



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“Recombinación dinámica de partones en
Colisiones de Iones pesados relativistas”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

MAURICIO MARTINEZ GUERRERO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE ALEJANDRO AYALA MERCADO

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. GERARDO HERRERA CORRAL

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. GENARO TOLEDO SANCHEZ



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Antes que nada, mi familia, Shadia y mamá, no existen palabras para agradecer lo mucho que ellas me han dado. A mis abuelos por maleducarme de niño y darme todo el amor que siempre me han brindado y con el que aún cuento para mi fortuna. A mis tías y primos en general.

A los amigos de Colombia, los de la Nacho, los de Bogotá, los de Manizales, los de mi pueblito natal Socorro y por supuesto los que hice en estos dos años en México.

A la familia Sandoval Figueroa acá en México por toda la ayuda ofrecida.

A Alejandro Ayala por el apoyo personal y académico. A Genaro Toledo por la ayuda con la parte computacional. A Guy Paic por la colaboración ofrecida a lo largo de este trabajo. Al DGEP por el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Por último y no porque sea la persona menos importante, a Nadia, por estar conmigo y brindarme su sonrisa, aún en los momentos más difíciles donde los artículos me estresaban, ese pequeño gesto de 37 músculos que permitió alivianar mi carga académica por unos segundos cargados de la más grande humanidad, momentos perfectos como le llama Sastre en su libro *La Náusea*. Día a día como el último. Gracias bonita...

“Una de mis mayores alegrías fue verlo comer solo mijo”

Mi abuela Temilda

“Dios lo bendiga”

Mi abuela Abigail

“Vaya con Dios mijo”

Mi abuelo Francisco

“Estése quieto Mauricio”

Mi hermana Shadia

“Pórtese bien en el colegio”

Mi mamá

“¿Porqué uno siempre tiene que escoger entre lo malo y lo peor?”

Henri Chinaski, del libro *La senda del Perdedor* escrito por Charles Bukowski

Índice general

1. Introducción	1
2. Aspectos básicos	5
2.1. Aspectos geométricos y variables cinemáticas en iones pesados relativistas	5
2.2. Plasma de quarks y gluones	7
2.2.1. Diagrama de fase de QCD	8
2.2.2. Resultados de Lattice QCD	9
2.2.3. Evolución espacio-temporal de colisiones de iones pesados	10
2.3. QGP y sus posibles efectos observables	15
2.3.1. Producción de dileptones	15
2.3.2. Supresión de J/ψ	16
2.3.3. Producción de fotones	17
2.3.4. Contenido de extrañeza	19
2.3.5. Interferometría	19
2.3.6. Gas hadrónico	20
3. Resultados de RHIC e ideas teóricas actuales	23
3.1. Factor de modificación nuclear	23
3.2. Supresión de hadrones en colisiones centrales Au+Au	24
3.3. Modelo de Recombinación y Fragmentación de partones	26
3.3.1. Fragmentación de partones	27
3.3.2. Recombinación de partones	28
3.3.3. Resultados del modelo de Recombinación y Fragmentación	29
3.4. Críticas al modelo de Recombinación y Fragmentación	31
4. Modelo estadístico con evolución temporal en colisiones de iones pesados relativistas	33
4.1. Evolución temporal en Colisiones de iones pesados relativistas	33
4.2. Modelo String Flip	35
4.2.1. Potencial de muchos cuerpos: caso bariónico	37
4.2.2. Potencial de muchos cuerpos: caso mesónico	37
4.2.3. Función de onda variacional	39
4.2.4. Límite de bajas energías	41
4.2.5. Límite de altas energías	43
5. Resultados y discusión	45
5.1. Comportamiento de los parámetros óptimos	45
5.2. Comportamiento de las funciones de distribución normalizadas	47
5.3. Probabilidad de formación de un cúmulo	51

6. Conclusiones y perspectivas	55
A. Formalismo de las funciones de Wigner	57
A.1. Aplicación al modelo de Recombinación	58
B. Coordenadas del cono de luz	61
C. Cálculos asociados al modelo String Flip	63
D. Conversión de unidades	65
D.1. Cambio de unidades para el caso mesónico	65
D.2. Cambio de unidades para el caso bariónico	66

Capítulo 1

Introducción

La física de colisiones de iones pesados a altas energías es uno de los temas de mayor interés en la investigación tanto teórica como experimental en los últimos años. Basta señalar que en el año 2005, el AIP (American Institute of Physics) seleccionó a las propiedades de la materia descubiertas en RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) como el tema de física del año 2005¹. A través de la física de colisiones de iones pesados a altas energías podemos indagar qué pasa con la materia nuclear al estar expuesta a condiciones extremas, es decir, en situaciones en las que la materia nuclear ordinaria se comprime y una enorme cantidad de energía es puesta en un volumen del tamaño de un núcleo. Existen varios aspectos de física fundamental que se pueden investigar por medio de esta área.

En cosmología, se cree que luego de 10^{-6} segundos de la Gran Explosión, el universo temprano posee número bariónico casi nulo y la materia estaba aún sin confinar; en RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) las energías alcanzadas son del orden de 100 GeV por nucleón, la densidad de energía depositada en la colisión estaría, en principio, en las mismas condiciones en las cuales podría haber estado el universo temprano en ese instante de tiempo, por ende, cualquier descubrimiento en estos aceleradores podría brindarnos una idea más clara sobre los procesos del cosmos a gran escala en sus primeros instantes de formación.

Por otro lado, la teoría a la que mejor se le conoce su comportamiento a escalas microscópicas es la Cromodinámica Cuántica (QCD); esta es una teoría de norma no Abelian invariante bajo el grupo $SU(3)_C$. En esta, los componentes fundamentales son los gluones y los quarks. El número de gluones es 8 y estos son bosones de norma, es decir, los encargados de transmitir la interacción del color; el número de quarks es 6 y cada uno de ellos se presenta en tres colores. Esta teoría presenta el fenómeno de confinamiento, es decir no se pueden presentar sus constituyentes básicos como estados libres, sin embargo, en esta teoría se presenta la llamada libertad asintótica gracias al grupo de norma de esta. Dicha propiedad nos indica que las partículas se comportan como si estuviesen libres cuando tienen momentos altos, por ende los métodos perturbativos (diagramas de Feynman) de teoría cuántica de campos son aplicables.

Sin embargo, existen aspectos que no están totalmente claros en la teoría, en particular el proceso de hadronización en el que no se tiene un método general para calcular los observables medidos (espectros de hadrones y/ ó factores de forma) a partir de QCD pura.

En los experimentos que actualmente se realizan en RHIC se estudian dichos aspectos mediante el análisis de espectros hadrónicos para partículas con momentos transversos que alcanzan valores de 10 GeV. El experimento permite no solo producir partículas a energías más altas, sino además identificar mejor el tipo de partícula producida en el jet. También el número de eventos es mayor que los experimentos realizados anteriormente (SPS por ejemplo), por lo tanto la estadística es más confiable y detallada.

¹Para mayor información puede consultarse en la página web <http://www.aip.org/pnu/2005/split/757-1.html>

Otro aspecto al que se accede a partir del estudio de colisiones de iones pesados y de gran relevancia en QCD, es cómo sucede la transición de fase entre materia desconfiada a confinada, es decir, cómo a partir de partones liberados entre iones pesados se forman los hadrones. Aquí vale la pena indicar que el valor de momento transversal que posea el partón liberado es importante; la descripción física, no es la misma cuando el partón se encuentra inmerso en un medio térmico denso con un valor de momento transversal bajo ($\approx 1-5$ GeV), que cuando este mismo partón posee momento transversal alto ($\approx 8-10$ GeV) y prácticamente no siente la presencia de un medio térmico. En el primer caso, la teoría no ha sido totalmente aclarada, ya que la descripción se basa en considerar el medio como un fluido, y se mira cuál es la probabilidad de que un partón suave (con momento transversal bajo) se recombine con otro partón de valor de momento transversal similar para formar un mesón (o recombinarse con otros dos para formar un barión). Pero se pueden presentar otros efectos en estas escalas de momento transversal bajo, por ejemplo un partón suave puede recombinarse con un partón de alto momento que se produjo en la región periférica de la colisión y que ha perdido energía al pasar por el medio denso formado en esta (una imagen análoga a esta situación es la de un electrón que pierde energía al estar acelerado e ir emitiendo radiación), este efecto conocido como jet quenching ya ha sido observado en RHIC. Fenómenos como el anterior son debidos gracias a los efectos colectivos del medio sobre el partón suave y la descripción es más compleja; el lenguaje natural para dar una explicación a estos fenómenos es dado por la mecánica estadística. Se han usado métodos de esta área tales como formación de cúmulos, hidrodinámica en medios viscosos entre otros, y no es claro aún como se expresa la descripción de todos estos efectos colectivos en términos de los grados de libertad fundamentales de la QCD. Desde la teoría fundamental se calculan los espectros de partículas a través de las funciones de fragmentación. Éstas nos dicen como es la probabilidad de que un hadrón observado tenga una fracción del momento transversal de un partón que ha sido ‘liberado’ luego de la colisión a través de un jet.

Un fenómeno que se ha ido buscando experimentalmente y se ha estudiado teóricamente desde hace ya más de 20 años es el llamado plasma de quarks y gluones (QGP), el cuál se supone que sería otro estado de la materia en el que se presentan estados libres de quarks y gluones luego de que la densidad de energía ϵ excede un valor crítico ($\epsilon \approx 1-5$ GeV/fm³). Aún hoy día, no ha sido aclarada de qué orden es la transición de fase que se presenta en la formación del plasma y el desconfiamiento de la materia a partir de colisiones entre hadrones. Con la formación del QGP será posible obtener información sobre la estructura del vacío de QCD; al calentarse la materia hadrónica y presentarse una transición de fase, el potencial efectivo del sistema y los estados de mínima energía cambian, siendo muy difícil indicar cómo sucede esto, ya que los observables calculados dependen fuertemente del modelo usado; también se puede acceder con la formación del QGP a analizar mejor los efectos colectivos de la materia y sus efectos sobre las partículas producidas en un medio térmico denso.

Aspectos como los anteriores con su contraparte experimental han consolidado el área de la física de colisiones de iones pesados en una de las más activas en la investigación actual tanto en la teoría como en el experimento. En el presente, el colisionador RHIC está presentando resultados inesperados y en el futuro próximo LHC nos mostrará más sobre la naturaleza escondida de las propiedades de QCD y la materia en condiciones extremas.

En particular, los experimentos realizados desde el 2000 en RHIC han llamado la atención de la comunidad; dichos experimentos han mostrado una asimetría en la producción de bariones con respecto a mesones a partir de una colisión entre núcleos de oro, este fenómeno no se puede explicar a partir de QCD perturbativa, este efecto se denomina “*Baryon Puzzle*”. Los modelos implementados en la literatura científica han intentado dar una posible solución para explicar los eventos observados. Dicha descripción, de carácter efectivo, es llamada *recombinación de quarks*. Básicamente, este modelo obtiene la probabilidad de que un partón se recombine con otro(s) para formar un mesón (barión) en un medio con una densidad de población de partones alta en el espacio fase. Sin embargo, como se discutirá en los capítulos posteriores, esta explicación no es del todo satisfactoria teóricamente ya que deja por fuera la evolución del sistema y la hadronización

por ende es instantánea.

Es de nuestro interés explorar en este trabajo una propuesta que nos de una imagen más clara de lo que le sucede al sistema para comparar con los resultados experimentales.

En esta tesis se implementará un modelo estadístico que tome en cuenta la evolución temporal del sistema y genere dinámicamente la recombinación de partones suaves en un medio térmico denso. Para mostrar un panorama general de los conceptos que han permitido estudiar las propiedades de la materia hadrónica a altas temperaturas y densidades, en el capítulo 2 se hará un breve resumen sobre física de iones pesados, el modelo de Bjorken y su relación con el QGP, las señales que permiten explorar la formación de QGP y transiciones de fase de QCD. En el capítulo 3 tiene dos partes: la primera, hace referencia a los resultados experimentales de RHIC y que son la principal motivación del presente trabajo. En la segunda parte, se exponen los métodos teóricos para calcular espectros de partículas observados en las colisiones de iones pesados. También se hace una crítica frente a estos. En el capítulo 4 se presenta nuestra propuesta teórica de un modelo estadístico que permite la evolución temporal del sistema y que es el principal aporte de estudio en esta tesis. Los resultados de la aplicación de este modelo son presentados en el capítulo 5. Por último las conclusiones y discusiones alrededor de los resultados obtenidos a los capítulos precedentes son presentadas en el capítulo 6 y dejamos para los apéndices el cálculo detallado de algunas expresiones usados a lo largo del texto. A lo largo del texto será usado el sistema de unidades naturales $\hbar = c = 1$.

Capítulo 2

Aspectos básicos sobre física de iones pesados relativistas y QGP

En esta sección se da una breve introducción a los aspectos geométricos y teóricos de física de iones pesados relativistas, los resultados sobre transiciones de fase entre materia confinada y deconfinada a partir de Lattice QCD, el plasma de QGP y sus posibles observables en los experimentos.

2.1. Aspectos geométricos y variables cinemáticas en iones pesados relativistas

El hecho de que los núcleos son objetos extendidos hace que la geometría en la descripción física de iones pesados ultrarrelativistas adquiera un significado importante en la dinámica de las colisiones. En este caso, la descripción que es más usada y de gran importancia es la llamada

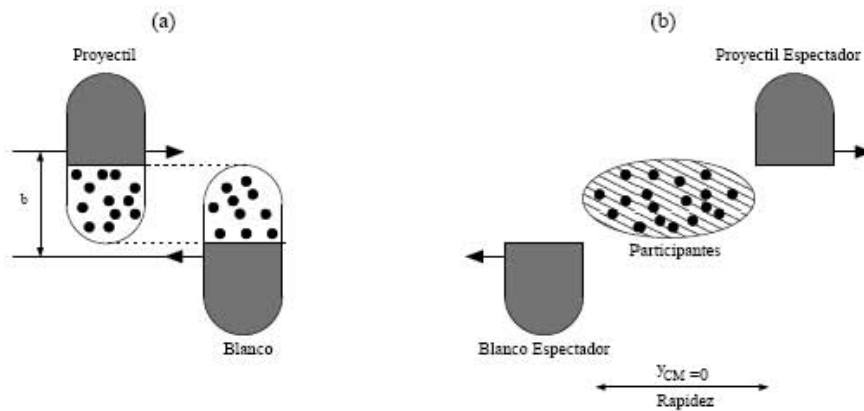


Figura 2.1: Descripción Espectador-Participante de una colisión de iones pesados con parámetro de impacto b . En la parte (a) los dos núcleos son observados desde el sistema centro de masa antes de colisionar entre sí. En la parte (b), luego de la colisión, los nucleones se separan en el proyectil espectador, el blanco espectador y los participantes.

imagen de los espectadores y los participantes. El uso de esta geometría es justificada por el hecho de que a altas energías, el tamaño de los nucleones es mayor que su longitud de onda de Compton y el radio nuclear es mayor que la longitud de interacción de $\approx 1.8\text{fm}$ [1]. En la parte (a) de la figura 2.1 se observan dos núcleos simétricos viajando a velocidades cercanas a la de la luz, visto desde el sistema centro de masa se ven como dos tortillas por la contracción de Lorentz que van a colisionar uno contra otro. Luego del choque entre estos, parte (b), algunas partes de estos dos objetos colisionantes no se estrellan entre sí, sino que siguen aproximadamente la trayectoria inicial moviéndose en dirección opuesta el uno con respecto al otro. Estos son los llamados espectadores; la parte de estos núcleos que chocan entre sí e interactúan más directamente son los denominados participantes de la colisión. En esta descripción, el número de los espectadores y de participante es determinado por el parámetro de impacto b . La cantidad de energía depositada por los participantes depende del valor de b , ésta es mayor cuando este parámetro es cero, en cuyo caso la colisión se denomina *central*, cuando sucede el caso contrario (b diferente de cero) la colisión es llamada *periférica*.

La región más interesante de estudiar es aquella donde los nucleones participantes han depositado su energía y se le conoce como "*región central*", el nombre es debido a la relación existente de esta región con el valor de la variable de rapidez (ver más adelante). Esta región posee una simetría longitudinal, por lo que es conveniente definir la variable de rapidez en el espacio de momentos¹:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p^0 + p_{\parallel}}{p^0 - p_{\parallel}} \right), \quad (2.1)$$

donde p^0 es la componente cero del cuadrimomento p^{μ} y p_{\parallel} es la componente de momento espacial paralela al haz incidente de nucleones, normalmente se toma la componente z por simplicidad. Otra definición útil es la de la masa transversa:

$$m_{\perp} = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2}, \quad (2.2)$$

En términos de las dos variables definidas anteriormente pueden expresarse las variables de energía y momento longitudinal como:

$$\begin{aligned} p_0 &= m_{\perp} \cosh y \\ p_{\parallel} &= m_{\perp} \sinh y, \end{aligned} \quad (2.3)$$

La rapidez tiene dos propiedades interesantes, la primera es que en el límite de bajas velocidades $y \approx v_{\parallel}$, con esto la rapidez se convierte en una unidad natural para expresar la velocidad en el límite no relativista, también se tiene que la rapidez puede variar entre $(-\infty, \infty)$. La segunda es que la rapidez, a diferencia de la velocidad, se transforma aditivamente bajo transformaciones de Lorentz. Este aspecto es importante ya que las densidades de energía y/o partículas en un espectro dado son invariantes de Lorentz cuando son expresadas en términos de esta variable.

Por último, definiremos la variable de pseudorapidez en el espacio de momentos y momento

¹Nótese que se indica que es la rapidez en el espacio de momentos y , ya que tiene su contraparte en el espacio de posiciones y está definida de manera análoga, a esta haremos referencia más adelante:

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right)$$

transverso como:

$$\begin{aligned}\eta_P &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\vec{p}| + p_{\parallel}}{|\vec{p}| - p_{\parallel}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) = -\ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \\ p_{\perp} &= \sqrt{|\vec{p}|^2 - p_{\parallel}^2},\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\tag{2.5}$$

donde θ es el ángulo de emisión de la partícula respecto al eje del haz. En el límite ultrarelativista, es decir, cuando $p^0 \approx |\vec{p}|$ las variables de rapidez y y pseudorapidez η_P coinciden.

2.2. Plasma de quarks y gluones

QCD es una teoría con confinamiento bajo condiciones ordinarias de temperatura y energía. Cuando la densidad de energía ϵ excede un valor crítico ($\epsilon \approx 1\text{-}5 \text{ GeV}/\text{fm}^3$), QCD predice una transición de fase de un estado de constituyentes hadrónicos a un plasma de quarks y gluones desconfiados (QGP). Consideremos un modelo fenomenológico llamado modelo de bolsa [2, 3] que nos permita hacernos una idea de que es lo que sucede en el hadrón cuando este se expone a condiciones extremas. En este modelo se supone que tanto los quarks como los gluones son partículas sin masa dentro de una bolsa de dimensión finita, los hadrones se representan como bolsas o burbujas de vacío dentro de un medio confinante. Fuera de la bolsa no se pueden presentar ni quarks ni gluones libres. El confinamiento se presenta como resultado del balance entre la presión de la bolsa² y la tensión originada por la energía cinética de los quarks en el interior de esta. Cabe notar, que la presión es introducida con el fin de tomar en cuenta los efectos no perturbativos de QCD³. En esta descripción la bolsa no posee carga de color. Cuando la presión de los quarks que están dentro de la bolsa aumenta existirá un valor de presión crítico en el cual la presión de la bolsa es menor que esta. Con ello la presión de la bolsa no puede ser balanceada y con ello la materia que antes estaba confinada se puede liberar creando un nuevo estado de materia deconfinada, es en esta situación en la que se considera que es posible que existan transiciones de fase de materia formada por quarks. El aumento de la presión de los quarks en la bolsa se origina por dos posibles mecanismos[2]:

1. *Cuando la temperatura es alta:* En este caso la temperatura del sistema se eleva y cuando esta toma un valor crítico (la presión y la temperatura están relacionadas termodinámicamente), la bolsa se rompe, ya que la presión originada sobre la materia de quarks por el cambio en la temperatura, será mayor que la presión de la bolsa. La temperatura crítica estimada, para la cuál este mecanismo se presentaría, sería del orden de 144 MeV.

Las condiciones experimentales, a las cuales se desea producir este estado de materia, serán tales que el sistema es de volumen finito con una frontera; a pesar de que el QGP se espera que se produzca a alta temperatura, el deconfinamiento se extiende únicamente sobre la región encerrada por la frontera de materia de quarks caliente. Con ello habrá un efecto sobre la presión en el QGP asociada a la presencia de la frontera[2]⁴.

²Un estimativo de esta presión es $P_{bolsa}^{1/4} = 206 \text{ MeV}$ [2].

³QCD tiene la propiedad de la libertad asintótica y en esta la constante de acoplamiento es débil cuando estamos a altos momentos o longitudes de onda cortas y es fuerte cuando estamos en momentos bajos o longitudes de onda largas; en el primer caso es posible aplicar el método de perturbaciones a través de diagramas de Feynman de Teoría Cuántica de Campos, mientras que en el segundo deja de ser válida, por ello se introducen modelos como este que aunque es netamente fenomenológico, no le quita su validez ya que permite obtener información acerca de un determinado proceso donde es necesario considerar efectos no perturbativos, en el modelo que se presenta la presión de la bolsa es un parámetro introducido ad hoc para comprender que pasa con la materia hadrónica a bajas energías.

⁴Este efecto es la energía del vacío del medio confinante.

2. *Cuando la densidad del número bariónico es alta:* Si consideramos que el sistema a temperatura $T = 0$ y con un número alto de densidad bariónica, la bolsa formada por quarks que obedecen el principio de Pauli por ser fermiones, estos deben poblar estados con diferentes números cuánticos lo que conlleva a aumentar la densidad de quarks, con esto el gas adquiere una presión debida a la degeneración del gas de quarks y esta presión se incrementa a medida que cambia la densidad de estos. Existirá un punto en donde la presión del gas degenerado excederá la presión de la bolsa y se podrá obtener materia deconfinada. Sin embargo, el modelo de bolsa no es muy bueno cuando $T=0$, ya que al haber un potencial químico finito solo se permiten transiciones de fase para determinados valores de la presión de la bolsa lo cual físicamente no es muy comprensible. A pesar de esto, la energía de Fermi para un quark en estas condiciones en las que ocurre esta transición está estimada como $\mu_q = 434$ MeV el cual casi duplica su valor para materia nuclear normal que es apróx. 251 MeV [2]; también el valor de la densidad de número bariónico estimado en este caso es 5 veces el valor de la densidad de materia nuclear normal $n_B = 0.14/fm^3$.

2.2.1. Diagrama de fase de QCD

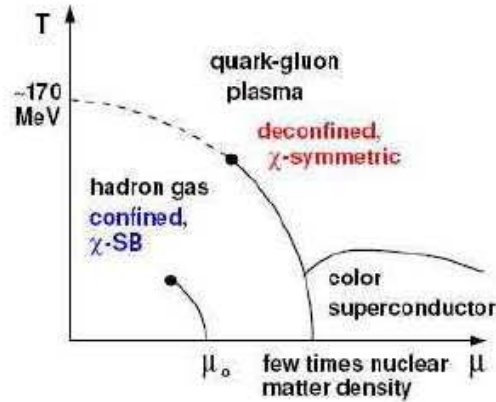


Figura 2.2: Diagrama de Fase en el plano $T - \mu$. Figura tomada de [4, 5].

La figura 2.2 indica cualitativamente el diagrama de fase en el plano $T - \mu$ para estos dos mecanismos de altas temperaturas y alta densidad de número bariónico (el potencial químico). Como se indicó en la sección anterior, las propiedades básicas de la materia hadrónica a bajas temperaturas y valores grandes del potencial químico pueden ser aproximadas en términos de un gas de Fermi degenerado. Aunque no hay una prueba definitiva en el contexto de QCD, a partir de modelos fenomenológicos se sugiere que la transición entre materia nuclear fría y QGP es de primer orden en esta situación; dependiendo de los detalles que se consideren en la interacción para calcular observables, se considera que esta región del diagrama de fase está a su vez subdividida en diferentes fases[6](ver parte inferior derecha de la figura 2.2). Se espera que cuando el sistema esté a altas temperaturas y potencial químico nulo la transición sea gradual (líneas punteadas de la fig. 2.2), tal que se vuelve una transición de primer orden para un valor crítico del potencial químico (ó la densidad de número bariónico).

La región de potencial químico nulo ó muy bajo es de gran interes actual ya que las condiciones termodinámicas en las colisiones de iones pesados relativistas de los aceleradores de RHIC y LHC son las óptimas para explorarla. Se espera obtener un estado de la materia con las propiedades del

QGP en dichos experimentos.

2.2.2. Resultados de Lattice QCD

Un gran problema de QCD es que no se conoce muy bien sus aspectos no perturbativos y por ende, calcular observables que se encuentran en el límite de bajas energías no es fácil y se presentan diversos problemas técnicos. La teoría que ha tenido mayor aceptación en sus resultados para cálculos no perturbativos es Lattice QCD, la cual, es una versión discretizada en una red espacio-temporal. Los resultados básicos de Lattice QCD han sido establecidos a través de simulaciones numéricas y están en acuerdo con las consideraciones generales basadas en la universalidad y las simetrías del lagrangiano para QCD; sin embargo, no todos los resultados pueden ser tomados como la última palabra, ya que presentan problemas técnicos aún no resueltos. En este trabajo no se presentarán los pormenores de la teoría, una buena introducción en el contexto de alta temperatura y densidad puede verse en [2, 4, 5], sin embargo se indican en esta sección los resultados asociados con la transición de fase de materia confinada a desconfinada.

La mayoría de los estudios realizados para QCD en condiciones extremas son con potencial químico μ nulo o muy pequeño[4, 5]. Se han realizado ciertos estudios para un valor grande de μ , presentándose varias dificultades técnicas. En lo que sigue tendremos en cuenta que el potencial químico es nulo. La transición de fase en QCD depende del número de sabores y los valores de las masas de quarks. La interpretación más usada en este contexto se resume en la figura 2.3.

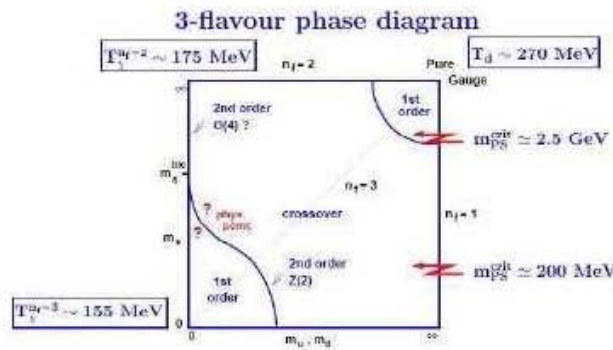


Figura 2.3: Diagrama de Fase de tres sabores de QCD con masas de quarks degeneradas (u,d) y masa de quark extraño. Figura tomada de [4, 5].

Los valores numéricos para temperaturas críticas y masas críticas dadas en la figura deben ser tomadas solo como indicativos; no todos han sido determinados con suficiente precisión. Existe un rango de valores de masas de quarks para los cuales la transición hacia el régimen de altas temperaturas no es propiamente una transición de fase sino que el cambio de estado del sistema es gradual⁵. Las regiones de transiciones de primer orden se presentan para valores pequeños (límite quiral) y grandes (Norma pura) de masas de quarks; en la región intermedia se encuentran líneas de transiciones de segundo orden que separan parte donde el cambio de estado es gradual de otro donde se tiene una transición de primer orden.

En la figura 2.4 se muestran los resultados del cociente entre la densidad de energía y la temperatura a la cuarta potencia (ϵ/T^4) como función de la temperatura, obtenidos en Lattice QCD para

⁵Físicamente esto significa que no se puede identificar macroscópicamente un estado de materia mientras ocurre el proceso de transición, en el caso donde las masas de quarks tienen ciertos valores, el cambio de materia hadrónica al QGP no se da discontinuamente sino que ocurre a lo largo de un intervalo de temperatura.

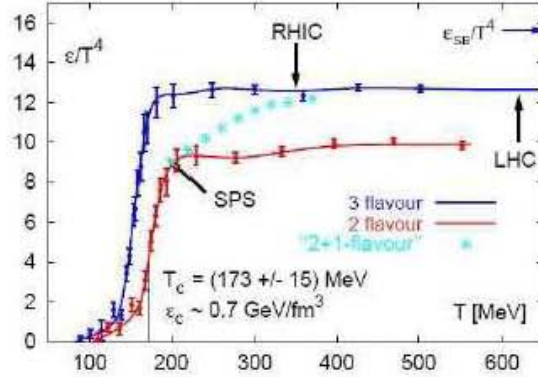


Figura 2.4: Densidad de energía en QCD con dos y tres sabores de quarks degenerados. También se muestra en la figura la forma esperada para QCD con una masa del quark extraño $m_s \sim T_c$. Las flechas indican las densidades de energía alcanzadas en la fase inicial de colisiones de iones pesados en SPS, RHIC, y en el futuro en LHC. Figura tomada de [4, 5].

diferentes número de sabores; los valores de las masas de quarks tomados en esta figura son los que están ubicados en la región donde es una transición de segundo orden. La densidad de energía crece rápidamente cerca a la temperatura crítica T_C donde se presenta el cambio de estado del sistema, sin embargo, este crecimiento se encuentra bien definido dentro de un intervalo finito de temperatura de alrededor de 20 MeV. Nótese que el límite de altas temperaturas no se recobra totalmente el límite de Stefan Boltzmann del gas ideal de quarks y gluones tal como se esperaría. Esto está siendo actualmente de gran estudio, ya que la desviación de este límite indicaría que el sistema no sería un QGP desconfinado que interactúa débilmente sino por lo un plasma desconfinado fuertemente interactuante (*sQGP*), ver por ejemplo [7, 8] y referencias acá citadas.

Los estimativos que se tienen a partir de Lattice QCD para la temperatura crítica en la transición de fase son para diferente valor de masas y número de sabores [4, 5, 6]:

1. Norma Pura SU(3) (Límite para masas de quarks $u, d \rightarrow \infty$): $T_C = 269 \pm 1$ MeV.
2. $N_f = 2$ (Límite quiral para masas de quarks $u, d \rightarrow 0$): $T_C = 173 \pm 15$ MeV.
3. $N_f = 3$: $T_C = 154 \pm 8$ MeV.

Nótese que en la fig. 2.4 se muestra una curva correspondiente a 2 + 1 sabores, esto significa que se toman masas de quarks u y d muy pequeñas comparadas con el quark s , una vez el sistema alcanza el desconfinamiento las curvas de 2 + 1 sabores y 3 sabores presentan un comportamiento similar. La diferencia de éstas dos curvas estriba en la región donde la transición de fase toma lugar.

2.2.3. Evolución espacio-temporal de colisiones de iones pesados

El escenario espacio temporal de la colisión entre núcleos es ilustrado en la figura 2.5. En los primeros instantes de tiempo, las reacciones de dispersión dura entre partones pueden ocurrir con una probabilidad, dada por las funciones de distribución partónica y QCD perturbativa. Adicionalmente, las colisiones suaves entre nucleones de los dos núcleos contraídos de Lorentz, redistribuyen una fracción de energía de los haces incidentes, la cual, es concentrada en la región central (condi-

ciones iniciales de la expansión). Luego de un tiempo⁶, del orden de 1 fm, el sistema alcanza un equilibrio térmico (formación del QGP). El sistema se expande rápidamente sobre el eje longitudinal y transversal de la colisión a medida que el medio se enfría. Los partones liberados se empiezan a reagrupar en el espacio de fase, tal que comienzan a formar los hadrones (transición de fase). Por último, el sistema se expande de forma ordenada y las interacciones cesan, dejando 'libres' a las partículas que serán detectadas [1, 2, 9].

Modelo de Bjorken

El modelo de Bjorken [9] es aplicable a colisiones con $\sqrt{s} \geq 100$ GeV [10], está basado en la hipótesis de que la multiplicidad de partículas como función de la rapidez tiene una región de "plateau" alrededor de $y \sim 0$, llamada la "región central", esto significa, que la producción de partículas es la misma para todos los sistemas de referencia. La segunda asunción es que los núcleos son esencialmente transparentes el uno al otro, esto se puede comprender mejor en la imagen de los espectadores y los participantes; al chocar dos iones pesados a velocidades relativistas, se tiene que los espectadores se siguen moviendo casi con la velocidad que traían antes del choque; la fracción de energía perdida por el choque es depositada alrededor de $z \approx 0$ (en la región central), que es una pequeña región espacial. En esta región, la energía concentrada es lo suficientemente alta para permitir que los grados de libertad de QCD sean liberados y el estado de la materia forme un estado denso en número de quarks y gluones. Cabe notar que en la región central, el contenido de número bariónico es casi nulo (potencial químico desaparece), ya que el número bariónico neto está depositado, en su gran mayoría, en los espectadores. Este modelo establece un puente teórico para buscar el QGP a partir de colisiones entre iones pesados relativistas, aspecto que está siendo investigado actualmente en RHIC y en un futuro próximo por LHC.

El choque entre los núcleos se produce en $(z, t) = (0, 0)$ (ver Fig. 2.5). La región donde se encuentran

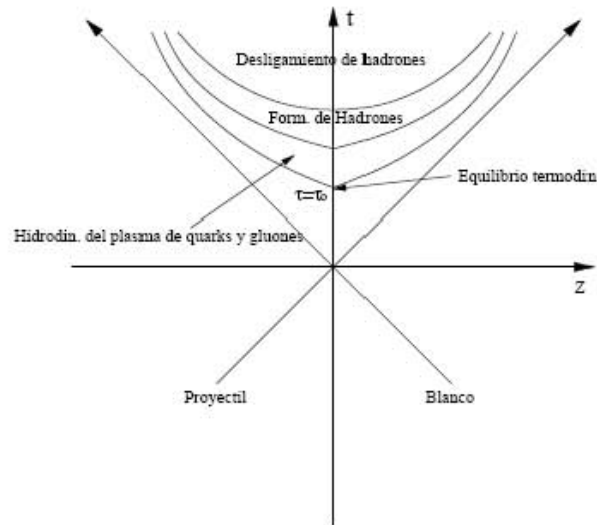


Figura 2.5: Imagen espacio-temporal de la colisión entre núcleos.

los participantes es un sistema denso y caliente que se expande longitudinalmente. La velocidad de

⁶Nótese que se usan unidades naturales ($\hbar=c=1$)

expansión es z/t . De la multiplicidad de partículas cargadas observada en colisiones entre núcleos la densidad de energía inicial estimada es[9]:

$$\epsilon_0 = \epsilon(\tau_0) \approx 1 - 10 \text{ GeV}/fm^3,$$

para un tiempo propio⁷:

$$\tau_0 = 1 \text{ fm}$$

El valor estimado para la densidad de energía inicial⁸ sugiere que el sistema llega rápidamente al equilibrio termodinámico local en $\tau = \tau_0$. En este momento, la evolución del sistema es descrita por la hidrodinámica. Lo anterior es consecuencia de la segunda hipótesis y de que el camino libre medio estimado es mayor que la distancia entre las partículas que están inmersas en el medio. llamada freeze-out).

La primera hipótesis de este modelo implica que la evolución del sistema es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Esto significa que las variables termodinámicas no dependerán de la rapidez y , solo serán funciones del tiempo propio. Otra consecuencia importante de esta asunción, es que el sistema posee una simetría longitudinal tal que una transformación de Lorentz a lo largo de este eje deja invariantes las condiciones iniciales para cualquier sistema de referencia, con lo que esta solo debe depender del tiempo propio inicial escogido.

Usando la definición para la variable de rapidez espacial y el ‘tiempo propio’⁹:

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{t^2 - z^2} \\ \eta &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

las variables longitudinal z y el tiempo t en términos de τ y η son:

$$\begin{aligned} t &= \tau \cosh \eta \\ z &= \tau \sinh \eta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Despreciando la viscosidad y la conducción de calor, el tensor de energía momento está definido en este caso, como el flujo de momento en la dirección μ por unidad de área de la 3 superficie perpendicular a la dirección ν . La densidad de energía y la presión son medidas en un punto espacio-temporal en el cual la velocidad del fluido se encuentre en reposo¹⁰. El tensor de momento-energía para cualquier sistema de referencia dadas las anteriores condiciones es[2, 3, 9]:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p, \quad (2.8)$$

donde $u^\mu = x^\mu / \tau$ es el cuadvivector unitario ($u^\mu u_\mu = 1$) de velocidad a la que se mueve el elemento del fluido desde otro sistema de referencia diferente al de reposo. La ecuación de movimiento para el QGP en esta aproximación es la ecuación de continuidad[2, 3, 9]:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.9)$$

⁷El tiempo propio es tomado como dato desconocido y es estimado teniendo en cuenta el tiempo de producción de las partículas [2]; el valor aceptado es 1 fm [2, 9].

⁸Este estimativo depende fuertemente del área A de intersección de los núcleos en cuestión, para el valor dado de la densidad de energía inicial se considera implícitamente que los núcleos del proyectil y el blanco son transversalmente uniformes, lo cual no es cierto siempre, al tomarse en cuenta estas correcciones se espera que el valor estimado de la densidad de energía inicial es mayor que el calculado acá [2].

⁹La definición estricta del tiempo propio no es esta ($\tau = \sqrt{t^2 - |\vec{r}|^2}$), solo que al considerarse la simetría longitudinal se está despreciando la expansión del fluido a lo largo de las componentes transversales, con lo que estas son tomadas apróx. cero.

¹⁰También se puede indicar esto de manera equivalente considerando que la ley de Pascal se cumple localmente.

Esta ecuación se puede escribir de manera más útil como:

$$\begin{aligned}
 u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} &= g_{\nu\beta} u^\beta \partial_\mu [(\epsilon + p) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p] \\
 &= g_{\nu\beta} u^\beta u^\mu u^\nu \frac{\partial(\epsilon + p)}{\partial\tau} \partial_\mu \tau + g_{\nu\beta} u^\beta (\epsilon + p) u^\nu \partial_\mu u^\mu \\
 &\quad + g_{\nu\beta} u^\beta (\epsilon + p) u^\mu \partial_\mu u^\nu - g_{\nu\beta} u^\beta g^{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial\tau} \partial_\mu \tau \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \tau &= \frac{g_{\mu\alpha} x^\alpha}{\tau} \\
 u^\mu \partial_\mu \tau &= \frac{g_{\mu\alpha} x^\alpha \partial x^\mu}{\tau \partial\tau} \\
 &= \frac{1}{2\tau} \frac{\partial\tau^2}{\partial\tau} = 1 \\
 g_{\nu\beta} u^\beta \partial_\mu u^\nu &= \frac{1}{2} \partial_\mu [g_{\nu\beta} u^\beta u^\nu] = 0
 \end{aligned}$$

Con lo que la Ec. (2.9) queda:

$$\begin{aligned}
 g_{\nu\beta} u^\beta u^\nu \frac{\partial(\epsilon + p)}{\partial\tau} + g_{\nu\beta} u^\beta (\epsilon + p) u^\nu \partial_\mu u^\mu - \frac{\partial p}{\partial\tau} &= 0 \\
 \frac{\partial\epsilon}{\partial\tau} + (\epsilon + p) \partial_\mu u^\mu &= 0,
 \end{aligned}$$

donde se usó el hecho de que la cuadrivelocidad es un vector normalizado. Teniendo en cuenta la simetría longitudinal del sistema tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu u^\mu &= \frac{\delta^\mu_\mu}{\tau} - \frac{x^\mu}{\tau^2} \frac{\partial\tau}{\partial x^\mu} \\
 &= \frac{2}{\tau} - \frac{x^\mu}{\tau^2} \frac{1}{\tau} g_{\mu\alpha} x^\alpha \\
 &= \frac{1}{\tau}.
 \end{aligned}$$

La ecuación de las variables termodinámicas ϵ y p es finalmente:

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial\tau} + \frac{(\epsilon + p)}{\tau} = 0. \tag{2.11}$$

Un aspecto importante es la conservación de la entropía a lo largo de la evolución del sistema. De la termodinámica tenemos:

$$TS = U + pV; \tag{2.12}$$

con lo que la densidad de entropía es ($\beta = T^{-1}$):

$$s = \frac{S}{V} = \beta(\epsilon + p). \tag{2.13}$$

El cuadrivector de entropía definido como $s_\mu = \beta(\epsilon + p)u_\mu$ se conserva. Es una consecuencia de la Ec. (2.8), esta se obtiene al contraer dicha ecuación con u^ν . Realizado esta operación, la ecuación diferencial resultante es:

$$\frac{ds}{d\tau} = -\frac{s}{\tau}, \tag{2.14}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned}\frac{s(\tau)}{s(\tau_0)} &= \frac{\tau_0}{\tau} \\ \Rightarrow s(\tau)\tau &= s(\tau_0)\tau_0.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Aunque no es del todo evidente, se tiene que la densidad de entropía por unidad de rapidez se conserva. Teniendo en cuenta que un elemento de volumen espacial dV en las coordenadas de rapidez y tiempo propio es dado por $d^2x_\perp\tau dy$, se concluye:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d^2x_\perp dy} &= s\tau \\ \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dS}{dy} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Esta expresión tiene una consecuencia importante. Si la entropía a través de la expansión hidrodinámica se conserva, implica que expansión es adiabática y por ende la multiplicidad final de las partículas por unidad de rapidez es proporcional a la densidad de entropía.

La condición de positividad de la traza del tensor de momento-energía:

$$T^\mu_{\ \mu} \geq 0,\tag{2.17}$$

la cual es válida bajo circunstancias generales¹¹ implica:

$$\epsilon \geq 3p.\tag{2.18}$$

A partir de esta expresión tenemos la siguiente condición sobre la densidad de energía al solucionar la Ec. (2.10) [9]:

$$\left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{4/3} \geq \frac{\epsilon(\tau)}{\epsilon(\tau_0)} \geq \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right).\tag{2.19}$$

De la Ec. (2.10) se encuentra la relación entre la temperatura y el tiempo propio:

$$\begin{aligned}\frac{d\epsilon}{d\tau} &= \frac{d\epsilon}{dp} \frac{dp}{dT} \frac{dT}{d\tau} \\ &= -\frac{(\epsilon + p)}{\tau} = -\frac{T s}{\tau},\end{aligned}\tag{2.20}$$

donde se usó la Ec. (2.12). De la termodinámica se tiene que (F es la energía libre):

$$\begin{aligned}p &= -\frac{F}{V} \\ S &= -\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V \\ \Rightarrow \frac{dp}{dT} &= \frac{S}{V} = s;\end{aligned}$$

adicionalmente la velocidad del sonido está definida como:

$$\frac{1}{v_s^2} = \frac{d\epsilon}{dp}.\tag{2.21}$$

¹¹Esto siempre será cierto siempre y cuando el fluido se comporte como una colección de cuantos no interactuantes[9] como es el caso que tomaremos acá.

Colocando esta última expresión junto con la relación termodinámica que se halló en la Ec. (2.20), la relación entre la temperatura y el tiempo propio es[9]:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\tau} = -\frac{v_s^2}{\tau}. \quad (2.22)$$

De la condición (2.18) se tiene que:

$$\frac{1}{3} \geq v_s^2 \quad (2.23)$$

El caso que nos interesa en particular es el de un fluido ultrarelativista que cumple la relación $\epsilon = 3p$. Las relaciones de las variables termodinámicas como función del tiempo propio son:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon(\tau)}{\epsilon(\tau_0)} &= \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{4/3} \\ \frac{p(\tau)}{p(\tau_0)} &= \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{4/3} \\ \frac{T(\tau)}{T(\tau_0)} &= \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1/3} \\ \frac{s(\tau)}{s(\tau_0)} &= \frac{\tau_0}{\tau} \\ v_s^2 &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.3. QGP y sus posibles efectos observables

Los aspectos indicados en esta sección no serán usados en el desarrollo del estudio realizado, este ha sido incluido por consideración del autor del presente escrito con el ánimo de darle completez a la tesis.

Experimentalmente no se ha observado un quark libre, por lo que la evidencia del QGP se ve restringida. Los efectos de la formación de este estado de la materia se ven reflejados en la multiplicidad de las partículas medidas, esto es, los hadrones originados provienen de las interacciones entre los constituyentes del QGP, por ende, estas observables poseen información de lo que sucedió en los primeros instantes de la colisión cuando la materia estaba más caliente; la detección de los productos de estas interacciones serán usadas como una prueba de diagnóstico de la creación del QGP. Los principales observables en los que se puede verificar la existencia del QGP son: producción de dileptones, supresión de J/ψ , producción de fotones, contenido de extrañeza y fenómenos de interferencia. Describiremos a continuación las características cualitativas de cada uno de estos efectos sin entrar en los detalles cuantitativos; un tratamiento más completo de estos aspectos puede consultarse en [2, 3].

2.3.1. Producción de dileptones

En el QGP un quark q puede interactuar con otro antiquark \bar{q} a través no solo de un gluón sino también por un fotón virtual γ^* , subsecuentemente este puede decaer en un leptón l^+ y un antileptón l^- . Este sistema es llamado par l^+l^- ó dileptón.

En la figura 2.6 es el diagrama de Feynman que describe la reacción $q + \bar{q} \rightarrow l^+ + l^-$. Los dileptones en principio deberían pasar a través de la región de colisión para arribar a los detectores y ser observados. Los leptones originados interactúan electromagnéticamente con las partículas en la colisión, no lo hacen a través de la interacción fuerte ya que estos no poseen carga de color. Con ello, el camino libre medio es muy grande para los dileptones producidos, por lo que no sufrirán muchas colisiones desde que son producidos. La identificación de dichas partículas en

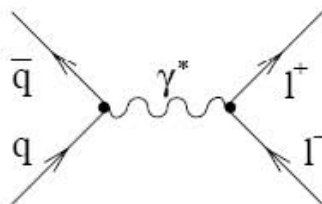


Figura 2.6: Diagrama para la reacción $q + \bar{q} \rightarrow l^+ + l^-$.

el espectro observado luego del choque, da información sobre cómo se originaron y el medio en que se produjeron.

Existen otras fuentes de producción de dileptones diferentes al QGP, tales como el proceso de Drell-Yan, el cual es un efecto electromagnético en el que un quark y un antiquark de un par de hadrones (ó núcleos) distintos que interactúan entre sí, se aniquilan a través de un fotón virtual para producir un par de leptones[11]. Otra posible fuente proviene del gas hadrónico (HG) luego del congelamiento cinético, la interacción de hadrones y sus antipartículas tales como $\pi^+ + \pi^- \rightarrow l^+ + l^-$ ó de decaimientos de resonancias hadrónicas como las partículas ρ , ω , ϕ y J/ψ y por último como productos originados por decaimientos de partículas formadas por el quark charm contribuyen al espectro de dileptones. Debido a lo anterior, en los espectros observados es muy difícil interpretar de cual fuente provienen los dileptones debido al gran error experimental sistemático que se presenta [3].

2.3.2. Supresión de J/ψ

Antes de indicar el mecanismo de supresión, consideremos la partícula J/ψ , la cual es un estado ligado entre un quark c y un antiquark \bar{c} . Consideremos a esta partícula como un sistema de dos cuerpos del quark c y el antiquark \bar{c} sin la presencia del QGP. Cuando se tiene este par de quarks en la presencia del QGP, los quarks y gluones libres en el medio tienen efectos sobre la carga de color; el acoplamiento entre este par de quarks será menor por el apantallamiento que genera el medio sobre este par de quarks, tal como se ilustra en la fig. 2.7. La polarización del medio modificará el potencial de interacción entre este par de quarks. Este efecto es llamado apantallamiento de Debye. Fenomenológicamente el potencial de interacción entre el quark c y el antiquark \bar{c} sin el QGP se

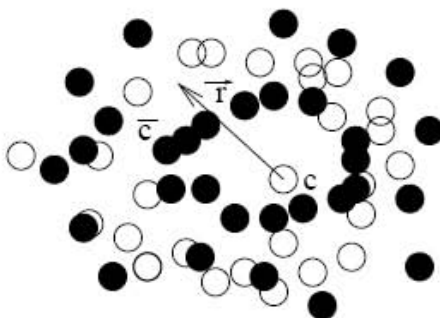


Figura 2.7: El potencial de interacción de un quark c con otro quark se ve alterado ya que el medio se polariza atrayendo antiquarks (círculos sólidos) y repele quarks (círculos abiertos).

modela como un potencial eléctrico de largo alcance de Coulomb más un potencial de confinamiento

lineal entre c y \bar{c} que se incrementa con la separación entre estos quarks¹². Cuando este par de quarks se encuentra en el QGP el potencial de confinamiento es prácticamente nulo mientras que el potencial de interacción de un quark de prueba c a una distancia r de \bar{c} será modificado de un potencial de Coulomb de largo alcance a uno efectivo de corto alcance tipo Yukawa[2]. Más dramático es el efecto si se considera la polarización de los gluones que llevan carga de color ya que para este caso si se calcula la polarización de estos gluones a un loop usando QCD perturbativa (pQCD) se muestra que la longitud de Debye λ_D ¹³ depende inversamente de la constante de acoplamiento y la temperatura del QGP [2], por lo que a alta temperatura el rango de interacción es pequeño y hace poco probable que se ligen un par $c\bar{c}$. También se puede tener una supresión de J/ψ a través de la interacción de esta partícula con hadrones formados a partir del QGP. En colisiones entre núcleos las partículas J/ψ se forman en el estado inicial del choque, por lo que si el QGP se obtiene en la región de producción de J/ψ , el efecto observable debido a la creación de este estado de materia sería la disminución de esta partícula en el espectro observado.

2.3.3. Producción de fotones

Dentro de las interacciones que se tienen en el QGP, los quarks pueden interactuar con otro quark de manera relevante ya sea por la interacción fuerte ó por la interacción electromagnética tal que producen un fotón. Como sucede con los dileptones, el camino libre medio del fotón producido en la región de colisión es grande por lo que no sufrirá muchas colisiones. El fotón resultante puede provenir principalmente de 4 tipos de procesos.

El primero debido a la aniquilación de pares quark-antiquark, cuyos diagramas de Feynman son dados en la figura 2.8. En este caso existe la probabilidad de que se presente en el sistema dos tipos

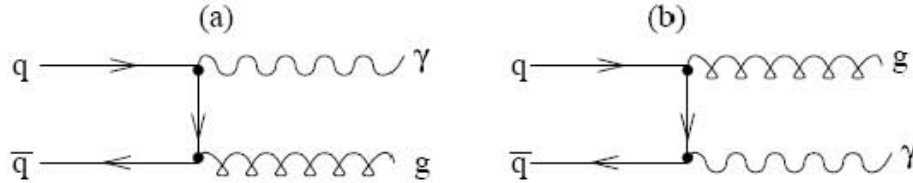


Figura 2.8: Diagramas de Feynman que representan el proceso de aniquilación $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + g$.

de reacción: $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + g$ y $q + \bar{q} \rightarrow \gamma + \gamma$. Debido a que la constante de acoplamiento $\alpha_e \ll \alpha_g$, la probabilidad de ocurrencia de la segunda reacción es menor que la primera, con lo que se ve suprimida.

En el segundo proceso, los fotones se emiten a través del proceso Compton. Un gluón puede interactuar con un quark (antiquark) para producir un fotón por la reacción $g + q(\bar{q}) \rightarrow \gamma + q(\bar{q})$. Estas reacciones son representadas en la figura 2.9. En este proceso un gluón incidente es desviado por un quark (ó antiquark) y decae en un fotón más otro quark (ó antiquark). El gluón incidente cumple el análogo al fotón incidente en la dispersión Compton del fotón en QED. Una vez producido el fotón, éste solo interactúa con las partículas electromagnéticamente no por la interacción fuerte. El tercer proceso, el fotón puede provenir de la colisión inicial entre partones que constituyen diferentes nucleones, por ejemplo, un quark de un nucleón puede interactuar con un antiquark de otro

¹²Aunque este potencial es muy simple ha dado una buena descripción en la espectroscopía observada para sistemas $c\bar{c}$.

¹³El potencial de Yukawa es:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}$$

q es la carga efectiva que siente una carga de prueba, r es la distancia de separación entre las cargas y λ_D es la llamada longitud de Debye, la cual indica de que tan corto alcance es la interacción entre los quarks.

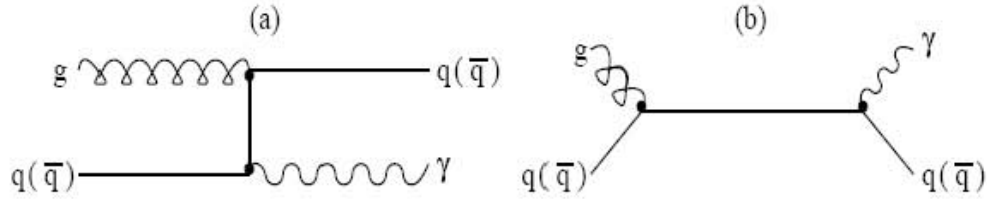


Figura 2.9: Diagramas de Feynman que representan el proceso de aniquilación $g + q(\bar{q}) \rightarrow \gamma + q(\bar{q})$.

nucleón para producir un fotón y un gluón tal como en la figura 2.8. Lo mismo puede presentarse si un gluón de un nucleón puede interactuar con un quark ó un antiquark de otro nucleón para producir un fotón por dispersión Compton tal como se ilustra en la figura 2.9.

Por último, los fotones pueden ser emitidos a través de la aniquilación de un hadrón con un antihadron, tal como se ilustra a través de los diagramas de Feynman en el caso de la reacción $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \gamma + \rho^0$. Además del ejemplo anterior se pueden tener otras reacciones que den como

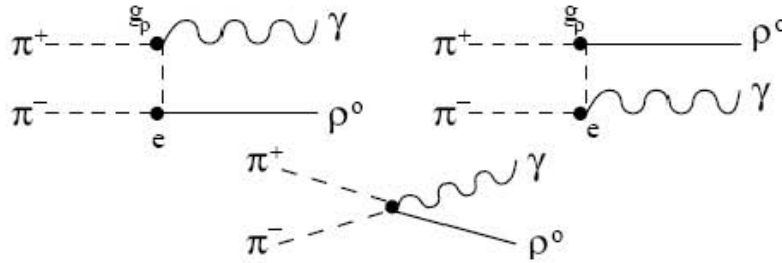


Figura 2.10: Diagramas de Feynman que representan el proceso de aniquilación $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \gamma + \rho^0$.

resultado un fotón. Un pion π^+ (ó π^-) puede interactuar con un pion π^0 para producir un fotón y un meson ρ :

$$\pi^\pm + \pi^0 \rightarrow \gamma + \rho^\pm$$

Los diagramas de Feynman asociados a esta reacción son análogos a los de la fig. 2.10. También un pion puede interactuar con un meson ρ^0 dando como resultado a un fotón y un pion dispersado en las siguientes reacciones:

$$\pi^\pm + \rho^0 \rightarrow \gamma + \pi^\pm$$

$$\pi^\pm + \rho^\mp \rightarrow \gamma + \pi^0$$

$$\pi^0 + \rho^\pm \rightarrow \gamma + \pi^\pm$$

La fuente a partir de donde se producen los fotones en estos dos últimos casos, no provienen propiamente del QGP sino del gas de hadrones y los efectos térmicos asociados a los procesos involucrados aquí tienen consecuencias en los observables que hacen las diferencias con respecto a un espectro de fotones proveniente del QGP[2]; una señal directa de la producción de fotones a partir del QGP es una pequeña fracción de todos los fotones producidos.

La importancia de este efecto, radica en que la tasa de producción de fotones observados depende de las funciones de distribución de momentos de los constituyentes del QGP, con lo que la observación de fotones producidos en los choques llevan información sobre el estado termodinámico del medio en el momento de la producción.

2.3.4. Contenido de extrañeza

El contenido de extrañeza en materia hadrónica y en el QGP es diferente. En materia nuclear, la cantidad de quarks s es pequeña comparada con la cantidad de quarks u y d . Experimentalmente, para observar el cambio en el contenido de extrañeza en colisiones de iones pesados, lo que se hace es comparar la producción de partículas con contenido de quark $s(\bar{s})$ entre colisiones de núcleos pesados con respecto a colisiones entre nucleones (p-p), siendo la comparación hecha a energías similares en ambas colisiones. La producción de resonancias pesadas en la colisión decae en hadrones más ligeros, por lo que se diluye el contenido de extrañeza del sistema[12], estos decaimientos son radioactivos y decaen por la interacción débil, que ocurre, en general, en una escala de tiempo que es larga comparada con el tiempo de la colisión nuclear[3].

En las colisiones entre núcleos pesados se producen pares $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ y $s\bar{s}$, estos últimos tienen una probabilidad no nula de recombinarse con otros quarks en sus alrededores para formar partículas con contenido de extrañeza. Físicamente, esto hace sentido gracias a que el contenido gluónico del sistema difiere en ambas situaciones, favoreciendo la primera de éstas colisiones. En la figura 2.11 se ilustran los procesos en los cuales es posible obtener quarks pesados como lo es el quark s . En la parte (a) de esta figura, se tiene que a partir de la aniquilación de pares de quarks $q\bar{q}$ emiten un gluón que decae a su vez en otro par de quarks $Q\bar{Q}$ (en el caso presente sería un par de quarks $s\bar{s}$). En la parte (b), (c) y (d) el par de quarks $Q\bar{Q}$ proviene de la colisión entre gluones, lo cual es permitido dada la estructura no abeliana de QCD.

La producción de quarks pesados como el quark s depende en gran medida de la cantidad de energía

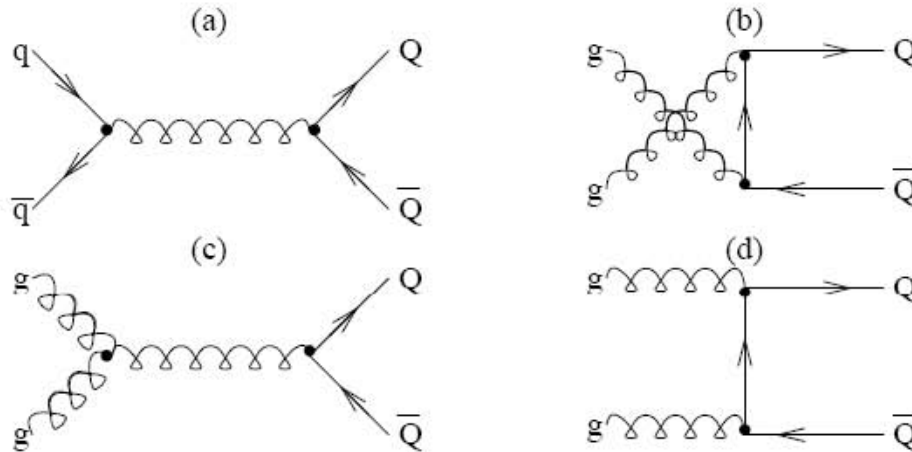


Figura 2.11: Diagramas de Feynman para procesos de producción de extrañeza en el QGP.

que lleven en el centro de masa los nucleones colisionantes; actualmente las energías alcanzadas en RHIC en colisiones Au-Au son del orden de $\sqrt{s}=200$ GeV, con lo que en este colisionador se crean las condiciones óptimas para observar el contenido de partículas con extrañeza.

2.3.5. Interferometría

Si se tienen dos partículas idénticas medidas en detectores colocados en diferentes puntos espacio-temporales y si ambas, en principio, se produjeron en la misma fuente extendida, existirá una correlación cuántica entre estas por la interferencia acontecida antes del arribo a los detectores. Consideremos el siguiente ejemplo, los caminos recorridos por dos piones idénticos emi-

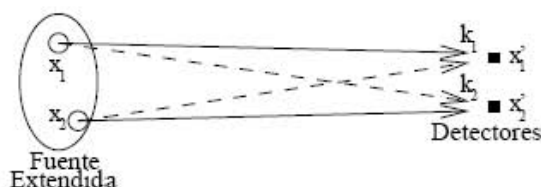


Figura 2.12: Un pión con momento k_1 es detectado en x_1' y otro idéntico con momento k_2 es detectado en x_2' . Estos han sido producidos en los puntos x_1 y x_2 de una fuente extendida. La líneas sólidas que unen x_1 con x_1' y x_2 con x_2' y las líneas punteadas que unen x_1 con x_2' y x_2 con x_1' son posibles trayectorias para los piones.

tidos en una fuente extendida luego de una colisión. Dada la indistinguibilidad de los piones y la estadística de Bose-Einstein que satisfacen estos, la amplitud de probabilidad debe ser simétrica con respecto a sus posiciones. En este caso tales puntos serían sus posiciones espacio-temporales x_1 y x_2 sobre la fuente extendida donde se producen; ya que el pión con momento k_1 ha sido determinado al arribar al detector ubicado en x_1' , lo mismo sucede con el pión con momento k_2 . En el camino recorrido entre la fuente y el detector, los caminos pueden cruzarse, este efecto de interferencia afecta la probabilidad de llegada al detector de cada partícula, con lo que el arribo de cada pión al detector estaría correlacionado con el otro. Los dos piones pudieron ser producidos en cualesquiera puntos x_1 y x_2 de la fuente extendida, con esto la amplitud total es la suma de las amplitudes de todas las combinaciones posibles de tales puntos dentro de la fuente extendida.

La función de correlación entre dos partículas nos da una idea de la extensión espacio-temporal de la fuente en el momento de emisión de las partículas. En particular, la interferencia entre piones ó kaones es importante en este contexto, ya que aunque la función de correlación es medida en el congelamiento cinético (región en la que ya los piones no interactúan vía QCD), una posible transición de fase al QGP en la etapa de evolución primaria del sistema, modifican la dinámica de la expansión y por ende, la correlación entre piones [1].

2.3.6. Gas hadrónico

La descripción de la evolución espacio-temporal de la colisión entre iones pesados debida a Bjorken y explicada anteriormente, considera que luego que los hadrones se forman, el sistema aún se expande. La energía disponible por partón disminuye a medida que sucede esta expansión, de modo que la interacción fuerte es más eficaz para confinar a los partones formando estados hadrónicos. Lo anterior sucede, según los cálculos de Lattice QCD para temperaturas en el rango de $150 \leq T \leq 170$ MeV (ver diagrama de fase de la sección 2.2.2). La hadronización, es decir, el proceso en el cual se forman los hadrones a partir de los componentes fundamentales (quarks y gluones), es concluida en esta etapa intermedia. Sin embargo, el sistema sigue evolucionando, ya que los hadrones formados una vez terminada la hadronización siguen chocando entre sí cambiando las distribuciones de momentos transversos y la abundancia de partículas. Esta etapa consiste en un gas denso de hadrones. Por ejemplo, la reacción $\pi^+\pi^- \rightarrow \rho \rightarrow l^+l^-$ es propia de esta etapa. Los observables provenientes del HG (espectros de partículas identificadas, cocientes entre partícula/antipartícula, espectro de dileptones y fotones, etc.), junto con los observables del QGP nombrados anteriormente, contribuyen a dar una visión más completa de la evolución del sistema. En el HG la dinámica depende fuertemente del estado inicial y de la naturaleza de las ecuaciones de estado (los observables calculados en esta fase son dependientes del modelo). También se presentan efectos que contribuyen a los observables que finalmente se miden, tales como decaimientos de resonancias (ver por ejemplo sección 2.3.3).

Cabe notar que en el HG existen dos subetapas de evolución:

1. *Congelamiento químico*: los hadrones formados experimentan colisiones inelásticas; la abundancia de distintas especies de partículas no está fija, así como tampoco lo está la distribución de momentos transversos de cada especie. La producción final de partículas que caracterizan al sistema en el congelamiento químico está determinada por dos variables independientes, la temperatura T y el potencial químico-bariónico μ_B . Los parámetros T y μ_B derivados por Braun Munzinger et. al [13, 14], a partir de los datos de SPS y RHIC¹⁴ son:

	SPS	RHIC
$T(\text{MeV})$	168 ± 2.4	174 ± 7
$\mu_B(\text{MeV})$	266 ± 5	46 ± 5

Estos datos deben ser tomados como indicativos, ya que dependiendo del tipo de parametrización usada, estos valores cambian; por ejemplo, para RHIC para el mismo valor de $\sqrt{s_{NN}}$, usando un modelo estadístico diferente al empleado por Braun Munzinger et. al, Rafelski y Letessier obtienen que $T \approx 158 \text{ MeV}$ y $\mu_B \approx 38 \text{ MeV}$ [3].

Tanto en RHIC como en SPS, los parámetros en el plano T vs. μ_B (Ver Fig. 2.2) indican que previamente al congelamiento químico, el sistema presenta una fase de coexistencia entre HG y el QGP formado luego de la colisión [15].

2. *Congelamiento cinético*: una vez que se ha alcanzado el equilibrio químico, las abundancias de partículas están fijas, sin embargo, se siguen presentando colisiones elásticas entre éstas, cambiando los valores de momento que poseía cada especie luego del congelamiento químico. Al finalizar las colisiones entre hadrones, se produce el llamado congelamiento cinético; ésta es la última etapa de la evolución espacio-temporal de colisiones entre iones pesados. Las

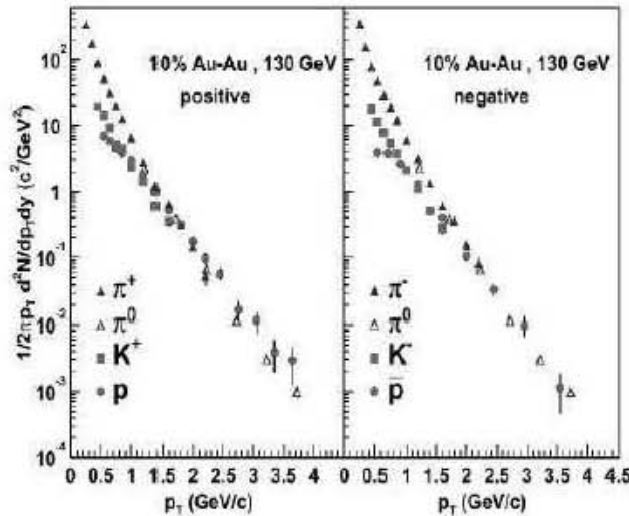


Figura 2.13: Espectro de partículas medido por PHENIX en colisiones centrales $Au + Au$ a $\sqrt{s_{NN}}=130 \text{ GeV}$ [16].

condiciones del congelamiento cinético son derivadas del espectro de momento transverso de las partículas identificadas. El espectro exhibe un perfil exponencial con temperatura T_{eff} (el

¹⁴En este caso son parametrizados para $\sqrt{s_{NN}}=130 \text{ GeV}$.

parámetro de la pendiente inverso en una escala logarítmica) y se incrementa con la masa de la partícula, tal como se indica en la Fig. 2.13. Este comportamiento cualitativo es independiente de $\sqrt{s_{NN}}$ y ha sido observado desde BEVALAC hasta RHIC. Este perfil puede ser entendido si se postula que existe un flujo radial colectivo, tal que el parámetro inverso es dado por $T_{eff} = T_{fo} + m \langle \beta_T \rangle^2$, siendo T_{fo} la temperatura a la cuál ocurre el congelamiento cinético y $\langle \beta_T \rangle$ es la velocidad del flujo radial colectivo. Este par de parámetros, T_{fo} y $\langle \beta_T \rangle$ caracterizan el sistema en el congelamiento cinético, el espectro de partículas entonces es reproducido únicamente con estos dos parámetros. T_{fo} es básicamente constante alrededor de ~ 130 MeV tanto en AGS como en RHIC, lo cuál es esperado si las partículas se desacoplan a una densidad dada. La velocidad de flujo radial ha sido establecida en las energías alcanzadas por AGS y SPS alrededor de ~ 0.4 , mientras los primeros resultados de RHIC indican que es un valor mayor (~ 0.6), lo cual sugiere una presión inicial mayor en el sistema en RHIC [15].

Experimentalmente, no es fácil determinar la fuente de producción a partir de un espectro dado. Por ejemplo, en el caso del espectro de dileptones y fotones, se debe distinguir entre la radiación térmica emitida en la fase del QGP y de la emitida durante la fase del HG; la identificación de la radiación térmica nos indica cuál es la naturaleza de la materia formada.

En este trabajo se plantea un modelo que permita vislumbrar la transición entre la fase del QGP al HG para entender si es que hay una diferencia entre las probabilidades en función de la temperatura de bariones y mesones con el objetivo de entender la naturaleza del cociente p/π medido en RHIC recientemente.

Capítulo 3

Resultados de RHIC e ideas teóricas actuales

En esta sección se presentan los resultados experimentales recientes observados en RHIC¹, concéntrandonos en el cociente entre barión/mesón, en particular, para protón/pión (p/π) que es de interés en este trabajo. Se hace hincapié en el significado físico de las observables medidos. Se presenta el modelo de recombinación, sus resultados y la confrontación del modelo con el experimento. Se hace una crítica a las ideas planteadas en el modelo de recombinación.

3.1. Factor de modificación nuclear

Antes de iniciar la discusión de los detalles de los resultados, explicaremos brevemente las observables medidas en RHIC concernientes al cociente barión/mesón y su interpretación física.

Las partículas producidas por colisiones entre partones con transferencia alta de momento (dispersiones duras) son de gran interés. En colisiones entre protones ($p + p$), los partones fuertemente dispersados se fragmentan en jets de hadrones; estos fragmentos son la fuente primaria de hadrones a valores altos de momento transversal (p_T). En colisiones nucleares a altas energías, la dispersión dura ocurrirá en los primeros instantes de la colisión, donde se espera la formación del QGP. Se espera que estos partones pierdan energía a través del medio denso a altas temperaturas formado en la colisión. Este efecto tiene consecuencias sobre la producción de hadrones a alto p_T . Para cuantificar tales modificaciones, se requiere de una observable que permita comparar la producción de hadrones cuando se colisionan dos núcleos A+B que produzcan un medio denso caliente y cuando se colisionan objetos en donde la formación de este medio está ausente luego del choque (nucleón-nucleón N+N). Dicha observable, es el cociente entre la producción de A+B y N+N, denominado *factor de modificación nuclear* R_{AB} ; ésta observable es una medida del cambio que se produce en las partículas emitidas originadas a partir de los núcleos en la colisión. Además, R_{AB} es función del momento transversal (p_T).

Cuando el momento transversal es grande, la sección eficaz es pequeña; en este caso, se considera que el núcleo es una superposición incoherente de partones², con lo que la colisión entre núcleos (Au+Au por ejemplo) puede verse como una superposición binaria de colisiones entre nucleón-nucleón³. Por ejemplo, la producción invariante semi-inclusiva de π^0 para colisiones inelásticas

¹Los artículos más recientes donde se resumen los descubrimientos hechos por este acelerador pueden verse en [17, 7, 18, 19]

²Llamada en inglés 'point-like scaling'

³Llamada en inglés 'binary scaling'

A+B, para un b determinado, es dada por [7]:

$$\frac{1}{N_{AB}^{evt}} \frac{d^2 N_{AB}^{\pi^0}}{dy dp_T} = \langle T_{AB}(b) \rangle \frac{d^2 \sigma_{pp}^{\pi^0}}{dy dp_T} = \frac{\langle N_{col.}(b) \rangle}{\sigma^{NN}} \frac{d^2 \sigma_{pp}^{\pi^0}}{dy dp_T}. \quad (3.1)$$

Nótese que:

$$\langle T_{AB}(b) \rangle = \frac{\langle N_{col.}(b) \rangle}{\sigma^{NN}}, \quad (3.2)$$

donde $\langle N_{col.}(b) \rangle$ es el número promedio de colisiones inelásticas nucleón- nucleón con sección eficaz σ^{NN} , $T_{AB}(b)$ es la llamada función de traslape nuclear de Glauber. La función $T_{AB}(b)$ indica el número promedio de colisiones entre N+N en el área transversa de traslape en la colisión A+B para un parámetro de impacto b dado. Este tipo de escalamiento se ha verificado experimentalmente⁴.

La definición del factor de modificación nuclear para el caso de colisión Au+Au, R_{AA} , está dado por [21, 18, 7]:

$$R_{AA}(p_T) = \frac{(1/N_{AB}^{evt}) d^2 N^{A+A} / dy dp_T}{(\langle N_{col.} \rangle / \sigma^{NN}) d^2 \sigma^{p+p} / dy dp_T}; \quad (3.3)$$

básicamente es el cociente de distribuciones invariantes para la producción de una partícula en colisiones A+B con respecto a colisiones N+N normalizada al número de colisiones binarias por evento. En ausencia de modificaciones nucleares a la dispersión dura, R_{AA} será la unidad, con lo que cualquier desviación de $R_{AA}=1$ indicará la existencia de efectos debidos al medio nuclear.

En ocasiones en lugar de usarse R_{AA} , se emplea el cociente que compara la producción de colisiones centrales Au+Au con respecto a colisiones periféricas Au+Au, R_{CP} , cuya definición es [17, 22]:

$$R_{CP}(p_T) = \left(\frac{\langle N_{col.} \rangle (P)}{\langle N_{col.} \rangle (C)} \right) \frac{d^2 N^{A+A} |_{PT} / dp_T d\eta}{d^2 N^{A+A} |_{PT} / dp_T d\eta} \Big|_P \quad (3.4)$$

donde C y P denotan central y periférica respectivamente. La ventaja de este cociente es que no depende del espectro de referencia (p+p), disminuyendo el error sistemático de la medición [17, 22].

3.2. Supresión de hadrones en colisiones centrales Au+Au

Desde el inicio del funcionamiento del colisionador de RHIC han habido un gran número de publicaciones en la literatura científica. El resultado sorprendente de estos experimentos ha sido el extraño comportamiento en la producción de bariones con respecto a mesones en las colisiones centrales de Au+Au [17, 7, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 16, 28].

Los datos obtenidos durante la primera corrida de RHIC a $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV, llevaron al descubrimiento de supresión de producción de hadrones con alto momento transversal ($p_T \geq 2$ GeV/c) en colisiones centrales Au+Au, comparadas con la producción esperada de colisiones nucleón-nucleón. El efecto medido en términos del factor de modificación nuclear R_{AA} , ha sido discutido como una posible consecuencia de la pérdida de energía sufrida por los partones moviéndose en un medio denso (ver Fig. 3.1).

Inesperadamente, se encontró que el cociente R_{AA} está más suprimido para π^0 que para hadrones cargados [21] y que la producción de p y \bar{p} cerca de 2 GeV en colisiones centrales es comparable con la de piones ($p/\pi \sim 1$) [16] (ver Fig. 3.2). A la luz de estos resultados, se encuentra una contradicción con los cocientes $p/\pi \sim 0.1-0.3$ medidos en $p+p$ [29] y e^+e^- [30]. También desde el punto de vista teórico dichos resultados están en desacuerdo; en la fenomenología de QCD perturbativa (pQCD) es conocido que el cociente de las funciones de fragmentación (ver sección 3.3.1) $D_{a \rightarrow p} / D_{a \rightarrow \pi^0}$ es siempre menor que 0.2 para cada partón a [31].

⁴Ver [20] y referencias bibliográficas citadas aquí.

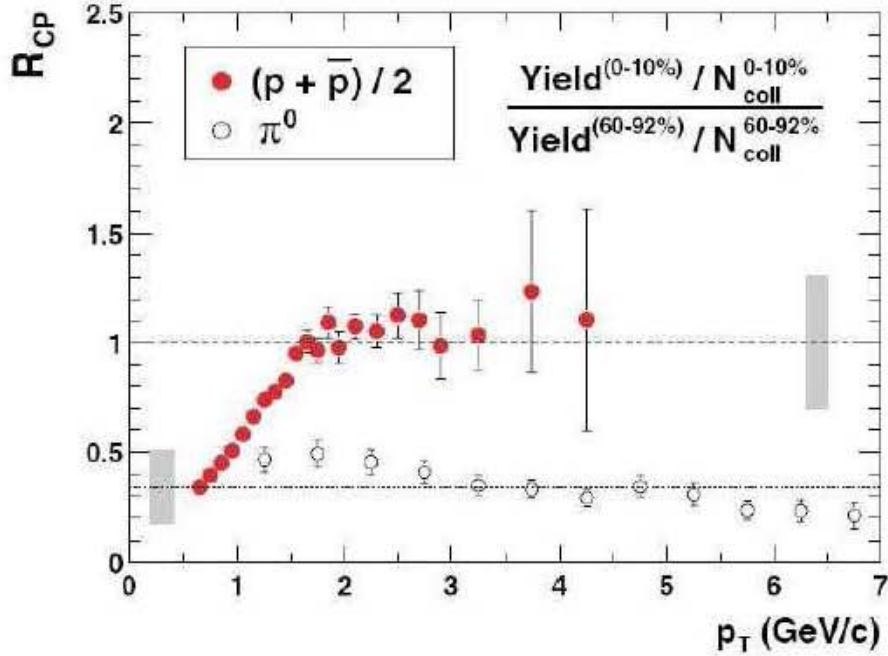


Figura 3.1: Factor de modificación nuclear R_{CP} para $(p + \bar{p})/2$ (círculos llenos) y π^0 . Líneas oscuras muestran los errores sistemáticos de estas cantidades, líneas discontinuas y punteadas indican el escalamiento N_{part} y N_{col} . Figura tomada de [23].

Nótese que el cociente p/π no es constante para todos los valores de momento transversal p_T . El exceso de bariones ocurre únicamente en el intervalo de $p_T \approx 2-5$ GeV [7], y disminuye tomando el valor que se obtiene a partir de las funciones de fragmentación. La interpretación de estos resultados es que los bariones no son producidos de la misma forma como los mesones sobre la región intermedia de momento transversal $p_T \approx 2-5$ GeV.

Las dos principales características que nos interesan en la producción de hadrones en valores intermedios de p_T son[7]:

1. Se presenta un aumento de los cocientes p/π y \bar{p}/π en colisiones Au+Au.
2. El cociente en colisiones periféricas está en acuerdo con las colisiones p+p.

Cabe notar que el efecto de pérdida de energía de los partones cuando se mueven a través del medio no puede ser el causante de estos resultados, ya que la fragmentación de partones no hace diferencia en la pérdida de energía cuando se forman mesones ó bariones. En conclusión, no se esperaban los resultados obtenidos, ya que en ausencia de modificaciones debido a los efectos del medio, la tasa de producción de partículas en procesos de dispersión dura en colisiones entre núcleos estaría dada por la Ec. 3.1. A la luz de estos resultados experimentales, lo que se tenía conocido en hadronización de partones antes del colisionador RHIC debe ser modificado para poder explicar los nuevos efectos hallados.

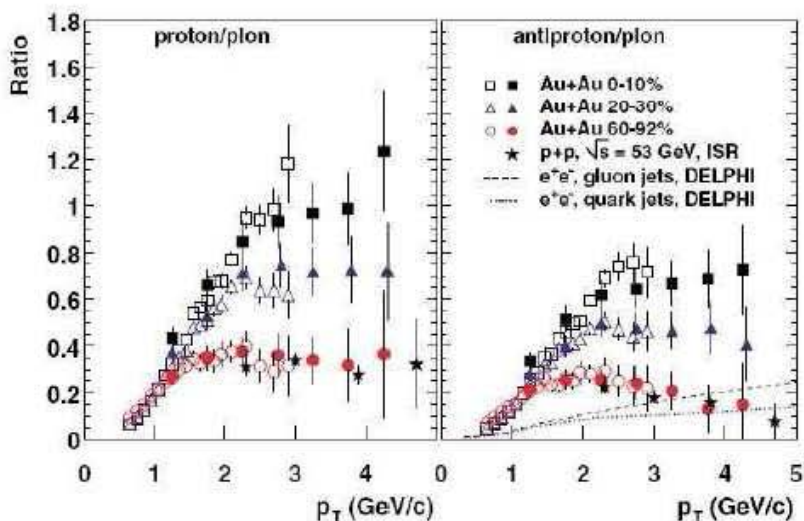


Figura 3.2: Cocientes p/π (izquierda) y \bar{p}/π (derecha) para colisiones Au+Au centrales (0-10%), semi-centrales (20-30%) y periférica (60-92%) a $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Círculos vacíos (llenos) son para π^\pm (π^0), respectivamente. Datos de colisiones $p+p$ a $\sqrt{s_{NN}} = 53$ GeV son mostrados con estrellas. Las líneas discontinuas y punteadas son los cocientes $(\bar{p}+p)/(\pi^++\pi^-)$ en jets de gluones y quarks. Figura tomada de [23].

3.3. Modelo de Recombinación y Fragmentación de partones

En el 2003, Fries et al [32, 31] presentaron una descripción efectiva con consecuencias observables que se acomodan a algunos resultados experimentales tales como el cociente p/π nombrado en la sección anterior. La idea central de este modelo es que dadas las características del cociente p/π , de que a bajos momentos (≈ 2 GeV) éste excede el valor de 1 y a altos momentos ($\approx 6-10$ GeV) se recupera el comportamiento conocido por QCD perturbativa, existen dos procesos en competencia, la *fragmentación* de partones contra la *recombinación* de partones. La fragmentación la podemos interpretar como el modelo que nos indica la probabilidad de que un partón se 'divida' en un hadrón. En recombinación se argumenta que en la colisión se crea un medio térmico con una alta densidad de partones suaves, es decir, con bajo momento transversal, existe una probabilidad de que éstos se 'combinen' para formar hadrones, por lo que se espera en esta aproximación el momento del hadrón es la suma de los momentos de sus quarks de valencia constituyentes. Como resultado, la suma de estos dos mecanismos permite explicar los resultados observados en RHIC concernientes al cociente p/π y otros aspectos. La razón que se da en este contexto al éxito de sus resultados estriba en que a bajos momentos predomina el efecto de recombinación sobre la fragmentación dado que en este caso la densidad partónica es alta en el espacio de fase, mientras que a altos momentos el efecto predominante es la fragmentación ya que la densidad partónica en el espacio fase es baja y por ende, el mecanismo de recombinación se ve empobrecido. Se han hecho ciertas modificaciones a esta propuesta [33, 34] en la que se incluyen efectos mixtos, es decir, que existe una coalescencia de minijets de partones que se combinan con partones que se encuentran en el medio denso formado por la colisión, pero estos detalles no serán tratados en este escrito.

En lo que sigue de esta sección se muestran los detalles cuantitativos más relevantes en esta aproximación.

3.3.1. Fragmentación de partones

La producción de hadrones para p_T alto puede ser descrita por pQCD[35]. El uso de la teoría de pQCD es posible gracias a la propiedad de la libertad asintótica. Si un proceso con una gran transferencia de momento ocurre, entonces la constante de acoplamiento α_s es pequeña lo que justifica la aplicación de pQCD. Con ello podemos calcular por ejemplo la dispersión dura de los constituyentes hadrónicos en procesos de p_T alto. Sin embargo, para el cálculo de distribuciones de momento de partones dentro de hadrones se requiere el conocimiento de la función de onda del hadrón en regiones en las cuáles pQCD no puede ser aplicable, por lo que no estamos en disposición de obtener de manera no perturbativa la función de onda para tales regiones. La aproximación asumida es que se puede factorizar el proceso en dos partes, la probabilidad de encontrar un partón a con una fracción de momento en un hadrón A entre x y dx se denota por una función de distribución $G_{a/A}(x)$. La probabilidad de obtener un hadrón C con una fracción de momento entre z y dz de un partón c es denotada por la función de fragmentación $D_{c \rightarrow C}(z)$. Estas funciones no pueden ser calculadas usando teoría de perturbaciones, por tanto, deben ser obtenidas a partir de mediciones hechas usando algún proceso de referencia. La sección eficaz se construye como una suma incoherente sobre todos los posibles constituyentes de dispersión, cada uno pesado por la apropiada función de distribución partónica y función de fragmentación. En el modelo de partones la dispersión dura es descrita por un subproceso al más bajo orden correspondiente a una dispersión de dos cuerpos, tal como partículas con alto p_T , jets ó producción de fotones. La representación esquemática de la factorización nombrada anteriormente se muestra en la Fig. 3.3. La expresión

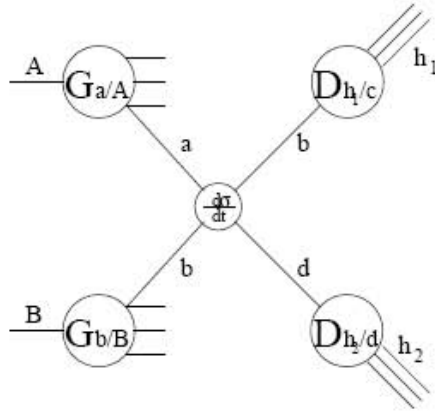


Figura 3.3: Representación esquemática de una reacción con alto p_T factorizada en funciones de distribución partónicas (G), funciones de fragmentación (D) y un subproceso de dispersión dura.

correspondiente para la sección eficaz invariante es⁵:

$$E_C \frac{d\sigma}{d^3P_C}(AB \rightarrow C + X) = \sum_{abcd} \int dx_a dx_b dz_c G_{a/A}(x_a) G_{b/B}(x_b) \quad (3.5)$$

$$\times D_{c \rightarrow C}(z_C) \frac{s}{z_c^2 \pi} \frac{d\sigma}{dt}(ab \rightarrow cd) \delta(s + t + u)$$

Esta expresión puede ser factorizada para un hadrón h con momento P [32, 31]:

$$E \frac{d\sigma}{d^3P} = \sum_a \int_0^1 \frac{dz}{z^2} D_{a \rightarrow h}(z) E_a \frac{d\sigma_a}{d^3P_a} \quad (3.6)$$

La suma corre sobre todas las especies partónicas a que conforman el hadrón h y σ_a es la sección eficaz para la producción del partón a con momento $P_a = P/z$. Luego, la sección eficaz de la producción de partones tiene que ser convolucionada con la probabilidad que un partón a se fragmente en un hadrón h .

En este modelo, las parametrizaciones usadas para las funciones de distribución de los partones en una colisión central fueron⁶ [32, 36]:

$$\left. \frac{dN_a^{pert}}{d^2p_T dy} \right|_{y=0} = K \frac{C}{(1 + p_T/B)^\beta} \quad (3.7)$$

Los parámetros K , C , B y β son dados en la ref.[36] para los tres sabores de quarks livianos y gluones. Para las funciones de fragmentación $D_{a \rightarrow X}$ empleadas son dadas por la llamada parametrización de Kniehl, Kramer y Pötter (KKP)[37].

3.3.2. Recombinación de partones

El hecho de que en el espectro de momento transversal de hadrones no decaiga fuertemente a bajo p_T , hace que el mecanismo de fragmentación sea ineficiente para explicar la producción de hadrones en las colisiones Au+Au.

Si el espacio de fase está lleno con muchos partones, la descripción de un único partón será ineficiente. En el caso más extremo, si los partones son abundantes en el espacio fase, ellos podrían simplemente recombinarse con otro(s) para formar hadrones[31]. Esto significa, por ejemplo, que si se tienen un quark u y \bar{d} con momentos muy cercanos en su valor en el espacio de fase, estos pueden 'pegarse' para formar juntos el pión π^+ . En este escenario, el momento del hadrón será la suma de los momentos individuales de los quarks constituyentes [32, 31]. Más aún al estar el espacio de fase con una población densa de partones, para un hadrón de momento P dado con n quarks de valencia, el momento de cada partón constituyente tendrá en promedio el mismo valor que los demás quarks de valencia que conforman el mismo hadrón, osea P/n . Para aclarar lo anterior, volvamos al ejemplo del pión, si éste se produce a 5 GeV, se tendrán dos quarks constituyentes con 2.5 GeV de momento transversal, cada uno de éstos quarks será más abundante en promedio, que un partón de 10 GeV que produce el pión vía fragmentación. Por supuesto, la recombinación de partones depende de que tan 'cerca' se encuentren distribuidos sobre el espacio fase, con lo que recombinación será suprimida si la densidad del espacio fase es baja.

Los gluones no son grados de libertad dinámicos en esta imagen; los quarks y antiquarks tendrán como consecuencia de lo anterior una masa efectiva.

⁵Esta expresión puede ser modificada usando las correcciones asociadas a la renormalización sobre la constante α_s [35].

⁶Esta parametrización la llamaremos de potencias por razones que serán aclaradas más adelante.

Los espectros de partículas son dados en esta descripción por (ver Apéndice 1 para los detalles sobre como se obtiene esta expresión):

$$E \frac{dN_M}{d^3P} = C_M \int_{\Sigma} \frac{d\sigma_R}{(2\pi)^3} P \cdot u(R) \int_0^1 dx w_a(R; xP^+) |\phi_M(x)|^2 w_b(R; (1-x)P^+) \quad (3.8)$$

$$E \frac{dN_B}{d^3P} = C_B \int_{\Sigma} \frac{d\sigma_R}{(2\pi)^3} P \cdot u(R) \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 w_a(R; x_1P^+) \times |\phi_B(x_1, x_2)|^2 w_b(R; x_2P^+) w_c(R; (1-x_1-x_2)P^+); \quad (3.9)$$

donde $d\sigma_R$ es el elemento de volumen de la hipersuperficie y M y B denotan mesón y barión respectivamente. Las funciones de onda para los mesones y bariones están dadas en la ref. [31]. Dado que en la parte de momento intermedio de p_T se asume que los partones son suaves, Fries et al. [32, 31] escogieron funciones de Wigner correspondientes a un espectro térmico exponencial para una temperatura dada T :

$$w_a(R; p) = \gamma_a e^{-p \cdot v(R)/T} e^{-\eta^2/2\Delta^2} f(\rho, \phi), \quad (3.10)$$

γ_a es el factor de fugacidad de cada partón a , η es la variable de rapidez espacial, Δ es el ancho de la rapidez espacial. Se incluye el flujo longitudinal y radial a través de la parametrización del vector de velocidad de flujo v^μ dado por:

$$v^\mu = (\cosh \eta_L \cosh \eta_T, \sinh \eta_T \cos \phi, \sinh \eta_T \sin \phi, \sinh \eta_L \cosh \eta_T) \quad (3.11)$$

donde $\eta_L(R)$ y $\eta_T(R)$ son las rapidezces del flujo radial y longitudinal, las cuales dependen del punto $R \in \Sigma$ [31].

Cabe notar que en las Ecs. (3.8) y (3.9) no existe una evolución temporal del sistema, es decir, se considera que la formación del hadrón se da de manera instantánea, con ello, la hipersuperficie Σ escogida se considera que es para un tiempo propio fijo τ_f .

Los factores de degeneración C_M y C_B se calculan en este modelo tomando en cuenta solo las degeneraciones asociadas al hadrón en cuestión, es decir, sus grados de libertad, en este caso corresponden al spin.

3.3.3. Resultados del modelo de Recombinación y Fragmentación

Los resultados teóricos del modelo comparadas con el experimento se muestran en la Fig. 3.4 [32, 31].

Del modelo se tienen las siguientes conclusiones con base en su comparación con el experimento:

1. Existen dos regiones cinemáticas, la llamada región ‘suave’, que es la región de bajo e intermedio valor de p_T , es decir, para $p_T \approx 2-5$ GeV; donde el mecanismo predominante es recombinación. La región dura es la región de alto p_T ($\approx 6-10$ GeV), el mecanismo predominante es fragmentación.
2. La competencia que se presenta entre estos dos mecanismos en las dos regiones nombradas, se debe a que la probabilidad es mayor o menor para la fragmentación dependiendo de la región. Fragmentación siempre se ve desfavorecida con respecto a hadronización cuando el espectro es térmico, gracias a que la probabilidad (pesada por el producto de las funciones de Wigner de los partones constituyentes) de que un partón se fragmente es menor que la de que un partón se recombine con otro en el espacio fase:

$$(w_{rec.}(P/n))^n = \exp(-P \cdot v/T) > \exp(-P \cdot u/zT) = w_{frag.}(P/z)$$

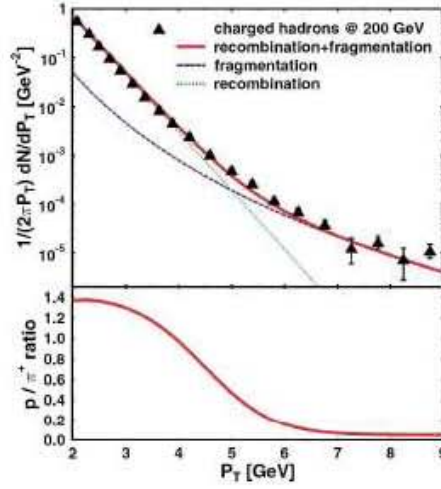


Figura 3.4: Arriba: Comparación entre el espectro de hadrones cargados con alto p_T calculado usando el modelo de recombinación y combinación y los datos experimentales de la colaboración PHENIX para colisiones centrales Au+Au a $\sqrt{s_{NN}}=200$ GeV. Abajo: cociente de protones a π^+ como función de P_T . Abajo de 4 GeV es dominada por recombinación, la región superior a 6 GeV es ganada por fragmentación. Figura tomada de [32].

lo anterior es consecuencia de considerar que la suma de los momentos de los partones da precisamente el momento del hadrón en el esquema de recombinación. Pero cuando se tienen valores grandes de p_T , es decir, cuando el espectro es una ley de potencias dictado por pQCD, el espectro de partículas decae más rápidamente cuando provienen de recombinación que las que se originan de fragmentación

$$dN_{\pi}^{frag} \approx P_T^{-b} \quad dN_{\pi}^{rec} \approx P_T^{-2b}$$

3. En el caso de bajos momentos, el cociente p/π presenta un aumento debido a que se hace más probable que en el espacio de fase se recombinen 3 partones que 2 partones. Esto es debido a que el partón que forma un mesón tendrá un peso probabilístico menor que el partón que forma un barión:

$$w_a^{rec}(P/3) > w_b^{rec}(P/2)$$

4. En la región intermedia de p_T , el cociente barión/mesón depende exclusivamente de los cocientes entre los factores de degeneración:

$$\frac{dN_B^{rec}}{dN_M^{rec}} = \frac{C_B}{C_M}$$

En el caso del cociente p/π en esta región se obtiene:

$$\frac{dN_p^{rec}}{dN_{\pi}^{rec}} \approx 2 \quad (3.12)$$

El modelo ha tenido cierto éxito relativo en otros aspectos que no serán tratados ya que van más allá de este trabajo, tales como el flujo anisotrópico [31]. Sin embargo, existen algunas inconsistencias que hacen que su validez sea limitada y la interpretación física incompleta.

3.4. Críticas al modelo de Recombinación y Fragmentación

En la sección anterior se describieron los aspectos más notables en el modelo de recombinación y sus predicciones en el cociente p/π . Sin embargo, existen varios aspectos de carácter físico que no han sido aclarados por este modelo, los cuáles ya han sido señalados en la literatura científica más reciente (ver por ejemplo Refs. [38, 39]). Estos son:

1. El modelo asume que la formación de hadrones se produce inmediatamente, una vez que se han recombinado los partones. A partir de los resultados de lattice QCD mostrados en la sección 2.2.2, el diagrama de fase mostrado en la fig. 2.4, existe un intervalo finito de temperatura en el que la transición de materia confinada a desconfiada tiene lugar; éste intervalo es pequeño (~ 25 MeV) pero no es nulo. A la luz de estos resultados, el modelo de recombinación está perdiendo información sobre la evolución temporal del sistema. Por ejemplo, el modelo no puede distinguir si en el proceso de hadronización existe la probabilidad de que el tiempo de formación de un pión sea igual, mayor ó menor que el de un protón.
2. La conservación de la energía es violada en el modelo. El momento del hadrón, entendido en este contexto como la suma de los momentos de los quarks de valencia que componen a éste, es violada explícitamente en los cálculos realizados por los autores Fries et al. [31]. Esto es debido a que los valores para las masas de los quarks de valencia para los quarks u y d fueron tomadas como 260 MeV. Estos valores son inconsistentes, si tenemos en cuenta por ejemplo, que un pión π^\pm cuya masa es ~ 140 MeV. La masa de los quarks de valencia suman una masa superior a la del pión en cuestión. Para el modelo de recombinación en su formulación original (mostrada en el apéndice A), es fundamental la conservación del momento pero es inconsistente esta condición a la luz de los cálculos empleados por los autores.
3. El parámetro inverso de la distribución estadística usada, T , Ec. (3.10), que se identifica como la temperatura, para los cálculos hechos en el modelo de recombinación fue tomada alrededor de 175 MeV [31]. Esta temperatura corresponde a energías en las que ocurre el congelamiento químico [15]; el valor de temperatura tomado no es correcto para describir espectros hadrónicos porque es muy alto. Si bien es cierto que cuando finaliza el congelamiento químico la abundancia de partículas es fija, las distribuciones asociadas con los momentos transversos no lo son, ya que subsecuentemente al congelamiento químico se siguen produciendo colisiones elásticas entre los hadrones. Con lo anterior, queremos indicar que la temperatura en la cual ocurre el congelamiento cinético y tanto la abundancia de partículas así como su distribución de momento transversal es fijo, es menor que la asumida en el modelo.
4. Como se indicó en el capítulo anterior, el parámetro inverso está dado por la expresión $T = T_{fo} + m \langle \beta_T \rangle^2$. El modelo de recombinación no indica cuál es la fracción del parámetro inverso de la distribución que proviene ya sea del flujo colectivo del sistema y de la temperatura a la cual se presenta el congelamiento cinético respectivamente.
5. Si bien es cierto que el modelo indica que cuando la población de partones es alta en el espacio fase, estos se recombinan en grupos de dos ó tres para formar ya sea un mesón ó un barión respectivamente. Lo que no es claro en el modelo es cómo se unen, es decir, no existe un potencial efectivo de interacción entre los quarks de valencia que indique cómo se recombinan bajo estas condiciones en el espacio fase. Las interacciones están escondidas bajo el argumento de que la masa efectiva de los quarks constituyentes del hadrón posee dicha información.
6. Luego de que los hadrones son formados, éstos sufren dispersiones elásticas y también inelásticas antes del congelamiento cinético. El hecho de que el modelo considere que la distribución de partículas y momentos es constante una vez que los quarks se recombinan es un error, ya

que ambas distribuciones no son fijas luego de la recombinación. Básicamente esta aproximación elimina tajantemente la etapa de evolución asociada al gas hadrónico. En ésta, ni el potencial bariónico es constante durante la fase de equilibrio químico, así como tampoco lo son los momentos de las partículas durante la fase de equilibrio cinético.

En el siguiente capítulo se presentará un modelo que intente aclarar los numerales 1,5 y 6 descritos anteriormente. Las críticas asociadas a estos numerales, tienen en común el hecho de que la evolución del sistema a medida que se enfría es importante ya que las correlaciones entre los quarks constituyentes no permanecen fijas, es decir, la interacción cambia con el tiempo. Con el ánimo de tratar de incorporar la evolución, se introducirá una probabilidad que dependa del tiempo propio del sistema tal que, el proceso sea más dinámico tal y como se ilustra en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

Modelo estadístico con evolución temporal en colisiones de iones pesados relativistas

En este capítulo se presenta la propuesta de un modelo estadístico en donde la evolución temporal del sistema es tomada en cuenta a través de una función de probabilidad dependiente del tiempo. Para obtener la información sobre el perfil asociado a esta distribución, se usa en primera aproximación una simulación Monte Carlo con base en el modelo denominado ‘*String-Flip*’ [40, 41, 42].

4.1. Evolución temporal en Colisiones de iones pesados relativistas

El modelo de recombinación es una clase muy especial de los llamados modelos estadísticos en colisiones de iones pesados relativistas. En general, el espectro de partículas es obtenido en estos modelos calculando el flujo de partículas que atraviesan una hipersuperficie Σ_f dada, pesando la distribución de partículas sobre la hipersuperficie a través de una función de probabilidad. Por la geometría de la colisión, la hipersuperficie escogida es normalmente parametrizada con las variables de tiempo propio y rapidez espacial (Ecs. 2.6 y 2.7). El elemento de volumen de la hipersuperficie en esta parametrización transforma como:

$$dt dz d^2 x_T = \tau d\tau d\eta d^2 x_T, \quad (4.1)$$

tal que la distribución diferencial de momento de un hadrón h es dada por:

$$E \frac{dN_h}{d^3 P} = \sum_{a,b} \int_{\Sigma_f} \frac{P \cdot u(x_T, \tau, \eta)}{(2\pi)^3} F(x_T, \tau, \eta) \tau d\tau d\eta d^2 x_T \quad (4.2)$$

donde la anterior integral es realizada sobre la hipersuperficie Σ_f , u^μ es el cuadrivector ortogonal a todo elemento en Σ_f , P es el cuadrimomento del hadrón, la suma es realizada sobre todas las posibles combinaciones de los grados de libertad del hadrón (sabor, helicidad, color, etc) y $F(x_T, \tau, \eta)$ es una función de distribución de probabilidad que indica cómo se encuentran repartidas las partículas cuando cruzan la hipersuperficie. Nótese que en principio, esta función depende del tiempo propio. En las aproximaciones usadas en la literatura, normalmente se asume que el tiempo que tarda el sistema en hadronizarse, $\Delta\tau$, es pequeño, tal que se puede considerar que

la hipersuperficie es infinitamente delgada; el modelo de recombinación hace uso de ésta idea [31]. Como se indico en la parte final del capítulo anterior, si bien es cierto que el intervalo de tiempo propio es pequeño, en términos de temperatura dicho intervalo no es nulo tal y como las simulaciones de Lattice QCD han mostrado. Con ello la relajación del sistema es una información perdida en esta aproximación. Implícitamente, la pérdida de la evolución temporal se elimina colocando una función delta de Dirac de la siguiente forma en la Ec. 4.1:

$$E \frac{dN_h}{d^3P} = \sum_{a,b} \int_{\Sigma_f} \frac{P \cdot u(x_T, \tau, \eta)}{(2\pi)^3} F(x_T, \tau, \eta) \delta(\tau - \tau_f) \tau d\tau d\eta d^2 x_T,$$

siendo τ_f el tiempo propio en el cual se produce el congelamiento cinético; la integral sobre el tiempo propio es realizada sin dificultad y convierte a τ_f en un parámetro libre de la teoría que se ajusta con el experimento¹. Es muy difícil hacer una aproximación que tome en cuenta cómo ocurre esta evolución.

Al considerarse que el tiempo de hadronización es pequeño y todo el sistema se hadroniza en τ_f , no existe una diferencia entre los tiempos de hadronización de los mesones y los bariones. La propuesta que se presenta en este trabajo es introducir un modelo estadístico que permita entender el aspecto anterior, ya que si el proceso de hadronización de un hadrón formado no sucede súbitamente para un tiempo propio dado, entonces la evolución temporal para cada especie hadrónica sería diferente. Esto aportaría una mejor comprensión de la naturaleza del cociente p/π ; si hubiese una diferencia en los tiempos de producción entre bariones y mesones significaría que existe una región cinemática donde la producción de una especie hadrónica predomina sobre la otra ya que se pudo producir primero.

Con el ánimo de explorar esta idea, se introduce una función de probabilidad que dependa del tiempo (ó equivalentemente de la temperatura) y la evolución ocurre a lo largo de un intervalo finito de tiempo que tarda la formación de la partícula desde su inicio (cuando los partones alcanzan su equilibrio termodinámico local luego de la colisión) hasta su final (luego de que los hadrones llegan al congelamiento cinético). En principio, este modelo permite comprender de manera cualitativa, qué pasa entre la transición del QGP al HG.

El espectro de hadrones ahora estaría dado por:

$$E \frac{dN_h}{d^3P} = \sum_{a,b} \int_{\tau_0}^{\tau_f} P(\tau) \int_{\Sigma_f} \frac{P \cdot u(x_T, \tau, \eta)}{(2\pi)^3} F(x_T, \eta) \tau d\tau d\sigma, \quad (4.3)$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área espacial de la hipersuperficie Σ_f . La integral sobre el tiempo propio está pesada por un factor probabilístico cuántico, la función $P(\tau)$. Dicha función debe tener la propiedad de indicar cómo se forman los hadrones a lo largo del tiempo, es decir, dada en el espacio fase una alta densidad de partones suaves, cómo se ‘recombinan’ para formar un hadrón; además se espera que esta función de una idea más clara sobre qué sucede entre la fase del QGP a la del HG. El término ‘recombinan’ en este contexto hace referencia a qué tan probable es que en una celda del espacio fase en donde interactúan entre sí quarks y gluones se forme ya sea un barión ó un mesón. Esta probabilidad debe tener en cuenta las interacciones de los constituyentes del QGP (interacciones entre quarks y gluones que posean de manera efectiva las propiedades universales de QCD) formado por la colisión entre núcleos pesados.

A partir del modelo de Bjorken es posible relacionar el tiempo propio τ del sistema con su temperatura T tal como se indicó en la sección 2.2.3, con lo que en este modelo la probabilidad es una función implícita de la temperatura $P = P(\tau(T)) \equiv P(T)$. Con ello, los parámetros libres en el modelo en principio, serían la temperatura inicial y final que definen los límites de la integral sobre la temperatura. Nótese también que al integrar, la hipersuperficie Σ_f tiene un grosor a lo largo del eje temporal, en este sentido es que se toma en cuenta cuantitativamente la evolución del sistema.

¹Fries et al. tomaron un valor para $\tau_f=5$ fm [31].

La hadronización del sistema se da en una región finita de temperatura a lo largo de la expansión del sistema.

Sobre la función de distribución $P(T)$ se imponen restricciones físicas, en particular, esta debe reflejar las propiedades de la interacción cuántica entre los partones y los gluones del medio descrita por QCD. En este trabajo, se considerará un potencial efectivo que simule cómo es la interacción entre los constituyentes del medio y que posea algunos de los principios de QCD. No es una pretensión de esta tesis resolver el problema de manera completa, esto va más allá de los objetivos trazados en el presente escrito.

La información sobre el perfil de la función $P(T)$ se modelará en este trabajo con una simulación Monte Carlo basada en el llamado modelo ‘*String Flip*’ que se describirá en la siguiente sección. La idea básica de este modelo es poder calcular, para una densidad de energía ϵ dada, cuántos bariones ó mesones se forman a partir de partones libres puestos de manera aleatoria en una caja de volumen V . La interacción entre los partones es modelada por un potencial efectivo que indica cómo se unen los partones para formar hadrones. A medida que se cambia el volumen de la caja, cambia la fracción de bariones con respecto a mesones. La ventaja del modelo, es que permite simular una situación en la cuál se analiza la evolución del sistema a medida que cambia la densidad de energía de éste; la simulación Monte Carlo permite estudiar el sistema desde bajas densidades dominada por los hadrones hasta altas densidades de energía donde los quarks se encuentran deconfinados.

4.2. Modelo String Flip

La fenomenología de QCD indica cómo modelar un sistema de muchos cuerpos, tal como lo sería el QGP formado luego de la colisión. Con el ánimo de modelar materia compuesta por quarks a diferentes densidades de energía, el potencial efectivo debe preservar ciertas propiedades observadas en la naturaleza. A muy bajas densidades de energía, los quarks deben ser confinados en hadrones (que denominaremos en este contexto como cúmulos ó en inglés conocidos como ‘clusters’) que sean singletes de color, por lo que debe existir una fuerza confinante entre los quarks que conforman un determinado hadrón. Una vez que la dinámica haya dictado cuáles serán los quarks que son confinados en cierto hadrón, no deben existir fuerzas residuales entre los hadrones formados, es decir, los hadrones formados interactúan débilmente debido al corto alcance de las fuerzas entre nucleones ó dicho de otra forma, los quarks que pertenecen a cúmulos diferentes no interactúan. En el límite de altas densidades, la libertad asintótica exige que la interacción entre quarks sea débil, es decir, la distancia entre quarks es menor que el valor de la distancia confinante entre quarks. En éste regimen la única correlación importante entre quarks será inducida por el principio de exclusión de Pauli y el sistema se comportará como un gas de Fermi compuesto por quarks. Ahora, los quarks son fermiones idénticos, su dinámica debe ser descrita por un Hamiltoniano que sea simétrico en todas las coordenadas de quarks y su comportamiento gobernado por una función de onda antisimétrica. Normalmente, el potencial de muchos cuerpos consiste en la suma de los potenciales individuales de cada uno de los N constituyentes del sistema; sin embargo, este tipo de potencial no satisface los requerimientos indicados anteriormente. Si el potencial de N cuerpos decae a medida que aumenta la separación de quarks, este no generará fuerzas de largo alcance, pero, tampoco permitirá el confinamiento. Por otro lado, si el potencial permite confinamiento, es posible que existan fuerzas de largo alcance. Si el modelo pretende simular confinamiento y que además no existan fuerzas de largo alcance, el potencial debe depender de las N coordenadas de todos los quarks, además debe ser una interacción entre N cuerpos. Por simplicidad se tomará un modelo no relativista, por lo que no se posee simetría quiral. Aunque no satisface la invarianza de Lorentz como tampoco la invarianza de norma bajo $SU(3)_C$, este tipo de modelos han sido útiles para espectroscopia de hadrones. El modelo es construido con quarks que tienen como grados de libertad, el sabor (u y d en este caso) y el color (rojo R , azul B y verde G) [40, 41, 42]. Los quarks son unidos en este caso, a través de resortes (tubos de flujo gluónico) que producen la configuración

de energía mínima del sistema.

Con esto, el hamiltoniano que describirá el sistema es [40, 41, 42]:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{P}_i^2}{2m_i} + \hat{V}(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_N) \quad (4.4)$$

El potencial V de N cuerpos es construido de tal manera que escoge la configuración óptima de quarks en forma de cúmulos que son singletes de color. Por configuración óptima, se quiere indicar aquel conjunto de cúmulos que minimiza el valor del potencial (Ver Fig. 4.1).

En el modelo los gluones son grados de libertad livianos, en el sentido de que su dinámica no pesa

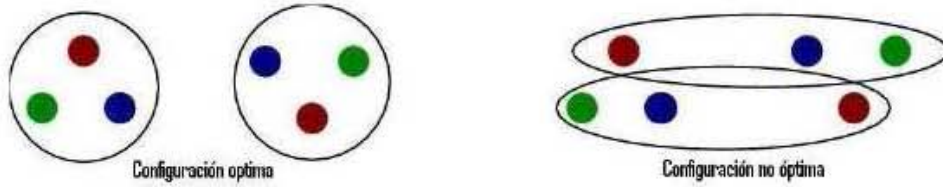


Figura 4.1: Arreglo óptimo de una configuración de cúmulos. En el lado derecho, la configuración hace que la energía sea menor que la del izquierdo debido a que las distancias son más pequeñas, tal que minimizan el valor del potencial.

tanto con respecto a la de los quarks. Cuando un quark es movido, el modelo asume que los tubos de flujo gluónico se ajustan rápidamente a la posición instantánea de los quarks. Un tubo de flujo gluónico debe iniciar en un quark y terminar en otro. El problema básico es decidir qué quarks se van a unir. En principio, Lattice QCD resuelve este problema, pero computacionalmente tiene un gran costo [41]. Es acá donde acudir a los modelos fenomenológicos como el que se presenta puede ser de gran utilidad. El modelo String Flip permite hasta cierto punto dar un avance en este aspecto, ya que puede decidir qué quarks se unen, además de que permite ver la evolución del sistema a medida que cambia la densidad partónica en el espacio fase. En la siguiente tabla se enumeran que propiedades fenomenológicas posee el modelo String Flip y cuáles no:

Propiedad	Modelo String Flip
Confinamiento	Si
Separabilidad entre cúmulos	Si
Invariancia de norma $SU(3)_C$	No
Invariancia de Lorentz y producción de pares $q\bar{q}$	No
Límite de bajas densidades (hadrones aislados)	Si
Límite de altas densidades (Gas ideal de Fermi)	Si

El modelo no hace uso de un potencial de interacción entre nucleón-nucleón, ya que los grados de libertad del hamiltoniano son las variables de posición y momento asociadas a cada quark así como tampoco incluye como grado de libertad el espín del quark e interacciones espín-espín.

Al decir que el modelo es dinámico hay que tener cuidado. Es conocido en materia condensada que para resolver problemas numéricos de dinámica molecular, se resuelve la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para muchos cuerpos usando métodos específicos de cálculo. Acá no se ha resuelto la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo sino que se ha encontrado la solución estacionaria para un parámetro óptimo dado. Implícitamente al hacer este tipo de aproximación, se considera que el sistema ha alcanzado el equilibrio termodinámico de manera adiabática y que el

tiempo que le toma al sistema en alcanzarlo es muy pequeño, tal que la dinámica temporal puede ser despreciada².

4.2.1. Potencial de muchos cuerpos: caso bariónico

En el sistema tenemos dos clases de cúmulos a formar tal que sean singletes de color, los mesones y bariones (antibariones). El potencial que forma bariones y mesones no es el mismo en este modelo. Para formar bariones, consideremos, por ejemplo, los quarks rojos y azules, independientes de su sabor. Se define el potencial de *arreglo óptimo* entre pares de quarks rojo y azul como [40, 41, 42]:

$$V_{RB} = \min_P \sum_{i=1}^A v[r_{iR}, P(r_{iB})], \quad (4.5)$$

donde r_{iR} denota la coordenada espacial del i -ésimo quark rojo, $P(r_{iB})$ es la coordenada del i -ésimo quark azul que se une con r_{iR} y \min representa el valor mínimo. Nótese que el procedimiento de minimización es realizado sobre todas las posibles $A!$ permutaciones de los A quarks azules y el potencial confinante v se asume como un potencial armónico con una constante de acoplamiento denotada por k . Este es [40, 41, 42]:

$$v(r_{iR}, r_{jB}) = \frac{1}{2}k(r_{iR} - r_{jB})^2. \quad (4.6)$$

Las componentes *azul-verde* y *verde-rojo* del potencial de muchos cuerpos son definidas de manera similar a la Ec. 4.5:

$$V_{BG} = \min_P \sum_{i=1}^A v[r_{iB}, P(r_{iG})], \quad (4.7)$$

$$V_{GR} = \min_P \sum_{i=1}^A v[r_{iG}, P(r_{iR})],$$

De esta manera el potencial de muchos cuerpos usado en este modelo para formar bariones es dado por [40]:

$$V_B = V_{RB} + V_{BG} + V_{GR} \quad (4.8)$$

Cabe notar que en la simulación Monte Carlo la condición de que sean singletes de color, no excluye la posibilidad de que se unan más de tres quarks en un mismo cluster tal como lo indica la Fig. 4.2. En la simulación se impuso la condición de que cuando los quarks formen cúmulos (que sean singletes de color) de más de tres quarks no sean contados como bariones, sino como quarks libres.

4.2.2. Potencial de muchos cuerpos: caso mesónico

En el caso de formación de mesones, el potencial de N cuerpos es construido tal que se unan $N = A$ quarks y $N = A$ antiquarks en A cúmulos. Para un par de quarks unidos, el potencial de arreglo óptimo entre un par $q\bar{q}$ (ambos poseen la misma carga de color) se define como [41, 42]:

$$V_{q\bar{q}} = \min_P \sum_{i=1}^A v[r_{i1}, \bar{r}_{j2}], \quad (4.9)$$

donde r_{i1} es la coordenada del i -ésimo quark, \bar{r}_{j2} es la coordenada del j -ésimo antiquark que se unió con el i -ésimo quark. Nótese que esta minimización del potencial es realizada sobre todas

²El operador evolución solución a la ecuación de Schrödinger $U(t, t_0) \approx \mathbf{1}$.

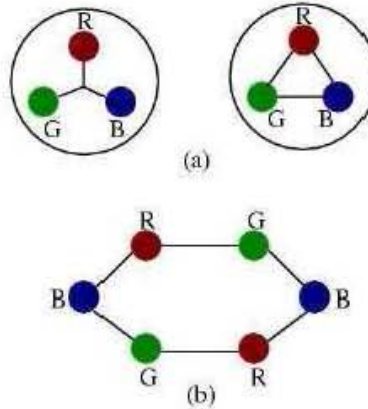


Figura 4.2: Arreglo óptimo de una configuración de cúmulos de bariones. En la parte superior es el cúmulo tres quarks que forman singlete de color, la parte inferior es el cúmulo de 6 quarks que también forman un singlete de color.

las posibles $A!$ formas de obtener A cúmulos a partir de A quarks y A antiquarks. El potencial confinante v se asume que es un potencial armónico con constante de acoplamiento k' . Este es:

$$v(r_{i1}, \bar{r}_{j2}) = \frac{1}{2} k' (r_{i1} - \bar{r}_{j2})^2 \quad (4.10)$$

Nótese que en principio, la constante k de la Ec. 4.6 y esta última constante k' no son las mismas, es decir, la manera como el modelo asume que se acoplan pares quark-antiquark no es la misma que como se unen quarks para formar bariones. Estas constantes son parámetros libres. Con esto el potencial para formación de mesones será:

$$V_M = V_{RR} + V_{BB} + V_{GG}. \quad (4.11)$$

Cabe notar que el potencial de muchos cuerpos usado, tanto en el caso bariónico como mesónico (Ecs. 4.8 y 4.9), es capaz de confinar quarks dentro de cúmulos que sean singletes de color. Una vez que se han unido los quarks dentro de cada cúmulo, no interactúan por el potencial descrito en este modelo con quarks de otro cúmulo, por lo que no se generan fuerzas de largo alcance tipo van der Waals; sin embargo, existe una interacción dinámica residual entre los cúmulos que son singletes de color (hadrones) dentro del modelo y es originada a partir de dos aspectos: el principio de exclusión de Pauli y el intercambio de quarks. El primero genera dentro del cúmulo una fuerte interacción de corto alcance, mientras que el segundo, induce una débil interacción de rango intermedio entre clusters, ya que si por ejemplo, se intercambian dos quarks pertenecientes a dos cúmulos diferentes, el potencial del sistema puede cambiar [40]. Además el potencial es simétrico bajo el intercambio de quarks idénticos que pertenecen a un mismo cúmulo. También el potencial usado es de muchos cuerpos en el sentido de que al moverse un solo quark, el sistema se reordena en una nueva configuración de cúmulos.

4.2.3. Función de onda variacional

El interés en este modelo es estudiar la evolución del sistema desde bajas densidades de energía (hadrones aislados) hasta altas densidades de energía (gas ideal de Fermi). Para tal objetivo, el sistema es descrito por una función de onda variacional de la forma [40, 41, 42]:

$$\Psi_\lambda(X) = e^{-\lambda V(X)} \Phi_{FG}(X), \quad (4.12)$$

donde λ es el parámetro variacional, $V(X)$ es el potencial de muchos cuerpos definido por las Ecs. 4.8 y 4.9, $\Phi_{FG}(X)$ es la función de onda del gas de Fermi y X denota las coordenadas espaciales de los N quarks del sistema. La elección de la función de onda $\Psi_\lambda(X)$ es motivada por los comportamientos del sistema en el límite de bajas y altas densidades: en el límite de bajas densidades, los quarks forman hadrones, tal que el sistema es un gas de Fermi de hadrones que interactúan débilmente por la acción residual explicada anteriormente. Es precisamente el término exponencial en la función de onda variacional el que se vuelve responsable de inducir distribución espacial de quarks en los cúmulos; cuya dinámica es dictado por el modelo de quarks no relativista [43]. Como se mostrará más adelante, en el límite de bajas densidades $\lambda \rightarrow \lambda_0$, siendo λ_0 una longitud típica para la que se encuentran confinados los quarks en el cúmulo [40, 41, 42]. En el límite de altas densidades, las interacciones entre quarks son débiles y el sistema se disuelve en un gas ideal de Fermi formado por quarks³ [40, 41, 42].

El parámetro variacional λ en la función de onda juega un papel central en este modelo ya que como se mostrará en el siguiente capítulo este es función de la densidad partónica del sistema, por lo que el estudio de éste parámetro da una idea cualitativa de cómo cambia el tamaño promedio de los cúmulos que sean singletes de color presentes en el sistema. Intuitivamente, esta interpretación es debida al hecho de que las unidades de este parámetro son inversamente proporcionales a la distancia al cuadrado, por lo que se puede asociar el valor óptimo del parámetro con el radio medio al cuadrado $\langle r_{r.m.s.}^2 \rangle$ en el cúmulo (mean square radius en inglés). Los estudios asociados al comportamiento del parámetro variacional en función de la densidad en otros contextos se han hecho antes y han mostrado la importancia de conocer su comportamiento [40, 41, 42].

Función de onda del gas ideal de Fermi

Para describir un sistema no interactuante de quarks, se usa la función de onda del gas ideal libre dada por el determinante de Slater. Dicho determinante es dado por [40]:

$$\Phi_{FG}(X) = \begin{vmatrix} \phi_{n_1}(\mathbf{x}_1) & \phi_{n_1}(\mathbf{x}_2) & \dots & \phi_{n_1}(\mathbf{x}_N) \\ \phi_{n_2}(\mathbf{x}_1) & \phi_{n_2}(\mathbf{x}_2) & \dots & \phi_{n_2}(\mathbf{x}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n_N}(\mathbf{x}_1) & \phi_{n_N}(\mathbf{x}_2) & \dots & \phi_{n_N}(\mathbf{x}_N) \end{vmatrix}, \quad (4.13)$$

donde $\phi_n(\mathbf{x}_i)$ representa estados propios para la i -ésima partícula libre en una caja con número cuántico \mathbf{n} . Esta construcción asegura la antisimetría de la función de onda ante el intercambio de quarks (antiquarks) idénticos. Para determinar las funciones de onda de una partícula se considera un quark de masa m confinado a una caja tridimensional de tamaño a . Implícitamente se asume que las condiciones de frontera de la función de onda total del sistema no son importantes, sin embargo, se escogen condiciones de frontera antiperiódicas [40, 41, 42]. La energía de cada estado de una partícula es descrita por tres números enteros cuánticos $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$:

$$E_{\mathbf{n}} = \frac{\pi^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2), \quad n_i = 1, 3, 5, \dots \quad (4.14)$$

³En este límite $\lambda \rightarrow 0$ [40, 41, 42].

Cada energía presenta una degeneración g asociada a que existen soluciones pares e impares de la Ec. de Schrödinger en cada una de las tres dimensiones espaciales. Con ello, una función base del sistema es por ejemplo⁴:

$$\phi_{n_x, n_y, n_z}^{+,+, -}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right) \quad (4.15)$$

La elección de esta función de onda también permite ahorrar tiempo en el cálculo computacional realizado en la simulación Monte Carlo. Dado que a través de la función de onda variacional propuesta permite simplificaciones, por ejemplo, realizando una integración por partes, el valor esperado de la energía cinética es⁵:

$$\langle \Psi_\lambda | T | \Psi_\lambda \rangle = T_{FG} + \lambda^2 \langle W \rangle_\lambda, \quad (4.16)$$

donde T_{FG} es la energía cinética de un gas tridimensional de Fermi ($\lambda=0$) y $\langle W \rangle_\lambda$ es:

$$\langle W \rangle_\lambda = \frac{\sum_i \int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n |\Psi_\lambda(x_1, \dots, x_n)|^2 [\partial_i V(x_1, \dots, x_n)]^2}{\int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n |\Psi_\lambda(x_1, \dots, x_n)|^2} \quad (4.17)$$

Cabe notar, que en el límite de altas densidades, es la energía cinética del gas ideal de Fermi la que es mayor con respecto al potencial, en este caso no existe correlación entre los quarks debida a la formación de cúmulos. La energía potencial, en cambio es favorecida cuando la densidad es baja, ya que la longitud de confinamiento genera una correlación entre los quarks que están en un cúmulo. La dinámica entre estos dos efectos generará un valor óptimo del parámetro variacional que minimizará la energía del sistema:

$$\langle H \rangle_{\lambda\rho} = T_{FG}(\rho) + \lambda^2 \langle W \rangle_{\lambda\rho} + \langle V \rangle_{\lambda\rho} \quad (4.18)$$

El parámetro variacional debe ser obtenido calculando los ceros en las derivadas de la energía con respecto a λ :

$$\frac{\partial \langle H \rangle_{\lambda\rho}}{\partial \lambda} = 0 \quad (4.19)$$

Con ello, al calcular la derivada de la energía con respecto a λ , se debe evaluar no solo el valor esperado de energía, sino también, su derivada con respecto a λ . La forma de hacer esto es muy simple dada la función de onda escogida, ya que los dos valores esperados $\langle V \rangle_{\lambda\rho}$ y $\langle W \rangle_{\lambda\rho}$ son funciones locales, por lo que su valor esperado puede ser fácilmente calculado usando los métodos Monte Carlo.

Simulación Monte Carlo

El método Monte Carlo usado en la simulación es el llamado Metropolis. Este algoritmo es basado en un proceso de Markov que genera eventos (ó configuraciones en este caso) en forma estocástica. La cadena de Markov es creada secuencialmente del conocimiento de una configuración dada. Esto es, la $(m+1)$ configuración en la cadena de Markov es generado estocásticamente usando solamente la m configuración, sin requerir conocimiento de la $(m-1)$. Tomemos como ejemplo para ilustrar, la energía potencial. El valor esperado de ésta es dado por:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle_\lambda &= \langle \Psi_\lambda | V | \Psi_\lambda \rangle \\ &= \frac{\int V(x_1, \dots, x_n) |\Psi_\lambda(x_1, \dots, x_n)|^2 d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n}{\int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n |\Psi_\lambda(x_1, \dots, x_n)|^2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

⁴Los signos + y - denotan en este caso la paridad de la función, significando + la función coseno y - la función seno.

⁵La deducción es dada en el apéndice C.

Si se colocan por ejemplo 120 partículas, calcular el anterior valor de expectación requiere la evaluación de una integral 360-dimensional. El algoritmo Metropolis indica que la función de distribución de probabilidad, siendo en este caso Ψ_λ^2 , es aproximada asintóticamente. La principal idea del método es no evaluar la integral por el método de cuadraturas, que en este caso sería casi imposible, sino que en su lugar realizar un pequeño muestreo representativo. Esto es, el valor esperado de la energía potencial se evalúa como:

$$\langle V \rangle_\lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M V(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \quad (4.21)$$

donde la secuencia de las M configuraciones son distribuidas de acuerdo a Ψ_λ^2 . Ahora, cabe notar que para modelar todo el sistema con la función Ψ_λ^2 , lo que se hace es mover un quark y la configuración se redetermina, con el propósito de evaluar el potencial y la función de onda. Esto se hace comparando el cociente de la función de onda evaluada en dos puntos cercanos luego de que se ha movido un quark $\Psi_\lambda^2(x_i + \delta x_i) / \Psi_\lambda^2(x_i)$; si el cociente es mayor que uno, el proceso es aceptado, si no, se genera un número aleatorio entre 0 y 1 y se compara con el cociente, si el cociente es mayor se acepta, en caso contrario se rechaza.

4.2.4. Límite de bajas energías

En el límite de bajas energías como se indicó antes, el sistema se comporta como un gas de hadrones débilmente interactuante. En este caso, la densidad partónica es baja. Con ello, un hadrón considerado como un sistema no relativista de quarks de masa m interactúa a través de un potencial armónico confinante con constante k :

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j=1}^N \frac{1}{2} k (\hat{r}_i - \hat{r}_j)^2 \quad (4.22)$$

donde $N=2$ ó 3 dependiendo si el hadrón en cuestión es mesón ó barión respectivamente. Aquí se considera que la energía del hadrón en el modelo es solo dada por los momentos de los quarks de valencia que lo constituyen y el potencial de interacción entre los mismos, nuevamente, no se hace uso del grado de libertad asociado al espín de cada quark ni interacciones espín-espín entre éstos.

Caso mesónico

Para el caso de un mesón, el hamiltoniano dado en la Ec. 4.21 es:

$$H_{Meson} = \frac{|\vec{p}_1|^2}{2m} + \frac{|\vec{p}_2|^2}{2m} + \frac{1}{2} k_M |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 \quad (4.23)$$

donde se ha tomado la masa de los quarks como la misma. Si se realiza el cambio de variable:

$$\vec{R} = \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2); \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (4.24)$$

con lo que el hamiltoniano del sistema se reescribe en estas coordenadas como ($M = 2m$ es la masa de todo el sistema y $\mu = m/2$ es la masa reducida del sistema):

$$H_{Meson} = \frac{|\vec{P}_R|^2}{2M} + \frac{|\vec{p}_r|^2}{2\mu} + \frac{k_M |\vec{r}|^2}{2} \quad (4.25)$$

Dado que la dinámica del sistema está en la coordenada relativa, se elimina el grado de libertad asociado al centro de masa, asumiendo que está fijo. La ec. de Schrödinger para el mesón queda reducida a:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} + \frac{1}{2} k_M r^2 \right) \Psi_M(r) = E \Psi_M(r) \quad (4.26)$$

donde M denota mesón. Teniendo en cuenta que se está evaluando la configuración de energía mínima, sólo nos concentraremos en el estado base del sistema. La solución a esta ecuación para el estado base es:

$$\Psi_M(r) = \left(\frac{\mu w_M}{\pi \hbar}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{\mu w_M r^2}{2\hbar}\right), \quad (4.27)$$

con energía $E_M = 3/2\hbar w_M$, donde $w_M = \sqrt{\frac{k_M}{\mu}}$. Para la simulación se usan unidades en donde $k_M = m = 1$, en este caso es conveniente, dentro de este sistema de medición, definir una unidad natural de distancia inversa asociada al término exponencial:

$$\lambda_0^M = \frac{\mu w_M}{\hbar} \quad (4.28)$$

En el sistema de unidades descrito antes, $\lambda_0^M = \sqrt{\frac{1}{2}}$. La función de onda de un mesón en términos de cualquier valor que tome el parámetro variacional λ y en el sistema de unidades descrito antes queda como:

$$\Psi_M(r) = \left(\frac{\lambda_M}{\pi}\right)^{3/4} e^{-\lambda_M r^2/2} \quad (4.29)$$

Caso bariónico

Para el caso del barión, el hamiltoniano dado por la Ec. 4.21 es:

$$H_{Barión} = \frac{|\vec{p}_1|^2}{2m} + \frac{|\vec{p}_2|^2}{2m} + \frac{|\vec{p}_3|^2}{2m} + \frac{1}{2}k_B(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^2) \quad (4.30)$$

Tomando el siguiente cambio de coordenadas:

$$\vec{R} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3); \quad \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2); \quad \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3), \quad (4.31)$$

el hamiltoniano del sistema queda como:

$$H_{Barión} = \frac{|\vec{P}_R|^2}{6M} + \frac{|\vec{p}_x|^2}{2m} + \frac{|\vec{p}_y|^2}{2m} + \frac{3}{2}k_B(|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2) \quad (4.32)$$

La solución a la Ec. de Schrödinger para el estado base del barión es:

$$\Psi_B(x, y) = \left(\frac{m w_B}{\pi \hbar}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m w_B}{2\hbar}(x^2 + y^2)\right), \quad (4.33)$$

con energía $E_B = 3\hbar w_B$, donde $w_B = \sqrt{\frac{3k_B}{m}}$. Como en el caso del mesón, el sistema de unidades usado será $k_B = m = 1$, con lo que se define en este sistema λ_0^B :

$$\lambda_0^B = \frac{m w_B}{3\hbar} \quad (4.34)$$

En este sistema de unidades $\lambda_0^B = \sqrt{\frac{1}{3}}$. La función de onda de un barión en términos de cualquier valor que tome el parámetro variacional λ y en el sistema de unidades descrito antes queda:

$$\Psi_B(x, y) = \left(\frac{3\lambda}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{3}{2}\lambda(x^2+y^2)} \quad (4.35)$$

Comparando estas funciones de onda con la función de onda variacional queda claro que la elección del término exponencial para $\lambda = \lambda_0$ describirá apropiadamente a mesones y bariónes dentro del

límite de bajas energías.

La definición asociada con la unidad natural de distancia inversa es importante, ya que si se observa el comportamiento de dicho parámetro cuando la simulación es hecha en el límite de bajas densidades, el parámetro variacional tanto en los mesones como en los bariones debe tender hacia los valores numéricos indicados antes.

4.2.5. Límite de altas energías

La función de onda escogida, tiene solución exacta en el límite de altas densidades de energía. En este caso, el sistema se comporta asintóticamente libre, por lo que la interacción entre quarks es despreciable y la única correlación remanente entre los quarks del sistema proviene del principio de exclusión de Pauli. Con ello, el sistema es descrito por la función de onda de un gas ideal de Fermi no relativista, el cual representa el límite de la función de onda variacional (4.11) cuando $\lambda \rightarrow 0$.

La energía del sistema es calculada analíticamente usando este límite de la función de onda. En este caso, al no existir correlaciones asociadas al potencial de interacción, el valor esperado de la energía coincide con la energía cinética promedio de un gas ideal de Fermi no relativista⁶:

$$\langle H_F \rangle = N \left(m + \frac{3}{10} \frac{k_F^2}{m} \right) \Rightarrow \bar{\epsilon} = m + \frac{3}{10} \frac{k_F^2}{m} \quad (4.36)$$

donde N es el número de partículas, m es la masa del quark constituyente, ϵ es la energía por partícula y k_F es el valor del momento de Fermi, el cual a su vez está relacionado con la densidad de partículas a través de la expresión:

$$\frac{N}{V} \equiv \rho = \frac{g}{6\pi^2} k_F^3, \quad (4.37)$$

g es el degeneramiento del sistema, para este caso es asociado al color y al sabor.

Con todo lo explicado a lo largo de este capítulo, el objetivo es poder indicar para una densidad de energía dada cuántos bariones o mesones se producen. En el siguiente capítulo se muestran los resultados del modelo.

⁶Nótese que se usan unidades naturales ($\hbar = c = 1$).

Capítulo 5

Resultados y discusión

En este capítulo se presentan los resultados concernientes a la simulación Monte Carlo usando el modelo String Flip descrito en el capítulo anterior, en particular, se analiza el comportamiento de los parámetros óptimos como función de la densidad de energía, la distribución normalizada de frecuencia como función del radio medio del hadrón y la probabilidad de formar un determinado hadrón como función de la densidad de energía.

5.1. Comportamiento de los parámetros óptimos

Como se indicó en la sección 4.2.3, la importancia del estudio del parámetro variacional como función de la densidad de energía radica en el hecho de que indica cuál es el tamaño promedio de todos los cúmulos formados en el sistema. Además, como se indicó en la sección 4.2.4, a bajas energías es posible determinar teóricamente qué valor tendrán los parámetros óptimos tanto en el caso de cúmulos de tipo mesónico así como bariónico, por lo que una manera de probar que el código numérico está funcionando correctamente es mirando el comportamiento del parámetro óptimo a bajas energías.

Antes de proseguir, hay que mencionar que como primera aproximación, la simulación fue hecha de tal manera que se crearan cúmulos que fuesen sólo mesones ó bariones. Por la anterior razón se escogió que los cúmulos en cada corrida del programa fuesen todos mesones ó bariones. En cada caso se colocan las mismas condiciones iniciales, es decir, el mismo número de quarks con color y sabor. Por conveniencia para realizar la simulación se definió un cierto sistema de unidades sobre el código numérico donde las constantes $k = m = 1$, la conversión al sistema de unidades naturales ($\hbar = c = 1$) se explica con detalle en el apéndice D.

En la fig. 5.1 se muestran los resultados numéricos del parámetro óptimo en función de la densidad de energía.

El comportamiento del parámetro tanto para el caso mesónico como bariónico decrece monotonamente a medida que la densidad de energía va aumentando. A bajas energías el parámetro óptimo converge al valor esperado tanto para bariones como mesones¹. El comportamiento de los parámetros es el mismo en la figura tal como se espera a partir del modelo, es decir, a medida que la densidad de energía aumenta el parámetro disminuye, esto es debido al hecho de que el sistema va pasando de la etapa de confinamiento a la de deconfinamiento y la interacción entre los constituyentes de cada cúmulo desaparece. El aspecto relevante de estos resultados es que existe una diferencia en el comportamiento del parámetro óptimo entre mesones y bariones. Acorde con los estimativos explicados en el capítulo 2; la transición de fase se presenta alrededor de 5 veces la

¹Téngase en cuenta que para el sistema de unidades $k = m = 1$, los mesones $\lambda_M = 1/\sqrt{2}$ y para bariones $\lambda_B = 1/\sqrt{3}$.

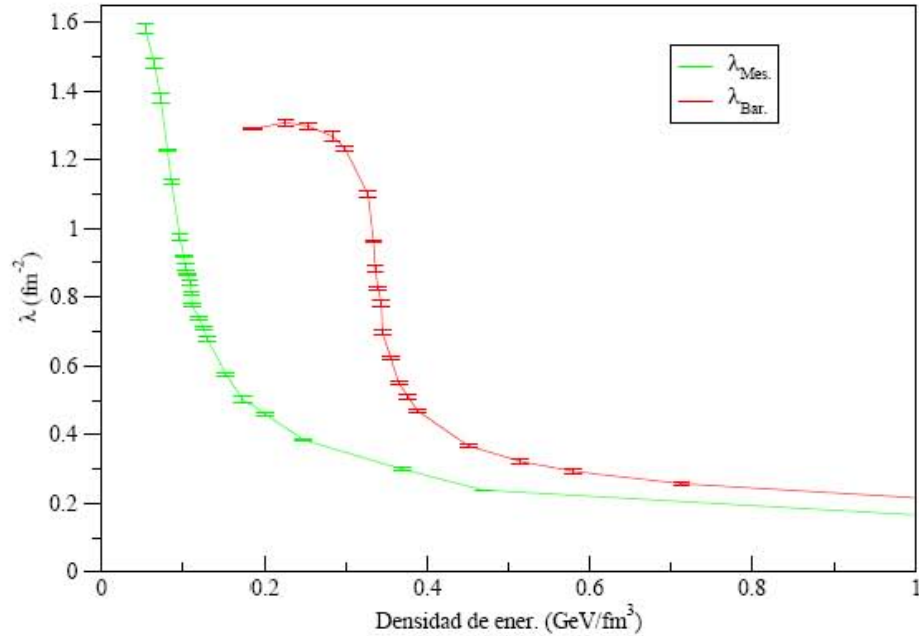


Figura 5.1: Comportamiento de los parámetros óptimos mesónico y bariónico a bajas densidades de energía.

densidad nuclear ϵ_0 ($\epsilon_0 \approx 0.2 \text{ GeV/fm}^3$). En esta simulación en el intervalo de densidad de energía $\approx 0,2 - 0,8 \text{ GeV/fm}^3$, el parámetro mesónico es menor que el parámetro bariónico. A grandes valores de densidad de energía los dos parámetros tienden a cero tal como se indica en la fig. 5.2.

Además de este comportamiento, nótese que el parámetro mesónico decae suavemente mientras que en el caso bariónico hay una región ($\approx 0,3 - 0,45 \text{ GeV/fm}^3$) en donde la caída del parámetro es más súbita.

A partir del modelo no es posible predecir el comportamiento del parámetro óptimo, solo se puede predecir su comportamiento asintótico a bajas densidades y a altas densidades. La interpretación derivada es que el potencial de mesones es diferente al potencial de bariones por lo que su dinámica no debe ser la misma. El flujo gluónico entre los quarks permite que la configuración escogida para los bariones sea más resistente a medida que la densidad de energía aumenta hasta cierta región, mientras que en los mesones, la configuración cambia de tamaño de una manera más gradual.

Es importante denotar que en la simulación, el parámetro mesónico inicia antes que el parámetro bariónico, es decir, para el caso de cúmulos mesónicos la densidad de energía en la que se inició la simulación es menor que en el caso de cúmulos bariónicos. Esto no tiene incidencias en las conclusiones derivadas en esta sección.

El comportamiento óptimo nos indica que de alguna manera la correlación entre partículas no es fija, sino que cambia a medida que el sistema evoluciona, por lo que se puede indicar que una transición de fase está ocurriendo en el sistema.

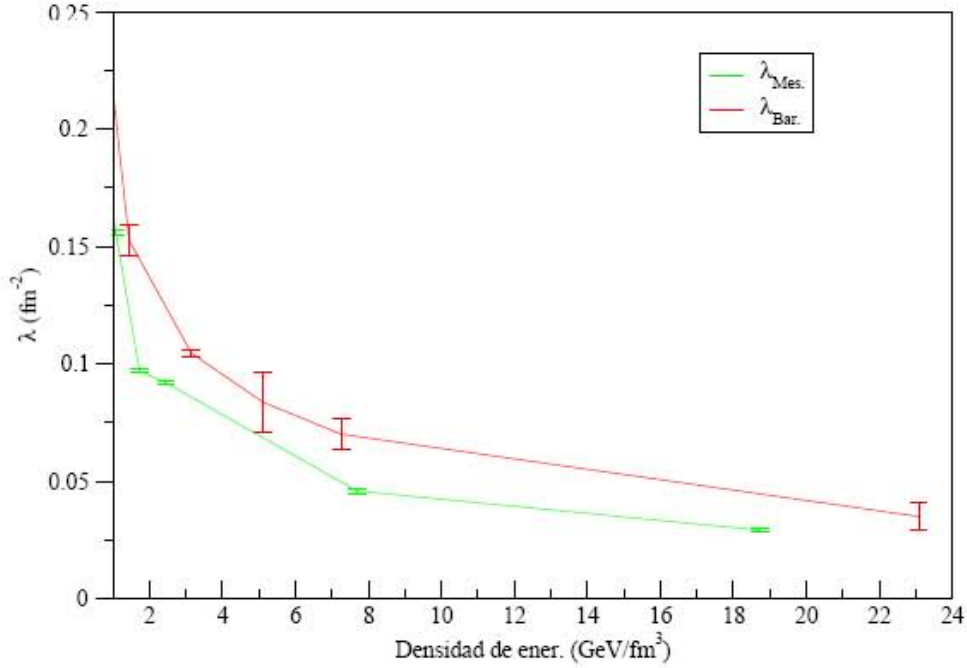


Figura 5.2: Comportamiento de los parámetros óptimos mesónico y bariónico a altas densidades de energía.

5.2. Comportamiento de las funciones de distribución normalizadas

A partir del comportamiento del parámetro variacional, vale la pena estudiar cómo va evolucionando el tamaño del cúmulo a medida que cambia la densidad. Aunque las conclusiones extraídas de la sección anterior dan una buena idea de que una transición de fase está ocurriendo en el sistema, cabe notar que no se puede decir de manera directa que el parámetro óptimo λ sea el inverso del radio promedio cuadrado $r_{r.m.s.}^2$, ya que el valor obtenido para λ es un valor global; en el modelo no se desecha la posibilidad de que existan cúmulos con radios medios mayores o menores que λ^{-1} . Por ello, lo más correcto es hacer un promedio del $\langle r^2 \rangle$ sobre el número total de cúmulos que se construyeron en el modelo. En otras palabras, mirar la distribución de valores que puede tomar el $r_{r.m.s.} = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ para una densidad dada sobre el número total de cúmulos formados. Tengase en cuenta que la definición del $\langle r_{r.m.s.} \rangle$ es:

$$r_{r.m.s.} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\langle \sum_i (r_i - R_{CM})^2 \rangle} \quad (5.1)$$

donde r_i es la posición del i -ésimo quark de valencia, R_{CM} es la posición asociada al centro de masa y la suma es realizada sobre el número de quarks de valencia que posea el hadrón. A bajas energías es posible calcular usando las funciones de onda correspondientes a este régimen (sección 4.2.4 del capítulo anterior), cuál es el valor esperado del $\langle r^2 \rangle$ para cada tipo de cúmulo. En este

caso, el cálculo nos da:

$$\langle r^2 \rangle_M = \int \Psi_M^*(\vec{r}, \lambda_0) \left(\sum_i (r_i - R_{CM})^2 \right) \Psi_M(\vec{r}, \lambda_0) d^3\vec{r} = \frac{3\hbar}{2\sqrt{2k_M m}} \quad (5.2a)$$

$$\langle r^2 \rangle_B = \int \Psi_B^*(\vec{x}, \vec{y}, \lambda_0) \left(\sum_i (r_i - R_{CM})^2 \right) \Psi_B(\vec{x}, \vec{y}, \lambda_0) d^3\vec{x} d^3\vec{y} = \frac{3\hbar}{\sqrt{3k_B m}}, \quad (5.2b)$$

siendo k_B y k_M las constantes del resorte del barión y mesón respectivamente y m la masa del quark constituyente.

Estos valores de $\langle r^2 \rangle$ se puede comparar con el valor más frecuente de las funciones de distribución normalizadas de cada tipo de cúmulo, en el caso donde la densidad de energía es la más baja, esto también verifica si el código numérico funciona bien.

Estas predicciones del modelo pueden ser comparadas con los valores experimentales del $r_{r.m.s.}$. Para el caso de los piones el valor de esta observable es $\langle r_\pi^2 \rangle = (0.438 \pm 0.008) \text{ fm}^2$ [44]. En los protones, esta observable el valor medido es $\langle r_p^2 \rangle^{1/2} = (0.880 \pm 0.015) \text{ fm}$ [45].

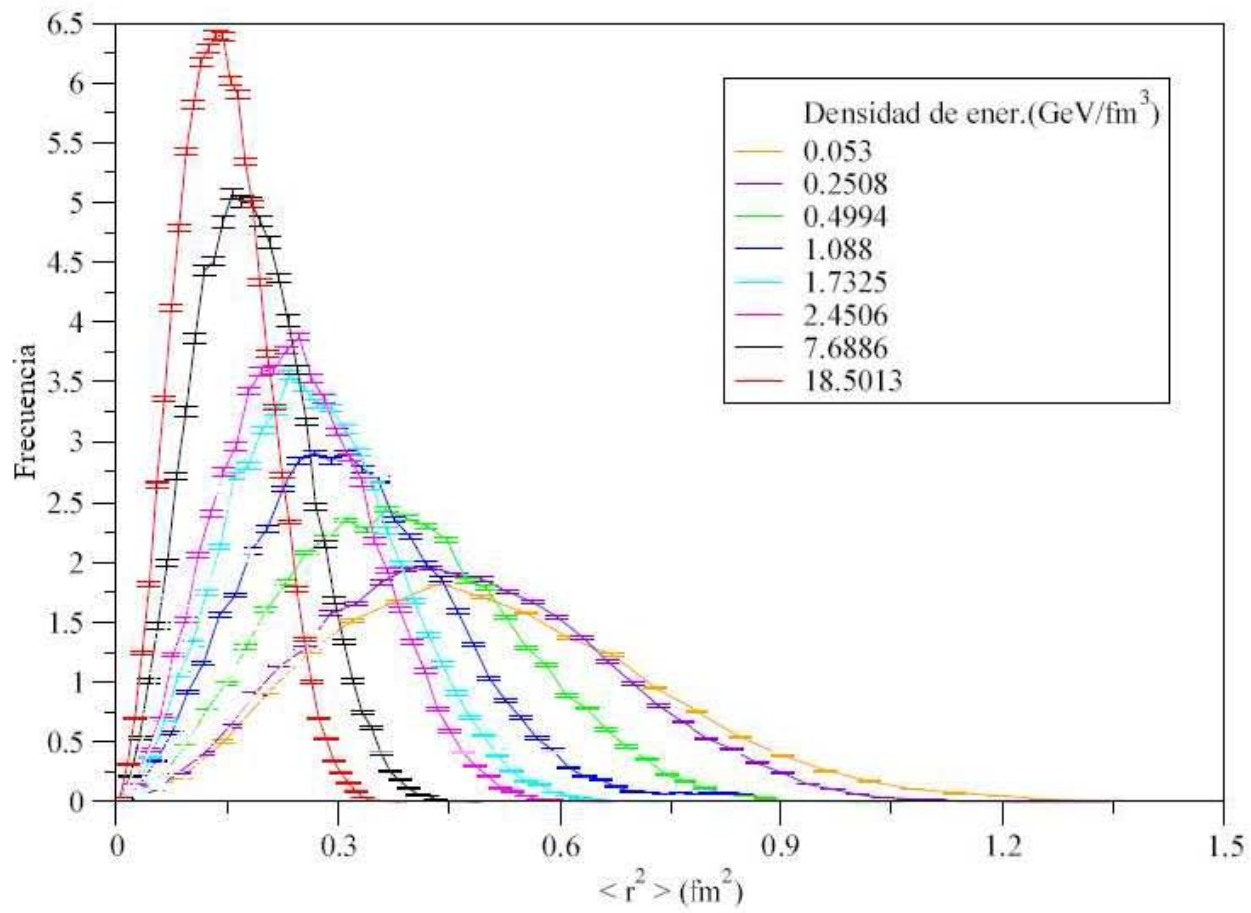
La función de distribución normalizada es hallada a manera de un histograma, es decir, dentro de un intervalo de valores del $\langle r^2 \rangle$, se cuenta cuál fue la frecuencia de que los cúmulos tomaran un cierto número de cúmulos se formasen a cierto valor de $\langle r^2 \rangle$ en un intervalo. El número de cúmulos totales formados a cierta densidad es precisamente la suma de las frecuencias con que ciertos cúmulos tomaron determinado valor del $\langle r^2 \rangle$. En el caso mesónico, esto involucra contar todos los pares formados mientras que, en el caso bariónico, se contó solo en aquellos singletes de tres quarks. Los resultados son presentados en la fig. 5.3 para el caso de mesones y la fig. 5.4 para el caso de bariones.

En ambos casos se muestra que el tamaño promedio de los cúmulos está cambiando, y la tendencia es que el tamaño disminuye conforme la densidad aumenta. El valor medio del $\langle r^2 \rangle$ de las distribuciones de ambos tipos de cúmulos presenta su valor máximo para la densidad de energía más baja, el valor mínimo se presenta para la densidad de energía más grande. Al compararse el valor máximo y mínimo del $\langle r^2 \rangle$, se observa que para ambos tipos de cúmulos, el $\langle r^2 \rangle$ máximo es aproximadamente tres veces mayor que el $\langle r^2 \rangle$ mínimo.

La frecuencia de ocurrencia de que un cúmulo tenga cierto valor dentro de un rango de valores de $\langle r^2 \rangle$ aumenta a medida que la densidad de energía aumenta, en este caso, cuando se comparan en ambos tipos de cúmulos el valor máximo que toma la frecuencia, La interpretación de los resultados asociados con el comportamiento descrito anteriormente de las funciones de distribución normalizadas de ambos tipos de cúmulos, es que a medida que la transición de fase está transcurriendo, dinámicamente los quarks se van acercando unos a otros, tal que la densidad de número de quarks va aumentando en una celda del espacio fase, es decir, el plasma de quarks se está formando gracias al hecho de que la interacción de quarks desaparece y por ende éstos se están acercando más entre sí. Hay que entenderse con cuidado el significado de que la interacción desaparece, ya que para obtener la función de distribución normalizada de radios $\langle r^2 \rangle$ normalizada es construída a partir de los cúmulos formados. Cuando el sistema está deconfinado no se espera que se formen cúmulos, sin embargo, los resultados numéricos a este nivel indican que se forman, con lo que la información debe entenderse con cuidado.

Para saber si se tiene ó no un cúmulo, lo que se debe hallar la función de correlación. Esta función mide cuál es la probabilidad de que dos quarks estén separados una distancia $|\mathbf{r}|$. En el límite del gas de Fermi la función de onda es el determinante de Slater y la función de correlación es bien conocida en este límite [46]. En caso de no existir cúmulos, la función de correlación entre quarks interactuantes debe ser constante; mientras que, la función de correlación par quarks del mismo color y sabor debe mostrar el principio de exclusión de Pauli. En este trabajo no se indican los resultados concernientes a la función de correlación y en el momento de redactar el presente trabajo se está realizando el código que permita calcular esta importante observable.

Figura 5.3: Comportamiento de las funciones de distribución normalizadas para cúmulos mesónicos.



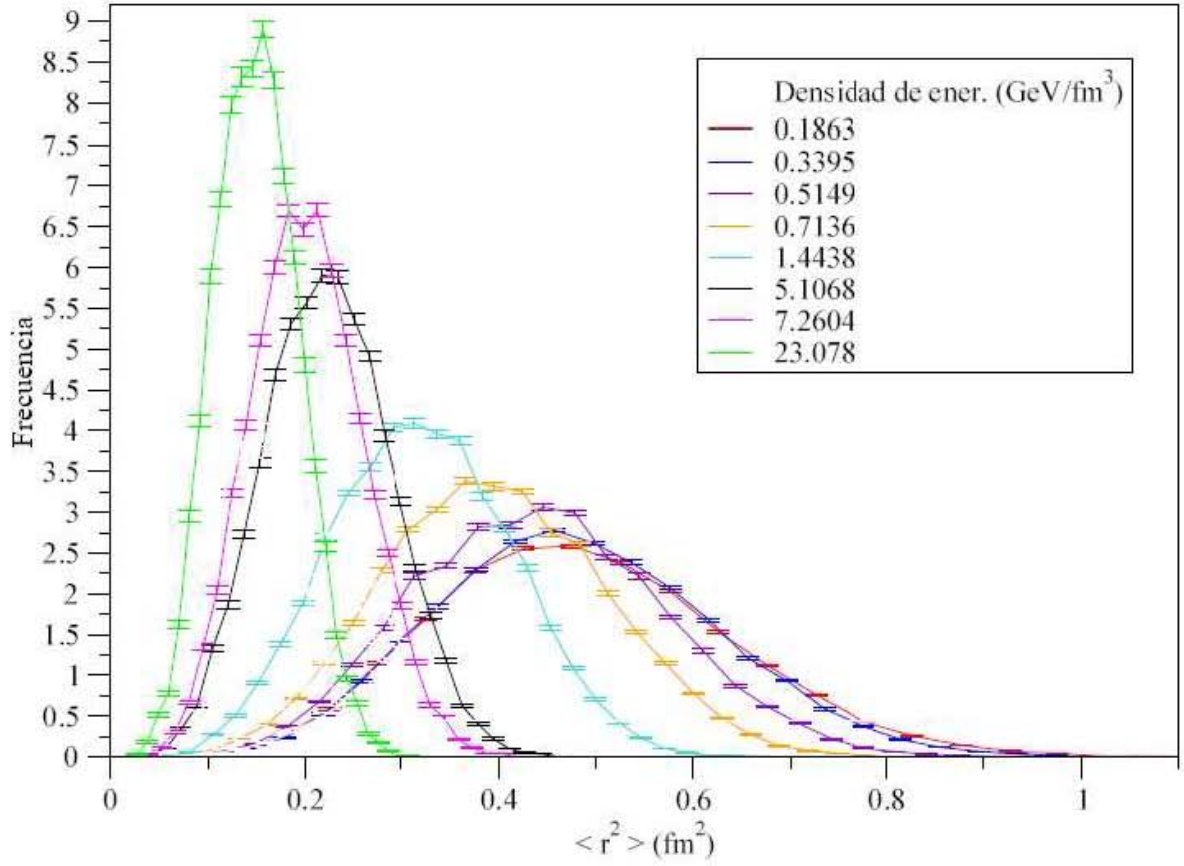


Figura 5.4: Comportamiento de las funciones de distribución normalizadas para cúmulos bariónicos.

El aspecto relevante que se extrae a partir de las gráficas, es que las distancias medias típicas de los cúmulos van cambiando y esto da una idea más clara de que existe una transición de fase gradual desde materia confinada a materia deconfinada.

5.3. Probabilidad de formación de un cúmulo

Retomando la Ec. 4.3, la simulación fue hecha con el ánimo de obtener el perfil de la función $P(\tau)$. Dados los anteriores resultados, se puede formular la pregunta:

¿Qué tanto se parece la función de distribución normalizada del $\langle r^2 \rangle$ para una cierta densidad de energía ϵ a la función de distribución del $\langle r^2 \rangle$ para una densidad de referencia que es tomada como la densidad de energía nuclear ϵ_0 ?

Con el ánimo de resolver esta inquietud, a partir de los resultados de la sección anterior se calcula cuál es el área de traslape entre la distribución normalizada para la densidad de energía ϵ y la distribución normalizada para la densidad de energía de referencia ϵ_0 ². Llamaremos a esta área de traslape entre distribuciones *la probabilidad* de que para una cierta densidad de energía dada se forme un hadrón. Esta interpretación es válida si se tiene en cuenta que la única información que nos indica cuando hay un cúmulo a una cierta densidad es dada por estas funciones de distribución del $\langle r^2 \rangle$.

Los resultados de la probabilidad calculada como el área de traslape como se indicó antes, son mostrados en la fig. 5.5.

Se presenta un decrecimiento monotónico en ambos perfiles de la probabilidad, además, en ambos casos, la probabilidad es siempre cóncava. Como se observa, existe una región en la cuál la probabilidad de producción de bariones es superior a la probabilidad de producción de mesones, indicando así que la evolución del sistema es diferente para ambas especies. Nótese que al igual que en el comportamiento del parámetro óptimo, el perfil de la probabilidad es mayor en el caso de los bariones con respecto a los mesones en la región ubicada entre la densidad nuclear y la densidad a la cual inicia la transición de fase (ver fig. 5.6 que es una ampliación de la fig. 5.5 en la región que se menciona), por lo que los resultados obtenidos con este análisis no entran en contradicción con el comportamiento cualitativo del parámetro λ .

Se tiene que la probabilidad de formar mesones empieza a dominar sobre la probabilidad de formar bariones a partir de $\epsilon \approx 1.1$ GeV y esto tiene sentido si se retoma la idea de que el parámetro óptimo del mesón presenta una caída menos súbita que el parámetro óptimo del barión. También vale la pena mencionar que alrededor de $\epsilon \approx 1$ GeV, las dos probabilidades se intersectan.

De acuerdo con Lattice QCD, en la fig. 2.4, la transición de fase inicia ≈ 0.35 GeV y finaliza ≈ 1.4 GeV. Los resultados de la fig. 5.6 indican que sobre esta región, la probabilidad como función de la densidad de energía cambia, lo cual afecta la producción de especies hadrónicas.

Para hacer conexión con el capítulo 3, se aclara que en este trabajo no se calcula el cociente p/π bajo el modelo estadístico con evolución temporal presentado en este trabajo. El inconveniente para realizar este cálculo estriba en que asintóticamente la probabilidad como función de la densidad de energía tiende a cero (tal como se ilustra en la fig. 5.5), pero en la simulación no alcanza nunca este valor. Esto es debido al hecho de que a este nivel, se vuelve a presentar el mismo problema de si se tiene ó no un cúmulo a altas densidades. Calculando la función de correlación podría resolverse con exactitud este aspecto. Como perspectiva a desarrollarse para una futura publicación, se planea calcular estos dos últimos observables y comparar con el experimento.

²Para este trabajo, en el caso del mesón $\epsilon_0=0.053$ GeV/fm³ y para el barión $\epsilon_0=0.1863$ GeV/fm³

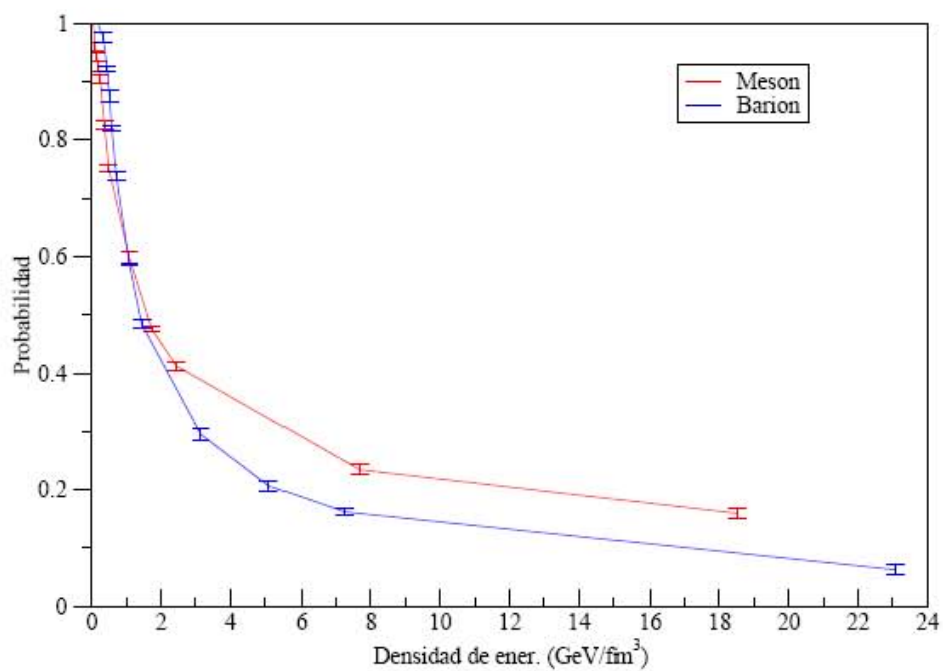


Figura 5.5: Probabilidades de formar cúmulos bariónicos y mesónicos como función de la densidad de energía.

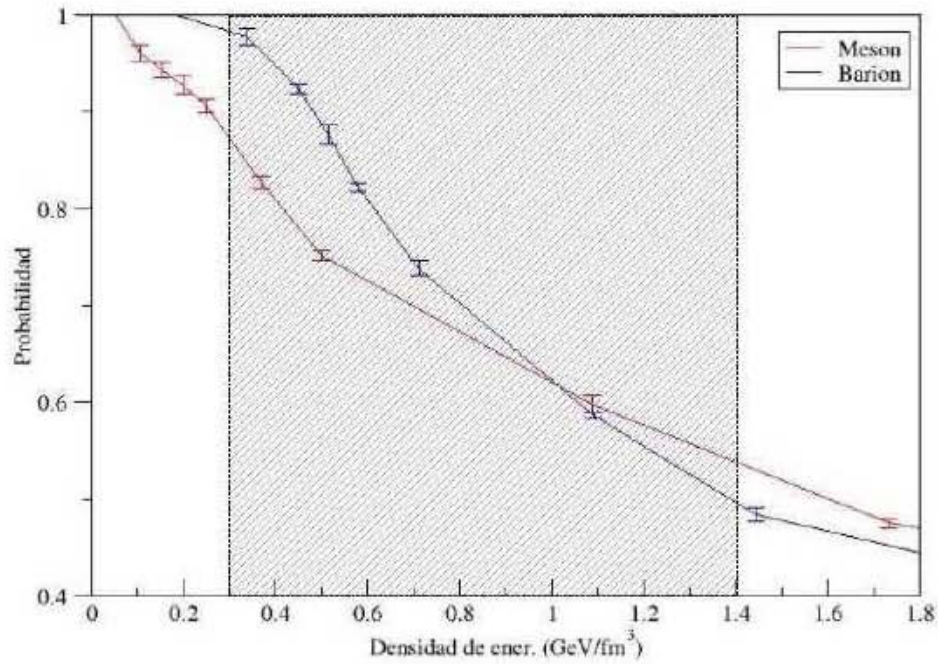


Figura 5.6: Probabilidades de formar cúmulos bariónicos y mesónicos como función de la densidad de energía en el intervalo $\approx 0,2 - 1,8 \text{ GeV/fm}^3$. Acorde con Lattice QCD, el intervalo de densidad de energía donde la transición de fase toma lugar es desde $\approx 0.35 \text{ GeV}$ hasta $\approx 1.4 \text{ GeV}$ (región de sombreada en la gráfica).

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se hizo un análisis fenomenológico de la producción de hadrones en colisiones de iones pesados relativistas. La importancia de estudios como éste radica en el hecho de que actualmente han habido una serie de nuevos descubrimientos experimentales en el colisionador RHIC [16, 17, 7, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28].

Los resultados concernientes al cociente barión/mesón han sido uno de los descubrimientos más relevantes de RHIC, en particular, el cociente p/π en colisiones centrales $Au + Au$, ha mostrado un comportamiento extraño en la región de 2-5 GeV en unidades de P_T , ya que en este intervalo el cociente toma un valor de 1. Este resultado entra en contradicción con resultados experimentales previos en colisiones $p + p$ y e^+e^- [29, 30].

Para tratar de explicar este comportamiento, Fries et al. [32, 31] construyeron un modelo estadístico que permite dar una explicación a los resultados experimentales concernientes al cociente p/π y que se ajustan dentro de cierto margen de error a los observables reportadas por RHIC. El modelo se basa en el hecho de que existen dos mecanismos que compiten entre sí en la formación de hadrones: *recombinación y fragmentación*. El mecanismo de fragmentación consiste en calcular cuál es la probabilidad de que un hadrón posea una fracción de momento zP de un partón original con momento P que se ha fragmentado. El mecanismo de recombinación asume que se tiene un medio denso con una alta densidad de partones suaves, tal que en el espacio de fase están cerca entre sí y existe una probabilidad no nula de que se unan 2 ó 3 quarks constituyentes para formar un hadrón. A bajo P_T (≈ 2 GeV) el mecanismo dominante es el de recombinación dado que población de quarks de valencia en el espacio fase es alta. A alto P_T el mecanismo de fragmentación domina sobre el de recombinación debido a que el espectro es dictado por una ley de potencias a partir de pQCD y en este caso la densidad de quarks libres en el espacio fase disminuye tal que la probabilidad de unirse por recombinación es muy pequeña.

Como se indicó en la sección 3.4, aunque el modelo ha tenido éxito cuando se comparan sus predicciones con el experimento, existen varios aspectos que no son explicados satisfactoriamente. En particular, el modelo asume que el proceso de hadronización en este tipo de colisiones es instantáneo. Los resultados de Lattice QCD entran en contradicción con esta asunción del modelo, ya que éstos han mostrado que existe un intervalo de temperatura en el que la transición de fase de materia confinada a deconfinada es gradual, además una vez los quarks se han recombinado existen aún colisiones elásticas e inelásticas que tienen efectos observables sobre las abundancias de partículas y las distribuciones de momento transversal.

Con el ánimo de tratar de explicar el anterior aspecto, se presenta en esta tesis un modelo estadístico en el cual se incorpore la evolución temporal en una función de distribución de probabilidad que sea función del tiempo propio. Con el ánimo de hacer lo más simple posible un análisis fenomenológico y obtener un perfil de dicha función se realizó una simulación Monte Carlo basada en el modelo String Flip.

El perfil de la probabilidad de producción de un hadrón como función de la densidad de energía usando el modelo *String Flip* fue obtenido en esta tesis. La probabilidad de producción del barión es mayor que la probabilidad del mesón en la región ubicada entre $0,2 - 1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$. Esto es debido a que la dinámica dictada por el potencial de interacción que liga a los quarks a través del flujo gluónico es diferente entre los bariones y los mesones. La probabilidad de formar un barión es menor que la probabilidad de formar un mesón para densidades altas, gracias a que la configuración escogida para los mesones se va diluyendo gradualmente mientras que la de los bariones tiene un comportamiento diferente y su caída es más súbita a partir de cierta región ($0,4 - 0,6 \text{ GeV}/\text{fm}^3$). También se hace un estudio y comparación del comportamiento de los parámetros óptimos como función de la densidad de energía. El parámetro bariónico es mayor que el parámetro mesónico en el mismo intervalo de densidad de energía donde la probabilidad de obtener un cúmulo bariónico es mayor que la de obtener un cúmulo mesónico.

Las funciones de distribuciones del radio medio al cuadrado no son las mismas a medida que la densidad de energía aumenta. Este cambio indica que el sistema se está volviendo más denso gracias a que el radio medio es más pequeño cuando la densidad de energía aumenta. Este resultado indica que está ocurriendo una transición de fase. Se presenta el inconveniente de que no se sabe con exactitud cómo se puede discernir si a altas densidades de energía se tiene realmente un cúmulo ó no, ya que en este régimen el sistema está en el límite de Boltzmann por lo que no es de esperarse que se tengan aún cúmulos de tres ó dos partículas. Por lo anterior, se plantea la importancia de calcular la función de correlación que mide cuál es la probabilidad de que dos partículas se encuentren a una distancia r entre sí.

Este trabajo permite estudiar a partir del modelo fenomenológico la importancia de la evolución del sistema con la densidad de energía en la formación de mesones y bariones. El objetivo a desarrollar en el futuro es poder estimar la fracción barión/mesón como función de la densidad de la energía. Ahora regresando al cap. 4, se planteó la posibilidad de calcular con un modelo estadístico el espectro de hadrones usando la expresión:

$$E \frac{dN_h}{d^3P} = \sum_{a,b} \int_{\tau_0}^{\tau_f} P(\tau) \int_{\Sigma_\tau} \frac{P \cdot u(x_T, \tau, \eta)}{(2\pi)^3} F(x_T, \eta) \tau d\sigma, \quad (6.1)$$

El aspecto relevante para esta tesis era obtener un perfil de la función $P(\tau)$. En el presente trabajo se obtuvo la función $P(\epsilon)$ usando el modelo *String Flip*. Recordando los resultados de la sección 2.2.3, se puede relacionar el tiempo propio con la temperatura y por ende con todas las variables termodinámicas asumiendo al sistema como un fluido perfecto. A mediano plazo se espera reportar este cálculo haciendo la consideración de que el sistema es un fluido perfecto constituido por quarks no masivos, permitiendo así parametrizar la probabilidad $P(\epsilon)$ hallada como $P(\epsilon) = P(\epsilon(T))$. Además de esto, con el ánimo de que este estudio fenomenológico sea lo más simple posible, se asumirá que el factor térmico de ocupación $F(x_T, \eta)$ sea una distribución de tipo Maxwelliano, es decir, $F(x_T, \eta) = e^{-P \cdot u(R)/T}$, siendo T la temperatura del sistema, v^μ es el vector de velocidad de flujo y P^μ es el momento total del hadrón. En el momento se está trabajando en ello. Se puede comparar con el experimento la producción de mesones y hadrones que este modelo predice. La inclusión de la evolución temporal es el aspecto relevante y el ingrediente principal para dar una idea más clara en la evolución espacio-temporal de colisiones de iones pesados relativistas en la etapa de la transición de fase entre materia confinada y deconfinada.

Apéndice A

Formalismo de las funciones de Wigner

Clásicamente, cuando se tienen sistemas de muchos cuerpos, la mecánica estadística nos proporciona un método para conocer a partir de propiedades microscópicas las propiedades macroscópicas de un sistema con gran número de partículas; una partícula es descrita por una función de distribución de probabilidad $P_{Cl}(q, p)$ en el espacio fase y el valor promedio de un observable (función de la posición y el momento) es dado por:

$$\langle A \rangle_{\text{Clásico}} = \int \int A(\vec{r}, \vec{p}) \rho_{Cl}(\vec{r}, \vec{p}) d^3 \vec{r} d^3 \vec{p} \quad (\text{A.1})$$

Los límites en la integración depende de la región del espacio de fase a estudiar de acuerdo a las condiciones macroscópicas del sistema. En el caso de una partícula mecánico cuántica, la descripción se hace a partir de la matriz densidad $\hat{\rho}$ y el valor promedio de un observable, función de las variables canónicamente conjugadas es dado por:

$$\langle A \rangle_{\text{Cuántico}} = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}) \quad (\text{A.2})$$

Si consideramos la siguiente operación sobre un operador cualquiera de una partícula mecánico cuántica, asumiendo que los elementos matriciales $\langle \vec{r}^j | \hat{O} | \vec{r} \rangle$ son conocidos:

$$O_W(\vec{R}, \vec{p}) = \int \left\langle \vec{R} - \frac{1}{2} \vec{r} \left| \hat{O} \right| \vec{R} + \frac{1}{2} \vec{r} \right\rangle \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r} \right\} d^3 \vec{r} \quad (\text{A.3})$$

Esta transformada asigna a cada operador mecánico cuántico de una partícula $\hat{O}(\vec{r}, \vec{p})$ una correspondiente función clásica observable $O_W(\vec{r}, \vec{p})$, dicha transformada es conocida como transformación de Wigner. Ahora, la transformada inversa de esta operación en la prescripción de cuantización de Weyl asigna a cada observable clásico $O_W(\vec{r}, \vec{p})$ los elementos matriciales $\langle \vec{r}^j | \hat{O} | \vec{r} \rangle$ del operador mecánico cuántico \hat{O} en la representación de coordenadas:

$$\left\langle \vec{r}^j \left| \hat{O} \right| \vec{r} \right\rangle = \frac{1}{\hbar^3} \int O_W \left(\frac{1}{2} (\vec{r} + \vec{r}^j), \vec{p} \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{r}^j - \vec{r}) \right\} d^3 \vec{p} \quad (\text{A.4})$$

La transformación de Wigner de los elementos matriciales del operador densidad $\langle \vec{r}^j | \hat{\rho} | \vec{r} \rangle$ da como resultado una función de cuasidistribución clásica en el espacio de fase $\rho_W(\vec{r}, \vec{p})$. Esta última es llamada la función de cuasidistribución de Wigner.

Propiamente hablando $\rho_W(\vec{r}, \vec{p})$ no es una función de distribución clásica en el sentido usualmente conocido de la función $\rho_{Cl}(\vec{r}, \vec{p})$ de la expresión (A.1), esto es debido al conocido hecho de que las funciones de Wigner no necesariamente son definidas positivas¹.

¹Puede verse un ejemplo en [47]

Una de las propiedades más importantes de las funciones de Wigner² es de que el valor esperado de un operador mecánico cuántico es dado en términos de la función de Wigner como[48, 50]:

$$\langle A \rangle_{\text{Cuántico}} = \iint A_W(\vec{r}, \vec{p}) \rho_W(\vec{r}, \vec{p}) d^3\vec{r} d^3\vec{p} \quad (\text{A.5})$$

Siendo $A_W(\vec{r}, \vec{p})$, la función dinámica clásica obtenida al aplicar la transformación de Wigner sobre el operador cuántico $A(\hat{r}, \hat{p})$.

La generalización de esta transformación en el espacio de fase 2n-dimensional es dada en [48, 50].

A.1. Aplicación al modelo de Recombinación

En el modelo de recombinación, el observable a determinar teóricamente es el número de partículas por unidades de momento transversal que es la información que se obtiene a partir del experimento. En este caso el número de partículas de una especie dada (ya sea cualesquiera barión y/o mesón) es determinado por la matriz densidad. En este caso tomaremos por simplicidad la 'deducción' para el caso de recombinación de un quark y un antiquark tal que forman un mesón. Para el caso de un barión el procedimiento es similar. Esta derivación es basada sobre el artículo de Fries et al. [31].

Básicamente para contar el número de mesones producidos en el proceso de recombinación lo que estimamos es el flujo de partones que atraviesa una hipersuperficie Σ espacio-temporal, tal que se recombinaron formando la especie hadrónica nombrada anteriormente. Esta sección está basada en la ref. [32, 31]. Para ello introducimos la matriz densidad del sistema de partones que cuente el número de pares quark-antiquark que serán interpretados como mesones a partir de esta expresión:

$$N_M = \sum_{a,b} \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \langle M; P | \hat{\rho}_{ab} | M; P \rangle. \quad (\text{A.6})$$

Acá $|M; P\rangle$ es un estado de mesón con momento P y la suma es realizada sobre todas las posibles combinaciones de los números cuánticos (sabor, helicidad y color) de los partones de valencia que conforman el meson M . Insertando en la anterior expresión conjuntos completos de coordenadas:

$$N_M = \sum_{a,b} \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} d^3r_1 d^3r'_1 d^3r_2 d^3r'_2 \langle M; P | r_1, r_2 \rangle \langle r_1, r_2 | \hat{\rho}_{ab} | r'_1, r'_2 \rangle \langle r'_1, r'_2 | M; P \rangle. \quad (\text{A.7})$$

Realizando el cambio de variables $x_{1,2} = (r_{1,2} + r'_{1,2})/2$ y $x'_{1,2} = r_{1,2} - r'_{1,2}$; definiendo la función de Wigner de dos partones $W_{ab}(r_1, r_2, p_1, p_2)$ como:

$$\left\langle x_1 - \frac{x'_1}{2}, x_2 - \frac{x'_2}{2} \left| \hat{\rho} \right| x_1 + \frac{x'_1}{2}, x_2 + \frac{x'_2}{2} \right\rangle = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} e^{-ip_1 \cdot x'_1} e^{-ip_2 \cdot x'_2} W_{ab}(x_1, x_2, p_1, p_2), \quad (\text{A.8})$$

Reemplazando (A.8) en (A.7):

$$N_M = \sum_{a,b} \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} d^3x_1 d^3x'_1 d^3x_2 d^3x'_2 \langle M; P | x_1 - \frac{x'_1}{2}, x_2 - \frac{x'_2}{2} \rangle \langle x_1 + \frac{x'_1}{2}, x_2 + \frac{x'_2}{2} | M; P \rangle e^{-ip_1 \cdot x'_1} e^{-ip_2 \cdot x'_2} W_{ab}(x_1, x_2, p_1, p_2). \quad (\text{A.9})$$

Si consideramos en la última expresión el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} R^{(\prime)} &= \frac{x_1^{(\prime)} + x_2^{(\prime)}}{2} & r^{(\prime)} &= x_1^{(\prime)} - x_2^{(\prime)} \\ \tilde{P} &= p_1 + p_2 & q &= \frac{p_1 - p_2}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

²Otras propiedades importantes asociadas a esta transformación son dadas en [48, 49, 50]

A continuación se define la función de onda del mesón dada como [31]:

$$\left\langle x_1 + \frac{x'_1}{2}, x_2 + \frac{x'_2}{2} \middle| M; P \right\rangle = e^{iP \cdot (R+R'/2)} \varphi_M \left(r + \frac{r'}{2} \right). \quad (\text{A.11})$$

La idea física de esta escogencia en particular es basada en el cambio de coordenadas (A.10). En este caso la coordenada $R(R')$ es el centro de masa del sistema y $r(r')$ son las coordenadas relativas. El grado de libertad asociado al centro de masa se considera que es simplemente traslacional, es decir, la función de onda asociada a esta coordenada es solamente la de una partícula libre. La dinámica del sistema es puesta en las coordenadas relativas.

Bajo este cambio de coordenadas y usando la def. (11) la expresión (A.9):

$$N_M = \sum_{a,b} \int \frac{d^3 P}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \tilde{P}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} d^3 R d^3 R' d^3 r d^3 r' e^{iR \cdot (P-\tilde{P})} e^{-ir' \cdot q} \quad (\text{A.12})$$

$$W_{ab} \left(R + \frac{r}{2}, R - \frac{r}{2}, \tilde{P} + \frac{q}{2}, \tilde{P} - \frac{q}{2} \right) \varphi_M \left(r + \frac{r'}{2} \right) \varphi_M^* \left(r - \frac{r'}{2} \right).$$

Usando la representación integral de la delta de Dirac, se integra sobre R' y luego sobre \tilde{P} . Nótese que al hacer esto se considera implícitamente en el modelo que:

$$P = \tilde{P} = p_1 + p_2,$$

es decir, el momento del hadrón se conserva y es la suma de los quarks de valencia que lo conforman. Tomando como definición la función de Wigner del mesón dada por:

$$\Phi_M^W(r, q) = \int e^{ir' \cdot q} \varphi_M \left(r - \frac{r'}{2} \right) \varphi_M^* \left(r + \frac{r'}{2} \right) d^3 r', \quad (\text{A.13})$$

y cambiando $r' \rightarrow -r'$, la expresión (A.12) toma la forma:

$$\frac{dN_M}{d^3 P} = (2\pi)^{-3} \sum_{a,b} \int d^3 R \int \frac{d^3 q d^3 r}{(2\pi)^3} W_{ab} \left(R + \frac{r}{2}, R - \frac{r}{2}, \tilde{P} + \frac{q}{2}, \tilde{P} - \frac{q}{2} \right) \Phi_M^W(r, q) \quad (\text{A.14})$$

Para evaluar esta expresión, se deben modelar las funciones de Wigner del sistema partónico y de un mesón. Se asume que una función de Wigner de dos partones puede ser factorizada en el producto de dos funciones de distribución w clásicas de una sola partícula. Se pierde información en esta aproximación sobre como interaccionan los partones entre sí.

La suma sobre los números cuánticos a y b por un factor de degeneración C_M . Se asume también que la variación espacial de la distribución clásica en el espacio fase es pequeña con lo que se reemplaza $R \pm r/2$ por R . El elemento de volumen se hace manifiestamente covariante de Lorenz dado que:

$$d^3 P d^3 R = d^3 P d^3 R \frac{P \cdot u}{E}, \quad (\text{A.15})$$

siendo $u(R)$ un vector normal temporaloides a la hipersuperficie escogida, E es la energía del vector de cuadrimomento P del hadrón. Teniéndose en cuenta las nuevas aproximaciones introducidas sobre (A.14):

$$E \frac{dN_M}{d^3 P} = C_M \int_{\Sigma} \frac{d^3 R P \cdot u(R)}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} w_a \left(R; \frac{P}{2} - q \right) \Phi_M^W(q) w_b \left(R; \frac{P}{2} + q \right), \quad (\text{A.16})$$

donde a, b denotan ahora los sabores de los quarks de valencia en el meson M y

$$\Phi_M^W(q) = \int d^3 r \Phi_M^W(r, q) \quad (\text{A.17})$$

es la función de Wigner integrada espacialmente del mesón.

La estructura de los hadrones es mejor conocida en el sistema de referencia de momento infinito el cual es descrito en términos de las variables del cono de luz³. Se reintroduce a continuación el momento $k = P/2 - q$ del partón a . Asumiendo la condición on-shell $k_a^2 = m_a^2$ con un valor arbitrario de m_a pero fijo, la integral la podemos reescribir usando:

$$d^3k = d^4k(2k^0)\delta(k^2 - m_a^2) = dk^+ \frac{k^0}{k^+}.$$

Parametrizando $k^+ = xP^+$ con $0 \leq x \leq 1$. Por el formalismo propio de las coordenadas del cono de luz, $k^- \ll k^+$, entonces se cumple que $k^0/k^+ \approx 1/\sqrt{2}$. Por tanto, se tiene que con la anterior parametrización la Ec. (A.16) es ahora:

$$E \frac{dN_M}{d^3P} = C_M \int_{\Sigma} \frac{d^3R P \cdot u(R)}{(2\pi)^3} \int \frac{dx P^+ d^2k_{\perp}}{\sqrt{2}(2\pi)^3} w_a(R; xP^+, k_{\perp}) \times \Phi_M(x, k_{\perp}) w_b(R; (1-x)P^+, -k_{\perp}). \quad (\text{A.18})$$

Al reescribir la función de Wigner en términos de las coordenadas del cono de luz, aproximamos esta por la función de densidad de probabilidad del mesón en las mismas coordenadas:

$$\Phi_M(x, k_{\perp}) = |\bar{\phi}_M(x, k_{\perp})|^2 = |\phi_M(x)\Omega(k_{\perp})|^2,$$

donde se tomo el ansatz de que la función de onda del mesón en las coordenadas de cono de luz puede factorizarse como el producto de la función de onda que depende del momento k_{\perp} por la función de onda que depende solo de la fracción x . Exigiendo que la función de onda cumpla en las coordenadas de cono de luz sea normalizada:

$$\int \frac{dk^+ d^2k_{\perp}}{\sqrt{2}(2\pi)^3} |\bar{\phi}_M(x, k_{\perp})|^2 = 1,$$

la cual se obtiene considerando a priori que los estados de mesón están debidamente normalizados[31]. Ahora, dado que la variación de la función de Wigner del partón es pequeña en k_{\perp} ya que $k_{\perp} \ll P^+$. Esto implica que la función de Wigner $w(R; xP^+, k_{\perp}) \approx w(R; xP^+)$. Usando la condición de normalización de la función de onda de Wigner, finalmente tenemos que la expresión que da la densidad de partículas por unidad de momento es:

$$E \frac{dN_M}{d^3P} = C_M \int_{\Sigma} \frac{d^3R P \cdot u(R)}{(2\pi)^3} \int_0^1 dx w_a(R; xP^+) |\phi_M(x)|^2 w_b(R; (1-x)P^+), \quad (\text{A.19})$$

que es la Ec. (3.8) del capítulo tres.

³Ver apéndice B para las definiciones y las propiedades más relevantes de estas variables.

Apéndice B

Coordenadas del cono de luz

Este apéndice está basado en la ref. [51]. Las coordenadas del cono de luz son definidas como un cambio de variable de las coordenadas usuales (t,x,y,z) . Dado un vector V^μ ($\mu=0,1,2,3$), sus componentes en términos de las coordenadas del cono de luz son definidas por:

$$V^+ = \frac{V^0 + V^3}{\sqrt{2}}, \quad V^- = \frac{V^0 - V^3}{\sqrt{2}}, \quad V^T = (V^1, V^2) \quad (\text{B.1})$$

Los productos escalares de Lorentz son en términos de estas variables:

$$\begin{aligned} V \cdot W &= V^+W^- + V^-W^+ - V_T \cdot W_T \\ V \cdot V &= 2V^+V^- - V_T^2 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Bajo un boost a lo largo de la coordenada z , estas variables transforman como:

$$V'^+ = e^\Psi V^+, \quad V'^- = e^{-\Psi} V^-, \quad V'^T = V^T \quad (\text{B.3})$$

donde el ángulo hipérbolico Ψ es dado por:

$$\Psi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \quad (\text{B.4})$$

siendo v la velocidad del observador S' .

Si se considera una partícula de masa m que es obtenida de hacer un boost Ψ desde el sistema de reposo, su vector de cuádrimomento en estas coordenadas es:

$$\begin{aligned} p^\mu &= \left(p^+, \frac{m^2}{2p^+}, p^T \right) \\ &= \left(\frac{m}{\sqrt{2}} e^\Psi, \frac{m}{\sqrt{2}} e^{-\Psi}, 0^T \right) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Notese que si el boost es grande, únicamente una de las dos componentes de cono de luz de p^μ es grande, las otras componentes son pequeñas.

Apéndice C

Cálculos asociados al modelo String Flip

En orden de encontrar la Ec. 4.15, consideremos unidades donde $\hbar = k = m = 1$. En términos de la función de onda variacional la energía cinética es dada por:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda &= \langle \Psi_\lambda | T | \Psi_\lambda \rangle \\ &= \frac{\int d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n \Psi_\lambda^*(x_1, \dots, x_n) (\sum_i -\frac{1}{2} \partial_i^2) \Psi_\lambda(x_1, \dots, x_n)}{\langle \Psi_\lambda | \Psi_\lambda \rangle} \end{aligned} \quad (C.1)$$

Para facilitar los cálculos definamos:

$$\begin{aligned} Z(\lambda) &= \langle \Psi_\lambda | \Psi_\lambda \rangle \\ F_\lambda(X) &= e^{-\lambda V(X)} \end{aligned} \quad (C.2)$$

donde $X = (x_1, \dots, x_n)$. Con ello:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 (\Psi_\lambda(X)) &= -\frac{1}{2} \sum_i \partial_i (\partial_i [F_\lambda(X) \Phi_{FG}(X)]) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_i \partial_i [(\partial_i F_\lambda(X)) \Phi_{FG}(X) + F_\lambda(X) \partial_i \Phi_{FG}(X)] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_i [(\partial_i^2 F_\lambda(X)) \Phi_{FG}(X) + 2\partial_i F_\lambda(X) \partial_i \Phi_{FG}(X) + F_\lambda(X) \partial_i^2 \Phi_{FG}(X)] \end{aligned} \quad (C.3)$$

Identificando a:

$$\langle T_{FG} \rangle = \frac{\int dX e^{-2\lambda V(X)} \Phi_{FG}(X) (\sum_i -\frac{1}{2} \partial_i^2) \Phi_{FG}(X)}{Z(\lambda)} \quad (C.4)$$

como la energía cinética de un gas tridimensional de Fermi de n partículas, la expresión C.1 queda luego de reemplazar C.4 y C.3 como:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda &= \langle T_{FG} \rangle - \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dX [|\Phi_{FG}(X)|^2 F_\lambda(X) (\partial_i^2 F_\lambda(X)) \\ &\quad + 2\Phi_{FG}(X) F_\lambda(X) \partial_i F_\lambda(X) \partial_i \Phi_{FG}(X)]. \end{aligned} \quad (C.5)$$

Usando ahora las propiedades:

$$\Phi_{FG}(X) \partial_i \Phi_{FG}(X) = \frac{1}{2} \partial_i (\Phi_{FG}^2(X)) \quad F_\lambda(X) \partial_i F_\lambda(X) = \frac{1}{2} \partial_i (F_\lambda^2(X)) \quad (C.6)$$

Se puede reescribir C.5 como:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda = \langle T_{FG} \rangle &- \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dX [|\Phi_{FG}(X)|^2 F_\lambda(X) (\partial_i^2 F_\lambda(X)) \\ &+ \frac{1}{2} \partial_i (F_\lambda^2(X)) \partial_i (\Phi_{FG}^2(X))]. \end{aligned} \quad (C.7)$$

Ahora, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \partial_i [|\Phi_{FG}(X)|^2 (\partial_i (F_\lambda^2(X)))] &= |\Phi_{FG}(X)|^2 \partial_i^2 (F_\lambda^2(X)) + \partial_i (F_\lambda^2(X)) \partial_i (|\Phi_{FG}(X)|^2) \\ \Rightarrow \partial_i (F_\lambda^2(X)) \partial_i (|\Phi_{FG}(X)|^2) &= \partial_i [|\Phi_{FG}(X)|^2 (\partial_i (F_\lambda^2(X)))] - |\Phi_{FG}(X)|^2 \partial_i^2 (F_\lambda^2(X)) \end{aligned} \quad (C.8)$$

Reemplazando esta última identidad en C.7:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda = \langle T_{FG} \rangle &- \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dX \left(\frac{1}{2} \partial_i \left\{ |\Phi_{FG}(X)|^2 (\partial_i (F_\lambda^2(X))) \right\} \right. \\ &\left. + |\Phi_{FG}(X)|^2 \left[F_\lambda(X) \partial_i^2 (F_\lambda^2(X)) - \frac{1}{2} \partial_i^2 F_\lambda^2(X) \right] \right) \end{aligned} \quad (C.9)$$

El primer término de esta expresión se anula por ser de superficie. Si se usa la identidad:

$$-\frac{1}{2} \partial_i^2 F_\lambda^2(X) = -(\partial_i F_\lambda(X))^2 - F_\lambda(X) \partial_i^2 F_\lambda(X) \quad (C.10)$$

Luego la expresión C.9 toma la forma:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda = \langle T_{FG} \rangle &+ \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dX |\Phi_{FG}(X)|^2 (\partial_i F_\lambda(X))^2 \\ &= \langle T_{FG} \rangle + \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dX |\Phi_{FG}(X)|^2 F_\lambda^2(X) \left(\frac{\partial_i F_\lambda(X)}{F_\lambda(X)} \right)^2 \\ &= \langle T_{FG} \rangle + \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dX |\Phi_{FG}(X)|^2 [\partial_i (\ln F_\lambda(X))]^2 \end{aligned} \quad (C.11)$$

Si hacemos uso de la def. de $F_\lambda(X)$ dada en C.2:

$$\partial_i (\ln F_\lambda(X)) = -\lambda \partial_i V(X)$$

Con lo que finalmente la expresión C.11 queda:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda = \langle T_{FG} \rangle &+ \frac{\lambda^2}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dX |\Phi_{FG}(X)|^2 [\partial_i V(X)]^2 \\ &= T_{FG} + \lambda^2 \langle W \rangle_\lambda \end{aligned} \quad (C.12)$$

Apéndice D

Conversión de unidades

Como se indicó en el capítulo 5, para facilitar el trabajo numérico en la simulación se definió un sistema de unidades en donde $k = m = 1$, k y m son la constante del resorte en el modelo String Flip (ver seccs. 4.2.1 y 4.2.2) y la masa del quark constituyente respectivamente. Recordemos que en la sec. 4.2.3, la función de onda empleada para el modelo String Flip es:

$$\Psi_\lambda(X) = e^{-\lambda V(X)} \Phi_{FC}(X). \quad (\text{D.1})$$

Nótese que el parámetro λ tiene unidades como l^{-2} (l denota distancia). Ahora, en la sec. 4.2.4 se indicó que para el mesón M en el sistema de unidades $k_M = m_M = 1$ el parámetro $\lambda_M = 1/\sqrt{2}$ en el límite de bajas energías. Para el barión B dentro del mismo límite y usando el sistema de unidades $k_B = m_B = 1$ el parámetro λ_B tomaba un valor de $1/\sqrt{3}$. A la luz de estos resultados, existen dos escalas de confinamiento dentro del modelo, una para bariones y otra para mesones. Para cambiar de un sistema de unidades a otro, se requiere establecer un patrón común de medición, en este caso, el parámetro natural a definir para distancias será λ ya que como se mostrará más adelante, podemos relacionar las constantes \hbar, c, k, m con éste en cualquiera de las unidades que se midan. Para la energía se usará como parámetro natural la energía del estado base por número de quarks constituyentes (E_0/N con $N=2$ ó 3 dependiendo si es mesón o barión respectivamente). Con el ánimo de poder establecer claramente como se realiza este procedimiento, se encontrarán primero los parámetros λ y la energía del estado base E_0 tanto en el caso mesónico como bariónico.

D.1. Cambio de unidades para el caso mesónico

En el caso mesónico, la unidad de medición básica es definida como $l_M = (\lambda_M)^{-1/2}$. Los parámetros óptimos en el límite de bajas energías pueden ser expresados en términos de \hbar, c, k, m tal como se mostró en la sección 4.2.4. Dentro de este límite, el parámetro λ_M es dado por:

$$\lambda_0^M = \frac{\mu w_M}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{k_M m}{2}} \quad (\text{D.2})$$

El valor esperado del $\langle r^2 \rangle$ para un cúmulo en el límite de baja de energías usando la función de onda dada por la Ec. 4.28 es¹:

$$\langle r^2 \rangle_M^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2} \langle r_M^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3}{4\lambda_M}} = \left(\frac{3\hbar}{2\sqrt{2}k_M m} \right)^{1/2}, \quad (\text{D.3})$$

¹Se ha hecho uso de la definición 5.1 para $\langle r^2 \rangle$

donde r_M^2 denota la coordenada relativa definida por la Ec. 4.23. Se aclara que la importancia de calcular $\langle r^2 \rangle_M$ estriba en el hecho de que existen mediciones experimentales del $r_{r.m.s}$, luego en el sistema de unidades naturales ($\hbar = c = 1$) se fija el patrón de medición a partir del valor experimental de $\langle r^2 \rangle$. Lo anterior es obvio, despejando el producto km en la Ec. D.3 y reemplazando este en la Ec. D.2 se obtiene:

$$l_M = (\lambda_0^M)^{-1/2} = \left(\frac{4}{3} \langle r^2 \rangle \right)^{1/2} \quad (D.4)$$

El valor experimental del $r_{r.m.s}$ del pión es $\langle r_\pi^2 \rangle = (0.438 \pm 0.008) \text{ fm}^2$ [44]. Con ello el patrón de medición es en ambos sistemas de unidades:

$$\begin{aligned} l_M(k = m = 1) &= (\lambda_0^M)^{-1/2} = 2^{1/4} \\ l_M(\hbar = c = 1) &= (\lambda_0^M)^{-1/2} = 0,764 \text{ fm} \end{aligned} \quad (D.5)$$

En el caso de la energía, el valor propio del estado base del hamiltoniano mesónico (Ec. 4.22) es igualado a la masa del pión, ya que es un parámetro conocido experimentalmente. En términos de las constantes del modelo:

$$\frac{E_0^\pi}{2} = \frac{m_\pi}{2} = \frac{3\hbar}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{k_\pi}{m}} \quad (D.6)$$

la masa del pión es apróx. 140 MeV, con lo que en ambos sistemas de unidades el patrón de medición de la energía es:

$$\begin{aligned} \frac{E_0^\pi}{2}(k_M = m = 1) &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{E_0^\pi}{2}(\hbar = c = 1) &= 70 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (D.7)$$

D.2. Cambio de unidades para el caso bariónico

Al igual que en el caso mesónico, la unidad patrón de longitud será tomada como $l_B = (\lambda_B)^{-1/2}$. El procedimiento para deducir las conversiones entre el sistema $k = m = 1$ y el sistema de unidades naturales es el mismo, por lo que en este caso solo daremos las definiciones y los resultados.

En el límite de bajas densidades dentro del modelo String Flip, el parámetro óptimo es dado por:

$$\lambda_0^B = \frac{\mu v_B}{3\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{k_B m}{3}} \quad (D.8)$$

El valor esperado para r_B^2 usando la función de onda dada por la Ec. 4.34 es:

$$\langle r^2 \rangle_B^{1/2} = \langle r_1^2 + r_2^2 \rangle^{1/2} = \lambda_B^{-1/2} = \left(\hbar \sqrt{\frac{3}{k_B m}} \right)^{1/2} \quad (D.9)$$

Nuevamente, despejando el producto $k_B m$ de la Ec. D.9 y reemplazando en la Ec. D.8, se encuentra la relación:

$$l_B = (\lambda_0^B)^{-1/2} = \langle r^2 \rangle_B^{1/2} \quad (D.10)$$

El valor experimental del $r_{r.m.s}$ del protón es $\langle r_p^2 \rangle^{1/2} = (0.880 \pm 0.015) \text{ fm}$ [45]. Luego el patrón de medición es en los dos sistemas de medición:

$$\begin{aligned} l_B(k_B = m = 1) &= 3^{1/4} \\ l_B(\hbar = c = 1) &= 0,880 \text{ fm} \end{aligned} \quad (D.11)$$

Para la energía, el valor propio del estado base del hamiltoniano bariónico (Ec. 4.31) se toma como la masa del protón, con lo que en términos de las constantes del modelo, el valor de energía por número de quarks constituyentes en el estado base es:

$$\frac{E_0^p}{3} = \frac{m_p}{3} = \hbar \sqrt{\frac{3k_p}{m}}. \quad (\text{D.12})$$

La masa del protón es apróx. 940 MeV, con lo que expresando la unidad patrón de la energía para ambos sistemas de unidades tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{E_0^p}{3} (k_B = m = 1) &= \sqrt{3} \\ \frac{E_0^p}{3} (\hbar = c = 1) &= 313.33 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

En resumen, la tabla muestra como se transforma de un sistema de unidades a otro en las unidades patrón definidas anteriormente:

Unidad patrón	Sistema de unidades $k_{\text{had.}} = m = 1$	Sistema de unidades naturales
l_0^p	$2^{1/4}$	0.764 fm
l_0^p	$3^{1/4}$	0.880 fm
$E_0^p/2$	$3/(2\sqrt{2})$	70 MeV
$E_0^p/3$	$\sqrt{3}$	313.33 MeV

Bibliografía

- [1] H. R. Schmith y J. Schukraft. The physics of ultra-relativistic heavy ion collisions. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, 19:1705–1795, 1993.
- [2] C. Y. Wong. *Introduction to High-Energy Heavy Ion Collisions*. World Scientific, 1994.
- [3] J. Letessier y J. Rafelski. *Hadrons and Quark Gluon Plasma*. Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics and cosmology, 2002.
- [4] E. Karsch y E. Laermann. Thermodynamics and in-medium hadron properties from Lattice QCD. *hep-lat/0305025*.
- [5] E. Karsch. Lattice QCD at High Temperature and Density. *Lect. Notes Phys.*, 583:209–249, 2002.
- [6] G. Paic et al. ALICE Collaboration. Alice: Physics performance report, volume I. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, 30(11), 2004.
- [7] PHENIX Collaboration. K. Adcox et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration. *Nucl. Phys. A*, 757:184–283, 2005.
- [8] E. Shuryak. Toward the theory of strongly coupled quark-gluon plasma. *hep-ph/0510123*.
- [9] J. D. Bjorken. Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region. *Phys. Rev. D*, 27:140–151, 1983.
- [10] Korina Zapp. The soft scattering contribution to Jet-Quenching in a QGP and General properties of partonic energy loss, Diploma Thesis, University of Heidelberg, 2005. *hep-ph/0511141*.
- [11] I. R. Kenyon. The Drell-Yann process. *Rep. Prog. Phys.*, 45:1261–1315, 1982.
- [12] ALICE Collaboration. Alice: Physics performance report, volume II. *Versión publicada en <http://alice.web.cern.ch/Alice/ppr/web/PPRVII.html>*, Diciembre 5 de 2005.
- [13] P. Braun-Munzinger et al. Hadron production in Au-Au collisions at RHIC. *Phys. Lett. B*, 518:41–46, 2001.
- [14] P. Braun-Munzinger et al. Chemical Equilibration in Pb+Pb Collisions at the SPS. *Phys. Lett. B*, 465:15–20, 1999.
- [15] I. Tserruya. Relativistic Heavy-Ion Physics: Experimental Overview. *nucl-ex/0204012*.
- [16] PHENIX Collaboration. K. Adcox et al. Centrality dependence of $\pi^{+/-}$, $K^{+/-}$, p , and p^- Production from $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV Au + Au Collisions at RHIC. *Phys. Rev. Lett.*, 88:242301, 2002.

-
- [17] BRAHMS Collaboration. I. Arsene et al. Quark Gluon Plasma an Color Glass Condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment. *Nucl.Phys. A*, 757:1–27, 2005.
- [18] PHOBOS Collaboration. B.B.Back et al. The phobos perspective on discoveries at rhic. *Nucl.Phys. A*, 757:28–101, 2005.
- [19] STAR Collaboration. J. Adams et al. Experimental and Theoretical Challenges in the Search for the Quark Gluon Plasma: The STAR Collaboration’s Critical Assessment of the Evidence from RHIC Collisions. *Nucl.Phys. A*, 757:102–183, 2005.
- [20] David d’Enterria. High p_T leading hadron suppression in nuclear collisions at $\sqrt{s_{NN}}=20$ - 200 GeV: data versus parton energy loss models. *Eur.Phys.J. C*, 43:295–302, 2005.
- [21] PHENIX Collaboration. K. Adcox et al. Suppression of Hadrons with Large Transverse Momentum in Central Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 88:022301, 2002.
- [22] BRAHMS Collaboration. I. Arsene et al. Transverse-Momentum Spectra in Au+Au and d+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}}=200$ GeV and the Pseudorapidity Dependence of High-pT Suppression. *Phys. Rev. Lett.*, 91:072305, 2003.
- [23] PHENIX Collaboration. S.S. Adler et al. Scaling Properties of Proton and Antiproton Production in $\sqrt{s_{NN}}=200$ GeV Au+Au Collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 91:172301, 2003.
- [24] PHOBOS Collaboration. B.B.Back et al. Charged antiparticle to particle ratios near midrapidity in p+p collisions at $\sqrt{s_{NN}}=200$ GeV. *Phys. Rev. C*, 71:021901, 2005.
- [25] STAR Collaboration. C. Adler et al. Disappearance of back-to-back high p_t hadron correlations in central Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ gev. *Phys. Rev. Lett.*, 90:082302, 2003.
- [26] STAR Collaboration. C. Adler et al. Mid-rapidity anti-proton to proton ratio from Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 86:4778, 2001.
- [27] STAR Collaboration. C. Adler et al. Midrapidity Λ and Λ^- Production in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}}=130$ GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 89:092301, 2002.
- [28] PHENIX Collaboration. K. Adcox et al. Measurement of Λ and Λ^- Particles in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}}=130$ GeV. *Phys. Rev. Lett.*, 89:092302, 2002.
- [29] B.Alper et al. Production spectra of $\pi^{+/-}$, $K^{+/-}$, $p^{+/-}$ at large angles in proton-proton collisions in the CERN intersecting storage rings. *Nucl. Phys. B*, 100:237–290, 1975.
- [30] DELPHI Collaboration. P.Abreu et al. Identified charged particles in quark and gluon jets. *Eur. Phys. J. C*, 17:207–222, 2000.
- [31] R.J. Fries et al. Hadron production in heavy ion collisions: Fragmentation and recombination from a dense parton phase. *Phys. Rev. C*, 68:044902, 2003.
- [32] R.J. Fries et al. Hadronization in heavy ion collisions: Recombination and fragmentation of partons. *Phys. Rev. Lett.*, 90(20):202303, 2003.
- [33] V. Greco et al. Parton Coalescence and the Antiproton/Pion Anomaly at RHIC. *Phys. Rev. Lett.*, 90:202302, 2003.
- [34] R.C. Hwa and C.B.Yang. Proton production in d + Au collisions and the Cronin effect. *Phys. Rev. C*, 70:037901, 2004.
-

-
- [35] J.F. Owens. Large momentum transfer production of direct photons, jets, and particles. *Rev. Mod. Phys.*, 59(2):465–501, 1987.
- [36] B.A. Kniehl et al. Fragmentation functions of pions, kaons and protons at next to leading order. *Nucl. Phys. B*, 582(514-536), 2000.
- [37] D.K. Srivastava et al. Large mass dileptons from the passage of jets through a quark gluon plasma. *Phys. Rev. C*, 67(034903), 2003.
- [38] A. Ayala et al. Finite size effects on pion spectra in relativistic heavy-ion collisions. *Phys. Lett. B*, 674:200–204, 2006.
- [39] A. Ayala et al. Proton and pion transverse spectra at rhic from radial flow and finite size effects. *nucl-th/0603039*.
- [40] G. Toledo and J. Piekarewicz. Modeling the strangeness content of hadronic matter. *Phys. Rev. C*, 65(045208), 2002.
- [41] C.J. Horowitz and J. Piekarewicz. Nuclear to quark-matter transition in the string-flip model. *Phys. Rev. C*, 44:2753–2764, 1991.
- [42] C. Horowitz and J. Piekarewicz. Quark models of nuclear matter (I). Basic models and ground-state properties. *Nucl. Phys. A*, 536:669–696, 1992.
- [43] N. Isgur. *Relativistic dynamics and quark-nuclear physics. En Proceedings of the Conference on Relativistic Dynamics and Quark-Nuclear Physics*, eds. M. Johnson y A. Picklesimer. Wiley, New York, 1986.
- [44] NA7 Collaboration. A measurement of the space-like pion electromagnetic form factor. *Nucl. Phys. B*, 277:168–196, 1986.
- [45] R. Rosenfelder. Coulomb corrections to elastic electron-proton scattering and the proton charge radius. *Phys. Lett. B*, 479:381–386, 2000.
- [46] A. L. Fetter y J. D. Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. McGraw-Hill, New York, 1971.
- [47] T. Curtright et al. Features of time independent Wigner Functions. *Phys. Rev. D*, 58:025002, 1998.
- [48] R.L. Liboff. *Kinetic Theory Classical, Quantum and Relativistic Descriptions*. Springer, 2003.
- [49] W. Greiner et al. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer, 1994.
- [50] E.P. Wigner et al. Distribution functions in physics: Fundamentals. *Phys. Rep.*, 106:121–167, 1984.
- [51] J. Collins. Light-cone Variables, Rapidity and All That. *hep-ph/9705393*.
-