



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Complemento Hiperbólico del Nudo
Figura Ocho

TESIS

que para obtener el título de:

Matemática

presenta:

Mariana Rangel Aguilar



Director de tesis: Guillermo Sienrra Loera



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Complemento Hiperbólico del nudo "Figura Ocho" "

realizado por Rangel Aguilar Mariana Paola

con número de cuenta 098522569 , quien cubrió los créditos de la licenciatura en
Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor (a) Propietario Dr. Guillermo Francisco Javier Sienra Loera

Propietario Dr. Antonio Lascurain Orive

Propietario Lic. Silvestre Cárdenas Rubio

Suplente M en C. Francisco de Jesús Struck Chávez

Suplente M en C. Ana Irene Ramírez Galarza

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 22 de mayo del 2006
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICAS

Dra. Edith Corina Sáenz Valadez



Agradecimientos

Agradezco...

A mis padres y a mi hermano quienes siempre han estado conmigo, dandome su apoyo.

A la universidad por las personas tan valiosas que en ella he conocido y por todo lo que en ella he aprendido.

A mi director de tesis por sus enseñanzas y por todas las horas que pacientemente dedico a este proyecto.

A los profesores Antonio Lascurain, Silvestre Cardenas, Ana Irene Ramirez, Francisco Struck y Diana Maya por haber dedicado su tiempo a la revisión de esta tesis.

A Juan Nadal, Alfredo Lopez y Pablo Martínez expertos en las areas de Lingüística, computación y diseño gráfico.

Sin la participación de todod ustedes esta tesis no habría sido la misma.

Contenido

1	Geometría Hiperbólica	4
1.1	Transformaciones de Möbius y su Clasificación	4
1.2	Transformaciones de Möbius en $\widehat{\mathbb{C}}$ y su Clasificación Geométrica	9
1.3	Transformaciones de Möbius y Matrices	10
1.4	Extensiones de Poincaré	11
1.4.1	Extensiones de Poincaré a \mathbb{H}^3	12
1.5	Métrica Hiperbólica en \mathbb{H}^n , Δ	13
1.6	Espacios Geodésicos de \mathbb{H}^3	15
2	Topología	17
2.1	Complejos	18
2.1.1	Orientación de Simplejos	19
2.2	Variedades	20

2.3	Nudos	21
2.4	Nudo Figura Ocho	25
3	Estructura Hiperbólica	27
3.1	Primera Construcción	27
3.2	Segunda Construcción	29
3.3	$M_{\mathbb{H}^3}$ es Variedad	32
3.4	$M_{\mathbb{H}^3}$ es homeomorfo al complemento de K	34
3.4.1	Descripción de los 0-Simplejos	35
3.4.2	Descripción de los 1-Simplejos	36
3.4.3	Descripción de los 2-Simplejos	36
3.4.4	Descripción de los 3-Simplejos	37
3.5	Estructura Hiperbólica del Compemento de K	39
3.5.1	Pegado de Caras y Transformaciones de Möbius	39
3.5.2	Teselación del grupo Γ	43

Introducción

La Teoría de Nudos es parte esencial de la topología y particularmente del estudio de las 3-variedades. Su estudio se remonta a mediados del siglo XIX cuando Lord Kelvin propuso una teoría atómica basada en nudos. Su desarrollo continúa actualmente debido también a sus aplicaciones en física y biología, por ejemplo hay una relación entre el nudo trébol y la forma de la molécula del DNA.

El nudo que nos interesa en esta tesis es el nudo K “figura ocho”, tal como aparece en la figura 2.3 en la página 21.

La Geometría Hiperbólica es un área de las matemáticas que nace de construir un modelo en el que el quinto postulado de Euclides no vale, en esta geometría existen infinitas líneas paralelas, por un punto exterior a una recta dada.

La importancia de esta geometría es reconocida por Poincaré quien la relaciona con los automorfismos $Aut(S^2)$ de la Esfera de Riemann. Estos automorfismos coinciden con las transformaciones de Mobius. Su estructura de grupo es fundamental ya que subgrupos finitamente generados de estas transformaciones son muy importantes en el estudio de Superficies de Riemann y por tal motivo se ha dedicado mucho estudio en entenderlos.

Es también Poincaré quien extiende los automorfismos de la esfera a isometrías del espacio hiperbólico, permitiéndole extender el estudio de superficies al es-

tudio de 3-variedades.

Específicamente, si Γ es un subgrupo discreto de $Aut(S^2)$, entonces Γ actúa isométricamente en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 y podemos formar las clases \mathbb{H}^3/Γ . Decimos que una 3-variedad M admite una estructura hiperbólica si existe $\Gamma \subset Aut(S^2)$ tal que M es homeomorfa a \mathbb{H}^3/Γ .

Así es como Robert Riley [RR] y Troels Jorgensen [J] trabajando independientemente encontraron que el complemento del nudo K , mencionado arriba, tiene estructura hiperbólica. Posteriormente a finales de los '70, W. Thurston [T] encontró otra demostración de este resultado; éste es el tema que exponemos en esta tesis.

Con este resultado, Thurston comenzó su trabajo de entender las estructuras geométricas de las 3-variedades lo cual le llevó a su conjetura de geometrización y que contiene la conjetura de Poincaré, la cual llevaba poco más de 100 años sin poderse demostrar. Utilizando los resultados de Thurston, parece que Grisha Perelman ha demostrado la conjetura de Poincaré.

Plan de la Tesis:

La tesis está dividida en 3 capítulos.

En el primer capítulo se esbozan los conocimientos que necesitaremos posteriormente sobre los elementos del grupo $Aut(S^2)$ y se hace el estudio de su extensión a \mathbb{H}^3 , el espacio hiperbólico de dimensión tres.

En el segundo capítulo se estudia el concepto de complejo simplicial y el concepto de nudo.

En el capítulo tercero se demuestra que la 3-variedad $M = S^3 - K$ tiene estructura hiperbólica (S^3 es la 3-esfera). Esto se demuestra en dos partes:

La primera parte es demostrar que M es el resultado de pegar (de una forma especial) las caras de dos tetraedros truncados, es decir, de dos complejos simpliciales tridimensionales.

La segunda parte consiste en demostrar que los tetraedros están contenidos hiperbólicamente en \mathbb{H}^3 y el pegado de sus caras proviene de un subgrupo discreto de $Aut(S^2)$.

Capítulo 1

Geometría Hiperbólica

1.1 Introducción a las Transformaciones de Möbius y su Clasificación

Empezaremos por definir algunos conceptos básicos para el desarrollo de este capítulo.

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un punto de \mathbb{R}^n

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ la norma euclidiana en \mathbb{R}^n

$\mathbb{H}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$ el semiplano superior n-dimensional.

$S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | |x| = 1\}$ la esfera n-dimensional

$\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ la compactación de \mathbb{R}^n agregando un punto.

Además de que S^n y \mathbb{R}^n son homeomorfos, existe una función $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que se llama proyección estereográfica, donde las esferas se proyectan a dos tipos de subconjuntos [L]:

1.1. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y SU CLASIFICACIÓN

i) Esferas en \mathbb{R}^n que están dadas por $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r\}$, donde $a \in \mathbb{R}^n$ es el centro y $r > 0$ el radio.

ii) Hiperplanos de codimensión 1 en \mathbb{R}^n que están dados por a , un punto en el hiperplano y \vec{r} , un vector normal al hiperplano que denotaremos por $S(a, \vec{r})$.

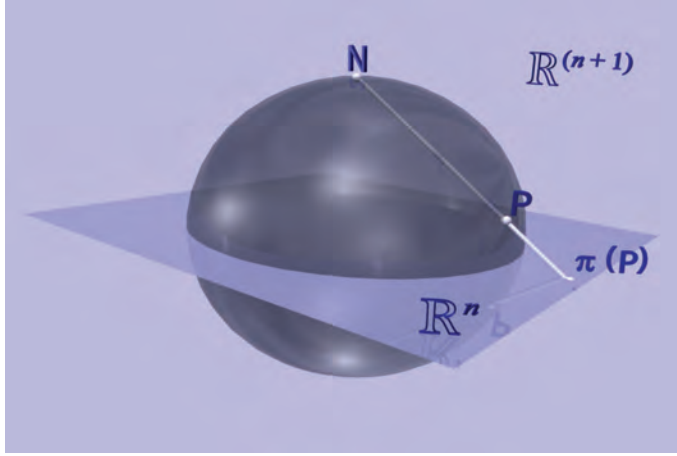


Figura 1.1: Proyección estereográfica y esfera de dimensión n

I) Definimos una **reflexión** ϕ en $S(a, r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\phi(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a), \quad \phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

Además existe $\widehat{\phi} : S^n \rightarrow S^n$ tal que $\widehat{\phi} = \pi^{-1} \circ \phi \circ \pi$, por lo que, si N es el polo norte de S^n , tenemos dos casos:

vemos entonces que cuando $x \rightarrow N \Rightarrow \phi(x) \rightarrow \infty$, por lo que podemos definir $\phi(N) = \infty$ y de la misma forma $\phi^{-1}(\infty) = N$.

II) Definimos una **reflexión** ϕ en el plano $S(a, \vec{r}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, como una función tal que

$$\phi(x) = x + \lambda \vec{r} \quad \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ y es tal que $\frac{1}{2}[x + \phi(x)] \in S(a, \vec{r})$, por lo que

$$\phi(x) = x - 2[(x \cdot \vec{r}) - (a, \vec{r})] \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}$$

Es claro que:

- i) $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ es biyectiva;
- ii) $\phi(p) = p \Leftrightarrow p \in S(a, r)$;
- iii) $\phi^2(x) = x \forall x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$;
- iv) ϕ^{-1} también es una reflexión;
- v) todas las reflexiones son conformes;
- vi) invierten la orientación;
- vii) mandan esferas en esferas [B].

Denotamos los siguientes conjuntos:

1. $R(\widehat{\mathbb{R}}^n) = \{\text{reflexiones en } \widehat{\mathbb{R}}^n\}$
2. $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n) = \{\mathcal{T} : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n \mid \mathcal{T} = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_m : \phi_i \in R(\widehat{\mathbb{R}}^n), \text{ y } m \text{ un número par}\}$ se llama el grupo general de las transformaciones de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Analizaremos ahora algunos elementos de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ cuando $n = 2$.

La homotecia $z \mapsto kz$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{R}$, es la composición de la reflexión en el círculo unitario, seguida de la reflexión en el círculo $S(0, \sqrt{k})$. Geométricamente, podemos observar que la homotecia manda cada círculo con centro en el origen a un círculo con centro en el origen también pero con

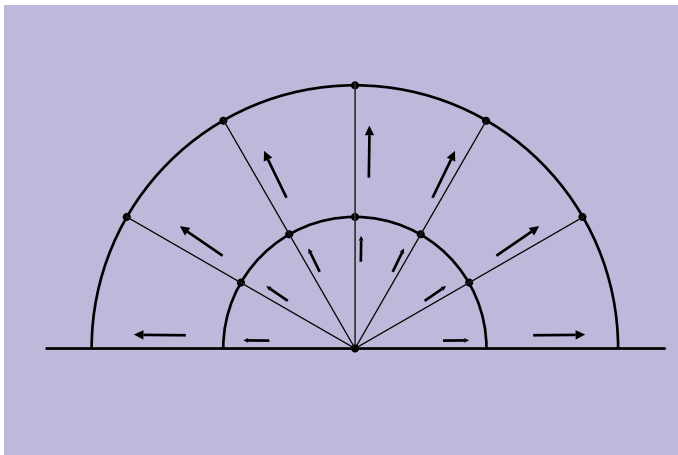


Figura 1.2: homotecia en \mathbb{H}^2 con $k > 1$

radio diferente. De esta manera, podemos ver fácilmente que preserva los rayos que salen del origen.

La translación $z \mapsto z + b$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{R}$, es la composición de la reflexión en la recta $S(0, b)$, seguida de la reflexión en la recta $S\left(\frac{|b|}{2}, b\right)$. Manda rectas en rectas. Una recta que corta al eje x en un punto p , la mandará a una recta que corte al eje x en $p + b$. Análogamente, manda el círculo $S(a, r)$, al círculo $S(a + b, r)$.

La función $z \mapsto \frac{1}{z}$ es una reflexión en el círculo unitario, seguida de una conjugación, ya que $\frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$.

La rotación $z \mapsto e^{i\theta} z$ se puede ver como la reflexión en el eje x , seguida de la reflexión en una recta que pase por el origen y por $e^{i\frac{\theta}{2}}$, con lo que se obtiene $z \mapsto e^{i\theta} \bar{\bar{z}} = e^{i\theta} z$. Las rotaciones mandan rectas en rectas y círculos en círculos.

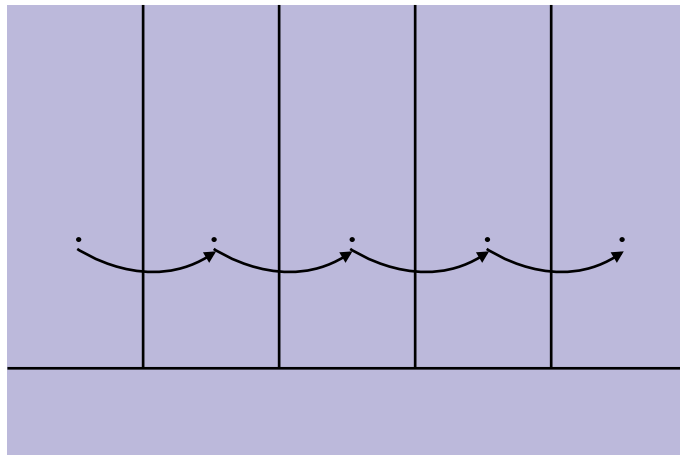


Figura 1.3: translación en \mathbb{H}^2

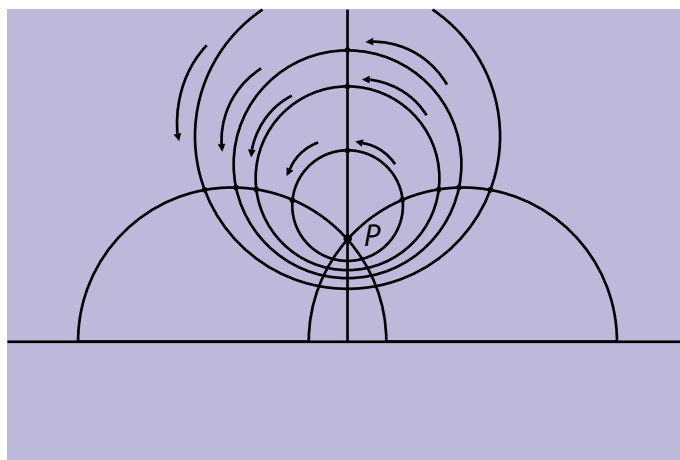


Figura 1.4: rotación en \mathbb{H}^2

La loxodrómica $z \mapsto e^{i\theta} kz$ es composición de la homotecia y la rotación. Tiene dos puntos fijos, $\vec{0}$ e infinito. Si $k > 1$, entonces 0 es repulsor e ∞ es atractor.

Estas transformaciones se extienden a $S^2 = \widehat{\mathbb{C}}$, vía la proyección estereo-

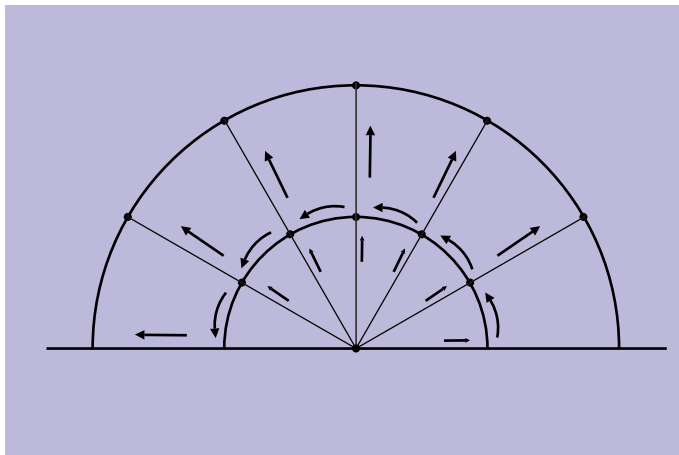


Figura 1.5: transformación loxodrómica en \mathbb{H}^2

gráfica, por ser composiciones de reflexiones. Cada una de estas transformaciones tiene la propiedad de mandar círculos de $\widehat{\mathbb{C}}$ a círculos de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Los ejemplos que hemos mencionado son casos particulares de transformaciones de la forma

$$\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $z, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Esta última condición garantiza que la transformación \mathcal{T} no sea constante y que c y d no sean cero simultáneamente.

1.2 Transformaciones de Möbius en $\widehat{\mathbb{C}}$ y su Clasificación Geométrica

En esta sección veremos algunas características geométricas de las transformaciones de Möbius $\mathcal{T} \in GM(\widehat{\mathbb{C}})$, definidas como composición de dos reflexiones $\mathcal{T} = \phi_1 \circ \phi_2$, donde ϕ_1 es la reflexión generada en alguna S_1 esfera $S_1 \subset \widehat{\mathbb{C}}$, y ϕ_2 es la reflexión en otra esfera S_2 de $\widehat{\mathbb{C}}$. ϕ_1 y ϕ_2 son reflexiones

en las esferas S_1 y S_2 de $\widehat{\mathbb{C}}$) respectivamente

(i) \mathcal{T} es **parábólica** si S_1, S_2 se intersecan en un punto, es decir, son tangentes. El punto de intersección es punto fijo de \mathcal{T} ; véase el ejemplo de la translación en la página 7.

(ii) \mathcal{T} es **elíptica** si S_1, S_2 se intesecan en dos puntos. Estos puntos son los puntos fijos de \mathcal{T} ; véase el ejemplo de la rotación en la página 7.

(iii) \mathcal{T} es **hiperbólica** si S_1, S_2 no se intersecan. Tiene dos puntos fijos que son un atractor y un repulsor. Véase el ejemplo de la homotecia en la página 7.

(iv) Consideremos una cuarta clase, la composición de (ii) y (iii). Se dice que \mathcal{T} es **loxodrómica** si se aplican 4 reflexiones en una configuración específica de los 4 círculos, y también tiene un atractor y un repulsor [L]. Véase el ejemplo de la página 8.

Esto clasifica todas las posibilidades de elementos en $GM(\widehat{\mathbb{C}})$.

1.3 Transformaciones de Möbius y Matrices

De las fórmulas para reflexiones en $R(\widehat{\mathbb{C}})$, se puede ver que a cada transformación de Möbius \mathcal{T} le corresponde una función de la forma $\mathcal{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, a la cual podemos asociar dos matrices de la forma

$$\mathbf{M}_{\mathcal{T}} = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc = 1$. Este grupo de matrices se conoce como $SL(2, \mathbb{C})$. Identificando $\pm Id$ en un solo punto, es decir $SL(2, \mathbb{C}) / \pm Id$, tenemos el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$. Las transformaciones de Möbius se clasifican por

sus puntos fijos en \mathbb{C} , que exceptuando la identidad y la identidad negativa, sólo pueden ser uno o dos.

La clasificación que hemos dado de transformaciones de Möbius equivale a clasificarlas de acuerdo con la traza de la matriz $M_{\mathcal{T}}$. Si $M_{\mathcal{T}} \neq \pm Id$, entonces:

$M_{\mathcal{T}}$ es **parabólica** $\leftrightarrow tr M_{\mathcal{T}} = \pm 2$

$M_{\mathcal{T}}$ es **elíptica** $\leftrightarrow tr M_{\mathcal{T}} \in (-2, 2)$

$M_{\mathcal{T}}$ es **hiperbólica** $\leftrightarrow tr M_{\mathcal{T}} \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

$M_{\mathcal{T}}$ es **loxodrómica** $\leftrightarrow tr M_{\mathcal{T}} \notin \mathbb{R}$.

Véase [L].

1.4 Extensiones de Poincaré

En esta sección extenderemos las reflexiones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^{n+1} , de tal forma que $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ sea un elemento de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$.

Como $\mathbb{R}^n \times \{0\} = \mathbb{R}^{n+1}$, sabemos que $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ por lo que $x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Tomemos $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $c = (a, 0)$, entonces $S(c, r) \cap \mathbb{R}^n = S(a, r)$.

Como en la sección anterior, sea ϕ una reflexión en una esfera $S(a, r)$. Esta reflexión actúa de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea $\tilde{\phi}$, la reflexión que actúa en la esfera $S(c, r)$ que va de $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, recordemos que hemos tomado los radios de la misma magnitud y además la intersección de c con $\mathbb{R}^n = a$, entonces es claro que $\tilde{\phi}|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$ coincide con ϕ , por lo tanto $\tilde{\phi}$ es la extensión de Poincaré de ϕ .

Análogamente si ϕ es una reflexión en un plano $S(a, \vec{r}) \in \mathbb{R}^n$. A esta reflexión,

que actúa en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, le podemos asociar $\tilde{\phi}$, una reflexión que actúa en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ en un plano $S(c, \vec{r}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $S(c, \vec{r}) \cap \mathbb{R}^n = S(a, \vec{r})$.

Inversamente si $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es una reflexión tal que $\psi|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$ (que deja invariante $\mathbb{R}^n \times \{0\}$), se tiene que $\psi = \tilde{\psi}|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$.

Definimos como $GM(\mathbb{H}^{n+1}) = \{\mathcal{T} : \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^{n+1} \text{ tal que } \mathcal{T}/\mathbb{R}^n \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)\}$.

1.4.1 Extensiones de Poincaré a \mathbb{H}^3

Como ejemplo a los conceptos señalados anteriormente, veremos las extensiones de Poincaré de las transformaciones de Möbius de la sección 1.1.

La homotecia en \mathbb{H}^2 ($z \mapsto kz$) manda los puntos de una semi-esfera $S(0, r) \cap \mathbb{H}^3$ en otra más grande o más pequeña $S(0, kr) \cap \mathbb{H}^3$, todas concéntricas. Al extender a \mathbb{H}^3 , manda los puntos de una semi-esfera $(z, t) \mapsto (kz, kt) = k(z, t)$ a otra más grande o más pequeña, también concéntrica.

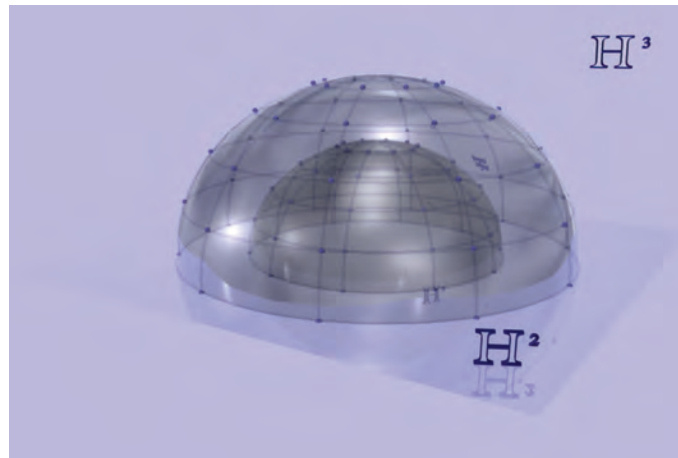


Figura 1.6: homotecia en \mathbb{H}^3

La translación en \mathbb{H}^2 como el la sección 1.1 definida por $z \mapsto z + b$ se

extiende a $(z, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \mapsto (z + b, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ y manda cualquier plano que interceque de manera ortogonal a \mathbb{R}^2 a uno que esté recorrido una distancia b . Y la semi-esfera $S(c, r) \cap \mathbb{H}^3$ en la semi-esfera que también este recorrida una distancia b .

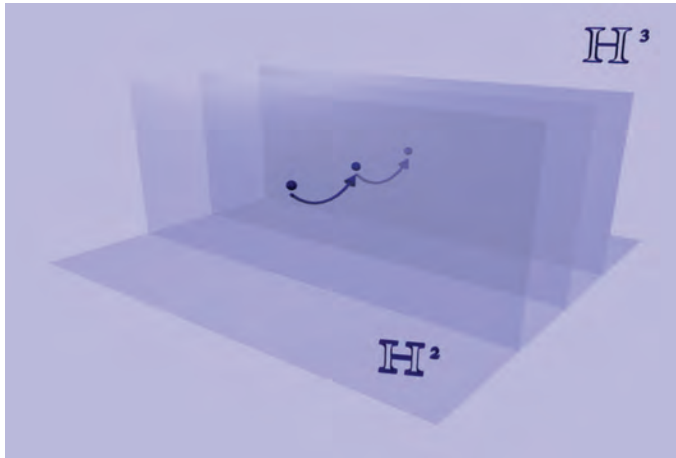


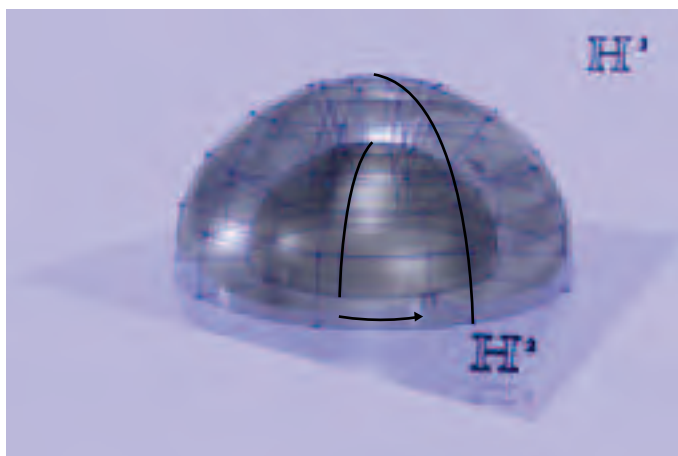
Figura 1.7: translaciones en \mathbb{H}^3

La rotación está dada por $z \mapsto e^{i\theta} z$. Las rotaciones mandan rectas en rectas y círculos en círculos. La extensión de la rotación esta dada por $(z, t) \mapsto (e^{i\theta} z, t)$ Y manda planos en planos y semi-esferas en semi-esferas.

La loxodrómica $z \mapsto e^{i\theta} kz$ es composición de la homotecia y la rotación, vease el ejemplo de la sección 1.1. La extensión de esta función está dada por $(z, t) \mapsto (e^{i\theta} z, t) \circ (kz, kt) = (e^{i\theta} kz, kt)$.

1.5 Métrica Hiperbólica en \mathbb{H}^n , Δ

Cualquier figura, curva o recta, depende del lugar en \mathbb{H}^2 en el que esté ubicado. Esto se ilustra claramente con un ejemplo: una circunferencia queda

Figura 1.8: loxodrómica en \mathbb{H}^3

determinada dados el centro y el radio. Por definición de circunferencia, todos los puntos sobre ella están a la misma distancia del centro. En la geometría hiperbólica, una circunferencia tiene la misma forma que una euclidiana, excepto que tiene el centro recorrido hacia abajo. El radio mide lo mismo en todos los puntos de la circunferencia al tomar la métrica hiperbólica, aunque si midiéramos el radio euclidianamente, las distancias cambiarían según el punto. Los radios en la parte superior de la circunferencia son más grandes que aquellos en la mitad inferior.

En la métrica hiperbólica, las distancias aumentan al acercarse al eje real, de manera que al llegar a él, son ya infinitamente grandes, aun si al verlas euclidianamente parecieran muy pequeñas. Para formalizar este concepto definimos lo siguiente: **una densidad** es una función continua ζ en una región X de \mathbb{R}^n , tal que $\zeta : X \rightarrow \mathbb{R}^+$. Dada una densidad ζ y una región X , podemos determinar la longitud, que depende de la curva diferenciable γ , y que está dada por

$$l(\gamma) = \int_a^b \zeta(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \quad \text{donde } \gamma : [a, b] \rightarrow X$$

La distancia entre z_0 y z_1 es

$$\inf_{\gamma} \int_a^b \zeta(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \quad \text{donde } \gamma : [a, b] \rightarrow X$$

de manera que $\gamma(a) = z_0$ y $\gamma(b) = z_1$, donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas γ diferenciables por tramos, que unen a con b . La métrica hiperbólica en \mathbb{H}^n tiene como densidad

$$\zeta_{\mathbb{H}}(z) = \frac{1}{\text{Im } z}$$

Existe una biyección conforme, mas aun, una isometría entre el modelo del semiplano superior \mathbb{H}^n y Δ^n , el disco de dimensión n . La densidad en el modelo del disco unitario inducida por \mathbb{H}^n está dada por

$$\zeta_{\Delta}(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$$

De la misma forma que las distancias se vuelven infinitamente grandes al acercarse al plano $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ en \mathbb{H}^{n+1} , también son infinitamente grandes al acercarse a la $n-1$ esfera que es frontera de la bola unitaria, en cambio las distancias se vuelven euclidianas al tender a i . Ambos modelos son isométricos [L].

1.6 Espacios Geodésicos de \mathbb{H}^3

Dada la métrica hiperbólica, definimos como líneas geodésicas los semicírculos ortogonales a \mathbb{H}^2 que pasan por dos puntos dados. Estas líneas determinan la mínima distancia entre tales puntos. Si uno de los puntos fuera infinito, la geodésica sería una recta (en el sentido euclidiano) ortogonal a \mathbb{H}^2 .

Dados tres puntos en \mathbb{H}^2 , queda determinado un único círculo que pasa por esos tres puntos. Tomando la extensión de Poincaré, obtenemos una semiesfera con un círculo máximo en \mathbb{H}^2 , es decir, al intersecar cualquier plano

ortogonal a \mathbb{H}^2 con nuestra esfera obtenemos una línea geodesica. Es claro que la esfera es ortogonal al plano \mathbb{H}^2 y también minimiza distancias entre puntos dados. Análogamente al caso anterior, si alguno de los puntos dados fuera infinito, tendríamos un plano ortogonal a \mathbb{H}^2 . En el capítulo 3 nos referiremos a las regiones determinadas por intersecciones entre estas semiesferas como caras geodésicas.

Capítulo 2

Topología

Pensemos en un espacio topológico X y en un punto x_0 dentro de este espacio. Decimos que α es un **lazo** con base en x_0 si existe una función continua del intervalo $[0, 1]$ a X tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Decimos que dos lazos α, β son homotópicos cuando tienen un mismo punto base x_0 y existe una función $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ continua, tal que $f(t, 0) = \alpha(t)$ y $f(t, 1) = \beta(t)$, $f(0, s) = x_0, f(1, s) = x_0$ para todas s, t en el intervalo $[0, 1]$. Tal f se llama una **homotopía** entre α y β .

Llamamos **grupo fundamental de X relativo al punto x_0** al conjunto de clases de equivalencia de todos los lazos con punto base x_0 bajo una homotopía, con la operación composición. Se denota como $\pi_1(X, x_0)$. Es decir, el grupo fundamental está formado por todos los lazos que no son homotópicamente equivalentes en X y con x_0 como punto base. Véase [Y].

2.1 Complejos

Para poder trabajar los complejos simpliciales, empezaremos por estudiar los simplejos y sus propiedades. Supongamos $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$, y son vectores linealmente independientes. Supongamos también $t_i \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Un **(n-1)-simplejo** $\sigma = \{x | x = \sum_{i=1}^n t_i a_i, \text{ donde } \sum_{i=1}^n t_i = 1\}$. Denotemos σ por $\langle a_1 \dots a_n \rangle$.

Algunos ejemplos de simplejos son:

0. a_0 un punto en \mathbb{R} es un **0-simplejo**.
1. Tomemos a_1 y $a_2 \in \mathbb{R}^2$ linealmente independientes, el **1-simplejo** determinado por a_1 y a_2 es el conjunto de todos los puntos $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $x = ta_1 + (1-t)a_2$, con $0 \leq t \leq 1$; todos los puntos están en el segmento que une a_1 con a_2 .
2. Consideremos ahora $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ linealmente independientes, el **2-simplejo** determinado por a_1, a_2, a_3 está formado por todos los puntos del triángulo con vértices a_1, a_2, a_3 .
3. Por último, veamos $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ linealmente independientes, el **3-simplejo** determinado por a_1, a_2, a_3, a_4 , representan el tetraedro con vértices a_1, a_2, a_3, a_4 .

Veamos algunas propiedades de los n-simplejos [S]:

- i) Para cualquier $x \in \sigma = \langle a_1 \dots a_n \rangle$, $\{t_i(x)\}$ están determinadas de manera única por las condiciones $x = \sum_{i=1}^n t_i a_i$ y $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. La primera es función continua de x .

- ii) $\sigma = \langle a_1 \dots a_n \rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es convexo y compacto; además, es igual a la intersección de todos los conjuntos convexos que contengan a a_1, \dots, a_{n+1} .
- iii) Existe un homeomorfismo de $\sigma \in \mathbb{R}^n$ a la bola cerrada de dimensión $n-1$.

Se define **una k cara** de σ como cualquier k -simplejo determinado por un subconjunto de $\{a_1, \dots, a_n\}$ de cardinalidad $k+1$.

Un conjunto de simplejos se llama **complejo simplicial** K si y sólo si:

1. Cada cara de los simplejos de K también está en K .
2. Para cualesquiera dos simplejos σ_1 y σ_2 de K , $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ó $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara de σ_1 y de σ_2 .

El conjunto de todos los simplejos de dimensión menor o igual a p se llama **p -esqueleto** de K y se denota como $K^{(p)}$.

Un complejo simplicial, además de ser un espacio topológico, también posee la información acerca de su construcción por medio de la unión de simplejos.

2.1.1 Orientación de Simplejos

Los simplejos reciben una orientación de la siguiente manera:

Un 1-simplejo orientado $\sigma_1 = (a_1 a_2)$ es un segmento orientado que se recorre de a_1 hacia a_2 . Y se cumple que $(a_1 a_2) = -(a_2 a_1)$.

De la misma forma, un 2-simplejo orientado $\sigma_2 = (a_1 a_2 a_3)$ se recorre en orden, desde a_1 hacia a_2 a a_3 y luego a a_1 . Por lo que $(a_1 a_2 a_3) = (a_2 a_3 a_1) = (a_3 a_2 a_1)$ y un signo menos invierte la orientación. Un 2-simplejo es una región triangular que se orienta por sus aristas.

Un 3-simplejo orientado $\sigma_3 = (a_1a_2a_3a_4)$ es una identificación de cuatro 2-simplejos orientados de la manera antes mencionada; al quedar identificadas las aristas, éstas deberán coincidir en su orientación. Existe entonces una secuencia de los 4 vértices inducida por la orientación de las aristas. Un 3-simplejo orientado representa un tetraedro sólido con todas sus aristas orientadas y que sus vértices se recorren en un cierto orden.

En general, un n -simplejo $\sigma = a_1\dots a_{n+1}$ se puede orientar inductivamente con base en sus $(n - 1)$ -caras ya orientadas, ya que éstas forman la frontera del n -simplejo. Al identificar las $(n - 1)$ -caras, sus intersecciones deben coincidir en la orientación. Además los vertices se recorren en un orden.

Los complejos simpliciales orientados obtienen su orientación de los simplejos.

2.2 Variedades

M es **una variedad** topológica n -dimensional si:

1. M es un espacio Hausdorff. Es decir, para cualesquiera dos puntos en el espacio, existe una vecindad abierta de cada uno y su intersección es vacía.
2. Para toda cubierta abierta, existe un refinamiento localmente finito.
3. M es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n o a un abierto $X \subset \mathbb{R}^n$, en todo punto. a un rectángulo

Estas vecindades se llaman vecindades coordenadas. Y las parejas ordenadas de la vecindad U y el homeomorfismo φ se conocen como **carta coordenada**. Se denota como (U, φ) .

Dada una cubierta abierta perteneciente a una variedad, podemos asociarle un conjunto de cartas coordenadas. Dicho conjunto se conoce como **atlas**.

M es variedad C^∞ -diferenciable si dados U_i y U_j abiertos en M tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. El mapeo $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ tal que $\psi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ es infinitamente diferenciable.

Un homeomorfismo φ mapea U_i en una vecindad abierta $U'_i \subset \mathbb{R}^n$. De esta manera, se provee de coordenadas a cualquier punto $P \in U_i$. Cuando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la función de transición de un sistema al otro es suave.

2.3 Nudos

Un nudo se define como una curva simple cerrada en S^3 . En la teoría de nudos, el problema principal es saber si dos nudos son iguales tras una modificación que no los fragmente, ya que existen muchas representaciones de un mismo nudo. Las representaciones de un nudo en el plano son proyecciones, ya que los nudos pertenecen a espacios tridimensionales. Para poder clasificar los nudos fácilmente, se simplifican lo más posible; luego se agrupan de acuerdo con el número de cruces de su proyección bidimensional. Es posible encontrar más de una clase de nudos con el mismo número de cruces.



Figura 2.1: nudo trébol

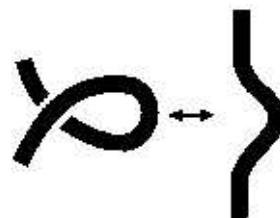
Kurt Reidemeister demostró que, si se tienen dos representaciones distintas de un mismo nudo, pueden modificarse de modo que se vean iguales, usando sólo tres tipos de movimientos, mismos que ahora se conocen como



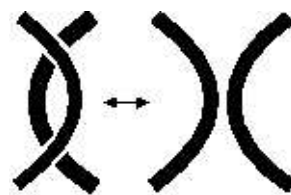
Figura 2.2: Nudo “Figura Ocho”

movimientos de Reidemeister.

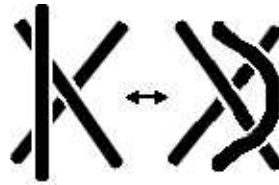
1. agregar o quitar un rizo a un nudo como lo muestra la imagen.



2. mover un cruce de modo que las secciones queden una a lado de la otra, como lo muestra la figura.



3. cambiar una sección del nudo de un lado de un cruce, al otro lado del mismo, de la siguiente manera.



Existen algunos nudos con propiedades importantes. El nudo “trivial” es un nudo sin cruces. El único nudo con tres cruces, es el nudo “trébol”; con cuatro cruces tenemos al nudo “figura ocho”. A los nudos generalmente les denotamos por el número de cruces y les asignamos un índice para diferenciar de cual se trata en caso de que haya más de uno con tales cruces.

Los nudos tienen algunas propiedades que no dependen de su representación. Una de éstas, que permanece invariante, es el mínimo número de cruces de un nudo. Este número se toma de la representación más simple de cada nudo.

Otra invariante de un nudo es la mínima cantidad de cambios en sus cruces para desanudarlo. Estos cambios se refieren al hecho de que una sección del nudo pase por arriba o por abajo de otra sección del mismo.

El mínimo número de puentes que es posible construir en una cierta representación de un nudo, también es invariante. Un puente se define como

un arco, una sección de un nudo que se encuentra entre dos intersecciones, que pasa por abajo de las otras secciones y que no tiene otros cruces de este tipo en ella, pero que, además, tiene al menos uno que pasa por arriba de otra parte del mismo nudo. Esta cantidad se calcula con base en la representación del nudo que se quiera analizar; no se usa necesariamente la forma más simple.

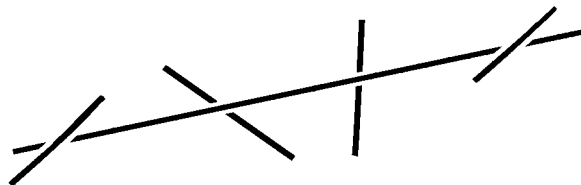


Figura 2.3: Un puente

Otra forma de simplificar los nudos a otros más sencillos, es encerrar parte del nudo en una esfera de manera que lo corte en exactamente dos puntos, luego unimos las puntas formando dos nudos separados. Así se puede hacer un análisis para dos nudos más sencillos. Este tipo de simplificación carece de sentido cuando se separa el nudo trivial, en cualquier otro caso podría resultar útil.

Figura 2.4 Nudo 5_2

Existe también una operación inversa a la antes mencionada: la suma conexa. Esta operación da al conjunto la estructura de un semi-grupo. Existe el elemento neutro, que es el nudo trivial. La suma es asociativa. Sin embargo, no tiene elementos que sean inversos a otros elementos, por lo que en general resulta imposible simplificar un nudo por medio de sumas.

Existe otro invariante importante de la topología del complemento, que es su grupo fundamental. El grupo del nudo es un invariante topológico-algebraico que nos es de utilidad para determinar si se trata de grupos distintos y por lo tanto de nudos distintos, cuando tenemos dos representaciones distintas. Sin embargo es difícil, en general, demostrar que dos representaciones corresponden al mismo grupo.



Figura 2.4: generadores del nudo “figura ocho”

2.4 Nudo Figura Ocho

Analizaremos algunos invariantes del nudo figura ocho. El mínimo número de cruces en su proyección al plano es cuatro. El mínimo número de cruces que hay que cambiar de arriba a abajo, o de abajo a arriba para desanudarlo, es uno. Como el nudo es alternante, y sólo tiene cuatro cruces, podría haber dos puentes. Por la forma del nudo, resulta imposible cortarlo en nudos más sencillos sin que uno de ellos sea el trivial. Además si denotamos k al nudo figura ocho, se tiene que $\pi_1(S^3 - k) = \langle x, y | x^{-1}yxy^{-1}xy = yx^{-1}yx \rangle$, el

grupo del nudo, donde x, y son los generadores, como veremos en el tercer capítulo. Véase la figura 2.3.

Capítulo 3

Estructura Hiperbólica del Complemento del Nudo “Figura Ocho”

3.1 Primera Construcción

En ésta sección y en la próxima, construiremos un espacio topológico identificando las caras de dos tetraedros. De éstas dos construcciones sólo la segunda es variedad.

Sean T y T' tetraedros. Si las caras de T son A, B, C, D y las de T' son A', B', C', D' , identificamos topológicamente A con A' , B con B' y así sucesivamente. Esta identificación es de una forma tal que obtenemos un complejo simplicial compuesto por cuatro (caras) 2-simplejos, dos (aristas) 1-simplejos y un solo (vértice) 0-simplejo.

Véase la imagen 3.1 en la página 27. En la figura se describe la identificación

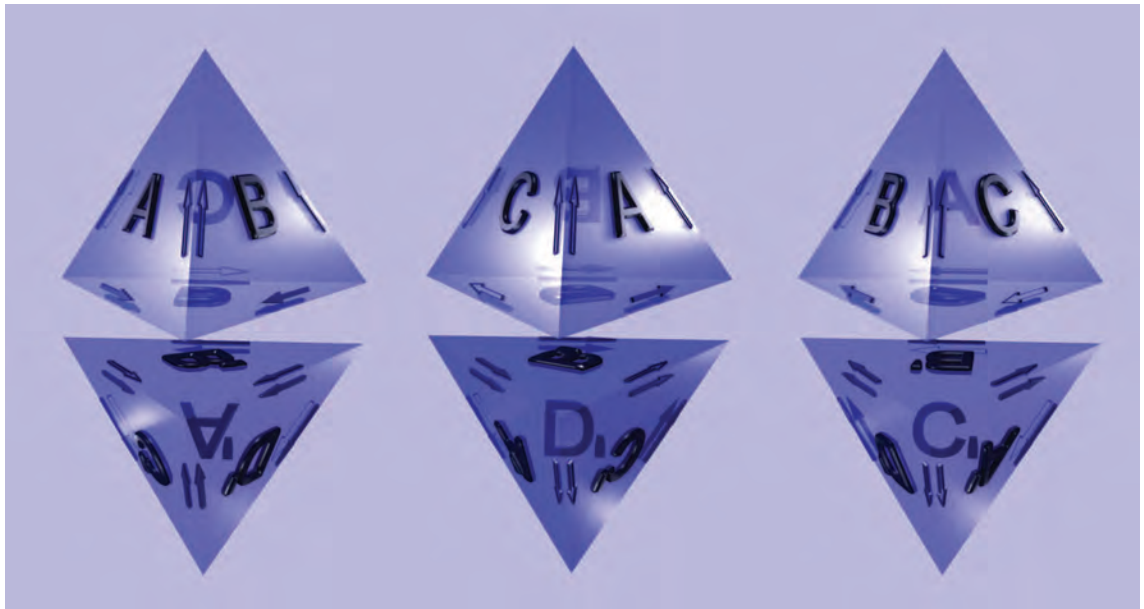


Figura 3.1: tetraedros ideales

de los tetraedros y dos vistas mas del mismo objeto, rotado 120° y 240° . Cada cara posee una orientación dada. En cada cara de los tetraedros, podemos encontrar la orientación en las aristas, que esta dada por flechas de dos tipos: las que llamaremos del tipo a que están señaladas en el dibujo con \Rightarrow y las del tipo b que están señaladas en el dibujo con \rightarrow . Veamos la cara A del tetraedro T , tenemos dos aristas del tipo a y una del tipo b . Si empezamos por la arista b recorriéndola en orden, podemos continuar con una arista a que también se recorre en orden y por último recorreremos la otra arista a en sentido inverso. Ahora debemos notar que la cara A' del tetraedro T' también tiene dos aristas del tipo a y una del b y se pueden recorrer en el mismo orden, por lo que se pueden identificar topológicamente sin problemas de orientación.

Análogamente, cada una de las cuatro caras del tetraedro T se pueden identificar topológicamente con cada una de las caras del tetraedro T' teniendo

en cuenta no sólo la orientación en las aristas, sino también los dos tipos de arista que se han señalado. Queda al lector ver de la figura, que es posible hacer la identificación para las caras restantes.

3.2 Segunda Construcción

Aquí usaremos la misma construcción que en la sección anterior, pero los tetraedros estan truncados en sus vértices y los denotaremos como $T_{\mathfrak{z}}$. Finalmente veremos en la sección 3.4 que ésta identificación produce un espacio homeomorfo al complemento del nudo figura ocho en S^3 .



Figura 3.2: tetraedros ideales truncos

Cortemos todos los vértices de los tetraedros, usando esferas con centro en

cada uno de los vértices e identifiquemos caras y aristas como en la construcción anterior. Al hacer este cambio, obtenemos un complejo simplicial muy distinto al anterior.

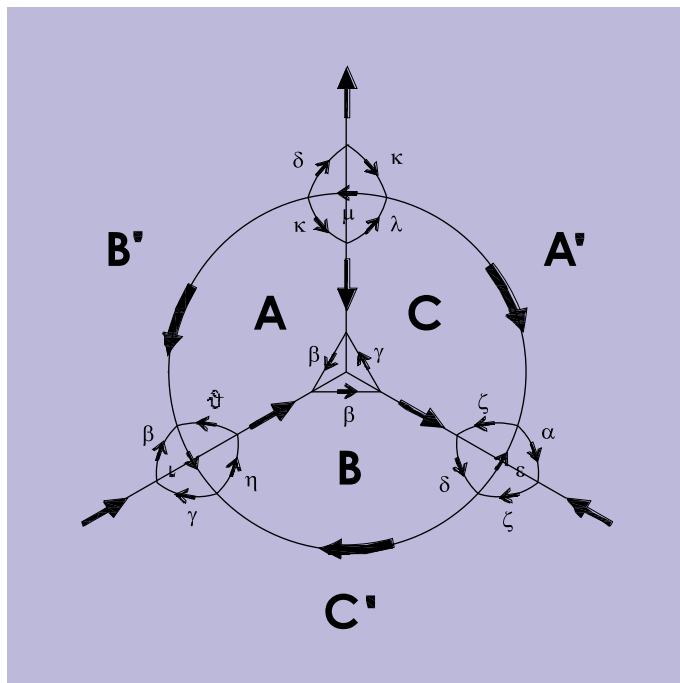


Figura 3.3: proyección al plano de los tetraedros ideales truncos identificados por la cara D

Cada tetraedro tiene 4 caras con frontera 6 vértices y 6 aristas y otras 4 caras con frontera 3 vértices y 3 aristas cada una, a las caras triangulares se les asigna un orden en el que se recorren sus aristas. Vease la figura 3.2 de la página 29. En resumen cada tetraedro truncado está formado por: 12 caras de dimensión cero, 18 de dimensión uno y 12 de dimensión dos. Ahora hagamos la misma identificación que en la primera construcción, excepto por los vértices que ya hemos cortado, a nuestra figura resultante le llamaremos $M_{\mathcal{T}}$.

En la figura 3.2 están los nombres y las orientaciones de las aristas de las caras triangulares. Estos nombres en $T_{\mathfrak{z}}$ y $T'_{\mathfrak{z}}$ son compatibles con el pegado que da origen a la figura 3.2 que a continuación analizaremos.

Al trincar los tetraedros, obtenemos un triángulo equilátero por cada vértice que cortamos. Identificamos estos triángulos por medio del pegado, en sus aristas y formamos un paralelogramo. El resultado es topológicamente equivalente a la figura 3.2 de la página 31; la identificación de los triángulos se hace de manera tal que la orientación de todas las aristas concuerde. Además como se indica en la figura hay que identificar el lado superior del rectángulo con el inferior, esto equivale a un cilindro, ya que los lados están orientados de manera que concuerdan. También identificamos el lado derecho con el izquierdo, y obtenemos finalmente un toro. Es decir, la identificación del pegado en las caras triangulares es un toro. Y es claro que es la frontera de $M_{\mathfrak{z}}$. Véase la figura 3.2 de la página 31 para una descripción visual del mismo toro.

Contando ahora los simplejos que componen a $M_{\mathfrak{z}}$ resulta estar formado por cuatro 0-simplejos que podemos ver de la figura 3.2. Catorce 1-simplejos, de los que 12 están señalados con letras del alfabeto griego y dos con nombres a y b que se pueden observar en la figura 3.2. Doce 2-simplejos de los cuales podemos ver ocho en la figura 3.2 y los otros cuatro son las caras A, B, C, D que han sido identificadas con las caras A', B', C', D' mismas que se pueden observar en la figura 3.2. Dos 3-simplejos llamados $T_{\mathfrak{z}}$ y $T'_{\mathfrak{z}}$ los cuales se muestran en la figura 3.2.

En la figura 3.2 se pueden apreciar de manera más clara los simplejos que hemos descrito antes. Esta figura es una representación plana de los tetraedros vistos desde arriba con el vértice sur al infinito. Los triángulos que se muestran son las cortes hechos anteriormente.

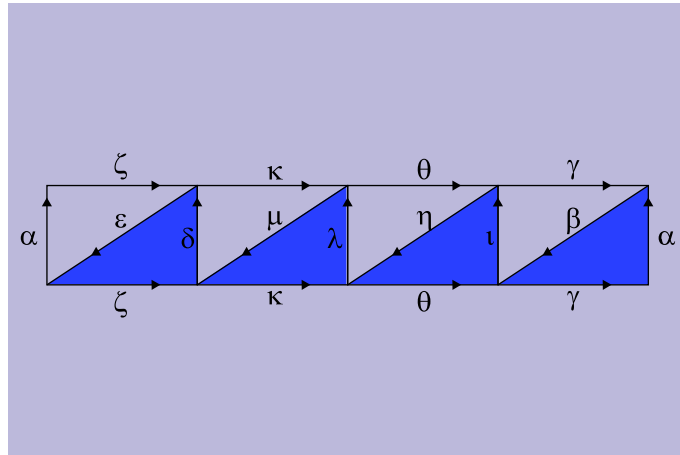


Figura 3.4: identificación topológica de los triángulos

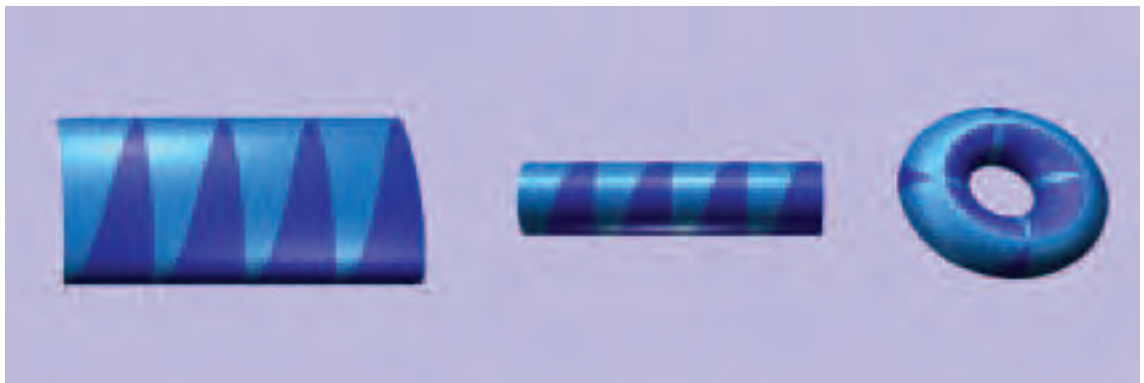


Figura 3.5: equivalencias topológicas

3.3 $M_{\mathfrak{z}}$ es Variedad

Antes de identificar, podemos diferenciar cuatro tipos de puntos: un primer tipo son los interiores a $T_{\mathfrak{z}}$ y $T'_{\mathfrak{z}}$; un segundo tipo son los puntos frontera sobre las caras de $T_{\mathfrak{z}}$ y $T'_{\mathfrak{z}}$, un tercer tipo son los puntos frontera sobre las aristas de $T_{\mathfrak{z}}$ y $T'_{\mathfrak{z}}$ y el cuarto tipo son los vértices de $T_{\mathfrak{z}}$ y $T'_{\mathfrak{z}}$.

Para demostrar que $M_{\mathcal{T}}$ es una variedad, analizaremos el pegado en los puntos antes mencionados. Para los puntos del primer tipo, podemos tomar P un punto en el interior de $T_{\mathcal{T}}$ o de $T'_{\mathcal{T}}$ y denotamos por B una bola abierta al rededor de P , contenida en $T_{\mathcal{T}}$, por lo cual sabemos que el interior de $T_{\mathcal{T}}$ y de $T'_{\mathcal{T}}$ es variedad.



Figura 3.6: los segmentos de esfera en las aristas, muestran la identificación de algunos puntos

Para los puntos del segundo tipo, elegimos P en alguna cara de $T_{\mathcal{T}}$. Antes de identificar topológicamente los tetraedros, notemos que todos estos son puntos frontera; pero al identificar $T_{\mathcal{T}}$ con $T'_{\mathcal{T}}$, estos puntos frontera se transforman en puntos interiores de $M_{\mathcal{T}}$. Tomemos $B(P)$ una vez que $T_{\mathcal{T}}$ y $T'_{\mathcal{T}}$ han sido identificados. $B(P)$ tiene un círculo máximo sobre la misma cara de $T_{\mathcal{T}}$ a la que pertenece P ; todos los demás puntos en $B(P)$ pertenecen al interior de $T_{\mathcal{T}}$ o de $T'_{\mathcal{T}}$, por lo que, efectivamente, existe una bola abierta al

rededor P en las caras de $T_{\mathfrak{T}}$ y $T'_{\mathfrak{T}}$.

Veremos los puntos del tercer tipo: aquellos que pertenecen a las aristas de T . Como los ángulos diédricos de un tetraedro ideal miden $\frac{\pi}{3}$ y hemos identificado a las aristas de los tetraedros en dos 1-complejos, entonces, tenemos que seis de ellos concurren en cada 1-complejo, con lo cual tenemos $6(\frac{\pi}{3} = 2\pi)$. Esto implica que en ambos casos tenemos esferas completas al rededor de cualquier punto P en las aristas.

Por último, los del cuarto tipo: observamos que en $M_{\mathfrak{T}}$ éstos vértices están en la frontera, que como hemos dicho, es el toro de la figura 3.2. Así que tienen una vecindad V en $M_{\mathfrak{T}}$ tal que $V \cap \partial M_{\mathfrak{T}}$ es un 2-disco y $V \cap (int M_{\mathfrak{T}})$ es media bola. Así que $M_{\mathfrak{T}}$ es variedad con frontera.

3.4 $M_{\mathfrak{T}}$ es Homeomorfo al Complemento del Nudo “Figura Ocho”

Denotemos por K al nudo “figura ocho” y $M_{\mathfrak{T}}$ a la 3-variedad que obtenemos de identificar a $T_{\mathfrak{T}}$ y $T'_{\mathfrak{T}}$. Demostraremos que $M_{\mathfrak{T}}$ es homeomorfo a $S^3 - K$.

La forma para hacerlo es dar una descripción del espacio $S^3 - K$ por medio de dos 3-simplejos, doce 2-simplejos, catorce 1-simplejos y cuatro 0-simplejos y relacionarlo con los 2 tetraedros truncados que han sido identificados como lo indicamos en la sección 3.2.

Como ∂K es un toro y $\partial(S^3 - K) = \partial K$ entonces la frontera del nudo K debe tener una triangulación como la que se muestra en las figuras 3.2 y 3.2.

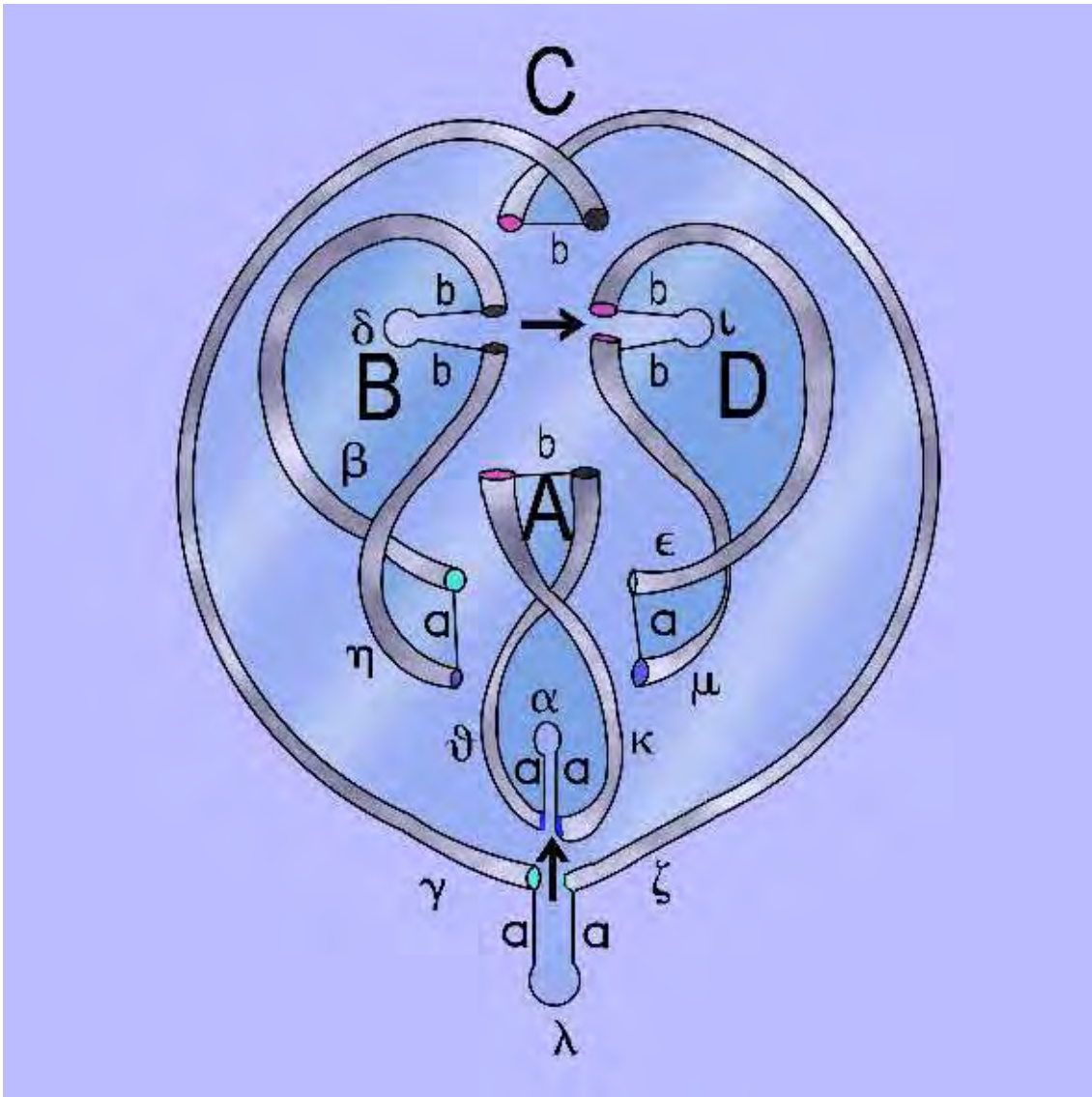


Figura 3.7: Nudo “figura ocho” separado por cada 2-simplejo

3.4.1 Descripción de los 0-Simplejos

Tenemos cuatro 0-simplejos, todos los contenidos en ∂K como ya hemos visto y que se muestran en la figura 3.2. También aparecen en la figura 3.4 como

seis vértices que se identifican por colores para formar solo uno. Vease figura 3.4.2 en la que ya han sido identificados.

3.4.2 Descripción de los 1-Simplejos

Podemos ver en la figura 3.4 los catorce 1-simplejos con los nombres dados en secciones anteriores, que son $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \epsilon, \kappa, \iota, \lambda, \mu, \theta, \zeta, a, b$. que podemos también observar en la imagen 3.4.2. Cabe señalar que todos estos 1-simplejos han aparecido explícitamente en todas las figuras de éste capítulo.

3.4.3 Descripción de los 2-Simplejos

Tenemos doce 2-simplejos; estos se dividen en dos tipos, los primeros ocho están en la frontera de K y son observables en forma de triángulos en las imágenes 3.2 y 3.2. Podemos apreciar los mismos triángulos en la figura 3.2 como sigue: $\triangle\delta\mu\kappa, \triangle\mu\kappa\lambda, \triangle\lambda\eta\theta, \triangle\eta\theta\iota, \triangle\iota\beta\gamma, \triangle\beta\gamma\alpha, \triangle\alpha\epsilon\zeta, \triangle\epsilon\zeta\lambda$. El segundo tipo son las caras truncas de los tetraedros una vez identificadas. Son observables en la figura 3.2 y más adelante en las figuras 3.4 y 3.4.2. En todos éstos casos las caras se denotan como A, B, C, D.

Analicemos con más detalle la cara A : originalmente, teníamos un triángulo con dos aristas del tipo a y una del tipo b , al identificar las dos aristas del tipo a , obtenemos un disco con centro en un vértice de A y una arista. Debemos recordar que hemos truncado todos los vértices, por lo que obtenemos un disco con un corte en el centro y otro corte en el otro vértice de la arista. Tal figura es topológicamente equivalente a la cara A de la figura 3.4.3 y que podemos ver con las demás caras de T de manera conjunta en la figura 3.4.4.

De igual forma se analizan las caras restantes. Vease la figura 3.4.4.

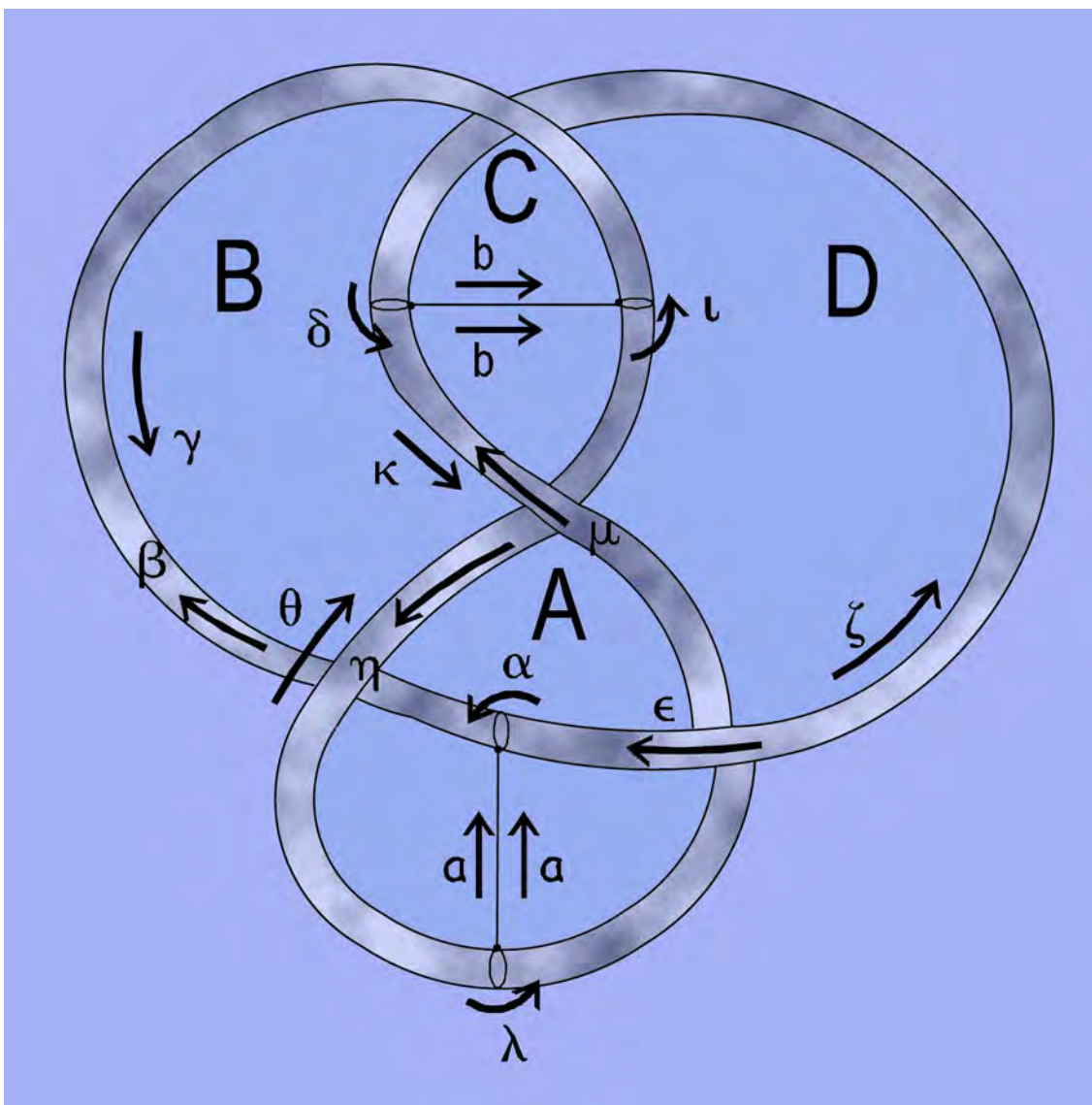


Figura 3.8: Nudo “figura ocho”

3.4.4 Descripción de los 3-Simplejos

Finalmente la figura 3.4.4 representa el nudo K , inmerso en $\mathbb{R}^3 \cup \infty$. recorriendo las caras de T_{Σ} mostrado con líneas punteadas. En estas imágenes

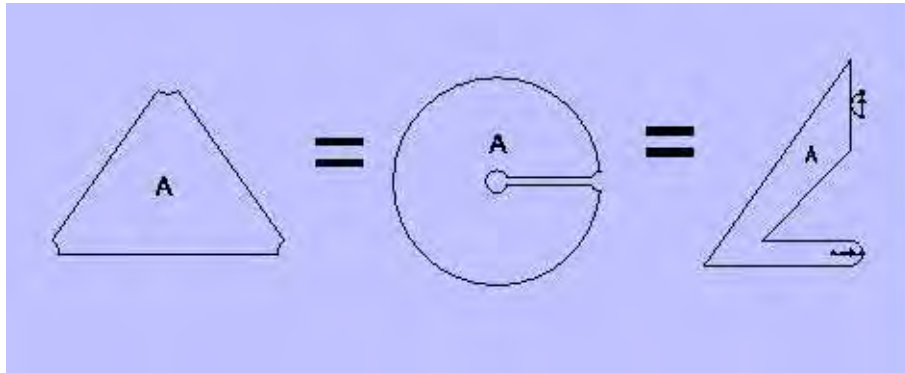


Figura 3.9: cara A del tetraedro

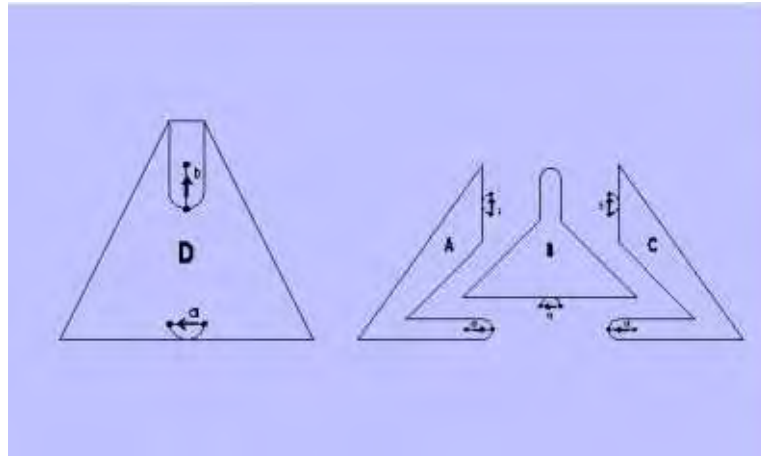


Figura 3.10: caras del tetraedro formadas por el nudo figura ocho

podemos contar dos 3-simplejos de la siguiente forma: $T_{\mathbb{F}}$ es el interior de las caras de la figura 3.4.4 y $T'_{\mathbb{F}}$ es el complemento. La figura 3.4.4 muestra el mismo nudo recorriendo las caras de $T_{\mathbb{F}}$ de modo que al separar las caras del tetraedro obtenemos las formas que se muestran en dicha imagen.

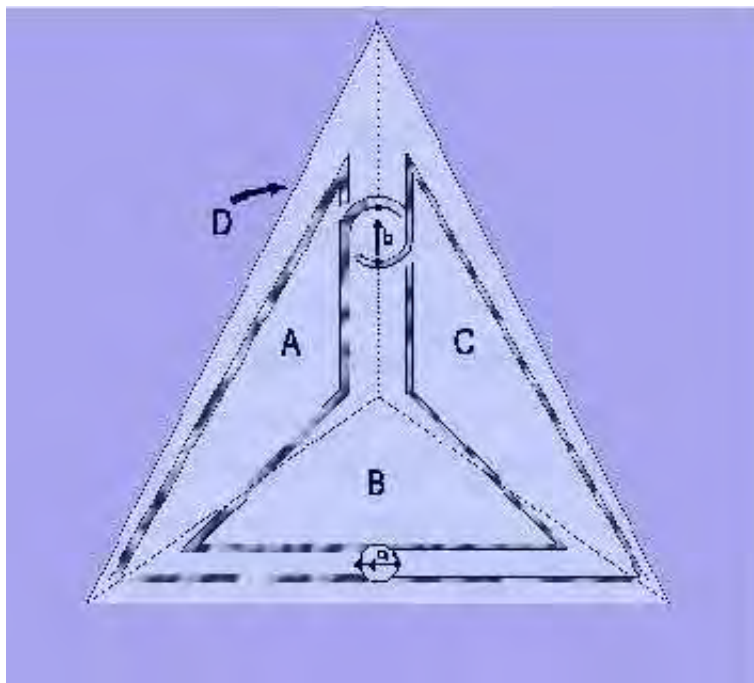


Figura 3.11: nudo figura ocho visto en perspectiva con la cara D al fondo

3.5 El Complemento del Nudo Figura Ocho Tiene una Estructura Hiperbólica

3.5.1 Pegado de Caras y Transformaciones de Möbius

Construiremos T y T' tetraedros ideales con interiores disjuntos en \mathbb{H}^3 con sus vértices al infinito y todas sus caras geodesicas como en la sección 1.6.

Nos referiremos a los tetraedros T y T' dando los vértices de los mismos, las caras se construyen de la siguiente manera: se toman los tres puntos que estan en el plano $z = 0$ que son, -1 , 0 , w , veamos el círculo determinado por

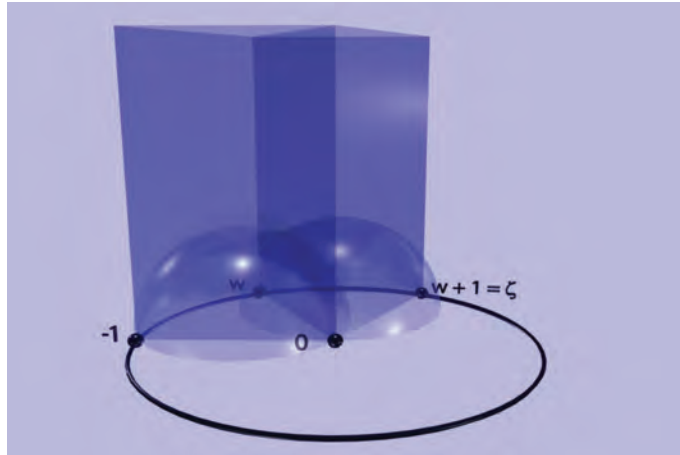


Figura 3.12: tetraedros hiperbólicos pegados por la cara D

tales puntos y tomemos su extensión de Poincaré, con lo que obtenemos una semiesfera de la que una parte es una cara de T . Ahora tomamos el infinito de \mathbb{H}^3 como cuarto punto y construimos las caras restantes tomando por pares los puntos de la base y el infinito como tercer punto de cada cara, esta construcción determina tres planos, el tetraedro es el interior de la región determinada por los planos y la semiesfera. Por ésta razón hemos de referirnos a las caras dando los tres puntos que la determinan, pero recordando que es sólo la sección que pertenece al tetraedro.

Sean $w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ y $\zeta = w+1$; construiremos el tetraedro $T = (-1, 0, w, \infty)$ y el tetraedro $T' = (0, w, \zeta, \infty)$.

Las caras de T son: $A = (\infty, -1, 0)$; $B = (\infty, -1, w)$; $C = (-1, w, 0)$; $D = (0, w, \infty)$ y las de T' son: $A' = (\zeta, w, 0)$; $B' = (\infty, 0, \zeta)$; $C' = (\zeta, w, \infty)$; $D' = (0, w, \infty)$ observamos que $T \cap T' = (0, w, \infty) = D = D'$ Denotemos por $P \subset \mathbb{H}^3$ a $T \cup T'$

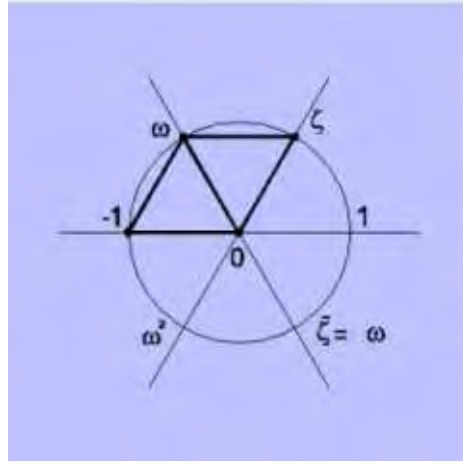


Figura 3.13: corte por el plano $z=0$

Sean

$$\gamma_1 : z \mapsto z + 1 \quad \gamma_2 : z \mapsto \frac{-z}{wz - 1} \quad \gamma_3 : z \mapsto \frac{(w^2 - 1)z - 1}{wz + w}$$

Mostraremos que $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$, $\gamma_3(z)$ son transformaciones de Möbius en \mathbb{H}^3 tales que relacionan las caras de T y T' de la siguiente manera:

$$\gamma_1 : (\infty, -1, w) \mapsto (\infty, 0, \zeta) \quad \gamma_2 : (\infty, -1, 0) \mapsto (w, 0, \zeta) \quad \gamma_3 : (-1, w, 0) \mapsto (\zeta, w, \infty)$$

por lo que γ_1 identifica la cara B con la cara B' ; γ_2 identifica las caras A y A' ; γ_3 identifica a C con C' .

Estas funciones tienen la propiedad de que identifican las caras del tetraedro T con las caras del tetraedro T' según el pegado que hemos usado en los capítulos anteriores. Sabemos que

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es parabólica y fija el infinito de } \mathbb{H}^3$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ w & -1 \end{pmatrix} \text{ es parabólica y fija el cero de } \mathbb{H}^3$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\zeta} \\ \frac{1}{\sqrt{\zeta}} & 0 \end{pmatrix} \text{ es parabólica, y fija } w \text{ y } -w$$

Además $\gamma_3^{-1} = \gamma_1\gamma_3\gamma_2$ o sea $\gamma_2 = \gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_3^{-1}$ es decir, son suficientes dos generadores.

Como en el capítulo 2, si $\gamma_1 = x$ y $\gamma_2 = y$, tenemos que $x^{-1}yxy^{-1}xy = yx^{-1}yx$:

Basta demostrar la igualdad en 3 puntos.

Para $z = -1$:

$$yx^{-1}yx = \frac{1}{-w-1} \text{ y además } x^{-1}yxy^{-1}xy = \frac{-w^3-2w^2-2w-1}{w^3+w^2-1} \text{ pero } w^3 = 1; \text{ también } w^2 + w + 1 = 0; \text{ y } w = \frac{-w+1}{w} \text{ por lo que } \frac{-w^3-2w^2-2w-1}{w^3+w^2-1} = \frac{1}{-w-1}$$

Para $z = 0$:

$$yx^{-1}yx = \frac{w}{-w^2-w+1} \text{ por otra parte } x^{-1}yxy^{-1}xy = \frac{w^2+2w+2-1}{-w^2-w+1} \text{ como } w^2 + w + 1 = 0 \text{ entonces } \frac{w^2+2w+2-1}{-w^2-w+1} = \frac{w}{-w^2-w+1}$$

Para $z = 1$:

$$yx^{-1}yx = \frac{2w+1}{-2w^2-3w+1} \text{ y además } x^{-1}yxy^{-1}xy = \frac{w^3-2w-2}{-w^3+w^2+2w+1} \text{ y como ya sabemos } w^3 = 1, w^2 + w + 1 = 0; \text{ y también } w = \frac{-w+1}{w} \text{ por lo que } \frac{w^3-2w-2}{-w^3+w^2+2w+1} = \frac{2w+1}{-2w^2-3w+1}.$$

Si $\Gamma =$ grupo generado por $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ entonces Γ es isomorfo al grupo $\pi_1(S^3 - K)$

3.5.2 Teselación del grupo Γ

Si identificamos T y T' como en la sección 3.1 obtenemos un espacio M que es variedad, excepto en un punto p . Este punto p es la imagen de los vértices de T y T' bajo la identificación antes mencionada.

La frontera de cualquier vecindad V del punto p es un toro, y $M_{\mathfrak{z}} = M - V$.

A continuación demostraremos que $M_{\mathfrak{p}} = M - \{p\}$ tiene estructura hiperbólica.

Sea $P \subset \mathbb{H}^3$ como en la página 38, la unión de los dos tetraedros hiperbólicos. Observemos que P es convexo en \mathbb{H}^3 .

Si $\Phi = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ entonces definamos P/Φ como el resultado de identificar las caras de P por medio de las isometrías en Φ .

Entonces P/Φ es un espacio métrico completo, pues las caras de P son espacios geodésicos completos de \mathbb{H}^3 .

Teorema de Poincaré [R]:

Sea Φ un conjunto de isometrías de \mathbb{H}^3 que identifica los lados de un poliedro convexo P en \mathbb{H}^3 tal que al pegar los lados de P por medio de elementos de Φ es completa. Entonces el grupo Γ generado por Φ es discreto y actúa libremente, P es un poliedro convexo y fundamental para Γ .

Por lo tanto Γ tesela \mathbb{H}^3 con región fundamental $P = T \cup T'$ y $M_{\mathfrak{p}} = \mathbb{H}^3/\Gamma$, por lo que ha quedado demostrado.

Bibliografía

- [B] Beardon, Alan G. *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, 1980.
- [F] Francis, George K. *A Topological picturebook*, Springer-Verlag, 1987.
- [J] Troels Jorgensen: *On pairs of punctured tori* Manuscript. Columbia University.
- [L] Lascurain, Antinio. *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, Las Prensas de Ciencias, 2005.
- [M] Munkres, James R. *Elements of Algebraic Topology*, Addison Wesley Publishing Company, 1980.
- [R] Ratcliffe, John G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, 1991.
- [RR] Robert Riley *Parabolic representations of knot groups. Proc.London Math.Soc.* (3)24(1972)217-242.
- [S] Spanier, Edwin H. *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1976.
- [T] William Thurston *The Geometry and Topology of Three-Manifolds.* (<http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>), Princeton lecture notes (1978-1981).

[Y] Young, Gail s. y Hocking, John G. *Topology*, Dover Publications, 1988.