UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CONFIGURACIONES DE n LÍNEAS EN EL ESPACIO AFÍN DE DIMENSIÓN n+k

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

M. en C. MARGARETA BOEGE VON MENTZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT

MÉXICO, D.F. **JUNIO 2006**

Agradecimientos

Gracias, Luis, por trabajar conmigo durante este tiempo, por tu entusiasmo y por tu apoyo;

Gracias a los miembros del jurado;

Gracias a Memo, a mis papás y mis hermanos y a mis amigos por el apoyo emocional.

Agradezco al Instituto de Matemáticas, Unidad Cuernavaca, por un muy agradable lugar de trabajo y a CONACYT por proporcionarme una beca para realizar mis estudios de doctorado.

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar el espacio de configuraciones de n líneas ordenadas en $\mathbb{R}^{n+k}$ módulo la acción del grupo afin. Primero diremos unas palabras sobre configuraciones en general, para luego enfocarnos en las configuraciones de líneas que vamos a estudiar.

Los espacios de configuraciones más estudiados son los espacios de configuraciones de puntos. El espacio $C_n(M)$ de n puntos distintos en M (donde M es una variedad cualquiera) es el siguiente subconjunto de $M \times M \times ... \times M$

$$C_n(M) = \{(x_1, ..., x_n) \in M^n : x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}.$$

De acuerdo con los diversos contextos en donde aparecen, existen diferentes "versiones"de estos espacios. A continuación mencionaremos algunas de ellas.

A veces se considera los espacios $C_n(M)$ módulo la acción del grupo simétrico S_n, es decir, en vez de n-adas de puntos $(x_1, ..., x_n)$ se consideran conjuntos de puntos $\{x_1, ..., x_n\}$. Tanto estos espacios como sus compactificaciones [FM] resultan importantes en física y en geometría algebraica. Por ejemplo, el grupo fundamental de $C_n(\mathbb{C})$ es el grupo de trenzas puras y si consideramos la accion del grupo simetrico obtenemos el grupo de trenzas.

El producto simétrico $SP^n(M)$ es M^n módulo la acción del grupo simétrico. Se distingue de los anteriores en que se permite que los puntos coincidan. Estos espacios sirven para definir homología [DT].

Se han estudiado configuraciones de puntos en el proyectivo P^1, bajo la acción del grupo $PGL(2)$. Existe una relación entre el espacio de configuraciones de cuatro puntos en P^1 y funciones hipergeométricas, y se han estudiado relaciones similares para n puntos en P^1 y seis puntos en P^2 [Y].

Tambien se han estudiado espacios móduli de brazos articulados, que pueden ser considerados como espacios de configuraciones con ciertas restricciones, encontrando que cualquier variedad compacta es espacio móduli de brazos articulados [KM].

Hasta aquí sobre espacios de configuraciones en general. Ahora mencionaremos los espacios de configuraciones cuyo estudio lleva al problema de esta tesis.

Consideremos el espacio de r puntos en el proyectivo complejo $\mathbb{C}P^{k-1}$ (con $r \geqslant k$) donde los puntos pueden coincidir pero se pide que generen $\mathbb{C}P^{k-1}$, módulo la accion de $PGL_k(\mathbb{C})$. Este espacio es una Grassmanniana compleja. En [GGMS], Gelfand, Goresky, Mac Pherson y Serganova estudiaron una descomposicion en estratos de estos espacios. A cada configuración se le puede asociar un matroide, y las configuraciones en un mismo estrato corresponden a aquellas a las que se les asocia el mismo matroide. Encontraron que esta misma descomposicion de la Grassmanniana se puede obtener desde otros dos puntos de vista: uno que proviene de intersección de celdas de Schubert y otro que surge de la acción de $(\mathbb{C})^n$ en la Grassmanniana (esta acción tiene asociado un mapeo momento y los puntos en un mismo estrato son aquellos cuya proyeccion bajo este mapeo da un mismo poliedro convexo).

También se pueden considerar configuraciones de puntos en $\mathbb{R}^n$, permitiendo que los puntos coincidan pero pidiendo que generen. Y se puede pensar en este espacio módulo la acción del grupo afín. Si se hace esto, también se obtiene una Grassmanniana (ahora una Grassmanniana real), pero con otra estratificación, que corresponde a matroides orientados [ABMOS]. Esta estratificacion fue utilizada por Bracho, Montejano y Oliveros en [BMO] para estudiar el espacio de m-trasversales a una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$. Si llamamos $T_m(\mathcal{F})$ al subespacio de la Grassmanniana que consta de todos los m-planos trasversales a todos los elementos de $\mathcal{F}$, resulta que la topología de $T_m(\mathcal{F})$ se puede estudiar a través de las configuraciones afines de $r+1$ puntos en $\mathbb{R}^n$. En particular, si $r = m+1$ y $T_{m-1}(\mathcal{F})$ es no vacío, el tipo de homotopía de $T_m(\mathcal{F})$ esta determinado por los estratos que contienen algún elemento asociado a alguna trasversal a $\mathcal{F}$.

En vez de configuraciones de puntos uno puede pensar en configuraciones de líneas. Por ejemplo, en [ABGM] se prueba que el espacio de configuraciones afines de cuatro líneas en $\mathbb{R}^3$

es topológicamente y combinatoriamente homeomorfo al espacio de configuraciones afines de seis puntos en $\mathbb{R}^4$.

Aquí queremos estudiar espacios de configuraciones de líneas en $\mathbb{R}^m$, con el número de líneas menor o igual a la dimensión del espacio en que se encuentran.

Una configuración de n líneas en el espacio afín de dimensión $n+k$ es una órbita de la acción del grupo afín $Af(n+k)$ en el espacio de n-adas de líneas (todas distintas) en $\mathbb{R}^{n+k}$. Tenemos entonces la acción de un grupo en un espacio y nos preguntamos cuál es el espacio cociente. Con çuál es"nos referimos a si es topologicamente equivalente a un espacio conocido. Queremos entender cómo estan pegadas las orbitas, cuáles estan cerca de otras. Quisieramos, además, que nuestro espacio cociente fuera una variedad. Esto no tiene que ser así. Podría, por ejemplo, suceder que las órbitas no fueran cerradas. En este caso la imágen inversa de un punto bajo el mapeo cociente no sería un cerrado, por lo que el espacio cociente no sería Haussdorff. Esto sucede frecuentemente y, en otro contexto, hay teorías dedicadas a ver cuándo se obtiene un buen cociente y qué puntos hay que quitar para lograrlo (ver [G]).

El caso de cuatro líneas en el plano afín, estudiado por Arocha, Bracho y Montejano en [ABM], muestra que en general el espacio que se obtiene no es Haussdorff. En este ejemplo se ve la necesidad de introducir ciertas reglas"sobre que configuraciones se deben excluir para obtener una variedad. El espacio de configuraciones de cuatro líneas en el plano afín se puede ver también como el espacio de configuraciones de cinco puntos distintos en el proyectivo real P^2, y a su vez existe una dualidad entre este espacio y el de configuraciones de cinco puntos en el proyectivo real P^1. Este ejemplo sirve como motivación para estudiar configuraciones de puntos en la línea proyectiva. Esto se hace en [ABM], en donde, entre otros resultados, se caracterizan las reglas que se tienen que imponer para que espacios de configuraciones de puntos en la línea proyectiva (real y compleja) sean una variedad compacta.

También nosotros nos restringiremos a un subconjunto abierto en el espacio de todas las n-adas de líneas. En nuestro caso, las n-adas de líneas que vamos a considerar son aquellas cuyas direcciones son linealmente independientes, y tales que en esas n-adas de líneas la acción de grupo afín es libre (para definiciones precisas ver el capitulo 1 de la tesis).

Tomemos un elemento típico $(L_1, ..., L_n)$ en nuestro espacio. Como las direcciones de las líneas son linealmente independientes, supongamos por un momento que la dirección de L_i es el vector e_i de la base canonica de $\mathbb{R}^{n+k}$. Podemos ver a $\mathbb{R}^{n+k}$ como $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^k$. Al proyectar nuestras n líneas en $\mathbb{R}^k =< e_{n+1}, ..., e_{n+k} >$ obtenemos n puntos en $\mathbb{R}^k$.

Esta observación nos lleva a una característica especial de nuestro espacio de configuraciones de líneas: probaremos que este espacio es un fibrado, cuya base está contenida en el espacio de configuraciones afines de n puntos en $\mathbb{R}^k$. Sabemos que los espacios de configuraciones afines de puntos en $\mathbb{R}^k$ son Grassmannianas. La base de nuestro fibrado será esa Grassmanniana excepto un conjunto Δ de codimension mayor o igual que dos y la fibra resultará ser el producto de n espacios proyectivos reales P^{n-k-3}.

A lo largo de la tesis lo que haremos es construir este haz fibrado. Lo haremos de la siguiente manera:

En los capítulos 2 y 3 veremos formas más convenientes de entender nuestro espacio de configuraciones de líneas.

En el capítulo 4 definiremos un conjunto completo de invariantes de nuestras configuraciones de líneas.

Consideremos el haz fibrado cuyo espacio total son las parejas (L, H), donde L es un subespacio de dimensión r de $\mathbb{R}^m$, H es un subespacio de dimensión $r+1$ de $\mathbb{R}^m$ y $L \subset H$, junto con la proyeccion $\pi(L, H) = L$. En el capítulo 5 usaremos estos haces para construir otro haz ξ' y una función f de la Grassmanniana de configuraciones de puntos (menos un conjunto Δ) en la base de ξ'. Llamamos ξ al pullback de ξ'.

En el capítulo 6 probaremos el teorema principal de la tesis: el espacio de configuraciones de n líneas el el espacio afín de dimensión $n+k$ es homeomorfo al espacio total de ξ.

Finalmente, discutiremos algunos casos particulares y daremos una interpretación de nuestro haz en términos de configuraciones de puntos.

Capítulo 1

Definiciones.

Sean n y k dos enteros no negativos, con $n \neq 0$. Consideremos primero el conjunto de n-adas de líneas (no necesariamente por el orígen) en $\mathbb{R}^{n+k}$:

$$F_1 = \{(L_1, L_2, ..., L_n) : \text{ para } i = 1, ..., n, \; L_i \text{ es una línea en } \mathbb{R}^{n+k} \; \}.$$

El grupo afín $Af(n+k)$ actúa en $\mathbb{R}^{n+k}$ e induce una acción en F_1: dada $T \in Af(n+k)$ y $(L_1, ..., L_n) \in F_1$,

$$T((L_1..., L_n)) = (T(L_1), ..., T(L_n))$$

donde $T(L_i) = \{T(x) : x \in L_i\}$. Como una transformación afín manda líneas en líneas, esta acción está bien definida.

1.1 Definición. Diremos que $(L_1, ..., L_n)$ *fija* si $T \in Af(n+k)$ y, para toda $i = 1, ..., n$, $T(L_i) = L_i$ implica que T es la identidad.

Ahora vamos a considerar el siguiente subconjunto de F_1:

$$F_2 = \{(L_1, ..., L_n) \in F : (L_1, ..., L_n) \text{ fija}\}.$$

Igual que antes, tenemos una acción del grupo afín en F_2. Probaremos que esta acción está bién definida en F_2. Sea $(L_1, ..., L_n) \in F_2$. Sea $T \in Af(n+k)$. Tenemos que ver que $(T(L_1), ..., T(L_n))$ fija. Supongamos que $T'(T(L_i)) = T(L_i)$ para toda $i = 1, ..., n$. Entonces tenemos que $T^{-1}(T'(T(L_i))) = L_i$ para toda $i = 1, ..., n$. Como $(L_1, ..., L_n)$ fija, $T^{-1} \circ T' \circ T$ es la identidad, y entonces T' es la identidad. De esta manera tenemos que la acción está bién definida en F_2.

Observese que la condición de que $(L_1, ..., L_n)$ fije es exáctamente que la acción sea libre, es decir, F_2 es el subconjunto de F_1 en donde la acción es libre. Podemos pensar en el cociente $F_2/Af(n+k)$. Nosotros no vamos a describir todo este cociente sino un subconjunto abierto de él. A continuación explicaremos cuál es este subconjunto.

Una línea L en $\mathbb{R}^{n+k}$ puede escribirse como $L = \{t\overline{v}+\overline{w} : t \in \mathbb{R}\}$ donde $\overline{v}$ y $\overline{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^{n+k}$. Decimos que $\pm\overline{v}$ es la dirección de L. Sea F_3 el subconjunto de F_2 que consta de las n-adas de líneas cuyas direcciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}^{n+k}$. La acción del grupo afín está bien definida en F_3 pues tanto las transformaciones lineales biyectivas como las traslaciones mandan vectores linealmente independientes en vectores linealmente independientes.

1.2 Definición de $\frac{1}{n}\mathbb{A}^{n+k}$.

El espacio que vamos a describir es $F_3/Af(n+k)$**.** Lo llamamos el espacio de configuraciones de n líneas en $\mathbb{R}^{n+k}$ y lo denotamos por $\frac{1}{n}\mathbb{A}^{n+k}$. Así, cuando hablamos de una configuración de n líneas en el espacio afín de dimensión $n+k$, lo que queremos decir es $[L_1, ..., L_n] \in F_3/Af(n+k)$. O, equivalentemente, una órbita $Af(n+k)(L_1, ..., L_n)$.

1.3 Ejemplo: existen n-adas de líneas cuyas direcciones son linealmente independientes pero que no fijan. Los n primeros ejes coordenados en $\mathbb{R}^{n+k}$ tienen esta propiedad.

1.4 Ejemplo: cuatro líneas en $\mathbb{R}^4$ que fijan y cuyas direcciones son linealmente independientes. Sean

$$\begin{aligned} L_1 &= \{te_1 + e_2 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_2 &= \{te_2 + e_3 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_3 &= \{te_3 + e_4 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_4 &= \{te_4 + e_1 : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Supongamos que $T \in Af(4)$ es tal que $T(L_i) = L_i$ para toda $i \in \{1, ..., 4\}$. Como las direcciones de las líneas no cambian tenemos que T es la composición de una transformación lineal de la forma

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

con una traslación $x \longmapsto x + \overline{r}$ donde

$$\overline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

Por un lado tenemos que $T(L_1) = \{te_1 + (\lambda_2 + r_2)e_2 + r_3e_3 + r_4e_4 : t \in \mathbb{R}\}$. Por otro lado, $T(L_1) = L_1$. De manera que $r_3 = r_4 = 0$, y $\lambda_2 + r_2 = 1$. Procediendo de la misma manera con las demás líneas obtenemos que $\lambda_i = 1$ y $r_i = 0$ para toda $i = 1, ..., 4$. Así, T tiene que ser la identidad y $(L_1, ..., L_4)$ fija.

1.5 Ejemplo: cuatro líneas en $\mathbb{R}^4$ que fijan pero cuyas direcciones no son linealmente independientes. Consideremos las siguientes cuatro líneas en $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{te_1 + e_2 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_2 &= \{te_2 + 2e_3 + e_4 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_3 &= \{te_3 + 3e_1 + 2e_4 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_4 &= \{t(e_1 + e_2 + e_3) + 3e_4 : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

y sea $T \in Af(4)$ tal que $T(L_i) = L_i$ para $i = 1, ..., 4$. Como T tiene que conservar las direcciones de las líneas, tiene que ser la composición de una función lineal de la forma

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & \lambda & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & \lambda & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}.$$

con una traslación $x \longmapsto x + \overline{r}$ donde

$$\overline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que, por un lado,

$$\begin{aligned}
T(L_1) &= \{te_1 + \lambda e_2 + \sum_{i=1}^{4} r_i e_i : t \in \mathbb{R}\} \\
T(L_2) &= \{te_2 + 2\lambda e_3 + \sum_{i=1}^{4} x_i e_i + \sum_{i=1}^{4} r_i e_i : t \in \mathbb{R}\} \\
T(L_3) &= \{te_2 + 3\lambda e_1 + 2\sum_{i=1}^{4} x_i e_i + \sum_{i=1}^{4} r_i e_i : t \in \mathbb{R}\} \\
T(L_4) &= \{t(e_1 + e_2 + e_3) + 3\sum_{i=1}^{4} x_i e_i + \sum_{i=1}^{4} r_i e_i : t \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

y por otro lado $T(L_i) = L_i$ para $i = 1, ..., 4$. Igualando, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
x_1 + r_1 &= 0;\ 3\lambda + 2x_1 + r_1 = 3; \\
\lambda + r_2 &= 1;\ 2x_2 + r_2 = 0; \\
r_3 &= 0;\ 2\lambda + x_3 = 2; \\
3x_1 + r_1 &= 3x_2 + r_2 = 3x_3 \\
r_4 &= 0;\ x_4 = 1.
\end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos que T tiene que ser la identidad.

1.6 La dimensión de ${}^{1}_{n}\mathbb{A}^{n+k}$ y algunos cálculos que muestran para que valores de k tiene sentido este espacio.

El conjunto de líneas en $\mathbb{R}^{n+k}$ es un abierto de la Grassmanniana de planos en $\mathbb{R}^{n+k+1}$ y tiene dimensión $2(n+k-1)$. El conjunto de n-adas de líneas en $\mathbb{R}^{n+k}$ tiene entonces dimensión $2n(n+k-1)$. El grupo Afín $Af(n+k)$ tiene dimensión $(n+k)^2 + (n+k) = (n+k)(n+k+1)$.

Así, la dimensión del cociente es

$$\begin{aligned} & 2(n+k-1)-(n+k)(n+k+1) \\ = \quad & n^2-(3n+k^2+k). \end{aligned}$$

Para que el cociente tenga sentido, $2n(n+k-1)$ no puede ser menor que $(n+k)(n+k+1)$, y, para que esto suceda, k tiene que ser menor o igual que $n-3$.

Notación: a lo largo de la tesis vamos a denotar por $G(m,r)$ a la Grassmanniana de subespacios de dimensión m en $\mathbb{R}^{m+r}$.

1.7 La topología de ${}^{1}_{n}\mathbb{A}^{n+k}$.

Estamos pensando a F_3 como subespacio del producto de n Grassmannianas $G(2,n+k-1)$. El espacio ${}^{1}_{n}\mathbb{A}^{n+k} = F_3/Af(n+k)$ tiene la topología cociente.

Capítulo 2

Versión canónica

2.1 Definición de E.

Estamos pensando entonces en las n-adas $(L_1, ..., L_n)$ de líneas que fijan y cuyas direcciones son linealmente independientes. Si completamos las direcciones de las líneas a una base de $\mathbb{R}^{n+k}$, siempre existe una transformación lineal que lleva esta base en la base canónica $e_1, ..., e_{n+k}$. Como las transformaciones lineales son transformaciones afines, en cada clase de equivalencia $[L_1, ..., L_n] \in_n^1 \mathbb{A}^{n+k}$ existe un representante $(L_1, ..., L_n)$ tal que para $i = 1, ..., n$, L_i se escribe como

$$L_i = \{te_i + \sum_{j=1}^{n} a_j^i e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j^i e_j : t \in \mathbb{R}\}.$$

con $a_i^i = 0$. Llamamos E al espacio de n-adas de líneas que fijan y que son de la forma descrita arriba.

2.2 Definición de G.

Sea G el subgrupo de $Af(n+k)$ que consta de las transformaciones afines cuya parte lineal es de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & y^1_{n+1} & ... & y^1_{n+k} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & y^2_{n+1} & ... & y^2_{n+k} \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & y^n_{n+1} & ... & y^n_{n+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n+1} & ... & y^{n+1}_{n+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y^{n+k}_{n+1} & ... & \lambda_{n+k} \end{pmatrix}$$

donde ninguna de $\lambda_1, ..., \lambda_{n+k}$ es cero. No es difícil probar que G es un subgrupo de $Af(n+k)$.

2.3 G **actúa en** E.

Dados $g \in G$ y $(L_1, ..., L_n) \in E$, $g(L_1, ..., L_n) = (g(L_1), ..., g(L_n))$, tenemos que probar que $(g(L_1), ..., g(L_n)) \in E$. Para $i = 1, ..., n$ tenemos que

$$\begin{aligned} g(L_i) &= g(\{te_i + \sum_{j=1}^{n} a^i_j e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b^i_j e_j : t \in \mathbb{R}\}) \\ &= \{te_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a^i_j e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b^i_j (\sum_{r=1}^{n+k} y^r_j e_r) + \sum_{j=1}^{n+k} r_j e_j : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{te_i + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j a^i_j + \sum_{r=n+1}^{n+k} b^i_r y^j_r + r_j) e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} (\sum_{r=n+1}^{n+k} b^i_r y^j_r + r_j) e_j : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Entonces $g(L_1), ..., g(L_n)$ tienen la forma de los elementos de E y por lo tanto la acción de G en E está bien definida.

Observación. La acción de G en E es libre porque $G \leq Af(n+k)$ y dado $(L_1, ..., L_n) \in E$ por definición de E se tiene que $(L_1, ..., L_n)$ fija.

2.4 Lema. E/G es homeomorfo a ${}^1_n\mathbb{A}^{n+k} = F_3/Af(n+k)$.

Demostración.

Sabemos que E es un subconjunto cerrado de F_3 y que tiene la topología de subespacio de F_3. La inclusión $i : E \to F_3$ es una función continua.

Sean $p : E \to E/G$ y $q : F_3 \to F_3/Af(n+k)$ las proyecciones y recordemos que E/G y $F_3/Af(n+k)$ tienen la topología cociente. Además, p y q son funciones abiertas.

Veamos que $q \circ i$ es constante en las órbitas de G en E. Sean $(L_1, ..., L_n)$ y $(L'_1, ..., L'_n)$ tales que existe $g \in G$ con $g(L_1, ..., L_n) = (L'_1, ..., L'_n)$. Como $G \leq Af(n+k)$, $g \in Af(n+k)$ por lo que $(L_1, ..., L_n)$ y $(L'_1, ..., L'_n)$ son equivalentes en $E/Af(n+k)$. Así, $q \circ i$ es constante en las órbitas de G en E y entonces existe una función continua $\varphi : E/G \to F_3/Af(n+k)$ tal que $\varphi \circ p = q \circ i$.

Tenemos que φ es inyectiva: supongamos que $\varphi(G(L_1, ..., L_n)) = \varphi(G(L_1, ..., L_n))$. Entonces existe $T \in Af(n+k)$ con $T(\varphi(G(L_1, ..., L_n))) = \varphi(G(L'_1, ..., L'_n))$. Es decir, existe $T \in Af(n+k)$ con $T(L_1, ..., L_n) = (L'_1, ..., L'_n)$. Como $(L_1, ..., L_n)$ y $(L'_1, ..., L'_n)$ están en E, para toda $i = 1, ..., n$,

$$\begin{aligned} L_i &= \{te_i + \sum_{j=1}^{n} a^i_j e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b^i_j e_j : t \in \mathbb{R}\} \\ \text{y } L'_i &= \{te_i + \sum_{j=1}^{n} c^i_j e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} d^i_j e_j : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Como $T(L_i) = L'_i$ para $i = 1, ..., n$, tenemos que se conservan las direcciones, es decir, para toda $i = 1, ..., n$, se tiene que $T(e_i) = \lambda_i e_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Así, T tiene la forma de los elementos de G.

Recordemos que al principio de esta sección argumentamos que en cada órbita $[L_1, ..., L_n] \in F_3/Af(n+k)$ existe un representante $(L_1, ..., L_n)$ con $(L_1, ..., L_n) \in E$, por lo que φ es suprayectiva.

Falta probar que φ^{-1} es continua. Para ello probaremos que φ es cerrada. La demostración consta de varios pasos, primero vamos a enunciarlos y luego probaremos las afirmaciones hechas en cada uno de ellos.

Sea F un conjunto cerrado en E/G.

(1) Probaremos primero que $i(p^{-1}(F)) = q^{-1}(\varphi(F)) \cap E$. Probando esto sabremos que $q^{-1}(\varphi(F)) \cap E$ es cerrado en X, pues q es continua, i es cerrada (E es cerrado en X) y F es cerrado

(2) Tenemos que probar que $\varphi(F)$ es cerrado en $X/Af(n+k)$. Supongamos que no es así. Probaremos que entonces existe $e \in q^{-1}(\overline{\varphi(F)}) \cap E$ tal que $e \notin \overline{q^{-1}(\varphi(F)) \cap E}$.

(3) Usando el hecho de que q es abierta, probaremos que para toda $A \subset X/Af(n+k)$ se

tiene que $q^{-1}(\overline{A}) = \overline{q^{-1}(A)}$. Para $A = \varphi(F)$, (2) nos da una contradicción.

Demostración de (1). Sea $x \in i(p^{-1}(F))$. Entonces $x \in E$ (porque está en la imagen de i) y $x \in p^{-1}(F)$. Es decir, $p(x) \in F$. Entonces $\varphi(p(x)) \in \varphi(F)$. Pero $(q \circ i)(x) = (\varphi \circ p)(x) \in \varphi(F)$. Es decir, $x = i(x) \in q^{-1}(\varphi(F))$.

Sea ahora $x \in q^{-1}(\varphi(F)) \cap E$. Entonces $x \in E$ y $x \in q^{-1}(\varphi(F))$. Entonces $i(x) = x \in q^{-1}(\varphi(F))$. Es decir, $q(i(x)) \in \varphi(F)$. Pero $(q \circ i)(x) = (\varphi \circ p)(x)$. Entonces $\varphi(p(x)) \in \varphi(F)$. Como φ es inyectiva, $p(x) \in F$. Entonces $x \in p^{-1}(F)$ y $x \in E$. Por lo tanto, $x = i(x) \in i(p^{-1}(F))$. Esto prueba (1).

Demostración de (2). Supongamos que $\varphi(F)$ no es cerrado en X. Entonces existe $y \in \overline{\varphi(F)}$ tal que $y \notin \varphi(F)$. Tenemos entonces que $q^{-1}(y) \subset q^{-1}(\overline{\varphi(F)})$ pero $q^{-1}(y) \cap q^{-1}(\varphi(F)) = \varnothing$. como $q \circ i$ es suprayectiva, existe $e \in E \cap q^{-1}(y)$. Esto significa que $e \in q^{-1}(\overline{\varphi(F)}) \cap E$ y $e \notin E \cap q^{-1}(\varphi(F)) = \overline{E \cap q^{-1}(\varphi(F))}$.

Demostración de (3). Sea A un subconjunto de X. Sabemos que $\overline{q^{-1}(A)} \subseteq q^{-1}(\overline{A})$ porque q es continua. Probaremos que $X - \overline{q^{-1}(A)} \subseteq X - q^{-1}(\overline{A})$. Sea $x \in X - \overline{q^{-1}(A)}$. Entonces, como $X - \overline{q^{-1}(A)}$ es abierto y q es abierta, tenemos que $W = q(X - \overline{q^{-1}(A)})$ es abierto. Además, $W \cap A = \varnothing$ porque dado $y \in W$, tenemos que $y = q(y')$ con $y' \notin \overline{q^{-1}(A)}$, y entonces $y = q(y') \notin A$. Entonces W es un abierto en $X/Af(n+k)$, $q(x) \in W$ y $W \cap A = \varnothing$. Por lo tanto, $q(x) \notin \overline{A}$ y $x \notin q^{-1}(\overline{A})$. Con esto terminamos la demostración del lema.□

Capítulo 2

Versión canónica

2.1 Definición de E.

Estamos pensando entonces en las n-adas $(L_1, ..., L_n)$ de líneas que fijan y cuyas direcciones son linealmente independientes. Si completamos las direcciones de las líneas a una base de $\mathbb{R}^{n+k}$, siempre existe una transformación lineal que lleva esta base en la base canónica $e_1, ..., e_{n+k}$. Como las transformaciones lineales son transformaciones afines, en cada clase de equivalencia $[L_1, ..., L_n] \in_n^1 \mathbb{A}^{n+k}$ existe un representante $(L_1, ..., L_n)$ tal que para $i = 1, ..., n$, L_i se escribe como

$$L_i = \{te_i + \sum_{j=1}^{n} a_j^i e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j^i e_j : t \in \mathbb{R}\}.$$

con $a_i^i = 0$. Llamamos E al espacio de n-adas de líneas que fijan y que son de la forma descrita arriba.

2.2 Definición de G.

Sea G el subgrupo de $Af(n + k)$ que consta de las transformaciones afines cuya parte lineal es de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & y^1_{n+1} & ... & y^1_{n+k} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & y^2_{n+1} & ... & y^2_{n+k} \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & y^n_{n+1} & ... & y^n_{n+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n+1} & ... & y^{n+1}_{n+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y^{n+k}_{n+1} & ... & \lambda_{n+k} \end{pmatrix}$$

donde ninguna de $\lambda_1, ..., \lambda_{n+k}$ es cero. No es difícil probar que G es un subgrupo de $Af(n+k)$.

2.3 G actúa en E.

Dados $g \in G$ y $(L_1, ..., L_n) \in E$, $g(L_1, ..., L_n) = (g(L_1), ..., g(L_n))$, tenemos que probar que $(g(L_1), ..., g(L_n)) \in E$. Para $i = 1, ..., n$ tenemos que

$$\begin{aligned} g(L_i) &= g(\{te_i + \sum_{j=1}^{n} a^i_j e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b^i_j e_j : t \in \mathbb{R}\}) \\ &= \{te_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a^i_j e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b^i_j (\sum_{r=1}^{n+k} y^r_j e_r) + \sum_{j=1}^{n+k} r_j e_j : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{te_i + \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j a^i_j + \sum_{r=n+1}^{n+k} b^i_r y^j_r + r_j) e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} (\sum_{r=n+1}^{n+k} b^i_r y^j_r + r_j) e_j : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Entonces $g(L_1), ..., g(L_n)$ tienen la forma de los elementos de E y por lo tanto la acción de G en E está bien definida.

Observación. La acción de G en E es libre porque $G \leq Af(n+k)$ y dado $(L_1, ..., L_n) \in E$ por definición de E se tiene que $(L_1, ..., L_n)$ fija.

2.4 Lema. E/G es homeomorfo a ${}^1_n\mathbb{A}^{n+k} = F_3/Af(n+k)$.

Demostración.

Sabemos que E es un subconjunto cerrado de F_3 y que tiene la topología de subespacio de F_3. La inclusión $i : E \to F_3$ es una función continua.

Sean $p : E \to E/G$ y $q : F_3 \to F_3/Af(n+k)$ las proyecciones y recordemos que E/G y $F_3/Af(n+k)$ tienen la topología cociente. Además, p y q son funciones abiertas.

Veamos que $q \circ i$ es constante en las órbitas de G en E. Sean $(L_1, ..., L_n)$ y $(L'_1, ..., L'_n)$ tales que existe $g \in G$ con $g(L_1, ..., L_n) = (L'_1, ..., L'_n)$. Como $G \leq Af(n+k)$, $g \in Af(n+k)$ por lo que $(L_1, ..., L_n)$ y $(L'_1, ..., L'_n)$ son equivalentes en $E/Af(n+k)$. Así, $q \circ i$ es constante en las órbitas de G en E y entonces existe una función continua $\varphi : E/G \to F_3/Af(n+k)$ tal que $\varphi \circ p = q \circ i$.

Tenemos que φ es inyectiva: supongamos que $\varphi(G(L_1, ..., L_n)) = \varphi(G(L_1, ..., L_n))$. Entonces existe $T \in Af(n+k)$ con $T(\varphi(G(L_1, ..., L_n))) = \varphi(G(L'_1, ..., L'_n))$. Es decir, existe $T \in Af(n+k)$ con $T(L_1, ..., L_n) = (L'_1, ..., L'_n)$. Como $(L_1, ..., L_n)$ y $(L'_1, ..., L'_n)$ están en E, para toda $i = 1, ..., n$,

$$\begin{aligned} L_i &= \{te_i + \sum_{j=1}^{n} a^i_j e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b^i_j e_j : t \in \mathbb{R}\} \\ \text{y } L'_i &= \{te_i + \sum_{j=1}^{n} c^i_j e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} d^i_j e_j : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Como $T(L_i) = L'_i$ para $i = 1, ..., n$, tenemos que se conservan las direcciones, es decir, para toda $i = 1, ..., n$, se tiene que $T(e_i) = \lambda_i e_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Así, T tiene la forma de los elementos de G.

Recordemos que al principio de esta sección argumentamos que en cada órbita $[L_1, ..., L_n] \in F_3/Af(n+k)$ existe un representante $(L_1, ..., L_n)$ con $(L_1, ..., L_n) \in E$, por lo que φ es suprayectiva.

Falta probar que φ^{-1} es continua. Para ello probaremos que φ es cerrada. La demostración consta de varios pasos, primero vamos a enunciarlos y luego probaremos las afirmaciones hechas en cada uno de ellos.

Sea F un conjunto cerrado en E/G.

(1) Probaremos primero que $i(p^{-1}(F)) = q^{-1}(\varphi(F)) \cap E$. Probando esto sabremos que $q^{-1}(\varphi(F)) \cap E$ es cerrado en X, pues q es continua, i es cerrada (E es cerrado en X) y F es cerrado

(2) Tenemos que probar que $\varphi(F)$ es cerrado en $X/Af(n+k)$. Supongamos que no es así. Probaremos que entonces existe $e \in q^{-1}(\overline{\varphi(F)}) \cap E$ tal que $e \notin \overline{q^{-1}(\varphi(F)) \cap E}$.

(3) Usando el hecho de que q es abierta, probaremos que para toda $A \subset X/Af(n+k)$ se

tiene que $q^{-1}(\overline{A}) = \overline{q^{-1}(A)}$. Para $A = \varphi(F)$, (2) nos da una contradicción.

Demostración de (1). Sea $x \in i(p^{-1}(F))$. Entonces $x \in E$ (porque está en la imagen de i) y $x \in p^{-1}(F)$. Es decir, $p(x) \in F$. Entonces $\varphi(p(x)) \in \varphi(F)$. Pero $(q \circ i)(x) = (\varphi \circ p)(x) \in \varphi(F)$. Es decir, $x = i(x) \in q^{-1}(\varphi(F))$.

Sea ahora $x \in q^{-1}(\varphi(F)) \cap E$. Entonces $x \in E$ y $x \in q^{-1}(\varphi(F))$. Entonces $i(x) = x \in q^{-1}(\varphi(F))$. Es decir, $q(i(x)) \in \varphi(F)$. Pero $(q \circ i)(x) = (\varphi \circ p)(x)$. Entonces $\varphi(p(x)) \in \varphi(F)$. Como φ es inyectiva, $p(x) \in F$. Entonces $x \in p^{-1}(F)$ y $x \in E$. Por lo tanto, $x = i(x) \in i(p^{-1}(F))$. Esto prueba (1).

Demostración de (2). Supongamos que $\varphi(F)$ no es cerrado en X. Entonces existe $y \in \overline{\varphi(F)}$ tal que $y \notin \varphi(F)$. Tenemos entonces que $q^{-1}(y) \subset q^{-1}(\overline{\varphi(F)})$ pero $q^{-1}(y) \cap q^{-1}(\varphi(F)) = \varnothing$. como $q \circ i$ es suprayectiva, existe $e \in E \cap q^{-1}(y)$. Esto significa que $e \in q^{-1}(\overline{\varphi(F)}) \cap E$ y $e \notin E \cap q^{-1}(\varphi(F)) = \overline{E \cap q^{-1}(\varphi(F))}$.

Demostración de (3). Sea A un subconjunto de X. Sabemos que $\overline{q^{-1}(A)} \subseteq q^{-1}(\overline{A})$ porque q es continua. Probaremos que $X - \overline{q^{-1}(A)} \subseteq X - q^{-1}(\overline{A})$. Sea $x \in X - \overline{q^{-1}(A)}$. Entonces, como $X - \overline{q^{-1}(A)}$ es abierto y q es abierta, tenemos que $W = q(X - \overline{q^{-1}(A)})$ es abierto. Además, $W \cap A = \varnothing$ porque dado $y \in W$, tenemos que $y = q(y')$ con $y' \notin \overline{q^{-1}(A)}$, y entonces $y = q(y') \notin A$. Entonces W es un abierto en $X/Af(n+k)$, $q(x) \in W$ y $W \cap A = \varnothing$. Por lo tanto, $q(x) \notin \overline{A}$ y $x \notin q^{-1}(\overline{A})$. Con esto terminamos la demostración del lema.$\square$

Capítulo 3

Versión matricial.

Notación.

Para $i = 1, ..., n$, denotamos por π_i a la proyección de $\mathbb{R}^n$ en el subespacio que consta de los vectores cuya i-ésima coordenada es cero y por $\mathbb{R}_i^{n-1}$ a $\pi_i(\mathbb{R}^n)$.

De aquí en adelante vamos a escribir como $\overline{1}$ al vector $(1, 1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$.

Además $< Y_1, ...Y_r >$ es el subespacio generado por $Y_1, ...Y_r$, ya sean estos vectores ó subespacios.

Consideremos al conjunto X de todas las parejas (A, B) donde

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & a_2^1 & ... & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & 0 & a_3^2 & a_4^2 & a_n^2 \\ ... & ... & 0 & ... & ... \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & ... & 0 & a_n^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_{n-1}^n & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz de $n \times n$ con ceros en la diagonal.

(ii) $B = \begin{pmatrix} b_{n+1}^1 & ... & b_{n+k}^1 \\ ... & ... & ... \\ b_{n+1}^n & ... & b_{n+k}^n \end{pmatrix}$ es una matriz de $k \times n$.

Denotaremos por $(A_1, ..., A_n)$ a las columnas de A y por $(B_{n+1}, ..., B_{n+k})$ a las columnas de B.

Observemos que $B_{n+1}, ..., B_{n+k}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ y cada A_i, $i = 1, ..., n$, es un vector en $\mathbb{R}^n$.

3.1 Definición. Sea M el subconjunto de X que consta de las parejas (A, B) tales que

(iii) Los vectores $B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1}$ son linealmente independientes.

(iv) Los vectores $A_i, \pi_i(B_{n+1}), ..., \pi_i(B_{n+k}), \pi_i(\overline{1})$ son linealmente independientes.

3.2 Supongamos que tenemos $(L_1, ..., L_n)$ tal que L_i se escribe como

$$L_i = \{te_i + \sum_{j=1}^{n} a_j^i e_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j^i e_j : t \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces le podemos asociar a $(L_1, ..., L_n)$ el siguiente elemento (A, B) en X:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & a_2^1 & ... & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & 0 & a_3^2 & a_4^2 & a_n^2 \\ ... & ... & 0 & ... & ... \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & ... & 0 & a_n^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & ... & a_{n-1}^n & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{n+1}^1 & ... & b_{n+k}^1 \\ ... & ... & ... \\ b_{n+1}^n & ... & b_{n+k}^n \end{pmatrix} \right)$$

3.3 Ejemplo.

Consideremos las siguientes cinco líneas en $\mathbb{R}^6$ (aqui $n = 5$ y $k = 1$):

$$\begin{aligned} L_1 &= \{te_1 + e_2 + e_6 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_2 &= \{te_2 + e_3 + 2e_6 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_3 &= \{te_3 + e_4 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_4 &= \{te_4 + e_5 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_5 &= \{te_5 + e_1 + e_6 : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Entonces a $(L_1, ..., L_5)$ le corresponde la pareja (A, B) donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El siguiente teorema nos da un criterio para decidir si una configuración de líneas fija, y así podemos decir que las líneas en este ejemplo fijan.

3.4 Teorema. Sea $(L_1, ..., L_n)$ como arriba. Entonces $(L_1, ..., L_n)$ fija si y solo si se cumple que

(i) $B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1}$ son linealmente independientes.

(ii) $A_i, \pi_i(B_{n+1}), ..., \pi_i(B_{n+k}), \pi_i(\overline{1})$ son linealmente independientes.

Demostración.

Por definición, $(L_1, ..., L_n)$ fija si y sólo si dada $g \in Af(n+k)$ con $g(L_i) = L_i$ para toda $i = 1, .., n$, g tiene que ser la identidad. Como g tiene que preservar las direcciones de las líneas, g tiene la forma de los elementos de G, es decir es la composición de una función lineal de la forma

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & y_{n+1}^1 & ... & y_{n+k}^1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & y_{n+1}^2 & ... & y_{n+k}^2 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & y_{n+1}^n & ... & y_{n+k}^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n+1} & ... & y_{n+k}^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{n+1}^{n+k} & ... & \lambda_{n+k} \end{pmatrix}$$

con una traslación $T(x) = x + \overline{r}$, donde

$$\overline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ ... \\ r_{n+k} \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
g(L_i) &= \{te_i \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}(a_j^i\lambda_j + b_{n+1}^i y_{n+1}^j + b_{n+2}^i y_{n+2}^j + ... + b_{n+k}^i y_{n+k}^j + r_j)e_j \\
&\quad + \sum_{j=n+1}^{n+k}(b_{n+1}^i y_{n+1}^j + b_{n+2}^i y_{n+2}^j + ... + b_{n+k}^i y_{n+k}^j + r_j)e_j \\
&: \quad t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

De manera que $g(L_i) = L_i$ para toda i si y sólo si

$$a_j^i\lambda_j + b_{n+1}^i y_{n+1}^j + b_{n+2}^i y_{n+2}^j + ... + b_{n+k}^i y_{n+k}^j + r_j = a_j^i$$

para toda $i = 1, ..., n$ y para toda $j = 1, ..., n$, y

$$b_{n+1}^i y_{n+1}^j + b_{n+2}^i y_{n+2}^j + ... + b_{n+k}^i y_{n+k}^j + r_j = b_j^i$$

para toda $i = 1, ..., n$ y para toda $j = n+1, ..., n+k$.

Y ahora $(L_1, ..., L_n)$ fija si y sólo si las condiciones de arriba implican que

$$\begin{aligned}
\text{Para } i &= 1, ..., n \text{ se tiene que } \lambda_i = 1, \\
\text{para } j &= n+1, ..., n+k,\ y_j^r = 0 \text{ si } r \neq j \text{ y } y_j^r = 1 \text{ si } r = j, \\
\text{para } j &= 1, ..., n+k, \text{ se tiene que } r_j = 0.
\end{aligned}$$

Veamos por ejemplo que sucede para $\lambda_1, y_{n+1}^1, y_{n+2}^1, ..., y_{n+k}^1, r_1$. En este caso tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
a_1^2\lambda_1 + b_{n+1}^2 y_{n+1}^1 + b_{n+2}^2 y_{n+2}^1 + ... + b_{n+k}^2 y_{n+k}^1 + r_1 &= a_1^2 \\
a_1^3\lambda_1 + b_{n+1}^3 y_{n+1}^1 + b_{n+2}^3 y_{n+2}^1 + ... + b_{n+k}^3 y_{n+k}^1 + r_1 &= a_1^3 \\
&... \\
a_1^n\lambda_1 + b_{n+1}^n y_{n+1}^1 + b_{n+2}^n y_{n+2}^1 + ... + b_{n+k}^n y_{n+k}^1 + r_1 &= a^n
\end{aligned}$$

Este es un sistema de $n-1$ ecuaciones con $k+2$ incógnitas. Recordemos que $k \leq n-3$ (capítulo 1, 1.6), por lo cual tiene sentido la pregunta si hay una única solución. La identidad es una solución. Consideremos la matriz A del sistema. A representa una tranformación lineal de $\mathbb{R}^{k+2}$ en $\mathbb{R}^{n-1}$. La solución del sistema es única si y sólo si la dimensión del núcleo de A es cero, es decir, si la dimensión de la imágen de A es $k+2$, es decir si las columnas

$$\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_1^3 \\ ... \\ a_1^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{n+1}^2 \\ b_{n+1}^3 \\ ... \\ b_{n+1}^n \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} b_{n+k}^2 \\ b_{n+k}^3 \\ ... \\ b_{n+k}^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes. Pero esto es exáctamente la condición $A_1, \pi_1(B_{n+1}), ..., \pi_1(B_{n+k}), \pi_1(\overline{1})$ linealmente independientes. Análogamente, para $i = 2, ..., n$, el sistema de ecuaciones con $\lambda_i, y_{n+1}^i, y_{n+2}^i, ..., y_{n+k}^i, r_i$ como incógnitas tiene una única solución si y sólo si $A_i, (B_{n+1})^i, ..., (B_{n+k})^i, (\overline{1})^i$ son linealmente independientes.

Veamos ahora que pasa con el sistema que tiene $y_{n+1}^{n+1}, y_{n+2}^{n+1}, ..., y_{n+k}^{n+1}, r_{n+1}$ como incógnitas. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} b_{n+1}^1 y_{n+1}^{n+1} + b_{n+2}^1 y_{n+2}^{n+1} + ... + b_{n+k}^1 y_{n+k}^{n+1} + r_{n+1} &= b_{n+1}^1 \\ b_{n+1}^2 y_{n+1}^{n+1} + b_{n+2}^2 y_{n+2}^{n+1} + ... + b_{n+k}^2 y_{n+k}^{n+1} + r_{n+1} &= b_{n+1}^2 \\ &... \\ b_{n+1}^n y_{n+1}^{n+1} + b_{n+2}^n y_{n+2}^{n+1} + ... + b_{n+k}^n y_{n+k}^{n+1} + r_{n+1} &= b_{n+1}^n \end{aligned}$$

que es un sistema de n ecuaciones con $k+1$ incógnitas. La identidad es solución e igual que arriba, la solución es única si y sólo si las columnas de la matriz del sistema son linealmente independientes, lo cual es equivalente a que $B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1}$ sean linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.$\square$

3.5 Teorema. M es homeomorfo a E.

Demostración.

Definimos $\varphi : E \to M$ como $\varphi(L_1, ..., L_n) = (A, B)$, donde (A, B) es la pareja definida en

3.2. El teorema 3.4 nos dice que φ está bien definida y es suprayectiva. Además claramente φ es inyectiva.

Para convencerse de la continuidad tanto de φ como de su inversa, basta con observar cómo es la topología en M. M es un subespacio de $\mathbb{R}^{n(n+k)}$ y hereda la topología de este espacio. Es decir, la distancia entre dos parejas de matrices depende de la distancia coordenada a coordenada. Como la distancia entre líneas paralelas se mide de la misma manera (es decir, la distancia entre $\{t\overline{v} + \overline{w} : t \in \mathbb{R}\}$ y $\{t\overline{v} + \overline{y} : t \in \mathbb{R}\}$ depende de la distancia entre $\overline{w}$ y $\overline{y}$), y $(L_1, ..., L_n)$ y $(L_1', ..., L_n')$ están cerca si para toda $i = 1, ..., n$ se tiene que L_i y L_i' están cerca, la manera de medir distancia en M y en E es la misma, por lo que φ y su inversa van a ser continuas.$\square$

3.6 La acción de G en M.

Teníamos la acción de G en E. Ahora tenemos una acción de G en M dada por $(g, (A, B)) \mapsto \varphi(g(\varphi^{-1}(A, B)))$. Como la acción de G en E es libre, la acción de G en M también lo es. De hecho, como φ es un homeomorfismo, M/G y E/G son homeomorfos. Así, para describir $\frac{1}{n}\mathbb{A}^{n+k}$ basta con describir M/G.

Finalmente, veamos como está dada la acción de G en M. Sea $(A, B) \in M$. Y sea $g \in G$ la composición de

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & y^1_{n+1} & ... & y^1_{n+k} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & y^2_{n+1} & ... & y^2_{n+k} \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & y^n_{n+1} & ... & y^n_{n+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n+1} & ... & y^{n+1}_{n+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y^{n+k}_{n+1} & ... & \lambda_{n+k} \end{pmatrix} \text{con una traslación por el vector} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ ... \\ ... \\ ... \\ ... \\ r_{n+k} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} g(A,B) &= g((A_1, ..., A_n), (B_{n+1}, ..., B_{n+k})) \\ &= ((\lambda_1 A_1 + y^1_{n+1}\pi_1(B_{n+1}) + ... + y^1_{n+k}\pi_1(B_{n+k}) + r_1\pi_1(\overline{1}), ..., \lambda_n A_n + y^n_{n+1}\pi_n(B_{n+1}) + ... + y^n_{n+k}\pi_n \\ & \quad (y^{n+1}_{n+1}B_{n+1} + ... + y^{n+1}_{n+k}B_{n+k} + r_{n+1}\overline{1}, ..., y^{n+k}_{n+1}B_{n+1} + ... + y^{n+k}_{n+k}B_{n+k} + r_{n+k}\overline{1})). \end{aligned}$$

Capítulo 4

Los invariantes.

A cada n-ada de líneas en F_3 le asignaremos un conjunto de invariantes, que consta de un punto P en $G(k+1, n-k-1)$ (Recordemos que $G(r,m)$ es la Grassmanniana de subespacios de dimensión r en $\mathbb{R}^{r+m}$) y una n-ada de parejas, $((P_1, H_1), ..., (P_n, H_n))$, cada una en $G(k+1, n-k-2) \times G(k+2, n-k-3)$ con la propiedad de que $P_i \subset H_i$.

Primero definiremos los invariantes para líneas en E, usando la base canónica $e_1, ..., e_{n+k}$ de $\mathbb{R}^{n+k}$. Esta definición se puede extender a todas las líneas en F_3, usando otras bases y luego probando que la definición es independiente de la base elegida.

Probaremos que $(L'_1, ..., L'_n)$ es imágen bajo el grupo afín de $(L_1, ..., L_n)$ si y sólo si sus conjuntos de invariantes coinciden. De esta manera, cada elemento de $F_3/Af(n+k) =_n^1 \mathbb{A}^{n+k}$ quedará determinado de manera única por su conjunto de invariantes.

4.1 El invariante principal.

Dado que E es homeomorfo a M, en vez de pensar en $(L_1, ..., L_n)$ en E vamos a pensar en la correspondiente pareja (A, B) en M. Definiremos una función $\phi : M \to G(k+1, n-k-1)$. Sea $(A, B) \in M$. Entonces $B = (B_{n+1}, ..., B_{n+k})$. Como ya dijimos, cada una de estas columnas es un vector en $\mathbb{R}^n$.

Sea

$$\phi(A, B) = < B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1} > .$$

Recordemos que una de las condiciones sobre los elementos de M es que $B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1}$ sean linealmente independientes, por lo que ϕ está bien definida.

Probaremos que ϕ es constante en las órbitas de G en M. Sea $(A', B') \in G(A, B)$. Entonces existe $g \in G$ con $g(A, B) = (A', B')$. Por la manera en que está definida la acción de G, tenemos que para toda $j = n+1, ..., n+k$ existen $y^j_{n+1}, ..., y^j_{n+k}, r_j \in \mathbb{R}$ tales que

$$B'_j = y^j_{n+1} B_{n+1} + ... + y^j_{n+k} B_{n+k} + r_j \overline{1}.$$

Esto quiere decir que $< B'_{n+1}, ..., B'_{n+k}, \overline{1} > \subseteq < B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1} >$. Pero ambos subespacios son de la misma dimensión, por lo que tienen que ser iguales.

4.2 Ejemplo.

El invariante principal de las cinco líneas en $\mathbb{R}^6$ del ejemplo 3.3 es el plano en $\mathbb{R}^5$ generado por $\overline{1} = (1, 1, 1, 1, 1)$ y $B = (1, 2, 0, 0, 1)$. Este es un punto en la Grassmanniana $G(2, 3)$ de planos por el orígen en $\mathbb{R}^5$.

4.3 Los invariantes secundarios.

Recordemos que, para $i = 1, ..., n$, denotamos por $\mathbb{R}^{n-1}_i$ al subespacio $\pi_i(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$. Vamos a definir funciones φ_i que le asignan a cada pareja $(A, B) \in M$ una pareja $(P_i(A, B), H_i(A, B))$ donde $P_i(A, B)$ es un $k+1$ subespacio en $\mathbb{R}^{n-1}_i$, $H_i(A, B)$ es un $k+2$-subespacio de $\mathbb{R}^n_i$ y $P_i(A, B) \subset H_i(A, B)$.

$$\text{Sea } P_i(A, B) = \pi_i(\phi(A, B)) =< \pi_i(B_{n+1}), ..., \pi_i(B_{n+k}), \pi_i(\overline{1}) > .$$

Observese que otra vez las condiciones sobre los elementos de M nos garantizan que este es un subespacio de dimensión $k+1$.

Tenemos que $A_i \in \mathbb{R}^{n-1}_i$.

$$\text{Sea } H_i(A, B) =< P_i(A, B), A_i > .$$

De esta manera hemos definido una función φ_i de M en el conjunto

$$\{(P, H) : P \in G(k+1, n-k-2), H \in G(k+2, n-k-3), P \subset H\}.$$

Probaremos que φ_i es constante en las órbitas de G en M. Sea $(A', B') \in G(A, B)$. Entonces existe $T \in G$ con $T(A,B) = (A', B')$. Por definición de los elementos de G esto implica que para $i = 1, .., n$ existen $\lambda_i, y^i_{n+1}, y^i_{n+2}, ..., y^i_{n+k}, r_i \in \mathbb{R}$ con $\lambda_i \neq 0$ tales que

$$A'_i = \lambda_i A_i + y^i_{n+1}\pi_i(B_{n+1}) + y^i_{n+2}\pi_i(B_{n+2}) + ... + y^i_{n+k}\pi_i(B_{n+k}) + r_i\pi_i(\overline{1})$$

Además, demostramos arriba que $P_i(A', B') = P_i(A, B)$. Es decir, $H_i(A', B') \subseteq H_i(A, B)$.Como ambos subespacios son de la misma dimensión, tenemos que son iguales.

4.4 Ejemplo.

Los invariantes secundarios de las cinco líneas en $\mathbb{R}^6$ del ejemplo 3.3 son:

(I) $P_1(A, B)$ es la proyección del invariante principal en $\mathbb{R}^4_1$ (el subespacio de $\mathbb{R}^5$ de los puntos cuya primera coordenada es cero), es decir, el plano en $\mathbb{R}^5$ generado por $(0, 2, 0, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, 1, 1)$. Tenemos que $A_1 = (0, 0, 0, 0, 1)$ está en $\mathbb{R}^4_1$, y $H_1(A, B)$ es el subespacio de dimensión tres en $\mathbb{R}^5$ generado por $(0, 0, 0, 0, 1)$, $(0, 2, 0, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, 1, 1)$. Así, el primer invariante secundario es la pareja $(P_1(A, B), H_1(A, B))$ de un plano y 3-subespacio de $\mathbb{R}^4_1$, donde el plano está contenido en el 3-subespacio.

(II) $P_2(A, B)$ es la proyección del invariante principal en $\mathbb{R}^4_2$ (el subespacio de $\mathbb{R}^5$ de los puntos cuya segunda coordenada es cero), es decir, el plano en $\mathbb{R}^5$ generado por $(1, 0, 0, 0, 1)$ y $(1, 0, 1, 1, 1)$. $H_2(A, B)$ es el subespacio de dimensión tres en $\mathbb{R}^5$ generado por $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 1)$ y $(1, 0, 1, 1, 1)$. Así, el segundo invariante secundario es la pareja $(P_2(A, B), H_2(A, B))$ de un plano y 3-subespacio de $\mathbb{R}^4_2$, donde el plano está contenido en el 3-subespacio.

(III) $P_3(A, B)$ es la proyección del invariante principal en $\mathbb{R}^4_3$ (el subespacio de $\mathbb{R}^5$ de los puntos cuya tercera coordenada es cero), es decir, el plano en $\mathbb{R}^5$ generado por $(1, 2, 0, 0, 1)$ y $(1, 1, 0, 1, 1)$. $H_2(A, B)$ es el subespacio de dimensión tres en $\mathbb{R}^5$ generado por $(0, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 2, 0, 0, 1)$ y $(1, 1, 0, 1, 1)$. Así, el tercer invariante secundario es la pareja $(P_3(A, B), H_3(A, B))$ de un plano y 3-subespacio de $\mathbb{R}^4_3$, donde el plano está contenido en el 3-subespacio.

(IV) $P_4(A, B)$ es la proyección del invariante principal en $\mathbb{R}^4_4$ (el subespacio de $\mathbb{R}^5$ de los puntos cuya cuarta coordenada es cero), es decir, el plano en $\mathbb{R}^5$ generado por $(1, 2, 0, 0, 1)$ y $(1, 1, 1, 0, 1)$. $H_2(A, B)$ es el subespacio de dimensión tres en $\mathbb{R}^5$ generado por $(0, 0, 1, 0, 0)$, $(1, 2, 0, 0, 1)$ y $(1, 1, 1, 0, 1)$. Así, el cuarto invariante secundario es la pareja $(P_4(A, B), H_4(A, B))$ de un plano y 3-subespacio de $\mathbb{R}^4_4$, donde el plano está contenido en el 3-subespacio.

(V) $P_5(A,B)$ es la proyección del invariante principal en $\mathbb{R}^4_5$ (el subespacio de $\mathbb{R}^5$ de los puntos cuya quinta coordenada es cero), es decir, el plano en $\mathbb{R}^5$ generado por $(1,2,0,0,0)$ y $(1,1,1,1,0)$. $H_2(A,B)$ es el subespacio de dimensión tres en $\mathbb{R}^5$ generado por $(0,0,0,1,0)$, $(1,2,0,0,0)$ y $(1,1,1,1,0)$. Así, el quinto invariante secundario es la pareja $(P_5(A,B), H_5(A,B))$ de un plano y 3-subespacio de $\mathbb{R}^4_5$, donde el plano está contenido en el 3-subespacio.

4.5 El conjunto de invariantes determina completamente la configuración.

Ya vimos que si dos n-adas de líneas son equivalentes, tienen los mismos invariantes. Supongamos que los invariantes asignados a (A,B) son los mismos que los invariantes asignados a (A',B'). Como $\phi(A,B)=\phi(A',B')$ tenemos que $< B_{n+1},...,B_{n+k},\overline{1} > = < B'_{n+1},...,B'_{n+k},\overline{1} >$. Es decir, para toda $j=n+1,...,n+k$ existen $y^j_{n+1},...,y^j_{n+k}, r_j \in \mathbb{R}$ tales que

$$B'_j = y^j_{n+1}B_{n+1} + ... + y^j_{n+k}B_{n+k} + r_j\overline{1}.$$

Sea $i \in \{1,...,n\}$. Como $(P_i(A,B), H_i(A,B)) = (P_i(A',B'), H_i(A',B'))$, tenemos que existen $\lambda_i, y^i_{n+1}, y^i_{n+2}, ..., y^i_{n+k}, r_i \in \mathbb{R}$ con $\lambda_i \neq 0$ tales que

$$A'_i = \lambda_i A_i + y^i_{n+1}\pi_i(B_{n+1}) + y^i_{n+2}\pi_i(B_{n+2}) + ... + y^i_{n+k}\pi_i(B_{n+k}) + r_i\pi_i(\overline{1}).$$

Sea $g \in G$ tal que g la parte lineal de g es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & y^1_{n+1} & ... & y^1_{n+k} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & y^2_{n+1} & ... & y^2_{n+k} \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & y^n_{n+1} & ... & y^n_{n+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y^{n+1}_{n+1} & ... & y^{n+1}_{n+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y^{n+k}_{n+1} & ... & y^{n+k}_{n+k} \end{pmatrix}$$

compuesta con la traslación traslación $T(x) = x + \overline{r}$ con

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_{n+k} \end{pmatrix}.$$

Entonces $g(A, B) = g(A', B')$. Así, dos configuraciones en E son equivalentes si y sólo si sus invariantes son los mismos.

4.6 Definición de los invariantes en F_3.

Sea $(L_1, ..., L_n)$ en F_3. Sean $d_1, ..., d_n$ las direcciones de $L_1, ..., L_n$. Sea H el subespacio ortogonal a $< d_1, ..., d_n >$ y $d_{n+1}, ..., d_{n+k}$ una base para H. Cada una de las líneas L_i se puede escribir en términos de $d_1, ..., d_{n+k}$. Igual que antes, podemos definir una pareja de matrices (A, B), donde A es la matriz de $n \times n$ cuya entrada a_{ij} es el coeficiente de d_j en la expresión de la línea L_i (con $i, j \in \{1, ..., n\}$), y B es la matriz de $k \times n$ cuya entrada b_{ij} es el coeeficiente de d_{n+j} en la expresión de la línea L_i ($i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., k\}$). La matriz A está determinada de manera única dada la n-ada de líneas, pero la matriz B depende de la base elegida para H. Sin embargo, probaremos a continuación que para cualquier elección de base para H, el subespacio generado por las columnas de B es el mismo. Si $\{v_1, ..., v_k\}$ y $\{w_1, ..., w_k\}$ son dos bases de H, entonces cada $w_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^i v_j$. Si

$$L_i = \{td_i + \sum_{r=1}^{n} a_r^i d_r + \sum_{r=1}^{k} b_r^i w_r : t \in \mathbb{R}\}$$

entonces

$$\begin{aligned} L_i &= \{td_i + \sum_{r=1}^{n} a_r^i d_r + \sum_{r=1}^{k} b_r^i (\sum_{j=1}^{k} \beta_j^r v_j) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{td_i + \sum_{r=1}^{n} a_r^i d_r + \sum_{j=1}^{k} (\sum_{r=1}^{k} b_r^i \beta_j^r) v_j : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

de modo que si $(B_{n+1}, ..., B_{n+k})$ y $(B'_{n+1}, ..., B'_{n+k})$ son las matrices que se obtienen usando las bases $\{v_1, ..., v_k\}$ y $\{w_1, ..., w_k\}$, respectivamente, entonces B'_{n+i} es comabinación lineal de

$B_{n+1}, ..., B_{n+k}$. Así, el subespacio que generan es el mismo. De manera que usando la pareja (A, B) podemos definir los invariantes exáctamente de la misma manera que para las líneas en E.

4.7 Los invariantes están bien definidos en F_3.

Dada $(L'_1, ..., L'_n) \in F_3$ con direcciones $d_1, ..., d_n$, la imágen de $(L'_1, ..., L'_n)$ bajo la transformación lineal que lleva $d_1, ..., d_{n+k}$ en la base canónica $e_1, ..., e_{n+k}$ es una n-ada de líneas $(L_1, ..., L_n) \in E$ tal que las matrices (A, B) asociadas a $(L_1, ..., L_n)$ y las asociadas a $(L'_1, ..., L'_n)$ son idénticas. Pero para las líneas en E ya probamos que los invariantes están bien definidos. Más aún, dos n-adas de líneas en F_3 son equivalentes si y sólo si sus imágenes en E son equivalentes, y esto sucede si y sólo si sus invariantes coinciden.

Hasta ahora, nuestros invariantes son sólo puntos en ciertos conjuntos. No hemos tomado en cuenta la topología de nuestros espacios de configuraciones. Ahora vamos a incorporar las propiedades topológicas de nuestros espacios usando un haz fibrado que describiremos a continuación.

Capítulo 5

Descripción del haz ξ.

5.1 Definición de $\vartheta_{k,n-2}$.

Sean $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n-3$. Sea $\vartheta_{k,n-2}$ el haz

$$\begin{array}{ccc} P^{n-k-3} & \hookrightarrow & E_{k,n-2} \\ & & \downarrow \\ & & G(k, n-k-2) \end{array}$$

cuya base es la Grassmanniana $G(k, n-k-2)$; cuyo espacio total es

$$E_{k,n-2} = \{(P, H) : P \in G(k, n-k-2),\, H \in G(k+1, n-k-3),\, P \subset H\}$$

con la proyección $\pi : E_{k,n-2} \to G(k, n-k-2)$ dada por $\pi(P, H) = P$. Notemos que la fibra $\pi^{-1}(x)$ es el espacio proyectivo P^{n-k-3}.

5.2 Ejemplo.

Si $n = 5$ y $k = 1$, tenemos el haz $\vartheta_{1,3}$. Este es un haz con base el espacio proyectivo P^2 y espacio total parejas (l, H), donde l es línea por el orígen en $\mathbb{R}^3$ y H un plano que contiene a l. La proyección $\pi : E_{1,3} \to P^2$ manda cada pareja (l, H) en la línea l. Dada una línea fija l, la fibra $\pi^{-1}(l)$ sobre l es el conjunto de todos los planos por el orígen en $\mathbb{R}^3$ que contienen a l. La proyección en el plano en $\mathbb{R}^3$ ortogonal a l nos da un homeomorfismo entre la fibra $\pi^{-1}(l)$ y un espacio proyectivo P^1. En este caso se puede dar una descripción más precisa de $\vartheta_{1,3}$: pensemos en la esfera S^3. Cada línea por el orígen nos da una pareja de puntos antipodales en S^3. Cada plano que contiene a l nos da una pareja de vectores unitarios antipodales en el plano tangente a S^3 en los puntos determinados por l. De esta manera se puede ver que $\vartheta_{1,3}$ es el haz tangente proyectivizado a P^2. (ver [S]).

5.3 Ejemplo.

Si $n = 5$ y $k = 2$ tenemos el haz $\vartheta_{2,3}$. Este es un haz con base la Grassmanniana de planos en $\mathbb{R}^3$ (que es homeomorfa a P^2) y con espacio total parejas (P, H) donde P es un plano por el orígen en $\mathbb{R}^3$ y H es un subespacio de dimensión tres, de los cuales sólo hay uno: todo $\mathbb{R}^3$. Así, la fibra es un sólo punto y $\vartheta_{2,3}$ es homeomorfo a P^2.

5.4 Definición de una función $f : (G(k, n-k-1) - \Delta) \to \prod G(k, n-k-2)$.

Consideremos ahora la Grassmanniana $G(k, n-k-1)$ de subespacios de dimensión k en $\mathbb{R}^{n-1}$. Vamos a definir algunas funciones f_i, con $i = 1, ..., n$, de la Grassmanniana $G(k, n-k-1)$ en la Grassmanniana $G(k, n-k-2)$ de subespacios de dimensión k en $\mathbb{R}^{n-2}$. Para ello, vamos a considerar tanto a $\mathbb{R}^{n-1}$ como a $\mathbb{R}^{n-2}$ como ciertos subespacios de $\mathbb{R}^n$ y vamos a proyectar cada k-subespacio de $\mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}^{n-2}$.

El subespacio $\mathcal{H}$ ortogonal a $\overline{1}$ en $\mathbb{R}^n$ es isomorfo (y homeomorfo) a $\mathbb{R}^{n-1}$, y si tomamos la inclusión $j : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ cuya imágen es $\mathcal{H}$, cada $P \in G(k, n-k-1)$ se puede ver como un k-subespacio en $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$.

Dado un k-subespacio P en $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ y dada $i \in \{1, ..., n\}$, su imágen bajo la proyección π_i es otra vez un k-subespacio en $\mathbb{R}_i^{n-1}$. En principio, $\pi_i(P)$ puede o no contener a $\pi_i(\overline{1})$. Sea

$$\Delta = \{P \in G(k, n-k-1) : \text{para alguna } i = 1, ..., n, (\pi_i \circ j)(P) \text{ contiene a } \pi_i(\overline{1})\}$$

Sea q_i la proyección de $\mathbb{R}_i^{n-1}$ en el subespacio de $\mathbb{R}_i^{n-1}$ ortogonal a $\pi_i(\overline{1})$. Entonces, para toda $P \in G(k, n-k-1) - \Delta$, la composición $q_i \circ \pi_i \circ j$ le asigna a P un k-subespacio en $q_i(\mathbb{R}_i^{n-1}) \cong \mathbb{R}^{n-2}$. Llamamos f_i a $q_i \circ \pi_i \circ j$, y así hemos definido una función continua de $G(k, n-k-1) - \Delta$ en $G(k, n-k-2)$.

Sea $f : G(k, n-k-1) - \Delta \to \prod^n G(k, n-k-2)$ dada por $f(P) = (f_1(P), ..., f_n(P))$.

5.5 Definición de ξ.

En $\prod^n G(k, n-k-2)$ tenemos el haz producto $\vartheta_{k,n-2} \times ... \times \vartheta_{k,n-2}$. El haz ξ es el pullback $f^*(\vartheta_{k,n-2} \times ... \times \vartheta_{k,n-2})$.

5.6 El haz ξ es homeomorfo a la suma de Whitney $f_1^*(\vartheta_{k,n-2}) \oplus ... \oplus f_n^*(\vartheta_{k,n-2})$.

Dado un haz ϑ sobre un espacio base B, podemos pensar en el producto $\vartheta \times \vartheta$ sobre $B \times B$. Supongamos que tenemos una función $f : X \to B \times B$ dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ con $f_i : X \to B$. Esto nos define un haz sobre X: el pullback $f^*(\vartheta \times \vartheta)$.

Por otro lado, observemos que f se puede ver como la composición $\overline{f} \circ d$, donde $d : X \to X \times X$ es el mapeo diagonal $d(x) = (x, x)$ y $\overline{f} : X \times X \to B \times B$ es la función $\overline{f}(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$.

Entonces, $f^*(\vartheta \times \vartheta) = (\overline{f} \circ d)^*(\vartheta \times \vartheta)$. Pero se sabe (ver por ejemplo [H]) que $(\overline{f} \circ d)^*(\vartheta \times \vartheta) = d^*(\overline{f}^*(\vartheta \times \vartheta))$. Además, $\overline{f}^*(\vartheta \times \vartheta)$ es $f_1^*(\vartheta) \times f_2^*(\vartheta)$. De manera que $f^*(\vartheta \times \vartheta) = d^*(f_1^*(\vartheta) \times f_2^*(\vartheta))$, lo cual por definición es la suma de Whitney $f_1^*(\vartheta) \oplus f_2^*(\vartheta)$. Este argumento se puede generalizar a un número finito de factores, por lo tanto, $f^*(\vartheta_{k,n-2} \times ... \times \vartheta_{k,n-2}) = f_1^*(\vartheta_{k,n-2}) \oplus ... \oplus f_n^*(\vartheta_{k,n-2})$.

5.7 Descripción del conjunto Δ.

Definimos el conjunto Δ como

$$\Delta = \{P \in G(k, n-k-1) : \text{para alguna } i = 1, ..., n, \ (\pi_i \circ j)(P) \text{ contiene a } \pi_i(\overline{1})\}.$$

Como $j : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ es un encaje, Δ es homeomorfo al conjunto

$$j(\Delta) = \{P \subset \mathcal{H} : \text{para alguna } i = 1, ..., n, \ \pi_i(\overline{1}) \in \pi_i(P)\}.$$

Describiremos este conjunto. Supongamos que $P \in j(\Delta)$. Entonces $P \cap \pi_i^{-1}(\pi_i(\overline{1})) \neq \varnothing$ para alguna $i \in \{1, ..., n\}$. Pero $\mathcal{H} \cap \pi_i^{-1}(\pi_i(\overline{1}))$ es un solo punto p_i (el vector en $\mathbb{R}^n$ que tiene 1 en todas sus coordenadas excepto en la i-ésima, y su i-ésima coordenada es $1-n$). De manera que $p_i \in P$. Inversamente, si $p_i \in P$ para alguna $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $\pi_i(p_i) = \pi_i(\overline{1}) \in \pi_i(P)$, por lo que $P \in j(\Delta)$. El conjunto de P en $\mathcal{H} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ que contienen a un vector fijo p_i es homeomorfo a $G(k-1, n-k-1)$. Así, $j(\Delta)$ es homeomorfo a la unión de n Grassmannianas $G(k-1, n-k-1)$ (una por cada $i \in \{1, ..., n\}$). La dimensión de $G(k-1, n-k-1)$ es $(k-1)(n-k-1)$ y la dimensión de $G(k, n-k-1)$ es $k(n-k-1)$, de manera que la codimensión de Δ en $G(k, n-k-1)$ es mayor o igual que dos.

Capítulo 6

Descripción de ${}^1_n\mathbb{A}^{n+k}$.

Sean ξ el haz que definimos en la sección anterior, $\mathcal{E}$ su espacio total y $\pi^* : \mathcal{E} \to G(k, n - k - 1) - \Delta$ su proyección.

6.1 Teorema. El espacio ${}^1_n\mathbb{A}^{n+k}$ es homeomorfo a $\mathcal{E}$. Más aún, el espacio de los invariantes principales es homeomorfo a $G(k, n-k-1) - \Delta$ y las fibras $(\pi^*)^{-1}(P)$ corresponden a aquellas configuraciones de líneas que tienen el mismo invariante principal.

Demostración.

Probaremos primero que el espacio de los invariantes principales es homeomorfo a $G(k, n - k-1)-\Delta$. Recordemos que la función $\phi : M \to G(k+1, n-k-1)-\Delta$, que a cada configuración le asocia su invariante principal, es constante en las órbitas de la acción de G en M, y por lo tanto tenemos una función:

$$\overline{\phi} : M/G \to G(k+1, n-k-1).$$

El espacio de los invariantes principales es la imágen de $\overline{\phi}$. Veamos cuál es ésta imágen. Cualquier $k+1$-subespacio de $\mathbb{R}^n$ que esté en la imágen de $\overline{\phi}$ contiene, por definición de $\overline{\phi}$, al vector $\overline{1}$. Sea P un $k+1$-subespacio de $\mathbb{R}^n$ que contenga al $\overline{1}$. Sea $B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1}$ un conjunto de generadores de P. Si para alguna $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $\pi_i(B_{n+1}), ..., \pi_i(B_{n+k}), \pi_i(\overline{1})$ no son linealmente independientes, esto significa que P no está en la imágen de ϕ (ver 3.4).

Supongamos entonces que para toda $i = 1, ..., n$ los vectores $\pi_i(B_{n+1}), ..., \pi_i(B_{n+k}), \pi_i(\overline{1})$ son linealmente independientes. Entonces generan un subespacio de dimensión $k+1$ en $\mathbb{R}^{n-1}_i \cong$

$\mathbb{R}^{n-1}$. Como $k \leq n-3$, podemos elegir un vector A_i en $\mathbb{R}_i^{n-1}$ linealmente independiente de $\pi_i(B_{n+1}), ..., \pi_i(B_{n+k}), \pi_i(\overline{1})$. Y entonces, por 3.4, la configuración de líneas correspondiente a $(A, B) = ((A_1, ..., A_n), (B_{n+1}, ..., B_{n+k}))$ está en M y su imágen bajo $\overline{\phi}$ es P.

Tenemos entonces que la imágen de $\overline{\phi}$ es el subconjunto de $G(k+1, n-k-1)$ que consta de los $k+1$ subespacios en $\mathbb{R}^n$ tales que contienen al $\overline{1}$ y para toda $i = 1, ..., n$ su proyección en $\mathbb{R}_i^{n-1}$ sigue siendo de dimensión $k+1$. La proyección en el subespacio $\mathcal{H}$ ortogonal a $\overline{1}$ nos da un homeomorfismo entre la imágen de $\overline{\phi}$ y $G(k, n-k-1) - \Delta$.

Para cada $i = 1, ..., n$ tenemos también la función φ_i que a cada $(A, B) \in M$ le asigna su invariante secundario $(P_i(A, B), H_i(A, B))$. Como esta función es constante en las órbitas de G en M, tenemos

$$\overline{\varphi}_i : M/G \to \{(P, H) : P \in G(k+1, n-k-2), H \in G(k+2, n-k-3), P \subset H\}.$$

Veremos ahora que la imágen de $\overline{\varphi}_i$ es homeomorfa a $E_{k,n-2}$. Sea $(P_i(A, B), H_i(A, B))$ en la imágen de $\overline{\varphi}_i$. Entonces, por definición de $\overline{\varphi}_i$, tanto $P_i(A, B)$ como $H_i(A, B)$ contienen al vector $\pi_i(\overline{1})$. La composición con q_i (la proyección en el espacio ortogonal a $\pi_i(\overline{1})$) nos da un homeomorfismo entre la imágen de $\overline{\varphi}_i$ y $E_{k,n-2}$.

Daremos ahora un homeomorfismo $\varphi : M/G \to \mathcal{E}$. Por definición, el espacio $\mathcal{E}$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{(P, ((P_1, H_1), ..., (P_n, H_n))) \in (G(k, n-k-1) - \Delta) \times (E_{k,n-2} \times ... \times E_{k,n-2}) \\ &: f(P) = (P_1, ..., P_n)\}. \end{aligned}$$

Dado $(A, B) \in M/G$, definimos

$$\varphi(A, B) = ((p \circ \overline{\phi})(B), ((q_1 \circ \overline{\varphi}_1)(A, B), ..., (q_n \circ \overline{\varphi}_n)(A, B)).$$

Recordemos que $\overline{\varphi}_i(A, B) = (P_i(A, B), H_i(A, B))$. Para que φ esté bien definida sólo falta ver que

$$f((p \circ \overline{\phi})(B)) = (q_1(P_1(A, B)), ..., q_n(P_n(A, B))).$$

Pero

$$\begin{aligned} f((p \circ \overline{\phi})(B)) &= (f_1(p(\overline{\phi}(A,B))), ..., f_1(p(\overline{\phi}(A,B)))) \\ &= (q_1(\pi_1(\overline{\phi}(A,B))), ..., q_n(\pi_n(\overline{\phi}(A,B))) \\ &= ((q_1 \circ \overline{\varphi}_1)(A,B), ..., (q_n \circ \overline{\varphi}_n)(A,B)). \end{aligned}$$

Con eso basta, pues la biyectividad de φ la vimos cuando demostramos que el conjunto de invariantes es único para cada configuración, y las funciones que le asignan a un conjunto de vectores el plano generado por ellos y las proyecciones son continuas y abiertas, y M/G tiene la topología cociente.

Finalmente, sea $P \in G(k, n-k-1) - \Delta$. Entonces la fibra $(\pi^*)^{-1}(P)$ es

$$(\pi^*)^{-1}(P) = \{(P, ((P_1, H_1), ..., (P_n, H_n))) \in M : f(P) = (P_1, ..., P_n)\}.$$

Tomando $\varphi^{-1}((\pi^*)^{-1}(P))$, tenemos que la fibra sobre P corresponde a

$$\{(A,B) : \varphi(A,B) \in (\pi^*)^{-1}(P)\} = \{(A,B) : (p \circ \overline{\phi})(A,B) = P\}.$$

En la imágen de $\overline{\phi}$ tenemos que p es un homeomorfismo, por lo tanto dos configuraciones están en la misma fibra si y sólo si tienen el mismo invariante principal.$\square$

Capítulo 7

Algunos casos particulares.

7.1 El espacio $\frac{1}{n}\mathbb{A}^n$ de configuraciones de n líneas en $\mathbb{A}^n$ es homeomorfo al producto de n espacios proyectivos P^{n-3}.

El espacio $\frac{1}{2}\mathbb{A}^2$ es el espacio de configuraciones de dos líneas en el plano afín, pero dos líneas en el plano nunca fijan (una homotesia en dirección de una de las líneas es una transformación afín que deja fijas a las dos líneas pero no es la identidad). El espacio $\frac{1}{3}\mathbb{A}^3$ es el espacio de configuraciones de tres líneas en el espacio afín de dimensión tres. Como aquí $k = 0$, la dimensión de este espacio es $n^2 - 3n$, que es cero si $n = 3$. De manera que $\frac{1}{3}\mathbb{A}^3$ es un espacio de dimensión cero. Pero podemos verificar diréctamente que cualesquiera dos ternas de líneas con direcciones linealmente independientes y que fijen son equivalentes en el espacio afín de dimensión tres:

Sean (L_1, L_2, L_3) y (L'_1, L'_2, L'_3) dos ternas de líneas en $\mathbb{A}^3$ con direcciones linealmente independientes y que fijen. Si

$$\begin{aligned} L_1 &= \{te_1 + b_1e_2 + c_1e_3 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_2 &= \{te_2 + a_2e_1 + c_2e_3 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_3 &= \{te_3 + a_3e_1 + b_3e_2 : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L_1' &= \{te_1 + b_1' e_2 + c_1' e_3 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_2 &= \{te_2 + a_2' e_1 + c_2' e_3 : t \in \mathbb{R}\} \\ L_3 &= \{te_3 + a_3' e_1 + b_3' e_2 : t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

entonces, por 3.4 tenemos que $a_2 \neq a_3$, $b_1 \neq b_3$, $c_1 \neq c_3$, $a_2' \neq a_3'$, $b_1' \neq b_3'$ y $c_1' \neq c_3'$. Sea $F \in Af(3)$ la composición de la transformación lineal

$$\begin{pmatrix} \frac{a_2'-a_3'}{a_2-a_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_1'-b_3'}{b_1-b_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_1'-c_2'}{c_1-c_2} \end{pmatrix}$$

con la traslación $T(x) = x + \overline{r}$ con

$$\overline{r} = \begin{pmatrix} \frac{a_2 a_3' - a_2' a_3}{a_2 - a_3} \\ \frac{b_1 b_3' - b_1' b_3}{b_1 - b_3} \\ \frac{c_1 c_2' - c_1' c_2}{c_1 - c_2} \end{pmatrix}.$$

Entonces $F(L_i) = L_i'$ para toda $i \in \{1, 2, 3\}$. Es decir, (L_1, L_2, L_3) y (L_1', L_2', L_3') son equivalentes y $\frac{1}{3}\mathbb{A}^3$ consta de un solo punto.

En general, $k = 0$, el espacio M descrito en 3.1 consta únicamente de matrices A de $n \times n$ con ceros en la diagonal tales que para toda $i \in \{1, ..., n\}$, A_i y $\pi_i(\overline{1})$ son linealmente independientes. El invariante principal es el mismo para todas las configuraciones: el subespacio $< \overline{1} >$ de $\mathbb{R}^n$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, el invariante secundario es una pareja (P_i, H_i) donde $P_i =< \pi_i(\overline{1}) >$ para cualquier configuración y H_i es un plano por el orígen en $\mathbb{R}_i^{n-1}$ que contiene a $\pi_i(\overline{1})$. Por el teorema 6.1, $\frac{1}{n}\mathbb{A}^n$ es homeomorfo a un haz fibrado con base un solo punto y fibra el producto de n espacios proyectivos P^{n-3}, cada uno de los cuales se obtiene al proyectar todos los planos en $\mathbb{R}_i^{n-1}$ que contienen a $\pi_i(\overline{1})$ en el subespacio de $\mathbb{R}_i^{n-1}$ ortogonal a $\pi_i(\overline{1})$. Así, el espacio de configuraciones de 4 líneas en el espacio afín de dimensión 4 es homeomorfo a $T^4 = P^1 \times P^1 \times P^1 \times P^1$; el espacio de configuraciones de cinco líneas en el espacio afín de dimensión 5 es homeomorfo al producto de cinco planos proyectivos P^2, y así sucesivamente.

7.2 El espacio $\frac{1}{n}\mathbb{A}^{2n-3}$ de configuraciones de n líneas en $\mathbb{A}^n$ es homeomorfo a la Grassmanniana $G(n-3,2)-\Delta$, donde Δ es un complejo simplicial de dimensión $2(n-4)$.

En este caso, $k=n-3$. Como $0 \leq k \leq n-3$, este es el caso en el cual el valor de k es máximo. El invariante principal está dado por un subespacio de dimensión $n-2$ de $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\overline{1}$. Para cada $i \in \{1,...,n\}$, el invariante secundario está dado por una pareja (P_i, H_i) donde P_i es un subespacio de dimensión $n-2$ de $\mathbb{R}_i^{n-1}$ y H_i es un subespacio de dimensión $n-1$ en $\mathbb{R}_i^{n-1}$ y por lo tanto tiene que ser igual a $\mathbb{R}_i^{n-1}$ para cualquier configuración. Como P_i se puede obtener a partir de P mediante π_i, toda la información acerca de una configuración debe estar contenida en el invariante principal. Esto se confirma si aplicamos el teorema 6.1: de acuerdo con este teorema $\frac{1}{n}\mathbb{A}^{2n-3}$ es homeomorfo a un haz fibrado con base $G(n-3,2)-\Delta$ (que es el espacio de los invariantes principales), y fibra el producto de n espacios $P^{n-(n-3)-3}=P^0$ que es un solo punto. Además, probamos en 5.7 que Δ es la unión de n Grassmannianas $G(n-4,2)$. En 8.4 describiremos cómo están pegadas estas n Grassmannianas que componen el conjunto Δ. Así, el espacio de configuraciones de 4 líneas en $\mathbb{A}^5$ es homeomorfo al espacio proyectivo P^2 al cual se le han quitado 5 puntos; el espacio de configuraciones de 5 líneas en $\mathbb{A}^7$ es homeomorfo a la Grassmanniana $G(2,2)$ de planos en $\mathbb{R}^4$ a la cual se le han quitado 5 espacios proyectivos P^2, y así sucesivamente.

7.3 El espacio $\frac{1}{5}\mathbb{A}^6$ de configuraciones de cinco líneas en $\mathbb{A}^6$.

En este caso, ni el espacio de invariantes principales ni el espacio de invariantes secundarios son triviales. Para cada configuración, el invariante principal es un plano en $\mathbb{R}^5$ (recordemos el ejemplo 4.2) y, para cada $i \in \{1,...,5\}$, el invariante secundario es una pareja (P_i, H_i) donde P_i es un plano en $\mathbb{R}_i^4$ que contiene a $\overline{1}$ y H_i es un subespacio de dimensión 3 en $\mathbb{R}_i^4$ que contiene a P_i (ver el ejemplo 4.4). En 5.2 vimos la construcción del haz $\vartheta_{1,3}$, que es homeomorfo al haz tangente de P^2 proyectivizado. Tomamos el producto de cinco de estos haces y la función $f:(P^3-\Delta)\to P^2\times P^2\times P^2\times P^2\times P^2$. En 8.5 diremos algo más sobre la función f. En este caso, Δ consta de cinco puntos.

Capítulo 8

Otro punto de vista: configuraciones de puntos.

Los espacios ${}^{1}_{n}\mathbb{A}^{n+k}$ son haces fibrados con base $G(k, n-k-1) - \Delta$ y fibra P^{n-k-3}. Se sabe que $G(k, n-k-1)$ es homeomorfo al espacio de configuraciones de n puntos en $\mathbb{A}^k$ (denotaremos por ${}^{0}_{n}\mathbb{A}^k$ a este espacio) y que P^{n-k-3} es homeomorfo al espacio ${}^{0}_{n-1}\mathbb{A}^1$ de configuraciones de $n-1$ puntos en la línea afín. Esto no es una casualidad: a continuación veremos como se pueden obtener nuestros resultados usando configuraciones de puntos.

9.1 Un homeomorfismo entre $G(k, n-k-1)$ y ${}^{0}_{n}\mathbb{A}^k$.

Sea h el homeomorfismo de $\mathbb{R}^{n+k}$ en $\mathbb{R}^{k+n}$ que a k vectores en $\mathbb{R}^n$

$$B_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ ... \\ b_{n1} \end{pmatrix}, B_{n+2} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ ... \\ b_{n2} \end{pmatrix}, ..., B_{n+k} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ ... \\ b_{nk} \end{pmatrix}.$$

les asocia los puntos

$$\begin{aligned} X_1 &= (b_{11}, b_{12}, ..., b_{1k}) \\ X_2 &= (b_{21}, b_{22}, ..., b_{2k}) \\ &\ \ ... \\ X_n &= (b_{n1}, b_{n2}, ..., b_{nk}) \end{aligned}$$

en $\mathbb{R}^k$.

Sabemos que $G(k, n-k-1)$ es homeomorfa al espacio de todos los $k+1$ subespacios de $\mathbb{R}^n$ que contienen al vector $\overline{1}$. Denotaremos por $G^n_{k+1}(1)$ a este espacio. Sea $P \in G^n_{k+1}(1)$, y $\{B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1}\}$ un conjunto de generadores de P. Cada B_{n+i} es un punto en $\mathbb{R}^n$. Los n puntos en $\mathbb{R}^k$ dados por $h(B_{n+1}, ..., B_{n+k}) = (X_1, ..., X_n)$ nos dan una configuración en ${}^{0}_{n}\mathbb{A}^k$ si y sólo si generan afinmente. Tenemos que ver que no existe un hiperplano en $\mathbb{R}^k$ que los contenga a todos. Esto sucede si y sólo si no existen $\alpha_1, ..., \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$, no todas cero, tales que para $i = 1, ..., n$

$$\alpha_1 b_{i1} + \alpha_2 b_{i2} + ... + \alpha_k b_{ik} + \alpha_{k+1} = 0.$$

Y esto es equivalente a que $B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1}$ sean linealmente independientes.

Definimos $H(P)$ como la configuración formada por $h(B_{n+1}, ..., B_{n+k}) = (X_1, ..., X_n)$. Probaremos que $(X_1, ..., X_n)$ y $(X'_1, ..., X'_n)$ representan la misma configuración en ${}^{0}_{n}\mathbb{A}^k$ si y sólo si $B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1}$ y $B'_{n+1}, ..., B'_{n+k}, \overline{1}$ generan el mismo $k+1$-subespacio. Las n-adas $(X_1, ..., X_n)$ y $(X'_1, ..., X'_n)$ representan la misma configuración en ${}^{0}_{n}\mathbb{A}^k$ si y sólo si existe $T \in Af(k)$, con $T(X_i) = X'_i$ para toda $i = 1, ..., n$. Si $X_i = (b_{i1}, ..., b_{ik})$ y $X'_i = (b'_{i1}, ..., b'_{ik})$, la condición anterior se convierte en que exista una transformación lineal

$$\begin{pmatrix} t_{11} & ... & t_{1k} \\ ... & & ... \\ t_{k1} & ... & t_{kk} \end{pmatrix}$$

tal que compuesta con una traslación por un vector

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ ... \\ r_k \end{pmatrix}$$

nos de

$$\begin{pmatrix} b'_{i1} \\ ... \\ b'_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11}b_{i1} + ... + t_{1k}b_{ik} + r_1 \\ ... \\ t_{k1}b_{i1} + ... + t_{kk}b_{ik} + r_k \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned} B'_{n+1} &= t_{11}B_{n+1} + ... + t_{1k}B_{n+k} + r_1\overline{1} \\ &... \\ B'_{n+k} &= t_{k1}B_{n+1} + ... + t_{kk}B_{n+k} + r_k\overline{1}. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $< B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1} > \subseteq < B'_{n+1}, ..., B'_{n+k}, \overline{1} >$. Pero son subespacios de la misma dimensión, por lo que tienen que ser iguales. Inversamente, si estos subespacios son iguales, se puede escribir B' en términos de B como lo hicimos arriba y esto significa que las configuraciones son la misma.

8.2 El invariante principal como configuracion de puntos.

Dada $(A, B) \in M$ su invariante principal es $\phi(A, B) =< B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1} >$. Por definición de H, si

$$B_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ ... \\ b_{n1} \end{pmatrix}, B_{n+2} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ ... \\ b_{n2} \end{pmatrix}, ..., B_{n+k} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ ... \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

entonces la imágen bajo H del invariante principal es la configuración formada por los puntos

$$\begin{aligned} X_1 &= (b_{11}, b_{12}, ..., b_{1k}) \\ X_2 &= (b_{21}, b_{22}, ..., b_{2k}) \\ &... \\ X_n &= (b_{n1}, b_{n2}, ..., b_{nk}). \end{aligned}$$

Esto quiere decir que el invariante principal es la configuración formada por las proyecciones de las n líneas en el subespacio $< e_{n+1}, ..., e_{n+k} >$ de $\mathbb{R}^{n+k}$.

8.3 Ejemplo.

Ya vimos, en 7.2, que los espacios ${}^{1}_{n}\mathbb{A}^{2n-3}$ están completamente determinados por su invariante principal. Esto significa que una configuración de n líneas en el espacio afín de dimensión $2n-3$ está completamente descrita por la configuración formada por sus proyecciones en el espacio ortogonal al generado por sus direcciones. Es decir, si las lineas se proyectan en la misma configuración entonces son equivalentes.

8.4 El conjunto Δ como subconjunto de ${}^{0}_{n}\mathbb{A}^{k}$.

El conjunto Δ se puede ver como el conjunto de los $(k+1)$- subespacios P en $G^{n}_{k+1}(1)$ tales que $\pi_i(B_{n+1}), ..., \pi_i(B_{n+k}), \pi_i(\bar{1})$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^{n-1}_{i}$ para alguna $i \in \{1, ..., n\}$. Si $H(P)$ es la configuración formada por $X_1, ..., X_n$, esto corresponde a que existe X_i tal que si quitamos ese punto los demás ya no generan, es decir, a que $n-1$ de los puntos están en un hiperplano. Esto no es difícil de comprobar: supongamos, sin pérdida de generalidad, que $X_1, ..., X_{n-1}$ están en un hiperplano. Esto sucede si y sólo si existen $\alpha_1, ..., \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$, no todas cero, tales que, para toda $i = 1, ..., n-1$,

$$\alpha_1 b_{i1} + \alpha_2 b_{i2} + ... + \alpha_k b_{ik} + \alpha_{k+1} = 0.$$

Es decir, $\alpha_1 \pi_n(B_{n+1}) + \alpha_2 \pi_n(B_{n+2}) + ... + \alpha_k \pi_n(B_{n+k}) + \alpha_{k+1}\pi_n(\bar{1}) = 0$, lo cual es equivalente a que $\pi_n(B_{n+1}), ..., \pi_n(B_{n+k}), \pi_n(\bar{1})$ son linealmente dependientes.

Supongamos que $X_2, X_3, ..., X_n$ están en un hiperplano. El espacio de todas las configuraciones posibles que cumplen esto es el espacio de configuraciones de $n-1$ puntos en $\mathbb{A}^{k-1}$. Este espacio es homeomorfo a la Grassmanniana $G(k-1, n-k-1)$. Como para cada uno de los puntos X_i podemos hacer esto, tenemos que Δ es homeomorfo a la unión de n Grassmannianas $G(k-1, n-k-1)$. Más aún, dadas dos de estas Grassmannianas $G(k-1, n-k-1)$, su intersección es el espacio de las configuraciones $X_1, ..., X_n$ tales que $n-2$ de los puntos se encuentran en la intersección de dos hiperplanos, es decir, una Grassmanniana $G(k-2, n-k-1)$.

8.5 La función f desde el punto de vista de configuraciones de puntos.

Para cada $i = 1, ..., n$, recordemos que la función $f_i : (G(k, n-k-1) - \Delta) \to G(k, n-k-2)$ a cada $P \in G(k, n-k-1) - \Delta$ le asignaba primero un k subespacio ortogonal a $\overline{1}$ en $\mathbb{R}^n$, luego lo proyectaba con π_i y finalmente lo proyectaba al subespacio ortogonal a $\pi_i(\overline{1})$ en $\mathbb{R}_i^{n-1}$.

Sea $(X_1, ..., X_n) \in_n^0 \mathbb{A}^k$. Supongamos que

$$\begin{aligned} X_1 &= (b_{11}, b_{12}, ..., b_{1k}) \\ X_2 &= (b_{21}, b_{22}, ..., b_{2k}) \\ &... \\ X_n &= (b_{n1}, b_{n2}, ..., b_{nk}). \end{aligned}$$

Entonces a $(X_1, ..., X_n)$ le corresponde un elemento de $G_{k+1}^n(1)$ generado por $B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1}$ con

$$B_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ ... \\ b_{n1} \end{pmatrix}, B_{n+2} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ ... \\ b_{n2} \end{pmatrix}, ..., B_{n+k} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ ... \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

Podemos elegir $B_{n+1}, ..., B_{n+k}$ de manera que sean ortogonales a $\overline{1}$. Tenemos que $\pi_i(B_{n+1}), ..., \pi_i(B_{n+k})$ son vectores que tienen cero en la i-ésima cooerednada. La proyección de $\mathbb{R}_i^{n-1}$ en el subespacio ortogonal a $\pi_i(\overline{1})$ en $\mathbb{R}_i^{n-1}$ no es más que el homeomorfismo entre $G_{k+1}^{n-1}(\pi_i(\overline{1}))$ y $G(k, n-k-2)$, que a su vez es el espacio de configuraciones de $n-1$ puntos en $\mathbb{A}^k$. Usando esto no es difícil convencerse de que la función f_i se puede ver como la función de ${}_n^0\mathbb{A}^k - \Delta$ en ${}_{n-1}^{\,0}\mathbb{A}^k$ que a cada configuración de n puntos $(X_1, ..., X_n)$ le asigna la configuración de $n-1$ puntos que se obtiene al quitar X_i.

8.6 Los haces desde el punto de vista de configuraciones.

Para cada $i = 1, ..., n$ tenemos el invariante secundario que, desde el punto de vista de configuraciones se ve así: la función φ_i le asigna a cada $(A, B) \in M$ una pareja $(P_i(A, B), H_i(A, B))$. Recordemos que $P_i(A, B)$ es $\pi_i(\phi(A, B))$, la imágen de $< B_{n+1}, ..., B_{n+k}, \overline{1} >$ en $\mathbb{R}_i^{n-1}$. Ya vimos que esto es equivalente a asignarle a (A, B) la configuración de $n-1$ puntos que forma $H(P) = (X_1, ..., X_n)$ quitando X_i. Además, $H_i(A, B)$ es el subespacio de $\mathbb{R}_i^{n-1}$ generado por $A_i, \pi_i(B_{n+1}), ..., \pi_i(B_{n+k}), \pi_i(\overline{1})$. Usando el homeomorfismo H entre $G_{k+2}^{n-1}(\pi_i(\overline{1}))$ y ${}_{n-1}^{\,0}\mathbb{A}^{k+1}$ tenemos que la imágen bajo H de $< A_i, \pi_i(B_{n+1}), ..., \pi_i(B_{n+k}), \pi_i(\overline{1}) >$ es la configuración de puntos en $\mathbb{A}^{k+1}$ formada por

$$X_j = (b_{j1}, b_{j2}, ..., b_{jk}, a_j) \text{ con } j \in \{1, ..., n\},\ j \neq i.$$

Esta es exáctamente la configuración que se obtiene al proyectar todas las líneas excepto L_i en el subespacio $< e_i, e_{n+1}, ..., e_{n+k} >$ de $\mathbb{R}^{n+k}$.

Así, el invariante secundario de una configuración de líneas es una pareja (P_i, H_i) donde P_i es una configuración de $n-1$ puntos en $\mathbb{A}^k$, H_i es una configuración de $n-1$ puntos en $\mathbb{A}^{k+1}$ y P_i se obtiene de H_i cuando proyectamos $\mathbb{A}^{k+1}$ en $\mathbb{A}^k$.

El haz $\vartheta_{k,n-2}$ tiene como espacio total todos los invariantes secundarios (para una i fija) y como base las configuraciones de $n-1$ puntos en $\mathbb{A}^k$. La proyección $\pi(P, H) = P$ es la proyección de $\mathbb{A}^{k+1}$ en $\mathbb{A}^k$. La fibra son todas las configuraciones de $n-1$ puntos en la línea afín, que es homeomorfo a P^{n-3}.

8.7 Ejemplo.

Regresemos al ejemplo de 5 líneas en $\mathbb{A}^6$ para verlo desde el punto de vista de configuraciones de puntos.

Veamos primero cómo queda el haz ϑ. El espacio de configuraciones de 4 puntos en el plano afín $\mathbb{A}^2$ es el espacio proyectivo P^2 (corresponde a planos en $\mathbb{R}^3$). El espacio de configuraciones de 4 puntos en la línea afín también es P^2 (corresponde a líneas en $\mathbb{R}^3$).

El espacio total $\mathcal{E}$ del haz ϑ consta de parejas (P, H) con

(i) $P = (x_1, ..., x_4)$ una configuración de 4 puntos en la línea afín;

(ii) $H = ((y_1, z_1), ..., (y_4, z_4))$ una configuración de 4 puntos en el plano afín;

(iii) $(x_1, ..., x_4)$ y $(y_1, ..., y_4)$ forman la misma configuración en la línea afín.

La proyección $\pi : \mathcal{E} \to_4^0 \mathbb{A}^1$ manda una configuración de cuatro puntos en el plano en la configuración que forman sus proyecciones en la línea.

Para cada i tenemos un haz de estos: quitando la línea L_i, las cuatro líneas restantes nos dan cuatro puntos al proyectarse en el plano $< e_i, e_6 >$ y cuatro puntos al proyectarse en $< e_6 >$.

Tenemos la función $f : (P^3 - \{a_1, ..., a_5\}) \to P^2 \times P^2 \times P^2 \times P^2 \times P^2$ dada por

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) &= ((X_2, X_3, X_4, X_5), (X_1, X_3, X_4, X_5), (X_1, X_2, X_4, X_5), \\ &\quad (X_1, X_2, X_3, X_5), (X_1, X_2, X_3, X_4)) \end{aligned}$$

que está bien definida excepto en los puntos

$$\begin{aligned} a_1 &= (0, 1, 1, 1, 1) \\ a_2 &= (1, 0, 1, 1, 1) \\ a_3 &= (1, 1, 0, 1, 1) \\ a_4 &= (1, 1, 1, 0, 1) \\ a_5 &= (1, 1, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

Para cada coordenada, f_i se puede ver como una función que retrae a P^3 menos un punto a_i en un P^2 que no contiene a ese punto. Y el haz ξ es la suma de Whitney $f_1(\vartheta) \oplus ... \oplus f_5(\vartheta)$.

Bibliografía

[ABGM] J. L. Arocha, J. Bracho, C. Goodman-Strausz and L. Montejano. Affine configurations of 4 lines in $\mathbb{R}^3$. Enviado para su publicación.

[ABMOS] J. L. Arocha, J. Bracho, L. Montejano, D. Oliveros and R. Strausz. Separoids, their category and a Hadwiger type theorem for transversals. Discrete and Computational Geometry 27-3, (2002) 377-385

[ABM] J. L. Arocha, J. Bracho and L. Montejano. On configurations of flats I: Manifolds of points on the projective line. Discrete and Computational Geometry 34-1, (2005) 111-128

[BMO] J. Bracho, L. Montejano, and D. Oliveros. The topology of the space of transversals through the space of configurations. Topology Appl., 120(1-2), (2002) 93-103

[DT] A. Dold and R. Thom. Une ggeneralisation de la notion d' espace fibré. Application aux produits symétriques infiinis, C. R. Acad. Sci. Paris 242 (1956)

[FM] W. Fulton and R. Mac Pherson. A compactification of configuration spaces. Annals of Math. 139 (1994), 183-225

[G] X. Gomez-Mont. Unas palabras sobre la teoría geométrica de invariantes. Tópicos de geometría algebraica, Aportaciones matemáticas 31, SMM, 2002

[GGMS] I. M. Gelfand, R. M. Goresky, R. Mac Pherson and V. V. Serganova. Combinatorial geometries, convex polyhedra and Schubert cells. Adv. in Math., 63(3) (1987), 301-316

[H] D.Hussemoller, Fibre bundles, New York, Springer, 1994

[KM] M. Kapovich and J. Millson. Universality theorems for configuration spaces of planar linkages (1998)

[S] N. Steenrod. The topology of fiber bundles. Princeton University Press, 1951

[Y] M. Yoshida. Hypergeometric functions, my love; modular interpretations of configuration spaces. Aspects of Mathematics, Vieweg, 1997