_{2i} &= 2((d_{17i}c\delta_{16i} - d_{5i}s\delta_{1i} + d_{13i}c\delta_{16i}s\delta_{15i} + d_{14i}s\delta_{16i} - c\delta_{1i}(d_{2i} + \\
&\quad d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p)(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})s\delta_{1i})/((-d_{2i}d_{6i}c\theta_{3i} + \\
&\quad d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i}c\theta_{3i} + d_{17i}d_{6i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{3i} + d_{13i}d_{6i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
&\quad c\theta_{3i}s\delta_{15i} - d_{14i}d_{6i}c\theta_{3i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - d_{2i}d_{4i}s\theta_{3i} - d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i}s\theta_{3i} + \\
&\quad d_{17i}d_{4i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i}))s\theta_{3i} + d_{13i}d_{4i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
&\quad s\delta_{15i}s\theta_{3i} - d_{14i}d_{4i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{3i} + c\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})x_p + \\
&\quad s\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})y_p + d_{4i}c\theta_{3i}z_p - d_{6i}s\theta_{3i}z_p) \\
c_{3i} &= -2(-d_{2i}d_{6i}c\theta_{3i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i}c\theta_{3i} + d_{17i}d_{6i}c\delta_{1i}c\delta_{16i}c\theta_{3i} - \\
&\quad d_{5i}d_{6i}c\delta_{1i}c\theta_{3i}s\delta_{1i} + d_{2i}d_{6i}c\theta_{3i}s\delta_{1i}^2 + d_{4i}d_{6i}c\theta_{3i}s\delta_{1i}^2 + \\
&\quad d_{13i}d_{6i}c\delta_{1i}c\delta_{16i}c\theta_{3i}s\delta_{15i} + d_{14i}d_{6i}c\delta_{1i}c\theta_{3i}s\delta_{16i} - d_{2i}d_{4i}s\theta_{3i} - \\
&\quad d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i}s\theta_{3i} + d_{17i}d_{4i}c\delta_{1i}c\delta_{16i}s\theta_{3i} - d_{4i}d_{5i}c\delta_{1i}s\delta_{1i}s\theta_{3i} + \\
&\quad d_{2i}d_{4i}s\delta_{1i}^2s\theta_{3i} + d_{4i}^2c\theta_{3i}s\delta_{1i}^2s\theta_{3i} - d_{6i}^2c\theta_{3i}s\delta_{1i}^2s\theta_{3i} + \\
&\quad d_{13i}d_{4i}c\delta_{1i}c\delta_{16i}s\delta_{15i}s\theta_{3i} + d_{14i}d_{4i}c\delta_{1i}s\delta_{16i}s\theta_{3i} - d_{4i}d_{6i}s\delta_{1i}^2s\theta_{3i}^2 + \\
&\quad (d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})c\delta_{1i}x_p + (d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i})z_p)/((-d_{2i}d_{6i}c\theta_{3i} + \\
&\quad d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i}c\theta_{3i} + d_{17i}d_{6i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{3i} + d_{13i}d_{6i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
&\quad c\theta_{3i}s\delta_{15i} - d_{14i}d_{6i}c\theta_{3i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - d_{2i}d_{4i}s\theta_{3i} - d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i}s\theta_{3i} + \\
&\quad d_{17i}d_{4i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i}))s\theta_{3i} + d_{13i}d_{4i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
&\quad s\delta_{15i}s\theta_{3i} - d_{14i}d_{4i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{3i} + c\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})x_p + \\
&\quad s\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})y_p + d_{4i}c\theta_{3i}z_p - d_{6i}s\theta_{3i}z_p) \\
c_{4i} &= 2s\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})(d_{13i}c\delta_{15i} + d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i} + z_p)/ \\
&\quad ((-d_{2i}d_{6i}c\theta_{3i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i}c\theta_{3i} + d_{17i}d_{6i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{3i} + \\
&\quad d_{13i}d_{6i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{3i}s\delta_{15i} - d_{14i}d_{6i}c\theta_{3i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - \\
&\quad d_{2i}d_{4i}s\theta_{3i} - d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i}s\theta_{3i} + d_{17i}d_{4i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i}))s\theta_{3i} + \\
&\quad d_{13i}d_{4i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\delta_{15i}s\theta_{3i} - d_{14i}d_{4i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{3i} + \\
&\quad c\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})x_p + s\delta_{1i}(d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})y_p + \\
&\quad d_{4i}c\theta_{3i}z_p - d_{6i}s\theta_{3i}z_p)
\end{aligned}$$

el siguiente término  $\dot{E}_{4i}$ :

$$\dot{E}_{4i} = d_2\dot{x}_p + d_3\dot{y}_p + d_4\dot{z}_p$$

para los coeficientes  $d_{2i}$ ,  $d_{3i}$  y  $d_{4i}$ :

$$\begin{aligned}
d_{2i} &= (2(d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i})(-d_{5i}s\delta_{1i} + c\delta_{16i}(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) + \\
&\quad d_{14i}s\delta_{16i} - c\delta_{1i}(d_{2i} + d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p))/(c\theta_{3i} \\
&\quad (d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(-d_{2i} + c(\delta_{1i} - \delta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
&\quad d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}))) - (d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} + d_{4i}(d_{2i} - c(\delta_{1i} - \delta_{16i}))(d_{17i} + \\
&\quad d_{13i}s\delta_{15i}) + d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})))s\theta_{3i} + (d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})(c\delta_{1i}x_p + \\
&\quad s\delta_{1i}y_p) + (d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i})z_p) \\
d_{3i} &= ((d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i})(d_{5i}c\delta_{1i} - d_{14i}c\delta_{16i} + (d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i})s\delta_{16i} - s\delta_{1i} \\
&\quad (d_{2i} + d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}) + y_p))/(c\theta_{3i}(d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(-d_{2i} + \\
&\quad c(\delta_{1i} - \delta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}))) - (d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} + \\
&\quad d_{4i}(d_{2i} - c(\delta_{1i} - \delta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) + d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})))s\theta_{3i} + \\
&\quad (d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})(c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + (d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i})z_p) \\
d_{4i} &= ((d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})(-d_{2i} - d_{4i}c\theta_{3i} + c(\delta_{1i} - \delta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
&\quad d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + d_{6i}s\theta_{3i} + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p))/(c\theta_{3i}(-d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + \\
&\quad d_{6i}(d_{2i} - c(\delta_{1i} - \delta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) + d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}))) + \\
&\quad (d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} + d_{4i}(d_{2i} - c(\delta_{1i} - \delta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) + \\
&\quad d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})))s\theta_{3i} - (d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i})(c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + \\
&\quad (-d_{4i}c\theta_{3i} + d_{6i}s\theta_{3i})z_p)
\end{aligned}$$

En la fig.(2.25) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las aceleraciones angulares  $\ddot{\theta}_{3i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\ddot{\theta}_{31}$ , la línea punteada a  $\ddot{\theta}_{32}$  y la línea gris es para  $\ddot{\theta}_{33}$ .

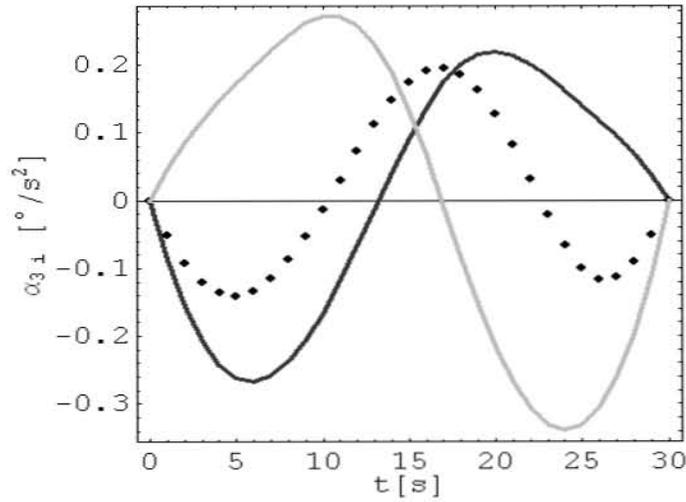


Fig. 2.25 Aceleración angular  $\ddot{\theta}_{3i}$

## 2.4.2 Aceleración $\ddot{\theta}_{8i}$

Derivando con respecto al tiempo la ec. (2. 31c) :

$$\dot{\theta}_{8i} = \frac{1}{F_{1i}}(F_{2i}\dot{x}_p + F_{3i}\dot{y}_p + F_{4i}\dot{z}_p)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{8i} = & -\frac{\dot{F}_{1i}((F_{2i}\dot{x}_p + F_{3i}\dot{y}_p + F_{4i}\dot{z}_p))}{F_{1i}^2} + \\ & \frac{\dot{F}_{2i}\dot{x}_p + \dot{F}_{3i}\dot{y}_p + \dot{F}_{4i}\dot{z}_p + F_{2i}\ddot{x}_p + F_{3i}\ddot{y}_p + F_{4i}\ddot{z}_p}{F_{1i}} \end{aligned} \quad (2.37a)$$

agrupando en términos de  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p, \ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p$  tenemos:

$$\ddot{\theta}_{8i} = N_{2i}\dot{x}_p + N_{3i}\dot{y}_p + N_{4i}\dot{z}_p + N_{13i}\ddot{x}_p + N_{14i}\ddot{y}_p + N_{15i}\ddot{z}_p \quad (2.37b)$$

donde:

$$\begin{aligned} N_{2i} &= \left( -\frac{F_{2i}\dot{F}_{1i}}{F_{1i}^2} + \frac{\dot{F}_{2i}}{F_{1i}} \right) \\ N_{3i} &= \left( -\frac{F_{3i}\dot{F}_{1i}}{F_{1i}^2} + \frac{\dot{F}_{3i}}{F_{1i}} \right) \\ N_{4i} &= \left( -\frac{F_{4i}\dot{F}_{1i}}{F_{1i}^2} + \frac{\dot{F}_{4i}}{F_{1i}} \right) \\ N_{13i} &= \frac{F_{2i}}{F_{1i}} \\ N_{14i} &= \frac{F_{3i}}{F_{1i}} \\ N_{15i} &= \frac{F_{4i}}{F_{1i}} \end{aligned}$$

Donde las componentes  $\dot{F}_{1i}, \dot{F}_{2i}, \dot{F}_{3i}, \dot{F}_{4i}$  se obtienen de derivar los términos  $F_{1i}, F_{2i}, F_{3i}, F_{4i}$  respectivamente, de modo que tenemos:

$$\dot{F}_{1i} = 0$$

el siguiente término  $\dot{F}_{2i}$ :

$$\dot{F}_{2i} = e_{2i}\dot{x}_p + e_{3i}\dot{y}_p + e_{4i}\dot{z}_p$$

con los coeficientes  $e_{2i}$ ,  $e_{3i}$  y  $e_{4i}$  :

$$\begin{aligned} e_{2i} &= \frac{\sec^2 \theta_{8i} s \delta_{1i}^2 t \theta_{8i}}{d_{9i}} \\ e_{3i} &= -\frac{c \delta_{1i} \sec^2 \theta_{8i} s \delta_{1i} t \theta_{8i}}{d_{9i}} \\ e_{4i} &= 0 \end{aligned}$$

el siguiente término  $\dot{F}_{3i}$ :

$$\dot{F}_{3i} = f_{2i} \dot{x}_p + f_{3i} \dot{y}_p + f_{4i} \dot{z}_p$$

con los coeficientes  $f_{2i}$ ,  $f_{3i}$  y  $f_{4i}$ :

$$\begin{aligned} f_{2i} &= -\frac{c \delta_{1i} \sec^2 \theta_{8i} s \delta_{1i} t \theta_{8i}}{d_{9i}} \\ f_{3i} &= \frac{c \delta_{1i}^2 \sec^2 \theta_{8i} t \theta_{8i}}{d_{9i}} \\ f_{4i} &= 0 \end{aligned}$$

por último:

$$\dot{F}_{4i} = 0$$

En la fig.(2.26) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las aceleraciones angulares  $\ddot{\theta}_{8i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\ddot{\theta}_{81}$ , la línea punteada a  $\ddot{\theta}_{82}$  y la línea gris es para  $\ddot{\theta}_{83}$

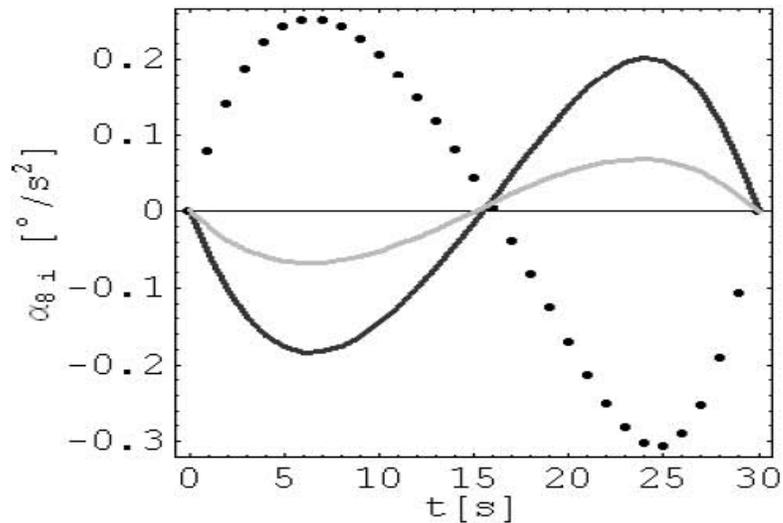


Fig. 2.26 Aceleración angular  $\ddot{\theta}_{8i}$

### 2.4.3 Aceleración $\ddot{\theta}_{7i}$

Derivando la ec. (2. 32c) con respecto al tiempo:

$$\dot{\theta}_{7i} = \frac{1}{H_{1i}}(H_{2i}\dot{x}_p + H_{3i}\dot{y}_p + H_{4i}\dot{z}_p)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{7i} = & -\frac{\dot{H}_{1i}((H_{2i}\dot{x}_p + H_{3i}\dot{y}_p + H_{4i}\dot{z}_p))}{H_{1i}^2} + \\ & \frac{\dot{H}_{2i}\dot{x}_p + \dot{H}_{3i}\dot{y}_p + \dot{H}_{4i}\dot{z}_p + H_{2i}\ddot{x}_p + H_{3i}\ddot{y}_p + H_{4i}\ddot{z}_p}{H_{1i}} \end{aligned} \quad (2.38a)$$

agrupando en términos de  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p, \ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p$  tenemos:

$$\ddot{\theta}_{7i} = O_{2i}\dot{x}_p + O_{3i}\dot{y}_p + O_{4i}\dot{z}_p + O_{13i}\ddot{x}_p + O_{14i}\ddot{y}_p + O_{15i}\ddot{z}_p \quad (2.38b)$$

donde:

$$\begin{aligned} O_{2i} &= \left( -\frac{H_{2i}\dot{H}_{1i}}{H_{1i}^2} + \frac{\dot{H}_{2i}}{H_{1i}} \right) \\ O_{3i} &= \left( -\frac{H_{3i}\dot{H}_{1i}}{H_{1i}^2} + \frac{\dot{H}_{3i}}{H_{1i}} \right) \\ O_{4i} &= \left( -\frac{H_{4i}\dot{H}_{1i}}{H_{1i}^2} + \frac{\dot{H}_{4i}}{H_{1i}} \right) \\ O_{13i} &= \frac{H_{2i}}{H_{1i}} \\ O_{14i} &= \frac{H_{3i}}{H_{1i}} \\ O_{15i} &= \frac{H_{4i}}{H_{1i}} \end{aligned}$$

Las derivadas de los términos se dan a continuación:

$$\begin{aligned}
\dot{G}_{5i} &= -d_{6i}c\theta_{3i}\dot{\theta}_{3i} - d_{4i}s\theta_{3i}\dot{\theta}_{3i} - d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) + \\
&\quad d_{9i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i} \\
\dot{G}_{6i} &= d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) - d_{9i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i} \\
\dot{G}_{7i} &= d_{9i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) - d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i} \\
\dot{H}_{1i} &= -F_{1i}G_{6i}\dot{E}_{1i} - E_{1i}G_{6i}\dot{F}_{1i} - E_{1i}F_{1i}\dot{G}_{6i} \\
\dot{H}_{2i} &= E_{2i}G_{5i}\dot{F}_{1i} + E_{1i}G_{7i}\dot{F}_{2i} + F_{1i}(G_{5i}\dot{E}_{2i} + E_{2i}\dot{G}_{5i}) + \\
&\quad F_{2i}(G_{7i}\dot{E}_{1i} + E_{1i}\dot{G}_{7i}) \\
\dot{H}_{3i} &= E_{3i}G_{5i}\dot{F}_{1i} + E_{1i}G_{7i}\dot{F}_{3i} + F_{1i}(G_{5i}\dot{E}_{3i} + E_{3i}\dot{G}_{5i}) + \\
&\quad F_{3i}(G_{7i}\dot{E}_{1i} + E_{1i}\dot{G}_{7i}) \\
\dot{H}_{4i} &= (E_{1i} + E_{4i}G_{5i})\dot{F}_{1i} + E_{1i}G_{7i}\dot{F}_{4i} + F_{1i}(\dot{E}_{1i} + G_{5i}\dot{E}_{4i} + E_{4i}\dot{G}_{5i}) + \\
&\quad F_{4i}(G_{7i}\dot{E}_{1i} + E_{1i}\dot{G}_{7i})
\end{aligned}$$

En la fig.(2.27) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las aceleraciones angulares  $\ddot{\theta}_{7i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\ddot{\theta}_{71}$ , la línea punteada a  $\ddot{\theta}_{72}$  y la línea gris es para  $\ddot{\theta}_{73}$

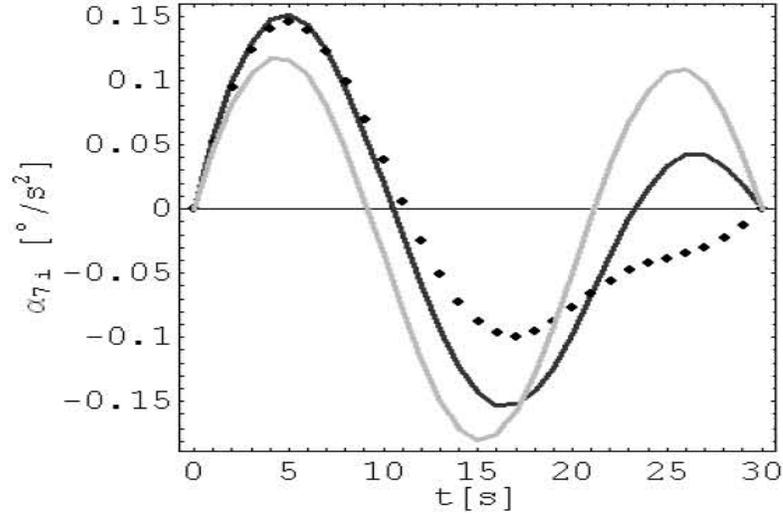


Fig. 2.27 Aceleración angular  $\ddot{\theta}_{7i}$

#### 2.4.4 Aceleración $\ddot{\theta}_{11i}$

Derivando la ec. (2. 33d) con respecto al tiempo:

$$\dot{\theta}_{11i} = \frac{1}{J_{1i}}(J_{2i}\dot{x}_p + J_{3i}\dot{y}_p + J_{4i}\dot{z}_p)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{11i} = & -\frac{\dot{J}_{1i}((J_{2i}\dot{x}_p + J_{3i}\dot{y}_p + J_{4i}\dot{z}_p))}{J_{1i}^2} + \\ & \frac{\dot{J}_{2i}\dot{x}_p + \dot{J}_{3i}\dot{y}_p + \dot{J}_{4i}\dot{z}_p + J_{2i}\ddot{x}_p + J_{3i}\ddot{y}_p + J_{4i}\ddot{z}_p}{J_{1i}} \end{aligned} \quad (2.39a)$$

agrupando en términos de  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p, \ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p$  tenemos:

$$\ddot{\theta}_{11i} = P_{2i}\dot{x}_p + P_{3i}\dot{y}_p + P_{4i}\dot{z}_p + P_{13i}\ddot{x}_p + P_{14i}\ddot{y}_p + P_{15i}\ddot{z}_p \quad (2.39b)$$

donde:

$$\begin{aligned} P_{2i} &= \left( -\frac{J_{2i}\dot{J}_{1i}}{J_{1i}^2} + \frac{\dot{J}_{2i}}{J_{1i}} \right) \\ P_{3i} &= \left( -\frac{J_{3i}\dot{J}_{1i}}{J_{1i}^2} + \frac{\dot{J}_{3i}}{J_{1i}} \right) \\ P_{4i} &= \left( -\frac{J_{4i}\dot{J}_{1i}}{J_{1i}^2} + \frac{\dot{J}_{4i}}{J_{1i}} \right) \\ P_{13i} &= \frac{J_{2i}}{J_{1i}} \\ P_{14i} &= \frac{J_{3i}}{J_{1i}} \\ P_{15i} &= \frac{J_{4i}}{J_{1i}} \end{aligned}$$

Las derivadas de los términos se dan a continuación:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_{1i} &= \sec\theta_{11i}((c\delta_{15i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\delta_{15i} \\
 &\quad s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))t\theta_{11i}\dot{\theta}_{11i} + (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
 &\quad s\delta_{15i} - c\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))(\dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}) \\
 \dot{J}_{1i} &= 0 \\
 \dot{J}_{2i} &= I_{1i} \left( -\frac{E_{2i}\dot{E}_{1i}}{E_{1i}^2} + \frac{\dot{E}_{2i}}{E_{1i}} + \frac{H_{2i}\dot{H}_{1i}}{H_{1i}^2} - \frac{\dot{H}_{2i}}{H_{1i}} \right) + \left( \frac{E_{2i}}{E_{1i}} - \frac{H_{2i}}{H_{1i}} \right) \dot{I}_{1i} \\
 \dot{J}_{3i} &= I_{1i} \left( -\frac{E_{3i}\dot{E}_{1i}}{E_{1i}^2} + \frac{\dot{E}_{3i}}{E_{1i}} + \frac{H_{3i}\dot{H}_{1i}}{H_{1i}^2} - \frac{\dot{H}_{3i}}{H_{1i}} \right) + \left( \frac{E_{3i}}{E_{1i}} - \frac{H_{3i}}{H_{1i}} \right) \dot{I}_{1i} \\
 \dot{J}_{4i} &= I_{1i} \left( -\frac{E_{4i}\dot{E}_{1i}}{E_{1i}^2} + \frac{\dot{E}_{4i}}{E_{1i}} + \frac{H_{4i}\dot{H}_{1i}}{H_{1i}^2} - \frac{\dot{H}_{4i}}{H_{1i}} \right) + \left( \frac{E_{4i}}{E_{1i}} - \frac{H_{4i}}{H_{1i}} \right) \dot{I}_{1i}
 \end{aligned}$$

En la fig.(2.28) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las aceleraciones angulares  $\ddot{\theta}_{11i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\ddot{\theta}_{111}$ , la línea punteada a  $\ddot{\theta}_{112}$  y la línea gris es para  $\ddot{\theta}_{113}$

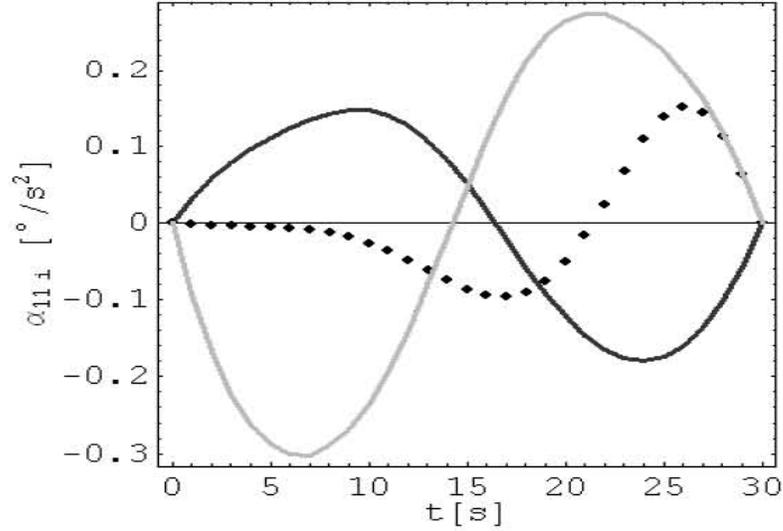


Fig. 2.28 Aceleración angular  $\ddot{\theta}_{11i}$

### 2.4.5 Aceleracion $\ddot{\theta}_{12i}$

Derivando la ec. (2. 34c):

$$\dot{\theta}_{12i} = \frac{1}{K_{1i}}(K_{2i}\dot{x}_p + K_{3i}\dot{y}_p + K_{4i}\dot{z}_p)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{12i} = & -\frac{\dot{K}_{1i}((K_{2i}\dot{x}_p + K_{3i}\dot{y}_p + K_{4i}\dot{z}_p))}{K_{1i}^2} + \\ & \frac{\dot{K}_{2i}\dot{x}_p + \dot{K}_{3i}\dot{y}_p + \dot{K}_{4i}\dot{z}_p + K_{2i}\ddot{x}_p + K_{3i}\ddot{y}_p + K_{4i}\ddot{z}_p}{K_{1i}} \end{aligned} \quad (2.40a)$$

agrupando en términos de  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p, \ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p$  tenemos:

$$\ddot{\theta}_{12i} = Q_{2i}\dot{x}_p + Q_{3i}\dot{y}_p + Q_{4i}\dot{z}_p + Q_{13i}\ddot{x}_p + Q_{14i}\ddot{y}_p + Q_{15i}\ddot{z}_p \quad (2.40b)$$

donde:

$$\begin{aligned} Q_{2i} &= \left( -\frac{K_{2i}\dot{K}_{1i}}{K_{1i}^2} + \frac{\dot{K}_{2i}}{K_{1i}} \right) \\ Q_{3i} &= \left( -\frac{J_{3i}\dot{K}_{1i}}{K_{1i}^2} + \frac{\dot{K}_{3i}}{K_{1i}} \right) \\ Q_{4i} &= \left( -\frac{J_{4i}\dot{K}_{1i}}{K_{1i}^2} + \frac{\dot{K}_{4i}}{K_{1i}} \right) \\ Q_{13i} &= \frac{K_{2i}}{K_{1i}} \\ Q_{14i} &= \frac{K_{3i}}{K_{1i}} \\ Q_{15i} &= \frac{K_{4i}}{K_{1i}} \end{aligned}$$

Las derivadas de los términos se dan a continuación:

$$\begin{aligned}
\dot{K}_{1i} &= -E_{1i}H_{1i}K_{12i}\dot{F}_{1i} - F_{1i}(E_{1i}K_{12i}\dot{H}_{1i} + H_{1i}(K_{12i}\dot{E}_{1i} + E_{1i}\dot{K}_{12i})) \\
\dot{K}_{2i} &= (E_{1i}H_{1i}J_{2i}K_{11i} - E_{2i}H_{1i}K_{57i} + E_{1i}H_{2i}K_{57i})\dot{F}_{1i} + E_{1i}H_{1i}K_{8i}\dot{F}_{2i} + \\
&F_{1i}(E_{1i}J_{2i}K_{11i}\dot{H}_{1i} + K_{57i}(H_{2i}\dot{E}_{1i} - E_{2i}\dot{H}_{1i} + E_{1i}\dot{H}_{2i})) + \\
&E_{1i}H_{2i}\dot{K}_{57i} + H_{1i}(J_{2i}K_{11i}\dot{E}_{1i} - K_{57i}\dot{E}_{2i} + E_{1i}K_{11i}\dot{J}_{2i} + \\
&E_{1i}J_{2i}\dot{K}_{11i} - E_{2i}\dot{K}_{57i})) + F_{2i}(H_{1i}K_{8i}\dot{E}_{1i} + E_{1i}K_{8i}\dot{H}_{1i} + \\
&E_{1i}H_{1i}\dot{K}_{8i}) \\
\dot{K}_{3i} &= (E_{1i}H_{1i}J_{3i}K_{11i} - E_{3i}H_{1i}K_{57i} + E_{1i}H_{3i}K_{57i})\dot{F}_{1i} + E_{1i}H_{1i}K_{8i}\dot{F}_{3i} + \\
&F_{1i}(E_{1i}J_{3i}K_{11i}\dot{H}_{1i} + K_{57i}(H_{3i}\dot{E}_{1i} - E_{3i}\dot{H}_{1i} + E_{1i}\dot{H}_{3i})) + \\
&E_{1i}H_{3i}\dot{K}_{57i} + H_{1i}(J_{3i}K_{11i}\dot{E}_{1i} - K_{57i}\dot{E}_{3i} + E_{1i}K_{11i}\dot{J}_{3i} + \\
&E_{1i}J_{3i}\dot{K}_{11i} - E_{3i}\dot{K}_{57i})) + F_{3i}(H_{1i}K_{8i}\dot{E}_{1i} + E_{1i}K_{8i}\dot{H}_{1i} + \\
&E_{1i}H_{1i}\dot{K}_{8i}) \\
\dot{K}_{4i} &= (E_{1i}H_{1i}J_{4i}K_{11i} - E_{4i}H_{1i}K_{57i} + E_{1i}H_{4i}K_{57i})\dot{F}_{1i} + E_{1i}H_{1i}K_{8i}\dot{F}_{4i} + \\
&F_{1i}(E_{1i}J_{4i}K_{11i}\dot{H}_{1i} + K_{57i}(H_{4i}\dot{E}_{1i} - E_{4i}\dot{H}_{1i} + E_{1i}\dot{H}_{4i})) + \\
&E_{1i}H_{4i}\dot{K}_{57i} + H_{1i}(J_{4i}K_{11i}\dot{E}_{1i} - K_{57i}\dot{E}_{4i} + E_{1i}K_{11i}\dot{J}_{4i} + \\
&E_{1i}J_{4i}\dot{K}_{11i} - E_{4i}\dot{K}_{57i})) + F_{4i}(H_{1i}K_{8i}\dot{E}_{1i} + E_{1i}K_{8i}\dot{H}_{1i} + \\
&E_{1i}H_{1i}\dot{K}_{8i})
\end{aligned}$$

con los siguientes valores de  $\dot{K}_{57i}$ ,  $\dot{K}_{8i}$ ,  $\dot{K}_{11i}$ ,  $\dot{K}_{12i}$ :

$$\begin{aligned}
\dot{K}_{57i} &= -(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c\theta_{11i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i}c\theta_{12i}s\theta_{11i}) + \\
& c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{11i}s\theta_{12i} + (-c\delta_{15i}c\theta_{11i} + \\
& c\theta_{12i}s\delta_{15i}s\theta_{11i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i}\dot{\theta}_{11i} + c\theta_{11i}(c\theta_{12i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
& s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - s\theta_{12i}(c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + s\delta_{15i} \\
& s(\theta_{3i} - \theta_{7i})))s\theta_{8i}\dot{\theta}_{12i} + (c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c\theta_{11i}c\theta_{12i}s\delta_{15i} + \\
& c\delta_{15i}s\theta_{11i}) + (-c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\delta_{15i}c\theta_{11i}c\theta_{12i} - s\delta_{15i}s\theta_{11i}) - \\
& c\theta_{11i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i}\dot{\theta}_{3i} + (-c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
& (c\theta_{11i}c\theta_{12i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i}s\theta_{11i}) + (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\delta_{15i}c\theta_{11i} \\
& c\theta_{12i} - s\delta_{15i}s\theta_{11i}) + c\theta_{11i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \\
& s\theta_{8i}\dot{\theta}_{7i} + c\theta_{8i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\delta_{15i}c\theta_{11i}c\theta_{12i} - \\
& s\delta_{15i}s\theta_{11i}) + c\theta_{11i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) + (c\theta_{11i}c\theta_{12i}s\delta_{15i} + \\
& c\delta_{15i}s\theta_{11i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))\dot{\theta}_{8i} \\
\dot{K}_{8i} &= (-c\theta_{12i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}s\delta_{15i}s\theta_{11i} + c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{11i}c\theta_{8i} \\
& s\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + c\theta_{8i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{11i}s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
& - c\theta_{11i}s\delta_{15i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{8i} + c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{11i}s\theta_{12i}s\theta_{8i} + \\
& c\delta_{15i}(c\theta_{11i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i} + c\theta_{12i}s\theta_{11i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{8i} \\
& s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{8i})))\dot{\theta}_{11i} - c\theta_{11i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
& c\theta_{8i}s\delta_{15i}s\theta_{12i} + c\theta_{12i}(c\theta_{8i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + \\
& c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{8i}) + c\delta_{15i}s\theta_{12i}(-c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + \\
& s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{8i}))\dot{\theta}_{12i} - c\theta_{8i}(-c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
& (c\delta_{15i}c\theta_{11i}c\theta_{12i} - s\delta_{15i}s\theta_{11i}) + c\theta_{11i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) - \\
& (c\theta_{11i}c\theta_{12i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i}s\theta_{11i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))\dot{\theta}_{3i} + c\theta_{8i} \\
& (c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\delta_{15i}c\theta_{11i}c\theta_{12i} - s\delta_{15i}s\theta_{11i}) + \\
& c\theta_{11i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) + (c\theta_{11i}c\theta_{12i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i}s\theta_{11i}) \\
& s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))\dot{\theta}_{7i} + (c\theta_{8i}(s(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\delta_{15i}c\theta_{11i}c\theta_{12i} - \\
& s\delta_{15i}s\theta_{11i}) - c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{11i}s\theta_{12i}) + (-c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
& (c\theta_{11i}c\theta_{12i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i}s\theta_{11i}) + (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\delta_{15i}c\theta_{11i}c\theta_{12i} - \\
& s\delta_{15i}s\theta_{11i}) + c\theta_{11i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i})\dot{\theta}_{8i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{K}_{11i} = & (-c\theta_{8i}(s\delta_{15i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{11i} + c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{11i}s\theta_{12i}) - \\
& (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\delta_{15i}s\theta_{11i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + c\theta_{11i}(c\theta_{12i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
& s\delta_{15i} - s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})))s\theta_{8i} + c\delta_{15i} \\
& (-c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{11i}s\theta_{8i} + c\theta_{11i}c\theta_{12i}(c\theta_{8i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + \\
& c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i})))\dot{\theta}_{11i} - s\theta_{11i}(c\delta_{15i}c\theta_{8i} \\
& s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i} - (c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{12i} + c\theta_{12i} \\
& s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i} + c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\theta_{12i}c\theta_{8i} + \\
& c\delta_{15i}s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}))d\theta_{12} + (c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
& (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\theta_{11i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i}c\theta_{12i}s\theta_{11i}) + s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
& s\theta_{11i}s\theta_{12i}) + (-c\delta_{15i}c\theta_{11i} + c\theta_{12i}s\delta_{15i}s\theta_{11i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \\
& s\theta_{8i}\dot{\theta}_{3i} + (-c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\theta_{11i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i} \\
& c\theta_{12i}s\theta_{11i}) + s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{11i}s\theta_{12i}) + (c\delta_{15i}c\theta_{11i} - c\theta_{12i} \\
& s\delta_{15i}s\theta_{11i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i}\dot{\theta}_{7i} + (c\theta_{8i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c\delta_{15i} \\
& c\theta_{11i} - c\theta_{12i}s\delta_{15i}s\theta_{11i}) + (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\theta_{11i}s\delta_{15i} + \\
& c\delta_{15i}c\theta_{12i}s\theta_{11i}) + s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{11i}s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) + \\
& (-s(\delta_{1i} - \delta_{16i})(c\theta_{11i}s\delta_{15i} + c\delta_{15i}c\theta_{12i}s\theta_{11i}) + c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
& s\theta_{11i}s\theta_{12i})s\theta_{8i})\dot{\theta}_{8i} \\
\dot{K}_{12i} = & -s\theta_{11i}(c\theta_{8i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i} + c\delta_{15i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) - \\
& (c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{12i} + (c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
& s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i})\dot{\theta}_{11i} + c\theta_{11i}(-c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{8i}s\theta_{12i} + \\
& (-c\theta_{12i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} + s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i} + \\
& c\delta_{15i}c\theta_{12i}(c\theta_{8i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}))\dot{\theta}_{12i} + \\
& c\theta_{11i}(-c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) + \\
& s\delta_{15i}s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i}d\theta_{13} + c\theta_{11i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c\theta_{12i} \\
& s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) - s\delta_{15i}s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \\
& s\theta_{8i}\dot{\theta}_{7i} + c\theta_{11i}(-c\theta_{8i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{12i} + (c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - \\
& c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) - (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i} + \\
& c\delta_{15i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s\theta_{8i})\dot{\theta}_{8i}
\end{aligned}$$

En la fig.(2.29) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las velocidades angulares  $\dot{\theta}_{12i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\dot{\theta}_{121}$ , la línea punteada a  $\dot{\theta}_{122}$  y la línea gris es para  $\dot{\theta}_{123}$ .

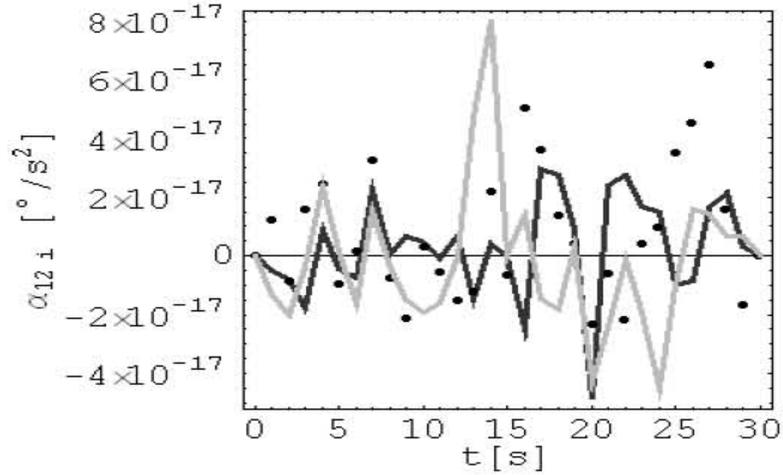


Fig. 2.29 Aceleración angular  $\ddot{\theta}_{12i}$

De acuerdo a los resultados obtenidos para la posición angular  $\theta_{12i}$  y para la velocidad angular  $\dot{\theta}_{12i}$  fig. (2.17) y fig. (2.23) respectivamente la variación con respecto al tiempo de esta velocidad angular es nula, como se aprecia en la fig. (2.29).

### 2.5.6 Aceleración $\alpha_{10i}$

Derivando la expresión (2. 35c):

$$\dot{\theta}_{10i} = \frac{1}{L_{1i}}(L_{2i}\dot{x}_p + L_{3i}\dot{y}_p + L_{4i}\dot{z}_p)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{10i} = & -\frac{\dot{L}_{1i}((L_{2i}\dot{x}_p + L_{3i}\dot{y}_p + L_{4i}\dot{z}_p))}{L_{1i}^2} + \\ & \frac{\dot{L}_{2i}\dot{x}_p + \dot{L}_{3i}\dot{y}_p + \dot{L}_{4i}\dot{z}_p + L_{2i}\ddot{x}_p + L_{3i}\ddot{y}_p + L_{4i}\ddot{z}_p}{L_{1i}} \end{aligned} \quad (2.41a)$$

agrupando en términos de  $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p, \ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p$  tenemos:

$$\ddot{\theta}_{10i} = R_{2i}\dot{x}_p + R_{3i}\dot{y}_p + R_{4i}\dot{z}_p + R_{13i}\ddot{x}_p + R_{14i}\ddot{y}_p + R_{15i}\ddot{z}_p \quad (2.41b)$$

vdonde:

$$\begin{aligned}
R_{2i} &= \left( -\frac{L_{2i}\dot{E}_{1i}}{L_{1i}^2} + \frac{\dot{E}_{2i}}{L_{1i}} \right) \\
R_{3i} &= \left( -\frac{L_{3i}\dot{E}_{1i}}{L_{1i}^2} + \frac{\dot{E}_{3i}}{L_{1i}} \right) \\
R_{4i} &= \left( -\frac{L_{4i}\dot{E}_{1i}}{L_{1i}^2} + \frac{\dot{E}_{4i}}{L_{1i}} \right) \\
R_{13i} &= \frac{L_{2i}}{L_{1i}} \\
R_{14i} &= \frac{L_{3i}}{L_{1i}} \\
R_{15i} &= \frac{L_{4i}}{L_{1i}}
\end{aligned}$$

Las derivadas de los términos se dan a continuación:

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{2i} &= -\frac{E_{2i}L_{57i}\dot{E}_{1i}}{E_{1i}^2} + \frac{F_{2i}L_{8i}\dot{F}_{1i}}{F_{1i}^2} + \frac{H_{2i}L_{57i}\dot{H}_{1i}}{H_{1i}^2} - \frac{L_{57i}\dot{H}_{2i}}{H_{1i}} - \\
&\quad \frac{K_{2i}L_{12i}\dot{K}_{1i}}{K_{1i}^2} + \frac{L_{12i}\dot{K}_{2i}}{K_{1i}} + \frac{K_{2i}\dot{L}_{12i}}{K_{1i}} - \frac{H_{2i}\dot{L}_{57i}}{H_{1i}} + \\
&\quad \frac{L_{57i}\dot{E}_{2i} + \dot{L}_{57i}E_{2i}}{E_{1i}} - \frac{L_{8i}\dot{F}_{2i} + \dot{L}_{8i}F_{2i}}{F_{1i}} \\
\dot{L}_{3i} &= -\frac{E_{3i}L_{57i}\dot{E}_{1i}}{E_{1i}^2} + \frac{F_{3i}L_{8i}\dot{F}_{1i}}{F_{1i}^2} + \frac{H_{3i}L_{57i}\dot{H}_{1i}}{H_{1i}^2} - \frac{L_{57i}\dot{H}_{3i}}{H_{1i}} - \\
&\quad \frac{K_{3i}L_{12i}\dot{K}_{1i}}{K_{1i}^2} + \frac{L_{12i}\dot{K}_{3i}}{K_{1i}} + \frac{K_{3i}\dot{L}_{12i}}{K_{1i}} - \frac{H_{3i}\dot{L}_{57i}}{H_{1i}} + \\
&\quad \frac{L_{57i}\dot{E}_{3i} + \dot{L}_{57i}E_{3i}}{E_{1i}} - \frac{L_{8i}\dot{F}_{3i} + \dot{L}_{8i}F_{3i}}{F_{1i}} \\
\dot{L}_{4i} &= -\frac{E_{4i}L_{57i}\dot{E}_{1i}}{E_{1i}^2} + \frac{F_{4i}L_{8i}\dot{F}_{1i}}{F_{1i}^2} + \frac{H_{4i}L_{57i}\dot{H}_{1i}}{H_{1i}^2} - \frac{L_{57i}\dot{H}_{4i}}{H_{1i}} - \\
&\quad \frac{K_{4i}L_{12i}\dot{K}_{1i}}{K_{1i}^2} + \frac{L_{12i}\dot{K}_{4i}}{K_{1i}} + \frac{K_{4i}\dot{L}_{12i}}{K_{1i}} - \frac{H_{4i}\dot{L}_{57i}}{H_{1i}} + \\
&\quad \frac{L_{57i}\dot{E}_{4i} + \dot{L}_{57i}E_{4i}}{E_{1i}} - \frac{L_{8i}\dot{F}_{4i} + \dot{L}_{8i}F_{4i}}{F_{1i}}
\end{aligned}$$

y los términos  $\dot{L}_{1i}, \dot{L}_{57i}, \dot{L}_{8i}, \dot{L}_{12i}$  son respectivamente:

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{1i} &= s\theta_{10i}\dot{\theta}_{10i} \\
\dot{L}_{57i} &= c\theta_{8i}(c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
&\quad s\theta_{12i} + c\theta_{12i}s\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))d\theta_{12} + c\theta_{8i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{12i} + \\
&\quad (c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))\dot{\theta}_{3i} + c\theta_{8i} \\
&\quad (-c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{12i} + (-c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})) \\
&\quad s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))\dot{\theta}_{7i} + (c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i} \\
&\quad c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) - s\delta_{15i}s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i}\dot{\theta}_{8i} \\
\dot{L}_{8i} &= (-c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{8i}s\theta_{12i} + (-c\theta_{12i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} + s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
&\quad s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i} + c\delta_{15i}c\theta_{12i}(c\theta_{8i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
&\quad s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}))\dot{\theta}_{12i} + (-c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i} \\
&\quad c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) + s\delta_{15i}s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i}\dot{\theta}_{3i} + (c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
&\quad (c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) - s\delta_{15i}s\theta_{12i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \\
&\quad s\theta_{8i}\dot{\theta}_{7i} + (-c\theta_{8i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i}s\theta_{12i} + (c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) - c\delta_{15i} \\
&\quad c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) - (c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i} + c\delta_{15i} \\
&\quad s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s\theta_{8i})\dot{\theta}_{8i} \\
\dot{L}_{12i} &= (c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}s\delta_{15i}s\theta_{12i} + c\theta_{12i}(c\theta_{8i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + \\
&\quad c(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{8i}) + c\delta_{15i}s\theta_{12i}(-c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + \\
&\quad s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{8i}))\dot{\theta}_{12i} + c\theta_{8i}(c(\theta_{3i} - \theta_{7i})(c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i} + \\
&\quad s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) + c\theta_{12i}s\delta_{15i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))\dot{\theta}_{3i} + c\theta_{8i}(-c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
&\quad (c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i} + s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i}) - c\theta_{12i}s\delta_{15i} \\
&\quad s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))\dot{\theta}_{7i} + (c\theta_{8i}(-c\delta_{15i}c\theta_{12i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c(\delta_{1i} - \delta_{16i}) \\
&\quad s\theta_{12i}) + (c\theta_{12i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\delta_{15i} - (c\delta_{15i}c(\delta_{1i} - \delta_{16i})c\theta_{12i} + \\
&\quad s(\delta_{1i} - \delta_{16i})s\theta_{12i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))s\theta_{8i})\dot{\theta}_{8i}
\end{aligned}$$

En la fig.(2.30) se muestra la gráfica que describe el comportamiento de las velocidades angulares  $\ddot{\theta}_{10i}$  del robot delta paralelo, al recorrer la trayectoria descrita en el apéndice B en un tiempo de 30 seg. La línea negra corresponde a  $\ddot{\theta}_{101}$ , la línea punteada a  $\ddot{\theta}_{102}$  y la línea gris es para  $\ddot{\theta}_{103}$

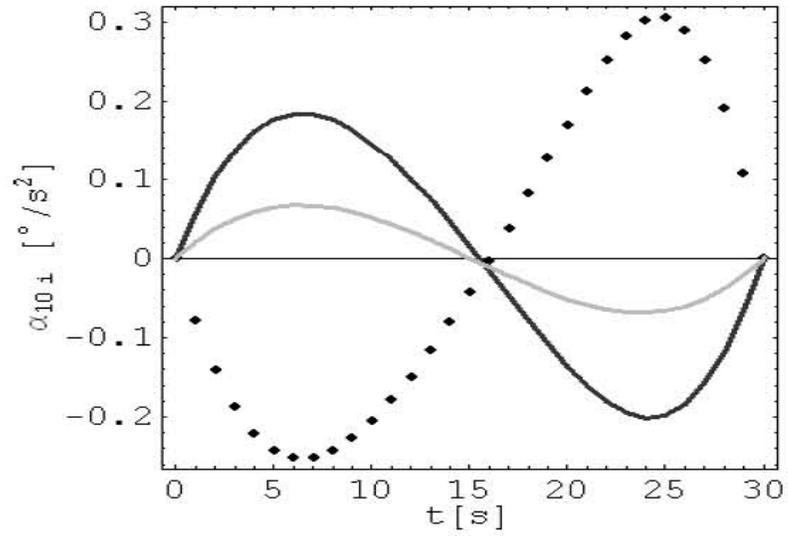


Fig. 2.30 Aceleración angular  $\ddot{\theta}_{10i}$

# Capítulo 3

## Análisis Dinámico Formulación Newton-Euler

### 3.1 Introducción

En este capítulo se presenta la formulación Newton-Euler para el análisis dinámico de manipuladores paralelos. La formulación de Newton-Euler incorpora todas las fuerzas actuando sobre los eslabones. Por lo tanto las ecuaciones dinámicas resultantes incluyen todas las fuerzas de restricción entre dos eslabones adyacentes. Estas fuerzas de restricción son útiles para el dimensionamiento de eslabones y rodamientos durante la etapa de diseño.

El método consiste en el cálculo adelantado de las velocidades y aceleraciones de cada eslabón, seguido por el cálculo reiterativo de las fuerzas y momentos de cada junta. Para el desarrollo de este análisis se emplean matrices de rotación básicas que nos permiten representar la rotación de un cuerpo en el espacio. Ya que la rotación es un giro en el espacio de tres grados de libertad, un conjunto de tres parámetros independientes son suficientes para describir la orientación de un cuerpo en el espacio [1].

Las siguientes matrices de rotación, nos representan rotación alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente:

$$\mathbf{R}_{z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

También se definen las siguientes matrices diferenciales [12]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_{z4}(\theta_x) &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_x) \mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_x) & \ddot{\mathbf{T}}_{z4}(\theta_x) &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_x) \left( \mathbf{D}_{z4}(\ddot{\theta}_x) + \mathbf{D}_{z4}^2(\dot{\theta}_x) \right) \\ \dot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta_y) &= \mathbf{T}_{z5}(\theta_y) \mathbf{D}_{z5}(\dot{\theta}_y) & \ddot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta_y) &= \mathbf{T}_{z5}(\theta_y) \left( \mathbf{D}_{z5}(\ddot{\theta}_y) + \mathbf{D}_{z5}^2(\dot{\theta}_y) \right) \\ \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_z) &= \mathbf{T}_{z6}(\theta_z) \mathbf{D}_{z6}(\dot{\theta}_z) & \ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_z) &= \mathbf{T}_{z6}(\theta_z) \left( \mathbf{D}_{z6}(\ddot{\theta}_z) + \mathbf{D}_{z6}^2(\dot{\theta}_z) \right) \end{aligned}$$

donde:

$$\mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta}_x & 0 \\ 0 & \dot{\theta}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{z5}(\dot{\theta}_y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{z6}(\dot{\theta}_z) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_z & 0 & 0 \\ \dot{\theta}_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y las matrices antisimétricas:

$$\mathbf{S}_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El problema general en el análisis dinámico, es la determinación de los efectos de las fuerzas externas, que aseguran el movimiento requerido para ciertos cuerpos, la determinación del movimiento de los cuerpos restantes y finalmente el cálculo de las reacciones en todos los pares cinemáticos.

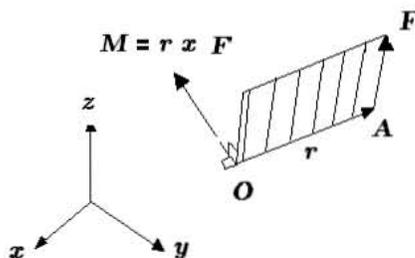


Fig. 3.1 Momento de una fuerza

Una fuerza actuando sobre un cuerpo rígido tiene la misma característica que un vector sujeto a una línea. Este es un vector de línea cuyos efectos pueden ser expresados en cualquier punto, substituyéndolo por un vector fuerza  $\mathbf{F}$ , y un vector acoplado  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{r}$  es el vector radio y determina la posición del punto actual A de la fuerza sobre la línea de acción con respecto al punto escogido O (fig. 3.0). Se expresarán los efectos de esta sustitución de acuerdo a la siguiente definición [12]:

$$\mathbf{F}_0 = [\mathbf{F}, \mathbf{M}] = [F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z]$$

Para ensamblar las ecuaciones básicas usamos el método de diagramas de cuerpo libre. Existen fuerzas de tres tipos actuando en el cuerpo libre  $j$ : fuerzas activas (aplicadas), reacción e inercia. Se denotarán estas fuerzas con el símbolo  $\mathbf{F}$  con un superíndice  $A, R, I$  respectivamente. Los efectos de todas estas fuerzas deben estar en balance, de acuerdo al principio de d'Alambert. Para poder comparar estas fuerzas, estas deben estar expresadas en el mismo sistemas de referencia de coordenadas. Esto puede ser en un marco de referencia fijo. Sin embargo las ecuaciones también pueden ser definidas en un sistema de referencia local. Tomemos el siguiente sistema de cuerpos para ejemplificar estas definiciones, fig. (3.2).

## Formulación Vectorial

Tomemos los siguientes cuerpos:

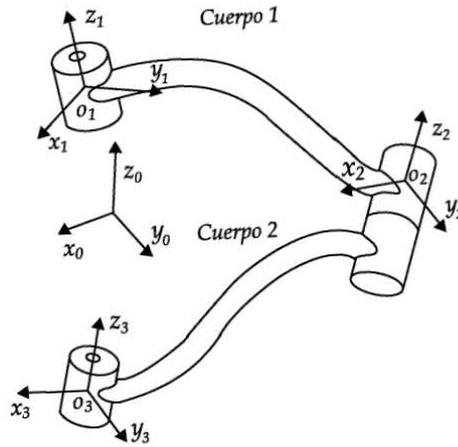


Fig. 3.2 Sistemas de dos cuerpos

Podemos separar los cuerpos y hacer el diagrama de cuerpo libre, montando sistemas de referencia en los ejes de revolución como se muestra en la fig.(3.3).

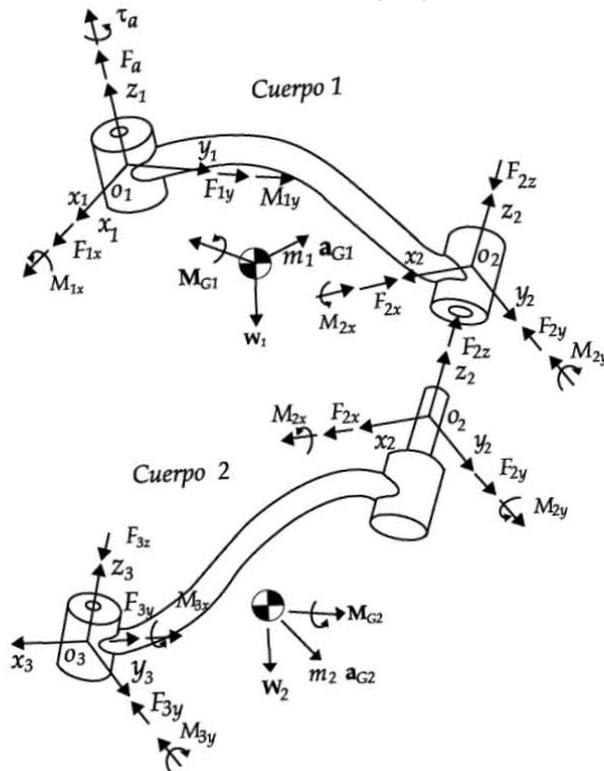


Fig. 3.3 Fuerzas y momentos ejercidos en los eslabones

Las ecs. de equilibrio dinámico se definen como:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= m \mathbf{a}_G \\ \sum \mathbf{M} &= \mathbf{M}_G + \mathbf{r} \times m \mathbf{a}_G\end{aligned}$$

donde  $m \mathbf{a}_G$  y  $\mathbf{M}_G$  son las fuerzas y momentos inerciales respectivamente definidos en la base inercial  $(\mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0)$ . Aplicando las ecs. de equilibrio dinámico al cuerpo 1 y definiéndolas en la base local  $(\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1)$ , se tiene (fig. 3.4):

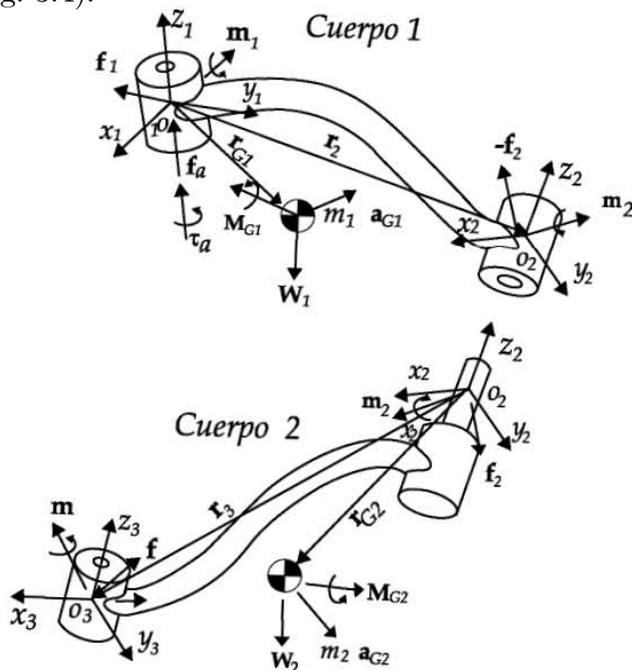


Fig. 3.4 Fuerzas y Momentos definidos en la base local  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_{1,0} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0}(m_1 \mathbf{a}_{G1}) \\ \mathbf{t}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{r}_{G1} \times \mathbf{R}_{1,0} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0} \mathbf{M}_{G1} + \mathbf{r}_{G1} \times \mathbf{R}_{1,0}(m_1 \mathbf{a}_{G1})\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_a &= [0, 0, f_a]^T \\
\mathbf{f}_1 &= [f_{1x}, f_{1y}, 0]^T \\
\mathbf{f}_2 &= [f_{2x}, f_{2y}, f_{2z}]^T \\
\mathbf{w}_1 &= [0, 0, -m_1g]^T \\
\mathbf{a}_{G1} &= [a_{G1x}, a_{G1y}, a_{G1z}]^T \\
\mathbf{t}_a &= [0, 0, t_a]^T \\
\mathbf{m}_1 &= [M_{1x}, M_{1y}, 0]^T \\
\mathbf{m}_2 &= [M_{2y}, M_{2z}, 0]^T \\
\mathbf{M}_{G1} &= [M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z}]^T
\end{aligned}$$

Los vectores  $\mathbf{f}_a$ ,  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{t}_a$ ,  $\mathbf{m}_1$  están definidos en la base  $(\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1)$ . Los vectores  $\mathbf{f}_2$ ,  $\mathbf{m}_2$  están definidos en la base  $(\mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 \mathbf{z}_2)$ . Los vectores  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{a}_{G1}$ ,  $\mathbf{M}_{G1}$  están definidos en la base  $(\mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0)$ .

Por otro lados tenemos que  $\mathbf{R}_{1,0}$  y  $\mathbf{R}_{1,2}$  son matrices de transformación, que transforman vectores de la base  $(\mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0)$  a la base  $(\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1)$  y de la base  $(\mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 \mathbf{z}_2)$  a la base  $(\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1)$  respectivamente. Los vectores que no son transformados, ya están definidos en la base  $(\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1)$ . Empleando matrices antisimétricas para definir el producto cruz, esto es  $\mathbf{S} = \mathbf{r} \times$ , las ecs. anteriores se reescriben como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_{1,0} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0}(m_1 \mathbf{a}_{G1}) \\
\mathbf{t}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{S}_2 \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{S}_{G1} \mathbf{R}_{1,0} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_{1,0} \mathbf{M}_{G1} + \mathbf{S}_{G1} \mathbf{R}_{1,0}(m_1 \mathbf{a}_{G1})
\end{aligned}$$

## Formulación Matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{t}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2 \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{R}_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{a}_{G1} \\ \mathbf{M}_{G1} \end{bmatrix}$$

Renombrando:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_{1,2} \mathbf{F}_2 + \mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{W}_1 = \mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{F}_{G1}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_a &= [\mathbf{f}_a, \mathbf{t}_a]^T = [0, 0, F_a, 0, 0, t_a]^T \\
\mathbf{F}_1 &= [\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1]^T = [F_{1x}, F_{1y}, 0, M_{1x}, M_{1y}, 0]^T \\
\mathbf{F}_2 &= [\mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2]^T = [F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, M_{2x}, M_{2y}, 0]^T \\
\mathbf{W}_1 &= [\mathbf{w}_1, \mathbf{0}]^T = [0, 0, -m_{G1} g, 0, 0, 0]^T \\
\mathbf{F}_{G1} &= [m_1 \mathbf{a}_{G1}, \mathbf{M}_{G1}]^T = [a_{G1x}, a_{G1y}, a_{G1z}, M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z}]^T \\
\mathbf{Q}_{1,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{1,2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2 \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{R}_{1,2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Agrupando en fuerzas aplicadas, restrictivas e inerciales se tiene:

$$\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^R + \mathbf{F}^I = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^A &= \mathbf{F}_a + \mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{W}_1 \\
\mathbf{F}^R &= \mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_{1,2} \mathbf{F}_2 \\
\mathbf{F}^I &= \mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{F}_{G1}
\end{aligned}$$

estas ecuaciones se definen como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^A &= \text{Torsor de fuerzas y momentos aplicados al cuerpo} \\
\mathbf{F}^R &= \text{Torsor de fuerzas y momentos de reacción del cuerpo} \\
\mathbf{F}^I &= \text{Torsor de fuerzas y momentos inerciales} \\
\mathbf{Q} &= \text{Matriz de transformaci\'on de torsesores.}
\end{aligned}$$

Para un análisis estático se tiene que:

$$\mathbf{F}^I = \mathbf{0}$$

La ec. (3,1) representa las ecs. de equilibrio dinámico mediante el uso de torsesores de fuerzas. Un torsor de fuerza es un vector de 6 componentes, los primeros tres componentes son fuerzas asociadas a la traslación del cuerpo y los segundos tres componentes son torques o momentos asociados al giro del cuerpo. Una expresión similar puede ser obtenida para el cuerpo 2.

## 3.2 Dinámica del Robot Delta Paralelo

Para el análisis del robot delta se toman los siguientes cuerpos:

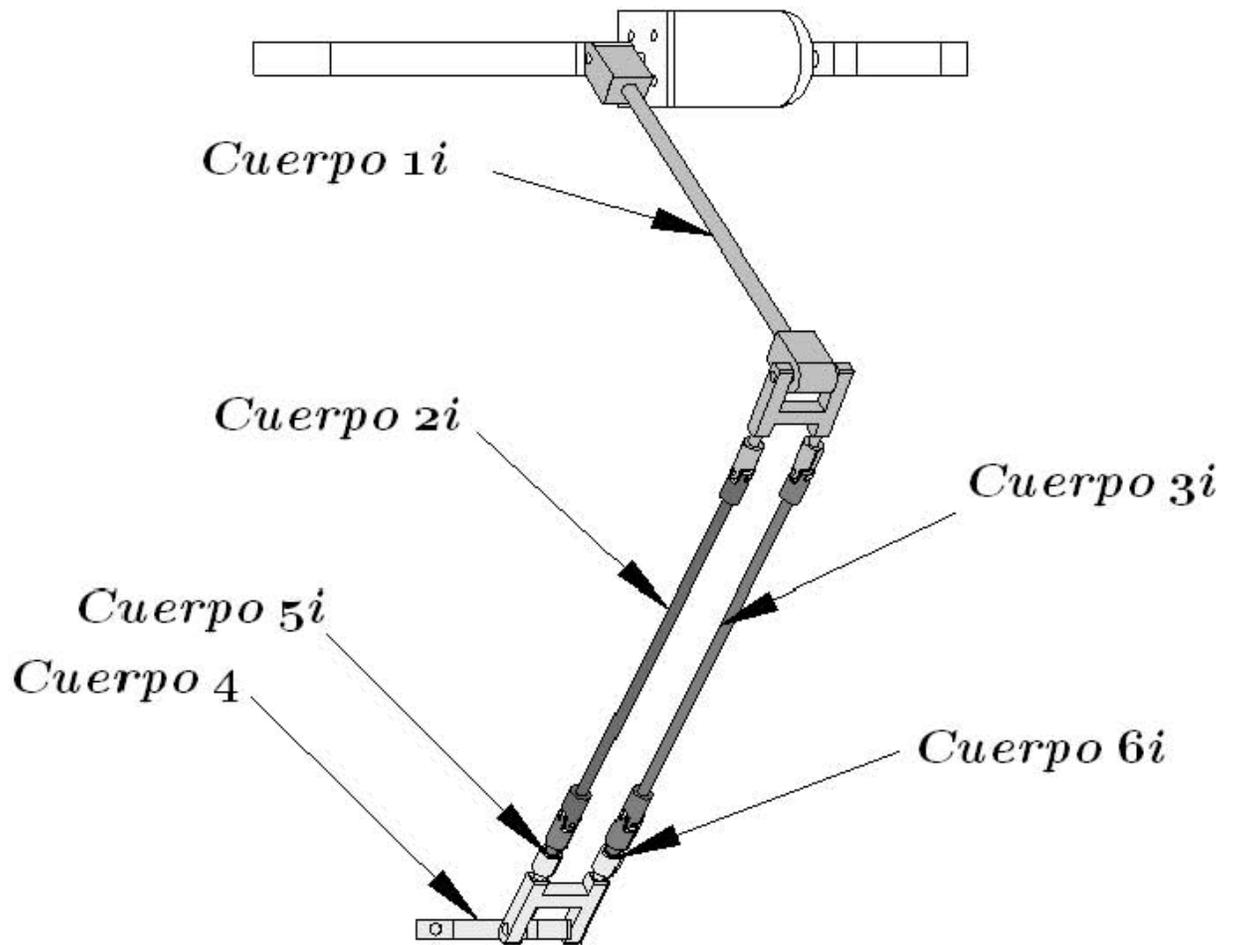


Fig. 3.5 Cuerpos de la cadena i

### 3.2.1 Análisis del Cuerpo 1i

La fig.(3.6) muestra el diagrama de cuerpo libre del cuerpo 1i:

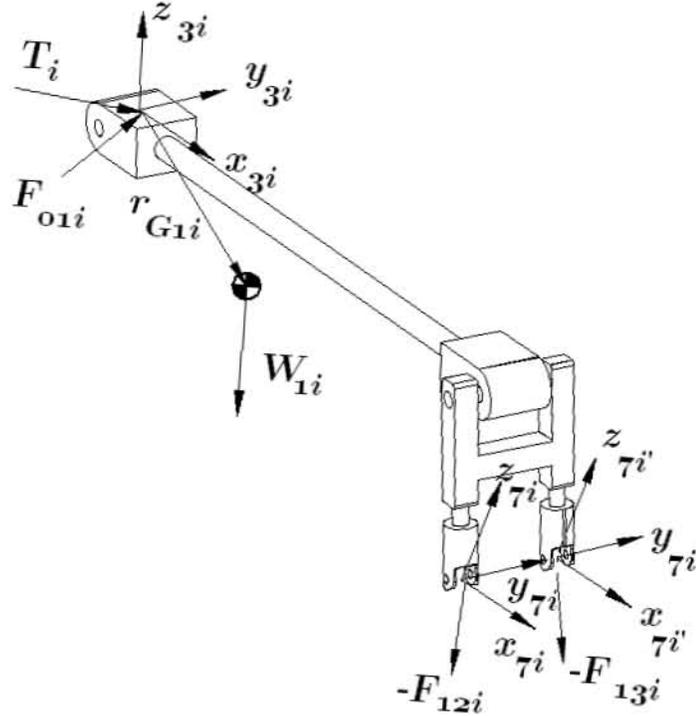


Fig. 3.6 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 1i

Tomando la suma de las fuerzas que actúan en el cuerpo anterior, tenemos la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{3i,1i}^A + \mathbf{F}_{3i,1i}^R + \mathbf{F}_{3i,1i}^I = 0 \quad (3.1a)$$

donde:

$\mathbf{F}_{ij}$  –  $i$  base en la cual se miden las fuerzas  
 $j$  número del cuerpo

$$\mathbf{F}_{3i,1i}^A = \mathbf{T}_i + \mathbf{Q}_{3i,0} \mathbf{W}_{1i} \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{F}_{3i,1i}^R = \mathbf{F}_{01i} - \mathbf{Q}_{3i,7i} \mathbf{F}_{12i} - \mathbf{Q}_{3i,7i} \mathbf{F}_{13i} \quad (3.1c)$$

$$\mathbf{F}_{3i,1i}^I = [\mathbf{F}_{1i}^I, \mathbf{M}_{1i}^I]^T \quad (3.1d)$$

definiendo:

$$\mathbf{F}_{1i}^I = -m_{1i} \mathbf{a}_{G1i} \quad (3.1e)$$

$$\mathbf{M}_{1i}^I = -(\mathbf{I}_{G1i} \boldsymbol{\alpha}_{3i,0}^1 + \boldsymbol{\Omega}_{3i,0}^1 (\mathbf{I}_{G1i} \boldsymbol{\omega}_{3i,0}^1) + \mathbf{S}_{G1i} (m_{1i} \mathbf{a}_{G1i})) \quad (3.1f)$$

La matriz  $\mathbf{I}_{G1i}$  es la matriz de inercias medida en el centro de gravedad del cuerpo 1i y se define como:

$$\mathbf{I}_{G1i} = \begin{bmatrix} I_{1ixx} & -I_{1ixy} & -I_{1ixz} \\ -I_{1iyx} & I_{1iyy} & -I_{1iyz} \\ -I_{1izx} & -I_{1izy} & I_{1izz} \end{bmatrix}$$

El vector que representa al brazo de palanca del sistema local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  al centro de gravedad del cuerpo 1i, esta siendo expresado en términos de la matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{G1i}$ , cuyos términos son el vector de centro de gravedad  $\mathbf{r}_{G1i}$  medido desde el sistema  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$ .

$$\mathbf{S}_{G1i} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G1i} & y_{G1i} \\ z_{G1i} & 0 & -x_{G1i} \\ -y_{G1i} & x_{G1i} & 0 \end{bmatrix}$$

además:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i &= [0, 0, 0, 0, T_i, 0]^T \\ \mathbf{W}_{1i} &= [0, 0, -m_{1i} g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{01i} &= [F_{01xi}, F_{01yi}, F_{01zi}, M_{01xi}, 0, M_{01zi}]^T \\ \mathbf{F}_{12i} &= [F_{12xi}, F_{12yi}, F_{12zi}, 0, 0, M_{12zi}]^T \\ \mathbf{F}_{13i} &= [F_{13xi}, F_{13yi}, F_{13zi}, 0, 0, M_{13zi}]^T \end{aligned} \quad (3.1g)$$

Definiendo nuevamente:

$$\mathbf{Q}_{i,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i,j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{i,j} \mathbf{R}_{i,j} & \mathbf{R}_{i,j} \end{bmatrix}$$

entonces para  $\mathbf{Q}_{3i,0}$ :

$$\mathbf{Q}_{3i,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3i,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{3i,0} \mathbf{R}_{3i,0} & \mathbf{R}_{3i,0} \end{bmatrix} \quad (3.1h)$$

Tomando las matrices de rotación antes definidas se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \\ \mathbf{R}_{3i,0} &= (\mathbf{R}_{0,3i})^T \\ &= \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})^T \\ &= \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i}) \end{aligned}$$

El vector  $\mathbf{r}_{G1i}$  es representado mediante la siguiente matriz antisimétrica:

$$\mathbf{S}_{3i,0} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G1i} & y_{G1i} \\ z_{G1i} & 0 & -x_{G1i} \\ -y_{G1i} & x_{G1i} & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz  $\mathbf{S}_{3i,0}$  esta expresada en la base local  $3i$ .

Considerando el extremo derecho del brazo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{3i,7i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3i,7i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{3i,7i} & \mathbf{R}_{3i,7i} & \mathbf{R}_{3i,7i} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{3i,7i} &= \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \\ \mathbf{S}_{3i,7i} &= \mathbf{S}_{z1}(d_{4i}) + \mathbf{S}_{z2}(-d_{5i}) + \mathbf{S}_{z3}(-d_{6i}) \end{aligned} \quad (3.1i)$$

Considerando el extremo izquierdo del brazo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{3i,7i'} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3i,7i'} & 0 \\ \mathbf{S}_{3i,7i'} & \mathbf{R}_{3i,7i'} & \mathbf{R}_{3i,7i'} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{3i,7i'} &= \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \\ \mathbf{S}_{3i,7i'} &= \mathbf{S}_{z1}(d_{4i}) + \mathbf{S}_{z2}(d_{5i}) + \mathbf{S}_{z3}(-d_{6i}) \end{aligned} \quad (3.1j)$$

## Velocidad Angular del Cuerpo 1i

En esta sección se define la velocidad y aceleración angular de manera matricial y posteriormente de manera vectorial. Lo anterior permitirá ir comprobando estos conceptos utilizados en las ecs. dinámicas del cuerpo 1i. De esta manera, la velocidad angular del cuerpo 1i, asociada a la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  unida al cuerpo 1i y definida en el sistema inercial  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ , es representada por la matriz  $\Omega_{0,3i}^1$ .

Para calcular  $\Omega_{3i,0}^1$  primeramente debemos obtener  $\Omega_{0,3i}^1$  la cual se define como:

$$\begin{aligned} \Omega_{0,3i}^1 &= \dot{\mathbf{R}}_{0,3i} \mathbf{R}_{0,3i}^T \\ \mathbf{R}_{0,3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \\ \dot{\mathbf{R}}_{0,3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \dot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i}) \\ \Omega_{0,3i}^1 &= \left( \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \dot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i}) \right) \mathbf{R}_{z5}^T(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})^T \\ &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \Omega_{3i} \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})^T \end{aligned} \quad (3.2a)$$

donde:

$$\Omega_{3i} = \dot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}^T(\theta_{3i})$$

Recordar que a partir de la ec. (3. 1a) todos los elementos deben estar definidos en la base local  $3i$ , de esta manera, transformando a la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\Omega_{3i,0}^1 &= \mathbf{R}_{0,3i}^T \Omega_{0,3i}^1 \mathbf{R}_{0,3i} \\ &= \mathbf{R}_{z5}^T(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \Omega_{3i} \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \\ &= \mathbf{R}_{z5}^T(\theta_{3i}) \Omega_{3i} \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\end{aligned}\quad (3.2b)$$

$$\Omega_{3i,0}^1 = \Omega_{3i} \quad (3.3a)$$

$$\Omega_{3i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_{3i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_{3i} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Aceleración Angular del Cuerpo $1i$

De ec. (3. 2a) podemos obtener la aceleración derivando respecto al tiempo:

$$\dot{\Omega}_{0,3i}^1 = \ddot{\mathbf{R}}_{0,3i} \mathbf{R}_{0,3i}^T + \dot{\mathbf{R}}_{0,3i} \dot{\mathbf{R}}_{0,3i}^T \quad (3.4a)$$

de ec. (3. 2a) despejando  $\dot{\mathbf{R}}_{0,3i}$  se tiene:

$$\dot{\mathbf{R}}_{0,3i} = \Omega_{0,3i}^1 \mathbf{R}_{0,3i} \quad (3.4b)$$

aplicando la transpuesta a la ecuación anterior:

$$\dot{\mathbf{R}}_{0,3i}^T = \mathbf{R}_{0,3i}^T (\Omega_{0,3i}^1)^T \quad (3.4c)$$

sustituyendo ecs. (3. 43b) y (3. 4c) en (3. 4a):

$$\dot{\Omega}_{0,3i}^1 = \ddot{\mathbf{R}}_{0,3i} \mathbf{R}_{0,3i}^T + \Omega_{0,3i}^1 \mathbf{R}_{0,3i} \left( \mathbf{R}_{0,3i}^T (\Omega_{0,3i}^1)^T \right)$$

de manera general se tiene:

$$\Omega^T = -\Omega$$

Simplificando:

$$\dot{\Omega}_{0,3i}^1 = \ddot{\mathbf{R}}_{0,3i} \mathbf{R}_{0,3i}^T - (\Omega_{0,3i}^1)^2 \quad (3.4d)$$

Llevando esta expresión a la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  :

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_{3i,0}^1 &= \mathbf{R}_{0,3i}^T \dot{\Omega}_{0,3i}^1 \mathbf{R}_{0,3i} \\ \dot{\Omega}_{3i,0}^1 &= \mathbf{R}_{0,3i}^T \ddot{\mathbf{R}}_{0,3i} - \mathbf{R}_{0,3i}^T (\Omega_{0,3i}^1)^2 \mathbf{R}_{0,3i}\end{aligned}\quad (3.4e)$$

## Aceleración del Centro de Gravedad del Cuerpo 1i

### Representación Matricial

Utilizando la representación matricial homogénea y definiendo el vector inercialmente, como se muestra en la fig.(3.7):

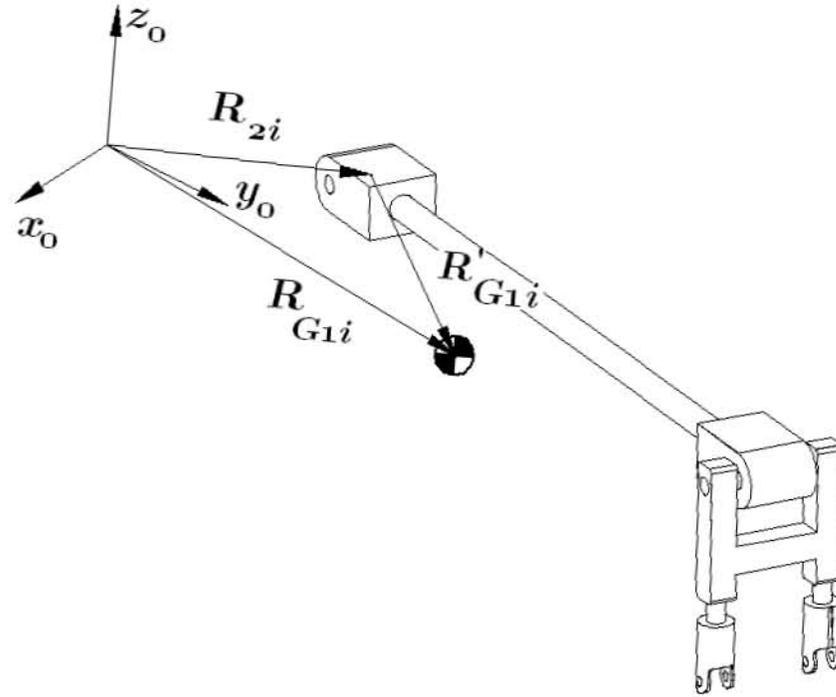


Fig.3.7 Centro de gravedad del cuerpo 1i

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{G1i} &= \mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}'_{G1i} \\ &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{r}_{G1i} \\ &= \mathbf{T}_{02}\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{r}_{G1i} \end{aligned}$$

Derivando respecto al tiempo para obtener la velocidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{G1i} &= \left( \dot{\mathbf{T}}_{02}\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i}) + \mathbf{T}_{02}\dot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta_{3i}) \right) \mathbf{r}_{G1i} + \mathbf{T}_{02}\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i}) \dot{\mathbf{r}}_{G1i} \\ &= \mathbf{T}_{02}\dot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{G1i} \\ \mathbf{V}_{G1i} &= \mathbf{T}_{02}\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{D}_{z5}(\dot{\theta}_{3i})\mathbf{r}_{G1i} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{02} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i}) \\ \dot{\mathbf{T}}_{02} &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta_{3i}) &= \mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{D}_{z5}(\dot{\theta}_{3i})\end{aligned}$$

Además el vector de centro de gravedad  $\mathbf{r}_{G1i}$  medido localmente en la base  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  y su derivada es:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{G1i} &= [x_{G1i}, y_{G1i}, z_{G1i}, 1]^T \\ \dot{\mathbf{r}}_{G1i} &= [0, 0, 0, 0]^T\end{aligned}$$

Derivando  $\mathbf{V}_{G1i}$  respecto al tiempo nuevamente para obtener la aceleración:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{G1i} &= \mathbf{T}_{02}\ddot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{G1i} \\ &= \mathbf{T}_{02}\mathbf{T}_{z5}(\theta_{3i})(\mathbf{D}_{z5}(\ddot{\theta}_{3i}) + \mathbf{D}_{z5}^2(\dot{\theta}_{3i}))\mathbf{r}_{G1i}\end{aligned}$$

donde:

$$\ddot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta_{3i}) = \mathbf{D}_{z5}(\ddot{\theta}_{3i}) + \mathbf{D}_{z5}^2(\dot{\theta}_{3i})$$

Transformando a la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{G1i} &= \mathbf{T}_{3i,0}\mathbf{A}_{G1i} \\ \mathbf{T}_{3i,0} &= \mathbf{T}_{z5}(-\theta_{3i})\mathbf{T}_{z1}(-d_{2i})\mathbf{T}_{z6}(-\delta_{1i})\end{aligned}$$

$\mathbf{T}_{3i,0}$  proyecta de la base inercial  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  a la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$ .

## Representación Vectorial

Utilizando la representación vectorial y matrices de 3x3 para definir los siguientes vectores inercialmente como se muestra en la fig. (3.7), se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{G1i} &= \mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}'_{G1i} \\ \mathbf{R}_{2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{r}_{2i} \\ \mathbf{R}'_{G1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}'_{G1i} \\ &= \mathbf{R}_{0,3i}\mathbf{r}'_{G1i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_{G1i} &= [x_{G1i}, y_{G1i}, z_{G1i}]^T \\ \mathbf{r}_{2i} &= [d_{2i}, 0, 0]^T\end{aligned}$$

Derivando respecto al tiempo se obtiene la velocidad del centro de gravedad:

$$\mathbf{V}_{G1i} = \mathbf{V}_{2i} + \mathbf{V}'_{G1i} \quad (3.5a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{2i} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{V}'_{G1i} &= \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}'_{G1i} \end{aligned}$$

donde el vector de velocidad angular inercial  $\boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1$  para el cuerpo  $1i$  se define como:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 = \mathbf{R}_{0,3i} \boldsymbol{\omega}_{3i} \quad (3.5b)$$

Y el vector de velocidad angular local en la base  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  para el cuerpo  $1i$ , se define como:

$$\boldsymbol{\omega}_{3i} = [0, \dot{\theta}_{3i}, 0]^T$$

La aceleración del centro de gravedad se obtiene al derivar respecto al tiempo la ec. (3. 5a):

$$\mathbf{A}_{G1i} = \boldsymbol{\alpha}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}_{G1i} + \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times (\boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}'_{G1i}) \quad (3.5c)$$

donde el vector de aceleración angular inercial  $\boldsymbol{\alpha}_{0,3i}^1$  para el cuerpo  $1i$ . se define como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{0,3i}^1 &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,3i}^1 + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,3i}^1 + \mathbf{0} \times \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,3i}^1 \\ \boldsymbol{\alpha}_{0,3i}^1 &= \mathbf{R}_{0,3i} \boldsymbol{\alpha}_{3i} \end{aligned} \quad (3.5d)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}_{3i}$  está definida en la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  y  $\boldsymbol{\omega}_0^1$  la velocidad de la base definidas respectivamente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{3i} &= [0, \ddot{\theta}_{3i}, 0]^T \\ \boldsymbol{\omega}_0^1 &= [0, 0, 0]^T \end{aligned}$$

Por lo tanto la aceleración del centro de gravedad es:

$$\mathbf{A}_{G1i} = \mathbf{R}_{0,3i} \boldsymbol{\alpha}_{3i} \times \mathbf{R}'_{G1i} + (\mathbf{R}_{0,3i} \boldsymbol{\omega}_{3i}) \times \left( (\mathbf{R}_{0,3i} \boldsymbol{\omega}_{3i}) \times \mathbf{R}'_{G1i} \right) \quad (3.5e)$$

Obteniendo la aceleración local en la base  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{G1i} &= \mathbf{R}_{0,3i}^T \mathbf{A}_{G1i} \\ \mathbf{a}_{G1i} &= \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i}) \mathbf{A}_{G1i} \end{aligned} \quad (3.5f)$$

### 3.2.2 Análisis del Cuerpo 2i

La fig.(3.8) muestra el diagrama de cuerpo libre del cuerpo 2i:

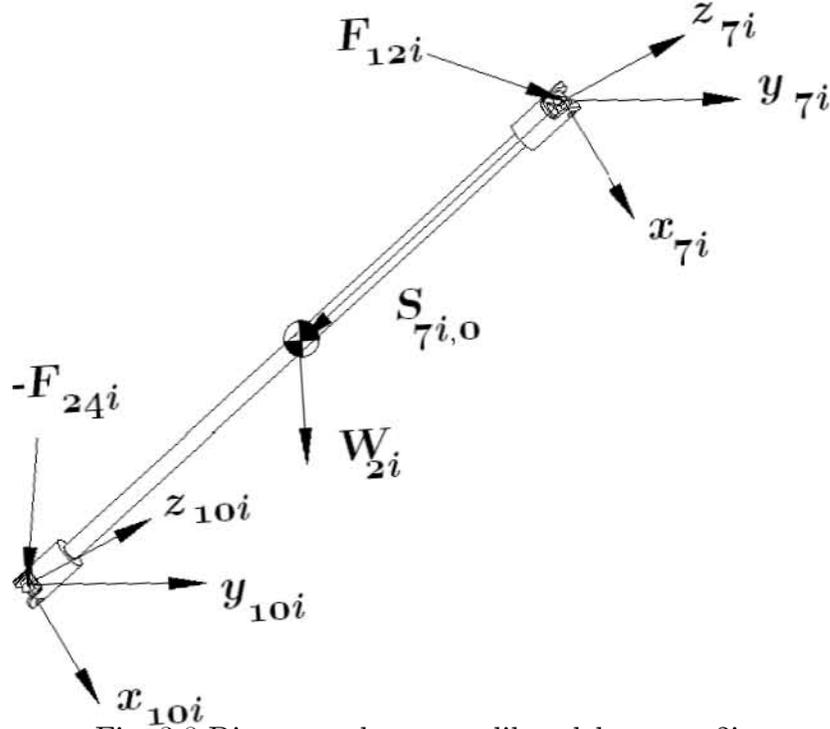


Fig. 3.8 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 2i

Del diagrama de cuerpo libre mostrado se desarrolla la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{7i,2i}^A + \mathbf{F}_{7i,2i}^R + \mathbf{F}_{7i,2i}^I = \mathbf{0} \quad (3.6a)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{7i,2i}^A = \mathbf{Q}_{7i,0} \mathbf{W}_{2i} \quad (3.6b)$$

$$\mathbf{F}_{7i,2i}^R = \mathbf{F}_{12i} - \mathbf{Q}_{7i,10i} \mathbf{F}_{24i} \quad (3.6c)$$

$$\mathbf{F}_{7i,2i}^I = [\mathbf{F}_{2i}^I, \mathbf{M}_{2i}^I]^T \quad (3.6d)$$

definiendo:

$$\mathbf{F}_{2i}^I = -m_{2i} \mathbf{a}_{G2i} \quad (3.6e)$$

$$\mathbf{M}_{2i}^I = -(\mathbf{I}_{G2i} \alpha_{7i,0}^2 + \Omega_{7i,0}^2 (\mathbf{I}_{G2i} \omega_{7i,0}^2) + \mathbf{S}_{G2i} (m_{2i} \mathbf{a}_{G2i})) \quad (3.6f)$$

La matriz  $\mathbf{I}_{G2i}$ , es la matriz de inercias, medida en el centro de gravedad del cuerpo 2i y se define como:

$$\mathbf{I}_{G2i} = \begin{bmatrix} I_{2ixx} & -I_{2ixy} & -I_{2ixz} \\ -I_{2iyx} & I_{2iyy} & -I_{2iyz} \\ -I_{2izx} & -I_{2izy} & I_{2izz} \end{bmatrix}$$

Ádemas:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{2i} &= [0, 0, -m_{2i} g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{24i} &= [F_{24xi}, F_{24yi}, F_{24zi}, 0, 0, M_{24zi}]^T \end{aligned} \quad (3.6g)$$

Las expresiones anteriores son medidas en la base local  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$ , que está unida a la cruzeta de la junta universal. Debido a que el vector de peso del cuerpo está definido en la base  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  es necesario llevarlo a la base de interés  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$  de acuerdo a la ec.(3. 6b) con la siguiente matriz homogénea:

$$\mathbf{Q}_{7i,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{7i,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{7i,0} & \mathbf{R}_{7i,0} \end{bmatrix} \quad (3.6h)$$

La matriz  $\mathbf{R}_{7i,0}$  debe obtenerse de la matriz  $\mathbf{R}_{0,7i}$ , es decir primeramente haciendo una formulación en la base inercial y luego transformándola a la base local como se muestra a continuación:

$$\mathbf{R}_{0,7i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})$$

Ahora llevándola a la base local  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{7i,0} &= \mathbf{R}_{0,7}^T \\ &= \mathbf{R}_{z5}^T(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z5}^T(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z6}^T(\delta_{1i}) \\ \mathbf{R}_{7i,0} &= \mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i})\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i}) \end{aligned}$$

Obteniendo la matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{0,7i}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{0,7i} &= \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{S}_{G2i}\mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \\ \mathbf{S}_{G2i} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G2i} & y_{G2i} \\ z_{G2i} & 0 & -x_{G2i} \\ -y_{G2i} & x_{G2i} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{G2i}$  representa al vector de posición  $\mathbf{r}_{G2i}$  del centro de gravedad del cuerpo 2i medida desde el origen de la base  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$ , pero está originalmente definida en la base  $(\mathbf{x}_{8i}, \mathbf{y}_{8i}, \mathbf{z}_{8i})$  pegada al cuerpo 2i y se transforma a la base  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$  como se muestra.

La matriz de transformación  $\mathbf{Q}_{7i,10i}$  tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{7i,10i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{7i,10i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{7i,10i} & \mathbf{R}_{7i,10i} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{7i,10i} &= \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{R}_{z4}(\theta_{10i}) = \mathbf{R}(\theta_{10i} - \theta_{8i}) \\ \mathbf{S}_{7i,10i} &= \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{S}_{z3}(-d_{9i})\mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \end{aligned} \quad (3.6i)$$

## Velocidad Angular del Cuerpo 2i

### Representación Matricial

La velocidad angular del cuerpo 2i, asociada a la base local  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$  unida al cuerpo 2i y definida en el sistema inercial  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ , es representada por la matriz  $\Omega_{0,7i}^2$ :

$$\Omega_{0,7i}^2 = \dot{\mathbf{R}}_{0,8i} \mathbf{R}_{0,8i}^T \quad (3.7a)$$

donde la matriz  $\mathbf{R}_{0,8i}$  y su derivada con respecto al tiempo se definen como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,8i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \\ \dot{\mathbf{R}}_{0,8i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \\ &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\dot{\mathbf{R}}_{z5}(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \\ &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\dot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i}) \end{aligned}$$

Obteniendo la matriz transpuesta de  $\mathbf{R}_{0,8i}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,8i}^T &= \mathbf{R}_{8i,0} = \mathbf{R}_{z4}^T(-\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}^T(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z5}^T(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z6}^T(\delta_{1i}) \\ &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i})\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i}) \end{aligned}$$

Definiendo la matriz inercial  $\Omega_{0,7i}^2$  a la base local  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$ :

$$\Omega_{7i,0}^2 = \mathbf{R}_{7i,0} \Omega_{0,7i}^2 \mathbf{R}_{7i,0}^T \quad (3.7b)$$

### Representación Vectorial

Obteniendo la velocidad angular de manera vectorial en el marco de referencia inercial:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,7i}^2 = \boldsymbol{\omega}_{0,3i} + \boldsymbol{\omega}_{0,7i} + \boldsymbol{\omega}_{0,8i} \quad (3.8a)$$

donde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{0,3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\boldsymbol{\omega}_{3i} \\ \boldsymbol{\omega}_{0,7i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\boldsymbol{\omega}_{7i} \\ \boldsymbol{\omega}_{0,8i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\boldsymbol{\omega}_{8i} \end{aligned}$$

son las velocidades angulares proyectadas en el sistemas de referencia inercial. Utilizando las matrices de rotación podemos construir esta última expresión como sigue:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,7i}^2 = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\boldsymbol{\omega}_{3i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\boldsymbol{\omega}_{7i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\boldsymbol{\omega}_{8i} \quad (3.8b)$$

las velocidades angulares  $\boldsymbol{\omega}_{3i}, \boldsymbol{\omega}_{7i}, \boldsymbol{\omega}_{8i}$  son medidas localmente en los sistemas de referencia  $3i, 7i, 8i$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{3i} &= [0, \dot{\theta}_{3i}, 0]^T \\ \boldsymbol{\omega}_{7i} &= [0, -\dot{\theta}_{7i}, 0]^T \\ \boldsymbol{\omega}_{8i} &= [-\dot{\theta}_{8i}, 0, 0]^T\end{aligned}$$

Llevando la ec.(3. 8b), a la base local  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$ :

$$\boldsymbol{\omega}_{7i,0}^2 = \mathbf{R}_{7i,0} \boldsymbol{\omega}_{0,7i}^2 \quad (3.8c)$$

## Aceleración Angular del Cuerpo 2i

### Representación Matricial

Tomando la ec.(3. 7a) y derivándola respecto al tiempo, conseguimos obtener:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{0,7i}^2 = \ddot{\mathbf{R}}_{0,8i} \mathbf{R}_{0,8i}^T + \dot{\mathbf{R}}_{0,8i} \dot{\mathbf{R}}_{0,8i}^T \quad (3.9a)$$

transformándola al sistema de referencia local  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$ :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{7i,0}^2 = \mathbf{R}_{7i,0} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{0,7i}^2 \mathbf{R}_{7i,0}^T \quad (3.9b)$$

### Representación Vectorial

De ec. (3. 8a), derivando respecto al tiempo esta expresión:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,7i}^2 &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,3i} + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times \boldsymbol{\omega}_{0,3i} + \\ &\quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,7i} + (\boldsymbol{\omega}_0^1 + \boldsymbol{\omega}_{0,3i}) \times \boldsymbol{\omega}_{0,7i} + \\ &\quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,8i} + (\boldsymbol{\omega}_0^1 + \boldsymbol{\omega}_{0,3i} + \boldsymbol{\omega}_{0,7i}) \times \boldsymbol{\omega}_{0,8i}\end{aligned} \quad (3.9c)$$

donde:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\dot{\boldsymbol{\omega}}_{3i} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,7i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\dot{\boldsymbol{\omega}}_{7i} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,8i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\dot{\boldsymbol{\omega}}_{8i}\end{aligned}$$

están definidas inercialmente y  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{3i}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{7i}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{8i}$ , están definidas localmente, esto es:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{3i} &= [0, \ddot{\theta}_{3i}, 0]^T \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{7i} &= [0, -\ddot{\theta}_{7i}, 0]^T \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{8i} &= [-\ddot{\theta}_{8i}, 0, 0]^T\end{aligned}$$

Llevando ec. (3. 9c) al sistema de referencia local  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$ :

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{7i,0}^2 = \mathbf{R}_{7i,0} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,7i}^2 \quad (3.9d)$$

## Aceleración del Centro de Gravedad del Cuerpo 2i

### Representación Matricial

Utilizando la representación matricial homogénea y definiendo el vector inercialmente, como se muestra a continuación en la fig. (3.9):

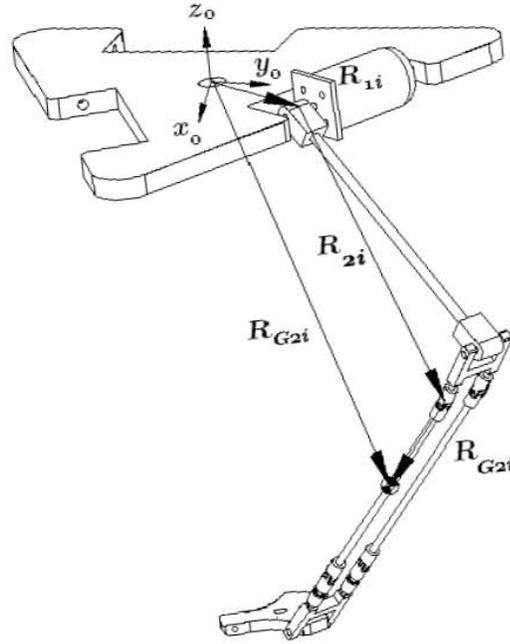


Fig. 3.9 Centro de gravedad del cuerpo 2i

### Representación Vectorial

Todos los vectores están medidos inercialmente.

$$\mathbf{R}_{G2i} = \mathbf{R}_{1i} + \mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}'_{G2i} \quad (3.10a)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{r}_{2i} \\ \mathbf{R}_{2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{1i} \\ \mathbf{R}'_{G2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{r}'_{G2i} \end{aligned}$$

los vectores locales son:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{1i} &= [d_{2i}, 0, 0]^T \\ \mathbf{r}_{2i} &= [d_{4i}, -d_{5i}, -d_{6i}]^T \\ \mathbf{r}'_{G2i} &= [0, 0, z_{G2i}]^T\end{aligned}$$

La velocidad se obtiene derivando respecto al tiempo la ec. (3. 10a) lo cual da como resultado:

$$\mathbf{V}_{G2i} = \mathbf{V}_{1i} + \mathbf{V}_{2i} + \mathbf{V}'_{G2i} \quad (3.10b)$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{1i} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_{2i} &= \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}_{2i} \\ \mathbf{V}'_{G2i} &= \boldsymbol{\omega}_{0,7i}^2 \times \mathbf{R}'_{G2i}\end{aligned}$$

sustituyendo estas últimas ecs. en (3. 10b):

$$\mathbf{V}_{G2i} = \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}_{2i} + \boldsymbol{\omega}_{0,7i}^2 \times \mathbf{R}'_{G2i} \quad (3.10c)$$

La aceleración del centro de gravedad se obtiene derivando respecto al tiempo la ec. (3. 10c):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{G2i} &= \boldsymbol{\alpha}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}_{2i} + \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times (\boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}_{2i}) + \\ &\boldsymbol{\alpha}_{0,7i}^2 \times \mathbf{R}'_{G2i} + \boldsymbol{\omega}_{0,7i}^2 \times (\boldsymbol{\omega}_{0,7i}^2 \times \mathbf{R}'_{G2i})\end{aligned} \quad (3.10d)$$

llevando ec. (3. 10d) a la base local  $(\mathbf{x}_{7i}, \mathbf{y}_{7i}, \mathbf{z}_{7i})$ :

$$\mathbf{a}_{G2i} = \mathbf{R}_{7i,0} \mathbf{A}_{G2i} \quad (3.10e)$$

### 3.2.3 Análisis del Cuerpo 3i

La fig (3.10) muestra el diagrama de cuerpo libre del cuerpo 3i:

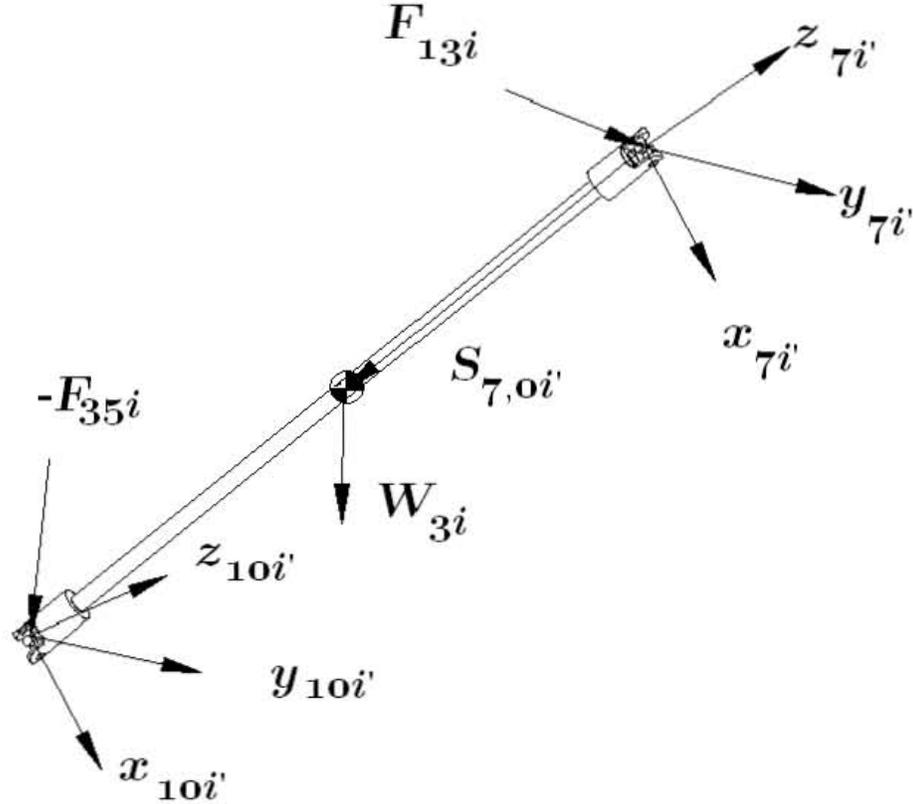


Fig. 3.10 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 3i.

Del diagrama de cuerpo libre mostrado se desarrolla la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{7i',3i}^A + \mathbf{F}_{7i',3i}^R + \mathbf{F}_{7i',3i}^I = \mathbf{0} \quad (3.11a)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{7i',3i}^A = \mathbf{Q}_{7i',0} \mathbf{W}_{3i} \quad (3.11b)$$

$$\mathbf{F}_{7i',3i}^R = \mathbf{F}_{13i} - \mathbf{Q}_{7i',10i} \mathbf{F}_{35i} \quad (3.11c)$$

$$\mathbf{F}_{7i',3i}^I = [\mathbf{F}_{3i}^I, \mathbf{M}_{3i}^I]^T \quad (3.11d)$$

definiendo:

$$\mathbf{F}_{3i}^I = -m_{3i} \mathbf{a}_{G3i} \quad (3.11e)$$

$$\mathbf{M}_{3i}^I = -(\mathbf{I}_{G3i} \alpha_{7i',0}^3 + \Omega_{7i',0}^3 (\mathbf{I}_{G3i} \omega_{7i',0}^3) + \mathbf{S}_{G3i} (m_{3i} \mathbf{a}_{G3i})) \quad (3.11f)$$

La matriz  $\mathbf{I}_{G3i}$ , es la matriz de inercia, medida en el centro de gravedad del cuerpo 3i y se define como:

$$\mathbf{I}_{G3i} = \begin{bmatrix} I_{3ixx} & -I_{3ixy} & -I_{3ixz} \\ -I_{3iyx} & I_{3iyy} & -I_{3iyz} \\ -I_{3izx} & -I_{3izy} & I_{3izz} \end{bmatrix}$$

Además:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{3i} &= [0 \ 0 \ -m_{3i} g \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{F}_{35i} &= [F_{35xi}, \ F_{35yi}, \ F_{35zi}, \ 0, \ 0, \ M_{35zi}]^T \end{aligned} \quad (3.11h)$$

Las expresiones anteriores son medidas en la base local  $(\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i'})$ , que está unida a la cruzeta de la junta universal. Debido a que el vector de peso del cuerpo está definido en la base  $(\mathbf{x}_{0'}, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  es necesario llevarlo a la base de interés  $(\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i'})$ , de acuerdo a la ec. (3. 11b) con la siguiente matriz homogénea:

$$\mathbf{Q}_{7i',0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{7i',0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{7i',0} \mathbf{R}_{7i',0} & \mathbf{R}_{7i',0} \end{bmatrix} \quad (3.11g)$$

La matriz  $\mathbf{R}_{7i',0}$  debe obtenerse de la matriz  $\mathbf{R}_{0,7i'}$ , es decir primeramente haciendo una formulación en la base inercial y luego transformándola a la base local como se muestra a continuación:

$$\mathbf{R}_{0,7i'} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})$$

Ahora llevándola a la base local  $(\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i'})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{7i',0} &= \mathbf{R}_{0,7i'}^T \\ &= \mathbf{R}_{z5}^T(-\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z5}^T(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}^T(\delta_{1i}) \\ \mathbf{R}_{7i',0} &= \mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i}) \end{aligned}$$

Obteniendo la matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{0,7i'}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{0,7i'} &= \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{S}_{G3i} \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \\ \mathbf{S}_{G3i} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G3i} & y_{G3i} \\ z_{G3i} & 0 & -x_{G3i} \\ -y_{G3i} & x_{G3i} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{G3i}$  representa al vector de posición  $\mathbf{r}_{G3i}$  del centro de gravedad del cuerpo 3i medida desde el origen de la base  $(\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i'})$ , pero está originalmente definida en la base  $(\mathbf{x}_{8i'}, \mathbf{y}_{8i'}, \mathbf{z}_{8i'})$  pegada al cuerpo 3i y se transforma a la base  $(\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i'})$  como se muestra.

La matriz de transformación  $\mathbf{Q}_{7i',10i'}$  tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{7i',10i'} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{7i',10i'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{7i',10i'} \mathbf{R}_{7i',10i'} & \mathbf{R}_{7i',10i'} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{7i',10i'} &= \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{10i}) = \mathbf{R}(\theta_{10i} - \theta_{8i}) \\ \mathbf{S}_{7i',10i'} &= \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{S}_{z3}(-d_{9i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \end{aligned} \quad (3.11i)$$

## Velocidad Angular del Cuerpo 3i

### Representación Matricial

La velocidad angular del cuerpo 3i, asociada a la base local  $(\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i'})$  unida al cuerpo 3i y definida en el sistema inercial  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ , es representada por la matriz  $\mathbf{\Omega}_{0,7i'}^3$ :

$$\mathbf{\Omega}_{0,7i'}^3 = \dot{\mathbf{R}}_{0,8i} \mathbf{R}_{0,8i}^T \quad (3.12a)$$

Llevando la matriz anterior al sistema local  $(\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i'})$  se tiene:

$$\mathbf{\Omega}_{7i',0}^3 = \mathbf{R}_{7i',0} \mathbf{\Omega}_{0,7i}^3 \mathbf{R}_{7i',0}^T \quad (3.12b)$$

### Representación Vectorial

Obteniendo la velocidad angular de manera vectorial en el marco de referencia inercial:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,7i'}^3 = \boldsymbol{\omega}'_{0,3i} + \boldsymbol{\omega}'_{0,7i} + \boldsymbol{\omega}'_{0,8i} \quad (3.12c)$$

Es importante mencionar que las velocidades y aceleraciones angulares son las mismas por ser paralelos los sistemas de referencia  $7'_i$  y  $7_i$ . Por lo cual se tomarán las velocidades obtenidas del cuerpo 2i y se aplicarán para el cuerpo 3i.

Utilizando las matrices de rotación podemos construir esta última expresión como sigue:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,7i'}^3 = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\boldsymbol{\omega}_{3i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\boldsymbol{\omega}_{7i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\boldsymbol{\omega}_{8i} \quad (3.12d)$$

las velocidades angulares  $\boldsymbol{\omega}_{3i}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{7i}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{8i}$  son medidos localmente en los sistemas de referencia indicados.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{3i} &= [0, \dot{\theta}_{3i}, 0]^T \\ \boldsymbol{\omega}_{7i} &= [0, -\dot{\theta}_{7i}, 0]^T \\ \boldsymbol{\omega}_{8i} &= [-\dot{\theta}_{8i}, 0, 0]^T \end{aligned}$$

Llevando la ec. (3. 12d), a la base local  $(\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i'})$ :

$$\boldsymbol{\omega}_{7i',0}^3 = \mathbf{R}_{7i',0} \boldsymbol{\omega}_{0,7i'}^3 \quad (3.12e)$$

## Aceleración Angular del Cuerpo 3i

### Representación Matricial

Tomando la ec. (3. 12a) y derivándola con respecto al tiempo conseguimos obtener:

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_{0,7i'}^3 = \ddot{\mathbf{R}}_{0,8i} \mathbf{R}_{0,8i}^T + \dot{\mathbf{R}}_{0,8i} \dot{\mathbf{R}}_{0,8i}^T \quad (3.13a)$$

transformándola al sistema de referencia local  $(\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i'})$ :

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_{7i',0}^3 = \mathbf{R}_{7i',0} \dot{\mathbf{\Omega}}_{0,7i'}^3 \mathbf{R}_{7i',0}^T \quad (3.13b)$$

## Representación Vectorial

De ec. (3. 12c) y derivando respecto al tiempo esta expresión::

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{0,7i'}^3 &= \dot{\omega}'_{0,3i} + \omega_0^1 \times \omega_{0,3i} + \\ &\dot{\omega}'_{0,7i} + (\omega_0^1 + \omega_{0,3i}) \times \omega_{0,7i} + \\ &\dot{\omega}'_{0,8i} + (\omega_0^1 + \omega_{0,3i} + \omega_{0,7i}) \times \omega_{0,8i}\end{aligned}\quad (3.13c)$$

están definidas inercialmente y  $\dot{\omega}_{3i}$ ,  $\dot{\omega}_{7i}$  y  $\dot{\omega}_{8i}$ , están definidas localmente:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}'_{3i} &= [0, \ddot{\theta}_{3i}, 0]^T \\ \dot{\omega}'_{7i} &= [0, -\ddot{\theta}_{7i}, 0]^T \\ \dot{\omega}'_{8i} &= [-\ddot{\theta}_{8i}, 0, 0]^T\end{aligned}$$

tomando la ec. (3. 12c) y transformándola al sistema de referencia local ( $\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i}'$ ):

$$\dot{\omega}_{7i',0}^3 = \mathbf{R}_{7i',0} \dot{\omega}_{0,7i'}^3 \quad (3.13d)$$

## Aceleración del Centro de Gravedad del Cuerpo 3i

### Representación Matricial

Utilizando la representación matricial homogénea y definiendo el vector inercialmente, como se muestra en la fig. (3.11):

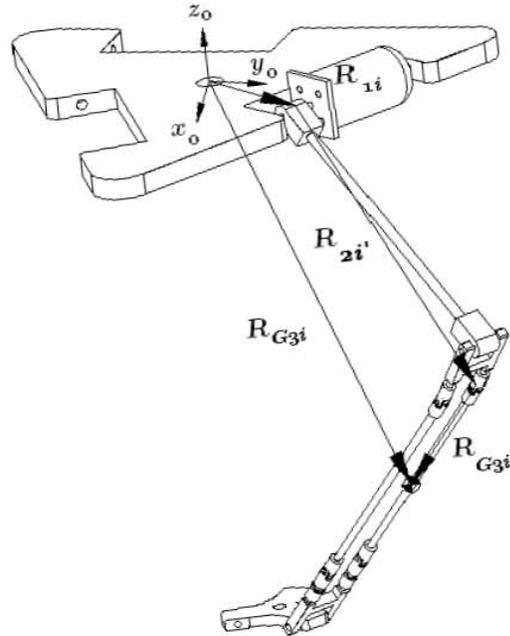


Fig. 3.11 Centro de gravedad del cuerpo 3i

## Representación Vectorial

Todos los vectores son medidos inercialmente:

$$\mathbf{R}_{G3i} = \mathbf{R}_{1i} + \mathbf{R}'_{2i} + \mathbf{R}'_{G3i} \quad (3.14a)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'_{2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}'_{2i} \\ \mathbf{R}'_{G3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{r}'_{G3i} \end{aligned}$$

los vectores locales son:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{2i} &= [d_{4i}, d_{5i}, -d_{6i}]^T \\ \mathbf{r}'_{G3i} &= [0, 0, z_{G3i}]^T \end{aligned}$$

La velocidad del centro de gravedad se obtiene derivando respecto al tiempo la ec. (3. 14a) lo cual da como resultado:

$$\mathbf{V}_{G3i} = \mathbf{V}_{1i} + \mathbf{V}'_{2i} + \mathbf{V}'_{G3i} \quad (3.14b)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_{2i} &= \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}'_{2i} \\ \mathbf{V}'_{G3i} &= \boldsymbol{\omega}_{0,7i'}^3 \times \mathbf{R}'_{G3i} \end{aligned}$$

sustituyendo estas últimas expresiones en (3. 14b):

$$\mathbf{V}_{G3i} = \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}'_{2i} + \boldsymbol{\omega}_{0,7i'}^3 \times \mathbf{R}'_{G3i} \quad (3.14c)$$

La aceleración del centro de gravedad se obtiene derivando respecto al tiempo la ec. (3. 14c):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{G3i} &= \boldsymbol{\alpha}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}'_{2i} + \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times (\boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \times \mathbf{R}'_{2i}) + \\ &\quad \boldsymbol{\alpha}_{0,7i}^3 \times \mathbf{R}'_{G3i} + \boldsymbol{\omega}_{0,7i}^2 \times (\boldsymbol{\omega}_{0,7i}^3 \times \mathbf{R}'_{G3i}) \end{aligned} \quad (3.14d)$$

llevando ec. (3. 14c). a un base local  $(\mathbf{x}_{7i'}, \mathbf{y}_{7i'}, \mathbf{z}_{7i'})$

$$\mathbf{a}_{G3i} = \mathbf{R}_{7i',0} \mathbf{A}_{G3i} \quad (3.14e)$$

### 3.2.4 Análisis del cuerpo 5i

La fig. (3.12) muestra el diagrama del cuerpo libre del cuerpo 5i:

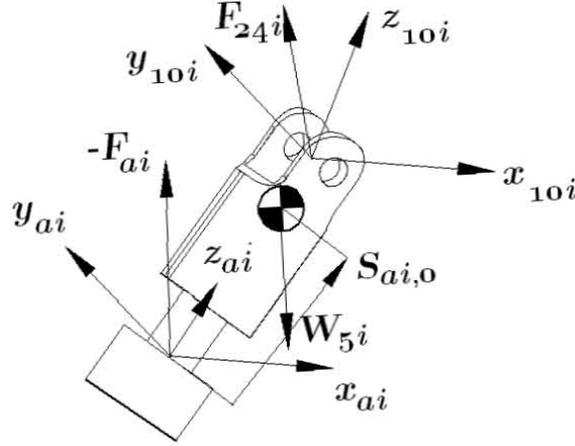


Fig. 3.12 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 5i  
Del diagrama de cuerpo libre mostrado se desarrolla la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{ai,5i}^A + \mathbf{F}_{ai,5i}^R + \mathbf{F}_{ai,5i}^I = \mathbf{0} \quad (3.15a)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{ai,5i}^A = \mathbf{Q}_{ai,0} \mathbf{W}_{5i} \quad (3.15b)$$

$$\mathbf{F}_{ai,5i}^R = -\mathbf{F}_{ai} + \mathbf{Q}_{ai,10i} \mathbf{F}_{24i} \quad (3.15c)$$

$$\mathbf{F}_{ai,5i}^I = [\mathbf{F}_{5i}^I, \mathbf{M}_{5i}^I]^T \quad (3.15d)$$

definiendo:

$$\mathbf{F}_{5i}^I = -m_{5i} \mathbf{a}_{G5i} \quad (3.15e)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{5i}^I &= -(\mathbf{I}_{G5i} \boldsymbol{\alpha}_{ai,0}^5 + \boldsymbol{\Omega}_{ai,0}^5 (\mathbf{I}_{G5i} \boldsymbol{\omega}_{ai,0}^5) + \mathbf{S}_{G5i} (m_{5i} \mathbf{a}_{G5i})) \\ &= -\mathbf{S}_{G5i} (m_{5i} \mathbf{a}_{G5i}) \end{aligned} \quad (3.15f)$$

El vector que representa al brazo de palanca del sistema local  $(\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{y}_{ai}, \mathbf{z}_{ai})$  al centro de gravedad del cuerpo 5i, esta siendo expresado en términos de la matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{G5i}$ , cuyos términos son el vector de centro de gravedad medido desde el sistema local  $(\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{y}_{ai}, \mathbf{z}_{ai})$ .

$$\mathbf{S}_{G5i} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G5i} & y_{G5i} \\ z_{G5i} & 0 & -x_{G5i} \\ -y_{G5i} & x_{G5i} & 0 \end{bmatrix}$$

Además, el vector de peso y el vector de fuerzas de reacción tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{5i} &= [0, 0, m_{5i} g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{ai} &= [F_{aix}, F_{aiy}, F_{aiz}, M_{aix}, M_{aiy}, 0]^T\end{aligned}\quad (3.15g)$$

Es de notar que las fuerzas de la ec. (3.15a) están siendo medidas desde un sistema local  $(\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{y}_{ai}, \mathbf{z}_{ai})$ . Este último marco local es paralelo al sistema local  $(\mathbf{x}_{12i}, \mathbf{y}_{12i}, \mathbf{z}_{12i})$ , como se muestra en la fig. (2.10). Por definición el vector de peso es medido en el sistema inercial, por lo cual es necesario transformarlo al sistema  $(\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{y}_{ai}, \mathbf{z}_{ai})$ , de igual modo debemos transformar las fuerzas de reacción que están definidas en el sistema local  $(\mathbf{x}_{10}, \mathbf{y}_{10}, \mathbf{z}_{10})$ , al sistema  $(\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{y}_{ai}, \mathbf{z}_{ai})$ , con las siguientes matrices definidas a continuación:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{ai,0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ai,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{ai,0}\mathbf{R}_{ai,0} & \mathbf{R}_{ai,0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{ai,0} &= \mathbf{R}_{z5}(-\delta_{15i})\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{16i}) \\ \mathbf{S}_{ai,0} &= \begin{bmatrix} 0 & -z_{G5i} & y_{G5i} \\ z_{G5i} & 0 & -x_{G5i} \\ -y_{G5i} & -x_{G5i} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.15h)$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{ai,10i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ai,10i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{ai,10i}\mathbf{R}_{ai,10i} & \mathbf{R}_{ai,10i} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_{ai,10i} &= \mathbf{R}_{z6}(\theta_{12i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{11i}) \\ \mathbf{S}_{ai,10i} &= \mathbf{S}_{z3}(d_{13i} - d_{ai})\end{aligned}\quad (3.15i)$$

## Aceleración del Centro de Gravedad del Cuerpo 5i

Para el análisis de las fuerzas inerciales de este cuerpo es necesario obtener la aceleración del centro de gravedad, la figura (3.13) muestra la construcción vectorial del centro de gravedad de este cuerpo.

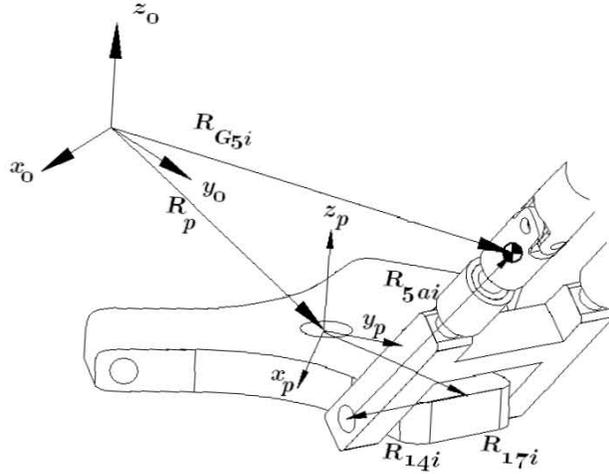


Fig 3.14 Centro de gravedad del cuerpo 5i

La aceleración del centro de gravedad del cuerpo 5i es:

$$\mathbf{R}_{G5i} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{17i} + \mathbf{R}_{14i} + \mathbf{R}_{5ai} \quad (3.16a)$$

derivando con respecto al tiempo la ec.(3. 16a) para obtener la velocidad del centro de gravedad:

$$\dot{\mathbf{R}}_{G5i} = \dot{\mathbf{R}}_p + \dot{\mathbf{R}}_{17i} + \dot{\mathbf{R}}_{14i} + \dot{\mathbf{R}}_{5ai} \quad (3.16b)$$

derivando con respecto al tiempo la ec. (3. 16b):

$$\mathbf{A}_{G5i} = \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_{17i} + \mathbf{A}_{14i} + \mathbf{A}_{5ai} \quad (3.16c)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p &= [\ddot{x}_p \quad \ddot{y}_p \quad \ddot{z}_p]^T \\ \mathbf{A}_{17i} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{14i} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{5p} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

por lo tanto la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 5i es:

$$\mathbf{A}_{G5i} = \mathbf{A}_p$$

llevando esta última expresión al marco de referencia  $(\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{y}_{ai}, \mathbf{z}_{ai})$  tenemos:

$$\mathbf{a}_{G5i} = \mathbf{R}_{ai,0} \mathbf{A}_{G5i} \quad (3.16d)$$

### 3.2.5 Análisis del cuerpo 6i

La fig. (3.14) muestra el diagrama de cuerpo libre del cuerpo 6i:

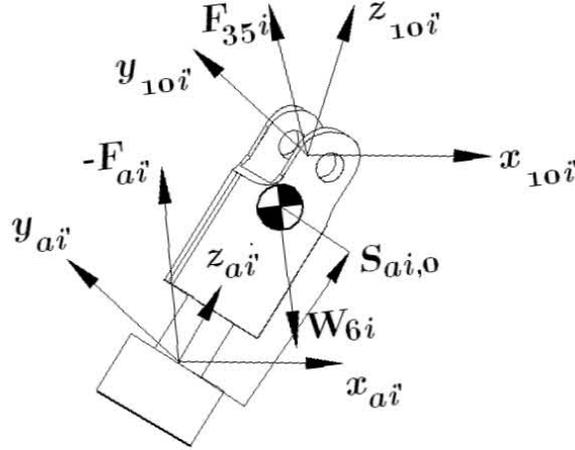


Fig. 3.14 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 6i

Del diagrama de cuerpo libre mostrado se desarrolla la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{ai,6i}^A + \mathbf{F}_{ai,6i}^R + \mathbf{F}_{ai,6i}^I = \mathbf{0} \quad (3.17a)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{ai,6i}^A = \mathbf{Q}_{ai,0} \mathbf{W}_{6i} \quad (3.17b)$$

$$\mathbf{F}_{ai,6i}^R = -\mathbf{F}'_{ai} + \mathbf{Q}_{ai,10i} \mathbf{F}_{35i} \quad (3.17c)$$

$$\mathbf{F}_{ai,6i}^I = [\mathbf{F}_{6i}^I, \mathbf{M}_{6i}^I]^T \quad (3.17d)$$

definiendo:

$$\mathbf{F}_{6i}^I = -m_{6i} \mathbf{a}_{G6i} \quad (3.17e)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{6i}^I &= -(\mathbf{I}_{G6i} \boldsymbol{\alpha}_{ai,0}^6 + \boldsymbol{\Omega}_{ai,0}^6 (\mathbf{I}_{G6i} \boldsymbol{\omega}_{ai,0}^6) + \mathbf{S}_{G6i} (m_{6i} \mathbf{a}_{G6i})) \\ &= -\mathbf{S}_{G6i} (m_{6i} \mathbf{a}_{G6i}) \end{aligned} \quad (3.17f)$$

El vector que representa al brazo de palanca del sistema local  $(\mathbf{x}_{ai'}, \mathbf{y}_{ai'}, \mathbf{z}_{ai'})$  al centro de gravedad del cuerpo 6i, esta siendo expresado en términos de la matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{G6i}$ , cuyos términos son el vector de centro de gravedad medido desde el sistema local  $(\mathbf{x}_{ai'}, \mathbf{y}_{ai'}, \mathbf{z}_{ai'})$ .

$$\mathbf{S}_{G6i} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G6i} & y_{G6i} \\ z_{G6i} & 0 & -x_{G6i} \\ -y_{G6i} & x_{G6i} & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de peso y el vector de fuerzas de reacción tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{6i} &= [0, 0, -m_{6i} g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}'_{ai} &= [F'_{aix}, F'_{aiy}, F'_{aiz}, M'_{aix}, M'_{aiy}, 0]^T\end{aligned}\quad (3.17g)$$

Es de notar que las fuerzas de la ec. (3. 17a) están siendo medidas desde un sistema local  $(\mathbf{x}_{ai'}, \mathbf{y}_{ai'}, \mathbf{z}_{ai'})$ . Este último marco local es paralelo al sistema local  $(\mathbf{x}_{12i'}, \mathbf{y}_{12i'}, \mathbf{z}_{12i'})$ , como se muestra en la fig. (2. 10). Por definición el vector de peso es medido en el sistema inercial, por lo cual es necesario transformarlo al sistema  $(\mathbf{x}_{ai'}, \mathbf{y}_{ai'}, \mathbf{z}_{ai'})$ , de igual modo debemos transformar las fuerzas de reacción que están definidas en el sistema local  $(\mathbf{x}_{10'}, \mathbf{y}_{10'}, \mathbf{z}_{10'})$ , al sistema  $(\mathbf{x}_{ai'}, \mathbf{y}_{ai'}, \mathbf{z}_{ai'})$ , sin embargo, al igual que el cuerpo  $5i$ , el cuerpo  $6i$  presenta las mismas matrices de transformación necesarios para transformar el vector de peso y el vector de fuerza de reacción  $\mathbf{F}_{35i}$ .

## Aceleración del Centro de Gravedad del Cuerpo $6i$

Por lo que resta, únicamente obtener la aceleración del centro de gravedad del cuerpo  $6i$ , la cual se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_{G6i} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{17i} - \mathbf{R}_{14i} + \mathbf{R}_{6ia} \quad (3.18a)$$

derivando la ec. (3. 18a) para obtener la velocidad del centro de gravedad del cuerpo  $6i$ :

$$\dot{\mathbf{R}}_{G6i} = \dot{\mathbf{R}}_p + \dot{\mathbf{R}}_{17i} - \dot{\mathbf{R}}_{14i} + \dot{\mathbf{R}}_{6ia} \quad (3.18b)$$

derivando con respecto al tiempo la ec. (3. 18b) para obtener la aceleración del centro de gravedad del cuerpo  $6i$ :

$$\mathbf{A}_{G6i} = \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_{17i} - \mathbf{A}_{14i} + \mathbf{A}_{6ia} \quad (3.18c)$$

donde:

$$\mathbf{A}_{6ia} = \mathbf{0}$$

por lo tanto la aceleración del centro de gravedad del cuerpo  $6i$  es:

$$\mathbf{A}_{G6i} = \mathbf{A}_p$$

llevando esta última expresión al marco de referencia  $(\mathbf{x}'_{ai}, \mathbf{y}'_{ai}, \mathbf{z}'_{ai})$  tenemos:

$$\mathbf{a}_{G6i} = \mathbf{R}_{ai,0} \mathbf{A}_{G6i} \quad (3.18d)$$

### 3.2.6 Análisis de la Plataforma Móvil p

La figura siguiente (3.15) muestra el diagrama de cuerpo libre de la base móvil del robot paralelo.

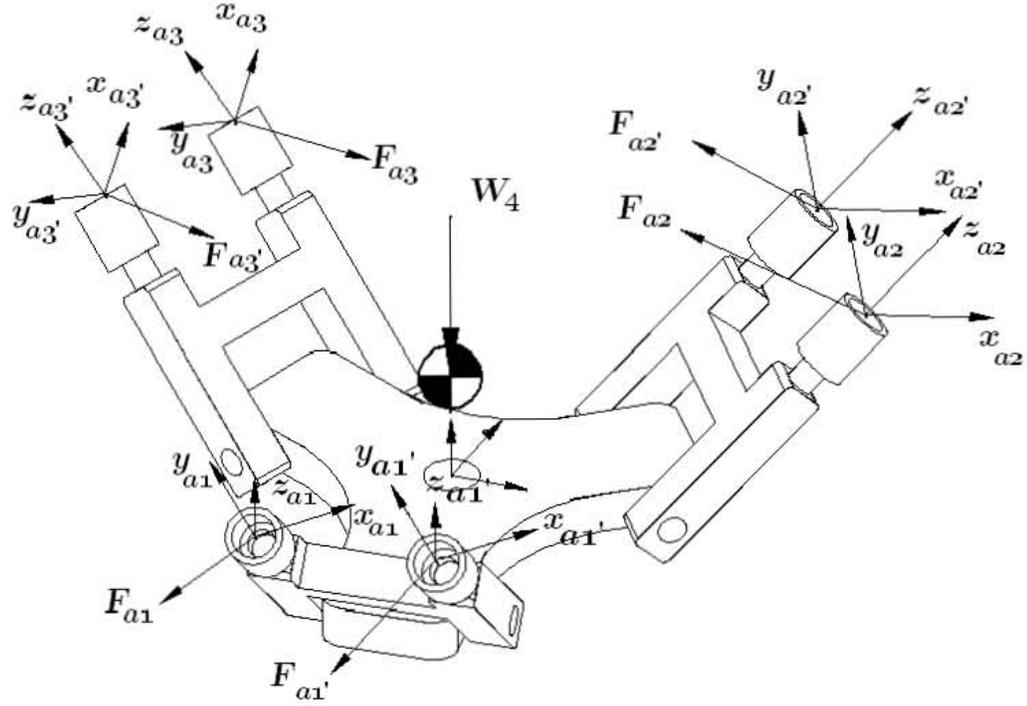


Fig. 3.15 Diagrama de cuerpo libre de la plataforma móvil.

Las expresiones que resultan de hacer la suma de fuerzas y momentos es la siguiente:

$$\mathbf{F}_{p,4}^A + \mathbf{F}_{p,4}^R + \mathbf{F}_{p,4}^I = \mathbf{0} \quad (3.19a)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{p,4}^A = \mathbf{Q}_{p,0}(\mathbf{W}_{plato} + \mathbf{W}_{carga} + \mathbf{F}_p) \quad (3.19b)$$

$$\mathbf{F}_{p,4}^R = \mathbf{Q}_{p,ai}\mathbf{F}_{ai} + \mathbf{Q}_{p,10i}\mathbf{F}'_{ai} \quad (3.19c)$$

$$\mathbf{F}_{p,4}^I = [\mathbf{F}_4^I, \mathbf{M}_4^I]^T \quad (3.19d)$$

Las fuerzas y momentos son medidos en la base local  $(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p)$ , esta base es paralela a la base inercial.

$$\mathbf{F}_4^I = -m_4 \mathbf{a}_{G_4} \quad (3.19e)$$

$$\mathbf{M}_4^I = -(\mathbf{I}_{G_4} \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\Omega}_4^4 \mathbf{I}_{G_4} \boldsymbol{\omega}_4^4 + \mathbf{S}_{G_4} (m_4 \mathbf{a}_{G_4})) \quad (3.19f)$$

todos los vectores son medidos en base local  $(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p)$ , simplificando la expresión de momentos, resulta:

$$\mathbf{M}_4^f = -\mathbf{S}_{G4} (m_4 \mathbf{a}_{G4})$$

los vectores de fuerza y pesos son respectivamente:

$$\begin{aligned} W_{plato} &= [0, 0, -m_{plato} g, 0, 0, 0]^T \\ W_{carga} &= [0, 0, -m_{carga} g, 0, 0, 0]^T \end{aligned}$$

Obteniendo  $\mathbf{Q}_{p,ai}$ :

$$\mathbf{Q}_{p,ai} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{p,ai} & 0 \\ \mathbf{S}_{p,ai} \mathbf{R}_{p,ai} & \mathbf{R}_{p,ai} \end{bmatrix} \quad (3.19g)$$

las matrices de rotación para esta matriz son:

$$\mathbf{R}_{p,ai} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i})$$

La matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{p,ai}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{p,ai} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{S}_{z1}(d_{17i})\mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})^T + \\ &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i}) (\mathbf{S}_{z2}(-d_{14i}) + \mathbf{S}_{z3}(d_{a5i})) \mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i})^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})^T \end{aligned}$$

Obteniendo  $\mathbf{Q}_{p,ai'}$

$$\mathbf{Q}_{p,ai'} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{p,ai'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{p,ai'} \mathbf{R}_{p,ai'} & \mathbf{R}_{p,ai'} \end{bmatrix} \quad (3.19h)$$

con:

$$\mathbf{R}_{p,10i'} = \mathbf{R}_{p,10i}$$

y:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{p,ai'} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{S}_{z1}(d_{17i})\mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})^T + \\ &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i}) (\mathbf{S}_{z2}(d_{14i}) + \mathbf{S}_{z3}(d_{a6i})) \mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i})^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})^T \end{aligned}$$

## Aceleración del Centro de Gravedad de la Plataforma Móvil

La aceleración de este cuerpo es conocida a partir de la cinemática

$$\mathbf{A}_{G4} = [\ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p]^T \quad (3.20a)$$

Debido a que las base loca p y la base inercial son paralelas se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{a}_{G4} = \mathbf{I} \mathbf{A}_{Gp} \quad (3.20b)$$

donde:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz identidad.

### 3.3 Solución del método de Newton - Euler

El análisis dinámico que se desarrollo en los subcapítulos anteriores es para encontrar principalmente los torques necesarios para desplazar el efector final de un punto inicial a un punto final, a través de la trayectoria descrita en el ápendice B.

Cada cadena cinemática consta de 5 cuerpos: cuerpo 1i, cuerpo 2i, cuerpo 3i, cuerpo 5i, cuerpo 6i. Para cada cuerpo se pueden escribir 6 ecuaciones dinámicas,: 3 ecuaciones de suma de fuerzas y 3 ecuaciones de suma de momentos. Por lo tanto para cadena cinemática se tienen 30 ecuaciones dinámicas. Finalmente el sistema total consta de 3 cadenas y el efector final, lo cual produce 96 ecuaciones dinámicas.

Por otra parte el número de incógnitas en el sistema está asociado a las juntas cinemáticas. Una cadena consta de:

- 1 Junta Rotacional - uniendo la base y el cuerpo 1i.
- 2 Juntas Universales - uniendo el cuerpo 1i con los cuerpos 2i y 3i, respectivamente.
- 2 Juntas Universales - Uniendo los cuerpos 2i y 5i, también uniendo los cuerpos 3i y 6i.
- 2 Juntas Rotacionales - Uniendo los cuerpos 5i y 6i al efector final.

Si la junta rotacional proporciona 5 incógnitas de reacción a calcular y la junta universal proporciona 4 incógnitas de reacción, se tienen para cadena entonces:

$$\begin{aligned} 3 \text{ Juntas Rotacionales} &= 15 \text{ incógnitas} \\ 4 \text{ juntas universales} &= 16 \text{ incógnitas} \\ \text{Total} &= 31 \text{ incógnitas} \end{aligned}$$

Para las 3 cadenas se tienen 93 incógnitas. Tomando en cuenta que los grados de libertad del robot delta es igual a 3, se requieren entonces 3 torques,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$  asociados a  $\theta_{31}$ ,  $\theta_{32}$  y  $\theta_{33}$  respectivamente, que son necesarios para desplazar el efector final. Finalmente se tiene un total de 96 incógnitas, lo que hace compatible el sistema de 96 ecs x 96 incógnitas.

Para la solución de este método se empleo el software matemático Mathematica v 5.0, para encontrar la solución para condiciones estáticas y dinámicas.

Para el cuerpo 1i se tienen las siguientes características físicas:

$$\begin{aligned} m_{1i} &= 0,11212955328 \text{ [kg]} \\ CG_{1i} &= [0,21080447047, -0,00027779972 \quad -0,01795409598] \text{ [m]} \\ \mathbf{I}_{CG1i} &= \begin{bmatrix} 0,00013294324 & 0,00000861196 & 0,00060999498 \\ 0,00000861196 & 0,00665967294 & -0,00000080527 \\ 0,00060999498 & -0,00000080527 & 0,00656714151 \end{bmatrix} \text{ [kg m}^2\text{]} \end{aligned}$$

Para el cuerpo 2i se tienen las siguientes características:

$$\begin{aligned}
 m_{2i} &= 0,04711520642 \text{ [kg]} \\
 CG_{2i} &= [0,00000000000, 0,00001826605 \quad -0,14418213241] \text{ [m]} \\
 \mathbf{I}_{CG_{2i}} &= \begin{bmatrix} 0,00159274951 & 0,00000000000 & 0,00000000007 \\ 0,00000000000 & 0,00159282742 & 0,00000012408 \\ 0,00000000007 & 0,00000012408 & 0,00000086675 \end{bmatrix} \text{ [kg m}^2\text{]}
 \end{aligned}$$

Las características del cuerpo 3i, son las mismas del cuerpo 2i debido a la simetría del cuerpo.

Para el cuerpo 5i se tienen las siguientes características:

$$\begin{aligned}
 m_{5i} &= 0,0164809868 \text{ [kg]} \\
 CG_{5i} &= [0,00000513594, -0,00000001449 \quad 0,01357224454] \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

Las características del cuerpo 6i, son las mismas del cuerpo 5i debido a la simetría del cuerpo.

Para el efector final se tienen las siguientes características:

$$\begin{aligned}
 m_{plato} &= 0,15638498774 \text{ [kg]} \\
 m_{carga} &= 0,3 \text{ [kg]} \\
 m_4 &= m_{plato} + m_{carga} \\
 CG_{2i} &= [-0,00011552956, -0,00009306914 \quad 0,01874160186] \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

Para el análisis estático, se muestra en la fig. (3.16) la gráfica de torques obtenida, correspondiendo a la trayectoria trazada, con las siguientes designaciones:

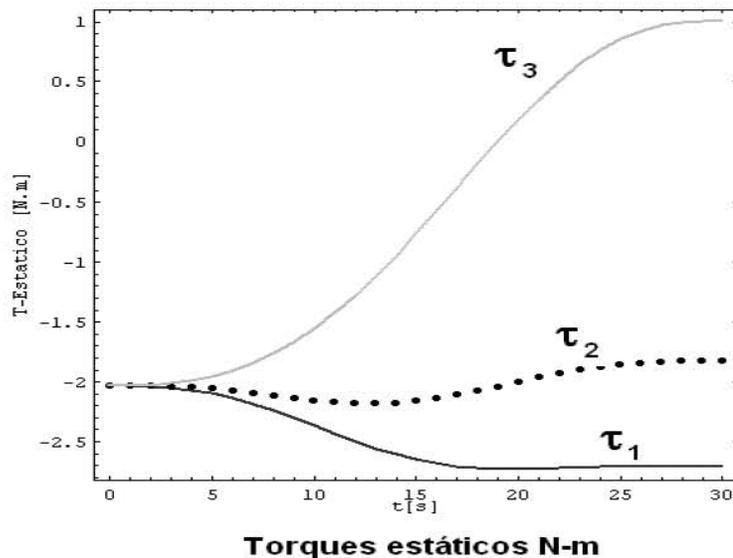


Fig. 3.16 Gráfica de torques estáticos

Para el análisis dinámico, se muestra en la fig. (3.17) la gráfica de torques obtenidas, correspondiendo a la trayectoria planteada, con las siguientes designaciones:

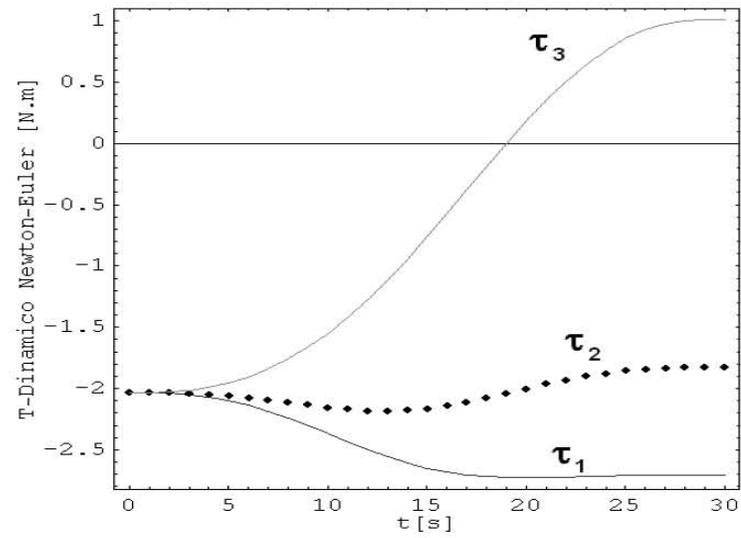


Fig. 3.17 Gráfica de torques dinámicos

# Capítulo 4

## Análisis Dinámico Formulación Trabajo Virtual

### 4.1 Introducción

El principio del trabajo virtual representa una poderosa herramienta para derivar las ecuaciones estáticas y dinámicas de los sistemas de multicuerpos [13]. Establece que si un cuerpo rígido está en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas y se le aplica un desplazamiento arbitrario a partir de la posición de equilibrio, el trabajo realizado por las fuerzas externas durante el desplazamiento será cero. El principio de trabajo virtual es desarrollado en este capítulo para obtener una ecuación dinámica que nos permita encontrar el valor del torque aplicado para desarrollar una trayectoria dada.

#### 4.1.1 El principio del Trabajo Virtual

El principio de trabajo virtual [13] representa una poderosa herramienta para derivar las ecuaciones estáticas y dinámicas de los sistemas de multicuerpos. A diferencia de la mecánica Newtoniana, el principio del trabajo virtual no requiere considerar las fuerzas de restricción o de reacción, solo requiere cantidades de trabajo escalar para definir las ecuaciones estáticas y dinámicas. Este principio puede ser usado para derivar sistemáticamente un mínimo de ecuaciones de movimiento de sistemas de multicuerpos mediante la eliminación de las fuerzas de restricción. En el uso del principio del trabajo virtual, la importancia de los conceptos de desplazamientos virtual y fuerzas generalizadas deben ser tomadas en cuenta y usadas para formular las fuerzas generalizadas de varios elementos de fuerza, tales como resortes, amortiguadores y fuerzas de fricción. El principio de trabajo virtual puede ser usado para obtener un número de ecuaciones igual al número de grados de libertad del sistema, de este modo provee un procedimiento sistemático para obtener la forma reducida de las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico. El principio del trabajo virtual para un análisis dinámico [12] es escrito para un sistema de cuerpos en la forma:

$$\sum_{i=1}^n \{(\mathbf{F}_i - m\mathbf{a}_i)^T \delta \mathbf{R}_i + (\mathbf{M}_i - (\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i))^T \delta \mathbf{Q}_i\} = 0 \quad (4.1.1)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 n &= \text{número de cuerpos} \\
 \mathbf{F}_i &= \text{fuerza externa aplicada al cuerpo } i \\
 \mathbf{M}_i &= \text{momento externo aplicado al cuerpo } i \\
 \delta\mathbf{R}_i &= \text{desplazamiento virtual traslacional del} \\
 &\quad \text{centro de masa del cuerpo } i \\
 \delta\mathbf{Q}_i &= \text{desplazamiento virtual rotacional del} \\
 &\quad \text{cuerpo } i
 \end{aligned}$$

La ecuación anterior declara que un sistema de cuerpos lleva a cabo un movimiento tal, como para mantener la suma algebraica del trabajo virtual de todos los efectos de trabajo e inercia igual a cero. Las fuerzas que producen trabajos son todas las fuerzas aplicadas, incluso las fuerzas de fricción.

## 4.1.2 Desplazamiento Virtual

Consideremos un sistema consistente de  $k$  partículas, con coordenadas correspondientes  $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_k$ . Si estas partículas están libres de movimiento sin ninguna restricción, entonces es bastante fácil describir su movimiento, dado que el cambio de momentum de cada masa es igual a las fuerzas aplicadas a éstas. Sin embargo, si el movimiento de las partículas es restringido de algún modo, entonces debe tomarse en cuenta no únicamente las fuerzas aplicadas, sino también las fuerzas restrictivas, esto es, las fuerzas necesarias para que las restricciones se mantengan. Como simple ejemplo de esto, supongamos un sistema de dos partículas, las cuales están unidas por una cuerda, la cual tiene masa despreciable, de longitud  $l$ . Entonces las dos coordenadas  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  deben satisfacer la restricción:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| &= l \\
 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^T (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= l^2
 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Si alguna fuerza externa es aplicada a cada partícula, entonces las partículas sentirán no únicamente estas fuerzas externas sino también las ejercidas por la cuerda, la cual es a la largo de la dirección  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  y de magnitud apropiada. Por lo tanto para analizar el movimiento de dos partículas, tenemos dos opciones. La primera, podemos calcular, bajo cada conjunto de fuerzas externas, cuales son las fuerzas restrictivas que permiten que las ecuaciones continúen siendo consistentes. Y la segunda, podemos buscar un método de análisis que no requiera el uso de saber las fuerzas restrictivas. La segunda alternativa es preferible, ya que no requeriría calcular las fuerzas restrictivas. Una vez aclarada la metodología a seguir, primero es necesario introducir alguna terminología. Una restricción sobre las partículas  $k$  y las coordenadas  $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_k$  son llamadas holonómicas si hay una igualdad restrictiva de la forma:

$$g(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_k) = 0, \quad i = 1, \dots, l \tag{4.1.3}$$

y no holonómica en otro caso. La restricción impuesta en ec. (4. 1. 2) por conectar dos partículas por una cuerda rígida de masa despreciable es una restricción holonómica. Puede ser posible expresar las coordenadas de  $k$  partículas en términos de  $n$  coordenadas generalizadas  $q_1 \dots q_n$ . Es decir, se asume que las coordenadas de varias partículas, sujetas a un conjunto de restricciones (ec. (4. 1. 2)), pueden ser expresadas en la forma:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1 \dots q_n), \quad i = 1, \dots, k \quad (4.1.4)$$

donde  $q_1 \dots q_n$  son todas independiente. Generalizando, la idea de las coordenadas generalizadas puede ser utilizada cuando existe una infinidad de partículas. Únicamente se necesitan seis coordenadas para especificar completamente las coordenadas de cualquier partícula dentro de un cuerpo rígido, tres coordenadas de posición para especificar la localización del centro de masa, y tres ángulos de Euler [1] para especificar la orientación del cuerpo. Para limitar el tema, asumimos que el número de partículas es finito. Comúnmente las coordenadas generalizadas son posiciones, ángulos, etc. Ahora se puede hablar de **desplazamientos virtuales**, que son cualquier conjunto de  $\delta \mathbf{r}_1 \dots \delta \mathbf{r}_k$  de desplazamientos infinitesimales que son consistentes con las restricciones. Por lo tanto se definen los desplazamientos virtuales como:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, k \quad (4.1.5)$$

donde los desplazamientos virtuales  $\delta q_1 \dots \delta q_n$  de las coordenadas generalizadas no presentan restricciones (esto es una característica de las coordenadas generalizadas). [14].

## 4.2 Dinámica del robot Delta Paralelo

En la fig. (4.1) pueden apreciarse las fuerzas y momentos inerciales que surgen por el movimiento del robot, donde cada momento y fuerza está siendo situado en los centros de gravedad de cada cuerpo que compone el robot.

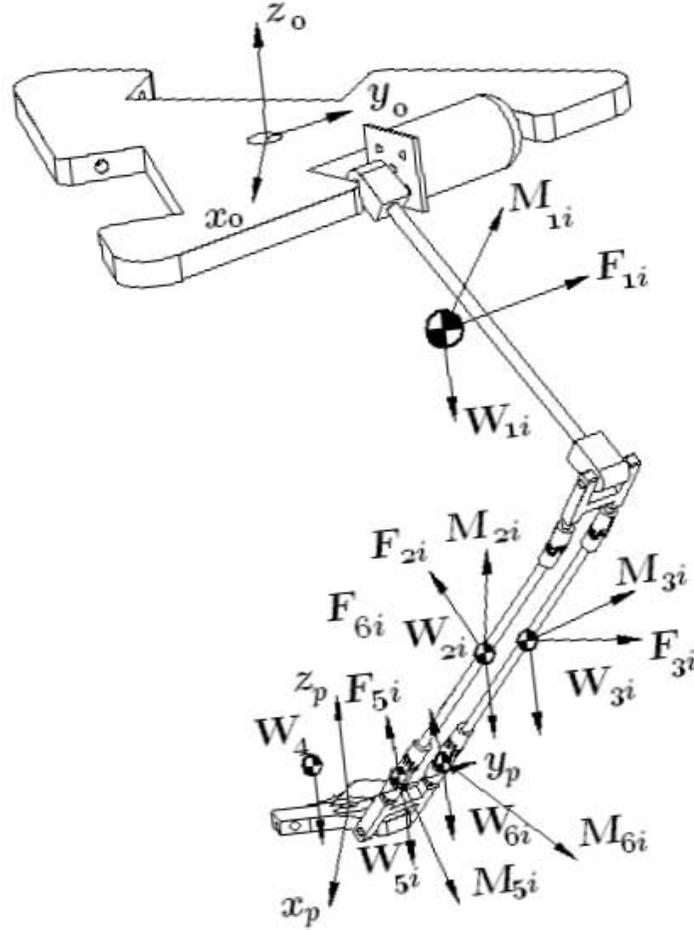


Fig. 4.1 Diagrama de cuerpo libre de una cadena  
De acuerdo a la formulación de trabajo virtual [12]:

$$\sum_{i=1}^3 \{(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_{Gi})^T \delta \mathbf{R}_i + (\mathbf{M}_i - (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i))^T \delta \mathbf{Q}_i\} = 0$$

Esta última ecuación medida desde una base inercial. Para nuestro propósito renombramos de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^3 \{(\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{Ii})^T \delta \mathbf{R}_i + (\mathbf{M}_i - \mathbf{M}_{Ii})^T \delta \mathbf{Q}_i\} = 0 \quad (4.1a)$$

donde:

- $\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_i$  – fuerzas y momentos externos del cuerpo  $i$
- $\mathbf{F}_{Ii}, \mathbf{M}_{Ii}$  – fuerzas y momentos inerciales del cuerpo  $i$
- $\delta\mathbf{R}_i$  – desplazamientos virtuales del punto de aplicación de la fuerza
- $\delta\mathbf{Q}_i$  – desplazamiento virtual rotacional

y las fuerzas y momentos inerciales son definidas como:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{Ii} &= m_i \mathbf{a}_{G_i} \\ \mathbf{M}_{Ii} &= \mathbf{I}_{G_i} \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_{G_i} \boldsymbol{\omega}_i\end{aligned}$$

aplicando ec. (4. 1a) al robot delta:

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^3 \{ (\mathbf{W}_{1i} - \mathbf{F}_{1i})^T \delta\mathbf{R}_{G1i} + (\mathbf{T}_i - \mathbf{M}_{1i})^T \delta\mathbf{Q}_{1i} + \\ & (\mathbf{W}_{2i} - \mathbf{F}_{2i})^T \delta\mathbf{R}_{G2i} - \mathbf{M}_{2i}^T \delta\mathbf{Q}_{2i} + \\ & (\mathbf{W}_{3i} - \mathbf{F}_{3i})^T \delta\mathbf{R}_{G3i} - \mathbf{M}_{3i}^T \delta\mathbf{Q}_{3i} + \\ & (\mathbf{W}_{5i} - \mathbf{F}_{5i})^T \delta\mathbf{R}_{G5i} - \mathbf{M}_{5i}^T \delta\mathbf{Q}_{5i} + \\ & (\mathbf{W}_{6i} - \mathbf{F}_{6i})^T \delta\mathbf{R}_{G6i} - \mathbf{M}_{6i}^T \delta\mathbf{Q}_{6i} \} + \\ & \mathbf{W}_{plato}^T \delta\mathbf{R}_{plato} + (\mathbf{W}_{carga} - \mathbf{F}_p)^T (\delta\mathbf{R}_p + \delta\mathbf{R}_{G4}) = 0\end{aligned}\tag{4.2a}$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{ji} &= m_{ji} \mathbf{g} \\ i &= 1, 2, 3 \\ j &= 1, 2, 3, 5, 6 \\ \mathbf{W}_{plato} &= m_{plato} \mathbf{g} \\ \mathbf{W}_{carga} &= m_{carga} \mathbf{g}\end{aligned}$$

## 4.2.1 Desplazamientos virtuales de centros de gravedad

### Centro de Gravedad 1i

Es necesario obtener los vectores de posición del centro de gravedad para cada cuerpo, de modo que obtengamos a partir de estos, sus desplazamientos virtuales. Para el cuerpo 1i tenemos la fig. (4.2):

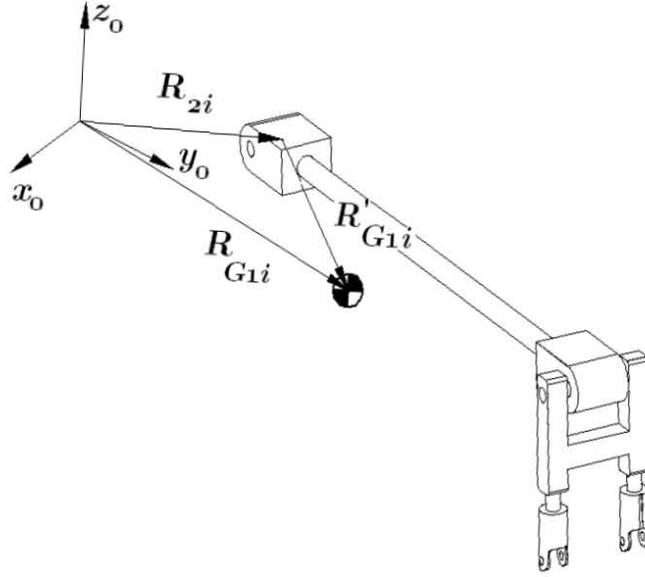


Fig. 4.2 Ubicación del centro de gravedad del cuerpo 1i

$$\mathbf{R}_{G1i} = \mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}'_{G1i} \quad (4.3a)$$

obteniendo sus desplazamientos virtuales:

$$\delta \mathbf{R}_{G1i} = \delta \mathbf{R}_{2i} + \delta \mathbf{R}'_{G1i} \quad (4.3b)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{r}_{2i} \\ \mathbf{R}'_{G1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{r}_{G1i} \\ \mathbf{r}_{2i} &= [d_{2i}, 0, 0]^T \\ \mathbf{r}_{G1i} &= [x_{G1i}, y_{G1i}, z_{G1i}]^T \end{aligned}$$

Hacemos notar que los ángulos y distancias  $\delta$  y  $d$  son constantes y los ángulos y coordenadas  $\theta$ ,  $x_p$ ,  $y_p$ ,  $z_p$  son variables. Obteniendo el desplazamiento virtual de los valores anteriores:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_{2i} &= \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{R}'_{G1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \delta \theta_{3i} \mathbf{r}_{G1i} \end{aligned} \quad (4.3c)$$

donde las siguientes matrices están definidas como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(\theta)}{\partial \theta} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta & -c\theta \\ 0 & c\theta & -s\theta \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta)}{\partial \theta} &= \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & c\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -c\theta & 0 & -s\theta \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{z6}(\theta)}{\partial \theta} &= \begin{bmatrix} -s\theta & -c\theta & 0 \\ c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

sustituyendo ec. (4. 3c) en (4. 3b) :

$$\delta \mathbf{R}_{G1i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \delta \theta_{3i} \mathbf{r}_{G1i} \quad (4.3d)$$

Transformando ec (4. 3d) la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$ . Se define la siguiente transformación:

$$\mathbf{R}_{0,3i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})$$

donde la matriz de rotación  $\mathbf{R}_{0,3i}$  nos proyecta de la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  a la base inercial  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ , para el caso contrario, proyectar de la base inercial  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  a la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  se procede como:

$$\mathbf{R}_{3i,0} = \mathbf{R}_{0,3i}^T$$

aplicando  $\mathbf{R}_{3i,0}$  a ec. (4. 3d) :

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{R}_{G1i}^{3i} &= \mathbf{R}_{3i,0} \delta \mathbf{R}_{G1i} \\ &= \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \delta \theta_{3i} \mathbf{r}_{G1i} \\ \delta \mathbf{R}_{G1i}^3 &= \mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{G1i} \delta \theta_{3i}\end{aligned} \quad (4.3e)$$

donde:

$$\mathbf{U}_{1i} = \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}}$$

## Centro de Gravedad 2i

Para el cuerpo 2i se hace la siguiente formulación vectorial, de acuerdo a la fig.(4.3):

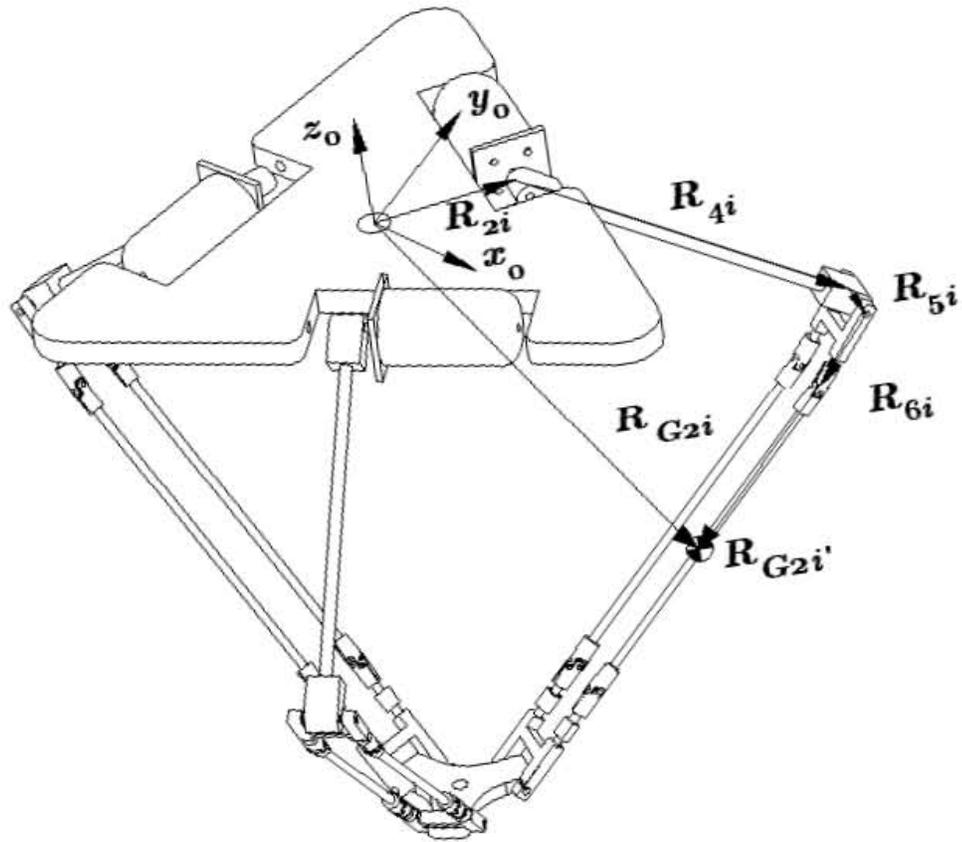


Fig. 4.3 Ubicación del centro de gravedad del cuerpo 2i

$$\mathbf{R}_{G2i} = \mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}_{4i} + \mathbf{R}_{5i} + \mathbf{R}_{6i} + \mathbf{R}'_{G2i} \quad (4.4a)$$

Obteniendo el desplazamiento virtual de la ec.(4. 4a);

$$\delta \mathbf{R}_{G2i} = \delta \mathbf{R}_{2i} + \delta \mathbf{R}_{4i} + \delta \mathbf{R}_{5i} + \delta \mathbf{R}_{6i} + \delta \mathbf{R}'_{G2i} \quad (4.4b)$$

definiendo nuevamente los vectores en el sistema inercial:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{4i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{4i} \\
\mathbf{R}_{5i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{5i} \\
\mathbf{R}_{6i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{6i} \\
\mathbf{R}'_{G2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{r}_{G2i} \\
&= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i} - \theta_{7i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{r}_{G2i} \\
&= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{r}_{G2i}
\end{aligned}$$

con los siguientes valores y vectores locales definidos:

$$\begin{aligned}
\epsilon_i &= \theta_{3i} - \theta_{7i} \\
\mathbf{r}_{4i} &= [d_{4i}, 0, 0]^T \\
\mathbf{r}_{5i} &= [0, -d_{5i}, 0]^T \\
\mathbf{r}_{6i} &= [0, 0, -d_{6i}]^T \\
\mathbf{r}_{G2i} &= [x_{G2i}, y_{G2i}, z_{G2i}]^T \\
\mathbf{r}_{G3i} &= [x_{G3i}, y_{G3i}, z_{G3i}]^T
\end{aligned}$$

obteniendo sus desplazamientos virtuales:

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{R}_{4i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\frac{\partial\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial\theta_{3i}}\delta\theta_{3i}\mathbf{r}_{4i} \\
\delta\mathbf{R}_{5i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\frac{\partial\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial\theta_{3i}}\delta\theta_{3i}\mathbf{r}_{5i} \\
\delta\mathbf{R}_{6i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\frac{\partial\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial\theta_{3i}}\delta\theta_{3i}\mathbf{r}_{6i} \\
\delta\mathbf{R}'_{G2i} &= \left( \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\frac{\partial\mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial\epsilon_i}\delta\epsilon_i\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)\frac{\partial\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial\theta_{8i}}\delta\theta_{8i} \right) \mathbf{r}_{G2i}
\end{aligned}$$

Sustituyendo los desplazamientos virtuales anteriores en ec. (4. 4b) :

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{R}_{G2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\frac{\partial\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial\theta_{3i}}(\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i})\delta\theta_{3i} + \\
&\quad \left( \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\frac{\partial\mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial\epsilon_i}\delta\epsilon_i\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)\frac{\partial\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial\theta_{8i}}\delta\theta_{8i} \right) \mathbf{r}_{G2i}
\end{aligned} \tag{4.4c}$$

Transformando a la base local  $(\mathbf{x}_{8i}, \mathbf{y}_{8i}, \mathbf{z}_{8i})$  a través de las siguientes rotaciones:

$$\mathbf{R}_{0,8i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})$$

esta última nos proyecta a la base inercial  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ , para proyectar a la base local  $(\mathbf{x}_{8i}, \mathbf{y}_{8i}, \mathbf{z}_{8i})$  se procede como:

$$\mathbf{R}_{8i,0} = \mathbf{R}_{0,8i}^T = \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(-\epsilon_i)\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i})$$

aplicando la ec. anterior a la ec (4. 4c) tenemos:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{R}_{G2i}^{8i} &= \mathbf{R}_{8i,0} \delta\mathbf{R}_{G2i} = \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(-\epsilon_i) \frac{\partial\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial\theta_{3i}} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) \delta\theta_{3i} + \\ &\quad \left( \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(-\epsilon_i) \frac{\partial\mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial\epsilon_i} \delta\epsilon_i \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \frac{\partial\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial\theta_{8i}} \delta\theta_{8i} \right) \mathbf{r}_{G2i} \end{aligned}$$

renombrando términos:

$$\delta\mathbf{R}_{G2i}^{8i} = \mathbf{U}_{2i}(\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i})\delta\theta_{3i} + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G2i} \delta\epsilon_i + \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{G2i} \delta\theta_{8i}$$

donde:

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_i &= \delta\theta_{3i} - \delta\theta_{7i} \\ \mathbf{U}_{2i} &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(-\epsilon_i) \frac{\partial\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial\theta_{3i}} \\ \mathbf{U}_{3i} &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(-\epsilon_i) \frac{\partial\mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial\epsilon_i} \\ \mathbf{U}_{4i} &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \frac{\partial\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial\theta_{8i}} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{R}_{G2i}^{8i} &= (\mathbf{U}_{2i}(\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G2i})\delta\theta_{3i} - \\ &\quad \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G2i} \delta\theta_{7i} + \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{G2i} \delta\theta_{8i} \end{aligned} \tag{4.4d}$$

### Centro de Gravedad 3i

Para el cuerpo 3i observamos en la fig. (4.4) la construcción vectorial siguiente:

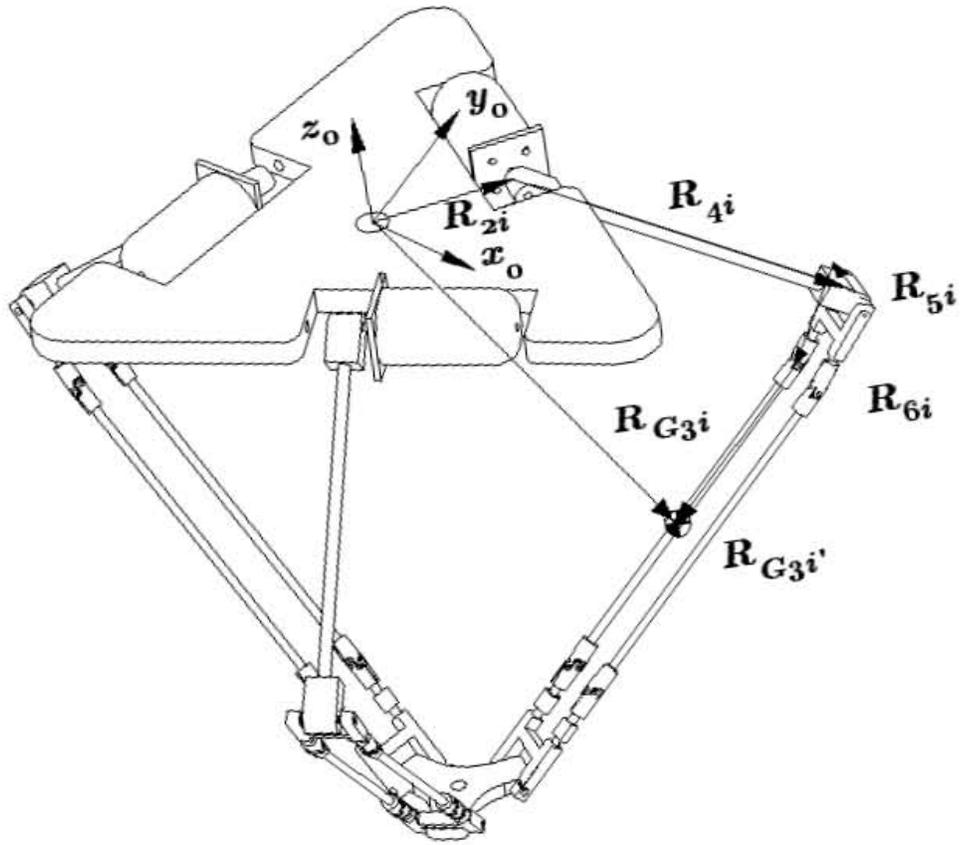


Fig. 4.4 Ubicación del centro de gravedad del cuerpo 3i

$$\mathbf{R}_{G3i} = \mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}_{4i} - \mathbf{R}_{5i} + \mathbf{R}_{6i} + \mathbf{R}'_{G3i} \quad (4.5a)$$

Obteniendo sus desplazamientos virtuales y observando que las expresiones para el centro de gravedad del cuerpo 2i, difieren sólo por el signo del vector  $\mathbf{R}_{5i}$ , por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}'_{G3i} = & (\mathbf{U}_{2i}(\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G3i}) \delta \theta_{3i} - \\ & \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G3i} \delta \theta_{7i} + \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{G3i} \delta \theta_{8i} \end{aligned} \quad (4.5b)$$

## Centro de Gravedad 5i

El centro de gravedad de este cuerpo, se puede observar en la fig. (4.5):

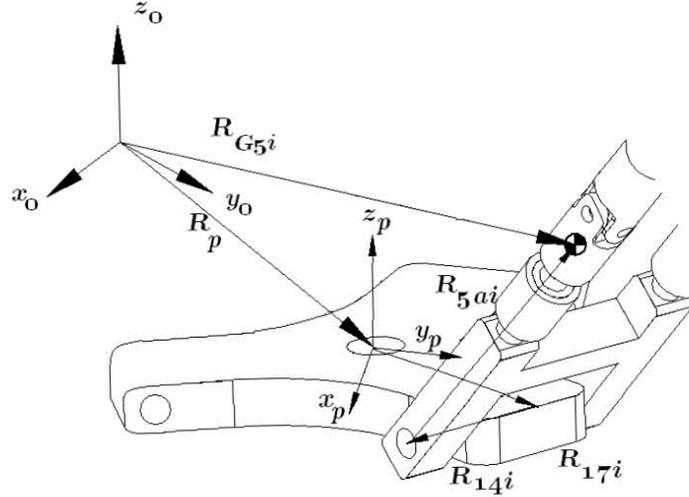


Fig. 4.5 Ubicación del centro de gravedad del cuerpo 5i

$$\mathbf{R}_{G5i} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{17i} + \mathbf{R}_{14i} + \mathbf{R}_{5ai} \quad (4.6a)$$

con los vectores siguientes definidos en la base inercial:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_p &= [x_p, y_p, z_p]^T \\ \mathbf{R}_{17i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{r}_{17i} \\ \mathbf{R}_{14i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i})\mathbf{r}_{14i} \\ \mathbf{R}_{5ai} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i})\mathbf{r}_{5ai} \end{aligned}$$

con los siguientes y vectores definidos en la base local correspondiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{14i} &= [0, -d_{14i}, 0]^T \\ \mathbf{r}_{17i} &= [d_{17i}, 0, 0]^T \\ \mathbf{r}_{5ai} &= [0, 0, d_{5ai}]^T \end{aligned}$$

ahora obteniendo los desplazamientos virtuales de la ec.(4. 6a):

$$\delta\mathbf{R}_{G5i} = \delta\mathbf{R}_p + \delta\mathbf{R}_{17i} + \delta\mathbf{R}_{14i} + \delta\mathbf{R}_{5ai} \quad (4.6b)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{R}_p &= [\delta x_p, \delta y_p, \delta z_p]^T \\
\delta \mathbf{R}_{17i} &= \mathbf{0} \\
\delta \mathbf{R}_{14i} &= \mathbf{0} \\
\delta \mathbf{R}_{5ip} &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.6c}$$

Sustituyendo valores de ec.(4. 6c) en (4. 6b):

$$\delta \mathbf{R}_{G5i} = \delta \mathbf{R}_p \tag{4.6d}$$

### Centro de Gravedad 6i

Debido a que este cuerpo es paralelo siempre al cuerpo 5i, la construcción del lazo vectorial solo difiere en el signo de un vector, por lo tanto el lazo vectorial, es el siguiente:

$$\mathbf{R}_{G6i} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{17i} - \mathbf{R}_{14i} + \mathbf{R}_{6ai} \tag{4.7a}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{6pi} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i})\mathbf{r}_{6ai} \\
\mathbf{r}_{6ai} &= [0, 0, d_{6pi}]^T
\end{aligned}$$

obteniendo los desplazamientos virtuales de la ec.(4. 7a):

$$\delta \mathbf{R}_{G6i} = \delta \mathbf{R}_p + \delta \mathbf{R}_{17i} + \delta \mathbf{R}_{14i} + \delta \mathbf{R}_{6ai} \tag{4.7b}$$

donde:

$$\delta \mathbf{R}_{6ai} = \mathbf{0} \tag{4.7c}$$

Sustuyendo valores de ec.(4. 6c), (4. 7c) en (4. 7a):

$$\delta \mathbf{R}_{G6i} = \delta \mathbf{R}_p \tag{4.7d}$$

### Centro de Gravedad de la Plataforma Móvil p

El lazo vectorial siguiente se muestra en la figura (4.6):

$$\mathbf{R}_{plato} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}'_{G4} \quad (4.8a)$$

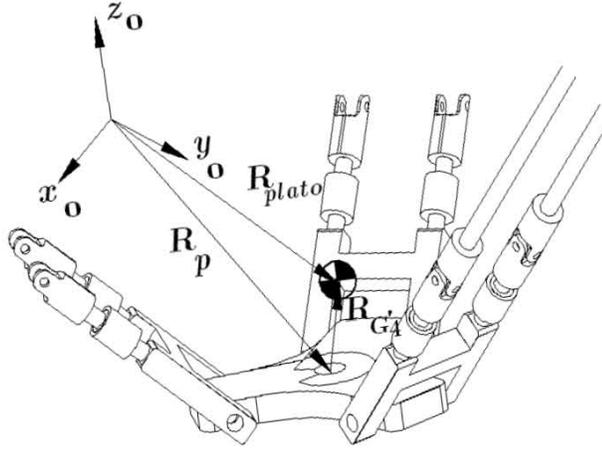


Fig. 4.6 Ubicación del centro de gravedad del cuerpo 4.

donde :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_p &= [x_p, y_p, z_p]^T \\ \mathbf{R}'_{G4} &= [x_{G4}, y_{G4}, z_{G4}]^T \end{aligned}$$

estos vectores son medidos en la base local  $(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p)$ , esta base es paralela a la base inercial  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ . Tomando sus desplazamientos virtuales:

$$\delta \mathbf{R}_{plato} = \delta \mathbf{R}_p + \delta \mathbf{R}'_{G4} \quad (4.8b)$$

con:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R}_p &= [\delta x_p, \delta y_p, \delta z_p]^T \\ \delta \mathbf{R}'_{G4} &= [0, 0, 0]^T \end{aligned} \quad (4.8c)$$

sustituyendo ec.(4. 8c) en (4. 8b):

$$\delta \mathbf{R}_{plato} = \delta \mathbf{R}_p \quad (4.8d)$$

## 4.2.2 Velocidades de Centros de Gravedad

### Velocidad de Centro de Gravedad 1i

Derivando la ec. (4. 3a):

$$\dot{\mathbf{R}}_{G1i} = \dot{\mathbf{R}}_{2i} + \dot{\mathbf{R}}'_{G1i} \quad (4.9a)$$

para cada término tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{2i} &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{R}}'_{G1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{G1i} \\ &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}}\dot{\theta}_{3i}\mathbf{r}_{G1i} \end{aligned} \quad (4.9b)$$

sustituyendo ec. (4. 9b) en (4. 9a):

$$\dot{\mathbf{R}}_{G1i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}}\dot{\theta}_{3i}\mathbf{r}_{G1i} \quad (4.9c)$$

### Velocidad de Centro de Gravedad 2i

Derivando la ec. (4. 4a) obtenemos:

$$\dot{\mathbf{R}}_{G2i} = \dot{\mathbf{R}}_{2i} + \dot{\mathbf{R}}_{4i} + \dot{\mathbf{R}}_{5i} + \dot{\mathbf{R}}_{6i} + \dot{\mathbf{R}}'_{G2i} \quad (4.10a)$$

derivando los vectores;

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{4i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{4i} \\ \dot{\mathbf{R}}_{5i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{5i} \\ \dot{\mathbf{R}}_{6i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{6i} \\ \dot{\mathbf{R}}'_{G2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})(\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i)\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \\ &\quad \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)\dot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i}))\mathbf{r}_{G2i} \end{aligned} \quad (4.10b)$$

### Velocidad de Centro de Gravedad 3i

Derivando la ec, (4. 5a) obtenemos:

$$\dot{\mathbf{R}}_{G3i} = \dot{\mathbf{R}}_{2i} + \dot{\mathbf{R}}_{4i} - \dot{\mathbf{R}}_{5i} + \dot{\mathbf{R}}_{6i} + \dot{\mathbf{R}}'_{G3i} \quad (4.11a)$$

derivando el vector  $\dot{\mathbf{R}}'_{G3i}$ :

$$\dot{\mathbf{R}}'_{G3i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\left(\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i)\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)\dot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i})\right)\mathbf{r}_{G3i} \quad (4.11b)$$

y con las velocidades de vectores previamente obtenidos se tiene la velocidad  $\dot{\mathbf{R}}_{G3i}$ .

### Velocidad de Centro de Gravedad 5i

De ec.(4. 6a) derivando para obtener su velocidad, tenemos:

$$\dot{\mathbf{R}}_{G5i} = \dot{\mathbf{R}}_p + \dot{\mathbf{R}}_{17i} + \dot{\mathbf{R}}_{14i} + \dot{\mathbf{R}}_{5ai} \quad (4.12a)$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_p &= [\dot{x}_p \quad \dot{y}_p \quad \dot{z}_p]^T \\ \dot{\mathbf{R}}_{17i} &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{R}}_{14i} &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{R}}_{5ai} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

sustituyendo los vectores de velocidad arriba mencionados en ec (4. 12a):

$$\dot{\mathbf{R}}_{G5i} = \dot{\mathbf{R}}_p \quad (4.12b)$$

### Velocidad de Centro de Gravedad 6i

De ec. (4. 7a) derivando para obtener su velocidad, tenemos:

$$\dot{\mathbf{R}}_{G6i} = \dot{\mathbf{R}}_p + \dot{\mathbf{R}}_{17i} - \dot{\mathbf{R}}_{14i} + \dot{\mathbf{R}}_{6ai} \quad (4.13a)$$

de modo que la velocidad de  $\dot{\mathbf{R}}_{G6i}$  es:

$$\dot{\mathbf{R}}_{G6i} = \dot{\mathbf{R}}_p \quad (4.13b)$$

### Velocidad de Centro de Gravedad de la Plataforma Móvil p.

Derivando la ec (4. 8a) tenemos el vector de velocidad del centro de gravedad de la plataforma móvil p:

$$\dot{\mathbf{R}}_{plato} = \dot{\mathbf{R}}_p + \dot{\mathbf{R}}'_{G4} \quad (4.14a)$$

con los valores de los siguientes vectores:

$$\dot{\mathbf{R}}'_{G4} = \mathbf{0}$$

de modo que la velocidad del centro de gravedad de la plataforma móvil p es:

$$\dot{\mathbf{R}}_{plato} = \dot{\mathbf{R}}_p \quad (4.14b)$$

### 4.2.3 Aceleraciones de Centros de Gravedad

#### Aceleración de Centro de Gravedad 1i

Derivando la ec. (4. 9a) con respecto al tiempo:

$$\ddot{\mathbf{R}}_{G1i} = \ddot{\mathbf{R}}_{2i} + \ddot{\mathbf{R}}'_{G1i} \quad (4.15a)$$

y tomando la siguiente expresión general:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \dot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{R}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \theta^2} (\dot{\theta})^2 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \ddot{\theta} \end{aligned}$$

para cada término tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_{2i} &= \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{R}}'_{G1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{r}_{G1i} \\ &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \left( \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}^2} (\dot{\theta}_{3i})^2 + \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \ddot{\theta}_{3i} \right) \mathbf{r}_{G1i} \end{aligned} \quad (4.15b)$$

sustituyendo ec. (4. 15b) en ec.(4. 15a):

$$\ddot{\mathbf{R}}_{G1i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \left( \frac{\partial^2 (\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}))}{\partial \theta_{3i}^2} (\dot{\theta}_{3i})^2 + \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \ddot{\theta}_{3i} \right) \mathbf{r}_{G1i} \quad (4.15c)$$

Transformándola a la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  con la siguiente matriz de rotación:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{3i,0} &= \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i}) \\ \ddot{\mathbf{R}}_{G1i}^{3i} &= \mathbf{R}_{3i,0} \ddot{\mathbf{R}}_{G1i} \\ \mathbf{a}_{G1i} &= \ddot{\mathbf{R}}_{G1i}^{3i} = \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \left( \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}^2} (\dot{\theta}_{3i})^2 + \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \ddot{\theta}_{3i} \right) \mathbf{r}_{G1i} \end{aligned} \quad (4.15d)$$

#### Aceleración de Centro de Gravedad 2i

Derivando la ec. (4. 10a) obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{R}}_{G2i} = \ddot{\mathbf{R}}_{2i} + \ddot{\mathbf{R}}_{4i} + \ddot{\mathbf{R}}_{5i} + \ddot{\mathbf{R}}_{6i} + \ddot{\mathbf{R}}'_{G2i} \quad (4.16a)$$

derivando los vectores:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}}_{2i} &= \mathbf{0} \\
\ddot{\mathbf{R}}_{4i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{4i} \\
\ddot{\mathbf{R}}_{5i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{5i} \\
\ddot{\mathbf{R}}_{6i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{6i} \\
\ddot{\mathbf{R}}'_{G2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})(\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i)\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + 2\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i)\dot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i}) + \\
&\quad \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)\ddot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i}))\mathbf{r}_{G2i}
\end{aligned}$$

donde las derivadas de las matrices de rotación son:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i) &= \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \dot{\epsilon}_i \\
\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i) &= \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i^2} (\dot{\epsilon}_i)^2 + \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \ddot{\epsilon}_i \\
\dot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i}) &= \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \dot{\theta}_{8i} \\
\ddot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i}) &= \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}^2} (\dot{\theta}_{8i})^2 + \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \ddot{\theta}_{8i}
\end{aligned}$$

Transformando a la base local  $(\mathbf{x}_{8i}, \mathbf{y}_{8i}, \mathbf{z}_{8i})$ :

$$\mathbf{R}_{8i,0} = \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(-\epsilon_i)\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i})$$

aplicando a la ec.(4,16a) para obtenerla en la base local  $(\mathbf{x}_{8i}, \mathbf{y}_{8i}, \mathbf{z}_{8i})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{G2i} &= \ddot{\mathbf{R}}_{G2i}^{8i} = \mathbf{R}_{8i,0}\ddot{\mathbf{R}}_{G2i} \\
&= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(-\epsilon_i)(\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})(\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \\
&\quad (\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i)\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + 2\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i)\dot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i}))\mathbf{r}_{G2i}) + \\
&\quad \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\ddot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{r}_{G2i}
\end{aligned} \tag{4.16b}$$

con:

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_i &= \dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i} \\
\ddot{\epsilon}_i &= \ddot{\theta}_{3i} - \ddot{\theta}_{7i}
\end{aligned}$$

### Aceleración de Centro de Gravedad 3i

Observando que las expresiones para la aceleración del centro de gravedad 3i, difieren de la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 2i solo por el signo del vector  $\mathbf{R}_{5i}$  se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{G3i} &= \ddot{\mathbf{R}}_{G3i}^{8i} = \mathbf{R}_{8i,0}\ddot{\mathbf{R}}_{G3i} \\
&= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(-\epsilon_i)(\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})(\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + (\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i)\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \\
&\quad 2\dot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i)\dot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i}))\mathbf{r}_{G3i}) + \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\ddot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{r}_{G3i}
\end{aligned} \tag{4.17a}$$

transformando a la base local  $(\mathbf{x}_{8i}, \mathbf{y}_{8i}, \mathbf{z}_{8i})$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{G3i} &= \ddot{\mathbf{R}}_{G3i}^{8i} = \mathbf{R}_{8i,0} \ddot{\mathbf{R}}_{G3i} \\ &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{R}_{z5}(-\epsilon_i) (\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\theta_{3i})(\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + (\ddot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \\ &\quad 2 \dot{\mathbf{R}}_{z5}(\epsilon_i) \dot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i})) \mathbf{r}_{G3i}) + \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \ddot{\mathbf{R}}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G3i} \end{aligned} \quad (4.17b)$$

### Aceleración del Centro de Gravedad 5i

Derivando ec. (4. 12a), se tiene:

$$\ddot{\mathbf{R}}_{G5i} = \ddot{\mathbf{R}}_p + \ddot{\mathbf{R}}_{17i} + \ddot{\mathbf{R}}_{14i} + \ddot{\mathbf{R}}_{5ai} \quad (4.18a)$$

donde:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_p &= [\ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p]^T \\ \ddot{\mathbf{R}}_{17i} &= \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{R}}_{14i} &= \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{R}}_{5ai} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

sustituyendo los vectores de aceleración arriba mencionados y sustituyendo en ec. (4. 18a):

$$\ddot{\mathbf{R}}_{G5i} = \ddot{\mathbf{R}}_p \quad (4.18b)$$

### Aceleración del Centro de Gravedad 6i

Derivando ec. (4. 13a), se tiene:

$$\ddot{\mathbf{R}}_{G6i} = \ddot{\mathbf{R}}_p + \ddot{\mathbf{R}}_{17i} - \ddot{\mathbf{R}}_{14i} + \ddot{\mathbf{R}}_{6ai} \quad (4.19a)$$

por lo tanto:

$$\ddot{\mathbf{R}}_{G6i} = \ddot{\mathbf{R}}_p \quad (4.19b)$$

### Aceleración del Centro de Gravedad de la Plataforma Móvil p

Este es un dato que se proporciona, por lo tanto:

$$\mathbf{a}_{Gp} = [\ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p]^T \quad (4.20a)$$

#### 4.2.4 Fuerzas y Momentos Inerciales

Las velocidades y aceleraciones angulares totales de los cuerpos, están definidas en sus respectivas bases locales. Por las características del método las matrices de inercia están siendo medidas en el centro de gravedad correspondiente a cada cuerpo.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{1i}^{3i} &= m_{1i} \mathbf{a}_{G1i} \\
 \mathbf{F}_{2i}^{8i} &= m_{2i} \mathbf{a}_{G2i} \\
 \mathbf{F}_{3i}^{8i'} &= m_{3i} \mathbf{a}_{G3i} \\
 \mathbf{F}_{5i}^p &= m_{5i} \mathbf{a}_{G5i} \\
 \mathbf{F}_{6i}^p &= m_{6i} \mathbf{a}_{G6i} \\
 \mathbf{F}_p^p &= m_4 \mathbf{a}_{Gp}
 \end{aligned} \tag{4.21a}$$

Obteniendo momentos inerciales en la base local

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{1i}^{3i} &= \mathbf{I}_{G1i} \boldsymbol{\alpha}_{3i,0}^1 + \boldsymbol{\Omega}_{3i,0}^1 (\mathbf{I}_{G1i} \boldsymbol{\omega}_{3i,0}^1) \\
 \mathbf{M}_{2i}^{8i} &= \mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\alpha}_{8i,0}^2 + \boldsymbol{\Omega}_{8i,0}^2 (\mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^2) \\
 \mathbf{M}_{3i}^{8i'} &= \mathbf{I}_{G3i} \boldsymbol{\alpha}_{8i,0}^3 + \boldsymbol{\Omega}_{8i,0}^3 (\mathbf{I}_{G3i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^3)
 \end{aligned} \tag{4.21b}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\alpha}_{3i,0}^1 &= \boldsymbol{\alpha}_{3i} \\
 \boldsymbol{\alpha}_{8i,0}^2 &= \mathbf{R}_{8i,0} \boldsymbol{\alpha}_{0,7i}^2 \\
 \boldsymbol{\alpha}_{8i,0}^3 &= \mathbf{R}_{8i,0} \boldsymbol{\alpha}_{0,7i}^2 \\
 \boldsymbol{\Omega}_{3i,0}^1 &= \boldsymbol{\Omega}_{3i} \\
 \boldsymbol{\Omega}_{8i,0}^2 &= \mathbf{R}_{8i,0} \boldsymbol{\Omega}_{0,7i}^2 \mathbf{R}_{8i,0}^T \\
 \boldsymbol{\Omega}_{8i,0}^3 &= \mathbf{R}_{8i,0} \boldsymbol{\Omega}_{0,7i}^3 \mathbf{R}_{8i,0}^T \\
 \boldsymbol{\omega}_{3i,0}^1 &= \mathbf{R}_{8i,0} \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 \\
 \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^2 &= \mathbf{R}_{8i,0} \boldsymbol{\omega}_{0,7i}^2 \\
 \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^3 &= \mathbf{R}_{8i,0} \boldsymbol{\omega}_{0,7i}^2
 \end{aligned}$$

Las velocidades y aceleraciones angulares inerciales se muestran en el capítulo 3 ecs.(3. 3a), (3. 5b), (3. 7a), (3. 8b), (3. 9b), (3. 12c), y (3. 13c).

### 4.2.5 Desplazamientos Virtuales $\delta\mathbf{Q}_{1i}$ , $\delta\mathbf{Q}_{2i}$ , $\delta\mathbf{Q}_{3i}$

A partir de la definición [15], que relaciona las velocidades angulares con los desplazamientos virtuales:

$$\delta\mathbf{Q}_i = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}}\delta q \quad (4.22a)$$

y aplicando a ec. (3. 5b) tenemos para el primer desplazamiento virtual en el sistema inercial:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{Q}_{1i} &= \frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1}{\partial\dot{\theta}_{3i}}\delta\theta_{3i} \\ \delta\mathbf{Q}_{1i} &= \frac{\partial\mathbf{R}_{0,3i}\boldsymbol{\omega}_{3i}}{\partial\dot{\theta}_{3i}}\delta\theta_{3i} \end{aligned}$$

y tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{3i} &= \dot{\theta}_{3i}\mathbf{y}_{3i} \\ \boldsymbol{\omega}_{7i} &= -\dot{\theta}_{7i}\mathbf{y}_{7i} \\ \boldsymbol{\omega}_{8i} &= -\dot{\theta}_{8i}\mathbf{x}_{3i} \end{aligned}$$

llevando a la base local  $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$  queda:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{q}_{1i} &= \mathbf{R}_{3i,0}\delta\mathbf{Q}_{1i} \\ &= \mathbf{R}_{3i,0}\frac{\partial(\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\dot{\theta}_{3i}\mathbf{y}_{3i})}{\partial\dot{\theta}_{3i}}\delta\theta_{3i} \\ &= \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i})\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i})\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{y}_{3i}\delta\theta_{3i} \\ \delta\mathbf{q}_{1i} &= \mathbf{y}_{3i}\delta\theta_{3i} \end{aligned} \quad (4.22b)$$

Desarrollando el término  $\delta\mathbf{Q}_{2i}$  y aplicando a ec.(3. 8a):

$$\delta\mathbf{Q}_{2i} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{0,8i}^2}{\partial\dot{\theta}_{3i}}\delta\theta_{3i} + \frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{0,8i}^2}{\partial\dot{\theta}_{7i}}\delta\theta_{7i} + \frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{0,8i}^2}{\partial\dot{\theta}_{8i}}\delta\theta_{8i}$$

obteniendo cada término de la ecuación anterior y sustituyendo los terminos  $\boldsymbol{\omega}_{3i}, \boldsymbol{\omega}_{7i}, \boldsymbol{\omega}_{8i}$  respectivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{0,8i}^2}{\partial \dot{\theta}_{3i}} &= \frac{\partial(\boldsymbol{\omega}_{0,3i} + \boldsymbol{\omega}_{0,7i} + \boldsymbol{\omega}_{0,8i})}{\partial \dot{\theta}_{3i}} = \\
&= \frac{\partial \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \dot{\theta}_{3i} \mathbf{y}_{3i}}{\partial \dot{\theta}_{3i}} + \frac{\partial \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \boldsymbol{\omega}_{7i}}{\partial \dot{\theta}_{3i}} + \\
&\quad \frac{\partial \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \boldsymbol{\omega}_{8i}}{\partial \dot{\theta}_{3i}} \\
&= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{y}_{3i} \\
\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{0,8i}^2}{\partial \dot{\theta}_{7i}} &= \frac{\partial(\boldsymbol{\omega}_{0,3i} + \boldsymbol{\omega}_{0,7i} + \boldsymbol{\omega}_{0,8i})}{\partial \dot{\theta}_{7i}} = \\
&= \frac{\partial \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) (-\dot{\theta}_{7i} \mathbf{y}_{7i})}{\partial \dot{\theta}_{7i}} + \frac{\partial \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \boldsymbol{\omega}_{7i}}{\partial \dot{\theta}_{7i}} + \\
&\quad \frac{\partial \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \boldsymbol{\omega}_{8i}}{\partial \dot{\theta}_{7i}} \\
&= -\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{y}_{7i} \\
\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{0,8i}^2}{\partial \dot{\theta}_{8i}} &= \frac{\partial(\boldsymbol{\omega}_{0,3i} + \boldsymbol{\omega}_{0,7i} + \boldsymbol{\omega}_{0,8i})}{\partial \dot{\theta}_{8i}} = \\
&= \frac{\partial \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \boldsymbol{\omega}_{3i}}{\partial \dot{\theta}_{8i}} + \frac{\partial \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \boldsymbol{\omega}_{7i}}{\partial \dot{\theta}_{8i}} + \\
&\quad \frac{\partial \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) (-\dot{\theta}_{8i} \mathbf{x}_{8i})}{\partial \dot{\theta}_{8i}} \\
&= -\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \mathbf{x}_{8i}
\end{aligned}$$

sustituyendo los valores anteriores en  $\delta \mathbf{Q}_{2i}$ :

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{Q}_{2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \hat{y}_{3i} \delta \theta_{3i} - \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \hat{y}_{7i} \delta \theta_{7i} - \\
&\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \hat{x}_{8i} \delta \theta_{8i}
\end{aligned}$$

Llevando a la base local  $(\mathbf{x}_{8i}, \mathbf{y}_{8i}, \mathbf{z}_{8i})$ , la expresión anterior a través de la matriz antes definida  $\mathbf{R}_{8i,0}$ :

$$\delta \mathbf{q}_{2i} = \mathbf{R}_{8i,0} \delta \mathbf{Q}_{2i}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{q}_{2i} &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \mathbf{y}_{3i} \delta \theta_{3i} - \\
&\quad \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i}) \mathbf{y}_{7i} \delta \theta_{7i} - \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{x}_{8i} \delta \theta_{8i}
\end{aligned} \tag{4.22c}$$

Para el desplazamiento  $\delta \mathbf{q}_{3i}$  se tiene:

$$\delta \mathbf{q}_{3i} = \delta \mathbf{q}_{2i} \quad (4.22d)$$

La ec. (4. 1a) está referida al sistema inercial, sin embargo se desea mostrar que no importando donde se referencien los elementos de esta ecuación se encontrará el mismo resultado.

Por lo tanto llevando los elementos de la ec.(4. 1a) a los marcos de referencia correspondientes se tiene:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{W}_{1i}^{3i} - \mathbf{F}_{1i}^{3i})^T \delta \mathbf{R}_{G1i}^{3i} + (\mathbf{T}_i^{3i} - \mathbf{M}_{1i}^{3i})^T \delta \mathbf{q}_{1i} + \\ & (\mathbf{W}_{2i}^{8i} - \mathbf{F}_{2i}^{8i})^T \delta \mathbf{R}_{G2i}^{8i} - (\mathbf{M}_{2i}^{8i})^T \delta \mathbf{q}_{2i} + \\ & (\mathbf{W}_{3i}^{8i'} - \mathbf{F}_{3i}^{8i'})^T \delta \mathbf{R}_{G3i}^{8i'} - (\mathbf{M}_{3i}^{8i'})^T \delta \mathbf{q}_{3i} + (W_{plato}^p + \\ & W_{carga}^p + \mathbf{W}_{5i}^p + \mathbf{W}_{6i}^p - \mathbf{F}_{5i}^p - \mathbf{F}_{6i}^p - \mathbf{F}_p^p)^T \delta \mathbf{R}_p^p = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.23a)$$

donde:

$$\mathbf{T}_i^{3i} = T_i \mathbf{y}_{3i}$$

$$T_i = [T_1, T_2, T_3]^T$$

Renombrando términos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Ai} &= \mathbf{W}_{1i}^{3i} - \mathbf{F}_{1i}^{3i} \\ \mathbf{F}_{Bi} &= \mathbf{W}_{2i}^{8i} - \mathbf{F}_{2i}^{8i} \\ \mathbf{F}_{Ci} &= \mathbf{W}_{3i}^{8i'} - \mathbf{F}_{3i}^{8i'} \\ \mathbf{F}_{Di} &= \mathbf{W}_{plato}^p + \mathbf{W}_{carga}^p + \mathbf{W}_{5i}^p + \mathbf{W}_{6i}^p - \mathbf{F}_{5i}^p - \mathbf{F}_{6i}^p - \mathbf{F}_p^p \end{aligned}$$

Sustituyendo ec. de desplazamientos virtuales (4. 3e), (4. 4d), (4. 5b), (4. 7d), (4. 8d), (4. 22b), (4. 22c) y (4. 22d) se tiene:

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_{Ai}^T (\mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{G1i} \delta \theta_{3i}) + (\mathbf{T}_i^{3i})^T \mathbf{y}_{3i} \delta \theta_{3i} - (\mathbf{M}_{1i}^{3i})^T \mathbf{y}_{3i} \delta \theta_{3i} + \\ & \mathbf{F}_{Bi}^T [\mathbf{U}_{2i} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G2i}] \delta \theta_{3i} - \mathbf{F}_{Bi}^T \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G2i} \delta \theta_{7i} + \\ & \mathbf{F}_{Bi}^T \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{G2i} \delta \theta_{8i} - (\mathbf{M}_{2i}^{8i})^T \mathbf{y}'_{3i} \delta \theta_{3i} + (\mathbf{M}_{2i}^{8i})^T \mathbf{y}'_{7i} \delta \theta_{7i} + \\ & (\mathbf{M}_{2i}^{8i})^T \mathbf{x}_{8i} \delta \theta_{8i} + \mathbf{F}_{Ci}^T [\mathbf{U}_{2i} (\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G3i}] \delta \theta_{3i} - \\ & \mathbf{F}_{Ci}^T \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G3i} \delta \theta_{7i} + \mathbf{F}_{Ci}^T \mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{G3i} \delta \theta_{8i} - (\mathbf{M}_{3i}^{8i'})^T \mathbf{y}'_{3i} \delta \theta_{3i} + \\ & \mathbf{M}_{3i}^{8i'}{}^T \mathbf{y}'_{7i} \delta \theta_{7i} + (\mathbf{M}_{3i}^{8i'})^T \mathbf{x}_{8i} \delta \theta_{8i} + \mathbf{F}_{Di}^T \delta \mathbf{R}_p^p = \mathbf{0} \end{aligned}$$

los terminos  $\mathbf{y}'_{3i}$ ,  $\mathbf{y}'_{7i}$  son respectivamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'_{3i} &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \mathbf{y}_{3i} \\ \mathbf{y}'_{7i} &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i}) \mathbf{y}_{7i}\end{aligned}$$

Agrupando en términos de desplazamientos virtuales:  $\delta\theta_{3i}$ ,  $\delta\theta_{7i}$ ,  $\delta\theta_{8i}$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{T}_i^{3i})^T \hat{y}_{3i} \delta\theta_{3i} + (\mathbf{F}_{Ai}^T(\mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{G1i}) - (\mathbf{M}_{1i}^{3i})^T \hat{y}_{3i} + \mathbf{F}_{Bi}^T(\mathbf{U}_{2i}(\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \\ & \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G2i}) - (\mathbf{M}_{2i}^{8i})^T \hat{y}'_{3i} + \mathbf{F}_{Ci}^T(\mathbf{U}_{2i}(\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G3i}) - \\ & (\mathbf{M}_{3i}^{8i'})^T \hat{y}'_{3i})\delta\theta_{3i} + (-\mathbf{F}_{Bi}^T(\mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G2i}) + (\mathbf{M}_{2i}^{8i})^T \hat{y}'_{7i} - \mathbf{F}_{Ci}^T(\mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G3i}) + \\ & (\mathbf{M}_{3i}^{8i'})^T \hat{y}'_{7i})\delta\theta_{7i} + (\mathbf{F}_{Bi}^T(\mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{G2i}) + (\mathbf{M}_{2i}^{8i})^T \hat{x}_{8i} + \mathbf{F}_{Ci}^T(\mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{G3i}) + \\ & (\mathbf{M}_{3i}^{8i'})^T \hat{x}_{8i})\delta\theta_{8i} + \mathbf{F}_{Di}^T \delta\mathbf{R}_p = \mathbf{0}\end{aligned}$$

renombrando nuevamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{Ei} &= \mathbf{F}_{Ai}^T(\mathbf{U}_{1i} \mathbf{r}_{G1i}) - (\mathbf{M}_{1i}^{3i})^T \mathbf{y}_{3i} + \mathbf{F}_{Bi}^T(\mathbf{U}_{2i}(\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G2i}) - \\ & (\mathbf{M}_{2i}^{8i})^T \mathbf{y}'_{3i} + \mathbf{F}_{Ci}^T(\mathbf{U}_{2i}(\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G3i}) - (\mathbf{M}_{3i}^{8i'})^T \mathbf{y}'_{3i} \\ \mathbf{F}_{Fi} &= -\mathbf{F}_{Bi}^T(\mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G2i}) + (\mathbf{M}_{2i}^{8i})^T \mathbf{y}'_{7i} - \mathbf{F}_{Ci}^T(\mathbf{U}_{3i} \mathbf{r}_{G3i}) + (\mathbf{M}_{3i}^{8i'})^T \mathbf{y}'_{7i} \\ \mathbf{F}_{Gi} &= \mathbf{F}_{Bi}^T(\mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{G2i}) + (\mathbf{M}_{2i}^{8i})^T \mathbf{x}_{8i} + \mathbf{F}_{Ci}^T(\mathbf{U}_{4i} \mathbf{r}_{G3i}) + (\mathbf{M}_{3i}^{8i'})^T \mathbf{x}_{8i}\end{aligned}$$

Sustituyendo las definiciones anteriores:

$$(\mathbf{T}_i^{3i})^T \mathbf{y}_{3i} \delta\theta_{3i} + \mathbf{F}_{Ei} \delta\theta_{3i} + \mathbf{F}_{Fi} \delta\theta_{7i} + \mathbf{F}_{Gi} \delta\theta_{8i} + \mathbf{F}_{Di}^T \delta\mathbf{R}_p = \mathbf{0}$$

distribuyendo esta expresión:

$$\mathbf{T}_i \delta\theta_{3i} + [\mathbf{F}_{Ei}, \mathbf{F}_{Fi}, \mathbf{F}_{Gi}] \begin{bmatrix} \delta\theta_{3i} \\ \delta\theta_{7i} \\ \delta\theta_{8i} \end{bmatrix} + \mathbf{F}_{Di}^T \delta\mathbf{R}_p = \mathbf{0}$$

renombrando:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{Hi} &= [\mathbf{F}_{Ei}, \mathbf{F}_{Fi}, \mathbf{F}_{Gi}] \\ \delta\boldsymbol{\theta}_i &= \begin{bmatrix} \delta\theta_{3i} \\ \delta\theta_{7i} \\ \delta\theta_{8i} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

por lo que resulta:

$$\sum_{i=1}^3 (T_i \delta\theta_{3i} + \mathbf{F}_{Hi} \delta\boldsymbol{\theta}_i + \mathbf{F}_{Di}^T \delta\mathbf{R}_p) = \mathbf{0} \quad (4.23b)$$

desarrollando los siguientes términos:

$$\delta\boldsymbol{\theta}_i = \begin{bmatrix} \delta\theta_{3i} \\ \delta\theta_{7i} \\ \delta\theta_{8i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{1i}} (E_{2i} \delta x_p + E_{3i} \delta y_p + E_{4i} \delta z_p) \\ \frac{1}{H_{1i}} (H_{2i} \delta x_p + H_{3i} \delta y_p + H_{4i} \delta z_p) \\ \frac{1}{F_{1i}} (F_{2i} \delta x_p + F_{3i} \delta y_p + F_{4i} \delta z_p) \end{bmatrix}$$

agrupando matricialmente:

$$\delta\boldsymbol{\theta}_i = \begin{bmatrix} \frac{E_{2i}}{E_{1i}} & \frac{E_{3i}}{E_{1i}} & \frac{E_{4i}}{E_{1i}} \\ \frac{H_{2i}}{H_{1i}} & \frac{H_{3i}}{H_{1i}} & \frac{H_{4i}}{H_{1i}} \\ \frac{F_{2i}}{F_{1i}} & \frac{F_{3i}}{F_{1i}} & \frac{F_{4i}}{F_{1i}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_p \\ \delta y_p \\ \delta z_p \end{bmatrix}$$

renombrando:

$$\mathbf{M}_{Ai} = \begin{bmatrix} \frac{E_{2i}}{E_{1i}} & \frac{E_{3i}}{E_{1i}} & \frac{E_{4i}}{E_{1i}} \\ \frac{H_{2i}}{H_{1i}} & \frac{H_{3i}}{H_{1i}} & \frac{H_{4i}}{H_{1i}} \\ \frac{F_{2i}}{F_{1i}} & \frac{F_{3i}}{F_{1i}} & \frac{F_{4i}}{F_{1i}} \end{bmatrix}$$

$$\delta\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} \delta x_p \\ \delta y_p \\ \delta z_p \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\delta\boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{M}_{Ai} \delta\mathbf{R}_p \quad (4.23c)$$

El término  $\sum_{i=1}^3 T_i \delta\theta_{3i}$  tiene la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^3 T_i \delta\theta_{3i} = T_1 \delta\theta_{31} + T_2 \delta\theta_{32} + T_3 \delta\theta_{33}$$

agrupando en terminos  $\delta\theta$  :

$$\sum_{i=1}^3 T_i \delta\theta_{3i} = [T_1, T_2, T_3] \begin{bmatrix} \delta\theta_{31} \\ \delta\theta_{32} \\ \delta\theta_{33} \end{bmatrix}$$

renombrando:

$$\sum_{i=1}^3 T_i \delta\theta_{3i} = \mathbf{T}_0 \delta\mathbf{S} \quad (4.23d)$$

donde:

$$\delta \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{E_{21}}{E_{11}} & \frac{E_{31}}{E_{11}} & \frac{E_{41}}{E_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{H_{31}}{H_{11}} & \frac{H_{41}}{H_{11}} \\ \frac{F_{21}}{F_{11}} & \frac{F_{31}}{F_{11}} & \frac{F_{41}}{F_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_p \\ \delta y_p \\ \delta z_p \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\delta \mathbf{S} = \mathbf{M}_B \delta \mathbf{R}_p \quad (4.23e)$$

Sustituyendo ec. (4. 23c), (4. 23d), (4. 23e) en (4. 23b):

$$\mathbf{T}_0 \mathbf{M}_B \delta \mathbf{R}_p + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{Hi} \mathbf{M}_{Ai} \delta \mathbf{R}_p + \mathbf{F}_{Di}^T \delta \mathbf{R}_p) = \mathbf{0}$$

agrupando en  $\delta \mathbf{R}_p$  :

$$\left( \mathbf{T}_0 \mathbf{M}_B + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{Hi} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{F}_{Di}^T) \right) \delta \mathbf{R}_p = \mathbf{0}$$

tomando en cuenta que :

$$\delta \mathbf{R}_p \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T}_0 \mathbf{M}_B + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{Hi} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{F}_{Di}^T) = \mathbf{0}$$

despejando  $\mathbf{T}_0$ :

$$\mathbf{T}_0 = - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_{Hi} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{F}_{Di}^T) \mathbf{M}_B^{-1} \quad (4.23f)$$

La ec. (4,23f) representa el torque necesario para mover el robot delta paralelo.

### 4.3 Solución de la ecuación de Trabajo Virtual

De acuerdo a la ec.(4. 23f), la solución es de tipo analítica, a diferencia de la solución de la ecuación de Newton - Euler. Cabe notar como se describió durante el análisis de trabajo virtual, las matrices de inercia son tomadas en centro de gravedad sin necesidad de transformarlas a una base en específico, debido al método empleado. Tenemos los valores de las matrices de inercia para el cuerpo 1i y 2i respectivamente a continuación:

$$\mathbf{I}_{G1i} = \begin{bmatrix} 0,00009678968 & -0,00000204550 & -0,00018560664 \\ -0,00000204550 & 0,00164065610 & 0,00000024601 \\ -0,00018560664 & 0,00000024601 & 0,00158426092 \end{bmatrix} \text{ [kg m}^4\text{]}$$

$$\mathbf{I}_{G2i} = \begin{bmatrix} 0,00061329563 & 0,00000000000 & -0,00000000007 \\ 0,00000000000 & 0,00061337355 & 0,00000000000 \\ -0,00000000007 & 0,00000000000 & 0,00000086673 \end{bmatrix} \text{ [kg m}^4\text{]}$$

Para el análisis estático, se muestra en la fig. (4. 7) la gráfica de torques, correspondiendo los torques a la trayectoria planteada en el apéndice B..

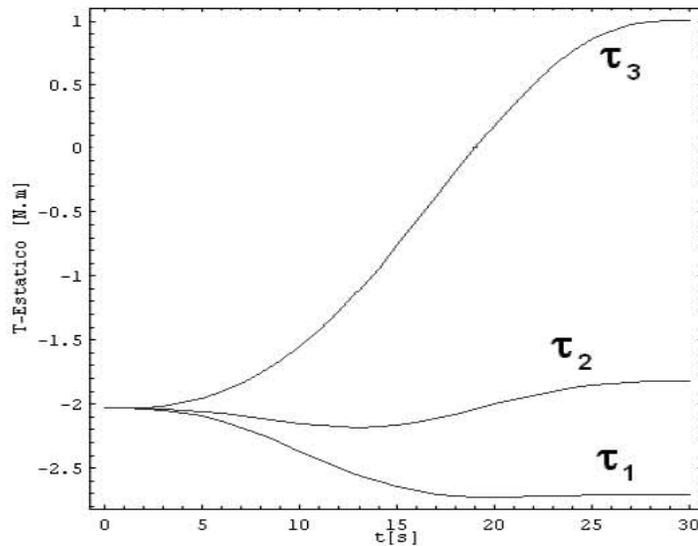


Fig. 4.7 Gráfica de torques estáticos

Para el análisis dinámico, se muestra en la fig. (4. 8) la gráfica de torques, correspondiendo los torques a la trayectoria planteada en el apéndice B.

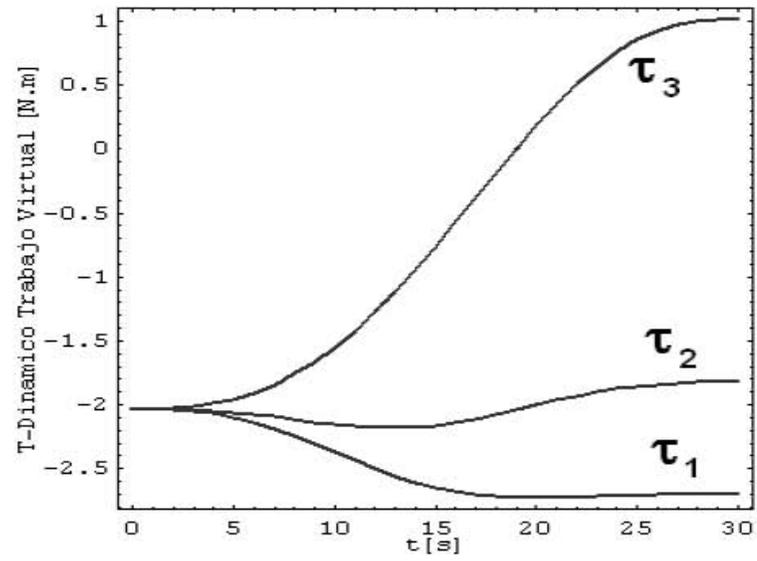


Fig. 4.8 Gráfica de torques dinámicos

# Capítulo 5

## Análisis Dinámico Formulación Euler - Lagrange

### 5.1 Introducción

La dinámica del robot delta paralelo es considerada nuevamente dentro de este capítulo, donde dada una trayectoria para el efector final se desea determinar los torques aplicados por los actuadores en los eslabones de entrada para alcanzar la trayectoria.

Las ecuaciones de Newton-Euler de movimiento contiene todas las fuerzas de restricción entre eslabones. Sin embargo operaciones adicionales son necesarias para eliminar estas fuerzas de restricción para obtener ecuaciones de una forma cerrada.

El método de Lagrange, en otras palabras, formula ecuaciones de movimiento usando un conjunto de coordenadas generalizadas [14]. Esto elimina todas o algunas de las fuerzas de restricción.

Con el entendimiento de la dinámica del manipulador, es posible diseñar un controlador con mejores características de ejecución que las realizadas con los típicos encontrados usando métodos heurísticos después de que ha sido construido el manipulador.

En este capítulo se empleara la siguiente notación:

- $\mathbf{I}_{ij}$  : matriz de inercia del cuerpo  $i$ , cadena  $j$
- $k$  : energía cinética del sistema mecánico
- $L$  : función lagrangiana
- $\mathbf{M}$  : matriz del manipulador
- $\mathbf{M}_{i,j}$  : matriz de elementos de masa del cuerpo  $i$ , cadena  $j$
- $q_j$  : coordenada  $j$  - *esima* generalizada
- $\mathbf{q}$  : vector de coordenadas generalizadas
- $U$  : energía potencial del sistema mecánico
- $Q_j$  : vector de fuerzas generalizadas

La función Lagrangiana es definida como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial de un sistema mecánico como [1]:

$$L = K - U \tag{5.1}$$

donde  $K$  es la energía cinética del sistema definida como:

$$K = \frac{1}{2} (m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega})$$

Y la energía potencial como:

$$U = -m \mathbf{g}^T \mathbf{R}_G$$

La energía cinética depende de la localización y la velocidad de los eslabones del manipulador, mientras la energía potencial depende únicamente de la localización de los eslabones. La ecuación de Lagrange de movimiento es formulada en términos de la función de Lagrange [16] como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q \quad (5.2a)$$

El término  $Q_j$  conocido como fuerzas generalizadas se obtendrá a partir de expresiones, que involucren los torques y coordenadas generalizadas.

En el presente capítulo se inicia retomando la definición de centros de gravedad, desarrollados previamente en el capítulo IV, para seguidamente obtener las velocidad de centros de gravedad y las velocidades angulares totales de los cuerpos, necesarias para el cálculo de energía cinética del manipulador. Se construye paso a paso los términos de la ec.(5,2a) hasta obtener la ecuación llamada "*forma general de la ecuación dinámica*", que tiene la forma:

$$\mathbb{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V}\dot{\mathbf{q}} + \mathbb{C} = \mathbf{Q} \quad (5.2b)$$

donde:

- $\mathbb{D}$  : Matriz de inercias
- $\mathbb{V}$  : Matriz de efectos de fuerzas de coriolis y fuerzas centrífugas
- $\mathbb{C}$  : Vector de fuerzas gravitacionales

## 5.2 Velocidad de Centros de Gravedad

Tomando las definiciones de los vectores de centro de gravedad, mostrados en el capítulo 4 de trabajo virtual, se tiene como se observa en la fig. (5.1):

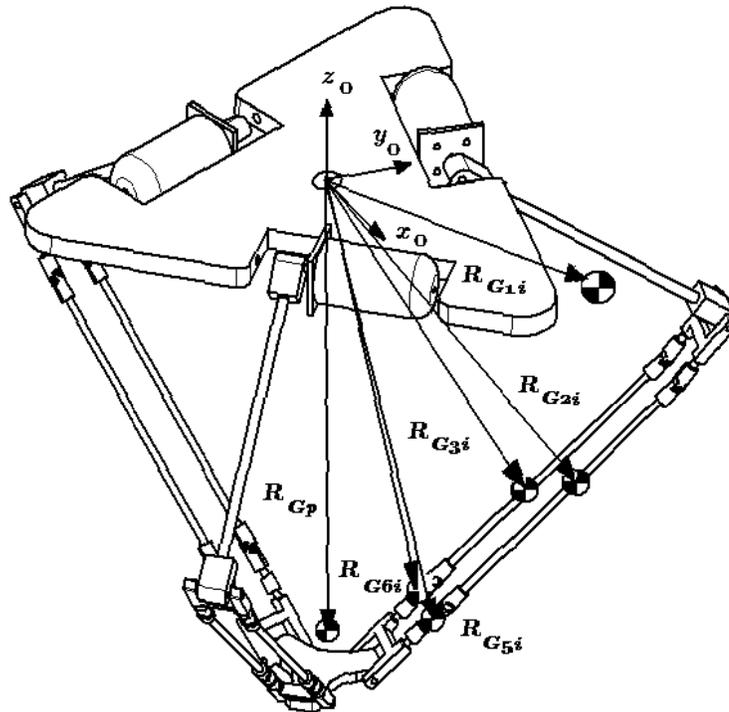


Fig. 5.1 Vectores de centros de gravedad

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{G1i} &= \mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}'_{G1i} \\
 \mathbf{R}_{G2i} &= \mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}_{4i} + \mathbf{R}_{5i} + \mathbf{R}_{6i} + \mathbf{R}'_{G2i} \\
 \mathbf{R}_{G3i} &= \mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}_{4i} - \mathbf{R}_{5i} + \mathbf{R}_{6i} + \mathbf{R}'_{G3i} \\
 \mathbf{R}_{G5i} &= \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{17i} + \mathbf{R}_{14i} + \mathbf{R}_{5ai} \\
 \mathbf{R}_{G6i} &= \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{17i} - \mathbf{R}_{14i} + \mathbf{R}_{6ai}
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{r}_{2i} \\
\mathbf{R}'_{G1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{G1i} \\
\mathbf{R}_{4i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{4i} \\
\mathbf{R}_{5i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{5i} \\
\mathbf{R}_{6i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{r}_{6i} \\
\mathbf{R}'_{G2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{r}_{G2i} \\
\mathbf{R}'_{G3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{r}_{G3i} \\
\mathbf{R}_p &= [x_p, y_p, z_p]^T \\
\mathbf{R}_{17i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{r}_{17i} \\
\mathbf{R}_{14i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i})\mathbf{r}_{14i} \\
\mathbf{R}_{5ai} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i})\mathbf{r}_{5ai} \\
\mathbf{R}_{6ai} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i})\mathbf{r}_{6ai} \\
\mathbf{R}_{G4} &= \mathbf{R}_p + \mathbf{R}'_{G4} \\
\mathbf{R}'_{G4} &= [x_{G4}, y_{G4}, z_{G4}]^T
\end{aligned}$$

con los vectores locales de posición dados como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{2i} &= [d_{2i}, 0, 0]^T \\
\mathbf{r}_{4i} &= [d_{4i}, 0, 0]^T \\
\mathbf{r}_{5i} &= [0, -d_{5i}, 0]^T \\
\mathbf{r}_{6i} &= [0, 0, -d_{6i}]^T \\
\mathbf{r}_{14i} &= [0, -d_{14i}, 0]^T \\
\mathbf{r}_{17i} &= [d_{17i}, 0, 0]^T \\
\mathbf{r}_{5ai} &= [0, 0, d_{5ai}]^T \\
\mathbf{r}_{6ai} &= [0, 0, d_{6ai}]^T \\
\mathbf{r}_{G1i} &= [x_{G1i}, y_{G1i}, z_{G1i}]^T \\
\mathbf{r}_{G2i} &= [x_{G2i}, y_{G2i}, z_{G2i}]^T \\
\mathbf{r}_{G3i} &= [x_{G3i}, y_{G3i}, z_{G3i}]^T
\end{aligned}$$

## Velocidades Angulares y de Centros de Gravedad

Definiendo las velocidades de los centro de gravedad inercialmente se tiene para cada cuerpo lo siguiente.

## Velocidad Cuerpo 1i

Derivando  $\mathbf{R}_{G1i}$  respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{G1i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \mathbf{r}_{G1i} \dot{\theta}_{3i} \\ \mathbf{V}_{G1i} &= \mathbf{k}_{1i} \dot{\theta}_{3i}\end{aligned}\quad (5.3a)$$

donde:

$$\mathbf{k}_{1i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \mathbf{r}_{G1i}$$

Poniendo en función de las coordenadas cartesianas ec. (5,3a), tenemos:

$$\dot{\theta}_{3i} = \mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (5.3b)$$

$$\mathbf{V}_{G1i} = \mathbf{k}_{1i} \mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (5.3c)$$

con:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{2i}^T &= \frac{1}{E_{1i}} [E_{2i}, E_{3i}, E_{4i}] \\ \dot{\mathbf{q}} &= [\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p]^T\end{aligned}$$

## Velocidad Angular $\omega_{3i,0}^{1i}$

Las velocidades angulares de cada cuerpo serán tomadas en el marco de referencia local mas conveniente a utilizar, tomando en cuenta la cinemática desarrollada en el capitulo 3, se observa que la velocidad angular  $\omega_{3i,0}^{1i}$ , tiene la siguiente definición:

$$\begin{aligned}\omega_{3i,0}^{1i} &= \dot{\theta}_{3i} \hat{\mathbf{y}}_{3i} = \dot{\theta}_{3i} \mathbf{j} \\ &= (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{j}\end{aligned}\quad (5.3d)$$

## Velocidad del Cuerpo 2i

Derivando  $\mathbf{R}_{G2i}$  respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{G2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) \dot{\theta}_{3i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \dot{\epsilon}_i + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i) \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \dot{\theta}_{8i} \right) \mathbf{r}_{G2i} \\ &= \left( \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G2i} \right) \dot{\theta}_{3i} - \\ &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G2i} \dot{\theta}_{7i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i) \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \mathbf{r}_{G2i} \dot{\theta}_{8i}\end{aligned}$$

con:

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{\theta}_{3i} - \dot{\theta}_{7i}$$

renombrando términos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{G2i} &= \mathbf{k}_{3i} \dot{\theta}_{3i} + \mathbf{k}_{4i} \dot{\theta}_{7i} + \mathbf{k}_{5i} \dot{\theta}_{8i} \\ &= \mathbf{M}_{ki} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \end{aligned} \quad (5.4a)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \\ &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G2i} \\ \mathbf{k}_{4i} &= -\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G2i} \\ \mathbf{k}_{5i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i) \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \mathbf{r}_{G2i} \end{aligned} \quad (5.4b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ki} &= [\mathbf{k}_{3i}, \mathbf{k}_{4i}, \mathbf{k}_{5i}] \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_i &= [\dot{\theta}_{3i}, \dot{\theta}_{7i}, \dot{\theta}_{8i}]^T \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_i &= \mathbf{M}_{Ai} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.4c)$$

sustituyendo ec. (5,4c) en ec.(5,4a):

$$\mathbf{V}_{G2i} = \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.4d)$$

### Velocidad Angular $\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^2$

La velocidad angular del cuerpo  $2i$  es la adición de las demás velocidades angulares que permiten el movimiento de este cuerpo, por lo tanto se tiene:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,8i}^2 = \boldsymbol{\omega}_{0,3i} + \boldsymbol{\omega}_{0,7i} + \boldsymbol{\omega}_{0,8i}$$

tomando esta última expresión y transformándola al marco local  $(\mathbf{x}_{8i}, \mathbf{y}_{8i}, \mathbf{z}_{8i})$ :

$$\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^2 = \mathbf{R}_{8i,0} \boldsymbol{\omega}_{0,8i}^2$$

donde:

$$\mathbf{R}_{8i,0} = \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i})$$

de modo que:

$$\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^2 = \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i}) \boldsymbol{\omega}_{3i} + \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \boldsymbol{\omega}_{7i} + \boldsymbol{\omega}_{8i} \quad (5.4e)$$

con:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{3i} &= [0, \dot{\theta}_{3i}, 0]^T = \dot{\theta}_{3i} \mathbf{j} \\ \boldsymbol{\omega}_{7i} &= [0, -\dot{\theta}_{7i}, 0]^T = -\dot{\theta}_{7i} \mathbf{j} \\ \boldsymbol{\omega}_{8i} &= [-\dot{\theta}_{8i}, 0, 0]^T = -\dot{\theta}_{8i} \mathbf{i}\end{aligned}$$

Tomando de la cinemática inversa las definiciones para cada velocidad angular, respectivamente se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{8i} &= \frac{1}{F_{1i}}(F_{2i} \dot{x}_p + F_{3i} \dot{y}_p + F_{4i} \dot{z}_p) \\ &= \mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}\tag{5.4f}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{7i} &= \frac{1}{H_{1i}}(H_{2i} \dot{x}_p + H_{3i} \dot{y}_p + H_{4i} \dot{z}_p) \\ &= \mathbf{k}_{6i}^T \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}\tag{5.4g}$$

los valores  $\mathbf{k}_{6i}^T$  y  $\mathbf{k}_{7i}^T$  son respectivamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{6i}^T &= \frac{1}{H_{1i}} [H_{2i}, H_{3i}, H_{4i}] \\ \mathbf{k}_{7i}^T &= \frac{1}{F_{1i}} [F_{2i}, F_{3i}, F_{4i}]\end{aligned}$$

sustituyendo las ecs.(5. 3d), (5. 4f) y (5. 4g) en (5. 4e):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i}) (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{j} - \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) (\mathbf{k}_{6i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{j} - (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{i} \\ &= -(\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{i} + \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \left[ (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} \right] \mathbf{j}\end{aligned}$$

Aplicando la matriz de rotación  $\mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} &= -(\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{i} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{j} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{k} \\ &= A_{1i} \mathbf{i} + B_{1i} \mathbf{j} + C_{1i} \mathbf{k}\end{aligned}\tag{5.4h}$$

donde:

$$\begin{aligned}A_{1i} &= -\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} \\ B_{1i} &= (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \\ C_{1i} &= (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

### Velocidad del Cuerpo 3i

Derivando  $\mathbf{R}_{G3i}$  respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{G3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} (\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) \dot{\theta}_{3i} + \\
 &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \dot{\epsilon}_i + \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i) \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \dot{\theta}_{8i} \right) \mathbf{r}_{G3i} \\
 &= \left( \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} (\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G3i} \right) \dot{\theta}_{3i} - \\
 &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G3i} \dot{\theta}_{7i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i) \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \mathbf{r}_{G3i} \dot{\theta}_{8i}
 \end{aligned}$$

renombrando términos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{G3i} &= \mathbf{k}'_{3i} \dot{\theta}_{3i} + \mathbf{k}_{4i} \dot{\theta}_{7i} + \mathbf{k}_{5i} \dot{\theta}_{8i} \\
 &= \mathbf{M}'_{ki} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i
 \end{aligned} \tag{5.5a}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}'_{3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} (\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \\
 &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G3i} \\
 \mathbf{M}'_{ki} &= [\mathbf{k}'_{3i}, \mathbf{k}_{4i}, \mathbf{k}_{5i}]
 \end{aligned}$$

finalmente:

$$\mathbf{V}_{G3i} = \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai} \dot{\mathbf{q}} \tag{5.5b}$$

### Velocidad Angular $\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{3i}$

Esta velocidad angular es la misma que la velocidad angular del cuerpo 2i de manera que:

$$\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{3i} = \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}$$

### Velocidades de los Cuerpos 5i,6i y Plataforma Móvil

$$\mathbf{V}_{G5i} = \dot{\mathbf{q}} \tag{5.6}$$

$$\mathbf{V}_{G6i} = \dot{\mathbf{q}} \tag{5.7}$$

$$\mathbf{V}_{G4} = \dot{\mathbf{q}} \tag{5.8}$$

### 5.3 Función Lagrangiana

Aplicando la ec. (5. 1) al robot delta, se consigue de manera general la siguiente expresión:

$$L = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{k=1}^5 (K_{ki} - U_{ki}) \right) + L_p \quad (5.9)$$

$i$  = número de la cadena

$k$  = número de cuerpos en la cadena  $i$

expandiendo los términos del primer paréntesis:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^3 (K_{1i} - U_{1i}) + (K_{2i} - U_{2i}) + (K_{3i} - U_{3i}) + (K_{5i} - U_{5i}) + (K_{6i} - U_{6i}) + \\ &\quad (K_p - U_p) \\ &= \sum_{i=1}^3 (L_{1i} + L_{2i} + L_{3i} + L_{5i} + L_{6i}) + L_p \end{aligned} \quad (5.10a)$$

Donde  $L_{ji} = K_{ki} - U_{ki}$ :

$$L_{1i} = \frac{1}{2} \left( m_{1i} \mathbf{V}_{G1i}^T \mathbf{V}_{G1i} + (\boldsymbol{\omega}_{3i,0}^{1i})^T \mathbf{I}_{G1i} \boldsymbol{\omega}_{3i,0}^{1i} \right) + m_{1i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G1i} \quad (5.10b)$$

$$L_{2i} = \frac{1}{2} \left( m_{2i} \mathbf{V}_{G2i}^T \mathbf{V}_{G2i} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} \right) + m_{2i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2i} \quad (5.10c)$$

$$L_{3i} = \frac{1}{2} \left( m_{3i} \mathbf{V}_{G3i}^T \mathbf{V}_{G3i} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G3i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} \right) + m_{3i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G3i} \quad (5.10d)$$

$$L_{5i} = \frac{1}{2} m_{5i} \mathbf{V}_{G5i}^T \mathbf{V}_{G5i} + m_{5i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G5i} \quad (5.10e)$$

$$L_{6i} = \frac{1}{2} m_{6i} \mathbf{V}_{G6i}^T \mathbf{V}_{G6i} + m_{6i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G6i} \quad (5.10f)$$

$$L_p = \frac{1}{2} m_4 \mathbf{V}_{G4}^T \mathbf{V}_{G4} + m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G4} \quad (5.11g)$$

## Desarrollando el término $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$

A partir de la ec. (5,2a) se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q$$

desarrollando el primer término de la ecuación anterior apartir de la ec.(5. 10a):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_{5i}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_{6i}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.11a)$$

para  $j = 1, 2, 3$  donde:

$$\dot{q}_1 = x_p \quad \dot{q}_2 = y_p \quad \dot{q}_3 = z_p$$

## Desarrollando $\frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j}$ :

Tomando cada subtérmino de la ec.(5. 11a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2} \left( m_{1i} \mathbf{V}_{G1i}^T \mathbf{V}_{G1i} + (\boldsymbol{\omega}_{3i,0}^{1i})^T \mathbf{I}_{G1i} \boldsymbol{\omega}_{3i,0}^{1i} \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (m_{1i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G1i}) \end{aligned} \quad (6.11b)$$

sustituyendo ecs. (5. 3c), (5. 3d) en (5. 11b) y notando que todos los cuerpos  $1i$  tienen la misma matriz de inercia  $\mathbf{I}_{G1i}$ , y los cuerpos  $2i$  y  $3i$  tienen la matriz  $\mathbf{I}_{G2i}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( m_{1i} (\mathbf{k}_{1i} \mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{k}_{1i} \mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) + (\dot{\theta}_{3i} \mathbf{j})^T \mathbf{I}_{G1i} (\dot{\theta}_{3i} \mathbf{j}) \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (m_{1i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G1i}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( m_{1i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} \mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{k}_{1i} \mathbf{k}_{2i}^T) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} (\dot{\theta}_{3i})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( m_{1i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} \mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{k}_{1i} \mathbf{k}_{2i}^T) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}})^2 \right) \\ \frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} m_{1i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{1i} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{1i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\ &\quad \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned} \quad (5.11c)$$

donde:

$$\mathbf{M}_{1i} = \mathbf{k}_{2i} \mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{k}_{1i} \mathbf{k}_{2i}^T$$

Desarrollando  $\frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2} \left( m_{2i} \mathbf{V}_{G2i}^T \mathbf{V}_{G2i} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (m_{2i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2i}) \end{aligned} \quad (5.11d)$$

sustituyendo ec.(5. 4d) en (5. 11d):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( m_{2i} (\mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} \dot{\mathbf{q}}) + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (m_{2i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2i}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( m_{2i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai}) \dot{\mathbf{q}} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} \right) \\ \frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} m_{2i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{2i} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{2i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) \end{aligned} \quad (5.11e)$$

donde:

$$\mathbf{M}_{2i} = \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai}$$

evaluando el subtérmino  $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j}$  a partir de la ec. (5. 4h):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( -(\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{i} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{j} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{k} \right) \\ &= -\left( \mathbf{k}_{7i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \mathbf{i} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{j} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{k} \\ &= D_{1i} \mathbf{i} + E_{1i} \mathbf{j} + F_{1i} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.11f)$$

con:

$$\begin{aligned} D_{1i} &= -\left( \mathbf{k}_{7i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ E_{1i} &= (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \\ F_{1i} &= (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned}$$

Desarrollando  $\frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2} \left( m_{3i} \mathbf{V}_{G3i}^T \mathbf{V}_{G3i} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G3i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (m_{3i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G3i}) \end{aligned} \quad (5.11g)$$

sustituyendo ecs.(5. 5b) en (5. 11g) y donde  $\mathbf{I}_{G3i} = \mathbf{I}_{G2i}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( m_{3i} (\mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai} \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai} \dot{\mathbf{q}}) + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( m_{3i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}'_{ki}{}^T \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai}) \dot{\mathbf{q}} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} \right) \\ \frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{1}{2} m_{3i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{3i} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{3i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) \end{aligned}$$

donde:

$$\mathbf{M}_{3i} = \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}'_{ki}{}^T \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai}$$

Desarrollando  $\frac{\partial L_{5i}}{\partial \dot{q}_j}$ :

$$\frac{\partial L_{5i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_{5i} \mathbf{V}_{G5i}^T \mathbf{V}_{G5i} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (m_{5i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G5i}) \quad (5.11h)$$

sustituyendo ec. (5. 6) en ec. (5,11h):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{5i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_{5i} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{1}{2} m_{5i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} m_{5i} 2 \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial L_{5i}}{\partial \dot{q}_j} &= m_{5i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.11i)$$

**Desarrollando  $\frac{\partial L_{6i}}{\partial \dot{q}_j}$ :**

$$\frac{\partial L_{6i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_{6i} \mathbf{V}_{G6i}^T \mathbf{V}_{G6i} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (m_{6i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G6i}) \quad (5.11j)$$

sustituyendo ec. (5. 7) en ec, (5,11j):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{6i}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_{6i} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{1}{2} m_{6i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} m_{6i} 2 \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial L_{6i}}{\partial \dot{q}_j} &= m_{6i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.11k)$$

**Desarrollando  $\frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_j}$  :**

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_4 \mathbf{V}_{G4}^T \mathbf{V}_{G4} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (m_4 \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G4}) \quad (5.11l)$$

sustituyendo ec. (5. 8) en ec. (5. 11l):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_4 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= \frac{1}{2} m_4 \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} m_4 2 \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ \frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_j} &= m_4 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.11m)$$

Al evaluar el término  $\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}$ , dependerá que valor tome  $j$ , de tal manera que se tienen los siguientes resultados para diferente valor de iterador  $j$ .

Para:

$$j = 1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_p} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} \\ &= [1, 0, 0]^T \\ &= \mathbf{i}\end{aligned}$$

$$j = 2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}_p} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} \\ &= [0, 1, 0]^T \\ &= \mathbf{j}\end{aligned}$$

$$j = 3$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_3} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}_p} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} \\ &= [0, 0, 1]^T \\ &= \mathbf{k}\end{aligned}$$

Tomando la ec. (5. 11a) y derivando con respecto al tiempo cada miembro de esta ecuación obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_{5i}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial L_{6i}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (5.12a)$$

El desarrollo de la derivada con respecto al tiempo de cada elemento se muestra a continuación:

**Desarrollando**  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j} \right)$ :

Tomando la ec.(5. 11c) y derivando con respecto al tiempo; tal que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \mathbf{0},$$

para  $j = 1, 2, 3$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{1}{2} m_{1i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{1i} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{1i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{d}{dt} \left( \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\
&= \frac{1}{2} m_{1i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\mathbf{M}_{1i}}{dt} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{1i} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{d\dot{\mathbf{q}}^T}{dt} \mathbf{M}_{1i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{d\mathbf{M}_{1i}}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\
&\quad \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left( \frac{d\mathbf{k}_{2i}^T}{dt} \dot{\mathbf{q}} \right) \mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left( \mathbf{k}_{2i}^T \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \right) \mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + \\
&\quad \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \frac{d\mathbf{k}_{2i}^T}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{1i} &= \dot{\mathbf{M}}_{1i} \\
\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{q}}_{1i} &= \ddot{\mathbf{q}}_{1i} \\
\frac{d}{dt} \mathbf{k}_{2i} &= \dot{\mathbf{k}}_{2i}
\end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{1}{2} m_{1i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \left( \dot{\mathbf{M}}_{1i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_{1i} \ddot{\mathbf{q}} \right) + \left( \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{1i} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}_{1i} \right) \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\
&\quad \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}} \right) \mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} (\mathbf{k}_{2i}^T \ddot{\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + \\
&\quad \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \tag{5.12b}
\end{aligned}$$

cada término de la ecuación anterior se toma y se simplifica como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \left(\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}_{1i}\right) \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \left(\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}_{1i}\right)^T \\ &= \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_{1i}^T\right) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.12c)$$

$$\begin{aligned} \left(\ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{1i}\right) \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \left(\ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{1i}\right)^T \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{1i}^T \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.12d)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\mathbf{k}_{2i}^T \ddot{\mathbf{q}}\right) \mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} &= \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}\right) \left(\mathbf{k}_{2i}^T \ddot{\mathbf{q}}\right) \\ &= \left(\mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}\right) \mathbf{k}_{2i}^T\right) \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.12e)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}\right) \mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}\right) \dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} &= \\ \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}\right) \dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}\right) \mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}} &= \\ \left(\mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}\right) \dot{\mathbf{k}}_{2i}^T + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}\right) \mathbf{k}_{2i}^T\right) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.12f)$$

sustituyendo las ecs (5. 12c), (5. 12d), (5. 12e), (5. 12f) en (5. 12b) y agrupando en  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j}\right) &= \left(\frac{1}{2} m_{1i} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{1i} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{1i}^T\right) + \left(\mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}\right) \mathbf{k}_{2i}^T\right)\right) \ddot{\mathbf{q}} + \\ &\left(\frac{1}{2} m_{1i} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_{1i} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{M}}_{1i}^T\right) + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}\right) \dot{\mathbf{k}}_{2i}^T + \right. \\ &\left. \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}\right) \mathbf{k}_{2i}^T\right) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

factorizando términos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{1i}}{\partial \dot{q}_j}\right) &= \left(\frac{1}{2} m_{1i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{M}_{1i} + \mathbf{M}_{1i}^T) + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\mathbf{k}_{2i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j}\right) \mathbf{k}_{2i}^T\right) \ddot{\mathbf{q}} + \\ &\left(\frac{1}{2} m_{1i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{M}}_{1i} + \dot{\mathbf{M}}_{1i}^T) + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{k}_{2i} \dot{\mathbf{k}}_{2i}^T + \dot{\mathbf{k}}_{2i} \mathbf{k}_{2i}^T)\right)\right) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbb{D}_{1i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V}_{1i} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.12g)$$

donde:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}}_{1i} &= \dot{\mathbf{k}}_{2i}\mathbf{k}_{1i}^T\mathbf{k}_{1i}\mathbf{k}_{2i}^T + \mathbf{k}_{2i}\dot{\mathbf{k}}_{1i}^T\mathbf{k}_{1i}\mathbf{k}_{2i}^T + \mathbf{k}_{2i}\mathbf{k}_{1i}^T\dot{\mathbf{k}}_{1i}\mathbf{k}_{2i}^T + \mathbf{k}_{2i}\mathbf{k}_{1i}^T\mathbf{k}_{1i}\dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \\ &= \dot{\mathbf{k}}_{2i}\mathbf{k}_{1i}^T\mathbf{k}_{1i}\mathbf{k}_{2i}^T + 2\mathbf{k}_{2i}\dot{\mathbf{k}}_{1i}^T\mathbf{k}_{1i}\mathbf{k}_{2i}^T + \mathbf{k}_{2i}\mathbf{k}_{1i}^T\dot{\mathbf{k}}_{1i}\mathbf{k}_{2i}^T \\ \mathbb{D}_{1i} &= \frac{1}{2}m_{1i}\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}^T}{\partial\dot{q}_j}(\mathbf{M}_{1i}+\mathbf{M}_{1i}^T) + \mathbf{j}^T\mathbf{I}_{G1i}\mathbf{j}\left(\mathbf{k}_{2i}^T\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{q}_j}\right)\mathbf{k}_{2i}\end{aligned}\quad (5.12h)$$

$$\mathbb{V}_{1i} = \frac{1}{2}m_{1i}\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}^T}{\partial\dot{q}_j}(\dot{\mathbf{M}}_{1i}+\dot{\mathbf{M}}_{1i}^T) + \mathbf{j}^T\mathbf{I}_{G1i}\mathbf{j}\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}^T}{\partial\dot{q}_j}(\mathbf{k}_{2i}\dot{\mathbf{k}}_{2i}^T + \dot{\mathbf{k}}_{2i}\mathbf{k}_{2i}^T)\right)\quad (5.12i)$$

con:

$$\dot{\mathbf{k}}_{1i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\frac{\partial^2\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial(\theta_{3i})^2}\dot{\theta}_{3i}\mathbf{r}_{G1i}\quad (5.12j)$$

$$= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\frac{\partial^2\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial(\theta_{3i})^2}\mathbf{r}_{G1i}\mathbf{k}_{2i}^T\dot{\mathbf{q}}$$

$$\dot{\mathbf{k}}_{2i}^T = (\mathbf{E}_i\dot{\mathbf{q}})^T\quad (5.12k)$$

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{E_{1i}^3}\begin{bmatrix} E_{17i} & E_{18i} & E_{19i} \\ E_{20i} & E_{21i} & E_{22i} \\ E_{23i} & E_{24i} & E_{24i} \end{bmatrix}\quad (5.12l)$$

Los términos de la matriz  $\mathbf{E}_i$  están mostrados en el apéndice C de este capítulo.

**Desarrollando**  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{2i}}{\partial\dot{q}_j}\right)$ :

Tomando la ec.(5. 11e) y derivando con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{2i}}{\partial\dot{q}_j}\right) &= \frac{1}{2}m_{2i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}^T}{\partial\dot{q}_j}\mathbf{M}_{2i}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}_{2i}\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{q}_j}\right) + \\ &\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T}{\partial\dot{q}_j}\mathbf{I}_{G2i}\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T\mathbf{I}_{G2i}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial\dot{q}_j}\right) \\ &= \frac{1}{2}m_{2i}\left(\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}^T}{\partial\dot{q}_j}\frac{d\mathbf{M}_{2i}}{dt}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}^T}{\partial\dot{q}_j}\mathbf{M}_{2i}\frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{d\dot{\mathbf{q}}^T}{dt}\mathbf{M}_{2i}\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{q}_j} + \dot{\mathbf{q}}^T\frac{d\mathbf{M}_{2i}}{dt}\frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\dot{q}_j}\right) + \\ &\quad \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T}{\partial\dot{q}_j}\right)\mathbf{I}_{G2i}\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} + \frac{\partial(\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T}{\partial\dot{q}_j}\mathbf{I}_{G2i}\frac{d\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{dt}\right) + \\ &\quad \frac{1}{2}\left(\frac{d(\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T}{dt}\mathbf{I}_{G2i}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial\dot{q}_j} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T\mathbf{I}_{G2i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial\dot{q}_j}\right)\right)\end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{1}{2} m_{2i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \left( \dot{\mathbf{M}}_{2i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_{2i} \ddot{\mathbf{q}} \right) + \left( \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{2i} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}_{2i} \right) \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\
&\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T}{\partial \dot{q}_j} \right) \mathbf{I}_{G2i} \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i} + \frac{\partial (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{I}_{G2i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{8i,0}^{2i} \right) + \\
&\frac{1}{2} \left( (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} + (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \quad (5.13a)
\end{aligned}$$

El álgebra de los términos de la derivada con respecto al tiempo de la velocidad de traslación, tienen el mismo análisis de las ecs. (5. 12c) y (5. 12d), por lo tanto resta hacer el análisis de los subtérminos de la derivada con respecto al tiempo de la velocidad angular ec. (5. 11f), de manera que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= -\dot{\mathbf{k}}_{7i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{i} + \\
&\left( \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i} \right)^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} - (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \dot{\theta}_{8i} \right) \mathbf{j} + \\
&\left( \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i} \right)^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \dot{\theta}_{8i} \right) \mathbf{k}
\end{aligned}$$

sustituyendo las definiciones (5. 4f) de  $\dot{\theta}_{8i}$  en la ec. anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= - \left( \dot{\mathbf{k}}_{7i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \mathbf{i} + \\
&\left( \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i} \right)^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} - (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} \right) \mathbf{j} + \\
&\left( \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i} \right)^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} \right) \mathbf{k} \quad (5.13b)
\end{aligned}$$

Los términos  $\dot{\mathbf{k}}_{6i}$  y  $\dot{\mathbf{k}}_{7i}$  son respectivamente:

$$\dot{\mathbf{k}}_{6i} = (\mathbf{H}_i \dot{\mathbf{q}})^T \quad (5.13c)$$

$$\dot{\mathbf{k}}_{7i} = (\mathbf{F}_i \dot{\mathbf{q}})^T \quad (5.13d)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i &= \frac{1}{E_{1i} F_{1i} H_{1i}^3} \begin{bmatrix} H_{23i} & H_{24i} & H_{25i} \\ H_{26i} & H_{27i} & H_{28i} \\ H_{29i} & H_{30i} & H_{31i} \end{bmatrix} \\
\mathbf{F}_i &= \frac{1}{F_{1i}^3} \begin{bmatrix} F_{5i} & F_{6i} & F_{7i} \\ F_{8i} & F_{9i} & F_{10i} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Los términos de la matriz  $\mathbf{E}_i$  están mostrados en el apéndice C de este capítulo. Sustituyendo ecs. (5. 12k) y (5. 13c,d) en (5. 13b), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \omega_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= -(\mathbf{F}_i \dot{\mathbf{q}})^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{i} + \\ &\quad \left( ((\mathbf{E}_i - \mathbf{H}_i) \dot{\mathbf{q}})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} - (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{j} + \\ &\quad \left( ((\mathbf{E}_i - \mathbf{H}_i) \dot{\mathbf{q}})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \right) \mathbf{k} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \omega_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= a_{1i} \mathbf{i} + b_{2i} \mathbf{j} + c_{2i} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.13e)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= -(\mathbf{F}_i \dot{\mathbf{q}})^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \\ b_{1i} &= \left( ((\mathbf{E}_i - \mathbf{H}_i) \dot{\mathbf{q}})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} - (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \right) \\ c_{1i} &= \left( ((\mathbf{E}_i - \mathbf{H}_i) \dot{\mathbf{q}})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \right) \end{aligned}$$

**Desarrollando el subtérmino  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (\omega_{8i,0}^{2i})^T}{\partial \dot{q}_j} \right) \mathbf{I}_{G2i} \omega_{8i,0}^{2i}$ :**

Para este análisis se desarrolla los productos internos de modo que se facilite el álgebra matricial, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (\omega_{8i,0}^{2i})^T}{\partial \dot{q}_j} \right) \mathbf{I}_{G2i} \omega_{8i,0}^{2i} &= [a_{1i}, \quad b_{1i}, \quad c_{1i}] \begin{bmatrix} I_{xx2i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1i} \\ B_{1i} \\ C_{1i} \end{bmatrix} \\ &= I_{xx2i} a_{1i} A_{1i} + I_{yy2i} b_{1i} B_{1i} + I_{zz2i} c_{1i} C_{1i} \end{aligned} \quad (5.13f)$$

Los términos fuera de la diagonal principal de la matriz de inercia  $\mathbf{I}_{G2i}$  son cero, debido a la forma cilíndrica del cuerpo  $2i$ .

**Desarrollando el subtérmino  $(\omega_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \omega_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right)$ :**

$$\begin{aligned} (\omega_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \omega_{8i,0}^{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= [A_{1i}, \quad B_{1i}, \quad C_{1i}] \begin{bmatrix} I_{xx2i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ b_{1i} \\ c_{1i} \end{bmatrix} \\ &= I_{xx2i} a_{1i} A_{1i} + I_{yy2i} b_{1i} B_{1i} + I_{zz2i} c_{1i} C_{1i} \end{aligned} \quad (5.13g)$$

Valorando las operaciones de ecs. (5. 13c,d), y usando ecs. (6. 4h) y (6. 13e):

$$\begin{aligned}
a_{1i}A_{1i} &= (\mathbf{F}_i \dot{\mathbf{q}})^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \\
&= [(\mathbf{F}_i \dot{\mathbf{q}})^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{k}_{7i}^T] \dot{\mathbf{q}} \\
&= \mathbf{I}_{1ai}^T \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{5.13h}$$

$$\begin{aligned}
b_{1i}B_{1i} &= [(((\mathbf{E}_i - \mathbf{H}_i) \dot{\mathbf{q}})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} - (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \\
&\quad (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}})) (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i}] \dot{\mathbf{q}} \\
&= \mathbf{I}_{2ai}^T \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{5.13i}$$

$$\begin{aligned}
c_{1i}C_{1i} &= [(((\mathbf{E}_i - \mathbf{H}_i) \dot{\mathbf{q}})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \\
&\quad (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}})) (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i}] \dot{\mathbf{q}} \\
&= \mathbf{I}_{3ai}^T \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{5.13j}$$

Ahora obteniendo  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{8i,0}^{2i}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_{8i,0}^{2i}) &= \frac{d}{dt} \left( -\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} \mathbf{i} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{j} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{k} \right) \\
&= - \left( \dot{\mathbf{k}}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}_{7i}^T \ddot{\mathbf{q}} \right) \mathbf{i} + \\
&\quad \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i} \right)^T c\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{j} - (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \dot{\theta}_{8i} \mathbf{j} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \ddot{\mathbf{q}} \mathbf{j} + \\
&\quad \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i} \right)^T s\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{k} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \dot{\theta}_{8i} \mathbf{k} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \ddot{\mathbf{q}} \mathbf{k}
\end{aligned}$$

simplicando y sustituyendo la definición (5. 4f):

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\omega}}_{8i,0}^{2i} &= - \left( \dot{\mathbf{k}}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}_{7i}^T \ddot{\mathbf{q}} \right) \mathbf{i} + \\
&\quad [ \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i} \right)^T c\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \ddot{\mathbf{q}} ] \mathbf{j} + \\
&\quad [ \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i} \right)^T s\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \ddot{\mathbf{q}} ] \mathbf{k} \\
&= d_{1i} \mathbf{i} + e_{1i} \mathbf{j} + f_{1i} \mathbf{k}
\end{aligned} \tag{5.13k}$$

con:

$$\begin{aligned}
d_{1i} &= -\left(\dot{\mathbf{k}}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}_{7i}^T \ddot{\mathbf{q}}\right) \\
e_{1i} &= \left(\dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i}\right)^T c\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \ddot{\mathbf{q}} \\
f_{1i} &= \left(\dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i}\right)^T s\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \ddot{\mathbf{q}}
\end{aligned}$$

Desarrollando el subtérmino  $\frac{\partial(\omega_{8i,0}^{2i})^T}{\partial\dot{q}_j} \mathbf{I}_{G2i} \dot{\omega}_{8i,0}^{2i}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\omega_{8i,0}^{2i})^T}{\partial\dot{q}_j} \mathbf{I}_{G2i} \dot{\omega}_{8i,0}^{2i} &= [D_{1i}, E_{1i}, F_{1i}] \begin{bmatrix} I_{xx2i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1i} \\ e_{1i} \\ f_{1i} \end{bmatrix} \\
&= I_{xx2i} d_{1i} D_{1i} + I_{yy2i} e_{1i} E_{1i} + I_{zz2i} f_{1i} F_{1i}
\end{aligned} \tag{5.13l}$$

Desarrollando el subtérmino  $(\dot{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \frac{\partial\omega_{8i,0}^{2i}}{\partial\dot{q}_j}$ :

$$\begin{aligned}
(\dot{\omega}_{8i,0}^{2i})^T \mathbf{I}_{G2i} \frac{\partial\omega_{8i,0}^{2i}}{\partial\dot{q}_j} &= [d_{1i}, e_{1i}, f_{1i}] \begin{bmatrix} I_{xx2i} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2i} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1i} \\ E_{1i} \\ F_{1i} \end{bmatrix} \\
&= I_{xx2i} d_{1i} D_{1i} + I_{yy2i} e_{1i} E_{1i} + I_{zz2i} f_{1i} F_{1i}
\end{aligned} \tag{5.13m}$$

Valorando las operaciones de ecs. (5. 13j,k):

$$\begin{aligned}
d_{1i}D_{1i} &= \left( \dot{\mathbf{k}}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}_{7i}^T \ddot{\mathbf{q}} \right) \left( \mathbf{k}_{7i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\
&= \left[ \left( \mathbf{k}_{7i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \mathbf{k}_{7i}^T \right] \ddot{\mathbf{q}} + \left[ \left( \mathbf{k}_{7i}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{\mathbf{k}}_{7i}^T \right] \dot{\mathbf{q}} \\
&= \mathbf{I}_{4ai}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_{5ai}^T \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{5.13n}$$

$$\begin{aligned}
e_{1i}E_{1i} &= \left( \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i} \right)^T c\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \ddot{\mathbf{q}} \right) \\
&\quad \left( (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\
&= \left[ (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i}^2 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \right] \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} c\theta_{8i} [c\theta_{8i} (\dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i})^T - \\
&\quad s\theta_{8i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} \\
&= \mathbf{I}_{6ai}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_{7ai}^T \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{5.13o}$$

$$\begin{aligned}
f_{1i}F_{1i} &= \left( \left( \dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i} \right)^T s\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \ddot{\mathbf{q}} \right) \\
&\quad \left( (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) \\
&= \left[ (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i}^2 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \right] \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} s\theta_{8i} [c\theta_{8i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \\
&\quad (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) + s\theta_{8i} (\dot{\mathbf{k}}_{2i} - \dot{\mathbf{k}}_{6i})^T] \dot{\mathbf{q}} \\
&= \mathbf{I}_{8ai}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_{9ai}^T \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{5.13p}$$

Sustituyendo ecs.(5.13f), (5.13g), (5.13l), (5.13m) en (5.13a) se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{1}{2} m_{2i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \left( \dot{\mathbf{M}}_{2i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_{2i} \ddot{\mathbf{q}} \right) + \left( \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{2i} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}_{2i} \right) \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\
&\quad I_{xx2i} a_{1i} A_{1i} + I_{yy2i} b_{1i} B_{1i} + I_{zz2i} c_{1i} C_{1i} + I_{xx2i} d_{1i} D_{1i} + \\
&\quad I_{yy2i} e_{1i} E_{1i} + I_{zz2i} f_{1i} F_{1i}
\end{aligned} \tag{5.13q}$$

sustituyendo ahora ecs. (5.13h), (5.13i), (5.13j) y (5.13n), (5.13o), (5.13p) en ec. (5.13q):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{1}{2} m_{2i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \left( \dot{\mathbf{M}}_{2i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_{2i} \ddot{\mathbf{q}} \right) + \left( \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{2i} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}_{2i} \right) \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \\ & I_{xx2i} \mathbf{I}_{1ai}^T \dot{\mathbf{q}} + I_{yy2i} \mathbf{I}_{2ai}^T \dot{\mathbf{q}} + I_{zz2i} \mathbf{I}_{3ai}^T \dot{\mathbf{q}} + \\ & I_{xx2i} (\mathbf{I}_{4ai}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_{5ai}^T \dot{\mathbf{q}}) + I_{yy2i} (\mathbf{I}_{6ai}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_{7ai}^T \dot{\mathbf{q}}) + \\ & I_{zz2i} (\mathbf{I}_{8ai}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_{9ai}^T \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

simplicando y agrupando en  $\ddot{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \left[ \frac{1}{2} m_{2i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{2i} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{2i}^T \right) + I_{xx2i} \mathbf{I}_{4ai}^T + I_{yy2i} \mathbf{I}_{6ai}^T + I_{zz2i} \mathbf{I}_{8ai}^T \right] \ddot{\mathbf{q}} + \\ & \left[ \frac{1}{2} m_{2i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \left( \dot{\mathbf{M}}_{2i} + \dot{\mathbf{M}}_{2i}^T \right) + I_{xx2i} (\mathbf{I}_{1ai} + \mathbf{I}_{5ai})^T + I_{yy2i} (\mathbf{I}_{2ai} + \mathbf{I}_{7ai})^T + \right. \\ & \left. I_{zz2i} (\mathbf{I}_{3ai} + \mathbf{I}_{9ai})^T \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbb{D}_{2i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V}_{2i} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.13r)$$

donde:

$$\dot{\mathbf{M}}_{2i} = \dot{\mathbf{M}}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \dot{\mathbf{M}}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \dot{\mathbf{M}}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \dot{\mathbf{M}}_{Ai} \quad (5.13s)$$

$$\mathbb{D}_{2i} = \frac{1}{2} m_{2i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{M}_{2i} + \mathbf{M}_{2i}^T) + I_{xx2i} \mathbf{I}_{4ai}^T + I_{yy2i} \mathbf{I}_{6ai}^T + I_{zz2i} \mathbf{I}_{8ai}^T \quad (5.13t)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{2i} &= \frac{1}{2} m_{2i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \left( \dot{\mathbf{M}}_{2i} + \dot{\mathbf{M}}_{2i}^T \right) + I_{xx2i} (\mathbf{I}_{1ai} + \mathbf{I}_{5ai})^T + I_{yy2i} (\mathbf{I}_{2ai} + \mathbf{I}_{7ai})^T \\ & I_{zz2i} (\mathbf{I}_{3ai} + \mathbf{I}_{9ai})^T \end{aligned} \quad (5.13u)$$

donde las matrices de  $\dot{\mathbf{M}}_{2i}$  están definidas como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_{Ai} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \\ \dot{\mathbf{k}}_{6i}^T \\ \dot{\mathbf{k}}_{7i}^T \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{M}}_{ki} &= [\dot{\mathbf{k}}_{3i} \quad \dot{\mathbf{k}}_{4i} \quad \dot{\mathbf{k}}_{5i}] \end{aligned}$$

Los vectores de la matriz  $\dot{\mathbf{M}}_{ki}$  tienen su desarrollo en el apéndice C de este capítulo.

**Desarrollando**  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} \right)$

La única diferencia de esta ecuación a la anterior  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{2i}}{\partial \dot{q}_j} \right)$  está en la matriz  $\mathbf{M}_{2i}$ , esta matriz se sustituirá por la matriz  $\mathbf{M}_{3i}$ , de modo que la ecuación  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} \right)$  queda como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{3i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \left[ \frac{1}{2} m_{2i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{3i} + \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \mathbf{M}_{3i}^T \right) + I_{xx2i} \mathbf{I}_{4ai}^T + I_{yy2i} \mathbf{I}_{6ai}^T + I_{zz2i} \mathbf{I}_{8ai}^T \right] \ddot{\mathbf{q}} + \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} m_{3i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \left( \dot{\mathbf{M}}_{3i} + \dot{\mathbf{M}}_{3i}^T \right) + I_{xx2i} (\mathbf{I}_{1ai} + \mathbf{I}_{5ai})^T + I_{yy2i} (\mathbf{I}_{2ai} + \mathbf{I}_{7ai})^T + \right. \\ &\quad \left. I_{zz2i} (\mathbf{I}_{3ai} + \mathbf{I}_{9ai})^T \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbb{D}_{3i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V}_{3i} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.14a)$$

donde:

$$\dot{\mathbf{M}}_{3i} = \dot{\mathbf{M}}_{Ai}^T \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \dot{\mathbf{M}}_{ki} \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}'_{ki} \dot{\mathbf{M}}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}'_{ki} \dot{\mathbf{M}}_{Ai} \quad (5.14b)$$

$$\mathbb{D}_{3i} = \frac{1}{2} m_{3i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{M}_{3i} + \mathbf{M}_{3i}^T) + I_{xx2i} \mathbf{I}_{4ai}^T + I_{yy2i} \mathbf{I}_{6ai}^T + I_{zz2i} \mathbf{I}_{8ai}^T \quad (5.14c)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{3i} &= \frac{1}{2} m_{3i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \left( \dot{\mathbf{M}}_{3i} + \dot{\mathbf{M}}_{3i}^T \right) + I_{xx2i} (\mathbf{I}_{1ai} + \mathbf{I}_{5ai})^T + I_{yy2i} (\mathbf{I}_{2ai} + \mathbf{I}_{7ai})^T + \\ &\quad I_{zz2i} (\mathbf{I}_{3ai} + \mathbf{I}_{9ai})^T \end{aligned} \quad (5.14d)$$

La matriz  $\mathbf{M}'_{ki}$  es definida como:

$$\mathbf{M}'_{ki} = [\dot{\mathbf{k}}'_{3i} \quad \dot{\mathbf{k}}_{4i} \quad \dot{\mathbf{k}}_{5i}]$$

El término  $\dot{\mathbf{k}}'_{3i}$  está definido en el apéndice C.

**Desarrollando**  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{5i}}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Tomando la ec. (5. 11i) y efectuando la derivada con respecto al tiempo a cada elemento de esta ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{5i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= m_{5i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= m_{5i} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \right) \\ &= m_{5i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbb{D}_{5i} \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.15a)$$

donde:

$$\mathbb{D}_{5i} = m_{5i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.15b)$$

**Desarrollando**  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{6i}}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Tomando la ec. (5. 11k) y efectuando la derivada con respecto al tiempo a cada elemento de esta ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{6i}}{\partial \dot{q}_j} \right) &= m_{6i} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= m_{6i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbb{D}_{6i} \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.16a)$$

donde:

$$\mathbb{D}_{6i} = m_{6i} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.16b)$$

**Desarrollando**  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Tomando la ec. (5. 11m) y efectuando la derivada con respecto al tiempo a cada elemento de esta ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{q}_j} \right) &= m_4 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \dot{\mathbf{q}} \right) \\ &= m_4 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbb{D}_p \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (5.17a)$$

donde:

$$\mathbb{D}_p = m_4 \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}{\partial \dot{q}_j} \quad (5.17b)$$

## Desarrollando el segundo término de ec. (5,2a) $\frac{\partial L}{\partial q_j}$

Tomando la ec. (5. 10a) y aplicando la derivada parcial con respecto a la variable de coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_j} (L_{1i} + L_{2i} + L_{3i} + L_{5i} + L_{6i}) + \frac{\partial L_p}{\partial q_j}$$

### Desarrollando $\frac{\partial L_{1i}}{\partial q_j}$

De ec. (5. 10b) sustituyendo ecs. (5. 3a), (5. 3d) y centros de gravedad se tiene:

$$\begin{aligned} L_{1i} &= \frac{1}{2} \left( m_{1i}^T \mathbf{V}_{G1i}^T \mathbf{V}_{G1i} + (\boldsymbol{\omega}_{3i,0}^{1i})^T \mathbf{I}_{G1i} \boldsymbol{\omega}_{3i,0}^{1i} \right) + \\ &\quad m_{1i} \mathbf{g}^T (\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{r}_{2i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{r}_{G1i}) \\ &= \frac{1}{2} \left( m_{1i} \left( \mathbf{k}_{1i} \dot{\theta}_{3i} \right)^T \left( \mathbf{k}_{1i} \dot{\theta}_{3i} \right) + \left( \dot{\theta}_{3i} \mathbf{j} \right)^T \mathbf{I}_{G1i} \left( \dot{\theta}_{3i} \mathbf{j} \right) \right) + \\ &\quad m_{1i} \mathbf{g}^T (\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{r}_{2i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{r}_{G1i}) \\ &= \frac{1}{2} \left( m_{1i} (\mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{k}_{1i}) \dot{\theta}_{3i}^2 + (\mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j}) \dot{\theta}_{3i}^2 \right) + \\ &\quad m_{1i} \mathbf{g}^T (\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{r}_{2i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{r}_{G1i}) \end{aligned}$$

sustituyendo ec. (5. 3b) en ec. anterior:

$$\begin{aligned} L_{1i} &= \frac{1}{2} \left( m_{1i} \mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{k}_{1i} + \mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j} \right) (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}})^2 + \\ &\quad m_{1i} \mathbf{g}^T (\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{r}_{2i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{r}_{G1i}) \end{aligned}$$

tomando la derivada parcial con respecto a  $q_j$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{1i}}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \left( m_{1i} \frac{\partial \mathbf{k}_{1i}^T}{\partial q_j} \mathbf{k}_{1i} + \mathbf{k}_{1i}^T \frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial q_j} \right) (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}})^2 + \\
&\quad \frac{1}{2} (m_{1i} (\mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{k}_{1i}) + (\mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j})) 2 (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}^T}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + \\
&\quad m_{1i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G1i} \\
&= \frac{1}{2} m_{1i} 2 \frac{\partial \mathbf{k}_{1i}^T}{\partial q_j} \mathbf{k}_{1i} (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}})^2 + \\
&\quad (m_{1i} (\mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{k}_{1i}) + (\mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j})) (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}^T}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + \\
&\quad m_{1i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G1i}
\end{aligned}$$

Tomando las definiciones de  $\frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j}$  y  $\frac{\partial \mathbf{k}_{1i}^T}{\partial q_j}$  del apéndice C, y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{1i}}{\partial q_j} &= \left[ m_{1i} \left( \mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{J}_{2i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right) (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{2i}^T \right] \dot{\mathbf{q}} + \\
&\quad ((m_{1i} (\mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{k}_{1i}) + (\mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j})) \\
&\quad (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \left( \mathbf{J}_{7i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)) \dot{\mathbf{q}} + m_{1i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G1i}
\end{aligned}$$

agrupando en  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{1i}}{\partial q_j} &= [m_{1i} \left( \mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{J}_{2i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right) (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{2i}^T + (m_{1i} (\mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{k}_{1i}) + \\
&\quad (\mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j})) (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \left( \mathbf{J}_{7i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right)] \dot{\mathbf{q}} + \\
&\quad m_{1i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G1i} \\
&= \mathbf{V}'_{1i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{1i} \tag{5.18a}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}'_{1i} &= m_{1i} \left( \mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{J}_{2i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right) (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{k}_{2i}^T + (m_{1i} (\mathbf{k}_{1i}^T \mathbf{k}_{1i}) + \\ &\quad (\mathbf{j}^T \mathbf{I}_{G1i} \mathbf{j})) (\mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}}) \left( \mathbf{J}_{7i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \right) \end{aligned} \quad (5.18b)$$

$$\mathbb{C}_{1i} = m_{1i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} \mathbf{r}_{G1i} \quad (5.18c)$$

### Desarrollando $\frac{\partial L_{2i}}{\partial q_j}$

De ec. (5. 10c) sustituyendo ecs. (5. 4d), (5. 4h) y su vector de centro de gravedad se tiene:

$$\begin{aligned} L_{2i} &= \frac{1}{2} m_{2i} (\mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} \dot{\mathbf{q}}) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( -\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} \mathbf{i} + c\theta_{8i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} \mathbf{j} + s\theta_{8i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} \mathbf{k} \right)^T \mathbf{I}_{G2i} \\ &\quad \left( -\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} \mathbf{i} + c\theta_{8i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} \mathbf{j} + s\theta_{8i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} \mathbf{k} \right) + \\ &\quad m_{2i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2i} \end{aligned}$$

simplificando y renombrando términos:

$$\begin{aligned} L_{2i} &= \frac{1}{2} m_{2i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} (a_{2i} \mathbf{i} + b_{2i} \mathbf{j} + c_{2i} \mathbf{k})^T \mathbf{I}_{G2i} \\ &\quad (A_{2i} \mathbf{i} + B_{2i} \mathbf{j} + C_{2i} \mathbf{k}) + m_{2i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G2i} \\ &= \frac{1}{2} (m_{2i} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{2i} \dot{\mathbf{q}} + I_{xx2i} A_{2i} a_{2i} + I_{yy2i} B_{2i} b_{2i} + I_{zz2i} C_{2i} c_{2i}) + \\ &\quad m_{2i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2i} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} a_{2i} &= -\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} \\ b_{2i} &= (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \\ c_{2i} &= (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i} \dot{\mathbf{q}} \\ A_{2i} &= -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{k}_{7i} \\ B_{2i} &= \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i}) c\theta_{8i} \\ C_{2i} &= \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i}) s\theta_{8i} \\ \mathbf{R}_{G2i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{r}_{2i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \\ &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G2i} \end{aligned}$$

finalmente la expresión que se obtiene es:

$$L_{2i} = \frac{1}{2}(m_{2i} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{2i} \dot{\mathbf{q}} + I_{xx2i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{7i} \mathbf{k}_{7i}^T) \dot{\mathbf{q}} + (I_{yy2i} c\theta_{8i}^2 + I_{zz2i} s\theta_{8i}^2) \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}}) + m_{2i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2i}$$

tomando la derivada parcial con respecto a  $q_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{2i}}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \left( m_{2i} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_{2i}}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + I_{xx2i} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{k}_{7i}^T + \mathbf{k}_{7i} \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} \right) + \\ &\frac{1}{2} \left( -I_{yy2i} 2 c\theta_{8i} s\theta_{8i} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} + I_{zz2i} 2 s\theta_{8i} c\theta_{8i} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} + \\ &\frac{1}{2} (I_{yy2i} c\theta_{8i}^2 + I_{zz2i} s\theta_{8i}^2) \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{\partial (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})}{\partial q_j} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i}) \frac{\partial (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} + \\ &m_{2i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2i} \end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{2i}}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \left( m_{2i} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_{2i}}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + I_{xx2i} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{k}_{7i}^T + \mathbf{k}_{7i} \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} \right) + \\ &(I_{zz2i} - I_{yy2i}) c\theta_{8i} s\theta_{8i} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} + \\ &\frac{1}{2} (I_{yy2i} c\theta_{8i}^2 + I_{zz2i} s\theta_{8i}^2) \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{\partial (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})}{\partial q_j} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T + \right. \\ &\left. (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i}) \frac{\partial (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} + m_{2i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2i} \end{aligned}$$

agrupando en  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{2i}}{\partial q_j} &= \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{1}{2} m_{2i} \frac{\partial \mathbf{M}_{2i}}{\partial q_j} + I_{xx2i} \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{k}_{7i}^T + \mathbf{k}_{7i} \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial q_j} \right) + \right. \\ &(I_{zz2i} - I_{yy2i}) c\theta_{8i} s\theta_{8i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} + \\ &\left. \frac{1}{2} (I_{yy2i} c\theta_{8i}^2 + I_{zz2i} s\theta_{8i}^2) \left( \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}}{\partial q_j} \right) (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T + \right. \right. \\ &\left. \left. (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i}) \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}}{\partial q_j} \right)^T \right) \right) \dot{\mathbf{q}} + m_{2i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G2i} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{2iq} \dot{\mathbf{q}} + m_{2i} \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G2i}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial L_{2i}}{\partial q_j} &= \mathbb{V}'_{2i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{2i} \end{aligned} \tag{5.19a}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{2iq} &= \frac{1}{2} m_{2i} \frac{\partial \mathbf{M}_{2i}}{\partial q_j} + I_{xx2i} \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{k}_{7i}^T + \mathbf{k}_{7i} \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial q_j} \right) + \\
&\quad (I_{zz2i} - I_{yy2i}) c\theta_{8i} s\theta_{8i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} + \\
&\quad \frac{1}{2} (I_{yy2i} c\theta_{8i}^2 + I_{zz2i} s\theta_{8i}^2) \left( \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}}{\partial q_j} \right) (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T + \right. \\
&\quad \left. (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i}) \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}}{\partial q_j} \right)^T \right) \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{G2i}}{\partial q_j} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \right. \\
&\quad \left( \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \right. \\
&\quad \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})}{\partial \theta_{7i}} \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \\
&\quad \left. \left. \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} \right) \mathbf{r}_{G2i} \right)
\end{aligned}$$

$$\mathbb{V}'_{2i} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{2iq} \quad (5.19b)$$

$$\mathbb{C}_{2i} = m_{2i} \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G2i}}{\partial q_j} \quad (5.19c)$$

los términos siguientes  $\frac{\partial \mathbf{k}_{2i}}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{k}_{6i}}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{k}_{7i}}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{M}_{2i}}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j}$ ,  $\frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j}$ , y  $\frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j}$  están definidos en el apéndice C.

### Desarrollando $\frac{\partial L_{3i}}{\partial q_j}$

Esta ecuación presenta la misma forma que ec. (5. 19a) sin embargo se hace notar que la diferencia está en la matriz  $\mathbf{M}_{2i}$ , la matriz correspondiente para esta ecuación es  $\mathbf{M}_{3i}$ , por lo tanto las expresiones finales quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
L_{3i} &= \frac{1}{2} (m_{3i} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{3i} \dot{\mathbf{q}} + I_{xx2i} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{k}_{7i}) (\mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) + I_{yy2i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T c\theta_{8i}^2 \dot{\mathbf{q}} + \\
&\quad I_{zz2i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T s\theta_{8i}^2 \dot{\mathbf{q}} + m_{3i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G3i}
\end{aligned}$$

tomando la derivada parcial con respecto a  $q_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{3i}}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \left( m_{3i} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_{3i}}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + I_{xx2i} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{k}_{7i}^T + \mathbf{k}_{7i} \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} \right) + \\ &\frac{1}{2} \left( -I_{yy2i} - 2 c\theta_{8i} s\theta_{8i} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} + I_{zz2i} - 2 s\theta_{8i} c\theta_{8i} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} + \\ &\frac{1}{2} (I_{yy2i} c\theta_{8i}^2 + I_{zz2i} s\theta_{8i}^2) \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{\partial (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})}{\partial q_j} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T + (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i}) \frac{\partial (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} + \\ &m_{3i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G3i} \end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{3i}}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \left( m_{3i} \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}_{3i}}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}} + I_{xx2i} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{k}_{7i}^T + \mathbf{k}_{7i} \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} \right) + \\ &(I_{zz2i} - I_{yy2i}) c\theta_{8i} s\theta_{8i} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} + \\ &\frac{1}{2} (I_{yy2i} c\theta_{8i}^2 + I_{zz2i} s\theta_{8i}^2) \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{\partial (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})}{\partial q_j} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T + \right. \\ &\left. (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i}) \frac{\partial (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T}{\partial q_j} \right) \dot{\mathbf{q}} + m_{3i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G3i} \end{aligned}$$

agrupando en  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{3i}}{\partial q_j} &= \dot{\mathbf{q}}^T \left( \frac{1}{2} m_{3i} \frac{\partial \mathbf{M}_{3i}}{\partial q_j} + I_{xx2i} \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{k}_{7i}^T + \mathbf{k}_{7i} \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial q_j} \right) + \right. \\ &(I_{zz2i} - I_{yy2i}) c\theta_{8i} s\theta_{8i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} + \\ &\left. \frac{1}{2} (I_{yy2i} c\theta_{8i}^2 + I_{zz2i} s\theta_{8i}^2) \left( \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}}{\partial q_j} \right) (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T + \right. \right. \\ &\left. \left. (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i}) \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}}{\partial q_j} \right)^T \right) \right) \dot{\mathbf{q}} + m_{3i} \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{G3i} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{3iq} \dot{\mathbf{q}} + m_{2i} \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G3i}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial L_{3i}}{\partial q_j} &= \mathbf{V}'_{3i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{3i} \end{aligned} \tag{5.20a}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{3iq} &= \frac{1}{2} m_{3i} \frac{\partial \mathbf{M}_{3i}}{\partial q_j} + I_{xx2i} \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{k}_{7i}^T + \mathbf{k}_{7i} \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial q_j} \right) + \\
&\quad (I_{zz2i} - I_{yy2i}) c\theta_{8i} s\theta_{8i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})(\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} + \\
&\quad \frac{1}{2} (I_{yy2i} c\theta_{8i}^2 + I_{zz2i} s\theta_{8i}^2) \left( \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}}{\partial q_j} \right) (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T + \right. \\
&\quad \left. (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i}) \left( \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}}{\partial q_j} \right)^T \right) \\
\frac{\partial \mathbf{R}_{G3i}}{\partial q_j} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \left( \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \right. \\
&\quad \left( \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \right. \\
&\quad \left. \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})}{\partial \theta_{7i}} \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) + \right. \\
&\quad \left. \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} \right) \mathbf{r}_{G3i} \\
\mathbb{V}'_{3i} &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_{3iq} \tag{5.20b} \\
\mathbb{C}_{3i} &= m_{3i} \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{G3i}}{\partial q_j} \tag{5.20c}
\end{aligned}$$

el término siguiente  $\frac{\partial \mathbf{M}_{3i}}{\partial q_j}$ , esta definido en el ápendice c.

### Desarrollando $\frac{\partial L_{5i}}{\partial q_j}$

Sustituyendo en ec.(5. 10e) la ec. (5. 6) y el vector de posición del centro de gravedad de este cuerpo, se forma la expresión siguiente:

$$L_{5i} = \frac{1}{2} m_{5i} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + m_{5i} \mathbf{g}^T (\mathbf{q} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i}) \mathbf{r}_{17i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i}) \mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i}) (\mathbf{r}_{14i} + \mathbf{r}_{5ai}))$$

tomando la derivada parcial con respecto  $q_j$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{5i}}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} (m_{5i} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}) + m_{5i} \mathbf{g}^T \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{q} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i}) \mathbf{r}_{17i} + \\
&\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i}) \mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i}) (\mathbf{r}_{14i} + \mathbf{r}_{5ai})) \\
\frac{\partial L_{5i}}{\partial q_j} &= \mathbb{C}_{5i} \tag{5.21a}
\end{aligned}$$

donde:

$$\mathbb{C}_{5i} = m_{5i} \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \quad (5.21b)$$

**Desarrollando**  $\frac{\partial L_{6i}}{\partial q_j}$

Sustituyendo en ec.(5. 10f) la ec. (5. 7) y el vector de posición del centro de gravedad de este cuerpo, se forma la expresión siguiente:

$$L_{6i} = \frac{1}{2} m_{6i} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + m_{6i} \mathbf{g}^T (\mathbf{q} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i}) \mathbf{r}_{17i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i}) \mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i}) (\mathbf{r}_{14i} + \mathbf{r}_{6ai}))$$

tomando la derivada parcial con respecto  $q_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{6i}}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} (m_{6i} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}) + m_{6i} \mathbf{g}^T \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{q} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i}) \mathbf{r}_{17i} + \\ &\quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i}) \mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i}) (\mathbf{r}_{14i} + \mathbf{r}_{6ai})) \\ \frac{\partial L_{6i}}{\partial q_j} &= \mathbb{C}_{6i} \end{aligned} \quad (5.22a)$$

donde:

$$\mathbb{C}_{6i} = m_{6i} \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \quad (5.22b)$$

**Desarrollando**  $\frac{\partial L_p}{\partial q_j}$

Sustituyendo en ec. (5. 10g) la ec. (5. 8) y el vector de posición del centro de gravedad de este cuerpo, se forma la expresión siguiente:

$$L_p = \frac{1}{2} m_4 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + m_4 \mathbf{g}^T (\mathbf{q} + \mathbf{R}'_{G4})$$

tomando la derivada parcial con respecto  $q_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_p}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} (m_4 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}) + m_{4i} \mathbf{g}^T \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathbf{q} + \mathbf{R}'_{G4}) \\ \frac{\partial L_p}{\partial q_j} &= \mathbb{C}_p \end{aligned} \quad (5.23a)$$

donde:

$$\mathbb{C}_p = m_4 \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \quad (5.23b)$$

Por último sustituyendo ecs. (5. 12g), (5. 13r), (5. 14a), (5. 15a), (5. 16a), (5. 17a), (5. 18a), (5. 19a), (5. 20a), (5. 21), (5. 22) y (5. 23) en ec.(5. 2a):

$$\mathbb{D}_{1i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V}_{1i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{D}_{2i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V}_{2i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{D}_{3i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V}_{3i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{D}_{5i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{D}_{6i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{D}_p \ddot{\mathbf{q}} - (\mathbb{V}'_{1i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{C}_{1i} + \mathbb{V}'_{2i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{C}_{2i} + \mathbb{V}'_{3i} \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{C}_{3i} + \mathbb{C}_{5i} + \mathbb{C}_{6i} + \mathbb{C}_p) = Q$$

Agrupando en  $\ddot{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  obtenemos la forma final de la ecuación de Lagrange:

$$\mathbb{D} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbb{V} \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{C} = Q \quad (5.24a)$$

donde los matrices  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{V}$  y  $\mathbb{C}$  son:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \mathbb{D}_{1i} + \mathbb{D}_{2i} + \mathbb{D}_{3i} + \mathbb{D}_{5i} + \mathbb{D}_{6i} + \mathbb{D}_p \\ \mathbb{V} &= \mathbb{V}_{1i} + \mathbb{V}_{2i} + \mathbb{V}_{3i} - (\mathbb{V}'_{1i} + \mathbb{V}'_{2i} + \mathbb{V}'_{3i}) \\ \mathbb{C} &= -(\mathbb{C}_{1i} + \mathbb{C}_{2i} + \mathbb{C}_{3i} + \mathbb{C}_{5i} + \mathbb{C}_{6i} + \mathbb{C}_p) \end{aligned}$$

### 5.3 Fuerzas Generalizadas

La formulación de la ecuación de Lagrange considera el uso de fuerzas generalizadas contemplando las fuerzas aplicadas externamente, fuerzas y torques de actuadores, fuerzas de resortes lineales y torsionales, de modo que es necesario desarrollar estas expresiones para que sean compatibles con el lagrangiano, y además consistentes con las restricciones mecánicas. Las fuerzas generalizadas se obtienen a partir de la expresión de trabajo virtual.

Primero consideremos el caso en el cual los actuadores ejercen una fuerza o torque en las juntas y fuerzas y momentos externos son aplicados al efector final. Definamos  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \dots \tau_n]^T$  como un vector n-dimensional que representa el torque generado en las juntas y  $\mathbf{F}_e = [\mathbf{f}_e^T, \mathbf{n}_e^T]^T$ , el vector de seis coordenadas de las fuerzas y momentos resultantes en el efector final. Por lo tanto el trabajo virtual producido por estas fuerzas y momento es:

$$\delta W = \boldsymbol{\tau}_i \delta \mathbf{Q} + \mathbf{F}_e \delta \mathbf{x} \quad (5.25a)$$

donde  $\delta \mathbf{x}$  es el vector de desplazamiento virtual del efector final. Substituyendo la relación  $\delta \mathbf{x} = J \delta \mathbf{Q}$  en ec. (C,1) conseguimos definir el vector de fuerzas generalizadas como:

$$Q = \boldsymbol{\tau}_i + J^T \mathbf{F}_e \quad (5.25b)$$

Para el caso del robot delta paralelo, se desprecian los efectos de fuerzas externas en el efector final, por lo que resulta entonces:

$$\delta W = \boldsymbol{\tau}_i \delta \mathbf{Q}_{1i} \quad (5.25c)$$

donde:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{R}_{0,3i}(\boldsymbol{\tau}_i \mathbf{j}) \quad (5.25d)$$

Apartir de la referencia [15], que relaciona las velocidades angulares con los desplazamientos virtuales:

$$\delta \mathbf{Q} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}} \delta q$$

se plantean los desplazamientos virtuales que están relacionados con las fuerzas externas:

$$\delta \mathbf{Q}_{1i} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1}{\partial \dot{\theta}_{3i}} \delta \theta_{3i} \quad (5.25e)$$

donde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{0,3i}^1 &= \mathbf{R}_{0,3i} \boldsymbol{\omega}_{3i} \\ \boldsymbol{\omega}_{3i} &= \dot{\theta}_{3i} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (5.25f)$$

sustituyendo ec (5. 25f) en ec. (5. 25e):

$$\delta \mathbf{Q}_{1i} = \frac{\partial \mathbf{R}_{0,3i} (\dot{\theta}_{3i} \mathbf{j})}{\partial \dot{\theta}_{3i}} \delta \theta_{3i} \quad (5.25g)$$

sustituyendo ec. (5. 25d) y (5. 25g) en ec. (5. 25c):

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^3 (\mathbf{R}_{0,3i} (\tau_i \mathbf{j}))^T \frac{\partial \mathbf{R}_{0,3i} (\dot{\theta}_{3i} \mathbf{j})}{\partial \dot{\theta}_{3i}} \delta \theta_{3i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{j}^T (\mathbf{R}_{0,3i}^T \mathbf{R}_{0,3i}) \frac{\partial \dot{\theta}_{3i}}{\partial \dot{\theta}_{3i}} \mathbf{j} \delta \theta_{3i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{j}^T \mathbf{j} \delta \theta_{3i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \tau_i \delta \theta_{3i} \end{aligned} \quad (5.25h)$$

donde se tiene la siguiente definición:

$$\frac{d\theta_{3i}}{dt} = \mathbf{k}_{2i}^T \frac{d\mathbf{q}}{dt}$$

también se puede definir con desplazamientos virtuales como:

$$\frac{\delta \theta_{3i}}{\delta t} = \mathbf{k}_{2i}^T \frac{\delta \mathbf{q}}{\delta t}$$

multiplicando por  $\delta t$ :

$$\delta \theta_{3i} = \mathbf{k}_{2i}^T \delta \mathbf{q} \quad (5.25i)$$

tomando esta última ec. (5. 25i) y sustituyendo en (5. 25h):

$$\delta W = \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{k}_{2i}^T \delta \mathbf{q}$$

claramente se observa entonces que las fuerzas generalizadas presentan la forma:

$$Q = \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{k}_{2i}^T \tag{5.25j}$$

finalmente:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{k}_{2i}^T = \tau_1 \mathbf{k}_{21}^T + \tau_2 \mathbf{k}_{22}^T + \tau_3 \mathbf{k}_{23}^T \\ &= \tau_1 \begin{bmatrix} k_{21x} \\ k_{21y} \\ k_{21z} \end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix} k_{22x} \\ k_{22y} \\ k_{22z} \end{bmatrix} + \tau_3 \begin{bmatrix} k_{23x} \\ k_{23y} \\ k_{23z} \end{bmatrix} \\ &= [\tau_1, \tau_2, \tau_3] \begin{bmatrix} k_{21x} & k_{21y} & k_{21z} \\ k_{22x} & k_{22y} & k_{22z} \\ k_{23x} & k_{23y} & k_{23z} \end{bmatrix} \\ &= [\tau_1, \tau_2, \tau_3] \begin{bmatrix} k_{21}^T \\ k_{22}^T \\ k_{23}^T \end{bmatrix} \\ Q &= \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} \end{aligned}$$

### 5.3 Determinación de los torques

La solución de la ec. (5,24a), para el caso de tener condiciones estáticas, y siguiendo la trayectoria planteada en el apéndice B, se muestra en la gráfica siguiente (fig (5.2)).

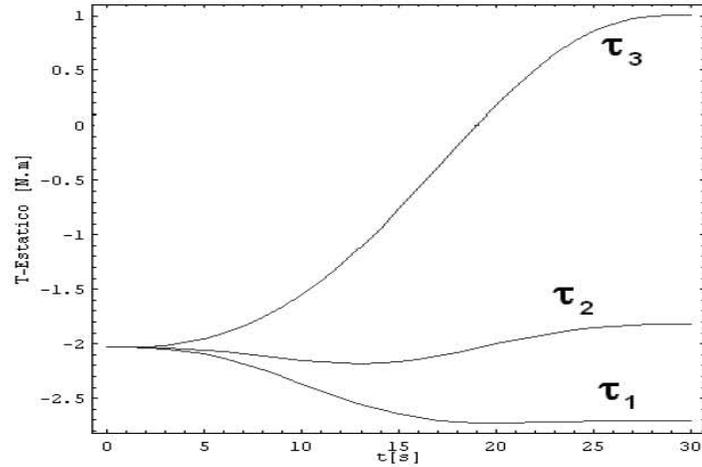


Fig. 5.2 Torques estáticos, formulación lagrangiana

La solución de la ec. (5,24a), para el caso de tener condiciones dinámicas, y siguiendo la trayectoria planteada en el apéndice B, se muestra en la gráfica siguiente (fig (5.3)).

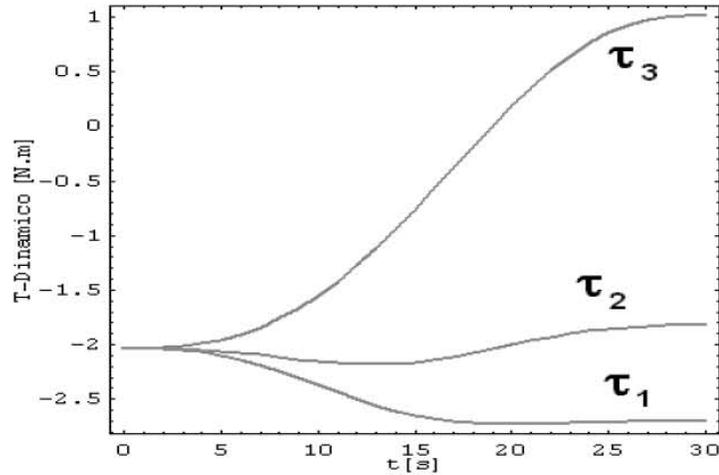
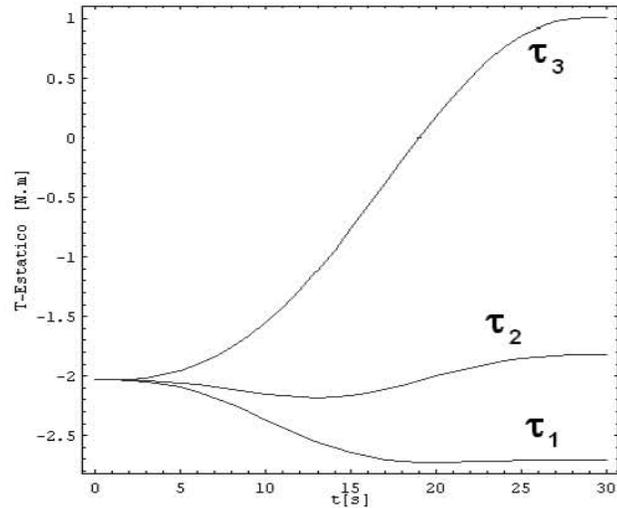


Fig. 5.3 Torques dinámicos, formulación Lagrangiana

# Resultados

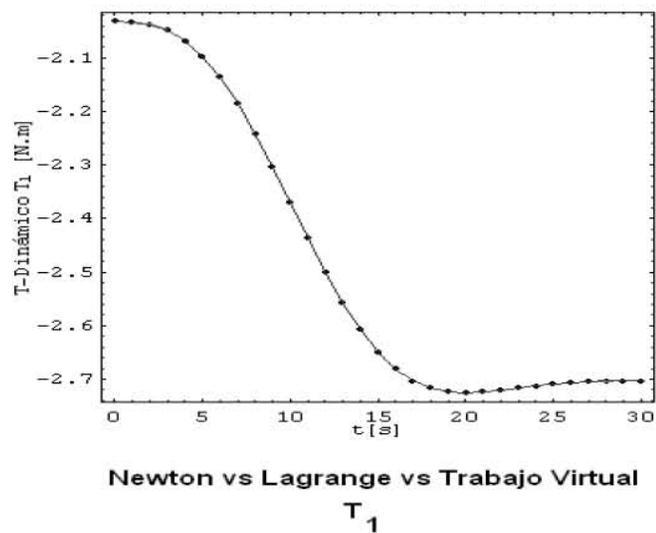
Los resultados mostrados para los tres modelos dinámicos, para el caso de condiciones estáticas nos muestran el mismo comportamiento como se muestra en la gráfica siguiente:



Torques estáticos, Newton - Euler, Trabajo Virtual y Lagrange

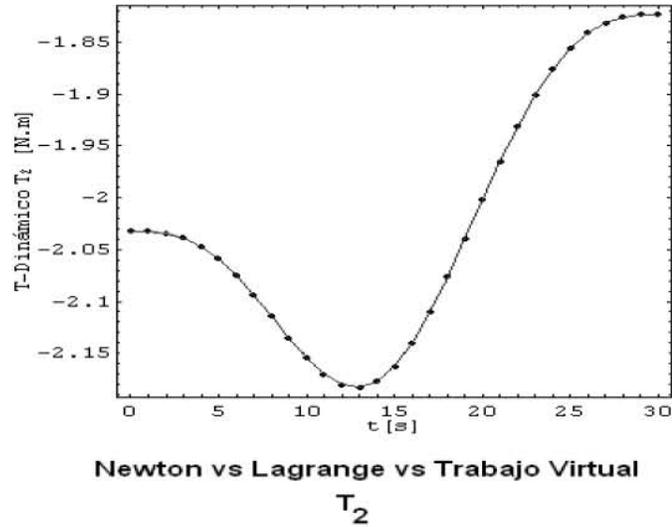
Para los modelos dinámicos con condiciones diferentes a los estáticos se muestra a continuación los torques encontrados para los tres modelos empleados, haciendo una comparación de cada uno de ellos.

Para el torque  $\tau_1$  se tiene:



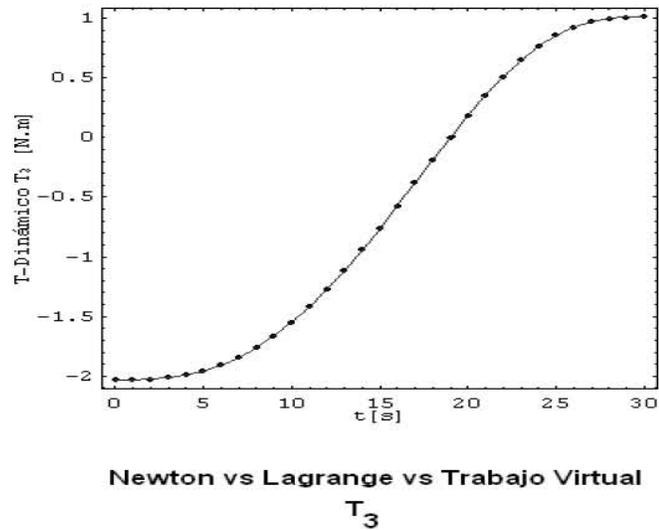
Se aprecia dentro de esta gráfica que los tres modelos presentan el mismo comportamiento.

Para el torque  $\tau_2$  se tiene:



Dentro de los resultados obtenidos para cada uno de estos torques, se aprecia que no hay una diferencia que simbolice un error de magnitudes considerables.

Para el torque  $\tau_3$  se tiene:



# Conclusiones

De acuerdo a la cinemática descrita en el capítulo II y sus resultados obtenidos, el problema de la cinemática inversa para este manipulador fue definido dando una posición del efector final y se obtuvo un conjunto de ángulos que permitieron al efector alcanzar dicha posición. La solución resulto para el caso general un conjunto de 18 incógnitas. Sin embargo se muestra a través de las gráficas descritas en el capítulo correspondiente, que para cualquier clase de movimiento desarrollado el ángulo  $\theta_{12i}$  no presentó desplazamiento angular alguno, lo que permite disminuir el número de incógnitas a encontrar, no obstante el análisis se llevo a cabo para las 18 incógnitas.

Tres modelos fueron desarrollados para el modelo dinámico del manipulador, mostrando que con cada modelo desarrollado se obtuvieron los mismos resultados, en condiciones estáticas y condiciones dinámicas.

El primer método empleado fueron las ecuaciones de movimiento de Newton.- Euler. Las ecuaciones de Newton-Euler de movimiento contienen todas las fuerzas de restricción entre eslabones. Sin embargo operaciones adicionales son necesarias para eliminar estas fuerzas de restricción para obtener ecuaciones de una forma cerrada. Dentro de este análisis se tomaron distintos sistemas de referencia, lo cual corrobora que no importando el sistema de referencia a emplear, si se hace el planteamiento correcto se alcanzan los mismos valores que tomando las ecuaciones en un sistema de referencia inercial.

El segundo método empleado fue el Trabajo Virtual, a diferencia de la mecánica Newtoniana, el principio del trabajo virtual no requiere considerar las fuerzas de restricción o de reacción, solo requiere cantidades de trabajo escalar para definir las ecuaciones estáticas y dinámicas. Este principio puede ser usado para derivar sistemáticamente un mínimo de ecuaciones de movimiento de sistemas de varios cuerpos mediante la eliminación de las fuerzas de restricción. Lo cual nos llevó a obtener una ecuación donde se determinó exclusivamente los torques requeridos en los eslabones de entrada para recorrer de un punto inicial a uno final a través de una trayectoria deseada. Se tomó en cuenta que las matrices de inercia deben ser medidas respecto a un sistema inercial, debido a las características propias del método, lo cual no ocurrió con el método de Newton - Euler.

Para el tercer método, formulación Lagrangiana se llevo a cabo, mostrando que el análisis es más complicado, sin embargo para objetivos de crear un control que permita tener mejor desempeño este método permite desarrollar una ecuación dinámica de control que alcance este objetivo. Durante el desarrollo de este método se consideró tomar todos los cuerpos, con la meta de tener una mejor aproximación al valor real de los valores esperados, por tal motivo las ecuaciones de los cuerpos 2i y 3i fueron las que mayor dificultad presentaron, debido a los términos de coriolis que se obtienen.

Una vez encontrado el modelo, se hicieron las simulaciones pertinentes para determinar si estos efectos eran de consideración y se concluyó que no suman un valor de importancia al resultado de la magnitud de los torques, pero para términos de comparación con respecto a los otros modelos empleados, se hace la adición de estos efectos en el modelo original.

Observando que los tres modelos presentan el mismo comportamiento dinámico se concluye que los modelos desarrollados mostrados en esta investigación son idénticos en resultados y deja un antecedente (Modelo dinámico de formulación Lagrangiana) para desarrollar un modelo de control que permita manipular al robot delta paralelo.

A su vez dejando en el modelo dinámico de Newton - Euler las fuerzas restrictivas que permiten tener parámetros de diseño mecánico para la selección de materiales y dispositivos mecánicos óptimos.

Mientras que el método de Trabajo Virtual permite una mayor rapidez en el cálculo de torques, lo cual implica menos tiempo de programación y consumo de este mismo en cálculo de operaciones.

# Bibliografía

- [1] Lung - Wen Tsai "Robot Analysis" The mechanics of serial and parallel manipulators, John Wiley & Sons, Inc, 1999
- [2] Z. Huang, Q.C. Li., Robotics Research Center Yanshan University "Type Synthesis of symmetrical lower mobility parallel mechanism using the constraint-synthesis method"
- [3] Stewart . D., 1965, "A platform with Six Degrees of Freedom", Proc. Inst. Mech. Eng. London, Vol. 180, pp. 371-686
- [4] Hunt, K. H., 1983, "Structural Kinematics of In-Parallel-Actuated Robot Arms", ASME J. Mec. Transm, Autom. Des., Vol 105, pp 705 -712.
- [5] Clearly, K. and Arai, T., 1991 "A Prototype Parallel Manipulator: Kinemactics, Construction, Software, Workspace, Results and Singularity Analysis", Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol 1, pp 561-771.
- [6] Fichter, E.F., 1986, "A Stewart Platform Based Manipulator: General Theory and Practical Construction", Int. J. Robot. Res., Vol 5, pp. 157-182.
- [7] Grffis, M. and Duffy, J., 1989, "Forward Displacement Analysis of a Class of Stewart Platforms", J. Robot, Syst., Vol. 6, PP 703-720.
- [8] Innocenti, C. and Parenti-Castelli, V., 1990, "Direct Position Analysis of the Stewart Platform Mechanism", Mech. Mach. Theroy, Vol 25, pp. 611-612.
- [9] Mohamed, M. G. and Duffy, J., 1985, "A Direct Determination of the Instantaneous Kinemactic of Fully Parallel, Robotic Manipulators", ASME J. Mech Transm. Autom. Des., Vol. 107, pp 226-229.
- [10] Naua, P., Waldron, K. J., and Murthy, V., 1990, "Direct Kinematic Solution of a Stewart Platform", IEEE Trans. Robot. Autom., Vol. 6, pp 438-444.
- [11] Zhang, C. and Song, S. M., 1994, "Forward Position Analysis of Nearly General Stewart Platforms", ASME J. Mech. Des., Vol. 116, pp. 54-60.

- [12] Vladimir Stejskal, and Michael Valasek "Kinematics and Dynamics of Machinery" Mercel Dekker, Inc. 1996. pp. 231 – 235 Czech Technical University, Prague, Czech Republic
- [13]Ahmed A. Shabana, "Computational Dynamics", Jhon Wiley & Sons, INC. 2001.
- [14] Mark W. Spong, and M. Vidyasagar, "Robot Dynamics and control" John Wiley & Sons, ed. 1989, pp 129 -133.
- [15] Greenwood, D.T., Principles of Dynamics, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988
- [16] Goldstein, H., 1980 "Classical Mechanics, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, MA.
- [17]L. Sciavicco and B. Siciliana, "Modeling and Control of Robot Manipulators", Springer Verlag London Limited 2000, pp. 203-208.
- [18] M. Deng, H. Yu, M. J. Gilmartin and T. C. Yang, "Lagrangian dynamics and analysis of a hybrid linkage system", IJCSS, Vol 2, No. 1, 2001 pp 54 -71

# Apéndice A

## Ecuación trascendental

Para resolver ec.(1,24c) procedemos hacer las siguientes operaciones.

$$Ac\theta + Bs\theta = E \quad (\text{A.1})$$

Se tiene:

$$\frac{Ac\theta}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{Bs\theta}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{E}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

por lo tanto, considerando el triángulo rectángulo mostrado en la figura A-1 se tiene:

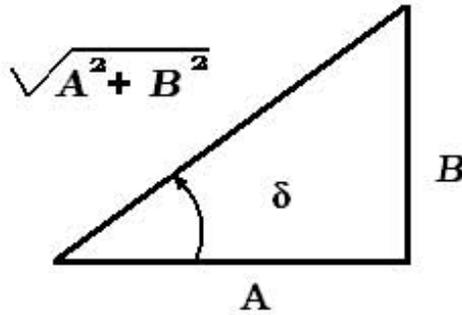


Figura A-1

definiendo los siguientes parámetros:

$$c\delta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad s\delta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad c\epsilon = \frac{E}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{A.2})$$

sustituyendo ecs. (A,2) en ec. (A,1) :

$$c\delta c\theta + s\delta s\theta = c\epsilon$$

notando que el signo de  $c\epsilon$  no altera el resultado se tiene:

$$\begin{aligned} c(\theta_{3i} - \delta) &= c\epsilon \\ c(\theta_{3i} - \delta) &= c(-\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ambas ecuaciones poseen el mismo signo.

Despejando  $\theta$  de ec. (A,3):

$$\begin{aligned} \arccos(c(\theta - \delta)) &= \arccos(c\epsilon) \\ \theta - \delta &= \epsilon \\ \theta - \delta &= -\epsilon \end{aligned}$$

de modo que:

$$\theta = \delta \pm \epsilon \quad (\text{A.4})$$

Encontrando los valores de  $\epsilon$  de ec.(A,2):

$$c\epsilon = \frac{E}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

despejando  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \arccos(c\epsilon) &= \arccos\left(\frac{E_{1i}}{\sqrt{A_{1i}^2 + B_{1i}^2}}\right) \\ \epsilon &= \arccos\left(\frac{E_{1i}}{\sqrt{A_{1i}^2 + B_{1i}^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Tomando nuevamente ec (A,2) obtengamos  $\delta$  :

$$\frac{s\delta}{c\delta} = \frac{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}{\frac{A_{1i}}{\sqrt{A^2+B^2}}} = \frac{B}{A}$$

$$t\delta = \frac{B}{A}$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{B_{1i}}{A_{1i}}\right) \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo ecs (A,6) y (A,5) en (A,4):

$$\theta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \pm \arccos\left(\frac{E}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \quad (\text{A.7})$$

# Apéndice B

## Generación de Trayectoria

El propósito de generar una trayectoria [17], es establecer los puntos de referencia, al sistema de control de movimiento del mecanismo. Lo cual asegura que el mecanismo recorrerá el camino planeado. Esto consiste en generar una sucesión del tiempo para los valores obtenidos por la interpolación de una ecuación polinomial de la trayectoria deseada. Se usa un polinomio de quinto grado para suavizar la trayectoria.

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \\ \dot{s}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 2a_2t + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

para  $t = t_0$  se tiene los valores:

$$\begin{aligned} s(t) &= 0 \\ \dot{s}(t) &= 0 \\ \ddot{s}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

al sustituirlos en las ecuaciones (B.1) se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \rightarrow a_0 = 0 \\ 0 &= a_1 \rightarrow a_1 = 0 \\ 0 &= 2a_2 \rightarrow a_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

para  $t = t_f$  se tienen los valores:

$$\begin{aligned} s(t) &= \|p_f - p_i\| \\ \dot{s}(t) &= 0 \\ \ddot{s}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

al sustituirlos en las ecs. (B.2), (B.3) y (B.4) en (B.1), se tiene:

$$\begin{aligned} \|p_f - p_i\| &= a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \\ 0 &= 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \\ 0 &= 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \end{aligned}$$

el sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3 t_f^2 & 4 t_f^3 & 5 t_f^4 \\ 6 t_f & 12 t_f^2 & 20 t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|p_f - p_i\| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

al resolver el sistema de la ec. (B.5) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_3 &= 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 \\ a_4 &= -15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 \\ a_5 &= 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \end{aligned}$$

Finalmente son obtenidas las ecuaciones que suavizan la trayectoria:

$$\begin{aligned} s(t) &= \|p_f - p_i\| \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] \\ \dot{s}(t) &= \|p_f - p_i\| \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] \\ \ddot{s}(t) &= \|p_f - p_i\| \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

donde la trayectoria planeada es una recta, que consta de un punto inicial ( $p_0$ ) y un punto final ( $p_f$ ), las ecuaciones que describen una recta, según [17] son:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_i + \frac{s(t)}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \\ v(t) &= \frac{\dot{s}(t)}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \\ a(t) &= \frac{\ddot{s}(t)}{\|p_f - p_i\|} (p_f - p_i) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Finalmente las ecuaciones de la trayectoria ya suavizadas resultan a sustituir en ecs.(B.7) las ecs. (B.6):

$$p(t) = p_i + \left[ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (p_f - p_i) \quad (\text{B.8})$$

$$v(t) = \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (p_f - p_i) \quad (\text{B.9})$$

$$a(t) = \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (p_f - p_i) \quad (\text{B.10})$$

donde:

$$\begin{aligned} p_i &= (x_i, y_i, z_i) \\ p_f &= (x_f, y_f, z_f) \end{aligned}$$

# Apéndice C

Términos para los elementos  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Los siguientes valores derivados de expresiones  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$  se muestran a continuación:

$$\mathbf{k}_{2i} = \frac{1}{E_{1i}} [E_{2i}, E_{3i}, E_{4i}]^T \text{ y } \dot{\mathbf{k}}_{2i} = \mathbf{E}_i \dot{\mathbf{q}}, \text{ con la matriz } \mathbf{E}_i = \frac{1}{E_{1i}^3} \begin{bmatrix} E_{17i} & E_{18i} & E_{19i} \\ E_{20i} & E_{21i} & E_{22i} \\ E_{23i} & E_{24i} & E_{24i} \end{bmatrix}$$

con los elementos de la matriz  $\mathbf{E}_i$  definidos como:

$$\begin{aligned} E_{1i} &= B_{1i}c\theta_{3i} - A_{1i}s\theta_{3i} \\ E_{2i} &= -2(d_{17i}c\delta_{16i} - d_{5i}s\delta_{1i} + d_{13i}c\delta_{16i}s\delta_{15i} + d_{14i}s\delta_{16i} - c\delta_{1i}(d_{2i} + d_{4i}c\theta_{3i} - \\ &\quad d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p) \\ E_{3i} &= -2(d_{5i}c\delta_{1i} - d_{14i}c\delta_{16i} - d_{2i}s\delta_{1i} - d_{4i}c\theta_{3i}s\delta_{1i} + d_{17i}s\delta_{16i} + d_{13i}s\delta_{15i}s\delta_{16i} + \\ &\quad d_{6i}s\delta_{1i}s\theta_{3i} + y_p) \\ E_{4i} &= -2(d_{13i}c\delta_{15i} + d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i} + z_p) \\ E_{5i} &= (-2E_{1i} - 2d_{6i}c\delta_{1i}c\theta_{3i}E_{2i} - 2d_{4i}c\delta_{1i}E_{2i}s\theta_{3i}) \\ E_{6i} &= (-2d_{6i}c\theta_{3i}E_{2i}s\delta_{1i} - 2d_{4i}E_{2i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}) \\ E_{7i} &= (-2d_{4i}c\theta_{3i}E_{2i} + 2d_{6i}E_{2i}s\theta_{3i}) \\ E_{8i} &= (-2d_{6i}c\delta_{1i}c\theta_{3i}E_{1i} - 2d_{4i}c\delta_{1i}E_{1i}s\theta_{3i} + 2E_{2i}s\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + \\ &\quad d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + \\ &\quad d_{4i}z_p) + 2c\theta_{3i}E_{2i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + \\ &\quad d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)) \\ E_{9i} &= -E_{3i}(2d_{6i}c\delta_{1i}c\theta_{3i} + 2d_{4i}c\delta_{1i}s\theta_{3i}) \\ E_{10i} &= (-E_{3i}(2d_{6i}c\theta_{3i}s\delta_{1i} + 2d_{4i}s\delta_{1i}s\theta_{3i})) \\ E_{11i} &= (-E_{3i}(2d_{4i}c\theta_{3i} - 2d_{6i}s\theta_{3i})) \\ E_{12i} &= (-E_{3i}(-2s\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) \\ &\quad - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2c\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - \\ &\quad d_{4i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + \\ &\quad d_{6i}z_p))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{13i} &= (-2d_{6i}c\delta_{1i}c\theta_{3i}E_{4i} - 2d_{4i}c\delta_{1i}E_{4i}s\theta_{3i}) \\
E_{14i} &= (-2d_{6i}c\theta_{3i}E_{4i}s\delta_{1i} - 2d_{4i}E_{4i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}) \\
E_{15i} &= (-2E_{1i} - 2d_{4i}c\theta_{3i}E_{4i} + 2d_{6i}E_{4i}s\theta_{3i}) \\
E_{16i} &= (-2d_{4i}c\theta_{3i}E_{1i} + 2d_{6i}E_{1i}s\theta_{3i} + 2E_{4i}s\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + \\
&\quad d_{6i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + \\
&\quad s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) + 2c\theta_{3i}E_{4i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - \\
&\quad d_{4i}(c(\delta_{1i} - \delta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\delta_{1i} - \delta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + \\
&\quad s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)) \\
E_{17i} &= E_{1i}E_{5i} + E_{2i}E_{8i} \\
E_{18i} &= E_{1i}E_{6i} + E_{3i}E_{8i} \\
E_{19i} &= E_{1i}E_{7i} + E_{4i}E_{8i} \\
E_{20i} &= E_{12i}E_{2i} + E_{1i}E_{9i} \\
E_{21i} &= E_{10i}E_{1i} + E_{12i}E_{3i} \\
E_{22i} &= E_{11i}E_{1i} + E_{12i}E_{4i} \\
E_{23i} &= E_{13i}E_{1i} + E_{16i}E_{2i} \\
E_{24i} &= E_{14i}E_{1i} + E_{16i}E_{3i} \\
E_{25i} &= E_{15i}E_{1i} + E_{16i}E_{4i}
\end{aligned}$$

### Velocidades Angulares $\dot{\theta}_{7i}$ y $\dot{\theta}_{8i}$

Para las velocidades angulares  $\dot{\theta}_{7i}$  y  $\dot{\theta}_{8i}$  definidas anteriormente como:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_{7i} &= \mathbf{k}_{6i}^T \dot{\mathbf{q}} \\
\dot{\theta}_{8i} &= \mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{6i}^T &= \frac{1}{H_{1i}} [H_{2i}, H_{3i}, H_{4i}] \\
\mathbf{k}_{7i}^T &= \frac{1}{F_{1i}} [F_{2i}, F_{3i}, F_{4i}]
\end{aligned}$$

derivando los vectores  $\mathbf{k}_{6i}$  y  $\mathbf{k}_{7i}$  tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{k}}_{6i} &= \mathbf{H}_i \dot{\mathbf{q}} \\
\dot{\mathbf{k}}_{7i} &= \mathbf{F}_i \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned}$$

donde:

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{E_{1i}F_{1i}H_{1i}^3} \begin{bmatrix} H_{23i} & H_{24i} & H_{25i} \\ H_{26i} & H_{27i} & H_{28i} \\ H_{29i} & H_{30i} & H_{31i} \end{bmatrix}$$

Los términos de la matriz son:

$$\begin{aligned}
H_{1i} &= -E_{1i}F_{1i}G_{6i} \\
H_{2i} &= E_{2i}F_{1i}G_{5i} + E_{1i}F_{2i}G_{7i} \\
H_{3i} &= E_{3i}F_{1i}G_{5i} + E_{1i}F_{3i}G_{7i} \\
H_{4i} &= E_{1i}F_{1i} + E_{4i}F_{1i}G_{5i} + E_{1i}F_{4i}G_{7i} + G_{4i} \\
H_{5i} &= (2d_{6i}d_{9i}^2c\delta_{1i}c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{2i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + 2d_{4i}d_{9i}^2c\delta_{1i}c\theta_{8i}H_{2i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - \\
&\quad 2d_{9i}H_{1i}(d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i} - d_{9i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) - 2d_{6i}d_{9i}c\delta_{1i}c\theta_{3i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
&\quad H_{1i}s\delta_{1i}t\theta_{8i} - 2d_{4i}d_{9i}c\delta_{1i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}t\theta_{8i}) \\
H_{6i} &= (2d_{6i}d_{9i}^2c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{2i}s\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + 2d_{4i}d_{9i}^2c\theta_{8i}H_{2i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - \\
&\quad 2d_{6i}d_{9i}c\theta_{3i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\delta_{1i}^2t\theta_{8i} - 2d_{4i}d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\delta_{1i}^2s\theta_{3i}t\theta_{8i}) \\
H_{7i} &= (2d_{4i}d_{9i}^2c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{2i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - 2d_{6i}d_{9i}^2c\theta_{8i}H_{2i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - 2d_{4i}d_{9i} \\
&\quad c\theta_{3i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\delta_{1i}t\theta_{8i} + 2d_{6i}d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}t\theta_{8i}) \\
H_{8i} &= (-2d_{6i}d_{9i}c\delta_{1i}c\theta_{3i}H_{1i}(d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i} - d_{9i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) - 2d_{4i}d_{9i}c\delta_{1i}H_{1i}s\theta_{3i} \\
&\quad (d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i} - d_{9i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) + 2d_{6i}d_{9i}c\theta_{3i}H_{1i}(d_{17i}c\delta_{16i} - d_{5i}s\delta_{1i} + \\
&\quad d_{13i}c\delta_{16i}s\delta_{15i} + d_{14i}s\delta_{16i} - c\delta_{1i}(d_{2i} + d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p) + 2d_{9i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) \\
&\quad c\theta_{8i}H_{1i}(d_{17i}c\delta_{16i} - d_{5i}s\delta_{1i} + d_{13i}c\delta_{16i}s\delta_{15i} + d_{14i}s\delta_{16i} - c\delta_{1i}(d_{2i} + d_{4i}c\theta_{3i} - \\
&\quad d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p) + 2d_{4i}d_{9i}H_{1i}s\theta_{3i}(d_{17i}c\delta_{16i} - d_{5i}s\delta_{1i} + d_{13i}c\delta_{16i}s\delta_{15i} + d_{14i}s\delta_{16i} - \\
&\quad c\delta_{1i}(d_{2i} + d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p) - 2d_{9i}^2c\theta_{8i}H_{2i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})(-d_{2i}d_{6i} + \\
&\quad d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + \\
&\quad s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) + 2d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}t\theta_{8i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + \\
&\quad d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - \\
&\quad 2d_{9i}^2c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{2i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
&\quad d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p) + 2d_{9i}c\theta_{3i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\delta_{1i}t\theta_{8i} \\
&\quad (d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + \\
&\quad c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p) + d_{9i}H_{1i}s\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})t\theta_{8i}(2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - \\
& 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + \\
& c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)) - d_{9i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}H_{2i}(-2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + \\
& d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) + \\
& 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i} \\
& x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p))) \\
H_{9i} = & -2d_{9i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}H_{1i}(d_{17i}c\delta_{16i} - d_{5i}s\delta_{1i} + d_{13i}c\delta_{16i}s\delta_{15i} + d_{14i}s\delta_{16i} - c\delta_{1i}(d_{2i} + \\
& d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p) - d_{9i}H_{1i}s\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})t\theta_{8i}(2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + \\
& d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - \\
& 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + \\
& c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)) + d_{9i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}H_{2i}(-2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + \\
& d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) + \\
& 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + \\
& c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p))) \\
H_{10i} = & (-2d_{9i}^2H_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}(d_{17i}c\delta_{16i} - d_{5i}s\delta_{1i} + d_{13i}c\delta_{16i}s\delta_{15i} + d_{14i}s\delta_{16i} - c\delta_{1i}(d_{2i} + \\
& d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i}) + x_p) - d_{9i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}sec\theta_{8i}^2s\delta_{1i}(2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + \\
& d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - \\
& 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + \\
& c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)) + d_{9i}^2H_{2i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}(-2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + \\
& d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) + \\
& 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + \\
& c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p))) \\
H_{11i} = & (2d_{6i}d_{9i}^2c\delta_{1i}c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + 2d_{4i}d_{9i}^2c\delta_{1i}c\theta_{8i}H_{3i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + 2d_{6i}d_{9i}c\delta_{1i}^2 \\
& c\theta_{3i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}t\theta_{8i} + 2d_{4i}d_{9i}c\delta_{1i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\theta_{3i}t\theta_{8i}) \\
H_{12i} = & (2d_{6i}d_{9i}^2c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{3i}s\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + 2d_{4i}d_{9i}^2c\theta_{8i}H_{3i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + 2d_{6i}d_{9i}c\delta_{1i} \\
& c\theta_{3i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\delta_{1i}t\theta_{8i} + 2d_{4i}d_{9i}c\delta_{1i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}t\theta_{8i}) \\
H_{13i} = & (2d_{4i}d_{9i}^2c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - 2d_{6i}d_{9i}^2c\theta_{8i}H_{3i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + 2d_{4i}d_{9i}c\delta_{1i}c\theta_{3i} \\
& c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}t\theta_{8i} - 2d_{6i}d_{9i}c\delta_{1i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}s\theta_{3i}t\theta_{8i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{14i} = & (2d_{6i}d_{9i}c\theta_{3i}H_{1i}(yp + d_{5i}c\delta_{1i} - d_{14i}c\delta_{16i} - d_{2i}s\delta_{1i} - d_{4i}c\theta_{3i}s\delta_{1i} + d_{17i}s\delta_{16i} + \\
& d_{13i}s\delta_{15i}s\delta_{16i} + d_{6i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}) + 2d_{9i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}H_{1i}(yp + d_{5i}c\delta_{1i} - d_{14i}c\delta_{16i} - \\
& d_{2i}s\delta_{1i} - d_{4i}c\theta_{3i}s\delta_{1i} + d_{17i}s\delta_{16i} + d_{13i}s\delta_{15i}s\delta_{16i} + d_{6i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}) + 2d_{4i}d_{9i}H_{1i}(yp + \\
& d_{5i}c\delta_{1i} - d_{14i}c\delta_{16i} - d_{2i}s\delta_{1i} - d_{4i}c\theta_{3i}s\delta_{1i} + d_{17i}s\delta_{16i} + d_{13i}s\delta_{15i}s\delta_{16i} + d_{6i}s\delta_{1i} \\
& s\theta_{3i})s\theta_{3i} - 2d_{9i}^2c\theta_{8i}H_{3i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}) \\
& (d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2d_{9i}c\delta_{1i}c(\theta_{3i} - \\
& \theta_{7i})H_{1i}s\theta_{3i}t\theta_{8i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i} \\
& s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2d_{9i}^2c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})(d_{2i}d_{4i} + \\
& d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + \\
& s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p) - 2d_{9i}c\delta_{1i}c\theta_{3i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}t\theta_{8i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i} \\
& (c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p) - \\
& d_{9i}c\delta_{1i}H_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})t\theta_{8i}(2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + \\
& d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i} \\
& c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + \\
& d_{6i}z_p)) - d_{9i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}H_{3i}(-2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}) \\
& (d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) + 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + \\
& d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + \\
& s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p))) \\
H_{15i} = & (-2d_{9i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}H_{1i}(yp + d_{5i}c\delta_{1i} - d_{14i}c\delta_{16i} - d_{2i}s\delta_{1i} - d_{4i}c\theta_{3i}s\delta_{1i} + d_{17i} \\
& s\delta_{16i} + d_{13i}s\delta_{15i}s\delta_{16i} + d_{6i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}) + d_{9i}c\delta_{1i}H_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})t\theta_{8i}(2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + \\
& d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + \\
& s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
& d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)) + d_{9i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}H_{3i}(-2c\theta_{3i}(- \\
& d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + \\
& s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) + 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i})(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
& d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{16i} &= (-2d_{9i}^2 H_{1i}(yp + d_{5i}c\delta_{1i} - d_{14i}c\delta_{16i} - d_{2i}s\delta_{1i} - d_{4i}c\theta_{3i}s\delta_{1i} + d_{17i}s\delta_{16i} + d_{13i}s\delta_{15i} \\
&\quad s\delta_{16i} + d_{6i}s\delta_{1i}s\theta_{3i})s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i} + d_{9i}c\delta_{1i}c(\theta_{3i} - \theta_{7i})H_{1i}sec\theta_{8i}^2(2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + \\
&\quad d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i})) + c\delta_{1i}x_p + \\
&\quad s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
&\quad d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i})) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)) + d_{9i}^2 H_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})s\theta_{8i}(-2c\theta_{3i}(-d_{2i} \\
&\quad d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i})) + c\delta_{1i}x_p + \\
&\quad s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) + 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - \\
&\quad d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i})) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p))) \\
H_{17i} &= (2d_{6i}d_{9i}c\delta_{1i}c\theta_{3i}H_{1i} + 2d_{4i}d_{9i}c\delta_{1i}H_{1i}s\theta_{3i} + 2d_{6i}d_{9i}^2c\delta_{1i}c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{4i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + \\
&\quad 2d_{4i}d_{9i}^2c\delta_{1i}c\theta_{8i}H_{4i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \\
H_{18i} &= (2d_{6i}d_{9i}c\theta_{3i}H_{1i}s\delta_{1i} + 2d_{4i}d_{9i}H_{1i}s\delta_{1i}s\theta_{3i} + 2d_{6i}d_{9i}^2c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{4i}s\delta_{1i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) + \\
&\quad 2d_{4i}d_{9i}^2c\theta_{8i}H_{4i}s\delta_{1i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) \\
H_{19i} &= (2d_{4i}d_{9i}c\theta_{3i}H_{1i} - 2d_{6i}d_{9i}H_{1i}s\theta_{3i} + 2d_{4i}d_{9i}^2c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{4i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - \\
&\quad 2d_{6i}d_{9i}^2c\theta_{8i}H_{4i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) - 2d_{9i}H_{1i}(d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i} - d_{9i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i}))) \\
H_{20i} &= (-2d_{4i}d_{9i}c\theta_{3i}H_{1i}(d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i} - d_{9i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) + 2d_{6i}d_{9i}H_{1i}s\theta_{3i} \\
&\quad (d_{4i}c\theta_{3i} - d_{6i}s\theta_{3i} - d_{9i}c\theta_{8i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})) + 2d_{6i}d_{9i}c\theta_{3i}H_{1i}(d_{13i}c\delta_{15i} + d_{6i}c\theta_{3i} + \\
&\quad d_{4i}s\theta_{3i} + z_p) + 2d_{9i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i}H_{1i}(d_{13i}c\delta_{15i} + d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i} + z_p) + \\
&\quad 2d_{4i}d_{9i}H_{1i}s\theta_{3i}(d_{13i}c\delta_{15i} + d_{6i}c\theta_{3i} + d_{4i}s\theta_{3i} + z_p) - 2d_{9i}H_{1i}s\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i} \\
&\quad c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i})) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + \\
&\quad d_{4i}z_p) - 2d_{9i}^2c\theta_{8i}H_{4i}s\theta_{3i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}))(d_{17i} + \\
&\quad d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i})) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) - 2d_{9i}c\theta_{3i}H_{1i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i} \\
&\quad d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i})) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + \\
&\quad d_{6i}z_p) - 2d_{9i}^2c\theta_{3i}c\theta_{8i}H_{4i}s(\theta_{3i} - \theta_{7i})(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}))(d_{17i} + \\
&\quad d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i})) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p) - d_{9i}^2c(\theta_{3i} - \theta_{7i})c\theta_{8i} \\
&\quad H_{4i}(-2c\theta_{3i}(-d_{2i}d_{6i} + d_{13i}d_{4i}c\delta_{15i} + d_{6i}(c(\theta_{1i} - \theta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i} \\
&\quad s(\theta_{1i} - \theta_{16i})) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{4i}z_p) + 2s\theta_{3i}(d_{2i}d_{4i} + d_{13i}d_{6i}c\delta_{15i} - d_{4i}(c(\theta_{1i} - \\
&\quad \theta_{16i}))(d_{17i} + d_{13i}s\delta_{15i}) - d_{14i}s(\theta_{1i} - \theta_{16i})) + c\delta_{1i}x_p + s\delta_{1i}y_p) + d_{6i}z_p)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{21i} &= (-2d_{9i}^2 c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) c\theta_{8i} H_{1i} (d_{13i} c\delta_{15i} + d_{6i} c\theta_{3i} + d_{4i} s\theta_{3i} + z_p) + d_{9i}^2 c(\theta_{3i} - \theta_{7i}) c\theta_{8i} \\
&\quad H_{4i} (-2c\theta_{3i} (-d_{2i} d_{6i} + d_{13i} d_{4i} c\delta_{15i} + d_{6i} (c(\theta_{1i} - \theta_{16i}) (d_{17i} + d_{13i} s\delta_{15i}) - d_{14i} \\
&\quad s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i} x_p + s\delta_{1i} y_p) + d_{4i} z_p) + 2s\theta_{3i} (d_{2i} d_{4i} + d_{13i} d_{6i} c\delta_{15i} - d_{4i} (c(\theta_{1i} \\
&\quad \theta_{16i}) (d_{17i} + d_{13i} s\delta_{15i}) - d_{14i} s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i} x_p + s\delta_{1i} y_p) + d_{6i} z_p))) \\
H_{22i} &= (-2d_{9i}^2 H_{1i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) s\theta_{8i} (d_{13i} c\delta_{15i} + d_{6i} c\theta_{3i} + d_{4i} s\theta_{3i} + z_p) + d_{9i}^2 H_{4i} s(\theta_{3i} - \theta_{7i}) s\theta_{8i} \\
&\quad (-2c\theta_{3i} (-d_{2i} d_{6i} + d_{13i} d_{4i} c\delta_{15i} + d_{6i} (c(\theta_{1i} - \theta_{16i}) (d_{17i} + d_{13i} s\delta_{15i}) - d_{14i} s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + \\
&\quad c\delta_{1i} x_p + s\delta_{1i} y_p) + d_{4i} z_p) + 2s\theta_{3i} (d_{2i} d_{4i} + d_{13i} d_{6i} c\delta_{15i} - d_{4i} (c(\theta_{1i} - \theta_{16i}) (d_{17i} + d_{13i} \\
&\quad s\delta_{15i}) - d_{14i} s(\theta_{1i} - \theta_{16i}) + c\delta_{1i} x_p + s\delta_{1i} y_p) + d_{6i} z_p))) \\
H_{23i} &= (E_{2i} F_{1i} H_{1i} H_{8i} + E_{1i} (F_{2i} H_{10i} H_{1i} + F_{1i} H_{1i} H_{5i} + F_{1i} H_{2i} H_{9i})) \\
H_{24i} &= (E_{1i} F_{3i} H_{10i} H_{1i} + E_{1i} F_{1i} H_{1i} H_{6i} + E_{3i} F_{1i} H_{1i} H_{8i} + E_{1i} F_{1i} H_{3i} H_{9i}) \\
H_{25i} &= (E_{1i} F_{4i} H_{10i} H_{1i} + E_{1i} F_{1i} H_{1i} H_{7i} + E_{4i} F_{1i} H_{1i} H_{8i} + E_{1i} F_{1i} H_{4i} H_{9i}) \\
H_{26i} &= (E_{2i} F_{1i} H_{14i} H_{1i} + E_{1i} (F_{1i} H_{11i} H_{1i} + F_{2i} H_{16i} H_{1i} + F_{1i} H_{15i} H_{2i})) \\
H_{27i} &= (E_{1i} F_{1i} H_{12i} H_{1i} + E_{3i} F_{1i} H_{14i} H_{1i} + E_{1i} F_{3i} H_{16i} H_{1i} + E_{1i} F_{1i} H_{15i} H_{3i}) \\
H_{28i} &= (E_{1i} F_{1i} H_{13i} H_{1i} + E_{4i} F_{1i} H_{14i} H_{1i} + E_{1i} F_{4i} H_{16i} H_{1i} + E_{1i} F_{1i} H_{15i} H_{4i}) \\
H_{29i} &= (E_{2i} F_{1i} H_{1i} H_{20i} + E_{1i} (F_{1i} H_{17i} H_{1i} + F_{2i} H_{1i} H_{22i} + F_{1i} H_{21i} H_{2i})) \\
H_{30i} &= (E_{1i} F_{1i} H_{18i} H_{1i} + E_{3i} F_{1i} H_{1i} H_{20i} + E_{1i} F_{3i} H_{1i} H_{22i} + E_{1i} F_{1i} H_{21i} H_{3i}) \\
H_{31i} &= (E_{1i} F_{1i} H_{19i} H_{1i} + E_{4i} F_{1i} H_{1i} H_{20i} + E_{1i} F_{4i} H_{1i} H_{22i} + E_{1i} F_{1i} H_{21i} H_{4i})
\end{aligned}$$

La matriz  $\mathbf{F}_i$  tiene los siguientes componentes:

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{F_{1i}^3} \begin{bmatrix} F_{5i} & F_{6i} & F_{7i} \\ F_{8i} & F_{9i} & F_{10i} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde los elementos de la matriz son:

$$\begin{aligned} F_{1i} &= d_{9i} \\ F_{2i} &= \sec\theta_{8i}s\delta_{1i} \\ F_{3i} &= -c\delta_{1i}\sec\theta_{8i} \\ F_{4i} &= 0 \\ F_{5i} &= F_{2i}F_{1i}\sec\theta_{8i}s\delta_{1i}t\theta_{8i} \\ F_{6i} &= F_{3i}F_{1i}\sec\theta_{8i}s\delta_{1i}t\theta_{8i} \\ F_{7i} &= F_{4i}F_{1i}\sec\theta_{8i}s\delta_{1i}t\theta_{8i} \\ F_{8i} &= -F_{2i}c\delta_{1i}F_{1i}\sec\theta_{8i}t\theta_{8i} \\ F_{9i} &= -F_{3i}c\delta_{1i}F_{1i}\sec\theta_{8i}t\theta_{8i} \\ F_{10i} &= -F_{4i}c\delta_{1i}F_{1i}\sec\theta_{8i}t\theta_{8i} \end{aligned}$$

## Matrices M y $\dot{M}$

Se presenta la matriz  $\dot{M}_{ki}$  la cual tiene los elementos columna siguientes:

$$\dot{M}_{ki} = [\dot{\mathbf{k}}_{3i}, \dot{\mathbf{k}}_{4i}, \dot{\mathbf{k}}_{5i}]$$

estos términos evaluados a partir de ecs.(5. 4b), y derivando estas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{k}}_{3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}^2} \dot{\theta}_{3i} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \\ &\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i^2} \dot{\epsilon}_i \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G2i} + \\ &\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \dot{\theta}_{8i} \mathbf{r}_{G2i} \\ \dot{\mathbf{k}}_{4i} &= -(\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i^2} \dot{\epsilon}_i \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G2i} + \\ &\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \dot{\theta}_{8i} \mathbf{r}_{G2i}) \\ \dot{\mathbf{k}}_{5i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \dot{\epsilon}_i \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \mathbf{r}_{G2i} + \\ &\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i) \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}^2} \dot{\theta}_{8i} \mathbf{r}_{G2i} \end{aligned}$$

sustituyendo ecs. (5. 3b),(5. 4f) y (5. 4g) en ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{k}}_{3i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}^2} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) \mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}} + \\ &\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i^2} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G2i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} + \\ &\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \mathbf{r}_{G2i} \mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{k}}_{4i} &= -(\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i^2} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G2i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} + \\ &\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \mathbf{r}_{G2i} \mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}}) \\ \dot{\mathbf{k}}_{5i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \mathbf{r}_{G2i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} + \\ &\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i) \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}^2} \mathbf{r}_{G2i} \mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

La matriz  $\mathbf{M}'_{ki}$  definida como:

$$\dot{\mathbf{M}}'_{ki} = [\dot{\mathbf{k}}'_{3i}, \dot{\mathbf{k}}_{4i}, \dot{\mathbf{k}}_{5i}]$$

y el vector  $\dot{\mathbf{k}}'_{3i}$  definido como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{k}}'_{3i} = & \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}^2} (\mathbf{r}_{4i} - \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) \mathbf{k}_{2i}^T \dot{\mathbf{q}} + \\ & \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial^2 \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i^2} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{G3i} (\mathbf{k}_{2i} - \mathbf{k}_{6i})^T \dot{\mathbf{q}} + \\ & \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\epsilon_i)}{\partial \epsilon_i} \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \mathbf{r}_{G3i} \mathbf{k}_{7i}^T \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

**Desarrollo de matrices  $\dot{\mathbf{M}}_{2i}$ ,  $\dot{\mathbf{M}}_{3i}$**

Tomando la definición de  $\mathbf{M}_{2i}$ , derivamos esta expresión como se muestra:

$$\mathbf{M}_{2i} = \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_{2i} = & \dot{\mathbf{M}}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \dot{\mathbf{M}}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \\ & \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \dot{\mathbf{M}}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \dot{\mathbf{M}}_{Ai} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{3i} = \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_{3i} = & \dot{\mathbf{M}}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \dot{\mathbf{M}}_{ki}^T \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \\ & \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \dot{\mathbf{M}}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}'_{ki} \dot{\mathbf{M}}_{Ai} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{Ai} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{2i}^T \\ \mathbf{k}_{6i}^T \\ \mathbf{k}_{7i}^T \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{Ai} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{k}}_{2i}^T \\ \dot{\mathbf{k}}_{6i}^T \\ \dot{\mathbf{k}}_{7i}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ki} = [\mathbf{k}_{3i} \quad \mathbf{k}_{4i} \quad \mathbf{k}_{5i}]$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{ki} = [\dot{\mathbf{k}}_{3i} \quad \dot{\mathbf{k}}_{4i} \quad \dot{\mathbf{k}}_{5i}]$$

**Vector  $\frac{\partial \theta}{\partial q_j}$  de coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\theta} = \theta(\theta_{3i}, \theta_{7i}, \theta_{8i})$  en función de  $\mathbf{q} = q(x_p, y_p, z_p)$**

Es necesario hacer notar que las coordenadas generalizadas  $\theta_{3i}$ ,  $\theta_{7i}$ ,  $\theta_{8i}$  deben estar en función del vector de coordenadas cartesianas [18], es decir  $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}_i(\mathbf{q})$ , de manera que la ecuación de lagrange

esté sólo en función de valores  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x_p, y_p, z_p)$ . Por lo tanto se hace la siguiente construcción de ecuaciones para obtener estas funciones (fig. 2.12).

$$\mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}_{4i} + \mathbf{R}_{5i} + \mathbf{R}_{6i} + \mathbf{R}_{9i} = \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{17i} + \mathbf{R}_{14i} + \mathbf{R}_{13i}$$

Los vectores de la ecuación anterior han sido definidos en el capítulo correspondiente a Trabajo Virtual, sustituyendo estos valores tenemos:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{r}_{2i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})(\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \\ & \quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})\mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})\mathbf{r}_{9i} = \\ & \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{r}_{17i} + \mathbf{R}_{z6}(\delta_{16i})\mathbf{R}_{z5}(\delta_{15i})(\mathbf{r}_{14i} + \mathbf{r}_{13i}) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Derivando parcialmente ec. (C. 1) con respecto a  $\mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i}) + \\ & \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{9i} + \\ & \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})}{\partial \theta_{7i}} \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{9i} + \\ & \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} \mathbf{r}_{9i} = \frac{\partial \mathbf{R}_p}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Arreglando en forma matricial ec. (C. 2):

$$\begin{aligned} & [\mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i} + \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{9i}), \\ & \quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})}{\partial \theta_{7i}} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{9i}, \\ & \quad \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \mathbf{r}_{9i}] \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{R}_p}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Renombrando términos:

$$\mathbf{J}_{1i} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j}$$

despejando  $\frac{\partial \theta}{\partial q_j}$ :

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial q_j} = \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \quad (\text{C.4})$$

donde:

$$\begin{aligned}
J_{1i,1} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i})}{\partial \theta_{3i}} (\mathbf{r}_{4i} + \mathbf{r}_{5i} + \mathbf{r}_{6i} + \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{9i}) \\
J_{1i,2} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i})}{\partial \theta_{7i}} \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \mathbf{r}_{9i}, \\
J_{1i,3} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \frac{\partial \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})}{\partial \theta_{8i}} \mathbf{r}_{9i} \\
\mathbf{R}_p &= \mathbf{q}
\end{aligned}$$

**Matrices**  $\frac{\partial M}{\partial q_j}$

Debemos hacer las derivadas de las matrices  $\mathbf{M}_{ki}$ ,  $\mathbf{M}_{2i}$ ,  $\mathbf{M}_{3i}$  con respecto al vector de coordenadas generalizas  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x_p, y_p, z_p)$ , a continuación se muestran estos procedimientos.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial \theta_{7i}} \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial \theta_{8i}} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} \\
&= \mathbf{J}_{2i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial q_j}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{ki}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} [\mathbf{k}_{3i}, \mathbf{k}_{4i}, \mathbf{k}_{5i}] = \left[ \frac{\partial \mathbf{k}_{3i}}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{k}_{4i}}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{k}_{5i}}{\partial q_j} \right]$$

donde:

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial q_j} = \mathbf{J}_{2i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial q_j} \tag{C.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{3i}}{\partial q_j} = \mathbf{J}_{3i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial q_j} \tag{C.7}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{4i}}{\partial q_j} = \mathbf{J}_{4i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial q_j} \tag{C.8}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{5i}}{\partial q_j} = \mathbf{J}_{5i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial q_j} \tag{C.9}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{2i} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial \theta_{3i}}, \frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial \theta_{7i}}, \frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial \theta_{8i}} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial \theta_{3i}}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \right] \\
\mathbf{J}_{3i} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{k}_{3i}}{\partial \theta_{3i}}, \frac{\partial \mathbf{k}_{3i}}{\partial \theta_{7i}}, \frac{\partial \mathbf{k}_{3i}}{\partial \theta_{8i}} \right] \\
\mathbf{J}_{4i} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{k}_{4i}}{\partial \theta_{3i}}, \frac{\partial \mathbf{k}_{4i}}{\partial \theta_{7i}}, \frac{\partial \mathbf{k}_{4i}}{\partial \theta_{8i}} \right] \\
\mathbf{J}_{5i} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{k}_{5i}}{\partial \theta_{3i}}, \frac{\partial \mathbf{k}_{5i}}{\partial \theta_{7i}}, \frac{\partial \mathbf{k}_{5i}}{\partial \theta_{8i}} \right]
\end{aligned}$$

Sutituyendo ec.(C. 4) en ecs. (C. 6 ), (C. 7), (C. 8) y (C. 9)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{k}_{1i}}{\partial q_j} &= \mathbf{J}_{2i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{3i}}{\partial q_j} &= \mathbf{J}_{3i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{4i}}{\partial q_j} &= \mathbf{J}_{4i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{5i}}{\partial q_j} &= \mathbf{J}_{5i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_{ki}}{\partial q_j} &= \mathbf{J}_{6i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j}\end{aligned}$$

donde:

$$\mathbf{J}_{6i} = [\mathbf{J}_{3i} \mathbf{J}_{1i}^{-1}, \mathbf{J}_{4i} \mathbf{J}_{1i}^{-1}, \mathbf{J}_{5i} \mathbf{J}_{1i}^{-1}] \quad (\text{C.10})$$

Para la matriz  $\mathbf{M}_{2i}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{M}_{2i}}{\partial q_j} &= \frac{\partial (\mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai})}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial \mathbf{M}_{Ai}^T}{\partial q_j} \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}_{ki}^T}{\partial q_j} \mathbf{M}_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \\ &\quad \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \frac{\partial \mathbf{M}_{ki}}{\partial q_j} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^T \mathbf{M}_{ki} \frac{\partial \mathbf{M}_{Ai}}{\partial q_j}\end{aligned}$$

Tomando la derivada parcial de  $\frac{\partial \mathbf{M}_{Ai}}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{Ai}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{2i}^T \\ \mathbf{k}_{6i}^T \\ \mathbf{k}_{7i}^T \end{bmatrix}$$

donde:

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{2i}^T}{\partial q_j} = \mathbf{J}_{7i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial q_j} \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{6i}^T}{\partial q_j} = \mathbf{J}_{8i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial q_j} \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{8i}^T}{\partial q_j} = \mathbf{J}_{9i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial q_j} \quad (\text{C.13})$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{7i} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}^T}{\partial \theta_{3i}}, & \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}^T}{\partial \theta_{7i}}, & \frac{\partial \mathbf{k}_{2i}^T}{\partial \theta_{8i}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{8i} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}^T}{\partial \theta_{3i}}, & \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}^T}{\partial \theta_{7i}}, & \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}^T}{\partial \theta_{8i}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{9i} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial \theta_{3i}}, & \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial \theta_{7i}}, & \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial \theta_{8i}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Sutituyendo ec.(C. 4) en ecs. (C. 11 ), (C. 12) y (C. 13)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{k}_{2i}^T}{\partial q_j} &= \mathbf{J}_{7i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{6i}^T}{\partial q_j} &= \mathbf{J}_{8i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{7i}^T}{\partial q_j} &= \mathbf{J}_{9i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j}\end{aligned}$$

finalmente se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{M}_{Ai}}{\partial q_j} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{7i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\ \mathbf{J}_{8i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\ \mathbf{J}_{9i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{J}_{10i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \\ \mathbf{J}_{10i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{7i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \\ \mathbf{J}_{8i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \\ \mathbf{J}_{9i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{C.14}$$

Para la matriz  $\mathbf{M}_{3i}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{M}_{3i}}{\partial q_j} &= \frac{\partial (\mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^{\prime T} \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai})}{\partial q_j} \\ &= \frac{\partial \mathbf{M}_{Ai}^T}{\partial q_j} \mathbf{M}_{ki}^{\prime T} \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \frac{\partial \mathbf{M}_{ki}^{\prime T}}{\partial q_j} \mathbf{M}'_{ki} \mathbf{M}_{Ai} + \\ &\quad \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^{\prime T} \frac{\partial \mathbf{M}'_{ki}}{\partial q_j} \mathbf{M}_{Ai} + \mathbf{M}_{Ai}^T \mathbf{M}_{ki}^{\prime T} \mathbf{M}'_{ki} \frac{\partial \mathbf{M}_{Ai}}{\partial q_j}\end{aligned}$$

Tomando la derivada parcial de  $\frac{\partial \mathbf{M}'_{ki}}{\partial q_j}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{M}'_{ki}}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} [\mathbf{k}'_{3i}, \mathbf{k}_{4i}, \mathbf{k}_{5i}] \\
\frac{\partial \mathbf{k}'_{3i}}{\partial q_j} &= \frac{\partial \mathbf{k}'_{3i}}{\partial \theta_{3i}} \frac{\partial \theta_{3i}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{k}'_{3i}}{\partial \theta_{7i}} \frac{\partial \theta_{7i}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{k}'_{3i}}{\partial \theta_{8i}} \frac{\partial \theta_{8i}}{\partial q_j} \\
&= \mathbf{J}'_{3i} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial q_j} \\
\mathbf{J}'_{3i} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{k}'_{3i}}{\partial \theta_{3i}}, \frac{\partial \mathbf{k}'_{3i}}{\partial \theta_{7i}}, \frac{\partial \mathbf{k}'_{3i}}{\partial \theta_{8i}} \right]
\end{aligned} \tag{C.15}$$

sustituyendo ec.(C. 4) en ec. (C. 15) :

$$\frac{\partial \mathbf{k}'_{3i}}{\partial q_j} = \mathbf{J}'_{3i} \mathbf{J}_{1i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j} \tag{C.16}$$

finalmente se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{ki}}{\partial q_j} = \mathbf{J}_{6i} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_j}$$

donde:

$$\mathbf{J}'_{6i} = [\mathbf{J}'_{3i} \mathbf{J}_{1i}^{-1}, \mathbf{J}_{4i} \mathbf{J}_{1i}^{-1}, \mathbf{J}_{5i} \mathbf{J}_{1i}^{-1}] \tag{C.17}$$