UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Selecciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

Julián Salas Piñón

Director de Tesis: Dra. Isabel Puga Espinosa

2006

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno Salas Piñón 56794322 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 09817455-3
2. Datos del tutor Dra Isabel Puga Espinosa
3. Datos del sinodal 1 Dr Alejandro Illanes Mejía
4. Datos del sinodal 2 Dr Sergio Macías Álvarez
5. Datos del sinodal 3 Dra Patricia Pellicer Covarrubias
6. Datos del sinodal 4 Dr Jorge Marcos Martínez Montejano
7. Datos del trabajo escrito Selecciones 70 p 2006

AGRADECIMIENTOS

A todos los que de alguna u otra forma hicieron este trabajo mejor:
A Bety por la ayuda y el tiempo que me dedicó.
A Alejandro, Sergio, Jorge y Paty por todas sus correcciones, sin las cuales este trabajo quedaría incompleto.
A mis papás y mi hermana, por su cariño y su apoyo.
A Ale por su amor y su compañía.
A Luis Pedro y Vlais por todas las clases, el trabajo y la diversión que tuvimos durante la carrera.
A mis compañeros de clases y amigos de la Facultad.
A todos los que me ayudaron con problemas técnicos y me dieron consejos prácticos para hacer esta tesis.

Índice general

Introducción

Esta tesis está enmarcada en la Teoría de los Continuos, una rama de la Topología General que recientemente ha tenido un gran desarrollo en México.

El tema de las selecciones es de importancia para caracterizar algunos continuos en términos de funciones que van de sus hiperespacios sobre ellos.

Para que la Tesis esté lo más autocontenida posible, en el Capítulo 1 se dan algunos teoremas y definiciones de los conceptos de compacidad y conexidad, que son las propiedades que definen a un continuo. Sin embargo, se da por entendido que el lector llevó un curso de Topología o está familiarizado con los conceptos básicos.

En el Capítulo 2, se da la definición formal de continuo y se muestran algunas propiedades básicas.

En el Capítulo 3, se habla acerca de los hiperespacios y una forma de darles una métrica, que nos servirá, posteriormente, para probar la continuidad de funciones. En especial de las selecciones, que se definirán en el Capítulo 4. En dicho capítulo se observan algunas propiedades que restringen las selecciones posibles para el hiperespacio de continuos; tiene un resultado que caracteriza los dendroides suaves en términos de un tipo especial de selecciones, a saber, las selecciones rígidas; se estudia la relación entre la contractibilidad y la selectibilidad; se encuentra una propiedad de algunos dendroides que evita que sean selectibles. También se dan unos ejemplos que muestran que hay algunos tipos de funciones que no preservan la selectibilidad y, finalmente, se observan algunas relaciones entre la contractibilidad y se dan más restricciones en las selecciones.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Compacidad

Definición 1.1 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es compacto si toda cubierta abierta $\{A_i\}_{i\in I}$ de X, contiene una subcubierta finita A_{i_1}, $A_{i_2}, ..., A_{i_n}$.*

Proposición 1.2 *Sean X un espacio topológico compacto y $A \subset X$ un cerrado. Entonces A es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de A. Entonces la familia $\{U_i : i \in I\} \cup \{X \setminus A\}$ es una cubierta abierta de X, que debe tener una subcubierta finita, por la compacidad de X. Pero eso quiere decir que hay un número finito de abiertos U_i que cubren a A. Por lo tanto, A es compacto. ■

Proposición 1.3 *Sean X un espacio de Hausdorff y $K \subset X$ un compacto. Entonces K es cerrado.*

Demostración. Vamos a probar que $X \setminus K$ es abierto. Sea x en $X \setminus K$. Como X es de Hausdorff, para cada $k \in K$, existen abiertos ajenos V_k y W_k tales que $k \in V_k$ y $x \in W_k$. Por lo tanto, $K \subset \bigcup_{k\in K} V_k$. Es decir, $\{V_k\}_{k\in K}$ es una cubierta abierta de K. Entonces tiene una subcubierta finita $\{V_{k_1}, V_{k_2}, ..., V_{k_n}\}$.

Luego, $\bigcap_{i=1}^{n} W_{k_i}$ es un abierto que no intersecta a K y que contiene a x. Esto prueba que $X \setminus K$ es abierto o, equivalentemente, que K es cerrado. ■

Proposición 1.4 *Sea X un espacio topológico compacto. Si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de Y. Dado que f es continua, $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de X que tiene una subcubierta finita $\{f^{-1}(U_{i_1}), f^{-1}(U_{i_2}), ..., f^{-1}(U_{i_n})\}$ y, como f es suprayectiva, $\{U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}\}$ es una subcubierta finita de la cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$, de manera que Y es compacto. ■

Definición 1.5 *Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es cerrada (resp. abierta), si para cada subconjunto cerrado (resp. abierto) U de X, su imagen $f(U)$ es un subconjunto cerrado (resp. abierto) de Y.*

Proposición 1.6 *Sean X un espacio topológico compacto, Y un espacio de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Para probar que f es homeomorfismo nos basta probar que f es cerrada.

Sea U un cerrado en X. Como X es compacto, U es compacto y, como f es continua, $f(U)$ es compacto en Y, que es de Hausdorff. Esto implica que $f(U)$ es cerrado en Y, por la Proposición 1.3, y f es una función cerrada. ■

Teorema 1.7 *Sea X un espacio compacto. Entonces todo subconjunto infinito K de X, tiene al menos un punto de acumulación.*

Demostración. Supongamos que K es un subconjunto de X sin puntos de acumulación. Esto implica que el conjunto K es cerrado y, por lo tanto, compacto y que, para cada $x \in K$, existe una vecindad abierta V_x tal que $V_x \cap K = \{x\}$. Así que, existen $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ tales que $V_{x_1}, V_{x_2}, ..., V_{x_n}$ cubren a K. Por lo cual concluimos que $K = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Es decir, K es finito. ■

Corolario 1.8 *Sea X un espacio métrico compacto. Toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X. Si la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ toma un número finito de valores, entonces hay uno que se repite una infinidad de veces formando una subsucesión constante y, por lo tanto, convergente.

En el otro caso, por el Teorema 1.7, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación $x \in X$. Esto implica que, para toda $k \in \mathbb{N}$, la bola $B_{\frac{1}{k}}(x)$ contiene una infinidad de puntos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ahora, vamos a construir inductivamente la subsucesión que se quiere. Sea $x_{n_1} \in B_1(x)$. Dado $k \in \mathbb{N}$, tomemos $x_{n_{k+1}} \in B_{\frac{1}{k+1}}(x)$ tal que $n_{k+1} > n_k$. De esta manera tenemos la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a x, por construcción. ∎

1.2. Conexidad

Definición 1.9 *Sea X un espacio topológico. Una* ***separación*** *de X es un par de abiertos disjuntos no vacíos U y V de X cuya unión es X. Se dice que el espacio X es* ***conexo*** *si no existe una separación de X.*

Notación 1.10 *Vamos a escribir $X = U \mid V$ para denotar a una separación de X.*

Notemos que si tenemos una separación $U \mid V$ de X, también podemos separar a X con cerrados ya que U y V son también cerrados en X, puesto que son el complemento de un abierto. Asimismo, sabemos que $\overline{U} \cap V = \varnothing = \overline{V} \cap U$.

Lema 1.11 *Si los conjuntos C y D forman una separación de X y Y es un subespacio conexo de X, entonces Y está contenido en C o en D.*

Demostración. Como C y D son abiertos en X, los conjuntos $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son abiertos en Y. Estos dos conjuntos son disjuntos y su unión es Y. Si fueran ambos no vacíos, constituirían una separación de Y. De esta forma, alguno de los dos es vacío. Por lo tanto, Y está contenido completamente en C o en D. ∎

Teorema 1.12 *La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es un subespacio conexo de X.*

Demostración. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ una colección de subespacios conexos de un espacio X y $p \in \cap A_i$. Probemos que el espacio $Y = \cup A_i$ es conexo. Supongamos que $Y = C \mid D$. El punto p está en C o en D; supongamos que $p \in C$. Como A_i es conexo, $A_i \subset C$ o $A_i \subset D$, aunque esta última posibilidad se descarta pues $p \in A_i$ y $p \in C$. Esto implica que, $A_i \subset C$ para cada $i \in I$, y así $\cup A_i \subset C$, contradiciendo el hecho de que D era no vacío. ∎

Teorema 1.13 *Sea A un subespacio conexo de X. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es también conexo.*

En otras palabras: si B se forma añadiéndole a A algunos o todos sus puntos límite, entonces B es conexo.

Demostración. Sean A conexo y B tales que $A \subset B \subset \overline{A}$. Supongamos que $B = C \mid D$. Por el Lema 1.11, el conjunto A cumple que $A \subset C$ o $A \subset D$; supongamos que $A \subset C$. Entonces $\overline{A} \subset \overline{C}$. Como $\overline{C}$ y D son disjuntos, B no puede intersectar a D. Esto contradice el hecho de que D es un subconjunto no vacío de B. ∎

Teorema 1.14 *La imagen de un espacio conexo bajo una función continua es un espacio conexo.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva, supongamos que X es conexo. Queremos probar que Y es conexo. Supongamos que $Y = A \mid B$ es una separación de Y. Entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conjuntos ajenos cuya unión es X. Además son abiertos, pues f es continua, y no vacíos, porque f es suprayectiva. De modo que constituyen una separación de X, contradiciendo la hipótesis de que X era conexo. ∎

Teorema 1.15 *El intervalo $I = [0, 1]$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que el intervalo I no es conexo. Entonces existen dos cerrados, ajenos, no vacios F y G de I cuya unión es todo I. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $0 \in F$.

Sean $J = \{x \in I : [0, x] \subset F\}$ y b el supremo de J. Notemos que, si $y < b$ entonces $[0, y] \subset F$. Claramente $b \in F$, pues F es un subconjunto cerrado y toda vecindad de b tiene puntos de F. Pero si $b < 1$, entonces, como F es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $(b - \delta, b + \delta) \subset F$. Esto es una contradicción, pues en este caso, $\left[0, b + \frac{\delta}{2}\right] \subset F$, es decir $b + \frac{\delta}{2} \in J$. Por lo tanto, $b = 1$ y $[0, 1) \subset J \subset F$ y G tendría que ser el punto $\{1\}$, que no es abierto. De manera que no existe ninguna separación de I, así que I es conexo. ∎

1.2.1. Componentes

Definición 1.16 *Dado un espacio topológico X, se define la siguiente relación de equivalencia en X:*

$x \sim y$ si existe un subespacio conexo de X que contiene a ambos puntos.

Las clases de equivalencia de esta relación se llaman ***componentes*** *de* X.

Lema 1.17 *Sean* X *y* Y *espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función continua y suprayectiva.*

Si C *es una componente de* Y, *entonces* $f^{-1}(C)$ *es la unión de algunas componentes de* X.

Demostración. Veremos que $f^{-1}(C) = \bigcup\{K : K$ es una componente de X y $K \cap f^{-1}(C) \neq \varnothing\}$.

Para cada $x \in f^{-1}(C)$, sea K_x la componente de X que tiene a x. Por lo tanto, $f^{-1}(C) \subseteq \bigcup\{K_x : x \in f^{-1}(C)\} = \bigcup\{K : K$ es una componente de X y $K \cap f^{-1}(C) \neq \varnothing\}$.

Sea K una componente de X tal que $K \cap f^{-1}(C) \neq \varnothing$. Como f es continua $f(K)$ es un conexo y dado que $f(K) \cap C \neq \varnothing$ entonces $f(K) \subseteq C$, es decir, $K \subseteq f^{-1}(C)$. ■

1.2.2. Casicomponentes

Definición 1.18 *Sean* X *un espacio topológico y* $p \in X$. *La* ***casicomponente*** *de* X *que tiene a* p, *denotada por* Q_p, *es la intersección de todos los subconjuntos abiertos y cerrados simultáneamente, de* X *que contienen a* p. *Es decir:*

$Q_p = \cap\{A : A \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } p \in A\}$.

Lema 1.19 *Sean* X *un espacio métrico y* S *un subconjunto disconexo de* X. *Entonces existe un subconjunto abierto* G *de* X *tal que* $S \cap G \neq \varnothing \neq S \setminus \overline{G}$ *y* $S \cap Fr(G) = \varnothing$.

Demostración. Como S no es conexo, existe una separación $U \mid V = S$. Sea d una métrica para X. Basta demostrar que el conjunto $G = \{x \in X : d(x, U) < d(x, V)\}$ cumple las propiedades requeridas.

Para demostrar que G es abierto vamos a probar que $X \setminus G$ es cerrado. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $X \setminus G$ y supongamos que x_n converge a x. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus G$, se tiene que $d(x_n, U) \geq d(x_n, V)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como d es continua, entonces $d(x, U) \geq d(x, V)$. Por lo tanto, $x \in X \setminus G$ y concluimos que $X \setminus G$ es cerrado, de modo que G es abierto.

Para todo $x \in U$, se tiene que $d(x, U) = 0 < d(x, V)$, de donde $U \subset G$. Como $U \subset S$, tenemos que $S \cap G \neq \varnothing$.

Si $V \cap \overline{G}$ fuera no vacía, tomamos $x \in V \cap \overline{G}$ entonces $d(x, V) = 0$ y esto implicaría, por la definición de G, que $d(x, U) < 0$, lo cual es una contradicción. Así que, $V \subset S \setminus \overline{G}$ y $S \setminus \overline{G} \neq \varnothing$.

Notemos que $Fr(G) \subset \{x \in X : d(x, U) = d(x, V)\}$. Supongamos que existe $x \in S \cap Fr(G)$. Esto implica que $x \in U \cup V$. Si $x \in U$, entonces $d(x, U) = 0 = d(x, V)$. Esto implica que $x \in \overline{V}$. Por lo tanto, $x \in U \cap \overline{V}$ y esto contradice que $U \mid V$ es una separación (análogamente se obtiene una contradicción si suponemos que $x \in V$). Así concluimos que $S \cap Fr(G) = \varnothing$.
■

Lema 1.20 *Sean X un espacio métrico, compacto, Q_p una casicomponente de X y C un subconjunto cerrado (compacto) de X tal que $Q_p \cap C = \varnothing$. Entonces existe un subconjunto abierto y cerrado F de X tal que $Q_p \subset F$ y $F \cap C = \varnothing$.*

Demostración. Como $Q_p = \cap\{A : A$ es abierto y cerrado en X y $p \in A\}$, entonces $C \subset \cup\{A : A$ es abierto y cerrado en X y $p \notin A\} = X \setminus Q_p$. Además, C es compacto. Así que, existen conjuntos abiertos y cerrados, simultáneamente, $A_1, A_2, ..., A_n$, tales que $p \in A_i$, con $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus A_i = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Sea $F = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. El conjunto F es abierto y cerrado porque es la intersección de un número finito de abiertos y cerrados. Contiene a Q_p, pues cada A_i lo contiene y, además, $F \subset X \setminus C$. Equivalentemente $F \cap C = \varnothing$, como se quería. ■

Teorema 1.21 *Sean X un espacio topológico y $p \in X$.*

a) Si X es conexo, entonces $Q_p = X$.

b) La casicomponente Q_p es un subconjunto cerrado de X.

c) Un punto $q \in X$ es un elemento de Q_p si y sólo si para toda separación $X = U \mid V$ de X, se tiene que p y $q \in U$ o que p y $q \in V$. Debido a esta propiedad, decimos que la casicomponente de p es el conjunto de puntos que no pueden separarse de p.

d) El conjunto de casicomponentes es una partición de X.

e) Denotemos por K_p a la componente de p, entonces $K_p \subseteq Q_p$. En general no se da la igualdad de estos conjuntos.

f) Si X es métrico y compacto, la casicomponente Q_p es un subconjunto conexo de X, y $K_p = Q_p$.

Demostración. a) Se sigue de que los únicos abiertos y cerrados simultáneamente, de un conexo X son el conjunto vacío y X.

b) Las casicomponentes son intersecciones de cerrados de X, de modo que Q_p debe de ser un subconjunto cerrado de X

c) Sea $q \in Q_p$. Supongamos que $X = U \mid V$ y que $p \in U$. Como U es abierto y cerrado, entonces $q \in U$. Inversamente, supongamos que la propiedad de que q no puede separarse de p es válida y sea U un abierto y cerrado que contiene a p. Entonces la igualdad $X = U \mid (X \setminus U)$ impica que $q \in Q_p$.

d) Se sigue inmediatamente de c) ya que la relación p no puede separarse de q es una relación de equivalencia.

e) Sea $q \in K_p$, supongamos que $X = U \mid V$ y que $p \in U$. Como K_p es conexo, entonces $K_p \subset U$, así que $q \in U$. De aquí se sigue que $q \in Q_p$.

f) Supongamos que Q_p no es un subconjunto conexo de X. Por el Lema 1.19, existe un abierto G de X tal que $G \cap Q_p \neq \varnothing$, $\left(X \setminus \overline{G}\right) \cap Q_p \neq \varnothing$ y $Fr\,(G) \cap Q_p = \varnothing$. Sea $q \in G \cap Q_p$. Como $Fr\,(G) \cap Q_p = \varnothing$ y $Fr\,(G)$ es un compacto, por el Lema 1.20, existe un abierto y cerrado F tal que $q \in F$ y $F \cap Fr\,(G) = \varnothing$. Sea $r \in Q_p \cap \left(X \setminus \overline{G}\right)$, entonces $r \in X \setminus (F \cap G)$ y sabemos que $q \in F \cap G$. Por otra parte, $F \cap G$ es abierto y notemos que $F \cap G$ también es cerrado, ya que $\overline{F \cap G} \subseteq \overline{F} \cap \overline{G} = F \cap \overline{G} = (F \cap Fr\,(G)) \cup (F \cap G) = F \cap G$. Esto contradice el inciso c) y demuestra f). ■

Ejemplo 1.22 *Espacio X en el cual la casicomponente contiene propiamente a la componente de un punto.*

Sea X la unión de los siguientes conjuntos contenidos en $\mathbb{R}^2$: Las rectas l_1 y l_2 con ecuaciones $y = -1$ y $y = 1$, respectivamente, y los perímetros de los rectángulos R_n con lados paralelos a los ejes y con vértices $\left(-n, 1 - \frac{1}{n+1}\right)$, $\left(-n, -1 + \frac{1}{n+1}\right)$, $\left(n, 1 - \frac{1}{n+1}\right)$, $\left(n, -1 + \frac{1}{n+1}\right)$. Sea $p \in l_1$, observemos que $Q_p = l_1 \cup l_2$ y que $K_p = l_1$. (Figura 1.1).

1.2.3. Teorema de Golpes en la Frontera

El Teorema 1.24, es una versión del Teorema de Golpes en la Frontera y nos será de gran utilidad al definir los arcos ordenados.

Lema 1.23 *Sean Y un espacio compacto y métrico, K una componente de Y y F un cerrado de Y tal que $F \cap K = \varnothing$. Entonces existe un abierto y cerrado L de Y tal que $K \subset L$ y $L \cap F = \varnothing$.*

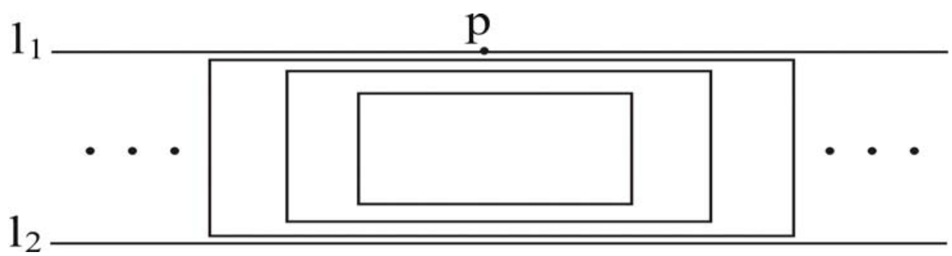

Figura 1.1: Espacio X del Ejemplo 1.22.

Demostración. Sea $p \in K$, por lo tanto, $K = K_p = Q_p$, donde K_p y Q_p son respectivamente la componente y la casicomponente de X que tiene a p.

Para cada $x \in F$, sabemos que $x \notin Q_{p.}$ por lo tanto, existe un subconjunto cerrado y abierto V_x de Y tal que $p \in V_x$ y $x \notin V_x$. Sea $U_x = Y \setminus V_x$. Entonces U_x es un subconjunto abierto y cerrado de Y tal que $p \notin U_x$ y $x \in U_x$. Como K es conexo, $p \in K \cap V_x$ y $U_x \mid V_x$ es una separación de Y, entonces $K \subset V_x$, por el Lema 1.11, y esto implica que, $K \cap U_x = \varnothing$.

Como $\{U_x : x \in F\}$ es una cubierta abierta del compacto F, existen x_1, x_2, ..., $x_n \in F$ con $n \in \mathbb{N}$ tales que $F \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_n}$.

Sea $L = Y \setminus (U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_n})$. Entonces L es abierto y cerrado en Y, $K \subset L$ y $L \cap F = \varnothing$, como se quería. ■

Teorema 1.24 *Sean Z un espacio métrico, compacto y conexo, U un subconjunto propio, abierto y no vacío de Z. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Fr(U) \neq \varnothing$.*

Demostración. Haremos la demostración por contradicción.

Supongamos que $K \cap Fr(U) = \varnothing$. Aplicando el Lema 1.23 con $Y = \overline{U}$, K la componente de $\overline{U}$ y $F = Fr(U)$ obtenemos que existe un subconjunto abierto y cerrado L de $\overline{U}$ tal que $K \subset L$ y $L \cap Fr(U) = \varnothing$.

Notemos que L también es un cerrado de Z, $L \neq \varnothing$ y $L \subset \overline{U} \setminus Fr(U) = U$, siendo válida esta igualdad gracias a que U es un subconjunto abierto de Z.

Como L es abierto en $\overline{U}$, existe un abierto W de Z tal que $W \cap \overline{U} = L$. Pero, como $L \subset U$, tenemos que $W \cap U = L$. Por lo tanto, L también es abierto de Z y, como Z es conexo, $L = Z$. Pero $L \subset U$, contradiciendo la hipótesis de que U era un subconjunto propio de Z. ■

1.2.4. Conexidad Local

Definición 1.25 *Un espacio topológico X es* ***localmente conexo en*** *p si cada vecindad V de p contiene una vecindad conexa y abierta de p. Diremos que X es* ***localmente conexo*** *si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Proposición 1.26 *Un espacio topológico X es localmente conexo si y sólo si las componentes de cada abierto son abiertas.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sean $x \in X$ y K_x la componente de un abierto arbitrario V de X, que tiene a x. Como X es localmente conexo, existe un abierto conexo U que contiene a x y que está contenido en V. Por lo tanto, $U \subset K_x$. Esto prueba que la componente de V que tiene a x es abierta.

Supongamos que las componentes de cada abierto son abiertas. Sea $x \in X$ y V una vecindad abierta de x. La componente de x en V es un abierto y conexo que tiene a x. En consecuencia, X es localmente conexo en x. ■

Proposición 1.27 *Sean X un espacio topológico localmente conexo y $f : X \to Y$ una función continua, cerrada y suprayectiva. Entonces Y es localmente conexo.*

Demostración. Sea C una componente de un abierto U en Y. Por el Lema 1.17 sabemos que $f^{-1}(C)$ es una unión de componentes de $f^{-1}(U)$. Como $f^{-1}(U)$ es abierto en X y las componentes de los abiertos en X son abiertas, entonces $f^{-1}(C)$ es abierto en X. Por lo tanto, $X \setminus f^{-1}(C)$ es cerrado y, como f es ce- rrada y $Y \setminus C = f(f^{-1}(Y \setminus C)) = f(f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(C)) = f(X \setminus f^{-1}(C))$, entonces C debe ser abierto en Y. ■

1.3. Conexidad por trayectorias

Definición 1.28 *Una* ***trayectoria*** *de x_0 a x_1 en un espacio topológico X, es una función continua $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. A $\gamma([0,1])$ nos referiremos como x_0x_1 y, cuando γ sea inyectiva, diremos que es un* ***arco.*** *(Figura 1.2).*

Se sigue de los Teoremas 1.14 y 1.15 que toda trayectoria xy es un conjunto conexo.

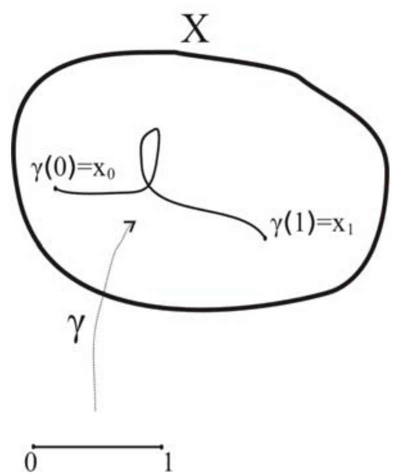

Figura 1.2: Trayectoria de x_0 a x_1 en un espacio topológico X. (Definición 1.28).

Definición 1.29 *Un espacio topológico X es* ***conexo por trayectorias*** *(resp.* ***conexo por arcos****) si para cada par de puntos x_0 y x_1 en X, existe una trayectoria (resp. un arco) de x_0 a x_1.*

Proposición 1.30 *Si X es un espacio de Hausdorff. Entonces X es conexo por trayectorias si y sólo si X es conexo por arcos.*

Demostración. Sólo vamos a demostrar que si X es conexo por trayectorias entonces es conexo por arcos, la otra implicación es directa.

Sea Y un espacio de Hausdorff conexo por trayectorias. Sean x y $y \in X$ y $\gamma : [0,1] \to X$ una xy trayectoria.

Como el $[0,1]$ es compacto y X es de Hausdorff, la función γ es cerrada. Por la Proposición 1.27 la imagen $\gamma([0,1])$ es localmente conexo. Y todo continuo localmente conexo es arcoconexo, por [14, Teorema 8.23, pág. 130]. ■

Proposición 1.31 *Sea X un espacio topológico conexo por trayectorias. Entonces X es conexo.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Entonces el conjunto $A = \bigcup_{y \in X} x_0 y$ es conexo por el Teorema 1.12 y $A = X$. ■

Proposición 1.32 *Sean X un espacio topológico conexo por trayectorias y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $x, y \in Y$, queremos encontrar una trayectoria que los una. Como f es suprayectiva, existen $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$ tales que $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$ y $\tilde{y} \in f^{-1}(y)$. Como X es conexo por trayectorias existe una trayectoria γ, de x a y, y es fácil ver que $f \circ \gamma$ es una trayectoria de x a y. Por lo tanto, Y es conexo por trayectorias. ■

Intuitivamente parecería que todos los espacios conexos son conexos por trayectorias pero vamos a ver que no es así.

Sea $W = \left\{\left(x, sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\right\}$.

Ejemplo 1.33 *El continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$, la cerradura de W en $\mathbb{R}^2$, es un continuo que no es conexo por trayectorias. (Figura 1.3).*

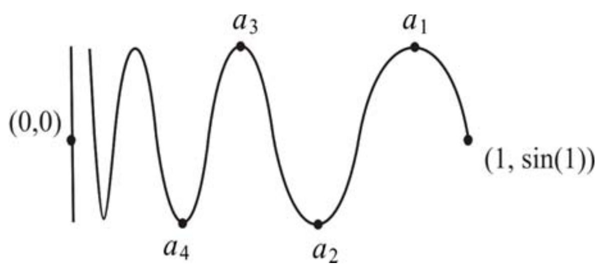

Figura 1.3: Ejemplo de un continuo que no es conexo por trayectorias. (Ejemplo 1.33).

Este espacio es conexo porque es la cerradura de un conexo (de W, que es homeomorfo al intervalo $[0, \infty)$). Para demostrar que $\overline{W}$ no es conexo por trayectorias supongamos que existe una trayectoria de $(1, sen(1))$ a $(0,0)$. Es decir, existe una función continua $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = (1, sen(1))$ y $\gamma(1) = (0,0)$. Como la imagen de γ debe recorrer toda la curva, en particular pasa por $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $p_n = máx\{t \in [0,1] : t \in \gamma^{-1}(a_n)\}$. La sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y está acotada. Por lo tanto, converge, pero $\gamma(\{p_n\}) = \{a_n\}$ que no converge.

Esto implica que γ no es continua, lo cual es una contradicción. Así, el continuo $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ no es conexo por trayectorias.

Capítulo 2

Continuos

Definición 2.1 *Un* ***continuo*** X *es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío.*

Los toros, las esferas y las n-celdas de cualquier dimensión son ejemplos de continuos. (Figura 2.1).

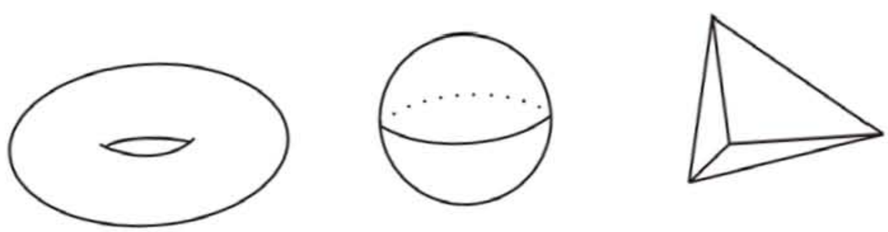

Figura 2.1: Ejemplos de continuos. (Definición 2.1).

Definición 2.2 *Decimos que* A ***es un subcontinuo de*** X, *si* A *es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de* X.

Definición 2.3 *Decimos que un continuo* X *es* ***unicoherente*** *si para todo par de subcontinuos* A *y* $B \subseteq X$ *tales que* $A \cup B = X$ *se tiene que* $A \cap B$ *es conexo. (Figura 2.4).*

Definición 2.4 *Decimos que un continuo* X *es* ***hereditariamente unicoherente*** *si todos sus subcontinuos son unicoherentes o, equivalentemente, si para todo par de subcontinuos* A *y* $B \subseteq X$ *se tiene que* $A \cap B$ *es conexo. (Figura 2.3).*

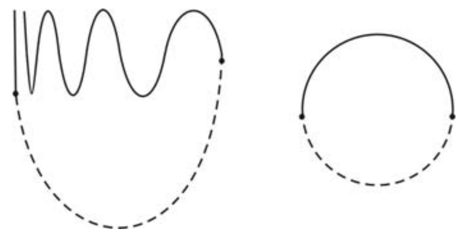

Figura 2.2: Ejemplos de continuos no unicoherentes. (Definición 2.3).

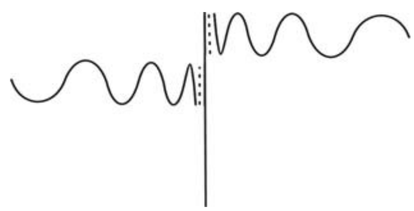

Figura 2.3: Continuo hereditariamente unicoherente. (Definición 2.4).

Ejemplo 2.5 *Continuo unicoherente X. (Figura 2.4).*

Sea $h : [0, \infty) \to R$ un homeomorfismo. Definimos X, como una compactación de R con residuo S^1, es decir, $X = \overline{R}$ y $X \setminus S = R$.

Sean A y B subcontinuos de X, tales que $A \cup B = X$. Sea $p \in R$ tal que $p = h(0)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $p \in A$.

Tenemos dos casos, $R \subset A$ o $A \subsetneq R$. Si $R \subset A$ entonces, como A es cerrado, $\overline{R} \subset A$ y tenemos que $A = X$. Esto implica que $A \cap B = B$, que es conexo.

Si $A \subsetneq R$ entonces existe $q \in A$ tal que $h^{-1}(q)$ es mayor que $h^{-1}(x)$, para todo $x \in A$. Por otra parte, como $A \cup B = X$, se tiene que $B \cap R \neq \varnothing$ y existe un punto $r \in B$ tal que $h^{-1}(r)$ es menor que $h^{-1}(x)$, para todo $x \in B$. Como $A \cup B = X$, tenemos que $A \cap B \neq \varnothing$. Por lo tanto, $A \cap B = \{x \in X : h^{-1}(r) \leq h^{-1}(x) \leq h^{-1}(q)\} \subsetneq R$ y $h^{-1}(A \cap B) = [h^{-1}(r), h^{-1}(q)]$ que es un conexo.

Ejemplo 2.6 *El cuadrado $I \times I$ es unicoherente. (Figura 2.4).*

Para demostrar que I^2 es unicoherente, vamos a probar que I es unicoherente y utilizaremos un resultado de [2], que dice que el producto de dos continuos unicoherentes, localmente conexos es unicoherente.

Sean A y B subcontinuos de I, tales que $A \cup B = I$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que 0 y $1 \in A$. Esto implica que $A = I$ y $A \cap B = B$, que es conexo. De modo que para terminar la demostración, solo nos falta probar el caso en que $0 \in A$ y $1 \in B$. En este caso, podemos expresar a A y a B como $A = \{x \in [0,1] : 0 \leq x \leq p, \text{ para alguna } p \in [0,1)\}$ y $B = \{x \in [0,1] : q \leq x \leq 1, \text{ para alguna } q \in (0,1]\}$. Notemos que $q \leq p$, ya que $A \cup B = I$. Por lo tanto $A \cap B = \{x \in [0,1] : q \leq x \leq p$, para alguna $q \in (0,1]$ y una $p \in [0,1)\}$ y esto es el intervalo $[p,q] \subset I$ que es conexo.

Observación 2.7 *Notemos que los continuos de los Ejemplos 2.5 y 2.6, no son hereditariamente unicoherentes, pues ambos contienen un subcontinuo homeomorfo un círculo, que no es unicoherente.*

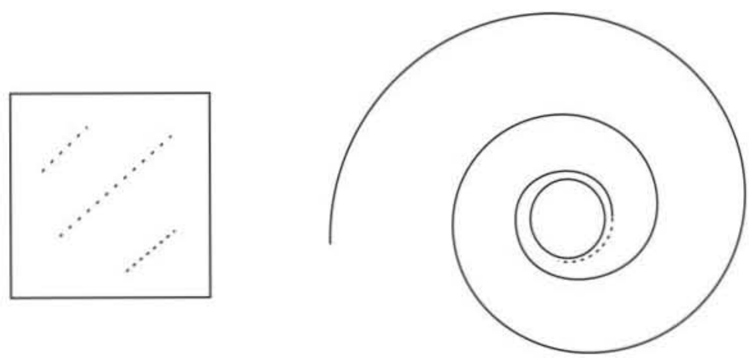

Figura 2.4: Ejemplos de continuos unicoherentes pero no hereditariamente unicoherentes.

Definición 2.8 *Un* ***dendroide*** *es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. (Figura 2.5).*

Teorema 2.9 *Sea X un dendroide y D un subcontinuo de X. Entonces D es un dendroide.*

Demostración. Como X es hereditariamente unicoherente, para todo par de subcontinuos A y $B \subseteq X$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. En particular, para todo par de subcontinuos de D. Por lo tanto, D es hereditariamente unicoherente.

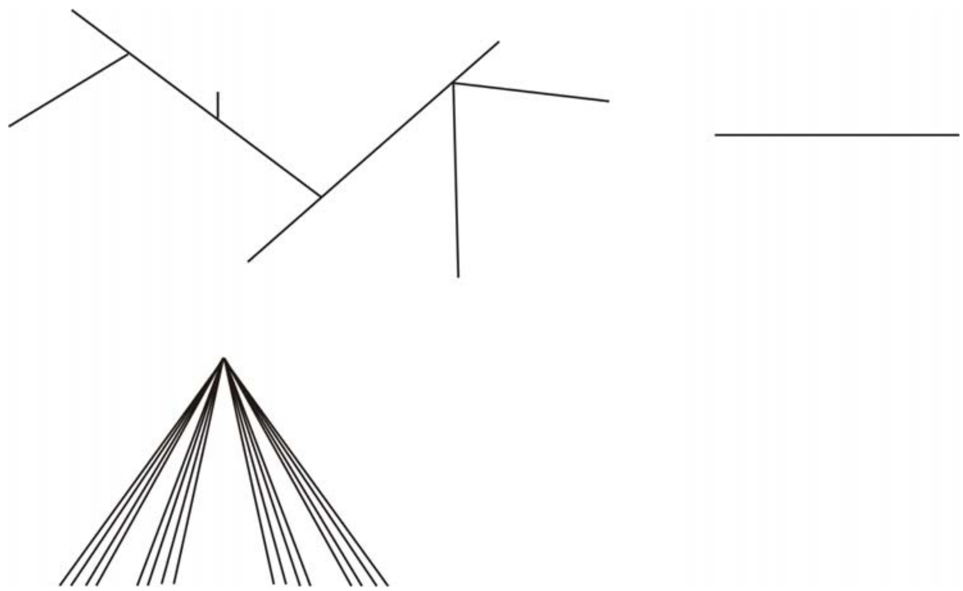

Figura 2.5: Ejemplos de Dendroides. (Definición 2.8).

Supongamos que D no es arcoconexo. Sean x y $y \in D$ tales que no existe ningún arco en D que los una. Por lo tanto, toda trayectoria xy intersecta a $X \setminus D$. Sean α una trayectoria de x a y y $p \in \alpha \cap (X \setminus D)$. Observemos que $\alpha \setminus \{p\}$ es disconexo y contiene a $\alpha \cap D$. Sea $\alpha \setminus \{p\} = U \mid V$, notemos que x y y no pueden estar ambos en el mismo abierto U o V. Supongamos que $x \in U$ y que $y \in V$. Esto implica que, $U \cap D \neq \varnothing \neq V \cap D$ y $U \cap D \mid V \cap D$ es una separación de $\alpha \cap D$. Esto contradice el hecho de que X es hereditariamente unicoherente. De modo que, D es arcoconexo. ■

Observación 2.10 *Notemos que dados dos elementos distintos x y y de un dendroide X, existe un único arco $xy \subset X$ que los tiene como extremos, pues si suponemos lo contrario, haciendo $xy = D$ y utilizando un argumento similar al de la prueba anterior llegamos a una contradicción.*

Definición 2.11 *Una **dendrita**, es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples. (Figura 2.6).*

Definición 2.12 *Decimos que un continuo X es **hereditariamente localmente conexo** si todo subcontinuo de X es localmente conexo.*

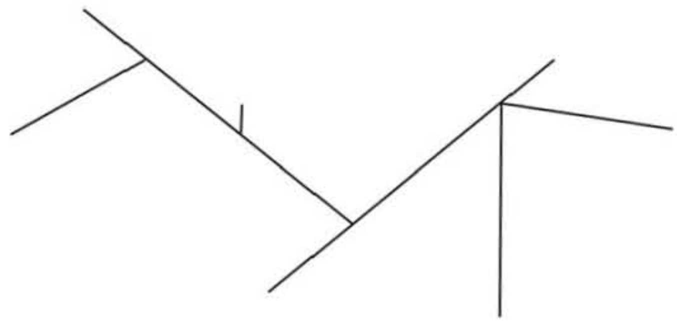

Figura 2.6: Ejemplo de dendrita. (Definición 2.11).

En [14, Corolario 10.5] se prueba que toda dendrita es un continuo hereditariamente localmente conexo.

Observación 2.13 *Notemos que un dendroide X no puede tener curvas cerradas simples, porque no sería hereditariamente unicoherente. En consecuencia, todo subcontinuo localmente conexo D de un dendroide X, es una dendrita.*

Capítulo 3

Hiperespacios

En este capítulo vamos a definir una clase especial de espacios topológicos asociados a un continuo. Estos se llaman hiperespacios, pues ahora tendremos un espacio en el cual los puntos representan continuos. Probaremos que dado un continuo cualquiera, sus hiperespacios también serán continuos.

Definición 3.1 *Dado un continuo X, definimos los siguientes hiperespacios:*

- $2^X = \{A : A \text{ es un subconjunto cerrado y no vacío de } X\}$.
- $C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\}$.
- $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$.

Como nuestro espacio X tiene una métrica d, vamos a poder definir una métrica H_d para 2^X.

Definición 3.2 *Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in 2^X$, sea $N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x,a) < \varepsilon$ para alguna $a \in A\}$. Para A y $B \in 2^X$ definimos $H_d : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como:*

$$H_d(A,B) = ínf \{\varepsilon > 0 : A \subset N_d(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N_d(\varepsilon, A)\}.$$

Esta métrica se llama la **métrica de Hausdorff** inducida por d. Intuitivamente, con esta distancia dos cerrados están cerca si son parecidos y están casi en la misma posición. (Figura 3.1).

Observación 3.3 *Sean X un continuo, A y $B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Como H_d es un ínfimo se sigue de la Definición 3.2, que $A \subset N_d(H_d(A,B) + \varepsilon, B)$ y $B \subset N_d(H_d(A,B) + \varepsilon, A)$.*

Figura 3.1: Los cuadrados de la izquierda están lejos y los rectángulos de la derecha están cerca, con respecto a la métrica de Hausdorff.

Teorema 3.4 *Si X es un continuo entonces H_d es una métrica.*

Demostración. Sólo vamos a demostrar la desigualdad del triángulo, puesto que las otras propiedades son casi inmediatas de la definición.

Sean A, B y $C \in 2^X$. Demostraremos que $H_d(A, C) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $a \in A$. De la Observación 3.3 se deduce que, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq H_d(A, B) + \varepsilon$. De la misma manera, existe $c \in C$ tal que $d(b, c) \leq H_d(B, C) + \varepsilon$.

Por lo tanto, usando la desigualdad del triángulo para d obtenemos que $d(a, c) \leq H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon$ y eso es válido para cualquier $a \in A$.

Así que, $A \subset N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon, C)$. Análogamente se tiene que $C \subset N_d(H_d(A, B) + H_d(B, C) + 2\varepsilon, A)$. De modo que, como la ε fue arbitraria, tenemos lo que se buscaba. ■

En [14, Corolario 4.6] se observa que la topología en $C(X)$ inducida por la métrica de Hausdorff, es independiente de la métrica d que tenga el espacio X. Solamente depende de su topología. También se prueba que 2^X es compacto [14, Teorema 4.13, pág.59] y que $C(X)$ es cerrado en 2^X [14, Teorema 4.17, pág 61], por lo tanto $C(X)$ es compacto.

Notación 3.5 *Dado un continuo X. Denotaremos por:*

$V(\delta, A) = \{B \in L(X) : H_d(A, B) < \delta\}$ *donde $L(X)$ es el hiperespacio $C(X)$ o el hiperespacio 2^X, según se requiera.*

Ejemplo 3.6 *Una representación geométrica de $C(I)$ donde $I = [0, 1]$. (Figura 3.2).*

Definamos $h : C(I) \to T$, donde T denota al triángulo $T \subseteq \mathbb{R}^2$ con vértices en $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$, como $h([a, b]) = (a, b)$ para cada $[a, b] \in C(I)$.

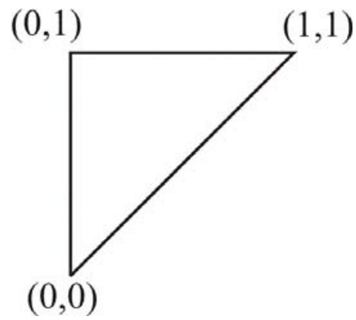

Figura 3.2: Representación de $C(I)$. (Ejemplo 3.6).

Vamos a probar que h es un homeomorfismo entre $C(I)$ y T.

Es claro que h es inyectiva. Notemos que h es suprayectiva pues a cada $[a,b] \in C(I)$ le corresponde un $(a,b) \in T$ y ambos cumplen que $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Para probar que h es continua, tomemos A y $B \in C(I)$, digamos que $A = [x_1, y_1]$ y $B = [x_2, y_2]$. Sea $\varepsilon > 0$. Si hacemos $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ entonces $H_d(A,B) < \delta$ implica que $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y que $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto, $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 - |y_1 - y_2|^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon$ y, concluimos que h es continua.

Como $C(I)$ es compacto, T es Hausdorff y h es biyectiva y continua, entonces por la Proposición 1.6, sabemos que h es un homeomorfismo.

Lema 3.7 *Si S^1 es el círculo unitario en el plano complejo $\mathbb{C}$ entonces $C(S^1)$ es un disco. (Figura 3.3).*

Demostración. Sea $h : C(S^1) \to \mathbb{C}$ tal que $h(S^1) = (0,0)$ y para cada arco $A \in S^1$ con punto medio $(1, \theta_A)$ y longitud L_A, hagamos $h(A) = \left(\left(\frac{2\pi - L_A}{2\pi}\right), \theta_A\right)$.

No es difícil ver que h es un homeomorfismo entre $C(S^1)$ y D^2 el disco unitario en el plano complejo. ■

3.1. Límite Inferior, Límite Superior y Límite

En esta sección veremos una manera de entender la convergencia con respecto a la métrica de Hausdorff en términos de la convergencia como

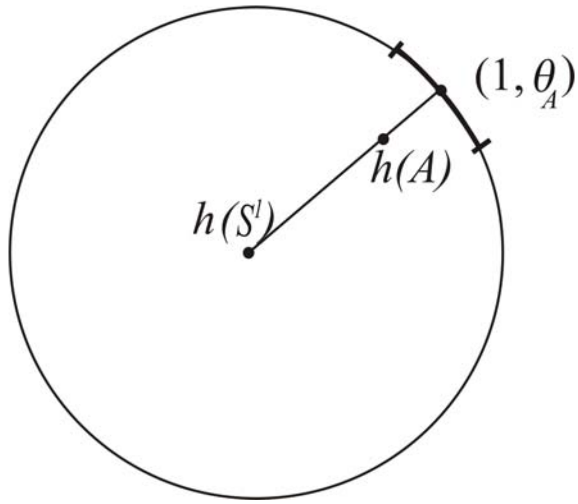

Figura 3.3: Representación geométrica de $C(S^1)$. (Lema 3.7).

subconjuntos de X.

Definición 3.8 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Definamos:*

lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x \in X$: para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N_0$, se tiene que $U \cap A_n \neq \varnothing\}$.

lím sup$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x \in X$: para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$, se tiene que $U \cap A_n \neq \varnothing$ para una infinidad de números $n\}$. (Figura 3.4).

Es claro que lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset$ lím sup$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 3.9 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Diremos que lím $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = A$, siempre que lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} = A =$ lím sup$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposición 3.10 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Entonces:*
$i)$ lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y lím sup$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son cerrados.
$ii)$ lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} =$ lím inf$\{\overline{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y lím sup$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} =$ lím sup$\{\overline{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración. $i)$ Sean $x \in \overline{\text{lím inf}\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ y V un abierto tal que $x \in V$, por lo tanto $V\cap$ lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \varnothing$.

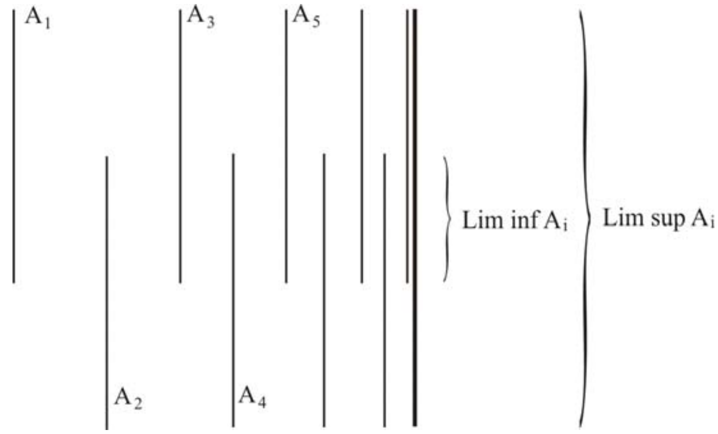

Figura 3.4: Ejemplos de *lím* ínf y *lím* sup. (Definición 3.8).

Tomemos $y \in V \cap$ lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, como $y \in$ lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sabemos que para todo abierto U que tenga a y, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N_0$, se tiene que $U \cap A_n \neq \varnothing$, en particular esto se cumple para V, por lo tanto, $x \in$ lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esto prueba que lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cerrado.

La prueba de que lím sup$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cerrado es similar.

ii) Observemos que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de subconjuntos de X tales que $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset$ lím inf$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. De modo que, lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset$ lím inf$\{\overline{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y para probar la igualdad sólo nos falta probar la contención en el otro sentido. Sean $x \in$ lím inf$\{\overline{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y U un abierto con $x \in U$. Sabemos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap \overline{A}_n \neq \varnothing$ para toda $n > N_0$, por lo tanto, $U \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n > N_0$ y con esto concluye la prueba.

Similarmente se demuestra que lím sup$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} =$ lím sup$\{\overline{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Proposición 3.11 *Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos conexos de X tal que lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \varnothing$. Entonces lím sup$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $L =$ lím sup$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es conexo, así, existen dos abiertos ajenos U y V de X, tales que $L \subset U \cup V$ y $U \cap L \neq \varnothing \neq V \cap L$.

Como lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \varnothing$, existe $x \in$ lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x \in U \cap$ lím inf$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo tanto, existe

$N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \varnothing$ para toda $n > N$.

Para llegar a una contradicción vamos a probar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_m \subset U \cup V$ y $A_m \cap U \neq \varnothing \neq A_m \cap V$. Sea $M = \{m > N : A_m \cap V \neq \varnothing\}$. Notemos que $M \neq \varnothing$ porque $V \cap L \neq \varnothing$. Si suponemos que $A_m \nsubseteq U \cup V$ para ninguna $m \in M$, entonces para cada $m \in M$, existe $x_m \in A_m \cap (X \setminus (U \cup V))$. Como $X \setminus (U \cup V)$ es compacto y métrico, podemos suponer que la sucesión $\{x_m\}_{m \in M}$ converge a un punto z que debe de pertenecer a $X \setminus (U \cup V) = X \setminus L$. Pero esto es una contradicción, ya que z es el límite de la sucesión de puntos $\{x_m\}_{m \in M}$ tales que, para cada $m \in M$, $x_m \in A_m$, así que z debería pertenecer al lím sup$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, pues todo abierto que contenga a z intersecta a una infinidad de $m \in M \subset \mathbb{N}$. Por lo tanto, existe $m \in M$ tal que $A_m \subset U \cup V$, $A_m \cap U \neq \varnothing$ y $A_m \cap V \neq \varnothing$. Pero esto quiere decir que U y V separan a A_m, lo cual es contradice que A_m sea conexo.

Con esto concluimos que lím sup$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es conexo. ■

Lema 3.12 *Sea X un continuo. Dados A y $B \in C(X)$, el conjunto $\mathcal{A} = \{D \in C(X) : A \subset D \subset B\}$ es cerrado en $C(X)$.*

Demostración. Sea $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que lím $D_n = \tilde{D}$. Vamos a demostrar que $\tilde{D} \in \mathcal{A}$.

Como D_n converge a $\tilde{D}$, sabemos que para toda $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, $H_d\left(D_n, \tilde{D}\right) < \varepsilon$. Lo cual quiere decir que para toda $n > N$, el $inf\{\delta > 0 : D_n \subset N_d\left(\delta, \tilde{D}\right)$ y $\tilde{D} \subset N_d(\delta, D_n)\} < \varepsilon$. Por lo tanto, $A \subset D_n \subset N_d\left(\delta, \tilde{D}\right)$ para cada $\delta < \varepsilon$ y cada $n > N$. De modo que $A \subset \tilde{D}$, ya que si hubiera un $x \in A \setminus \tilde{D}$ la distancia de x a $\tilde{D}$ sería mayor que cero y existiría una $r > 0$ tal que $A \nsubseteq N_d\left(r, \tilde{D}\right)$.

Por otra parte, sabemos que $\tilde{D} \subset N_d(\delta, D_n) \subset N_d(\delta, B)$ para cada $\delta < \varepsilon$ y cada $n > N$. Por lo tanto, $\tilde{D} \subset B$. Con lo cual llegamos a que $\tilde{D} \in \mathcal{A}$ y a que $\mathcal{A}$ es cerrado. ■

3.2. Arcos Ordenados y Funciones de Whitney

Definición 3.13 *Una función de Whitney para 2^X es una función continua $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*

a) $\mu(\{p\}) = 0$ *para cada* $p \in X$,
b) $\mu(A) < \mu(B)$ *siempre que* $A \subsetneq B$.

Las funciones de Whitney sirven para medir el tamaño (en cierto sentido) de los elementos de 2^X.

Si queremos una función de Whitney para $C(X)$, basta con restringir la función de 2^X a $C(X)$.

Dado que $C(X)$ y 2^X son compactos, su imagen bajo una función de Whitney debe ser un conjunto acotado de $[0,\infty)$ y, por la condición *b)* de la Definición 3.13, el máximo de una función de Whitney se alcanza en X. Así que, cuando X es no degenerado las condiciones *a)* y *b)* de la Definición 3.13, garantizan que $\mu(X) > 0$, y si tomamos la función $\frac{\mu}{\mu(X)}$, va a seguir cumpliendo las propiedades *a)* y *b)* y, además, va a tener dos propiedades adicionales: que su imagen está contenida en el intervalo $[0,1]$ y $\mu(X) = 1$. Por lo tanto, podemos pedir, siempre que X sea no degenerado, que las funciones de Whitney satisfagan la propiedad adicional:

c) $\mu(X) = 1$.

Ejemplo 3.14 *Existe una función de Whitney para el intervalo* $[0,1]$.

Sea $I = [0,1]$. *Entonces la función* $D : C(I) \to [0,1]$ *dada por* $D(A) =$ *diámetro de* A, *es continua,* $D(I) = 1$, $D(\{p\}) = 0$ *para todo* $p \in I$ *y* $D(A) < D(B)$ *siempre que* $A \subsetneq B$. *Por lo tanto,* D *es una función de Whitney.*

En [7, Capítulo 5] se prueba que para cualquier continuo X, su hiperespacio 2^X admite funciones de Whitney.

Teorema 3.15 *Sean* Z *un continuo y* A *y* $B \in C(Z)$ *tales que* $A \subsetneq B$. *Entonces existe* $C \in C(Z)$ *tal que* $A \subsetneq C \subsetneq B$.

Demostración. Sea $x \in B \setminus A$. Como B es un espacio normal, existe un abierto U de B tal que $A \subset U \subset B$ y $x \notin \overline{U}$.

Sea C la componente de $\overline{U}$ que contiene a A. Por el Teorema 1.24, sabemos que $C \cap Fr(U) \neq \varnothing$, lo cual implica que $A \subsetneq C$. Como C es una componente, es cerrada y conexa, es decir, $C \in C(Z)$ y, finalmente, como hay una $x \in B$ tal que $x \notin \overline{U}$, entonces $C \subsetneq B$. Con esto terminamos la prueba del teorema.
■

Lema 3.16 *Sean $A \subsetneq B$, ambos subcontinuos de X, $\mu : C(X) \to [0,1]$, una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$. Entonces existe $C \in C(X)$ tal que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}([t,1]) \cap \{D \in C(X) : A \subset D \subset B\}$. Notemos que $B \in \mathcal{A}$ y que $\mathcal{A}$ es cerrado en $C(X)$, puesto que es la intersección de dos cerrados, veáse el Lema 3.12 y, por lo tanto, compacto. De manera que μ alcanza su mínimo en $\mathcal{A}$, es decir, existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) \leq \mu(D)$ para toda $D \in \mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{B} = \mu^{-1}([0,t]) \cap \{D \in C(X) : A \subset D \subset E\}$ notemos que $\mathcal{B}$ es compacto y es no vacío puesto que $A \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, μ alcanza su máximo en $\mathcal{B}$, es decir, existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(D) \leq \mu(F)$ para toda $D \in \mathcal{B}$. Notemos que $\mu(F) \leq t \leq \mu(E)$.

Supongamos que $\mu(F) < t < \mu(E)$. Como $F \subset E$, tenemos que $F \subsetneq E$. Por el Teorema 3.15, existe $G \in C(X)$ tal que $F \subsetneq G \subsetneq E$, de modo que $\mu(F) < \mu(G) < \mu(E)$. Si $t \leq \mu(G)$ entonces $G \in \mathcal{A}$ y $\mu(G) < \mu(E)$ lo que contradice la elección de E. Si $t \geq \mu(G)$ entonces $G \in \mathcal{B}$ y $\mu(F) < \mu(G)$ contradiciendo la elección de F. Por lo tanto, $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$. ■

Definición 3.17 *Sea X un continuo. Dados A y $B \in C(X)$, con $A \subsetneq B$, diremos que una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ es un* ***arco ordenado de** A **a** B **en** $C(X)$*, si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, siempre que $0 \leq s < t \leq 1$.*

Teorema 3.18 *Sea X un continuo. Dados A y $B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney.

Sea $\{m_1,\ m_2, ...\}$ una numeración del conjunto $\{\mu(A), \mu(B)\} \cup ((\mu(A), \mu(B)) \cap \mathbb{Q})$, donde $m_1 = \mu(A)$ y $m_2 = \mu(B)$.

Vamos a construir, por inducción, una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $C(X)$ tales que si $m_n < m_k$, entonces $A_n \subset A_k$ y $\mu(A_k) = m_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Sean $A_1 = A$ y $A_2 = B$. Por el Lema 3.16, existe $A_3 \in C(X)$ tal que $A_1 \subsetneq A_3 \subsetneq A_2$ y $\mu(A_3) = m_3$.

Supongamos que ya tenemos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Sea $m_{n+1} \in \{(\mu(A), \mu(B)) \cap \mathbb{Q}\} \setminus \{m_1, m_2, ..., m_n\}$. Por lo tanto, existe $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ tal que $m_i < m_{n+1} < m_{i+1}$. Usando el Lema 3.16, se tiene que existe A_{n+1} tal que $A_i \subsetneq$

$A_{n+1} \subsetneq A_{i+1}$ y $\mu(A_{i+1}) = m_{n+1}$. Concluyendo así, que existe la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $C(X)$ con las propiedades requeridas.

Sea $\tilde{A} = \overline{\{A_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Ahora vamos a probar que $\mu|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \to [m_1, m_2]$ es un homeomorfismo. Observemos que $\tilde{A}$ es compacto, por ser un cerrado en el compacto $C(X)$, y que $\mu|_{\tilde{A}}$ es continua.

Como $\mu|_{\tilde{A}}$ es continua, sabemos que $\mu|_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right) = \mu\left(\overline{\{A_n : n \in \mathbb{N}\}}\right) \subset \overline{(\{m_n\}_{n=1}^{\infty})} = [m_1, m_2]$. Para probar que $\mu|_{\tilde{A}}$ es suprayectiva, sólo nos falta probar la otra contención, que es cierta porque $\mu|_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right)$ es un cerrado que contiene a todos los racionales del intervalo $[m_1, m_2]$. De donde, obtenemos que $\mu|_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\right) = [m_1, m_2]$ y entonces $\mu|_{\tilde{A}}$ es suprayectiva.

Ahora veamos que $\mu|_{\tilde{A}}$ es inyectiva.

Sean C y $D \in \tilde{A}$ tales que $C \neq D$. Sean $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{A_{l_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dos subsucesiones de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ que convergen a C y D, respectivamente. Por lo tanto, para cada $k = 1, 2, ...$, se tiene que $m_{n_k} \leq m_{l_k}$ o $m_{n_k} \geq m_{l_k}$ y, como son una infinidad de números k, podemos elegir una sucesión $\{k_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ tal que para toda $r \in \mathbb{N}$, se cumple que $m_{n_{k_r}} \leq m_{l_{k_r}}$ o $m_{n_{k_r}} \geq m_{l_{k_r}}$. Podemos suponer que las sucesiones $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{A_{l_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que teníamos cumplían, desde el principio, la primera desigualdad. Es decir que para cada $k = 1, 2, ...$, se tiene que $m_{n_k} \leq m_{l_k}$ pues, como ya vimos que una subsucesión lo cumplía, sólo sería cuestion de reetiquetar los conjuntos A_{n_k} y A_{l_k}. De esta forma tenemos que $A_{n_k} \subset A_{l_k}$ para toda $k = 1, 2, ...$, en el límite tenemos que $C \subset D$. Pero, como $C \neq D$, tenemos que $\mu|_{\tilde{A}}(C) < \mu|_{\tilde{A}}(D)$ y $\mu|_{\tilde{A}}$ es inyectiva. Observemos que, con el argumento anterior, probamos que si C y $D \in \tilde{A}$ entonces $C \subset D$ o $D \subset C$.

Ahora, como $\mu|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \to [m_1, m_2]$ es una función continua y biyectiva de un compacto a un Hausdorff, debe ser un homeomorfismo, por la Proposición 1.6.

Sea $h : [0, 1] \to [m_1, m_2]$ un homeomorfismo creciente.

Definamos $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ como $\alpha = (\mu|_{\tilde{A}})^{-1} \circ h$. De esta manera, $\alpha(0) = (\mu|_{\tilde{A}})^{-1}(h(0)) = (\mu|_{\tilde{A}})^{-1}(m_1) = A$ y, similarmente, $\alpha(1) = B$.

Sean $0 \leq s < t \leq 1$. Entonces, $h(s) < h(t)$. Sean $C = \alpha(s) = (\mu|_{\tilde{A}})^{-1}(h(s))$ y $D = \alpha(t) = (\mu|_{\tilde{A}})^{-1}(h(t))$, esto implica que $\mu(C) = h(s)$ y $\mu(D) = h(t)$. Por lo tanto, $\mu(C) < \mu(D)$ y, como habíamos observado anteriormente, $C \subset D$ o $D \subset C$, pero la segunda contención no se puede dar. Por lo tanto, $C \subsetneq D$. Es decir $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ con lo cual concluimos la prueba del teorema. ■

Notemos que todos los elementos $A \in C(X)$ se pueden conectar por un arco ordenado con $X \in C(X)$, por lo tanto tenemos lo siguiente:

Corolario 3.19 *Si X es un continuo, entonces $C(X)$ es arcoconexo.*

Capítulo 4

Selecciones en continuos

Las selecciones son un tipo especial de funciones definidas en los hiperespacios de un continuo, con valores en dicho continuo. La idea del estudio de las selecciones es caracterizar a los continuos cuyo hiperespacio admite una selección. Es decir, ver qué propiedades se requieren en un continuo para que su hiperespacio sea selectible o cuáles propiedades de los continuos evitan que sus hiperespacios sean selectibles.

4.1. Definiciones y Ejemplos

Definición 4.1 *Dado un continuo X, una* ***selección para una familia*** $\alpha \subseteq 2^X$ *es una función continua $\sigma : \alpha \to X$ tal que $\sigma(A) \in A$ para todo $A \in \alpha$.*

Observación 4.2 *Sean X un continuo y $\alpha \subset 2^X$ tal que $F_1(X) \subset \alpha$. Si $\sigma : \alpha \to X$ es una selección, entonces se tiene que $\sigma(\{x\}) = x$ para todo $x \in X$.*

Se sabe que el único continuo cuyo hiperespacio 2^X admite una selección es $X = [0,1]$, ver [13, pág. 369] De manera que ya están caracterizados todos los continuos X cuyo hiperespacio 2^X admite una selección. Por lo tanto, en ese sentido no hay mucho que estudiar. Sin embargo, aún no se tiene una caracterización de los continuos cuyo hiperespacio $C(X)$ admite una selección. Es por eso que nos enfocaremos a este hiperespacio.

Observación 4.3 *Notemos que si existe una selección* $\sigma : C(X) \to X$ *para* $C(X)$, *entonces para cualquier subcontinuo* $A \subset X$, $C(A)$ *admite una selección, ya que* $\sigma|_{C(A)}: C(A) \to A$ *cumple las propiedades requeridas.*

Ejemplo 4.4 *La función* $\sigma : C(I) \to I$ *tal que para cada* $A \in C(I)$, $\sigma(A) = m_A$ *en donde* m_A *es el punto medio de* A, *es una selección*

Para probar que σ es continua, sean $\varepsilon > 0$ y A y $B \in C(I)$ con $A = [a_1, a_2]$ y $B = [b_1, b_2]$.

Sea $\delta = \varepsilon$. Por lo tanto, $H_d(A, B) < \delta$ implica que $d(a_1, a_2) < \delta$ y $d(b_1, b_2) < \delta$. entonces $d(m_A, m_B) < \delta = \varepsilon$ de manera que σ es continua.

Lema 4.5 *Si* S^1 *es el círculo unitario en el plano complejo, entonces* $C(S^1)$ *no admite ninguna selección.*

Demostración. Supongamos que existe una selección $\sigma : C(S^1) \to S^1$. Como $\sigma(\{x\}) = x$ para todo $x \in S^1$ y $C(S^1)$ es homeomorfo a D^2, por el Lema 3.7, entonces σ es una retracción del disco en su frontera, de modo que componiendo σ con la función $f : S^1 \to S^1$ tal que $f(x) = -x$, tendríamos una función $f \circ \sigma : D^2 \to D^2$ sin puntos fijos, contradiciendo el Teorema del punto fijo de Brower [15, Theorem 2.1, pág. 19]. ■

Teorema 4.6 *Sea* X *un continuo. Si* $C(X)$ *admite una selección* $\sigma : C(X) \to X$, *entonces* X *es un dendroide.*

Demostración. Sabemos que $C(X)$ es arcoconexo, por el Corolario 3.19. Por lo tanto, como $\sigma(C(X)) = X$, entonces X es arcoconexo. Para probar que X es hereditariamente unicoherente supongamos que existen dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cap B$ no es conexo. Sean x y y puntos en distintas componentes de $A \cap B$. Como $C(A)$ es arcoconexo y $A = \sigma(C(A))$ entonces A es arcoconexo y contiene un arco J_A que une a x con y. De la misma manera, B contiene un arco J_B que une a x con y en B.

Sea $h : [0, 1] \to J_A$ un homeomorfismo tal que $h(0) = x$ y $h(1) = y$. Sean $t_1 = \max\{t \in [0, 1] : h([0, t]) \subset J_B\}$ y $t_2 = \min\{t \in [0, 1] : t_1 < t$ y $h(t) \in J_B\}$ estos conjuntos contienen a $h^{-1}(x)$ y a $h^{-1}(y)$, respectivamente, esto implica que t_1 y t_2 están bien definidos. Notemos que $t_1 < 1$, puesto que $J_A \neq J_B$. Por la manera en que definimos t_1 y t_2, no existe ninguna $t \in (t_1, t_2)$ tal que $h(t) \in J_B$, de modo que el arco en J_A que va de $h(t_1)$ a $h(t_2)$ y el arco en J_B

que va de $h(t_1)$ a $h(t_2)$ se intersectan solamente en sus extremos, formando una curva cerrada simple S contenida en $J_A \cup J_B$ y por la Observación 4.3, $\sigma|_{C(S)}$ es una selección, contradiciendo el Lema 4.5. De esta manera se concluye que X es hereditariamente unicoherente y es un dendroide. ■

Podríamos pensar que todos los dendroides admiten una selección, pero en el ejemplo 4.8 probamos lo contrario. A fin de demostrar esto, definamos el siguiente dendroide:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n el segmento de recta en el plano, que une a $(-1,0)$ con $(1,2^{-n})$. Sea T el segmento de recta en el plano, que une a $(-1,0)$ con $(1,0)$. Definimos $D_1 = T \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y lo llamaremos el abanico armónico. (Figura 4.1).

Lema 4.7 *Si σ es una selección para el abanico armónico D_1, entonces $\sigma(T) = (-1,0)$.*

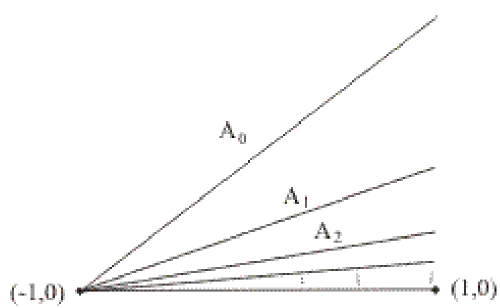

Figura 4.1: El abanico armónico D_1. (Lema 4.7).

Demostración. Supongamos que $\sigma(T) = r$ para alguna $r \in T$ y $r \neq (-1,0)$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}d((-1,0),r)$. Como σ es uniformemente continua por estar definida en un compacto, entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $H_d(P,Q) < \delta$ entonces $d(\sigma(P),\sigma(Q)) < \varepsilon$.

Como $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a T, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $H_d(A_n,T) < \delta$.

Sea β la unión del arco ordenado que va de A_N a $A_N \cup A_{N+1}$, creciendo A_N dentro de $A_N \cup A_{N+1}$ hasta llegar a $A_N \cup A_{N+1}$, con otro que va de A_{N+1} a $A_N \cup A_{N+1}$, creciendo A_{N+1} dentro de $A_N \cup A_{N+1}$ hasta llegar a $A_N \cup A_{N+1}$. Notemos que β es un arco y que si $B \in \beta$ entonces $A_N \subset B \subset$

$A_N \cup A_{N+1}$ o $A_{N+1} \subset B \subset A_N \cup A_{N+1}$ y, además, $H_d(T, B) < \delta$, por lo tanto, $d(\sigma(T), \sigma(B)) < \varepsilon$.

Sea $\sigma(A_n) = r_n$. Como β es un arco, entonces $\sigma(\beta)$ contiene al arco que va de r_N a r_{N+1} y dado que $r_N \in A_N$, $r_{N+1} \in A_{N+1}$ y $A_N \cap A_{N+1} = \{(-1, 0)\}$, este arco debe pasar por el $(-1, 0)$, es decir, existe $B_0 \in \beta$ tal que $\sigma(B_0) = (-1, 0)$, pero $H_d(T, B_0) < \delta$ y $d(\sigma(T), \sigma(B_0)) = d(r, (-1, 0)) > \varepsilon$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\sigma(T) = (-1, 0)$. ■

Ejemplo 4.8 *Existe un dendroide D tal que $C(D)$ no admite ninguna selección. (Figura 4.2).*

Sean D_1 como en el Lema 4.7, $D_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x \in D_1\}$ y $D = D_1 \cup D_2$.

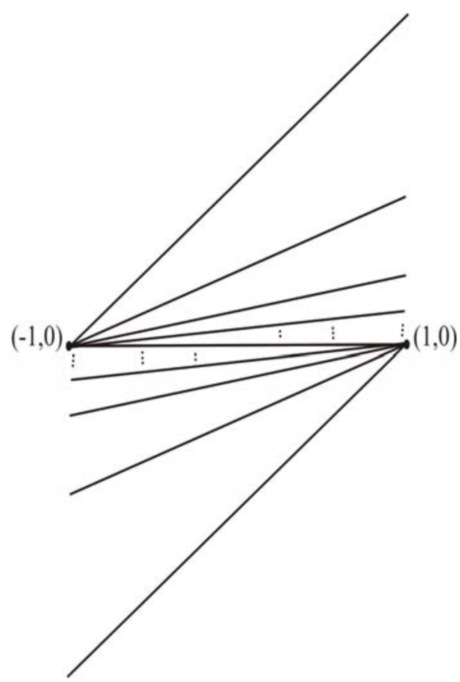

Figura 4.2: Dendroide no selectible D. (Ejemplo 4.8).

Supongamos que existe una selección $\sigma : C(D) \to D$. Por el Lema 4.7, $\sigma|_{D_1}(T) = (-1, 0)$ y $\sigma|_{D_2}(T) = (1, 0)$, lo cual es una contradicción puesto que $\sigma|_{D_1}(T) = \sigma(T) = \sigma|_{D_2}(T)$.

4.2. Dendroides suaves y selecciones rígidas

Definición 4.9 *Un **orden parcial** en un conjunto X es un subconjunto Γ del producto $X \times X$, que cumple lo siguiente:*
i) Para cada $a \in X$, se tiene que $(a, a) \in \Gamma$.
ii) Dados a y $b \in X$, si (a, b) y (b, a) están en Γ, entonces $a = b$.
iii) Dados $a, b, c \in X$, si (a, b) y (b, c) están en Γ, entonces $(a, c) \in \Gamma$.

La condición i) se llama **reflexividad**, la condición ii) se llama **antisimetría** y la condición iii) **transitividad**, del orden Γ.

Ejemplo 4.10 *El orden $\leq$ en el conjunto $\mathbb{R}$ es un orden parcial.*
Dados a y $b \in X$, diremos que $(a, b) \in \Gamma \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si $a \leq b$. Es fácil ver que esta relación cumple las tres propiedades requeridas para ser un orden parcial.

Para un espacio métrico X y un orden parcial Γ definido en X, otra manera de denotar que $(a, b) \in \Gamma$ es escribiendo $a \leq b$.

Definición 4.11 *Diremos que un orden parcial Γ en un conjunto X es **cerrado**, si Γ es un subconjunto cerrado del producto $X \times X$. Esto quiere decir que si tenemos dos sucesiones, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a a y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a b, tales que $a_n \leq b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \leq b$.*

Recordemos que dados dos puntos x y y en un dendroide X, denotamos por xy al único arco que los une, (Observación 2.10).
La definición usual de suavidad es la siguiente:

Definición 4.12 *Se dice que un dendroide X es **suave** si existe $p \in X$ tal que para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $a \in X$, se cumple que los arcos $\{pa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al arco pa.*

En este trabajo utilizaremos otra definición de suavidad para dendroides, que tiene que ver con órdenes parciales y se basa en que para cada $p \in X$ se puede definir un orden parcial $\Gamma(p)$ en X de la siguiente manera:
$\Gamma(p) = \{(x, y) : x \in py\}$

Definición 4.13 *Diremos que un dendroide D es **suave** si existe $p \in D$ tal que $\Gamma(p)$ es cerrado.*

Proposición 4.14 *Las definiciones 4.12 y 4.13 son equivalentes.*

Demostración. Sea X un dendroide, supongamos que cumple la Definición 4.12.

Sean $(a_n, b_n) \in \Gamma(p)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a b.

Como $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a b y X es suave en el sentido de la Definición 4.12, entonces $\{pb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a pb y, como $a_n \in pb_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in pb$ y concluimos que $a \leq b$. Es decir, $(a, b) \in \Gamma(p)$, lo que prueba que $\Gamma(p)$ es cerrado.

Supongamos que X cumple la Definición 4.13, Así que $\Gamma(p)$ es cerrado.

Tomemos una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converja al punto a. Como $C(X)$ es compacto, la sucesión $\{pa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{pa_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Veamos que $\lim_{k\to\infty} pa_{n_k} \subset pa$, para esto demostraremos que lím sup $pa_{n_k} \subset pa$ y que $pa \subset$ lím inf pa_{n_k}. Sea $x \in$ lím sup pa_{n_k}, esto implica que existe una subsucesión $\left\{x_{n_{k_j}}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a x, tal que $x_{n_{k_j}} \in pa_{n_{k_j}}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Es decir, $x_{n_{k_j}} < a_{n_{k_j}}$, para cada $j \in \mathbb{N}$, como $\Gamma(p)$ es cerrado concluímos que $x < a$, de modo que $x \in pa$. Por lo tanto $\lim_{k\to\infty} pa_{n_k} =$ lím sup $pa_{n_k} \subset pa$. Notemos que p y $a \in$ lím inf pa_{n_k}, por la Proposición 3.11, tenemos que lím pa_{n_k} es conexo y por la Proposición 3.10 que es cerrado. De este modo, $\lim_{k\to\infty} pa_{n_k}$ es un subcontinuo del dendroide X, que tiene a los puntos p y a, por el Teorema 2.9 es un dendroide y por lo tanto el arco $pa \subset \lim_{k\to\infty} pa_{n_k}$. Con esto concluimos que $pa = \lim_{k\to\infty} pa_{n_k}$, esto implica que toda subsucesión convergente de $\{pa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a pa, es decir, el único punto de acumulación de la sucesión $\{pa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es pa, de modo que $\{pa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a pa. ■

Proposición 4.15 *Sean X un dendroide suave y K un subcontinuo de X. Entonces K es suave.*

Demostración. Sea X un dendroide suave. Por lo tanto, existe $p \in X$ tal que para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $a \in X$, los arcos $\{pa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al arco pa.

Sea K un subcontinuo de X y llamemos q al primer punto en K y en el arco pk que va de p a $k \in K$, para alguna $k \in K$. Vamos a probar que q es único. Sean pk' otro arco que va de p a $k' \in K$ y q' el primer punto en $pk' \cap K$. Como $pq \cup pq'$ es un subcontinuo de X, $(pq \cup pq') \cap K = \{q, q'\}$, y X es hereditariamente unicoherente, entonces $q = q'$.

Veremos que K es suave en q. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, de puntos en K, que converge al punto $a \in K$. Como X es suave, los arcos $\{pa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al arco pa y $pa_n \cap K = qa_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, los arcos $\{qa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al arco qa y K es un dendroide suave. ■

Definición 4.16 *Sean X un continuo y $\alpha \subseteq 2^X$. Una **selección rígida** para α es una selección tal que:*
si A y $B \in \alpha$ y $\sigma(B) \in A \subset B$ entonces $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Por ejemplo, la selección que definimos para el intervalo $I = [0,1]$ no es rígida puesto que $\sigma([0,1]) = \frac{1}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, pero $\sigma\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{4}$.

Pero si en lugar del punto medio de cada intervalo tomáramos su extremo izquierdo, la selección sí sería rígida.

Teorema 4.17 *Sean X un espacio compacto y $\alpha \subseteq 2^X$. Supongamos que α satisface las siguientes condiciones:*

i) Si $x \in X$ entonces $\{x\} \in \alpha$.

ii) Si A y $B \in \alpha$ y $A \cap B \neq \varnothing$ entonces $A \cup B \in \alpha$.

Si α es cerrado y admite una selección rígida σ, entonces la relación $\Gamma_\sigma = \cup\{\{\sigma(A)\} \times A : A \in \alpha\}$ es un orden parcial cerrado en X.

Recíprocamente, si Γ es un orden parcial cerrado en X y cada miembro $A \in \alpha$ tiene un elemento mínimo, $\sigma(A)$, con el orden parcial Γ, entonces σ es una selección rígida.

Demostración. La relación Γ_σ es reflexiva puesto que $\sigma(\{x\}) = x$ para cada $x \in X$. Es decir, $\{x\} \times \{x\} \in \Gamma_\sigma$.

Para probar que Γ_σ es antisimétrica, supongamos que $(x,y) \in \Gamma_\sigma$ y que $(y,x) \in \Gamma_\sigma$. Por lo tanto, existen A y $B \in \alpha$ tales que $\sigma(A) = x$ con $y \in A$ y $\sigma(B) = y$ con $x \in B$.

De aquí que x y $y \in A \cap B$ y, por ii), $A \cup B \in \alpha$. Si $\sigma(A \cup B) \in A$ entonces $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) = x$ por la rigidez de σ y, como $x \in B$, tenemos que $\sigma(A \cup B) = \sigma(B) = y$. De donde tenemos que $x = y$. Si $\sigma(A \cup B) \in B$ se prueba, análogamente, que Γ_σ es antisimétrica.

Para probar que Γ_σ es transitiva, supongamos que $(p,q) \in \Gamma_\sigma$ y que $(q,r) \in \Gamma_\sigma$. Entonces, existen C y $D \in \alpha$ tales que $p = \sigma(C)$, $q \in C$, $q = \sigma(D)$ y $r \in D$. Como $q \in C \cap D$, por ii), se tiene que $C \cup D \in \alpha$. Si

$\sigma(C \cup D) \in C$ obtenemos, por rigidez, que $\sigma(C \cup D) = \sigma(C) = p$ y se tiene que $(p, r) \in \Gamma_\sigma$, como se quería. Si $\sigma(C \cup D) \in D$ entonces $\sigma(C \cup D) = \sigma(D) = q$ y, dado que $q \in C \subset C \cup D$, se sigue que $q = \sigma(C) = p$, de manera que $(p, r) \in \Gamma_\sigma$. Por lo tanto, Γ_σ es transitiva y es un orden parcial.

Para probar que Γ_σ es un subconjunto cerrado de $X \times X$, sea $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Γ_σ que converge a (x, y). Esto implica que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in \alpha$ tal que $x_n = \sigma(A_n)$ y $y_n \in A_n$.

Como α es un cerrado en el compacto 2^X, la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $A \in \alpha$. Como $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a y, entonces $y \in A$ y, como σ es continua, se tiene que $x = \sigma(A)$. Es decir, $(x, y) \in \Gamma_\sigma$ y concluimos que Γ_σ es cerrado.

Para demostrar el recíproco, supongamos que Γ es un orden parcial cerrado en X tal que cada $A \in \alpha$ tiene un elemento mínimo, $\sigma(A)$. Para probar que σ es continua, sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $A \in \alpha$ y w un punto de acumulación de la sucesión $\{\sigma(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esto implica que, existe una subsucesión $\{\sigma(A_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a w, es decir $w \in$ lím $\sup\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo tanto $w \in A$ y tenemos que $(\sigma(A), w) \in \Gamma$ y, por otra parte, existe una sucesion $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $y_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma(A)$. De ahí que, $(\sigma(A_{n_k}), y_{n_k}) \in \Gamma$ y, como Γ es cerrado, entonces $\lim_{k\to\infty}(\sigma(A_{n_k}), y_{n_k}) = (w, \sigma(A)) \in \Gamma$, y por la antisimetría de Γ tenemos que $w = \sigma(A)$ y, por lo tanto, $\{\sigma(A_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\sigma(A)$. Es decir que el único punto de acumulación de la sucesión $\{\sigma(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es $\sigma(A)$, esto es $\sigma(A_n)$ converge a $\sigma(A)$.

Por último, σ satisface la condición de rigidez puesto que $(\sigma(B), b) \in \Gamma$ para toda $b \in B$ y $(\sigma(A), a) \in \Gamma$ para toda $a \in A$. De donde obtenemos que, si $\sigma(B) \in A \subset B$ entonces $\sigma(A) \in B$ y se cumple que $(\sigma(B), \sigma(A)) \in \Gamma$ y, como $\sigma(B) \in A$ también se tiene que $(\sigma(A), \sigma(B)) \in \Gamma$. Por lo tanto, $\sigma(A) = \sigma(B)$. ■

Teorema 4.18 *Sea X un continuo. El espacio $C(X)$ admite una selección rígida si y sólo si X es un dendroide suave.*

Demostración. Si $C(X)$ admite una selección rígida σ, entonces por el Teorema 4.6, X es un dendroide y, por el Teorema 4.17, Γ_σ es cerrado. Como $C(X)$ satisface las condiciones $i)$ y $ii)$ del Teorema 4.17 y se sabe que $C(X)$ es cerrado en 2^X, para probar que X es suave, basta probar que $\Gamma_\sigma = \Gamma(\sigma(X))$.

Sea $p = \sigma(X)$. Demostraremos que $\Gamma(p) \subseteq \Gamma_\sigma$, sea $(x, y) \in \Gamma(p)$. Entonces $x \in py$. Como $\alpha = \{ty : t \in py\}$ es un arco en $C(X)$, σ es continua, $\sigma(py) = p$, por la rigidez, y $\sigma(\{y\}) = y$. Entonces el continuo $\sigma(\alpha) = \{\sigma(ty) : t \in py\}$ contiene al arco py y, por lo tanto, $\sigma(ty) = x$ para alguna $t \in py$ y $(x, y) \in \Gamma_\sigma$. Por otra parte, si $(x, y) \in \Gamma_\sigma$ entonces existe $A \in C(X)$ tal que $y \in A$ y $x = \sigma(A)$. Como X es un dendroide, el arco $xy \subset A$ y, por la rigidez, se tiene que $\sigma(xy) = x$. También los arcos px y py se intersectan en un arco pt, con $t \in xy$, debido a que X es hereditariamente unicoherente. Usando la rigidez de σ, se tiene que $\sigma(xt) = x$ y $\sigma(px) = p$. Si hacemos crecer a xt, hasta llegar a px, la función σ toma valores desde x hasta p y, por continuidad, tenemos que $\sigma(qx) = t$ para alguna $q \in pt$. Nuevamente, por la rigidez de σ y dado que $tx \subset qx$, se deduce que $t = \sigma(qx) = \sigma(tx) = x$ de manera que $x \in py$, es decir, $(x, y) \in \Gamma(p)$. Por lo tanto, $\Gamma_\sigma = \Gamma(p)$ y X es suave.

Recíprocamente, si X es un dendroide suave entonces X admite un orden parcial cerrado $\Gamma(x)$. Se sabe, por [18], que cada miembro de $C(X)$ tiene un elemento mínimo con respecto a $\Gamma(x)$ y la existencia de una selección para $C(X)$ se sigue del Teorema 4.17. ■

Definición 4.19 *Dado un orden parcial* Γ *en un conjunto* X, *definimos* $\Gamma x = \{y \in X : (y, x) \in \Gamma\}$.

Definición 4.20 *Un **espacio dirigido** es un espacio topológico* X *con un orden parcial cerrado* Γ *tal que si* $x_1, x_2, ..., x_n$ *son elementos de* X *entonces* $\Gamma x_1 \cap \Gamma x_2 \cap ... \cap \Gamma x_n \neq \varnothing$. *(Figuras 4.3 y 4.4).*

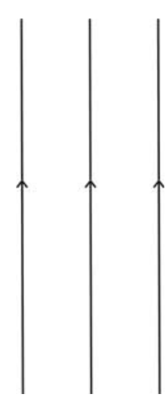

Figura 4.3: Orden parcial que no es espacio dirigido. (Definición 4.20).

Dado cualquier espacio topológico X con un orden parcial Γ, podemos hacerlo un espacio dirigido agregando un punto x_0 y haciendo $x_0 \leq x$ para toda $x \in X$.

Definición 4.21 *Un* ***árbol generalizado*** *es un espacio dirigido compacto X, tal que Γx es un arco para todo $x \in X$ y cada subcontinuo tiene un cero (un elemento mínimo).*

Figura 4.4: Ejemplo de espacio dirigido que no es árbol generalizado, con el siguiente orden parcial: $x \leq y$ si existe una xy-trayectoria dirigida, con el mismo sentido que las flechas ab, ac y bc. Notemos que $\Gamma c = ab \cup ac \cup bc$.

Notemos que $\mathbb{R}$ con el orden parcial $\leq$, es un espacio dirigido, pero no es compacto, por lo tanto, no es un árbol generalizado. El intervalo $[0, 1]$ sí es compacto y es un árbol generalizado.

Definición 4.22 *Dados dos subcontinuos distintos P y Q de un dendroide X, tales que $P \cap Q = \varnothing$, el arco pq tal que $pq \cap P = \{p\}$ y $pq \cap Q = \{q\}$ se llama la* ***conexión irreducible*** *entre P y Q y se denota $L(P, Q)$.*

Proposición 4.23 *Un continuo X es un dendroide suave si y sólo si X es un árbol generalizado.*

Demostración. Supongamos que X es un dendroide suave, queremos probar que X es un árbol generalizado.

Como X es suave, existe $p \in X$ tal que $\Gamma(p) = \{(x, y) : x \in py\}$ es un orden parcial cerrado. Para todo $x \in X$, tenemos que $p \in \Gamma x$. Por lo tanto X es un espacio dirigido.

Notemos que $\Gamma x = \{z \in X : z \in px\}$; esto implica que, $\Gamma x = px$ es un arco.

Sean $A \in C(X)$ y $L(\{p\}, A)$ la conexión irreducible entre p y A, en el caso en que $p \notin A$, y digamos que $L(\{p\}, A) \cap A = \{a_0\}$. Si $p \in A$, hagamos $p = a_0$.

Veremos que a_0 es el cero de A, notemos que a_0 es único por la antisimetría de Γ. Sea $a \in A$ un elemento cualquiera de A. Sabemos que $L(\{p\}, A) = pa_0$, $pa_0 \cap A = a_0$ y $a_0 a \subset A$, de aquí que $pa_0 \cap a_0 a = a_0$, por lo tanto $pa_0 \cup a_0 a$ es un arco. Como en los dendroides los arcos son únicos, tenemos que $pa_0 \cup a_0 a = pa$ lo que quiere decir que $a_0 < a$ para todo $a \in A$, y concluimos que a_0 es el cero de A.

El regreso se sigue de que todo subcontinuo A de X tiene un elemento mínimo $z(A)$ y, por los Teoremas 4.17 y 4.18, X debe de ser un dendroide suave. ■

Hasta ahora todos los ejemplos de dendroides selectibles que hemos dado han sido suaves, pero la suavidad no es una condición necesaria, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.24 *Dendroide selectible que no es suave. (Figura 4.5).*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n el segmento de recta en el plano Euclidiano, que une a $(-1, 0)$ con $(0, 2^{-n})$. Sea T el segmento de recta en el plano, que une a $(-1, 0)$ con $(0, 0)$.

Sean $D_1 = T \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)$ y $D = D_1 \cup D_2$, en donde $D_2 = \{-x \in \mathbb{R}^2 : x \in D_1\}$.

Llamaremos $T' = \{-x \in \mathbb{R}^2 : x \in T\}$.

Ahora vamos a definir una selección $\sigma : C(D) \to D$.

Para cada $K \in C(D_1)$, hacemos $\sigma_1(K)$ el punto de K, cuya primera coordenada sea menor y para cada $L \in C(D_2)$, haremos $\sigma_2(L)$ el punto de L, cuya primera coordenada sea mayor. Para definir σ en todo $C(D)$, sólo falta definirla para cada subcontinuo $A \in C(D)$ tal que $A \cap D_1 \neq \varnothing \neq A \cap D_2$. Para uno de estos subcontinuos, A, onservemos que $A \cap D_1$ es un subcontinuo de D_1 que tiene a $(0, 0)$, de manera que $\sigma_1(A \cap D_1) \in T$. Similarmente, $\sigma_2(A \cap D_2) \in T'$. Así que tiene sentido definir $\sigma(A) = \sigma_1(A \cap D_1) + \sigma_2(A \cap D_2)$. De esta manera σ va a ser una selección y va a cumplir que $\sigma(T) = (-1, 0)$ y $\sigma(T') = (1, 0)$, una condición necesaria por el Lema 4.7. La demostración de que σ es una selección la doy a continuación:

Definimos para D_1 y D_2 los siguientes ordenes parciales cerrados: $\Gamma_1 = \{((x, y), (x', y')) \in D_1 \times D_1 : x \leq x'\}$ y $\Gamma_2 = \{((x, y), (x', y')) \in D_2 \times D_2 : x' \leq x\}$. Notemos que cada subcontinuo de D_i tiene un elemento mínimo

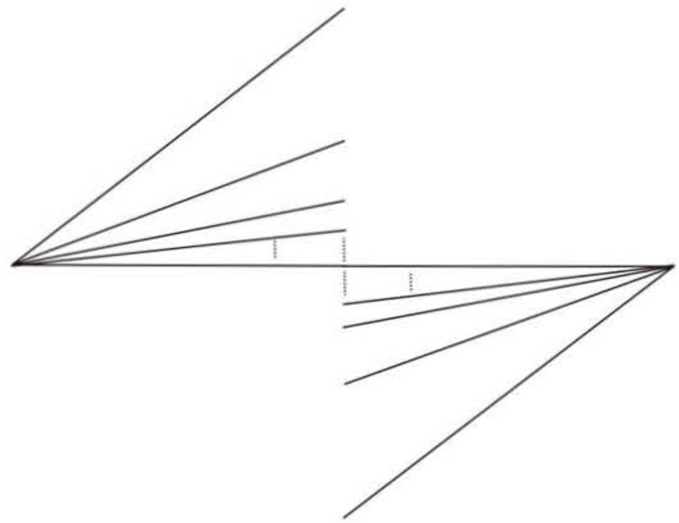

Figura 4.5: Dendroide selectible que no es suave. (Ejemplo 4.24).

con respecto a Γ_i (con $i \in \{1, 2\}$) y más aún, si definimos $\sigma_i : C(D_i) \to D_i$ como $\sigma_i(A) =$ el elemento mínimo de A con respecto a Γ_i, entonces σ_i es una selección, por el Teorema 4.17. Notemos que tales selecciones deben de cumplir que $\sigma_1(T) = (-1, 0)$ y $\sigma_2(T') = (1, 0)$, por el Lema 4.7.

Para cada $A \in C(T \cup T')$ sea $\varphi_1(A)$ la primera coordenada de $\sigma_1(A \cap T)$ si $A \cap T \neq \varnothing$, de otro modo hagamos $\varphi_1(A) = 0$. Similarmente, sea $\varphi_2(A)$ la primera coordenada de $\sigma_2(A \cap T')$ si $A \cap T' \neq \varnothing$, de otro modo hagamos $\varphi_2(A) = 0$.

Ahora definamos $\delta(A) = (\varphi_1(A) + \varphi_2(A), 0)$ para $A \in C(T \cup T')$ y, para $A \in C(D_i)$, sea $\delta = \sigma_i$. Notemos que δ es una función continua y que es una selección en $C(D_1) \cup C(D_2) \cup C(T \cup T')$. Para extenderla a una selección σ de $C(D)$, hagamos $\sigma(A) = \delta(A \cap (T \cup T'))$, si $A \in C(D) \setminus (C(D_1) \cup C(D_2) \cup C(T \cup T'))$.

4.3. Selecciones y conjuntos de doblez

Teorema 4.25 *Sea X un dendroide tal que $C(X)$ admite una selección σ. Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{A'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de subcontinuos de X tales que:*

(i) $A_n \cap A'_n \neq \varnothing$ para cada $n = 1, 2, ...$

(ii) $A' = \lim A'_n \subset A = \lim A_n$

(iii) $B = lím\ (A_n \cap A'_n)$.
Si $\sigma(A_n \cup A'_n) \in A'_n$ para cada $n = 1, 2, ...,$ entonces $\sigma(A) \in B$.

Demostración. Supongamos que $\sigma(A) \in A \backslash B$. Sean U y U' vecindades abiertas de $\sigma(A)$ en X tales que $B \subset X \backslash U'$ y $\overline{U} \subset U'$. Como σ es continua $\sigma^{-1}(U)$ es abierto en $C(X)$ y existe un abierto $V(\delta, A)$, contenido en $\sigma^{-1}(U)$. De modo que se tiene:

(1) Si $K \in V(\delta, A)$, entonces $\sigma(K) \in U$.

Por (ii), tenemos que lím $(A_n \cup A'_n) = A$ y, como A_n también converge a A, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que A_n y $A_n \cup A'_n \in V(\delta, A)$, para toda $n \geq m_1$. Por (iii), tenemos que lím $(A_n \cap A'_n) = B \subset X \backslash \overline{U}$ y se infiere que existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap A'_n \cap \overline{U} = \varnothing$, para toda $n \geq m_2$. De modo que, si tomamos $m = máx\{m_1, m_2\}$ se cumple que:

(2) A_m, $A_m \cup A'_m \in V(\delta, A)$ y que

(3) $A_m \cap A'_m \cap \overline{U} = \varnothing$.

Sea M el conjunto de los subcontinuos de $A_m \cup A'_m$ que contienen a A_m. Sea $S \in M$. Sabemos que $A_m \subset S$, por definición, y como $A_m \in V(\delta, A)$, entonces $A \subset N_d(\delta, A_m) \subset N_d(\delta, S)$. Como $S \subseteq A_m \cup A'_m \in V(\delta, A)$, se tiene que $S \subset A_m \cup A'_m \subset N_d(\delta, A)$, por lo tanto, $S \in V(\delta, A)$ y, de la definición de S y de (1), obtenemos que $\sigma(S) \in U \cap (A_m \cup A'_m)$. Como $\sigma(A_m \cup A'_m) \in A'_m$, por hipótesis, resulta que $\sigma(A_m \cup A'_m) \notin A_m$, por (3). Para probar que $\sigma(M) \subset A'_m \backslash A_m$, supongamos que existe $S_0 \in M$ tal que $\sigma(S_0) \in A_m$. El Teorema 3.18 nos garantiza que existe un arco ordenado, L que une a S_0 con $A_m \cup A'_m$, creciendo a S_0 sin salirse de $A_m \cup A'_m$. Notemos que $L \subset M$. Como σ es continua, L es un arco y S_0 y $(A_m \cup A'_m) \in L$; entonces el arco que va de $\sigma(S_0) \in A_m$ a $\sigma(A_m \cup A'_m) \in A'_m$ está contenido en $\sigma(L)$, y debe pasar por $A_m \cap A'_m$. Es decir, existe $S_1 \in L$ tal que $\sigma(S_1) \in A_m \cap A'_m$, lo cual contradice (3). De esta manera, concluimos que $\sigma(M) \subset A'_m \backslash A_m$. Pero esto contradice que $A_m \in M$ y que $\sigma(A_m) \in A_m$. Por lo tanto $\sigma(A) \in B$. ∎

Definición 4.26 *Llamaremos a B un **conjunto de doblez** de un subcontinuo A de X si existen dos sucesiones $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{A'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subcontinuos de X que satisfacen (i), (ii) y (iii) del Teorema 4.25 con $A' = A$.*

Del Teorema 4.25 obtenemos el siguiente:

Corolario 4.27 *Si X es un dendroide selectible, entonces la intersección de todos los conjuntos de doblez de cada subcontinuo es no vacía.*

Demostración. Sea X un dendroide selectible. Sea B un conjunto de doblez de un subcontinuo A de X. Por lo tanto existen sucesiones $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{A'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos de X tales que:

(i) $A_n \cap A'_n \neq \varnothing$ para cada $n = 1, 2, ...$

(ii) $A' = \text{lím } A'_n = A = \text{lím } A_n$.

(iii) $B = \text{lím } (A_n \cap A'_n)$.

En este caso, como los límites de A_n y A'_n son iguales, podemos reetiquetar las A_n y las A'_n de tal manera que se cumpla que $\sigma(A_n \cup A'_n) \in A'_n$ para cada $n = 1, 2, ...$, y, por el Teorema 4.25 tenemos que $\sigma(A) \in B$. Como B fué arbitrario, concluimos que $\sigma(A)$ pertenece a todo conjunto de doblez del subcontinuo A de X. ■

Definición 4.28 *Se dice que un dendroide X es de **tipo** N (entre los puntos p y q) si existen en X dos sucesiones de arcos $\{p_n p'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{q_n q'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y puntos $p''_n \in q_n q'_n \setminus \{q_n, q'_n\}$ y $q''_n \in p_n p'_n \setminus \{p_n, p'_n\}$, tales que las siguientes condiciones se satifacen:*

(1) $pq = \text{lím } p_n p'_n = \text{lím } q_n q'_n$

(2) $p = \text{lím } p_n = \text{lím } p'_n = \text{lím } p''_n$

(3) $q = \text{lím } q_n = \text{lím } q'_n = \text{lím } q''_n$. *(Figura 4.6).*

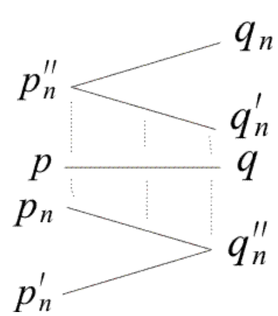

Figura 4.6: Tipo N (entre p y q). (Definición 4.28).

Observación 4.29 *Notemos que si un dendroide X es de tipo N, entonces X contiene un arco no degenerado pq tal que $\{p\}$ y $\{q\}$ son sus conjuntos de doblez. Por el Corolario 4.27, concluímos que X no admite ninguna selección.*

Ejemplo 4.30 *Dendroide no selectible X tal que la intersección de todos los subconjuntos de doblez de cada subcontinuo de X no es vacía.*

Sea (ρ, ψ) un punto en el plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ en coordenadas polares ρ y ψ.

Sean:

$$\begin{aligned} p &= (0,0)\,,\ q=(1,0)\,,\ a=\left(1,\frac{2\pi}{3}\right),\ b=\left(1,\frac{4\pi}{3}\right),\ a_n=\left(1+\frac{1}{n},\frac{2\pi}{3}\right), \\ b_n &= \left(1+\frac{1}{n},\frac{4\pi}{3}\right),\ p_n=\left(\frac{1}{n},\pi\right),\ p'_n=\left(\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}\right) \text{ y } p''_n=\left(\frac{1}{n},\frac{3\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$ y sean:

$$\begin{aligned} A_0 &= pq \cup pa \cup pb, \\ A_n &= qp'_{2n} \cup p'_{2n}a_{2n} \cup a_{2n}p_{2n} \cup p_{2n}b_{2n}, \\ \text{y} \quad B_n &= qp''_{2n+1} \cup p''_{2n+1}b_{2n+1} \cup b_{2n+1}p_{2n+1} \cup p_{2n+1}a_{2n+1}, \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ y donde xy quiere decir el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que une a x con y.

Sea $X = A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$ (Figura 4.7).

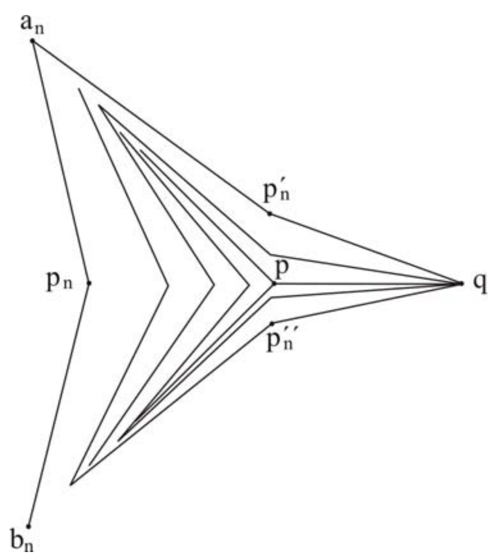

Figura 4.7: Dendroide no selectible X tal que la intersección de todos los subconjuntos de doblez de cada subcontinuo de X no es vacía. (Ejemplo 4.30).

Para probar que X no es selectible, supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que σ es una selección continua para $C(X)$.

Sean $R_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq t\}$, $A_n(t) = A_n \cap R_t$ y $B_n(t) = B_n \cap R_{t.}$

Supongamos que para toda $m \in \mathbb{N}$, existe $n(m) > m$ tal que $\sigma\left(A_{n(m)}(0)\right) \in p'_{2n(m)}a_{2n(m)}$ y que $\sigma\left(B_{n(m)}(0)\right) \in p''_{2n(m)+1}b_{2n(m)+1}$. Por lo tanto, como $A_{n(m)}(0) = \left(p'_{2n(m)}a_{2n(m)}\right) \cup \left(a_{2n(m)}p_{2n(m)} \cup p_{2n(m)}b_{2n(m)}\right)$ y $\left\{A_{n(m)}(0)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $pa \cup pb$, por el Teorema 4.25, se deduce que $\sigma(pa \cup pb) = a$. Análogamente, se deduce que $\sigma(pa \cup pb) = b$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > m$ se cumple que $\sigma(A_n(0)) \in a_{2n}p_{2n} \cup p_{2n}b_{2n}$ o que $\sigma(B_n(0)) \in b_{2n+1}p_{2n+1} \cup p_{2n+1}a_{2n+1}$. De modo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\sigma(A_n(0)) \in a_{2n}p_{2n} \cup p_{2n}b_{2n}$ para una infinidad de números naturales.

Como $\lim A_n = \lim B_n = A_0$ y $A_n \cap B_n = q$, entonces q es un conjunto de doblez de A_0 y tenemos que $\sigma(A_0) = q$, como A_n y B_n convergen a A_0, existe $m' \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > m'$, $|\sigma(A_n) - q| < \frac{1}{3}$ y $|\sigma(B_n) - q| < \frac{1}{3}$ en donde $|\cdot|$ denota la norma Euclidiana en $\mathbb{R}^2$. Como σ es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $H_d(A, B) < \delta$, entonces $|\sigma(A) - \sigma(B)| < \frac{1}{3}$.

Sea m_0 tal que $m_0 > m'$, $m_0 > m$ y $H_d(A_n(t), B_n(t)) < \delta$ para cada $n > m_0$ y $t \in [0,1]$.

Fijemos $n > m_0$, tal que $\sigma(A_n(0)) \in a_{2n}p_{2n} \cup p_{2n}b_{2n}$. Sea t_0 el número máximo tal que $\sigma(A_n(t_0)) = a_{2n}$ o $\sigma(B_n(t_0)) = b_{2n+1}$.

Si $\sigma(A_n(t_0)) = a_{2n}$, entonces $\sigma(B_n(t_0)) \in (b_{2n+1}p_{2n+1} \cup p_{2n+1}a_{2n+1}) \setminus \{b_{2n+1}\}$, pues si no fuera así, tendríamos que $|\sigma(A_n(t_0)) - \sigma(B_n(t_0))| > \frac{1}{3}$.

Como $\sigma(B_n(1)) = \sigma(B_n)$ y $|\sigma(B_n) - q| < \frac{1}{3}$, existe $t'_0 > t_0$ tal que $\sigma(B_n(t'_0)) = b_{2n+1}$, una contradicción, pues habíamos tomado t_0 máximo.

El caso en que $\sigma(B_n(t_0)) = b_{2n+1}$ es similar, por lo tanto, X no es selectible.

Notemos que los únicos subcontinuos A de X que tienen subconjuntos de doblez son de la forma: $A = A_0$, $A \subset ap$, $A \subset pb$ o $A \subset pq$. Para A_0 tenemos que A_n y B_n convergen a A_0 y $A_n \cap B_n = q$, de modo que q es un subconjunto de doblez de A_0 y está contenido en cualquier otro subconjunto de doblez de $A_{0,}$ ya que A_n y B_n son los continuos más pequeños cuya intersección no es vacía, tales que convergen a $A_{0.}$ Para $A \subset ap$, $A \subset pb$ o $A \subset pq$, se utiliza un argumento similar para concluir que, respectivamente, a, b y q pertenecen, en cada caso, a todos los subconjuntos de doblez de A.

Ejemplo 4.31 *Existe un abanico selectible F y una función continua y monótona f definida en F tal que $f(F)$ no es selectible.*

Sean:

$$p = (0,0)\,,\ p_0 = (1,0)\,,\ p_n = \left(1, 2^{1-n}\right) \text{ y } q_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\cdot 2^{1-n}\right).$$

Sea $F = pp_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pp_{2n} \cup p_{2n}q_{2n})$.

Como F es un subabanico del abanico X del Ejemplo 4.56 y $C(X)$ admite una selección, entonces $C(F)$ también admite una selección.

Sean s el punto medio de pp_0 y f la función de F que identifica a los puntos de ps en un solo punto.

Notemos que f es monótona, pero $C(f(F))$ no admite selección, pues $f(F)$ es de tipo N entre los puntos p y p_0. (Figura 4.8).

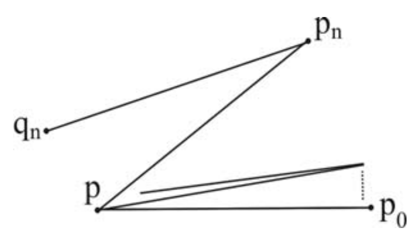

Figura 4.8: Imagen del abanico F bajo una función monotóna f. (Ejemplo 4.31).

Ejemplo 4.32 *Existen un dendroide selectible D y una función continua y abierta g de D tal que $g(D)$ no es selectible.*

Sean (ρ, φ) las cordenadas polares de un punto en el plano Euclidiano. Además, sean:

$$\begin{aligned} p &= (0,0)\,,\ a = (1,0)\,,\ b = \left(1, \frac{\pi}{2}\right),\ c = (1,\pi)\,,\ a_n = \left(1, \frac{1}{n}\right), \\ b_n &= \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right),\ p_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ y } p'_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ y:

$$D_1 = ac \cup pb \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n p_n \cup p_n b_n \cup b_n p'_n \cup p'_n c)\,. \text{ (Figura 4.9).}$$

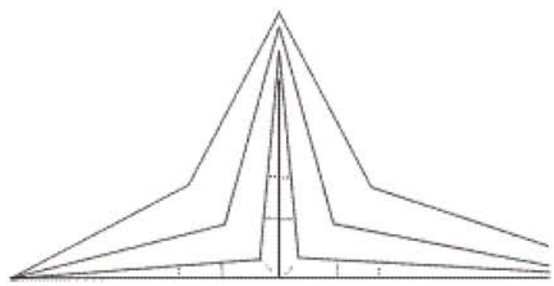

Figura 4.9: Dendroide D_1. (Ejemplo 4.32).

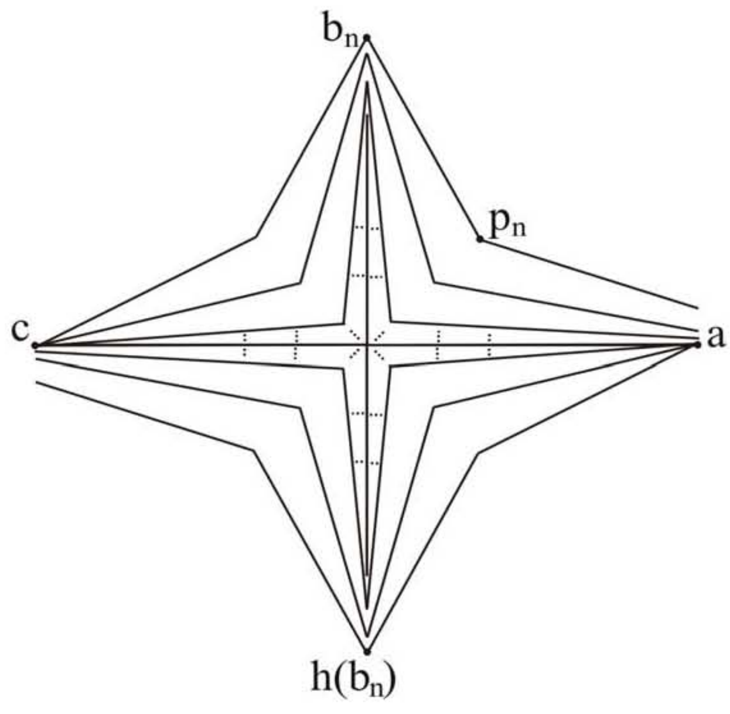

Figura 4.10: Dendroide D. (Ejemplo 4.32).

Denotemos por h la reflexión por el origen y sea

$$D = D_1 \cup h(D_1). \text{ (Figura 4.10).}$$

Tomando la función g que identifica a los puntos x con $h(x)$ para cada $x \in D$, obtenemos una función continua y abierta de D en $g(D)$. Se puede observar que $g(D)$ y $f(F)$ (Figura 4.8) son homeomorfos. Por lo tanto, $g(D)$ no es selectible. Sólo falta probar que el dendroide D sí lo es.

Sean $P = pa \cup pb \cup pc \cup ph(b)$ y K cualquier subcontinuo de P. Vamos a definir una selección σ' para $C(P)$ y después la extenderemos a todo $C(D)$. Notemos que, por el Corolario 4.27, dicha selección, σ', debe de cumplir que: si $c \in K \subset cp \cup pb$ entonces $\sigma'(K) = c$, si c y $b \in K \subset ac \cup pb$ entonces $\sigma'(K) = c$, si $a \in K \subset ap \cup ph(b)$ entonces $\sigma'(K) = a$ y si a y $h(b) \in K \subset ac \cup ph(b)$ entonces $\sigma'(K) = a$.

Si x y y son puntos en P, entonces $s(x,y)$ denota un punto en P tal que $|s(x,y)| = \frac{1}{2}||x| - |y||$, además, $s(x,y) \in px$ si $|x| \geq |y|$ y $s(x,y) \in py$ si $|y| \geq |x|$, donde $|\cdot|$ quiere decir la norma Euclidiana. Podemos pensar en el punto $s(x,y)$ como el punto medio del arco $px \cup py$. Si $z \in \mathbb{R}^2$, entonces $\alpha(K,z)$ es el punto de $pz \cap K$ que tiene mayor norma.

Si $p \in P \setminus K$, entonces K es un arco xy, digamos que $|x| \geq |y|$, definamos $\sigma'(K) = x$.

Si $p \in K$, sea $\sigma'(K) = \alpha(K, 16s(s(s(2c', d'), s(b', a')), s(s(2a', b'), s(d', c'))))$. En donde a', b', c' y d' son los puntos con mayor norma que están en K y en el arco pa, pb, pc y $ph(b)$, respectivamente. Denotaremos por $\frac{x}{n}$ al punto en el arco px, cuya norma es $\frac{1}{n}$, donde x representa a a, b, c o d y n es un entero positivo.

Probaremos que σ' es una selección continua para $C(P)$ tal que:

(i) Si a y $c \in K$ entonces $\sigma'(K) \in ac$.

Supongamos que a y $c \in K$ entonces $a' = a$ y $c' = c$.

Por lo tanto, $s(2c, d') \in \frac{c}{2}c$, $s(b', a) \in p\frac{a}{2}$ y $s(s(2c', d'), s(b', a')) \in \frac{a}{2}c$; además, $s(2a, b') \in \frac{a}{2}a$, $s(d', c) \in p\frac{c}{2}$ y $s(s(2a', b'), s(d', c')) \in \frac{c}{2}a$.

Esto implica que $s(s(s(2c', d'), s(b', a')), s(s(2a', b'), s(d', c'))) \in ac$ y $\sigma'(K) \in ac$.

(ii) Si $c \in K \subset cp \cup pb$ entonces $\sigma'(K) = c$.

Supongamos que $c \in K \subset cp \cup pb$. Es decir, $c' = c$, $d' = p$ y $a' = p$.

Tenemos que $s(2c, p) = c$, $s(b', p) = \frac{b'}{2}$ y $s(s(2c', d'), s(b', a')) \in \frac{c}{4}\frac{c}{2}$; además, $s(p, b') = \frac{b'}{2}$, $s(p, c) = \frac{c}{2}$ y $s(s(2a', b'), s(d', c')) \in p\frac{c}{4}$.

Notemos que cuando $b' = p$, se tienen las siguientes igualdades $s(s(2c', d'), s(b', a')) = \frac{c}{2}$ y $s(s(2a', b'), s(d', c')) = \frac{c}{4}$ y cuando $b' = b$, se tienen estas igualdades: $s(s(2c', d'), s(b', a')) = \frac{c}{4}$ y $s(s(2a', b'), s(d', c)) = p$.

De aquí, se concluye que $s(s(s(2c', d'), s(b', a')), s(s(2a', b'), s(d', c'))) = \frac{c}{8}$ y $\sigma'(K) = c$.

(iii) Si c y $b \in K \subset ac \cup pb$ entonces $\sigma'(K) = c$.

Supongamos que c y $b \in K \subset ac \cup pb$. Esto implica que $c' = c$, $b' = b$ y $d' = p$.

En consecuencia, $s(2c, p) = c$, $s(b, a') \in p\frac{b}{2}$, y $s(s(2c', d'), s(b', a')) \in \frac{c}{4}\frac{c}{2}$; además, $s(2a', b) \in \frac{b}{2}\frac{a}{2}$, $s(p, c) = \frac{c}{2}$ y $s(s(2a', b'), s(d', c')) \in p\frac{c}{4}$.

Observemos que $s(s(2c', d'), s(b', a'))$ va de $\frac{c}{4}$ a $\frac{c}{2}$ cuando a' va de p a a, mientras que $s(s(2a', b'), s(d', c'))$ va de p a $\frac{c}{4}$ cuando a' va de p a $\frac{a}{2}$, y después $s(s(2a', b'), s(d', c'))$ disminuye hasta p, cuando a' va de $\frac{a}{2}$ a a. De aquí, que la menor diferencia entre $s(s(2c', d'), s(b', a'))$ y $s(s(2a', b'), s(d', c'))$ es $\frac{1}{8}$ y se alcanza cuando $a' = \frac{a}{2}$.

Esto implica que $s(s(s(2c', d'), s(b', a')), s(s(2a', b'), s(d', c'))) \in \frac{c}{16}c$, de modo que $\sigma'(K) = c$.

Finalmente, las siguientes dos propiedades se obtienen gracias a que la función σ' es simétrica si cambiamos, simultáneamente, a por c y b por $h(b)$.

(iv) Si $a \in K \subset ap \cup ph(b)$ entonces $\sigma'(K) = a$.

(v) Si a y $h(b) \in K \subset ac \cup ph(b)$ entonces $\sigma'(K) = a$.

Ahora, sea β una función continua de D en P, tal que β es lineal en cada segmento de recta contenido en D y β identifica a los puntos a_n con a, b_n con b, $h(b_n)$ con $h(b)$ y a $p_n, p'_n, h(p_n)$ y $h(p'_n)$ con p.

Definimos una selección σ para $C(D)$, como sigue: Si $K \subset D \setminus P$, el conjunto $\beta^{-1}(\sigma'(\beta(K))) \cap K$ tiene a los más dos puntos, hacemos $\sigma(K)$ igual al primero de esos puntos en el arco que une a P con K, ordenado de P a K; Si $K \cap P \neq \varnothing$, hacemos $\sigma(K) = \sigma'(K \cap P)$. Como las funciones σ' y β son continuas, por la manera en que se definió σ, se tiene que es continua.

4.4. Selectibilidad y Contractibilidad

Definición 4.33 *Una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ es una **homotopía.** Si $X \subset Y$ y $H(x,0) = x$ para cada $x \in X$, entonces se dice que la homotopía H es una **deformación** de X en Y. Más aún, si para cada $x \in X$ el punto $H(x,1)$ es el mismo (i.e., $H(\cdot,1)$ es una función constante), entonces la deformación es una **contracción de** X **en** Y, cuando $X = Y$*

se llama simplemente ***contracción de*** X***.*** *Diremos que un espacio* X *es* ***contraíble,*** *si existe una contracción de* X*.*

Proposición 4.34 *Sea* X *un espacio contraíble. Entonces* X *conexo por arcos.*

Demostración. Como X es contraíble, existe una función $H : X \times [0,1] \to X$ tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = p$ para algún $p \in X$. Si tomamos $H|_{\{x\}\times[0,1]}$ obtenemos una xp-trayectoria. Por lo tanto, p se conecta con todos los puntos de X y X es conexo por arcos. ■

Observación 4.35 *Como consecuencia de la Proposición 4.34 se obtiene que, si un espacio* X *es contraíble entonces se puede contraer a cualquiera de sus puntos, componiendo la contracción* H *de* X*, que lo contrae al punto* p*, con alguna* xp*-trayectoria y recorriendo cada una en la mitad del tiempo.*

Teorema 4.36 *Si* D *es un dendroide suave entonces es contraíble.*

Demostración. Sea D un dendroide suave. Entonces es un conjunto compacto con un orden parcial y, por [3], debe admitir una **Métrica Radialmente Convexa**, esto es una métrica tal que si $x \leq y \leq z$ entonces $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$.

Sean p el elemento mínimo en el orden parcial cerrado en D y $z \in D$ tales que $d(p,z) \geq d(p,x)$ para cualquier $x \in D$. Definamos $f : D \to [0,1]$ como $f(x) = \frac{d(p,x)}{d(p,z)}$ entonces f es continua y suprayectiva. Notemos que la restricción de f a un arco de la forma px es un homeomorfismo sobre su imagen.

Sabemos que el intervalo $[0,1]$ es contraíble por medio de $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definida como $\tilde{H}(s,t) = s - ts$.

Utilizando las funciones f y $\tilde{H}$ vamos a definir una homotopía H. Lo que hace H a D, intuitivamente, es ordenar al dendroide D por alturas (donde la altura de un punto x es $f(x)$) y contraer el arco px jalándolo de $f(x)$ hacia p. Definamos $H : D \times [0,1] \to D$ como $H(x,t) = f^{-1}(f(x) - tf(x)) \cap xp$. Observemos que $H(x,0) = f^{-1}(f(x)) \cap xp = (f|_{xp})^{-1}(f|_{xp}(x)) = \{x\}$ y que $H(x,1) = f^{-1}(0) \cap xp = \{p\}$.

Por lo tanto, H es una contracción y D es contraíble. ■

Observación 4.37 *En* [17, *Teorema 3.14, pág 42*] *se prueba que toda dendrita es un dendroide suave, por el Teorema 4.36, tenemos que toda dendrita es contraíble.*

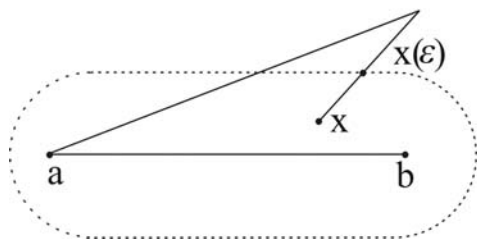

Figura 4.11: Notación 4.41.

Proposición 4.38 *Sea X un espacio que contiene dos subconjuntos A y B tales que*

(1) $A \neq \varnothing$ *y* $B \neq X$;

y

(2) *Para cada deformación* $H : X \times I \to X$, *se tiene que* $H(A \times I) \subset B$.

Entonces X no es contraíble.

Demostración. Supongamos que X es contraíble, por la Observación 4.35, existe una contracción H, con $H(A \times I) \subset B$, que contrae X a un punto $y \in X \setminus B$. Para cada $x \in A$, $H(\{x\} \times I) \subset B$ pero $H(x, 1) = y$, contradiciendo que $y \in X \setminus B$. ■

Definición 4.39 *Se dice que un subconjunto no vacío A de un espacio X está* ***fijo bajo homotopías*** *si para cada deformación $H : X \times I \to X$ se tiene que $H(A \times I) \subset A$.*

Como consecuencia inmediata de la definición anterior y de la Proposición 4.38, obtenemos lo siguiente:

Proposición 4.40 *Si un espacio X contiene un subconjunto propio, fijo bajo homotopías, entonces X no es contraíble.*

Notación 4.41 *Sea X un dendroide. Consideremos un arco arbitrario $ab \subset X$ y un punto $x \in X$. Si para alguna $\varepsilon > 0$ tenemos que $x \in \overline{N(\varepsilon, ab)}$ y la intersección $xa \cap \overline{N(\varepsilon, ab)}$ es disconexa, entonces denotamos por $x(\varepsilon)$ al primer punto del arco xa, ordenado de x a a, que está en $Fr(N(\varepsilon, ab))$, i.e., $x(\varepsilon) \in xa \cap Fr(N(\varepsilon, ab))$ y $xx(\varepsilon) \cap Fr(N(\varepsilon, ab)) = \{x(\varepsilon)\}$. (Figura 4.11).*

Definición 4.42 *Un punto x de un espacio arcoconexo X es un* ***punto extremo en el sentido clásico*** *de X si es un extremo de todo arco que lo contenga.*

Definición 4.43 *Un punto x de un espacio métrico X es un* ***punto extremo de*** *X, si para toda $\varepsilon > 0$ existe un abierto V de X tal que $x \in V$, $\text{diám}\,(V) < \varepsilon$ y la FrV es un único punto.*

Notemos que las Definiciones 4.42 y 4.43, no coinciden en general. Por ejemplo: en el abanico armónico de la Figura 4.1, el punto $(1,0)$ es un punto extremo en el sentido clásico, pero no es un punto extremo.

Observación 4.44 *En los continuos localmente conexos estas definiciones coinciden, veáse*[8, *pág. 277*] .

Definición 4.45 *Un punto r de un dendroide X, es un* ***punto de ramificación*** *si es el punto extremo de tres o más arcos en X, cuyo único punto en común es r.*

Definición 4.46 *Un arco ab contenido en un dendroide X es llamado un* ***R-arco*** *si:*

i) Existen dos sucesiones $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos extremos de X tales que

$$\text{lím}\ u_n = a \ \text{y} \ \text{lím}\ v_n = b;$$

ii) Existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para casi todo entero positivo n, los conjuntos $u_n b \cap \overline{N(\varepsilon, ab)}$ y $v_n a \cap \overline{N(\varepsilon, ab)}$ son disconexos (de modo que los puntos $u_n(\varepsilon)$ y $v_n(\varepsilon)$ están bien definidos) y los conjuntos $u_n u_n(\varepsilon) \setminus \{u_n(\varepsilon)\}$ y $v_n v_n(\varepsilon) \setminus \{v_n(\varepsilon)\}$ no contienen ningún punto de ramificación de X;

iii) $[\text{lím}\ u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím}\ v_n v_n(\varepsilon)] = ab$.

En el caso de un R-arco degenerado (i.e. cuando $a = b$) también es válida la definición.

Teorema 4.47 *Todo R-arco, ab, contenido en un dendroide X, permanece fijo bajo homotopías.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe $H : X \times I \to X$ tal que $H(ab \times I) \setminus ab \neq \varnothing$, es decir, existe $t' \in I$ tal que:

(1) $H(ab \times \{t'\}) \setminus ab \neq \varnothing$.

Sea $\varepsilon > 0$ un número que satisface la condición $ii)$ de la Definición 4.46. Para cada $p \in ab$ definimos t_p =sup$\left\{t \in I : H(\{p\} \times [0,t]) \subset \overline{N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)}\right\}$ y $t_0 = ínf\{t_p : p \in ab\}$.

Por la definición de t_p, sabemos que si $t_p < 1$, entonces $H(p, t_p) \in Fr\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)\right)$.

Supongamos que $t_0 = 0$. Entonces existe una sucesión de puntos $p_n \in ab$ tales que la sucesión de números correspondientes, $\{t_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge a cero. Como ab es compacto, la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $p_0 \in ab$.

Dado que $\left\{t_{p_{n_k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{t_{p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, ésta converge a cero y podemos suponer que $t_{p_{n_k}} < 1$ para una k suficientemente grande, de manera que $H\left(p_{n_k}, t_{p_{n_k}}\right) \in Fr\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)\right)$. Como H es continua y $Fr\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)\right)$ es cerrado, concluimos que $H(p_0, 0) \in Fr\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)\right)$ y sabemos que H es una deformación, por lo tanto, $p_0 = H(p_0, 0) \in Fr\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)\right)$, lo cual contradice que $p_0 \in ab$ y prueba que $t_0 > 0$. De la definición de t_0 se sigue que $H(ab \times [0, t_0]) \subset \overline{N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)}$.

Afirmamos que existe un número $t' \in [0, t_0]$ que satisface la condición (1). Si $t_0 = 1$ entonces la afirmación se sigue de la suposición hecha al principio de esta demostración. Si $t_0 < 1$, entonces existe una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset ab$ tal que $t_0 \leq t_{p_n}$ y $t_0 = \text{lím}\, t_{p_n}$. Sea $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $p_0 \in ab$. Aplicando los mismos argumentos que en el párrafo anterior, obtenemos que $H\left(p_{n_k}, t_{p_{n_k}}\right) \in Fr\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)\right)$, por lo tanto, $H(p_0, t_0) \in Fr\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)\right)$ y $H(p_0, t_0) \notin ab$, entonces podemos tomar $t' = t_0$.

Sean $t' \in [0, t_0]$ un número que satisface (1) y $p_0 \in ab$ tales que $H(p_0, t') \notin ab$. Digamos que $H(p_0, t') = q$ y definimos $t'_0 = ínf\{t' \in [0, t_0] : H(p_0, t') = q\}$, observemos que $H(p_0, t'_0) = q$ por la continuidad de H.

Recordemos que ab es un R-arco y debe satisfacer la condición $iii)$ de la Definición 4.46. Como $p_0 \in ab \subset [\text{lím}\, u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím}\, v_n v_n(\varepsilon)]$, existen dos sucesiones de puntos $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{p'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $p'_n \in u_n u_n(\varepsilon)$, $p''_n \in v_n v_n(\varepsilon)$ y $p_0 = \text{lím}\, p'_n = \text{lím}\, p''_n$.

Sean $q'_n = H(p'_n, t'_0)$, $q''_n = H(p''_n, t'_0)$ y consideremos las siguientes condiciones:

1. $q'_n \in u_n u_n(\varepsilon)$ a partir de una $n \in \mathbb{N}$.

2. $q''_n \in v_n v_n(\varepsilon)$ a partir de una $n \in \mathbb{N}$.

Veremos que no pueden cumplirse ambas.

Si se cumple 1, entonces $q = H(p_0, t_0') = \text{lím } H(p_n', t_0') = \text{lím } q_n' \in \text{lím } u_n u_n(\varepsilon)$.

De la misma manera, si se cumple 2 entonces $q \in \text{lím } v_n v_n(\varepsilon)$. Por lo tanto, si se cumplen ambas concluimos que $q \in [\text{lím } u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím } v_n v_n(\varepsilon)] \subset ab$ lo cual contradice que $q \in X \setminus ab$. De aquí que no se cumplen 1 y 2 al mismo tiempo.

Supongamos que 1 es falsa. Entonces existe una subsucesión $\{q_{n_k}'\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{q_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $q_{n_k}' \notin u_{n_k}u_{n_k}(\varepsilon)$. Como los puntos p_{n_k}' están en los arcos $u_{n_k}u_{n_k}(\varepsilon)$, los q_{n_k}' no están en dichos arcos y, dado que los u_{n_k} son puntos extremos del dendroide X, concluimos, por la propiedad $ii)$ de la Definición 4.46, que $u_{n_k}(\varepsilon) \in H\left(\{p_{n_k}'\} \times [0, t_0']\right)$. Por tanto, existen $t_{n_k} \in [0, t_0']$ tales que $H\left(p_{n_k}', t_{n_k}\right) = u_{n_k}(\varepsilon)$. Por la compacidad de $[0, t_0']$ podemos suponer que la sucesión $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un número $t'' \in [0, t_0']$. Se sigue de la continuidad de H que $\text{lím } H\left(p_{n_k}', t_{n_k}\right) = H(p_0, t'') \in H(ab \times [0, t_0']) \subset H(ab \times [0, t_0]) \subset \overline{N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)}$.

Sin embargo, $\text{lím}_{k\to\infty} H\left(p_{n_k}', t_{n_k}\right) = \text{lím}_{k\to\infty} u_{n_k}(\varepsilon)$ el cual no es elemento de $\overline{N\left(\frac{\varepsilon}{2}, ab\right)}$ pues $u_{n_k}(\varepsilon)$ siempre dista ε de ab. Usando un argumento similar, cuando no se cumple 2, llegamos a una contradicción, con esto concluimos la prueba del teorema. ■

La Proposición 4.40 y el Teorema 4.47, implican lo siguiente:

Corolario 4.48 *Si un dendroide contiene un R-arco, entonces no es contraíble.*

Definición 4.49 *Un dendroide con un único punto de ramificación se llama un* ***abanico****. Si no existe una cantidad no numerable de arcos que sólo coinciden dos a dos en el punto de ramificación, diremos que es un* ***abanico numerable.***

Ahora veremos que todas las condiciones de la definición de R-arco son necesarias para el Corolario 4.48:

Ejemplo 4.50 *Abanico X que muestra que la condición $i)$ de la Definición 4.46 es necesaria para el Corolario 4.48.*

Sea p el origen en el sistema de coordenadas polares en el plano Euclidiano. Dada $n \in \mathbb{N}$, sean:

$$p_0 = (1, 0), \ p_n = \left(1, 2^{1-n}\right) \text{ y } q_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \cdot 2^{1-n}\right).$$

Pongamos

$$X = pp_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pp_n \cup p_n q_n) \,. \text{ (Figura 4.12).}$$

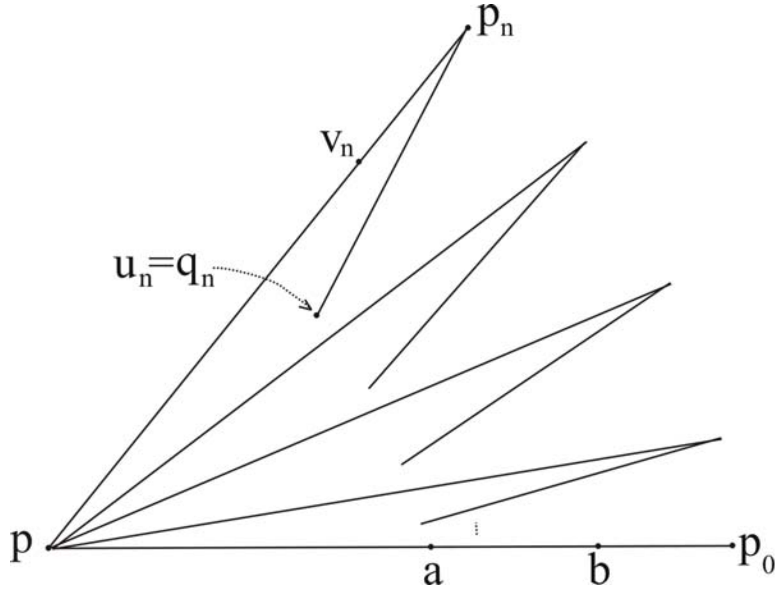

Figura 4.12: Abanico numerable X. (Ejemplo 4.50).

Definamos $H : X \times I \to X$ como sigue: $H(p,t) = p$ para cada $t \in I$. Si $x \neq p$, entonces $H(x,t)$ está en la misma componente de $X \setminus \{p\}$ que el punto x para cada $t \in I$. Ahora, si $\varrho_1(t)$ y ϱ son los radios (la primera coordenada polar) de los puntos $H(x,t)$ y x, respectivamente, definimos:

$$\varrho_1(t) = \begin{cases} (1+2t)\,\varrho & \text{si} \quad \varrho < \frac{1}{2} \quad \text{y } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ (1-2t)\,\varrho + 2t & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le \varrho \le 1 \quad \text{y } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 4(1-t)\,\varrho & \text{si} \quad \varrho < \frac{1}{2} \quad \text{y } \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 2(1-t) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le \varrho \le 1 \quad \text{y } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Llamemos $q'_n = \left(\frac{1}{2}, 2^{1-n}\right)$. Lo que hace esta homotopía de $t = 0$ a $t = \frac{1}{2}$, es llevar a los puntos q_n y q'_n hasta los puntos p_n, contrayendo los arcos $q_n p_n$ y $q'_n p_n$ al punto p_n, y creciendo los arcos pq'_n hasta convertirlos en los arcos pp_n. De $t = \frac{1}{2}$ a $t = 1$ contrae los arcos pp_n al punto p. (Figura 4.13).

Haciendo $u_n = q_n$, $v_n = \left(\frac{3}{4}, 2^{1-n}\right)$, $a = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $b = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ y $\varepsilon = \frac{1}{8}$, como en la Figura 4.12, vemos que todas las condiciones de la Definición 4.46 se

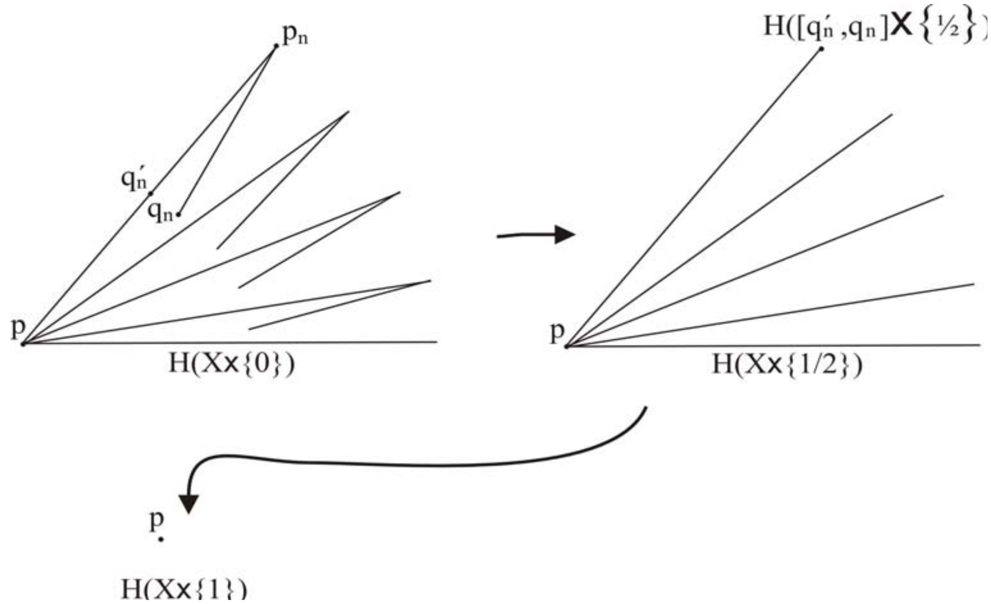

Figura 4.13: Contracción del abanico numerable X.

satisfacen excepto que los puntos v_n, en este caso, no son puntos terminales de X. Por lo tanto, la condición $i)$ de la Definición 4.46 es necesaria para el Corolario 4.48.

Ejemplo 4.51 *Abanico R que muestra que la primera parte de la condición $ii)$ de la Definición 4.46 es necesaria para el Corolario 4.48.*

Con la misma notación que en el Ejemplo 4.50 y $r_n = (2^{1-n}, 2^{1-n})$, sea:

$$R = pp_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pp_{2n} \cup p_{2n}q_{2n}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} pr_{2n-1}. \text{ (Figura 4.14).}$$

Observamos que R es un subabanico del abanico X del Ejemplo 4.50, que se puede describir como la unión de un abanico homeomorfo a X y el abanico localmente conexo $\bigcup_{n=1}^{\infty} pr_{2n-1}$, cuyo único punto en común es el vértice p. Por lo tanto, R es contraíble.

Haciendo, $u_n = q_{2n}$, $v_n = r_{2n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $b = p$, como en la Figura 4.14, observamos que la condición $i)$ de la Definición 4.46

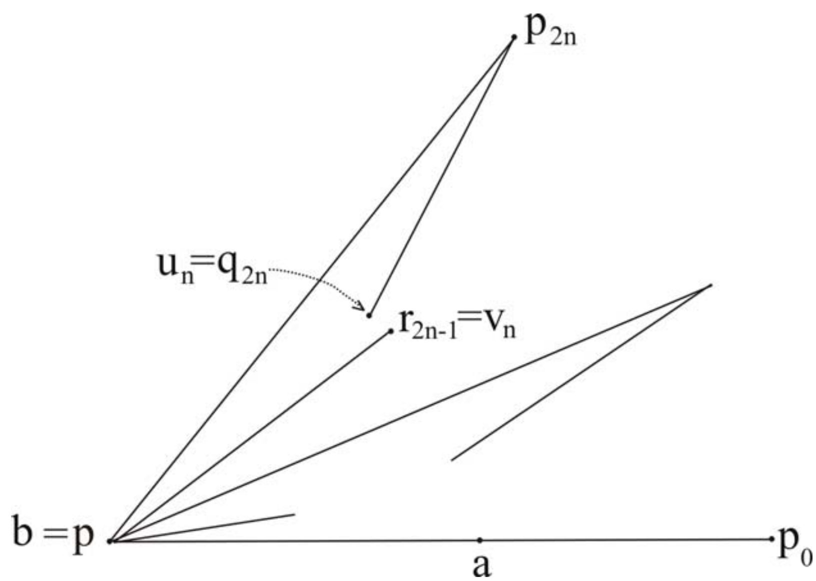

Figura 4.14: Abanico numerable R. (Ejemplo 4.51).

se cumple y que para cada $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, los conjuntos $u_n b \cap \overline{N(\varepsilon, ab)}$ son disconexos para casi toda n, pero los conjuntos $v_n a \cap \overline{N(\varepsilon, ab)}$ son conexos de modo que no se pueden definir bien los puntos $v_n(\varepsilon)$. Por lo tanto, la primera parte de la condición $ii)$ de la Definición 4.46 es necesaria para el Corolario 4.48.

Ejemplo 4.52 *Abanico M que muestra que la segunda parte de la condición $ii)$ de la Definición 4.46 es necesaria para el Corolario 4.48.*

Sea X el abanico descrito en el Ejemplo 4.50, sean $x_n = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \cdot 2^{2-n}\right)$ y $y_n = \left(\frac{3}{4}, 2^{1-n}\right)$ para $n = 1, 2, ...$ y definamos:

$$M = X \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n y_n. \text{ (Figura 4.15).}$$

Es fácil ver que M es un dendroide contraíble. Tomando $u_n = q_n$, $v_n = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $b = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ y $\varepsilon = \frac{1}{8}$, observamos que todas las condiciones de la Definición 4.46 se satisfacen excepto que los conjuntos $v_n v_n(\varepsilon) \setminus \{v_n(\varepsilon)\}$ contienen a los puntos de ramificación y_n de M.

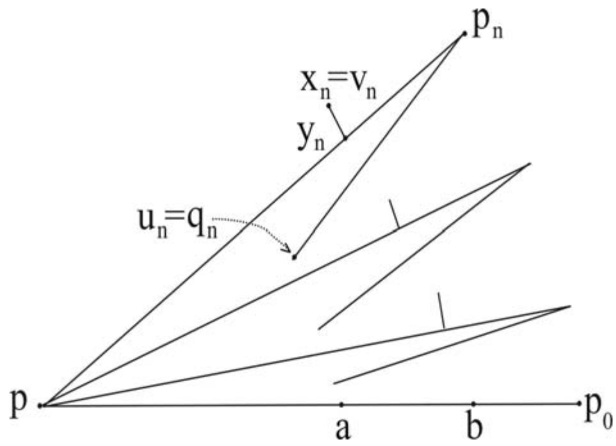

Figura 4.15: Abanico numerable M. (Ejemplo 4.52).

Ejemplo 4.53 *Abanico numerable S que muestra que la inclusión $ab \subset [\text{lím } u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím } v_n v_n(\varepsilon)]$ de la condición iii) en la Definición 4.46, es necesaria para el Corolario 4.48.*

Con la misma notación que en el Ejemplo 4.50 y $s_n = \left(\frac{1}{4}, 2^{1-n}\right)$, sea

$$S = pp_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pp_{2n} \cup p_{2n}q_{2n}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ps_{2n-1}. \text{ (Figura 4.16).}$$

Observamos que S es un subabanico del abanico X que se puede describir como la unión de un abanico homeomorfo a X y un abanico $\bigcup_{n=1}^{\infty} ps_{2n-1}$ homeomorfo al abanico armónico (4.7), que tienen en común al vértice p y el segmento límite del segundo está contenido en el segmento límite del primero.

Haciendo, $u_n = q_{2n}$, $v_n = s_{2n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $b = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ y $\varepsilon = \frac{1}{8}$, como en la Figura 4.16, observamos que las condiciones $i)$ y $ii)$ de la Definición 4.46 se satisfacen. Más aún, notemos que lím $u_n u_n(\varepsilon)$ es el segmento que une al punto a con el punto $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$ y, similarmente, lím $v_n v_n(\varepsilon)$ es el segmento de recta que une al punto $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ con el punto b. Por lo tanto, $\varnothing = [\text{lím } u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím } v_n v_n(\varepsilon)] \subset ab$ y la otra inclusión no se cumple. Por lo tanto, la inclusión $ab \subset [\text{lím } u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím } v_n v_n(\varepsilon)]$ es necesaria para el Corolario 4.48.

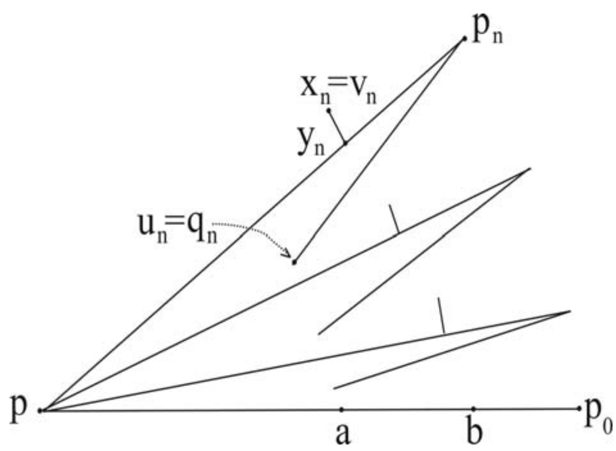

Figura 4.15: Abanico numerable M. (Ejemplo 4.52).

Ejemplo 4.53 *Abanico numerable S que muestra que la inclusión $ab \subset [\text{lím } u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím } v_n v_n(\varepsilon)]$ de la condición iii) en la Definición 4.46, es necesaria para el Corolario 4.48.*

Con la misma notación que en el Ejemplo 4.50 y $s_n = \left(\frac{1}{4}, 2^{1-n}\right)$, sea

$$S = pp_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pp_{2n} \cup p_{2n}q_{2n}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ps_{2n-1}. \text{ (Figura 4.16).}$$

Observamos que S es un subabanico del abanico X que se puede describir como la unión de un abanico homeomorfo a X y un abanico $\bigcup_{n=1}^{\infty} ps_{2n-1}$ homeomorfo al abanico armónico (4.7), que tienen en común al vértice p y el segmento límite del segundo está contenido en el segmento límite del primero.

Haciendo, $u_n = q_{2n}$, $v_n = s_{2n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $b = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ y $\varepsilon = \frac{1}{8}$, como en la Figura 4.16, observamos que las condiciones $i)$ y $ii)$ de la Definición 4.46 se satisfacen. Más aún, notemos que lím $u_n u_n(\varepsilon)$ es el segmento que une al punto a con el punto $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$ y, similarmente, lím $v_n v_n(\varepsilon)$ es el segmento de recta que une al punto $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ con el punto b. Por lo tanto, $\varnothing = [\text{lím } u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím } v_n v_n(\varepsilon)] \subset ab$ y la otra inclusión no se cumple. Por lo tanto, la inclusión $ab \subset [\text{lím } u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím } v_n v_n(\varepsilon)]$ es necesaria para el Corolario 4.48.

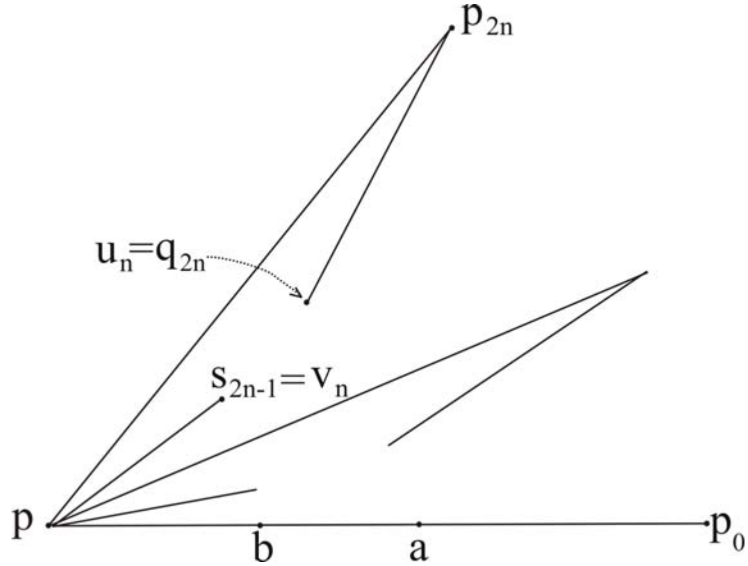

Figura 4.16: Abanico numerable S. (Ejemplo 4.53).

Ejemplo 4.54 *Abanico numerable W que muestra que la inclusión* $[\text{lím}\ u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím}\ v_n v_n(\varepsilon)] \subset ab$ *de la condición iii) en la Definición 4.46, es necesaria para el Corolario 4.48.*

Con la misma notación que en el Ejemplo 4.50 y w_n el punto medio del segmento $p_n q_n$, definimos:

$$W = pp_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pp_{2n} \cup p_{2n}q_{2n}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pp_{2n-1} \cup p_{2n-1}w_{2n-1}). \text{ (Figura 4.17).}$$

Notemos que W es un subabanico del abanico X, que se puede describir como la unión de dos abanicos, ambos homeomorfos a X, que tienen en común al vértice p y al segmento límite pp_0. Es fácil verificar que $H\ |_{W\times I}: W\times I \to W$ (donde H es la homotopía definida en el Ejemplo 4.50) es una contracción de W en su vértice p. Tomando $u_n = q_{2n}$, $v_n = w_{2n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $b = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ y $\varepsilon = \frac{1}{8}$, observamos que las condiciones $i)$ y $ii)$ de la Definición 4.46 se satisfacen. Más aún, notemos que lím $u_n u_n(\varepsilon)$ y lím $v_n v_n(\varepsilon)$ ambos son el segmento que une al punto p_0 con el punto $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$. De donde, el arco ab es un subconjunto propio de la intersección de estos límites:

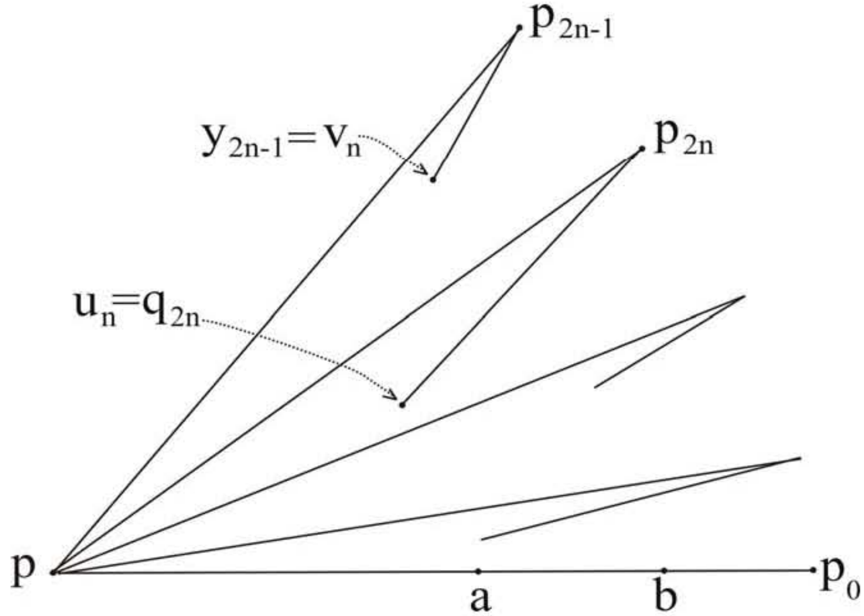

Figura 4.17: Abanico numerable W. (Ejemplo 4.54).

la inclusión $ab \subset [\text{lím}\ u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím}\ v_n v_n(\varepsilon)]$ se cumple pero la opuesta no. Por lo tanto, dicha inclusión es necesaria para el Corolario 4.48.

Los Ejemplos 4.53 y 4.54 muestran que ambas inclusiones de la igualdad *iii*) de la Definición 4.46 son esenciales.

Ejemplo 4.55 *Existen dendroides X y Y tales que:*

1. *X es un abanico numerable,*
2. *X es contraíble,*
3. *Y está contenido en X,*
4. *Y no es contraíble.*
5. *Y es contraíble en X.*

Tomemos el abanico X descrito en el Ejemplo 4.50 y notemos que 1 se sigue de la construcción y 2 se prueba en ese ejemplo. Para definir a Y

hagamos -utilizando las mismas notaciones- $y_n = \left(\frac{3}{4}, 2^{1-n}\right)$ *y sea:*

$$Y = pp_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pp_{2n} \cup p_{2n}q_{2n}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} py_{2n-1}. \text{ (Figura 4.18).}$$

Notemos que se cumple 3, es decir, Y es un subabanico de X.

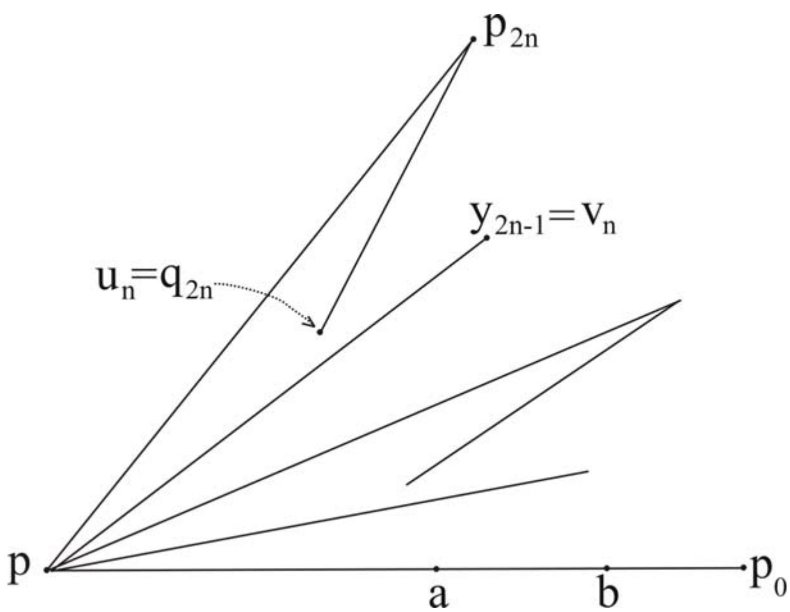

Figura 4.18: Abanico numerable Y. (Proposición 4.55).

Tomando $u_n = q_{2n}$, $v_n = y_{2n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $b = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ y $\varepsilon = \frac{1}{8}$, como en la Figura 4.18, observamos que se satisfacen todas las condiciones de la Definición 4.46. Por lo tanto, ab es un R-arco en Y, de manera que 4 se sigue del Corolario 4.48. Finalmente, 2 y 3 implican 5.

De hecho, originalmente se creyó que la contractibilidad de dendroides era hereditaria, pero la Proposición 4.55 nos muestra lo contrario. De manera que surge la pregunta de cómo caracterizar a los dendroides hereditariamente contraíbles.

Se podría conjeturar, por los ejemplos del artículo [13, pág. 371.] que ser selectible estaba relacionado de alguna manera con ser contraíble, pero los siguientes dos ejemplos prueban que no hay relación entre estos dos conceptos.

Ejemplo 4.56 *Existe un abanico plano numerable X que es selectible y no es contraíble.*

Sea p el origen en el sistema de coordenadas polares en el plano Euclidiano. Sean:

$$p_0 = (1,0) \quad p_n = \left(1, 2^{1-n}\right) \quad q_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \cdot 2^{1-n}\right) \quad r_n = \left(\frac{1}{2}, 2^{1-n}\right)$$

para $n = 1, 2, ...$ y:

$$X = pp_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pp_{2n} \cup p_{2n}q_{2n}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} pr_{2n-1}, \text{ (Fig. 4.19).}$$

Donde ab quiere decir el segmento que une a a con b.

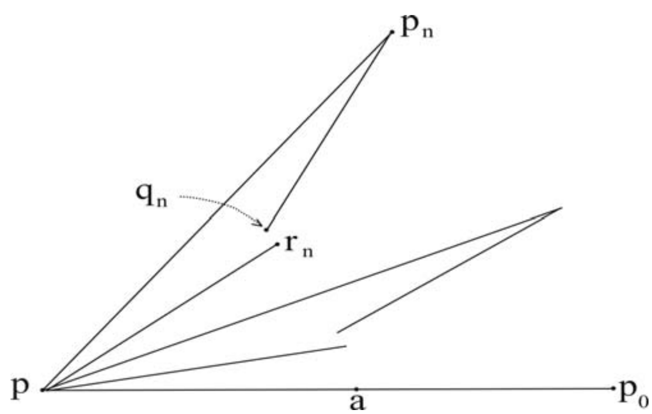

Figura 4.19: Abanico plano numerable X. (Ejemplo 4.56).

Observemos que X es un abanico plano numerable con vértice p y puntos extremos p_0, q_{2n}, r_{2n-1} para $n = 1, 2, ...$

Observemos que si un punto (ρ, φ) pertenece a X, entonces $\rho \in [0,1]$. Dado un subcontinuo Y de X, sean $x = mín\{\rho \in [0,1] : (\rho, \varphi) \in Y\}$ y $y = máx\{\rho \in [0,1] : (\rho, \varphi) \in Y\}$. Denotemos por z a la primera coordenada de $\sigma(Y)$, en donde $\sigma : C(X) \to X$ es la selección que estamos por definir. Para determinar a un punto $\sigma(Y)$, primero definimos z como una función de dos variables x y y. Como $\sigma(Y) \in Y$, tenemos que:

(1) $0 \leq x \leq z \leq y \leq 1$,
y, por lo tanto, si $x = y$, es decir Y consta de un sólo punto a, entonces $x = z = y$ y $\sigma(Y) = a$.

(2) Si $x = 0$, hacemos $z = 0$, es decir, si $p \in Y$ entonces $\sigma(Y) = p$. Si $x > 0$, entonces $p \notin Y$ y Y debe de ser un arco.

(3) Si $\frac{1}{2} \leq x \leq y = 1$, haremos $z = 1$. En este caso hay dos posibilidades para el subcontinuo Y, o es un segmento de recta contenido en sp_0 con $p_0 \in Y$, donde s es el punto medio de pp_0 y entonces $\sigma(Y) = p_0$, o Y está contenido en el arco $pp_{2n} \cup p_{2n}q_{2n}$ con $p_{2n} \in Y$, para algún natural n, y $\sigma(Y) = p_{2n}$.

En el resto de los casos Y es un segmento de recta, excepto en el caso en que para alguna $n \in \mathbb{N}$, $Y \cap (pp_{2n} \setminus \{p_{2n}\}) \neq \varnothing \neq Y \cap (p_{2n}q_{2n} \setminus \{p_{2n}\})$.

Este es el único caso en el que podemos tener dos puntos distintos de Y con el mismo radio z, de los cuales escogeremos a $\sigma(Y) \in pp_{2n}$. De esta manera $\sigma(Y)$ estará bien definida con sólo dar su coordenada z, y basta que z sea continua como función de x y y para que σ sea continua.

Por lo tanto, para finalizar la prueba debemos definir una función z que dependa de x y y y que cumpla las condiciones (1), (2) y (3). Podemos pensar a x, y y z como las coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$ de la gráfica G de la función z que queremos definir.

De manera que σ es una selección para X. Finalmente, notemos que el punto a es un R-arco degenerado y, por el Corolario 4.48, X no es contraible.

Ejemplo 4.57 *Dendroide contraíble y no selectible.*

Por (x, y, z) vamos a denotar a un punto en $\mathbb{R}^3$ con coordenadas rectangulares.

Sean:

$$\begin{aligned}
a_0^+(t) &= (t, 0, 0)\,,\ b_0^+(t) = (0, 2t-1, 0)\,,\ a_n^+(t) = \left(t, 0, \frac{1-t}{2n}\right),\\
a_n^-(t) &= \left(t, 0, -\frac{1-t}{2n}\right),\ b_n^+(t) = \left(0, 2t-1, \frac{1}{2n}\right),\\
b_n^-(t) &= \left(0, 2t-1, -\frac{1}{2n}\right),\ c_n^+(t) = \left(0, 2t-1, \frac{1-t}{2n+1} + \frac{t}{2n}\right)\\
\text{y } c_n^-(t) &= \left(0, 2t-1, \frac{t-1}{2n} - \frac{t}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$ y $n = 1, 2, ...$

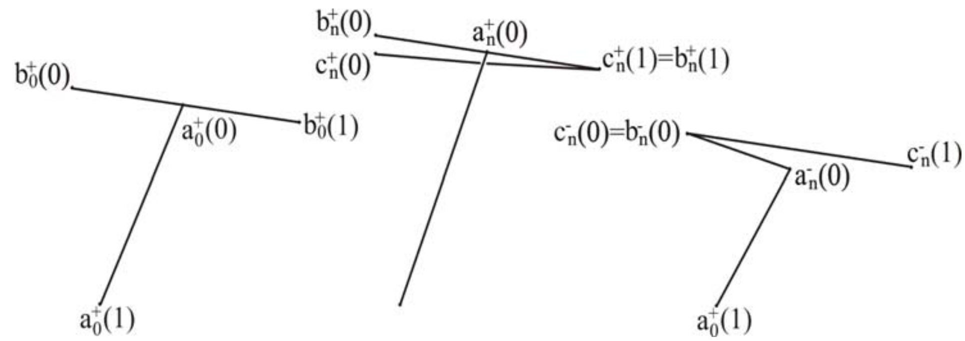

Figura 4.20: Los conjuntos A_0, $A_n^+(1)$ y $A_n^-(1)$. (Ejemplo 4.57).

Sean $A_0 = a_0^+([0,1]) \cup b_0^+([0,1])$, $A_n^+(1) = a_n^+([0,1]) \cup b_n^+([0,1]) \cup c_n^+([0,1])$ y $A_n^-(1) = a_n^-([0,1]) \cup b_n^-\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) \cup c_n^-([0,1])$, (Figura 4.20).

Definamos

$$D = A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n^+(1) \cup A_n^-(1)\right). \text{ (Figura 4.21).}$$

Para demostrar que es contraíble observemos que si hacemos:

$$D_1 = A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a_n^+([0,1]) \cup b_n^+([0,1]) \cup A_n^-(1)\right). \text{ (Figura 4.22).}$$

Entonces D_1 es un subdendroide contraíble de D. Por lo tanto, nos basta con encontrar una homotopía entre D y D_1.

Lo que va a hacer esta homotopía, H, es empujar el punto $a_1^-(0)$ hasta llegar a $c_1^-(1)$ contrayendo los puntos adelante de $a_1^-(0)$ en $c_1^-(1)$ y estirando los que están atrás.(Figura 4.23).

Considere las siguientes homotopías en $[0,1]$:

$G_0(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ s(t-1)+t & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

$G_1(t,s) = s(1-t)+t.$

La homotopía que buscamos es la siguiente:

$H(\beta(t),s) = \begin{cases} \beta(G_0(s,2t)), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \text{ y } \beta = b_0, b_n^+, b_n^-, c_n^+, c_n^- \\ \beta(G_1(G_0(t,1),2s-1)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \text{ y } \beta = b_0, b_n^+, c_n^+, c_n^- \\ c_n^-(G_1(G_0(t,1),2s-1)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \text{ y } \beta = b_n^- \end{cases}$

Para probar que no es selectible notemos que el dendroide X del Ejemplo 4.30, es un subdendroide de D que no es selectible.

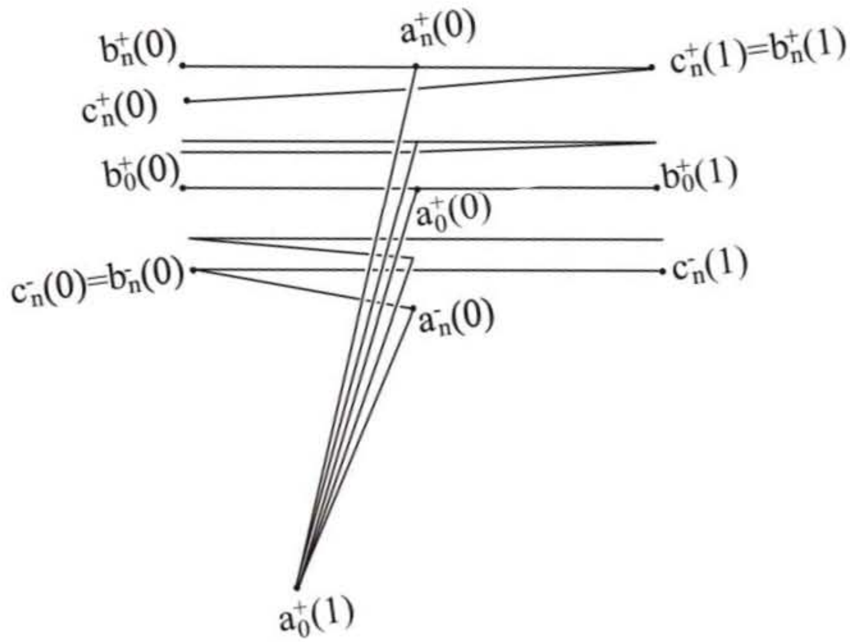

Figura 4.21: Dendroide contraíble y no selectible D. (Ejemplo 4.57).

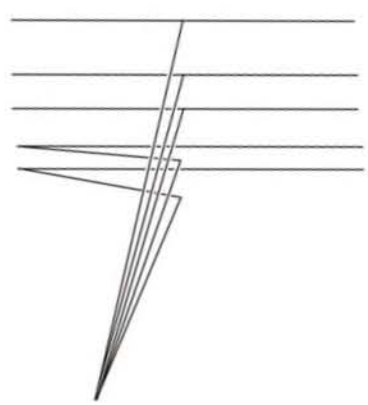

Figura 4.22: Subdendroide D_1 de D. (Ejemplo 4.57).

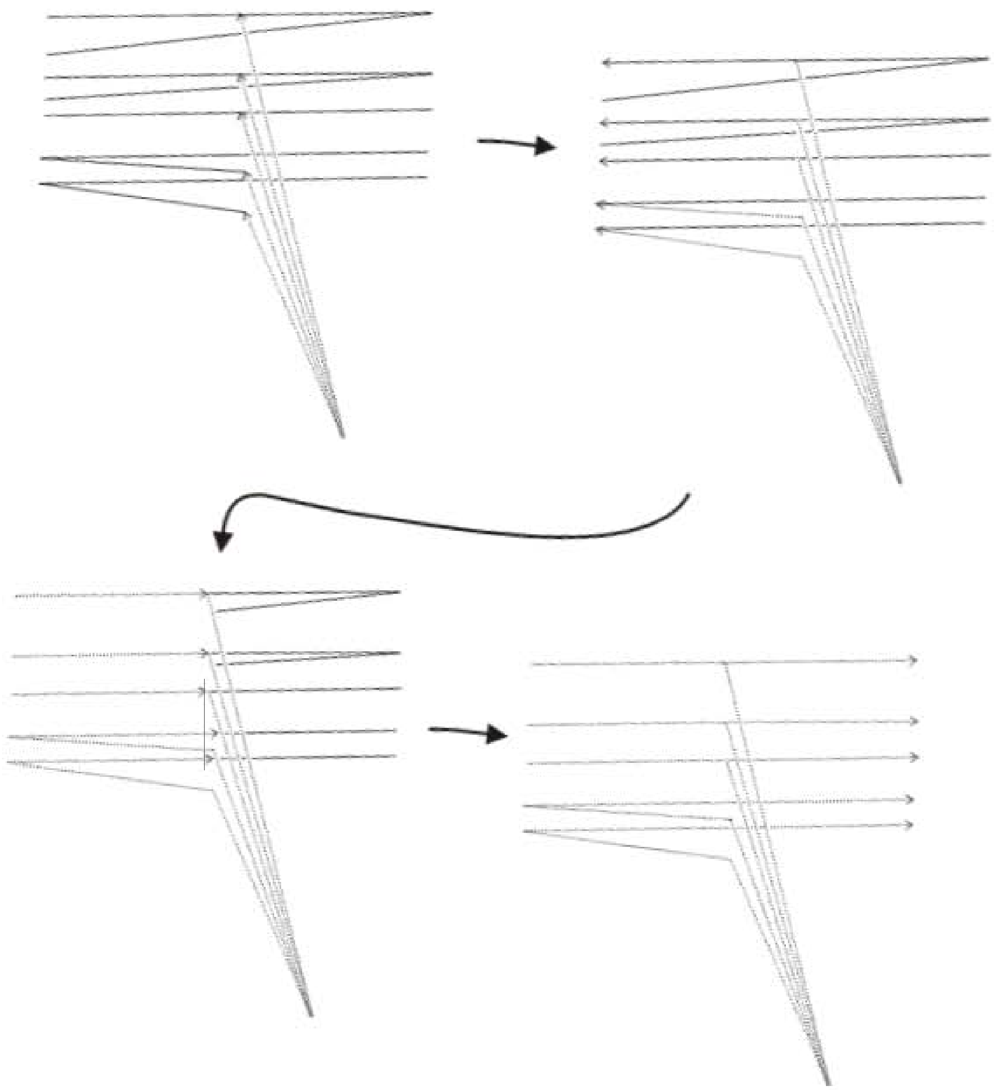

Figura 4.23: Homotopía del dendroide D al dendroide $D_{1.}$ (Ejemplo 4.57).

Notemos que la selectibilidad es una propiedad hereditaria mientras que la contractibilidad no. Por lo tanto, es natural preguntarse si habrá alguna relación entre ser selectible y ser hereditariamente contraíble.

El Teorema 4.60, véase [4, pág. 236.], responde esta pregunta para los abanicos suaves.

Proposición 4.58 *Si un dendroide es suave entonces es hereditariamente contraíble.*

Demostración. Ya vimos que todos los dendroides suaves son contraíbles (Teorema 4.36) y, como la suavidad es una propiedad hereditaria en dendroides (Proposición 4.15), concluimos que los dendroides suaves son hereditariamente contraíbles. ■

Lema 4.59 *Si un dendroide contraíble contiene un punto p y una sucesión convergente $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que la sucesión de los arcos $\{pa_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces el continuo $\lim pa_n$ es hereditariamente localmente conexo.*

Demostración. Sean X un dendroide que satisface las hipótesis del lema y $H : X \times I \to X$ una contracción de X. Por la Observación 4.35 podemos suponer que $H(X \times \{1\}) = \{p\}$. Sea $a = \lim a_n$. Afirmamos que el punto a debe de pasar por todos los puntos del continuo $\lim pa_n$ durante la contracción. En otras palabras:

$(*)$ Para cada punto $x \in \lim pa_n$, existe un número $t \in I$ tal que $H(a,t) = x$.

Como $x \in \lim pa_n$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, para cada n se tiene que $x_n \in pa_n$. Como $a_n = H(a_n, 0)$ y $p = H(a_n, 1)$, tenemos que existe un número $t_n \in I$ tal que $H(a_n, t_n) = x_n$. Haciendo tender a n al infinito y, tomando subsucesiones convergentes si es necesario, obtenemos el límite t de $\{t_n\}$ que cumple que $H(a,t) = x$. Probamos así la afirmación $(*)$. De aquí, se sigue que el $\lim pa_n \subset H(\{a\} \times I)$. Como H es una función continua y está definida en un compacto y métrico, es una función cerrada y como $\{a\} \times I$ es localmente conexo, del Teorema 1.27 obtenemos que $H(\{a\} \times I)$ es un subcontinuo localmente conexo del dendroide X, por lo tanto es una dendrita y todas las dendritas son hereditariamente localmente conexas, véase [14, Corolario 10.5], de dónde el continuo $\lim pa_n$ es también hereditariamente localmente conexo. ■

Teorema 4.60 *Si un abanico es hereditariamente contraíble, entonces es suave.*

Demostración. Supongamos que un abanico X con vértice p no es suave. Entonces existe una sucesión convergente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en X tal que, llamando $x = \text{lím}\, x_n$, tenemos que la sucesión $\{px_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X)$, no converge a $px \in C(X)$. Como $C(X)$ es compacto, tomando subsucesiones convergentes, si es necesario, podemos suponer que la sucesión $\{px_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, y sabemos que lím px_n es un subcontinuo K de X que tiene a los puntos p y x. Si existiera $z \in px \setminus K$, esto implicaría que $pa \cap K$ fuera disconexa, pues $px \cap K \subset px \setminus z$ y, p y $x \in px \cap K$. Por lo tanto, existe $w \in K \setminus px$. Si el continuo K no es localmente conexo, entonces X no es contraíble por el Lema 4.59. Así que, podemos suponer que K es localmente conexo. Por otra parte, como K es un subcontinuo del abanico X, que contiene al vértice p, K también es un abanico cuyo vértice es p y, como $K \setminus px \neq \varnothing$, existe un punto extremo en el sentido clásico, y de K, que no está en el arco px. Denotemos por $B_\delta(y)$ al conjunto $\{x \in X : d(x, y) < \delta\}$, donde d es la métrica en X. Por la conexidad local de K, existe un número real positivo δ, tal que el abierto $B_\delta(y)$, no contiene a p y sólo intersecta al arco py, es decir, que $B_\delta(y) \cap px = \varnothing$ y $B_\delta(y) \cap ((K \setminus py) \cup \{p\}) = \varnothing$.

Además, por la Observación 4.44, y es también un punto extremo según la Definición 4.43, por lo tanto, existe un abierto G de X, tal que $y \in G$, $diám(G) < \frac{1}{2}\delta$ y $py \cap (\overline{G} \setminus G)$ es un sólo punto. Denotemos por a al único punto de $py \cap (\overline{G} \setminus G)$. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, p_n y q_n como el primer y el último puntos del arco px_n, ordenado de p a x_n, que están en la frontera, $\overline{G} \setminus G$, de G. Tomando subsucesiones convergentes si es necesario, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las sucesiones $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes y, por construcción, tenemos que lím $p_n = a =$ lím q_n y $y \in$ lím $p_n q_n$. Haciendo $u_n = p_{2n}$, $v_n = q_{2n-1}$ y $Y' = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (pu_n \cup pv_n)}$. Observamos que Y' es un subabanico de X que tiene a u_n y a v_n como puntos extremos y que las sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen al punto a. Por tanto, Y' satisface la condición $i)$ de la Definición 4.46 con $a = b$ (es el caso de un R-arco degenerado).

Vamos a mostrar que también satisface las condiciones $ii)$ y $iii)$ de la Definición 4.46. Sea $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} mín(\delta, d(y, a))$. Como $p \in u_n a \setminus N(\varepsilon, a)$ para casi toda n, los conjuntos $u_n a \cap N(\varepsilon, a)$ son disconexos. De donde $u_n(\varepsilon)$ está bien definido y, tomando subsucesiones convergentes si es necesario, vemos que lím $u_n u_n(\varepsilon) \subset ap$, por construcción. Similarmente, como $y \in$ lím $p_n q_n \setminus N(\varepsilon, a) \subset$ lím $v_n a \setminus N(\varepsilon, a)$, tenemos que los conjuntos $v_n a \cap N(\varepsilon, a)$ son disconexos, así que $v_n(\varepsilon)$ está bien definido y, por construcción, tenemos que lím $v_n v_n(\varepsilon) \subset ay$. De modo que $[\text{lím } u_n u_n(\varepsilon)] \cap [\text{lím } v_n v_n(\varepsilon)] = \{a\}$. Observemos, además, que los conjuntos $u_n u_n(\varepsilon)$ y $v_n v_n(\varepsilon)$ están contenidos en $N(\varepsilon, a)$ y, por lo tanto, no contienen ningún punto de ramificación de Y'. Concluimos que las condiciones *ii*) y *iii*) de la Definición 4.46 se satisfacen para el R-arco degenerado $\{a\}$ y, entonces, Y' no es contraíble por el Corolario 4.48. Con esto termina la demostración. ■

De los Teoremas 4.60 y 4.58 obtenemos que:

Corolario 4.61 *Un abanico es hereditariamente contraíble si y sólo si es suave.*

Observemos que la condición de que el dendroide sea un abanico es esencial en el Teorema 4.60.

El siguiente es un dendroide con dos puntos de ramificación que no es suave pero es hereditariamente contraíble. (Figura 4.24).

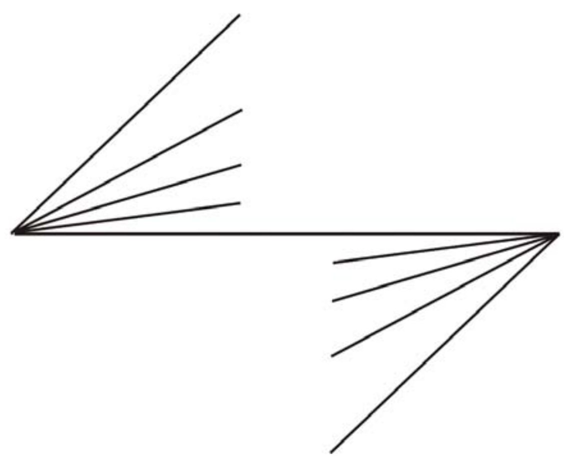

Figura 4.24: Dendroide hereditariamente contraíble que no es suave.

4.5. Selecciones y Q-puntos

Teorema 4.62 *Sea X un continuo selectible con una selección $\sigma : C(X) \to X$. Sea K un subcontinuo no degenerado de X, el cual es el límite de una sucesión de subcontinuos A_n de X, es decir,*

(1) $K = lím\ A_n$,
tal que
(2) *Las intersecciones* $A_n \cap K$ *son vacías o tienen diámetros que tienden a cero cuando* n *tiende a infinito.*

Para $n = 1, 2, ...,$ *sean* $a_n \in A_n$ *y* $b_n \in K$ *los puntos extremos de* $L(A_n, K) = a_n b_n$ *en el caso en que* $A_n \cap K = \varnothing$, *como en la Definición 4.22.*

Supongamos que
(3) *lím sup*$L(A_n, K) \subset K$.
Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

(i) *Si* $a = lím\ a_n$, *entonces* $\sigma(K) = a$.

(ii) *Si* $b = lím\ b_n$, *entonces* $\sigma(K) = b$.

(iii) *Si* $Z = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} L(A_n, K)}$ *es conexo, entonces* Z *es un continuo localmente conexo.*

Demostración. Por el Teorema 4.6, X es un dendroide. Por lo tanto, las conexiones irreducibles $L(P, Q)$ entre cualesquiera dos subcontinuos son únicas siempre que $P \cap Q = \varnothing$. Como la conexión irreducible entre P y Q no está bien definida cuando $P \cap Q \neq \varnothing$, para que las fórmulas tengan sentido, en este caso haremos $L(P, Q) = P \cap Q$.

Vamos a definir una función continua α del intervalo $[0, 1]$ en $C(X)$. Sea $\alpha(2^{-n}) = A_n$, con $n = 0, 1, 2, ...$ Para cada natural n, por el Teorema 3.18, existen dos arcos ordenados β'_n y $\beta''_n \subset C(X)$ tales que β'_n va de $A_n = \alpha(2^{-n})$ a $A_n \cup L(A_n, A_{n+1}) \cup A_{n+1}$ y β''_n va de $A_{n+1} = \alpha(2^{-n-1})$ a $A_n \cup L(A_n, A_{n+1}) \cup A_{n+1}$. Sea $\beta_n = \beta'_n \cup \beta''_n$. Notemos que β_n es un arco cuyos extremos son $A_n = \alpha(2^{-n})$ y $A_{n+1} = \alpha(2^{-n-1})$ tal que cada miembro de β_n contiene a A_n o A_{n+1} y está contenido en $A_n \cup L(A_n, A_{n+1}) \cup A_{n+1}$. Extendemos α a cada segmento cerrado $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$ como un homeomorfismo cuya imagen es β_n.

Para cada real $0 < t \leq 1$, existe un natural n tal que:
(4) $A_n \subset \alpha(t) \subset A_n \cup L(A_n, A_{n+1}) \cup A_{n+1}$
o
(5) $A_{n+1} \subset \alpha(t) \subset A_n \cup L(A_n, A_{n+1}) \cup A_{n+1}$.

Como la conexión irreducible entre dos subcontinuos de un continuo hereditariamente unicoherente está contenida en cada continuo que los contiene a ambos, tenemos que $L(A_n, A_{n+1}) \subset A_n \cup L(A_n, K) \cup K \cup L(K, A_{n+1}) \cup$

A_{n+1}. Tomando límite superior en ambos lados y utilizando (1) y (3), concluimos que lím sup$L(A_n, A_{n+1}) \subset K$. Si $t_n \in (0,1]$ y t_n converge a 0, por (4) y (5), tenemos que $\alpha(t_n)$ está entre A_m o A_{m+1} y $(A_m \cup L(A_m, A_{m+1}) \cup A_{m+1})$, para algún número natural m que tiende a infinito al hacer tender t_n a cero. Como lím $_{m\to\infty} A_m =$ lím $_{m\to\infty}(A_m \cup L(A_m, A_{m+1}) \cup A_{m+1}) = K$, entonces lím $_{n\to 0} t_n = K$. Por lo tanto, si hacemos $\alpha(0) = K$, entonces la función $\alpha : [0,1] \to C(X)$ es continua.

Como α y σ son continuas, entonces para toda $r = 0, 1, 2, ...$, el conjunto $D_r = \sigma(\alpha[0, 2^{-r}])$ es un subcontinuo de X que contiene a $\sigma(K)$ y a $\sigma(A_n)$ para toda $n \geq r$, y es localmente conexo, por la Proposición 1.27. De la definición de selección, sabemos que $\sigma(K) \in K$ y $\sigma(A_n) \in A_n$. De ahí que:

(6) $D_r \cap K \neq \varnothing \neq D_r \cap A_n$ para toda $n \geq r$ y $r = 0, 1, 2, ...$

Observemos que:

$$K = \alpha(0) = \alpha\left(\bigcap_{r=0}^{\infty}\left[0, 2^{-r}\right]\right) \subset \bigcap_{r=0}^{\infty}\alpha\left(\left[0, 2^{-r}\right]\right).$$

Por lo tanto:

$$\sigma(K) \in \sigma\left(\bigcap_{r=0}^{\infty}\alpha\left(\left[0, 2^{-r}\right]\right)\right) \subset \bigcap_{r=0}^{\infty}\sigma\left(\alpha\left(\left[0, 2^{-r}\right]\right)\right) = \bigcap_{r=0}^{\infty} D_r.$$

Dado que $D_{r+1} \subset D_r$ para toda $r = 0, 1, 2, ...$, y que lím $diam([0, 2^{-r}]) = 0$, entonces directamente de la definición de continuidad en espacios métricos, se concluye que el lím $di\acute{a}m(D_r) = 0$ así que $\bigcap_{r=0}^{\infty} D_r$ debe ser un sólo punto. De donde obtenemos:

(7) $\{\sigma(K)\} = \bigcap_{r=0}^{\infty} D_r$.

Para probar la afirmación (i) vamos a descomponer a la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en dos subconjuntos:

$\{a_n : n \in N_1\}$ y $\{a_n : n \in N_2\}$, con $n \in N_1$ si $A_n \cap K = \varnothing$ y $n \in N_2$ en el caso contrario.

Notemos que si N_1 es finito, entonces N_2 es infinito y para probar la afirmación (i), bastaría con hacer la demostración para la subsucesión $\{a_n : n \in N_2\}$. Similarmente si N_2 fuera finito. Por lo tanto, podemos suponer que $\{a_n : n \in N_1\}$ y $\{a_n : n \in N_2\}$ son subsucesiones de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Vamos a probar la afirmación (i) por separado para cada una de éstas.

Supongamos que $n \in N_1$. Como la dendrita D_r intersecta a K y a A_n para toda $n \geq r$, entonces:

(8) $L(A_n, K) \subset D_r$ para $n \in N_1$, $n \geq r$ y $r = 0, 1, 2, ...$

Como a_n es un extremo de $L(A_n, K)$ entonces $a_n \in D_r$ para toda $n \in N_1$, $n \geq r$ y $r = 0, 1, 2, ...$ Esto implica que, $a = \text{lím } a_n \in \bigcap_{r=0}^{\infty} D_r$, por (7), tenemos que $a = \sigma(K)$ y:

(9) $\sigma(K)$ es el límite de la subsucesión $\{a_n : n \in N_1\}$.

Supongamos ahora que $n \in N_2$, Es decir, $A_n \cap K \neq \varnothing$. Se sigue de (6) que D_r intersecta a $A_n \cap K$ para cualesquiera $n \in N_2$, $n \geq r$ y $r = 0, 1, 2, ...$ porque si no fuera así, tendríamos que $D_n \cap (K \cup A_n) = (D_n \cap K) \cup (D_n \cap A_n)$, con $(D_n \cap K)$ y $(D_n \cap A_n)$ subconjuntos ajenos y no vacíos, contradiciendo que X es hereditariamente unicoherente. Por lo tanto, $A_n \cap K \cap D_r \neq \varnothing$ para cualesquiera $n \in N_2$, $n \geq r$ y $r = 0, 1, 2, ...$

Como la intersección $A_n \cap K \cap D_r$ es conexa, porque X es hereditariamente unicoherente, $a_n \in A_n \cap K$, por definición, y el lím *diám* $(A_n \cap K) = 0$, por hipótesis, entonces la intersección $\bigcap_{r=0}^{\infty} D_r \in \text{lím } (A_n \cap K)$ y las intersecciones $A_n \cap K$ deben converger al mismo punto límite al que convergen las D_r. De este modo, por (7), concluimos que

(10) $\sigma(K)$ es el límite de la subsucesión $\{a_n : n \in N_2\}$.

Como a es el punto límite de la sucesión $\{a_n\}_{n \in N}$, entonces es el límite de cualquier subsucesión y, por (9) y (10), concluimos que la afirmación (i) es cierta.

La prueba de la afirmación (ii) es similar a la de la afirmación (i).

Para probar la afirmación (iii), notemos que $L(A_n, K)$ está bien definida sólo cuando $A_n \cap K = \varnothing$ y tomemos $r = 0$, se sigue de (8) que $L(A_n, K) \subset D_0$ para toda $n \in N_1$ y, por lo tanto, $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} L(A_n, K)} \subset D_0$. De modo que si $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} L(A_n, K)}$ fuera conexo, sería un subcontinuo de la dendrita D_0 y sería localmente conexo. ■

En relación con el Teorema 4.62 recordemos el siguiente concepto, debido a R. B. Bennett, [1].

Definición 4.63 *Un punto p de un dendroide X se llama Q-**punto** si existe en X una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:*

(i) $\{p_n\}$ converge a p,

(ii) los arcos pp_n convergen a un continuo no degenerado K y

(iii) si $K \cap pp_n = pq_n$, entonces la sucesión de puntos $\{q_n\}$ converge a p.

L. G. Oversteegen probó en [16] que si un abanico tiene un Q-punto, entonces no es contraíble.

Supongamos que un dendroide contiene un Q-punto p para el cual la condición

$(*)$ lím *diám* $pq_n = 0$

se satisface. Entonces si tomamos los arcos pp_n como los continuos A_n del Teorema 4.62; entonces por (ii) se tiene (8), por (iii) y (11) se tiene (9), y (10) se cumple porque $A_n \cap K \neq \varnothing$. Por lo tanto, si sustituimos q_n y p por a_n y a, respectivamente, entonces la afirmación 4.62 implica, por (iii), el siguiente:

Corolario 4.64 *Si un dendroide X contiene un Q-punto p tal que $(*)$ se cumple, entonces para cada selección $\sigma : C(X) \to X$ tenemos que $\sigma(K) = p$ (aquí K denota al continuo límite en la Definición 4.63).*

En el artículo [5], del cual salió este capítulo, el autor aún no sabía si la condición $(*)$ era necesaria para el Corolario 4.64. Sin embargo, en un artículo posterior, [6], encontró que $(*)$ no era necesaria.

Bibliografía

[1] R. Bennett, *On some classes of non-contractible dendroids,* Math. Institute of the Polish Academy of Sciences; mimeographed paper (1972) (unpublished).

[2] K. Borsuk, *Quelques theorémès sur les ensembles unicoherent,* Fund. Math. **18** (1931), 171-209.

[3] J. H. Carruth, *A Note on Partially Ordered Compacta*, Pacific J. Math. **24** (1968), 229-231.

[4] J. J. Charatonik y Z. Grabowski, *Homotopically fixed arcs and the contractibility of dendroids*, Fund. Math. **100** (1978), 229-237.

[5] J. J. Charatonik, *Contractibility and continuous selections*, Fund. Math. **108** (1980), 109-118.

[6] J. J. Charatonik, *Conditions Related to Selectibility*, Mathematika Balkanica. New Series. **5** (1991), 359-372.

[7] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones matemáticas, Serie Textos #28, Sociedad Matemática Mexicana. 2004.

[8] K. Kuratowski, *Topology II,* Academic Press, New York, 1968.

[9] K. Kuratowski, S. B. Nadler Jr. y G. S. Young, *Continuous selections on locally compact separable metric spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **18** (1970), 5-11.

[10] T. Maćkowiak, *Continuous Selections for C(X)*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **26** (1978), 547-551.

[11] T. Maćkowiak, *Contractible and Nonselectible Dendroids*, Bull. Acad. Polon. Sci. **33** (1985), 321-324.

[12] J. R. Munkres, *Topología*, 2^a edición, Pearson Educación, S.A., Madrid, 2002.

[13] S. B. Nadler Jr. y L. E. Ward Jr., *Concerning continuous selections*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 369-374.

[14] S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory*, Marcel Dekker, Inc. 1992.

[15] S. B. Nadler Jr., *The fixed point property for continua*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos #30, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[16] L. G. Oversteegen, *Internal caracterization of contractibility of fans*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **27** (1979), 391-395.

[17] M. Torres, *Caracterizaciones de dendritas,* Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM, 2001.

[18] L. E. Ward Jr., *A fixed point theorem for multi-valued functions*, Pacific J. Math. **8** (1958), 921-927.

[19] L. E. Ward Jr., *Rigid selections on smooth dendroids*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **19** (1971), 1041-1043.