



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

**RELACIONES DE SERRE GENERALIZADAS PARA
ÁLGEBRAS DE LIE ASOCIADAS A FORMAS
UNITARIAS POSITIVAS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)**

**P R E S E N T A :
ANTONIO DANIEL RIVERA LÓPEZ**

DIRECTOR DE TESIS: DR. MICHAEL BAROT SCHLATTER

MÉXICO, D.F.

MAYO, 2006



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	III
1. Álgebras de Lie	1
1.1. Definiciones y propiedades básicas	1
1.2. Subálgebras de Cartan	2
1.3. Sistema de raíces	3
1.4. Bases	4
1.5. Matriz de Cartan y gráfica de Coxeter	4
1.6. La descomposición de Cartan y el teorema de Serre	5
1.7. El álgebra de Lie asociada a una forma unitaria	6
1.8. Inflaciones y deflaciones	8
1.9. Raíces y relaciones finitas	14
1.10. La propuesta de este trabajo	14
2. Transformaciones elementales	17
2.1. El efecto de las transformaciones elementales sobre las formas cuadráticas	17
2.2. Reducción a transformaciones elementales	21
3. Reducción a ciclos especiales y a monomios especiales	26
3.1. Reducción a monomios especiales	30
4. Monomios, cadenas llenas y bigráficas	34
4.1. Monomios en el magma libre	34
4.2. Cadenas llenas	40
4.3. Monomios cero asociados a cadenas llenas con enlaces	44

5. Demostración del Lema 3.5	48
5.1. Estrategia para $\mathfrak{g}_n^1(\lambda, \mu; i_1, \dots, i_l)$ y $\mathfrak{g}_n^2(\lambda, \mu; i_1, \dots, i_l)$	48
5.2. Demostración del primer paso	50
5.3. Demostración del segundo paso	51
5.4. Demostración del tercer paso.	51
5.5. Monomios cero en las bigráficas $\mathfrak{g}_n^0(\lambda)$	52

Abstract

Every semisimple Lie algebra defines a root system on the dual space of a Cartan subalgebra and defines a Cartan matrix, which expresses the dual of the Killing's form on a roots base. Serre's Theorem gives then a representation of the given Lie algebra by generators and relations in terms of the Cartan matrix. In this thesis, we generalize Serre's Theorem to give an explicit representation by generators and relations for any simply laced semisimple Lie algebra in terms of a positive quasi-Cartan matrix. Such a quasi-Cartan matrix expresses the dual of the Killing form for a \mathbb{Z} -base of roots. Here, by a \mathbb{Z} -base of roots, we mean a set of linearly independent roots which generate all roots as linear combinations with integral coefficients.

Resumen

Cada álgebra de Lie semisimple define un sistema de raíces sobre el espacio dual de una subálgebra de Cartan y una matriz de Cartan, que expresa el dual de la forma de Killing sobre una base de raíces. Entonces, el teorema de Serre da una representación del álgebra de Lie mediante generadores y relaciones en términos de la matriz de Cartan. En esta tesis, generalizamos el teorema de Serre con el objetivo de dar una representación explícita para cualquier álgebra de Lie semisimple asociada a una matriz cuasi-Cartan positiva, mediante generadores y relaciones. Dicha matriz cuasi-Cartan expresa el dual de la forma de Killing para una \mathbb{Z} -base de raíces. Con una \mathbb{Z} -base de raíces nos referimos a un conjunto de raíces linealmente independientes que generan todas las raíces como combinaciones lineales con coeficientes enteros.

Introducción

Una *forma unitaria* es una forma cuadrática $q : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que

$$q(x) = \sum_{i=1}^N x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j,$$

donde los coeficientes q_{ij} son números enteros. Cada forma unitaria

$$q : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z},$$

tiene asociada una *matriz casi-Cartan* A , dada por

$$A_{ij} = q(c_i + c_j) - q(c_i) - q(c_j) = q_{ij} = A_{ji}$$

donde c_1, \dots, c_N es la base canónica de \mathbb{Z}^N . Si $A_{ij} \leq 0$ para toda $i \neq j$, entonces A es una *matriz de Cartan*. Si q es una forma unitaria positiva, entonces existe una transformación \mathbb{Z} -invertible $T : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}^N$ tal que $q \circ T = q_\Delta$; donde Δ es el *tipo de Dynkin* asociado, es decir, una unión disjunta de diagramas de Dynkin A_n, D_n y E_n .

Sea $\mathfrak{g}_4(q)$ el álgebra de Lie definida por los generadores e_i, e_{-i}, h_i ($1 \leq i \leq N$) y las relaciones

$$R_1(q) \quad [h_i, h_j] = 0 \text{ para toda } i, j,$$

$$R_2(q) \quad [h_i, e_{\varepsilon j}] = -\varepsilon A_{ij} e_{\varepsilon j}, \text{ para toda } i, j, \text{ y donde } \varepsilon = \pm 1,$$

$$R_3(q) \quad [e_{\varepsilon i}, e_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i \text{ para toda } i, \text{ y donde } \varepsilon = \pm 1,$$

$$R_4(q) \quad (\mathbf{ad} \ e_{\varepsilon i})^{1+n}(e_{\delta j}) = 0, \text{ donde } n = \max\{0, -\varepsilon\delta A_{ij}\} \text{ con } \varepsilon, \delta = \pm 1 \text{ y } 1 \leq i, j \leq n.$$

Teorema 1 [SER] *Si q es una forma unitaria positiva definida tal que su matriz casi-Cartan es una matriz de Cartan, entonces $\mathfrak{g}_4(q)$ es un álgebra de Lie semisimple (y de dimensión finita).*

En general, si A no es necesariamente una matriz de Cartan, las relaciones $R_4(q)$ son un subconjunto de las relaciones

$$R_\infty(q) [e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0 \text{ si } q\left(\sum_{j=1}^t \varepsilon_j c_{i_j}\right) > 1 \text{ y } \varepsilon_j = \pm 1,$$

donde los monomios $[x_1, x_2, \dots, x_t]$ se definen de manera inductiva por medio de $[x_1, x_2, \dots, x_t] = [x_1, [x_2, \dots, x_t]]$.

Sea $\mathfrak{g}_\infty(q)$ el álgebra de Lie definida por los generadores e_i, e_{-i}, h_i ($1 \leq i \leq N$) y las relaciones $R_1(q), R_2(q), R_3(q)$ y $R_\infty(q)$. Recordar que cada forma unitaria positiva definida tiene un único *tipo de Dynkin* Δ asociado, tal que q es *equivalente* a q_Δ , es decir, que $q = q_\Delta \circ T$ para alguna matriz entera T \mathbb{Z} -invertible. Con $q \sim q'$ se denotará que cualesquiera dos formas unitarias q y q' son equivalentes.

Teorema 2 [BKL] *Si q es positiva definida de tipo Dynkin Δ , entonces $\mathfrak{g}_\infty(q)$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_4(q_\Delta)$.*

Aún cuando el conjunto de relaciones $R_\infty(q)$ es un conjunto infinito, en [BKL, Proposición 6.6] se demostró que existe un subconjunto finito S de $R_\infty(q)$, el cual es suficiente para definir $\mathfrak{g}_\infty(q)$. Sin embargo, este subconjunto no es del todo satisfactorio, puesto que S es muy grande y su definición depende fuertemente de la factorización de la matriz T .

El objetivo de este trabajo es dar un conjunto finito más simple y explícito de relaciones, para el cual el álgebra de Lie definida sea isomorfa a $\mathfrak{g}_4(q_\Delta)$. Este conjunto incluirá las relaciones $R_1(q), R_2(q), R_3(q), R_4(q)$ y se añadirán algunas relaciones $R_5(q)$ que dependen del conjunto de *ciclos* en q . Un *ciclo* es una tupla de índices (i_1, \dots, i_t) tal que $q_{i_a i_b} \neq 0$ si y sólo si $a - b \equiv \pm 1 \pmod t$. Se define

$$R_5(q) [e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0, \text{ donde } (i_1, \dots, i_t) \text{ es un ciclo en } q \text{ y } \varepsilon_t = \pm 1, \\ \varepsilon_l = -q_{i_l, i_{l+1}} \varepsilon_{l+1} \text{ para } 1 \leq l \leq t-1.$$

Sea $\mathfrak{g}_5(q)$ el álgebra de Lie definida por los generadores e_i, e_{-i}, h_i ($1 \leq i \leq N$) y por las relaciones $R_1(q), R_2(q), R_3(q), R_4(q)$ y $R_5(q)$. Obsérvese que todos estos conjuntos son finitos y están dados de una forma combinatoria.

El siguiente teorema es el resultado principal de este trabajo.

Teorema 3 Sean q y q' formas unitarias positivas definidas. Entonces

- (i) $q \sim q'$ si y sólo si $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_5(q')$,
- (ii) $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_4(q_\Delta)$, donde Δ es el tipo de Dynkin de q .

Como se verá en el capítulo dos de este trabajo, para la demostración de este teorema bastará analizar los siguientes casos, $q' = q \circ T_{sr}^\sigma$ y $q' = q \circ I_r$, donde T_{sr}^σ será una deflación o una inflación, y donde I_r representará un cambio de signo.

Un paso importante es mostrar que si $q' = q \circ I_r$, entonces los elementos

$$\tilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} e_{-\varepsilon r}, & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r \end{cases} \quad \tilde{h}_i = \begin{cases} -h_r, & \text{si } i = r \\ h_i, & \text{si } i \neq r \end{cases}$$

satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_5(q')$. Una vez demostrado esto, se harán reducciones a casos especiales.

Una de estas reducciones es la siguiente. Primero se mostrará que si $q' = q \circ T_{sr}^+$, entonces los elementos

$$\tilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r, \end{cases} \quad \tilde{h}_i = \begin{cases} h_r + h_s, & \text{si } i = r \\ h_i, & \text{si } i \neq r. \end{cases}$$

satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_5(q')$. Luego el caso $q' = q \circ T_{sr}^-$ se obtendrá como una implicación del caso $q' = q \circ T_{sr}^+$.

Verificar que los elementos anteriormente mencionados satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_4(q')$, no es complicado. Lo realmente complicado es verificar que estos elementos satisfacen la relación $R_5(q')$. Para demostrar esto, se analizarán todos los casos posibles en los que pueda aparecer un ciclo en q' . En el capítulo tres, en la Sección 3.1 se mostrará que todo ciclo en q' proviene de alguna de las bigráficas $\mathfrak{g}_n^0(\lambda)$, $\mathfrak{g}_n^1(\lambda, \mu, i_1, \dots, i_l)$ (para algún l par) ó $\mathfrak{g}_n^2(\lambda, \mu, i_1, \dots, i_l)$ (para algún $l > 0$ par) en $B(q)$. Una vez probado esto, la parte fundamental de la demostración es verificar que los siguientes monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(q)$ (en el caso $\mathfrak{g}_n^0(\lambda)$ se supone que $\mu = n$):

$$F_{n,0}(\lambda, \mu) = [[e_\lambda, e_\mu], e_{-n}, e_{-(n-1)}, \dots, e_{-1}]$$

y para $u = 1, \dots, n$

$$F_{n,u}(\lambda, \mu) := [e_u, e_{u-1}, \dots, e_1, [e_\lambda, e_\mu], e_{-n}, \dots, e_{-(u+1)}].$$

Para demostrar que los monomios $F_{n,u}(\lambda, \mu)$ son cero, en el capítulo cuatro, se define un nuevo producto de monomios y se muestran algunas resultados técnicos que facilitan la demostración. Finalmente, como se mostrará en el capítulo cinco, el resultado principal de este trabajo será una consecuencia de los resultados que se obtienen en los capítulos dos, tres y cuatro.

Quiero agradecerle a mi tutor, el Dr. Michael Barot por haberme brindado una oportunidad justo cuando más necesitaba de una, además le quiero agradecer todas sus enseñanzas, pues he aprendido muchas cosas trabajando con él.

Por otra parte quiero agradecerle y dedicarle este trabajo a mi compañera de vida, mi esposa Malena, quien con su apoyo, paciencia, amor y carácter inquebrantable, me ha enseñado que para salir de cualquier oscuro pozo basta con un poco de determinación.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

1.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 1.1 *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre un campo \mathbb{k} , es un \mathbb{k} -espacio vectorial \mathfrak{g} junto con una función bilineal $[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que:*

(a) $[x, y] = -[y, x]$ (*Antisimetría*)

(b) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (*Identidad de Jacobi*).

Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie y $x \in \mathfrak{g}$ se define la *representación adjunta*

$$\mathbf{ad}(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

dada por $(\mathbf{ad}(x))(y) = [x, y]$.

Sean \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{g}_2 álgebras de Lie sobre un campo \mathbb{k} . Un *homomorfismo* de álgebras de Lie es una transformación lineal $\theta : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ tal que $\theta([x, y]) = [\theta(x), \theta(y)]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}_1$. El homomorfismo θ es un *isomorfismo* de álgebras de Lie si θ es un homomorfismo biyectivo.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ subespacios vectoriales de \mathfrak{g} . Se define el producto $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ como el subespacio vectorial de \mathfrak{g} generado por todos los productos $[x, y]$ para $x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{k}$.

Una *subálgebra de Lie* de \mathfrak{g} es un subespacio vectorial \mathfrak{h} de \mathfrak{g} tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.

Un *ideal* de \mathfrak{g} es un subespacio vectorial \mathfrak{h} de \mathfrak{g} tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es llamada *abeliana* si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Para cada álgebra de Lie \mathfrak{g} , se define la siguiente sucesión $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}^3 \dots$ de subespacios vectoriales de \mathfrak{g} , de forma inductiva por

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}].$$

Ahora si \mathfrak{h} y \mathfrak{k} son ideales de \mathfrak{g} , entonces $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ es también un ideal de \mathfrak{g} . Así, todos los subespacios vectoriales \mathfrak{g}^i son ideales de \mathfrak{g} . Dado que

$$\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}^n$$

se obtiene una serie descendiente de ideales de \mathfrak{g}

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \mathfrak{g}^3 \cdots.$$

El álgebra de Lie \mathfrak{g} es llamada *nilpotente* si $\mathfrak{g}^i = 0$ para algún i . Por lo tanto, cada álgebra de Lie abeliana es nilpotente.

Sea \mathfrak{h} un ideal de \mathfrak{g} . Se define una sucesión diferente de ideales de \mathfrak{g}

$$\mathfrak{h}^{(0)} = \mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{(n+1)} = [\mathfrak{h}^{(n)}, \mathfrak{h}^{(n)}].$$

Los $\mathfrak{h}^{(i)}$ son todos ideales de \mathfrak{g} . Y nuevamente se tiene que

$$\mathfrak{h}^{(n+1)} = [\mathfrak{h}^{(n)}, \mathfrak{h}^{(n)}] \subseteq \mathfrak{h}^{(n)},$$

y por lo tanto una serie descendiente de ideales de \mathfrak{g}

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{(0)} \supseteq \mathfrak{h}^{(1)} \supseteq \mathfrak{h}^{(2)} \supseteq \cdots.$$

Se dice que el ideal \mathfrak{h} de \mathfrak{g} es *soluble* si $\mathfrak{h}^{(i)} = 0$. En particular se dice que el álgebra de Lie \mathfrak{g} es soluble si $\mathfrak{g}^{(i)} = 0$ para algún i . Dado que $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se obtiene que toda álgebra de Lie nilpotente es soluble.

Se puede probar que toda álgebra de Lie admite un único ideal soluble maximal \mathfrak{r} llamado el *radical* de \mathfrak{g} . Se dice que \mathfrak{g} es *semisimple* si su radical \mathfrak{r} es cero. Se dice que \mathfrak{g} es *simple* si \mathfrak{g} no es abeliana y sus únicos ideales son 0 y \mathfrak{g} .

1.2. Subálgebras de Cartan

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y \mathfrak{h} una subálgebra de \mathfrak{g} . Se define el *normalizador* de \mathfrak{h} en \mathfrak{g} como $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] \in \mathfrak{h}, \forall y \in \mathfrak{h}\}$. Es fácil ver que $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ es la subálgebra maximal de \mathfrak{g} que contiene a \mathfrak{h} como ideal.

La subálgebra \mathfrak{h} de \mathfrak{g} es llamada una *subálgebra de Cartan* de \mathfrak{g} si esta satisface las siguientes dos condiciones:

(a) \mathfrak{h} es nilpotente.

(b) \mathfrak{h} es su propio normalizador, es decir, $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$.

Se sabe que toda álgebra de Lie \mathfrak{g} tiene subálgebras de Cartan. También se conoce el siguiente resultado.

Teorema 1.2 *Si \mathfrak{h} es una subálgebra de Cartan de un álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} , entonces \mathfrak{h} es una subálgebra abeliana maximal de \mathfrak{g} .*

La demostración de este resultado se puede ver en [SER].

1.3. Sistema de raíces

Sea V un espacio vectorial real y $\alpha \in V$ con $\alpha \neq 0$. Una *reflexión* con vector α es un automorfismo s_α de V que satisface las siguientes dos condiciones:

(i) $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$,

(ii) El conjunto $H := \{v \in V \mid s_\alpha(v) = v\}$ es un hiperplano de V .

Sea V^* el espacio vectorial dual de V . Tómese como α^* al único elemento de V^* tal que $\alpha^*(\alpha) = 2$ y $\alpha^*(h) = 0$ para toda $h \in H$. Entonces se tiene que $s_\alpha(x) = x - \alpha^*(x)\alpha$ para toda $x \in V$. A α^* se le llama la *raíz inversa* de α . Un subconjunto R de V es un *sistema de raíces* de V si:

(1) R es finito y R genera a V ,

(2) para cada $\alpha \in R$, la reflexión s_α deja invariante a R ,

(3) si $\alpha, \beta \in R$ entonces $s_\alpha(\beta) - \beta$ es un múltiplo entero de α .

La dimensión de V es por definición el *rango* de R . Un sistema de raíces R se dice que es *reducido* si para cada $\alpha \in R$ los únicos múltiplos de α en R son α y $-\alpha$.

Sea R un sistema de raíces de un espacio vectorial V . El *grupo de Weyl* de R es el subgrupo $W(R)$ de $GL(V)$ generado por las reflexiones s_α con $\alpha \in R$.

1.4. Bases

Sea R un sistema de raíces en V . Una base para R es un subconjunto S de R que satisface:

- (i) S es una base para el espacio vectorial V ,
- (ii) cada $\beta \in R$ se puede escribir como una combinación lineal

$$\beta = \sum_{\alpha \in S} m_{\alpha} \alpha,$$

donde los coeficientes m_{α} son enteros y todos tienen el mismo signo (es decir, todos los coeficientes son ≥ 0 ó todos son ≤ 0).

Se sabe que todo sistema de raíces admite al menos una base.

1.5. Matriz de Cartan y gráfica de Coxeter

La matriz de Cartan de un sistema de raíces R , con respecto a la base elegida S , es la matriz $A = (A_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in S}$ donde $A_{\alpha\beta} := \beta^*(\alpha)$. Además, $A_{\alpha\alpha} = 2$, $A_{\alpha\beta} \leq 0$ si $\alpha \neq \beta$. Más aún, si $\alpha \neq \beta$ entonces $A_{\alpha\beta} = 0, -1, -2, -3$. También se sabe que un sistema reducido de raíces está determinado hasta isomorfismo por su matriz de Cartan.

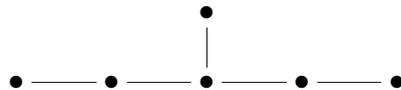
Sea R un sistema de raíces y sea S una base para R . La gráfica de Coxeter de R con respecto a S se define como sigue: los vértices son los elementos de S , dos vértices distintos α y β se unen por $A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}$ aristas llenas.

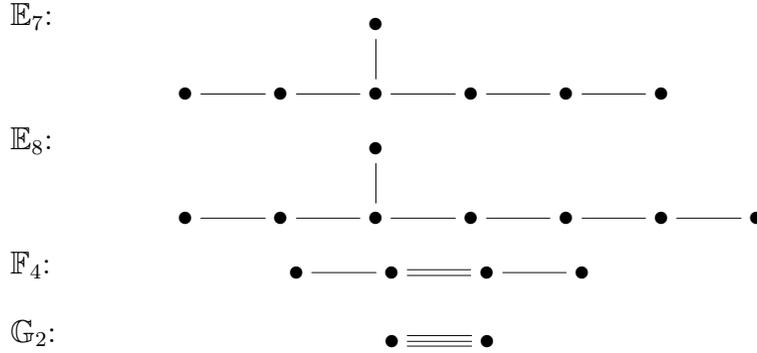
Cada gráfica de Coxeter conexa asociada a un sistema de raíces es isomorfa a una de las gráficas de la siguiente lista:

\mathbb{A}_n ($n \geq 1$): 

\mathbb{B}_n ($n \geq 2$): 

\mathbb{D}_n ($n \geq 4$): 

\mathbb{E}_6 : 



1.6. La descomposición de Cartan y el teorema de Serre

A lo largo de esta sección \mathfrak{g} denotará un álgebra de Lie semisimple compleja y \mathfrak{h} denotará una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} .

Sea α es un elemento del espacio dual \mathfrak{h}^* de \mathfrak{h} . El conjunto

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

es un subespacio vectorial de \mathfrak{g} y $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

A cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\alpha \neq 0$ y $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ se le llama una *raíz de \mathfrak{g}* relativa a \mathfrak{h} ; el conjunto de todas las raíces es denota por R . El siguiente resultado es conocido (ver por ejemplo [SER]).

Teorema 1.3 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ como espacios vectoriales. Más aún, R es un sistema de raíces reducido del espacio vectorial complejo \mathfrak{h}^* .

Sea R un sistema de raíces de un espacio vectorial complejo V . Por consistencia con la notación anterior, el espacio dual de V se denotará con \mathfrak{h} , así se tiene que $V = \mathfrak{h}^*$. Sea $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ una base para R , sean h_1, \dots, h_n las raíces inversas de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y sea $A = (A_{ij}) = (\alpha_j(h_i))$ la matriz de Cartan de R con respecto a S . El siguiente resultado se conoce, ver por ejemplo [SER].

Teorema 1.4 [SER] Sea \mathfrak{g}_4 el álgebra de Lie definida por los generadores e_i, f_i, h_i para $i = 1, 2, \dots, n$ y las relaciones:

$$(R1) [h_i, h_j] = 0,$$

$$(R2) [e_i, f_i] = h_i, [e_i, f_j] = 0 \text{ si } i \neq j,$$

$$(R3) [h_i, e_j] = -A_{ij}e_j, [h_i, f_j] = A_{ij}f_j,$$

$$(R4) (\mathbf{ad} e_j)^{1+n}(e_i) = 0, (\mathbf{ad} e_j)^{1+n}(f_i) = 0, n = \text{máx}\{0, -A_{ij}\}.$$

Entonces \mathfrak{g}_4 es un álgebra de Lie semisimple con subálgebra de Cartan \mathfrak{h} generada por los elementos h_i . El conjunto de raíces de \mathfrak{g} es R . Además se tiene que $\mathfrak{g}_\lambda = 0$ si $\lambda \notin R$.

1.7. El álgebra de Lie asociada a una forma unitaria

La notación y los resultados contenidos en esta sección y en la siguiente están se basan en [BKL].

Una forma unitaria es una forma cuadrática

$$q : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}, q(x) = \sum_{i=1}^N x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j,$$

con coeficientes enteros $q_{ij} \in \mathbb{Z}$. Cada forma unitaria q tiene asociada una matriz casi-Cartan A dada por $A_{ij} = q(c_i + c_j) - q(c_i) - q(c_j)$, donde c_1, \dots, c_N es la base canónica de \mathbb{Z}^N . Si $A_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$ entonces A es una matriz de Cartan.

A cada forma unitaria $q(x) = \sum_{i=1}^N x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j$ se le asocia una bigráfica $B(q)$, de la siguiente forma; el conjunto $\{1, \dots, N\}$ será el conjunto de vértices de la bigráfica, y para $i < j$ se trazan $-A_{ij}$ aristas llenas (A_{ij} aristas punteadas) si $A_{ij} < 0$ (si $A_{ij} > 0$). De forma conversas, dada una bigráfica Δ sin lazos y con conjunto de vértices $\{1, \dots, N\}$, se le asocia una forma unitaria $q_\Delta(x) = \sum_{i=1}^N x_i^2 + \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j$, con $q_{ij} = -n(i, j)$ si hay $n(i, j)$ aristas llenas entre los vértices i y j . Y con $q_{ij} = n(i, j)$ si hay $n(i, j)$ aristas punteadas entre los vértices i y j .

Sean q y q' formas unitarias, se dice que q y q' son \mathbb{Z} -equivalentes si existe una transformación \mathbb{Z} -invertible $T : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}^N$, tal que $q' = q \circ T$.

Se sabe que toda forma unitaria positiva q es \mathbb{Z} -equivalente a una forma q_Δ , donde Δ es una bigráfica que sólo tiene aristas llenas y además es una unión disjunta de diagramas de Dynkin (ver por ejemplo [O]). A la bigráfica Δ se le llama el *tipo de Dynkin* asociado a q .

Dada una forma unitaria positiva q cuya matriz asociada es una matriz de Cartan ($A_{ij} \leq 0$), se escribe $q = q_\Delta$, donde Δ es el *tipo de Dynkin* asociado a q , es decir, si Δ es una unión disjunta de diagramas de Dynkin $\mathbb{A}_N, \mathbb{D}_N, \mathbb{E}_N$. Sea \mathcal{F} el álgebra de Lie libre compleja con generadores e_i, e_{-i}, h_i ($1 \leq i \leq N$). Se toma $I(q)$ el ideal generado por las siguientes relaciones:

$$R_1(q) [h_i, h_j] = 0 \text{ para toda } i, j,$$

$$R_2(q) [h_i, e_{\varepsilon j}] = -\varepsilon A_{ij} e_{\varepsilon j}, \text{ para toda } i, j, \text{ y donde } \varepsilon = \pm 1,$$

$$R_3(q) [e_{\varepsilon i}, e_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i \text{ para toda } i, \text{ donde } \varepsilon = \pm 1,$$

$$R_\infty(q) [e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0 \text{ si } q\left(\sum_{j=1}^t \varepsilon_j c_{i_j}\right) > 1 \text{ para } \varepsilon_j = \pm 1.$$

Para las relaciones $R_\infty(q)$ se usan corchetes multiples definidos de forma inductiva por $[x_1, x_2, \dots, x_t] = [x_1, [x_2, \dots, x_t]]$. Claramente las relaciones de Serre usuales,

$$R_4(q) (\mathbf{ad} e_{\varepsilon i})^{1+n}(e_{\delta j}) = 0 \text{ donde } n = \max\{0, -\varepsilon \delta A_{ij}\}, \text{ para } 1 \leq i, j \leq n \text{ y } \varepsilon, \delta = \pm 1,$$

son un caso especial del conjunto infinito de relaciones $R_\infty(q)$. El álgebra de Lie asociada a la forma unitaria q es el álgebra de Lie cociente $\mathfrak{g}_\infty(q) := \mathcal{F}/I(q)$.

Nótese que $\mathfrak{g}_\infty(q)$ es un álgebra de Lie \mathbb{Z}^N -graduada, donde los grados están dados por $\text{grado}(e_i) = c_i, \text{grado}(e_{-i}) = -c_i, \text{grado}(h_i) = 0$. En general, se consideran morfismos de álgebras de Lie graduadas sobre \mathbb{Z}^N , es decir, morfismos de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tales que existe una función lineal $\Phi : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}^N$ que satisface $\varphi(\mathfrak{g}_\alpha) \subseteq H_{\Phi(\alpha)}$. Para cada monomio, es decir, un elemento que se obtiene de los generadores usando iterativamente el corchete, el grado está bien definido. Todos los elementos de grado α forman el subespacio $\mathfrak{g}(q)_\alpha$. Obsérvese que $\mathfrak{g}(q)_\alpha$ es generado por los monomios de grado α .

Lema 1.5 Para $\varepsilon_j = \pm 1$ y $1 \leq i_j \leq N$, se tiene la siguiente propiedad en $\mathfrak{g}_\infty(q)$,

$$[h_k, e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] = -\left(\sum_{j=1}^t \varepsilon_j A_{ki_j}\right)[e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}]$$

y para cada vector distinto de cero $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, el espacio vectorial $\mathfrak{g}(q)_\alpha$ es generado por todas las expresiones $[e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}]$ con $\sum_{j=1}^t \varepsilon_j c_{i_j} = \alpha$.

Demostración. La primera formula se deduce fácilmente por inducción usando $R_2(q)$, la parte restante se deduce del hecho de que $\mathfrak{g}(q)_\alpha$ es generado por los corchetes multiples. ■

1.8. Inflaciones y deflaciones

Dada una forma unitaria $q : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}$ se define para cada $r \neq s$ y $\sigma = \pm 1$ una transformación lineal T_{sr}^σ mediante $T_{sr}^\sigma c_i = c_i$ para cada $i \neq r$ y $T_{sr}^\sigma c_r = c_r + \sigma c_s$. Otra transformación lineal I_r esta dada por $I_r(c_i) = c_i$ para cada $i \neq r$ y $I_r(c_r) = -c_r$.

Nótese que si $q_{rs} = \pm 1 =: \sigma$ ($q_{rs} = q_{sr}$ si $s < r$) la forma $q' = q \circ T_{sr}^\sigma$ es nuevamente una forma unitaria. En este caso se dice que q' se obtiene de q , por medio de una *deflación* (si $q_{sr} = -1$) ó por medio de una *inflación* (si $q_{sr} = 1$). Más aún, se dice que q' se obtiene de q por medio de un *cambio de signo* si $q' = q \circ I_r$ para algún r . Dos formas unitarias q, q' son *di-equivalentes* si existe una sucesión de formas unitarias $q^{(0)} = q, q^{(1)}, \dots, q^{(t)} = q'$ tal que $q^{(i)}$ se obtiene de $q^{(i-1)}$ por medio de una deflación, inflación ó un cambio de signo para cada $i = 1, \dots, t$. Con $q \sim_{\text{di}} q'$ se denotará el hecho de que q y q' son *di-equivalentes*. Las transformaciones deflación, inflación y cambio de signo serán llamadas *transformaciones elementales*.

Se dirá que las formas unitarias q y q' son *equivalentes* si $q' = q \circ T$ donde T es una matriz entera \mathbb{Z} -invertible.

A cada forma unitaria $q : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}$ se le asocia una bigráfica $B(q)$ con vértices $1, \dots, N$ y aristas definidas como sigue: Dos vértices distintos i y j se unen por $|q_{ij}|$ aristas llenas si $q_{ij} < 0$ y por q_{ij} aristas punteadas si $q_{ij} > 0$.

Cada forma unitaria positiva definida tiene un único tipo de Dynkin Δ tal que q es equivalente con q_Δ . El hecho de que dos formas unitarias q y q' sean

equivalentes se denotará por $q \sim q'$.

Teorema 1.6 *Si $q \sim_{di} q'$ entonces las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\infty(q)$ y $\mathfrak{g}_\infty(q')$ son isomorfas.*

Demostración. Es claro que sólo se tiene que verificar la afirmación para los siguientes casos $q' = q \circ T_{sr}^\sigma$ donde $\sigma = -q_{sr} = \pm 1$, $q' = q \circ I_r$, puesto que el caso general se sigue por inducción.

Sean $e_i, e_{-i}, h_i, e'_i, e'_{-i}, h'_i$ los generadores de $\mathfrak{g}_\infty(q)$ y $\mathfrak{g}_\infty(q')$ respectivamente. Con A, A' se denotarán las matrices de Cartan de q y q' . Se inicia con el primer caso $q' = q \circ T_{sr}^\sigma$. Se definen

$$\tilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} \sigma[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}], & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r, \end{cases} \quad \tilde{h}_i = \begin{cases} h_r + \sigma h_s, & \text{si } i = r \\ h_i, & \text{si } i \neq r. \end{cases}$$

Se mostrará que estos elementos satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_\infty(q')$. La relación $R_1(q')$ es obvia. A continuación se verificarán $R_2(q')$ y $R_3(q')$. Si $i, j \neq r$ entonces $[\tilde{h}_i, \tilde{e}_{\varepsilon j}] = [h_i, e_{\varepsilon j}] = -\varepsilon A_{ij} e_{\varepsilon j} = -\varepsilon A'_{ij} \tilde{e}_{\varepsilon j}$ y $[\tilde{e}_{\varepsilon i}, \tilde{e}_{-\varepsilon i}] = [e_{\varepsilon i}, e_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i = \varepsilon \tilde{h}_i$. Así se obtiene que

$$\begin{aligned} [\tilde{h}_i, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= [h_i, \sigma[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}]] && \text{(por definición)} \\ &= \sigma[e_{\varepsilon r}, [h_i, e_{\sigma\varepsilon s}]] + \sigma[e_{\sigma\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, h_i]] && \text{(por identidad de Jacobi)} \\ &= -\sigma^2 \varepsilon A_{is} [e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}] + \sigma \varepsilon A_{ir} [e_{\sigma\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] && \text{(por } R_2(q) \text{ y bilinealidad)} \\ &= -\varepsilon (A_{ir} + \sigma A_{is}) \sigma [e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}] \\ &= -\varepsilon A'_{ir} \tilde{e}_{\varepsilon r} && (A'_{ir} = A_{ir} + \sigma A_{is}). \end{aligned}$$

De forma similar se tiene que

$$\begin{aligned} [\tilde{h}_r, \tilde{e}_{\varepsilon j}] &= [h_r + \sigma h_s, e_{\varepsilon j}] \\ &= -(A_{rj} + \sigma A_{sj}) e_{\varepsilon j} \\ &= -\varepsilon A'_{rj} \tilde{e}_{\varepsilon j}. \end{aligned}$$

Para completar $R_2(q')$ se calcula

$$\begin{aligned} [\tilde{h}_r, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= \sigma [h_r + \sigma h_s, [e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}]] \\ &= \sigma [e_{\varepsilon r}, [h_r + \sigma h_s, e_{\sigma\varepsilon s}]] + \sigma [e_{\varepsilon s}, [e_{\sigma\varepsilon r}, h_r + \sigma h_s]] \\ &= \sigma (-\sigma \varepsilon A_{rs} - \sigma^2 \varepsilon A_{ss}) [e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}] + \sigma (\varepsilon A_{rr} + \sigma \varepsilon A_{sr}) [e_{\sigma\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \\ &= -\varepsilon (A_{rr} + \sigma A_{sr} + \sigma A_{rs} + \sigma^2 A_{ss}) \sigma [e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}] \\ &= -\varepsilon A'_{rr} \tilde{e}_{\varepsilon r}, \end{aligned}$$

donde en la última ecuación se usa que $A_{ss} = A_{rr} = 2$, $A_{sr} = A_{rs} = -\sigma = \pm 1$ y $A'_{rr} = 2$. Para completar $R_3(q')$ se hace uso repetidamente de la identidad de Jacobi y de la igualdad $[e_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon r}] = 0$ (la cual se obtiene de $R_4(q)$) en la tercer línea del siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
[\tilde{e}_{\varepsilon r}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}] &= \sigma^2[[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}], [e_{-\varepsilon r}, e_{-\sigma\varepsilon s}]] \\
&= [e_{-\varepsilon r}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}], e_{-\sigma\varepsilon s}]] + [e_{-\sigma\varepsilon s}, [e_{-\varepsilon r}, [e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}]]] \\
&= [e_{-\varepsilon r}, [[e_{-\sigma\varepsilon s}, e_{\sigma\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}]] + [e_{-\sigma\varepsilon s}, [e_{\sigma\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon r}]]] \\
&= -\sigma\varepsilon[e_{-\varepsilon r}, [h_s, e_{\varepsilon r}]] + \varepsilon[e_{-\sigma\varepsilon s}, [e_{\sigma\varepsilon s}, h_r]] \\
&= \sigma\varepsilon^2 A_{sr}[e_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}] + \sigma\varepsilon^2 A_{rs}[e_{-\sigma\varepsilon s}, e_{\sigma\varepsilon s}] \\
&= -\sigma\varepsilon A_{sr} h_r - \sigma^2 \varepsilon A_{sr} h_s \\
&= \sigma^2 \varepsilon h_r + \sigma^2 \varepsilon h_s \\
&= \varepsilon \tilde{h}_r.
\end{aligned}$$

Nuevamente se usa $A_{sr} = A_{rs} = -\sigma$ al final. Para $R_\infty(q')$ se observa que si $q(\alpha) > 1$ entonces por Lema 1.7 y $R_\infty(q)$ se tiene que $\mathfrak{g}(q)_\alpha = 0$. Sea $\alpha' = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j c_{i_j}$ tal que $q'(\alpha') > 1$. Se debe mostrar que $X = [\tilde{e}_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, \tilde{e}_{\varepsilon_t i_t}] = 0$.

Se tiene que $X \in \mathfrak{g}_\infty(q)_{\tilde{\alpha}}$, donde $\tilde{\alpha} = \sum_{j=1}^t \varepsilon_j \tilde{c}_{i_j}$ con $\tilde{c}_a = c_a$ si $a \neq r$ y $\tilde{c}_r = c_r + \sigma c_s$, o de manera abreviada $\tilde{c}_a = T_{sr}^\sigma c_a$, para cada a . Por lo tanto $\tilde{\alpha} = T_{sr}^\sigma \alpha'$ y así se tiene que $q(\tilde{\alpha}) = q(T_{sr}^\sigma \alpha') = q'(\alpha') > 1$. Lo cual implica que $\mathfrak{g}_\infty(q)_{\tilde{\alpha}} = 0$ por la observación anterior.

Sea L la subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}_\infty(q)$ generada por los elementos $\tilde{e}_i, \tilde{e}_{-i}, \tilde{h}_i$, los cuales por lo anterior satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_\infty(q')$. Así, se obtiene un homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie graduadas $\varphi : \mathfrak{g}_\infty(q') \rightarrow L$, el cual manda e'_{ε_i} a $\tilde{e}_{\varepsilon_i}$ y h'_i a \tilde{h}_i .

Usando $R_4(q)$ y Lema 4.2 en la segunda línea se tiene que

$$\begin{aligned}
[\sigma \tilde{e}_{-\sigma\varepsilon s}, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= \sigma^2[e_{-\sigma\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}]] \\
&= [e_{\varepsilon r}, [e_{-\sigma\varepsilon s}, e_{\sigma\varepsilon s}]] \\
&= -\sigma\varepsilon[e_{\varepsilon r}, h_s] && \text{(por } R_3(q)) \\
&= -\sigma\varepsilon^2 A_{sr} e_{\varepsilon r} && \text{(por } R_2(q)) \\
&= e_{\varepsilon r}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que $L = \mathfrak{g}_\infty(q)$. Obsérvese que $q'_{sr} = -q_{sr} =: -\sigma'$. Repitiendo el procedimiento y definiendo elementos

$$\tilde{e}'_{\varepsilon i} = \begin{cases} \sigma'[e'_{\varepsilon r}, e'_{\sigma'\varepsilon s}], & \text{si } i = r \\ e'_{\varepsilon r}, & \text{si } i \neq r \end{cases} \quad \tilde{h}'_i = \begin{cases} h'_r + \sigma'h'_s, & \text{si } i = r \\ h'_i, & \text{si } i \neq r \end{cases}$$

se obtiene un homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie graduadas $\psi : \mathfrak{g}_\infty(q) \rightarrow \mathfrak{g}_\infty(q')$ que manda $e_{\varepsilon i}$ a $\tilde{e}'_{\varepsilon i}$ y h_i a \tilde{h}'_i .

Para demostrar que φ es en realidad un isomorfismo, se mostrará que $\varphi \circ \psi = id$, la demostración de que $\psi \circ \varphi = id$ es similar. Para $i \neq r$ se tiene que $\varphi \circ \varphi(e_{\varepsilon i}) = e_{\varepsilon i}$, $\varphi \circ \varphi(h_i) = h_i$. Más aún, $\varphi \circ \varphi(h_r) = \varphi(h'_r + \sigma'h'_s) = h_r + \sigma h_s + \sigma'h_s = h_r$ de que $\sigma' = -\sigma$.

Usando que $[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma'\varepsilon s}] = [e_{\varepsilon r}, e_{-\sigma\varepsilon s}] = 0$ (lo cual se sigue por $R_4(q)$) en la cuarta ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi \circ \varphi(e_{\varepsilon r}) &= \varphi(\sigma'[e'_{\varepsilon r}, e'_{\sigma'\varepsilon s}]) \\ &= \sigma'[\varphi(e'_{\varepsilon r}), \varphi(e'_{\sigma'\varepsilon s})] \\ &= \sigma'\sigma[[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}], e_{\sigma'\varepsilon s}] \\ &= -[[e_{\sigma'\varepsilon s}, e_{\sigma\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}] \\ &= -\sigma'\varepsilon[h_s, e_{\varepsilon r}] \\ &= \sigma'\varepsilon^2 A_{sr} e_{\varepsilon r} \\ &= -\sigma'\sigma e_{\varepsilon r} \\ &= e_{\varepsilon r}. \end{aligned}$$

Así sólo nos resta el caso donde $q' = q \circ I_r$. Obsérvese que $q'_{ri} = -q_{ri}$ para cada $i \neq r$, $q'_{ij} = q_{ij}$ para cada $i, j \neq r$. Nuevamente los elementos

$$\tilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} e_{-\varepsilon r}, & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r \end{cases} \quad \tilde{h}_i = \begin{cases} -h_r, & \text{si } i = r \\ h_i, & \text{si } i \neq r \end{cases}$$

satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_\infty(q')$. La verificación es similar a la del caso anterior. La subálgebra de Lie generada por $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y \tilde{h}_i ($i=1, \dots, N$ y $\varepsilon = \pm 1$) es claramente $\mathfrak{g}_\infty(q)$. Por lo tanto se obtiene un homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie graduadas $\varphi : \mathfrak{g}_\infty(q') \rightarrow \mathfrak{g}_\infty(q)$ el cual manda $e'_{\varepsilon i}$ a $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y h'_i a \tilde{h}_i . Es fácil verificar que $\varphi \circ \varphi = id$, de aquí que φ es un isomorfismo de álgebras de Lie graduadas. Esto finaliza la demostración. ■

Sea Δ un diagrama de Dynkin, $\Delta = \mathbb{A}_N(N \geq 1)$, $\mathbb{D}_N(N \geq 4)$, $\mathbb{E}_N(N =$

6, 7, 8). Sea $\mathfrak{g}_4(\Delta)$ el álgebra de Lie en los generadores e_i, e_{-i}, h_i y tal que satisfacen las relaciones (R1) – (R4). Finalmente, con q_Δ se denotará la forma unitaria asociada a Δ la cual es por supuesto positiva.

Proposición 1.7 *Para cada diagrama Dynkin Δ se tiene que*

$$\mathfrak{g}_4(\Delta) = \mathfrak{g}_\infty(q_\Delta).$$

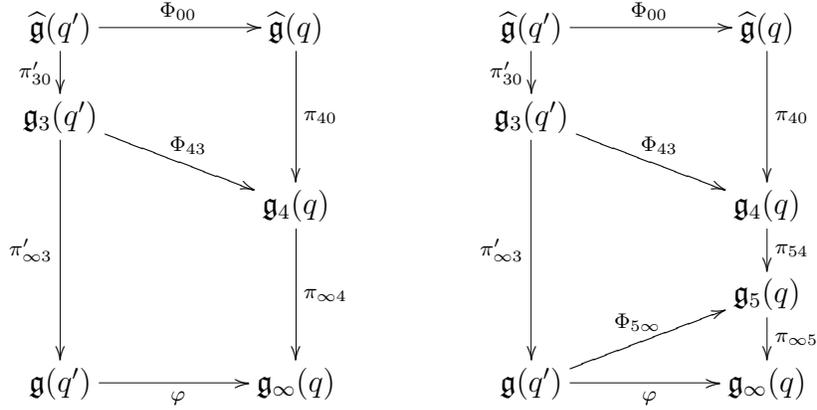
Demostración. Los generadores de $\mathfrak{g}_4(\Delta)$ satisfacen las relaciones de Serre (R1) – (R4). Ahora usando la bien conocida descomposición en espacios de raíces de $\mathfrak{g}_4(\Delta)$ se obtiene que todas las relaciones $R_\infty(q_\Delta)$ se satisfacen. ■ El hecho de que las relaciones son descritas por un conjunto infinito $R_\infty(q)$ no es satisfactorio. En el próximo lema se mostrará que para q positiva basta tomar un subconjunto finito de relaciones $R_1(q) - R_\infty(q)$.

Más precisamente, se denotará por $R_u(q)$ ($u = 1, 2, 3, \infty$) al conjunto de relaciones definido por la forma cuadrática $q : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}$ (ver Sección 1.7), por $\widehat{\mathfrak{g}}(q)$ al álgebra de Lie libre generada por $\{e_i, e_{-i}, h_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ y por $I(q)$ al ideal de $\widehat{\mathfrak{g}}(q)$ generado por $R_1(q) - R_\infty(q)$.

Lema 1.8 *Si T es una deflación, inflación o un cambio de signo para q positiva y $q' = q \circ T$ entonces el ideal $I(q)$ es generado por un subconjunto finito de las relaciones $R_1(q) - R_\infty(q)$ si y sólo si $I(q')$ es generado por un subconjunto finito de las relaciones $R_1(q') - R_\infty(q')$.*

Demostración. Para $u = 3, \infty$ sea $I_u(q)$ el ideal de $\widehat{\mathfrak{g}}(q)$ generado por $R_1(q) - R_u(q)$ y $\mathfrak{g}_u(q) = \widehat{\mathfrak{g}}(q)/I_u(q)$. También se toma $I_0(q) = 0$, $\mathfrak{g}_0(q) = \widehat{\mathfrak{g}}(q)$. Se denotará con $\pi_{uv} : \mathfrak{g}_v(q) \rightarrow \mathfrak{g}_u(q)$ a la proyección canónica para $v \leq u$. De manera similar se define $I_u(q')$, $\mathfrak{g}_u(q')$ y π'_{uv} .

Primero se verifica el caso cuando $T = T_{sr}^\sigma$ es una deflación o una inflación para q . Se definen $\tilde{e}_{\varepsilon i}, \tilde{h}_i$ como en la demostración del Teorema 1.6. Se tiene así un morfismo $\Phi_{00} : \widehat{\mathfrak{g}}(q') \rightarrow \widehat{\mathfrak{g}}(q)$, el cual manda $e'_{\varepsilon i}$ a $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y h'_i a \tilde{h}_i . En la demostración del Lema 1.6 se mostró que los elementos $\tilde{e}_{\varepsilon i}, \tilde{h}_i$ en $\mathfrak{g}_\infty(q)$ satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_3(q')$, es decir, Φ_{00} induce un morfismo $\Phi_{43} : \mathfrak{g}_3(q') \rightarrow \mathfrak{g}_4(q)$ que hace el diagrama del lado izquierdo conmutativo, donde φ es el isomorfismo en la demostración del Teorema 1.6:



Supóngase ahora que existe un subconjunto finito de relaciones de $R_1(q') - R_{\infty}(q')$ que generan a $I(q')$, es decir, $I(q') = \langle R_1(q'), R_2(q'), R_3(q'), \rho'_1, \dots, \rho'_n \rangle$ donde cada ρ'_i está en $R_{\infty}(q')$.

Se denota con t'_i a la longitud de ρ'_i y con α'_i el grado de ρ'_i . Más aún, se toma $\rho_i = \Phi_{00}(\rho'_i)$. Nótese que la longitud t_i de ρ_i y el grado α_i de ρ_i satisface $t_i \leq 2t'_i$ y $T\alpha_i = \alpha'_i$, y que en general $\text{grado}(\Phi(\alpha)) = T(\text{grado}(\alpha))$. Por lo tanto $q(\alpha_i) = q(\text{grado}(\rho_i)) = q(T(\text{grado}(\rho'_i))) = q'(\alpha'_i) > 1$ y como $\{\rho_1, \dots, \rho_n\} \subset (R5)_q \subset (R5)_q$ es el siguiente conjunto de relaciones

$$R_5(q) [e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0 \text{ si } \text{grado}([e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}]) = \alpha_i \text{ y } t \leq t_i, i = 1, \dots, n.$$

Entonces, por construcción, los elementos $\tilde{e}_{\varepsilon_i}, \tilde{h}_i$ en $\mathfrak{g}_{\infty}(q)$ satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_3(q'), \rho'_1, \dots, \rho'_N$ y por lo tanto, se obtiene un morfismo $\Phi_{5\infty} : \mathfrak{g}(q') \rightarrow \mathfrak{g}_5(q)$ que hace conmutativo el diagrama derecho de arriba.

Dado que $\varphi = \pi_{\infty 5} \Phi_{5\infty}$ es un isomorfismo, se tiene que $\Phi_{5\infty}$ es inyectivo. Ahora usando el hecho que Φ_{43} y π_{54} son sobreyectivos, se concluye que $\Phi_{5\infty}$ es sobreyectivo y por lo tanto $\Phi_{5\infty}$ es un isomorfismo. De donde se sigue que $\pi_{\infty 5}$ es un isomorfismo. Del hecho que $R_1(q) - R_5(q)$ son todas finitas, se sigue que $I(q) = I_5(q)$ es generado por un subconjunto finito de las relaciones $R_1(q) - R_{\infty}(q)$.

El caso cuando T es un cambio de signo es inmediato y así, el resultado se deduce por el hecho de que T^{-1} es una inflación, deflación o cambio de signo de q' con $q = q' \circ T^{-1}$. ■

Proposición 1.9 *Si q es una forma unitaria positiva, entonces existe un subconjunto finito de relaciones de $R_1(q) - R_{\infty}(q)$ el cual es suficiente para*

definir $\mathfrak{g}_\infty(q)$.

Demostración. Se deduce directamente del Teorema 1.6, del Lema anterior y de la Proposición 1.7. \blacksquare

El objetivo de este trabajo es encontrar un conjunto más explícito de estas relaciones que son suficientes para definir el álgebra $\mathfrak{g}_\infty(q)$.

1.9. Raíces y relaciones finitas

Sea q una forma unitaria positiva. Considérese el conjunto

$$M = \{[e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] \mid q(\sum_{j=1}^t \varepsilon_j c_j) = 1, \varepsilon_j = \pm 1\}.$$

Se define $R_5(M)$ como el conjunto de las siguientes relaciones:

$$[e_{\varepsilon_1 i_1}, e_{\varepsilon_2 i_2}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0$$

cuando $[e_{\varepsilon_2 i_2}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] \in M$ y $q(\sum_{j=1}^t \varepsilon_j c_j) > 1$.

Se sabe que el número de raíces de una forma unitaria positiva es finito (ver por ejemplo [O], [R]). Así se tiene que M es un conjunto finito y por lo tanto $R_5(M)$ también es un conjunto finito. Más aún, es claro que bastan las relaciones $R_1(q), R_2(q), R_3(q), R_4(q), R_5(M)$ para definir el álgebra $\mathfrak{g}_\infty(q)$. Sin embargo, nos preguntamos si existe un subconjunto propio de estas relaciones que baste para definir el álgebra $\mathfrak{g}_\infty(q)$. En la siguiente sección se verá la propuesta de este trabajo.

1.10. La propuesta de este trabajo

Sea q una forma unitaria. Un *ciclo* en q es una tupla de índices (i_1, \dots, i_t) tales que $q_{i_a i_b} \neq 0$ si y sólo si $a - b \equiv \pm 1 \pmod t$. Se definen las relaciones siguientes: $R_5(q) \quad [e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0$ donde (i_1, \dots, i_t) es un ciclo en q y $\varepsilon_t = \pm 1, \varepsilon_l = -q_{i_l, i_{l+1}} \varepsilon_{l+1}$ para $1 \leq l \leq t - 1$.

Sea $\mathfrak{g}_5(q)$ el álgebra de Lie definida por los generadores $e_i, e_{-i}, h_i (1 \leq i \leq N)$ con relaciones $R_1(q) - R_5(q)$.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar el siguiente resultado concerniente a las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_5(q)$ asociadas a formas unitarias positivas.

Teorema 1.10 *Sean q y q' formas unitarias positivas. Entonces se tiene que*

(a) $q \sim q'$ si y sólo si $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_5(q')$,

(b) $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_4(q_\Delta)$, donde Δ es el tipo de Dynkin de q .

Observación 1.11 *Para demostrar el Teorema 1.10 es suficiente demostrar la siguiente implicación: Si $q \sim q'$ entonces $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_5(q')$.*

Demostración. Para mostrar (b), sea $q = q_\Delta$, entonces se tiene que $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_5(q_\Delta)$, pero $\mathfrak{g}_5(q_\Delta) = \mathfrak{g}_4(q_\Delta)$ puesto que no hay ciclos en q_Δ y consecuentemente $R_5(q)$ es el conjunto vacío.

Ahora, supóngase que $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_5(q')$. Si Δ es el tipo de Dynkin de q y Δ' es el tipo de Dynkin de q' entonces, se sigue de (b) que $\mathfrak{g}_4(q_\Delta) \simeq \mathfrak{g}_4(q_{\Delta'})$ y por lo tanto $\Delta = \Delta'$, ver por ejemplo [SER]. Consecuentemente se tiene que $q \sim q_\Delta = q_{\Delta'} \sim q'$. ■

Si una forma unitaria q satisface $(-q_{i_1 i_2})(-q_{i_2 i_3}) \cdots (-q_{i_{t-1} i_t})(q_{i_t i_1}) = -1$ para cada ciclo (i_1, \dots, i_t) en q , se dice que q satisface la *condición de ciclo*. Por ejemplo, si q es una forma unitaria positiva definida entonces q satisface la condición de ciclo.

Observación 1.12 *El conjunto de relaciones $R_5(q)$ es un subconjunto de $R_\infty(q)$.*

Demostración. De que q es positiva definida, para cada ciclo $\gamma = (i_1, \dots, i_t)$ se tiene que $(-q_{i_1 i_2})(-q_{i_2 i_3}) \cdots (-q_{i_{t-1} i_t})(q_{i_t i_1}) = -1$, es decir, hay un número impar de coeficientes positivos a lo largo del ciclo γ . Por lo tanto,

$$\varepsilon_1 = \prod_{a=1}^{t-1} (-q_{i_a i_{a+1}}) = q_{i_t i_1} \varepsilon_t$$

y de aquí que

$$q\left(\sum_{a=1}^t \varepsilon_a c_{i_a}\right) = 1 + q_{i_1 i_t} \varepsilon_1 \varepsilon_t + q_{i_t i_{t-1}} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + q\left(\sum_{a=1}^{t-1} \varepsilon_a c_{i_a}\right) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2.$$

■
Para demostrar el Teorema 1.10 se hacen reducciones iteradas a situaciones más y más especiales, donde los pasos principales y las implicaciones son como sigue:

Teorema 1.10 \Leftarrow Proposición 2.7 \Leftarrow Lema 3.2 \Leftarrow Lema 3.5

Capítulo 2

Transformaciones elementales

2.1. El efecto de las transformaciones elementales sobre las formas cuadráticas

Antes de iniciar el estudio sobre los ciclos y las relaciones ($R5$) se necesita saber cuales son los cambios producidos en una forma unitaria positiva al aplicarle una inflación, una deflación ó un cambio de signo. Por lo que en la siguiente sección se desarrollarán los cálculos pertinentes para saber cuales son estos cambios. Para calcular q'_{ij} en las siguiente sección se considerarán los siguientes casos:

- (a) $i \neq r, j \neq r$.
- (b) $i = r, j = s$.
- (c) $i = r, r \neq j \neq s$.

El Efecto de I_r :

Se toma $q' = q \circ I_r$ con q positiva. Primero se verá que pasa en el caso (a). Como $q' = q \circ I_r$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned}q'_{ij} &= q'(c_i + c_j) - q'(c_i) - q'(c_j) \\ &= q \circ I_r(c_i + c_j) - q \circ I_r(c_i) - q \circ I_r(c_j) \\ &= q(c_i + c_j) - q(c_i) - q(c_j) \\ &= q_{ij}.\end{aligned}$$

En el caso (b) se tiene que

$$\begin{aligned}
q'_{rs} &= q'(c_r + c_s) - q'(c_r) - q'(c_s) \\
&= q(-c_r + c_s) - q(-c_r) - q(c_s) \\
&= 2 - q_{rs} - 1 - 1 \\
&= -q_{rs}.
\end{aligned}$$

Finalmente en el caso (c) se tiene que

$$\begin{aligned}
q'_{rj} &= q'(c_r + c_s) - q'(c_r) - q'(c_j) \\
&= q(-c_r + c_s) - q(-c_r) - q(c_j) \\
&= 2 - q_{rs} - 1 - 1 \\
&= -q_{rs}.
\end{aligned}$$

Así, se tiene que la bigráfica $B(q')$ se obtiene de la bigráfica $B(q)$ cambiando cada arista llena que incide en el vértice r por una arista punteada y vice-versa cada arista punteada por una llena.

El efecto de T_{sr}

Aquí se supondrá que $q' = q \circ T_{sr}^\sigma$ donde $1 = \sigma := -q_{sr}$ y que q es positiva. En el caso (a) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
q'_{ij} &= q'(c_i + c_j) - q'(c_i) - q'(c_j) \\
&= q(c_i + c_j) - q(c_i) - q(c_j) \\
&= q_{ij}.
\end{aligned}$$

En el caso (b) se tiene que

$$\begin{aligned}
q'_{rs} &= q'(c_s + c_r) - q'(c_r) - q'(c_s) \\
&= q(c_s + c_r + c_s) - q(c_r + c_s) - q(c_s) \\
&= q(c_r + 2c_s) - q(c_r + c_s) - q(c_s) \\
&= 5 + 2q_{sr} - 2 - q_{sr} - 1 \\
&= 1 \quad \text{(puesto que } q_{sr} = -1) \\
&= -q_{rs}.
\end{aligned}$$

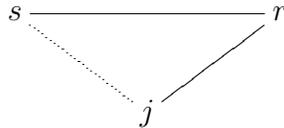
En el caso (c) se sigue que

$$\begin{aligned}
 q'_{rj} &= q'(c_r + c_j) - q'(c_r) - q'(c_j) \\
 &= q(c_r + c_s + c_j) - q(c_r + c_s) - q(c_j) \\
 &= 3 + q_{rs} + q_{rj} + q_{sj} - q_{rs} - 2 - 1 \\
 &= q_{rj} + q_{sj}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

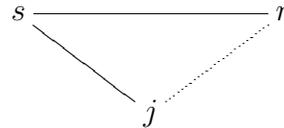
Veamos ahora los posibles valores que pueden tomar q_{rj} , q_{sj} , es decir tenemos que considerar los siguientes casos:

- (i) $q_{rj} \neq 0$, $q_{sj} \neq 0$.
- (ii) $q_{rj} \neq 0$, $q_{sj} = 0$.
- (iii) $q_{rj} = 0$, $q_{sj} = 0$.
- (iv) $q_{rj} = 0$, $q_{sj} \neq 0$.

En el inciso (i) se tiene que los vértices r, s, j forman un ciclo. Ahora como q es positiva este ciclo tiene que cumplir con la condición de ciclo, es decir, el número de aristas punteadas tiene que ser impar. Así, como $q_{rs} = -1$ se tienen los siguientes dos casos



Caso 1



Caso 2

en ambos casos de 2.1 se sigue que $q'_{rj} = 0$.

Dado el inciso (ii) de 2.1 se tiene $q'_{rj} = q_{rj}$. Ahora en el caso (iii) por 2.1 se tiene que $q'_{rj} = q_{sj}$. Finalmente en el caso (iv) de 2.1 se sigue que $q'_{rj} = q_{rj}$. Así la bigráfica $B(q')$ se obtiene de la bigráfica $B(q)$ de la siguiente forma. Para cada vértice j adyacente a r y a s en $B(q)$ se borra la arista entre r y j . Para cada vértice j que es adyacente con s por medio de una arista llena (punteada), pero que no es adyacente con r se traza una arista llena (punteada) entre el vértice r y el vértice j . Se cambia la arista llena entre el vértice s y el vértice r por una arista punteada. Todas las aristas restantes

permanecen sin cambios.

El efecto de T_{sr}^{-1} :

En este apartado se supondrá que $q' = q \circ T_{sr}^\sigma$ donde $-1 = \sigma := -q_{sr}$ y q es positiva.

Dado el inciso (a) de la página 17 se tiene que

$$\begin{aligned} q'_{ij} &= q'(c_i + c_j) - q'(c_i) - q'(c_j) \\ &= q(c_i + c_j) - q(c_i) - q(c_j) \\ &= q_{ij}. \end{aligned}$$

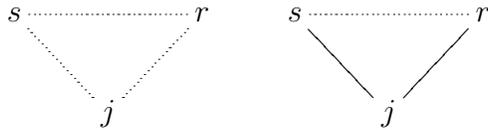
En el caso (b) se tiene que

$$\begin{aligned} q'_{rs} &= q'(c_r + c_s) - q'(c_r) - q'(c_s) \\ &= q(c_r - c_s + c_s) - q(c_r - c_s) - q(c_s) \\ &= q(c_r) - q(c_r - c_s) - q(c_s) \\ &= -q(c_r - c_s) \\ &= -2 + q_{rs} \\ &= -1 \\ &= -q_{sr}. \end{aligned}$$

En el caso (c) se tiene que

$$\begin{aligned} q'_{rj} &= q'(c_r + c_j) - q'(c_r) - q'(c_j) \\ &= q(c_r - c_s + c_j) - q(c_r - c_s) - q(c_j) \\ &= (3 - q_{sr} + q_{rj} - q_{sj}) - (2 - q_{sj}) - 1 \\ &= q_{rj} - q_{sj}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ahora se verá que valores toma q'_{rj} dependiendo de valores que tomen q_{rj} , q_{sj} . Así volveremos a considerar los casos (i) – (iv) de la Sección 2.1. En el caso (i) se sigue que los vértices s, r, j forman un ciclo. Ahora como q es positiva este ciclo tiene que satisfacer la condición de ciclo, más aún como $q_{sr} = 1$ sólo son posibles los siguientes dos casos:



y así de 2.2 se sigue que $q'_{rj} = 0$. En el caso (ii) de 2.2 se sigue que $q'_{rj} = q_{rj}$. En el caso (iii) por 2.2 se sigue que $q'_{rj} = 0$. Finalmente en el caso (iv) de 2.2 se sigue que $q'_{rj} = -q_{sj}$.

Así la bigráfica $B(q')$ se obtiene de la bigráfica $B(q)$ de la siguiente forma. Para cada vértice j adyacente a r y a s en $B(q)$ se borra la arista entre r y j . Para cada vértice j que es adyacente con s por medio de una arista llena (punteada), pero que no es adyacente con r se traza una arista punteada (llena) entre el vértice r y el vértice j . Finalmente se cambia la arista punteada entre el vértice s y el vértice r por una arista llena. Todas las aristas restantes permanecen sin cambio.

2.2. Reducción a transformaciones elementales

Aunque la demostración del siguiente resultado es bien conocida, es difícil encontrar una referencia explícita para esta y por lo tanto, se incluye una demostración aquí.

Proposición 2.1 *Sean q y q' formas unitarias positivas. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $q \sim q'$.

(b) Las formas unitarias q y q' tienen el mismo tipo de Dynkin.

(c) $q \sim_{di} q'$.

Demostración. Si $q : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}$ es positiva definida entonces, se tiene que $q^{-1}(1)$ es un conjunto finito. En efecto, sea $x \in q^{-1}(1)$, se toma

$$q(x) = \rho_1 y_1^2 + \dots + \rho_N y_N^2$$

con ρ_i números racionales positivos y $y_i = x_i + \lambda_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + \lambda_{i,N}$, donde λ_{ij} son números racionales. Así se tiene que $|x_N| \leq \frac{1}{\sqrt{\rho_N}} =: \sigma_N$, de forma inductiva se obtiene que $|x_i| - \left| \sum_{j>i} \lambda_{ij}x_j \right| \leq \left| x_i + \sum_{j>i} \lambda_{i,j}x_j \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\rho_i}}$, de donde se sigue que $|x_i| \leq \frac{1}{\sqrt{\rho_i}} + \sum_{j>i} |\lambda_{ij}| \sigma_j =: \sigma_i$. Lo cual muestra que cada coordenada de $x \in \mathbb{Z}^N$, está acotada y por lo tanto se tiene que $q^{-1}(1)$ es un conjunto finito.

Veamos que (a) implica (b). Sea $R(q) = \{x \in \mathbb{N}^N \mid q(x) = 1\}$ el conjunto

de raíces positivas. Si existen $s_1 \neq r_1$ con $q_{s_1 r_1} > 0$, entonces como q es positiva definida, se tiene que $q_{s_1 r_1} = 1$ y se toma $q_1 = q \circ T_{s_1 r_1}^{-1}$. Así se tiene que $T_{s_1 r_1}^{+1} : q^{-1}(1) \rightarrow q_1^{-1}(1)$ es una función biyectiva y $T_{s_1 r_1}^{+1} : R(q) \rightarrow R(q_1)$ es una función inyectiva. Ahora de que $c_{r_1} = T_{s_1 r_1}^{+1}(c_{r_1} - c_{s_1}) \in R(q_1)$ pero $c_{r_1} - c_{s_1} \notin R(q)$, se tiene entonces que hay menos elementos en $R(q)$ que en $R(q_1)$. Si existen $s_2 \neq r_2$ con $(q_1)_{s_2 r_2} > 0$, igual que antes se tiene que $(q_1)_{s_2 r_2} = 1$ y se toma $q_2 = q_1 \circ T_{s_2 r_2}^{-1}$. Así se tiene que $T_{s_2 r_2}^{+1} : q_1^{-1}(1) \rightarrow q_2^{-1}(1)$ es una función biyectiva y $T_{s_2 r_2}^{+1} : R(q_1) \rightarrow R(q_2)$ es una función inyectiva. También se tiene que hay menos elementos en $R(q_1)$ que en $R(q_2)$. Este proceso no puede continuar por siempre, de que el conjunto $R(q_i)$ crece en cada paso y está acotado por la cardinalidad del conjunto $q^{-1}(1)$. Así se concluye, que este proceso debe terminar en una forma unitaria positiva q_m tal que $(q_m)_{ij} \leq 0$ para toda $i \neq j$. La matriz casi-Cartan de q_m es entonces una matriz de Cartan y de que q_m es positiva definida, el diagrama de Coxeter asociado a q_m es una unión disjunta de diagramas de Dynkin (de tipo \mathbb{A}_n , \mathbb{D}_n y \mathbb{E}_n).

Esto muestra que para cada forma unitaria positiva definida, existe un tipo de Dynkin Δ tal que $q \sim_{di} q_\Delta$. Este tipo de Dynkin es determinado de forma única por q , como muestra el siguiente argumento: Se traza la gráfica $G(q)$ cuyos vértices son $q^{-1}(1)$ y hay una arista entre los vértices x, y si $q(x - y)$ es igual a cero o uno. Obsérvese que $G(q) \simeq G(q')$ si q y q' son equivalentes. De que los componentes de $G(q)$ corresponden a los componentes de Δ y para cada componente G de $G(q)$, el número de vértices de i tales que $\pm c_i \in G$ determina el correspondiente diagrama de Dynkin de manera única. Lo cual muestra que $(a) \Rightarrow (b)$.

Sean Δ y Δ' , los tipos de Dynkin de q y q' respectivamente. Si $\Delta = \Delta'$ entonces de lo anterior $q \sim_{di} q_\Delta = q_{\Delta'} \sim_{di} q'$, lo cual demuestra que $(b) \Rightarrow (c)$. Finalmente, si $q \sim_{di} q' \Rightarrow \Delta = \Delta' \Rightarrow q \sim q_\Delta = q_{\Delta'} \sim q'$. \blacksquare

La proposición anterior y la Observación 1.11 implican que es suficiente demostrar el siguiente resultado para demostrar el Teorema 1.10.

Teorema 2.2 *Si q y q' son formas unitarias positivas definidas, entonces se tiene que $q \sim_{di} q'$ si y sólo si $\mathfrak{g}_5(q)$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_5(q')$.*

El siguiente resultado es útil para reducir la demostración a situaciones especiales.

Lema 2.3 Sean q una forma unitaria, $s \neq r$, $\sigma = -q_{sr}$ y $1 \leq i_1, \dots, i_t \leq n$. Entonces $q \circ T_{sr}^\sigma \circ I_{i_1} \circ \dots \circ I_{i_t} = q \circ I_{i_1} \circ \dots \circ I_{i_t} \circ T_{sr}^{\sigma'}$, donde $\sigma' = (-1)^\varepsilon \sigma$ y ε es el número de $1 \leq a \leq t$ tales que $i_a \in \{r, s\}$.

Demostración. La demostración se obtiene de manera directa del echo de que $T_{sr}^\sigma \circ I_i = I_i \circ T_{sr}^{-\sigma}$ para $i = r, s$ y también de que $T_{sr}^\sigma \circ I_i = I_i \circ T_{sr}^\sigma$. ■

Observación 2.4 Para demostrar el Teorema 2.2, es suficiente considerar los siguientes dos casos $q' = q \circ I_r$ y $q' = q \circ T_{sr}^{+1}$ (es decir, $q_{rs} = -1$).

Demostración. Por definición de di-equivalencia, es suficiente considerar los siguientes casos: $q' = q \circ P$ donde P es una matriz de permutación, $q' = q \circ I_r$ y $q' = q \circ T_{sr}^{\pm 1}$ ($q_{rs} = \pm 1$). Sin embargo, el primer caso, es decir, $q' = q \circ P$ es un calculo directo y si $q_{sr} = 1$ entonces se tiene que $q \circ T_{sr}^{-1} = q \circ I_r \circ T_{sr}^{+1} \circ I_r$, por Lema 2.3. ■

Proposición 2.5 Sea q una forma unitaria positiva. Si $q' = q \circ I_r$ donde I_r es un cambio de signo, entonces las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_5(q)$ y $\mathfrak{g}_5(q')$ son isomorfas.

Demostración. Se denotan por e'_i, e'_{-i}, h'_i los generadores de $\mathfrak{g}_5(q')$ y por e_i, e_{-i}, h_i a los generadores de $\mathfrak{g}_5(q)$. Sean A y A' las matrices de Cartan de q y q' respectivamente.

Se definen elementos $\tilde{e}_i, \tilde{e}_{-i}, \tilde{h}_i$ en $\mathfrak{g}_5(q)$ que satisfacen $R_1(q') - R_5(q')$. Esto implica que se tiene un homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_5(q') & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{g}_5(q) \\ e'_{\varepsilon i} & \longmapsto & \tilde{e}_{\varepsilon i} \\ h' & \longmapsto & \tilde{h}_i. \end{array}$$

Sean

$$\tilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r \\ e_{-\varepsilon r}, & \text{si } i = r \end{cases} \quad \text{and} \quad \tilde{h}_i = \begin{cases} h_i, & \text{si } i \neq r \\ -h_r, & \text{si } i = r. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ahora se verificará que efectivamente $\tilde{e}_{\varepsilon i}, \tilde{h}_i$ satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_5(q')$.

La relaciones $R_1(q')$ se verifican de manera obvia. Si $i, j \neq r$ entonces se tiene que $[\tilde{h}_i, \tilde{e}_{\varepsilon j}] = [h_i, e_{\varepsilon j}] = -\varepsilon A_{ij} e_{\varepsilon j} = -\varepsilon A'_{ij} \tilde{e}_{\varepsilon j}$ y $[\tilde{e}_{\varepsilon i}, \tilde{e}_{-\varepsilon i}] = [e_{\varepsilon i}, -e_{\varepsilon i}] = \varepsilon h_i = \varepsilon \tilde{h}_i$, es decir, si $i, j \neq r$ las relaciones $R_2(q')$ y $R_3(q')$ se satisfacen. Podemos suponer que $i = r$ ó $j = r$. Se verificará primero que se satisface $R_2(q')$ cuando $i \neq r$ y $j = r$. Así se tiene que

$$\begin{aligned} [\tilde{h}_i, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= [h_i, e_{-\varepsilon r}] \quad (\text{definición}) \\ &= \varepsilon A_{ir} e_{-\varepsilon r} \quad (\text{por } R_2(q)) \\ &= \varepsilon A_{ir} \tilde{e}_{\varepsilon r} \quad (\text{definición}) \\ &= -\varepsilon A'_{ir} \tilde{e}_{\varepsilon r} \quad (-A_{ir} = A'_{ir}). \end{aligned}$$

Ahora se supondrá que $i = r, j \neq r$ y se verificará $R_2(q')$:

$$\begin{aligned} [\tilde{h}_r, \tilde{e}_{\varepsilon j}] &= [-h_r, e_{\varepsilon j}] \quad (\text{definición}) \\ &= -[h_r, e_{\varepsilon j}] \quad (\text{bilinealidad}) \\ &= \varepsilon A_{rj} e_{\varepsilon j} \quad (\text{por } R_2(q)) \\ &= -\varepsilon A'_{rj} \tilde{e}_{\varepsilon j} \quad (-A_{rj} = A'_{rj}). \end{aligned}$$

Para terminar de verificar $R_2(q')$ se supondrá que $i, j = r$, así se tiene que

$$\begin{aligned} [\tilde{h}_r, \tilde{e}_{\varepsilon r}] &= [-h_r, e_{-\varepsilon r}] \quad (\text{definición}) \\ &= -[h_r, e_{-\varepsilon r}] \quad (\text{bilinealidad}) \\ &= -\varepsilon A_{rr} e_{-\varepsilon r} \quad (\text{por } R_2(q)) \\ &= -\varepsilon A'_{rr} e_{-\varepsilon r} \quad (A_{rr} = A'_{rr}). \end{aligned}$$

Ahora se verificarán las relaciones $R_3(q')$ para cuando $i = r$. Así se tiene que

$$\begin{aligned} [\tilde{e}_{\varepsilon r}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}] &= [e_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}] \quad (\text{definición}) \\ &= -\varepsilon h_r \quad (\text{por } R_3(q)) \\ &= \varepsilon \tilde{h}_r \quad (\text{definición}). \end{aligned}$$

Para verificar las relaciones $R_4(q')$ se tiene que demostrar que

$$(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^{1+n}(\tilde{e}_{\delta j}) = 0$$

para $\varepsilon, \delta = \pm 1, 1 \leq i, j \leq n$ y $n = \max\{0, -\varepsilon \delta A'_{ij}\}$. Sean $i, j \neq r$. Entonces se tiene que

$$(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^{1+n}(\tilde{e}_{\delta j}) = (\mathbf{ad} e_{\varepsilon i})^{1+n}(e_{\delta j}) = 0$$

ya que $A'_{ij} = A_{ij}$ y con ello $n = \max\{0, -\varepsilon\delta A_{ij}\}$. También se tiene que

$$(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^{1+n}(\tilde{e}_{\delta r}) = (\mathbf{ad} e_{\varepsilon i})^{1+n}(e_{-\delta r}) = 0$$

ya que $A'_{ir} = -A_{ir}$ y con ello

$$n = \max\{0, -(-\varepsilon)\delta(-A'_{ir})\} = \max\{0, -(-\varepsilon)\delta A_{ir}\}.$$

Se procede de manera similar para $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^{1+n}(\tilde{e}_{\delta j})$ y $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^{1+n}(\tilde{e}_{\delta r})$.

Finalmente, para verificar las relaciones de tipo $R_5(q')$ se consideran dos casos $r \notin \{i_1, \dots, i_n\}$ y $r \in \{i_1, \dots, i_n\}$. Si $r \notin \{i_1, \dots, i_n\}$ la verificación es clara. Si $r \in \{i_1, \dots, i_n\}$ entonces se tiene que

$$[\tilde{e}_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, \tilde{e}_{\varepsilon_r r}, \dots, \tilde{e}_{\varepsilon_n i_n}] = [e_{\varepsilon_1 i_1}, \dots, e_{-\varepsilon_r r}, \dots, e_{\varepsilon_n i_n}].$$

Se denota por γ' a la sub-bigráfica plena de $B(q')$ en los vértices $\{i_1, \dots, i_n\}$. Es claro que si γ' es un ciclo, entonces la sub-bigráfica plena γ de $B(q)$ formada por los vértices $\{i_1, \dots, i_n\}$ es también un ciclo. Más aún, si γ' satisface la condición de ciclo también γ satisface la condición de ciclo. Así sólo resta verificar que $\varepsilon_l = -q_{l(l+1)}\varepsilon_{l+1}$ para $1 \leq l \leq n-1$. Para $l \neq r, r-1$ se tiene que $q'_{l(l+1)} = q_{l(l+1)}$ y entonces $\varepsilon_l = -q_{l(l+1)}\varepsilon_{l+1}$. Por otro lado, se tiene que $-\varepsilon_r = q'_{r(r+1)}\varepsilon_{r+1} = -q_{r(r+1)}\varepsilon_{r+1}$ y $\varepsilon_{r-1} = -q'_{(r-1)r}\varepsilon_r = -q_{(r-1)r} - \varepsilon_r$. Finalmente como $q' = q \circ I_r$ entonces $q = q' \circ I_r$, así se obtiene un morfismo:

$$\psi : \mathfrak{g}_5(q) \rightarrow \mathfrak{g}_5(q')$$

y se ve que $\varphi \circ \psi = id_{\mathfrak{g}_5(q)}$, $\psi \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}_5(q')}$. ■

Corolario 2.6 *Existe un automorfismo Φ de $\mathfrak{g}_5(q)$ tal que $\Phi(e_{\varepsilon i}) = e_{-\varepsilon i}$ y $\Phi(h_i) = -h_i$ para toda $1 \leq i \leq N$.*

Demostración. Si se denota por φ_r el isomorfismo definido por la ecuación (2.3) entonces el isomorfismo $\Phi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_N$ es tal que $\Phi(e_{\varepsilon i}) = e_{-\varepsilon i}$ y $\Phi(h_i) = -h_i$ para toda $1 \leq i \leq N$. ■

De la observación 2.4 se ve que para demostrar el Teorema 2.2 (y de aquí el Teorema 1.10) es suficiente demostrar siguiente resultado.

Proposición 2.7 *Supóngase que q es positiva definida, $q_{rs} = -1$ y $q' = q \circ T_{sr}^{+1}$. Entonces $\mathfrak{g}_5(q)$ y $\mathfrak{g}_5(q')$ son álgebras de Lie isomorfas.*

La demostración de este resultado se divide en varios pasos, los cuales ocuparán los siguientes capítulos.

Capítulo 3

Reducción a ciclos especiales y a monomios especiales

En este capítulo, se reducirá la demostración de la Proposición 2.7 a la verificación de que ciertos monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(q)$.

Supóngase que q es positiva definida, $q_{rs} = -1$ y $q' = q \circ T_{sr}^{+1}$. Una vez más, se denotarán los generadores de $\mathfrak{g}_5(q)$ con e_i, e_{-i}, h_i y los generadores de $\mathfrak{g}_5(q')$ con e'_i, e'_{-i}, h'_i .

Entonces se definen los siguientes elementos en $\mathfrak{g}_5(q)$:

$$\tilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r, \end{cases} \quad \tilde{h}_i = \begin{cases} h_r + h_s, & \text{si } i = r \\ h_i, & \text{si } i \neq r. \end{cases} \quad (3.1)$$

Lema 3.1 *Si $q_{sr} = -1$ y $q' = q \circ T_{sr}^{+1}$, entonces los elementos $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ and \tilde{h}_i satisfacen las relaciones $R_1(q'), R_2(q'), R_3(q')$ y $R_4(q')$.*

Demostración. En la demostración del Teorema 1.6, se vio que los elementos $\tilde{e}_{\varepsilon i}, \tilde{h}_i$ satisfacen las relaciones $R_1(q'), R_2(q')$ y $R_3(q')$. Por lo tanto, resta probar que satisfacen las relaciones $R_4(q')$, es decir, se tiene que demostrar que $(\text{ad } \tilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}(\tilde{e}_{\delta j}) = 0$ donde $m' = \max\{0, -\varepsilon\delta A'_{ij}\}$, $\varepsilon, \delta = \pm 1$ para cada $i, j = 1, \dots, n$. Si $i = j$ el resultado es obvio. Por lo tanto se puede suponer que $i \neq j$ y distinguir varios casos.

Caso $i \neq r, j \neq r$: En este caso se tiene que $\tilde{e}_{\varepsilon i} = e_{\varepsilon i}, \tilde{e}_{\delta j} = e_{\delta j}$ y $A'_{ij} = A_{ij}, m' = \max\{0, -\varepsilon\delta A_{ij}\}$ y por lo tanto $(\text{ad } \tilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}(\tilde{e}_{\delta j}) = (\text{ad } e_{\varepsilon i})^{1+m'}(e_{\delta j}) = 0$ por $R_4(q)$.

Caso $i = r, j \neq r, s$: Bajo estas suposiciones se obtiene que $A'_{rj} = A_{rj} + A_{sj}$. Si $m' = 0$, entonces tiene que $A'_{rj} = 0$ ó $\varepsilon\delta A'_{rj} > 0$. En el primer caso, se

tiene que $A_{rj} = -A_{sj}$. Ahora si ambos son cero, se concluye que $[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}] = 0$, $[e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}] = 0$; de donde se sigue que $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})(\tilde{e}_{\delta j}) = 0$ por $R_4(q)$. Por otro lado, si $[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}] \neq 0$ y $[e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}] \neq 0$, entonces se tiene que (r, s, j) es un ciclo en q y entonces $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^{1+m'}(\tilde{e}_{\delta j}) = [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}] = 0$ por $R_5(q)$. Ahora, si $\varepsilon \delta A'_{rj} > 0$, entonces como $A'_{sj} = A_{rj} + A_{sj}$ se tienen los siguientes casos:

(i) $A_{rj} = 0$ y $A_{sj} \neq 0$

(ii) $A_{rj} \neq 0$ y $A_{sj} = 0$.

Si $A'_{rj} = -1$ entonces $\varepsilon = -\delta$. Si se cumple (i) entonces $A_{sj} = -1$, así se tiene que $(\mathbf{ad} \tilde{e}_r)(\tilde{e}_j) = [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon j}]$, pero por $R_4(q)$ se sabe que $[e_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon j}] = 0$ y $[e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon j}] = 0$, de donde se sigue que $(\mathbf{ad} \tilde{e}_r)(\tilde{e}_j) = 0$. Los casos restantes, se demuestran de forma similar.

Si $m' > 0$ entonces $m' = 1$ y $A'_{rj} = A_{rj} + A_{sj} = -\varepsilon \delta$. De lo cual se sigue que $A_{sj} = 0$ ó $A_{rj} = 0$. En el primer caso se tiene que:

(a) $[e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}] = 0$,

(b) $[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}] = 0$,

(c) $[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\delta r}] = 0$.

De (c) y (a) se obtiene que

(d) $[e_{\varepsilon s}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]] = 0$.

Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie y $x, y, z \in \mathfrak{g}$ con $[x, y] = 0$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(e) $[x, y, z] = [y, x, z]$, $[x, z, y] = [y, z, x]$

(f) $[[x, z], y] = [[y, z], x]$, $[[z, x], y] = [[z, y], x]$

Usando las propiedades (a)-(d) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^2(\tilde{e}_{\delta j}) &= [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]] \\
&= [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}], e_{\varepsilon s}]] \quad (\text{por (a)}) \\
&= [e_{\varepsilon s}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\delta m}], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]]] \quad (\text{por (c)}) \\
&= [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}], e_{\varepsilon s}]]] \quad (\text{por (b)}) \\
&= [e_{\varepsilon s}, [[e_{\varepsilon r}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]]]] \quad (\text{por (a)}) \\
&= [[[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] \quad (\text{por (d)}) \\
&= -[[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]] \quad (\text{por antisimetría}) \\
&= -(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^2(\tilde{e}_{\delta j}).
\end{aligned}$$

De aquí que $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^2(\tilde{e}_{\delta j}) = 0$. En el segundo caso, en el que $A_{rj} = 0$, nótese que $[[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}] = [[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], e_{\delta j}]$ y se procede de manera similar intercambiando los roles de r y s .

Caso $i = r, j = s$: Obsérvese que $A'_{rs} = -A_{rs} = 1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})^2 &= [\tilde{e}_{\varepsilon r}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{-\varepsilon s}] \\
&= [\tilde{e}_{\varepsilon r}, [e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}] && (\text{por } (f)) \\
&= [\tilde{e}_{\varepsilon r}, (-\varepsilon)h_s, e_{\varepsilon r}] && (\text{por } R_3(q)) \\
&= [\tilde{e}_{\varepsilon r}, \varepsilon^2 A_{rs} e_{\varepsilon r}] && (\text{por } R_2(q)) \\
&= A_{rs} [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon s}] && (\text{por bilinealidad}) \\
&= 0 && (\text{por } R_4(q)).
\end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon r})(\tilde{e}_{\varepsilon s}) &= [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon s}] \\
&= 0 && (\text{por } R_4(q)).
\end{aligned}$$

Caso $i \neq r, j = r$: Si $A_{ir} = 0 = A_{is}$, es fácil verificar que $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})(\tilde{e}_{\delta r}) = 0$. Por otro lado $A_{ir} \neq A_{is}$ (puesto que $|A'_{ir}| = |A_{ir} + A_{is}| < 2$) y por lo tanto se tiene que $[e_{\varepsilon i}, e_{\delta r}] = 0$ ó $[e_{\varepsilon i}, e_{\delta s}] = 0$ por $R_4(q)$. En el primer caso donde $[e_{\varepsilon i}, e_{\delta r}] = 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}(\tilde{e}_{\delta r}) &= (\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}([e_{\delta r}, e_{\delta s}]) \\
&= (\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^{m'}([e_{\delta r}, e_{\varepsilon i} e_{\delta s}]) \\
&\vdots \\
&= [e_{\delta r}, (\mathbf{ad} e_{\varepsilon i})^{1+m'}(e_{\delta s})]
\end{aligned}$$

el cual es cero si $m' \geq \max\{0, -\varepsilon \delta A_{is}\}$, en particular si $A_{is} = 0$ ó $\varepsilon \delta A_{is} > 0$. Así sólo resta considerar el caso donde $\varepsilon \delta A_{is} = -1$ y $m' = 0$, es decir, $\varepsilon \delta A'_{ir} \geq 0$. Dado que $0 \leq \varepsilon \delta A'_{ir} = \varepsilon \delta A_{ir} + \varepsilon \delta A_{is} = \varepsilon \delta A_{ir} - 1$ se tiene que $\varepsilon \delta A_{ir} = 1$; pero entonces (r, i, s) es un ciclo en q y por lo tanto $(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}(\tilde{e}_{\delta r}) = [e_{\delta r}, e_{\varepsilon i}, e_{\delta s}]$ es cero por $R_5(q)$.

Caso $i = s, j = r$: Se tiene que

$$(\mathbf{ad} \tilde{e}_{\varepsilon s})^{1+m'}(\tilde{e}_{\delta r}) = -(\mathbf{ad} e_{\varepsilon s})^{2+m'}(e_{\delta r}) = 0$$

por $R_4(q)$ puesto que $1 + m' \geq 1 \geq \max\{0, -\varepsilon \delta A_{sr}\} = \max\{0, \varepsilon \delta\}$. ■

Lema 3.2 Con la notación anterior, para cada ciclo $\gamma = (r, i_1, i_2, \dots, i_t)$ en q' con $q'_{ri_1} = -1, q'_{i_1i_2} = -1, \dots, q'_{i_{t-1}i_t} = -1$ y $q'_{i_tr} = 1$, los siguientes monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(q)$:

$$\begin{aligned}
E_{\gamma,0}^+ &:= [\tilde{e}_r, \tilde{e}_{i_1}, \tilde{e}_{i_2}, \dots, \tilde{e}_{i_t}] \\
E_{\gamma,u}^+ &:= [\tilde{e}_{-i_u}, \tilde{e}_{-i_{u+1}}, \dots, \tilde{e}_{-i_t}, \tilde{e}_r, \tilde{e}_{i_1}, \dots, \tilde{e}_{i_{u-1}}] \\
E_{\gamma,0}^- &:= [\tilde{e}_{-r}, \tilde{e}_{i_t}, \tilde{e}_{i_{t-1}}, \dots, \tilde{e}_{i_1}] \\
E_{\gamma,u}^- &:= [\tilde{e}_{-i_u}, \tilde{e}_{-i_{u-1}}, \dots, \tilde{e}_{-i_1}, \tilde{e}_{-r}, \tilde{e}_{i_t}, \dots, \tilde{e}_{i_{u+1}}]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

El Lema 3.2 se demuestra más adelante.

Demostración de la Proposición 2.7. Por el Corolario 2.6 se deduce del Lema 3.2 que para $\varepsilon = \pm 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
E_{\gamma,0}^{+,\varepsilon} &:= [\tilde{e}_{\varepsilon r}, \tilde{e}_{\varepsilon i_1}, \tilde{e}_{\varepsilon i_2}, \dots, \tilde{e}_{\varepsilon i_t}] = 0, \\
E_{\gamma,u}^{+,\varepsilon} &:= [\tilde{e}_{-\varepsilon i_u}, \tilde{e}_{-\varepsilon i_{u+1}}, \dots, \tilde{e}_{-\varepsilon i_t}, \tilde{e}_{\varepsilon r}, \tilde{e}_{\varepsilon i_1}, \dots, \tilde{e}_{\varepsilon i_{u-1}}] = 0, \\
E_{\gamma,0}^{-,\varepsilon} &:= [\tilde{e}_{-\varepsilon r}, \tilde{e}_{\varepsilon i_t}, \tilde{e}_{\varepsilon i_{t-1}}, \dots, \tilde{e}_{\varepsilon i_1}] = 0, \\
E_{\gamma,u}^{-,\varepsilon} &:= [\tilde{e}_{-\varepsilon i_u}, \tilde{e}_{-\varepsilon i_{u-1}}, \dots, \tilde{e}_{-\varepsilon i_1}, \tilde{e}_{-\varepsilon r}, \tilde{e}_{\varepsilon i_t}, \dots, \tilde{e}_{\varepsilon i_{u+1}}] = 0.
\end{aligned}$$

Se sabe por Lema 3.1 que los elementos $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y $\tilde{h}_{\varepsilon i}$ satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_4(q')$. Ahora se mostrará que los elementos $\tilde{e}_{\varepsilon i}$ y $\tilde{h}_{\varepsilon i}$ satisfacen también la relación $R_5(q')$. Por lo tanto, se tiene que demostrar que para cada ciclo $\gamma = (j_0, \dots, j_{t-1})$ en q' el elemento

$$F_{\gamma}^{\varepsilon t} = [\tilde{e}_{\varepsilon_0 j_0}, \tilde{e}_{\varepsilon_1 j_1}, \dots, \tilde{e}_{\varepsilon_{t-1} j_{t-1}}] \in \mathfrak{g}_5(q)$$

es cero, donde $\varepsilon_{t-1} = \pm 1$ y $\varepsilon_l = -q'_{j_l j_{l+1}} \varepsilon_{l+1}$ para $l = t-2, t-3, \dots, 1$.

Si r no está en γ entonces $\tilde{e}_{\varepsilon_a j_a} = e_{\varepsilon_a j_a}$ para $1 \leq a \leq t-1$ y γ es también un ciclo en q . Consecuentemente $F_{\gamma}^{\varepsilon t} = 0$ por $R_5(q)$.

Así, resta considerar el caso donde r está en γ , sea $j_a = r$. Si $r \neq j_0$ y s no es un elemento de γ , se denota con $\overline{a-l}$ al residuo de $a-l$ módulo t , $1 \leq l \leq t$. Se puede asumir (usando el Lema 2.5) que $q'_{r j_{a-1}} = -1, q'_{j_{a-1} j_{a-2}} = -1, \dots, q'_{\overline{j_{a-(t-1)} j_{a-t}}} = -1$, y entonces $q'_{\overline{j_{a-t} r}} = 1$ puesto que q' satisface la condición de ciclo. De esta forma, se definen $i_0 := r, i_1 := \overline{j_{a-1}}, \dots, i_{t-1} = \overline{j_{a-t}}$ y se toma $\gamma' = (r, i_1, \dots, i_{t-1})$. Aplicando el Lema 3.2 se concluye que $F_{\gamma}^{\varepsilon t} = E_{\gamma', a-1}^{+,\varepsilon t} = 0$.

Si $r = j_0$ y s no es un elemento de γ , nuevamente por el Lema 2.5, se puede

suponer que $q'_{rj_1} = -1, q'_{j_1j_2} = -1, \dots, q'_{j_{t-2}j_{t-1}} = -1$ y entonces se tiene que $q'_{j_{t-1}r} = 1$, puesto que q' satisface la condición de ciclo. Así por el Lema 3.2 se tiene que $F_\gamma^{\varepsilon_t} = E_{\gamma,0}^{+,\varepsilon_t} = 0$.

Ahora si $r = j_a, a \neq 0$ y $s = j_{a-1}$, se puede suponer que

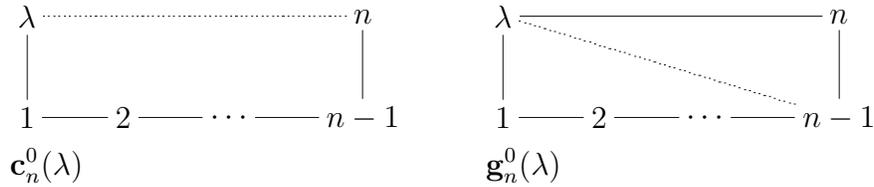
$$q'_{rj_{a+1}} = -1, \dots, q'_{j_{t-2}j_{t-1}} = -1$$

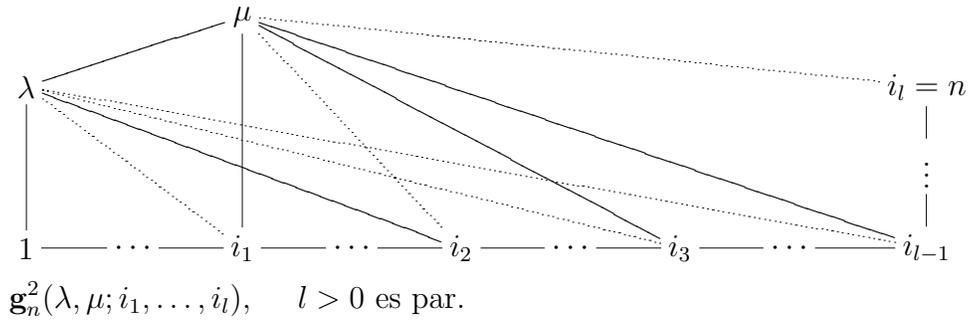
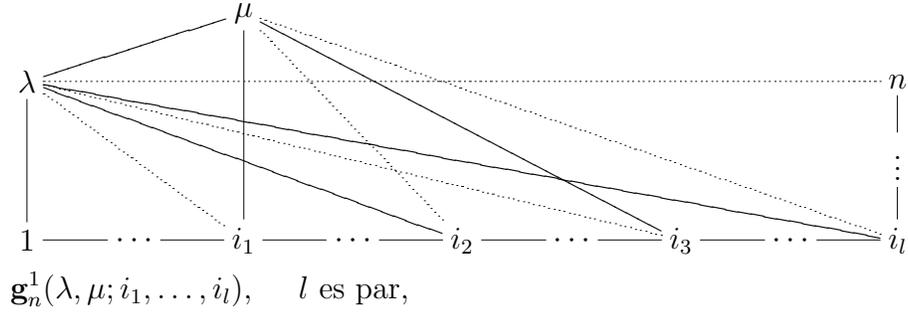
y como q' satisface la condición de ciclo, se tiene que $q'_{rj_{a-1}} = 1$. Tomando el ciclo $\gamma' = (r, j_{a+1}, \dots, j_{a+t} = j_{a-1})$ y aplicando nuevamente el Lema 3.2 se concluye que $F_{\gamma'}^{\varepsilon_t} = E_{\gamma',t-a}^{+,\varepsilon_t} = 0$. Esto muestra que los elementos $\tilde{e}_{\varepsilon_i}$ y \tilde{h}_i satisfacen la relación $R_5(q')$. Por lo tanto, se tiene que $\tilde{e}_{\varepsilon_i}$ y \tilde{h}_i satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_5(q')$. Luego existe un homomorfismo $\varphi : \mathfrak{g}_5(q') \rightarrow \mathfrak{g}_5(q)$ tal que $\varphi(e'_{\varepsilon_i}) = \tilde{e}_{\varepsilon_i}$ y $\varphi(h'_i) = \tilde{h}_i$. De forma similar existe un homomorfismo $\psi : \mathfrak{g}_5(q) \rightarrow \mathfrak{g}_5(q')$ y es fácil verificar que uno es inverso del otro, ver [BKL] para detalles. ■

3.1. Reducción a monomios especiales

En esta sección se describen los ciclos γ en $q' = q \circ T_{sr}$ los cuales no necesariamente son ciclos en q . Recordar que cada forma unitaria $q : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}$ tiene asociada una bigráfica $B(q)$ con vértices $1, \dots, N$ y aristas definidas como sigue: Dos vértices distintos i y j se unen por $|q_{ij}|$ aristas llenas si $q_{ij} < 0$ y por q_{ij} aristas punteadas si $q_{ij} > 0$. Claramente los ciclos en q corresponden a ciclos en $B(q)$.

Se introducen cuatro tipos de bigráficas. La primera es justamente un ciclo $\mathbf{c}_n^0(\lambda) = (\lambda, 1, \dots, n)$ donde la arista $\{\lambda, n\}$ es la única arista punteada:





Por definición, las aristas de $\mathbf{g}_n^0(\lambda)$ son precisamente las que se encuentran en los dos ciclos $(\lambda, 1, 2, \dots, n-1)$ y $(\lambda, n-1, n)$, donde $\{\lambda, n-1\}$ es la única arista punteada.

Ahora $\mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu, i_1, \dots, i_l)$ se obtiene del ciclo $\mathbf{c}_n^0(\lambda)$ añadiendo un nuevo vértice μ y trazando para cada $a = 1, 3, \dots, l-1$ una arista punteada $\{\lambda, i_a\}$ y una llena $\{\mu, i_a\}$. Para cada $a = 2, 4, \dots, l$ también se traza una arista llena $\{\lambda, i_a\}$ y una punteada $\{\mu, i_a\}$. La definición de $\mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu, i_1, \dots, i_l)$ es muy similar. Se inicia con un ciclo $(\mu, \lambda, 1, \dots, n)$ donde $\{n, \mu\}$ es la única arista punteada y se trazan aristas como sigue: para cada $a = 1, 3, \dots, l-1$ una arista punteada $\{\lambda, i_a\}$ y una arista llena $\{\mu, i-a\}$ y para cada $a = 2, 4, \dots, l-2$ una arista llena $\{\lambda, i_a\}$ y una arista punteada $\{\mu, i_a\}$.

Recordar que sólo resta demostrar el Lema 3.2 y que por lo tanto la atención se puede restringir al caso donde $\gamma \subseteq B(q')$ es un ciclo con $\gamma = \mathbf{c}_n^0(r)$.

Lema 3.3 *Supóngase que q es positiva definida, $q_{rs} = -1$ y $q' = q \circ T_{sr}$. Más aún, sea $\gamma = \mathbf{c}_n^0(r)$ un ciclo en $B(q')$ y Γ la sub-bigráfica de $B(q)$ inducida por los vértices $r, s, 1, \dots, n$.*

Si $s \in \gamma$ entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^0(r)$ y $n = s$. Si $s \notin \gamma$ entonces lo siguiente se cumple:

- (a) Si $i_1 \neq 1$ y $i_l \neq n$, entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^1(r, s; i_1, \dots, i_l)$ para algún par $l > 0$,
- (b) Si $i_1 \neq 1$ y $i_l = n$, entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^2(r, s; i_1, \dots, i_l)$ para algún par l ,
- (c) Si $i_1 = 1$ y $i_l \neq n$, entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^2(s, r; i_2, \dots, i_l, n)$ para algún par l ,
- (d) Si $i_1 = 1$ y $i_l = n$, entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^1(s, r; i_2, \dots, i_{l-1})$ para algún par l .

Demostración. Si s es un vértice de γ , entonces como $q'_{rs} = 1$, se tiene que $s = n$ y por lo tanto la sub-bigráfica Γ de $B(q)$ tiene la forma $\Gamma = \mathbf{g}_n^0(r)$.

Si s no está en γ , entonces sean i_1, \dots, i_l (con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n$) los vértices tales que $q'_{si_a} \neq 0$.

Si $l = 0$, es decir $q'_{si_a} = 0$, entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^1(r, s;)$. Así, supóngase ahora que $l > 0$. Se denotará con Γ' a la sub-bigráfica inducida de $B(q')$ dada por los vértices $s, r, 1, \dots, n$.

Dado que $(s, r, 1, \dots, i_1)$ es un ciclo en $B(q')$ se tiene que $q'_{si_1} = -1$ por la condición de ciclo. De manera inductiva para $1 < a \leq l$ se tiene que $(s, i_{a-1}, i_{a-1} + 1, \dots, i_a)$ es un ciclo en $B(q')$, de donde se deduce nuevamente por la condición de ciclo que $q'_{s, i_a} = (-1)^a$.

Si $i_l = n$ entonces (r, i_l, s) es un ciclo en $B(q')$ y como $q'_{sr} = 1 = q'_{r, i_l}$ se tiene que $(-1)^l = q'_{s, i_l} = 1$. Por lo tanto l es par.

Si $i_l \neq n$ entonces (r, s, i_l, \dots, n) es un ciclo en $B(q')$. Nuevamente por la condición de ciclo, se tiene que $(-1)^l = q'_{s, i_l}$, lo cual implica que l es par.

El resto de las verificaciones son cálculos directos usando que $q_{ri} = q'_{ri} - q'_{si}$ para cada $i \neq r, s$. ■

El siguiente resultado ayudará a reducir algunos cálculos a la mitad.

Lema 3.4 Si $A = [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}]$ es un monomio que satisface $[A_i, A_j] = 0$ cuando $|i - j| \neq 1$, entonces se tiene que

$$A^- := [A_{n+1}, A_n, \dots, A_2, A_1] = (-1)^n [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}].$$

Demostración. La demostración es sencilla utilizando inducción y los incisos (e), (f) en la demostración del Lema 3.1. ■

Ahora se formulará un resultado que involucra conocimientos acerca de la bigráfica $B(q)$ y los monomios en $\mathbf{g}_5(q)$. Este resultado implicará el Lema 3.2, como se verá más adelante.

Lema 3.5 *Sea q positiva definida. Supóngase que la sub-bigráfica inducida Γ de $B(q)$ es de la forma $\mathfrak{g}_n^0(\lambda)$, $\mathfrak{g}_n^1(\lambda, \mu, i_1, \dots, i_l)$ (para algún l par) ó $\mathfrak{g}_n^2(\lambda, \mu, i_1, \dots, i_l)$ (para algún $l > 0$ par). Entonces los siguientes monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(q)$ (donde en el caso $\Gamma = \mathfrak{g}_n^0(\lambda)$ se supone que $\mu = n$):*

$$\begin{aligned} F_{n,0}(\lambda, \mu) &:= [[e_\lambda, e_\mu], e_{-n}, e_{-(n-1)}, \dots, e_{-1}], \\ F_{n,u}(\lambda, \mu) &:= [e_u, e_{u-1}, \dots, e_1, [e_\lambda, e_\mu], e_{-n}, \dots, e_{-(u+1)}], \quad \text{para } u = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Demostración del Lema 3.2. Se definen los siguientes monomios en $\mathfrak{g}_5(q)$:

$$\begin{aligned} G_{n,0}^+(\lambda, \mu) &:= [[e_\lambda, e_\mu], e_1, \dots, e_n], \\ G_{n,u}^+(\lambda, \mu) &:= [e_{-u}, e_{-(u+1)}, \dots, e_{-n}, [e_\lambda, e_\mu], e_1, \dots, e_{u-1}], \\ G_{n,0}^-(\lambda, \mu) &:= [[e_{-\lambda}, e_{-\mu}], e_n, e_{n-1}, \dots, e_1], \\ G_{n,u}^-(\lambda, \mu) &:= [e_{-u}, e_{-(u-1)}, \dots, e_{-1}, [e_{-\lambda}, e_{-\mu}], e_n, \dots, e_{u+1}], \end{aligned} \quad (3.4)$$

Entonces $G_{n,v}^-(\lambda, \mu) = F_{n,v}(\lambda, \mu) = 0$ para $1 \leq v \leq n$ y $G_{n,0}^-(\lambda, \mu) = \Phi(F_{n,0}(\lambda, \mu)) = 0$, donde Φ es el automorfismo del Corolario 2.6. Obsérvese que $G_{n,v}^+(\lambda, \mu)$ es un monomio que satisface las hipótesis del Lema 3.4. De aquí, que para $1 \leq u \leq n$, se tiene que $G_{n,u}^+(\lambda, \mu) = \pm \Phi(G_{n,u-1}^-(\lambda, \mu)^\leftarrow) = 0$ y $G_{n,0}^+(\lambda, \mu) = \pm \Phi(G_{n,n}^-(\lambda, \mu)^\leftarrow) = 0$.

Por definición, se tiene que $G_{n,v}^\varepsilon(\mu, \lambda) = -G_{n,v}^\varepsilon(\lambda, \mu)$ para $\varepsilon = \pm 1$ y $v = 0, 1, \dots, n$. Supóngase ahora, que $\gamma = \mathfrak{c}_n^0(r)$ es un ciclo en $B(q')$. Si $s \in \gamma$, se tiene que $\Gamma = \mathfrak{g}_n^0(r)$ y los monomios de la ecuación (3.2) se convierten directamente en monomios de la ecuación (3.4) por medio de $E_{\gamma,v}^\varepsilon = G_{n,v}^\varepsilon(r, n)$. Si $s \notin \gamma$ entonces primero se consideran los casos (a) y (b) del Lema 3.3; aplicando el Lema 3.5 se tiene que $E_{\gamma,v}^\varepsilon = G_{n,v}^\varepsilon(r, s) = 0$. En los casos (c) y (d) del Lema 3.3, se tiene que $E_{\gamma,v}^\varepsilon = G_{n,v}^\varepsilon(s, r) = -G_{n,v}^\varepsilon(r, s) = 0$. Lo cual completa la demostración. ■

Capítulo 4

Monomios, cadenas llenas y bigráficas

En este capítulo se definirá un producto entre monomios y se demostrarán algunos de los detalles técnicos necesarios para la demostración del Teorema 1.10.

4.1. Monomios en el magma libre

Dado un conjunto X , se define una sucesión de conjuntos $\mathcal{M}_n(X)$ de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(X) &= X \\ \mathcal{M}_n(X) &= \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{M}_i(X) \times \mathcal{M}_{(n-i)}(X) \quad \text{para } n \geq 2.\end{aligned}$$

Se define $\mathcal{M}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n(X)$ (ver [BN]).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene la inclusión $i_n : \mathcal{M}_n(X) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$, \mathcal{M}_n se identifica con su imagen en $\mathcal{M}(X)$ bajo i_n . Si $m \neq n$ entonces $\mathcal{M}_n(X) \cap \mathcal{M}_m(X) = \emptyset$. Así, para cada $A \in \mathcal{M}(X)$ existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \in \mathcal{M}_n(X)$. El número n es llamado la *longitud* de A y es denotado por $l(A)$. El conjunto X consiste de todos los elementos en $\mathcal{M}(X)$ de longitud uno.

Sean $A, A' \in \mathcal{M}(X)$ tales que $p = l(A)$ y $q = l(A')$. La imagen de (A, A') bajo la inyección canónica del conjunto $\mathcal{M}_p(X) \times \mathcal{M}_q(X)$ en el conjunto \mathcal{M}_{p+q} es llamada la composición de A y A' . Así, se tiene que $l(A, A') = l(A) + l(A')$

y cada elemento de $\mathcal{M}(X)$ de longitud ≥ 2 se escribe de manera única en la forma (A, A') con $A, A' \in \mathcal{M}(X)$.

Se define $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{M}(X)$ de forma inductiva por

$$(A_1, \dots, A_n) := (A_1, (A_2, \dots, A_n)).$$

Si $A = (A_1, \dots, A_n)$ se define $\overleftarrow{A} = (A_n, \dots, A_1)$. Por otra parte, si $r_i = l(A_i)$ ($r_i \geq 1$) entonces $l(A) = \sum_{i=1}^n r_i$. Sea $A = (a_1, \dots, a_n)$ con $a_i \in X$ se dice que b es una *entrada* de A si $b = a_i$ para algún i . Lo cual se denotará con $b \in_{\text{entr}} A$. En este trabajo, X siempre denotará el conjunto

$$X = \{e_i, e_{-i}, hi \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Se define una nueva operación binaria en $\mathcal{M}(X)$ de la siguiente manera

$$f : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X)$$

está dada por

$$f(A, B) = A \bullet B = \begin{cases} (A, B), & \text{si } A \in X ; \\ (A_1, A_2 \bullet B), & \text{si } A = (A_1, A_2). \end{cases}$$

Sea $\pi : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathfrak{g}_5(q)$ la proyección dada por $\pi(A) = A$ si $A \in X$ y $\pi((A_1, A_2)) = [\pi(A_1), \pi(A_2)]$.

Proposición 4.1 *Si $A, B, C \in \mathcal{M}(X)$ entonces*

$$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C.$$

Demostración. La demostración es por inducción sobre $l(A)$. Si $l(A) = 1$ entonces $A \in X$ y se tiene que

$$(A \bullet B) \bullet C = (A, B) \bullet C = (A, B \bullet C) = A \bullet (B \bullet C).$$

Supóngase que el resultado es cierto para toda $m < l(A)$. Así se tiene que

$$\begin{aligned} A \bullet (B \bullet C) &= (A_1, A_2 \bullet (B \bullet C)) && \text{(definición)} \\ &= (A_1, (A_2 \bullet B) \bullet C) && \text{(inducción)} \\ &= (A \bullet B) \bullet C && \text{(definición)}. \end{aligned}$$

■

Lema 4.2 Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie.

(a) Si $[A, B] = 0$ entonces $[A, B, C] = [B, A, C]$.

(b) Si $[A, B] = 0$ entonces $[A, C, B] = [B, C, A]$.

(c) Si $[A_i, B] = 0$ para toda $1 \leq i \leq n$ entonces

$$[A_n, \dots, A_1, B, C] = [B, A_1, \dots, A_n, C].$$

Demostración.

(a) Como \mathfrak{g} es un álgebra de Lie se tiene que

$$\begin{aligned} [A, B, C] &= -[C, A, B] - [B, C, A] \quad (\text{identidad de Jacobi}) \\ &= -[B, C, A] \quad ([A, B] = 0, \text{ por hipótesis}) \\ &= [B, A, C] \quad (\text{antisimetría}) \end{aligned}$$

El inciso (b) se obtiene del inciso (a) por antisimetría.

(c) Por inducción sobre n . El caso $n = 1$ se cumple por inciso (a). Supóngase que el resultado se cumple para $n - 1$. Así se tiene que

$$\begin{aligned} [A_n, A_{n-1}, \dots, A_1, B, C] &= [a_n, [a_{n-1}, \dots, a_1, B, C]] \quad (\text{definición}) \\ &= [A_n, [B, A_{n-1}, \dots, A_1, C]] \quad (\text{inducción}) \\ &= [A_n, B, [A_{n-1}, \dots, A_1, C]] \quad (\text{definición}) \\ &= [B, A_n, \dots, A_1, C] \quad (\text{por (a)}) \end{aligned}$$

■

Lema 4.3 Sea $A = (A_n, \dots, A_1)$. Si $a \in X$ es tal que $[a, \pi(A_i)] = 0$ para $i = 1, \dots, n$ entonces se tiene que $[a, \pi(A)] = 0$.

Demostración. Por inducción sobre n . Si $n = 1$ el resultado es inmediato. Supóngase que $n > 1$ y que el resultado se cumple para toda $m < n$. Sea $B = (A_{n-1}, \dots, A_1)$ entonces se tiene que $\pi(B) = [\pi(A_{n-1}), \dots, \pi(A_1)]$; así se obtiene que

$$\begin{aligned} \pi(A) &= [\pi(A_n), \pi(A_{n-1}), \dots, \pi(A_1)] \\ &= [\pi(A_n), \pi(B)]. \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que

$$\begin{aligned} [a, \pi(A)] &= [a, \pi(A_n), \pi(B)] \\ &= [\pi(A_n), a, \pi(B)] \quad (\text{Lema 4.2 (a)}). \end{aligned}$$

Luego por hipótesis de inducción se tiene que $[a, \pi(B)] = 0$; lo cual implica que $[a, \pi(A)] = 0$. ■

Lema 4.4 *Sea $A = (a_1, \dots, a_{r_1})$, $B, C \in \mathcal{M}(X)$ con $a_i \in X$.*

(a) *Si $[a, \pi(B)] = 0$ para toda $a \in_{entr} A$, entonces*

$$\pi(A \bullet (B, C)) = [\pi(B), \pi(A \bullet C)].$$

(b) *Si $[a, \pi(B)] = 0$ para toda $a \in_{entr} A$, entonces*

$$\pi(A \bullet (C, B)) = [\pi(A \bullet C), \pi(B)].$$

(c) *Si $A_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,r_i}) \in \mathcal{M}(X)$ con $a_{i,j} \in X$ y $1 \leq i \leq n$ son tales que $[a, \pi(B)] = 0$ para toda $a \in_{entr} A_i$, entonces*

$$\pi(A_n \bullet \dots \bullet A_1 \bullet (B, C)) = [\pi(B), \pi(A_n \bullet \dots \bullet A_1 \bullet C)].$$

(d) *Si $A_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,r_i}) \in \mathcal{M}(X)$ con $a_{i,j} \in X$ y $1 \leq i \leq n$ son tales que $[a, \pi(B)] = 0$ para toda $a \in_{entr} A_i$, entonces*

$$\pi(A_n \bullet \dots \bullet A_1 \bullet (C, B)) = [\pi(A_n \bullet \dots \bullet A_1 \bullet C), \pi(B)].$$

Demostración.

(a) Se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(A \bullet (B, C)) &= [a_1, \dots, a_{r_1}, \pi(B), \pi(C)] \quad (\text{definición}) \\ &= [\pi(B), a_1, \dots, a_{r_1}, \pi(C)] \quad (\text{lema anterior}) \\ &= [\pi(B), \pi(A \bullet C)] \quad (\text{definición}) \end{aligned}$$

El inciso (b) se obtiene del inciso (a) por antisimetría.

El inciso (c) se sigue del inciso (a). Finalmente, el inciso (d) se obtiene de (c) por antisimetría. ■

Lema 4.5 Si $A = (a_m, \dots, a_1)$ es tal que $\pi(A \bullet B) = 0$ y $[a, \pi(C)] = 0$ para toda $a \in_{entr} A$, entonces se tiene que $\pi(A \bullet (B, C)) = 0$.

Demostración. Por Lema 4.4 se tiene que $\pi(A \bullet (B, C)) = [\pi(A \bullet B), \pi(C)]$ y por hipótesis se sabe que $\pi(A \bullet B) = 0$. De donde se sigue que $\pi(A \bullet (B, C)) = 0$. ■

Lema 4.6 Sean $A_i = (a_{n_i, i}, \dots, a_{2, i}, a_{1, i}) \in \mathcal{M}(X)$ con $a_{j, i} \in X$.

(a) Si $[a, \pi(A_1)] = 0$ para $a \in_{entr} A_2$ con $a \neq a_{1, 2}$, entonces

$$\pi(A_2 \bullet A_1) = [\pi(A_2), \pi(A_1)]$$

(b) Si $[a, \pi(A_{(i-1)} \bullet \dots \bullet A_1)] = 0$ para $a \in_{entr} A_i$ con $a \neq a_{1, i}$, $2 \leq i \leq k$, entonces $\pi(A_k \bullet \dots \bullet A_1) = [\pi(A_k), \dots, \pi(A_1)]$.

Demostración.

(a) Por inducción sobre n_2 . Para $n_2 = 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \pi(A_2 \bullet A_1) &= [a_{22}, a_{12}, \pi(A_1)] && \text{(definición)} \\ &= [\pi(A_1), a_{1, 2}, a_{2, 2}] && \text{(Lema 4.2)} \\ &= [\pi(A_2), \pi(A_1)] && \text{(antisimetría y definición)} \end{aligned}$$

Supóngase que el resultado se cumple para $n_2 = m$, es decir,

$$\pi(A'_2 \bullet A_1) = [\pi(A'_2), \pi(A_1)]$$

donde $A'_2 = (a_{m, 2}, \dots, a_{1, 2})$. Sea

$$A = (a_{(m+1), 2}, a_{m, 2}, \dots, a_{1, 2})$$

entonces:

$$\begin{aligned} \pi(A \bullet A_1) &= [a_{(l+1), 2}, \pi(A'_2 \bullet A_1)] && \text{(definición)} \\ &= [a_{(l+1), 2}, \pi(A'_2), \pi(A_1)] && \text{(inducción)} \\ &= -[a_{(l+1), 2}, \pi(A_1), \pi(A'_2)] && \text{(antisimetría)} \\ &= -[\pi(A_1), a_{(l+1), 2}, \pi(A'_2)] && \text{(Lema 4.2(a))} \\ &= [\pi(A), \pi(A_1)] && \text{(antisimetría)} \end{aligned}$$

(b) Por inducción sobre k . El caso $k = 2$ se cumple por inciso (a). Supóngase que el resultado se cumple para k , es decir, que si $B = A_k \bullet \cdots \bullet A_1$ entonces se tiene que $\pi(B) = [\pi(A_k), \dots, \pi(A_1)]$. Sea

$$A_{k+1} = (a_{n_{k+1},(k+1)}, \dots, a_{1,(k+1)}).$$

Si $[a_{j,(k+1)}, \pi(B)] = 0$ para $j \neq 1$, entonces por inciso (a) se tiene

$$\pi(A_{k+1} \bullet B) = [\pi(A_{k+1}), \pi(B)]$$

■

Lema 4.7 Sean $A = (a_n, \dots, a_1)$, $B = (b_r, \dots, b_1)$ con $a_i, b_j \in X$, tales que $[a, b] = 0$ para $a \in_{\text{entr}} A$, $b \in_{\text{entr}} B$ con $a \neq a_1$. Entonces se tiene que $\pi(A \bullet B) = [\pi(A), \pi(B)]$

Demostración. Por hipótesis se tiene que $[a, b] = 0$ para $a \in_{\text{entr}} A$, $b \in_{\text{entr}} B$ con $a \neq a_1$. Luego por Lema 4.3 se tiene que $[a, \pi(B)] = 0$ para $a \neq a_1$. Así por Lema 4.6(a) concluimos que $\pi(A \bullet B) = [\pi(A), \pi(B)]$. ■

Lema 4.8 Sean $A = (a_{n_1}, \dots, a_1)$, $B = (b_{n_2}, \dots, b_1) \in \mathcal{M}(X)$ con $a_i, b_j \in X$ tales que $[a, b] = 0$ para toda $a \in_{\text{entr}} A$ y toda $b \in_{\text{entr}} B$. Entonces $\pi(A \bullet B \bullet C) = \pi(B \bullet A \bullet C)$.

Demostración. Primero se mostrará el caso especial donde $n_1 = 1$ y la demostración se hará por inducción sobre n_2 . Si $n_2 = 1$:

$$\begin{aligned} \pi(a_1 \bullet b_1 \bullet C) &= \pi(a_1 \bullet (b_1, C)) && \text{(definición)} \\ &= [b_1, [a_1, \pi(C)]] && \text{(Lema 4.4(a))} \\ &= \pi(b_1 \bullet a_1 \bullet C) && \text{(definición)} \end{aligned}$$

Supóngase que $B = (b_{n_2-1}, \dots, b_1)$ y que $\pi(a_1 \bullet B \bullet C) = \pi(B \bullet a_1 \bullet C)$. Sea $B' = (b_{n_2}, b_{n_2-1}, \dots, b_1)$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(a_1 \bullet B' \bullet C) &= \pi(a_1 \bullet (b_{n_2}, B \bullet C)) && \text{(definición)} \\ &= [b_{n_2}, [\pi(a_1 \bullet (B \bullet C))] && \text{(Lema 4.4(a))} \\ &= [b_{n_2}, \pi(B \bullet a_1 \bullet C)] && \text{(inducción)} \\ &= \pi(b_{n_2} \bullet B \bullet a_1 \bullet C) && \text{(definición)} \\ &= \pi(B' \bullet a_1 \bullet C) && \text{(asociatividad)} \end{aligned}$$

Ahora se demostrará el caso general. Si $A = (a_{n_1}, \dots, a_1)$, $B = (b_{n_2}, \dots, b_1)$ y $[a, b] = 0$ para toda $a \in_{\text{entr}} A, b \in_{\text{entr}} B$, entonces $\pi(A \bullet B \bullet C) = \pi(B \bullet A \bullet C)$. La demostración es por inducción sobre n_1 . Para $n_1 = 1$ se cumple por la primer parte de la demostración.

Supóngase que para $A = (a_{(n_1-1)}, \dots, a_1)$ se tiene que $\pi(A \bullet B \bullet C) = \pi(B \bullet A \bullet C)$. Sea $A' = (a_{n_1}, a_{(n_1-1)}, \dots, a_1)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\pi(A' \bullet B \bullet C) &= \pi(a_{n_1} \bullet A \bullet B \bullet C) && \text{(por definición)} \\
&= \pi(a_{n_1} \bullet B \bullet A \bullet C) && \text{(inducción)} \\
&= \pi(B \bullet a_{n_1} \bullet A \bullet C) && \text{(caso especial)} \\
&= \pi(B \bullet A' \bullet C) && \text{(definición y asociatividad)}
\end{aligned}$$

■

4.2. Cadenas llenas

Una tupla de vértices (p_1, \dots, p_n) de una bigráfica Γ es una *cadena* si existe una arista entre los vértices p_i y p_j si y sólo si $|i - j| = 1$. Se dice que la cadena es *llena* si todas sus aristas son llenas. Si $\Delta = (p_1, \dots, p_n)$ es una cadena en Γ y a es un vértice que no este en Δ , entonces se dice que $i \in \Delta$ es un *enlace* del vértice a si $q_{ai} \neq 0$. Denotaremos por $L_a(\Delta)$ al conjunto de vértices en Δ que son enlaces del vértice a .

Lema 4.9 *Sea q una forma unitaria positiva definida y $\Delta = (1, \dots, n)$ una cadena llena en $B(q)$. Entonces, para $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n$ se tiene que*

$$\pi(D_{i_l} \bullet \dots \bullet D_{i_1}) = [\pi(D_{i_l}), \dots, \pi(D_{i_1})],$$

donde $D_m = (e_{\varepsilon i_m}, \dots, e_{\varepsilon(i_{m-1}+1)}) \in \mathcal{M}(X)$ para $1 \leq m \leq l$ y además $i_0 := 0$.

Demostración. Como $\Delta = (1, \dots, n)$ una cadena llena, entonces $[e_{\varepsilon a}, e_{\delta b}] = 0$ si $a, b \in \{1, \dots, n\}$ y $|a - b| > 1$, donde $\varepsilon, \delta = \pm 1$. Así se tiene que $[x, \pi(D_{m-1} \bullet \dots \bullet D_{i_1})] = 0$ para toda $x \in_{\text{entr}} D_m$ con $x \neq e_{\varepsilon(i_{m-1} + 1)}$, $2 \leq m \leq l$. Luego por Lema 4.6 (b) se obtiene el resultado. ■

Lema 4.10 *Sea $\Delta = (1, \dots, n)$ una cadena llena. Si $L_a(\Delta) = \{1, n\}$ entonces se tiene que $[e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon n}, \dots, e_{\varepsilon 1}] = 0$, donde $\varepsilon_1 = -\varepsilon q_{ap}$.*

Demostración. Sea $E = [e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon p}, \dots, e_{\varepsilon 1}] = 0$. Entonces $E = 0$ por (R5).

■

Lema 4.11 *Supóngase que la cadena llena $\Delta = (1, \dots, n)$ tiene un número par de vértices. Sea $L_a(\Delta) = \{i_1, \dots, i_k\}$ con k par. Si $i_1 = 1$, $i_k = p$, $i_{2m} + 1 = i_{(2m+1)}$ para $2 \leq m \leq \frac{k}{2} - 1$, entonces se tiene que*

$$[e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon p}, \dots, e_{\varepsilon 1}] = 0,$$

donde $\varepsilon_1 = -\varepsilon q_{ap}$.

Demostración. Sea $E := [e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon p}, \dots, e_{\varepsilon 1}]$. Se definen

$$\begin{aligned} D_1 &= (e_{\varepsilon i_2}, \dots, e_{\varepsilon i_1}) \\ D_2 &= (e_{\varepsilon i_4}, \dots, e_{\varepsilon i_3}) \\ &\vdots \\ D_{\frac{k}{2}} &= (e_{\varepsilon i_k}, \dots, e_{\varepsilon i_{(k-1)}}). \end{aligned}$$

Así, se tiene que $E = [e_{\varepsilon_1 a}, \pi(D_{\frac{k}{2}} \bullet \dots \bullet D_2 \bullet D_1)]$. Pero como $q_{nl} = 0$ si $|n - l| > 1$ entonces concluimos que

$$[e_{\varepsilon l a}, \pi(D_{(m-1)} \bullet \dots \bullet D_1)] = 0$$

para $i_{(2m-1)} < l \leq i_{2m}$, $1 \leq m \leq \frac{k}{2}$. Luego por Lema 4.6(b) se tiene que $\pi(D_{\frac{k}{2}} \bullet \dots \bullet D_2 \bullet D_1) = [\pi(D_{\frac{k}{2}}), \dots, \pi(D_2), \pi(D_1)]$. Así obtenemos que $E = [e_{\varepsilon_1 a}, \pi(D_{\frac{k}{2}}), \dots, \pi(D_2), \pi(D_1)]$; pero por Lema 4.10 se tiene que $[e_{\varepsilon_1 a}, \pi(D_i)] = 0$ para $i = 1, \dots, \frac{k}{2}$. Entonces por Lema 4.3 concluimos finalmente que $E = 0$.

■

Lema 4.12 *Sea q una forma unitaria positiva definida, $\Delta = (1, \dots, u)$ una cadena llena en $B(q)$ y sea a un vértice que no está en Δ . Entonces existe un número par de vértices de Δ que son enlaces de a si y sólo si $\sum_{j=1}^u q_{a,j} = 0$.*

En este caso se tiene que

$$(a) [e_{\sigma a}, e_{\varepsilon u}, \dots, e_{\varepsilon 1}] = 0 \text{ y}$$

$$(b) [e_{\varepsilon 1}, \dots, e_{\varepsilon u}, e_{\sigma a}] = 0,$$

para $\sigma, \varepsilon = \pm 1$.

Demostración. Dado que q es una forma unitaria positiva definida, se tiene que $-1 \leq q_{ij} \leq 1$. Sea $L_a(\Delta) = \{i_1, \dots, i_k\}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq u$. Como q satisface la condición ciclo, se tiene que $q_{ai_s} = -q_{ai_{s+1}}$ para $1 \leq s < k$.

Por lo tanto, obtenemos que l es par si y sólo si $\sum_{j=1}^u q_{a,j} = 0$.

Ahora supóngase que l es par. Si $L_a(\Delta) = \emptyset$, entonces se tiene que $[e_{\varepsilon 1a}, e_{\varepsilon m}] = 0$. Así por el Lema 4.3 el resultado se verifica de inmediato. Así podemos suponer que $L_a(\Delta) \neq \emptyset$. Como q es positiva, los vértices i_m, i_{m+1} son tales que $q_{ai_m} = -q_{ai_{m+1}}$ para $i_1 \leq m < i_k$.

Supóngase primero que $i_{2m} + 1 = i_{2m+1}$. Si $i_1 \neq 1$ y $i_k \neq n$ se definen

$$\begin{aligned} D_1 &= (e_{\varepsilon(i_1-1)}, \dots, e_{\varepsilon 1}) \\ D_2 &= (e_{\varepsilon i_k}, \dots, e_{\varepsilon i_1}) \\ D_3 &= (e_{\varepsilon n}, \dots, e_{\varepsilon(i_k+1)}). \end{aligned}$$

Así se tiene que

$$[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon r}, \dots, e_{\varepsilon 1}] = [e_{\sigma a}, \pi(D_3 \bullet D_2 \bullet D_1)].$$

Por Proposición 4.9(a) se tiene que $\pi(D_3 \bullet D_2 \bullet D_1) = [\pi(D_3), \pi(D_2 \bullet D_1)]$. Ahora por Proposición 4.9(b) se tiene que $\pi(D_2 \bullet D_1) = [\pi(D_2), \pi(D_1)]$ y entonces se sigue que

$$[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon r}, \dots, e_{\varepsilon 1}] = [e_{\sigma a}, \pi(D_3), \pi(D_2), \pi(D_1)].$$

Finalmente, como $[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon i}] = 0$ para $i \in \{1, \dots, i_1 - 1, i_k + 1, \dots, r\}$ se obtiene por Lema 4.3 que $[e_{\sigma a}, \pi(D_j)] = 0$ para $j = 1, 3$. Más aún, por Lema 4.11 se tiene que $[e_{\sigma a}, \pi(D_2)] = 0$ y así por Lema 4.3 tenemos que $[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon r}, \dots, e_{\varepsilon 1}] = 0$. Si $i_1 = 1$ y $r \neq i_k$, se consideran D_2 y D_3 . Si $i_1 \neq 1$ y $r = i_k$, se consideran D_1 y D_2 . Si $i_1 = 1$ y $r = i_k$ sólo se considera D_2 y se da en todos estos casos un argumento similar al anterior.

Supóngase ahora que para algún $1 \leq m < \frac{k}{2}$ se tiene que $i_{2m} + 1 \neq i_{(2m+1)}$.

Sean

$$\begin{aligned}
m_1 &:= \min\{m \mid 1 \leq m < \frac{k}{2}, i_{2m} + 1 \neq i_{(2m+1)}\} \\
m_2 &:= \min\{m \mid m_1 < m < \frac{k}{2}, i_{2m} + 1 \neq i_{(2m+1)}\} \\
&\vdots \\
m_t &:= \min\{m \mid m_{(t-1)} < m < \frac{k}{2}, i_{2m} + 1 \neq i_{(2m+1)}\}
\end{aligned}$$

todos los m tales que $i_{2m} + 1 \neq i_{(2m+1)}$. Si $i_1 \neq 1$ y $r \neq i_k$, se definen

$$\begin{aligned}
D_1 &= (e_{\varepsilon(i_1-1)}, \dots, e_{\varepsilon 1}) \\
D_2 &= (e_{\varepsilon i_{2m_1}}, \dots, e_{\varepsilon i_1}) \\
D_3 &= (e_{\varepsilon(i_{(2m_1+1)}-1)}, \dots, e_{\varepsilon(i_{2m_1+1})}) \\
&\vdots \\
D_{2t} &= (e_{\varepsilon i_{2m_t}}, \dots, e_{\varepsilon i_{(2m_{(t-1)+1})}}) \\
D_{(2t+1)} &= (e_{\varepsilon(i_{(2m_t+1)}-1)}, \dots, e_{\varepsilon(i_{2m_t+1})}) \\
D_{2(t+1)} &= (e_{\varepsilon i_k}, \dots, e_{\varepsilon i_{(2m_t+1)}}) \\
D_{(2(t+1)+1)} &= (e_{\varepsilon r}, \dots, e_{\varepsilon(i_k+1)}).
\end{aligned}$$

Así se tiene que

$$[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon r}, \dots, e_{\varepsilon 1}] = [e_{\varepsilon 1 a}, \pi(D_{(2(t+1)+1)}) \bullet \dots \bullet D_2 \bullet D_1].$$

Usando iteradamente los incisos (a) y (b) de la Proposición 4.9 obtenemos que

$$\pi(D_{(2(t+1)+1)}) \bullet \dots \bullet D_2 \bullet D_1 = [\pi(D_{(2(t+1)+1)}), \dots, \pi(D_2), \pi(D_1)].$$

Por Lema 4.3 se tiene que $[e_{\sigma a}, \pi(D_j)] = 0$ para j impar. Más aún, por Lema 4.11 se tiene que $[e_{\sigma a}, \pi(D_j)] = 0$ si j es par; así por Lema 4.3 se concluye que $[e_{\varepsilon 1 a}, e_{\varepsilon r}, \dots, e_{\varepsilon 1}] = 0$. Si $i_1 = 1$ y $r \neq i_k$, se consideran $D_2, \dots, D_{(2(t+1)+1)}$, si $i_1 \neq 1$ y $r = i_k$ se consideran $D_1, \dots, D_{2(t+1)}$, si $i_1 = 1$ y $r = i_k$ se consideran $D_2, \dots, D_{2(t+1)}$ y se da en todos estos casos un argumento similar al anterior. Lo cual demuestra el inciso (a).

Si $[e_{\varepsilon u}, e_{\sigma 0 a}] = 0$, se obtiene (b) de forma trivial. Así supóngase que $[e_{\varepsilon u}, e_{\sigma a}] \neq$

0 y sea $j < u$ el maximal tal que $q_{ja} \neq 0$. Entonces se tiene que $\sum_{i=j}^u q_{ia} = 0$ y $[e_{\varepsilon i}, e_{\sigma a}] = 0$ para $j < i < u$. Así $[e_{\varepsilon(j+1)}, \dots, e_{\varepsilon u}, e_{\sigma a}]$ satisface las condiciones del Lema 3.4 y por lo tanto

$$[e_{\varepsilon j}, \dots, e_{\varepsilon u}, e_{\sigma a}] = \pm [e_{\varepsilon 1 a}, e_{\varepsilon u}, \dots, e_{\sigma a}],$$

el cual es cero por (a). ■

4.3. Monomios cero asociados a cadenas llenas con enlaces

Lema 4.13 *Sea q una forma unitaria positiva definida, sea $\Delta = (1, \dots, u)$ una cadena llena en $B(q)$ y sea a un vértice que no está en Δ . Supóngase que $\sum_{j=1}^u q_{aj} = 0$ y que $B \in \mathcal{M}(X)$ es tal que $[e_{\varepsilon j}, \pi(B)] = 0$ para $1 \leq j \leq u$. Entonces se tiene que $\pi(D \bullet (e_{\sigma a}, B)) = 0$ donde $D = (e_{\varepsilon u}, \dots, e_{\varepsilon 1}) \in \mathcal{M}(X)$ y $\sigma, \varepsilon = \pm 1$.*

Demostración. Se deduce del Lema 4.4(b) que $\pi(D \bullet (e_{\sigma a}, B)) = [\pi(D \bullet e_{\sigma a}), \pi(B)]$. Ahora como $\pi(D \bullet e_{\sigma a}) = [e_{\varepsilon u}, \dots, e_{\varepsilon 1}, e_{\sigma a}]$, se tiene que si

$$[e_{\varepsilon 1}, e_{\sigma a}] = 0$$

entonces $\pi(D \bullet e_{\sigma a}) = 0$. Así supóngase que $[e_{\varepsilon 1}, e_{\sigma a}] \neq 0$, sea $i > j$ el mínimo tal que $q_{ai} \neq 0$ y obsérvese que $[e_{\varepsilon i}, \dots, e_{\varepsilon 1}, e_{\sigma a}] = 0$ por $R_5(q)$. ■

Hipótesis 4.14 *Sea q una forma unitaria positiva definida, $\Delta = (1, \dots, u)$ una cadena llena en $B(q)$ y se fijan $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq u$. Más aún, sean*

$$\begin{aligned} D_1 &= (e_{\varepsilon(i_1-1)}, \dots, e_{\varepsilon 1}) \\ D_m &= (e_{\varepsilon(i_m-1)}, \dots, e_{\varepsilon i_{m-1}}) \quad (1 < m \leq k) \\ D_{k+1} &= (e_{\varepsilon u}, \dots, e_{\varepsilon i_k}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Lema 4.15 *Supóngase que se satisfacen las Hipótesis 4.14. Entonces para $A \in \mathcal{M}(X)$ y cada $m \geq 3$ se tiene que:*

$$\pi(D_m \bullet D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet A) = \pi(D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet D_m \bullet A)$$

si m es impar, y

$$\pi(D_m \bullet D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet A) = \pi(D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_m \bullet A)$$

si m es par.

Demostración. Sea $D = D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_1$ si m es impar ($D = D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_2$ si m es par). Entonces se tiene que $[e_{\varepsilon i}, e_{\varepsilon j}] = 0$ para cada $e_{\varepsilon i} \in_{\text{entr}} D_m$ y cada $e_{\varepsilon j} \in_{\text{entr}} D$. Por lo tanto el resultado se sigue del Lema 4.8. ■

Hipótesis 4.16 *Sean $B, C \in \mathcal{M}(X)$ tales que*

$$\begin{aligned} [e_{\varepsilon j}, \pi(C)] &= 0, & \text{para toda } e_{\varepsilon j} \in_{\text{entr}} D_1, \\ [e_{\varepsilon j}, \pi(D_{m-1} \bullet C)] &= 0, & \text{para toda } e_{\varepsilon j} \in D_m, m > 1 \text{ impar,} \\ [e_{\varepsilon j}, \pi(D_{m-1} \bullet B)] &= 0, & \text{para toda } e_{\varepsilon j} \in D_m, m > 1 \text{ par.} \end{aligned}$$

Lema 4.17 *Supóngase que se satisfacen las Hipótesis 4.14 y 4.16. Entonces para cada $m \geq 2$ y cada $e_{\varepsilon j} \in_{\text{entr}} D_m$ se tiene que*

$$\begin{aligned} \pi(e_{\varepsilon j} \bullet D_{(m-1)} \bullet D_{(m-3)} \bullet \cdots \bullet D_3 \bullet D_1 \bullet B) &= 0 & \text{si } m \text{ es par, y} \\ \pi(e_{\varepsilon j} \bullet D_{(m-1)} \bullet D_{(m-3)} \bullet \cdots \bullet D_4 \bullet D_2 \bullet C) &= 0 & \text{si } m \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Demostración. Supóngase que m es par (el caso donde m es impar es completamente similar) y sea $E = \pi(e_{\varepsilon j} \bullet D_{(m-1)} \bullet D_{(m-3)} \bullet \cdots \bullet D_3 \bullet D_1 \bullet B)$. Sea $D' = (e_{\varepsilon j}, D_{m-1})$. Obsérvese que para cada $x \in_{\text{entr}} D'$ y cada $y \in_{\text{entr}} C = D_{m-3} \bullet \cdots \bullet D_1$ se tiene que $[x, y] = 0$. De aquí por Lema 4.8, se tiene que $E = \pi(D' \bullet C \bullet B) = \pi(C \bullet D' \bullet B)$. El resultado se sigue ahora de que $\pi(D' \bullet B) = [e_{\varepsilon j}, \pi(D_{m-1} \bullet B)] = 0$ por hipótesis (4.16). ■

Lema 4.18 *Nuevamente, supóngase que se satisfacen las Hipótesis 4.14 y 4.16.*

(i) *Para cada par m , se tiene que $\pi(D_{m+1} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1 \bullet (B, C))$ es igual a $[\pi(D_{m+1} \bullet D_{m-1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B), \pi(D_m \bullet D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)]$.*

(ii) Para cada impar m , se tiene que $\pi(D_{m+1} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1 \bullet (B, C))$ es igual a $[\pi(D_m \bullet D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B), \pi(D_{m+1} \bullet D_{m-1} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)]$.

Demostración. La demostración es por inducción sobre m . Sea

$$E_m = \pi(D_{m+1} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1 \bullet (B, C)).$$

Si $m = 1$, entonces

$$E_1 = \pi(D_2 \bullet D_1 \bullet (B, C)) = [e_{\varepsilon(i_2-1)}, \dots, e_{\varepsilon i_1}, \pi(D_1 \bullet (B, C))].$$

Por hipótesis (4.16) se tiene que $[e_{\varepsilon j}, \pi(C)] = 0$ para toda $e_{\varepsilon j} \in_{\text{entr}} D_1$; se puede entonces aplicar el Lema 4.4 y así concluir que $\pi(D_1 \bullet (B, C)) = [\pi(D_1 \bullet B), C]$. Nuevamente por (4.16), para cada $e_{\varepsilon i} \in D_2$, obtenemos que $[e_{\varepsilon i}, \pi(D_1 \bullet B)] = 0$ y por lo tanto $E_1 = \pi(D_2 \bullet (D_1 \bullet B, C)) = [\pi(D_1 \bullet B), \pi(D_2 \bullet C)]$.

Para $m > 1$ impar (el caso m par es completamente similar), se tiene que

$$E_m = [e_{\varepsilon(i_{m+1}-1)}, \dots, e_{\varepsilon i_m}, \pi(D_m \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet (B, C))]$$

y por lo tanto por inducción

$$E_m = [e_{\varepsilon(i_{m+1}-1)}, \dots, e_{\varepsilon i_m}, \pi(D_{(m-1)} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B), \pi(D_m \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)].$$

Por el Lema 4.17 se tiene que $[e_{\varepsilon j}, \pi(D_m \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)] = 0$ para toda $e_{\varepsilon j} \in_{\text{entr}} D_{m+1}$; así por Lema 4.4(b) se obtiene que

$$E_m = [\pi(D_{m+1} \bullet D_{(m-1)} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B), \pi(D_m \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)],$$

lo cual finaliza la demostración. ■

El siguiente resultado técnico es una herramienta importante en la demostración del Lema 3.5.

Hipótesis 4.19 *Se tiene que $\pi(D_{k+1} \bullet C) = 0$ (resp. $\pi(D_{k+1} \bullet B) = 0$) si k es impar (resp. k es par).*

Lema 4.20 *Si se satisfacen las Hipótesis 4.14, 4.16 y 4.19, entonces*

$$\pi(D_{k+1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet (B, C)) = 0.$$

Demostración. Sea $E = \pi(D_{k+1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet (B, C))$. Si $k = 1$ entonces, por Lema 4.18, se tiene que $E = [\pi(D_1 \bullet B), \pi(D_2 \bullet C)]$ y el resultado se sigue directamente de la Hipótesis 4.16.

Si $k > 1$ (se supondrá que k es par, el caso impar es similar) entonces se sigue del Lema 4.18 que

$$E = [\pi(D_{k+1} \bullet D_{k-1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B), \pi(D_k \bullet D_{k-2} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)].$$

Usando el Lema 4.15 obtenemos que

$$\pi(D_{k+1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B) = \pi(D_{k-1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet D_{k+1} \bullet B)$$

y el resultado se sigue de que $\pi(D_{k+1} \bullet B) = 0$. ■

Capítulo 5

Demostración del Lema 3.5

Recordemos que q es una forma unitaria positiva definida, la cual contiene a una de las bigráficas $\mathbf{g}_n^0(\lambda)$, $\mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu; i_1, \dots, i_l)$ o $\mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu; i_1, \dots, i_l)$. En particular $(1, \dots, n)$ es una cadena llena en $B(q)$ y se denota por $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n$ a los vértices de $(1, \dots, n)$ que están enlazados con μ .

La demostración del Lema 3.5 para los casos

$$\mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu; i_1, \dots, i_l),$$

$$\mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu; i_1, \dots, i_l),$$

se hará de forma simultánea. Sin embargo la demostración para el caso $\mathbf{g}_n^0(\lambda)$ se considerará aparte, pues es muy distinta a la de los dos casos anteriores.

5.1. Estrategia para $\mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu; i_1, \dots, i_l)$ y $\mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu; i_1, \dots, i_l)$

Nuevamente se denotará por Γ la sub-bigráfica de $B(q)$ dada por los vértices $\lambda, \mu, 1, \dots, n$. Se tiene así que

$$\Gamma = \mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu, i_1, \dots, i_l) =: \mathbf{g}^1 \text{ o bien } \Gamma = \mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu, i_1, \dots, i_l) =: \mathbf{g}^2$$

y se quiere mostrar que los monomios $F = F_{n,v}$, definidos en el Lema 3.5, son cero en $\mathbf{g}_5(q)$ para $0 \leq v \leq n$.

En la demostración se distinguen los siguientes casos.

I: $\Gamma = \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ y $i_k \leq u < i_{k+1}$ para algún entero positivo *par* $k < l$.

II: $\Gamma = \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ y $i_k \leq u < i_{k+1}$ para algún entero *impar* $k < l$.

III: $\Gamma = \mathbf{g}^1$ y $i_l \leq u < n$.

IV: $\Gamma = \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ y $1 \leq u < i_1$.

V: $\Gamma = \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ y $u = n$.

VI: $\Gamma = \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ y $u = 0$.

El último caso es muy fácil. En efecto, dado que en este caso existe un número par de vértices de $\Delta(1, 2, \dots, n)$ enlazados con λ y μ , se tiene entonces que $[e_{-\alpha}, e_n, e_{n-1}, \dots, e_1] = 0$ para $\alpha = \lambda, \mu$ y por lo tanto $F = F_{n,0} = 0$.

Los casos restantes son más difíciles. Sin embargo, dado que en cada caso el procedimiento es muy similar, se describe aquí un esquema común de argumentos en tres pasos, como sigue.

Primer paso: En cada caso se hacen ciertas definiciones y se verifican algunas igualdades.

I: Se definen $B_1 = (e_{-i_{k+1}}, \dots, e_{-(u+1)})$ y $C_1 := (e_{-n}, \dots, e_{-(i_{k+1}+1)})$. Más aún, sean $B = (e_\lambda, B_1)$ y $C = (e_\mu, C_1)$. Se muestra que (i) $[e_\mu, \pi(C_1 \bullet B_1)] = 0$, (ii) $[e_\lambda, \pi(C_1)] = 0$ y que (iii) $[e_\mu, \pi(B)] = 0$.

II: Se definen $B_1 = (e_{-n}, \dots, e_{-(i_{k+1}+1)})$ y $C_1 := (e_{-i_{k+1}}, \dots, e_{-(u+1)})$. Más aún, se definen $B = (e_\mu, B_1)$ y $C = (e_\lambda, C_1)$ (en el caso $\Gamma = \mathbf{g}^2$ con $k = l - 1$, se toman $C_1 = 1 \in \mathcal{M}(X)$ y $C = e_\lambda$). Se muestra que (i) $[e_\lambda, \pi(B_1 \bullet C_1)] = 0$, (ii) $[e_\mu, \pi(B_1)] = 0$ y (iii) $[e_\lambda, \pi(C)] = 0$.

III: Se definen $B_1 = (e_{-n}, \dots, e_{-(u+1)})$, $B = (e_\lambda, B_1)$ y $C = e_\mu$. Entonces se demuestra que (i) $[e_\mu, \pi(B_1)] = 0$.

IV: Se definen $B_1 := (e_{-i_1}, \dots, e_{-(u+1)})$ y $C_1 := (e_{-n}, \dots, e_{-(i_1+1)})$ y entonces se definen $B = (e_\lambda, B_1)$, $C = (e_\mu, C_1)$. Luego se prueba que (i) $[e_\mu, \pi(C_1 \bullet B_1)] = 0$, (ii) $[e_\lambda, \pi(C_1)] = 0$ y (iii) $[e_\mu, \pi(B)] = 0$.

V: Se definen $B = e_\lambda$, $C = e_\mu$ y no se demostrarán igualdades en este paso.

Segundo paso: En todos los casos se demuestra que

$$F = \pm \pi(D \bullet (B, C))$$

donde $D = D_{k+1} \bullet D_k \bullet \dots \bullet D_1$ y los $D_i \in \mathcal{M}(X)$ son como en las Hipótesis 4.14, y se toma $k = 0$ en el caso IV y $u = n$, $k = l$ en el caso V.

Tercer paso: Se muestra que en todos los casos, las Hipótesis 4.16 y 4.19 se satisfacen y que consecuentemente $F = 0$ por Lema 4.20.

5.2. Demostración del primer paso

Primero se verificará el caso I para mostrar (i), sea $\Delta = (u+1, \dots, n)$. Los vértices de la cadena llena Δ que están enlazados con μ son i_{k+1}, \dots, i_l , dado que el conjunto $L_\mu(\Delta)$ tiene cardinalidad par, se tiene que $[e_\mu, \pi(C_1 \bullet B_1)] = 0$, por Lema 4.12

Para ver la propiedad (ii), sea $\Delta = (i_{k+1} + 1, \dots, n)$. Si $\Gamma = \mathbf{g}^1$ se toma $L_\lambda(\Delta) = \{i_{k+2}, \dots, i_l, n\}$ que tiene cardinalidad par, y si $\Gamma = \mathbf{g}^2$ entonces se toma $L_\lambda(\Delta) = \{i_{k+2}, \dots, i_{l-1}\}$ que también tiene cardinalidad par. En cada caso, (ii) se sigue del Lema 4.12.

Para (iii), obsérvese que $[e_\lambda, e_j] = 0$ y $[e_\mu, e_j] = 0$ (para $u+1 \leq j < i_{k+1}$) y por lo tanto $[e_\lambda, \pi(A)] = [e_\mu, \pi(A)] = 0$, donde $A = (e_{-\varepsilon(i_{k+1}-1)}, \dots, e_{-(u+1)})$. Tenemos que

$$[e_\mu, \pi(B)] = [e_\mu, e_\lambda, e_{-i_{k+1}}, \pi(A)] = [e_\mu, \pi(A), e_{-i_{k+1}}, e_\lambda] = [\pi(A), e_\mu, e_{-i_{k+1}}, e_\lambda],$$

el cual es cero puesto que $[e_\mu, e_{-i_{k+1}}, e_\lambda] = 0$ por $R_5(q)$.

Para ver la propiedad (i) en el caso II, se define $\Delta = (u+1, \dots, n)$. Si $\Gamma = \mathbf{g}^1$, se tiene que $L_\lambda(\Delta) = \{i_{k+1}, \dots, i_l, n\}$ y si $\Gamma = \mathbf{g}^2$, se tiene que $L_\lambda(\Delta) = \{i_{k+1}, \dots, i_{l-1}\}$. En cada caso el conjunto $L_\lambda(\Delta)$ tiene cardinalidad par y por el Lema 4.12 se cumple (i).

Para (ii), obsérvese que para $\Delta = (i_{k+1} + 1, \dots, n)$ el conjunto $L_\mu(\Delta) = \{i_{k+2}, \dots, i_l\}$ tiene cardinalidad par, puesto que k es impar, y (ii) se sigue nuevamente por Lema 4.12. La propiedad (iii) en el caso II se prueba como en el caso I.

La propiedad (i) en el caso II es trivial ya que no hay vértices de $\Delta = (u+1, \dots, n)$ enlazados con λ .

En el caso IV, sea $\Delta = (u+1, \dots, n)$ y obsérvese que $L_\mu(\Delta) = \{i_1, \dots, i_l\}$ tiene cardinalidad par. De aquí, se tiene que (i) se cumple por Lema 4.12. De forma similar, si $\Delta = (i_1 + 1, \dots, n)$ entonces $L_\lambda(\Delta) = \{i_2, \dots, i_l, n\}$ (resp. $L_\lambda(\Delta) = \{i_2, \dots, i_{l-1}\}$) en el caso donde $\Gamma = \mathbf{g}^1$ (resp. $\Gamma = \mathbf{g}^2$). En ambos casos el conjunto $L_\lambda(\Delta)$ tiene cardinalidad par y nuevamente usando el Lema 4.12 se deduce que (ii) se cumple. La propiedad (iii) en el caso IV, se demuestra como se mostró (iii) en el caso I. ■

5.3. Demostración del segundo paso

Sea $D = D_{k+1} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1$, donde los D_i son como en las Hipótesis 4.14.

Casos I y IV: Por definición, se tiene que $F = [e_u, \dots, e_1, G]$ donde $G = [[e_\lambda, e_\mu], \pi(C_1 \bullet B_1)]$. Por Lema 4.2 y antisimetría se deduce de la propiedad (i) que $G = -[e_\lambda, e_\mu, \pi(C_1 \bullet B_1)]$. Ahora, se deduce del Lemma 4.9 que $G = -[e_\mu, e_\lambda, \pi(C_1), \pi(B_1)]$. Nuevamente por Lema 4.2, se deduce de la propiedad (ii) que $G = -[e_\mu, \pi(C_1), e_\lambda, \pi(B_1)] = -[e_\mu, \pi(C_1), \pi(B)]$. Así, se obtiene de la propiedad (iii) y del Lema 4.2 que $G = [\pi(B), e_\lambda, \pi(C_1)] = [\pi(B), \pi(C)]$. Finalmente, substituyendo G en F se obtiene que

$$F = [e_u, \dots, e_1, \pi(B), \pi(C)] = \pm \pi(D \bullet (B, C)).$$

La demostración en el caso II es idéntica a la anterior, intercambiando B_1 con C_1 , λ con μ y C con B .

En el caso III se tiene por definición $F = [e_u, \dots, e_1, G]$, donde $G = [[e_\lambda, e_\mu], \pi(B_1)]$. Ahora, por la propiedad (i) y 4.2, se tiene que

$$G = [[\pi(B_1), e_\beta], e_\alpha] = [e_\alpha, e_\beta, \pi(B_1)] = [\pi(C), \pi(B)] = -[\pi(B), \pi(C)].$$

Por lo tanto $F = \pm \pi(D \bullet (B, C))$.

El Caso V es trivial puesto que $F = \pi(D \bullet (C, B)) = -\pi(D \bullet (B, C))$. ■

5.4. Demostración del tercer paso.

Caso I. Para cada $e_j \in D_1$ (es decir, $1 \leq j < i_1$) se tiene que $[e_j, \pi(C_1)] = 0$ y $[e_j, e_\mu] = 0$ puesto que $q_{j\mu} \geq 0$. Por lo tanto $[e_j, \pi(C)] = 0$. De forma similar para cada m par con $1 < m < k$ y para $e_j \in D_m$, se tiene que $[e_j, \pi(C)] = 0$. Si $j > i_{m-1}$ entonces $[e_j, \pi(D_{m-1})] = 0$. Por lo tanto $[e_j, \pi(D_{m-1} \bullet C)] = 0$; si $j = i_{m-1}$ entonces sea $D' = D_{m-1} \bullet e_\mu$. Así, $[e_j, \pi(D_{m-1} \bullet C)] = [e_j, \pi(D' \bullet C)] = [\pi(e_j \bullet D'), \pi(C_1)]$ por 4.4(b). Por Lema 4.12(b), se obtiene la segunda afirmación de las Hipótesis 4.16.

Para cada número par m con $1 < m \leq l$ y cada $e_j \in D_m$ se tiene que $[e_j, \pi(B)] = 0$ puesto que $[e_j, e_\lambda] = 0$ y $[e_j, \pi(B_1)] = 0$. De manera similar al caso cuando m es impar, se concluye que $[e_j, \pi(D_{m-1} \bullet B)] = 0$. Esto muestra que las Hipótesis 4.16 se cumplen. Para verificar las Hipótesis 4.19, se usa que $[e_j, e_{-i}] = 0$ para cada $e_j \in_{\text{entr}} D_{k+1}$ y cada $e_{-i} \in_{\text{entr}} C_1$ y también que

$[e_j, e_\mu] = 0$ ya que $q_{j\mu} \geq 0$; así se concluye que $[e_j, \pi(C)] = 0$ para cada $e_j \in_{\text{entr}} D_{k+1}$ y consecuentemente $\pi(D_{k+1} \bullet C) = 0$.

Caso II. El argumento es completamente similar al Caso I.

Caso III. Para $e_j \in_{\text{entr}} D_1$, se tiene que $[e_j, \pi(C)] = 0$ puesto que $q_{j\mu} \geq 0$. Si m es impar y $e_j \in_{\text{entr}} D_m$, entonces nuevamente $[e_j, \pi(C)] = 0$ por la misma razón. Para $j > i_{m-1}$, se tiene directamente que $[e_j, \pi(D_{m-1} \bullet C)] = 0$, mientras que si $j = i_{m-1}$ se puede aplicar el Lema 4.12(b) y obtener lo mismo. De forma similar se da un argumento para cuando m es par.

Caso IV. Aquí se tiene que $D = D_1 = [e_u, \dots, e_1]$ y por lo tanto para cada $e_j \in_{\text{entr}} D_1$ obtenemos que $[e_j, e_\mu] = 0$ puesto que $q_{j\mu} = 0$. Consecuentemente $[e_j, \pi(C)] = 0$ y no hay nada que demostrar para las Hipótesis 4.16 y las Hipótesis 4.19 puesto que en este caso $k + 1 = 1$.

Caso V. Se tiene que $k = l$ y $D_{k1} = (e_n, \dots, e_{i_l})$, el cual se reduce a $D_{k+1} = e_n$ en el caso $\Gamma = \mathfrak{g}^2$. Así, las Hipótesis 4.16 se verifican como en el caso I y las Hipótesis 4.19 se deducen de que $[e_j, e_\mu] = 0$ para $e_j \in D_{k+1}$ de que $q_{j\mu} \geq 0$. ■

5.5. Monomios cero en las bigráficas $\mathfrak{g}_n^0(\lambda)$

Se recuerda que aquí $\Gamma = \mathfrak{g}^0$ y se tiene que demostrar que los monomios

$$F_{n,u}(\lambda, n) = [e_u, \dots, e_1, [e_\lambda, e_n], e_{-n}, \dots, e_{-(u+1)}]$$

son cero en $\mathfrak{g}_5(q)$ para $0 \leq u \leq n$.

Primero se analizará el caso donde $0 \leq u < n$. Entonces se tiene que $F_{n,u}(\lambda, n) = [e_u, \dots, e_1, G]$, donde

$$G = [[e_\lambda, e_n], e_{-n}, \dots, e_{-(u+1)}]$$

Aplicando el Lema 3.4 se obtiene que

$$G = \pm [[e_\lambda, e_n], e_{-n}, \dots, e_{-(u+1)}]^\leftarrow = [u_{-(u+1)}, \dots, e_{-n}, e_\lambda, e_n].$$

Reemplazando

$$[e_{-n}, e_\lambda, e_n] = [e_\lambda, e_{-n}, e_n] = [e_\lambda, h_n] = e_\lambda$$

en la expresión de arriba concluimos que

$$G = \pm [[e_\lambda, e_n], e_{-n}, \dots, e_{-(u+1)}]^\leftarrow = [u_{-(u+1)}, \dots, e_{-(n-1)}, e_\lambda]$$

lo cual es cero por $R_5(q)$.

Resta el caso donde $u = n$. Obsérvese que

$$G = [e_n, e_{n-1}, e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \dots, e_1, e_\lambda]$$

es igual a cero en $\mathfrak{g}_5(q)$. En efecto,

$$G = [e_n, [e_{n-1}, e_n], e_{n-2}, e_{n-3}, \dots, e_1, e_\lambda],$$

puesto que $[e_{n-1}, e_{n-2}, \dots, e_1, e_\lambda] = 0$ por $R_5(q)$. Por lo tanto,

$$G = [[e_{n-1}, e_n], e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \dots, e_1, e_\lambda],$$

ya que $[e_n, e_{n-1}, e_n] = 0$ por $R_4(q)$. Finalmente, se tiene que

$$G = -[[e_n, e_{n-1}], e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \dots, e_1, e_\lambda]$$

por antisimetría y entonces $G = -[e_n, e_{n-1}, e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \dots, e_1, e_\lambda] = G$, ya que $[e_n, e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \dots, e_1, e_\lambda] = 0$ por $R_4(q)$. Es decir, se tiene que $G = -G$ y por lo tanto $G = 0$.

Ahora, $F_{n,n}(\lambda, n) = [e_n, \dots, e_1, [e_\lambda, e_n]] = -[e_n, \dots, e_1, e_n, e_\lambda]$ por antisimetría y usando que $[e_i, e_n] = 0$ (para $i < n - 1$), se concluye finalmente que

$$F_{n,n}(\lambda, n) = -[e_n, e_{n-1}, e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \dots, e_1, e_\lambda] = G = 0.$$

■

Bibliografía

- [BKL] M. Barot, D. Kussin and H. Lenzing: The Lie algebra associated to a unit form. *Journal of Algebra* 296 (2006), 1-17.
- [BN] N. Bourbaki: *Elements of Mathematics Algebra I, Chapters 1-3*. Springer-Verlag.
- [O] S.A. Ovsienko: Integral weakly positive forms. In : *Schur matrix problems and quadratic forms*. Kiev (1978), 3-17.
- [R] C.M. Ringel: *Tame algebras and integral quadratic forms*. *Lectures Notes in Mathematics*, 1099. Springer-Verlag.
- [SER] Jean-Pierre Serre: *Complex semisimple Lie algebras*. Springer-Verlag (1987).