

DESARROLLO DE UN CRISTAL FOTÓNICO METÁLICO CON ÍNDICE DE REFRACCIÓN NEGATIVO EN LA REGIÓN DE LAS MICROONDAS

Tesis de Licenciatura
Facultad de Ingeniería – Instituto de Investigaciones en Materiales
Ingeniería en Telecomunicaciones

UNAM

Presentado por
Rodrigo Alejandro Gutiérrez Arenas

Para obtener el título de
Ingeniero en Telecomunicaciones

Director de Tesis: Dr. Doroteo Mendoza López

Junio 2006

Jurado

Ing. Mario Alfredo Ibarra Pereyra.....	Presidente
Dr. Doroteo Mendoza López.....	Vocal
M. I. Juan Fernando Solórzano Palomares.....	Secretario
Dr. Oleksandr Martynyuk.....	Primer Suplente
Dr. Oleg Kolokoltsev.....	Segundo Suplente



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Y a la puerta de la ciencia, como a la
puerta del infierno, debiera estamparse
esta consigna:

*Qui si convien lasciare ogni sospetto;
Ogni viltà convien che qui sia morta*

*"Déjese aquí cuanto sea recelo;
Mátese aquí cuanto sea vileza".
(Dante, La Divina Comedia).*

Karl Marx, Contribución a la Crítica de la
Economía Política, Prólogo, Londres, 1859

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por la educación y valores que me ha brindado.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales por facilitarme el uso de sus instalaciones, así como las becas y apoyos económicos otorgados.

Al *Dr. Doroteo Mendoza López* por su generosidad y asesorías durante los dos años de trabajo bajo su tutoría.

A los miembros del jurado de mi examen profesional, *M. I. Juan Fernando Solórzano Palomares* y el *Dr. Oleg Kolokoltsev* por la revisión y críticas a este trabajo ya que han contribuido significativamente a su mejora.

Al *Ing. Camacho* y todos los integrantes del taller del IIM por las facilidades proporcionadas para la construcción del cristal fotónico.

Al *Dr. Oleksandr Martynyuk* por el apoyo brindado para la medición del espectro de transmitancia del cristal fotónico, así como por la asesoría y el apoyo brindado para la discusión de los resultados.

Al *Dr. Marcos Ley Koo* y a la Facultad de Ciencias por facilitarme las instalaciones de la Cámara Semianecoica para la medición del autoenfoco.

Al *Ing. Mario Alfredo Ibarra Pereyra* por facilitarme el generador de microondas necesario para la observación del autoenfoco, así como su apoyo en el montaje experimental.

A mis padres, *Guillermo Gutiérrez Roldán* y *Celia Arenas Rojas*, por todo el apoyo y todas las enseñanzas que me han brindado durante toda mi vida, a ellos, les dedico este trabajo.

A mis hermanos, *Karla Gabriela Gutiérrez Arenas* y *Guillermo Gutiérrez Arenas*, quienes han sido las personas que más han influenciado mi vida, también les dedico este trabajo.

A mis primas, *Anylú, Janet* y *Erandi*, a mis tíos, *Roberto, Jesús, Adrián, Carlos, Roberto G., Ángel* y *Alejandra*, y a toda mi familia por el apoyo que me han mostrado a lo largo de mi vida.

A *Liliana*, por todo el tiempo que hemos pasado juntos, por la amistad que he tenido la oportunidad de disfrutar y compartir contigo.

A *Ivonne, Luis Alonso* y *Agustín* por todos los momentos que pasamos juntos en la Facultad y especialmente a *Luis Alonso* y *Agustín* por su apoyo en las largas jornadas de mediciones, así como los comentarios realizados a este trabajo.

A *Luis Antonio, Roberto* y *Mauricio*, mis amigos de toda la vida, por todos los momentos que hemos compartido desde que nos conocimos en el tercer año de Primaria.

A mis amigos, *Jacobo, Fernando, Giovanni, Alberto, Amed*, y *Julieta*, con quienes he compartido y compartiré muchos momentos importantes de mi vida.

Índice general

Índice general	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Introducción	VII
1. Fundamentos	1
1.1. Campos electromagnéticos en materiales izquierdos	1
1.1.1. Índice de refracción en materiales izquierdos	1
1.1.2. Ondas electromagnéticas planas.	3
1.2. Cristales Fotónicos	5
1.2.1. El electromagnetismo como un problema de eigen-valores . .	7
1.2.2. Simetrías utilizadas para clasificar los modos electromagnéticos	8
1.2.3. El origen físico de las brechas prohibidas en los cristales fotónicos	13
1.2.4. Noción de índice de refracción en los cristales fotónicos . . .	16
2. Cálculo del diagrama de bandas	23
2.1. Cristales fotónicos metálicos	24
2.2. Descripción del algoritmo de diferencias finitas	25
2.2.1. Formulación del eigen-problema	26
2.2.2. Esquema numérico del cálculo de los eigen-valores	27
2.3. Diagrama de bandas	33
2.3.1. Red cuadrada	34
2.3.2. Red triangular	35
2.3.3. Análisis comparativo entre la red cuadrada y la red triangular	37

3. Cristales fotónicos metálicos con índice de refracción negativo	47
3.1. Selección de materiales y construcción del cristal fotónico	47
3.1.1. Dimensiones físicas	47
3.1.2. Proceso de construcción	49
3.2. Configuración experimental	51
4. Análisis de resultados	55
4.1. Espectro de transmisión	55
4.2. Verificación del índice de refracción	56
4.2.1. Frecuencia de 9,1 GHz	58
4.2.2. Frecuencia de 9,2 GHz	59
4.2.3. Frecuencia de 9,3 GHz	60
4.2.4. Frecuencia de 9,4 GHz	61
4.2.5. Frecuencia de 9,5 GHz	62
4.2.6. Frecuencia de 10 GHz	63
4.3. Análisis de los resultados teóricos y experimentales	64
4.3.1. Espectro de transmisión	64
4.3.2. Índice de refracción	64
5. Conclusiones	67
A. La red recíproca y la zona de Brillouin	71
A.1. La red recíproca	71
A.2. La zona de Brillouin	73
B. Código fuente	75
B.1. Red cuadrada	76
B.2. Red Triangular	85
Bibliografía	93

Resumen

En la actualidad la propagación de la luz en los cristales fotónicos, así como el fenómeno de la refracción negativa, ha despertado la atención de la comunidad científica, debido a sus implicaciones teóricas y sobre todo a su posible impacto tecnológico. En esta tesis se investiga la propagación de ondas electromagnéticas en el rango de las microondas, a través de un cristal fotónico metálico para comprobar la existencia de un índice de refracción negativo en dicho cristal. Además esta tesis servirá como fundamento para el desarrollo de un material con índice de refracción negativo en el espectro visible.

La propagación de la luz a través de un cristal fotónico tiene su fundamento en la dispersión de Bragg provocada por los elementos que componen dicho cristal. Los cristales fotónicos conducen a una estructura de bandas de energía fotónica, de la misma forma que un cristal electrónico produce una estructura de bandas de energía electrónica. A lo largo de este trabajo se calculó el diagrama de bandas del cristal fotónico mediante la resolución de las ecuaciones de Maxwell a través del algoritmo de diferencias finitas, para posteriormente realizar un análisis detallado de dicha estructura de bandas y construir un cristal fotónico con las características necesarias para poder observar la refracción negativa. Los cristales fotónicos se pueden constituir de elementos dieléctricos y metálicos. La investigación actual se ha hecho en gran medida, referente a los cristales fotónicos dieléctricos. Los cristales fotónicos metálicos presentan ventajas con respecto a su contraparte dieléctrica, razón por la cual son objeto de estudio en esta tesis.

En esta tesis se investigará a detalle el comportamiento de un cristal fotónico compuesto por elementos metálicos, se propondrá un modelo experimental para la comprobación de refracción negativa, así como el efecto de autoenfoco y se observará la viabilidad de dichos cristales para aplicaciones en la región de las microondas. Todos estos objetivos se demostrarán basados en argumentos teóricos, simulaciones numéricas y evidencias experimentales.

Introducción

Las propiedades electromagnéticas (EM) de la materia pueden ser caracterizadas por dos cantidades macroscópicas: la permitividad dieléctrica ε , y la permeabilidad magnética μ , así mismo las propiedades de propagación de las ondas EM en un material son determinadas por ε y μ , que regulan las relaciones entre el campo eléctrico \mathbf{E} , y el campo magnético \mathbf{H} . Esas propiedades de propagación pueden depender de la frecuencia, ya que $\varepsilon(\omega)$ y $\mu(\omega)$ son en general, dependientes de la frecuencia [1].

Para una gran cantidad de materiales, la parte real tanto de ε como μ son positivos en la banda de propagación, por lo que para la mayoría de los materiales, así como para el vacío, la relación entre \mathbf{E} , \mathbf{H} y el vector de propagación \mathbf{k} esta dada por la regla de mano derecha: $\mathbf{k} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] > 0$.

Fue Veselago [2] el primero que analizó que la propagación de ondas EM es posible en materiales que poseen simultáneamente $\text{Re}(\varepsilon), \text{Re}(\mu) < 0$. Para esos materiales la relación $\mathbf{k} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ es menor a cero y está dada por la regla de la mano izquierda por lo que se les refiere como *materiales izquierdos*. Sus propiedades EM son diferentes a la de los materiales *derechos* ya que las velocidades de grupo y fase son antiparalelas, y como consecuencia el índice de refracción del material, n_{mat} , es negativo. Por ejemplo una onda EM incidente con cierto ángulo, ϕ , en una interfase plana entre un material derecho y uno izquierdo, la onda refractada se mantendrá en el mismo lado de la normal (del lado opuesto que en los materiales derechos u ordinarios), por lo que el ángulo de refracción sería negativo.

Este fenómeno de refracción anómala puede permitir el desarrollo de nuevos sistemas como las lentes planas. Si se considera un sistema en el vacío, que consiste de una placa de espesor d hecha de un material izquierdo con índice de refracción $n = -1$, y una fuente puntual en uno de sus lados, se puede observar, que en dicho sistema, se puede enfocar la radiación de la fuente dentro de la placa y del otro lado de la misma, siguiendo los principios de la ley de refracción de Snell.

El efecto Doppler es otra propiedad diferente en los materiales izquierdos ya que cambia su signo al encontrarse un material de esas características, una fuente que se acerca parece emitir ondas con una frecuencia menor que aquella que se aleja.

Además la posibilidad de que los materiales izquierdos sean lentes *perfectos* ha sido estudiada por Pendry [3]. Una lente *perfecta* permite superar el límite de difracción de las lentes tradicionales, es decir, que sea posible enfocar ondas EM en un espacio mucho menor que el de una longitud de onda, λ . Los lentes convencionales no permiten que la imagen tenga una resolución mayor a $(\frac{\lambda}{2})$.

Desafortunadamente, no existe en la naturaleza sustancia alguna que presente las características físicas anteriormente descritas, por lo que se ha tenido que recurrir a los materiales compuestos, de tal forma que los parámetros efectivos del medio, μ_{eff} y ε_{eff} sean simultáneamente negativos para cierto rango de frecuencias. Existen dos tipos de materiales compuestos, los cuales se pueden considerar materiales izquierdos. El primero grupo son los llamados metamateriales y consisten de arreglos periódicos de alambres y anillos resonantes. El segundo tipo de materiales son los cristales fotónicos, los cuales son sistemas compuestos de arreglos periódicos de materiales con distintas funciones dieléctricas, contrastantes entre si [4]-[6].

La primera comprobación experimental de la refracción negativa fue realizada recientemente por Smith [7], utilizando un metamaterial con resonadores de cobre, la región en la cual el material en cuestión presentó un índice de refracción efectivo negativo fue en la región de las microondas. En lo que se refiere a los cristales fotónicos los primeros experimentos en donde se observó un comportamiento de refracción anómala fueron llevados a cabo por Cubucku [8] y Parimi [9] todos ellos en la región de las microondas. Cabe mencionar que en la referencia [10] se puede observar la verificación experimental del enfoque de una fuente puntual, así como las ideas propuestas por Pendry [3].

A pesar de que la refracción negativa ha sido demostrada en los metamateriales, los sistemas propuestos son altamente absorbentes y difícilmente pueden ser escalados a tres dimensiones o a tamaños más pequeños propicios para la aplicación en frecuencias ópticas, en contraste, los cristales fotónicos no presentan este tipo de complicaciones.

Un cristal resulta cuando un bloque básico de átomos o moléculas se repite de manera periódica en el espacio. Por lo que un cristal representa un potencial periódico para un electrón propagándose a través de él, y la geometría del cristal regula muchas de las propiedades de conducción del cristal.

La red puede producir brechas o bandas prohibidas dentro de la estructura de bandas de energía del cristal de tal forma que los electrones no se puedan propagar para ciertas energías, como en un semiconductor se tiene una banda prohibida entre la banda de valencia y la de conducción.

La analogía óptica son los cristales fotónicos en cuyo caso el potencial periódico esta dado por una red macroscópica de materiales dieléctricos o metálicos caracterizados por las constantes ε y μ . Si la absorción del material es mínima, la dispersión

generada por los elementos que componen el cristal, puede producir el mismo fenómeno para fotones como el potencial atómico lo hace para los electrones.

Los cristales fotónicos utilizan las mismas propiedades que las cavidades metálicas y las guías de onda, escalándolas a un rango mucho mayor de frecuencias. Es posible construir un cristal fotónico con dimensiones milimétricas para un control de microondas o en el orden de micras para un control de ondas infrarrojas.

Notomi [11] muestra que para los cristales fotónicos cerca de la frecuencia donde presentan una banda prohibida se comportan con un índice de refracción efectivo que se encuentra limitado por el índice de refracción de los materiales que lo componen y es determinado por la estructura fotónica de bandas. Ese índice puede ser menor que la unidad y también negativo y se puede utilizar la ley de Snell para describir la propagación de la luz.

Los principios físicos detrás de estos fenómenos en los cristales fotónicos son debidos a efectos complejos en la dispersión de Bragg y son muy diferentes a los de los metamateriales [7].

Los cristales fotónicos son materiales que se encuentran en la transición entre los metamateriales y un material dieléctrico ordinario. Las propiedades de los cristales fotónicos provienen de las múltiples reflexiones de Bragg dentro de la estructura periódica que conforma el cristal. La periodicidad de los cristales fotónicos se encuentra en el orden de magnitud de la longitud de onda de trabajo, por lo que la distinción entre la refracción y la difracción no es muy clara. En contraparte, un metamaterial se conforma de elementos resonantes cuyo tamaño y espaciamiento son mucho menor que la longitud de onda electromagnética de interés [12].

Los componentes de estos cristales pueden ser dieléctricos, metálicos o una mezcla de ambos. La elección de los materiales que lo componen depende de una gran cantidad de factores. Un cristal fotónico metálico presenta ciertas ventajas sobre uno dieléctrico: mayor dependencia de la polarización, mejor capacidad de enfoque y además requiere una menor diferencia de índice de refracción en los componentes del cristal [13].

El hecho de que se pueda realizar la refracción negativa conlleva a la posibilidad de encontrar nuevas formas de control en la propagación de las ondas EM. Este tipo de refracción produce varios efectos de propagación anómala de la luz que da pie a cavidades resonantes sin necesidad de paredes reflejantes así como lentes con la capacidad de lograr un autoenfoco. El desarrollo de materiales con índice de refracción negativo presenta a futuro una gran gama de aplicaciones. En el régimen de las microondas este tipo de materiales al ser capaces de enfocar ondas EM en vez de dispersarlas pueden ser útiles en el perfeccionamiento de acopladores, duplexores, antenas y filtros. En lo que se refiere a la región óptica del espectro se espera un mayor desarrollo dado al poder de manipulación de la luz que presentan estos

materiales. En este contexto, el objetivo del presente estudio es el de diseñar y construir un cristal fotónico y comprobar la refracción negativa en el mismo. La comprobación se realizará de manera experimental.

Esta tesis se ordena de la siguiente forma: en el primer capítulo se presentan algunos conceptos básicos de la transmisión de ondas EM a través de medios con índice de refracción negativo, así como una revisión de la literatura respecto a los cristales fotónicos, los materiales que los componen, sus propiedades electromagnéticas y los modelos propuestos para el cálculo del diagrama de bandas o de dispersión del cristal. En el capítulo dos se expone a detalle el modelo teórico empleado para el cálculo del diagrama de bandas para diferentes cristales fotónicos. En el capítulo tres se muestra un estudio comparativo de los materiales propuestos para conformar el cristal, así como las características físicas del cristal construido. En el siguiente capítulo se presentan los resultados experimentales del cristal fotónico, que involucran la respuesta en frecuencia del mismo y la observación del fenómeno de refracción anómala. Finalmente, se presenta un resumen de los principales resultados de la investigación y sus conclusiones.

Capítulo 1

Fundamentos

Veselago [2] mostró que si para un rango de frecuencia tanto la permitividad, ϵ , y la permeabilidad, μ , de un material, son negativas, las ondas EM se propagan presentando una serie de propiedades peculiares. Todas estas propiedades provienen del hecho de que los vectores \mathbf{k} , \mathbf{E} y \mathbf{H} forman una triada que sigue la regla de la mano izquierda en lugar de una triada derecha, lo que trae como consecuencia que el vector Poynting y el vector de onda \mathbf{k} presenten direcciones opuestas. Los materiales que presentan estas propiedades son llamados materiales izquierdos. Los cristales fotónicos son arreglos periódicos de elementos macroscópicos, con dimensiones similares a la longitud de onda de trabajo, los cuales presentan bandas permitidas y bandas prohibidas para determinadas frecuencias de la misma forma que los cristales electrónicos presentan los mismos tipos de bandas. De acuerdo a su estructura de bandas, estos cristales pueden presentar una región en la cual el índice de refracción es negativo y se comporta de acuerdo a lo estipulado en [2].

En este capítulo se presentan los resultados más importantes de la interacción de los campos EM oscilantes con materiales izquierdos, así como un análisis detallado de las propiedades y características de los cristales fotónicos como materiales con índice de refracción negativo.

1.1. Campos electromagnéticos en materiales izquierdos

1.1.1. Índice de refracción en materiales izquierdos

La constante dieléctrica y la permeabilidad magnética son cantidades fundamentales que determinan la propagación de las ondas EM en la materia, así como las

propiedades ópticas de cualquier medio. El índice de refracción es un parámetro importante y de gran utilidad en la descripción de los fenómenos de transmisión a través de diferentes medios. Este índice es la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio y se encuentra definido por:

$$n^2 = \frac{c^2}{v^2} = \varepsilon\mu \quad (1.1)$$

donde n , es el índice de refracción, c , es la velocidad de la luz en el vacío y v es la velocidad de la luz en el medio en el cual se esta propagando.

Si se considera un medio sin pérdidas y a ε y μ como números reales, se puede observar de la ecuación 1.1 que un cambio simultáneo de signo en la constante dieléctrica y el permeabilidad magnética no tiene efecto alguno en dicha relación, por lo que para medios ordinarios la parte real de n siempre es positiva. Sin embargo, como demuestra Veselago [2], el índice de refracción puede ser negativo y no se viola ningún principio físico fundamental.

Smith [14] demostró rigurosamente que si $\text{Re}(\varepsilon), \text{Re}(\mu) < 0$, necesariamente el índice de refracción también lo es, por lo que adopta la siguiente forma:

$$n = -\sqrt{\varepsilon\mu} \quad (1.2)$$

A su vez, McCall [15], utiliza una forma más intuitiva para observar la necesidad del cambio de signo en n . Un material izquierdo requiere que la parte real de ε y μ sean negativas, además debido a que la energía disipada por los campos EM siempre debe ser positiva, las partes imaginarias de ε y μ deben ser positivas, i.e. $\text{Im}(\varepsilon), \text{Im}(\mu) > 0$. A partir de estas consideraciones, las constantes ε y μ se pueden expresar como:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\phi_\varepsilon} \quad (1.3)$$

$$\mu = \mu_0 e^{i\phi_\mu} \quad (1.4)$$

donde el rango de valores para la fase de cada una de las constantes es $\frac{\pi}{2} < \phi_\varepsilon \leq \pi$ y $\frac{\pi}{2} < \phi_\mu \leq \pi$ y las amplitudes $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$. Sustituyendo las expresiones 1.3 y 1.4 en la definición 1.1, se puede escribir el índice de refracción de forma compleja:

$$n = +\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} e^{i\frac{\phi_\varepsilon+\phi_\mu}{2}} \quad (1.5)$$

donde la fase del índice de refracción se limita a $\frac{\pi}{2} < \frac{\phi_\varepsilon+\phi_\mu}{2} \leq \pi$ tomando en cuenta las restricciones antes mencionadas, por lo que $\text{Re}(n) < 0$.

Esta situación nos muestra que para las sustancias que presentan tanto ε y μ negativos es necesario realizar un análisis más detallado de la propagación de ondas

EM en estos medios ya que presentan algunas propiedades distintas a los materiales con ε y μ positivos.

1.1.2. Ondas electromagnéticas planas.

La forma más sencilla para el estudio de los campos EM, son las ondas EM planas y monocromáticas.

Para cualquier medio material, la interacción de los campos EM y el medio se encuentran descritos por las ecuaciones de Maxwell [1]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.9)$$

donde (respectivamente) \mathbf{E} y \mathbf{H} son los campos eléctrico y magnético, \mathbf{D} y \mathbf{B} son los campos de desplazamiento y de inducción magnética, y ρ y \mathbf{J} son las cargas libres y las corrientes. Si consideramos un medio libre de cargas y corrientes ($\rho, J = 0$) y suponiendo que los medios son lineales, homogéneos e isotrópicos, los campos \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{E} y \mathbf{B} se encuentran relacionados de la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.11)$$

Tomando en cuenta todas las consideraciones anteriores y sustituyendo 1.6,1.8-1.11 en 1.7, se obtiene la siguiente expresión:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.12)$$

Esta expresión 1.12, es conocida como la Ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico. De forma análoga de 1.9, se obtiene:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.13)$$

Ambas expresiones (1.12 y 1.13) representan ecuaciones diferenciales parciales elípticas y representan a una onda viajera que se propaga con una velocidad $v^2 =$

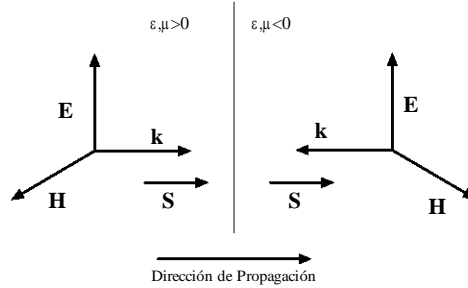


Figura 1.1: Esquema donde se muestra la relación entre los vectores de campo eléctrico (\mathbf{E}) y magnético (\mathbf{H}) y el vector de onda (\mathbf{k}) en un material *derecho* y uno *izquierdo*.

$\frac{c^2}{\epsilon\mu} = \frac{c^2}{n^2}$. Una solución a dichas ecuaciones, corresponde a ondas planas, cuya expresión general se muestra a continuación.

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.14)$$

donde $\Psi(\mathbf{r}, t)$ puede ser \mathbf{E} o \mathbf{H} , según sea el caso, \mathbf{r} , es el vector de posición de la onda y A es en general una constante compleja. La expresión 1.14 representa una onda plana monocromática de frecuencia angular, ω , que se propaga en la dirección dada por el vector de onda \mathbf{k} , por lo que la solución de 1.12 y 1.13 para los campos EM esta dada por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.16)$$

Al sustituir las expresiones 1.15 y 1.16 en las ecuaciones 1.6-1.9, se obtienen las ecuaciones de Maxwell para las ondas electromagnéticas planas:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad (1.17)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega\mu}{c} \mathbf{H}_0 \quad (1.18)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 = 0 \quad (1.19)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = \frac{\omega\mu}{c} \mathbf{E}_0 \quad (1.20)$$

A partir de las ecuaciones anteriores podemos observar diferentes características y propiedades de las relaciones entre los campos electromagnéticos. Si se combinan las ecuaciones 1.18 y 1.20 se puede obtener la relación de dispersión:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.21)$$

Además se puede observar que ambos campos son perpendiculares entre sí y no son independientes el uno del otro. De las ecuaciones 1.17 y 1.19 se observa que tanto el campo eléctrico como el magnético son perpendiculares a la dirección de propagación sin importar el medio en el que se encuentren. En este punto se pueden hacer diferentes suposiciones acerca de los símbolos de la parte real de las constantes ε y μ . Si estos son positivos o de signos contrarios, como se observa en todos los medios ordinarios, se obtiene que la relación entre el vector de onda y los campos eléctricos y magnéticos, $\{\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, forman una triada ordenada de vectores ortogonales que siguen la regla de la mano derecha. Sin embargo cuando ε y μ son negativos, la triada $\{\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, es negativa y sigue la regla de la mano izquierda, razón por la cual Veselago denominó como *materiales izquierdos* a aquellos materiales que presentan tanto la constante de permitividad dieléctrica como la constante de permeabilidad magnética negativas. En la figura 1.1, se muestra una representación gráfica de este fenómeno.

El flujo de energía de la onda EM que cruza por segundo una unidad de área esta representado por el vector de Poynting, \mathbf{S} y se define por:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.22)$$

A partir de la relación 1.22, se observa que $\{\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, siempre forman una triada de vectores ortogonales de un sistema derecho. Por lo que para los materiales ordinarios \mathbf{k} y \mathbf{S} son siempre paralelos, mientras que un material izquierdo permite que \mathbf{k} y \mathbf{S} sean antiparalelos. Este hecho trae como consecuencia el cambio en muchos fenómenos físicos, como la inversión del efecto Doppler [2].

La velocidad de fase o de propagación de la onda está dada por:

$$\mathbf{v}_p = \omega \frac{\mathbf{k}}{k^2} \quad (1.23)$$

la cual también es antiparalela al flujo de energía cuando ε y μ son negativos. A partir de este concepto, los materiales izquierdos también son conocidos como materiales de velocidad de fase negativa.

1.2. Cristales Fotónicos

Una red cristalina resulta cuando un bloque básico, pequeño de átomos o moléculas se repite en el espacio. Por lo tanto un cristal presenta un potencial periódico a

un electrón que se propague a través del cristal, y la geometría del cristal dicta en gran medida las propiedades de conducción del mismo.

En particular, la red puede introducir *brechas* dentro de la estructura de bandas del cristal, de tal forma que los electrones no pueden propagarse con cierta energía en determinadas direcciones. Si el potencial de la red es lo suficientemente grande, la *brecha* se puede extender a todas las direcciones, resultando en una *banda prohibida completa*. Por ejemplo, un semiconductor tiene una banda prohibida entre la banda de valencia y la de conducción.

La analogía óptica de los cristales electrónicos, son los cristales *fotónicos*, en los cuales el potencial periódico se debe a una red macroscópica de materiales dieléctricos o metálicos en lugar de átomos. Si las constantes dieléctricas de los materiales dentro del cristal son lo suficientemente diferentes y la absorción de la luz por el material es mínima, el espaciamiento en las interfases puede producir los mismos fenómenos para fotones, de la misma forma que un potencial atómico lo hace para los electrones.

Este concepto se puede comprender a partir de dos dispositivos que actualmente son de uso común: guías de onda metálicas y los espejos dieléctricos. Las cavidades metálicas y las guías de onda son dispositivos usados para controlar la propagación de ondas en la región de las microondas. Una cavidad metálica no permite que las ondas EM se propaguen por debajo una cierta frecuencia de umbral y una guía de onda metálica solamente permite la propagación a lo largo de su eje. Ambos dispositivos presentan propiedades muy útiles y serían extremadamente útiles para frecuencias fuera del régimen de las microondas.

Sin embargo, las ondas EM a otras frecuencias (luz visible, IR o UV) se disipan rápidamente en los componentes metálicos, lo que hace que esta forma de control sea imposible de generalizar. Los cristales fotónicos, además de *copiar* las propiedades de las cavidades y guías de onda, pueden escalarlas y aplicarlas a un rango mucho mayor de frecuencias. Se puede construir un cristal fotónico de una determinada geometría con dimensiones milimétricas para el control de microondas o en el orden de las micras para el control del IR.

Los espejos dieléctricos, son dispositivos ópticos que consisten de un arreglo de capas alternandas de diferentes dieléctricos. La luz, con una adecuada longitud de onda, cuando incide sobre dicho material, se refleja completamente. Dichos espejos son cristales fotónicos de una dimensión de acuerdo a la definición descrita con anterioridad. Los espejos dieléctricos son utilizados en filtros de Fabry-Perot, así como en láseres de retroalimentación distribuida.

1.2.1. El electromagnetismo como un problema de eigen-valores

Como fue descrito en la sección anterior de este trabajo, la propagación de ondas EM en cualquier medio, incluyendo los cristales fotónicos, está gobernado por las ecuaciones de Maxwell (1.6-1.9). Para el caso de los cristales fotónicos, se puede restringir el estudio a la propagación de ondas en un medio compuesto de diferentes materiales dieléctricos sin cargas o corrientes, es decir $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Para este tipo de medio se debe de definir una constante dieléctrica dependiente de la posición, $\varepsilon(\mathbf{r})$ y que sea constante en el rango de frecuencias en las que se desee trabajar. Cabe mencionar que el presente análisis se realizará en dieléctricos con bajas pérdidas, lo que significa que se puede tratar a $\varepsilon(\mathbf{r})$ como puramente real [1].

Teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores, así como la condición de transversalidad impuesta por las ecuaciones 1.6 y 1.8, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.24)$$

La ecuación 1.24 presenta la forma de un problema de eigen-valores y se da cuando el resultado de una operación sobre una función es la misma función multiplicada por una constante, por lo que la función es llamada eigen-función o eigen-vector del operador y la constante multiplicativa es llamada eigen-valor.

Para este caso se identifica el lado izquierdo de la ecuación 1.24 como el operador Θ que actúa sobre $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ como se muestra en al siguiente expresión:

$$\Theta \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.25)$$

Una propiedad importante del operador Θ , es que es un operador lineal y Hermitiano [6]. Las propiedades que resultan de un operador con las características descritas son que los eigen-valores son reales, y las eigen-funciones son ortogonales, pueden ser obtenidas por el principio variacional y pueden ser catalogadas por sus propiedades de simetría. Dichas propiedades son similares a las obtenidas en mecánica cuántica al aplicar el Hamiltoniano a la función de onda.

De acuerdo a [13] y [5], el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ no puede ser utilizado para obtener los eigen-valores de los modos armónicos del campo eléctrico, debido a que el operador resultante a partir de la ecuaciones de Maxwell (1.6-1.9) no es Hermitiano, por lo que no cumple la condición de transversalidad y produce que los cálculos numéricos para la obtención de los eigen-valores no sean prácticos.

1.2.2. Simetrías utilizadas para clasificar los modos electromagnéticos

Si la estructura dieléctrica presenta ciertas simetrías, es posible catalogar los modos electromagnéticos del sistema utilizando dicha simetría. En la mecánica clásica, así como en la mecánica cuántica, el uso de las simetrías permite realizar conclusiones generales acerca del comportamiento del sistema. Los cristales fotónicos al ser estructuras periódicas utilizan las simetrías como base para el estudio del diagrama de bandas y las brechas prohibidas. Se analizarán las simetrías de translación discreta, de rotación, y de espejo.

Simetría translacional discreta

Los cristales fotónicos, de la misma forma que los cristales electrónicos, presentan una simetría translacional discreta, es decir, su estructura es invariante únicamente bajo translaciones con un paso fijo. Suponemos que tenemos una estructura que es repetitiva en una dirección como se muestra en la figura 1.2.

Para dicho sistema se tiene una simetría translacional en el eje x y discreta en el eje y . El espaciado básico de simetría es conocido como la constante de red, a , y el vector de espaciado es llamado vector primitivo de la red, el cual para este caso es $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{y}}$. Debido a la simetría, $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{a})$ y repitiendo esta simetría, se obtiene $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R})$, donde \mathbf{R} es cualquier múltiplo entero de \mathbf{a} , esto es, $\mathbf{R} = l\mathbf{a}$, donde l es un entero cualquiera.

La unidad de material dieléctrico que se considera para ser repetido dentro de todo el cristal, se encuentra remarcado en la figura 1.2 mediante una caja, y es conocida como celda unitaria. En este caso la celda unitaria es un barra de dieléctrico en el plano xz con un espesor de a en la dirección y .

Debido a las simetrías translacionales, el operador Θ debe de conmutar¹ con todos los operadores de translación en la dirección x , así como con los operadores de translación para los vectores de la red $\mathbf{R} = la\hat{\mathbf{y}}$ en la dirección y . De esta forma se pueden identificar los modos de Θ de acuerdo a como se comporten bajo dichos operadores de simetría.

Si definimos el operador de translación continua $T_{\mathbf{d}}$, que cuando opera en una función $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, recorre su argumento en \mathbf{d} . Para el ejemplo que se muestra en la figura

¹El conmutador de dos operadores, A y B se define como:

$$[A, B] = AB - BA$$

Se puede demostrar que para que el sistema sea simétrico bajo un determinado operador, T , este debe de conmutar con Θ , es decir, $[T, \Theta] = 0$. A partir de este concepto se pueden clasificar o catalogar todas las eigen-funciones de Θ , utilizando las propiedades simétricas del operador T .

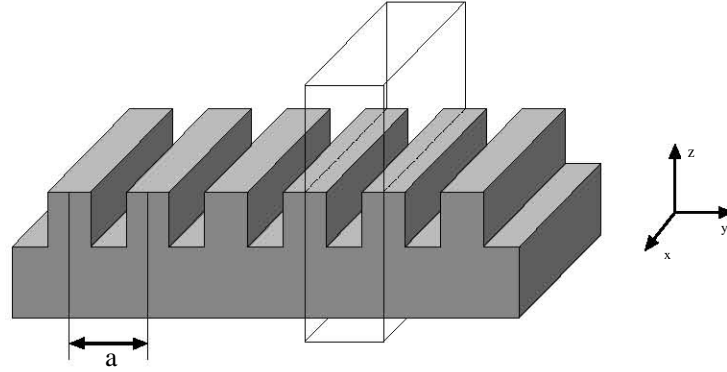


Figura 1.2: Configuración de un material dieléctrico con simetría translacional discreta en la dirección y . La unidad de repetición del sistema periódico se muestra en una caja. Esta configuración es utilizada para láseres de retroalimentación distribuida. Tomado de la referencia [6].

1.2, dicho operador sería $T_{d\hat{\mathbf{x}}}$ debido a la simetría de translación continua en el eje x para todas las distancias, d . De la misma forma para la simetría discreta definimos $T_{\mathbf{R}}$ como el operador de translación discreta para todos los vectores de la red.

Debido a que nuestro sistema es translacionalmente invariable o de forma equivalente, $[T_{\mathbf{d}}, \Theta] = 0$, tanto en la dirección x (continuo) como en la dirección y (discreto), los operadores de translación al ser aplicados a $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, resultan en un nuevo problema de eigen-valores. Se puede demostrar [6], que un modo con la forma funcional de $e^{ik_x x}$ es una eigen-función de cualquier operador translacional en la dirección x :

$$T_{d\hat{\mathbf{x}}} e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+d)} = (e^{ik_x d}) e^{ik_x x} \quad (1.26)$$

y de la misma forma para la dirección y y el operador de simetría para cualquier vector \mathbf{R} , se tiene:

$$T_{\mathbf{R}} e^{ik_y y} = e^{ik_y(y+la)} = (e^{ik_y la}) e^{ik_y y} \quad (1.27)$$

Los correspondientes eigen-valores para la simetría discreta y continua son (respectivamente): $e^{ik_x d}$ y $e^{ik_y la}$. Los modos del sistema deben de ser eigen-funciones de todos los operadores de translación, por lo que deben de tener una dependencia en x y y de la forma $e^{ik_x x}$ y $e^{ik_y y}$. De esta forma, los modos del sistema, se pueden clasificar de acuerdo a sus valores particulares de k_x y de k_y , también conocidos como vector de onda. Esta dependencia funcional corresponde a simples ondas planas polarizadas

en la dirección de propagación, y como es sabido, las ondas planas son soluciones de las ecuaciones de Maxwell (1.6-1.9), así como de 1.24.

Sin embargo, no todos los valores de k_y corresponden a diferentes eigen-valores. Todo el conjunto de vectores de onda de la forma $k_y + m(2\pi/a)$, donde m es un entero, tienen el mismo eigen-valor al ser aplicado el operador $T_{\mathbf{R}}$. Al aumentar el valor de k_y por un múltiplo entero de $b = 2\pi/a$ deja al sistema sin cambio alguno. Se define $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{y}}$ como el vector recíproco primitivo de la red.

La periodicidad discreta en la dirección y conduce a una dependencia con respecto a y para \mathbf{H} , que es simplemente el producto de una onda plana con una función periódica en el eje y , como lo muestra el teorema de Bloch. Dicho teorema se puede ejemplificar proponiendo que un modo del sistema es una onda plana en el espacio libre, pero modulada por una función periódica debido a la red periódica:

$$\mathbf{H}(\dots, y, \dots) \propto e^{ik_y y} \mathbf{u}_{k_y}(y, \dots) \quad (1.28)$$

Este resultado es conocido en la física de estado sólido como estado de Bloch y una característica importante es que si tiene un estado con un vector de onda k_y y otro estado con un vector de onda $k_y + mb$ son idénticos y no son diferentes desde un punto de vista físico. Lo que conduce a que solamente es necesario considerar los valores del vector de onda k_y que se encuentren dentro del rango $-\pi/a < k_y \leq \pi/a$. Esta región de valores no redundantes de k_y es conocida como la primera zona de Brillouin (Ver Apéndice A).

La ecuación 1.28 se puede generalizar para sistemas periódicos en tres dimensiones, identificando los estados de Bloch por medio del vector de onda $\mathbf{k} = k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2 + k_3\mathbf{b}_3$, donde \mathbf{k} se encuentra en la zona de Brillouin y $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ son los vectores primitivos de la red recíproca. Cada valor del vector de onda \mathbf{k} dentro de la zona de Brillouin identifica a un eigen-estado de Θ con una frecuencia $\omega(\mathbf{k})$ y un eigen-vector $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ de la forma

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (1.29)$$

donde $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ es una función periódica de la red: $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ para todos los vectores de la red \mathbf{R} .

Estructuras de bandas fotónicas

Toda la información acerca de un determinado modo de un cristal fotónico está dado por el vector de onda \mathbf{k} y la función periódica $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. Para obtener la función $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, es necesario sustituir el estado de Bloch en la ecuación 1.24, obteniendo como resultado:

$$\Theta_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (1.30)$$

donde

$$\Theta_{\mathbf{k}} \equiv (i\mathbf{k} + \nabla) \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} (i\mathbf{k} + \nabla \times \quad) \right) \quad (1.31)$$

El operador $\Theta_{\mathbf{k}}$ es Hermitiano y depende de \mathbf{k} . La función \mathbf{u} , así como todos los modos permitidos, están determinados por el problema de eigen-valores descrito en la ecuación 1.30 y están sujetos a la condición $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$.

Debido a esta condición de frontera periódica, se puede restringir el problema de eigen-valores a la celda unitaria del cristal fotónico. A partir de estas condiciones se puede esperar que para cada valor de \mathbf{k} , exista un conjunto infinito de modos con frecuencias espaciadas discretamente, las cuales se pueden identificar por medio del índice de la banda n .

El vector de onda \mathbf{k} , solo tiene la función de parámetro en el operador $\Theta_{\mathbf{k}}$, por lo que se espera que conforme \mathbf{k} varíe continuamente, la frecuencia igualmente varíe. De esta manera se puede tener una descripción de los modos de un cristal fotónico. Dichos modos, son una familia de funciones continuas, $\omega_n(\mathbf{k})$, indexadas conforme aumenta la frecuencia por el número de banda. La información contenida en dichas funciones es llamada la estructura de bandas de un cristal fotónico.

Existen diferentes técnicas para calcular las funciones $\omega_n(\mathbf{k})$ de la estructura de bandas de un cristal fotónico. Los métodos más usados para esta tarea son la expansión de ondas planas, la matriz de transferencia, diferencias finitas en el dominio del tiempo y las diferencias finitas en el espacio real. De acuerdo a las diferentes características de los cristales fotónicos se pueden utilizar los distintos métodos logrando una convergencia más rápida según sea el caso. En el siguiente capítulo se explicará, a detalle, el método que se utilizó para calcular el diagrama de bandas del cristal fotónico analizado en el presente trabajo.

Simetría rotacional y la zona irreducible de Brillouin

Los cristales fotónicos pueden presentar otro tipo de simetrías. Una simetría de gran importancia y utilidad es la de rotación ya que se puede demostrar que cuando existe una simetría rotacional en la red, las bandas de frecuencia $\omega_n(\mathbf{k})$ pueden tener redundancias adicionales en la zona de Brillouin.

Debido a que $\omega_n(\mathbf{k})$ posee simetría de rotación, no es necesario considerar todos los valores de \mathbf{k} dentro de la zona de Brillouin. La zona más pequeña dentro de la

primera zona de Brillouin donde los valores de $\omega_n(\mathbf{k})$ están relacionados por alguna simetría es llamada zona irreducible de Brillouin.

Simetría de espejo y separación de los modos

La simetría de espejo en un cristal fotónico juega un papel muy importante en la clasificación de los modos dentro del mismo cristal. Bajo ciertas condiciones permite separar la ecuación de eigen-valores (1.30) en dos ecuaciones, una para cada polarización de los campos. En un caso $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ es perpendicular al plano de espejo mientras que $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ es paralelo, en el otro caso $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ se encuentra dentro del plano y $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ es perpendicular. Dicha simplificación es conveniente debido a que provee información inmediata acerca de las simetrías de los modos y facilita el cálculo numérico de sus frecuencias.

El sistema ilustrado en la figura 1.2 es invariante a reflexiones de espejo en los planos yz y xz . Para demostrar como se pueden separar los modos del sistema se centrará la atención a las reflexiones, M_x en el plano yz (M_x cambia $\hat{\mathbf{x}}$ a $-\hat{\mathbf{x}}$, dejando sin ningún cambio a $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$). Se define el operador O_{M_x} , el cual refleja al vector de campo usando M_x :

$$O_{M_x}f(\mathbf{r}) = M_x f(M_x \mathbf{r}) \quad (1.32)$$

Al aplicar dos veces el operador de reflexión el sistema regresa a su estado original, por lo que los posibles eigen-valores de O_{M_x} son $+1$ y -1 . Cabe mencionar que debido a que la estructura mostrada en la figura 1.2 es simétrica bajo una reflexión de espejo en el plano yz , O_{M_x} conmuta con Θ ; $[\Theta, O_{M_x}] = 0$. De la misma forma que se trató la simetría translacional, al operar sobre $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ con el conmutador se puede demostrar que $O_{M_x}\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ es simplemente el estado de Bloch con el vector de onda reflejado $M_x\mathbf{k}$:

$$O_{M_x}\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = e^{i\phi}\mathbf{H}_{M_x\mathbf{k}} \quad (1.33)$$

donde ϕ es una fase arbitraria. La relación 1.33 no restringe las propiedades de reflexión de $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ en gran medida, a menos de que el vector \mathbf{k} se encuentra en una determinada posición que cumpla con $M_x\mathbf{k} = \mathbf{k}$. Cuando esto sucede la ecuación 1.33 se convierte en un problema de eigen-valores por lo que $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ debe tener la forma

$$O_{M_x}\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \pm\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = M_x\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(M_x\mathbf{r}) \quad (1.34)$$

El campo eléctrico $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ obedece a una ecuación similar, de ambos campos, tanto el eléctrico como el magnético deben de ser pares o impares² bajo el operador O_{M_x} .

²De acuerdo a Jackson [1], \mathbf{H} es un pseudo vector mientras que \mathbf{E} es un vector, por lo que \mathbf{H}

Pero debido a que $M_x \mathbf{r} = \mathbf{r}$ para cualquier \mathbf{r} en la estructura en cuestión, se tiene que debido a que \mathbf{E} se transforma como un vector y \mathbf{H} como un pseudo vector, las únicas componente no nulas de los campos de un modo par bajo el operador O_{M_x} deben ser H_x , E_y y E_z . Los modos impares son descritos por las componentes E_x , H_y y H_z .

En general, las reflexiones M que cumplan con $[\Theta, O_M] = 0$, la separación de modos puede ser posible solamente en $M\mathbf{r} = \mathbf{r}$ para $M\mathbf{k} = \mathbf{k}$. Se puede observar de la expresión 1.30 que $\Theta_{\mathbf{k}}$ y O_M no conmutarán a menos de que $M\mathbf{k} = \mathbf{k}$. La separación de polarizaciones se mantiene bajo condiciones especiales y no es útil para cristales fotónicos en tres dimensiones.

En el caso de los cristales fotónicos de dos dimensiones, dicha separación de modos se puede aplicar sin ningún problema. Los cristales fotónicos en dos dimensiones son periódicos en un cierto plano, pero son uniformes a lo largo de un eje perpendicular a dicho plano. Si dicho eje, es el eje z , se sabe que la operación $\hat{\mathbf{z}} \rightarrow -\hat{\mathbf{z}}$ es una simetría del cristal sin importar donde se encuentre el origen. De la misma forma se satisface que $M_z \mathbf{k}_{//} = \mathbf{k}_{//}$ para todos los vectores $\mathbf{k}_{//}$ de la primera zona bidimensional de Brillouin. Por lo que los modos en todos los cristales fotónicos bidimensionales pueden ser clasificados en dos polarizaciones distintas: (E_x, E_y, H_z) o (H_x, H_y, E_z) . La primera, donde el campo eléctrico se encuentra dentro del plano xy es conocida como modo Transversal Eléctrico (TE), mientras que la segunda, en la cual el campo magnético se encuentra dentro del plano xy , es conocida como modo Transversal Magnético (TM).

1.2.3. El origen físico de las brechas prohibidas en los cristales fotónicos

El estudio de las brechas prohibidas en el diagrama de bandas de los cristales fotónicos, se puede realizar a partir del ejemplo más sencillo: el cristal fotónico unidimensional.

El sistema que se utilizará consiste en una estructura de capas de materiales alternantes con diferentes constantes dieléctricas. Dicho sistema es conocido como películas multicapas y sus propiedades ópticas ya han sido ampliamente estudiadas. Este arreglo es usado comúnmente en espejos dieléctricos, así como en filtros ópticos.

se transforma con un signo positivo ($M_x \mathbf{H} = +\mathbf{H}$), mientras que \mathbf{E} se transforma con un signo negativo ($M_x \mathbf{E} = -\mathbf{E}$). Esto es, $O_{M_x} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = +\mathbf{H}(-\mathbf{r})$ y $O_{M_x} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(-\mathbf{r})$. Un modo par esta definido como aquel que es invariante bajo la reflexión O_{M_x} , lo que significa que un modo par tiene $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(-\mathbf{r})$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(-\mathbf{r})$. De manera similar, un modo impar esta definido como aquel que adquiere un signo menos bajo la reflexión O_{M_x} , de tal manera que $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathbf{H}(-\mathbf{r})$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(-\mathbf{r})$.

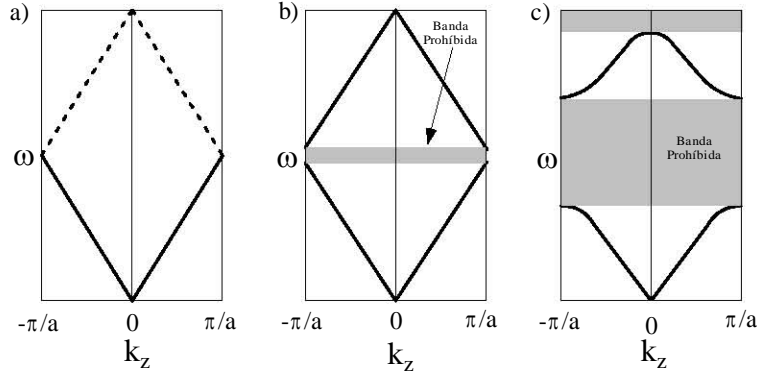


Figura 1.3: Estructura de bandas para tres diferentes películas multicapa, formada por dos materiales dieléctricos. a) Las capas tienen la misma constante dieléctrica. b) Las capas presentan una diferencia entre las constantes dieléctricas muy pequeña o infinitesimal. c) La diferencia en el valor de las constantes dieléctricas de los materiales es muy grande. Fuente: [6].

Como es sabido, estas estructuras pueden actuar como un espejo perfecto para la luz con una determinada frecuencia dentro de una brecha prohibida definida. La forma tradicional en como se explica este fenómeno consiste en permitir que una onda plana se propague a través del material y se consideran las múltiples reflexiones que suceden en cada interfase. El mismo resultado se obtiene al realizar un análisis de la estructura de bandas, el cual se puede extender con gran facilidad a estructuras periódicas más complejas en dos o en tres dimensiones.

Suponemos que el material es periódico en el eje z y homogéneo en el plano xy y cada capa tiene un espaciamiento fijo, a . Los modos correspondientes a este sistema se pueden catalogar usando $\mathbf{k}_{//}$, k_z y n : el vector de onda en el plano xy , el vector de onda en la dirección z y el número de banda. El cristal presenta una simetría translacional continua en el plano xy , por lo que el vector de onda $\mathbf{k}_{//}$ puede adquirir cualquier valor. Sin embargo, el vector de onda k_z , se puede restringir a un intervalo finito de valores o la primera zona de Brillouin, debido a la simetría translacional discreta que presenta el cristal en la dirección z . A partir de estas consideraciones, se puede definir al vector primitivo de la red como $a\hat{\mathbf{z}}$, al vector primitivo de la red recíproca como $(2\pi/a)\hat{\mathbf{z}}$ y la zona de Brillouin como $-\pi/a < k_z \leq \pi/a$.

Si se considera que la luz se propaga enteramente a través de la dirección z , en este caso $\mathbf{k}_{//} = \mathbf{0}$, de forma que la única componente de interés del vector de onda es k_z , la cual por facilidad será abreviada como k .

En la figura 1.3 se observan las gráficas $\omega_n(k)$ para tres películas multicapa. En la primera todas las capas tienen la misma constante dieléctrica, de tal forma que el medio es completamente homogéneo. La gráfica central es para una estructura de materiales alternantes con una diferencia en el valor de las constantes dieléctricas muy pequeño o infinitesimal y finalmente la gráfica que se encuentra en la derecha es de un material con un contraste mucho mayor de la constante dieléctrica.

Al medio dieléctrico uniforme se le ha asignado una periodicidad artificial de a , como se sabe, para un medio uniforme, la velocidad de la luz se reduce por el índice de refracción. El espectro de frecuencias está dado por

$$\omega(k) = \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (1.35)$$

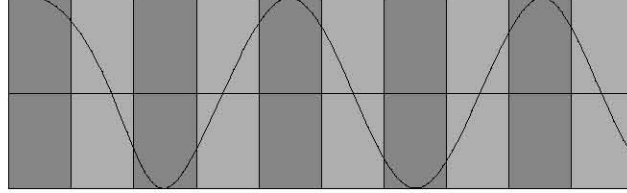
Debido a que se obliga a que k se repita a sí mismo fuera de la zona de Brillouin, las líneas se *doblan* hacia el centro de la gráfica una vez que se encuentran en la orilla de la zona de Brillouin. La gráfica central, es muy parecida a la del dieléctrico uniforme, con la diferencia de que presenta una brecha en la frecuencia entre las ramas superior e inferior de las líneas. Una brecha prohibida de frecuencias es la zona donde ningún modo, sin importar el valor de k , puede existir en el cristal. Como se puede observar de la tercera gráfica al incrementar el contraste entre las constantes dieléctricas, la brecha se incrementa considerablemente.

Se puede entender el origen físico de las brechas prohibidas si se consideran los perfiles de los modos del campo eléctrico para los estados que se encuentran justamente por encima y por debajo de la brecha. La brecha entre las bandas $n = 1$ y $n = 2$ ocurre en la orilla de la zona de Brillouin, en $k = \pi/a$. A partir de la gráfica central de la figura 1.3, correspondiente a una pequeña variación del sistema, podemos observar que para $k = \pi/a$, los modos son ondas estacionarias con una longitud de onda $2a$, el doble de la constante de red del cristal.

Existen solamente dos formas de posicionar una onda estacionaria de este tipo. La posición de los nodos de la onda se debe de encontrar en el centro de cada capa con un valor bajo de ε o en el centro de la capa con un valor alto de ε , cualquier otra posición violaría la simetría central de la celda unitaria. En la figura 1.4 se muestran un esquema de los perfiles de los modos de campo eléctrico para las dos posiciones.

El teorema variacional del electromagnetismo [13], menciona que los modos con frecuencias bajas concentran su energía en las regiones con valores altos de ε , y los modos con altas frecuencias concentran su energía en las zonas con una ε menor. A partir de esta aseveración se puede observar que el modo por debajo de la brecha tiene su potencia concentrada en la región donde el valor de ε es mayor (sombreado oscuro), como lo muestra la figura 1.4, dándole una frecuencia menor. Mientras que

a) Campo eléctrico para el modo en la parte superior de la banda 1



b) Campo eléctrico para el modo en la parte inferior de la banda 2

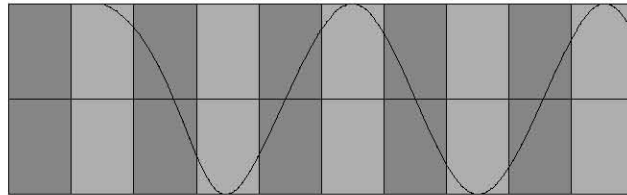


Figura 1.4: Ilustración esquemática de los modos asociados con la brecha prohibida mas baja de la figura 1.3. (a) Campo eléctrico de la banda 1; (b) Campo eléctrico de la banda 2. Fuente: [6].

el modo justo por arriba de la brecha tiene la mayor parte de su potencia en la región donde ε es menor (sombreado claro) por lo que su frecuencia es mayor.

Las bandas por encima y por debajo de la brecha prohibida pueden ser distinguidas por donde concentran su potencia, en regiones de alto valor de ε o bajo ε .

Cabe mencionar que en todos los cristales fotónicos unidimensionales, una brecha prohibida ocurre entre cada par de bandas, ya sea en el centro o en la orilla de la zona de Brillouin. El tamaño de las brechas depende del contraste entre las constantes dieléctricas. La existencia de una brecha se da cuando $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \neq 1$.

1.2.4. Noción de índice de refracción en los cristales fotónicos

El estudio de los cristales fotónicos se ha enfocado, en gran medida, a la investigación de sus propiedades como materiales que no permiten la propagación de la luz en determinadas frecuencias. Sin embargo, también pueden ser utilizados como conductores de luz, cuya conductancia esta determinada directamente por la estructura de bandas del cristal [5].

A través de los cristales fotónicos, las ondas de Bloch viajan con una dirección

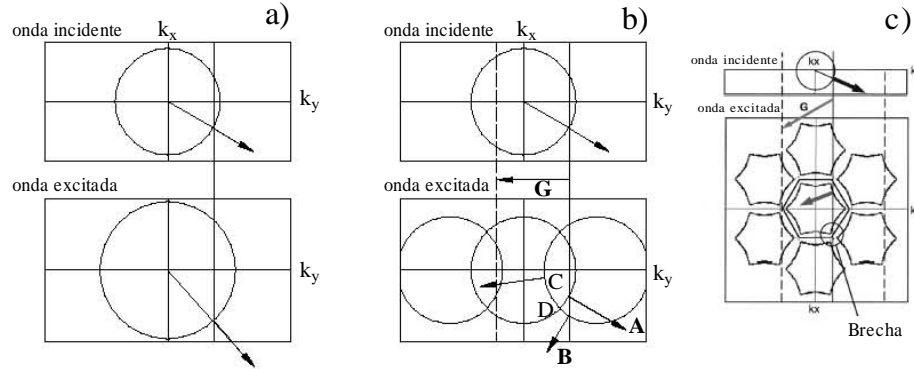


Figura 1.5: (a) Diagrama de SEF para la luz incidente en un dieléctrico. (b) Diagrama de SEF para una rejilla de difracción. y (c) Diagrama de SEF para un cristal fotónico débilmente modulado. Fuente: [11].

definida, a pesar del esparcimiento, pero su propagación es complicada debido a que esta influenciada por el diagrama de bandas.

De acuerdo a Lin *et al* [17] y Kosaka *et al* [18] la propagación de la luz en estructuras periódicas es diferente de la propagación en materiales ordinarios. Dicha propagación no puede ser entendida como refracción debido a que el vector de onda \mathbf{k} , no se conserva debido a la naturaleza periódica de la estructura, ya que el fenómeno de refracción se basa en la conservación de \mathbf{k} . Ha sido reportado por [18] que la propagación de la luz se vuelve muy sensible bajo ciertos ángulos de incidencia o frecuencias, implicando que el índice de refracción tenga un comportamiento anómalo en un cristal fotónico. Dicha explicación no es válida ya que esa propagación es completamente diferente a la propuesta por la ley de Snell, por lo que para este caso la definición de índice carece de sentido.

La propagación de la luz en un cristal fotónico, es básicamente la misma que en una rejilla de difracción, en la cual la luz es regida por la ley de la difracción. Como se mencionó con anterioridad la propagación de la luz es gobernada por la conservación de \mathbf{k} , por lo que debe ser analizado en el espacio \mathbf{k} .

El concepto de índice de refracción para los cristales fotónicos fue estudiado en primer término por Notomi [11] encontrando una región específica en la estructura de bandas en la cual el cristal se comporta con índice de refracción efectivo determinado por la propia estructura de bandas. Dicho índice puede ser menor a la unidad y negativo sin presentar absorción, y puede usarse la ley de Snell para describir la propagación de la luz (cabe mencionar que para un material ordinario el rango de

valores para el índice de refracción, se encuentra entre $1 < n < 3,5$). Joannopoulos *et al* [16], presentan otra teoría, la cual se basa en la curvatura, ya sea cóncava o convexa, de la estructura de bandas para definir el índice de refracción. Este trabajo se basa en la idea presentada por Notomi para obtener el índice de refracción de un cristal fotónico.

La refracción en materiales ordinarios se muestran en la figura 1.5(a), la cual describe el fenómeno de la luz que incide del aire a un material dieléctrico. El círculo en la figura es una superficie de equi-frecuencia (SEF) del dieléctrico, dicho círculo esta determinado por la relación de dispersión (ecuación 1.21). El vector de onda, \mathbf{k} , en el dieléctrico, está determinado por la continuidad de los componentes tangenciales del vector \mathbf{k} en el aire a lo largo de la interfase y la luz siempre se propaga de forma paralela al vector \mathbf{k} en este caso. La figura es una representación gráfica del fenómeno de refracción y de la ley de Snell en el espacio recíproco \mathbf{k} :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1.36)$$

donde el n_1 y n_2 representan los índices de refracción en cada uno de los medios y θ_1 y θ_2 son los ángulos, con respecto a la normal de la interfase, a los cuales se propaga la luz en cada uno de los medios.

En la figura 1.5(b), se muestra la propagación de la luz en una rejilla de difracción con un periodo d . En este caso los círculos (SEF) se repiten a lo largo del eje periódico debido a la periodicidad de la rejilla y de la misma forma se muestra la regla de conservación del vector de onda, satisfaciendo de esta forma las condiciones periódicas de frontera. Como consecuencia de la conservación de \mathbf{k} , se puede observar que más de un rayo diferente se excita en la rejilla. El rayo A corresponde al círculo centrado en el origen, mientras que B corresponde a un rayo difractado. Cabe mencionar que la dirección de propagación de un rayo difractado se encuentra orientado de manera normal a un círculo de difracción. Se observa que el haz incidente se descompone en ondas difractadas, provocando que la dirección de propagación no sea paralela al vector \mathbf{k} . La figura es una representación gráfica de la ley de Bragg

$$m\lambda = d(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad (1.37)$$

donde m es un número entero, λ es la longitud de onda de la luz.

A partir de la discusión mostrada para las rejillas de difracción, no se puede definir un índice de refracción en términos de la ley de Snell para las rejillas, ya que al definir dicho índice sería altamente dependiente del ángulo de incidencia o del ángulo del vector \mathbf{k} , por lo que la ley de Snell no posee significado alguno [11].

En el caso de los cristales fotónicos, la propagación de la luz también se encuentra gobernada por el diagrama de SEF y la conservación de \mathbf{k} a lo largo de la interfase.

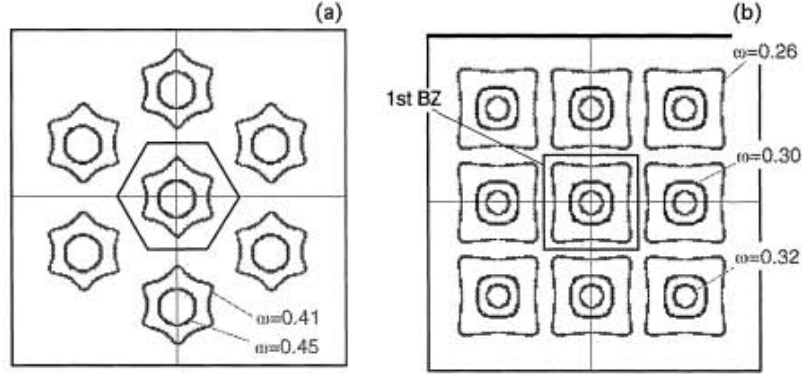


Figura 1.6: SEF triangular (a) y cuadrada (b) de un cristal fotónico bidimensional de barrenos de aire en una placa de GaAs. Tomado de la referencia [11].

Los estados de Bloch en un cristal fotónico son representados como una mezcla de ondas planas y ondas difractadas con vectores recíprocos \mathbf{G} :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{G}} c_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\mathbf{r}} \quad (1.38)$$

De acuerdo a Notomi [11], si los elementos que conforman el cristal presentan un contraste muy bajo en sus constantes dieléctricas, los estados de Bloch de la ecuación 1.38 se pueden definir en términos de los componentes dominantes de \mathbf{G} debido a que el contraste de sus elementos no es alto. Sin embargo, si el contraste es grande, se deben de tomar en cuenta una mayor cantidad de componentes con diferentes valores de \mathbf{G} . Notomi llama a los cristales fotónicos con un bajo contraste como débilmente modulados, mientras que a los que presentan un alto contraste en sus elementos como fuertemente modulados.

En el caso de los cristales fotónicos modulados débilmente, se muestra en la figura 1.5(c). Las SEF generalmente presentan una forma de *estrella* cuyos arcos pertenecen a las diferentes ondas difractadas. La propagación de la luz es esencialmente la misma que en las rejillas de difracción, por lo que dicho fenómeno no se puede catalogar como refracción y por lo tanto no se puede definir un índice de refracción.

Los cristales fotónicos fuertemente modulados presentan un comportamiento diferente a las de las rejillas de difracción. En la figura 1.6 se muestra el diagrama de SEF, de dos tipos de cristales fotónicos bidimensionales, para frecuencias cercanas a una brecha prohibida. En ambos casos, la forma de las SEF se redondea

conforme la frecuencia se acerca a la brecha, cabe mencionar que este efecto no depende de la simetría del cristal, sino de la modulación periódica. Este hecho puede ser explicado debido a que la mezcla de los diferentes componentes del vector \mathbf{G} es mas pronunciado conforme se acerca a la brecha prohibida en los puntos de simetría en el espacio recíproco, los cuales eventualmente eliminan los contornos puntiagudos, lo que produce que la forma de las SEF sean circulares o esféricas cerca de la brecha.

A partir de las características de las SEF antes mencionadas, Notomi propone una analogía entre el comportamiento de la estructura de bandas de un cristal fotónico y las bandas electrónicas de un semiconductor. En un semiconductor un estado de masa efectiva negativo (banda de *huecos*) existe justo por debajo de una brecha prohibida de energía y un estado de masa efectiva positiva (banda de electrones) aparece por encima de la brecha. El mismo comportamiento se da en el diagrama de estados de un cristal fotónico. La analogía proviene del hecho de que el signo de la masa efectiva en un semiconductor y el signo del índice efectivo de refracción del cristal fotónico provienen de la curvatura de las bandas. Más aún, la aproximación de masa efectiva es válida solamente cerca de la brecha prohibida. Un electrón de Bloch en un sólido se comporta generalmente, de forma muy distinta a un electrón libre, pero se comporta como un electrón libre en la proximidad de una banda prohibida y el concepto de masa efectiva puede ser aplicado en dicha región. En este contexto, en un cristal fotónico, un fotón de Bloch se aproxima a un fotón libre (i. e. una onda plana) con un índice de refracción efectivo cerca de la brecha prohibida a pesar del esparcimiento producido por la red periódica. De esta forma, el enfoque de la óptica geométrica se puede adoptar cerca de la brecha prohibida.

Notomi concluye que en un cristal fotónico con un índice de modulación alto, se comporta como un material isotrópico continuo con un índice de refracción efectivo definido dentro de un rango de frecuencias cercano a la brecha prohibida. En este caso, el fenómeno de propagación de la luz se puede describir simplemente por la ley de Snell usando un índice de refracción efectivo. El signo y valor absoluto de dicho índice puede ser modificado por la frecuencia, estructura del cristal y los índices de los materiales que componen el cristal. El índice efectivo puede ser negativo y menor que la unidad.

El índice efectivo de refracción de un cristal fotónico se puede calcular de la siguiente forma. Para una onda plana con un vector de onda \mathbf{k}_i y frecuencia ω incidente de manera normal en una interfase aire-cristal fotónico, el vector de onda \mathbf{k}_f dentro del cristal es paralelo o antiparalelo a \mathbf{k}_i como lo determina el diagrama de bandas. Si

$$\frac{d\omega}{d|\mathbf{k}_f|} > 0 \quad (1.39)$$

\mathbf{k}_f es paralelo a \mathbf{k}_i y consecuentemente los campos EM en el cristal fotónico son derechos u ordinarios, en el caso contrario los campos EM dentro del cristal fotónico se comportan siguiendo la regla de la mano izquierda.

Para un caso general la velocidad de grupo se define como:

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega \quad (1.40)$$

A partir del comportamiento de las SEF se puede determinar el signo de n_{eff} . Si las superficies de equi-frecuencia se mueven hacia fuera de la primera zona de Brillouin conforme la frecuencia aumenta entonces $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{k}_f > 0$; y sí se mueven hacia adentro $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{k}_f < 0$. Se puede demostrar analíticamente que para un sistema compuesto por un cristal fotónico infinito el vector de velocidad de grupo coincide con el vector de flujo de energía (Poynting) [5], es decir:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle u \rangle \mathbf{v}_g \quad (1.41)$$

donde u representa la energía y el símbolo $\langle \rangle$ representa el valor promedio en el tiempo y en la celda unitaria. Así pues el signo de $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{k}$ es equivalente al signo de $\mathbf{S} \cdot \mathbf{k}_f$, y \mathbf{k}_f se encuentra en la primera zona de Brillouin³. Por lo que de acuerdo a Veselago, el signo de n_{eff} será el igual al signo de $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{k}_f$, cuando el cristal fotónico se comporta como un material isotrópico [19]. Finalmente tomando en cuenta las consideraciones anteriores y la relación de dispersión para materiales isotrópicos, el índice efectivo de refracción puede ser definido de la siguiente forma :

$$n_{eff} = \text{sgn}(\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{k}_f) \left(\frac{c}{\omega} |\mathbf{k}_f| \right) \quad (1.42)$$

A partir de la expresión 1.42 y el diagrama de bandas se puede calcular el índice de refracción efectivo de cualquier cristal fotónico con un grado alto de modulación y como se puede observar el signo de n_{eff} está determinado por el comportamiento de las SEF.

³El cristal fotónico es una estructura periódica en el espacio, por lo que a lo largo de este trabajo, cuando se refiera a \mathbf{S} dentro del cristal fotónico, se considera el promedio espacial dentro de la celda unitaria del promedio temporal del vector de Poynting.

Capítulo 2

Cálculo del diagrama de bandas

En los cristales fotónicos de dos dimensiones (2D) existen, principalmente dos tipos de arreglos, que consisten en redes cuadradas o triangulares de elementos macroscópicos, ya sean dieléctricos, metálicos o una combinación de ambos. Estos dos arreglos, en su forma más sencilla, presentan diferentes ventajas debido a su simplicidad y a que solamente presentan un elemento dieléctrico o metálico en cada celda unitaria, lo que hace que los cálculos sean más sencillos. En la figura 2.1 se muestran dos especímenes típicos de estos cristales.

Como se mencionó en el capítulo anterior de este trabajo, un cristal fotónico bidimensional es periódico a lo largo de dos de sus ejes y homogéneo a lo largo del tercero. Las bandas fotónicas aparecen en el plano de periodicidad y las ondas EM que se propagan en dicho plano, sus modos se pueden separar en dos polarizaciones independientes. A diferencia de las películas de multicapa, las cuales presentan bandas fotónicas solamente con luz que incide de manera normal sobre estas, para los cristales fotónicos de dos dimensiones existen bandas para la luz incidente en cualquier dirección del plano de periodicidad.

Dado a que el sistema es homogéneo en la dirección z , se sabe que los modos deben de ser oscilatorios en dicha dirección, sin restricción alguna en el vector de onda k_z . Además, como ya se ha mencionado, el sistema tiene una simetría translacional en el plano xy . En específico, $\varepsilon(\rho + \mathbf{R})$ tanto para la red triangular como la cuadrada. Al aplicarse el teorema de Bloch, la atención se puede centrar en los valores de cualquier vector de onda transversal, $\mathbf{k}_{//} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}$, que se encuentre dentro de la primera zona de Brillouin.

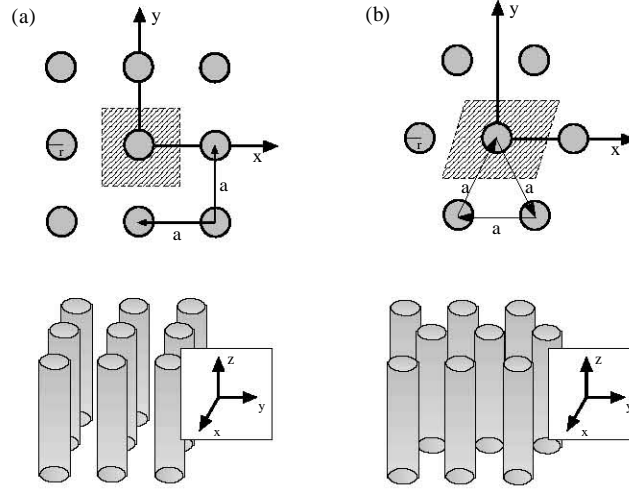


Figura 2.1: Esquema de dos cristales fotónicos bidimensionales. Estos materiales se encuentran conformados por una red cuadrada (a) o triangular (b) de postes dieléctricos o metálicos con radio r . Dichos materiales son homogéneos en la dirección z y periódicos a lo largo de x y y con un parámetro de red a . La zona sombreada representa la celda unitaria para cada red

2.1. Cristales fotónicos metálicos

Con respecto a los cristales fotónicos dieléctricos, los cristales fotónicos con elementos metálicos poseen algunas diferencias y ventajas para alcanzar un índice de refracción efectivo negativo. La ventaja más significativa es que el contraste del índice de refracción de los componentes del cristal puede disminuir comparado con los cristales fotónicos dieléctricos, por lo que refracción negativa se puede observar en un rango mayor de materiales. Además la presencia de metales en un cristal fotónico puede incrementar la dependencia a la polarización y mejorar la capacidad de autoenfoco del cristal fotónico [13], [20].

Las propiedades de un metal pueden ser definidas por la siguiente función dieléctrica efectiva:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \quad (2.1)$$

donde ω_p es la frecuencia de plasma, y γ se relaciona con la conductividad σ , por

$$\gamma = \frac{\omega_p^2 \varepsilon_0}{\sigma} \quad (2.2)$$

Si la conductividad es grande y ω se encuentra por debajo de la frecuencia de plasma, entonces $\varepsilon(\omega)$ es esencialmente negativa.

Por simplicidad, consideramos metales ideales, en los cuales el campo eléctrico es cero en todo el metal sin pérdidas óhmicas. Dicho metal ideal es el modelo más simple y apropiado en la región de las microondas.

En los cristales fotónicos metálicos de dos dimensiones la polarización TM presenta una característica especial, debido a que el esparcimiento producido por la red periódica, presenta un mismo comportamiento que un cristal fotónico dieléctrico con un contraste *infinito* [21]. En otras palabras, las ondas TM sufren la mayor modulación espacial posible en un cristal fotónico.

2.2. Descripción del algoritmo de diferencias finitas

Se consideran dos tipos de redes; la red cuadrada y la red triangular, ambas compuestas de elementos metálicos. Al utilizar el modelo de metal ideal, este arreglo periódico está completamente descrito por la función de conductividad, que para el caso de la red cuadrada es:

$$\sigma(\mathbf{x}_{//}) = \begin{cases} \infty, & (x - ma)^2 + (y - na)^2 < r^2 \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.3)$$

y para la red triangular, la conductividad está definida por:

$$\sigma(\mathbf{x}_{//}) = \begin{cases} \infty, & [x - (m + \frac{n}{2})a]^2 + [y - \frac{\sqrt{3}}{2}na]^2 < r^2 \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.4)$$

En las ecuaciones 2.3 y 2.4, $\mathbf{x}_{//} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ es el desplazamiento transversal, r es el radio de los cilindros conductores, a es el parámetro de red o espaciado de la red y m y n son números enteros cualquiera. Además el perfil de conductividad satisface la condición periódica

$$\sigma(\mathbf{x}_{//} + \mathbf{T}_{mn}) = \sigma(\mathbf{x}_{//}) \quad (2.5)$$

y el conjunto de vectores \mathbf{T}_{mn} que indican la periodicidad están definidos como:

$$\mathbf{T}_{mn} = \begin{cases} ma\sigma\hat{\mathbf{x}} + na\hat{\mathbf{y}}, & \text{red cuadrada} \\ (m + \frac{n}{2})a\sigma\hat{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{3}}{2}na\hat{\mathbf{y}}, & \text{red triangular} \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2.1. Formulación del eigen-problema

A partir de las ecuaciones de Maxwell (1.6-1.9) y de la periodicidad espacial del cristal fotónico, los campos EM se pueden descomponer en dos modos completamente independientes: los modos Transversal Eléctrico (TE) y Transversal Magnético (TM). Dichos modos se encuentran definidos con respecto al plano de simetrías del cristal y para el caso del modo TM, este corresponde al modo TE convencional de una guía de onda, que se encuentra definido con respecto a la dirección de propagación de la onda [22].

Para el caso específico de los modos TM, todas las componentes de los campos, tanto eléctrico como magnético, pueden ser expresadas por medio de la componente axial (dirección z) del campo eléctrico.

Como se discutió previamente los modos TM presentan ventajas con respecto a los modos TE en cuanto a la generación de una región de propagación con índice de refracción negativo dentro de un cristal fotónico metálico, además de que la verificación experimental de dicho modo de transmisión es mucho más sencilla de medir con la infraestructura disponible. A partir de este punto se referirán a los modos TM como simplemente modos.

Dado que el sistema a estudiar es homogéneo a lo largo del eje z , se puede tomar la transformada de Fourier de \mathbf{E} , en la coordenada axial z y el tiempo, t :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_{//}, k_z, \omega) = \int \int \mathbf{E}(\mathbf{x}_{//}, z, t) e^{i(k_z z - \omega t)} dz dt \quad (2.7)$$

la cual por cuestiones de notación será llamada $\mathbf{E}(\mathbf{x}_{//})$, suponiendo que la frecuencia ω y el vector de onda longitudinal k_z son magnitudes fijas. La ecuación de Helmholtz para $\mathbf{E}(\mathbf{x}_{//})$, que se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell es

$$\nabla_{//}^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}_{//}) = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}_{//}). \quad (2.8)$$

La ecuación anterior es un eigen-problema, el cual cumple con todas las condiciones descritas en el capítulo 1. Siguiendo la notación del capítulo 1 y suponiendo que $k_z = 0$, la ecuación 2.8 se puede expresar como:

$$\Theta \mathbf{E}(\mathbf{x}_{//}) = \left(-\frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}_{//}). \quad (2.9)$$

Cabe mencionar que debido a que se está utilizando el modelo de metal ideal el operador Θ cumple con todas las propiedades mostradas en el capítulo 1.

La condición de frontera para la superficie S de los postes conductores, considerando el modelo de metal ideal es la siguiente:

$$\mathbf{E}|_S = 0 \quad (2.10)$$

De la misma forma que la expresión 1.29 las eigen-funciones de la ecuación 2.9 se pueden escribir en forma de estados de Bloch,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_{//} + \mathbf{T}_{mn}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}_{//}) e^{i\mathbf{k}_{//} \cdot \mathbf{T}_{mn}} \quad (2.11)$$

Tomando en cuenta estas consideraciones, el eigen-problema presentado en la ecuación 2.9 se debe de resolver solamente dentro de la celda unitaria fundamental definida por:

$$|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2} \quad \text{para la red cuadrada} \quad (2.12)$$

$$\left| x - \frac{y}{\sqrt{3}} \right| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{\sqrt{3}}{4}a \quad \text{para la red triangular} \quad (2.13)$$

A partir de la expresión 2.11 se pueden deducir las siguientes condiciones de frontera periódicas:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}\left(\frac{a}{2}, y\right) &= e^{ik_x a} \mathbf{E}\left(-\frac{a}{2}, y\right) \\ \mathbf{E}\left(x, \frac{a}{2}\right) &= e^{ik_y a} \mathbf{E}\left(x, -\frac{a}{2}\right) \end{aligned} \right\} \text{ para la red cuadrada} \quad (2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}\left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}y, y\right) &= e^{ik_x a} \mathbf{E}\left(-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}y, y\right) \\ \mathbf{E}\left(x, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right) &= e^{ik_x a/2 + ik_y \sqrt{3}a/2} \mathbf{E}\left(x, -\frac{a}{2}\right) \end{aligned} \right\} \text{ para la red triangular} \quad (2.15)$$

La ecuación 2.9, en conjunto con las condiciones de frontera 2.10 y 2.14 o 2.15, dependiendo del tipo de red que se este trabajando, definen completamente el eigen-problema de encontrar $\omega(\mathbf{k}_{//})$.

La periodicidad impuesta por los estados de Bloch en la expresión 2.11, significa que todos los valores posibles de $\mathbf{k}_{//}$ pueden ser restringidos a aquellos que se encuentren en la zona irreducible de Brillouin de la red recíproca, los cuales se muestran tanto para la red cuadrada como para la red triangular en la figura 2.2. Los tres puntos de alta simetría definidos como Γ , X y M pertenecientes a la red cuadrada, corresponden respectivamente a $\mathbf{k}_{//} = \mathbf{0}$, $\mathbf{k}_{//} = (\pi/a)\hat{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{k}_{//} = (\pi/a)(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$. En lo que se refiere a la red triangular, los tres puntos de alta simetría Γ , M y K corresponden a $\mathbf{k}_{//} = \mathbf{0}$, $\mathbf{k}_{//} = (2\pi/\sqrt{3}a)\hat{\mathbf{y}}$ y $\mathbf{k}_{//} = (2\pi/3a)(\hat{\mathbf{x}} + \sqrt{3}\hat{\mathbf{y}})$, respectivamente.

2.2.2. Esquema numérico del cálculo de los eigen-valores

El cálculo de los eigen-valores para la propagación de las ondas EM en los cristales fotónicos de dos dimensiones se realizó mediante el método de diferencias

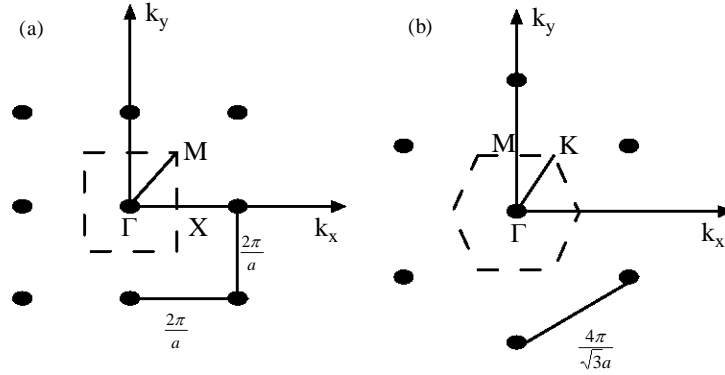


Figura 2.2: Redes recíprocas y zonas de Brillouin (zonas delimitadas por las líneas punteadas) para la red cuadrada (a) y (b) la red triangular.

finitas en el espacio real. Este método ha sido utilizado para obtener el diagrama de bandas de cristales fotónicos con elementos dieléctricos [23] y metálicos [24].

La ecuación diferencial a resolver (2.9) es una ecuación diferencial parcial, de segundo orden y en dos dimensiones. La forma general de dicha ecuación es la siguiente:

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi + g = 0 \quad (2.16)$$

donde a , b , c , d , e , f y g pueden ser funciones de las variables independientes x y y y de la variable dependiente ϕ .

De acuerdo a [25] y [26] la ecuación 2.16 se puede clasificar en *elíptica* cuando $b^2 - 4ac < 0$, *parabólica* cuando $b^2 - 4ac = 0$, e *hiperbólica* cuando $b^2 - 4ac > 0$. Claramente la ecuación 1.12 es una ecuación de tipo elíptica y cabe mencionar que tanto la ecuación de Laplace como la de Poisson son ecuaciones diferenciales elípticas.

El método de diferencias finitas se utiliza para obtener la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales mediante la aproximación de las derivadas en un punto de la función de interés utilizando *diferencias* en un intervalo pequeño, i.e. $\partial\phi/\partial x$ es reemplazado por $\delta\phi/\delta x$ donde δx es muy pequeño y y es constante.

Aproximaciones en diferencias para las derivadas

Cuando una función U y sus derivadas son finitas y continuas en x , entonces por el teorema de Taylor,

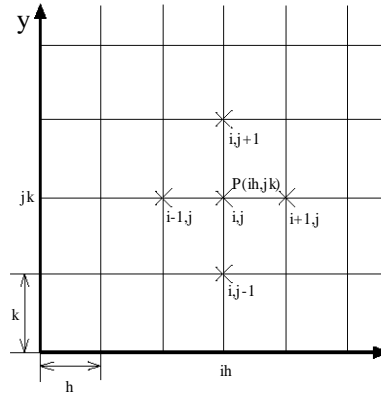


Figura 2.3: Retícula o malla utilizada para la aplicación del método de diferencias finitas sobre una superficie ortogonal.

$$U(x+h) = U(x) + hU'(x) + \frac{1}{2}h^2U''(x) + \frac{1}{6}h^3U'''(x) + \dots \quad (2.17)$$

y

$$U(x-h) = U(x) - hU'(x) + \frac{1}{2}h^2U''(x) - \frac{1}{6}h^3U'''(x) + \dots \quad (2.18)$$

donde h es cualquier valor diferente de cero. Si se suman las expresiones 2.17 y 2.18, y se asume que los términos que contengan potencias mayores a cuatro de h son mucho menores en comparación con los términos con potencias menores de h , se tiene la siguiente expresión para la segunda derivada de la función U .

$$U''(x) = \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x=x} \approx \frac{1}{h^2} [U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)] \quad (2.19)$$

La ecuación 2.19 tiene un error de truncación del orden de h^2 .

Notación para funciones de dos variables

Se asume que U es una función de las variables independientes x y y . Se subdivide el plano xy en un conjunto de rectángulos iguales con lados $\delta x = h$ y $\delta y = k$, mediante una serie de líneas paralelas al eje y , con el mismo espaciamiento, definidas por $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$, y por líneas equiespaciadas paralelas al eje x definidas por $y_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \dots$, como se muestra en la figura 2.3.

Se define el valor de U en un punto representativo de la red $P(ih, jk)$ como:

$$U_P = U(ih, jk) = U_{i,j} \quad (2.20)$$

Entonces de acuerdo a la ecuación 2.19 se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{U[(i+1)h, jk] - 2U[ih, jk] + U[(i-1)h, jk]}{h^2} \quad (2.21)$$

i.e.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \quad (2.22)$$

con un error de truncación del orden de h^2 . De forma similar, se obtiene una expresión para la variable y .

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} \quad (2.23)$$

con un error del orden k^2 .

Esquema numérico de la red cuadrada

Como se mencionó en la sección anterior de este trabajo, el cálculo de los eigenvalores necesarios para la construcción del diagrama de bandas de cualquier cristal fotónico se puede limitar al área dentro de la celda unitaria fundamental del cristal, por lo que para el caso de la red cuadrada se cubre dicha celda con una malla cuadrada con $(2N+1) \times (2N+1)$ puntos, donde N , es cualquier número entero positivo. Fuera de los postes conductores, la ecuación 2.9 se puede aproximar mediante una suma de las ecuaciones 2.22 y 2.23 y debido a que la malla que cubre la celda unitaria es cuadrada, el espaciamiento vertical y horizontal entre los diferentes puntos de la malla son iguales, $h = k$. Para el cálculo del diagrama de bandas para la red cuadrada, se tiene la aproximación en diferencias finitas de la ecuación 2.9 para el punto (i, j)

$$E_{i+1,j} + E_{i-1,j} + E_{i,j+1} + E_{i,j-1} - 4E_{i,j} = -\gamma^2 h^2 E_{i,j} \quad (2.24)$$

esta ecuación consiste en relaciones lineales entre los valores $E_{i,j}$ de la función $E(\mathbf{x}_{//})$ en el punto (i, j) de la red, de la misma forma que se muestra en la figura 2.3. Cabe mencionar que el origen de la malla (el punto $i = 0$ y $j = 0$), corresponde al origen de la celda fundamental, mostrado en la figura 2.1.

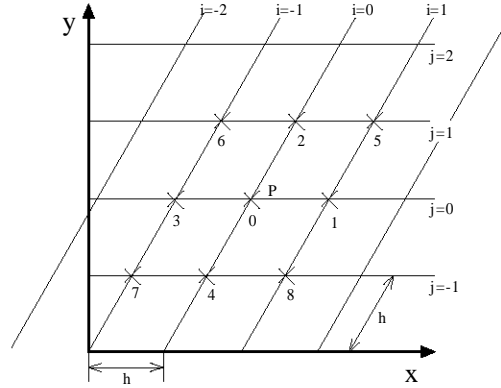


Figura 2.4: Esquema de la malla utilizada para la aplicación del algoritmo de diferencias finitas para la red triangular.

En la ecuación 2.24 $h = a / (2N + 1)$ y se le conoce como paso de malla o espaciamiento, y $\gamma^2 = \omega^2 / c^2$. Las condiciones de frontera periódicas, previamente definidas por la ecuación 2.14, se pueden expresar explícitamente en términos de los valores de $E_{i,j}$ que componen la malla, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} E_{N+1,j} &= E_{-N,j} e^{ik_x a} \\ E_{i,N+1} &= E_{i,-N} e^{ik_y a} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para el caso de los puntos de la malla que caigan dentro de los postes conductores, son excluidos del sistema de ecuaciones lineales representado por la expresión 2.24 utilizando la condición de frontera de la ecuación 2.10. Dicha condición de frontera se implementa al fijar el valor de $E_{i,j} = 0$ para el punto de la malla (i, j) que se encuentre dentro de los cilindros conductores.

Debido a que no se consideran las pérdidas electrodinámicas dentro del cristal y de acuerdo a [24], el sistema de ecuaciones lineales presenta una matriz de coeficientes Hermitiana, lo cual mejora en gran medida la convergencia del algoritmo. El sistema final se encuentra compuesto por un conjunto cerrado de $(2N + 1)^2 - M$ ecuaciones lineales, donde M es el número de puntos de la red que caen dentro de los cilindros conductores.

Una vez que se tiene completo el sistema de ecuaciones lineales, se calculan los eigen-valores, γ , de la matriz de coeficientes del sistema y se grafican para obtener el diagrama de bandas del cristal fotónico.

Esquema numérico de la red triangular

Para el caso de la red triangular es necesario realizar diferentes consideraciones. En primer lugar, la celda unitaria, mostrada en la figura 2.1, tiene la forma de un cuadrilátero cuyos ángulos internos no son rectos, por lo que se decidió realizar modificaciones a la malla utilizada para esta red. Como se muestra en la figura 2.4, se decidió utilizar una malla con la misma forma que la celda unitaria, de tal forma que la malla se ajustase de manera perfecta a lo largo de toda la red, evitando errores en la aproximación del método de diferencias finitas [25]. Para este caso se definen los puntos (i, j) de acuerdo a líneas paralelas al contorno de la celda unitaria. Cabe mencionar que la relación de los puntos de la malla con los ejes x y y es completamente distinta a la de la red cuadrada. Por facilidad se nombrará al punto (i, j) como 0, al punto $(i, j + 1)$ como 2, etc. Una vez más hay que mencionar que el origen de la malla (el punto $i = , j = 0$), corresponde al origen de la celda fundamental, mostrado en la figura 2.1.

El Laplaciano de cualquier función se encuentra representado como $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, y si se definen:

$$\xi = h\frac{\partial}{\partial x}, \quad \eta = h\frac{\partial}{\partial y} \quad (2.26)$$

entonces

$$\xi^2 + \eta^2 = h^2\nabla^2 \quad (2.27)$$

De acuerdo al teorema de Taylor, la ecuación 2.17 se puede expresar como $U(x+h) = (e^{h(d/dx)})U(x)$, y a partir de la figura 2.4 se tiene que

$$E_1 = e^\xi E_0 \quad E_2 = e^{\frac{1}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta} E_0 \quad E_3 = e^{-\xi} E_0 \quad E_5 = e^{\frac{3}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta} E_0, \text{ etc.} \quad (2.28)$$

Debido a que el operador Θ es simétrico en sus derivadas [26] se pueden definir las siguientes sumas simétricas

$$\begin{aligned} S_1 &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \\ S_2 &= E_5 - E_6 + E_7 - E_8 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si se sustituyen las expresiones 2.29 en términos de E_0 y expandiendo los exponentiales en potencias de ξ y η , y despreciando los términos con potencias mayores a cuatro, se tiene para S_1 :

$$\frac{S_1}{E_0} = 4 + \left(\frac{5}{4}\xi^2 + \frac{3}{4}\eta^2 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi\eta + O(h^4) \quad (2.30)$$

y para S_2 :

$$\frac{S_2}{E_0} = 2\xi^2 + 2\sqrt{3}\xi\eta + O(h^4) \quad (2.31)$$

Al combinar las ecuaciones 2.27, 2.30 y 2.31 se puede obtener una aproximación a la ecuación 2.9 para la red triangular.

$$\begin{aligned} & 4(E_{i+1,j} + E_{i-1,j} + E_{i,j+1} + E_{i,j-1}) - \\ & (E_{i+1,j+1} - E_{i+1,j-1} + E_{i-1,j-1} - E_{i-1,j+1}) - 16E_{i,j} \\ & = -3\gamma^2 h^2 E_{i,j} \end{aligned} \quad (2.32)$$

La aproximación mostrada en la ecuación 2.32 tiene un error de truncación del orden de h^2 , de igual forma que la expresión 2.24 utilizada para la red cuadrada.

Las condiciones de frontera de los puntos de la malla que se encuentran dentro de los postes conductores se resuelven de la misma forma que en la red cuadrada, mientras que las condiciones de frontera periódicas para la red triangular se expresan de acuerdo a la ecuación 2.15 y corresponden a

$$\begin{aligned} E_{N+1,j} &= E_{-N,j} e^{ik_x a} \\ E_{i,N+1} &= E_{i,-N} e^{i(a/2)(k_x + \sqrt{3}k_y)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

El sistema de ecuaciones que se obtiene para la red triangular tiene las mismas características que aquel descrito para la red cuadrada, es decir los eigen-valores, γ , necesarios para la obtención del diagrama de dispersión del cristal fotónico provienen de la matriz de coeficientes del sistema.

2.3. Diagrama de bandas

Los cálculos del diagrama de bandas se hicieron para los dos tipos de cristales fotónicos bidimensionales descritos en este capítulo (red cuadrada y triangular). Se consideraron cilindros metálicos (ideales) inmersos en el vacío con un parámetro de red, a . Los radios de los cilindros se escogieron para satisfacer $r = 0,2a$, correspondiente a una fracción de llenado de apenas el 13% de la celda unitaria. Los diagramas presentados en esta sección se encuentran normalizados en función del parámetro a . Para todas la gráficas presentadas, $k_z = 0$, con lo cual no se pierde la generalidad de los resultados.

Todos los cálculos fueron realizados en una computadora con procesador Intel Pentium 4 con un reloj de 2 GHz y una RAM de 768 MB.

Por facilidad y por cuestiones de edición, se presentan todas las figuras y gráficas referentes al cálculo del diagrama de bandas de cada red al final de este capítulo.

2.3.1. Red cuadrada

En el caso del cristal fotónico definido por la red cuadrada se realizó el cálculo, mediante el algoritmo de diferencias finitas descrito en las secciones anteriores, de los eigen-valores de la expresión 2.9 utilizando diferentes valores de N . El número total de puntos en los que se dividió la celda unitaria fue de $(2N + 1)^2$. Se buscó que el número de puntos de la malla que cubrió la celda unitaria fuesen impares con la finalidad de que las condiciones de frontera periódicas se cumplieran de acuerdo con la descripción del algoritmo. En la figura 2.5 se muestra el cálculo de los eigen-valores para las 7 primeras bandas del cristal y el vector de onda $\mathbf{k}_{//} = \mathbf{0}$ (punto Γ) variando el parámetro N . A partir de dicha gráfica se puede observar que el algoritmo se estabiliza a partir de $N = 20$, definiendo de esta manera la malla utilizada para los cálculos. Es necesario mencionar que las bandas superiores, al presentar una frecuencia mayor, requieren una malla mucho mas densa para que el algoritmo converja.

Diagrama de bandas

La figura 2.6 muestra el diagrama de dispersión o diagrama de bandas para los modos TM de un cristal fotónico cuadrado conforme el vector de onda $\mathbf{k}_{//}$ varía del punto más alejado al centro de la zona irreductible de Brillouin (punto M en la figura 2.2) a la orilla más cercana (punto X en la figura 2.2) y al centro de la zona de Brillouin (punto Γ en la figura 2.2). En la gráfica se muestra que existe una brecha prohibida entre las bandas ω_1 y ω_2 . La brecha prohibida tiene una amplitud de $\omega = 0,133 (2\pi c/a)$ y sus límites se encuentran entre $\omega = 0,732 (2\pi c/a)$ y $\omega = 0,864 (2\pi c/a)$. Además existe una frecuencia de corte para el sistema en $\omega = 0,527 (2\pi c/a)$.

Para la mayoría de los cristales fotónicos, el comportamiento con un índice de refracción efectivo se puede observar con mayor facilidad en las primeras bandas, ya que existen un grado menor de desorden en las bandas bajas [13], para el caso del cristal fotónico analizado en esta sección se investigarán con más detalle las primeras tres bandas, con la finalidad de encontrar un rango de frecuencias en la cual se pueda observar un índice de refracción efectivo.

En la figura 2.7 se muestra una representación tridimensional de la estructura de bandas del cristal fotónico bajo estudio. Solamente se muestran las tres primeras bandas del diagrama de dispersión. A partir de dicha representación se pueden obtener las SEF para cada una de las bandas y de estas determinar si existe una región de frecuencias en la cual se pueda definir un índice de refracción efectivo. Además de la representación en 3D de la estructura de bandas se puede observar que para las frecuencias de las dos primeras bandas, cercanas al punto Γ , la estructura

de bandas presenta una forma similar a la de un material dieléctrico convencional, mientras que para otras frecuencias se observa otro tipo de comportamiento.

El diagrama de SEF de la primera banda, ω_1 , se muestra en la figura 2.8, dicha banda se encuentra limitada por las frecuencias $0,527 (2\pi c/a) - 0,732 (2\pi c/a)$. Se puede observar claramente en el diagrama que alrededor del punto Γ del espacio recíproco las SEF presentan un comportamiento circular, por lo que sería posible definir un índice de refracción efectivo. El rango en el cual se observa dicho comportamiento es entre las frecuencias $0,527 (2\pi c/a) - 0,582 (2\pi c/a)$, que representa un ancho de banda de $0,055 (2\pi c/a)$. A partir de dicho diagrama se puede observar que el vector de velocidad de grupo $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega$, para esas frecuencias, es normal a las SEF y presenta una dirección que apunta hacia afuera de la zona de Brillouin.

Las SEF correspondientes a la banda ω_2 están en la figura 2.9, una vez más se observa que alrededor del punto Γ , las SEF son circulares. El rango donde se observa dicho comportamiento es: $1,020 (2\pi c/a) - 1,060 (2\pi c/a)$, lo que es un ancho de banda de $0,040 (2\pi c/a)$. En esta banda el vector de velocidad de grupo se dirige hacia el centro de la zona de Brillouin.

En la banda ω_3 no se puede observar un comportamiento circular para las SEF como se muestra en la figura 2.10. En esta banda es imposible determinar un índice de refracción efectivo, por lo que la propagación de la luz a través del cristal será muy parecida a la producida por una rejilla de difracción.

Índice de refracción

La figura 2.11 muestra el comportamiento del índice de refracción de las dos primeras bandas, dicho índice fue calculado a partir de la expresión 1.42 y la región en donde el índice efectivo no se puede definir, que coincide con la banda de frecuencias en la que las SEF no son circulares, se observa cuando las líneas correspondientes a cada una de las direcciones de propagación dentro del cristal se separan. La primera banda presenta un índice de refracción positivo en el rango de $0 - 0,4$ en las frecuencias anteriormente mencionadas, mientras que la segunda banda, $-0,2 \leq n_{eff} \leq 0$, para la rango de frecuencias donde las SEF son circulares.

2.3.2. Red triangular

La convergencia del algoritmo de diferencias finitas para la red triangular se dio para $N > 20$, este comportamiento se observa claramente en la figura 2.12, donde se muestran los eigen-valores calculados para las 7 primeras bandas del cristal, fijando el vector de onda $\mathbf{k}_{//} = \mathbf{0}$ (punto Γ). De la misma forma que en la red cuadrada, para un correcto cálculo de las bandas con frecuencias altas es necesario un malla

más fina o mejor dicho un valor más grande de N .

Diagrama de bandas

El diagrama de bandas o de dispersión para los modos TM del cristal fotónico conformado por la red triangular se muestra en la figura 2.13. Dicho diagrama se presenta variando el vector de onda $\mathbf{k}_{//}$ desde el punto más alejado (K) al centro de la zona irreductible de Brillouin al punto más cercano (M) y finalmente al centro de la zona de Brillouin (Γ). En la gráfica se observa que existe una brecha prohibida entre las bandas ω_2 y ω_3 con una amplitud de $0,033 (2\pi c/a)$ y sus límites son $1,145 < \omega_{brecha}/(2\pi c/a) < 1,178$. La frecuencia de corte debido a la simetría del sistema es de $0,628 (2\pi c/a)$.

De la misma forma que en la red cuadrada, se investigarán solamente las tres primeras bandas del cristal fotónico con la finalidad de observar un comportamiento de las bandas en las cuales se puede asignar un índice de refracción efectivo. En la figura 2.14 se observa la representación en tres dimensiones de la estructura de bandas, a partir de dicho esquema se puede ver que la forma de las dos primeras bandas se comporta como un dieléctrico convencional en puntos cercanos al centro de la zona de Brillouin, mientras que para la tercera banda ese comportamiento no es observable.

En la figura 2.15, se observa el diagrama de SEF para la primera banda. Dicha banda se encuentra limitada por $0,628 < \omega_1 < 0,804$. Claramente se puede observar que alrededor del punto Γ las SEF presentan un comportamiento circular. El rango de frecuencias donde las SEF son circulares es: $0,628 < \omega_{c_1}/(2\pi c/a) < 0,713$, representando un ancho de banda de $0,085 (2\pi c/a)$. A partir de la definición de \mathbf{v}_g , se puede ver que dicho vector se dirige hacia afuera y es positivo para ω_{c_1} .

Para la segunda banda el diagrama de SEF se encuentra representado en la figura 2.16. Los límites de esa banda se encuentran en $0,804 < \omega_1/(2\pi c/a) < 1,145$. Se observa de la misma forma que para la primera banda que las SEF son circulares cerca de Γ , y la región donde presentan dicho comportamiento se encuentra limitado por las frecuencias $0,927 < \omega_{c_2}/(2\pi c/a) < 1,145$, con un ancho de banda de $0,218 (2\pi c/a)$. Para las frecuencias ω_{c_2} , se observa que el vector \mathbf{v}_g es negativo y se dirige hacia el centro de la zona de Brillouin.

La tercera banda, ω_3 , no presenta comportamiento circular cerca del punto Γ , por lo que no se puede determinar una dirección de propagación única para una onda que se transmite a través del cristal en las frecuencias comprendidas por dicha banda. El rango de frecuencias es $1,1778 < \omega_1/(2\pi c/a) < 1,216$. Su SEF se muestra en la figura 2.17.

Índice de refracción

El comportamiento del índice de refracción de las primeras dos bandas para la red triangular esta representado en la figura 2.18 y fue calculado a partir del diagrama de bandas y la expresión 1.42. La región donde no se puede definir un índice de refracción efectivo se observa cuando las líneas correspondientes a cada una de las direcciones de propagación dentro del cristal se separan. Para la primera banda, el índice de refracción es positivo y se encuentra en el rango de $0 \leq n_{eff} \leq 0,58$. Para la segunda banda los valores del índice son negativo y se encuentran limitados por: $-0,45 \leq n_{eff} \leq 0$.

2.3.3. Análisis comparativo entre la red cuadrada y la red triangular

A partir de la información recaba mediante el algoritmo de diferencias finitas, se puede concluir que el red triangular presenta un mayor ancho de banda en el que se puede observar una región donde el índice de refracción adquiere un valor definido. El interés fundamental de este trabajo se basa en la región donde el cristal fotónico se comporta con un índice de refracción negativo, por lo que la red triangular muestra una región aproximadamente cinco veces mayor comparado con la red cuadrada. Con base a este análisis, se puede afirmar que la red triangular es más adecuada para la observación de la refracción negativa.

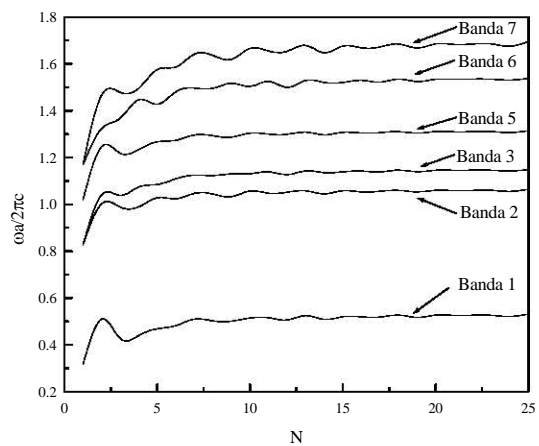


Figura 2.5: Gráfica de los valores de Γ de las primeras 7 bandas para la red cuadrada contra el parámetro N , el algoritmo converge para valores de $N > 20$.

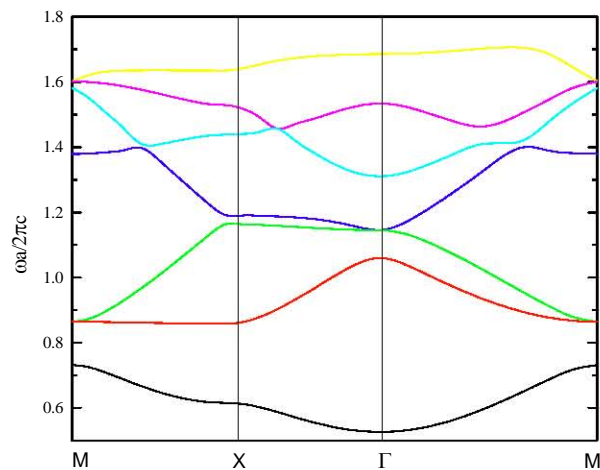


Figura 2.6: Estructura fotónica de bandas de un cristal fotónico metálico con una red cuadrada y $r/a = 0,2$.

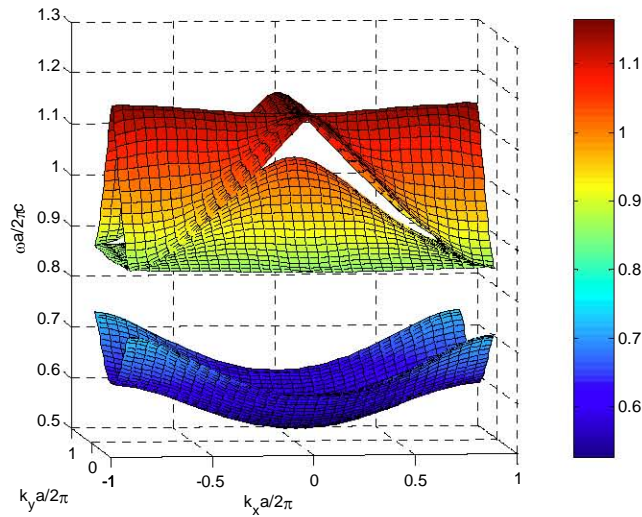


Figura 2.7: Representación en 3D de la estructura de bandas fotónicas de la red cuadrada (sólo se muestran las tres primeras bandas).

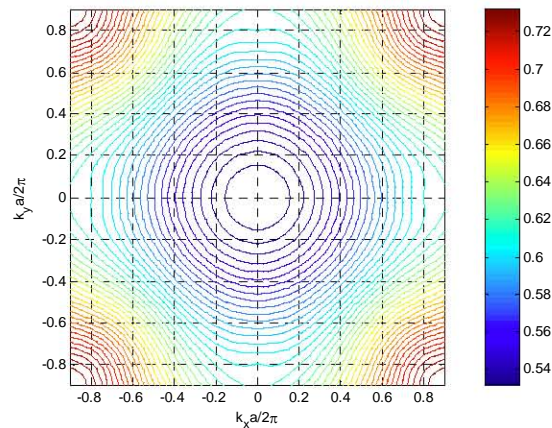


Figura 2.8: Diagrama de las superficies de equifrecuencia (SEF) para la segunda banda del cristal fotónico cuadrado. Las frecuencias para este diagrama se encuentran entre $0,527 (2\pi c/a) - 0,732 (2\pi c/a)$ y el intervalo de frecuencia entre las líneas es de $0,005 (2\pi c/a)$.

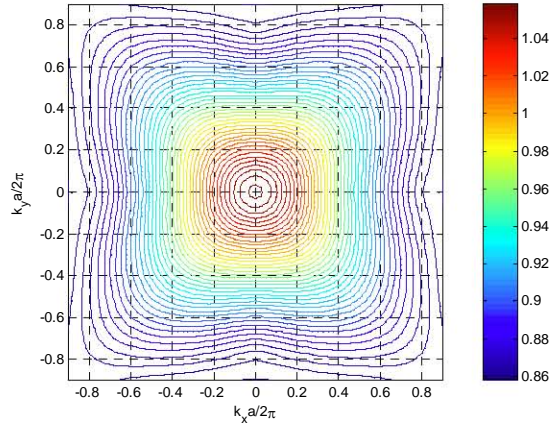


Figura 2.9: Diagrama de las superficies de equifrecuencia (SEF) para la segunda banda del cristal fotónico cuadrado. Las frecuencias para este diagrama se encuentran entre $0,858 (2\pi c/a) - 1,060 (2\pi c/a)$ y el intervalo de frecuencia entre las líneas es de $0,005 (2\pi c/a)$.

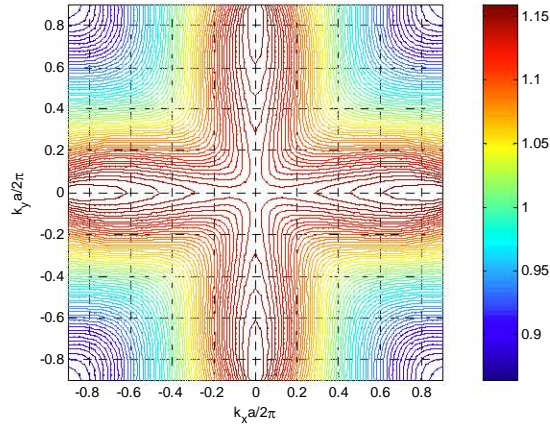


Figura 2.10: Diagrama de las superficies de equifrecuencia (SEF) para la tercera banda del cristal fotónico cuadrado. Las frecuencias para este diagrama se encuentran entre $0,864 (2\pi c/a) - 1,164 (2\pi c/a)$ y el intervalo de frecuencia entre las líneas es de $0,005 (2\pi c/a)$.

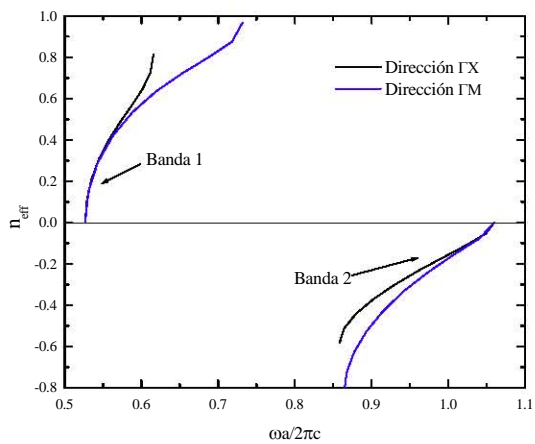


Figura 2.11: Índice de refracción efectivo contra frecuencia de los modos TM para las dos primeras bandas del cristal fotónico con la red cuadrada. El rango de frecuencias en donde el índice no se encuentra bien definido se indica cuando el índice calculado para las dos diferentes direcciones de propagación se separan. La banda ω_1 presenta un índice positivo mientras que la banda ω_2 , negativo.

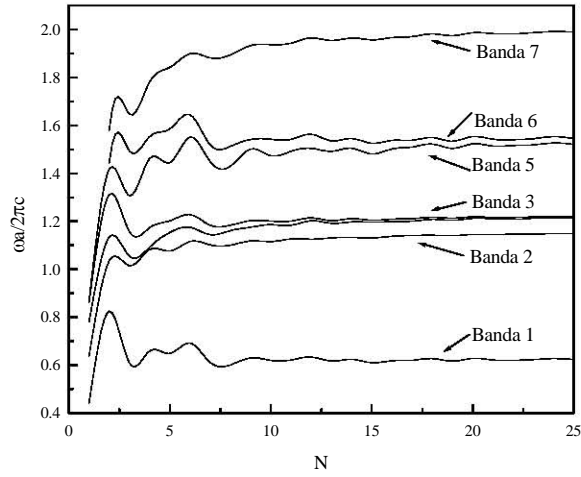


Figura 2.12: Gráfica de los valores de Γ de las primeras 7 bandas para la red triangular contra el parámetro N , el algoritmo converge para valores de $N > 20$.

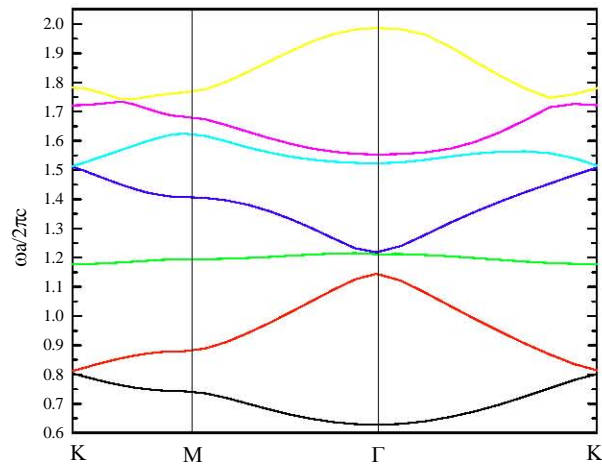


Figura 2.13: Estructura fotónica de bandas de un cristal fotónico metálico con una red triangular y $r/a = 0,2$.

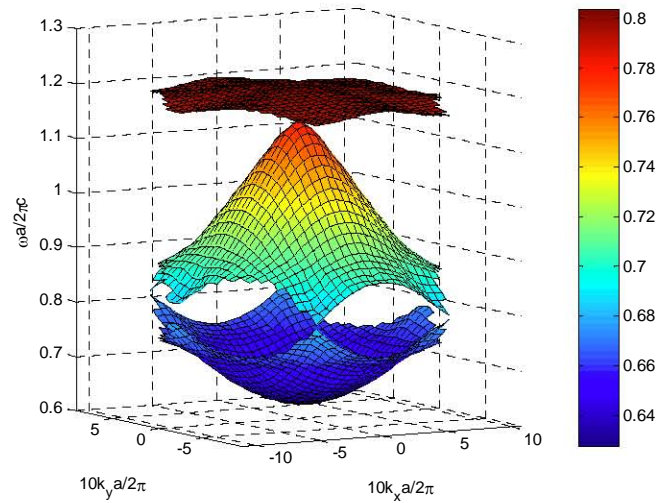


Figura 2.14: Representación en 3D de la estructura de bandas fotónicas de la red triangular (sólo se muestran las tres primeras bandas).

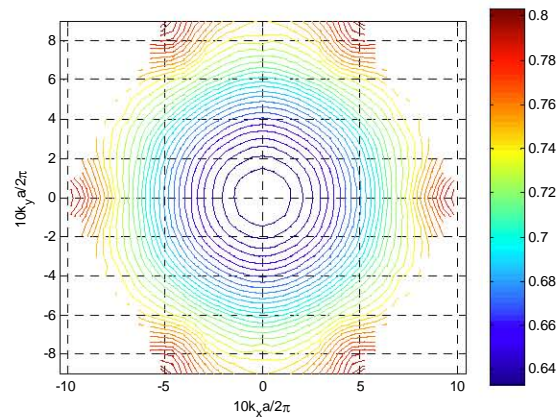


Figura 2.15: Diagrama de las superficies de equifrecuencia (SEF) para la primera banda del cristal fotónico triangular. Las frecuencias para este diagrama se encuentran entre $0,628 (2\pi c/a) - 0,804 (2\pi c/a)$ y el intervalo de frecuencia entre las líneas es de $0,005 (2\pi c/a)$.

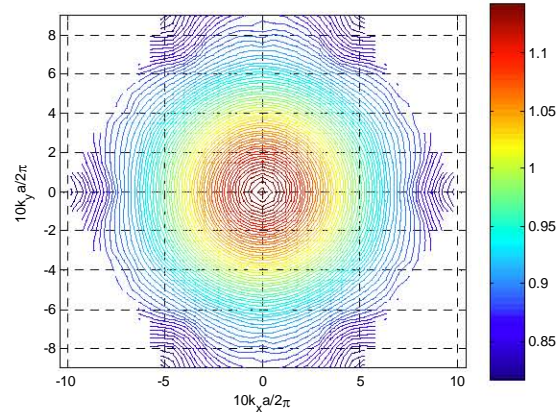


Figura 2.16: Diagrama de las superficies de equifrecuencia (SEF) para la segunda banda del cristal fotónico triangular. Las frecuencias para este diagrama se encuentran entre $0,812 (2\pi c/a) - 1,145 (2\pi c/a)$ y el intervalo de frecuencia entre las líneas es de $0,005 (2\pi c/a)$.

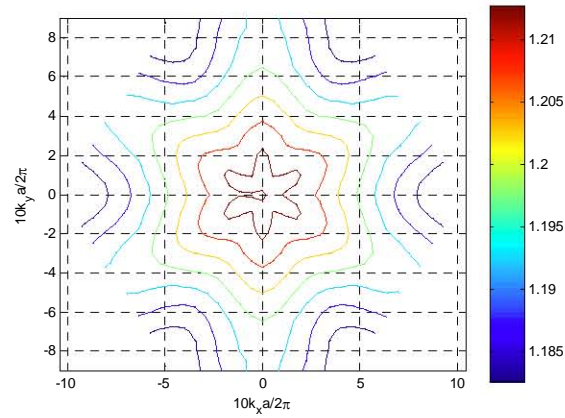


Figura 2.17: Diagrama de las superficies de equifrecuencia (SEF) para la segunda banda del cristal fotónico triangular. Las frecuencias para este diagrama se encuentran entre $1,178 (2\pi c/a) - 1,216 (2\pi c/a)$ y el intervalo de frecuencia entre las líneas es de $0,005 (2\pi c/a)$.

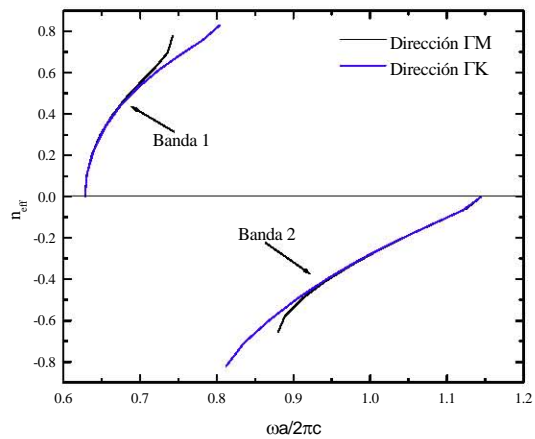


Figura 2.18: Índice de refracción efectivo contra frecuencia de los modos TM para las dos primeras bandas del cristal fotónico con la red triangular. El rango de frecuencias en donde el índice no se encuentra bien definido se indica cuando el índice calculado para las dos diferentes direcciones de propagación se separan. La banda ω_1 presenta un índice positivo mientras que la banda ω_2 , negativo.

Capítulo 3

Cristales fotónicos metálicos con índice de refracción negativo

La verificación experimental de la refracción negativa fue realizada por Smith [7] en el año 2001 utilizando metamateriales. Posteriormente, Parimi [9] y Cubucku [8] en el año 2003, observaron el fenómeno de refracción negativa en los cristales fotónicos. Ambos experimentos fueron realizados en el régimen de las microondas ya que se espera escalar dichas observaciones a otros rangos de frecuencias, además de que en la región de las microondas existen una gran cantidad de aplicaciones referentes a este fenómeno. En este capítulo se mostrará en primer término la selección de materiales utilizada para la construcción de un cristal fotónico bidimensional con elementos metálicos, su proceso de fabricación y finalmente la configuración experimental utilizada para la verificación de la refracción negativa.

3.1. Selección de materiales y construcción del cristal fotónico

3.1.1. Dimensiones físicas

En el capítulo 2 de este trabajo se mencionó que un cristal fotónico bidimensional metálico con una red triangular presenta un ancho de banda en frecuencia mayor que su contraparte realizada mediante una red cuadrada, tomando en cuenta este hecho se decidió utilizar esa configuración para el diseño físico del cristal fotónico.

La región de trabajo en la que se espera observar la refracción negativa es en las microondas, en específico en la banda X (8 – 12 GHz) ya que debido al poco uso de esta banda, en cuanto aplicaciones comerciales, la interferencia ambiental es

mínima. Además, cabe mencionar que se dispone de una infraestructura de medición en los laboratorios de la UNAM, bastante completa para este rango de frecuencias.

A partir del rango de frecuencias normalizadas, donde el cristal fotónico triangular se comporta con un índice de refracción efectivo, se pueden definir las características físicas de un cristal real. Cabe mencionar que todos los cálculos realizados en el capítulo anterior son para cristales fotónicos ideales, es decir infinitos en todos sus direcciones. Dicho rango es:

$$0,927 < \omega_{c_2}/(2\pi c/a) < 1,145 \quad (3.1)$$

donde $c \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y a es el parámetro de red del cristal. Si se considera a la frecuencia $f = 10 \text{ GHz}$ (frecuencia central de banda X) y la igualamos a la frecuencia angular normalizada $\omega = 1,036 (2\pi c/a)$ (frecuencia central de la región donde se observa un índice de refracción negativo), se obtiene el parámetro de red del cristal, $a = 31,08 \text{ mm}$, y considerando que $r = 0,2a$, entonces el radio de los cilindros conductores será igual a, $r = 6,216 \text{ mm}$.

Tomando en cuenta los resultados anteriores, se observa que el radio calculado a partir del rango de ω_{c_2} , es muy cercano a $6,35 \text{ mm}$, o mejor dicho a $0,25 \text{ in}$. Este hecho presenta una ventaja significativa, ya que se pueden conseguir muy fácilmente barras cilíndricas de cualquier material conductor, e.g. aluminio, cobre, plata, oro, latón, etc., con lo que se evita cualquier tipo de maquinación relacionada al radio de los cilindros conductores para la construcción del cristal fotónico.

Con base al radio de los cilindros a utilizar, el parámetro de red tiene el siguiente valor: $a = 31,5 \text{ mm}$, y se observa que el rango de frecuencias en donde el índice de refracción efectivo del cristal es negativo se encuentra limitado por:

$$8,83 \text{ GHz} < f_{c_2} < 10,91 \text{ GHz} \quad (3.2)$$

Dicho rango es ideal para la banda de frecuencias escogida.

La altura de los cilindros conductores es el siguiente parámetro que se va a considerar. Como se ha mencionado a lo largo de este trabajo es necesario que todas las dimensiones sean lo suficientemente grande para poder ser consideradas como infinitas y que los resultados de transmisión sea similares a los calculados previamente. Los cilindros conductores deben de ser lo suficientemente altos para cumplir con estos requerimientos. Experimentos realizados para la comprobación de la refracción negativa proponen utilizar una altura de los cilindros de entre 15λ y 20λ , donde λ es la longitud de onda de la señal [8], [27]-[29]. Para la frecuencia de trabajo, el valor de la altura sería de aproximadamente 45 cm . Otros autores han propuesto situar al cristal fotónico dentro de un guía de onda de placas paralelas, reduciendo drásticamente la altura de los cilindros y además debido a las múltiples

reflexiones que existen la guía de onda, la altura se podría considerar infinita [9], [10], [30].

En la banda X, existen dos tipos de guía de onda, la guía de onda circular y la rectangular: la primera consiste en un tubo metálico que puede ser relleno de algún dieléctrico o simplemente de aire, mientras que las guías rectangulares, son tubos metálicos huecos rectangulares que igualmente se pueden rellenar de distintos materiales. Para el caso de la guía de onda rectangular, el estándar es conocido como WR-90 y sus dimensiones interiores son 0,4 in de alto por 0,9 in de ancho [31].

Tomando en cuenta esta información la altura de los cilindros conductores se decidió que fuera la de la guía de onda, es decir 0,4 in.

Los experimentos realizados para la verificación del índice de refracción negativo son básicamente tres, la referencia [9] lo verifica utilizando un prisma, Martínez *et al* [27] y Ozbay *et al* [28], realizan sus experimentos utilizando una placa y observan el efecto de autoenfoco y Parimi [29] observa el ángulo de refracción de un haz de rayos incidentes sobre una placa de manera no normal y a partir de dicho ángulo obtiene el índice de refracción. Las configuraciones se muestran en la figura 3.1. De acuerdo a la infraestructura disponible para realizar las mediciones, se observó que la forma más sencilla para realizar la comprobación experimental del índice de refracción es observar el efecto de autoenfoco, con una placa rectangular. Las dimensiones de dicha placa se definieron a partir de lo mencionado por la referencia [28] y del rango de índices de refracción calculados por el algoritmo de diferencias finitas y el diagrama de bandas, por lo que las dimensiones de la placa en parámetros de red fueron para el ancho igual a $7a$ (220 mm) y para el largo de $18a$ (567 mm). Cabe mencionar que la dirección ΓM del cristal fotónico corresponde al largo de la placa y la dirección de incidencia de la onda corresponde a ΓK y es representada en el ancho de la placa. En la figura 3.2(a) se muestra un esquema con las dimensiones físicas del cristal fotónico.

3.1.2. Proceso de construcción

La selección de materiales consistió en un análisis de costo-efectividad de los diferentes materiales disponibles. Al final de dicho análisis se observó que el material más adecuado para los cilindros conductores fue el cobre. El cobre presenta una mayor conductividad ($5,80 \times 10^7$ S/m) que el aluminio ($3,54 \times 10^7$ S/m), el latón ($1,57 \times 10^7$ S/m) o el bronce (1×10^7 S/m), además de que es un material diamagnético y la constante de permeabilidad magnética es prácticamente igual a la unidad y la profundidad del efecto de piel (δ) es de 0,0021 mm para 1 GHz [22].

El material seleccionado para las guías de onda de placas paralelas fue el latón. La mayoría de las guías de onda WR-90 son hechas de latón o aluminio y se observa

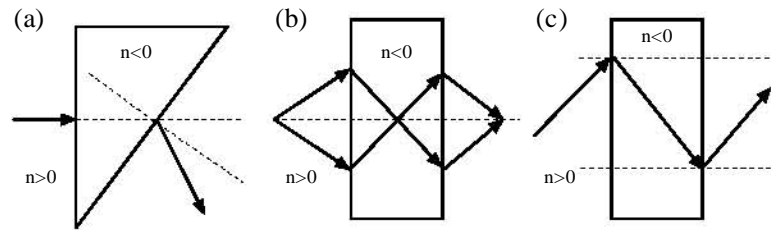


Figura 3.1: Configuraciones experimentales utilizadas para la verificación de la refracción negativa. (a) Utiliza un cristal fotónico en forma de prisma. (b) Se observa el efecto de autoenfoque con un cristal en forma de placa y (c) la refracción negativa ocurre cuando una haz colimado incide en una placa con índice de refracción negativa. La línea punteada representa la normal con respecto al rayo incidente en el material.

que de acuerdo a [31], el latón es el material ideal ya que presenta una atenuación de entre 6,45 – 4,48 dB /100 ft para la banda X.

El maquinado y la fabricación del cristal fotónico fue realizado en un CNC (Computer Numerical Control). Fue necesario realizar un modelo tridimensional de la estructura completa para que el CNC lo maquinara. Dicho modelo fue realizado mediante un programa de diseño asistido por computadora (CAD) y se muestra en la figura 3.2(a).

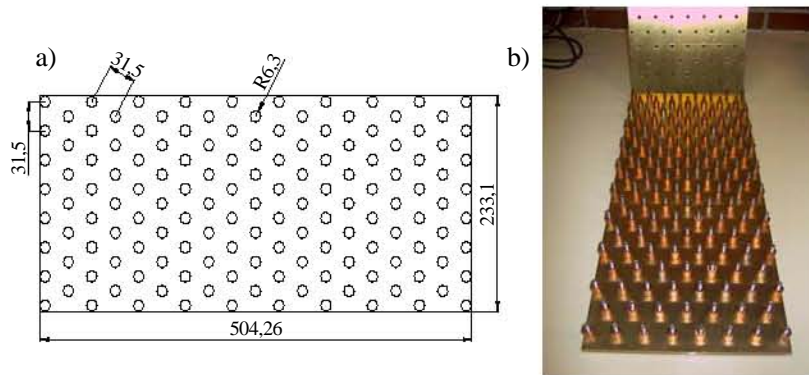


Figura 3.2: a) Modelo bidimensional del cristal fotónico en forma de placa. Dicho modelo fue realizado utilizando el programa AutoCAD. Todas las cotas se encuentran en milímetros. b) Fotografía del cristal fotónico utilizado en este proyecto.

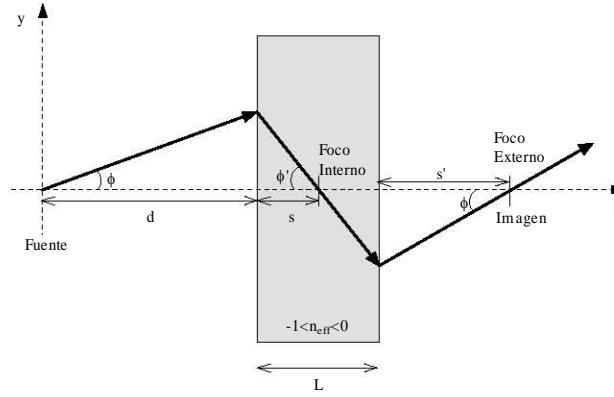


Figura 3.3: Diagrama de rayos de un cristal fotónico con forma de placa, comportándose como una lente. Se emite un rayo a través de una fuente sobre la lente de índice negativo y se enfoca dentro y fuera del cristal.

3.2. Configuración experimental

La configuración experimental elegida, fue la que se observa en la figura 3.1(b). El efecto de autoenfoque consiste en situar una fuente omnidireccional de un lado de la placa y observar que una imagen se forma del otro lado de la placa.

La medición del espectro de transmisión se realizó utilizando un generador de microondas conectado a la antena transmisora y la antena receptora se conectó a un analizador de espectros de frecuencia. Todas las mediciones fueron realizadas en una cámara semianecoica para eliminar cualquier tipo de interferencia.

Las antenas utilizadas para la medición fueron dos guías de onda abiertas. Una guía de onda puede considerarse como una fuente omnidireccional para distancias mayores a la especificada por el campo lejano de dicha antena. La distancia, d , elegida fue de 15 cm, la cual es casi 5 veces la distancia de campo lejano para la guía de onda. En la figura 3.3 se observa un diagrama de rayos de la configuración experimental utilizada, especificándose sus parámetros.

La distancia de autoenfoque, s' , está determinada por:

$$s' = (L - s) \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\phi)}{|n_{eff}|^2 - \sin^2(\phi)}} \quad (3.3)$$

suponiendo que el enfoque interno se encuentra dentro del cristal o $L > s$. A partir de la ecuación 3.3, se puede observar que la posición del foco exterior depende del ángulo ϕ , salvo en el caso donde $n_{eff} = -1$. Dicho caso puede considerarse ideal ya

que se considera que el cristal fotónico se encuentra rodeado de vacío. En el caso donde el cristal fotónico no se encuentre en el vacío, es necesario que su índice de refracción, $-|n_{eff}|$, sea igual, en valor absoluto, al del medio que lo rodea, i. e. $n_{medio} = |n_{eff}|$, para observar un enfoque no dependiente del ángulo de incidencia.

Sin embargo en la figura 3.4 se muestra el comportamiento de s' conforme se varía el ángulo de incidencia ϕ y se puede observar que existe un rango de valores de ϕ , donde el valor de s' es igual para un determinado n_{eff} . Se define dicha distancia como s'' . El rango de valores es mayor conforme $n_{eff} \rightarrow -1$.

Al graficarse s'' con respecto al n_{eff} se observa el comportamiento mostrado en 3.5.

El rango mostrado en la expresión 3.2, indica que los valores del índice de refracción que posee el cristal fotónico se encuentran entre: $-0,45 \leq n_{eff} \leq 0$, por lo que la distancia de enfoque se espera que sea: $18,89 \text{ cm} \leq s'' \leq 85 \text{ cm}$.

Finalmente se muestra una fotografía de la configuración experimental en la figura 3.6, donde aparece un riel óptico para los movimientos en el eje x .

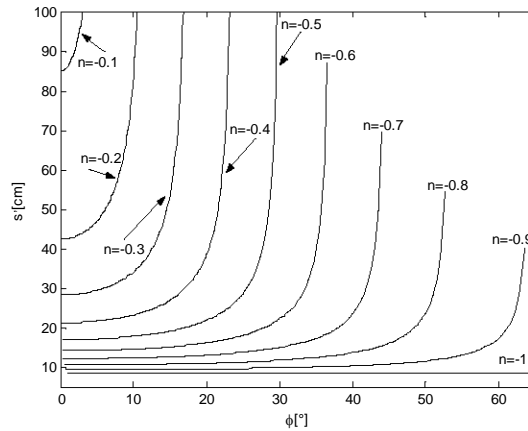


Figura 3.4: Gráfica de la distancia del foco exterior, s' contra el ángulo de incidencia ϕ . Se puede observar que conforme el índice aumenta se puede definir un punto en el cual se observa el enfoque de la fuente.

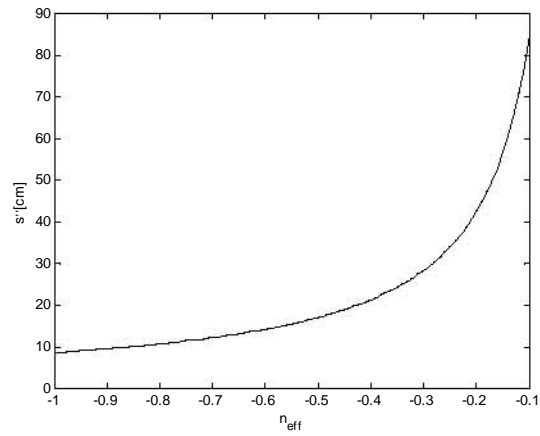


Figura 3.5: Gráfica que muestra el comportamiento de s'' cuando n_{eff} varía.

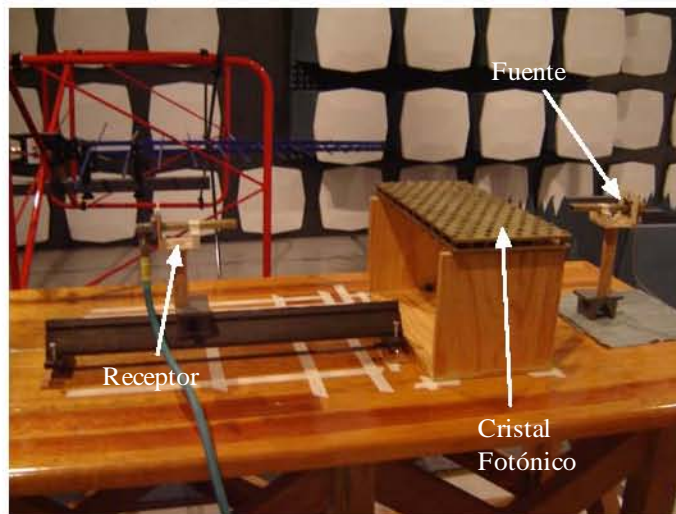


Figura 3.6: Fotografía del montaje experimental de acuerdo a la figura 3.3.

Capítulo 4

Análisis de resultados

En este capítulo se presenta el análisis detallado de los resultados que se realizó a partir de recopilación de los datos obtenidos mediante la configuración experimental descrita en el capítulo anterior. La verificación experimental consistió en obtener la respuesta en frecuencia del cristal fotónico, con la finalidad de corroborar el diagrama de bandas del cristal fotónico. En segundo termino se procedió a la verificación del índice de refracción mediante una medición detallada del patrón de potencias en la zona donde se esperaría el enfoque, como se muestra en la figura 3.3. Una vez que se obtuvo toda esta información se realizó un procesamiento de los datos y se obtuvo el valor del índice de refracción para las frecuencias de trabajo y finalmente se realizó una comparación de los índices obtenidos experimentalmente con los valores teóricos. La dirección de incidencia para todas las ondas EM utilizadas en el experimento fue $\Gamma \rightarrow M$, y con una polarización TM (Transversal Magnético).

4.1. Espectro de transmisión

El espectro de transmisión es conocido también como la respuesta en frecuencia de un determinado sistema. La medición del espectro fue realizada con un analizador de redes HP8722C en un rango de frecuencias entre $7 \text{ GHz} \leq f \leq 13 \text{ GHz}$. El parámetro de transmisión elegido para esta tarea fue el S_{21} . De forma paralela se realizó una simulación de la respuesta en frecuencia, así como del parámetro S_{21} utilizando el programa HFSS. Dicho software resuelve las ecuaciones de Maxwell mediante el método de elementos finitos, la simulación se realizó para las frecuencias entre $7 \text{ GHz} \leq f \leq 12 \text{ GHz}$.

Los resultados experimentales, así como la simulación se muestran a la figura 4.1. En la gráfica, tanto para los datos de la simulación como los datos experimentales se observa una brecha prohibida en el espectro de transmisión.

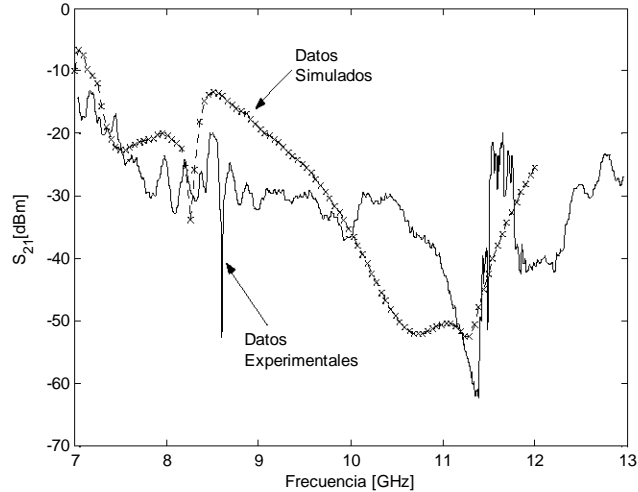


Figura 4.1: Gráfica donde se presenta la variación del parámetro S_{21} con respecto a la frecuencia (espectro de transmisión). La línea continua representa los datos obtenidos experimentalmente, mientras que la línea de \times es la gráfica simulada.

En el caso de la simulación la brecha se encuentra entre: $10,64 \text{ GHz} \leq f \leq 11,55 \text{ GHz}$ lo que representa un ancho de banda de $0,91 \text{ GHz}$, mientras que en lo referente a los datos experimentales se observa la brecha entre: $10,97 \text{ GHz} \leq f \leq 11,48 \text{ GHz}$ o un ancho de banda de $0,51 \text{ GHz}$.

4.2. Verificación del índice de refracción

La verificación experimental del índice de refracción se realizó utilizando un generador de microondas, ya que en el analizador de redes ocupado para el espectro de transmisión no puede radiar la potencia necesaria para que se observe la transmisión de ondas EM a través del cristal. Dicho generador de microondas puede generar ondas en frecuencias de 2 a 18 GHz con una potencia de salida máxima de 10 dBm. Los datos experimentales se obtuvieron realizando un barrido espacial en el plano xy (ver figura 3.3) del lado de la placa donde se espera encontrar el foco externo de la lente. Las mediciones se realizaron con la ayuda de un riel óptico, el cual ayudó a que la obtención de datos fuese mas precisa. El rango de frecuencias en donde se realizaron las medidas fue entre: $9,1 \leq f \leq 10 \text{ GHz}$, con una resolución de $0,1 \text{ GHz}$ para todas la mediciones.

En la figura 4.2 se observan los datos obtenidos experimentalmente para una de-

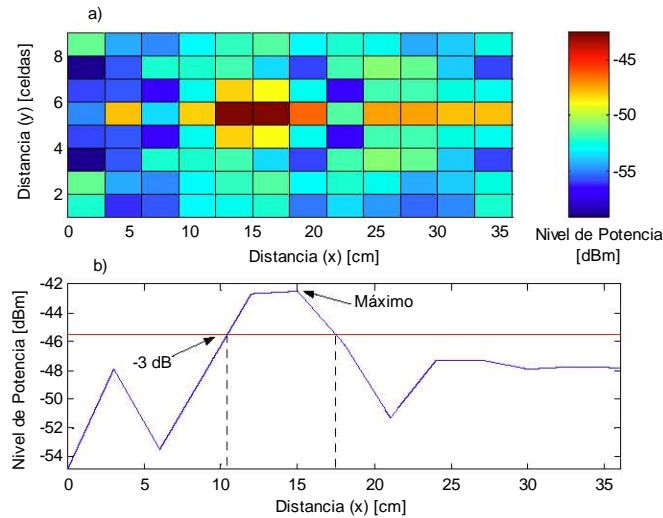


Figura 4.2: (a) Esquema donde se muestran los datos obtenidos de forma experimental. Cada cuadro representa una medición y se le asigna el valor de potencia medido de acuerdo a la barra de color mostrada. (b) Curva de datos experimentales donde se muestra el intervalo de distancias donde se encuentra concentrada la mayor cantidad de potencia (-3dB).

terminada frecuencia, en la gráfica superior, cada cuadro corresponde a una medición realizada en el plano xy . La gráfica inferior, muestra el intervalo de distancias en la que se encuentra concentrada la potencia, esta región se define a partir de los valores de la curva que se encuentran 3 dB por debajo del máximo valor de la curva.

4.2.1. Frecuencia de 9,1 GHz

En la figura 4.3 se observa una representación gráfica del nivel de potencia para 9,1 GHz en la zona donde se espera observar el fenómeno de autoenfoco. En dicha figura se puede ver una zona definida en donde existe una concentración de energía. El valor potencia máximo es igual a -42 dBm y se encuentra sobre el eje x , a una distancia del cristal, $s' = 13,5$ cm. Se puede definir una región, como se muestra en la figura 4.2(b), alrededor del punto de potencia máxima, donde se observa el 50 % de la potencia máxima o -3 dB del valor de potencia máxima, dicha región se encuentra en: $10,5 \text{ cm} \leq s' \leq 17 \text{ cm}$. A partir de dicho rango de valores se puede determinar el índice de refracción para esa zona, de acuerdo a la expresión 3.3 y la figura 3.5.

El índice de refracción para esta frecuencia se encuentra en el rango de: $-0,81 \leq n_{eff} \leq -0,5$.

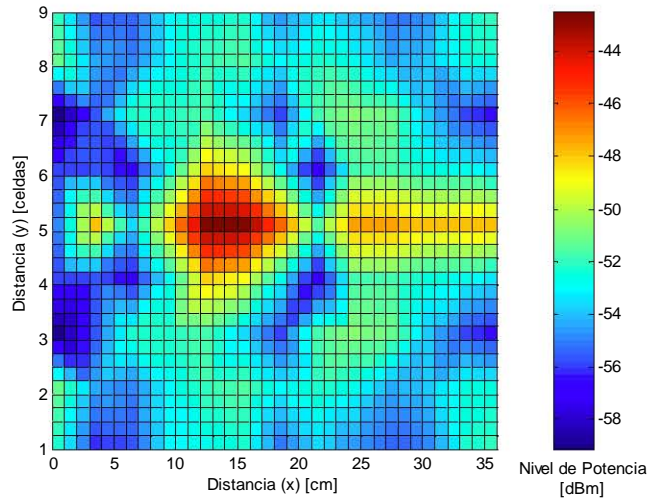


Figura 4.3: Representación gráfica del nivel de potencia para la frecuencia 9,1 GHz. El área graficada representa a la zona que se encuentra a la derecha del lente rectangular que se muestra en la figura 3.3, la zona de color rojo representa un mayor nivel de potencia.

4.2.2. Frecuencia de 9,2 GHz

La figura 4.4, muestra los valores de potencia para la zona de autoenfoco de la configuración experimental, para una frecuencia de 9,2 GHz. El valor máximo de potencia es igual a -43 dBm y de la misma forma que en para la frecuencia anterior, dicho valor se encuentra en el eje x a una distancia del cristal de, $s' = 15,5$ cm. La zona de máxima potencia se encuentra limitada por: $11,5 \leq s' \leq 18,5$ cm y el rango de valores del índice de refracción para la frecuencia de trabajo es: $-0,74 \leq n_{eff} \leq -0,46$.

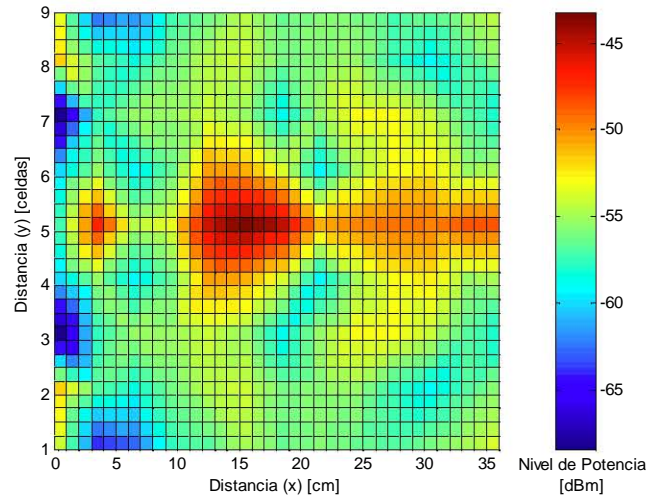


Figura 4.4: Representación gráfica del nivel de potencia para la frecuencia 9,2 GHz. El área graficada representa a la zona que se encuentra a la derecha del lente rectangular que se muestra en la figura 3.3, la zona de color rojo representa un mayor nivel de potencia.

4.2.3. Frecuencia de 9,3 GHz

La región de autoenfoco para la frecuencia de 9,3 GHz se muestra en la figura 4.5. La potencia adquiere un valor máximo sobre el eje x a una distancia $s' = 16$ cm y un valor máximo de -43 dBm. La región de máxima potencia, definida en la figura por el color blanco es igual a: $13,5 \leq s' \leq 19$ cm. A partir de dicha región se define el índice de refracción efectivo para esta frecuencia, que se encuentra en el siguiente rango: $-0,63 \leq n_{eff} \leq -0,45$.

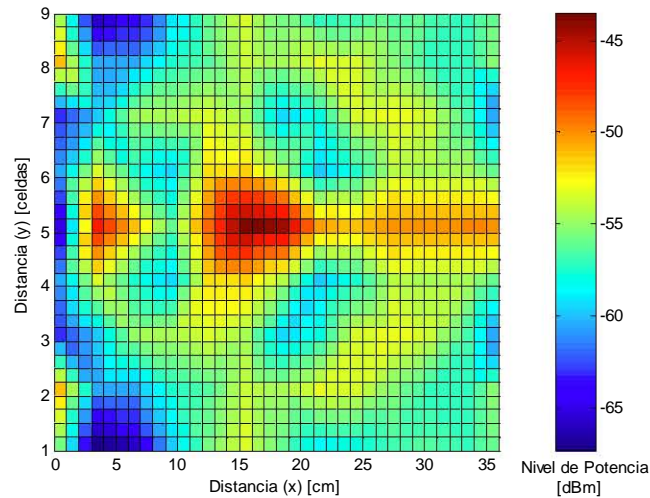


Figura 4.5: Representación gráfica del nivel de potencia para la frecuencia 9,3 GHz. El área graficada representa a la zona que se encuentra a la derecha del lente rectangular que se muestra en la figura 3.3, la zona de color rojo representa un mayor nivel de potencia.

4.2.4. Frecuencia de 9,4 GHz

La figura 4.6 corresponde a la distribución de la potencia en la zona de autoenfoco para una frecuencia de 9,4 GHz. El valor máximo de la potencia recibida es igual a -44 dBm y se encuentra a una distancia del cristal, $s' = 17,5$ cm. Utilizando el valor de máxima potencia, se puede definir un área de donde se concentre la mayor parte de la potencia total transmitida. Esa área corresponde a $12,5 \leq s' \leq 20$ cm, y a su vez se puede definir un índice de refracción efectivo negativo, que se encuentra acotado por: $-0,68 \leq n_{eff} \leq -0,43$.

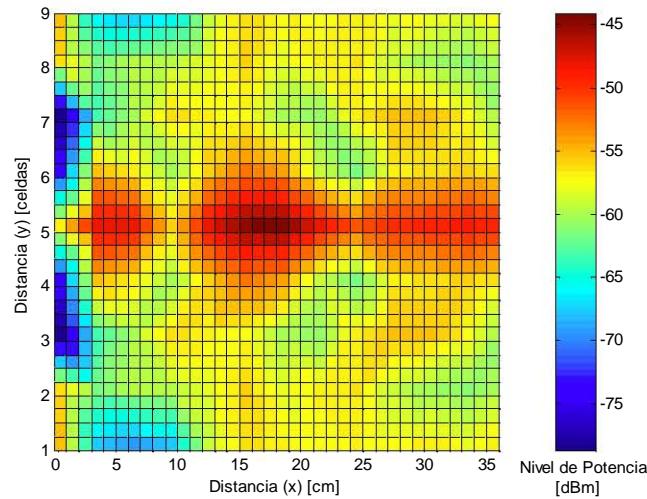


Figura 4.6: Representación gráfica del nivel de potencia para la frecuencia 9,4 GHz. El área graficada representa a la zona que se encuentra a la derecha del lente rectangular que se muestra en la figura 3.3, la zona de color rojo representa un mayor nivel de potencia.

4.2.5. Frecuencia de 9,5 GHz

En lo que se refiere a la figura 4.7, la transmisión de ondas EM a una frecuencia de 9,5 GHz observa un comportamiento similar a la de las frecuencias anteriores. Existe un valor máximo de potencia, que es igual a $-44,5$ dBm y una distancia del cristal, $s' = 18$ cm. El área de concentración máxima de potencia corresponde a: $14,5 \leq s' \leq 21,5$ cm, y define un rango de valores para el índice de refracción efectivo que es igual a: $-0,59 \leq n_{eff} \leq -0,40$.

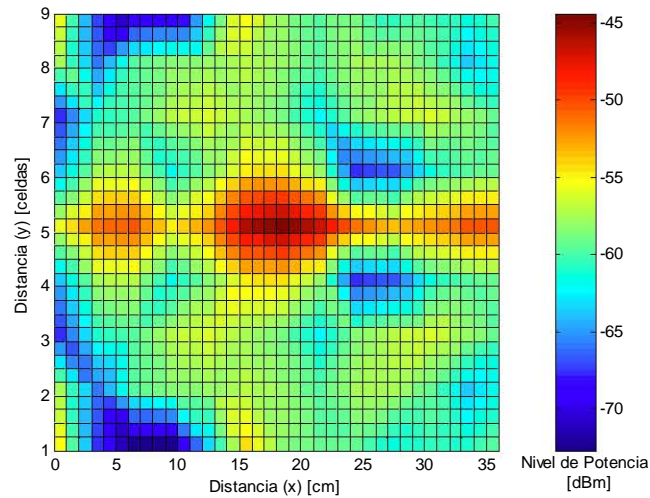


Figura 4.7: Representación gráfica del nivel de potencia para la frecuencia 9,5 GHz. El área graficada representa a la zona que se encuentra a la derecha del lente rectangular que se muestra en la figura 3.3, la zona de color rojo representa un mayor nivel de potencia.

4.2.6. Frecuencia de 10 GHz

A partir de la frecuencia de 9,6 GHz se observó un comportamiento en el cual era muy difícil definir una región de máxima potencia, es decir, a pesar de que existía un valor máximo ($P_{\text{máx}}$), a lo largo de todo el eje x , se observaron valores entre $(P_{\text{máx}} - 3) \leq P \leq P_{\text{máx}}$. Dicho caso se ejemplifica en la figura 4.8, donde no se puede definir claramente una zona de máxima potencia y por ende un rango de valores de índice de refracción efectivo para dicha frecuencia. Este comportamiento es debido a la dependencia angular de la distancia de enfoque como se muestra en la ecuación 3.3 y en la gráfica 3.4, ya que al aumentar la frecuencia, la zona donde se concentra la potencia (rayos) es mas grande, por lo que es más difícil medirla.

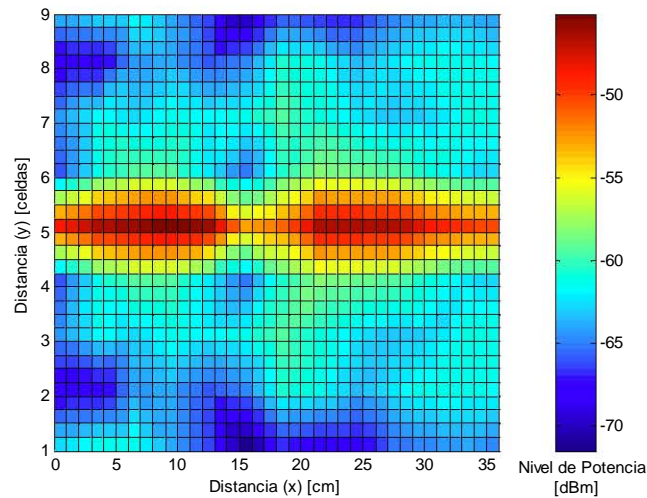


Figura 4.8: Representación gráfica del nivel de potencia para la frecuencia 10 GHz. El área graficada representa a la zona que se encuentra a la derecha del lente rectangular que se muestra en la figura 3.3, la zona de color rojo representa un mayor nivel de potencia.

4.3. Análisis de los resultados teóricos y experimentales

4.3.1. Espectro de transmisión

Los resultados experimentales muestran que existen una brecha prohibida para la transmisión de ondas EM a través del cristal fotónico en: $10,97 \text{ GHz} \leq f \leq 11,48 \text{ GHz}$, mientras que para la simulación el rango fue de: $10,64 \text{ GHz} \leq f \leq 11,55 \text{ GHz}$. A partir de los cálculos realizados para la obtención del diagrama de bandas del cristal fotónico triangular se puede observar que se obtuvo una brecha prohibida para las siguientes frecuencias: $10,91 \text{ GHz} \leq f \leq 11,22 \text{ GHz}$. Una comparación entre los resultados experimentales, la simulación y los cálculos teóricos muestra que los tres datos concuerdan. La diferencia observada entre los tres resultados es menor al 10 % del valor central de las frecuencias, y se le puede atribuir, en el caso de los resultados experimentales al tamaño finito del cristal y que los elementos que lo componen no son ideales.

4.3.2. Índice de refracción

La figura 4.9 muestra una gráfica donde se observa el índice de refracción efectivo contra la frecuencia, calculado con el algoritmo de diferencias finitas y obtenido a partir de la verificación experimental. Cabe mencionar que los datos experimentales, para cada frecuencia, no son valores puntuales, debido a que no se puede definir exactamente un valor de índice de refracción.

A partir de la gráfica podemos observar que los datos experimentales poseen la misma tendencia de crecimiento que los datos teóricos, pero con una diferencia con respecto a la curva teórica del índice de refracción. Esta diferencia es debida primordialmente a la imposibilidad de definir un índice de refracción único, mediante la configuración experimental elegida. De acuerdo a la figura 3.4 se puede observar que conforme la frecuencia aumenta, la potencia se disipa a lo largo del eje de propagación, es decir no existe una zona geométrica para la imagen, lo que produce que no se pueda deducir un índice de refracción efectivo para el cristal fotónico. Dicho error se podría corregir si en cada extremo de la placa se coloca un cristal fotónico que posea el mismo valor absoluto del índice de refracción que la placa bajo estudio, y que las variaciones del índice con respecto a la frecuencia sean iguales a las del cristal principal, con la única diferencia de que el índice sea positivo, como se explicó en sección 3.2 de este trabajo. De esta manera se elimina dicho problema. Además hay que mencionar que en el proceso de medición, existieron ciertos factores que limitaron la efectividad del montaje experimental. La primera de ellas se refiere

a la falta de acoplamiento entre el cristal y el aire, lo que produce reflexiones espurias que afectan directamente a los resultados. La baja potencia del generador, errores en la alineación de la posición de las antenas, así como a las imperfecciones de los materiales y su no idealidad, son otros factores que deben de ser tomados en cuenta para una optimización en la configuración experimental. Asimismo, de acuerdo a la figura 2.16 se puede observar que conforme la frecuencia se aleja del punto Γ , las SEF dejan de ser circulares y el índice de refracción, n_{eff} , se hace dependiente al ángulo de incidencia y por lo tanto la ley de Snell no es aplicable.

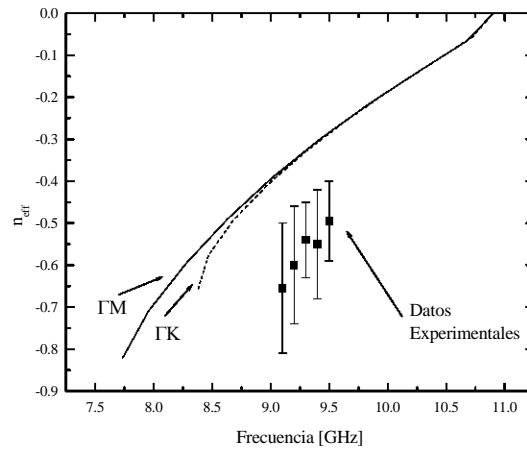


Figura 4.9: Gráfica donde se muestra el índice de refracción efectivo para la segunda banda del cristal fotónico triangular, en sus direcciones, ΓM y ΓK , y el índice de refracción obtenido a partir de los datos experimentales. Los \blacksquare son calculados a partir del máximo valor en potencia para una determinada frecuencia mientras que los extremos se calculan de acuerdo a lo estipulado en la figura 4.2(b).

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis hemos abordado teórica y experimentalmente el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas a través de un cristal fotónico metálico con una celda unitaria triangular. El rango de frecuencias en donde se ha realizado dicho estudio es en la banda X. En primer término fue necesario realizar una investigación exhaustiva de los principios teóricos que rigen la propagación de los campos electromagnéticos dentro de las estructuras periódicas en general, y los cristales fotónicos en particular. Se observó que los modelos teóricos utilizados se asemejan en gran medida a aquellos utilizados para la descripción del comportamiento de los electrones dentro un cristal electrónico de estado sólido. Los cristales fotónicos, además de ser materiales que evitan la propagación de la luz a determinadas frecuencias, también se pueden catalogar como buenos conductores de luz y cuya conductancia depende de la estructura de bandas del cristal, así como de su geometría específica. Se definieron las condiciones necesarias para la existencia de una región específica en la cual el esparcimiento natural producto de la distribución geométrica de los elementos del cristal, provoca que el cristal se comporte como un material dieléctrico ordinario, y de esta forma se pueda definir un índice de refracción efectivo para el cristal. Dicha región solamente se observa en frecuencias cercanas al origen del espacio recíproco y es producto del alto índice de modulación creado a partir de la diferencia de las propiedades intrínsecas los componentes del cristal. El índice de refracción para cualquier cristal fotónico que cumpla con las condiciones expresadas en este trabajo, puede ser negativo y menor que la unidad. Cabe mencionar que dicha discusión se puede generalizar a cualquier tipo de cristal fotónico, tanto a los sistemas multicapas (unidimensionales), bidimensionales, así como los cristales tridimensionales. Un cristal fotónico metálico presenta una ventaja principal con respecto a su contraparte dieléctrica, el efecto de modulación de la banda de transmisión es máxima, por lo que se puede esperar una región más grande en donde se

observe un índice de refracción efectivo bien definido. El diseño de las dimensiones físicas del cristal fue realizado a partir del algoritmo de diferencias finitas utilizado para encontrar la relación de dispersión o diagrama de bandas fotónicas, del cristal. Una conclusión importante referente a dicho diseño es que los cálculos, tanto del diagrama de bandas, como del índice de refracción, se pueden hacer normalizados con respecto al radio de los cilindros conductores y el tamaño de la celda unitaria, es decir, solamente depende la relación r/a . Este detalle produce que se puedan diseñar una gran cantidad de cristales, para cualquier rango de frecuencias basándose simplemente en un parámetro físico de la red.

En el aspecto experimental, se comprobó el índice de refracción negativo mediante la observación detallada del efecto de autoenfoque. La verificación experimental se dividió en dos partes. La primera consistió en la obtención de la respuesta en frecuencia del cristal fotónico y su comparación con la estructura de bandas. Para este caso se observó una concordancia aceptable entre con lo predicho en la teoría (diagrama de bandas) y lo obtenido experimentalmente. Dicho resultado fue corroborado paralelamente utilizando un software de simulación de campos electromagnéticos conocido como HFSS y de la misma forma se observó una buena concordancia entre todos los datos. El segundo aspecto de la verificación experimental consistió en la comprobación de la existencia del índice de refracción efectivo en la banda donde este se comporta como un número negativo. Esta parte fue realizada mediante un barrido espacial, utilizando una antena de guía de onda como transmisoras y receptoras. La concordancia entre los resultados teóricos y experimentales es medianamente aceptable ya que a pesar de que el índice obtenido experimentalmente presenta la misma tendencia de crecimiento como función de la frecuencia, los valores de dicho índice varían considerablemente de los calculados a partir de diagrama de bandas. Esta variación se debe principalmente a que para una lente plana o con forma de placa como se utilizó en este trabajo no se puede determinar claramente un índice de refracción efectivo, a menos de que dicho índice sea exactamente igual a -1 . Existen diferentes soluciones a este problema, las cuales siguen el mismo principio que las utilizadas para eliminar la aberración esférica en las lentes esféricas. Dichas soluciones quedan fuera del alcance de este proyecto. Asimismo, cabe mencionar que existieron diferentes factores referentes a la infraestructura utilizada para la medición, que pudieron provocar la diferencia entre los resultados teóricos y experimentales. En primer término existió la limitante de una fuente de microondas con una potencia medianamente baja y además de que no existió un acoplamiento perfecto entre el cristal fotónico y el medio en el que se encontraba inmerso (aire). Además se debe tomar en cuenta que los cálculos teóricos fueron realizados con materiales con propiedades físicas ideales (conductividad, permitividad dieléctrica, etc.), así como la consideración de que el cristal presentaba dimensiones

infinitas en todos sus ejes.

En resumen, las principales conclusiones de este estudio son las siguientes:

1. El modelo basado en el algoritmo de diferencias finitas para el cálculo del diagrama de bandas se puede generalizar para cualquier rango de frecuencias, ya que el comportamiento del cristal depende solamente de la relación r/a y de su geometría.
2. Se observó experimentalmente una región de frecuencias definida en la cual existe un índice de refracción negativo, el cual es menor que la unidad y además es negativo.
3. Un estudio referente a la optimización de la configuración experimental es necesario para profundizar en las características y comportamiento del índice de refracción negativo en los cristales fotónicos. Una propuesta es mencionada en la referencia [32] y consiste en fabricar una lente plano-cóncava, eliminando de esta forma la dependencia de la distancia de enfoque con respecto al ángulo de incidencia.

Los resultados de este estudio podrían emplearse para el diseño de filtros, guías de onda sin pérdidas, lentes planas, resonadores, acopladores y otros dispositivos que al trabajar en un régimen con índice de refracción negativo tendrían una ventaja sustancial con respecto a los dispositivos realizados con materiales ordinarios.

Apéndice A

La red recíproca y la zona de Brillouin

A través del desarrollo de esta tesis se utilizó el teorema de Bloch para expresar un modo electromagnético como una onda plana que es modulada por la función periódica $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. La función \mathbf{u} presenta la misma periodicidad que el cristal y solamente es necesario considerar los vectores \mathbf{k} que se encuentren en la zona de Brillouin.

En este apéndice se proporciona información adicional para aquellos lectores que no estén familiarizados con la física de estado sólido u otras áreas donde las redes periódicas tengan un papel importante. La información de este apéndice está basada en los primeros capítulos del texto de estado sólido de C. Kittel [33].

A.1. La red recíproca

Se propone una función $f(\mathbf{r})$ que es periódica en una red; i.e., que $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ para todos los vectores \mathbf{R} que trasladan la red a un punto donde es idéntica. El conjunto de vectores \mathbf{R} es conocido como vectores de la red. Si se toma la transformada de Fourier de la función periódica $f(\mathbf{r})$, se puede construir la función a partir de ondas planas con diferentes vectores de onda. La expansión tiene la siguiente forma:

$$f(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{q} g(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.1})$$

donde $g(\mathbf{q})$ es el coeficiente de las ondas planas con vector de onda \mathbf{q} . Al imponer la condición periódica $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ en la expansión, se tiene que

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} g(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} = f(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{q} g(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.2})$$

La expresión anterior, indica que la periodicidad de f produce que la transformada de Fourier tenga la propiedad de que $g(\mathbf{q}) = g(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R})$, lo cual solamente es posible cuando $g(\mathbf{q}) = 0$ o $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) = 1$. En otras palabras, la transformada de Fourier es cero en todas partes, excepto en picos donde los valores de \mathbf{q} son tales que la $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) = 1$ para todos los vectores \mathbf{R} .

A partir de esta información, se puede observar que si se está construyendo una función periódica sobre una red, f , a partir de ondas planas, se requiere solamente de las ondas planas con vectores de onda \mathbf{q} tales que $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) = 1$ para todos los vectores \mathbf{R} . Esta afirmación se puede entender mejor, al hacer una analogía con la transformada de Fourier de una función $f(x)$ en una dimensión con periodo τ , ya que esta solamente requiere de la función senoidal fundamental con periodo τ y sus armónicos $\tau/2, \tau/3, \tau/4, \dots$

Los vectores \mathbf{q} tales que la $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) = 1$, o equivalentemente $\mathbf{q} \cdot \mathbf{R} = n2\pi$, son conocidos como vectores de la red recíproca y por lo general son designados por la letra \mathbf{G} . Dichos vectores forman una red propia; i.e. Si se suman dos vectores de la red recíproca \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 el resultado es otro vector de la red recíproca y se puede verificar fácilmente. Se puede construir la función $f(\mathbf{r})$ con una suma apropiada de todos los vectores recíprocos de la red, de la siguiente forma:

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} f_{\mathbf{G}} e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.3})$$

Para obtener el conjunto de vectores de la red recíproca $\{\mathbf{G}\}$ a partir de un conjunto de vectores de la red $\{\mathbf{R}\}$, se deben de encontrar todos los vectores \mathbf{G} tales que $\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}$ sea un múltiplo entero de 2π para cada \mathbf{R} .

Los vectores de la red \mathbf{R} se pueden escribir en términos de los vectores primitivos de la red, que son los vectores más pequeños apuntando de un punto de la red hacia otro. Por ejemplo, en una red cúbica simple, con espaciamiento a , los vectores \mathbf{R} tendría la forma $\mathbf{R} = la\hat{\mathbf{x}} + ma\hat{\mathbf{y}} + na\hat{\mathbf{z}}$, donde (l, m, n) son enteros. En general, los vectores primitivos de la red, son conocidos como $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

Si los vectores de la red recíproca $\{\mathbf{G}\}$ forman una red propia, estos deben de tener un conjunto de vectores primitivos \mathbf{b}_i , de tal forma que todos los vectores primitivos \mathbf{G} puedan ser escritos como $\mathbf{G} = l\mathbf{b}_1 + m\mathbf{b}_2 + n\mathbf{b}_3$. Entonces, la condición $\mathbf{G} \cdot \mathbf{R} = n2\pi$ tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{R} = (l\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + n\mathbf{a}_3) \cdot (l'\mathbf{b}_1 + m'\mathbf{b}_2 + n'\mathbf{b}_3) = N2\pi \quad (\text{A.4})$$

para todos los valores de (l, m, n) , la condición anterior debe de existir para algún N . La igualdad A.4 se puede satisfacer si se construye \mathbf{b}_i de tal forma que $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$ o de forma más compacta $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$. En general, los vectores de la red recíproca se pueden construir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} & \mathbf{b}_2 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} \\ \mathbf{b}_3 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A.2. La zona de Brillouin

En el Capítulo 1 de este trabajo, observamos que la simetría translacional de un cristal fotónico permite clasificar los modos electromagnéticos con vector de onda \mathbf{k} . Los modos pueden ser escritos en *forma de Bloch*, y consiste en una onda plana modulada por una función que presenta la misma periodicidad que la red:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \quad (\text{A.6})$$

Una característica importante de los estados de Bloch, es que diferentes valores de \mathbf{k} no necesariamente producen diferentes modos. Específicamente, un modo con vector de onda \mathbf{k} y un modo con vector de onda $\mathbf{k} + \mathbf{G}$ son el mismo modo, si \mathbf{G} es un vector de la red recíproca. Esto significa que existen una gran cantidad de redundancia en el vector de onda \mathbf{k} .

En la física de estado sólido, la primera zona de Brillouin es la celda primitiva de la red recíproca. Se puede encontrar de la misma forma que la celda de Wigner-Seitz para las redes reales. A partir del teorema de Bloch, se puede demostrar que el comportamiento de ondas dentro de un medio periódico se puede caracterizar completamente a partir de su comportamiento dentro de la primera zona de Brillouin.

La celda de Wigner-Seitz alrededor de un punto de la red está definida como el lugar geométrico de los puntos, que se encuentran mas cercanos a dicho punto de la red que a cualquiera otro punto de la red. Se puede demostrar que la celda de Wigner-Seitz es una celda unitaria primitiva de la redes de Bravais. La celda se puede construir escogiendo un punto cualquiera de la red, luego se dibujan líneas a los puntos de la red más cercanos al punto inicial. En el punto medio de dichas líneas se dibuja una línea normal (para el caso tridimensional dichas líneas se convierten en planos) a esta y la zona definida (en donde se encuentre el punto inicial) por todas los bisectores es la celda de Wigner-Seitz.

La zona irreductible de Brillouin es la reducción de la zona de Brillouin a partir de simetrías que existan en la misma.

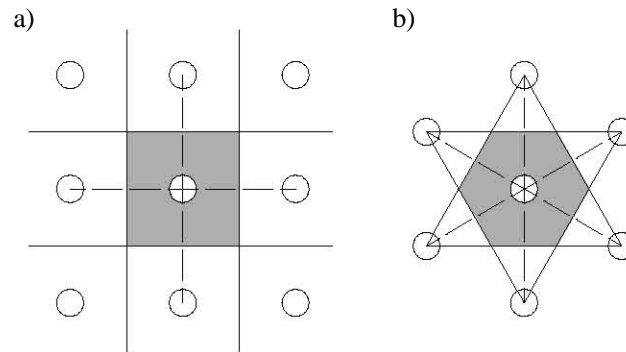


Figura A.1: (a) Construcción de la zona de Brillouin de la red cuadrada. (b) Construcción de la zona de Brillouin de la red triangular. Las líneas punteadas unen el punto central con sus vecinos más cercanos, mientras que las líneas sólidas representan los bisectores de cada línea punteada. La región sombreada es la primera zona de Brillouin.

En la figura A.1 se muestra la construcción de las zonas de Brillouin para la red cuadrada y la red triangular.

Apéndice B

Código fuente

El cálculo del diagrama de bandas para los cristales fotónicos bidimensionales se realizó mediante el algoritmo de diferencias finitas en el espacio real como se mostró en Capítulo 2 de este trabajo de tesis. La implementación de dicho algoritmo se desarrolló utilizando el programa Matlab, en su versión 6.5. Se realizó un programa distinto para cada tipo de cristal fotónico (cuadrado o triangular). Cada programa consistió en un archivo principal (`principal.m`) y este a su vez manda llamar diferentes funciones o archivos como se muestra en la figura B.1 para obtener los eigen-valores necesarios para el diagrama de bandas.

En el diagrama de flujo de la figura B.1 se muestra como el programa principal, `principal.m`, utiliza las funciones `diagramacc.m` (`diagramatt.m`), `distanciacc.m` (`distanciatt.m`), `nodomin.m`, `pruebat.m` y `asignacioncc.m` (`asignacionmod.m`). Las funciones que se mencionan entre paréntesis son aquellas que se utilizan en específico para la red triangular. A continuación se dará una descripción general de las funciones mencionadas.

`principal.m`: Función principal del programa, se adquiere el número de puntos de la malla en los cuales se divide la celda unitaria, N , determinado por el usuario. Llama a la función `diagramacc.m` (`diagramatt.m`), previamente definiendo los valores del vector de onda \mathbf{k} , que pertenecen al contorno de la zona irreductible de Brillouin y obtiene como resultado los eigen-valores de la red, finalmente los guarda en un archivo para posteriormente graficarlos.

`diagramacc.m` (`diagramatt.m`): Esta función llama a la subrutina `distanciacc.m` (`distanciatt.m`), con la finalidad de obtener los puntos (nodos) de la malla que se encuentran dentro de los cilindros conductores, y posteriormente llama a la función `pruebat.m`, la cual a partir de la información obtenida de la función `distanciacc.m` (`distanciatt.m`), calcula que nodos de la celda unitaria se encuentran fuera de los cilindros conductores, a continuación llama a la función `asignacioncc.m` (`asignacionmod.m`),

y obtiene la matriz de todos los nodos de la malla y a partir de la cual se pueden obtener todos los eigen-valores de la celda unitaria. Finalmente calcula los eigen-valores mediante una subrutina y la información obtenida de las distintas funciones llamadas.

`distanciacc.m` (`distanciatt.m`): Esta función calcula la distancia entre cada esquina de la celda unitaria y cada uno de los nodos que conforman la malla generada. Llama a la función `nodomin.m`, para obtener los nodos que se encuentran dentro de los cilindros conductores.

`nodomin.m`: Calcula que nodos se encuentran dentro de los cilindros conductores a partir de la distancias calculadas por la función `distanciacc.m` (`distanciatt.m`).

`pruebat.m`: Calcula que nodos se encuentran fuera de los cilindros conductores a partir de la distancias calculadas por la función `distanciacc.m` (`distanciatt.m`).

`asignacioncc.m` (`asignacionmod.m`): Esta función obtiene la matriz completa en diferencias finitas del eigen-problema, a partir la cual se pueden obtener los eigen-valores requeridos para el diagrama de bandas. La asignación de valores de dicha matriz se hace a partir de las ecuaciones 2.24 o 2.32, y de las condiciones de frontera descritas por las ecuaciones 2.25 o 2.33 según sea el caso. La matriz se compone de los coeficientes de un sistema de ecuaciones simultáneo y lineal, cada ecuación representa la aplicación de la aproximación en diferencias finitas a cada punto de la malla.

En la siguiente sección se mostrará a detalle el código fuente de los programas utilizados para el cálculo del diagrama de bandas de red cuadrada y la red triangular, además se ejemplificará con una malla de $N = 3$, para las dos redes, mostrando los resultados obtenidos para cada función. Todos los cálculos fueron realizados a partir de valores normalizados con respecto al radio de los cilindros conductores, r , y el parámetro de la red, a , y la condición $r/a = 0,2$.

B.1. Red cuadrada

```

Archivo principal.m
%Diagrama de bandas: Red Cuadrada
%Programa Principal
clear
clc
%De acuerdo al algoritmo de diferencias finitas el número de puntos
%en los que se divide la celda unitaria es de (2*N+1) en cada uno
%de sus lados, es decir se tienen (2*N+1)*(2*N+1) puntos dentro de
%la celda unitaria

```

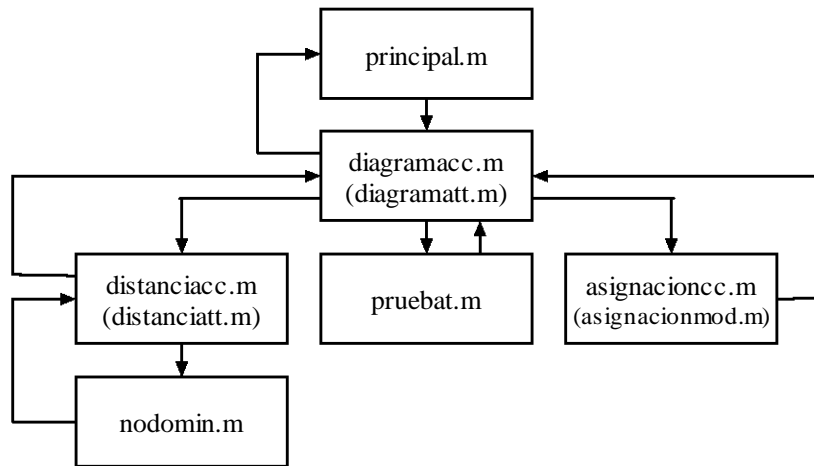


Figura B.1: Diagrama de flujo de las funciones utilizadas para el cálculo del diagrama de bandas de los cristales fotónicos cuadrados y triangulares. Las funciones que se encuentran entre paréntesis son las funciones utilizadas para el caso de la red triangular.

```

N=input('Indica el numero de puntos en los que se dividirá la celda
unitaria ');
inicio=clock;%Variable utilizada para conocer el tiempo de procesamiento
%Eigen-valores para la zona Gamma-X
%La función diagramacc está limitada a 10 valores del vector
%de onda k por cada vez que se le llame.
gx=[diagramacc(0:pi/9:pi,zeros(1,10),N)];
%Eigenvalores para la zona X-M
xm=[diagramacc(pi*ones(1,10),0:pi/9:pi,N)];
%Eigenvalores para la zona M-Gamma
mg=[diagramacc(pi:-pi/9:0,pi:-pi/9:0,N)];
final=clock;%Variable utilizada para conocer el tiempo de procesamiento
completo=[gx xm mg];%matriz con todos los eigenvalores
%Se guarda la variable 'completo' en el archivo
%bandasc.mat
save bandasc.mat completo;

```

El archivo `principal.m`, obtiene del usuario el valor del parámetro N , y define los valores del vector de onda \mathbf{k} , que se utilizarán para calcular los eigen-valores. El programa está diseñado para que se calculen 10 valores puntuales de \mathbf{k} a la vez. Los valores de \mathbf{k} , están divididos en tres, de acuerdo al contorno de la zona irreducible de Brillouin.

Para la línea $\Gamma \rightarrow X$, se tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} k_x &= \left(0 \quad \frac{\pi}{9} \quad 2\frac{\pi}{9} \quad 3\frac{\pi}{9} \quad 4\frac{\pi}{9} \quad 5\frac{\pi}{9} \quad 6\frac{\pi}{9} \quad 7\frac{\pi}{9} \quad 8\frac{\pi}{9} \quad \pi \right) \\ k_y &= \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \end{aligned}$$

para $X \rightarrow M$, se tiene:

$$\begin{aligned} k_x &= \left(\pi \quad \pi \quad \pi \quad \pi \quad \pi \quad \pi \quad \pi \quad \pi \quad \pi \quad \pi \right) \\ k_y &= \left(0 \quad \frac{\pi}{9} \quad 2\frac{\pi}{9} \quad 3\frac{\pi}{9} \quad 4\frac{\pi}{9} \quad 5\frac{\pi}{9} \quad 6\frac{\pi}{9} \quad 7\frac{\pi}{9} \quad 8\frac{\pi}{9} \quad \pi \right) \end{aligned}$$

y para $\Gamma \rightarrow M$, se tiene:

$$\begin{aligned} k_x &= \left(0 \quad \frac{\pi}{9} \quad 2\frac{\pi}{9} \quad 3\frac{\pi}{9} \quad 4\frac{\pi}{9} \quad 5\frac{\pi}{9} \quad 6\frac{\pi}{9} \quad 7\frac{\pi}{9} \quad 8\frac{\pi}{9} \quad \pi \right) \\ k_y &= \left(0 \quad \frac{\pi}{9} \quad 2\frac{\pi}{9} \quad 3\frac{\pi}{9} \quad 4\frac{\pi}{9} \quad 5\frac{\pi}{9} \quad 6\frac{\pi}{9} \quad 7\frac{\pi}{9} \quad 8\frac{\pi}{9} \quad \pi \right) \end{aligned}$$

La función `principal.m`, obtiene todos los eigen-valores de la red cuadrada a partir de la función `diagramacc`, la cuál requiere como valores de entrada, k_x , k_y y N . Una vez que se tienen los eigen-valores del problema se almacenan en el archivo `bandasc.mat`, para posteriormente graficarlos.

Función `diagramacc.m`

```
function omega=diagramacc(kx,ky,N)
%Eigen-valores para los vectores de onda k ingresados
b=distanciacc(N);%nodos que se encuentran dentro de los cilindros
d=pruebat(b,N);%nodos que se encuentran fuera de los cilindros
%asígnacion de los valores en diferencias finitas
temp=asígnacioncc(N,kx,ky);
%eliminación de los nodos que se encuentran dentro de los cilindros
temp=temp(d,d,:);
%Cálculo de los eigenvalores
omega=[eig(temp(:,:,1)) eig(temp(:,:,2)) eig(temp(:,:,3))
eig(temp(:,:,4)) eig(temp(:,:,5)) eig(temp(:,:,6)) eig(temp(:,:,7))
eig(temp(:,:,8)) eig(temp(:,:,9)) eig(temp(:,:,10))];
%se elimina la variable temp, para ahorrar espacio en memoria
clear temp;
omega=(sqrt(-((2*N+1)^2)*omega))/(2*pi);%se despeja la frecuencia
omega=abs(sort(omega));%ordenamiento de los eigenvalores
```

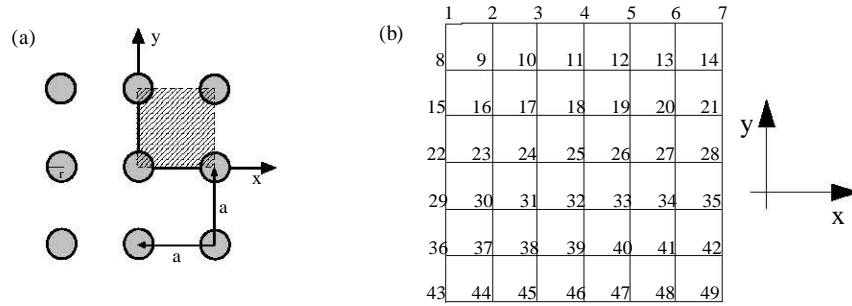


Figura B.2: (a) Esquema de la red cuadrada, la zona sombreada representa la celda unitaria. (b) Malla utilizada para cubrir la celda unitaria de la red cuadrada con $N = 3$.

La función `diagramacc.m`, requiere de valores de entrada, el vector de onda \mathbf{k} , y el parámetro N , a partir de estos datos, llama a la función `distanciacc.m` para obtener aquellos nodos que se encuentran dentro de los cilindros conductores, como se muestra en la figura B.2(a). Los nodos de la malla son identificados mediante números, el primer nodo es aquel que se encuentra en la esquina superior izquierda y los siguientes siguen la numeración que se presenta en la figura B.2(b).

Si se supone que $N = 3$, entonces la función `distanciacc.m`, arroja el siguiente resultado:

$$b = [1 \ 2 \ 6 \ 7 \ 8 \ 14 \ 36 \ 42 \ 43 \ 44 \ 48 \ 49]$$

y como consecuencia la función `pruebat.m` obtiene los nodos que se encuentran fuera de los cilindros conductores:

$$d = [3 \ 4 \ 5 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \\ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26 \ 27 \ 28 \ 29 \ 30 \ 31 \ 32 \\ 33 \ 34 \ 35 \ 37 \ 38 \ 39 \ 40 \ 41 \ 45 \ 46 \ 47]$$

Posteriormente se obtiene la matriz `temp`, a partir de la función `asignacioncc.m`. Dicha matriz es cuadrada con $(2N + 1)^4$ elementos, y el número de elementos para $N = 3$, es de 2401. Cada renglón de la matriz representa un punto de la malla y la asignación en diferencias finitas de la Ecuación de Helmholtz (2.24) para dicho punto, tomando en cuenta las condiciones de frontera de la ecuación 2.25. Debido a que el campo eléctrico es igual a cero en cualquier punto dentro de los cilindros conductores, solo se toman los renglones y columnas definidos por el vector d , lo que produce que la matriz `temp` tenga 1369 elementos para $N = 3$.

A continuación se obtienen los eigen-valores de la matriz `temp`, para cada valor de \mathbf{k} , y se despeja la frecuencia normalizada a partir de la ecuación 2.24 y finalmente se ordenan los eigen-valores de forma creciente mediante la subrutina `sort`. Para $N = 3$ los primeros siete eigen-valores para $k_x = k_y = 0$, son los siguientes:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0,4275 \\ 0,9887 \\ 1,038 \\ 1,038 \\ 1,2187 \\ 1,3672 \\ 1,4783 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Función `distanciacc.m`

```
function total=distanciacc(N)
%Distancias en la red cuadrada de cada nodo con respecto a las
%cuatro esquinas de la celda unitaria
unitariax=1;%celda unitaria en x
unitariay=1;%celda unitaria en y
%variación de arriba hacia abajo
pivotey2=reshape((repmat([0:2*N],(2*N+1),1)),1,((2*N+1)*(2*N+1)))*
unitariay;
pivotey3=fliplr(pivotey2);%variación de abajo hacia arriba
%variación izquierda a derecha, esquina superior izquierda
pivotex2=repmat([0:2*N],1,(2*N+1))*unitariax;
%variación derecha a izquierda, esquina superior derecha
pivotex3=repmat([2*N:-1:0],1,(2*N+1))*unitariax;
%variación izquierda a derecha, esquina inferior izquierda
pivotex4=pivotex2;
%variación derecha a izquierda, esquina inferior derecha
pivotex5=pivotex3;
%Cálculo de las distancias con respecto a cada esquina y obtencion
%de los nodos que se encuentran dentro de los cilindros metalicos
%esquina superior izquierda
menores2=nodomin(sqrt(pivotex2.^2+pivotey2.^2),0.2*(2*N));
%esquina superior derecha
menores3=nodomin(sqrt(pivotex3.^2+pivotey2.^2),0.2*(2*N));
%esquina inferior izquierda
```

```

menores4=nodomin(sqrt(pivotex4.^2+pivotey3.^2),0.2*(2*N));
%esquina inferior derecha
menores5=nodomin(sqrt(pivotex5.^2+pivotey3.^2),0.2*(2*N));
%ordenamiento de los nodos
total=sort([menores2 menores3 menores4 menores5]);

```

La función `distanciacc.m` regresa en un vector, los nodos que se encuentran dentro de los cilindros conductores, por lo que es necesario obtener el valor de la distancia de cada nodo con respecto a las esquinas de celda unitaria. Dichas distancias son necesarias debido a que en cada esquina de la celda unitaria se encuentra una cuarta parte de un cilindro metálico, posteriormente llama a la función `nodomin.m` la cual regresa los nodos en cuestión. La función `nodomin.m` requiere como parámetros de entrada la distancia de los nodos y la condición $r/a = 0,2$, la cual se representa de manera normalizada en el programa como $0,2(2N)$. Las distancias obtenidas también se encuentran normalizadas, ya que se considera que tanto la distancia horizontal, como vertical entre dos puntos adyacentes es igual a 1. A continuación se muestran las distancias de los nodos para la esquina superior izquierda. La presentación de las distancias se realiza mediante un vector de 49 valores, y cada elemento representa un nodo de la malla de acuerdo a la numeración presentada por la figura B.2(b)

$$dis = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 1,4 & 2,2 & 3,1 & 4,1 & 5,1 \\ 6,1 & 2 & 2,2 & 2,8 & 3,6 & 4,4 & 5,3 & 6,3 & 3 & 3,1 & 3,6 & 4,2 \\ 5 & 5,8 & 6,7 & 4 & 4,1 & 4,4 & 5 & 5,6 & 6,4 & 7,2 & 5 & 5,1 & 5,3 \\ 5,8 & 6,4 & 7,1 & 7,8 & 6 & 6,1 & 6,3 & 6,7 & 7,2 & 7,8 & 8,4 \end{bmatrix}$$

Función `nodomin.m`

```

function c=nodomin(a,h)
%Obtención de los nodos menores al radio de los
%cilindros metalicos
[b c]=sort(a);%ordenamiento de las distancias
%Comparacion con el radio de los cilindros
%y obtencion de los valores minimos
b=abs(fliplr(b)-h);
[d e]=min(b);
%Ordenamiento de los nodos
f=(length(b)-1):-2:(-(length(b)-1));
e=e+f(e);
c=sort(c(1:e));

```

Esta función obtiene los nodos que se encuentran dentro de los cilindros metálicos a partir de la distancia de los nodos con respecto a las esquinas de la celda unitaria y la condición $r/a = 0,2$. La obtención de los nodos se realiza mediante una comparación sencilla entre los dos parámetros de entrada de la función y posteriormente se ordenan mediante la subrutina `sort`.

Función `pruebat.m`

```
function c=pruebat(b,N)
%Nodos que se encuentran fuera de los cilindros metálicos
c=[1:(b(1)-1)];
for i=1:(length(b)-1)
    c=[c (b(i)+1):(b(i+1)-1)];
end
c=[c (b(length(b))+1):((2*N+1)^2)];
```

La función `pruebat.m` obtiene los nodos que se encuentran fuera de los cilindros metálicos, para esto solamente requiere los nodos que se encuentran dentro de los cilindros y N , como parámetros de entrada.

Función `asignacioncc.m`

```
function psi=asignacioncc(N,kx,ky)
%Asignacion de los valores en diferencias finitas para la celda
%unitaria cuadrada
%creación de la matriz completa
psi=zeros((2*N+1)^2,(2*N+1)^2,length(kx));
%índices (nodos) sin fronteras
insf=[(2+(2*N+1)):(2*(2*N+1)-1)];
insf= repmat(insf,(2*N+1-2),1);
espa=(0:(2*N+1-3))';
espa= repmat(espa,1,(2*N+1-2));
espa=espa*(2*N+1);
insf=insf+espa;
insf=reshape(insf',1,((2*N+1)^2-(4*(2*N+1)-4)));
%La variable 'insf' contiene todos los índices sin frontera dentro
%de la celda unitaria.
%Ciclo de asignacion de valores para los 'insf'.
for ii=1:length(insf)
    psi(insf(ii),insf(ii),:)= -4; %central, i,j
    psi(insf(ii),insf(ii)+1,:)= 1; %derecha, i+1,j
    psi(insf(ii),insf(ii)-1,:)= 1; %izquierda, i-1,j
    psi(insf(ii),insf(ii)-2*N-1,:)= 1; %arriba, i,j+1
    psi(insf(ii),insf(ii)+2*N+1,:)= 1; %abajo, i,j-1
```

```

end
%índices con frontera
%superior
incfs=2:(2*N);
%inferior
incfi=((2*N+1)^2-(2*N))+1:((2*N+1)^2-1);
%izquierda-derecha
incfid=repmat([(2*N+1) (2*N+2)],(2*N+1),1);
nespa=(0:2*N+1:(2*N+1)^2-(2*N+1));
nespa=repmat(nespa',1,2);
incfid=incfid+nespa;
[u v]=size(incfid);
incfid=sort(reshape(incfid,1,u*v));
incfid=incfid(2:u*v-2);
%Concatenacion de todos los indices con frontera dentro de la
%celda unitaria.
incf=sort([incfs incfi incfid]);
incfp=incf-((2*N+1)^2-2*N);
alfa=find(incfp);
incf=incf(alfa);
%La variable 'incf' contiene todos los indices sin frontera dentro
%de la celda unitaria.
%Ciclo de asignacion de valores para los 'incf'.
for ii=1:length(incf)
    psi(incf(ii),incf(ii))=-4;
    %frontera derecha
    if mod(incf(ii),(2*N+1))==0
        psi(incf(ii),incf(ii),:)= -4; %central, i,j
        psi(incf(ii),incf(ii)-2*N,:)=exp(i*kx); %derecha, i+1,j
        psi(incf(ii),incf(ii)-1,:)=1; %izquierda, i-1,j
        psi(incf(ii),incf(ii)-2*N-1,:)=1; %arriba, i,j+1
        psi(incf(ii),incf(ii)+2*N+1,:)=1; %abajo, i,j-1
    end
    %frontera izquierda
    if mod(incf(ii),(2*N+1))==1
        psi(incf(ii),incf(ii),:)= -4; %central, i,j
        psi(incf(ii),incf(ii)+1,:)=1; %derecha, i+1,j
        psi(incf(ii),incf(ii)+2*N,:)=exp(-i*kx); %izquierda, i-1,j
        psi(incf(ii),incf(ii)-2*N-1,:)=1; %arriba, i,j+1
    end
end

```



```

        psi(incf(ii),incf(ii)+2*N+1,:)=1;%abajo, i,j-1
    end
    %frontera arriba
    if incf(ii)<(2*N+1)
        psi(incf(ii),incf(ii),:)= -4;%central, i,j
        psi(incf(ii),incf(ii)+1,:)=1;%derecha, i+1,j
        psi(incf(ii),incf(ii)-1,:)=1;%izquierda, i-1,j
        psi(incf(ii),incf(ii)+(2*N+1)*2*N,:)=exp(i*ky);%arriba, i,j+1
        psi(incf(ii),incf(ii)+2*N+1,:)=1;%abajo, i,j-1
    end
    %frontera abajo
    if (incf(ii)+(2*N+1))>(2*N+1)^2
        psi(incf(ii),incf(ii),:)= -4;%central, i,j
        psi(incf(ii),incf(ii)+1,:)=1;%derecha, i+1,j
        psi(incf(ii),incf(ii)-1,:)=1;%izquierda, i-1,j
        psi(incf(ii),incf(ii)-2*N-1,:)=1;%arriba, i,j+1
        psi(incf(ii),incf(ii)-(2*N+1)*2*N,:)=exp(-i*ky);%abajo,i,j-1
    end
end
end

```

La función `asignacioncc.m` obtiene la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales, en el cual a cada punto de la malla se le asigna una ecuación en diferencias de acuerdo a la ecuación 2.24. El sistema presenta la siguiente forma:

$$W^{(2N+1) \times (2N+1)} E^{(2N+1)^2 \times 1} = \gamma^{(2N+1)^2 \times 1} E^{1 \times (2N+1)^2}$$

La matriz W de coeficientes representa a la aproximación en diferencias del laplaciano y cada renglón de esta representa la ecuación en diferencias para cada punto de la malla. E representa al campo eléctrico en cada punto de la malla y γ son los eigen-valores asociados a cada punto de la malla.

La matriz W es cuadrada y esta conformada por $(2N + 1)^2$ elementos, en cada renglón se representan todos los puntos de la malla y el elemento del renglón que se encuentra dentro de la diagonal principal es el elemento ij de la ecuación 2.24. La asignación del algoritmo de diferencias finitas se realiza tomando en cuenta la numeración presentada en la figura B.2. Este proceso se repite a lo largo de todos los renglones de la matriz. Esta función se divide en dos secciones, la primera consiste en la asignación de valores para los nodos que no presentan fronteras periódicas y la segunda sección asigna los valores a los nodos que tienen por lo menos una frontera de acuerdo al algoritmo de diferencias finitas. La asignación de fronteras se realiza a partir de la ecuación 2.25.

Para el caso de $N = 3$, los nodos (índices) sin fronteras son los siguientes:

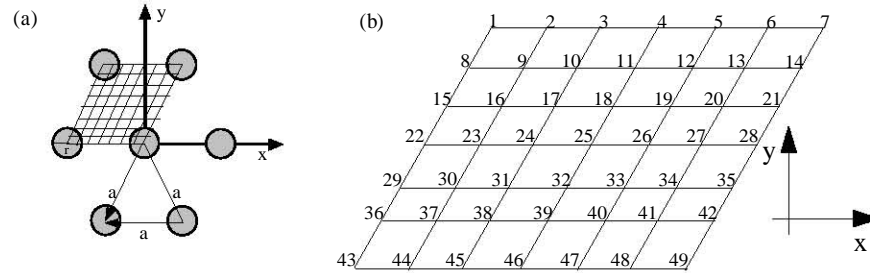


Figura B.3: (a) Esquema de la red triangular, la zona sombreada representa la celda unitaria. (b) Malla utilizada para cubrir la celda unitaria de la red triangular con $N = 3$.

$$insf = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 \end{bmatrix}$$

mientras que los índices con fronteras son:

$$incf = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 21 & 22 \\ 28 & 29 & 35 & 36 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 49 \end{bmatrix}$$

B.2. Red Triangular

El diagrama de bandas del cristal fotónico con la red triangular se cálculo de manera similar al de la red cuadrada, tomando en cuenta las diferencias referentes a la geometría de la celda unitaria, a la ecuación en diferencias apropiada (2.32) y a las condiciones de frontera expresadas en la ecuación 2.33. En la figura B.3(a) se muestra una representación de la celda unitaria y se observa que en cada esquina de la celda unitaria se encuentra una sección del cilindro conductor. Los nodos de la malla siguen la numeración que se muestra en la figura B.3(b).

Archivo principal.m

```
%Diagrama de bandas: Red Triangular
```

```
%Programa Principal
```

```
clear
```

```
clc
```

```
%De acuerdo al algoritmo de diferencias finitas el numero de puntos
```

```

%en los que se divide la celda unitaria es de (2*N+1) en cada uno
%de sus lados, es decir se tienen (2*N+1)*(2*N+1) puntos dentro de
%la celda unitaria
N=input('Indica el numero de puntos en los que se dividira la celda
unitaria ');
inicio=clock;%Variable utilizada para conocer el tiempo de procesamiento
%Eigenvalores para la zona Gamma-M
%La función diagramatt está limitada a 10 valores del vector
%de onda k por cada vez que se le llame.
gm=[diagramatt(zeros(1,10),0:2*pi/sqrt(3)/9:2*pi/sqrt(3),N)];
%Eigenvalores para la zona M-K
mk=[diagramatt(0:2*pi/3/9:2*pi/3,2*pi/sqrt(3)*ones(1,10),N)];
%Eigenvalores para la zona K-Gamma
kg=[diagramatt(2*pi/3:-2*pi/3/9:0,2*pi/sqrt(3):-2*pi/sqrt(3)/9:0,N)];
final=clock;%Variable utilizada para conocer el tiempo de procesamiento
completo=[gm mk kg];%matriz con todos los eigenvalores
%Se guarda la variable 'completo' en el archivo
%bandast.mat
save bandast.mat completo;

```

De la misma forma que en la red cuadrada el archivo `principal.m`, obtiene del usuario el valor del parámetro N , y define los valores del vector de onda \mathbf{k} . Una vez más los valores de \mathbf{k} , están divididos en tres, de acuerdo al contorno de la zona irreductible de Brillouin para la red triangular.

Para la línea $\Gamma \rightarrow M$, se tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 k_x &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\
 k_y &= \left(0 \ \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 2\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 3\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 4\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 5\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 6\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 7\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 8\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \right)
 \end{aligned}$$

para $M \rightarrow K$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 k_x &= \left(0 \ \frac{2\pi}{27} \ 2\frac{2\pi}{27} \ 3\frac{2\pi}{27} \ 4\frac{2\pi}{27} \ 5\frac{2\pi}{27} \ 6\frac{2\pi}{27} \ 7\frac{2\pi}{27} \ 8\frac{2\pi}{27} \ \frac{2\pi}{3} \right) \\
 k_y &= \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \right)
 \end{aligned}$$

y para $\Gamma \rightarrow K$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 k_x &= \left(0 \ \frac{2\pi}{27} \ 2\frac{2\pi}{27} \ 3\frac{2\pi}{27} \ 4\frac{2\pi}{27} \ 5\frac{2\pi}{27} \ 6\frac{2\pi}{27} \ 7\frac{2\pi}{27} \ 8\frac{2\pi}{27} \ \frac{2\pi}{3} \right) \\
 k_y &= \left(0 \ \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 2\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 3\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 4\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 5\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 6\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 7\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ 8\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \right)
 \end{aligned}$$

Además obtiene todos los eigen-valores de la red cuadrada a partir de la función `diagramatt`, la cuál requiere como valores de entrada, k_x , k_y y N . Una vez que se tienen los eigen-valores del problema se almacenan en el archivo `bandast.mat`, para posteriormente graficarlos.

```
Función diagramatt.m
function omega=diagramatt(kx,ky,N)
%Eigen-valores para los vectores de onda k ingresados
b=distanciatt(N);%nodos que se encuentran dentro de los cilindros
d=pruebat(b,N);%nodos que se encuentran fuera de los cilindros
temp=asignacionmod(N,kx,ky);%asignacion de los valores en diferencias
finitas
temp=temp(d,d,:);%eliminacion de los nodos que se encuentran dentro
de los cilindros
%Cálculo de los eigenvalores
omega=[eig(temp(:,:,1)) eig(temp(:,:,2)) eig(temp(:,:,3))
eig(temp(:,:,4)) eig(temp(:,:,5)) eig(temp(:,:,6)) eig(temp(:,:,7))
eig(temp(:,:,8)) eig(temp(:,:,9)) eig(temp(:,:,10))];
%se elimina la variable temp, para ahorrar espacio en memoria
clear temp;
omega=(sqrt(-((2*N)^2)*omega/3))/(2*pi);%se despeja la frecuencia
omega=abs(sort(omega));%ordenamiento de los eigenvalores
La función diagramatt.m calcula los eigen-valores para un determinado valor de
k. Llama a la función distanciatt.m para obtener aquellos nodos que se encuentran
dentro de los cilindros conductores.
```

Si $N = 3$, entonces la función `distanciatt.m`, arroja el siguiente resultado:

$$b = [1 \ 2 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 14 \ 36 \ 41 \ 42 \ 43 \ 44 \ 48 \ 49]$$

y la función `pruebat.m` obtiene los nodos que se encuentran fuera de los cilindros conductores:

$$d = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 10 & 11 & 12 & 13 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 \\ 32 & 33 & 34 & 35 & 37 & 38 & 39 & 40 & 45 & 46 & 47 \end{bmatrix}$$

Posteriormente se obtiene la matriz `temp`, a partir de la función `asignacionmod.m`. Dicha matriz es cuadrada con $(2N + 1)^2$ elementos, y el número de elementos para $N = 3$, es de 2401. Debido a que el campo eléctrico es igual a cero en cualquier

punto dentro de los cilindros conductores, la matriz `temp` tiene 1225 elementos para $N = 3$.

A continuación se obtienen los eigen-valores de la matriz `temp`, para cada valor de \mathbf{k} , y se despeja la frecuencia normalizada a partir de la ecuación 2.32 y finalmente se ordenan los eigen-valores de forma creciente mediante la subrutina `sort`. Para $N = 3$ los primeros siete eigen-valores para $k_x = k_y = 0$, son los siguientes:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0,60879 \\ 1,0147 \\ 1,0546 \\ 1,1556 \\ 1,3063 \\ 1,4931 \\ 1,647 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Función `distanciatt.m`

```
function total=distanciatt(N)
%Distancias en la red triangular de cada nodo con respecto a las
%cuatro esquinas de la celda unitaria
unitariax=1;%celda unitaria en x
unitariay=sqrt(3)/2;%celda unitaria en y
pivotey2=reshape(( repmat([0:2*N],(2*N+1),1)),1,((2*N+1)*(2*N+1)))
*unitariay;%variación de arriba hacia abajo
pivotey3=fliplr(pivotey2);%variación de abajo hacia arriba
%variación izquierda a derecha, esquina superior izquierda
pivotex2=repmat([0:2*N],1,(2*N+1))*unitariax-pivotey2*unitariax/
2/unitariay;
%variación derecha a izquierda, esquina superior derecha
pivotex3=repmat([2*N:-1:0],1,(2*N+1))*unitariax+pivotey2*unitariax/
2/unitariay;
%variación izquierda a derecha, esquina inferior izquierda
pivotex4=repmat([0:2*N],1,(2*N+1))*unitariax+pivotey3*unitariax/
2/unitariay;
%variación derecha a izquierda, esquina inferior derecha
pivotex5=repmat([2*N:-1:0],1,(2*N+1))*unitariax-pivotey3*unitariax/
2/unitariay;
%Cálculo de las distancias con respecto a cada esquina y obtencion
%de los nodos que se encuentran dentro de los cilindros metalicos
```

```

%esquina superior izquierda
menores2=nodomin(sqrt(pivotex2.^2+pivotey2.^2),0.2*(2*N));
%esquina superior derecha
menores3=nodomin(sqrt(pivotex3.^2+pivotey2.^2),0.2*(2*N));
%esquina inferior izquierda
menores4=nodomin(sqrt(pivotex4.^2+pivotey3.^2),0.2*(2*N));
%esquina inferior derecha
menores5=nodomin(sqrt(pivotex5.^2+pivotey3.^2),0.2*(2*N));
%ordenamiento de los nodos
total=sort([menores2 menores3 menores4 menores5]);

```

La función `distanciatt.m` regresa los nodos que se encuentran dentro de los cilindros conductores, de la misma forma que la función `distanciacc.m`. Para ejemplificar se muestran las distancias de los nodos para la esquina superior izquierda.

```

dis = [ 0 1 2 3 4 5 6 1 1 1,7 2,6 3,6 4,5
        5,5 2 1,7 2 2,6 3,4 4,3 5,3 3 2,6 2,6 3 3,6 4,3
        5,1 4 3,6 3,4 3,6 4 4,5 5,2 5 4,5 4,3 4,3 4,5
        5 5,5 6 5,5 5,3 5,1 5,2 5,6 6 ]

```

Función `asignacionmod.m`

```

function psi=asignacionmod(N,kx,ky)
%Asignacion de los valores en diferencias finitas para la celda
%unitaria triangular
%creación de la matriz completa
psi=zeros((2*N+1)^2,(2*N+1)^2,length(kx));
%índices (nodos) sin fronteras
insf=[(2+(2*N+1)):(2*(2*N+1)-1)];
insf= repmat(insf,(2*N+1-2),1);
espa=(0:(2*N+1-3))';
espa= repmat(espa,1,(2*N+1-2));
espa=espa*(2*N+1);
insf=insf+espa;
insf=reshape(insf',1,((2*N+1)^2-(4*(2*N+1)-4)));
%La variable 'insf' contiene todos los índices sin frontera dentro
%de la celda unitaria.
%Ciclo de asignacion de valores para los 'insf'.
for ii=1:length(insf)
    psi(insf(ii),insf(ii),:)= -16;%central, i,j

```

```

psi(insf(ii),insf(ii)+1,:)=4;%derecha, i+1,j
psi(insf(ii),insf(ii)-1,:)=4;%izquierda, i-1,j
psi(insf(ii),insf(ii)-2*N-1,:)=4;%arriba, i,j+1
psi(insf(ii),insf(ii)-2*N-2,:)=1;%arriba izquierda hexagono, i-1,j+1
%arriba derecha punto mas alejado, i+1,j+1
psi(insf(ii),insf(ii)-2*N,:)= -1;
psi(insf(ii),insf(ii)+2*N+1,:)=4;%abajo, i,j-1
psi(insf(ii),insf(ii)+2*N+2,:)=1;%abajo derecha hexagono, i+1,j-1
%abajo izquierda punto mas alejado, i-1,j-1
psi(insf(ii),insf(ii)+2*N,:)= -1;
end
%índices con frontera
%superior
incfs=2:(2*N);
%inferior
incfi=((2*N+1)^2-(2*N))+1:(2*N+1)^2-1);
%izquierda-derecha
incfid= repmat([(2*N+1) (2*N+2)],(2*N+1),1);
nespa=(0:2*N+1:(2*N+1)^2-(2*N+1));
nespa= repmat(nespa',1,2);
incfid=incfid+nespa;
[u v]=size(incfid);
incfid=sort(reshape(incfid,1,u*v));
incfid=incfid(2:u*v-2);
%Concatenacion de todos los indices con frontera dentro de la celda
%unitaria.
incf=sort([incfs incfi incfid]);
incfp=incf-((2*N+1)^2-2*N);
alfa=find(incfp);
incf=incf(alfa);
%La variable 'incf' contiene todos los indices sin frontera dentro
%de la celda unitaria.
%Ciclo de asignacion de valores para los 'incf'.
for ii=1:length(incf)
psi(incf(ii),incf(ii))=-16;
%frontera derecha
if mod(incf(ii),(2*N+1))==0
psi(incf(ii),incf(ii),:)= -16;%central, i,j
psi(incf(ii),incf(ii)-2*N,:)=4*exp(i*kx);%derecha, i+1,j

```

```

    psi(incf(ii),incf(ii)-1,:)=4;%izquierda, i-1,j
    psi(incf(ii),incf(ii)-2*N-1,:)=4;%arriba, i,j+1
%arriba izquierda hexagono, i-1,j+1
    psi(incf(ii),incf(ii)-2*N-2,:)=1;
%arriba derecha punto mas alejado, i+1,j+1
    psi(incf(ii),incf(ii)-2*N-(2*N+1),:)= -1*exp(i*kx);
    psi(incf(ii),incf(ii)+2*N+1,:)=4;%abajo, i,j-1
%abajo derecha hexagono, i+1,j-1
    psi(incf(ii),incf(ii)+1,:)=1*exp(i*kx);
%abajo izquierda punto mas alejado, i-1,j-1
    psi(incf(ii),incf(ii)+2*N,:)= -1;
end
%frontera izquierda
if mod(incf(ii),(2*N+1))==1
    psi(incf(ii),incf(ii),:)= -16;%central, i,j
    psi(incf(ii),incf(ii)+1,:)=4;%derecha, i+1,j
    psi(incf(ii),incf(ii)+2*N,:)=4*exp(-i*kx);%izquierda, i-1,j
    psi(incf(ii),incf(ii)-2*N-1,:)=4;%arriba, i,j+1
%arriba izquierda hexagono, i-1,j+1
    psi(incf(ii),incf(ii)-1,:)=1*exp(-i*kx);
%arriba derecha punto mas alejado, i+1,j+1
    psi(incf(ii),incf(ii)-2*N,:)= -1;
    psi(incf(ii),incf(ii)+2*N+1,:)=4;%abajo, i,j-1
%abajo derecha hexagono, i+1,j-1
    psi(incf(ii),incf(ii)+2*N+2,:)=1;
%abajo izquierda punto mas alejado, i-1,j-1
    psi(incf(ii),incf(ii)+(2*N+1)+2*N,:)= -1*exp(-i*kx);
end
%frontera arriba
if incf(ii)<(2*N+1)
    psi(incf(ii),incf(ii),:)= -16;%central, i,j
    psi(incf(ii),incf(ii)+1,:)=4;%derecha, i+1,j
    psi(incf(ii),incf(ii)-1,:)=4;%izquierda, i-1,j
%arriba, i,j+1
psi(incf(ii),incf(ii)+(2*N+1)*2*N,:)=4*exp(i*(1/2)*(kx+sqrt(3)*ky));
%arriba izquierda hexagono, i-1,j+1
psi(incf(ii),incf(ii)+(2*N+1)*2*N-1,:)=1*exp(i*(1/2)*(kx+sqrt(3)*ky));
%arriba derecha punto mas alejado, i+1,j+1
psi(incf(ii),incf(ii)+(2*N+1)*2*N+1,:)= -1*exp(i*(1/2)*(kx+sqrt(3)*ky));

```



```

        psi(incf(ii),incf(ii)+2*N+1,:)=4;%abajo, i,j-1
%abajo derecha hexagono, i+1,j-1
        psi(incf(ii),incf(ii)+2*N+2,:)=1;
%abajo izquierda punto mas alejado, i-1,j-1
        psi(incf(ii),incf(ii)+2*N,:)= -1;
    end
%frontera abajo
    if (incf(ii)+(2*N+1))>(2*N+1)^2
        psi(incf(ii),incf(ii),:)= -16;%central, i,j
        psi(incf(ii),incf(ii)+1,:)=4;%derecha, i+1,j
        psi(incf(ii),incf(ii)-1,:)=4;%izquierda, i-1,j
        psi(incf(ii),incf(ii)-2*N-1,:)=4;%arriba, i,j+1
%arriba izquierda hexagono, i-1,j+1
        psi(incf(ii),incf(ii)-2*N-2,:)=1;
%arriba derecha punto mas alejado, i+1,j+1
        psi(incf(ii),incf(ii)-2*N,:)= -1;
%abajo, i,j-1
psi(incf(ii),incf(ii)-(2*N+1)*2*N,:)=4*exp(-i*(1/2)*(kx+sqrt(3)*ky));
%abajo derecha hexagono, i+1,j-1
psi(incf(ii),incf(ii)-(2*N+1)*2*N+1,:)=1*exp(-i*(1/2)*(kx+sqrt(3)*ky));
%abajo izquierda punto mas alejado, i-1,j-1
psi(incf(ii),incf(ii)-(2*N+1)*2*N-1,:)= -1*exp(-i*(1/2)*(kx+sqrt(3)*ky));
    end
end

```

La función `asignacionmod.m` obtiene la matriz completa para el cálculo de los eigen-valores, el número de elementos, así como la asignación de los mismos se hace de la misma forma que la red cuadrada. La función se divide igualmente en dos secciones, índices con fronteras y sin fronteras. La asignación de valores para la matriz se hace con base a la ecuación 2.32 y las condiciones de frontera se realizan a partir de la ecuación 2.33.

Para el caso de $N = 3$, los nodos (índices) sin fronteras son los siguientes:

$$insf = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 \end{bmatrix}$$

mientras que los índices con fronteras son:

$$incf = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 21 & 22 \\ 28 & 29 & 35 & 36 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 49 \end{bmatrix}$$

Bibliografía

- [1] J. D. Jackson, Classical electrodynamics (John Wiley & Sons, 1989).
- [2] V. G. Veselago, Sov. Phys. Usp. **10**, 509 (1968).
- [3] J. B. Pendry, Phys. Rev. Lett. **85**, 3966 (2000).
- [4] D. Mendoza, Materiales Avanzados **1**, 41 (2003).
- [5] K. Sakoda, Optical properties of photonic crystals (Springer-Verlag, NY, 2001).
- [6] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, y J. N. Winn, Photonic Crystals: Molding the flow of light (Princeton University Press, 1995).
- [7] R. A. Shelby, D. R. Smith, y S. Schultz, Science **292**, 77 (2001).
- [8] E. Cubukcu, K. Aydin, E. Ozbay, S. Foteinopoulou, C. M. Soukoulis, Nature **423**, 604 (2003).
- [9] P. V. Parimi, W. T. Lu, P. Vodo, J. Sokoloff, J. S. Dero, y S. Sridhar, Phys. Rev. Lett. **92**, 127401 (2004).
- [10] P. V. Parimi, W. T. Lu, P. Vodo, y S. Sridhar, Nature **426**, 404 (2003).
- [11] M. Notomi, Phys. Rev. B **62**, 10696 (2000).
- [12] J. B. Pendry y D. R. Smith, Physics Today **57**, 37 (2004).
- [13] C. Luo, S. G. Johnson, J. D. Joannopoulos, y J. B. Pendry, Optics Express **11**, 746 (2003).
- [14] D. R. Smith y N. Kroll, Phys. Rev. Lett. **85**, 2933 (2000).
- [15] M. W. McCall, A. Lakhtakia y W. S. Weiglhofer, Eur. J. Phys **23**, 353 (2002).

-
- [16] C. Luo, S. G. Johnson, J. D. Joannopoulos, y J. B. Pendry, *Phys. Rev. B* **65**, 201104 (2002).
- [17] S. Y. Lin, V. M. Hietala, L. Wang, y E. D. Jones, *Opt. Lett.* **21**, 1771 (1996).
- [18] H. Kosaka, T. Kawashima, A. Tomita, M. Notomi, T. Tamamura, T. Sato y S. Kawakami, *Phys. Rev. B* **58**, R10096 (1998).
- [19] S. Foteinopoulou, E. N. Economou, y C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 107402 (2003).
- [20] J. B. Pendry, *J. Phys. [Condensed Matter]* **8**, 1085 (1996).
- [21] M. Qiu y S. He, *Phys. Lett A* **282**, 85 (2001).
- [22] D. K. Cheng, *Field and wave electromagnetics* (Addison-Wesley, 1990).
- [23] D. R. Smith, S. Schultz, N. Kroll, M. Sigalas, K. M. Ho, y C. M. Soukoulis, *Appl. Phys. Lett* **65**, 645 (1994).
- [24] E. I. Smirnova, C. Chen, M. A. Shapiro, J. R. Sirigiri y R. J. Temkin, *J. Appl. Phys.* **91**, 960 (2002).
- [25] G. D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods* (Oxford, 1985).
- [26] C. F. Gerald, *Numerical Analysis* (Addison-Wesley, 1991).
- [27] A. Martínez, H. Míguez, A. Griol, y J. Martí, *Phys. Rev. B* **69**, 165119 (2004).
- [28] E. Ozbay, I. Bulu, K. Aydin, H. Caglayan, K. B. Alici, y K. Guven, *Laser Physics* **15**, 217 (2005).
- [29] P. Vodo, P. V. Parimi, W. T. Lu, S. Sridhar, y R. Wing, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 1858 (2004).
- [30] D. R. Smith, R. Dalichaouch, N. Kroll, S. Schultz, S. L. McCall y P. M. Platzman, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 314 (1993).
- [31] T. S. Saad, *Microwave engineers' handbook* (Artech-House, 1971).
- [32] P. Vodo, P. V. Parimi, W. T. Lu, y S. Sridhar, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 201108 (2005).
- [33] C. Kittel, *Solid State Physics* (John Wiley & Sons, 1976).