



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

**POSGRADO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

ALGUNOS ASPECTOS DINÁMICOS Y

BIFURCACIONES DE LA FAMILIA  $F_a(z) = z^2 + 2a\bar{z}$

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

**P R E S E N T A**

**JEFFERSON EDWIN KING DÁVALOS**

**DIRECTOR DE TESIS: DOCTOR GUILLERMO JAVIER  
SIENRA LOERA**

MÉXICO, D. F.

MAYO 2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



A mi mujer  
María de la Paz Alvarez Scherer  
A mis hijos  
Lucía López de Medrano Álvarez  
Pablo King Álvarez  
Esteban King Álvarez

A mi madre  
María Esther Dávalos Trujillo  
A la memoria de mi padre  
Jefferson Paul King



# Agradecimientos

Este trabajo es, sin duda alguna, una obra colectiva y quiero agradecerles a todos los que contribuyeron a hacerlo realidad.

Muy especialmente, por su esfuerzo permanente, su dedicación, su paciencia y su confianza en mí, a mis dos directores de tesis: Guillermo Sienna Loera y Héctor Méndez Lango.

A Héctor Cejudo Camacho, por resolver absolutamente todos los problemas técnicos asociados con procesar esta tesis en la computadora, y por hacer una buena cantidad de las figuras de los capítulos 1, 2 y 3.

A Manuel Falconi y Ana Guzmán, sinodales honorarios, por sus valiosos comentarios y el tiempo que dedicaron a discutir la tesis conmigo.

A mis sinodales: Patricia Soto Domínguez, Xavier Gómez Mont, Ernesto Rosales, Adolfo Guillot y Santiago López de Medrano, que además del tiempo que le dedicaron a hacerme observaciones y comentarios, escribieron minuciosos reportes de la tesis para la comisión de posgrado.

Quiero enfatizar que la visión de todos ellos –sinodales honorarios u oficiales– ha sido altamente enriquecedora y gratificante para mí.

A Antonio Carrillo, por haber implementado software especialmente útil para los experimentos numéricos.

A Angel Carrillo Hoyo, Fernando Brambila, Humberto Carrillo Calvet, Aubin Arroyo y Luis Nava, por su apoyo en diferentes aspectos y momentos de este trabajo.

A mi querida amiga y ayudante de tantos años, Leticia Contreras Sandoval, por teclear, siempre que se lo pedí, partes de esta tesis.

A Mirna Ocampo, compañera de trabajo, por contribuir también con la teclada de la tesis.

A Javier Pulido Cejudo, por haberme introducido en esta área de las matemáticas.

Por su apoyo moral, su entusiasmo, por echarme porras, a toda la banda de amigos y familiares entrañables: Orlando, Pilar, Marianita, mi carnalito Bruce, Rosi, Sergio y Paloma, Pita, Paco, Toto, Gabi, Gabriel, Ana, Inés, Elisa, Marela, Irene, Bettina, Ceci Díaz Sánchez, mis cuñaditas Vero y Pati, Arturo McArthur, mis hermanas Patsy y Tita, mis hermanos Andrés y Paco, mi cardiólogo primo hermano (que me ha mentenido funcionando) Luisito,

Francis, Hermi, y muy cariñosamente a mi madre: Esther Dávalos Trujillo, quién está feliz porque ya acabé.

Finalmente (en el orden, pero no en la importancia), mi sentimiento más especial y profundo, más amoroso, por su comprensión, su paciencia, su amor, y su extraordinario ánimo para impulsarme y estar a mi lado, a Paz, mi mujer, y a mis hijos: Lucía, Pablo y Esteban.

Jefferson Edwin King Dávalos  
Mayo 18, 2006.  
Día bonito en el Distrito Federal.

# Índice general

<b>Introducción.</b>	<b>XI</b>
0.1. Capítulo 1 . . . . .	XII
0.2. Capítulo 2 . . . . .	XIV
0.3. Capítulo 3 . . . . .	XIV
0.4. Capítulo 4 . . . . .	XVII
0.5. Capítulo 5 . . . . .	XVIII
0.6. Sobre el software utilizado . . . . .	XXIII
<b>1. Acción geométrica de <math>F_a</math> en el plano</b>	<b>1</b>
1.1. La imagen inversa del conjunto de valores críticos . . . . .	2
1.2. Dos importantes familias de curvas . . . . .	12
1.3. Equivalencia con $z \rightarrow z^2$ en el exterior de $L_{-1}^*(a)$ . . . . .	16
1.3.1. Acción geométrica de $F_a$ en el exterior de $L_{-1}^*(a)$ . . . . .	19
1.4. Comportamiento de $F_a$ en la región acotada cuya frontera es la hipocicloide $L_{-1}^*(a)$ . . . . .	20
<b>2. Sobre la conexidad del conjunto de puntos cuya órbita es acotada.</b>	<b>23</b>
2.1. Cuestiones Dinámicas Preliminares. . . . .	26
2.2. Sobre la conexidad de $K_a$ . . . . .	33
2.3. Conjuntos de Julia disconexos. . . . .	41
<b>3. El excepcional caso <math>a = -1</math></b>	<b>45</b>
3.1. Aspectos Geométricos. . . . .	45
3.2. Conjugación de $F$ con la función cuadrática $f(z) = z^2$ . . . . .	48
3.3. Un Triángulo Caótico. . . . .	51
3.4. Dinámica de $F$ en $K$ . . . . .	55
3.4.1. $G$ en $\Delta$ y $F$ en $K$ son conjugadas . . . . .	55

3.4.2. Un poco de dinámica simbólica: $F$ en $K$ es factor del corrimiento en el espacio de 4 símbolos. . . . .	59
--	----

**Apéndice 3A: Demostración del teorema 3.4.4. 63**

**4. Cuestiones generales sobre la dinámica de  $F_a$  si  $-1 < a < 0$ . 67**

4.1. Conjuntos Atractores y Zonas Absorbentes de funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . . . . .	68
4.2. El conjunto $K_a$ . . . . .	73
4.3. El conjunto $\Lambda_a$ donde se concentra la dinámica. . . . .	77
4.4. Sobre las órbitas periódicas producidas por las simetrías de $F_a$ si $-1 < a < 0$ . . . . .	79
4.5. Comentarios sobre la dinámica en la frontera de $K_a$ , $-1 < a < 0$ . . . . .	81

**5. Dinámica y Bifurcaciones de  $F_a$  cuando  $-1 < a < 0$  85**

5.1. El origen es el único atractor en $intK_a$ si $-\frac{1}{2} = a_0 < a < 0$ . . . . .	87
5.2. El conjunto $\Lambda_a$ para $a \in \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ . . . . .	87
5.2.1. Dinámica en el interior de $K_a$ . . . . .	87
5.2.2. El (nuevo) conjunto $\Lambda_a$ y la peculiar frontera de $\Lambda_a$ . . . . .	90
5.3. Etapa de transición . . . . .	93
5.3.1. Nueva coexistencia de atractores: Nacimiento de órbitas de periodos 3 y 6 . . . . .	95
5.4. Primera bifurcación de Naimark-Sacker . . . . .	98
5.5. Nueva etapa de transición . . . . .	102
5.5.1. Desaparición de $\Gamma_a$ y el resto de las curvas atactoras. . . . .	102
5.5.2. Nueva bifurcación de Naimark-Sacker . . . . .	103
5.5.3. Conjuntos Atractores Caóticos. . . . .	106
5.5.4. Primera fusión de atractores caóticos. . . . .	108
5.5.5. Nueva fusión de atractores y creación de la zona anular $B_a$ y el hoyo $W_a$ . . . . .	110
5.6. Zonas anulares y Hoyos . . . . .	112
5.7. Desaparición del hoyo $W_a$ . . . . .	114
5.7.1. La desaparición del hoyo $W_a$ es por una bifurcación homoclínica . . . . .	116

**Apéndice 5A. El origen es el único atractor en  $intK_a$  si  $-\frac{1}{2} = a_0 < a < 0$ . 118**

Apéndice 5B: El conjunto $\Lambda_a$ para $a \in \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ .	122
Apéndice 5C: Una bifurcación de Naimark-Sacker para la familia $F_a$ .	131
Apendice 5D. Existencia y desaparición del hoyo $W_a$ .	141
Apéndice 5E: El hoyo $W_a$ desaparece por una bifurcación homoclínica.	144



# Introducción.

El estudio dinámico de transformaciones cuadráticas del plano en sí mismo ha sido algo muy popular desde hace ya varios años; incluye investigaciones como la de las aplicaciones de Henon, o la de la muy famosa familia holomorfa  $z \rightarrow z^2 + c$  (ver también [3], [12], [14]).

En [14] se planteó la pregunta de si era posible establecer alguna clasificación de estas transformaciones de acuerdo a su comportamiento dinámico. Este problema es muy difícil dada la inmensa variedad de fenómenos dinámicos cualitativamente diferentes que pueden presentar las funciones cuadráticas.

Aún así, en dicho trabajo se dió una respuesta parcial a este problema, logrando una clasificación total de este tipo de funciones en clases de equivalencia, aunque no en el sentido dinámico (clases de conjugación) sino en el sentido de Whitney (definiciones en el capítulo 1). Esto constituye, sin duda, un buen punto de partida para investigaciones posteriores del problema de clasificación antes mencionado.

Una de esas clases de equivalencia (en el sentido de Whitney) incluye, en particular, a la familia no holomorfa

$$F_a(z) = z^2 + 2a\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

donde  $a$  es un parámetro complejo ( $\bar{z}$  denota al conjugado de  $z$ ). Se señaló entonces (*ibid.*) que esta familia era un caso de estudio interesante por varias razones; se intuía, en particular, que el rango de fenómenos dinámicos diferentes que se pueden presentar conforme  $a$  varía en  $\mathbb{C}$ , puede ser muy amplio.

En [26] se demostró que cuando  $a$  es un parámetro real, el conjunto de órbitas acotadas de  $F_a$ ,  $K_a$ , es conexo si, y sólo si, el punto crítico de la restricción de  $F_a$  a  $\mathbb{R}$  tiene una órbita acotada. Esto ocurre, a su vez, cuando  $a \in [-1, 2]$ .

Este resultado se parece a un bien conocido teorema de *Fatou-Julia*<sup>1</sup> para el caso holomorfo, pero cuando  $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  la analogía palidece en virtud de que el conjunto singular de  $F_a$  es una curva para todo número complejo  $a \neq 0$ , y no un conjunto finito de puntos.

Por otra parte, I. Petersen, J. C. Alexander, J. Yorke y otros, demostraron que en ciertas funciones dadas por “ecuaciones sumamente simples”, sorprendentemente existía un atractor igualmente simple –de hecho son tres atractores formados por segmentos de rectas unidos en forma de triángulo– pero cuyas cuencas de atracción se entrelazaban de manera increíblemente compleja (“thoroughly intermingled basins” les llamaron ellos. Ver [2], [3], [23]). Resulta que estas funciones son miembros de la familia (1) cuando el parámetro  $a$  es de la forma  $1 + i\lambda$  con  $\lambda$  en una vecindad de cierto número real específico.

Este tipo de resultados motivaron el desarrollo del presente trabajo cuyo contenido se resume a continuación.

## 0.1. Capítulo 1

En este capítulo no se abordan, aún, cuestiones relacionadas con la dinámica; se examina lo que podríamos llamar la acción geométrica de  $F_a$  para  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . Se establecen dos resultados principales que enunciamos más abajo.

Para  $a \neq 0$  el conjunto de puntos singulares de  $F_a$  es una circunferencia de radio  $|a|$ , que denotamos siempre por  $L_{-1}(a)$ , y el de valores críticos es una hipocicloide de tres picos que denotamos por  $L(a)$ . Esta hipocicloide divide al plano en dos regiones, en cada una de las cuales cada punto posee el mismo número de preimágenes. En la región acotada cada punto tiene 4 preimágenes y en la no acotada, cada punto tiene 2 preimágenes. Siguiendo la notación de autores como C. Mira y otros (ver, p. ej., [19]), a la primera de estas regiones (la acotada) la denotamos por  $Z_4(a)$  y a la segunda por  $Z_2(a)$ . A una circunferencia con centro en el origen y radio  $\delta$  la denotamos por  $C_\delta$ ; así,  $L_{-1}(a) = C_{|a|}$ . Al disco  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |a|\}$  lo representamos por  $D_{|a|}$ . Los resultados referidos son los siguientes:

**Teorema 1.1.1** *Dado  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  existe una hipocicloide de tres picos,  $L_{-1}^*(a)$ , que es imagen inversa de la hipocicloide  $L(a)$  y existen también*

---

<sup>1</sup>Un enunciado de este resultado se presenta en el capítulo 2.

homeomorfismos  $h_a : L_{-1}(a) \rightarrow L_{-1}^*(a)$  y  $g_a : C_{|a|^2} \rightarrow L(a)$ , tales que

$$F_a(h_a(z)) = g_a(z^2), \quad z \in L_{-1}(a). \quad (2)$$

Es decir,  $h_a$  y  $g_a$  son tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} L_{-1}^*(a) & \xrightarrow{F_a} & L(a) \\ h_a \uparrow & & \uparrow g_a \\ L_{-1}(a) & \xrightarrow{z^2} & C_{|a|^2} \end{array}$$

Denotemos ahora por  $R(a)$  a la región (abierto conexo) no acotada que queda fuera de la hipocicloide  $L_{-1}^*(a)$ .

**Teorema 1.3.1** Sean  $0 \neq a \in \mathbb{C}$  y  $f(z) = z^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces, las funciones  $F_a : R(a) \rightarrow Z_2(a)$  y  $f : \mathbb{C} - \overline{D_{|a|}} \rightarrow \mathbb{C} - \overline{D_{|a|^2}}$  son  $C^\infty$ -equivalentes. Es decir, existen difeomorfismos  $H_a : \mathbb{C} - \overline{D_{|a|}} \rightarrow R(a)$  y  $G_a : \mathbb{C} - \overline{D_{|a|^2}} \rightarrow Z_2(a)$  tales que

$$F_a(H_a(z)) = G_a(z^2), \quad z \in \mathbb{C} - \overline{D_{|a|}}. \quad (3)$$

Manteniendo la notación usada en estos teoremas, es fácil ver que la función  $H_a$  se puede extender continuamente a la cerradura de  $\mathbb{C} - \overline{D_{|a|}}$ , y que en la frontera de este conjunto dicha extensión coincide con  $h_a$ . Es decir, considerando que  $\partial(\mathbb{C} - \overline{D_{|a|}}) = \widehat{L_{-1}(a)}$  y llamando  $\widehat{H}_a$  a dicha extensión, se tiene que  $\widehat{H}_a | L_{-1}(a) = h_a$ . Análogamente, extendiendo  $G_a$  a la cerradura de  $\mathbb{C} - \overline{D_{|a|^2}}$  (y llamando  $\widehat{G}_a$  a dicha extensión), se obtiene que  $\widehat{G}_a | C_{|a|^2} = g_a$ . Tomando en cuenta que  $\partial R(a) = L_{-1}^*(a)$  y que  $\partial Z_2(a) = L(a)$ , la consecuencia de todo esto es que, entonces, las funciones  $F_a : \overline{R(a)} \rightarrow \overline{Z_2(a)}$  y  $f : \mathbb{C} - D_{|a|} \rightarrow \mathbb{C} - D_{|a|^2}$  son equivalentes. O sea que, en realidad, el teorema 1 y el teorema 2 se pueden considerar como dos aspectos de un mismo fenómeno que podemos formular como sigue: En las hipocicloides  $L_{-1}^*(a)$  y  $L(a)$  y en el exterior de éstas, la función  $F_a$  se “comporta” como la función  $f(z) = z^2$  en el complemento de ciertos discos abiertos.

En la demostración de estos teoremas juega un papel especial la introducción de dos familias de curvas que en cierto modo generalizan a las hipocicloides de tres picos. En el capítulo 3, cuando se analiza la función  $F_{-1}$ , estas familias vuelven a jugar un papel central.

## 0.2. Capítulo 2

Se inicia el análisis de la dinámica de las funciones  $F_a$ . La idea es establecer resultados generales que sirvan como marco de referencia para lo que viene después.

Hay dos resultados centrales y unos lemas que no por sencillos dejan de ser importantes.

Para cada función  $F_a$  el  $\infty$  es atractor; su cuenca de atracción se denota por  $B_a(\infty)$ . El complemento de esta cuenca es el conjunto de puntos cuya órbita es acotada y se denota por  $K_a$ . Este conjunto resulta ser compacto. Los lemas se pueden sintetizar en uno solo, como se hace a continuación, y después se enuncian los resultados centrales.

**Lema (Criterio de escape)** Sea  $0 \neq a \in \mathbb{C}$ . Si  $|z| > 1 + 2|a|$  o  $|F_a^k(z)| > 1 + 2|a|$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ , entonces  $F_a^k(z) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ ; es decir,  $z \in B_a$ .

**Teorema 2.2.5** Si  $L_{-1}(a) \subseteq K_a$ , entonces  $K_a$  es conexo.

**Teorema 2.3** Si  $\text{orb}(F_a, z) \rightarrow \infty$  para todo  $z \in L_{-1}(a)$ ,  $K_a$  es desconexo con una infinidad (no numerable) de componentes.

Del lema anterior se desprende que la órbita de  $z$  es acotada si, y sólo si,  $|F_a^k(z)| \leq 1 + 2|a|$  para todo  $k \geq 0$ .

Tenemos entonces, la igualdad

$$K_a = \{z \mid |F_a^k(z)| \leq 1 + 2|a| \text{ para todo } k \geq 0\}, \quad (4)$$

de la cual se deriva un algoritmo elemental (bastante común en casos como éste) para calcular en forma aproximada, con ayuda de una computadora, al conjunto  $K_a$ .

Se observa que el teorema 2.2.5 sólo da condiciones suficientes y que algunos parámetros para los cuales se cumple que  $L_{-1}(a) \subseteq K_a$  son los números complejos tales que  $|a| \leq \frac{1}{3}$  y los números reales  $a \in [-1, 0)$ ; es decir, para todos estos parámetros  $K_a$  es conexo. Finalmente, se conjetura que cuando  $K_a$  es desconexo, entonces es un conjunto de Cantor.

## 0.3. Capítulo 3

El objetivo de este capítulo es describir totalmente la dinámica de  $F_a$  cuando  $a = -1$ .

Este parámetro es muy especial porque, en particular, es el único para el cual ocurre que el conjunto  $K_a$  tiene una forma geométrica muy simple: su frontera es la hipocicloide  $L(a)$ , que en este (único) caso coincide con la (otra) hipocicloide:  $L_{-1}^*(a)$ . Este hecho posibilita inventar un modelo geométrico de la dinámica de  $F_{-1}$  en  $K_{-1}$ ; es decir, la dinámica del modelo es conjugada a la de  $F_{-1}$  en  $K_{-1}$ .

Este modelo se construye a partir de una función  $G$ , lineal por partes, definida en un triángulo equilátero  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ,  $G : \Delta \rightarrow \Delta$ . Tiene la cualidad de ser un modelo muy sencillo, lo cual repercute en volver absolutamente obvias las complejas propiedades dinámicas de  $F_{-1}$  en  $K_{-1}$ .

Por otra parte, las dos familias de curvas introducidas en el capítulo 1 se vuelven una sola para  $a = -1$ . El uso de esta familia permite resolver por completo la cuestión de la dinámica en  $B_{-1}(\infty)$ .

Por último, la importancia de  $a = -1$  reside también en que es un parámetro donde tiene lugar una bifurcación muy especial: conforme  $a \in \mathbb{R}$  cruza  $-1$  y se vuelve menor que  $-1$ , el conjunto  $K_a$  “explota” y de ser conexo se convierte en un conjunto disconexo (seguramente un conjunto de Cantor).

En lo que sigue se utiliza la siguiente terminología: si  $X$  es un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  es una función continua, se dice que  $f$  es *caótica* en  $X$ , en el sentido propuesto por Devaney, si  $f$  es (topológicamente) transitiva en  $X$  y el conjunto de puntos periódicos de  $f$  es denso en  $X$ .

Los resultados principales que se demuestran en este capítulo son los siguientes:

**Teorema 3.3.3**  *$G$  es caótica en  $\Delta$  en el sentido propuesto por Devaney.*

**Teorema 3.4.4** *Las funciones  $F_{-1} : K_{-1} \rightarrow K_{-1}$  y  $G : \Delta \rightarrow \Delta$  son conjugadas; es decir, existe un homeomorfismo  $H : \Delta \rightarrow K_{-1}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & & \xrightarrow{G} & & \Delta \\ H \downarrow & & & & \downarrow H \\ K_{-1} & & \xrightarrow{F_{-1}} & & K_{-1} \end{array}$$

**Corolario**  *$F_{-1}$  es caótica en  $K_{-1}$  en el sentido propuesto por Devaney. Además, todo punto periódico de  $F_{-1}$  perteneciente al interior de  $K_{-1}$  es repulsor.*

**Teorema 3.2.2** Sea  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  y sea  $\varphi(z) = z^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces,  $\varphi : C \setminus \text{int}(D) \rightarrow C \setminus \text{int}(D)$  es conjugada a  $F_{-1} : C \setminus \text{int}(K_{-1}) \rightarrow C \setminus \text{int}(K_{-1})$ . Es decir, existe un homeomorfismo  $h : C \setminus \text{int}(D) \rightarrow C \setminus \text{int}(K_{-1})$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \text{int}(D) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \setminus \text{int}(D) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{C} \setminus \text{int}(K) & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \setminus \text{int}(K) \end{array} .$$

De estos resultados se sigue también que la dinámica de  $F_{-1}$  restringida a  $\partial K_{-1} = L_{-1}^*(-1) = L(-1)$ ,<sup>2</sup> es conjugada a la de  $\varphi$  restringida a la circunferencia unitaria  $\partial D$ , y por lo tanto también es caótica.

Sea  $\Sigma = \{\hat{t} = (t_1, t_2, \dots) : t_i \in \{0, 1, 2, 3\}, i \in \mathbb{N}\}$  con la métrica  $d(\hat{t}, \hat{s}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{2^i}$  donde  $\hat{t} = (t_1, t_2, \dots)$  y  $\hat{s} = (s_1, s_2, \dots)$ . Sea  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  la *función corrimiento*,  $\sigma(t_1, t_2, \dots) = (t_2, t_3, \dots)$ . El siguiente resultado nos da más información sobre la dinámica de  $F_{-1}$  en  $K_{-1}$ :

**Teorema 3.4.8**  $F_{-1} : K_{-1} \rightarrow K_{-1}$  es factor del corrimiento  $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . En consecuencia,  $F_{-1}$  es caótica en  $K_{-1}$ .

Cabe mencionar que en [15] se demuestra que la entropía topológica de  $F_{-1}$  restringida a  $K_{-1}$  es positiva. Concretamente, denotando a dicha entropía por  $\text{ent}(F_{-1} \mid K_{-1})$ , se demuestra que

$$\text{ent}(F_{-1} \mid K_{-1}) = \log 4.$$

Este resultado, aunque importante, no se incluye en este trabajo.

El propósito de los dos capítulos restantes es presentar ciertos resultados generales y algunas de las bifurcaciones que tienen lugar cuando el parámetro es real y varía en el intervalo  $[-1, 0)$ . Por su propia naturaleza el tema exige mucha experimentación numérica y habrá algunas afirmaciones que se basan sólo en esta experimentación y no se demuestran matemáticamente (estas afirmaciones se señalan explícitamente). Pero en general se demuestra lo que se afirma.

Además de conceptos y resultados comunes en el área de sistemas dinámicos discretos, se utilizan otros tomados de autores como [19], [12], etc. Especialmente de estos autores se han debido adecuar o generalizar algunos de sus resultados para ser aplicados a la familia (1); ello se señala en el texto.

<sup>2</sup>La frontera de  $K_{-1}$  es invariante hacia adelante, es decir,  $F_{-1}(\partial K_{-1}) = \partial K_{-1}$

## 0.4. Capítulo 4

Aquí se exponen ciertos resultados generales sobre la dinámica de  $F_a$  cuando  $a \in [-1, 0)$ . Recuérdese que  $Z_4(a)$  denota la región en la que cada punto posee 4 preimágenes y cuya frontera es  $L(a)$ .

**Proposición 4.2.1**  $\overline{Z_4(a)} \subset \text{int}K_a$  para  $a \in (-1, 0)$ .

Como  $K_a$  es invariante, de este lema se sigue que todas las iteraciones, así como todas las imágenes inversas de todos los órdenes, de  $\overline{Z_4(a)}$  (y de  $Z_4(a)$ ), están contenidas en  $K_a$ . Se sigue también que  $L(a)$ ,  $L_{-1}^*(a)$  y  $L_{-1}(a)$  están contenidos en  $K_a$ . De esto último y del teorema 2.2.5 se obtiene la siguiente proposición:

**Proposición**  $K_a$  es conexo para  $a \in [-1, 0)$ .<sup>3</sup>

Se definen los conjuntos:

$$\Lambda_a = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_a^k \left( \overline{Z_4(a)} \right),$$

$$M_a = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_a^{-k} \left( \overline{Z_4(a)} \right).$$

Ambos conjuntos están contenidos en  $K_a$  para  $a \in [-1, 0)$ . Nótese, en particular, que  $\Lambda_a \subseteq \overline{Z_4(a)} \subset \text{int}K_a$  si  $-1 < a < 0$  y  $M_a$  es obviamente invariante hacia atrás, es decir,  $F_a^{-1}(M_a) = M_a$ .

**Proposición 4.2.4**  $\Lambda_a$  es invariante hacia adelante si  $-1 < a < 0$ ; es decir:

$$F_a(\Lambda_a) = \Lambda_a.$$

**Proposición**  $M_a$  es un conjunto abierto, conexo y simple-conexo contenido en  $K_a$  si  $-1 < a < 0$ .

En relación con el conjunto  $M_a$ , experimentos y razonamientos diversos nos llevan a la conclusión de que, para  $-1 < a < 0$ , las siguientes dos

---

<sup>3</sup>En [26] se demuestra de otra manera que  $K_a$  es conexo para  $a \in [-1, 0)$ .

igualdades son válidas:

$$\begin{aligned} M_a &= \text{int}K_a, \\ \overline{M_a} &= K_a. \end{aligned}$$

Estas igualdades no se han podido demostrar, pero se asumen como válidas para  $-1 < a < 0$ . Es decir, *cada una de estas igualdades es una conjetura que aceptamos como hipótesis de trabajo en lo que sigue.*

Por otra parte, en relación con  $\Lambda_a$  se demuestra lo siguiente ( $\text{Per}F_a$  denota al conjunto de puntos periódicos de  $F_a$ ):

**Proposición 4.3.1** *Sea  $-1 < a < 0$ . Entonces:*

- (i)  $\text{Per}F_a \cap \text{int}K_a \subseteq \Lambda_a$ .
- (ii) Si  $z \in \text{int}K_a$ , el  $\omega$ -límite de  $z$  está contenido en  $\Lambda_a$ .
- (iii) Si  $W$  es un subconjunto propio de  $\text{int}K_a$ , invariante hacia adelante, es decir  $W = F_a(W)$ , entonces  $W \subseteq \Lambda_a$ .

Las proposiciones 4.2.4 y 4.3.1 muestran la importancia del conjunto  $\Lambda_a$ : puede decirse que es el lugar, en el interior de  $K_a$ , donde se concentra la dinámica.

En la sección 4.4, tomando en cuenta las simetrías de  $F_a$  cuando  $a \in \mathbb{R}$ , se demuestran dos resultados en relación con los puntos periódicos de  $F_a$  y la naturaleza de éstos.

En la última sección, 4.5, se expone la conjetura de que  $F_a$  en la frontera de  $K_a$  es conjugada con  $z \rightarrow z^2$  en la circunferencia unitaria y, por lo tanto, la dinámica ahí es caótica.

## 0.5. Capítulo 5

Se seleccionaron, para incluir en este capítulo, algunas bifurcaciones que tienen lugar cuando el parámetro varía en el intervalo  $[-1, 0)$ . En general, dado lo extenso (y técnico) del material que se presenta, se ha tratado, en todos los casos, de basarse más en la discusión informal de las ideas básicas; detalles técnicos y demostraciones se turnan a apéndices especiales.

Para  $a \in (-\frac{1}{2}, 0)$  la dinámica es sencilla, como se afirma en la siguiente proposición.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>La demostración (parcial) de esta proposición puede verse en el Apéndice 5A.

**Proposición** *El origen es el único atractor en el interior de  $K_a$  si  $-\frac{1}{2} < a < 0$ .*

De esta proposición se deduce que  $\Lambda_a = \{0\}$  si  $-\frac{1}{2} < a < 0$ ; conjeturamos que esto mismo es válido si  $a = -\frac{1}{2}$ .

En este capítulo  $a_0 = -\frac{1}{2}$ .

Al cruzar este parámetro  $a_0$ , se produce la primera bifurcación de importancia: Nacen dos nuevos puntos fijos atractores y cinco órbitas de periodo 2; tres de estas últimas están conformadas por puntos sillas y dos por puntos atractores (bajo  $F_a^2$ ). En particular, una de estas órbitas de puntos silla de periodo 2 está contenida en  $\mathbb{R}$ . Todos estos puntos periódicos están contenidos en el interior del disco de radio  $|a|$  cuya frontera es la circunferencia singular  $L_{-1}(a)$ ; denotaremos a este disco abierto por  $D_{|a|}$ .

Por otra parte, el conjunto  $\Lambda_a$  deja de ser un punto para convertirse en la cerradura de un abierto conexo, simple conexo, cuya frontera es invariante y está conformada de una manera peculiar, como se demuestra a continuación. A la iteración de orden  $k \geq 0$  del conjunto de valores críticos  $L(a)$ ,  $F_a^k(L(a))$ , se le llama arco crítico de orden  $k$  y se denota por  $L_k(a)$ ; se hace  $L_0(a) = L(a)$ .

**Teorema 5.7.5** *Para  $a \in (a_1, a_0)$ , con  $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , la frontera de  $\Lambda_a$  es una curva simple cerrada, invariante hacia adelante, y está formada por la unión de las variedades inestables locales de los puntos silla de periodo 2, y también, por todos los puntos atractores de periodo 1 o 2. Además, esta frontera de  $\Lambda_a$  no es unión finita de arcos críticos sino una curva límite de arcos críticos.*

Por *curva límite de arcos críticos* se quiere decir que cada punto de la curva es punto de acumulación de una sucesión  $\{a_k\}$ , donde  $a_k \in L_k(a)$ . Como consecuencia de que  $\partial\Lambda_a$  es una curva simple cerrada se sigue que  $\Lambda_a$  es conexo y simple conexo.

De acuerdo con [19], si la frontera de un conjunto atractor e invariante es una curva simple cerrada, compuesta por una unión finita de arcos críticos, se dice que este conjunto es una *zona absorbente*. Para  $a \in (a_1, a_0)$  el conjunto  $\Lambda_a$  está contenido en  $D_{|a|}$  y no es una zona absorbente. Después, al cruzar el parámetro por  $a_1$ ,  $\Lambda_a$  cruza la circunferencia singular  $L_{-1}(a)$  y empieza una serie de transformaciones de este conjunto que eventualmente lo convierten en una zona absorbente.

Eventualmente, al continuar decreciendo el parámetro, se produce una bifurcación según la cual, los atractores de periodo 1 o 2 se vuelven repulsores y, en torno a cada uno de ellos, nace una curva invariante atractora. Se le llama una *bifurcación de Neimark-Sacker*<sup>5</sup> (ocurre simultáneamente en torno a todos los atractores mencionados en virtud de las simetrías de  $F_a$ ). Esta bifurcación tiene lugar en un contexto en el que en el interior de  $K_a$ , y por lo tanto en  $\Lambda_a$ , existen puntos atractores adicionales de periodos respectivos 3 y 6, los cuales aparecen tras cruzar cierto parámetro  $a_2 < -\frac{2}{3}$ , cuando  $\Lambda_a$  ya es una zona absorbente.

**Proposición 5.7.6** *Para  $a \in (-1, 0)$  la familia  $\{F_a\}$  presenta una bifurcación Neimark-Sacker cuando el parámetro  $a$  decrece y cruza el valor*

$$a_4 = \frac{-8 + \sqrt{112}}{24} = -0,7742918\dots$$

*Específicamente, en  $a = a_4$  nace una curva simple cerrada  $\Gamma_a$  atractora en torno a cada punto fijo y cada punto de periodo dos atractores. Estas curvas subsisten para  $a \in J_a = (a_5, a_4)$  con  $a_5 < a_4$ . Para  $a_4 < a$  los puntos periódicos mencionados son atractores, y para  $a \in J_a$  se convierten en repulsores.*

Supóngase que  $A$  es una zona absorbente bajo cierta función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que contiene en su interior un punto fijo repulsor  $P$ . De acuerdo con [6], [12], [19] y otros, se dice que existe un *hoyo* en torno al punto fijo repulsor  $P$  si existe un conjunto abierto, simple conexo,  $W$ , que contiene a  $P$  y contenido propiamente en el interior de  $A$ , con las propiedades siguientes: su frontera es una curva simple cerrada que es unión finita de arcos críticos, y para todo  $z \in W$ ,  $z \neq P$ , existe  $k = k(z) \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(z) \notin W$ . Como por definición una zona absorbente es un conjunto invariante, la órbita de  $z \in W$  permanece en  $A$ , aunque eventualmente abandone  $W$ . Por otro lado, como  $W$  está propiamente contenido en  $A$  el conjunto  $A - W = B$  es no vacío. Este conjunto  $B$  tiene una frontera que consta de dos componentes, una de las cuales es  $\partial A$ , y la otra es  $\partial W$ . Ambas componentes son, por definición, uniones finitas de arcos críticos. Como por su forma el conjunto  $B$  parece un anillo, a  $B$  se le llama *zona anular absorbente*. Las órbitas de los puntos en el hoyo  $W$  vienen a “morir” en esta zona anular absorbente.

---

<sup>5</sup>También es común llamarla *bifurcación de Hopf*, en analogía con el caso continuo.

En relación con las funciones  $F_a$ , después de que la frontera de  $\Lambda_a$  cruza la circunferencia singular cuando  $a = a_1$ , en el interior de  $\Lambda_a$  comienza un proceso de creación de un hoyo en torno al origen que ya es punto fijo repulsor. Se denota a este hoyo por  $W_a$ , y a la zona anular  $\Lambda_a - W_a$  por  $B_a$ . En el capítulo se presenta una bifurcación que tiene que ver con la desaparición de este hoyo y la subsecuente transformación de  $B_a$  en  $\Lambda_a$ .

Adecuando un resultado presentado en [19, p. 285 y p. 301], en el Apéndice 5D se establece una proposición que en forma resumida es como sigue:

**Proposición 5.7.7**  *$W_a \neq \emptyset$  si, y sólo si, las tres preimágenes (de orden uno) del punto fijo repulsor  $P = 0$ , distintas de  $P$ , están fuera de  $\Lambda_a$ .*

De aquí se desprende que en el momento en el que estas tres preimágenes cruzan la frontera y penetran en el interior de  $\Lambda_a$ , el hoyo  $W_a$  desaparece. Por las simetrías de  $F_a$ , las tres preimágenes de  $P = 0$  tocan simultáneamente  $\partial\Lambda_a$ . Esto ocurre cuando el valor del parámetro es  $a = a_8$ , donde

$$a_8 = -\frac{1}{3}\sqrt{19 + 3\sqrt{33}} - \frac{4}{3\sqrt{19 + 3\sqrt{33}}} + \frac{2}{3} = -0,83929... \quad (5)$$

Se tiene, entonces, la siguiente proposición:

**Proposición 5.7.1** *En el parámetro  $a = a_8$  tiene lugar una bifurcación que hace desaparecer al hoyo  $W_a$  y transforma a la zona anular  $B_a$  en el conjunto invariante  $\Lambda_a$ .*

En la última sección del capítulo se introduce la noción de *punto homoclínico a un punto fijo repulsor*.

En [17], y posteriormente en [13], se demuestra que la existencia de un tal punto homoclínico genera una dinámica muy compleja en torno al repulsor. También en [13] se establecen condiciones bajo las cuales, en familias de funciones con ciertas características específicas, al ocurrir una bifurcación en la cual desaparece un hoyo en torno a un punto fijo repulsor, se producen o generan puntos homoclínicos al tal repulsor y, por consiguiente, una dinámica compleja en torno a éste. A una tal bifurcación se le llama *bifurcación homoclínica*.

Una de estas condiciones es como sigue: se supone que el punto repulsor y el hoyo están en el interior de una zona absorbente. Si para el parámetro en el que se desaparece el hoyo se tiene que la variedad inestable del repulsor es

un conjunto denso en la zona absorbente referida, entonces la bifurcación que hace desaparecer al hoyo es una bifurcación homoclínica; es decir, genera, en el interior de la zona absorbente, puntos homoclínicos al repulsor.

La evidencia empírica, así como ciertos resultados generales, llevan a la conclusión de que la bifurcación mencionada en la proposición 5.7.1 es tal, que genera puntos homoclínicos al origen; es decir, al producirse dicha bifurcación aparecen tales puntos homoclínicos, que previamente no existían. La discusión de esta problemática esencialmente se turna al Apéndice 5E, en el que se presenta el siguiente resultado (la variedad inestable del origen se denota por  $W_a^u(0)$ ):<sup>6</sup>

**Proposición 5.7.12** *En  $a = a_8$  se cumple que  $\Lambda_a = \overline{W^u(0)}$  y esta igualdad subsiste para todos los parámetros en un cierto intervalo  $I$  con centro en  $a_8$ . En consecuencia, la bifurcación que hace desaparecer el hoyo  $W_a$  en  $a = a_8$ , es una bifurcación que genera puntos homoclínicos en torno al origen, es decir, una bifurcación homoclínica en torno al origen.*

Al desaparecer el hoyo  $W_a$  en  $a = a_8$ , la zona anular  $B_a$  se transforma en  $\Lambda_a$  y, experimentalmente también, se hace evidente que la dinámica en todo el conjunto  $\Lambda_a$  es caótica. Esta situación continúa conforme  $a$  decrece hasta que, para  $a = -1$ , se tiene que  $\Lambda_a = K_a$ . Pasando este parámetro, para  $a < -1$  se produce una bifurcación espectacular en la que  $\Lambda_a$  “explota” para convertirse en un conjunto disconexo, muy seguramente un conjunto de Cantor.

Por último, hacemos la siguiente aclaración: como es casi imposible ignorar el mundo de cambios dinámicos fuertes que se producen antes y después de cada una de las bifurcaciones señaladas, se han incluido algunos aspectos mínimos de lo que va ocurriendo entre una y otra de éstas, con la intención de que se comprenda mejor la creciente complejidad dinámica que va apareciendo conforme el parámetro decrece y se aproxima a  $-1$ . Estos aspectos “transitorios” (secciones 5.3 y 5.5) no se pretende detallarlos demasiado, sino simplemente evidenciarlos, casi exclusivamente a base de figuras *ad-hoc* y de experimentación numérica.

---

<sup>6</sup>Nótese que el carácter invariante de  $\Lambda_a$  obliga a que  $W_a^u(0)$  esté contenido en  $\Lambda_a$ .

## 0.6. Sobre el software utilizado

Es importante, al estudiar sistemas dinámicos, poder experimentar numéricamente con una computadora. Excepto por algunas figuras sencillas, que fueron hechas por el autor con maple sobre la marcha, y otras no tan sencillas, hechas por Héctor Cejudo Camacho, en este trabajo usamos los programas *DYNAMICS 2* (ver [20]) y *FRACTAL* (ver [29]). La gran riqueza técnica de *DYNAMICS 2* es impresionante: calcula trayectorias, exponentes de Lyapunov, cuencas de atracción, órbitas periódicas, diagramas de bifurcación y otra enorme cantidad de cuestiones, no sólo de iteración de funciones, sino también de ecuaciones diferenciales. Aún así, *FRACTAL* posibilita ciertos cálculos "sencillos" (por ejemplo, dibujar imágenes inversas de ciertos conjuntos) que no son posibles con *DYNAMICS 2*. La combinación de ambos programas resulta muy conveniente y altamente recomendable.



# Capítulo 1

## Acción geométrica de $F_a$ en el plano

En este trabajo se analizan aspectos dinámicos diversos de la familia de funciones  $F_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definidas como

$$F_a(z) = z^2 + 2a\bar{z}, \quad (1.1)$$

donde  $a$  es un número complejo y  $\bar{z} = x - iy$  representa el conjugado de  $z = x + iy$ .

Este primer capítulo se dedica al análisis geométrico de  $F_a$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Se utilizan, en particular, los siguientes conceptos:

Sean  $X_i, Y_i$ ,  $i = 1, 2$ , subconjuntos del plano. Dos funciones  $f : X_1 \rightarrow Y_1$  y  $g : X_2 \rightarrow Y_2$  son *equivalentes* (en el sentido de Whitney) si existen homeomorfismos  $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$  y  $\psi : Y_2 \rightarrow Y_1$  tales que  $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ . Si  $\varphi$  y  $\psi$  son difeomorfismos de clase  $C^r$  se dice que  $f$  y  $g$  son  $C^r$  equivalentes,  $1 \leq r \leq \infty$ , y si en particular  $\varphi$  y  $\psi$  son funciones afines, a  $f$  y  $g$  se les llama *afínmente equivalentes*. Si  $\varphi = \psi$ ,  $X_2 = X_1 = X$  y  $Y_2 = Y_1 = Y$ , se dice que  $f : X \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow Y$  son *conjugadas* o *topológicamente equivalentes*.

La derivada de una función  $f$  la pensaremos siempre como la matriz Jacobiana y la denotaremos por  $Df$ . Si el determinante de  $Df(p)$  es cero, decimos que  $p$  es un *punto singular* de  $f$ . El conjunto singular de  $f$  es el conjunto de todos sus puntos singulares. Al conjunto  $\{f(p) \mid p \text{ es punto singular de } f\}$  se le llama el conjunto de valores críticos de  $f$ .

Por definición, un punto singular  $p$  es un *doble* de  $f$  si  $f$  es localmente  $C^\infty$ -equivalente a la transformación  $(x, y) \mapsto (x^2, y)$  cerca de  $(0, 0)$ ; asimismo  $p$  es una *cúspide* de  $f$  si  $f$  es localmente  $C^\infty$ -equivalente a la transformación

$(x, y) \mapsto (\frac{x^3}{3} + xy, y)$  cerca de  $(0, 0)$ . De acuerdo con Whitney, el conjunto de mapeos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuyos puntos singulares son dobleces o cúspides es denso en la topología  $C^\infty$ .

Desde el punto de vista de sistemas dinámicos, no es tanto la equivalencia la que interesa sino la conjugación: dos funciones conjugadas tienen esencialmente la misma dinámica; en cambio, dos funciones equivalentes pueden tener dinámicas bien distintas. Por ejemplo, en la familia (1.1) hay una gran diversidad de comportamientos dinámicos cualitativamente distintos y, sin embargo, si  $a \neq 0$  todas las funciones de esta familia son afínmente equivalentes a un elemento de la misma, a  $F_1(z) = z^2 + 2z$ , y por lo tanto, todas son afínmente equivalentes entre sí (una demostración de este hecho se deduce del teorema 1 en [14]).

Aún así, la equivalencia entre funciones es de gran importancia; preserva, por ejemplo la naturaleza de las singularidades. Gruesamente hablando, se podría decir que una tal clase de equivalencia reúne a todas las funciones que se “parecen” entre sí, lo cual evidentemente es una condición necesaria para que dichas funciones tengan esencialmente la misma dinámica. Por este motivo, hacer una clasificación de ciertos mapeos en este tipo de clases de equivalencia - como se hace en [14] - es un importante primer paso para su ulterior estudio dinámico.

En este capítulo veremos (teoremas 1 y 2) que, en ciertas regiones del plano, las funciones  $F_a$  son equivalentes a  $z \rightarrow z^2$  en el exterior de ciertos discos (las regiones referidas dependen del parámetro  $a$ ). Este resultados servirán, en particular, para comprender la acción geométrica de  $F_a$ .

En este trabajo una región significa siempre un abierto conexo y una región cerrada la cerradura de un abierto conexo; denotaremos por  $C_\delta$  a la circunferencia  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \delta\}$  y por  $D_\delta$  al disco abierto  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta\}$ ,  $\delta > 0$ . Al interior, la cerradura y la frontera de un conjunto  $A$  los denotaremos, respectivamente, por  $intA$ ,  $\overline{A}$  y  $\partial A$ .

## 1.1. La imagen inversa del conjunto de valores críticos

Como de costumbre, dada una función  $f : M \rightarrow M$ , y un conjunto  $A \subseteq M$ , la imagen inversa de  $A$  bajo  $f$  se define como el conjunto  $\{a \in M \mid f(a) \in A\}$  y se denota por  $f^{-1}(A)$ . Especialmente si  $A$  es un solo

punto a  $f^{-1}(A)$  se le llama también *la preimagen de A* (bajo  $f$ ).

Si  $a = a_1 + ia_2$ , podemos reescribir (1.1) como una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  de la manera siguiente:

$$F_a(x, y) = (x^2 - y^2 + 2a_1x + 2a_2y, 2xy + 2a_2x - 2a_1y).$$

Si  $a \neq 0$ ,  $F_a$  es infinitamente diferenciable mas no es holomorfa. La derivada  $DF_a(x, y)$  está dada por

$$\begin{pmatrix} 2x + 2a_1 & -2y + 2a_2 \\ 2y + 2a_2 & 2x - 2a_1 \end{pmatrix}.$$

El determinante Jacobiano es, entonces,

$$\det DF_a(x, y) = 4((x^2 + y^2) - (a_1^2 + a_2^2)) = 4(|z|^2 - |a|^2).$$

Se infiere inmediatamente que *el conjunto singular es una circunferencia de radio  $|a|$  con centro en el origen. A este conjunto lo denotaremos por  $L_{-1}(a)$ .*

A la imagen del conjunto singular,  $F_a(L_{-1}(a))$ , lo denotaremos por  $L(a)$ . Es decir,  $L(a)$  es, por definición, el conjunto de *valores críticos* de  $F_a$ .

Es fácil comprobar que  $L(a)$  es una *hipocicloide de tres picos* como se muestra en la fig.1.1 (ver la siguiente sección).

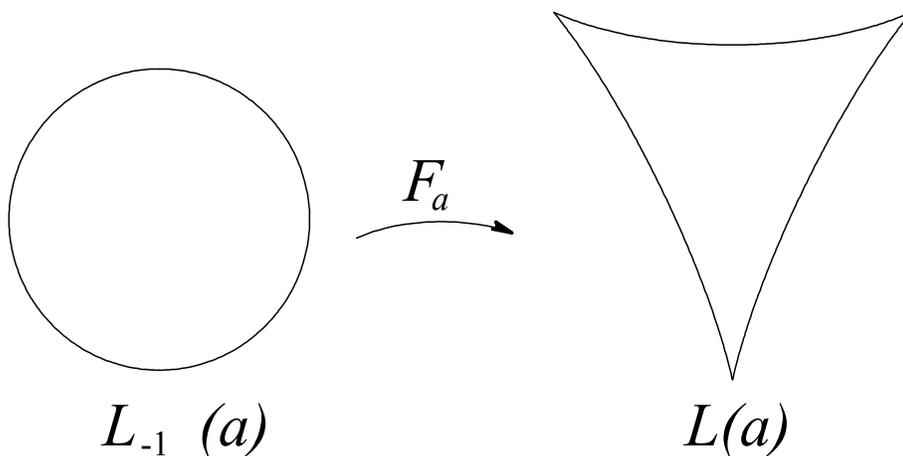


figura 1.1

Los “tres picos” o *cúspides* de  $L(a)$  -que denotaremos, respectivamente, por  $u, v$  y  $t$ - son la imagen, bajo  $F_a$ , de tres puntos en  $L_{-1}(a)$  que llamaremos  $u_{-1}, v_{-1}$  y  $t_{-1}$ . Si  $a = |a| e^{i\theta}$  con  $0 \leq \theta = \arg a < 2\pi$ , estos tres puntos son

$$u_{-1} = |a| e^{i\frac{\theta}{3}}, \quad v_{-1} = |a| e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})} = \rho u_{-1} \quad \text{y} \quad t_{-1} = |a| e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})} = \rho^2 u_{-1},$$

donde  $\rho = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  y  $\rho^2 = \bar{\rho}$  son raíces cúbicas de la unidad. Por consiguiente,

$$u = F_a(u_{-1}) = 3|a| e^{i\frac{2\theta}{3}}, \tag{1.2}$$

$$v = F_a(v_{-1}) = 3|a| e^{i(\frac{2\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})} \quad \text{y} \tag{1.3}$$

$$t = F_a(t_{-1}) = 3|a| e^{i(\frac{2\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})}. \tag{1.4}$$

De acuerdo con las definiciones dadas anteriormente, se puede establecer lo siguiente: *Excepto por los puntos  $u_{-1}, v_{-1}$  y  $t_{-1}$ , que son cúspides, todos los puntos del conjunto singular son dobles* (ver [26] para una demostración de este hecho si  $a \in \mathbb{R}$ ; el caso general,  $a \in \mathbb{C}$ , se demuestra esencialmente de la misma manera).

Nótese que de (1.2), (1.3) y (1.4), se sigue que, mod  $2\pi$ ,  $F_a$  duplica el ángulo de cada uno de los puntos  $u_{-1}, v_{-1}$  y  $t_{-1}$  (una pequeña aclaración: en lugar de “ $u_{-1}(a)$ ”, “ $u(a)$ ”, etc., hemos escrito simplemente “ $u_{-1}$ ”, “ $u$ ”, para evitar excesos notacionales. Deberá tenerse presente, sin embargo, que todos estos puntos dependen del parámetro  $a$ ).

Como se demostrará en el teorema 1, existe otra curva cerrada, además de la circunferencia  $L_{-1}(a)$ , que es imagen inversa de  $L(a)$ . Esta otra curva es tangente a  $L_{-1}(a)$  en  $u_{-1}, v_{-1}$  y  $t_{-1}$ , y ocurre el hecho notable de que es también una hipocicloide de tres picos; *denotaremos a esta hipocicloide por  $L_{-1}^*(a)$*  (fig. 1.2). Con esta notación, la imagen inversa de  $L(a)$  está dada por

$$F_a^{-1}(L(a)) = L_{-1}(a) \cup L_{-1}^*(a).$$

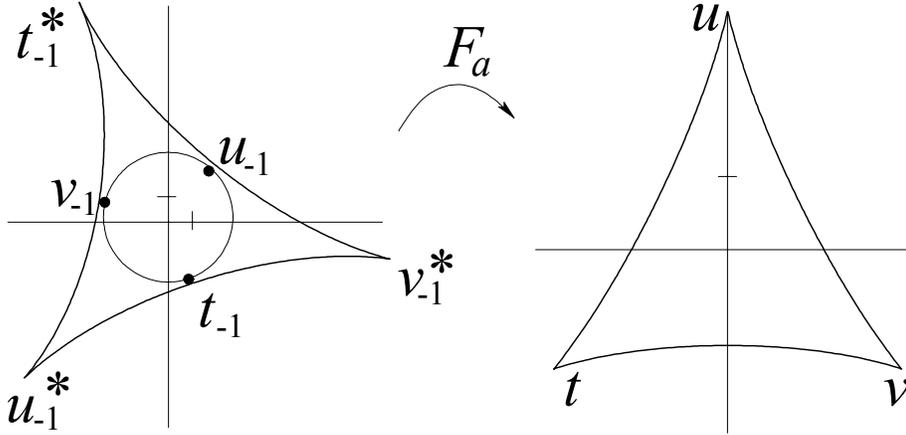


figura 1.2: Del lado izquierdo, la circunferencia  $L_{-1}(a)$  y la hipocicloide  $L_{-1}^*(a)$ ; del lado derecho, la hipocicloide  $L(a)$ . Aquí,  $|a| = ,8$  y  $Arg(a) = \frac{3\pi}{4}$ , por lo que  $Arg(u_{-1}) = \frac{\pi}{4}$  y  $Arg(u) = \frac{\pi}{2}$

El teorema 1 nos permitirá deducir, además, cómo se transforma  $L_{-1}^*(a)$  en  $L(a)$  (aunque ésta es una deducción que puede hacerse también partiendo sólo de consideraciones geométricas).

**Teorema 1.1.1** *Dado  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  existe una hipocicloide de tres picos,  $L_{-1}^*(a)$ , que es imagen inversa de la hipocicloide  $L(a)$  y existen también homeomorfismos  $h_a : L_{-1}(a) \rightarrow L_{-1}^*(a)$  y  $g_a : C_{|a|^2} \rightarrow L(a)$ , tales que*

$$F_a(h_a(z)) = g_a(z^2), \quad z \in L_{-1}(a). \quad (1.5)$$

Es decir,  $h_a$  y  $g_a$  son tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} L_{-1}^*(a) & \xrightarrow{F_a} & L(a) \\ h_a \uparrow & & \uparrow g_a \\ L_{-1}(a) & \xrightarrow{z^2} & C_{|a|^2} \end{array}$$

*Observación:* Una hipocicloide de 3 picos se obtiene de hacer girar (sin patinar) un círculo de radio  $\delta$  por adentro de otro círculo de radio  $\varepsilon = 3\delta$  y se parametriza (en notación compleja) como sigue:

$$\gamma(t) = 2\delta e^{it} + \delta e^{-i2t}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.6)$$

Aquí,  $t$  representa el ángulo central y  $t = 0$  corresponde al punto inicial  $P_0$  (fig.1.3). Conforme  $t$  varía de 0 a  $2\pi$ ,  $\gamma(t)$  recorre la hipocicloide en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Si situamos la circunferencia de radio  $\delta$  en el centro del círculo de radio  $\varepsilon = 3\delta$ , ésta resulta ser tangente a la hipocicloide en 3 puntos, que podríamos describir como los “mínimos” de dicha hipocicloide.

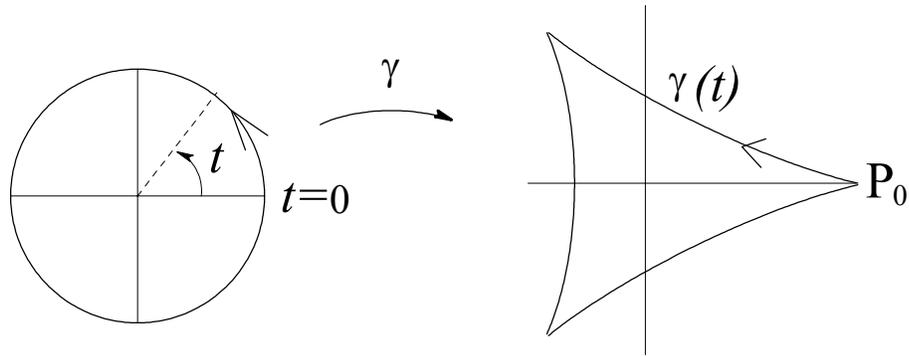


figura 1.3:  $\gamma(t) = 2\delta e^{it} + \delta e^{-i2t}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Nótese que si  $a = |a| e^{i\theta}$  y  $|a| e^{it} \in L_{-1}(a)$ ,

$$F_a(|a| e^{it}) = |a|^2 e^{i2t} + 2|a|^2 e^{i(\theta-t)}. \quad (1.7)$$

O sea que, como se dijo previamente,  $F_a(L_{-1}(a))$  efectivamente es una hipocicloide del tipo (1.6), sólo que girada y recorrida de modo un poco distinto.

Por ejemplo, si  $a < 0$ , es decir, si  $\theta = \pi$ ,

$$F_a(|a| e^{it}) = |a|^2 e^{i2t} + 2|a|^2 e^{i(\pi-t)} = -2a^2 e^{-it} + a^2 e^{i2t}.$$

Como curva, esta hipocicloide coincide con la representada por (1.6) con  $\delta = a^2$ , sólo que recorrida en sentido opuesto y empezando desde el punto inicial  $F_a(|a|) = -a^2$  cuando  $t = 0$ .

En esencia, en este tipo de hechos se basa la siguiente demostración.

*Demostración del teorema 1.1.1.* Por simplicidad, dividimos la demostración en dos casos.

*Caso 1:* Sea  $a < 0$  (i.e.  $0 \neq a = |a| e^{i\pi}$ ).

Haciendo  $z = \delta e^{it}$ , podemos reinterpretar la parametrización (1.6) como una función  $f_\delta$  de la circunferencia  $C_\delta$  en la tal hipocicloide:

$$f_\delta(z) = 2z + \frac{1}{\delta} \bar{z}^2, \quad z = \delta e^{it} \in C_\delta.$$

Llamemos provisionalmente  $\Upsilon_a$  a la hipocicloide parametrizada por la función  $f_{|a|}$  definida en la circunferencia singular  $L_{-1}(a)$ . Es decir,  $f_{|a|}(L_{-1}(a)) = \Upsilon_a$ . Si  $z = |a| e^{it} \in L_{-1}(a)$ , es inmediato que

$$F_a(f_{|a|}(z)) = f_{|a|^2}(z^2). \quad (1.8)$$

De aquí se desprende lo siguiente: Como  $f_{|a|^2}$  parametriza a la hipocicloide  $L(a)$ ,  $\Upsilon_a$  es imagen inversa de  $L(a)$ . A su vez, la aparición de  $z^2$  en (1.8) muestra que  $F_a$  es 2 a 1 de  $\Upsilon_a$  en  $L(a)$ . Finalmente, comparando (1.7) con (1.8) se deduce que para recorrer  $L(a)$  en el mismo sentido bajo  $F_a$ ,  $L_{-1}(a)$  y  $L_{-1}^*(a)$  deben recorrerse en sentidos opuestos. La hipocicloide  $\Upsilon_a$  es la que denotamos por  $L_{-1}^*(a)$ .

*Caso 2:* Sea  $0 \neq a = |a| e^{i\theta}$  con  $\theta \neq \pi$ .

Para  $z = |a| e^{it} \in L_{-1}(a)$ , definimos

$$h_a(z) = e^{i(\pi + \frac{\theta}{3})} f_{|a|}(z) = -e^{i\frac{\theta}{3}} f_{|a|}(z) = -e^{i\frac{\theta}{3}} \left( 2z + \frac{1}{|a|} \bar{z}^2 \right).$$

La hipocicloide  $h_a(L_{-1}(a))$  es como la dada por (1.6), pero girada un ángulo igual a  $\pi + \frac{\theta}{3}$ . Denotamos a esta hipocicloide por  $L_{-1}^*(a)$ .

Para  $z = |a|^2 e^{it} \in C_{|a|^2}$  definimos

$$g_a(z) = e^{i(\frac{2\theta}{3})} f_{|a|^2}(z) = e^{i\frac{2\theta}{3}} \left( 2z + \frac{1}{|a|^2} \bar{z}^2 \right).$$

Obviamente  $g_a(C_{|a|^2}) = L(a)$ .

Por ser en esencia parametrizaciones de hipocicloides, ambas funciones,  $h_a$  y  $g_a$ , son homeomorfismos en sus respectivos dominios.

Sólo resta hacer un cálculo directo. Sea, pues,  $z = |a| e^{it}$  (nótese que,

entonces,  $z\bar{z}^2 = |a|^2 \bar{z}$ ):

$$\begin{aligned}
F_a(h_a(z)) &= F_a\left(-e^{i\frac{\theta}{3}}\left(2z + \frac{1}{|a|}\bar{z}^2\right)\right) \\
&= e^{i\frac{2\theta}{3}}\left(2z + \frac{1}{|a|}\bar{z}^2\right)^2 - 2|a|e^{i\theta}e^{-i\frac{\theta}{3}}\left(2\bar{z} + \frac{1}{|a|}z^2\right) \\
&= e^{i\frac{2\theta}{3}}\left(4z^2 + 4\frac{1}{|a|}z\bar{z}^2 + \frac{1}{|a|^2}\bar{z}^4 - 4|a|\bar{z} - 2z^2\right) \\
&= e^{i\frac{2\theta}{3}}\left(2z^2 + \frac{1}{|a|^2}\bar{z}^4\right) = g_a(z^2).
\end{aligned}$$

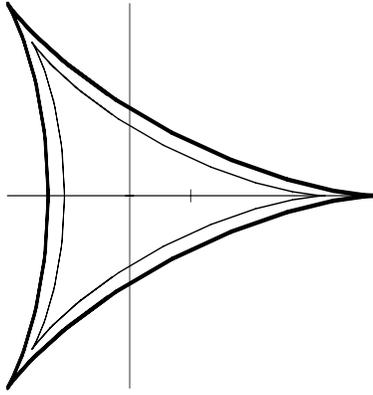
Con esto se establece la ecuación (1.5) y el teorema 1 queda demostrado.

□

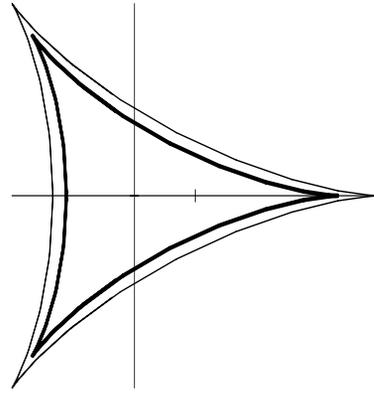
Ahora examinaremos geoméricamente la acción de  $F_a$  restringida a  $L_{-1}^*(a)$ . Llamaremos indistintamente *cúspides* a los picos de las dos hipocicloides,  $L_{-1}^*(a)$  y  $L(a)$ , aunque debe tenerse presente que las de  $L_{-1}^*(a)$  no son puntos singulares. En general, excepto por  $u_{-1}, v_{-1}$  y  $t_{-1}$ , los puntos de  $L_{-1}^*(a)$  no son puntos singulares. Además,

$$L_{-1}^*(a) \cap L_{-1}(a) = \{u_{-1}, v_{-1}, t_{-1}\}.$$

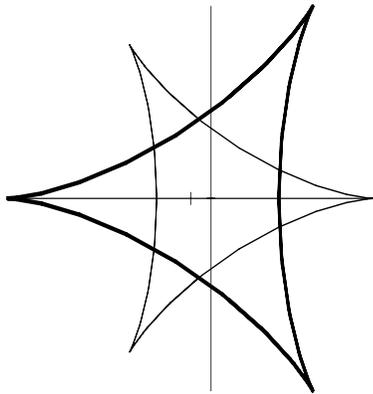
Si  $a \in \mathbb{R}$ , las hipocicloides  $L_{-1}^*(a)$  y  $L(a)$  tienen un eje de simetría en el eje  $X$ , y, como se muestra en las figuras 1.4, si  $a < 0$  ambas quedan en el “mismo sentido”, mientras que si  $a > 0$ , quedan “invertidas” una respecto a la otra. En particular, si  $-1 < a < 0$ , la hipocicloide  $L(a)$  queda contenida dentro la región acotada cuya frontera es  $L_{-1}^*(a)$ . Es fácil convencerse que ambas hipocicloides coinciden si y sólo si  $a = -1$ .



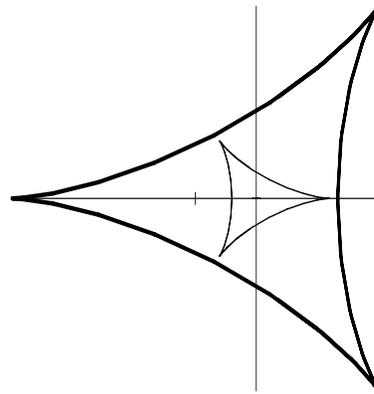
$L_{-1}^*(a)$  (fuerte) y  $L(a)$ ;  $a = -0,8$



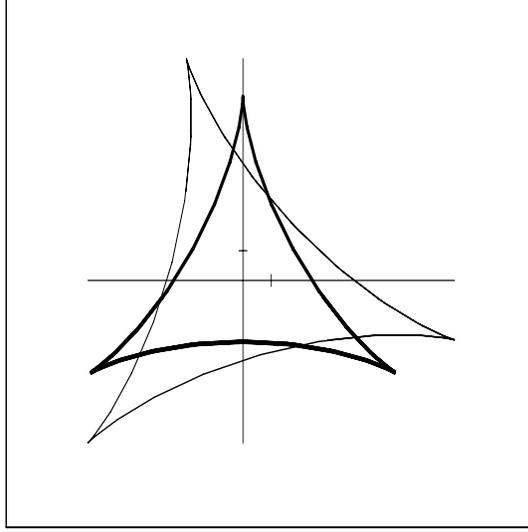
$L_{-1}^*(a)$  (fuerte) y  $L(a)$ ;  $a = -1,2$



$L_{-1}^*(a)$  (fuerte) y  $L(a)$ ;  $a = 0,8$



$L_{-1}^*(a)$  (fuerte) y  $L(a)$ ;  $a = 0,3$



$L_{-1}^*(a)$  (fuerte) y  $L(a)$ ,  $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ .

figuras 1.4.

Del teorema 1.1.1 se sigue que  $F_a$  es una función 2 a 1 de  $L_{-1}^*(a)$  en  $L(a)$  (es decir, cada punto de  $L(a)$  proviene de dos puntos de  $L_{-1}^*(a)$ ) mientras que es 1 a 1 - inyectiva - de  $L_{-1}(a)$  en  $L(a)$ . Por lo tanto, excepto las cúspides, todo punto de  $L(a)$  proviene exactamente de tres puntos: dos en  $L_{-1}^*(a)$  y uno en  $L_{-1}(a)$ . Las cúspides  $u, v$  y  $t$  de  $L(a)$ , además de provenir de  $u_{-1}, v_{-1}$  y  $t_{-1}$ , provienen también de las cúspides de  $L_{-1}^*(a)$  que denotaremos, respectivamente, por  $u_{-1}^*, v_{-1}^*$  y  $t_{-1}^*$ . Es decir,  $F_a^{-1}(u) = \{u_{-1}, u_{-1}^*\}$ ,  $F_a^{-1}(v) = \{v_{-1}, v_{-1}^*\}$  y  $F_a^{-1}(t) = \{t_{-1}, t_{-1}^*\}$ .

Si  $a = |a| e^{i\theta}$ , es fácil ver que

$$u_{-1}^* = 3|a| e^{i(\frac{\theta}{3} + \pi)}, \quad v_{-1}^* = 3|a| e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{5\pi}{3})} = \rho u_{-1}^* \quad \text{y} \quad t_{-1}^* = 3|a| e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{3})} = \rho^2 u_{-1}^*,$$

de donde se sigue que los correspondientes argumentos de  $u_{-1}^*, v_{-1}^*$  y  $t_{-1}^*$  son también duplicados por  $F_a$  (todos los ángulos son mod  $2\pi$ ).

*En lo que sigue, dada una curva plana  $\Gamma$  y dos puntos  $p$  y  $q$  de la misma, denotaremos por  $(pq)$  al arco de  $\Gamma$  que va de  $p$  a  $q$ .*

Continuando,  $L_{-1}^*(a) \cup L_{-1}(a)$  se mapea en  $L(a)$  del modo siguiente: El arco  $(t_{-1}u_{-1})$  de  $L_{-1}(a)$ , así como los arcos  $(t_{-1}^*u_{-1})$  y  $(t_{-1}u_{-1}^*)$  de  $L_{-1}^*(a)$ , se

transforman bajo  $F_a$  en el arco  $(tu) \subset L(a)$ . Análogamente, los arcos  $(v_{-1}^*u_{-1})$  y  $(v_{-1}u_{-1}^*)$  de  $L_{-1}^*(a)$  y  $(u_{-1}v_{-1})$  de  $L_{-1}(a)$ , se transforman, cada uno de ellos, en  $(uv) \subset L(a)$ . Finalmente,  $(vt) \subset L(a)$  proviene de  $(t_{-1}^*v_{-1}) \cup (t_{-1}v_{-1}^*) \subset L_{-1}^*(a)$  y  $(v_{-1}t_{-1}) \subset L_{-1}(a)$ . Nótese que bajo la función,  $L_{-1}^*(a)$  y  $L(a)$  se recorren en el mismo sentido mientras que  $L_{-1}(a)$  y  $L(a)$  se recorren en sentidos opuestos (ver fig.1.5).

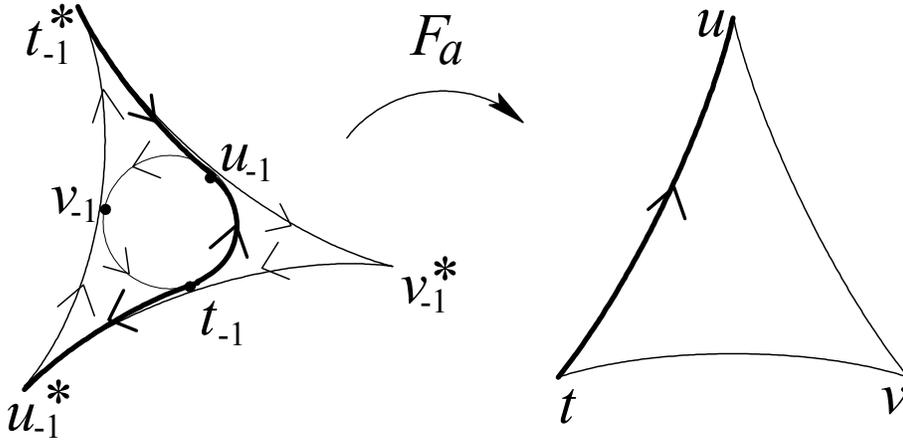


fig. 1.5: La acción de  $F_a$  en  $L_{-1}(a)$  y  $L_{-1}^*(a)$ .

En realidad, no sólo restringida a  $L_{-1}^*(a)$  sino en todo el exterior de dicha hipocicloide la función se comporta, geoméricamente, en forma “parecida” a  $z \rightarrow z^2$  (teorema 1.3.1).

*Observación sobre la notación:* Siguiendo textos como [19], denotaremos por  $Z_m(f)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , a una región del plano en la cual cada punto tiene exactamente  $m$  preimágenes bajo una función  $f$  (si es que tal región existe). En el caso de las funciones  $F_a$  escribiremos  $Z_m(a)$ .

Denotemos por  $R(a)$  a la región no acotada del plano cuya frontera es  $L_{-1}^*(a)$  (es la que queda fuera de  $L_{-1}^*(a)$ ).

En lo que sigue, veremos que cada punto de la región no acotada cuya frontera es  $L(a)$  tiene exactamente dos preimágenes en  $R(a)$ ; por tal razón llamaremos a dicha región  $Z_2(a)$ . Veremos también que cada punto de la región acotada cuya frontera es, también,  $L(a)$  (la que queda dentro de esta

hipocicloide) tiene exactamente cuatro preimágenes, todas ellas en el interior de la región acotada por la otra hipocicloide, por  $L_{-1}^*(a)$ ; por tal razón a dicha región la llamaremos  $Z_4(a)$ .

A continuación se introducen dos familias de curvas que nos serán de utilidad para lo que sigue después.

## 1.2. Dos importantes familias de curvas

*El caso real:*  $a \in \mathbb{R}$ . Sean  $a$ ,  $\rho$  y  $\sigma$  números reales; para  $t \in \mathbb{R}$ , definimos

$$\varphi_\rho(t) = \rho e^{it} - a e^{-i2t} \quad (1.9)$$

y

$$\psi_\sigma(t) = \sigma e^{it} + a^2 e^{-i2t} \quad (1.10)$$

Cada una de estas dos ecuaciones parametriza una curva plana cerrada que si  $\rho \neq 0 \neq \sigma$  se recorre sólo una vez si  $t \in [0, 2\pi)$ . En particular, si  $\rho = 2|a|$ ,  $\varphi_\rho(t)$  parametriza a la hipocicloide  $L_{-1}^*(a)$  y si  $\rho = 0$ ,  $\varphi_\rho(t)$  parametriza a la circunferencia singular  $L_{-1}(a)$  (recorrida dos veces si  $t \in [0, 2\pi)$ ). Por otra parte si  $\sigma = 2a^2$ ,  $\psi_\sigma(t)$  parametriza al conjunto de valores críticos, la hipocicloide  $L(a)$ . En este sentido, a estas curvas las podemos considerar una generalización de las hipocicloides de tres picos usuales.

Sean  $\Phi_1(a)$  la familia de curvas parametrizadas por la ecuación (1.9) y  $\Phi_2(a)$  la de las curvas parametrizadas por la ecuación (1.10). Por lo dicho previamente,  $L_{-1}^*(a)$  y  $L_{-1}(a)$  pertenecen a  $\Phi_1(a)$  mientras que  $L(a)$  es elemento de  $\Phi_2(a)$ .

*Propiedades de las familias  $\Phi_1(a)$  y  $\Phi_2(a)$ :*

(i) Para cualesquiera dos números  $\rho$  y  $\sigma$  se cumple que  $\varphi_\rho(t+\pi) = \varphi_{-\rho}(t)$  y  $\psi_\sigma(t+\pi) = \psi_{-\sigma}(t)$ .

(ii) Si  $\rho \geq 0$ ,  $F_a(\varphi_\rho(t)) = \psi_\sigma(2t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , con  $\sigma = \rho^2 - 2a^2 \geq -2a^2$ .

(iii) Si  $\sigma \geq -2a^2$ , existe  $\rho \geq 0$  tal que  $F_a(\varphi_\rho(t)) = \psi_\sigma(2t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

En particular, si  $0 < \sigma \leq 2a^2$ , existen  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , con  $0 \leq \rho_1 < \sqrt{2}|a|$  y  $\sqrt{2}|a| < \rho_2 \leq 2|a|$ , tales que  $F_a(\varphi_{\rho_1}(t)) = \psi_\sigma(2t)$  y  $F_a(\varphi_{\rho_2}(t)) = \psi_{-\sigma}(2t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . En cambio si  $\sigma > 2a^2$ , existe un único real  $\rho > 2|a|$  tal que  $F_a(\varphi_\rho(t)) = \psi_\sigma(2t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $\sigma = 0$ ,  $\varphi_{\sqrt{2}|a|}(t) = \sqrt{2}|a| e^{-it} - a e^{-i2t}$  es tal que  $F_a(\varphi_{\sqrt{2}|a|}(t)) = \psi_0(2t) = a^2 e^{-i4t} \in C_{|a|^2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

(iv) Si  $a \neq -1$ , toda curva en  $\Phi_1(a)$  es distinta de toda curva en  $\Phi_2(a)$ . Si  $a = -1$ , ambas familias coinciden.

*Observaciones:* La propiedad (i) nos dice que  $\varphi_\rho$  y  $\varphi_{-\rho}$  parametrizan la misma curva, pero recorrida, digamos, desde distinto punto inicial. Lo mismo vale para  $\psi_\sigma$  y  $\psi_{-\sigma}$ . La propiedad (ii) implica que si  $t \in [0, 2\pi)$ , bajo  $F_a$  cada curva en  $\Phi_1(a)$  se mapea 2 a 1 en una curva de  $\Phi_2(a)$ . En este sentido, la función  $F_a$  va de  $\Phi_1(a)$  en  $\Phi_2(a)$ , y la propiedad (iii) nos dice que  $F_a$  es una transformación *suprayectiva* de  $\Phi_1(a)$  en  $\Phi_2(a)$ . Más aún, como  $\psi_\sigma$  y  $\psi_{-\sigma}$  parametrizan la misma curva, (iii) también nos dice que si  $0 < \sigma \leq 2a^2$ ,  $\psi_\sigma$  tiene dos imágenes inversas en  $\Phi_1(a)$ ,  $\varphi_{\rho_1}$  y  $\varphi_{\rho_2}$ , cada una de las cuales se mapea 2 a 1 en  $\psi_\sigma$ . En consecuencia, si  $0 < \sigma \leq 2a^2$ , la curva  $\psi_\sigma$  está contenida en  $Z_4(a)$  mientras que si  $\sigma > 2a^2$ , dicha curva está contenida en  $Z_2(a)$ . Se desprende también, entonces, que si  $0 \leq \rho \leq 2|a|$ ,  $\varphi_\rho$  está contenida en  $F_a^{-1}(\overline{Z_4(a)})$  y si  $\rho > 2|a|$ ,  $\varphi_\rho$  está contenida en  $R(a) = F_a^{-1}(Z_2(a))$  (ver figura 1.8). Más abajo ilustraremos la relación entre estas curvas  $\varphi_{\rho_1}$  y  $\varphi_{\rho_2}$  que van a dar a  $\psi_\sigma$  bajo  $F_a$  cuando  $0 < \sigma \leq 2a^2$ . Por último, como colecciones de curvas, si  $a \neq -1$  estas dos familias son ajenas, por (iv). A  $\Phi_1(a)$  la podemos considerar contenida en el dominio de  $F_a$  y a  $\Phi_2(a)$  en la imagen. Esto nos va servir para demostrar el teorema 2 de la sección anterior. El caso  $a = -1$  es sumamente especial; éste es el único parámetro (real o complejo) para el cual ambas familias coinciden y las consecuencias son importantes, como se verá en el capítulo 2, dedicado íntegramente al caso  $a = -1$ .

*Demostración de las propiedades.*

Es útil tener presente la gráfica de la función  $g(\rho) = \rho^2 - 2a^2$  como se muestra en la figura 1.6.

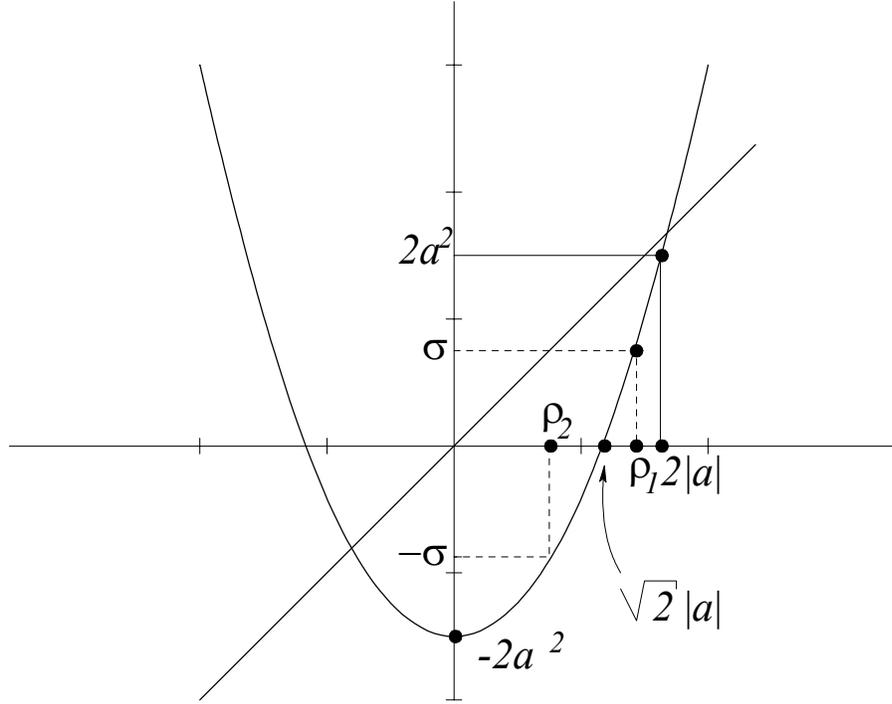


figura 1.6:  $g(\rho) = \rho^2 - 2a^2$

Básicamente todas las propiedades se desprenden de cálculos más o menos simples. Por ejemplo, para (i),  $\varphi_\rho(t + \pi) = \rho e^{i(t+\pi)} - a e^{-i2(t+\pi)} = -\rho e^{it} - a e^{-i2t} = \varphi_{-\rho}(t)$ . En forma idéntica se prueba que  $\psi_\sigma(t + \pi) = \psi_{-\sigma}(t)$ . Para (ii), sea  $\rho \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
 F_a(\varphi_\rho(t)) &= \varphi_\rho(t)^2 + 2a\overline{\varphi_\rho(t)} \\
 &= \rho^2 e^{i2t} - 2a\rho e^{-it} + a^2 e^{i4t} + 2a\rho e^{-it} - 2a^2 e^{i2t} \\
 &= (\rho^2 - 2a^2) e^{i2t} + a^2 e^{i4t} = \psi_{(\rho^2 - 2a^2)}(2t)
 \end{aligned}$$

Nótese que  $\rho^2 - 2a^2 \geq -2a^2$  si  $\rho \geq 0$ .

Nuevamente recurriendo a la gráfica, si  $\sigma \geq -2a^2$ , existe un único número  $\rho_\sigma \geq 0$  tal que  $\sigma = \rho_\sigma^2 - 2a^2$ . Usando este número y lo hecho en (ii) se sigue que  $F_a(\varphi_{\rho_\sigma}(t)) = \psi_\sigma(2t)$ .

Obsérvese que  $[-2a^2, 2a^2]$  está contenido en la imagen de  $g$ , y que si  $0 < \sigma \leq 2a^2$ , existen  $\rho_2 \in [0, \sqrt{2}|a|]$  y  $\rho_1 \in (\sqrt{2}|a|, 2|a|]$  tales que  $g(\rho_1) = \sigma$  y  $g(\rho_2) = -\sigma$ , como se ilustra en la figura. Los valores de  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son:

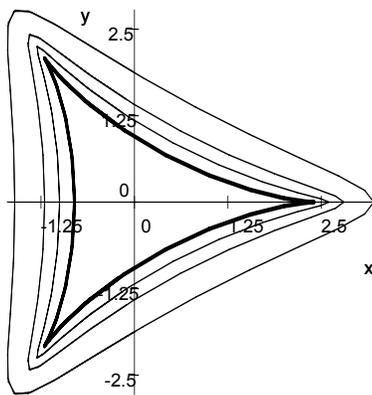
$$\rho_1 = \sqrt{2a^2 + \sigma}, \quad \rho_2 = \sqrt{2a^2 - \sigma}.$$

Ahora, un cálculo como el hecho en (ii) nos permite concluir que  $F_a(\varphi_{\rho_1}(t)) = \psi_{\sigma}(2t)$  y  $F_a(\varphi_{\rho_2}(t)) = \psi_{-\sigma}(2t)$ .

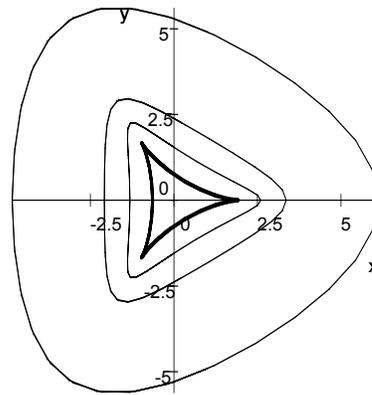
En el propio enunciado de (iii) se resuelve el caso  $\sigma = 0$ . Este es un caso importante porque nos permite tener una parametrización de la imagen inversa de la circunferencia de radio  $|a|^2$ , tangente a  $L(a)$  en los puntos  $u$ ,  $v$  y  $t$ .

Finalmente, si  $a = -1$ ,  $\varphi_{\rho}(t) = \rho e^{it} + e^{-i2t}$  y  $\psi_{\sigma}(t) = \sigma e^{it} + e^{-i2t}$ , por lo que ambas curvas coinciden si  $\rho = \sigma$ . Si  $a \neq -1$ , de la forma de las ecuaciones (1.9) y (1.10), se sigue que se trata de curvas diferentes para todos los valores de  $\rho$  y  $\sigma$ .  $\square$

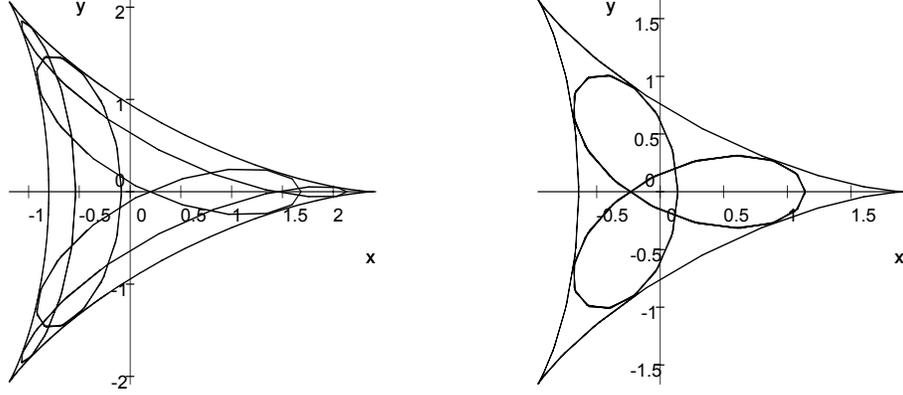
*Observación:* Nótese que de la demostración que se acaba de hacer se desprende que a  $\Phi_2(a)$  la podemos considerar como la familia de curvas  $\psi_{\rho^2-2a^2}(t) = (\rho^2 - 2a^2)e^{it} + e^{-i2t}$  con  $\rho \geq 0$ .



(a)



(b)



(c)

(d)

figura 1.7: Elementos de las familias  $\Phi_1(a)$  y  $\Phi_2(a)$  para  $a < 0$ : (a)  $L_{-1}^*(a)$  y tres curvas  $\varphi_\rho \in \Phi_1(a)$  con  $\rho > 2|a|$ . Estas tres curvas están contenidas en  $R(a)$ . (b) Las imágenes bajo  $F_a$  de las curvas anteriores; todas ellas son elementos de  $\Phi_2(a)$  y están contenidas en  $Z_2(a)$ . En particular, aparece  $F_a(L_{-1}^*(a)) = L(a)$ . (c) Nuevamente aparece  $L_{-1}^*(a)$  pero ahora con dos curvas  $\varphi_{\rho_1}$  y  $\varphi_{\rho_2}$  con  $0 < \rho_1 < \sqrt{2}|a| < \rho_2 < 2|a|$ . la imagen de estas dos curvas es una sola curva  $\psi_\sigma$  que aparece en (d) junto con  $L(a)$ .

### 1.3. Equivalencia con $z \rightarrow z^2$ en el exterior de $L_{-1}^*(a)$

**Teorema 1.3.1** Sean  $0 \neq a \in \mathbb{C}$  y  $f(z) = z^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces, las funciones  $F_a : R(a) \rightarrow Z_2(a)$  y  $f : \mathbb{C} - \overline{D_{|a|}} \rightarrow \mathbb{C} - \overline{D_{|a|^2}}$  son  $C^\infty$ -equivalentes. Es decir, existen difeomorfismos  $H_a : \mathbb{C} - \overline{D_{|a|}} \rightarrow R(a)$  y  $G_a : \mathbb{C} - \overline{D_{|a|^2}} \rightarrow Z_2(a)$  tales que

$$F_a(H_a(z)) = G_a(z^2), \quad z \in \mathbb{C} - \overline{D_{|a|}}. \quad (1.11)$$

*Demostración del teorema 1.3.1.*

Nótese, en particular, que de la aparición de  $z^2$  en (1.11), se sigue que cada punto de la región que hemos llamado  $Z_2(a)$  tiene en efecto dos preimágenes en  $R(a)$ .

Nuevamente dividimos la demostración en dos casos.

*Caso 1:  $a \in \mathbb{R}$ :*

La idea es basarnos en las parametrizaciones (1.9) y (1.10). Sea  $z \in \mathbb{C} - D_{|a|}$ . Escribimos  $z = |z|e^{it}$  con  $|z| > |a|$ , y definimos:

$$H_a(z) = 2z - a \frac{\bar{z}^2}{|z|^2}.$$

Nótese que esta función transforma a la circunferencia de radio  $|z| > |a|$  inyectivamente en la curva  $\varphi_\rho \in \Phi_1(a)$  con  $\rho = 2|z| > 2|a|$ . Esta curva está contenida en  $\mathbb{C} - \overline{A(a)}$  y  $H_a$  resulta biyectiva de  $\mathbb{C} - \overline{D_{|a|}}$  en  $\mathbb{C} - \overline{A(a)}$ .

Análogamente, para  $z \in \mathbb{C} - \overline{D_{|a|^2}}$ , es decir,  $|z| > |a|^2$ , definimos la función

$$G_a(z) = (4|z| - 2a^2) \frac{z}{|z|} + a^2 \frac{\bar{z}^2}{|z|^2}.$$

Nótese, por un lado, que  $2\sqrt{|z|} > 2|a|$  dado que  $|z| > |a|^2$  y, por otro, que  $G_a$  transforma inyectivamente la circunferencia de radio  $|z| \geq |a|^2$  en la curva  $\psi_\sigma \in \Phi_2(a)$  con  $\sigma = 4|z| - 2a^2 = (2\sqrt{|z|})^2 - 2a^2 > 2a^2$ . Esta función es biyectiva de  $\mathbb{C} - \overline{D_{|a|^2}}$  en  $\mathbb{C} - \overline{Z_4(a)}$ .

Veamos que se cumple (1.11).

Sea  $|z| > |a|$ . Entonces  $2|z| > 2|a|$ ,  $2|z|^2 > 2|a|^2$  y

$$\begin{aligned} F_a(H_a(z)) &= F_a\left(2z - a \frac{\bar{z}^2}{|z|^2}\right) \\ &= \left(2z - a \frac{\bar{z}^2}{|z|^2}\right)^2 + 2a \overline{\left(2z - a \frac{\bar{z}^2}{|z|^2}\right)} \\ &= 4z^2 - 4a \frac{z\bar{z}^2}{|z|^2} + a^2 \frac{\bar{z}^4}{|z|^4} + 4a\bar{z} - 2a^2 \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} \\ &= (4|z|^2 - 2a^2) \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} + a^2 \frac{\bar{z}^4}{|z|^4} = G_a(z^2). \end{aligned}$$

*Caso 2:  $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ .*

Sean  $\rho$  y  $\sigma$  números reales y  $a = |a|e^{i\theta}$  con  $0 \neq \theta \neq \pi$ . Sea  $\Phi_1^*(a)$  la familia de curvas definidas por

$$\varphi_\rho(t) = -e^{i\frac{\theta}{3}} (\rho e^{it} + |a| e^{-i2t}), \quad t \in \mathbb{R},$$

y  $\Phi_2^*(a)$  la familia de curvas

$$\psi_\sigma(t) = e^{i\frac{2\theta}{3}} (\sigma e^{it} + |a|^2 e^{-i2t}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cada una de estas familias difiere de la correspondiente para  $a \in \mathbb{R}$  sólo por una rotación. Evidentemente, entonces, estas familias tienen las mismas propiedades básicas que las de las curvas definidas por (1.9) y (1.10). En particular, también en este caso  $L_{-1}^*(a)$  y  $L_{-1}(a)$  pertenecen a  $\Phi_1^*(a)$  mientras que  $L(a)$  es elemento de  $\Phi_2^*(a)$ .

Para  $z = |z| e^{it}$  con  $|z| > |a|$ , definimos:

$$H_a(z) = -e^{i\frac{\theta}{3}} \left( 2z - |a| \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} \right). \quad (1.12)$$

Análogamente, para  $|z| > |a|^2$ , definimos

$$G_a(z) = e^{i\frac{2\theta}{3}} \left( (4|z| - 2|a|^2) \frac{z}{|z|} + |a|^2 \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} \right). \quad (1.13)$$

Nótese que  $H_a$  transforma a la circunferencia de radio  $|z| > |a|$  inyectivamente en la curva  $\varphi_\rho \in \Phi_1^*(a)$  con  $\rho = 2|z| > 2|a|$ . Esta curva está contenida en  $\mathbb{C} - \overline{A(a)}$  y  $H_a$  resulta biyectiva de  $\mathbb{C} - \overline{D_{|a|}}$  en  $\mathbb{C} - \overline{A(a)}$ .

Análogamente,  $G_a$  transforma inyectivamente la circunferencia de radio  $|z| > |a|^2$  en la curva  $\psi_\sigma \in \Phi_2^*(a)$  con  $\sigma = 4|z| - 2|a|^2 = \left( 2\sqrt{|z|} \right)^2 - 2|a|^2 > 2|a|^2$ . Esta función es biyectiva de  $\mathbb{C} - \overline{D_{|a|^2}}$  en  $\mathbb{C} - \overline{Z_4(a)}$ .

Haciendo un cálculo como el hecho más arriba se concluye que

$$F_a(H_a(z)) = G_a(z^2), \quad z \in \mathbb{C} - \overline{D_{|a|}},$$

con lo cual el teorema 1.3.1 queda demostrado.  $\square$

*Observación:* Sea  $a \in \mathbb{C}$ . Utilizando (1.12) podemos extender  $H_a$  continuamente a la frontera, en donde coincide con la función  $h_a$  dada en el teorema 1. En efecto, sea  $|z| = |a|$ ; entonces:

$$H_a(z) = -e^{i\frac{\theta}{3}} \left( 2z - |a| \frac{\bar{z}^2}{|a|^2} \right) = -e^{i\frac{\theta}{3}} \left( 2z - \frac{\bar{z}^2}{|a|} \right) = h_a(z).$$

Análogamente, definiendo  $G_a(z)$  por (1.13) para  $|z| = |a|^2$ , obtenemos

$$G_a(z) = e^{i\frac{2\theta}{3}} \left( (4|a|^2 - 2|a|^2) \frac{z}{|a|^2} + |a|^2 \frac{\bar{z}^2}{|a|^4} \right) = e^{i\frac{2\theta}{3}} \left( 2z + \frac{\bar{z}^2}{|a|^2} \right) = g_a(z).$$

Es decir,  $h_a = H_a | L_{-1}(a)$  y  $g_a = G_a | C_{|a|^2}$ .

De todo esto resulta que en realidad el teorema 1 se puede obtener como corolario del teorema 2 y ambos resultados se pueden considerar como dos aspectos de un mismo fenómeno que es el siguiente: En las hipocicloides  $L_{-1}^*(a)$  y  $L(a)$  y en el exterior de éstas, la función  $F_a$  es equivalente en el sentido de Whitney a  $z \rightarrow z^2$  en el complemento de ciertos discos abiertos.

### 1.3.1. Acción geométrica de $F_a$ en el exterior de $L_{-1}^*(a)$ .

Ayudados por el teorema 2 y unos cuantos cálculos sencillos podemos concluir lo siguiente: Para empezar, cada punto de  $Z_2(a)$  proviene de dos puntos de  $R(a)$ , es decir,  $F_a$  es 2 a 1 de  $R(a)$  en  $Z_2(a)$ . Sean  $U, V$  y  $T$  los 3 rayos (en el contradominio) que parten del origen y que pasan, respectivamente, por  $u, v$ , y  $t$ . Cada uno de estos 3 rayos tiene dos preimágenes en  $R(a)$ . Denotemos por  $U_{-1}, U_{-1}^*, V_{-1}, V_{-1}^*, T_{-1}$  y  $T_{-1}^*$  a los 6 rayos (en el dominio) que parten del origen y pasan, respectivamente, por  $u, u_{-1}^*, v, v_{-1}^*, t$  y  $t_{-1}^*$ . La parte de cada uno de estos 6 rayos que queda en  $R(a)$ , se transforma en la parte respectiva de  $U, V$  y  $T$  que queda en  $Z_2(a)$ ; es decir,

$$\begin{aligned} F_a(U_{-1} \cap R(a)) &= F_a(U_{-1}^* \cap R(a)) = U \cap Z_2(a), \\ F_a(V_{-1} \cap R(a)) &= F_a(V_{-1}^* \cap R(a)) = V \cap Z_2(a), \text{ y} \\ F_a(T_{-1} \cap R(a)) &= DF_a(T_{-1}^* \cap R(a)) = T \cap Z_2(a). \end{aligned}$$

O sea que las imágenes de estas 6 (semi)rectas son también unas (semi)rectas y como cada una de ellas tiene el mismo ángulo que el del punto mencionado por el que pasa, resulta que también aquí ha habido una duplicación de ángulos. En otras palabras, *los ángulos de los rayos  $U, V$  y  $T$  son el doble - mod  $2\pi$  - de los de sus respectivas preimágenes  $U_{-1}, U_{-1}^*, V_{-1}, V_{-1}^*, T_{-1}$  y  $T_{-1}^*$ .*

Con base en los seis rayos  $U_{-1}, V_{-1}, T_{-1}, U_{-1}^*, V_{-1}^*$  y  $T_{-1}^*$  dividimos a  $R(a)$  en seis regiones  $R_i(a)$ ,  $i = 1, \dots, 6$  (las partes de los seis rayos que quedan en  $R(a)$  forman, por pares, partes de la frontera de las regiones  $R_i(a)$ ). Ver fig.

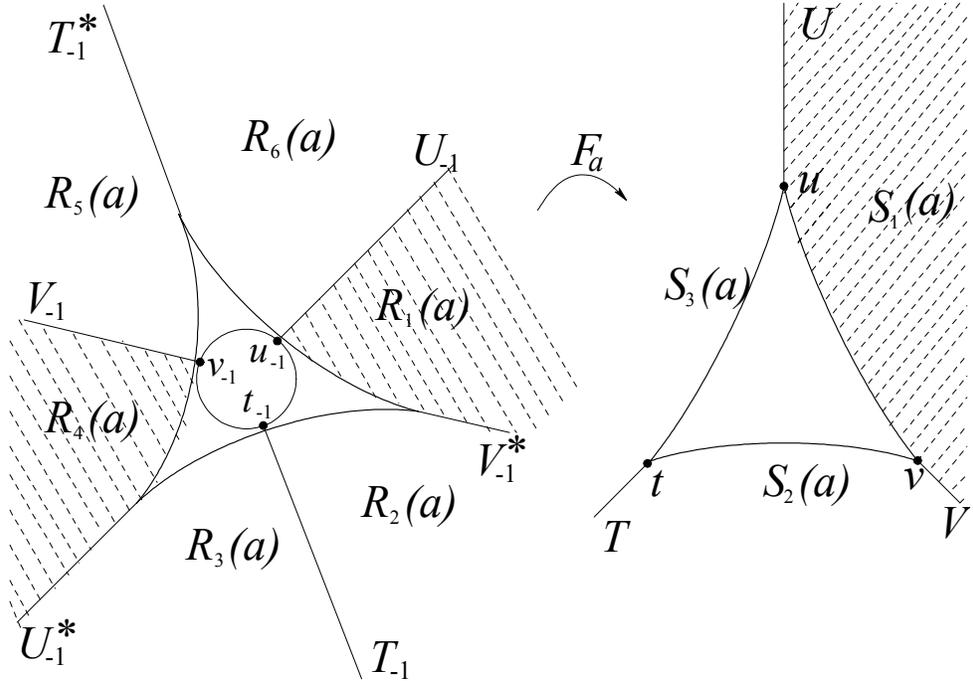
1.5); entonces, como  $F_a$  aquí es 2 a 1,  $F_a$  transforma a estas regiones, por pares, en tres regiones  $S_1(a)$ ,  $S_2(a)$  y  $S_3(a)$  de la siguiente manera:

$$F_a(R_i(a)) = F_a(R_{i+3}(a)) = S_i(a),$$

o equivalentemente,

$$F_a^{-1}(S_i(a)) = R_i(a) \cup R_{i+3}(a)$$

para  $1 \leq i \leq 3$ . A su vez, las regiones  $S_i(a)$  están delimitadas por las partes de los tres rayos  $U, V$  y  $T$  que quedan en  $Z_2(a)$ . Cada punto en  $S_i(a)$  proviene de dos puntos distintos, uno en  $R_i(a)$  y otro en  $R_{i+3}(a)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .



Del lado izquierdo, las regiones  $R_i(a)$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , del derecho,  $S_i(a)$ ,  $i = 1, \dots, 3$   
 figura 1.8.

#### 1.4. Comportamiento de $F_a$ en la región acotada cuya frontera es la hipocicloide $L_{-1}^*(a)$

En esta subsección nos limitamos a señalar solamente un aspecto de este comportamiento:

La hipocicloide  $L(a)$  es una curva simple cerrada que divide al plano en dos regiones. Por ser el conjunto de valores críticos de  $F_a$ , dentro de cada una de estas regiones todos los puntos tienen el mismo número de preimágenes (además, el número de preimágenes entre una región y otra difiere por un múltiplo de 2)<sup>1</sup>. Como el origen tiene cuatro preimágenes, a saber:  $0$ ,  $-2u_{-1}$ ,  $-2v_{-1}$  y  $-2t_{-1}$ , en la región acotada por  $L(a)$  cada punto tiene cuatro preimágenes. A esta región acotada, que queda dentro de la hipocicloide  $L(a)$ , la denotaremos por  $Z_4(a)$ .

Entonces,  $F_a^{-1}(Z_4(a))$  consta de cuatro componentes ajenas, contenidas en la región acotada cuya frontera es la hipocicloide  $L_{-1}^*(a)$ , determinadas por las curvas  $L_{-1}^*(a)$  y  $L_{-1}(a)$ : una es la que queda dentro del círculo singular y las otras tres, las que quedan fuera de este círculo pero dentro de  $L_{-1}^*(a)$ . Denotaremos, respectivamente, a estas regiones por  $A_0(a)$ ,  $A_1(a)$ ,  $A_2(a)$  y  $A_3(a)$  (ver fig. 1.10). Con esta notación,

$$F_a^{-1}(Z_4(a)) = A_0(a) \cup A_1(a) \cup A_2(a) \cup A_3(a).$$

El hecho de que, bajo  $F_a$ , cada una de estas regiones  $A_i(a)$  se transforma biyectivamente en  $Z_4(a)$  es consecuencia de que los puntos de  $L_{-1}(a) - \{u_{-1}, v_{-1}, t_{-1}\}$  son dobleces.

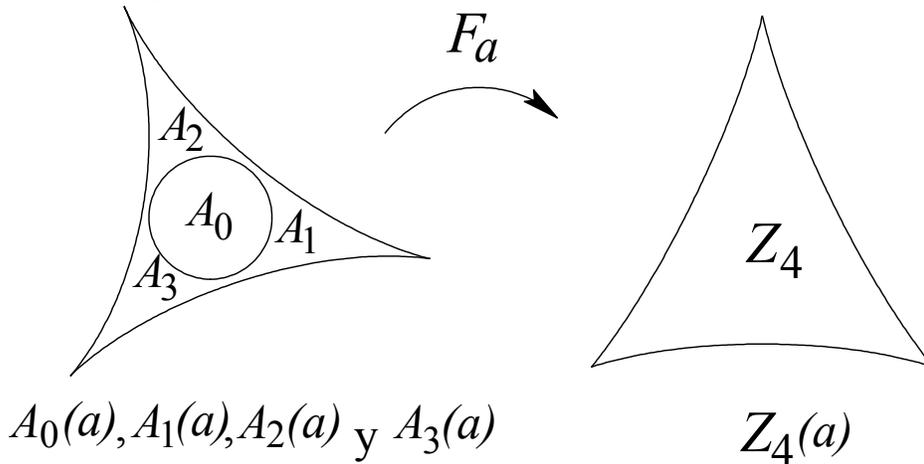


Figura 1.9.

---

<sup>1</sup>Este hecho es fácil de comprobar en el caso de las funciones  $F_a$ , pero también es consecuencia de resultados generales: Véase Milnor, J., *Topology from the differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, 1997.

Nótese, finalmente, que

$$\begin{aligned}Z_2(a) &= \mathbb{C} - \overline{Z_4(a)}, \\ \overline{Z_4(a)} &= Z_4(a) \cup L(a), \text{ y} \\ \partial Z_4(a) &= \partial Z_2(a) = L(a).\end{aligned}$$

## Capítulo 2

# Sobre la conexidad del conjunto de puntos cuya órbita es acotada.

Sea  $X$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una función continua. Dado  $x \in X$ , la *órbita* de  $x$  bajo  $f$  es la sucesión  $\{f^k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  donde  $f^1 = f$ ,  $f^k = f \circ f^{k-1}$  si  $k \in \mathbb{N}$  y  $f^0 = id$ . Denotamos a dicha órbita por  $orb(f, x)$ . Se dice que  $f$  es *transitiva* en  $X$  si para cada par de conjuntos abiertos no vacíos de  $X$ , digamos  $U$  y  $W$ , existen  $x \in U$  y un entero positivo  $n$  tal que  $f^n(x) \in W$ .

Un punto  $x$  es *periódico* si  $f^n(x) = x$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ ; al menor natural  $n$  que satisface esta igualdad se le llama el periodo de  $x$  y se dice que  $x$  es un punto de periodo  $n$ . Al conjunto de puntos periódicos de  $f$  lo denotamos por  $Perf$ .

Si  $Perf$  es un conjunto denso en  $X$  y, a la vez,  $f$  es transitiva en  $X$ , se dice que  $f$  es *caótica* en  $X$ , en el sentido propuesto por Devaney [11].

Se dice que un conjunto  $\Omega$  es *totalmente invariante* bajo  $f$  si  $f(\Omega) = f^{-1}(\Omega) = \Omega$ ; se dice que es invariante hacia adelante si  $f(\Omega) = \Omega$ , e invariante hacia atrás si  $f^{-1}(\Omega) = \Omega$ .<sup>1</sup>

Al conjunto de puntos  $z \in \mathbb{C}$  cuya órbita es acotada bajo la función  $F_a$  lo denotamos por  $K_a$ . En analogía con el caso holomorfo, ocasionalmente llamaremos a éste el *conjunto de Julia lleno de  $F_a$* .

---

<sup>1</sup>Si  $f$  es suprayectiva (i.e.,  $f(X) = X$ ), es inmediato que  $f$  es invariante hacia atrás si, y sólo si, es totalmente invariante.

En lo que resta del capítulo se establecerán varios resultados preliminares para demostrar los teoremas 2.2.5 y 2.2.5 que se enuncian a continuación:

*Teorema 2.2.5* Si  $L_{-1}(a) \subseteq K_a$ , entonces  $K_a$  es conexo.

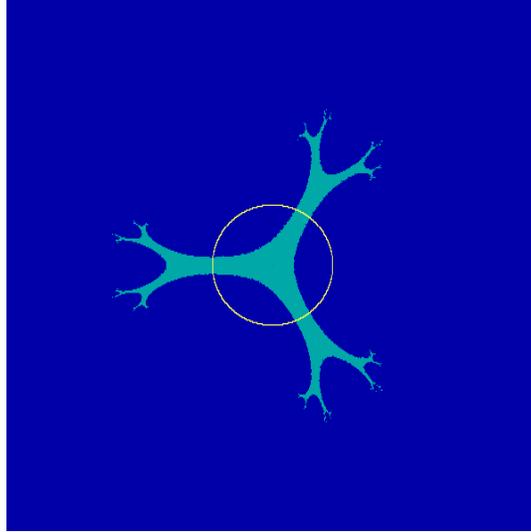
*Teorema 2.3* Si  $\text{orb}(F_a, z) \rightarrow \infty$  para todo  $z \in L_{-1}(a)$ ,  $K_a$  tiene una infinidad (no numerable) de componentes.

Es fácil ver que  $K_a$  es totalmente invariante bajo  $F_a$  y, como veremos más abajo,  $K_a$  es un conjunto compacto para todo  $a \in \mathbb{C}$ . Por lo tanto, del teorema 2.2.5 se desprende que si  $L_{-1}(a) \subseteq K_a$ , entonces  $K_a$  es un continuo, es decir, un compacto conexo.

Algunos parámetros para los que se cumple que  $L_{-1}(a) \subseteq K_a$  son los números reales tales que  $-1 \leq a < 0$  y los números complejos que satisfacen  $|a| \leq \frac{1}{3}$ . En todos estos casos  $K_a$  es conexo.

Si  $|a|$  es “grande” - por ejemplo si  $|a| > 1 + \sqrt{2}$  o si  $a \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ , se cumple la hipótesis del segundo resultado, o sea, que  $\text{orb}(F_a, z) \rightarrow \infty$  para todo  $z \in L_{-1}(a)$ . En todos estos casos  $K_a$  es desconexo.

El recíproco del teorema 2.2.5 es falso porque puede ocurrir que algunos puntos del conjunto singular  $L_{-1}(a)$  tengan órbita no acotada y, sin embargo,  $K_a$  sea conexo. Por ejemplo, para parámetros reales,  $K_a$  es conexo si, y sólo si,  $a \in [-1, 2]$  (véase [26]). No obstante, para  $a \in (\frac{1}{3}, 2]$  siempre existen arcos de la circunferencia  $L_{-1}(a)$  cuyos puntos tienen órbita no acotada; un ejemplo de esto se muestra en la siguiente figura 2.1, en la que se nota que la circunferencia singular  $L_{-1}(\frac{2}{5})$  intersecta tanto al conjunto  $K_{\frac{2}{5}}$  (que aparece en el centro de la figura, con una evidente “simetría triangular”), como al exterior de éste, que constituye la “cuenca de atracción de infinito”, es decir, el conjunto de puntos cuyas órbitas tienden a  $\infty$ .



$a = \frac{2}{5}$ :  $K_a$  conexo y  $L_{-1} \not\subseteq K_a$ .  
 figura 2.1.

La experiencia parece indicar que si todos los puntos de  $L_{-1}(a)$  tienen órbita no acotada, entonces  $K_a$  no solamente tiene una infinidad de componentes, sino que es un conjunto de Cantor (compacto, perfecto y totalmente disconexo, o sea que sus componentes son puntos).

Hechas estas salvedades, los teoremas 2.2.5 y 2.3 son indudablemente análogos a un muy importante teorema de sistemas dinámicos discretos holomorfos que enunciaremos más abajo, establecido en forma independiente por Pierre Fatou y Gaston Julia alrededor de 1920 para polinomios complejos. Para comprender dicho enunciado, hacemos las siguientes precisiones: para funciones holomorfas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  el conjunto de Julia lleno es, también, el de los puntos cuya órbita es acotada. El que se llama simplemente *conjunto de Julia* es distinto, y es, por definición, el conjunto de puntos en torno a los cuales la familia de iteraciones de  $f$ ,  $\{f^k\}$ , no es una familia *normal*.<sup>2</sup>

Para funciones racionales complejas se demuestra que el conjunto de Julia es totalmente invariante, es no vacío y si su interior es vacío, es la frontera del conjunto de Julia lleno (si su interior es no vacío el conjunto de Julia coincide con todo  $\mathbb{C}$ ). Se demuestra también que dicho conjunto de Julia es, en particular, conexo, si y sólo si, el conjunto de Julia *lleno* también lo es.

---

<sup>2</sup>Para un tratamiento del tema de *familias normales* véase, por ejemplo, L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-hill, 1979.

El teorema mencionado de Fatou-Julia para polinomios se puede formular como sigue (véase [9, p. 80]).

*Teorema (Fatou-Julia).* Sea  $P$  un polinomio en  $\mathbb{C}$  y denotemos por  $\Omega_P$  al conjunto de puntos críticos de  $P$ ; i.e.  $\Omega_P = \{z \mid P'(z) = 0\}$ . Entonces:

(i)  $\Omega_P$  está contenido en el conjunto de Julia lleno de  $P$  si, y sólo si, dicho conjunto es conexo y equivalentemente, si y sólo si, el correspondiente conjunto de Julia es conexo.

(ii) Si la orb( $P, z$ )  $\rightarrow \infty$  para todo  $z \in \Omega_P$ , entonces ambos, el conjunto de Julia lleno y el conjunto de Julia coinciden y son un conjunto de Cantor.

Este resultado constituye una instancia muy significativa del papel que juega el conjunto singular en la dinámica de una función compleja.

En general, en variable compleja es un hecho muy aceptado que los puntos críticos hasta cierto punto determinan el comportamiento dinámico de una función. También en el caso real muchos autores han evidenciado que el conjunto singular juega un papel bastante determinante en la dinámica de las funciones (ver, por ejemplo, [19] y [1]).

Hay, sin embargo, una diferencia notable entre uno y otro caso: Las funciones racionales complejas - los polinomios en particular - tienen sólo un número finito de puntos críticos, es decir, el conjunto singular es finito. En cambio, el conjunto singular de las funciones (no invertibles) de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  suele ser una curva (o varias). Quizá en esta diferencia subyace la aparición de fenómenos dinámicos tan distintos en uno y otro caso.

## 2.1. Cuestiones Dinámicas Preliminares.

**Lema 2.1.1** Sea  $a \in \mathbb{C}$ . Si  $|z| > 1 + 2|a|$ , entonces  $|F_a(z)| > |z|$ .

*Demostración:* Tenemos, para todo  $z \in \mathbb{C}$ , que

$$|F_a(z)| = |z^2 + 2a\bar{z}| \geq ||z|^2 - 2|a||\bar{z}|| = |z| ||z| - 2|a||.$$

Si  $|z| > 1 + 2|a|$ , se sigue que  $|z| - 2|a| > 1$ , por lo que  $|F_a(z)| > |z|$ .  $\square$

**Lema 2.1.2** (Criterio de escape) Si  $|z| > 1 + 2|a|$ , entonces  $F_a^k(z) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ .

*Demostración:* Si  $|z| > 1 + 2|a|$ , del lema 2.1.1 podemos concluir por inducción que  $|F_a^{k+1}(z)| > |F_a^k(z)|$  para todo entero  $k \geq 0$ . En consecuencia  $\{|F_a^k(z)|\}$  es una sucesión monótona creciente de números reales positivos. Supongamos que es acotada, o equivalentemente, que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} |F_a^k(z)|.$$

Obviamente  $\alpha = \sup \{|F_a^k(z)|\} > 1 + 2|a|$ . Esto implica que  $\{F_a^k(z)\}$  es acotada en  $\mathbb{R}^2$  y, por lo tanto, tiene una subsucesión  $\{F_a^{k_i}(z)\}$  convergente a cierto  $w \in \mathbb{C}$ . Necesariamente  $|w| = \alpha$ , y como  $F_a$  es continua,

$$F_a(F_a^{k_i}(z)) = F_a^{k_i+1}(z) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F_a(w).$$

Como  $|w| = \alpha > 1 + 2|a|$ , se sigue que  $|F_a(w)| > |w|$ , lo cual implica, a su vez, que infinidad de términos de la (sub)sucesión  $\{F_a^{k_i+1}(z)\}$  tienen módulo mayor que  $|w| = \alpha$ . Pero ello es imposible porque  $\alpha \geq |F_a^k(z)| \forall k \in \mathbb{N}$ . En consecuencia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |F_a^k(z)| = \infty,$$

y queda demostrado el lema.  $\square$

*Observación:* Como  $F_a(z) \rightarrow \infty$  si  $z \rightarrow \infty$ , podemos extender continuamente la definición de  $F_a$  al plano extendido  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  haciendo  $F_a(\infty) = \infty$ . Esto convierte a  $\infty$  en un *punto fijo* de  $F_a$ . De hecho  $\infty$  es un punto fijo *atractor* de  $F_a$  para todo  $a \in \mathbb{C}$ .

Al conjunto de puntos cuya órbita tiende a  $\infty$  se le llama la *cuenca de atracción* de  $\infty$ . Denotamos a este conjunto por  $B_a(\infty)$ . Es fácil ver que  $B_a(\infty)$  es un conjunto abierto y como  $B_a(\infty) = \mathbb{C} - K_a$ , necesariamente es totalmente invariante bajo  $F_a$  dado que  $K_a$  lo es.

Denotemos por  $\mathbb{D}_a$  al disco cerrado  $\{z \mid |z| \leq 1 + 2|a|\}$ .

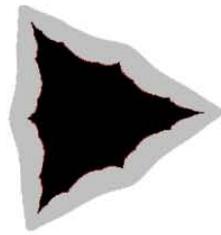
El lema 2.1.2 nos dice que el exterior de  $\mathbb{D}_a$  está contenido en  $B_a(\infty)$  para todo  $a \in \mathbb{C}$ . En consecuencia,  $K_a \subseteq \mathbb{D}_a$  (pudiendo ocurrir que  $|z| = 1 + 2|a|$  para algún  $z \in K_a$ : por ejemplo, si  $a < 0$ , el número  $1 - 2a = 1 + 2|a|$  es un punto fijo de  $F_a$  y por lo tanto es un elemento de  $K_a$ ).

Nótese que si  $|F^j(z)| > 1 + 2|a|$  para algún entero  $j \geq 0$ , argumentando como en el lema 2.1.2 se concluye también que  $orb(F_a, z) \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, *la órbita de  $z$  es acotada si, y sólo si,  $|F_a^k(z)| \leq 1 + 2|a|$  para todo  $k \geq 0$ .*

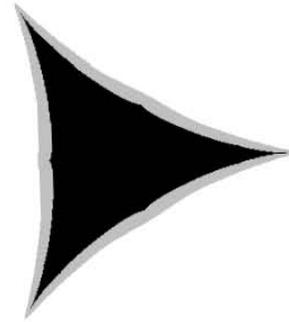
Tenemos entonces la siguiente igualdad:

$$K_a = \{z \mid |F_a^k(z)| \leq 1 + 2|a| \quad \forall k \geq 0\} \quad (2.1)$$

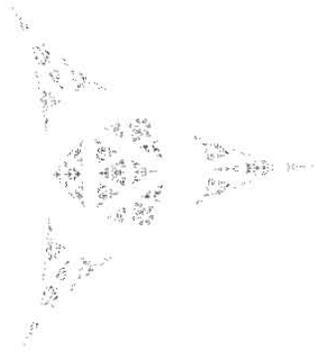
De aquí se deriva un algoritmo elemental (bastante común en casos como éste) para calcular en forma aproximada, con ayuda de una computadora, al conjunto  $K_a$ . El número  $1 + 2|a|$  es el “radio de escape”: se toma un punto inicial  $z_0 \in \mathbb{D}_a$  y se fija cierto número máximo de iteraciones - llamémoslo, por ejemplo,  $N$ . Si  $|F_a^k(z_0)| \leq 1 + 2|a|$  para  $0 \leq k \leq N$ , marcamos de negro al punto  $z_0$  y en cualquier otro caso, lo marcamos blanco. Damos ejemplos de conjuntos  $K_a$  calculados usando este algoritmo en la figura 2.2.



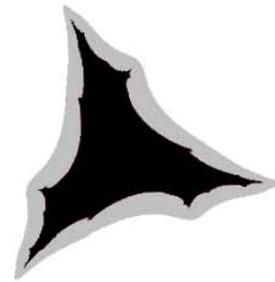
$a = -0.4$



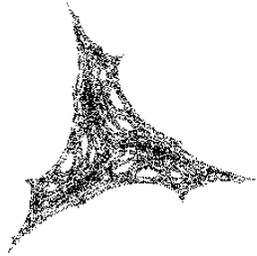
$a = -0.88$



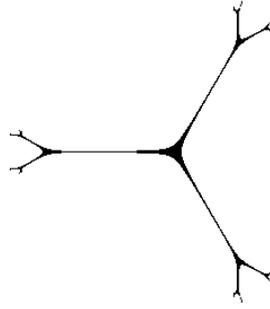
$a = -1.1$



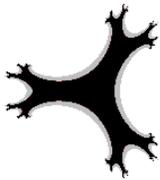
$a = -0.5 + i0.5$



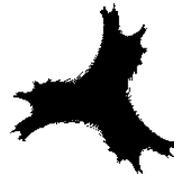
$$a = -0.5 + i0.55$$



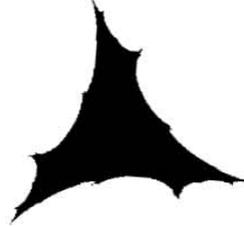
$$a = 1$$



$$a = 0,35$$



$$a = 0.25 + i0.25$$



$$a = 0.35 + i0.55$$

figura 2.2: Algunos conjuntos  $K_a$ .

En lo que sigue denotaremos por  $V_r$  al disco cerrado  $\{z \mid |z| \leq r\}$ ,  $r > 0$ . Demostraremos ahora que el conjunto  $K_a$  es compacto para todo  $a \in \mathbb{C}$ . Ello es consecuencia del siguiente

**Lema 2.1.3** *Sea  $r \geq 1 + 2|a|$ . Entonces*

$$F_a^{-1}(V_r) \subseteq V_r. \quad (2.2)$$

*Demostración:* Supongamos que  $z \notin V_r$ , o sea  $|z| > r \geq 1 + 2|a|$ . Por el lema 2.1.1  $|F_a(z)| > |z|$  y, por lo mismo,  $F_a(z) \notin V_r$ . En consecuencia, si  $z \in F_a^{-1}(V_r)$ , tenemos que  $F_a(z) \in V_r$  y por lo tanto  $z \in V_r$ .  $\square$

**Corolario 2.1.4** *Si  $r \geq 1 + 2|a|$ , la colección  $\{F_a^{-k}(V_r)\}$  es una sucesión anidada decreciente de conjuntos compactos no vacíos y*

$$K_a = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(V_r). \quad (2.3)$$

*Entonces, el conjunto  $K_a$  es compacto para todo  $a \in \mathbb{C}$ .*

*Demostración:* Obviamente  $F_a^{-k}(V_r)$  es no vacío para todo  $k \in \mathbb{N}$ . De la contención (2.2), se sigue, por inducción, que

$$F_a^{-k-1}(V_r) \subseteq F_a^{-k}(V_r) \subseteq V_r.$$

Esto prueba que si  $k \in \mathbb{N}$ ,  $F_a^{-k}(V_r)$  es acotado y como también es cerrado, es compacto. Por lo tanto,  $\bigcap_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(V_r)$  es un conjunto compacto no vacío.

Para demostrar la igualdad (2.3) estableceremos la doble contención.

Como  $K_a \subseteq \mathbb{D}_a \subseteq V_r$  y  $K_a$  es totalmente invariante,  $F_a^{-k}(K_a) = K_a \subseteq F_a^{-k}(V_r)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , por lo que  $K_a \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(V_r)$ .

Por otro lado, si  $z \in \bigcap_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(V_r)$ , tenemos  $F_a^k(z) \in V_r \forall k \in \mathbb{N}$  y por lo tanto, la órbita de  $z$  es acotada; en consecuencia,  $\bigcap_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(V_r) \subseteq K_a$ .  $\square$

Como caso particular del Corolario 2.1.4 tenemos que  $\{F_a^{-k}(\mathbb{D}_a)\}$  forma una sucesión anidada decreciente de conjuntos compactos y

$$K_a = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(\mathbb{D}_a). \quad (2.4)$$

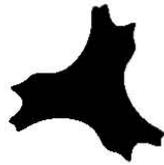
Las igualdades (2.3) y (2.4) proporcionan un algoritmo - naturalmente algo burdo - para dibujar al conjunto  $K_a$ : Se toma cualquier disco cerrado  $V_r$  suficientemente grande (i.e., con  $r \geq 1 + 2|a|$ ) y se van graficando sus imágenes inversas sucesivas  $F_a^{-k}(V_r)$ . Conforme  $k$  sea más grande, se puede apreciar mejor al conjunto  $K_a$ . Las figuras siguientes ilustran este procedimiento para  $a = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$  tomando  $V_2$  como disco inicial.



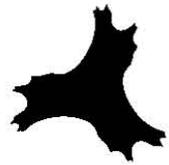
(a)  $F_a^{-1}(V_2)$



(b)  $F_a^{-2}(V_2)$



(c)  $F_a^{-3}(V_2)$



(d)  $F_a^{-4}(V_2)$



(e)  $F_a^{-5}(V_2)$

(f)  $F_a^{-15}(V_2)$

figura 2.3

*Observación:* Si  $r > 1 + 2|a|$  es fácil concluir, no sólo que  $F_a^{-1}(V_r) \subset V_r$ , sino que

$$F_a^{-1}(V_r) \subset \text{int}V_r. \quad (2.5)$$

En efecto: si  $|z| \geq r > 1 + 2|a|$ , tenemos  $|F_a(z)| > |z|$  por lo que  $F_a(z) \notin V_r$ ; de aquí que si  $z \in F_a^{-1}(V_r)$ , necesariamente  $|z| < r$ .

Más aún, de (2.5) se desprende que, en general,

$$F_a^{-k-1}(V_r) \subset \text{int}F_a^{-k}(V_r) \subset \text{int}V_r, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Esto nos será muy útil en la siguiente sección.

## 2.2. Sobre la conexidad de $K_a$ .

La idea de la demostración de la conexidad de  $K_a$  es semejante a la del inciso (i) del teorema mencionado de Fatou-Julia: Tomamos un disco cerrado  $V_r$  con  $r > 1 + 2|a|$  y, aprovechando que  $L_{-1}(a) \subset K_a$ , demostramos que  $F_a^{-k}(V_r)$  es conexo si  $k \geq 0$ . Entonces, por ser  $\{F_a^{-k}(V_r)\}$  una sucesión anidada decreciente de conjuntos conexos y compactos, la intersección

$\bigcap_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(V_r)$  es conexo y de (2.3) se sigue que  $K_a$  es conexo.

Recordar que por definición, una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que es *propia* si la imagen inversa de cualquier conjunto compacto es un conjunto compacto.

**Lema 2.2.1**  $F_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es propia para todo  $a \in \mathbb{C}$ .

*Demostración:* Sea  $\Omega$  cualquier conjunto compacto en el plano. Obviamente  $F_a^{-1}(\Omega)$  es cerrado. Sea  $r \geq 1 + 2|a|$  lo suficientemente grande de modo que  $\Omega$  esté contenido en el disco cerrado de radio  $r$ ,  $V_r$ . Entonces, como  $F_a^{-1}(\Omega) \subseteq F_a^{-1}(V_r) \subseteq V_r$ ,  $F_a^{-1}(\Omega)$  es acotado y por lo tanto, es compacto.  $\square$

**Lema 2.2.2** Sea  $\Gamma$  una curva lisa simple cerrada. Supongamos que el conjunto de valores críticos de  $F_a$ - la hipocicloide  $L(a)$  - está contenido en la región acotada cuya frontera es  $\Gamma$ . Entonces,  $F_a^{-1}(\Gamma)$  es una curva lisa simple cerrada que se mapea 2 a 1 en  $\Gamma$ . Además,  $L_{-1}^*(a)$  queda contenida en la región acotada cuya frontera es  $F_a^{-1}(\Gamma)$ .

*Demostración:* Como  $F_a$  es propia,  $F_a^{-1}(\Gamma)$  es un compacto. Como por hipótesis  $L(a) \cap \Gamma = \emptyset$ , se sigue que  $F_a^{-1}(\Gamma) \cap L_{-1}(a) = \emptyset$ ; es decir, en  $F_a^{-1}(\Gamma)$  no hay puntos singulares. En consecuencia,  $F_a^{-1}(\Gamma)$  es una variedad compacta de dimensión 1 y, por un conocido teorema de clasificación, cada componente conexa de  $F_a^{-1}(\Gamma)$  es difeomórficamente un intervalo o una curva cerrada (ver [18]). Vamos a ver que en este caso  $F_a^{-1}(\Gamma)$  es sólo una curva cerrada.

Como se vió en el capítulo anterior, en  $Z_2(a)$  (la región exterior a  $L(a)$ ) cada punto tiene exactamente 2 preimágenes, ambas en  $R(a) = F_a^{-1}(Z_2(a))$  (región exterior a  $L_{-1}^*(a)$ ). De la hipótesis se sigue que  $\Gamma \subseteq Z_2(a)$ . Entonces,  $F_a^{-1}(\Gamma) \subseteq R(a)$  y cada punto de  $\Gamma$  proviene de dos puntos de  $F_a^{-1}(\Gamma)$ .

Manteniendo la notación del capítulo 1, sean  $P, Q$  y  $S$  las intersecciones respectivas de  $\Gamma$  con los rayos  $U, T$  y  $V$  (cada uno de estos puntos tiene exactamente 2 preimágenes en  $R(a)$ . Una idea esquemática de la situación se presenta en la fig.2.4; ahí, las preimágenes de  $P$  se denotan por  $p_1, p_2$ , etc.)

Conforme se recorre  $\Gamma$  de  $P$  a  $Q$  en sentido contrario a las manecillas del reloj, cada una de las dos componentes de  $F_a^{-1}(\Gamma)$  es recorrida de una de las imágenes inversas de  $P$  a una de las de  $Q$ . Evidentemente, conforme  $\Gamma$  se recorre de  $P$  a  $Q$ , luego a  $S$  y luego de nuevo a  $P$ ,  $F_a^{-1}(\Gamma)$  dibuja una única curva cerrada (que se mapea 2 a 1 en  $\Gamma$ ). Como  $F_a^{-1}(\Gamma) \subset R(a)$ , se sigue que  $L_{-1}^*(a)$  queda contenida en la región acotada cuya frontera es  $F_a^{-1}(\Gamma)$ .  $\square$

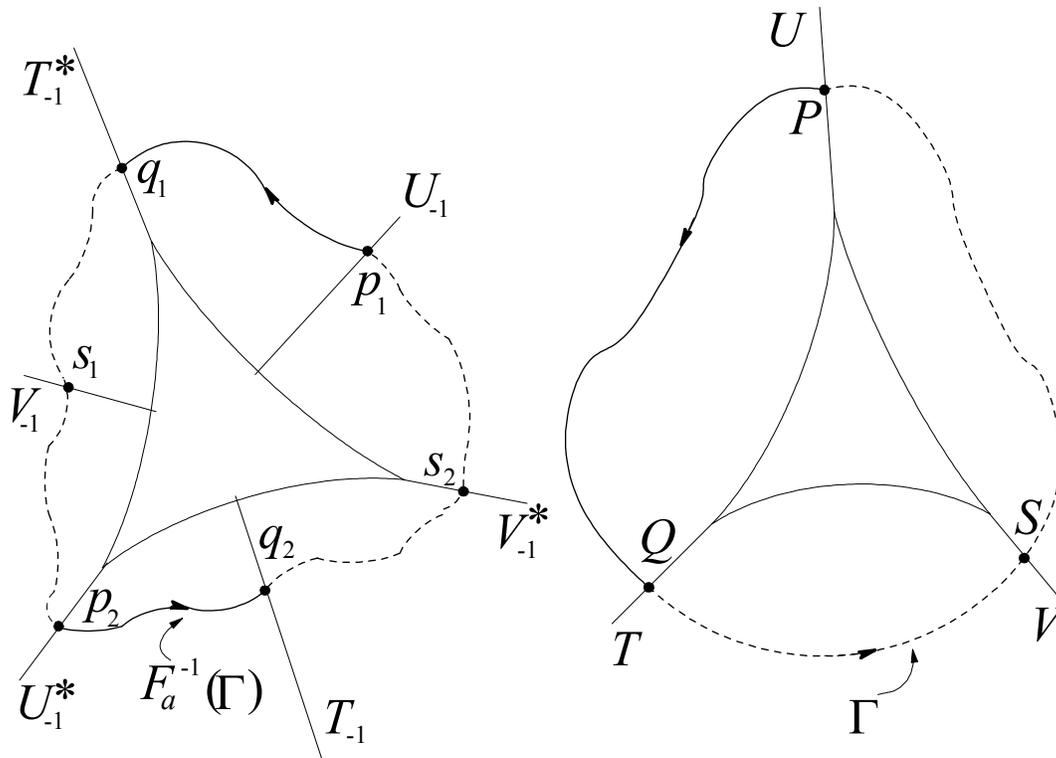


figura 2.4:

*Observación:* Si  $L(a) \cap \Gamma = \emptyset$ , no necesariamente ocurre que  $F_a^{-1}(\Gamma)$  es una sola curva simple cerrada; la figura 2.5 muestra ejemplos en los que  $F_a^{-1}(\Gamma)$  tiene dos componentes a pesar de que  $L(a) \cap \Gamma = \emptyset$ . El hecho clave en el lema 2.2.2 es que, adicionalmente a la hipótesis  $L(a) \cap \Gamma = \emptyset$ ,  $L(a)$  está contenida en la región acotada cuya frontera es  $\Gamma$ . Es decir,  $\Gamma$  “rodea” por fuera al conjunto  $L(a)$ . En consecuencia, la imagen inversa de  $\Gamma$ ,  $F_a^{-1}(\Gamma)$ , “rodea” también por fuera a la hipocicloide  $L_{-1}^*(a)$ , tal como se señala en el lema.

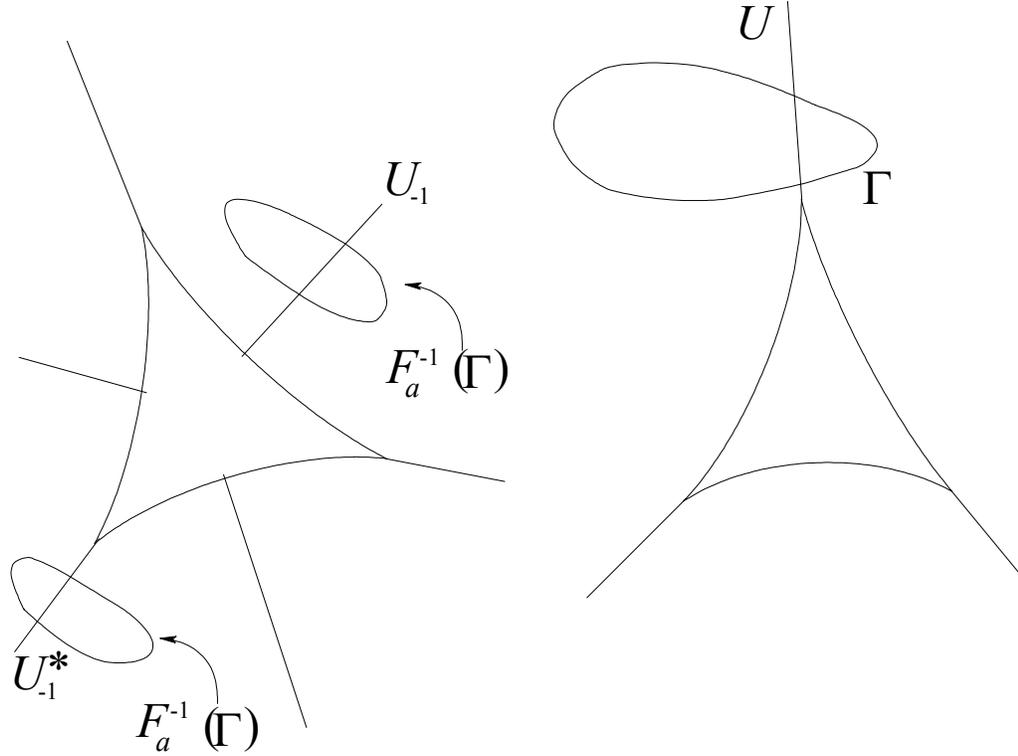


figura 2.5.

Si  $\Gamma$  es cualquier curva en el plano, a su imagen inversa de orden  $k \in \mathbb{N}$ ,  $F_a^{-k}(\Gamma)$ , la denotaremos por  $\Gamma_{-k}$ .

**Lema 2.2.3** Sean  $r > 1 + 2|a|$  y  $\Gamma = \partial V_r = \{z \mid |z| = r\}$  (nótese que  $\Gamma \subset B_a(\infty)$ ). Supongamos  $L_{-1}(a) \subset K_a$ . Entonces

(i)  $\Gamma_{-1}$  es una curva simple cerrada contenida en  $\text{int}V_r$ . A su vez,  $\Gamma_{-1} \subset B_a(\infty)$ .

(ii) Sea  $A$  el anillo abierto comprendido entre  $\Gamma_{-1}$  y  $\Gamma$ . Entonces:  $F_a(A) \subset \mathbb{C} - V_r$  y  $A \subset B_a(\infty)$ .

(iii)  $F_a^{-1}(V_r) = V_r - A \cup \Gamma$ .

(iv) La frontera y el interior del conjunto compacto  $F_a^{-1}(V_r)$  son, respectivamente,  $\Gamma_{-1}$  y  $F_a^{-1}(\text{int}V_r)$ . Se cumple, entonces, que

$$F_a^{-1}(\text{int}V_r) = \text{int}F_a^{-1}(V_r) \text{ y } F_a^{-1}(\partial V_r) = \partial F_a^{-1}(V_r).$$

(v) Como  $\Gamma_{-1}$  es una curva simple cerrada, se sigue que  $F_a^{-1}(V_r)$  es un compacto, conexo y simple conexo.

*Demostración:* Como  $L_{-1}(a) \subset K_a$ , todas las iteraciones (hacia atrás y hacia adelante) de  $L_{-1}(a)$  están contenidas en  $K_a$ . En particular  $L(a) \subset K_a$ .

Por otro lado,  $\Gamma \subset \mathbb{C} - \mathbb{D}_a$  dado que  $r > 1 + 2|a|$ .

Como  $K_a \subset \mathbb{D}_a$ , tenemos que  $L(a)$  está contenida en la región acotada por  $\Gamma$  (y a la vez, tenemos que  $\Gamma \subset Z_2(a)$ ). Por lo tanto, por el lema 2.2.2,  $\Gamma_{-1}$  es una curva simple cerrada (que  $F_a$  transforma 2 a 1 en  $\Gamma$ ). Como se hizo notar en la observación anterior,  $F_a^{-1}(V_r) \subset \text{int}V_r$  dado que  $r > 1 + 2|a|$ . Como  $\Gamma_{-1} \subseteq F_a^{-1}(V_r)$ , se sigue que  $\Gamma_{-1} \subset \text{int}V_r$ .

El hecho de que  $\Gamma$  está contenida en  $B_a(\infty)$  implica que  $\Gamma_{-1}$  y todas las iteraciones (hacia atrás y hacia adelante) de  $\Gamma_{-1}$  están contenidas en  $B_a(\infty)$ ; el inciso (i) queda demostrado.

Para (ii) vamos a demostrar que si  $z \in A$ , entonces  $F_a(z) \notin V_r$ .

Tomemos  $z \in A$  y supongamos  $F_a(z) \in A$ . Unamos - mediante un arco - a  $z$  con algún punto  $q_1 \in \Gamma_{-1}$  y con algún punto  $q \in \Gamma$  como se ve en la fig.2.6. Denotemos a este arco por  $(q_1zq)$ . Excepto los extremos  $q_1$  y  $q$ , todo el resto del arco queda contenido en  $A$ .

Por el lema 2.1.1, el punto  $F_a(q)$  queda fuera de  $V_r$  y  $F_a(q_1) \in \Gamma$ , por lo que el arco  $(F_a(q_1)F_a(z)F_a(q))$  empieza en  $\Gamma$ , se “mete” en  $A$  hasta llegar a  $F_a(z)$  y luego, cruza  $\Gamma$  al menos en un punto  $x \in \Gamma$  hasta llegar a  $F_a(q)$ . Ello implica que  $x$ , por estar en el arco  $(F_a(q_1)F_a(z)F_a(q))$ , tiene alguna imagen inversa en el arco original  $(q_1zq)$ , en algún punto  $x_{-1} \in A$  (ambos,  $x$  y  $x_{-1}$ , están marcados en la fig. 2.6). Por otro lado, como  $x \in \Gamma \subseteq Z_2(a)$ ,  $F_a^{-1}(x)$  son 2 puntos distintos en  $\Gamma_{-1}$ , de donde  $x \in Z_2(a)$  tiene tres imágenes inversas diferentes, lo cual es imposible. Un argumento semejante demuestra que  $F_a(z)$  tampoco puede estar en la región acotada cuya frontera es  $\Gamma_{-1}$ ; en conclusión,  $F_a(z) \notin V_r$ , con lo que  $F_a(A) \subset \mathbb{C} - V_r$ . Obsérvese que como todo elemento de  $F_a(A)$  está fuera de  $V_r$ , se sigue inmediatamente que  $F_a(A) \subset B_a(\infty)$ , lo cual implica que  $A \subset B_a(\infty)$ .

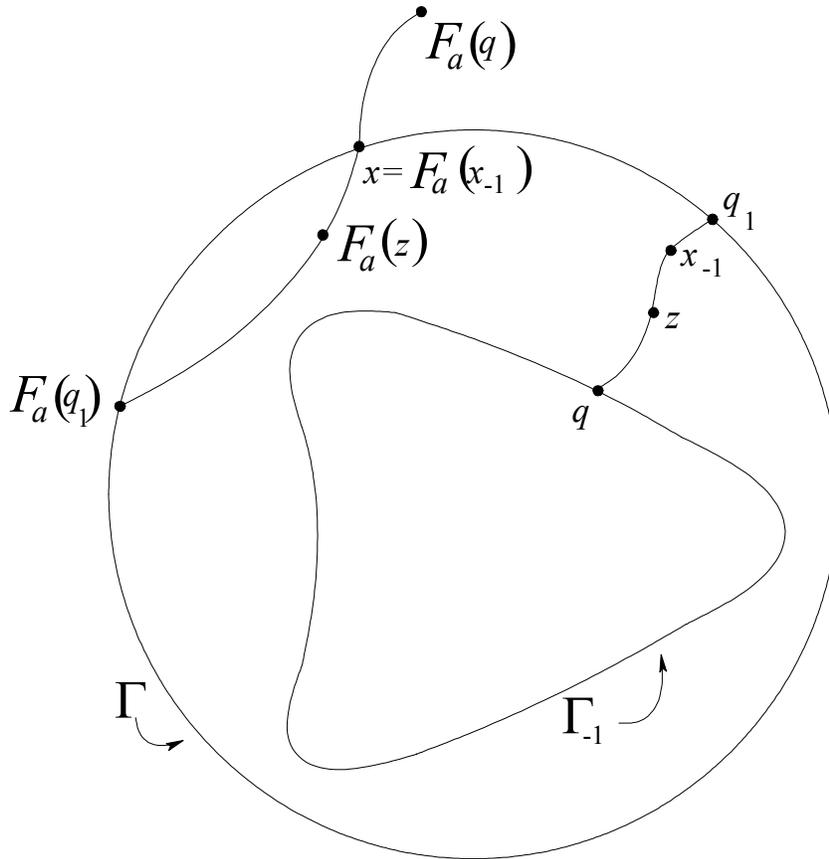


figura 2.6.

Nótese que con lo hecho hasta aquí ya tenemos que  $A \cup \Gamma_{-1} \subset B_a(\infty)$ .

Para (iii), como  $F_a^{-1}(V_r) \subset \text{int}V_r$ , se sigue que  $F_a^{-1}(V_r) \subseteq V_r - A \cup \Gamma$ , dado que  $F_a(A \cup \Gamma) \subset \mathbb{C} - V_r$ .

Demostremos ahora que  $V_r - A \cup \Gamma \subseteq F_a^{-1}(V_r)$ . Llamemos  $W$  a la región acotada cuya frontera es  $\Gamma_{-1}$  ( $W$  es abierto conexo y simple conexo). Nótese que  $W \cup \Gamma_{-1} = V_r - A \cup \Gamma$ . Obviamente  $\Gamma_{-1} \subset F_a^{-1}(V_r) \subseteq V_r - A \cup \Gamma$ .

Sólo habría que demostrar, entonces, que  $W \subseteq F_a^{-1}(V_r)$ ; de hecho vamos a demostrar que  $W \subseteq F_a^{-1}(\text{int}V_r)$ .

Sea  $w \in W$ . Unamos a  $w$  con algún punto  $z \in A$  mediante un segmento de recta parametrizado, por ejemplo, por

$$\gamma(t) = w + t(z - w), \quad t \in [0, 1].$$

Sea  $q = \gamma(t_0) \in \Gamma_{-1}$ , con  $t_0 \in (0, 1)$ , el *único* punto de intersección de este segmento con  $\Gamma_{-1}$  (i.e.,  $\gamma(t) \notin \Gamma_{-1} \forall t \neq t_0, t \in (0, 1)$ ). Ver fig. 2.7)

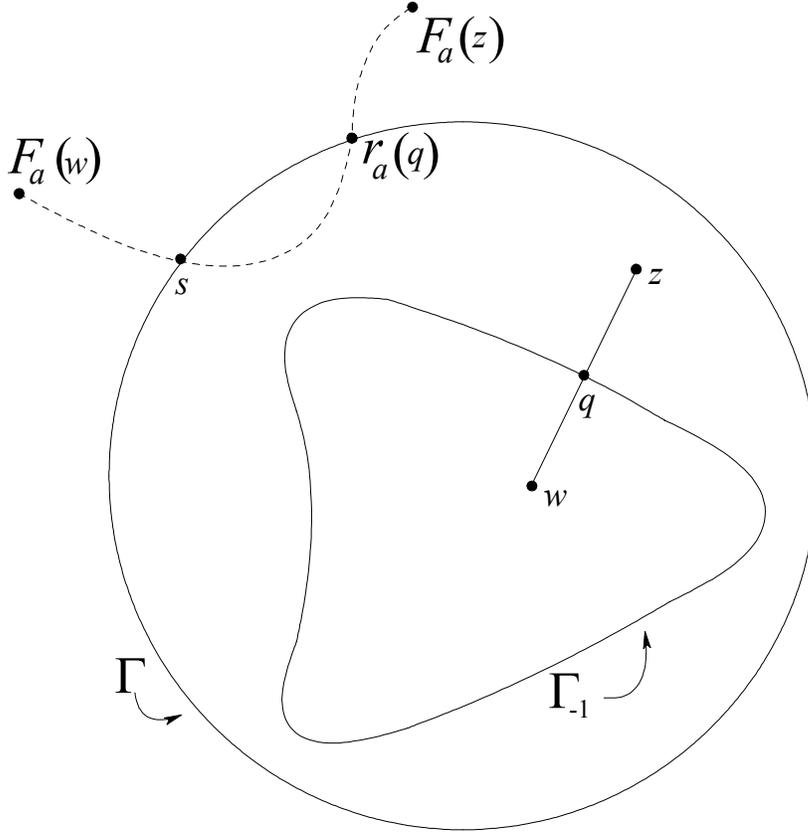


figura 2.7.

Como  $q$  no es un punto singular de  $F_a$  y  $\gamma'(t) \neq 0 \forall t$ , la curva  $\beta(t) = F_a(\gamma(t))$  cruza transversalmente a  $\Gamma$  en  $F_a(q)$ . Si  $F_a(w)$  no estuviera en  $intV_r$ , como  $F_a(z) \notin V_r$  y  $\beta(t)$  cruza  $\Gamma$  al pasar por  $F_a(q)$ , cerca de este punto -  $F_a(q)$  - una parte de  $\beta(t)$  entra en  $V_r$  y, por lo menos una vez, debe volver a cruzar  $\Gamma$  en algún punto  $s$  para llegar a  $F_a(w)$ . Entonces,  $s \in \Gamma$  provendría de un punto de la forma  $\gamma(t_1) \in \Gamma_{-1}$  para algún  $t_0 \neq t_1 \in (0, 1)$ , lo cual es imposible. En conclusión,  $F_a(w)$  necesariamente es un elemento de  $intV_r$ . Por lo tanto,  $W \subseteq F_a^{-1}(intV_r) \subseteq F_a^{-1}(V_r)$ . Esto prueba el inciso (iii), es decir que  $F_a^{-1}(V_r) = V_r - A \cup \Gamma$ .

Para (iv), como  $W \cup \Gamma_{-1} = V_r - A \cup \Gamma$ , tenemos que  $F_a^{-1}(V_r) = W \cup \Gamma_{-1}$ . En consecuencia,  $W = \text{int}F_a^{-1}(V_r)$  dado que  $W$  es evidentemente el mayor conjunto abierto contenido en  $W \cup \Gamma_{-1}$ . Por otra parte, sabemos ya que  $W \subseteq F_a^{-1}(\text{int}V_r)$  y como  $F_a^{-1}(\text{int}V_r)$  es abierto, se sigue que  $F_a^{-1}(\text{int}V_r) \subseteq W$ . Por lo tanto,  $F_a^{-1}(\text{int}V_r) = W$ . Es decir,  $\text{int}F_a^{-1}(V_r) = \text{int}F_a^{-1}(V_r)$ . En consecuencia, a su vez,  $\Gamma_{-1} = F_a^{-1}(\partial V_r) = \partial F_a^{-1}(V_r)$ .

Una vez demostrado que la curva  $\Gamma_{-1}$  es simple cerrada, la afirmación (v) es mera consecuencia de un conocido teorema de Jordan, implícitamente usado ya varias veces en este trabajo.  $\square$

El lema 2.2.3 se puede generalizar de inmediato a imágenes inversas de todos los órdenes de  $V_r$ ,  $\Gamma$  y el anillo  $A$ . En forma precisa nos referimos a lo siguiente:

**Lema 2.2.4** (Generalización del lema 2.2.3) Sean  $r > 1 + 2|a|$  y  $k \geq 2$ . Entonces

(vi)  $\Gamma_{-k}$  es una curva simple cerrada contenida en  $F_a^{-k}(V_r)$ , y a su vez,  $\Gamma_{-k} \subset B_a(\infty)$ .

(vii) Sea  $A_k$  el anillo (abierto) comprendido entre  $\Gamma_{-k-1}$  y  $\Gamma_{-k}$ . Entonces:  $A_k = F_a^{-1}(A_{k-1})$  y  $A_k \subset B_a(\infty)$ .

(viii)  $F_a^{-k}(V_r) = F_a^{-k+1}(V_r) - A_{k-1} \cup \Gamma_{-k+1}$ .

(ix) La frontera y el interior del conjunto compacto  $F_a^{-k}(V_r)$  son, respectivamente,  $\Gamma_{-k}$  y  $F_a^{-k}(\text{int}V_r)$ . Se cumple, entonces, que

$$F_a^{-k}(\text{int}V_r) = \text{int}F_a^{-k}(V_r) \text{ y } F_a^{-k}(\partial V_r) = \partial F_a^{-k}(V_r).$$

(x) Como  $\Gamma_{-k}$  es una curva simple cerrada, se sigue que  $F_a^{-k}(V_r)$  es un compacto, conexo, y simple conexo.

La demostración de esta generalización es esencialmente la misma que la del lema 2.2.3 y omitimos los detalles.

Nótese que por (2.6),  $F_a^{-k}(V_r) \subset \text{int}V_r$  y por (vi) y (vii),  $A_{k-1} \cup \Gamma_{-k+1} \subset B_a(\infty)$ ,  $k \geq 2$ .

Finalmente, con todo lo anterior obtenemos como corolario el resultado más importante de esta sección.

**Teorema 2.2.5** Si  $L_{-1}(a) \subset K_a$ , entonces  $K_a$  es conexo.

*Demostración:* Sea  $r > 1 + 2|a|$ . Como  $K_a = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_a^{-k}(V_r)$  y por lo expuesto hasta aquí  $\{F_a^{-k}(V_r)\}$  forma una sucesión anidada decreciente de conjuntos conexos y compactos, el resultado se sigue.  $\square$

## 2.3. Conjuntos de Julia desconexos.

Supongamos ahora que  $L_{-1}(a) \subset B_a(\infty)$ .

A partir de esta hipótesis es inmediato concluir que  $K_a$  es desconexo: Esto es así porque el origen y sus tres imágenes inversas distintas de 0, que son  $-2u_{-1}^*$ ,  $-2v_{-1}^*$  y  $-2t_{-1}^*$ , están en  $K_a$  y mientras que el origen queda dentro del disco de radio  $|a|$ , dichas imágenes inversas quedan fuera de éste. Así, la circunferencia singular “desconecta” obviamente a  $K_a$ .

La conjetura en este caso es que  $K_a$  no sólo es desconexo sino un conjunto de Cantor. Aquí demostraremos un resultado algo más débil: Que, bajo la hipótesis mencionada,  $K_a$  tiene una infinidad de componentes.

Empezaremos con un caso particular: supondremos que la primera iteración de  $L_{-1}(a)$ , es decir, la hipocicloide  $L(a)$ , cae en el exterior del disco cerrado  $\mathbb{D}_a$ . Esto significa que  $\mathbb{D}_a \subset Z_4(a)$ . Esta situación ocurre si, y sólo si,  $|a| > 1 + \sqrt{2}$ .

Sabemos que  $\{F_a^{-k}\mathbb{D}_a\}$  es siempre una sucesión anidada decreciente de compactos y que  $K_a = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(\mathbb{D}_a)$ .

En particular, como  $\mathbb{D}_a \subset Z_4(a)$ ,  $F^{-1}(\mathbb{D}_a)$  consta de cuatro componentes (compactos conexos ajenos), todas contenidas en  $F_a^{-1}(Z_4(a)) \cap \mathbb{D}_a$ .

Denotando, como en el capítulo anterior, por  $A_0(a)$ ,  $A_1(a)$ ,  $A_2(a)$  y  $A_3(a)$  a las 4 componentes de  $F_a^{-1}(Z_4(a))$ , cada una de las componentes de  $F_a^{-1}(\mathbb{D}_a)$  queda contenida en  $A_i(a)$ , para sólo un  $i = 0, 1, 2, 3$ . Como  $F_a^{-1}(\mathbb{D}_a) \subset \mathbb{D}_a \subset Z_4(a)$ , tenemos que  $F_a^{-2}(\mathbb{D}_a)$  tiene 16 componentes contenidas, de 4 en 4, en cada componente de  $F_a^{-1}(\mathbb{D}_a)$ . Continuando de esta manera,  $F_a^{-k}(\mathbb{D}_a)$  consta  $4^k$  de componentes ajenas contenidas, de cuatro en cuatro, en las  $4^{k-1}$  componentes ajenas de  $F_a^{-k+1}(\mathbb{D}_a)$  (ver fig. 2.8).

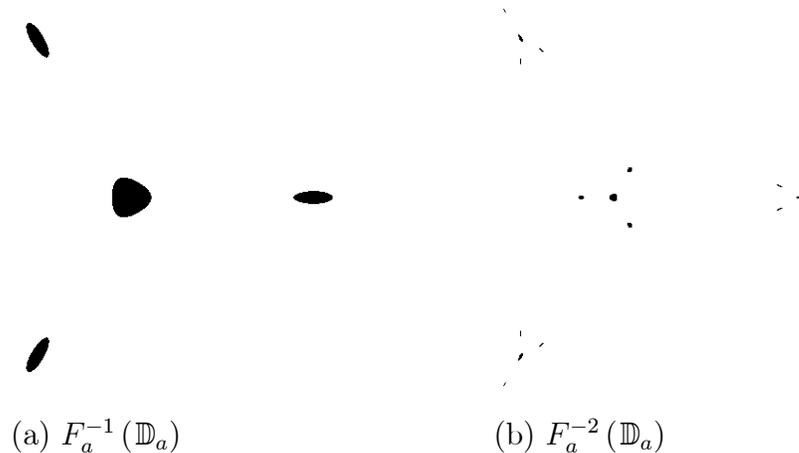


Figura 2.8: componentes de  $F_a^{-k}(\mathbb{D}_a)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $|a| > 1 + \sqrt{2}$ .

Estamos claramente ante un proceso “tipo Cantor”, del cual se desprende que  $K_a$  es disconexo y tiene una infinidad no numerable de componentes.

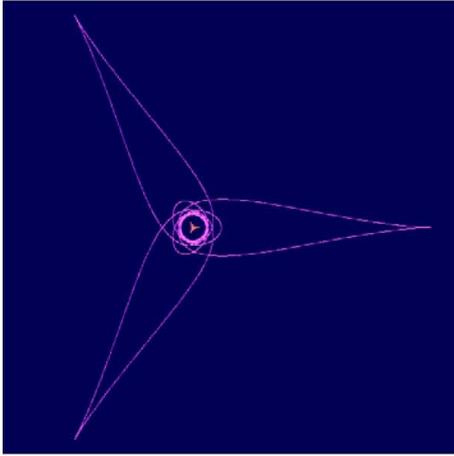
Para el caso general, como  $L_{-1}(a) \subset B_a(\infty)$ , alguna iteración de  $L_{-1}(a)$  cae totalmente fuera de  $\mathbb{D}_a$ ; digamos que  $F_a^j(L_{-1}(a))$ , para cierto  $j \in \mathbb{N}$ , es esa iteración.

Entonces, necesariamente  $F_a^{j-1}(Z_4(a)) \supseteq \mathbb{D}_a$ . Nótese que  $F_a^j(L_{-1}(a)) = F_a^{j-1}(L(a))$  es una curva que si  $j$  es grande, se cruza a si misma muchas veces. Esta curva no es la frontera de  $F_a^{j-1}(Z_4(a))$ , aunque contiene partes de dicha frontera (un ejemplo de esto se puede ver en las figuras 2.9).

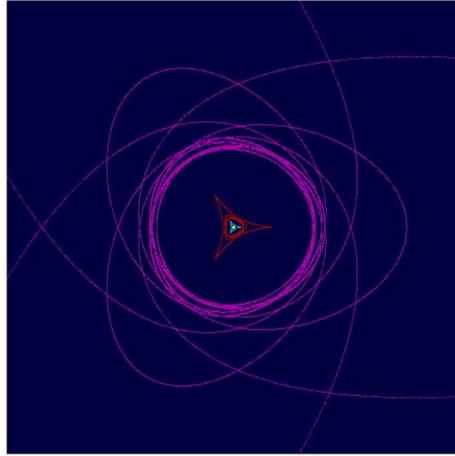
Por lo tanto,  $F_a^{-(j-1)}(\mathbb{D}_a) \subseteq Z_4$ . A partir de este momento, las imágenes inversas de cada componente de  $F_a^{-(j-1)}(\mathbb{D}_a)$  empiezan un “proceso Cantoriano” semejante al descrito anteriormante y el resultado se sigue.

Lo dejamos asentado en el siguiente teorema.

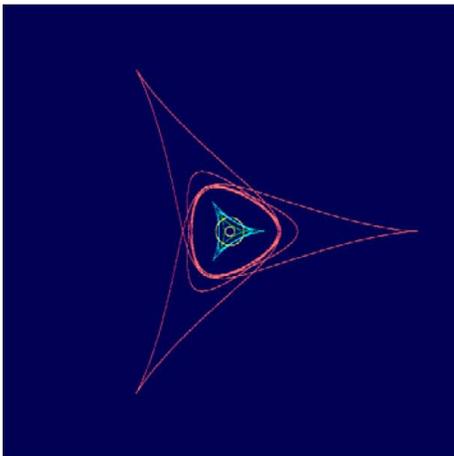
Si  $L_{-1}(a) \subset B_a(\infty)$ , el conjunto  $K_a$  es disconexo y tiene una infinidad no-numerable de componentes ajenas.



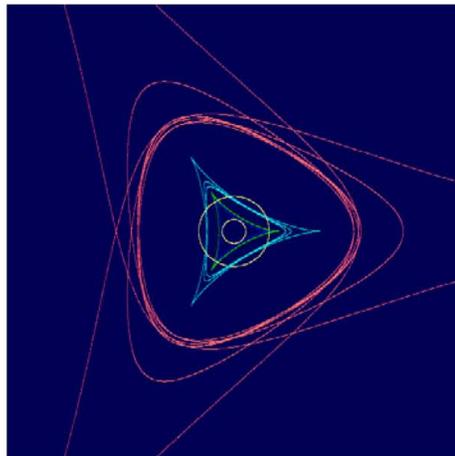
(a)



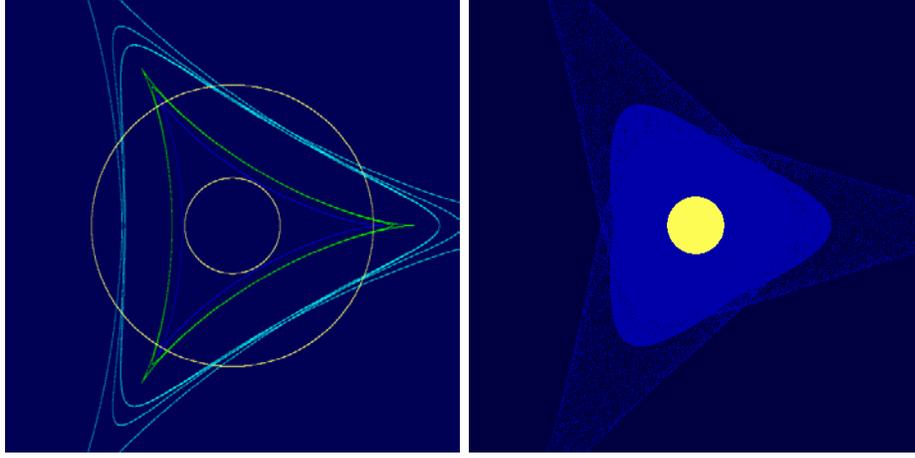
(b)



(c)



(d)



(e)

(f)

figuras 2.9: El parámetro es  $a = -1,5$  y se cumple que  $L_{-1}(a) \subset B_a(\infty)$  y  $|a| < 1 + \sqrt{2}$ . En estas figuras se muestran iteraciones varias de  $L_{-1}(a)$  incluyendo el momento en que una de ellas,  $L_3$ , es una curva totalmente en el exterior del disco  $\mathbb{D}_a$  (el radio de este disco es  $3,1$ ).

En (a) destaca  $L_4$ , la quinta iteración de  $L_{-1}(a)$ , en el rectángulo  $[-1300, 1800] \times [-1500, 1500]$ ; el contraste entre esta iteración y las previas (al centro de la figura) da idea de la rapidez con que las órbitas divergen a  $\infty$ . En (b) tenemos un acercamiento al centro de la región anterior (ahora estamos en  $[-250, 250] \times [-250, 250]$ ). En (c) el rectángulo es  $[-50, 50] \times [-50, 50]$  y ya no se ve  $L_4$ ; se ven aquí dos circunferencias: la menor es  $L_{-1}(a)$  y la mayor la frontera  $\mathbb{D}_a$ . En (d) el rectángulo es  $[-20, 20] \times [-20, 20]$  y, además de las primeras tres iteraciones y las circunferencias antes mencionadas, se aprecian todavía algunos arcos de  $L_3$ . En (e) la región es  $[-5, 5] \times [-5, 5]$  y aparecen, del centro hacia afuera,  $L_{-1}$ ,  $L$ ,  $L_1$  y  $L_2$  y la frontera de  $\mathbb{D}_a$  intersectando a estas tres últimas curvas. En (f) - una zona parecida a (e) - se esbozan  $F_a^3(Z_4(a))$  y  $\mathbb{D}_a$  y se nota cómo  $\partial F_a^3(Z_4(a)) \subset F_a^3(L(a))$ .

# Capítulo 3

## El excepcional caso $a = -1$

### 3.1. Aspectos Geométricos.

Para simplificar la notación en lo que sigue, a la función  $F_{-1}$ , al conjunto de valores críticos  $L(-1)$  y a su imagen inversa, el conjunto de puntos críticos  $L_{-1}(-1)$  y la hipocicloide  $L_{-1}^*(-1)$ , los denotaremos, respectivamente, por  $F$ ,  $L$ ,  $L_{-1}$  y  $L_{-1}^*$ .

De lo visto en el capítulo 1 se desprende que  $a = -1$  es el *único* parámetro para el cual se cumple que  $L_{-1}$  coincide con  $L$ . Esto tendrá importantes repercusiones, así que lo destacamos a continuación.

*Lema especial:* El parámetro  $a = -1$  es el único para el cual se cumple que la hipocicloide  $L_{-1}^*(a)$  coincide con la hipocicloide  $L(a)$

*Demostración:* Se sigue directamente de las características geométricas de ambas hipocicloides.  $\square$

**Corolario 3.1.1** *El conjunto de valores críticos,  $L$ , es invariante hacia adelante bajo  $F$ ; es decir,  $F(L) = L$ .*

*Demostración:* Como  $L_{-1}^* = L$ ,  $L = F(L_{-1}^*) = F(L)$ .  $\square$

Para  $a = -1$ , las familias de curvas  $\Phi_1(a)$  y  $\Phi_2(a)$  (ver sección 1.2) *coinciden* y, por lo tanto, se vuelven *una sola familia invariante*. Examinaremos con más detalle este punto.

Para  $a = -1$  denotaremos a estas familias simplemente por  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ .

Para cada  $r \in \mathbb{R}$ , considérese la curva

$$\varphi_r = \{z = re^{i\theta} + e^{-i2\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}. \quad (3.1)$$

Esta curva es la dada por (1.9) para  $a = -1$ . Es decir, para este valor del parámetro,  $\{\varphi_r : r \in \mathbb{R}\} = \Phi_1$ . Nótese que, en particular,  $L_{-1}^* = L = \varphi_2$  y, por lo tanto, a diferencia de otros valores del parámetro, en este caso  $L$  es miembro de la familia  $\Phi_1$ . Nótese además, que  $L_{-1} = \varphi_0 \in \Phi_1$  y  $\varphi_{-r} = \varphi_r$  para todo  $r \in \mathbb{R}$ .

Por otra parte,  $\Phi_2$  es la familia de curvas  $\{F(\varphi_r)\}$  donde

$$F(\varphi_r) = \{(r^2 - 2)e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

**Proposición 3.1.2** *Para  $a = -1$  se cumple que  $\Phi_1 = \Phi_2$ .*

*Demostración:* Sea  $s \in \mathbb{R}$  y considérese  $\varphi_s \in \Phi_1$ . Tómese  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Entonces,

$$F(\varphi_s) = (s^2 - 2)e^{i2\theta} + e^{-i4\theta}.$$

Si  $\gamma = 2\theta$  y  $t = s^2 - 2$ , tenemos

$$F(se^{i\theta} + e^{-i2\theta}) = te^{i\gamma} + e^{-i2\gamma}.$$

Por lo tanto,  $F(\varphi_s) = \varphi_t \in \Phi_1$ . Esto prueba que  $\Phi_2 \subseteq \Phi_1$ . Ahora, si  $\varphi_t \in \Phi_1$ , como  $\varphi_t = \varphi_{-t}$ , podemos suponer  $t > 0$ . Sea  $r = \sqrt{t+2}$ ; entonces  $r^2 - 2 = t$  y  $\varphi_t = F(\varphi_r) \in \Phi_2$ . Esto prueba que  $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$  y por lo tanto  $\Phi_1 = \Phi_2$ .  $\square$

A la familia  $\Phi_1 = \Phi_2$  la denotaremos simplemente por  $\Phi$ .

**Corolario 3.1.3** *La familia  $\Phi$  es invariante bajo  $F$*

*Demostración:* En general, una familia de curvas  $\Upsilon$  es invariante bajo  $F$  si  $F(\gamma) \in \Upsilon$  para todo  $\gamma \in \Upsilon$ , y a la vez, cada  $\alpha \in \Upsilon$  es de la forma  $F(\gamma) = \alpha$  para alguna  $\gamma \in \Upsilon$ . El corolario se sigue directamente de las propiedades generales de las familias  $\Phi_1(a)$  y  $\Phi_2(a)$  establecidas en la sección 1.2.  $\square$

Presentamos a continuación, en la fig. 3.1, algunos elementos  $\varphi_r \in \Phi$ , los correspondientes a  $r = 3, 2, 1.5, 1, 0.5$ .

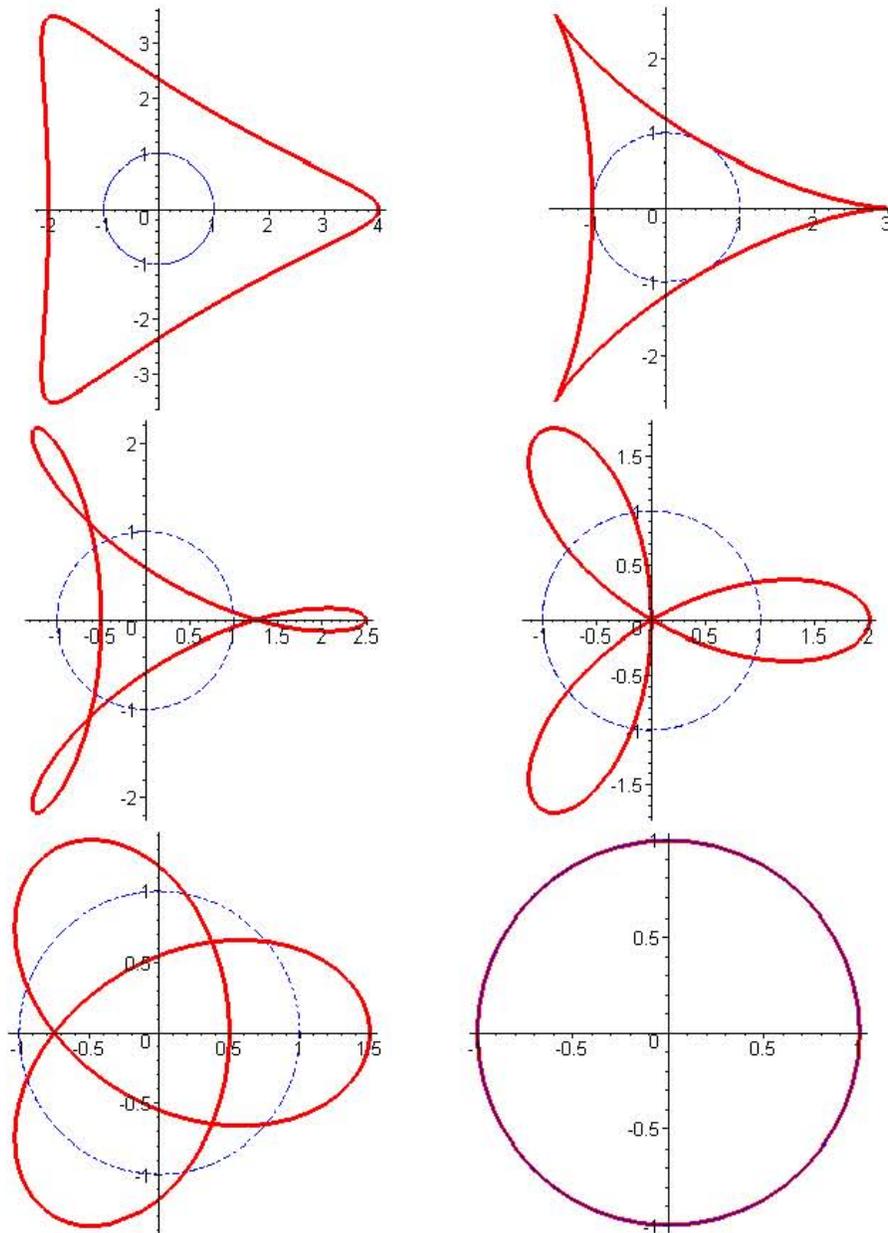


figura 3.1. De izquierda a derecha y de arriba a abajo, curvas  $\varphi_r$  para  $r = 3, 2, 1.5, 1, 0.5$  y  $0$ .

Sea  $K$  el conjunto de Julia lleno para  $F$  y  $B(\infty)$  la cuenca de atracción de  $\infty$ . Denotemos respectivamente por  $A$  a la componente acotada y por  $R$

a la componente no acotada de  $\mathbb{C} \setminus L_{-1} \equiv \mathbb{C} \setminus L$ . Nótese que como  $L_{-1}^* = L$ , entonces  $A = Z_4$ ,  $\overline{A} = A \cup L_{-1}^* = A \cup L = Z_4 \cup L = \overline{Z_4}$ , y  $R = Z_2$ .

Una de las primeras consecuencias importantes de las proposiciones anteriores es el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.4** .  $B(\infty) = Z_2$  y  $K = \overline{Z_4}$ .

*Demostración:* Nótese que todo punto del plano pertenece a  $\varphi_s$  para algún  $s$ . De las propiedades generales de esta familia de funciones se deduce que  $\varphi_s \subset \overline{A}$  ( $= \overline{Z_4}$ ) si  $s \in [-2, 2]$  y  $\varphi_s \subset R$  ( $= Z_2$ ) si  $s \notin [-2, 2]$ . Además,  $\varphi_s$  es una curva simple cerrada siempre que  $s \geq 2$ , y si  $2 \leq s < u$ , entonces  $\varphi_s \cap \varphi_u = \emptyset$ .

Como  $F(\varphi_s) = \varphi_{s^2-2}$ , si  $z \in \varphi_s$  con  $-2 \leq s \leq 2$ , entonces  $F(z) \in \varphi_t$  con  $-2 \leq t = s^2 - 2 \leq 2$ , por lo que, en este caso, tanto  $\varphi_s$  como  $\varphi_t$  están contenidas en  $\overline{A}$  ( $= \overline{Z_4}$ ).

Por otra parte, si  $z \in \varphi_s$  con  $s \notin [-2, 2]$ , tenemos que  $F(z) \in \varphi_t$  con  $t = s^2 - 2 > |s|$ ; escribamos, en este caso,  $\zeta(s) = s^2 - 2$ . Se sigue, entonces, que  $F^n(z) \in \Lambda_{\zeta^n(s)}$  y  $|F^n(z)| \geq \zeta^n(s) - 1$ . Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |F^n(z)| = \infty$ .

O sea que dado  $z \in \mathbb{C}$ , tenemos que  $o(z, F)$  es acotada si  $z \in \varphi_s$  para  $s \in [-2, 2]$ , y no es acotada si  $z \in \varphi_s$  para algún  $s \notin [-2, 2]$ .

Por lo tanto,  $z \in K$  si, y sólo si,  $z \in \varphi_s$  para algún  $s \in [-2, 2]$ , es decir, si y sólo si  $z \in \overline{A} = \overline{Z_4}$ . Por otro lado,  $z \in B(\infty)$  si, y sólo si,  $z \in \varphi_s$  para algún  $s \notin [-2, 2]$  y, por lo tanto, si y sólo si,  $z \in R = Z_2$ .

En conclusión,  $\overline{A} = \overline{Z_4} = K$  y  $B(\infty) = R = Z_2$ .  $\square$

## 3.2. Conjugación de $F$ con la función cuadrática

$$f(z) = z^2$$

Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z^2$ . En el capítulo anterior demostramos que, para  $a \in \mathbb{C}$ ,  $F_a : \mathbb{C} - A(a) \rightarrow \mathbb{C} - Z_4$  es equivalente a  $f : \mathbb{C} - D_a \rightarrow \mathbb{C} - D_{|a|^2}$ , donde  $A(a)$  denota la componente acotada de  $\mathbb{C} - L_{-1}^*(a)$ .

Si  $a = -1$  tenemos  $\mathbb{C} - A(a) = \mathbb{C} - Z_4 = \mathbb{C} - \text{int}(K)$  y  $D_{|a|} = D_{|a|^2}$ . Denotaremos a este disco abierto unitario simplemente por  $D$ . En esta sección demostraremos que  $f|_{\mathbb{C} \setminus \text{int}(D)}$  y  $F|_{\mathbb{C} \setminus \text{int}(K)}$  no sólo son equivalentes sino que son conjugadas.

Lo ideal sería que las funciones  $G_a$  y  $H_a$  que en el caso general nos dan la equivalencia mencionada (ver teorema 1.3.1, capítulo 1), en el caso particular

$a = -1$  nos dieran la conjugación que hemos dicho; es decir, que  $G_a \equiv H_a$ . Lamentablemente no es así. Habrá que hacer trabajo adicional, como explicamos a continuación.

Para empezar, nótese que el intervalo  $[3, \infty) \subset \mathbb{R}$  es invariante bajo  $F$  y el intervalo  $[1, \infty) \subset \mathbb{R}$  es invariante bajo  $f$ . Además,  $F|_{[3, \infty)} : [3, \infty) \rightarrow [3, \infty)$  es un homeomorfismo,  $F|_{[3, \infty)}(x) = x^2 - 2x$ ,  $F|_{[3, \infty)}(3) = 3$ , y dado  $x > 3$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F|_{[3, \infty)})^n(x) = \infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} (F|_{[3, \infty)})^{-n}(x) = 3.$$

El siguiente lema establece que la dinámica de  $F|_{[3, \infty)}$  en  $[3, \infty)$  es, esencialmente igual a la de  $f$  restringida a  $[1, \infty)$ . La demostración se basa en un procedimiento bien conocido así que se omiten los detalles de la misma (ver página 55 de [11]).

**Lema 3.2.1** *Existe un homeomorfismo  $h : [1, \infty) \rightarrow [3, \infty)$  tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} [1, \infty) & \xrightarrow{f|_{[1, \infty)}} & [1, \infty) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ [3, \infty) & \xrightarrow{F|_{[3, \infty)}} & [3, \infty) \end{array}$$

Esto es, para cada  $x \in [1, \infty)$ ,  $h(x^2) = (h(x))^2 - 2h(x)$ .  $\square$

Con  $h$  a la mano, definimos una función

$$H : \mathbb{C} \setminus \text{int}(D) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \text{int}(K)$$

de la siguiente manera: Tómesese  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho \geq 1$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ; sea

$$H(\rho e^{i\theta}) = (h(\rho) - 1)e^{i\theta} + e^{-i2\theta}.$$

Puesto de otro modo, si  $|z| > 1$ ,  $H$  está definida por

$$H(z) = (h(|z|) - 1) \frac{z}{|z|} + \frac{\bar{z}}{z}. \quad (3.3)$$

Nótese que  $H$  transforma circunferencias en miembros de la familia  $\Phi$ . En particular,  $H(S^1) = L$ . Y como  $h(\rho) - 1 \geq 2$ , se sigue que la imagen de la circunferencia  $\rho e^{i\theta}$  bajo  $H$  es una curva simple cerrada. En consecuencia,  $H$  es uno a uno. Es fácil ver que  $H$  también es continua y suprayectiva.

**Teorema 3.2.2** *El siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \text{int}(D) & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \setminus \text{int}(D) \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ \mathbb{C} \setminus \text{int}(K) & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \setminus \text{int}(K) \end{array} .$$

Es decir,  $f|_{\mathbb{C} \setminus \text{int}(D)}$  es conjugada a  $F|_{\mathbb{C} \setminus \text{int}(K)}$ .

*Demostración:* Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| \geq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} H(f(z)) &= H(z^2) = (h(|z^2|) - 1) \frac{z^2}{|z^2|} + \frac{\overline{z^2}}{z^2} \\ &= (h(|z|^2) - 1) \frac{z^2}{|z|^2} + \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2 \\ &= ((h(|z|))^2 - 2h(|z|) - 1) \frac{z^2}{|z|^2} + \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2 . \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} F(H(z)) &= F\left((h(|z|) - 1) \frac{z}{|z|} + \frac{\overline{z}}{z}\right) \\ &= (h(|z|) - 1)^2 \frac{z^2}{|z|^2} + 2(h(|z|) - 1) \frac{z}{|z|} \frac{\overline{z}}{z} + \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2 \\ &\quad - 2\left((h(|z|) - 1) \frac{\overline{z}}{|z|} + \frac{z}{\overline{z}}\right) \\ &= (h(|z|) - 1)^2 \frac{z^2}{|z|^2} + \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2 - 2\frac{z}{\overline{z}} \\ &= ((h(|z|))^2 - 2h(|z|) + 1) \frac{z^2}{|z|^2} + \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2 - 2\frac{z}{\overline{z}} \\ &= ((h(|z|))^2 - 2h(|z|) - 1) \frac{z^2}{|z|^2} + \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2 . \quad \square \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  en  $\mathbb{C} \setminus \text{int}(\mathbb{D})$  es conjugada con  $F$  en  $\mathbb{C} \setminus \text{int}(K)$ . Obsérvese que en particular,  $f$  en  $S^1$  es conjugada con  $F$  en  $L$ .  $\square$

**Corolario 3.2.3**  $F : L \rightarrow L$  es caótica en el sentido propuesto por Devaney.

*Demostración:* Se sigue de que  $f$  en  $S^1$  es conjugada con  $F$  en  $L$  y  $f$  es caótica en  $S_1$ .  $\square$

Para las funciones cuadráticas holomorfas  $f_c(z) = z^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , en el exterior del conjunto de Julia lleno la dinámica es conjugada con la de  $f(z) = z^2$  en el exterior de  $D$ . Por un teorema de Carathéodory, esta conjugación puede extenderse continuamente a la frontera del Julia lleno -es decir, al conjunto de Julia- si y sólo si dicha frontera es localmente conexo. Como hemos visto, para  $F_a$  con  $a = -1$  ocurre una situación enteramente análoga: La dinámica en el exterior de  $K$  es conjugada con la de  $f(z) = z^2$  en el exterior de  $D$ . Como la frontera de  $K$  es la hipocicloide  $L$  y evidentemente es localmente conexa, la conjugación puede extenderse continuamente a  $\partial K = L$ , como lo muestra la propia definición de  $H$  ( ver (3.3)).

Sin embargo, también hay contrastes: Veremos en lo que sigue que para  $a = -1$  la dinámica en el interior del Julia lleno  $K$  no se asemeja a la dinámica de las funciones holomorfas en el interior del correspondiente conjunto de Julia lleno (cuando dicho interior es no vacío). Veremos que este contraste también puede extenderse a otros miembros de la familia  $F_a$ .

En lo que resta del capítulo nos dedicamos a examinar la dinámica de  $F$  en  $K$ .

Para ello, vamos a empezar por construir un *modelo* de esta dinámica basándonos en la siguiente observación: Para  $a = -1$ , el conjunto de puntos críticos  $L_{-1}$  divide al conjunto de Julia lleno  $K = \overline{Z}_4$  en 4 subconjuntos compactos conexos  $\overline{A_0}$ ,  $\overline{A_1}$ ,  $\overline{A_2}$ , y  $\overline{A_3}$ , cada uno de los cuales, bajo  $F$ , se transforma biyectivamente en  $K$  (ver sección 1.4). Al disco cuya frontera es  $L_{-1}$  lo llamamos  $A_0$ ; a los demás conjuntos  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , los hemos situado como en la fig. 1.10. A la función  $F$  la podemos pensar como sigue: de alguna manera los “dobla” a los conjuntos  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y los “encima” sobre  $A_0$  y después, la función  $F$  “expande” todo y lo convierte en  $K$ .

### 3.3. Un Triángulo Caótico.

En esta sección se definirá una función auxiliar  $G$ , lineal por partes, definida en un triángulo equilátero  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ :  $G : \Delta \rightarrow \Delta$ . Presentaremos algunas propiedades dinámicas importantes de  $G$ , en particular, que  $G$  es caótica en el sentido de Devaney. En la sección siguiente demostraremos que  $G$  en  $\Delta$  y  $F$  en  $K$  son conjugadas.

Sea

$$\Delta = \left\{ (x, y) : x \in [-1, 2], \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(2-x) \right\}.$$

Subdividimos  $\Delta$  en los siguientes cuatro triángulos equiláteros (ver figura 3.2):

$$\Delta_0 = \left\{ (x, y) : x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \right\},$$

$$\Delta_1 = \left\{ (x, y) : x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(2-x) \right\},$$

$$\Delta_2 = \left\{ (x, y) : x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}(2-x) \right\},$$

$$\Delta_3 = \left\{ (x, y) : x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2) \leq y \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \right\}.$$

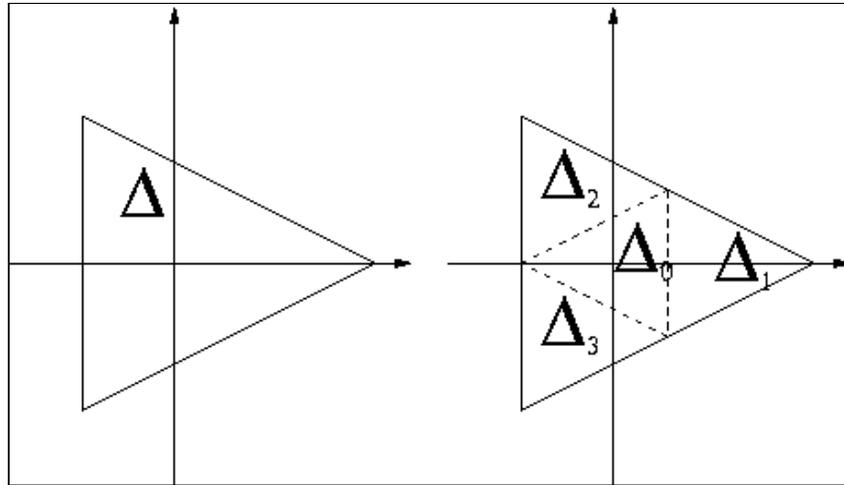


figura 3.2

Antes de detallar la regla de correspondencia de  $G$ , damos una descripción geométrica de su acción en  $\Delta$ . Primero, para  $i = 1, 2, 3$ , se dobla el triángulo  $\Delta_i$  sobre  $\Delta_0$ , manteniendo fijo el segmento  $\Delta_i \cap \Delta_0$ . Denotemos por  $G_1$  este “doblado por partes” de los tres triángulos  $\Delta_i$ . En segundo lugar, se refleja

$\Delta_0 = G_1(\Delta_i)$  respecto al  $ejeY$ ; denotemos a esta reflexión por  $G_2$ . Finalmente, agrandamos linealmente el triángulo reflejado por un factor igual a 2. La función  $G : \Delta \rightarrow \Delta$  se define, entonces como  $G = G_3 \circ G_2 \circ G_1$ , donde  $G_3$  es la recién mencionada expansión lineal (figura 3.3).

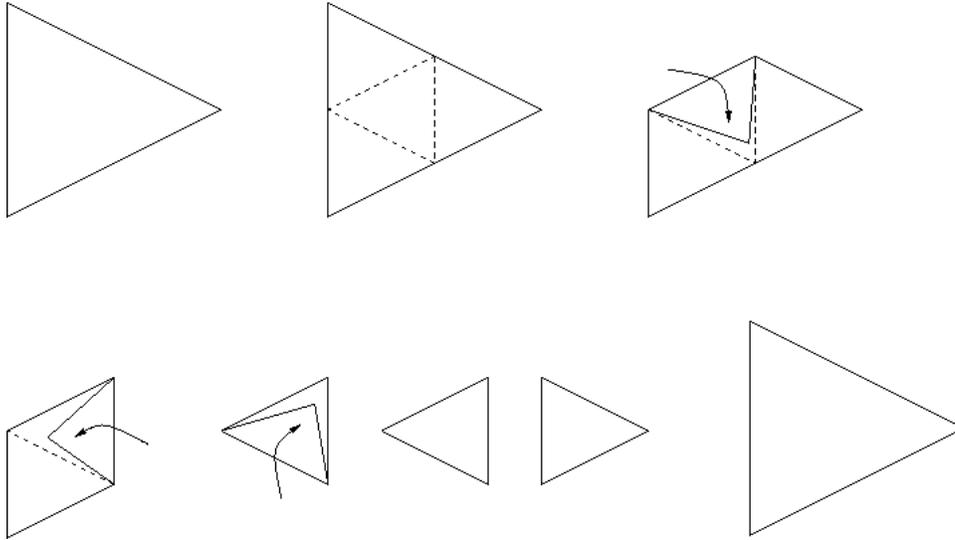


figura 3.3

Sea  $(x, y) \in \Delta$ . Definimos  $G : \Delta \rightarrow \Delta$  como la transformación lineal por partes dada por

$$G(x, y) = \begin{cases} (-2x, 2y) & \text{si } (x, y) \in \Delta_0 \\ (2x - 2, 2y) & \text{si } (x, y) \in \Delta_1 \\ (1 - x - \sqrt{3}y, \sqrt{3} + \sqrt{3}x - y) & \text{si } (x, y) \in \Delta_2 \\ (1 - x + \sqrt{3}y, \sqrt{3} + \sqrt{3}x + y) & \text{si } (x, y) \in \Delta_3 \end{cases} .$$

**NOTA:** Es un hecho que los “dobletes”, la “reflexión” y la “expansión” arriba descritas producen exactamente el mismo resultado si se realizan en el orden que sea, así que hay otras maneras de describir la acción de  $G$ .

**Proposición 3.3.1** *El conjunto  $Per(G)$  es denso en  $\Delta$ .*

*Demostración:* En  $\Delta$  tenemos cuatro triángulos equiláteros  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$  y  $\Delta_3$ , tales que  $\Delta = \cup_{i=0}^3 \Delta_i$ , y  $G(\Delta_i) = \Delta$ ,  $0 \leq i \leq 3$ . Para cada  $i$  fijo existen

cuatro triángulos equiláteros  $\Delta_{0,i}$ ,  $\Delta_{1,i}$ ,  $\Delta_{2,i}$  y  $\Delta_{3,i}$ , tales que  $\Delta_{j,i} \subset \Delta_j$  y  $G(\Delta_{j,i}) = \Delta_i$ . Ahora, para cada par  $j, i$  fijo, existen cuatro triángulos equiláteros  $\Delta_{0,j,i}$ ,  $\Delta_{1,j,i}$ ,  $\Delta_{2,j,i}$  y  $\Delta_{3,j,i}$ , tales que  $\Delta_{k,j,i} \subset \Delta_k$ ,  $G(\Delta_{k,j,i}) = \Delta_{j,i}$  y  $G^2(\Delta_{k,j,i}) = \Delta_i$ . Continuando de esta manera, llegamos a lo siguiente: dado  $n \in \mathbb{N}$ , considérese el conjunto

$$\mathcal{M}_n = \{w = (w_1, w_2, \dots, w_n) : w_i \in \{0, 1, 2, 3\}\}.$$

Para cada  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  en  $\mathcal{M}_n$ , existe un triángulo equilátero en  $\Delta$ , a saber  $\Delta_w = \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n} \subset \Delta_{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}}$ , tal que

$$G^j(\Delta_{w_1, w_2, \dots, w_n}) = \Delta_{w_{j+1}, \dots, w_n}, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

y  $G^n(\Delta_w) = \Delta$ .

Nótese que cada  $G^j|_{\Delta_w} : \Delta_w \rightarrow \Delta_{w_{j+1}, \dots, w_n}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , es un homeomorfismo que multiplica por  $2^j$  la distancia entre cualesquiera dos puntos en  $\Delta_w$ . Además, la longitud de los lados de cada triángulo  $\Delta_w$  es  $\frac{1}{2^n}(2\sqrt{3})$ , el área de  $\Delta_w$  es  $\frac{a}{4^n}$  donde  $a$  es el área de  $\Delta$  y  $\Delta = \cup_{w \in \mathcal{M}_n} \Delta_w$ .

Dado  $(x, y) \in \Delta$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  y  $w \in \mathcal{M}_n$  tal que  $\Delta_w \subset B_\varepsilon(x, y) \cap \Delta$ . Como  $G^n : \Delta_w \rightarrow \Delta$  es un homeomorfismo expansivo, la inversa correspondiente es una contracción y por lo tanto tiene un punto fijo; en consecuencia, existe un punto  $(u, v) \in \Delta_w$  tal que  $G^n(u, v) = (u, v)$ .  $\square$

*Algunas consecuencias adicionales interesantes de la definición de  $G$ :* Nótese que la frontera de  $\Delta$  es invariante hacia adelante bajo  $G$ ,  $G(\partial\Delta) = \partial\Delta$ . Ahora, tómesese  $(x, y) \in \text{Per}(G) \cap \text{int}(\Delta)$  de periodo  $n$ . Entonces,

$$o((x, y), G) \subset \text{int}(\Delta) \setminus G^{-1}(\partial\Delta).$$

Como en  $\text{int}(\Delta) \setminus G^{-1}(\partial\Delta)$  la transformación  $G$  es una expansión lineal por un factor igual a 2, entonces  $G$  es diferenciable en cada punto de  $o((x, y), G)$  y los eigenvalores de  $DG_{(x,y)}^n$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , satisfacen  $|\lambda_1| = 2^n = |\lambda_2|$ . Por lo tanto, cada punto periódico de  $G$  que está en el interior de  $\Delta$  es expansivo, es decir, es un *repulsor*.

De hecho, si  $(x, y) \in \text{Per}(G) \cap \text{int}(\Delta)$ , entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x, y) \notin G^{-n}(\partial\Delta)$ ; es decir,

$$(x, y) \in \Delta \setminus G^{-n}(\partial\Delta) = U_n.$$

El conjunto  $U_n$  es abierto y denso en  $\Delta$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y la órbita entera del punto periódico  $(x, y)$  está contenida en el conjunto

$$U_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n,$$

que, de acuerdo con un teorema de Baire, es denso en  $\Delta$ . Además,  $U_\infty$  es invariante bajo  $G$ ,  $G(U_\infty) = U_\infty$ .

**Proposición 3.3.2**  *$G$  es transitiva en  $\Delta$ .*

*Demostración.*: Sean  $U$  y  $W$  dos subconjuntos abiertos no vacíos de  $\Delta$ . Entonces, como se señaló en la demostración de la proposición previa, existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $w \in \mathcal{M}_n$  tales que  $\Delta_w \subset U$ . Se sigue que  $G^n(U) = \Delta$  y, por lo tanto, existe  $(u, v) \in U$  con  $G^n(u, v) \in W$ .  $\square$

Como corolario de lo anterior hemos demostrado, entonces, el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.3**  *$G$  es caótica en  $\Delta$  en el sentido propuesto por Devaney.*

## 3.4. Dinámica de $F$ en $K$ .

### 3.4.1. $G$ en $\Delta$ y $F$ en $K$ son conjugadas

El intervalo  $[-1, 2] \subset \mathbb{R}$  es invariante bajo  $G$ . Denotemos la restricción  $G|_{[-1, 2]}$  por  $g$ . Entonces, para cada  $x$  en  $[-1, 2]$ ,

$$g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in [-1, \frac{1}{2}] \\ 2x - 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$$

La gráfica de  $g$  recuerda la de una función muy conocida del intervalo  $[0, 1]$  en sí mismo: La *tienda de campaña* o, simplemente, *la tienda* (*tent map*):

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

**Lema 3.4.1** *Las funciones  $g$  y  $T$  son conjugadas.*

*Demostración:* Es fácil comprobar que  $l \circ g = T \circ l$  donde  $l : [-1, 2] \rightarrow [0, 1]$  está dada por  $l(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$ .  $\square$

El intervalo  $[-1, 3] \subset \mathbb{R}$  es invariante bajo  $F$ . Denotemos por  $\tau$  a  $F|_{[-1, 3]}$ ; es decir,  $\tau(x) = x^2 - 2x$ . Sea  $L : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la función logística,  $L(x) = 4x(1-x)$ .

**Lema 3.4.2** *Las funciones  $L$  y  $\tau$  son conjugadas.*

*Demostración:* Sea  $k : [0, 1] \rightarrow [-1, 3]$  definida por  $k(x) = 3 - 4x$ . Se sigue inmediatamente que  $k \circ L = \tau \circ k$ .  $\square$

Es bien sabido que  $T$  y  $L$  son conjugadas mediante el homeomorfismo

$$j(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

De otra forma, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{T} & [0, 1] \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ [0, 1] & \xrightarrow{L} & [0, 1] \end{array}$$

Los homeomorfismos  $l$ ,  $k$  y  $j$  nos permiten establecer que  $g$  y  $\tau$  son conjugadas. Es decir, restringidas respectivamente a los intervalos  $[-1, 2]$  y  $[-1, 3]$ , nuestro “modelo” lineal por partes  $G$  y la función  $F$  tienen esencialmente el mismo comportamiento dinámico.

**Lema 3.4.3** *Sea  $h : [-1, 2] \rightarrow [-1, 3]$  la función  $h = k \circ j \circ l$ . Explícitamente, si  $x \in [-1, 2]$ ,*

$$h(x) = -4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x\right)\right) + 3.$$

*Entonces,  $h \circ g(x) = \tau \circ h(x) \forall x \in [-1, 2]$ .*

*Demostración:* La demostración es inmediata por los lemas previos.  $\square$

Con ayuda de  $h$  vamos a producir un homeomorfismo de  $\Delta$  en  $K$  que nos permitirá demostrar la conjugación entre  $G$  y  $F$ .

Considérese la función  $H : \Delta \rightarrow H(\Delta)$  dado por

$$H(x, y) = (h(x) - 1) e^{i \frac{\pi y}{3\sqrt{3}}} + e^{-i \frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}}.$$

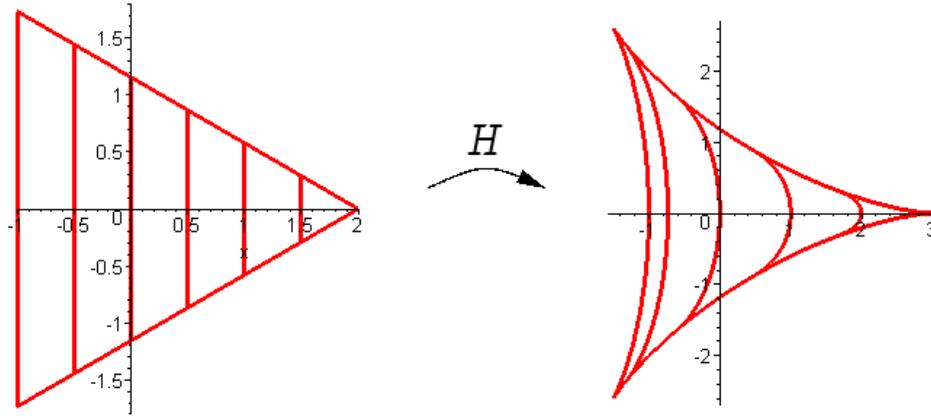


Figura 3.1: figura 3.4

Lo siguiente se comprueba directamente a partir de la definición de  $H$ :

i)  $H$  es continua y  $H(x, 0) = h(x)$ . Como  $x \in [-1, 2]$ ,  $H(x, 0) \in [-1, 3]$ .

ii) Para cada  $x \in [-1, 2]$  fijo,  $(x, y) \in \Delta$  pertenece a un segmento vertical y  $H(x, y)$  está en un subarco de una de las curvas de la familia  $\Phi$ , a saber,  $H(x, y) \in \Lambda_{h(x)-1}$ . En otras palabras,  $H$  manda cada intervalo  $\{x\} \times \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2), \frac{\sqrt{3}}{3}(2-x) \right]$ ,  $x \in [-1, 2]$ , suprayectivamente en el arco de  $\Lambda_{h(x)-1}$  que va del punto  $e^{i\frac{2\pi}{9}(x-2)} + e^{-i2\frac{2\pi}{9}(x-2)}$  al punto  $2e^{i\frac{2\pi}{9}(x-2)} + e^{-i2\frac{2\pi}{9}(x-2)}$ . Estos dos puntos están en la frontera de  $K$  (figura 3.4) Se concluye de esto que  $H$  es inyectiva y  $H(\Delta) = K$ .

iii) Sustituyendo  $h(x)$  en la formula de  $H(x, y)$ , tenemos:

$$H(x, y) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}(2-x)\right) e^{i\frac{\pi y}{3\sqrt{3}}} + e^{-i\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}}.$$

En consecuencia, en cada punto del interior de  $\Delta$ ,  $H$  es un difeomorfismo local.

**Teorema 3.4.4** *Las funciones  $F : K \rightarrow K$  y  $G : \Delta \rightarrow \Delta$  son conjugadas o, equivalentemente, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & \xrightarrow{G} & \Delta & & \\ H \downarrow & & \downarrow H & & \\ K & \xrightarrow{F} & K & & \end{array}$$

En virtud de la definición de  $G$ , la demostración de esta proposición está dividida en varios pasos, en función de si el punto  $(x, y)$  está en un triángulo  $\Delta_i$  o en otro. Aunque es bastante elemental, está llena de detalles, así que para no entorpecer demasiado la exposición, la demostración se encuentra en el apéndice 3A.

La principal consecuencia del teorema 3.4.4 es el siguiente corolario.

**Corolario 3.4.5** *La función  $F : K \rightarrow K$  es caótica en  $K$  en el sentido de Devaney.*

*Demostración:* Se sigue inmediatamente de la conjugación entre  $F : K \rightarrow K$  y  $G : \Delta \rightarrow \Delta$ .  $\square$

Otras consecuencias importantes del teorema 3.4.4 se exponen a continuación.

**Corolario 3.4.6** *Todo punto periódico de  $F$  perteneciente a  $int(K)$  es repulsor.*

*Demostración:* Sea  $(x, y) \in Per(F) \cap int(K)$  de periodo  $n$ . Como  $H \circ G = F \circ H$ ,  $H \circ G^n \circ H^{-1} = F^n$ .

Nótese que  $H^{-1}(x, y)$  es un punto periódico de  $G$  de periodo  $n$ . Además,

$$o(H^{-1}(x, y), G) \subset int(\Delta).$$

Ya sabemos que cada punto periódico de  $G$  que está en  $int(\Delta)$  es expansivo. Como  $H$  es un difeomorfismo local en cada punto de la órbita

$$o(H^{-1}(x, y), G),$$

los eigenvalores de  $DF^n$  en  $(x, y)$  son los mismos que los eigenvalores de  $DG^n$  en  $H^{-1}(x, y)$ .  $\square$

Si  $(x, y) \in Per(F) \cap int(K)$ , entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x, y) \notin F^{-n}(\partial K)$ ; es decir,

$$(x, y) \in K - F^{-n}(\partial K) = W_n.$$

El conjunto  $W_n$  es abierto y denso en  $K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y su frontera es la unión de imágenes inversas hasta de orden  $n$  de la frontera de  $K$ . La órbita entera del punto periódico  $(x, y)$  está contenida en el conjunto

$$W_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n,$$

que, de acuerdo con el teorema de Baire mencionado previamente, es denso en  $K$ . Además,  $W_\infty$  es invariante bajo  $F$ ,  $F(W_\infty) = W_\infty$ .

Por último, cabe mencionar que se puede demostrar que la *entropía topológica de  $F$  (en  $K$ ) es positiva* (ver [15]). De hecho, denotando a dicha entropía por  $ent(F|_K)$ , se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.4.7**  $ent(F|_K) = \log(4)$

Intuitivamente, este teorema nos da una cierta “cuantificación” de lo caótica que es  $F$  en  $K$ . La aparición del “4” será algo más clara después de la siguiente sección.

### 3.4.2. Un poco de dinámica simbólica: $F$ en $K$ es factor del corrimiento en el espacio de 4 símbolos.

Dados dos espacios métricos  $X, Y$ , y dos funciones continuas  $f : X \rightarrow X$  y  $g : Y \rightarrow Y$ , se dice que  $g$  es *factor de  $f$*  si existe una función  $h : X \rightarrow Y$ , continua y suprayectiva, tal que  $h \circ f = g \circ h$ . Esta definición difiere de la de conjugación entre dos funciones en que no se pide que  $h$  sea un homeomorfismo, es decir,  $h$  puede no ser inyectiva. En tales circunstancias a la función  $h$  se le llama a veces una *semiconjugación*.

Si  $g$  es factor de  $f$ , es fácil probar que, bajo  $h$ , órbitas de  $f$  en  $X$  van a dar en órbitas de  $g$  en  $Y$ . Si además  $Y$  es un espacio perfecto y  $f$  es caótica en  $X$ , se puede probar que, entonces,  $g$  es caótica en  $Y$  (para la demostración y un ejemplo en el que esto no ocurre si  $Y$  no es perfecto véase [24]). O sea que por ser  $g$  factor de  $f$ , la dinámica caótica “se la hereda”  $f$  a  $g$ . En cambio, a diferencia del caso en el que  $f$  y  $g$  son conjugadas, se pueden dar ejemplos en los que  $g$  es factor de  $f$ ,  $g$  es caótica en  $Y$  y  $f$  no es caótica en  $X$ .

Como en la demostración de la proposición 3.3.1, dado  $n \in \mathbb{N}$  considérese nuevamente al conjunto

$$\mathcal{M}_n = \{w = (w_1, w_2, \dots, w_n) : w_i \in \{0, 1, 2, 3\}\}.$$

Para cada  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  en  $\mathcal{M}_n$ , existe una imagen inversa de orden  $n$  de  $K$ , que denotaremos por  $K_w$  o por  $K_{w_1, w_2, \dots, w_n}$ , que satisface  $K_{w_1, w_2, \dots, w_n} \subset K_{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}}$ , y es tal que

$$\begin{aligned} F^j(K_{w_1, w_2, \dots, w_n}) &= K_{w_{j+1}, \dots, w_n}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \text{ y} \\ F^n(K_w) &= K. \end{aligned}$$

La conjugación entre  $F$  y  $G$  obliga, a su vez, a que para cada  $1 \leq j \leq n$ ,  $F^j \big|_{K_w} : K_w \rightarrow K_{w_{j+1}, \dots, w_n}$  sea conjugada con la función

$$G^j \big|_{\Delta_w} : \Delta_w \rightarrow \Delta_{w_{j+1}, \dots, w_n} ,$$

definida en la demostración de la proposición 3.3.1. Por lo tanto, la función

$$F^j \big|_{K_w} : K_w \rightarrow K_{w_{j+1}, \dots, w_n}$$

es un homeomorfismo.

Se sigue también que los conjuntos  $K_w$  “tienden a un punto” (su diámetro tiende a cero) conforme  $n \rightarrow \infty$ ; en otras palabras, considérese la siguiente colección anidada de conjuntos compactos:

$$K_{w_1} \supseteq K_{w_1, w_2} \supseteq \dots \supseteq K_{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}} \supseteq K_{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n} \supseteq \dots \quad (3.4)$$

entonces, el conjunto  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{w_1, w_2, \dots, w_n}$  es un solo punto en  $K$ .

De hecho tanto la existencia de puntos de periodo  $n$  en el interior de  $K$  así como la densidad de  $Per(F)$  se basan en que  $F^n : K_w \rightarrow K$  es un homeomorfismo expansivo cuya inversa es necesariamente una contracción.

Sea  $\Sigma$  el siguiente conjunto, a veces llamado “espacio de 4 símbolos”:

$$\Sigma = \{ \hat{t} = (t_1, t_2, \dots) : t_i \in \{0, 1, 2, 3\}, i \in \mathbb{N} \} .$$

Dados  $\hat{t} = (t_1, t_2, \dots)$  y  $\hat{s} = (s_1, s_2, \dots)$  en  $\Sigma$  se define

$$d(\hat{t}, \hat{s}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} .$$

Es bien sabido que  $(\Sigma, d)$  es un espacio métrico compacto (homeomorfo a un conjunto de Cantor). Sea  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  el *corrimiento*,  $\sigma(t_1, t_2, \dots) = (t_2, t_3, \dots)$ . La dinámica de  $\sigma$  es bien conocida (ver [7] y [27]). En particular, se cumple lo siguiente:

- (i)  $Per_n(\sigma) \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- (ii)  $Per(\sigma)$  es un conjunto denso en  $\Sigma$ .
- (iii) Existe  $\hat{t} \in \Sigma$  cuya órbita bajo  $\sigma$  es densa en  $\Sigma$ . Equivalentemente,  $\sigma$  es transitiva en  $\Sigma$ .

Las condiciones (ii) y (iii) significan que  $\sigma$  es caótica en el sentido de Devaney.

Ahora, sea  $k : \Sigma \rightarrow K$  definida de la manera siguiente: para cada  $\hat{t} = (t_1, t_2, \dots) \in \Sigma$ , como el conjunto  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_1, t_2, \dots, t_n}$  es un solo punto en  $K$ , definimos

$$k(\hat{t}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_1, t_2, \dots, t_n}.$$

Sea  $(x, y) \in K$ . Para cada  $k \geq 1$  escogemos  $w_k \in \{0, 1, 2, 3\}$  de acuerdo con la siguiente regla: Sea  $w_k = \min \{s : F^{k-1}(x, y) \in K_s\}$ . Entonces,  $(x, y) \in K_{w_1, w_2, \dots, w_n}$  para cada  $n$ . Sea

$$\hat{t} = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots) \in \Sigma.$$

Llamamos a  $\hat{t} = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots)$  un *itinerario* de  $(x, y)$ . Se sigue que  $k(\hat{t}) = (x, y)$ . Por consiguiente,  $k : \Sigma \rightarrow K$  es suprayectiva.

Es evidente que esta función  $k$  no es inyectiva. Por ejemplo, pensemos cuales son los puntos  $\hat{t}$  que van a dar a  $u_{-1}$ : Para empezar,  $u_{-1} \in \overline{A_0} \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ ; de hecho  $u_{-1}$  es el único punto en esa intersección. Además,  $u_{-1} \in \overline{A_{02}} \cap \overline{A_{12}} \cap \overline{A_{22}}$ . En general, en cada subdivisión, obtendríamos que  $u_{-1}$  es la intersección de 3 subconjuntos distintos. Así, existen  $\hat{t}_1, \hat{t}_2$  y  $\hat{t}_3$  tales que

$$k(\hat{t}_1) = k(\hat{t}_2) = k(\hat{t}_3) = u_{-1}.$$

Concretamente,

$$\begin{aligned} \hat{t}_1 &= (0, 2, 3, 2, 3, 2, \dots), \\ \hat{t}_2 &= (1, 2, 3, 2, 3, 2, \dots), \\ \hat{t}_3 &= (2, 2, 3, 2, 3, 2, \dots). \end{aligned}$$

Nótese que  $F(u_{-1}) = u$  y  $u$  sí está biunívocamente determinado; es decir,  $u$  está en la intersección de los conjuntos

$$\overline{A_2} \supseteq \overline{A_{23}} \supseteq \overline{A_{232}} \supseteq \overline{A_{2323}} \supseteq \dots$$

y sólo esta colección anidada “produce” a  $u$ . En consecuencia, el único punto en  $\Sigma$  tal que  $k(\hat{t}) = u$  es  $\hat{t} = (2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots)$ .

En general, dado  $(x, y) \in K$  se cumplen las siguientes tres condiciones:

- i) Para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\#\{s : F^{k-1}(x, y) \in K_s\} \leq 3$ .
- ii) Si para alguna  $k$ ,  $\#\{s : F^{k-1}(x, y) \in K_s\} = 3$ , entonces  $F^{k-1}(x, y) \in \partial K$ ; de hecho,  $F^{k-1}(x, y)$  tiene que ser alguno de los tres puntos  $u_{-1}$ ,  $v_{-1}$  o  $t_{-1}$  y para cada  $n > k$ ,  $F^{n-1}(x, y)$  es algún vértice de  $\partial K$  por lo que  $\#\{s : F^{n-1}(x, y) \in K_s\} = 1$ .

iii) Si para alguna  $k$ ,  $\#\{s : F^{k-1}(x, y) \in K_s\} = 2$ , entonces  $F^{k-1}(x, y) \in L_{-1} \subset F^{-1}(\partial K)$  y para cada  $n > k$ ,  $F^{n-1}(x, y) \in \partial K = L$ , por lo que  $\#\{s : F^{n-1}(x, y) \in K_s\} = 1$  con, a lo más, una excepción  $m > k$  donde la cardinalidad de  $\{s : F^{m-1}(x, y) \in K_s\}$  podría ser 3.

De estas tres observaciones se concluye que la cardinalidad del conjunto  $\{\hat{t} \in \Sigma : k(\hat{t}) = (x, y)\}$  es a lo más 6.

Por último, nótese que los conjuntos  $K_{w_0, \dots, w_n}$  están delimitados por imágenes inversas del conjunto singular  $L_{-1}$  y también, en algunos casos, por (parte de)  $L_{-1}^* = L = \partial K$ .

Aunque ya sabemos que  $F$  es caótica en  $K$ , la siguiente proposición contiene otras dos propiedades muy importantes de  $k$  e implica nuevamente ese hecho. La demostración es relativamente directa y se omite.

**Teorema 3.4.8** La función  $k : \Sigma \rightarrow K$  es continua. Más aún, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ k \downarrow & & \downarrow k \\ K & \xrightarrow{F} & K \end{array}$$

Por lo tanto,  $F : K \rightarrow K$  es factor del corrimiento  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  y, en consecuencia,  $F$  es caótica en  $K$ .

# APÉNDICE 3A: Demostración del teorema 3.4.4.

*Paso 1.* Sea  $(x, y) \in \Delta_0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} H \circ G(x, y) &= H(-2x, 2y) \\ &= (h(-2x) - 1) e^{i\frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i\frac{4y\pi}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F \circ H(x, y) &= F\left((h(x) - 1) e^{i\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i2\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}}\right) \\ &= (h(x)^2 - 2h(x) + 1) e^{i\frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} + 2(h(x) - 1) e^{-i\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} \\ &\quad + e^{-i4\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} - 2(h(x) - 1) e^{-i\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} - 2e^{i2\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Como  $x \in [-1, \frac{1}{2}]$ ,  $h(x)^2 - 2h(x) = h(-2x)$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} F \circ H(x, y) &= (h(-2x) + 1) e^{i\frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} - 2e^{i2\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i4\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} \\ &= (h(-2x) - 1) e^{i\frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i\frac{4y\pi}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

*Paso 2.* Sea  $(x, y) \in \Delta_1$ . Entonces:

$$\begin{aligned} F \circ H(x, y) &= F\left((h(x) - 1) e^{i\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i2\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}}\right) \\ &= (h(x)^2 - 2h(x) + 1) e^{i\frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i4\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} - 2e^{i2\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

Como  $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ ,  $h(x)^2 - 2h(x) = h(2x - 2)$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} F \circ H(x, y) &= (h(2x - 2) - 1) e^{i\frac{2y\pi}{3\sqrt{3}}} + e^{-i4\frac{y\pi}{3\sqrt{3}}} \\ &= H \circ G(x, y). \end{aligned}$$

*Paso 3.* Sea  $(x, y) \in \Delta_2$ . Además, sean

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \left( 1 + x - \frac{y}{\sqrt{3}} \right)$$

y

$$\beta = \frac{\pi}{3} \left( 1 + x + \sqrt{3}y \right).$$

Por la definición de  $H$  y la de  $G$ ,

$$\begin{aligned} H \circ G(x, y) &= 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} \left( 2 - \left( 1 - x - \sqrt{3}y \right) \right) \right) e^{i\alpha} + e^{-i2\alpha} \\ &= 2 \cos(\beta) (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) + \cos(2\alpha) + i \sin(-2\alpha) \\ &= 2 \cos(\beta) \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + i (2 \cos(\beta) \sin(\alpha) - \sin(2\alpha)) \\ &= \cos(\beta + \alpha) + \cos(\beta - \alpha) + \cos(2\alpha) \\ &\quad + i (\sin(\beta + \alpha) + \sin(-(\beta + \alpha)) - \sin(2\alpha)). \end{aligned}$$

Ahora, tomando en cuenta que  $\beta + \alpha = \frac{2\pi}{3} \left( 1 + x + \frac{y}{\sqrt{3}} \right)$  y escribiendo  $a = \frac{2\pi}{3} (1 + x)$ ,  $b = \frac{\pi}{3} \left( \frac{y}{\sqrt{3}} \right)$ , tenemos

$$\begin{aligned} H \circ G(x, y) &= \cos(a + b) + \cos(2b) + \cos(a - b) \\ &\quad + i (\sin(a + b) + \sin(-2b) - \sin(a - b)) \\ &= 2 \cos(a) \cos(b) + \cos(2b) \\ &\quad + i (2 \sin(b) \cos(a) + \sin(-2b)) \\ &= 2 \cos(a) e^{ib} + e^{-i2b}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$G \circ H(x, y) = ((h(x))^2 - 2h(x) - 1) e^{ib} + e^{-i2b}.$$

Como  $x \in [-1, \frac{1}{2}]$ , reemplazando  $h(x)$  por su valor y usando nuevamente una identidad trigonométrica obvia,

$$(h(x))^2 - 2h(x) - 1 = h(-2x) - 1 = 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} (2 + 2x) \right).$$

Por lo tanto,

$$G \circ H(x, y) = 2 \cos(a) e^{ib} + e^{-i2b}.$$

*Paso 4.* Sea  $(x, y) \in \Delta_3$ . Sea  $\gamma$  la función definida por  $\gamma(x, y) = (x, -y)$ . Es fácil ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_3 & \xrightarrow{G} & \Delta_3 \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \Delta_2 & \xrightarrow{G} & \Delta_2 \end{array} .$$

Asimismo, es fácil ver que en  $K$ ,  $\gamma \circ F = F \circ \gamma$ , y en  $\Delta$ ,  $\gamma \circ H \circ \gamma = H$ . Entonces, dado  $(x, y) \in \Delta_3$  tenemos lo siguiente:

$$H \circ G(x, y) = \gamma \circ H \circ \gamma \circ G(x, y) = \gamma \circ H \circ G \circ \gamma(x, y) .$$

Como  $\gamma(x, y) \in \Delta_2$ ,

$$\begin{aligned} H \circ G(x, y) &= \gamma \circ H \circ G \circ \gamma(x, y) \\ &= \gamma \circ F \circ H \circ \gamma(x, y) \\ &= F \circ \gamma \circ H \circ \gamma(x, y) \\ &= F \circ H(x, y) , \end{aligned}$$

y la demostración queda concluida.  $\square$



## Capítulo 4

# Cuestiones generales sobre la dinámica de $F_a$ si $-1 < a < 0$ .

Para  $a \in (-1, 0)$  existe un conjunto especial, que llamamos  $\Lambda_a$ , contenido en el interior de  $K_a$ , que es el lugar donde realmente se desarrolla la dinámica de  $F_a$  (en el interior de  $K_a$ ). En este capítulo establecemos las propiedades de  $\Lambda_a$  (secciones 4.2 y 4.3), así como las del conjunto de puntos periódicos de  $F_a$  que son producidas por las simetrías de la función cuando el parámetro es real (sección 4.4).

En particular, como parte del marco general en el que se desarrollan éste y el siguiente capítulo, se aceptan como hipótesis de trabajo dos conjeturas que no se han podido demostrar relativas al conjunto  $K_a$  para  $a \in (-1, 0)$ , pero cuya validez nos parece empíricamente evidente (se trata de las Conjeturas  $C1$  y  $C2$  que discutimos con detalle en la sección 4.2). Cabe señalar que, de cualquier manera, excepto las conjeturas y lo relativo a la dinámica en  $\partial\Lambda_a$  (sección 4.5), todas las afirmaciones generales en este capítulo se demuestran.

Obviamente muchos fenómenos dinámicos presentes en las funciones  $F_a$  existen, en general, en funciones  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . En este capítulo y el siguiente frecuentemente utilizaremos, con ciertas adecuaciones, conceptos y resultados generales desarrollados por autores como Mira, Gumowski y otros que aparecen en la bibliografía.

## 4.1. Conjuntos Atractores y Zonas Absorbentes de funciones $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función de clase  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Al conjunto singular o de puntos críticos de  $f$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \det Df(x) = 0\}$ , lo denotaremos por  $L_{-1}(f)$ , o, como en el caso de las funciones  $F_a$ , utilizando el subíndice “ $a$ ”:  $L_{-1}(a)$ . Al conjunto de valores críticos de  $f$ ,  $f(L_{-1})$ , lo denotaremos por  $L(f)$  (respect., por  $L(a)$ ).

*Hipótesis permanente para lo que sigue:*  $L(f)$  está constituido por una o varias curva lisas por partes que dividen al plano en un número finito de regiones.<sup>1</sup>

Esta hipótesis la cumplen las funciones  $F_a$ ,  $a \neq 0$ , y muchas otras no analíticas. Por lo general, aún cuando  $L_{-1}(f)$  sea una curva lisa,  $L(f)$  es una curva que puede tener “picos” debido a la presencia de cúspides.

Tanto a las iteraciones del conjunto singular  $L_{-1}(f)$ , como a las de  $L(f)$ , las llamaremos *arcos críticos* de  $f$ . Específicamente, a  $f^k(L) = f^{k+1}(L_{-1})$ , lo llamaremos *arco crítico de orden  $k + 1$  de  $f$*  y lo denotaremos por  $L_k(f)$  o por  $L_k$ ,  $k \geq -1$ , donde  $L_0 \equiv L$ . Es un hecho conocido que el conjunto de valores críticos de la  $k$ -ésima iteración de  $f$ ,  $f^k$ , está dado por  $L \cup f(L) \cup f^2(L) \cup \dots \cup f^{k-1}(L)$  (ver [19]).

Siendo  $L_{-1}$  y  $L$  arcos o curvas simples cerradas, en la medida que pueden intersectarse, los arcos críticos de orden superior pueden volverse curvas que se cruzan a sí mismas un gran número de veces (ver figura 4.1).

---

<sup>1</sup>Es una hipótesis relevante pues aunque sabemos, por un conocido teorema de Sard, que  $L(f)$  es un conjunto de medida cero, no tiene por qué ser una curva. Por ejemplo, se puede construir  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $L(f) = A$  donde  $A \subset \mathbb{R}$  es cualquier conjunto numerable.

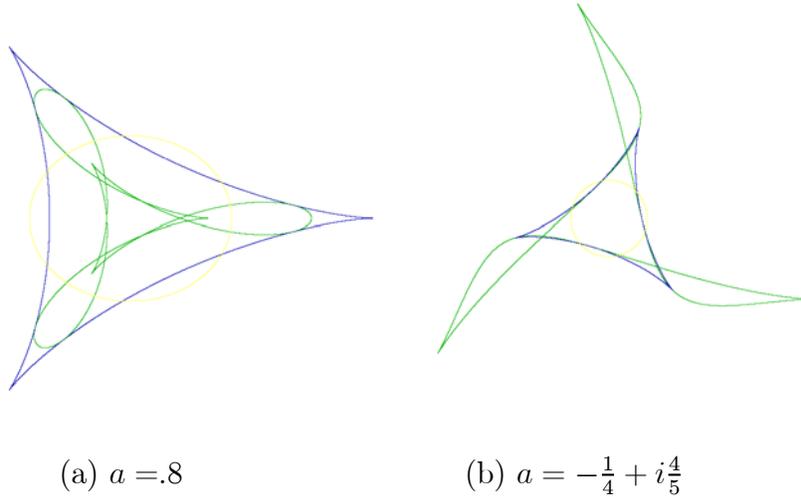


figura 4.1:  $L_{-1}(a)$  y los arcos críticos  $L(a)$  y  $L_1(a)$  para un parámetro real y uno complejo.

**Definición 4.1.1** *Supongamos que  $A$  es un conjunto compacto tal que  $f(A) \subseteq A$ .<sup>2</sup> Si existe una vecindad  $U$  de  $A$  tal que la órbita de todo punto en  $U$  entra en  $A$  tras un número finito de iteraciones, o tiende asintóticamente a  $A$ , decimos que  $A$  es un conjunto atractor (“attracting set”).*

La cuenca de atracción de un conjunto atractor  $A$  es un conjunto abierto  $\Omega$  cuyos elementos tienen órbitas que convergen asintóticamente a  $A$ , o que entran en  $A$  tras un número finito de iteraciones. La vecindad  $U$  que aparece en la definición anterior es parte de esta cuenca de atracción; a la componente conexa de  $\Omega$  que contiene a  $A$  se la llama la cuenca *inmediata* de atracción de  $A$ .

Por ejemplo, en relación con la familia de funciones  $F_a$ , para  $-1 < a < 0$ , veremos que el conjunto  $\overline{Z_4(a)}$ , cuya frontera es el arco crítico  $L(a)$ , es un conjunto atractor: el interior de  $K_a$  resulta ser su cuenca de atracción y la órbita de todo punto en dicha cuenca entra en  $\overline{Z_4(a)}$  tras un número finito de iteraciones.

El siguiente, es un hecho conocido.

---

<sup>2</sup>A un conjunto de este tipo en ocasiones se le llama “conjunto prisionero”. Si cumple la contención estricta,  $f(A) \subset A$ , también se le llama “conjunto débilmente invariante”.

**Lema 4.1.2** Si  $A$  es un conjunto compacto tal que  $f(A) \subseteq A$ , el conjunto  $S = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(A)$  es un conjunto (compacto) invariante hacia adelante; es decir,  $f(S) = S$ .

*Demostración:* Como  $A$  es compacto y  $f(A) \subseteq A$ , tenemos que la sucesión  $\{f^k(A)\}$  es una colección anidada decreciente de conjuntos compactos no vacíos, por lo que  $S = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(A)$  es un conjunto compacto no vacío. Obviamente  $f(S) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(A) = S$ .

Para demostrar la otra contención, sea  $w \in S$ . Entonces,  $w \in f^k(A)$  para todo  $k \geq 0$ , por lo que para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe  $z_k \in A$  tal que  $f^k(z_k) = f(f^{k-1}(z_k)) = w$ . Obsérvese, en particular, que  $f^{k-1}(z_k)$  es un elemento de  $f^{k-1}(A)$ .

Hagamos  $a_k = f^{k-1}(z_k)$ ,  $k \geq 1$ . Por estar contenida en  $A$ , esta sucesión  $\{a_k\}$  contiene una subsucesión  $\{a_{k_i}\}$  convergente a cierto punto  $\rho \in A$ . Como  $a_{k_i} \in f^{k_i-1}(A)$  y la colección  $\{f^k(A)\}$  es una sucesión anidada decreciente de conjuntos, para cada  $k_l$  se tiene que  $a_{k_\mu} \in f^{k_l-1}(A)$  para todo  $\mu \geq l$ ; como todo conjunto  $f^k(A)$  es compacto, se sigue que  $\rho \in f^{k_l-1}(A)$  para cada  $k_l$  y, por lo tanto,  $\rho \in S$ . Por continuidad,  $\{f(a_{k_i})\}$  es una sucesión convergente a  $f(\rho)$ ; como  $f(a_{k_i}) = f(f^{k_i-1}(z_{k_i})) = w$ , se sigue que  $w = f(\rho)$ . Por lo tanto,  $w \in f(S)$ .  $\square$

Sea  $f(A) \subseteq A$  y  $S = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(A)$ . Nótese que si  $A$  es un conjunto atractor,  $S$  también lo es (de hecho  $S$  es el “conjunto límite” que atrapa la dinámica de puntos en la cuenca de  $A$ ). Si en particular  $A$  es invariante hacia adelante,  $f(A) = A$ , entonces  $S = A$ ; si  $f(A) \subset A$  (es decir, la contención es propia), puede ocurrir que  $f^k(A) = f^{k+1}(A)$  para algún entero  $k$ , en cuyo caso  $S = f^k(A)$ , o bien, que  $f^k(A) \subset f^{k+1}(A)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , y entonces,  $S$  está propiamente contenido en  $f^k(A)$  para todo  $k \geq 0$ .

Para la familia  $F_a$  veremos, en particular, que si  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a < -\frac{1}{2}$ , se cumple que  $F_a^{2k}(\overline{Z_4(a)}) \subset F_a^{2k+2}(\overline{Z_4(a)})$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y por lo tanto,  $S = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_a^k(\overline{Z_4(a)})$  está propiamente contenido en  $F_a^k(\overline{Z_4(a)})$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ; en cambio, si  $a \leq -\frac{2}{3}$ , se cumple que  $F_a^2(\overline{Z_4(a)}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_a^k(\overline{Z_4(a)}) = S$ .

## Zonas absorbentes.

Es claro que los conjuntos atractores son de la mayor importancia; de acuerdo con el lema 4.1.2, estos conjuntos siempre encierran “conjuntos límite” cuya existencia determina o afecta esencialmente toda la dinámica. Los atractores pueden ser invariantes bajo  $f$  o bajo alguna iteración de  $f$ , en cuyo caso se les llama cíclicos o periódicos; y puede también ocurrir que coexistan varios conjuntos atractores distintos (véanse, por ejemplo, las secciones 5.3, 5.4 y 5.5 del siguiente capítulo).

Hay, sin embargo, una clase particular de conjuntos atractores que, de acuerdo con autores como [1], [5], [6], [10], [13], [12], y [19], revisten un interés aún mayor que los demás: aquellos cuya frontera es una curva simple cerrada formada por una unión finita de arcos críticos. Desde finales de los 70’s este tipo de atractores fueron llamados *zonas absorbentes* por C. Mira e I. Gumowski, quienes popularizaron este concepto entre un sector amplio de investigadores; lo formalizamos en la siguiente definición.

**Definición 4.1.3** *Un conjunto compacto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  es una zona absorbente si  $A$  es un conjunto atractor de acuerdo con la definición 4.1.1 y además ocurre que su frontera está formada por una unión finita de arcos críticos.*

A juzgar por la literatura consultada, este concepto es importante principalmente por las siguientes razones: en primer lugar, porque en un sinnúmero de ejemplos, todos los conjuntos que en algún sentido merecen ser llamados “conjuntos límite”, están siempre contenidos en alguna zona absorbente. Es decir, en dichos ejemplos, si  $S$  es un conjunto invariante (hacia adelante), entonces existe una zona absorbente  $A$  tal que  $S = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(A)$ . De hecho, en todas las obras mencionadas en el párrafo previo, esta afirmación se acepta o se maneja como un resultado general, establecido para todas las funciones que satisfacen la hipótesis permanente enunciada al principio de la sección.<sup>3</sup> Indiscutiblemente la afirmación es bastante plausible y la evidencia empírica proporcionada por todos estos autores y otros que ellos citan, es abrumadora; pero al menos en las obras consultadas no se ha hallado una demostración general de tal resultado.

---

<sup>3</sup>Por ejemplo, en [10], y [6] se afirma, textualmente, que “all the attractive limit sets of an endomorphism are located in phase plain domains, called absorptive areas”. Afirmaciones semejantes aparecen en otras obras.

Por otra parte, también C. Mira e I. Gumowski idearon un método práctico para construir una zona absorbente basado, esencialmente, en iterar ciertas porciones (arcos) del conjunto singular hasta que se conforme la frontera de la zona absorbente (que por definición debe constar de un número finito de estas iteraciones)<sup>4</sup>. Este método constituyó, según investigadores como los citados, una herramienta práctica poderosa para analizar sistemas dinámicos. Por último, que un “conjunto límite” esté rodeado por una zona absorbente, pone de manifiesto el importante papel que el conjunto singular desempeña en la dinámica de una función.

En este y el siguiente capítulo mostramos ciertas zonas absorbentes importantes para las funciones  $F_a$  (para algunos valores del parámetro). Por lo pronto, establecemos una propiedad elemental de las zonas absorbentes en el lema 4.1.4. Para ello, se requiere el siguiente lema auxiliar.<sup>5</sup>

*Lema auxiliar:* Sea  $A \subset \mathbb{R}^2$  compacto (no suponemos  $A$  invariante o atractor). Los puntos del interior de  $A$  que bajo  $f$  caen en la frontera de  $f(A)$  pertenecen necesariamente al conjunto singular  $L_{-1}(f)$ . Es decir, si  $f(p) \in \partial f(A)$  con  $p \in \text{int}A$ , entonces  $p \in L_{-1}(f)$ .

*Demostración:* Supongamos que  $p \in \text{int}A$  no es un punto singular. Entonces, por el Teorema de la Función Inversa existe una vecindad  $U \subset A$  de  $p$  tal que  $f : U \rightarrow f(U)$  es un difeomorfismo,  $f(U)$  es abierto y  $f(p) \in f(U) \subset f(A)$ . En consecuencia,  $f(p) \in \text{int}f(A)$ . Por lo tanto, si  $f(p) \in \partial f(A)$  con  $p \in \text{int}A$ ,  $p$  tiene que ser un punto singular.  $\square$

**Lema 4.1.4** *Supongamos que  $A \subset \mathbb{R}^2$  es una zona absorbente de  $f$ . Entonces,  $f(A)$  es también una zona absorbente. En consecuencia,  $f^k(A)$  es una zona absorbente para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración:* Hay que demostrar que  $\partial f(A)$  es unión finita de arcos críticos. Si  $w \in \partial f(A)$  y  $w = f(z)$  con  $z \in \partial A$ ,  $z$  está en algún arco crítico de  $f$  y por lo tanto,  $w$  también. Si en cambio  $w = f(z) \in \partial f(A)$  con  $z \in \text{int}A$ , entonces  $z \in L_{-1}(f)$  y, por lo tanto,  $w \in L(f)$ . Es decir, también en este caso  $w$  está en un arco crítico. Que  $\partial f(A)$  es unión finita de tales arcos se desprende de que  $\partial A$  también lo es. La segunda parte de la afirmación es inmediata.  $\square$

---

<sup>4</sup>Describimos brevemente este método en el Apéndice 5D. Una exposición detallada puede consultarse en [1] y [19], aunque cabe aclarar que la mayoría de los autores citados suponen casi siempre que se está tratando con funciones  $f$  con la propiedad de que  $f^{-1}(w)$  consta a lo más de 2 puntos para todo  $w$  en el plano.

<sup>5</sup>Ambos, el lema auxiliar y el lema 4.1.4 han sido tomados de [19]

## 4.2. El conjunto $K_a$ .

De acuerdo con el capítulo 1, para los parámetros reales  $a < 0$  ocurre que la hipocicloide  $L_{-1}^*(a)$  está “orientada” exactamente igual que el conjunto de valores críticos, la hipocicloide  $L(a)$ . Para  $-1 < a < 0$ , ocurre además que  $L_{-1}^*(a)$  queda “por fuera” de  $L(a)$ ; es decir,  $L(a) \subset A(a)$  donde  $A(a)$  es la región acotada cuya frontera es  $L_{-1}^*(a)$  (ver figura 1.4 del capítulo 1).

Recordando que  $Z_4(a)$  es la región acotada cuya frontera es  $L(a)$ , tenemos, entonces, que para  $-1 < a < 0$ ,

$$F_a(\overline{A(a)}) = \overline{Z_4(a)} \subset \overline{A(a)}, \quad (4.1)$$

o equivalentemente, como  $\text{int}F_a^{-1}(\overline{Z_4(a)}) = A(a)$ ,

$$\overline{Z_4(a)} \subset \text{int}F_a^{-1}(\overline{Z_4(a)}) \quad (4.2)$$

Las repercusiones de (4.1) o (4.2) son notables. Para empezar, se sigue que  $\overline{Z_4(a)}$  es una zona absorbente (el conjunto  $A(a)$ , o incluso el interior de  $K_a$ , juegan el papel de la vecindad  $U$  de la definición). Además, de (4.1) se sigue, en particular, que

$$F_a(\overline{Z_4(a)}) \subseteq \overline{Z_4(a)},$$

y en general, que para todo  $k \geq 0$ ,

$$F_a^{k+1}(\overline{Z_4(a)}) \subseteq F_a^k(\overline{Z_4(a)}). \quad (4.3)$$

De estas contenciones se desprende inmediatamente la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.1** *Para  $-1 < a < 0$ , se tiene que  $\overline{Z_4(a)} \subset K_a$ .*

*Demostración:* Como para todo  $k \in \mathbb{N}$  el conjunto  $F_a^k(\overline{Z_4(a)})$  está contenido en  $\overline{Z_4(a)}$ , si  $z \in \overline{Z_4(a)}$ , entonces  $F_a^k(z) \in \overline{Z_4(a)}$ . Es decir, la órbita de  $z$  es acotada.  $\square$

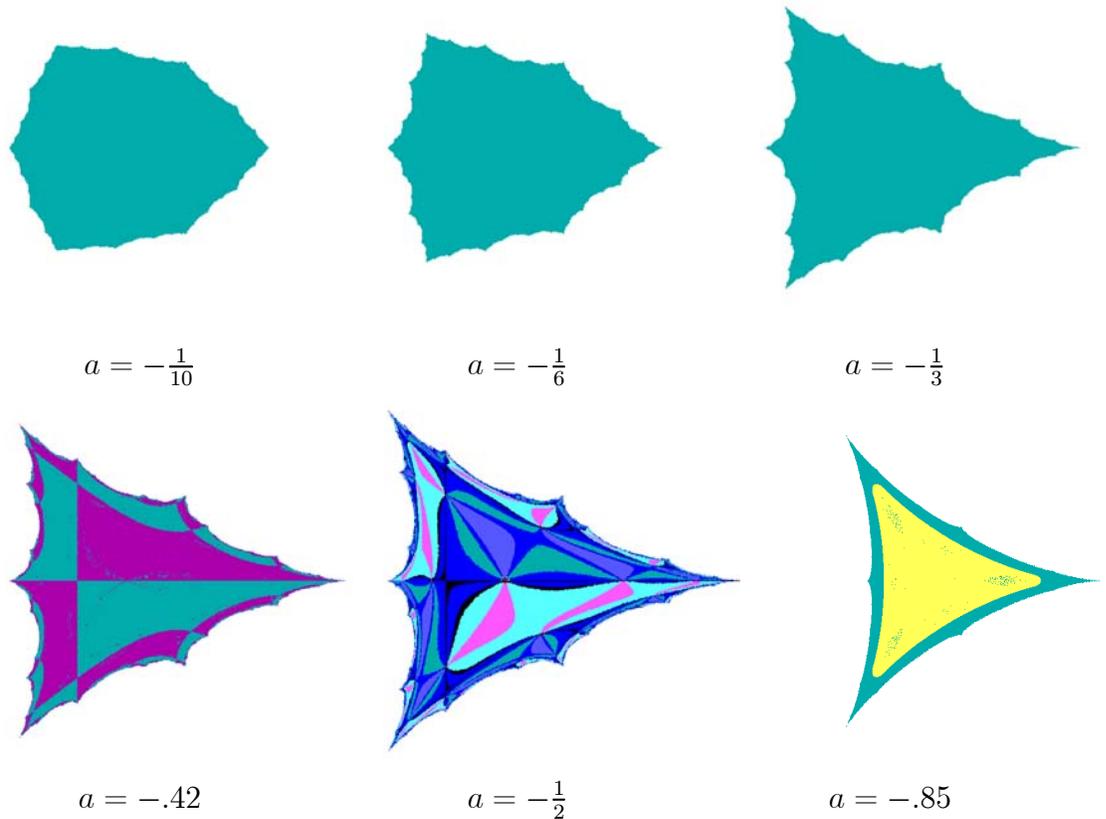
**Corolario 4.2.2** *Las imágenes directas e inversas de todos los órdenes de  $Z_4(a)$ , de  $\overline{Z_4(a)}$  y de  $L(a)$ , están contenidas en  $K_a$ .*

*Demostración:* Como  $K_a$  es totalmente invariante y  $\overline{Z_4(a)}$  está contenido en  $K_a$ , las imágenes directas e inversas de todos los órdenes de  $\overline{Z_4(a)}$  están contenidas en  $K_a$ . Lo mismo puede decirse de  $Z_4(a)$  y de  $L(a)$  dado que ambos están contenidos en  $\overline{Z_4(a)}$ . En particular, nótese que  $L_{-1}(a) \subset K_a$ .  $\square$

Dado que el conjunto de puntos críticos, la circunferencia  $L_{-1}(a)$ , está contenido en  $K_a$ , del teorema 2.2.5 del Capítulo 2 se sigue que el conjunto  $K_a$  es conexo. Lo dejamos asentado:

**Proposición 4.2.3**  $K_a$  es conexo para  $-1 < a < 0$ .

En la figura 4.2 se muestran conjuntos  $K_a$  conexos para algunos parámetros entre  $-1$  y  $0$ . En las últimas 4 figuras se nota cómo se va pareciendo  $\Lambda_a$  a  $K_a$  conforme  $a$  se aproxima a  $-1$ .



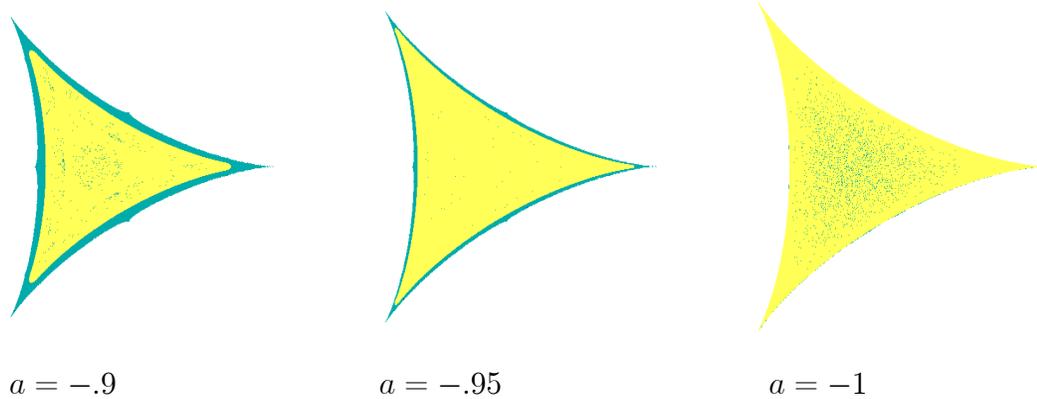


figura 4.2: Imágenes de  $K_a$  conexo para algunos parámetros  $-1 \leq a < 0$ .

Por otra parte, de (4.3) se sigue que las imágenes directas de todos los órdenes de  $\overline{Z_4(a)}$  forman una sucesión anidada decreciente de conjuntos; como  $F_a^k(\overline{Z_4(a)})$  es compacto y conexo para todo  $k \geq 0$ , se sigue que  $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_a^k(\overline{Z_4(a)})$  es, a su vez, un compacto conexo no vacío, es decir, un continuo. En lo sucesivo denotaremos a esta intersección por  $\Lambda_a$ ; es decir,

$$\Lambda_a \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} F_a^k(\overline{Z_4(a)}).$$

Nótese que  $\Lambda_a \subset K_a$  y, más aún,  $\Lambda_a \subset \text{int}K_a$ .

Como señalamos antes, para  $-1 < a < 0$ , el conjunto  $\Lambda_a$  es de la máxima importancia. Por lo pronto, del lema 4.1.2 se desprende inmediatamente la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.4** Sean  $-1 < a < 0$  y  $\Lambda_a = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_a^k(\overline{Z_4(a)})$ . Entonces,  $\Lambda_a$  es invariante hacia adelante; es decir:

$$F_a(\Lambda_a) = \Lambda_a.$$

En la siguiente sección estudiaremos más las propiedades generales de este conjunto  $\Lambda_a$ . Por ahora, vamos a continuar el análisis de  $K_a$ .

**Proposición 4.2.5** *El conjunto  $\bigcup_{k=0}^{\infty} F_a^{-k} \left( \overline{Z_4(a)} \right)$  es un conjunto abierto, conexo y simple conexo contenido en  $K_a$ .*

*Demostración:* Como  $F_a^{-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right)$  es cerrado tenemos que  $\text{int}F_a^{-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right)$  está (propiamente) contenido en  $F_a^{-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right)$ ; por otra parte,  $F_a^{-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right) \subset F_a^{-2} \left( \overline{Z_4(a)} \right)$ , dado que  $\overline{Z_4(a)} \subset F_a^{-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right)$ . Por lo tanto,  $\text{int}F_a^{-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right) \subset F_a^{-2} \left( \overline{Z_4(a)} \right)$ . O sea que, usando (4.2),

$$\overline{Z_4(a)} \subset \text{int}F_a^{-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right) \subset F_a^{-2} \left( \overline{Z_4(a)} \right).$$

Por inducción, podemos concluir que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$F_a^{-k} \left( \overline{Z_4(a)} \right) \subset \text{int}F_a^{-k-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right) \subset F_a^{-k-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right).$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} F_a^{-k} \left( \overline{Z_4(a)} \right) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{int}F_a^{-k-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} F_a^{-k-1} \left( \overline{Z_4(a)} \right). \quad (4.4)$$

Los conjuntos que aparecen en los extremos de (4.4) coinciden, por lo tanto, los tres conjuntos en (4.4) son el mismo; es un conjunto abierto dado que el de enmedio es abierto. De hecho como  $F_a^{-k} \left( \overline{Z_4(a)} \right)$  es compacto, conexo y simple-conexo para todo  $k \in \mathbb{N}$  y todos estos conjuntos están linealmente ordenados por la inclusión, se sigue que  $\bigcup_{k=0}^{\infty} F_a^{-k} \left( \overline{Z_4(a)} \right)$  es conexo y simple conexo. Como todas las imágenes inversas de  $\overline{Z_4(a)}$  están contenidas en  $K_a$ , la unión de todas ellas está contenida en  $K_a$ .  $\square$

Tenemos, entonces, que  $\bigcup_{k=0}^{\infty} F_a^{-k} \left( \overline{Z_4(a)} \right)$  es un conjunto abierto contenido en  $K_a$ . Como  $K_a$  es compacto, la cerradura de dicho conjunto está contenido en  $K_a$ . Es decir:

$$\overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} F_a^{-k} \left( \overline{Z_4(a)} \right)} \subseteq K_a.$$

Sea  $M = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(\overline{Z_4(a)})}$ . La pregunta es ¿Además de  $M$ , que otro conjunto puede haber en  $K_a$ ? Experimentos y razonamientos diversos nos llevan a la conclusión de que para  $-1 < a < 0$ , el conjunto  $M$  coincide con el conjunto  $K_a$ . Es decir, creemos que en particular para  $-1 < a < 0$ , las siguientes dos igualdades son válidas:

$$M = K_a.$$

$$\text{int}M = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(\overline{Z_4(a)}).$$

Estas igualdades no se han podido demostrar. Tomando en cuenta, entonces, lo que hemos podido constatar a nivel experimental, en este capítulo tomaremos como hipótesis de trabajo la validez de estas dos últimas igualdades para  $-1 < a < 0$ .

Enfatizando: supondremos válidas las siguientes dos conjeturas para  $-1 < a < 0$ :

$$\text{CONJETURA C1: } K_a = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(\overline{Z_4(a)})}. \quad (4.5)$$

$$\text{CONJETURA C2: } \text{int}K_a = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_a^{-k}(\overline{Z_4(a)}). \quad (4.6)$$

*Observaciones:* (i) Aun siendo  $U \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto, conexo y simple conexo, no se sigue que  $\text{int}\overline{U} = U$ . Considérese, por ejemplo, al conjunto  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} - [0, 1) \times \{0\}$ . Esto muestra que las conjeturas 1 y 2 no son equivalentes, sino que debemos asumir ambas.

(ii) Si  $a$  es un parámetro complejo con  $|a| \leq \frac{1}{3}$ , también se cumplen las contenciones (4.1) y (4.2). Esto significa que los resultados derivados de éstas, así como las conjeturas 1 y 2, pueden extenderse a todos los parámetros  $|a| \leq 1/3$ .

### 4.3. El conjunto $\Lambda_a$ donde se concentra la dinámica.

Por definición,  $\Lambda_a = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_a^k(\overline{Z_4(a)})$ , por lo que si un punto está en  $\overline{Z_4(a)}$ , su órbita eventualmente entrará en  $\Lambda_a$  o tenderá asintóticamente a  $\Lambda_a$ . En

general, en virtud de la conjetura  $C2$ , si un punto está en el interior de  $K_a$  su órbita estará en  $\overline{Z_4(a)}$  tras un número finito de iteraciones y en consecuencia, acabará por “irse” a  $\Lambda_a$  de alguna manera. Como se señaló antes, esto nos habla de que es en el conjunto  $\Lambda_a$  donde se desarrolla la dinámica interesante que pueda existir en el interior de  $K_a$ .

Por definición, dado  $z \in \mathbb{C}$ , el conjunto  $\omega$ -límite de  $z$ , que denotaremos por  $\omega(z, F_a)$ , es el conjunto de todos los puntos límite de la órbita de  $z$ . Es decir,

$$\omega(z, F_a) = \{y \in \mathbb{C} : y \text{ es el límite de alguna subsucesión de } \{F_a^k(z)\}\}$$

Al conjunto de puntos periódicos de  $F_a$  lo denotaremos por  $PerF_a$  y al de puntos periódicos de periodo  $N$  por  $Per_N F_a$ .

**Proposición 4.3.1** *Sea  $-1 < a < 0$ . Entonces:*

- (i)  $PerF_a \cap intK_a \subseteq \Lambda_a$ ;
- (ii) si  $z \in intK_a$ , el  $\omega$ -límite de  $z$  está contenido en  $\Lambda_a$ ;
- (iii) si  $W$  es un subconjunto propio de  $intK_a$ , invariante hacia adelante, es decir  $W = F_a(W)$ , entonces  $W \subseteq \Lambda_a$ .

*Demostración:*

(i) Sea  $p$  un punto periódico de periodo  $n \geq 1$ . Si  $p \in intK_a$ , Por  $C1$  alguna iteración de  $p$  está contenida en  $\overline{Z_4(a)}$  y es también un punto periódico del mismo periodo. Así que, de entrada, podemos suponer  $p \in \overline{Z_4(a)}$ . Como  $p$  es de periodo  $n$ ,  $F_a^{nj}(p) = p \in F_a^{nj}(\overline{Z_4(a)})$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ ; es decir,  $p$  está en una infinidad de imágenes directas de  $\overline{Z_4(a)}$ . Por ser éstas una colección anidada decreciente de conjuntos se concluye, entonces, que  $p \in \Lambda_a$ .

(ii) Sea  $z \in intK_a$  y  $q \in \omega(z, F_a)$ . Nuevamente podemos suponer de entrada que  $z \in \overline{Z_4(a)}$ . Por definición existe una subsucesión  $\{F_a^{n_j}(z)\} \equiv \{z_{n_j}\}$  de la órbita de  $z$  tal que  $q = \lim_{j \rightarrow \infty} z_{n_j}$ . Queremos ver que  $q \in \Lambda_a$ : Nótese que  $z_{n_j} \in F_a^{n_j}(\overline{Z_4(a)})$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $q$  no está en  $\Lambda_a$ . Como  $\Lambda_a$  es un compacto contenido en el interior de  $K_a$ , existen  $U$  y  $B$ , vecindades de  $q$  y  $\Lambda_a$ , respectivamente, (ambas,  $U$  y  $B$ , contenidas en  $intK_a$ ) tales que

$$q \in U \text{ y } U \cap B = \phi.$$

Sea  $m \in \mathbb{N}$  lo suficientemente grande para que  $F_a^m(\overline{Z_4(a)}) \subset B$  (esta  $m$  existe porque  $\Lambda_a$  es la intersección anidada de imágenes directas de todos los

órdenes de  $\overline{Z_4(a)}$ , todas las cuales son compactos conexos). Entonces,

$$U \cap F_a^m \left( \overline{Z_4(a)} \right) = \phi,$$

mas aún,

$$U \cap F_a^k \left( \overline{Z_4(a)} \right) = \phi, \forall k \geq m.$$

Pero esto significa que  $z_{n_j} \notin U$  para todo  $n_j$  tal que  $n_j \geq m$ , lo cual es una contradicción con el hecho de que  $q$  es el límite de la subsucesión  $\{z_{n_j}\}$ . En consecuencia,  $q \in \Lambda_a$ .

(iii) Nuevamente podemos empezar por suponer  $W \subseteq \overline{Z_4(a)}$ . De la hipótesis se sigue que  $F_a^k(W) = W \forall k \geq 0$ . De aquí se sigue que  $W$  está contenido en todas las iteraciones de  $\overline{Z_4(a)}$ , por lo que  $W$  está contenido en  $\Lambda_a$ .  $\square$

#### 4.4. Sobre las órbitas periódicas producidas por las simetrías de $F_a$ si $-1 < a < 0$ .

La simetría “triangular” de  $F_a$  si el parámetro  $a$  es real se expresa en las fórmulas

$$F_a(\rho z) = \rho^2 F_a(z) \text{ y } F_a(\rho^2 z) = \rho F_a(z), \quad (4.7)$$

válidas para todo  $z \in \mathbb{C}$ , donde  $\rho$  es raíz cúbica de la unidad. Supóngase ahora que  $P$  es un punto fijo de  $F_a$ ; entonces, por (4.7), la órbita  $\{\rho P, \rho^2 P\}$  es periódica de periodo dos. Llamaremos a ésta una *órbita de periodo dos generada por el punto fijo  $P$* . Si ahora tenemos que  $\{q_1, q_2\}$  es una órbita de periodo dos, que no ha sido generada por un punto fijo, entonces  $\{\rho q_1, \rho^2 q_2\}$  y  $\{\rho^2 q_1, \rho q_2\}$  son órbitas de periodo dos, que igualmente diremos que fueron generadas por  $\{q_1, q_2\}$ . Es fácil comprobar que una órbita  $\{q_1, q_2\}$  generada por algún punto fijo o por alguna otra órbita de periodo dos, no genera órbitas nuevas. Evidentemente, esto se generaliza a órbitas de periodo  $N \geq 2$ , como demostramos a continuación.

**Proposición 4.4.1** *Supongamos  $z_0 \neq 0$  es un punto periódico de periodo  $N$  y que  $z_0$  no es de la forma  $\rho Q$  o  $\rho^2 Q$  donde  $Q$  es un punto periódico. Entonces*

(i) *Si  $N$  es par,  $\rho z_0$  y  $\rho^2 z_0$  son puntos de periodo  $N$  que corresponden, cada uno de ellos, a órbitas distintas de periodo  $N$ . Es decir, una órbita de periodo  $N$  genera otras dos del mismo periodo.*

(ii) Si  $N$  es impar,  $\rho z_0$  y  $\rho^2 z_0$  son puntos de periodo  $2N$  que están en la misma órbita. Es decir, en este caso se genera sólo una órbita pero de periodo  $2N$ .

*Observación.* Es fácil comprobar que las órbitas generadas por algún punto periódico ya no generan, a su vez, órbitas nuevas.

*Demostración:* Denotemos por  $z_k$  a  $F_a^k(z_0)$ ,  $k \geq 0$ . Que  $z_0$  sea de periodo  $N$  significa que los  $N$  puntos  $z_0, \dots, z_{N-1}$ , todos distintos entre sí, constituyen la órbita de  $z_0$ , que  $z_N = z_0$  y que, en general,  $z_{kN+j} = z_j$  para  $k \geq 0$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ .

En estas condiciones, de (4.7) se desprende lo siguiente:

(i) Si  $N$  es par,  $F_a^N(\rho z_0) = \rho z_0$  y claramente  $\rho z_0, \dots, \rho^2 z_{N-1}$  son todos diferentes entre sí y constituyen la órbita de  $\rho z_0$ , por lo que  $\rho z_0$  es de periodo exactamente  $N$ . La demostración para  $\rho^2 z_0$  es esencialmente igual.

(ii) Si  $N$  es impar,  $F_a^N(\rho z_0) = \rho^2 z_0$  y  $F_a^N(\rho^2 z_0) = \rho z_0$ , por lo que  $F_a^{2N}(\rho z_0) = \rho z_0$ . Claramente también, los  $2N$  elementos  $\rho z_0, \dots, \rho z_{N-1}, \rho^2 z_N = \rho^2 z_0, \rho z_{N+1} = \rho z_1, \dots, \rho^2 z_{2N-1}, \rho^2 z_N = \rho^2 z_0$ , son todos distintos entre sí y constituyen la órbita de  $\rho z_0$ . En consecuencia,  $\rho z_0$  es de periodo  $2N$ ; nótese que  $\rho^2 z_0$  es elemento de la órbita de  $\rho z_0$ .  $\square$

La simetría triangular de  $F_a$  no solamente genera órbitas periódicas adicionales, sino que las órbitas así generadas son de la misma naturaleza que las órbitas periódicas originales. Tomando en cuenta que, en virtud de 4.7, las órbitas periódicas generadas por (otros) puntos periódicos provienen de rotaciones rígidas de estos últimos, es fácil demostrar la siguiente proposición (omitimos la demostración).

**Proposición 4.4.2** *El punto periódico  $z_0$  es atractor, repulsor, silla o neutro si, y sólo si,  $\rho z_0$  y  $\rho^2 z_0$  son, a su vez, respectivamente, puntos periódicos atractores, repulsores, sillas o neutros.*

Por último, la otra simetría importante de  $F_a$  si el parámetro  $a$  es real, es respecto al eje  $X$ , y es consecuencia inmediata de la siguiente igualdad, fácil de comprobar:

$$\overline{F_a(z)} = F_a(\bar{z}), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (4.8)$$

**Proposición 4.4.3** *Si  $a \in \mathbb{R}$ , tenemos*

(i)  $z \in K_a \Leftrightarrow \bar{z} \in K_a$ . Es decir,  $K_a$  es simétrico respecto al eje  $X$ . Equivale-  
 almente,  $z \in B_a(\infty) \Leftrightarrow \bar{z} \in B_a(\infty)$  o bien,  $B_a(\infty)$  es simétrico respecto  
 al eje  $X$ .

(ii)  $z \in Per_N F_a \Leftrightarrow \bar{z} \in Per_N F_a$ .

(iii)  $z$  es un punto periódico atractor, repulsor, silla o neutro si, y sólo  
 si,  $\bar{z}$  es un punto periódico atractor, repulsor, silla o neutro.

*Demostración:* La afirmación (i) se sigue de (4.8) y del hecho de que  
 $|w| = |\bar{w}|$  para todo  $w \in C$ . La afirmación (ii) es una especie de repetición  
 de argumentos de la demostración del lema anterior, y (iii) se sigue de que  
 $DF_a(\bar{z})$  es la transpuesta de  $DF_a(z)$  y por lo tanto, ambas matrices tienen  
 los mismos valores propios.  $\square$

## 4.5. Comentarios sobre la dinámica en la fron- tera de $K_a$ , $-1 < a < 0$ .

La frontera de  $K_a$  es totalmente invariante si  $-1 < a < 0$ . En general,  
 si  $p \in intK_a$ , de acuerdo con la conjetura C2,  $p \in F_a^{-k}(\overline{Z_4(a)})$  para algún  
 $k \geq 0$ ; como para  $-1 < a < 0$ ,  $F_a^{-k+1}(\overline{Z_4(a)}) \subset intK_a$ , se sigue que  
 $F_a(p) \in intK_a$ . Es decir, bajo  $F_a$  los puntos del interior de  $K_a$  van a puntos  
 del mismo interior.

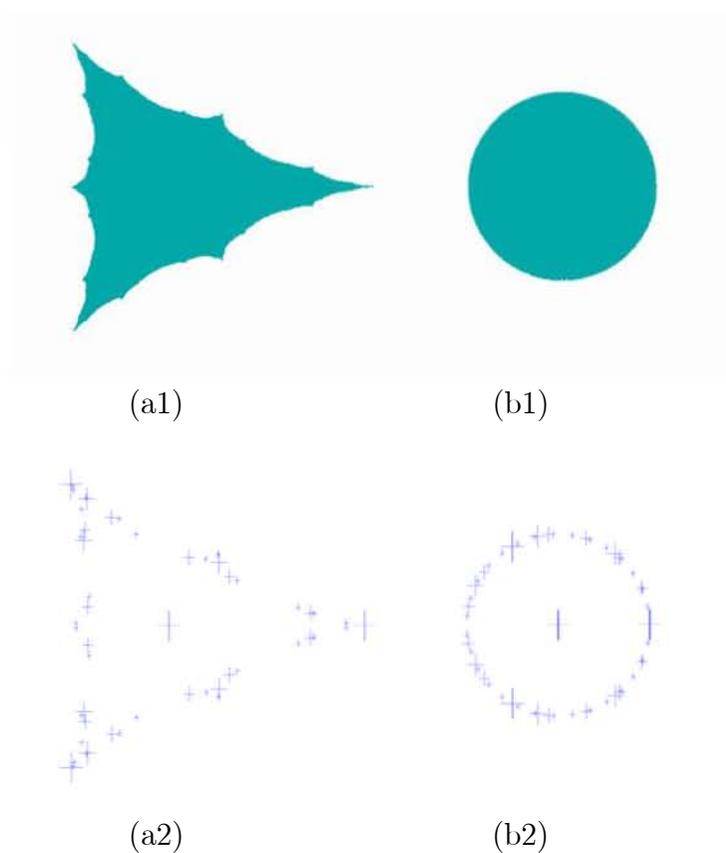
Recíprocamente, si  $p \in intK_a$  y  $z \in K_a$  es tal que  $F_a(z) = p$ , como  
 $p \in F_a^{-k}(\overline{Z_4(a)})$  para algún  $k$ , se sigue que  $z \in F_a^{-k-1}(\overline{Z_4(a)}) \subset intK_a$ .

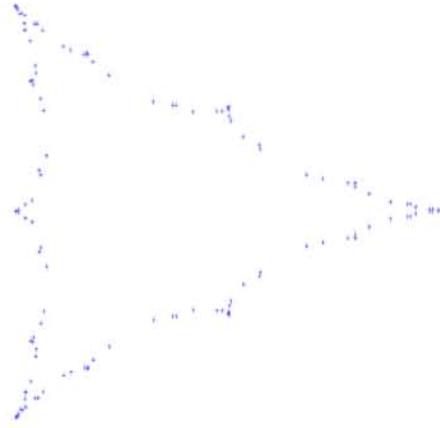
De todo esto se desprende que el interior de  $K_a$  es totalmente invariante.  
 Como  $K_a$  es totalmente invariante y  $\partial K_a \cap intK_a = \emptyset$ , se concluye que  $\partial K_a$   
 es totalmente invariante.

*Observación.* Para  $a = -1$ , la frontera de  $K_a$  es invariante hacia adelante  
 pero no hacia atrás. Esto es así porque, en este caso,  $K_a = \overline{Z_4(a)}$  y, como  
 sabemos,  $\partial K_a = L(a) = L_{-1}^*(a)$ ; por lo tanto, la imagen inversa de  $\partial K_a$  inter-  
 secta a esta frontera en tres puntos, que son las cúspides de la circunferencia  
 singular. Por esta razón también, para  $a = -1$  es falso que  $F_a^{-k+1}(\overline{Z_4(a)})$   
 está propiamente contenido en el interior de  $K_a$  para alguna  $k \geq 0$ . De he-  
 cho, para  $a = -1$  la conjetura C2 es falsa y la conjetura C1 se reduce a una  
 trivialidad.

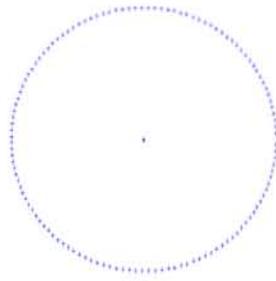
*La dinámica en la frontera.* Para  $a = -1$  tanto en la frontera de  $K_{-1}$  como en la cuenca de atracción de infinito,  $B_{-1}(\infty)$ , la dinámica de  $F_{-1}$  es conjugada con la de  $z \rightarrow z^2$  para  $|z| \geq 1$  (capítulo 2). Numéricamente todo parece indicar que para  $a \in (-1, 0)$  ocurre exactamente lo mismo: tanto en la frontera de  $K_a$  como en la cuenca de atracción de infinito,  $B_a(\infty)$ , la dinámica de  $F_a$  es conjugada con la de  $z \rightarrow z^2$  para  $|z| \geq 1$ .

De ser cierta esta apreciación se concluiría, en particular, que en la frontera de  $K_a$  la dinámica es caótica en el sentido de Devaney. A manera de ilustración las figuras 4.4 dan una idea de la densidad de puntos periódicos en  $\partial K_a$  contrastada con la situación correspondiente en la frontera del disco unitario.





(a3)



(b3)

Figura 4.4 En (a1) se muestra  $K_a$  para  $a = -0.49$ . En (a2) las cruces mayores corresponden a los puntos fijos (el origen y  $1 - 2a$ ) y se muestran además los puntos de periodo 2,3,4 y 5 en la frontera de  $K_a$ ; las cruces que corresponden a estos puntos van decreciendo de tamaño conforme aumenta el periodo (hay 4 tamaños). En (a3), se muestran los puntos de periodo 7 (en la frontera de  $K_a$ ). En la figura (bi) se muestra el mismo fenómeno que en la figura (ai),  $1 \leq i \leq 3$ , pero para la función  $z \rightarrow z^2$ , es decir, para  $a = 0$ .



## Capítulo 5

# Dinámica y Bifurcaciones de $F_a$ cuando $-1 < a < 0$

A grandes rasgos, la dinámica de  $F_a$  para  $a \in (-1, 0)$  es la siguiente. Recuérdese que, por definición,  $\Lambda_a = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_a^k(Z_4(a))$ . Cuando el parámetro (negativo)  $a$  está cercano al cero, sólo hay un punto fijo atractor en el interior de  $K_a$ , que es el origen, y las órbitas de todos los puntos en el interior de  $K_a$  convergen a este punto fijo atractor. En esta situación el conjunto  $\Lambda_a$  es sólo un punto: el origen; esto pasa para  $a \in [-\frac{1}{2}, 0]$ .

En  $a = -\frac{1}{2}$ , se produce lo que podríamos llamar la primera bifurcación global importante: el conjunto  $\Lambda_a$  deja de ser un punto y se convierte en un conjunto compacto, conexo, simple conexo y con interior no vacío. Este conjunto está contenido en  $\text{int}K_a$ , y ahora, esencialmente las órbitas de todos los puntos en  $\text{int}K_a$  convergen hacia él. Para  $-1 < a < -\frac{1}{2}$  se mantiene esta situación de que las órbitas de puntos en  $\text{int}K_a$  eventualmente ingresan, o tienden, al conjunto  $\Lambda_a$ .

Hasta aquí la historia es fácil de contar. Conforme  $a$  varía entre  $-\frac{1}{2}$  y  $-1$ , dentro de  $\Lambda_a$  sucede una serie de transformaciones dinámicas de complejidad creciente: coexisten diversos puntos periódicos atractores; aparecen curvas simple cerradas atractoras en coexistencia, también, con puntos periódicos atractores; aparecen diferentes conjuntos “atractores caóticos”, se producen “choques” entre estos conjuntos que propician “fusiones” entre ellos, etc. A la vez, eventualmente se va creando una “zona anular atractora” (homeomorfa a un anillo  $0 < \rho \leq |z| \leq \zeta$ ) en torno a la frontera de  $\Lambda_a$ , que va “capturando” la complejidad dinámica mencionada. El complemento, dentro de  $\Lambda_a$ , de esta

“zona anular atractora”, se va convirtiendo en lo que, autores como [1], [19] y otros, llaman un “hoyo” en torno al origen, ahora punto fijo repulsor. Las trayectorias dentro de este hoyo salen todas “expulsadas” hacia la “zona anular” mencionada.

Conforme el valor del parámetro se aproxima a  $-1$ , la “zona anular atractora” se hace más grande y el “hoyo” se cierra, provocando que todo el conjunto  $\Lambda_a$  se convierta en un “gran atractor caótico”, con una dinámica interna semejante a la descrita en el capítulo 3 para  $a = -1$ . Justamente en  $a = -1$ , ocurre que  $\Lambda_a = K_a$ , y para  $a < -1$ , este “atractor caótico” se destruye, convirtiéndose seguramente en un conjunto de Cantor, ahora “repulsor caótico”.

Toda esta segunda parte de la historia no es fácil de descifrar ni de contar.

En este trabajo no se exponen todos estos cambios que ocurren (muchos de los cuales no conocemos) ni tampoco todos los mecanismos que obligan a que tal o cual cambio se produzca.

Aquí procedemos como sigue. La parte “fácil de contar” se expone con cierto detalle (secciones 5.1 y 5.2), dado que esto puede hacerse de una manera bastante accesible. Para la parte restante, el objetivo principal ha sido seleccionar sólo dos bifurcaciones –bastante evidentes numéricamente– y fundamentarlas matemáticamente. Las bifurcaciones seleccionadas son la que llamamos *primera bifurcación de Naimark-Sacker*, que ocurre al cruzar el valor (aproximado)  $a = -0.7742918$  (sección 5.4), y la *desaparición de un hoyo en torno al origen*, que tiene lugar cuando  $a = -0.83929$  (sección 5.7). Sin embargo, como es casi imposible ignorar el mundo de cambios dinámicos fuertes que se producen antes y después de cada una de éstas, hemos incluido algunos aspectos mínimos de lo que va ocurriendo entre una y otra de las bifurcaciones señaladas, con la intención de que se comprenda mejor la creciente complejidad dinámica que va apareciendo conforme el parámetro decrece y se aproxima a  $-1$ . Estos aspectos “transitorios” (secciones 5.3 y 5.5) no se pretende detallarlos demasiado, sino simplemente evidenciarlos, casi exclusivamente a base de figuras *ad-hoc* y de experimentación numérica.

En general, dado lo extenso (y técnico) del material que se presenta en este capítulo, hemos tratado, en todos los casos, de basarnos más en la discusión informal de las ideas básicas; los detalles más técnicos de las demostraciones se turnan a apéndices especiales.

## 5.1. El origen es el único atractor en $\text{int}K_a$ si

$$-\frac{1}{2} = a_0 < a < 0.$$

Para cada parámetro en el intervalo  $(-\frac{1}{2}, 0)$  la función  $F_a$  sólo tiene dos puntos fijos: el origen, que es atractor y está en el interior de  $K_a$ , y  $\alpha(a) = 1 - 2a$  que es repulsor y está en  $\partial K_a$ . Ambos son hiperbólicos: el valor absoluto de los valores propios de  $DF_a(0, 0)$  es menor que 1 y el de los valores propios asociados al repulsor es mayor que 1.

Para  $a \in (-\frac{1}{2}, 0)$  el origen es el *único* punto periódico en el interior de  $K_a$ . Esto es muy sencillo de demostrar para  $a \in [-\frac{1}{3}, 0)$  (véase Apéndice 5A) y numéricamente es evidente para todos los parámetros en el intervalo  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ .

En consecuencia, *para*  $a \in (-\frac{1}{2}, 0)$  *se tiene que*  $\Lambda_a = \{0\}$  y a la vez, *que todo el interior de*  $K_a$  *es cuenca de atracción del origen*. Hasta aquí, entonces, se puede decir que la dinámica en el interior de  $K_a$  es sencilla.

Las primeras cuatro de las figuras 4.3 del capítulo anterior muestran conjuntos de Julia llenos  $K_a$  para varios parámetros entre 0 y  $-\frac{1}{2}$ .

Exactamente en  $a = -\frac{1}{2}$  los valores propios de  $DF_a(0, 0)$  son 1 y  $-1$ : *el origen deja de ser un punto fijo hiperbólico*.

Por una parte, la experimentación numérica nos hace pensar que, de cualquier manera, en  $a = -\frac{1}{2}$  prevalece la misma situación: el origen sigue siendo atractor y todo el interior de  $K_a$  es cuenca de atracción; una diferencia sería que, ahora, la convergencia al atractor es excesivamente lenta.

Por otra parte, justamente en este parámetro ocurre la primera bifurcación importante; siendo, sin embargo, 1 y  $-1$  los valores propios de  $DF_a(0, 0)$  cuando  $a = -\frac{1}{2}$ , se trata de una situación no-hiperbólica. Los cambios que ocurren al pasar por este parámetro modifican la naturaleza global de  $K_a$  y los consideramos en la siguiente sección.

## 5.2. El conjunto $\Lambda_a$ para $a \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

### 5.2.1. Dinámica en el interior de $K_a$ .

Consideremos al disco  $D_{|a|}$  cuya frontera es el conjunto singular  $L_{-1}(a)$ . Sean  $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  y  $a_0 = -\frac{1}{2}$ .

Para  $a \in (a_1, a_0)$  aparecen dos nuevos puntos fijos atractores y cinco

órbitas de periodo 2; tres de estas últimas están conformadas por puntos silla y dos por puntos atractores (bajo  $F_a^2$ ). Todos estos puntos periódicos están contenidos en  $D_{|a|}$ . En particular, una de las órbitas de puntos silla de periodo 2 está contenida en  $\mathbb{R}$  (ver fig. 5.1).

Desde el punto de vista de la restricción de  $F_a$  a  $\mathbb{R}$ , esta órbita de números reales es atractora (de periodo 2) y es resultado de una bifurcación típica de duplicación de periodo (la primera de la cadena de bifurcaciones de este tipo que tiene la restricción de  $F_a$  a  $\mathbb{R}$ )<sup>1</sup>.

Numéricamente se comprueba que el origen, que ahora es repulsor, y los puntos mencionados de periodo 1 o 2, constituyen la totalidad de puntos periódicos contenidos en el interior de  $K_a$ . Exceptuando al origen, a los puntos silla y a sus correspondientes variedades estables (globales), la órbita de todo elemento en el interior de  $K_a$  converge a uno u otro de los atractores (de periodo 1 o 2) que coexisten en esta etapa.

---

<sup>1</sup>Para cada  $a \in [-1, 0)$  existe  $\lambda \in (1, 4]$  de manera que la restricción de  $F_a$  a  $\mathbb{R}$  es conjugada con  $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . O sea que en los intervalos de parámetros mencionados, toda la complejidad dinámica de la famosa familia logística  $f_\lambda$  la tiene también  $F_a$  restringida a  $\mathbb{R}$ .

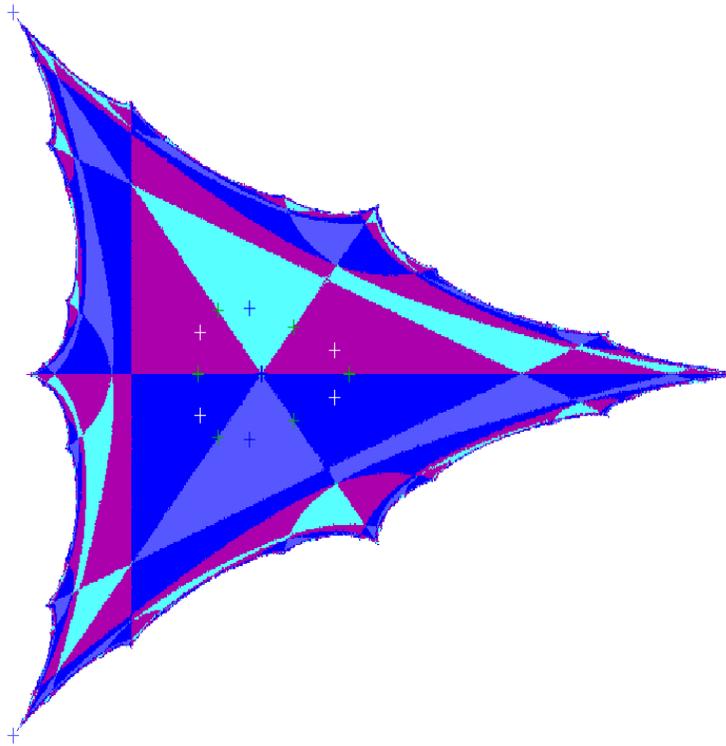


fig. 5.1. El conjunto  $K_a$  para  $a = -0.55$

En la figura 5.1 los puntos atractores y sillas están marcados con pequeñas cruces.

Las 6 regiones triangulares que se observan con un vértice común en el origen son las respectivas *cuencas inmediatas de atracción* de los atractores de periodo 1 y 2. La región triangular central en el semiplano superior es la cuenca inmediata de atracción de un punto fijo, que llamamos  $P_a$ . Las regiones contiguas a ésta corresponden, la del lado izquierdo, a la cuenca inmediata de uno de los atractores de periodo 2, que llamamos  $Q_1$ , y la del lado derecho, a la de su compañero de órbita,  $Q_2$ .

Simétricas con estas 3 cuencas inmediatas, están las correspondientes a  $\overline{P_a}$ ,  $\overline{Q_1}$ , y  $\overline{Q_2}$ , en la parte inferior del *eje X*.

Considérese ahora a la región triangular que constituye la cuenca inmediata de atracción de  $Q_1$ . Uno de los lados de (la frontera de) esta región triangular, es un intervalo en el *eje X* negativo, que contiene a un punto silla de periodo 2,  $s_1 \in \mathbb{R}$ . Este intervalo es parte de la variedad estable local de  $s_1$ . Hay un intervalo análogo en el *eje X* positivo, que contiene a  $s_2$  y que

constituye la variedad estable local de  $s_2$ . Si  $x_0$  está en la variedad estable local de  $s_i$ , la sucesión  $\{F^{2k}(x_0)\}$  es una sucesión monótona convergente a  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Por las simetrías de  $F_a$ , en  $\rho\mathbb{R}$  y  $\rho^2\mathbb{R}$  hay intervalos análogos que constituyen, respectivamente, las variedades estables locales del resto de los puntos silla de periodo 2.

Como se puede apreciar, todo el interior de  $K_a$  se subdivide de un modo complejo –aunque muy simétrico– en una infinidad de regiones que son imágenes inversas de todos los órdenes de todas las cuencas inmediatas de atracción; las fronteras de estas regiones son, a su vez imágenes inversas de todos los órdenes de las variedades estables locales referidas. Así, el conjunto  $K_a$  en esta etapa es la cerradura de la unión de todas las cuencas (globales) de atracción mencionadas. En particular, todo punto en el interior de  $K_a$  que no está en alguna imagen inversa de alguna de estas variedades estables locales, tiende a alguno de los puntos periódicos atractores de periodo 1 o 2.

### 5.2.2. El (nuevo) conjunto $\Lambda_a$ y la peculiar frontera de $\Lambda_a$

La figura 5.2 muestra la frontera del conjunto  $\Lambda_a$  en el interior de  $K_a$ . Este conjunto,  $\Lambda_a$ , ha dejado de ser un punto para convertirse en un compacto, conexo, simple conexo, con interior no vacío. Dado que la órbita de todo punto en  $\text{int}K_a$  eventualmente entra en  $\Lambda_a$ , o tiende asintóticamente a  $\Lambda_a$ , éste es un conjunto atractor; el interior de  $K_a$  (o  $Z_4(a)$ , por ejemplo) juega el papel de la vecindad  $U$  de la definición 4.1.1.

El conjunto  $\Lambda_a$  tiene aún más propiedades:

**Teorema 5.2.1** *Para  $a \in (a_1, a_0)$  la frontera de  $\Lambda_a$  es una curva simple cerrada, invariante hacia adelante, y está formada por la unión de las variedades inestables locales de los puntos silla de periodo 2, y también, por todos los puntos atractores de periodo 1 o 2. Además, esta frontera de  $\Lambda_a$  no es unión finita de arcos críticos sino una curva límite de arcos críticos. En consecuencia,  $\Lambda_a$  no es una zona absorbente.*

Por *curva límite de arcos críticos* se quiere decir que cada punto de la curva es punto de acumulación de una sucesión  $\{a_k\}$ , donde  $a_k \in L_k$  para  $k \in \mathbb{N}$ . Como consecuencia de que  $\partial\Lambda_a$  es tal curva límite se sigue que  $\Lambda_a$  no es (aún) una zona absorbente.

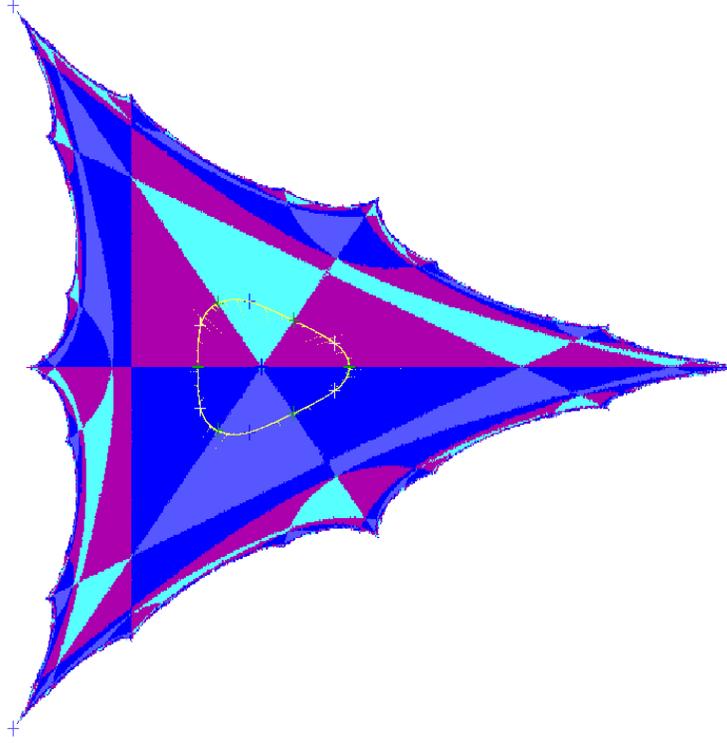


fig. 5.2: La frontera  $\partial\Lambda_a$ .

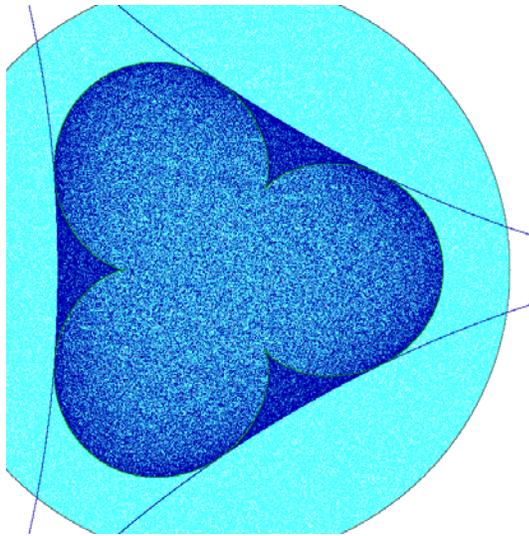
La esencia de la demostración de este teorema es como sigue (para mayores detalles véase Apéndice 5B). Geométricamente es fácil ver lo siguiente:

$$F_a^{2k}(\overline{Z_4}) \subset F_a^{2k-2}(\overline{Z_4}), \quad \forall k \geq 2.$$

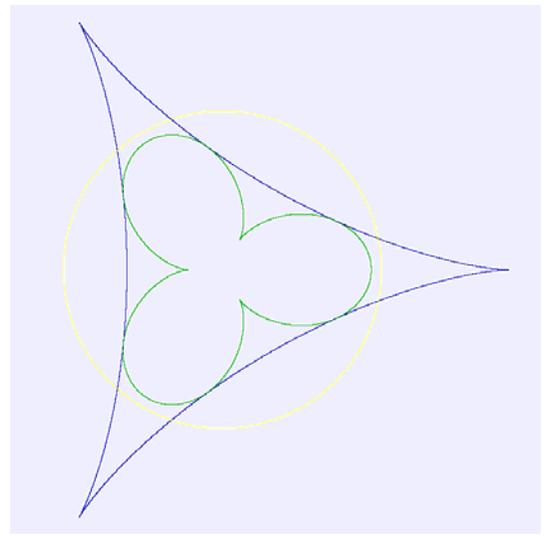
O sea que las iteraciones *pares* de  $\overline{Z_4}$  forman una cadena estrictamente descendiente de conjuntos compactos conexos. Por ejemplo, en la figura 5.3(a) se nota que, aunque  $F(\overline{Z_4})$  está propiamente contenido en  $D_{|a|}$ , las fronteras de  $F(\overline{Z_4})$  y de  $Z_4$  tienen ciertos arcos en común; en 5.3(b) se muestra cómo, en cambio,  $F_a^2(\overline{Z_4})$  está propiamente contenido tanto en  $Z_4$  como en  $F(\overline{Z_4})$ . En 5.3(c) se aprecia cómo las iteraciones pares de  $\overline{Z_4}$  van quedando propiamente contenidas en iteraciones previas. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , La frontera de  $F_a^{2k}(\overline{Z_4})$  está formada por ciertos arcos de  $L_{2k-1}$  y de  $L_{2k}$  (ver figuras 5.3(d),(e),(f)). Es decir, todos estos conjuntos  $F_a^{2k}(\overline{Z_4})$  son zonas absorbentes (simple conexas) y su intersección infinita es justamente  $\Lambda_a$ , por lo que  $\Lambda_a$  es compacto conexo (y simple conexo) y está propiamente contenido en  $F_a^{2k}(\overline{Z_4})$  para todo  $k$ . Se sigue, entonces, que  $\partial\Lambda_a$  no es unión finita de arcos críticos

sino una curva límite de arcos críticos; en consecuencia,  $\Lambda_a$  no es una zona absorbente.

Como las variedades inestables de los puntos silla son conjuntos invariantes hacia adelante (y las órbitas periódicas también), por la proposición 4.3.1, deben estar contenidos en  $\Lambda_a$ . Aplicando ahora el  $\lambda$ -*lema*<sup>2</sup> (en combinación con lo anterior), se concluye que la  $\partial\Lambda_a$  está conformada por dichas variedades inestables junto con los puntos de periodo 1 y 2 que se han indicado. Esta peculiar conformación de la frontera de  $\Lambda_a$  y el hecho de que en esta etapa está contenida en  $D_{|a|}$  - y que, por lo mismo, no toca al conjunto singular  $L_{-1}(a)$  - nos permite concluir que  $\partial\Lambda_a$  es invariante hacia adelante.  $\square$



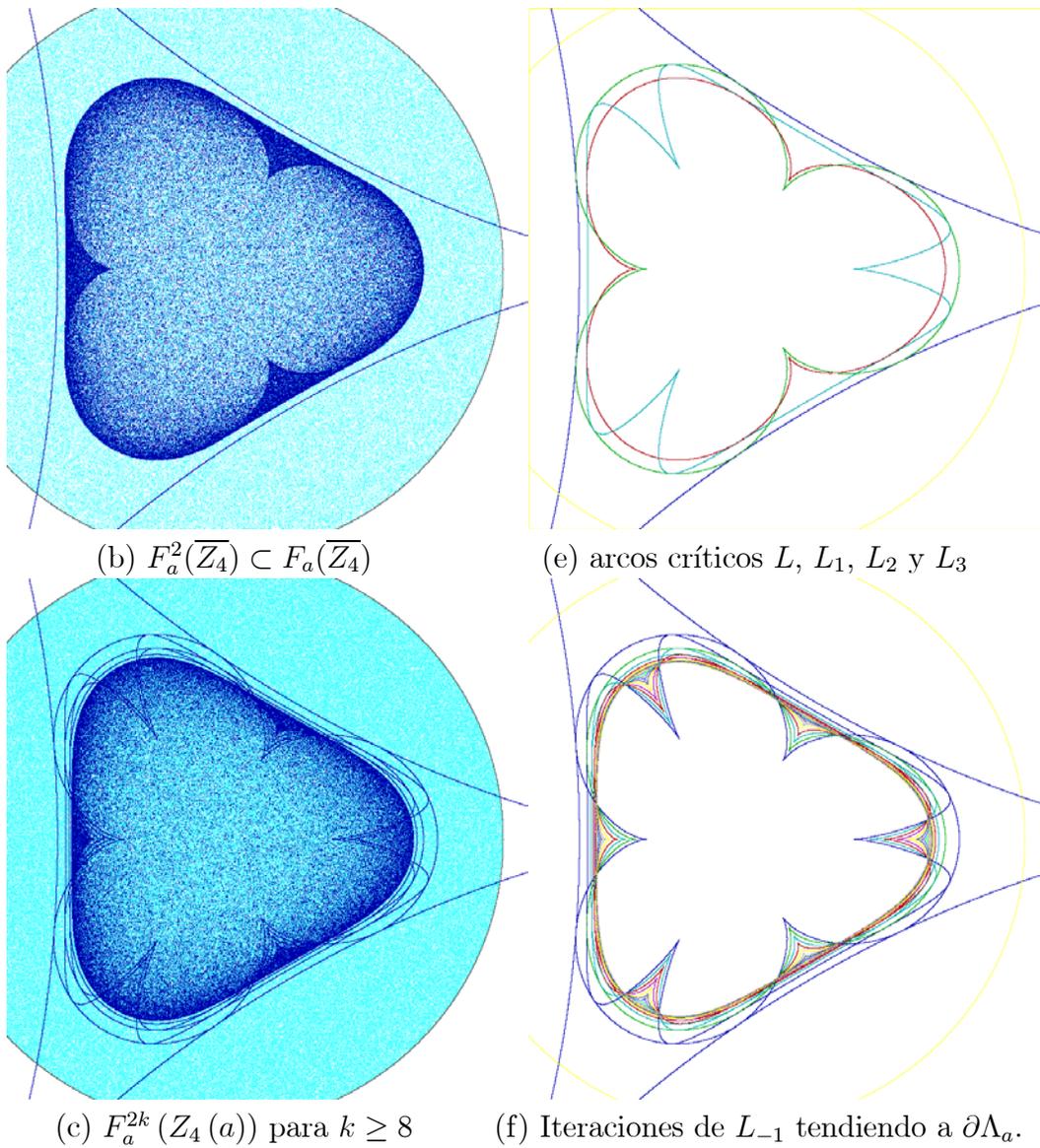
(a)  $F(\overline{Z_4})$  contenido en  $D_a$



(d)  $L_{-1}$  (circunferencia),  $L$  (hipocicloide) y  $L_1$

---

<sup>2</sup>Véase [21, cap. 2, p. 90]



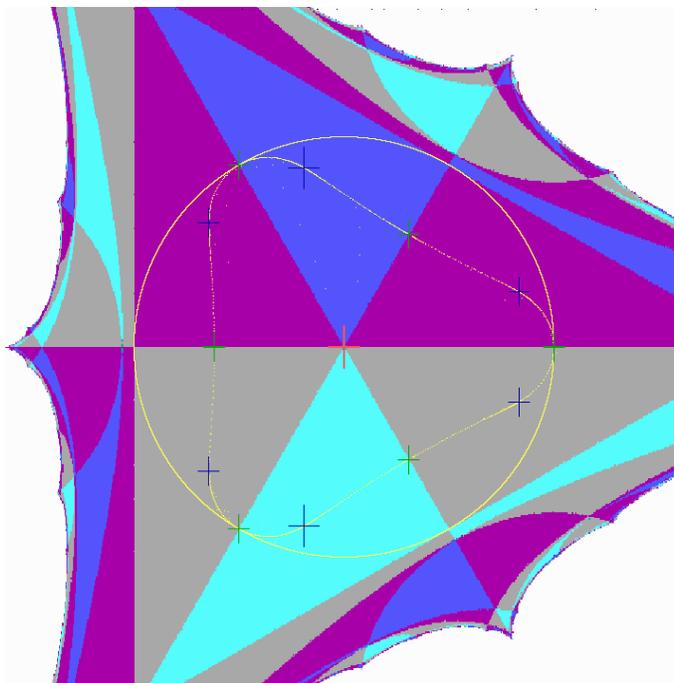
figuras 5.3

### 5.3. Etapa de transición

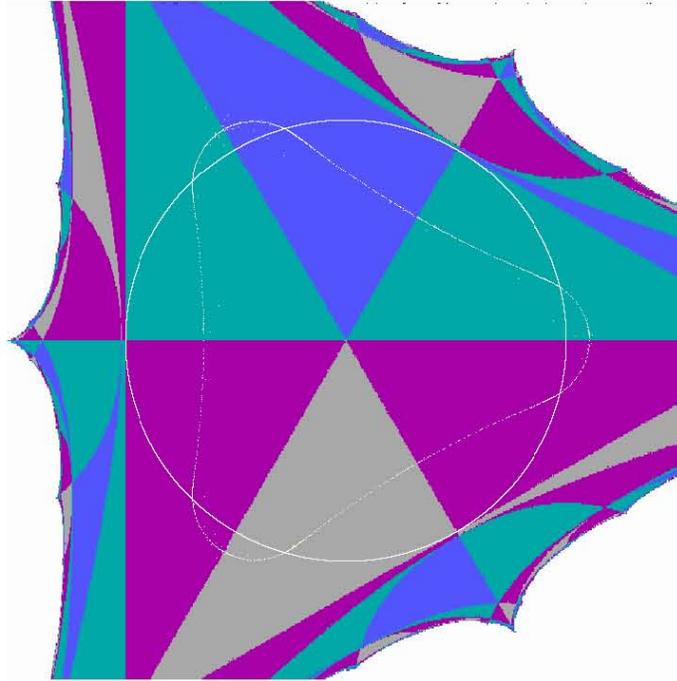
Conforme el parámetro  $a$  decrece, el conjunto  $\Lambda_a$  “crece” hasta que, en  $a = a_1$ , la frontera de este conjunto se vuelve tangente a la circunferencia

singular  $L_{-1}$  en tres puntos (fig. 5.4(a)) y, para  $a < a_1$ , esta frontera cruza  $L_{-1}$  (fig. 5.4(b)). Los puntos de tangencia entre  $\Lambda_a$  y  $L_{-1}$  en  $a = a_1$  son  $s_2 \in \mathbb{R}$ ,  $Q_1 \in \rho\mathbb{R}$  y  $\overline{Q_1}$ , puntos silla de periodo 2 que para  $a = a_1$  son puntos críticos tanto de  $F_a$  como de  $F_a^2$ .

El hecho de que la frontera de  $\Lambda_a$  cruce  $L_{-1}$ , obliga a que existan arcos de  $L_{-1}$  en el interior de  $\Lambda_a$  y, por lo tanto, a que ciertos arcos de  $L$  formen parte de  $\partial\Lambda_a$ . Empieza, entonces, una transformación según la cual la frontera de  $\Lambda_a$  va perdiendo las características que hemos descrito hasta que, para  $-1 < a \leq -\frac{2}{3}$ , la frontera de  $\Lambda_a$  es una unión finita de arcos críticos (concretamente, de arcos de  $L$  y  $L_1$ ). Es decir, para  $-1 < a \leq -\frac{2}{3}$ ,  $\Lambda_a$  se ha convertido en una zona absorbente.



5.4(a) la frontera de  $\Lambda_{a_1}$  es tangente a  $L_{-1}$



5.4(b) la frontera de  $\Lambda_a$  cruzó  $L_{-1}$

figuras 5.4

### 5.3.1. Nueva coexistencia de atractores: Nacimiento de órbitas de periodos 3 y 6

Para los parámetros  $a \in (b, a_2)$ , con valores aproximados  $a_2 = -0.768775$  y  $b = -0.791$ , cerca del punto fijo atractor  $P_a$  existen dos órbitas nuevas de periodo tres: una atractor, que denotaremos por  $\{p_1(a), p_2(a), p_3(a)\}$ , y otra de puntos silla, que denotaremos por  $\{\sigma_1(a), \sigma_2(a), \sigma_3(a)\}$ . En la figura 5.5 el punto fijo atractor  $P_a$  se señala con una cruz grande y los puntos de periodo tres, atractores y sillas, se señalan con cruces más pequeñas. Se muestra cómo, para cada  $i = 1, 2, 3$ , la cuenca inmediata de atracción del punto atractor  $p_i(a)$  es una región ovalada cuya frontera contiene al punto silla  $\sigma_i(a)$ .

La aparición de estas nuevas órbitas proviene de lo que se conoce como una bifurcación silla-nodo; se trata de una bifurcación según la cual, al cruzar

determinado valor del parámetro, aparecen 2 órbitas nuevas de cierto periodo  $k$  que previamente no existían: una atractora y otra formada por puntos silla. Justo en el valor del parámetro en el que se produce la bifurcación -  $a_2$  en nuestro caso - la órbita nueva sólo es una y es “neutra” (i.e., asociada con un valor propio de módulo 1). Intuitivamente, la bifurcación se realiza, entonces, como si en el “instante siguiente” la órbita nueva se desdoblara en dos, una atractora y otra de puntos silla.

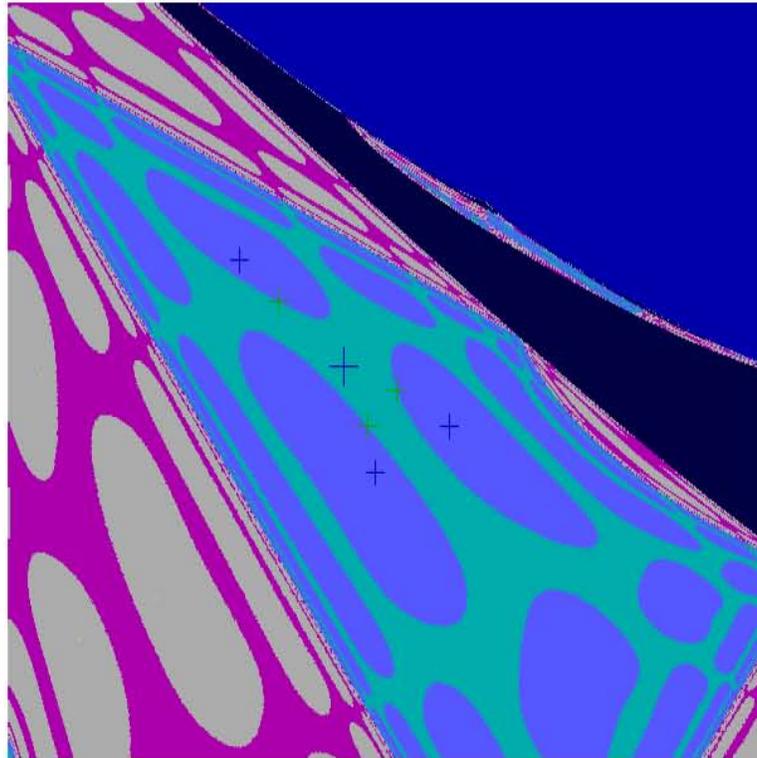


figura 5.5

En la figura 5.5 se ilustra también cómo una infinidad de imágenes inversas (de orden creciente) de estas regiones ovaladas parece llenar de “agujeros” la cuenca de atracción del punto fijo atractor  $P_a$ , con lo cual ésta deja de ser simple conexa (de hecho todas las componentes de la cuenca global de atracción de  $P_a$  dejan de ser simple conexas llenándose de “agujeros”. Ello se aprecia en la figura 5.6).

Globalmente, las simetrías de la función obligan a que cada una de estas órbitas de periodo 3 genere otras tres de la misma naturaleza (atractora o

silla): una también de periodo tres, simétrica respecto al *eje X*, y otras dos de periodo 6 (véase sección 4.4 del capítulo anterior). Es decir, en realidad en  $K_a$  existen ocho órbitas nuevas (cuatro de periodo 3 y cuatro de periodo 6) para  $a \in (b, a_2)$ : los atractores y las sillas de periodo 3 aparecen, por pares respectivos, en las que antes eran cuencas inmediatas de atracción de los puntos fijos  $P_a$  y  $\overline{P}_a$ . Los puntos de periodo 6, en las que eran cuencas inmediatas de los atractores de periodo 2. Así, los nuevos puntos atractores de periodo 3 se disputan el terreno con los viejos puntos fijos atractores y los atractores de periodo 6, con los atractores de periodo 2. Obviamente ello da lugar a una subdivisión infinita del interior de  $K_a$  más compleja que la que había antes, como se puede apreciar en la siguiente figura 5.6 (los puntos de periodos respectivos 1, 2, 3 y 6, aparecen marcados con cruces de mayor a menor tamaño).

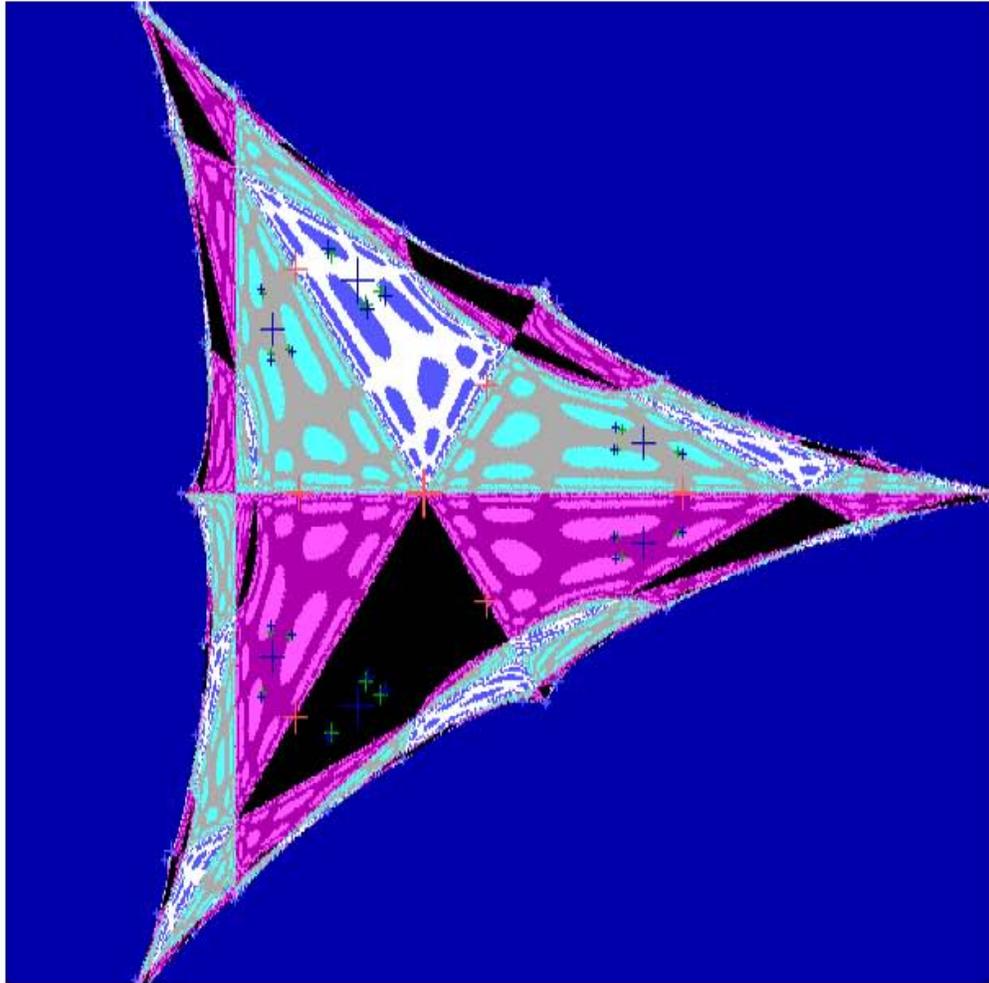


figura 5.6

En este contexto, en el que  $\Lambda_a$  ya se volvió una zona absorbente y la dinámica la domina el hecho de que coexisten puntos periódicos atractores de periodos respectivos 1, 2, 3 y 6, tiene lugar una bifurcación de Naimark-Sacker.

#### 5.4. Primera bifurcación de Naimark-Sacker

Supóngase que  $\{f_\mu\}$  representa una familia de sistemas dinámicos con la siguiente propiedad: al asumir el parámetro un cierto valor, digamos  $\mu = \mu_0$ , un punto fijo  $P_\mu$  cambia de ser atractor a repulsor (o de ser repulsor

a atractor) y nace una curva  $\Gamma_\mu$ , simple cerrada, invariante, “atractora” (o “repulsora”). El punto fijo queda contenido en la región acotada por la recién aparecida curva invariante  $\Gamma_\mu$  y tanto la órbita de puntos dentro de dicha región como la de puntos cercanos fuera de la región, tienden asintóticamente a  $\Gamma_\mu$  (o se alejan de  $\Gamma_\mu$ ).

En dinámica continua, un fenómeno parecido a éste se conoce como *bifurcación de Hopf* o de *Hopf-Andronov*. En dinámica discreta se conoce también con esos nombres, pero de acuerdo con algunos autores es más apropiado llamarla *bifurcación de Naimark-Sacker*.<sup>3</sup>

En particular, la hipótesis básica (no la única) bajo la cual se produce esta bifurcación, es que los valores propios de  $DF_\mu(P_\mu)$  sean complejos conjugados y crucen la circunferencia unitaria (de adentro hacia afuera o viceversa) cuando  $\mu = \mu_0$ . Es decir, denotando a dichos valores propios por  $\lambda(\mu)$  y  $\overline{\lambda(\mu)}$ , debe ocurrir que

$$|\lambda(\mu_0)| = \left| \overline{\lambda(\mu_0)} \right| = 1. \quad (5.1)$$

En la familia de funciones  $F_a$ , en el contexto señalado en la sección anterior, de convivencia de puntos periódicos atractores de periodos respectivos 1, 2, 3 y 6, tiene lugar una bifurcación de Naimark-Sacker. Concretamente, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 5.4.1** *Para  $a \in (-1, 0)$  la familia  $\{F_a\}$  presenta una bifurcación Naimark-Sacker cuando el parámetro  $a$  decrece y cruza el valor*

$$a_4 = \frac{-8 + \sqrt{112}}{24} = -0.7742918\dots$$

*Específicamente, en  $a = a_4$  nace una curva simple cerrada  $\Gamma_a$  atractora en torno al punto fijo  $P_a = \left(\frac{1}{2} + a, \sqrt{3a^2 + a - \frac{1}{4}}\right)$ , que subsiste para  $a \in J_a = (a_5, a_4)$  con  $a_5 \cong -0.7764 < a_4$ . Para  $a_4 < a$ ,  $P_a$  es atractor y para  $a \in J_a$  se convierte en repulsor (ver figura 5.7).*

*Demostración:* Se calculan formas normales apropiadas para  $F_a$  y se utiliza el teorema de Naimark-Sacker. Para los detalles véase el véase Apéndice 5C.  $\square$

---

<sup>3</sup>Véase, por ejemplo, a [19] o [1]. Estos autores mencionan que, en forma independiente, Naimark en 1959 y Sacker en 1964, demostraron el teorema de esta bifurcación.

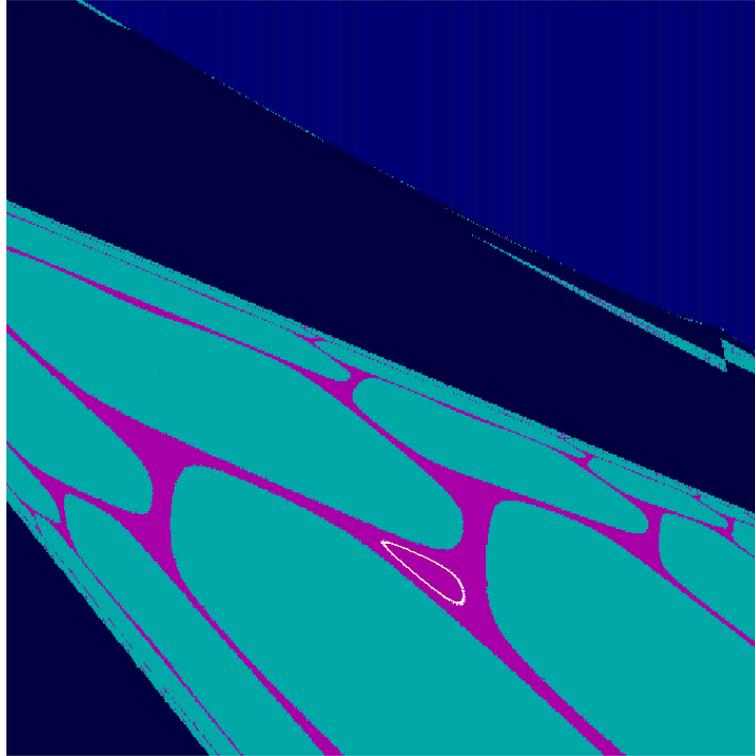


figura 5.7: La curva  $\Gamma_a$ , recién surgida, rodeada de las cuencas de los atractores de periodo 3.

Por las simetrías de  $F_a$ , para  $a \in J_a$  nacen cinco curvas invariantes atractoras además de  $\Gamma_a$ : Una en torno a  $\overline{P_a}$  y las otras cuatro en torno a los puntos de periodo dos  $Q_1, Q_2, \overline{Q_1}, \overline{Q_2}$  (ver figura 5.8). En  $a = a_4$ , tanto  $\overline{P_a}$  como los puntos mencionados de periodo dos dejan de ser atractores y se convierten en repulsores.

Cada una de estas nuevas curvas atractoras nace en lo que antes era la cuenca inmediata de atracción de un punto atractor de periodo 1 o 2. Tales cuencas inmediatas se vuelven ahora las cuencas inmediatas de las curvas mencionadas.

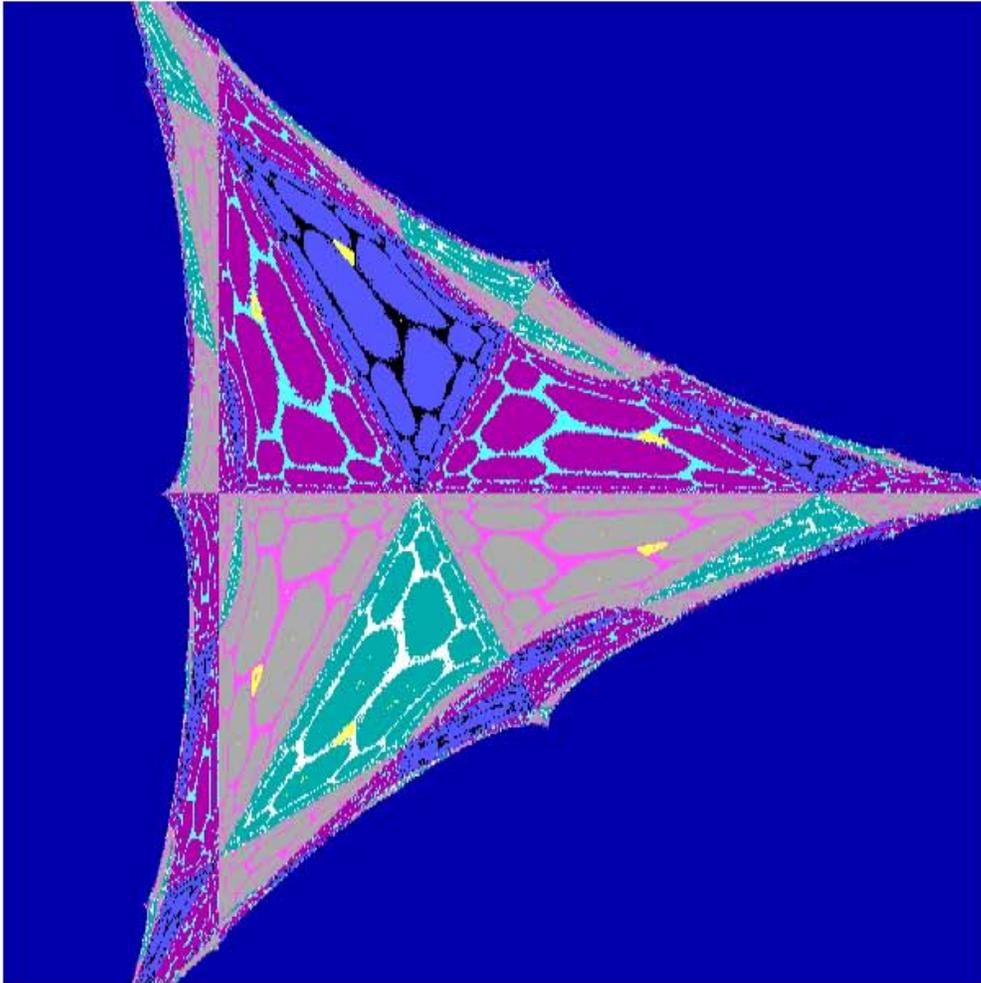


fig. 5.8: Curvas atractoras en  $intK_a$

Centrándonos en  $\Gamma_a$  una descripción breve de lo que ocurre es la siguiente: En cierto sentido, el papel del antiguo punto fijo atractor  $P_a$  - que ahora es repulsor - lo juega ahora la curva atractora  $\Gamma_a$ . La parte de lo que antes era cuenca inmediata de atracción de  $P_a$  que queda fuera de  $\Gamma_a$ , se vuelve ahora parte de la cuenca inmediata de atracción de  $\Gamma_a$ . La otra parte de esta cuenca inmediata es la región comprendida dentro de  $\Gamma_a$ . En esta última región la naturaleza repulsora de  $P_a$  obliga a las órbitas de los puntos ahí contenidos a tender asintóticamente a  $\Gamma_a$ . Está claro que en torno a las otras curvas atractoras sucede algo semejante.

La dinámica, entonces, se ve globalmente afectada en virtud de que para  $a \in J_a$  las curvas atractoras coexisten con las órbitas atractoras de periodo

3 y 6.

## 5.5. Nueva etapa de transición

### 5.5.1. Desaparición de $\Gamma_a$ y el resto de las curvas atractoras.

Eventualmente estas curvas atractoras desaparecen. A grandes rasgos ocurre lo siguiente: manteniendo  $a_4$  y  $a_5$  como en el enunciado de la proposición 5.7.6, para  $a \in (a_5, a_4)$  las curvas invariantes atractoras se van haciendo más grandes hasta que, en  $a = a_5$ , cada una de ellas literalmente choca con la frontera de su propia cuenca de atracción que es, a su vez, frontera de la cuenca inmediata de atracción de alguno de los puntos atractores cercanos de periodo 3 o 6, según sea el caso. Este “choque”, catalogado por algunos autores como una *bifurcación de contacto*,<sup>4</sup> provoca la desaparición mencionada.

La figura 5.9 ilustra una situación muy próxima a esta bifurcación: la curva  $\Gamma_a$ , en cuyo interior se señala al punto fijo repulsor  $P_a$ , está a punto de chocar con la frontera de su propia cuenca de atracción y con la de las cuencas (inmediatas) de los puntos atractores de periodo tres,  $p_1(a), p_2(a), p_3(a)$ , señalados con cruces dentro de las regiones ovaladas que constituyen las cuencas referidas. En la frontera de éstas se aprecia también la órbita de puntos silla asociada a la órbita atractora de periodo 3.<sup>5</sup>

---

<sup>4</sup>ver [1] o [19].

<sup>5</sup>Asimismo, en la figura 5.9, a la izquierda se observa también una de las curvas invariantes de periodo 2 (con un punto repulsor de periodo 2 dentro de la misma), así como tres puntos atractores y tres puntos silla de periodo 6.

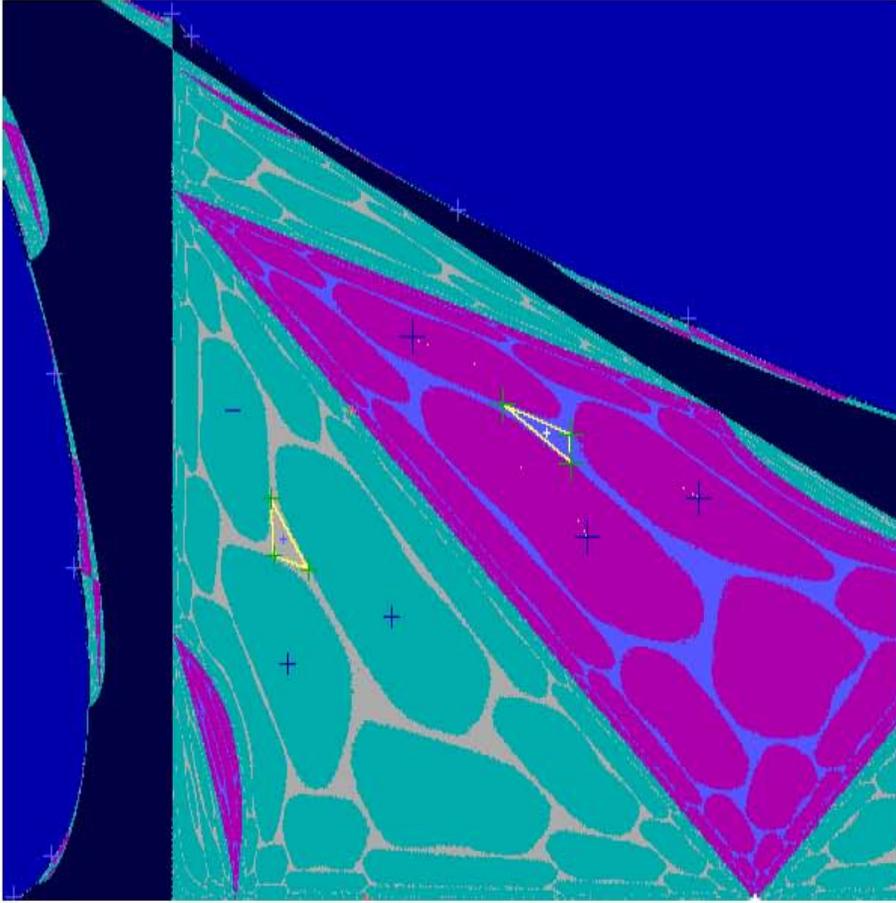
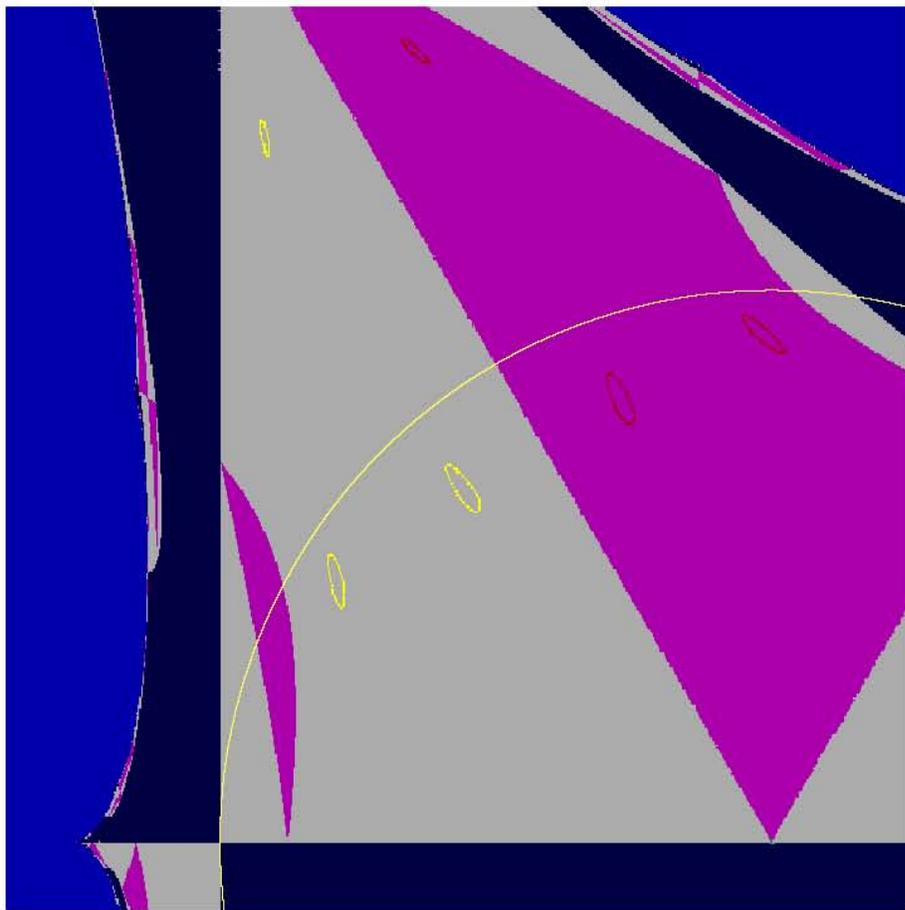


figura 5.9

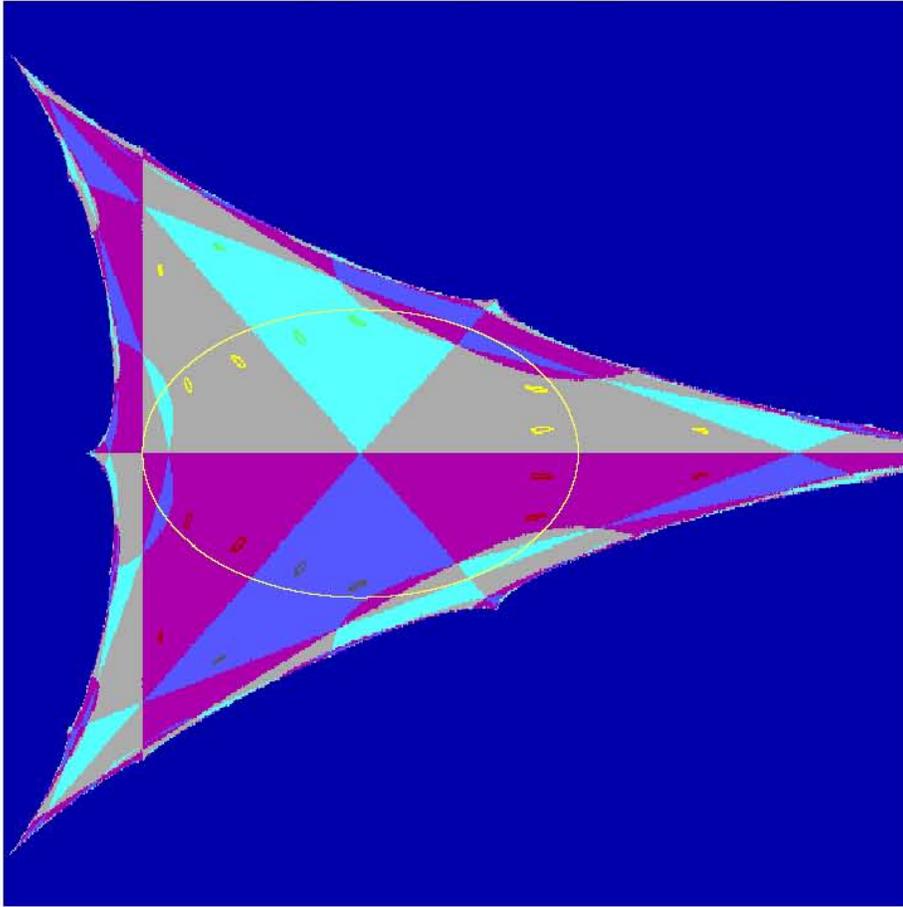
### 5.5.2. Nueva bifurcación de Naimark-Sacker

Tras la desaparición de  $\Gamma_a$  y las otras curvas invariantes existentes, los puntos atractores (y sillas) de periodos respectivos tres y seis subsisten, hasta que eventualmente tiene lugar una nueva bifurcación de Naimark-Sacker en torno a cada uno de ellos (los atractores). Nacen 18 curvas atractoras invariantes: 6 de periodo tres y 12 de periodo seis; a su vez, los puntos atractores (de periodos tres y seis, respectivamente) se vuelven repulsores. En la figura 5.10(a) se observan tres de estas curvas atractoras de periodo 3 (en la región triangular central) y tres de periodo 6 (a la izquierda); en 5.10(b) se muestra  $K_a$  con las 18 nuevas curvas. Tras un muy complejo proceso dinámico (en

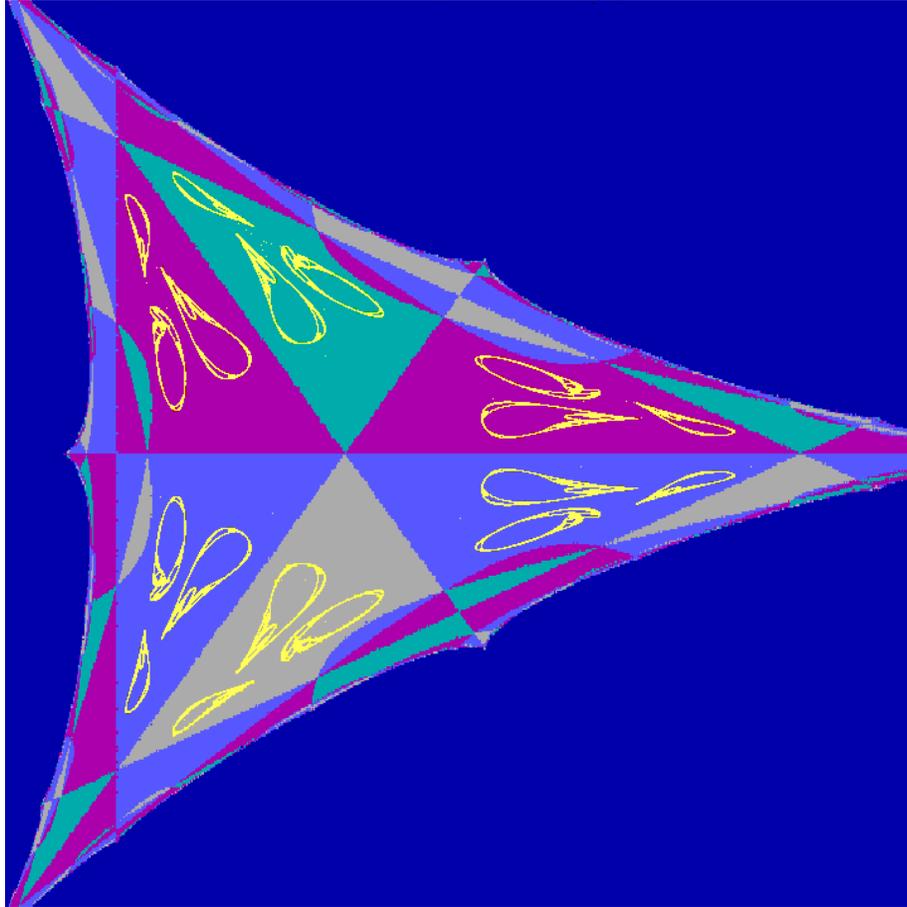
el que, en particular, en algún momento algunas de estas curvas chocan con la circunferencia singular  $L_{-1}$ , lo cual propicia grandes cambios), estas 18 curvas atractoras se ven reemplazadas por un número igual de conjuntos de apariencia bastante extraña, como se ve en la figura 5.10(c).



5.10(a): curvas atractoras de periodos 3 y 6



5.10(b): Todas las curvas atractoras en  $intK_a$



5.10(c) Conjuntos atractores caóticos en  $intK_a$ .

### 5.5.3. Conjuntos Atractores Caóticos.

Aunque en sistemas dinámicos existen, en realidad, varias definiciones de *caos*, el consenso es que siempre que *en algún sentido* aparezca dinámica complicada, a eso se le puede llamar caos. La sensibilidad respecto a condiciones iniciales en un compacto y la existencia de una órbita densa (equivalente, esto último, a la transitividad topológica en espacios métricos perfectos) suelen ser ingredientes necesarios para hablar de caos.<sup>6</sup> Cuando las funciones son derivables, una de las herramientas preferidas para establecer una medición

---

<sup>6</sup>Por ejemplo, en contraste con la idea de Devaney, hay autores que no creen que la densidad de puntos periódicos deba incluirse en una definición de caos [[25], págs. 81-85]. Otras discusiones al respecto pueden hallarse en la bibliografía.

cuantitativa de caos, son los *exponentes de Lyapunov*.<sup>7</sup> La idea detrás de estos exponentes es que son números que describen el “comportamiento promedio” de las derivadas de las iteraciones de una función a lo largo de una trayectoria (estos exponentes dependen de la trayectoria. Para sistemas dinámicos en  $\mathbb{R}^n$  hay  $n$  exponentes de Lyapunov asociados a cada trayectoria).

Algunos autores llaman *caótica* a una trayectoria que es acotada, no es asintóticamente convergente a una órbita periódica, y al menos uno de sus exponentes de Lyapunov es positivo (ver [20]). *A un conjunto compacto, atrayente, invariante hacia adelante, que contiene una trayectoria caótica*, estos autores le llaman un *atractor caótico*. Aquí y en lo sucesivo haremos uso de este concepto de atractor caótico.<sup>8</sup>

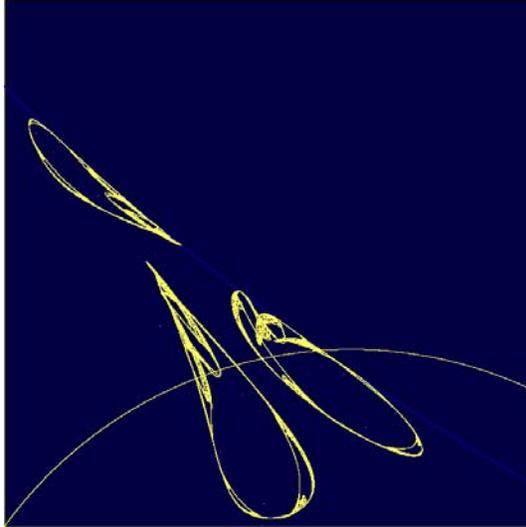
Retornando a la figura 5.10(c), numéricamente se comprueba que las 18 peculiares zonas que ahí aparecen, son conjuntos atractores caóticos, en el sentido recién descrito. Seis de estos conjuntos - los que aparecen en lo que antes eran cuencas de atracción de los puntos fijos  $P_a$  y  $\overline{P_a}$  - son invariantes bajo  $F_a^3$ ; los 12 restantes son invariantes bajo  $F_a^6$ . Es decir, son conjuntos atractores cíclicos o periódicos, respectivamente de periodo tres o seis bajo  $F_a$ . La figura 5.11 muestra un acercamiento a los tres atractores caóticos en la región triangular central.<sup>9</sup>

---

<sup>7</sup>Introducidos por Oseledec en 1968. Para su definición y propiedades ver, por ejemplo, [20] o [22].

<sup>8</sup>Para una discusión crítica del concepto mismo de atractor véase Milnor, J. *On the concept of attractor*, Comm. Math. Phys. **99**, 177-195.

<sup>9</sup>Órbitas en cada atractor calculadas con más de dos y medio millones de iteraciones dan como resultado uno de sus dos exponentes de Lyapunov positivo, aproximadamente igual a 0.042790 (un valor aproximado del otro es  $-0.108420$ ). La dimensión de Lyapunov de cada atractor es aproximadamente 1.39467. Todo esto es indicativo de dinámica caótica (ver [20]).



Tres atractores caóticos de periodo 3  
fig. 5.11

Naturalmente estos 18 conjuntos atractores están contenidos en  $\Lambda_a$  y todo el interior de  $K_a$  se subdivide de manera muy compleja en cuencas de atracción de uno u otro atractor. Las viejas zonas triangulares centrales son, ahora, unión de las (cerraduras de las) cuencas inmediatas de atracción (bajo  $F_a^3$  o  $F_a^6$ ) de unos u otros atractores caóticos cíclicos.

#### 5.5.4. Primera fusión de atractores caóticos.

Estos atractores van sufriendo modificaciones topológicas internas: sus evidentes “hoyos” van desapareciendo como si fueran cerrándose, para abarcar toda la zona que los rodea.

De esta manera, estamos ante la inminencia de que se produzca una serie de bifurcaciones que, autores como [1], [12], [19] y otros, llaman *bifurcaciones caóticas de contacto (bcc)*: en términos generales, éstas se producen cuando, al variar el parámetro, dos conjuntos atractores “chocan” entre sí.<sup>10</sup> Por regla general, un tal “choque” de atractores conduce a la fusión de dos o más atractores distintos en uno solo o a la destrucción de éstos.

Para ilustrar este punto, centrémonos en los 3 atractores de la figura anterior: para algún parámetro  $a = a_6$  con  $-0.8075 < a_6 < -0.8061$ , estos

<sup>10</sup>Estos autores presentan una gran variedad de ejemplos de estas bifurcaciones, e incluso cierta clasificación de las mismas para cierto tipo de funciones cuadráticas sencillas.

3 atractores “chocan” entre sí y se fusionan, convirtiéndose, para  $a < a_6$  ( $a$  cercano a  $a_6$ ), en un sólo atractor caótico de periodo 1, con forma como de “tijera” (figura 5.12). A todos los demás conjuntos atractores les sucede algo similar, sólo que los atractores de periodo 6 se fusionan de tres en tres, resultando 4 de periodo 2. En la figura 5.13 se presenta  $intK_a$  tras esta fusión.



fig. 5.12

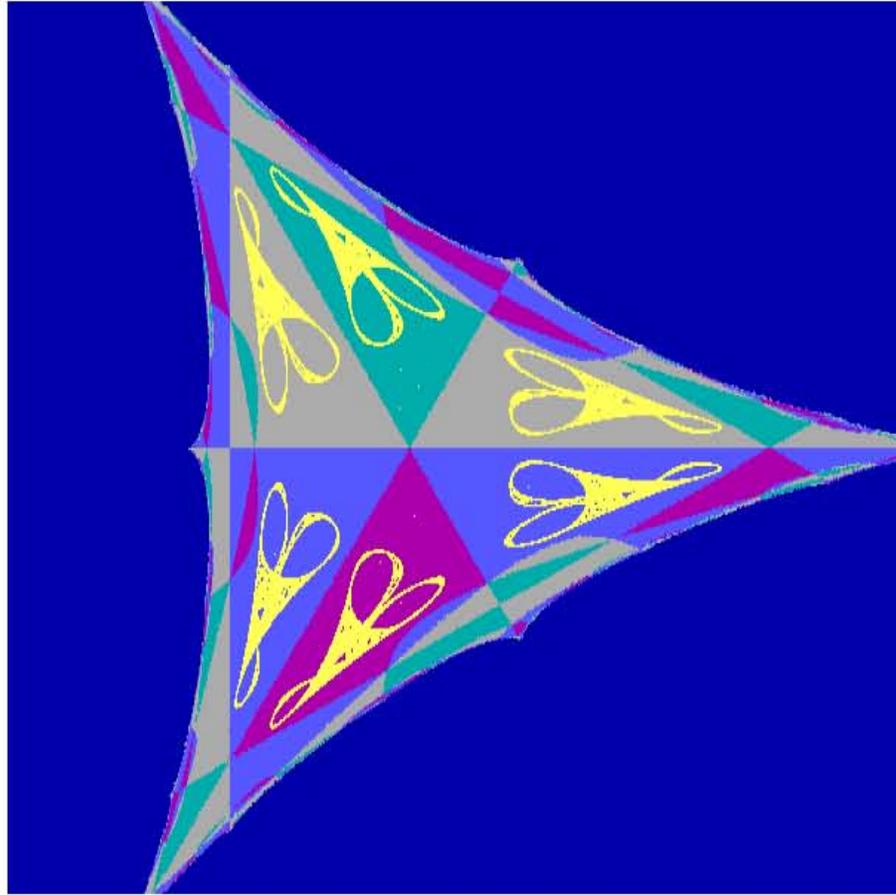


fig. 5.13

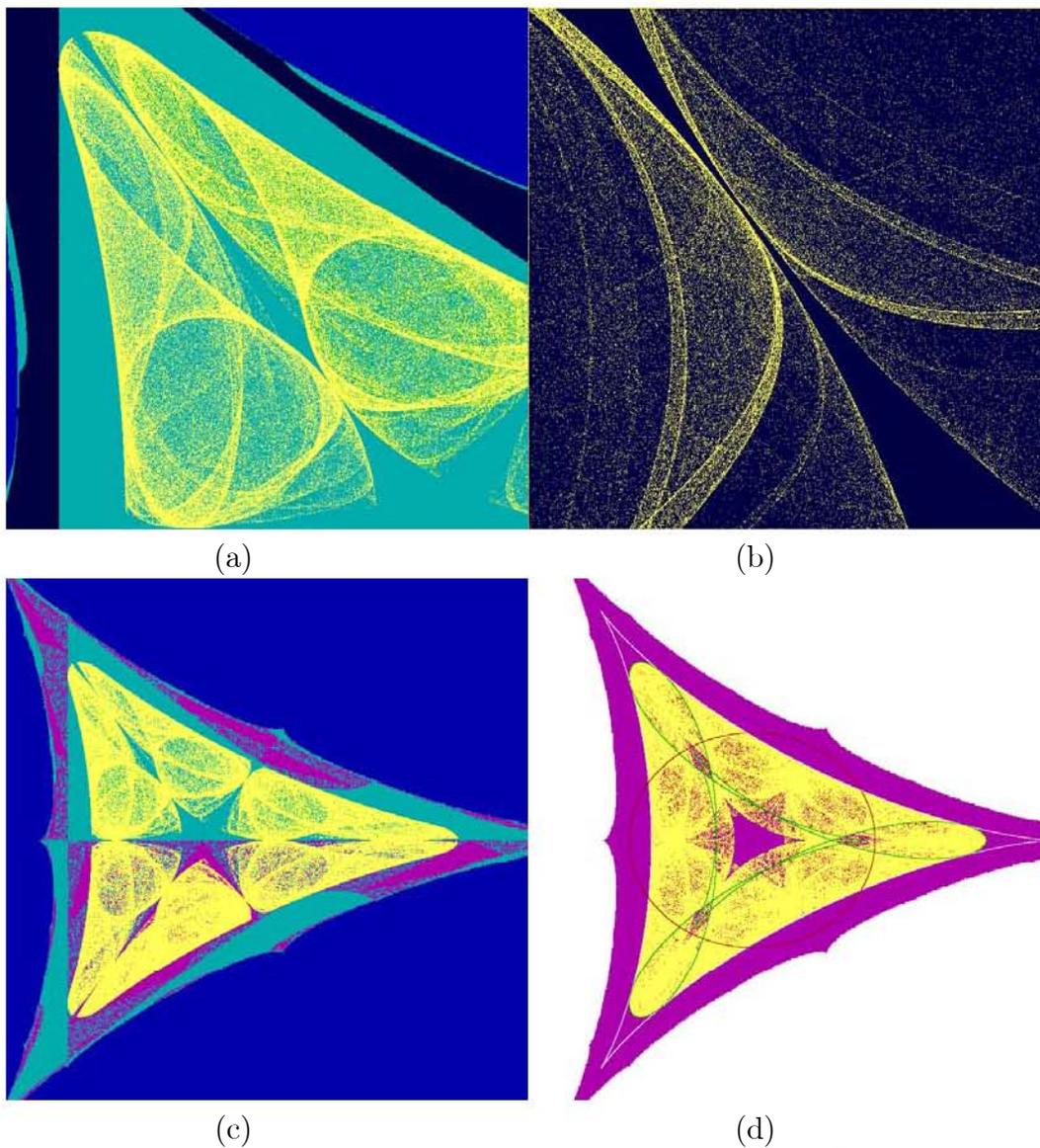
### 5.5.5. Nueva fusión de atractores y creación de la zona anular $B_a$ y el hoyo $W_a$

Una nueva bifurcación caótica de contacto ocurre para  $a = a_7$ , con  $-0.8215 < a_7 < -0.821$ .

Ahora, en  $a = a_7$  los seis conjuntos atractores que aparecen en la figura 5.13 (con forma como de tijeras) chocan entre sí y se fusionan, convirtiéndose, para  $a < a_7$ , en un único gran atractor caótico contenido en  $\Lambda_a$ , invariante bajo  $F_a$  (es decir, de periodo 1).

En la figura 5.14(a) se muestran dos conjuntos atractores, uno de periodo 1 y otro de periodo 2, a punto de entrar en contacto, o sea, de chocar. La figura 5.14(b) es un acercamiento a uno de los puntos en los que se va a

producir el contacto o choque. La figura 5.14(c) muestra todos los atractores en este momento, previo al choque. La figura 5.14(d) muestra los 6 atractores ya fusionados en uno solo.



figuras 5.14: fusión de atractores y aparición de la zona anular  $B_a$  y el hoyo  $W_a$ .

Como se puede apreciar, una vez que se han fusionado todos los atractores

en uno sólo, se crea una gran “zona anular” contenida en  $\Lambda_a$ . Esta “zona anular” contiene varios evidentes “hoyos” (fig. 5.14(c)), pero eventualmente se cierran todos menos el que está en el centro y lo que resulta es una gran “zona anular” –que llamaremos  $B_a$ – encerrando un sólo “hoyo” en torno al origen, que llamaremos  $W_a$ . Obviamente  $\Lambda_a - B_a = W_a$ .

## 5.6. Zonas anulares y Hoyos

Supongamos que tenemos una zona absorbente  $S$  (es decir, su frontera es unión finita de arcos críticos), invariante hacia adelante bajo una función suave  $f$ , y que  $P$  es un punto fijo repulsor en el interior de  $S$ . Siguiendo a [19], damos la siguiente definición:

**Definición 5.6.1** *Un hoyo en  $S$  en torno a un punto fijo repulsor  $P$  es una región  $W$  simple conexa, contenida propiamente en el interior de  $S$ , con las propiedades siguientes:*

*i)  $P \in W$ .*

*ii) Tras un número finito de iteraciones, todo elemento de  $W$ , excepto  $P$ , abandona  $W$  y no regresa jamás a  $W$ . Es decir, para todo  $z \in W$  existe  $N = N(z) \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(z) \notin W \forall k \geq N$  (obsérvese que, de cualquier manera,  $f^k(z) \in S$  porque  $S$  es invariante hacia adelante).*

*iii)  $\partial W$  está compuesta por un número finito de arcos críticos.*

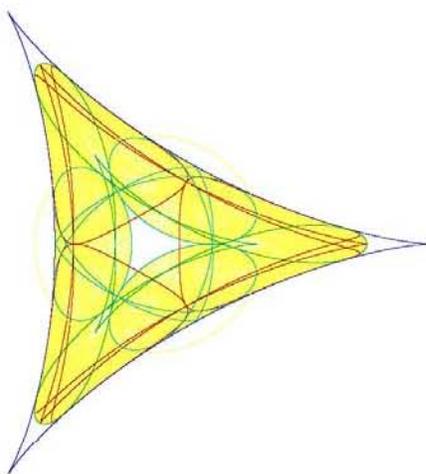
*iv)  $f(S - W) \subseteq S - W$ .*

*Al complemento de  $W$  en  $S$ , es decir, al conjunto  $B = S - W \neq \emptyset$ , se le llama una zona anular absorbente.*

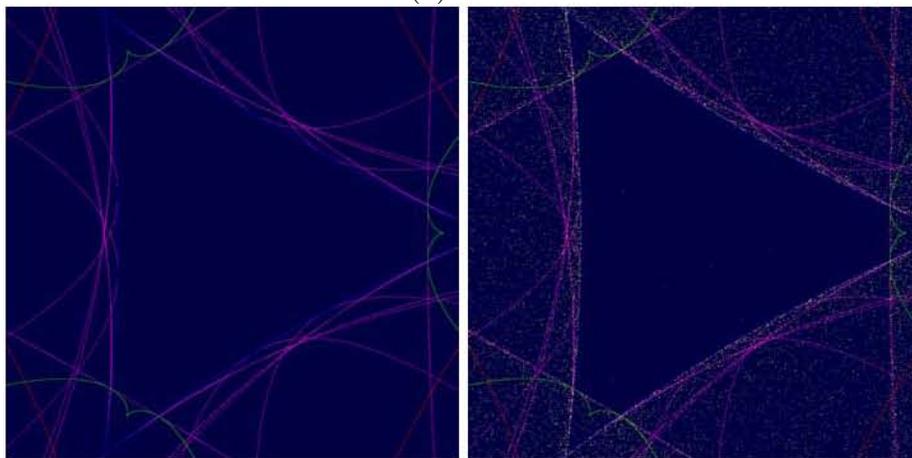
*Observación :* Una consecuencia de la definición 5.6.1 es que  $\partial B = \partial W \cup \partial S$  con  $\partial W \cap \partial S = \emptyset$ ; es decir, la frontera de  $B$  tiene dos componentes ajenas, ambas curvas simples cerradas. A  $\partial S$  se le llama *frontera externa* de la zona anular y a  $\partial W$ , *frontera interna*. Por la definición dada, ambas fronteras son uniones finitas de arcos críticos.

La figura 5.14(d) muestra el conjunto  $K_a$  para  $a = -.8215$ . Como se mencionó antes, ahí se observa, dentro de  $\Lambda_a$ , una zona anular  $B_a$  y un hoyo  $W_a$  en torno al origen, que es un punto fijo repulsor. La llamada *frontera externa* de la zona anular coincide con la de  $\Lambda_a$  y está compuesta por arcos de  $L$  y  $L_1$ . La *frontera interna* - frontera del hoyo - está compuesta por arcos de  $L_3$  y  $L_{15}$ ; estos arcos se observan en 5.15(a) y, en un acercamiento al hoyo,

en 5.15(b). Numéricamente se verifica que las órbitas de todos los puntos en el hoyo (distintos del origen) eventualmente entran en la zona anular, y se mantienen ahí para siempre.



(a)



(b)

(c)

figuras 5.15

En 5.15(c) se muestran, cerca del hoyo, puntos de una órbita tomada al azar. En general, órbitas de un puntos escogidos al azar en el interior de  $\Lambda_a$  parecen llenar la zona anular; es decir, se trata de órbitas densas en la zona

anular. Ello nos habla de la existencia de una dinámica compleja en esta zona.

## 5.7. Desaparición del hoyo $W_a$

Conforme decrece aún más el parámetro, el hoyo  $W_a$  se hace más pequeño y tiende a desaparecer. Generalizando ideas planteadas en [12] y en [19], se puede establecer una condición sencilla, que implica la desaparición de  $W_a$ ; <sup>11</sup> la idea es como sigue.

Manteniendo la notación de la definición 5.6.1, si existe un hoyo no vacío  $W \subset S$ , es fácil demostrar que las imágenes inversas del punto fijo repulsor  $P$  (distintas de  $P$ ) están en el exterior de  $S$ . Dado que, por definición, la frontera de  $S$  es unión finita de arcos críticos, si al variar un parámetro una de estas imágenes inversas - digamos  $P_{-1}$  - toca dicha frontera, ello significa que  $P_{-1}$  se vuelve elemento de algún arco crítico  $L_m$  con  $m \geq 1$ . En consecuencia, todos los arcos críticos  $L_n$ , con  $n \geq m$ , pasan por el punto  $P$ . Ello va a obligar, en particular, a que los arcos que conforman la frontera del hoyo  $W$  (que, también por definición, coincide con la frontera interna de la zona anular  $B$ ) se intersecten todos en  $P$ . Al suceder esto, necesariamente el hoyo se cierra.

Entonces, en nuestro caso basta con determinar el parámetro para el cual ocurre que una preimagen del origen distinta de éste toca la frontera de  $\Lambda_a$ . Como las tres preimágenes del origen (distintas de éste) tocan simultáneamente  $\partial\Lambda_a$ , basta con determinar el parámetro para el cual la preimagen real,  $\alpha_1 = -2a$ , toca  $\partial\Lambda_a$ . Esto ocurre si, y sólo si,  $-2a \in L_1 \cap \mathbb{R}$ . Como  $F_a^2(-a) = -2a$ , lo que queremos es una raíz real de la ecuación

$$F_a^2(-a) + 2a = a^4 - 2a^3 + 2a = a(a^3 - 2a + 2) = 0. \quad (5.2)$$

La única raíz real distinta de cero de (5.2) es:

$$a = a_8 = -\frac{1}{3}\sqrt{19 + 3\sqrt{33}} - \frac{4}{3\sqrt{19 + 3\sqrt{33}}} + \frac{2}{3} = -0.83929... \quad (5.3)$$

Toda esta información se resume en la siguiente proposición.

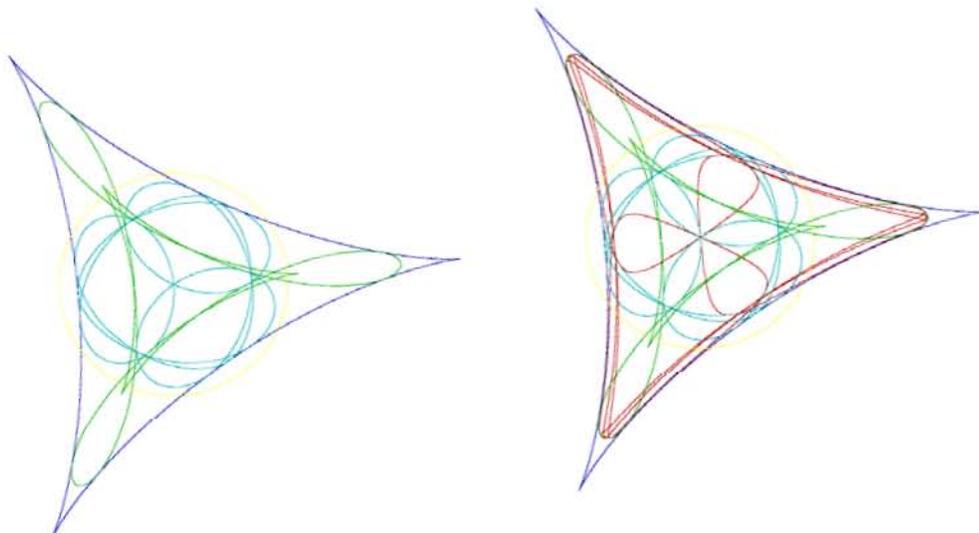
---

<sup>11</sup>Esta condición se establece y demuestra en la proposición 5.7.7 del Apéndice 5D.

**Proposición 5.7.1** *En el parámetro  $a = a_8$  cuyo valor está dado por (5.3), tiene lugar una bifurcación que hace desaparecer al hoyo  $W_a$  y transforma a la zona anular  $B_a$  en el conjunto invariante  $\Lambda_a$ .*

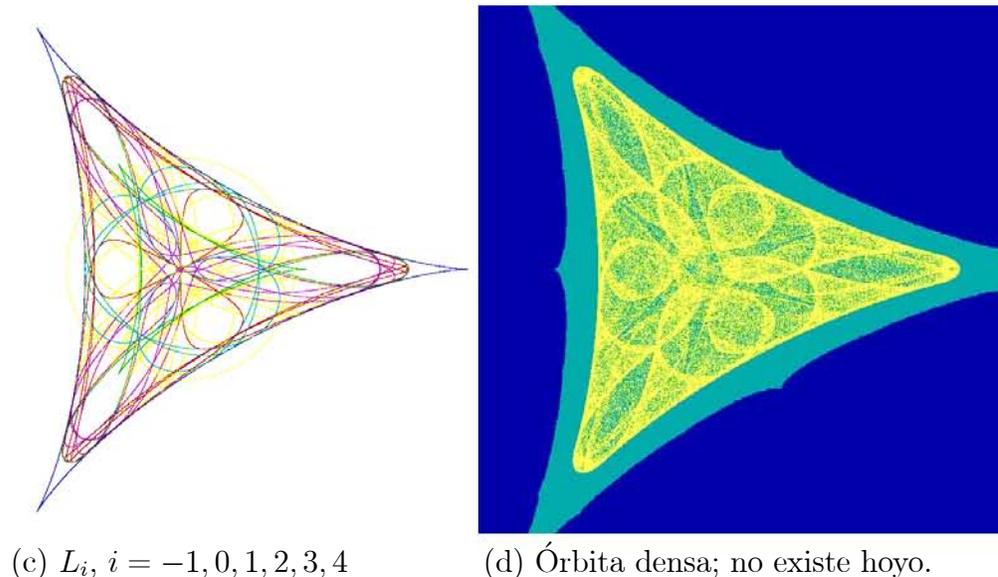
*Demostración:* Véase Apéndice 5D.  $\square$

Dado que para  $a = a_8$  se tiene que  $-2a \in L_1 \cap \mathbb{R} \subset \partial\Lambda_a$ , todos los arcos críticos  $L_n(a)$  con  $n \geq 2$  deben cruzar por el origen. En la figura 5.16(a) se muestran la circunferencia singular  $L_{-1}$  y los arcos críticos  $L$ ,  $L_1$  y  $L_2$ ; éste último,  $L_2$ , es el primero que pasa por origen, dado que las tres imágenes inversas (de orden uno) del origen están contenidas en  $L_1 \cap \partial\Lambda_a$ . En (b) y (c) se muestran otros arcos críticos cruzando por el origen. En (d), todo el conjunto  $\Lambda_a$ .



(a)  $L$ ,  $L_1$  y, pasando por 0,  $L_2$

(b)  $L_i$ ,  $i = -1, 0, 1, 2, 3$



figuras 5.16

### 5.7.1. La desaparición del hoyo $W_a$ es por una bifurcación homoclínica

¿Y en general, cómo cambia la dinámica en una zona absorbente  $S$  al producirse una bifurcación que desaparece al hoyo  $W$ ?

En muchos casos (en particular en la familia que estamos estudiando), este tipo de bifurcaciones suelen ser *bifurcaciones homoclínicas*; es decir, provocan la aparición, al momento en que se desaparece el hoyo, de puntos homoclínicos al punto fijo repulsor  $P$ .

Aunque lo más usual es asociar la noción de punto homoclínico u órbita homoclínica a un punto silla (se trata de un punto que simultáneamente está en las variedades estable e inestable del punto silla), es conocido que para funciones no-invertibles  $f$  esta noción se puede generalizar directamente a puntos fijos (o periódicos) repulsores diciendo, también, que  $q$  es homoclínico a un punto fijo repulsor  $P$  si, simultáneamente,  $q$  está en las variedades estable e inestable de  $P$ ; es decir, si existe una sucesión infinita de preimágenes inversas (de orden creciente) de  $q$  que converge a  $P$  y, a la vez, existe  $m \geq 1$  tal que  $f^m(q) = P$ .

En [17] se demuestra, generalizando a  $\mathbb{R}^n$  las ideas del célebre artículo de Li-Yorke, [16], que si existe un punto  $q$  homoclínico a un punto fijo  $P$

repulsor, se genera una dinámica muy compleja en torno a  $P$ . En [13], se da una caracterización de esta dinámica compleja y se establecen condiciones (para cierta clase de funciones) bajo las cuales se produce una bifurcación que “genera” puntos homoclínicos a un punto fijo repulsor. Esta bifurcación está directamente asociada con la desaparición de un hoyo o, mejor dicho, es una bifurcación que a la vez que produce la desaparición del hoyo, simultáneamente genera puntos homoclínicos al repulsor  $P$ .

Para el lector interesado, en el Apéndice 5E se analiza con algún detalle la plausibilidad de que la bifurcación que provoca la desaparición del hoyo  $W_a$  (en  $a = a_8$ ) sea, a su vez, una bifurcación homoclínica.

Por último, remarcamos que en  $a = -1$ ,  $\Lambda_a$  coincide con  $K_a$  o, equivalentemente,  $\partial\Lambda_a$  “choca” con  $\partial K_a$ . Como esta última es, a la vez, frontera de la cuenca de atracción de  $\infty$ , este “choque” representa otro tipo de bifurcación que conduce a la transformación de  $K_a$  en un conjunto de Cantor “repulsor caótico” para  $a < -1$ .

FIN



## Apéndice 5A. El origen es el único atractor en $\text{int}K_a$ si $-\frac{1}{2} = a_0 < a < 0$ .

Para todo  $a \in \mathbb{C}$  el origen es un punto fijo de  $F_a$  y los valores propios de  $DF_a(0,0)$  son  $\lambda_1 = 2|a|$  y  $\lambda_2 = -2|a|$ . En consecuencia,  $(0,0)$  es atractor si  $|a| < \frac{1}{2}$  y es repulsor si  $|a| > \frac{1}{2}$ . Si  $|a| = \frac{1}{2}$  tenemos un caso no-hiperbólico en el que  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = -1$ .

Si  $a \in \mathbb{R}$  y  $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{6}$ , sólo hay 2 puntos fijos: el origen y  $\alpha(a) = 1 - 2a$ . Si  $a < -\frac{1}{2}$  o  $a > \frac{1}{6}$ , hay cuatro puntos fijos: los dos anteriores,  $P_a = \left(\frac{1}{2} + a, \sqrt{3a^2 + a - \frac{1}{4}}\right)$  y  $\overline{P}_a$ .

El punto fijo  $\alpha(a)$  siempre es repulsor si  $a < 0$  y por los resultados del capítulo 4,  $\{\rho\alpha(a), \rho^2\alpha(a)\}$  es una órbita repulsora de periodo dos. En este caso ( $a < 0$ ), los tres puntos,  $\alpha(a)$ ,  $\rho\alpha(a)$  y  $\rho^2\alpha(a)$ , están en la frontera de  $K_a$ . Por lo tanto, si en particular  $a \in (-\frac{1}{2}, 0)$  el origen es el único punto fijo en el interior de  $K_a$ .

**Lema 5.7.2** Si  $|a| < \frac{1}{2}$  y  $|z| < 1 - 2|a|$ , entonces  $|F(z)| < |z|$ .

*Demostración:* Supongamos  $|z| < 1 - 2|a|$ . Entonces,  $|F(z)| = |z^2 + 2a\bar{z}| \leq |z|^2 + 2|a||\bar{z}| = |z|^2 + 2|a||z| = |z|(|z| + 2|a|) < |z|(1 - 2|a| + 2|a|) = |z|$ . Es decir,  $|F(z)| < |z|$ .  $\square$

**Lema 5.7.3** Si  $-\frac{1}{2} < a < 0$ , entonces el disco abierto con centro en el origen y radio  $1 - 2|a|$  (denotado por  $D_{1-2|a|}$ ) está contenido en la cuenca inmediata de atracción del origen.

*Demostración:* Por el lema previo,  $|F(z)| < |z|$  si  $z \in D_{1-2|a|}$ . Aplicando esta desigualdad reiteradamente, obtenemos que la sucesión  $\{F^k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$  es

(estrictamente) decreciente. Por lo tanto, dicha sucesión converge, y por la continuidad, necesariamente converge a un punto fijo; como en este caso el único punto fijo en el interior de  $K_a$  es el origen, la conclusión se sigue.  $\square$

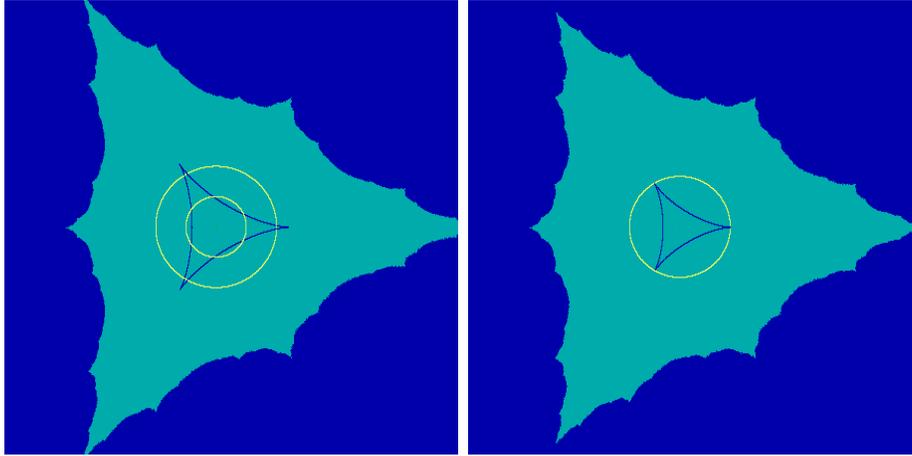
Sea  $-\frac{1}{2} < a < 0$  y sea  $U_a$  la componente de la cuenca de atracción del origen que contiene a éste. El lema previo asegura que  $D_{1-2|a|}(0) \subseteq U_a$ . Nótese que el radio de  $D_{1-2|a|}(0)$  tiende a cero conforme  $|a|$  tiende a  $\frac{1}{2}$ .

**Proposición 5.7.4** *Si  $a \in \mathbb{R}$  y  $-\frac{1}{3} \leq a < 0$ , la cuenca de atracción del origen es todo el interior de  $K_a$ . En consecuencia,  $U_a = \text{int}K_a$  y  $\Lambda_a = \{0\}$ .*

*Demostración.* Nótese que si  $-\frac{1}{3} \leq a < 0$ , entonces la circunferencia singular  $L_{-1}(a)$  queda contenida en  $D_{1-2|a|}(0)$  y si  $-\frac{1}{3} = a$ , dicha circunferencia coincide con  $\partial D_{1-2|a|}(0)$ . En consecuencia, por la proposición anterior, las órbitas de todos los puntos que quedan dentro del disco  $\{z \mid |z| < |a|\}$  tienden al origen. Como la imagen de este último disco es  $Z_4(a)$ , la órbita de todo punto en  $Z_4(a)$  tiende al origen. Por la conjetura C2, la órbita de todo punto en  $\text{int}K_a$  tiende al origen.  $\square$

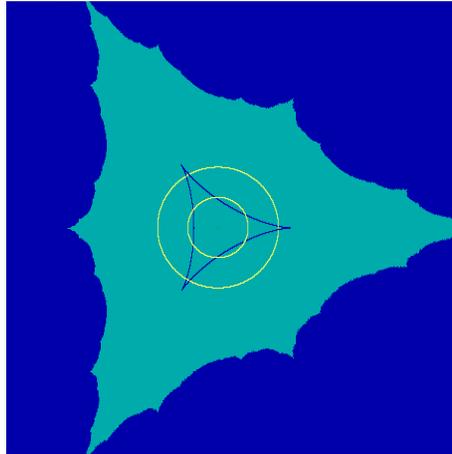
Como se aprecia en las figuras 5A, si  $-\frac{1}{3} < a < 0$  la hipocicloide  $L(a)$  queda propiamente contenida en  $D_{1-2|a|}$  (fig. 5A.1). Si  $a = \frac{1}{3}$ ,  $D_{1-2|a|} \equiv D_{|a|}$  y las cúspides de  $L(a)$  son elementos de  $L_{-1}(a)$  (fig 5A.2). Si  $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{3}$ , la hipocicloide  $L(a)$  se sale de  $D_{|a|}$  y  $D_{1-2|a|} \subset D_{|a|}$  (fig. 5A.3). Como se mencionó en la sección 5.1, numéricamente es evidente que también para  $-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{3}$  se cumple que el origen es el único atractor en  $\text{int}K_a$  y que  $\text{int}K_a = U_a$ . Resumimos todos estos hechos en la siguiente afirmación (parcialmente demostrada en la proposición (5.7.4)).

*Afirmación: Si  $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ , el origen es el único atractor en  $\text{int}K_a$  y en consecuencia,  $W_a = \text{int}K_a$  y  $\Lambda_a = \{0\}$ .*



$K_a$  para  $a = -\frac{1}{6}$ .

$K_a$  para  $a = -\frac{1}{3}$ .



$K_a$  para  $a = -0.4$



## Apéndice 5B: El conjunto $\Lambda_a$ para $a \in \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ .

*Puntos Periódicos:* para  $a \in (a_2, a_1)$  con  $a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  y  $a_1 = -\frac{1}{2}$ , aparece el punto fijo  $P_a = (\frac{1}{2} + a, \sqrt{3a^2 + a - \frac{1}{4}})$  y su conjugado  $\overline{P}_a$ ; ello es consecuencia de que  $3a^2 + a - \frac{1}{4} > 0$  si  $a < -\frac{1}{2}$ . Los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de  $DF_a(P_a)$  - que dependen del parámetro  $a$  - están dados por.....

$$\lambda_1 = 2\left(\frac{1}{2} + a + \sqrt{\frac{1}{4} - 2a^2 - a}\right) \text{ y } \lambda_2 = 2\left(\frac{1}{2} + a - \sqrt{\frac{1}{4} - 2a^2 - a}\right). \quad (5.4)$$

Por lo tanto, para  $a \in (a_2, a_1)$  se tiene que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales y satisfacen  $-1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1 < 1$ , por lo que  $P_a$  es un punto fijo es atractor; como también ocurre que  $|P_a| < |a|$ , tenemos que  $P_a$  está en el interior del disco  $D_{|a|}$ . Por las proposiciones de la sección 4.4 lo propio ocurre con  $\overline{P}_a$ .

La restricción de  $F_a$  a  $\mathbb{R}$ , que denotamos por  $f_a$ , cumple que  $(f_a)'(0) = -1$  si  $a = a_1$ ; ello propicia una bifurcación de *duplicación de periodo* según la cual el origen pasa de ser atractor a ser repulsor y nace, para  $f_a$ , una órbita atractora de periodo 2,  $\{s_1, s_2\} \subset \mathbb{R}$  con  $s_1 < 0 < s_2$ . Globalmente,  $s_1$  y  $s_2$  son puntos silla hiperbólicos de  $F_a^2$ ; los valores propios  $\mu_1$  y  $\mu_2$  de  $DF_a^2(s_i)$ , donde  $\mu_i = (f_a^2)'(s_i)$  para  $i = 1, 2$ , satisfacen  $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$ . Ambos,  $s_1$  y  $s_2$ , quedan contenidos en el interior del disco  $D_a$ .

Nuevamente por las proposiciones de la sección 4.4, los puntos  $\overline{Q}_1 = \rho P_a$  y  $\overline{Q}_2 = \rho^2 P_a$  forman una órbita atractora de periodo 2 y, en consecuencia, los conjugados de estos últimos puntos,  $Q_1$  y  $Q_2$ , forman también una órbita atractora de periodo 2. Del mismo modo,  $\{s_1, s_2\}$  genera dos órbitas de puntos silla de periodo 2, conjugada la una de la otra, que denotamos, respectivamente, por  $\{q_1, q_2\}$  y  $\{\overline{q}_1, \overline{q}_2\}$ , donde  $\overline{q}_1 = \rho^2 s_2$ ,  $\overline{q}_2 = \rho s_1$ ,  $q_1 = \rho s_2$  y

$q_2 = \rho^2 s_1$ . Todos estos puntos periódicos atractores y sillas están contenidos en  $D_a$  (ver figura 5.1 en secc. 5.2).

En el *eje x* positivo hay intervalos (ajenos) que constituyen, respectivamente, las variedades estables locales de  $s_1$  y  $s_2$ . Como  $0 < \mu_1 < 1$ , si  $x_0$  está en la variedad estable local de  $s_i$ , la sucesión  $\{F^{2k}(x_0)\}$  es una sucesión monótona convergente a  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ . Por las simetrías de  $F_a$ , algo análogo ocurre con el resto de los puntos sillas de periodo 2.

Como todos los puntos periódicos existentes en el interior de  $K_a$  están contenidos en  $\Lambda_a$ , para  $a \in (a_2, a_1)$  el conjunto  $\Lambda_a$  ha dejado de ser un punto (ver figura 5.2 en secc. 5.2).

*Dinámica en el interior del conjunto de Julia lleno,  $K_a$ .*

Como se explicó en el capítulo 5, las 6 regiones triangulares que se observan en las figuras 5.1 y 5.2 con un vértice común en el origen son las respectivas *cuencas inmediatas de atracción* de los atractores de periodos respectivos 1 y 2. Todo el interior de  $K_a$  en esta etapa es la cerradura de la unión de todas las cuencas de atracción mencionadas. En particular, todo punto en el interior de  $K_a$  que no está en alguna imagen inversa de alguna variedad estable local de alguno de los puntos silla, tiende a alguno de los puntos periódicos atractores de periodo 1 o 2. Como en este rango de parámetros dichos atractores están en  $\partial\Lambda_a$  (demostración más adelante), si  $z \in \text{int}K_a$ , ya sea en el interior o en el exterior de  $\Lambda_a$ , su órbita tiende a  $\partial\Lambda_a$ . En este sentido, la  $\partial\Lambda_a$  es también, a su modo, un *conjunto atractor*, una especie de "barrera" que, por un lado, atrae a los puntos que repele el origen (recuérdese que ahora el origen es repulsor) y, por otro, atrae también a los puntos fuera de  $\Lambda_a$ . La figura 5B.1 exhibe la naturaleza repulsora del origen mostrando como tienden a  $\partial\Lambda_a$  las iteraciones de un pequeño disco  $U \subset \text{int}\Lambda_a$  centrado en el origen.

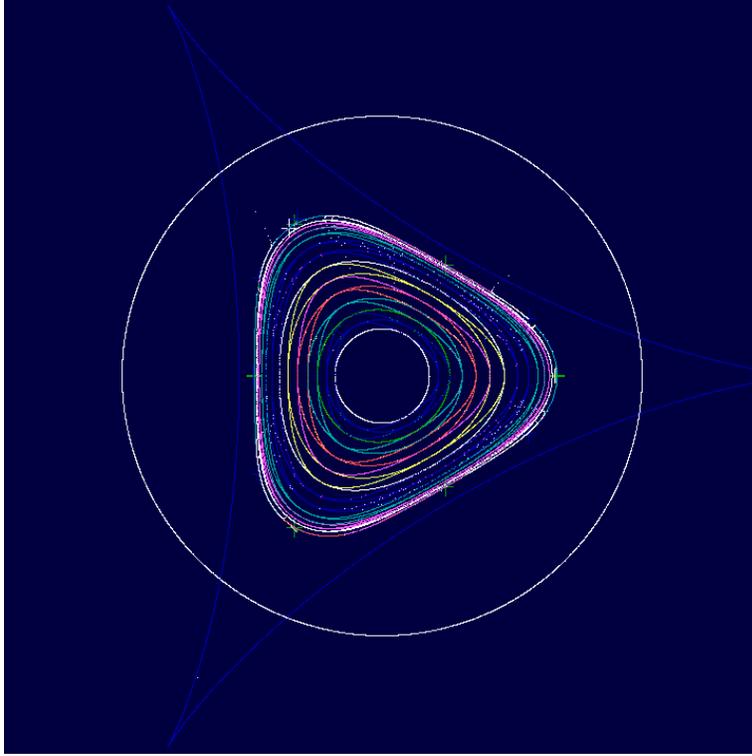


figura 5B.1: iteraciones de un disco pequeño centrado en el origen, convergiendo a  $\partial\Lambda_a$ . Se muestran también la circunferencia singular  $L_{-1}$  y la hipocicloide  $L$ .

En lo que resta de este apartado detallamos aspectos de la demostración del teorema que enunciamos de nuevo a continuación.

**Teorema 5.7.5** *Para  $a \in (a_1, a_0)$  la frontera de  $\Lambda_a$  es una curva simple cerrada, invariante hacia adelante, y está formada por la unión de las variedades inestables locales de los puntos silla de periodo 2, y también, por todos los puntos atractores de periodo 1 o 2. Además, esta frontera de  $\Lambda_a$  no es unión finita de arcos críticos sino una curva límite de arcos críticos (figura 5.2). En consecuencia,  $\Lambda_a$  no es una zona absorbente.*

Sea  $\Gamma_a$  la curva simple cerrada formada por la unión de las variedades inestables locales de los puntos silla de periodo 2, incluyendo a éstos y a los atractores  $P_a, \overline{P}_a, Q_1, Q_2, \overline{Q}_1$  y  $\overline{Q}_2$ . Vamos a demostrar las siguientes dos proposiciones para  $a_2 < a < a_1$ :

*Afirmación 1.*  $F_a(\Gamma_a) = \Gamma_a$

*Demostración:* Como  $\Gamma_a$  está constituida por variedades inestables y puntos periódicos, es trivial que  $F_a(\Gamma_a) \subseteq \Gamma_a$ . Para la contención en sentido inverso, tomemos  $z \in \Gamma_a$ . Si  $z$  es un punto periódico de los que conforman a  $\Gamma_a$ , es trivial también que existe un punto del mismo periodo  $w \in \Gamma_a$  tal que  $F(w) = z$  y, por lo tanto,  $z \in F(\Gamma_a)$ . Supongamos, entonces, que  $z$  no es punto periódico, es decir, que  $z$  está en alguna de las variedades inestables que conforman a  $\Gamma_a$ . Como  $\Gamma_a \subset Z_4$ ,  $z$  tiene cuatro preimágenes, una de ellas,  $z_{-1}$ , contenida en  $D_a$ , y las otras 3, en  $F_a^{-1}(Z_4(a))$ , pero fuera de  $D_a$ . Necesariamente  $z_{-1}$  está en la misma variedad inestable local que está  $z$ , por lo que  $z_{-1} \in \Gamma_a$  y  $F_a(z_{-1}) = z$ . En consecuencia,  $z \in F_a(\Gamma_a)$ .  $\square$

*Paso 1: La frontera de  $F_a(\overline{Z_4})$  está compuesta sólo por (ciertos) arcos de  $L$  y  $L_1$  (ver figura 5.3(a)).*

Geoméricamente (o utilizando una parametrización de la circunferencia  $L_{-1}$ ) es fácil deducir que  $F_a(\overline{Z_4})$  está contenido en  $D_a$  (figura 5.3(a)).

Siendo  $F_a(\overline{Z_4})$  compacto, se sigue que  $\partial F_a(\overline{Z_4}) \subset D_a$ . Dado que las cúspides de  $L = \partial \overline{Z_4}$  están fuera de  $\overline{D_a}$ , tenemos que  $\overline{Z_4} \cap L_{-1}$  es no vacío y consta de tres componentes ajenas, que son los arcos de  $L_{-1}$  que van, respectivamente, de  $h_{-1}$  a  $g_{-1}$ , de  $\overline{g_{-1}}$  a  $\overline{h_{-1}}$  y de  $\overline{f_{-1}}$  a  $f_{-1}$  (ver figura 5.3(a)). La imagen bajo  $F_a$  de estos arcos consta, a su vez, de tres arcos de  $L$ : de  $h$  a  $g$ , de  $\overline{g}$  a  $\overline{h}$  y de  $\overline{f}$  a  $f$  (nótese que los arcos de  $L_{-1}$  se recorren en sentido opuesto que los de  $L$ ). Por el lema auxiliar de la sección 4.1, estos tres arcos de  $L$  están contenidas en la frontera de  $F_a(\overline{Z_4})$ .

Aplicando  $F_a$  a los arcos de  $L$  que van, respectivamente, de  $h_{-1}$  a  $f_{-1}$ , de  $\overline{f_{-1}}$  a  $\overline{h_{-1}}$  y de  $\overline{g_{-1}}$  a  $g_{-1}$ , y utilizando nuevamente el lema auxiliar, se obtienen los arcos de  $L_1 \cap \partial F_a(\overline{Z_4})$  que van de  $h$  a  $f$ , de  $\overline{f}$  a  $\overline{h}$  y de  $\overline{g}$  a  $g$ . Estos seis arcos, tres de  $L$  y tres de  $L_1$ , conforman la frontera de  $F_a(\overline{Z_4})$ .

Observación: Nótese que los “picos” de  $F_a(L) = L_1$  quedan en el interior de  $F_a(\overline{Z_4})$  lo cual muestra, en particular, que  $F_a(\partial \overline{Z_4}) \neq \partial F_a(\overline{Z_4})$ .

*Paso 2:  $F_a^2(\overline{Z_4}) \subset \text{int} \overline{Z_4} = Z_4$ . En consecuencia,  $\partial F_a^2(\overline{Z_4})$  sólo tiene arcos de  $L_1$  y  $L_2$  y no toca a  $L$ .*

Como  $\partial F_a(\overline{Z_4}) \subset D_a$  se sigue que  $\partial F_a(\overline{Z_4}) \cap L_{-1} = \emptyset$  y por lo tanto  $F_a^2(\overline{Z_4}) \subset \text{int} \overline{Z_4} = Z_4$  y además,  $\partial F_a^2(\overline{Z_4}) \cap L = \emptyset$ . Argumentando como en el párrafo previo se concluye que  $\partial F_a^2(\overline{Z_4})$  está también compuesta de seis arcos, tres de  $L_1$  y tres de  $L_2$  (ver figura 5.3(c)).

Por inducción, se sigue lo siguiente. Omitimos los detalles.

*Paso 3. Generalización de los pasos anteriores (ver el resto de las figuras 5.3):*

$$(i) F_a^{2k}(\overline{Z_4}) \subset \text{int} F_a^{2k-2}(\overline{Z_4}), k \geq 2;$$

(ii)  $\partial F_a^{2k}(\overline{Z_4})$  consta sólo de arcos de  $L_{2k-1}$  y  $L_{2k}$  y no toca a  $\partial F_a^{2k-2}(\overline{Z_4})$ ,  $k \geq 2$ .

*Proposición 2.*  $\partial\Lambda_a = \Gamma_a$

*Demostración de la proposición 2.* Los conjuntos  $L_k = L_k(a) = F_a^k(L(a))$  (con  $L_0 \equiv L(a)$ ) son curvas cerradas porque  $L$  lo es; las figuras 5B.2, 5B.3 y 5B.4 muestran varias de estas curvas para algún parámetro en esta etapa.

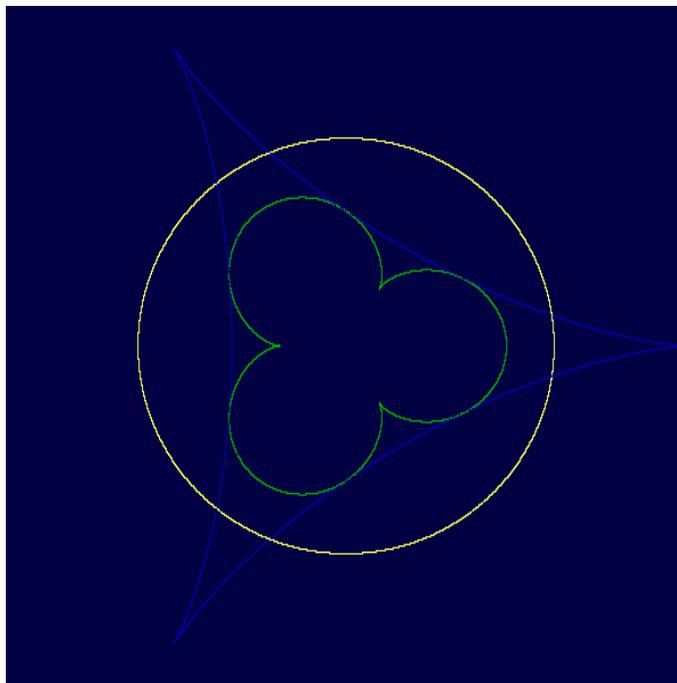


figura 5B.2:  $L_{-1}$ ,  $L$  y  $L_1$

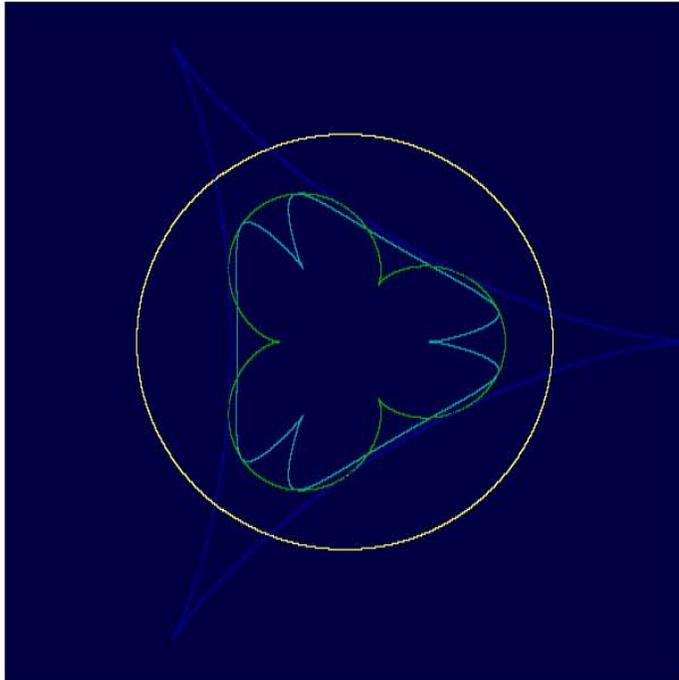


figura 5B.3:  $L_{-1}$ ,  $L$ ,  $L_1$  y  $L_2$

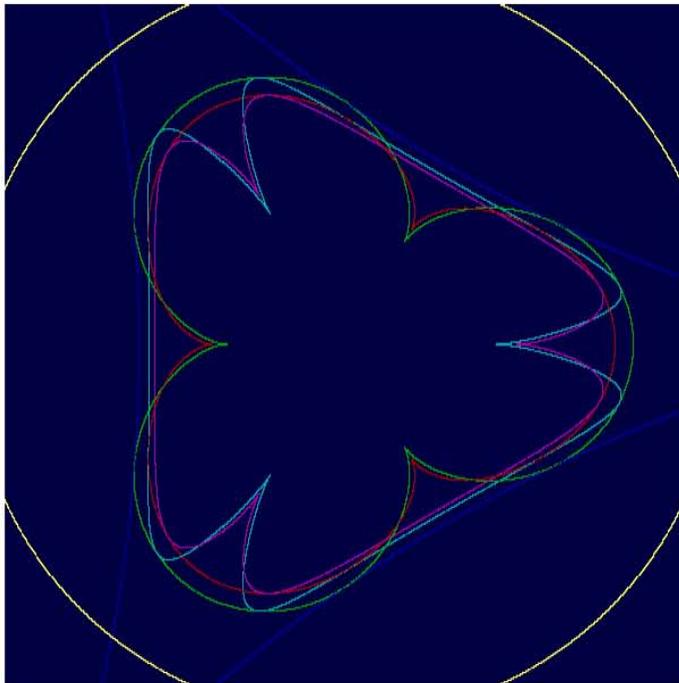


figura 5B.4:  $L_{-1}$ ,  $L$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  y  $L_4$

Varias consecuencias de los incisos (i) y (ii) del anterior *Paso 3* son muy importantes: la primera, de (i), es que ordenada por la inclusión, la sucesión de conjuntos  $\{F^{2k}(\overline{Z_4})\}$  es estrictamente decreciente, por lo que  $\Lambda_a$  está propiamente contenido en  $\text{int}F^n(\overline{Z_4})$  para todo  $n \geq 0$ . En particular, si  $z \in F^{2k+2}(\overline{Z_4}) - \text{int}F^{2k}(\overline{Z_4})$  para algún  $k \geq 0$ , entonces  $z \notin \Lambda_a$ .

Es conveniente, para lo que sigue, denotar de alguna manera, digamos por  $A_k$ , a la franja o anillo  $F^{2k+2}(\overline{Z_4}) - \text{int}F^{2k}(\overline{Z_4})$ ,  $k \geq 0$ .

Vamos a ver enseguida que otra consecuencia de (i) es que *todos los puntos silla de periodo 2 son elementos de  $\partial\Lambda_a$* ; por las simetrías de  $F_a$ , basta con comprobar esto para los puntos silla que están en  $\mathbb{R}$ ,  $s_1$  y  $s_2$ : Como bajo  $F_a^2$  la convergencia (en  $\mathbb{R}$ ) a  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ , es monótona en la correspondiente variedad estable local, tomando, digamos,  $x_0 < s_1$  con  $x_0$  en cualquier franja  $A_k$ , tenemos que  $\{F^{2k}(x_0)\}$  es una sucesión monótona creciente, contenida totalmente en el exterior de  $\Lambda_a$ , convergente a  $s_1 \in \Lambda_a$ . Por lo tanto,  $s_1 \in \partial\Lambda_a$ . En forma análoga se prueba que  $s_2 \in \Lambda_a$  y, por simetría, se sigue que los demás puntos silla están en  $\partial\Lambda_a$ .

De manera parecida es posible demostrar que el punto fijo atractor  $P_a$  está en la frontera de  $\Lambda_a$ : Se selecciona una sucesión de puntos  $h_i = F_a(h_{i-1})$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , en la cuenca inmediata de atracción de  $P_a$ , de modo que  $h_i \in A_i$ ,  $i \geq 1$ , y la sucesión sea convergente a  $P_a$ . Como  $\{h_k\} \subset \text{ext}\Lambda_a$  y  $P_a \in \Lambda_a$ ,  $P_a$  tiene que estar en  $\partial\Lambda_a$ . De aquí se sigue que tanto  $\overline{P_a}$  como los puntos atractores de periodo dos generados por  $P_a$  y  $\overline{P_a}$  también son elementos de  $\partial\Lambda_a$ .

Finalmente, recurriremos al  $\lambda$ -*lema* ([21, pág. 90]) para demostrar que las variedades inestables locales de los puntos silla de periodo 2 están contenidas en  $\partial\Lambda_a$ ; nótese que como  $F_a(\Gamma_a) = \Gamma_a$ , por la proposición 4.3.1 (iii), se sigue que  $\Gamma_a \subseteq \Lambda_a$ . Queremos ver que  $\Gamma_a = \partial\Lambda_a$ .

Para fijar ideas, consideremos al punto silla  $q_1$ . Denotemos por  $W^u$  a la variedad inestable local de  $q_1$ . Necesariamente el  $\omega$ -límite de cualquier punto  $z \in W^u$  consta de dos puntos: el punto fijo atractor  $P_a$  y el punto atractor de periodo dos  $Q_1$  (es decir, los extremos de  $W^u$ ). Tomemos  $z \in W^u$  y sea  $V$  una vecindad tubular (pequeña) de  $W^u$  que contiene a  $z$ . Como  $W^u \subset \Gamma_a$ , y  $\Gamma_a \subset \Lambda_a$ , tenemos que  $z \in \Lambda_a$ . Vamos a ver que  $z \in \partial\Lambda_a$ .

Sea  $z_0$  un punto en la variedad estable local de  $q_1$ , de manera que  $z_0$  esté en el exterior de  $\Lambda_a$ .<sup>12</sup> Sea  $\gamma$  un segmento de recta pequeño, transversal a esta variedad estable local, que contenga a  $z_0$ . Llamemos  $e_1$  y  $e_2$  a los extremos

---

<sup>12</sup>Esta variedad estable local de  $q_1$  está contenida en la recta  $\rho\mathbb{R}$  que pasa por  $q_1$  y el origen.

de  $\gamma$ . Como  $\gamma$  es pequeño, podemos considerar a  $e_2$  en la cuenca inmediata de atracción de  $Q_1$  y a  $e_1$  en la de  $P_a$ .

Denotemos por  $\gamma_n$  a  $F_a^n(\gamma)$ ,  $n \geq 0$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por el  $\lambda$ -lema, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$ , la componente conexa de  $\gamma_{2n} \cap V$  está  $\varepsilon$ -próxima a  $W^u$  en la topología  $C^1$ . Dado que  $\{F^n(e_2)\} \rightarrow Q_1$  y  $\{F^n(e_1)\} \rightarrow P_a$ , iterando más veces si es necesario, podemos lograr que haya puntos  $w$  en la componente conexa de  $\gamma_{2n} \cap V$  cuya distancia a  $z$  es menor que  $\varepsilon$ . Si desde el principio tomamos  $\gamma$  en alguna de las franjas  $A_i$  (por ejemplo  $\gamma \subset \overline{Z_4} - F^2(\overline{Z_4})$ ) entonces  $\gamma_{2n}$  está también en alguna de esas franjas y por consiguiente, en el exterior de  $\Lambda_a$ . Esto significa que los puntos señalados  $w$  no están en  $\Lambda_a$  y, como dijimos, distan menos que  $\varepsilon$  de  $z \in W^u \subset \Lambda_a$ ; por consiguiente,  $z \in \partial\Lambda_a$ . Es decir  $W^u \subset \partial\Lambda_a$ .

Análogamente se demuestra que todas las variedades inestables de los puntos sillan de periodo 2 están contenidas en  $\partial\Lambda_a$ .

Por lo tanto,  $\Gamma_a \subseteq \partial\Lambda_a$ . Como  $\Gamma_a$  es una curva cerrada, necesariamente  $\Gamma_a = \partial\Lambda_a$ .

Finalmente, como consecuencia de (i) y (ii) del paso tres, se sigue que el conjunto  $\Lambda_a$  está contenido en el interior de  $F_a^k(\overline{Z_4})$ ,  $k \geq 0$ , y  $\partial\Lambda_a$  no es unión finita de arcos críticos. Es decir  $\Lambda_a$  no es una zona absorbente en el sentido de la definición 1. Sin embargo, todo punto  $z \in \partial\Lambda_a$  es punto de acumulación del conjunto de arcos críticos  $L_k$ ,  $k \geq 0$ .  $\square$

# Apéndice 5C: Una bifurcación de Naimark-Sacker para la familia $F_a$ .

A continuación enunciamos (sin demostración) el teorema de Naimark-Sacker, que se utiliza para demostrar la proposición 5.7.6 de la sección 5.4. El enunciado lo dividimos en dos partes basadas, ambas, en una cierta combinación de lo expuesto en [11] y [28].<sup>13</sup> Suponemos, como se dijo en la sección 5.4, que  $\{f_\mu\}$  representa una familia de funciones del plano en sí mismo, suficientemente diferenciables (por lo menos  $C^4$ ). Lo primero es llevar estas funciones a una forma normal apropiada, como se indica en el siguiente teorema.

*Teorema preliminar:* Sea  $I$  un intervalo con centro en  $\mu_0 = 0$ . Supongamos que para todo  $\mu \in I$  las funciones  $f_\mu(x, y) = (u_\mu(x, y), v_\mu(x, y))$  satisfacen lo siguiente:

- i)  $f_\mu(0, 0) = (0, 0)$ .
- ii)  $Df_\mu(0, 0)$  tiene dos eigenvalores conjugados complejos,  $\lambda(\mu)$  y  $\overline{\lambda(\mu)}$ .
- iii)  $|\lambda(0)| = 1$  y  $\lambda(0)^k \neq 1$  para  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Entonces, existe  $\varepsilon > 0$  tal que para  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I$ ,  $f_\mu$  es difeomórficamente conjugada, en una vecindad del origen, a una función de la forma

$$z \rightarrow \lambda(\mu)z + c(\mu)z^2\bar{z} + O(4) \quad (5.5)$$

donde  $O(4) = (\text{términos de orden } \geq 4)$ .

---

<sup>13</sup>De acuerdo con [28, págs. 374-381], una demostración excelente de este teorema puede hallarse en [Iooss, G., *Bifurcations of maps and applications*, North Holland; Amsterdam, 1979].

Remarcamos que en la formulación de este teorema el parámetro  $\mu_0$  es el 0 y el punto fijo  $P_\mu$  de  $f_\mu$  es el origen  $(0, 0)$ . Si esto no fuese así, ello se arregla conjugando mediante una traslación, como veremos en la demostración de la proposición (5.7.6). En general, el procedimiento para obtener la forma normal (5.5) parte de desarrollar las funciones  $f_\mu$  en serie de Taylor alrededor del origen para posteriormente, a través de una serie de conjugaciones, ir eliminando los términos de orden 2 y (casi todos los de) orden 3. Para eliminar los términos de orden 2 se introduce una función cuadrática en  $z$  y  $\bar{z}$ ; es decir, una de la forma  $L_1(z) = z + a_1 z^2 + a_2 z\bar{z} + a_3 \bar{z}^2$ . Las fórmulas para calcular los coeficientes  $a_1, a_2, a_3$ , son conocidas. Para los términos de orden 3 se procede en forma análoga, pero ahora con alguna función de grado tres en  $z$  y  $\bar{z}$ . Especialmente la hipótesis iii) garantiza que todo este proceso se puede llevar a cabo. Sin embargo, los cálculos involucrados en cada caso particular pueden ser largos y tediosos.

Una vez que se obtiene dicha forma normal, para enunciar el teorema de Naimark-Sacker se requiere introducir coordenadas polares de la siguiente manera: sean  $z = r e^{i2\pi\theta}$  y  $g_\mu(z) = \lambda(\mu)z + c(\mu)z^2\bar{z} + O(4)$ . El módulo (al cuadrado) de (5.16) está dado por

$$\begin{aligned} |g_\mu(z)|^2 &= g_\mu(z) \overline{g_\mu(z)} \\ &= |\lambda(\mu)|^2 |z|^2 + 2|z|^4 \operatorname{Re}\left(c(\mu)\overline{\lambda(\mu)}\right) + |c(\mu)|^2 |z|^6 + O(4). \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$\operatorname{Re}\left(c(\mu)\overline{\lambda(\mu)}\right) = \operatorname{Re}\left(c(\mu)\frac{|\lambda(\mu)|^2}{\lambda(\mu)}\right) = |\lambda(\mu)|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)}\right)$$

y sustituyendo en el renglón anterior,

$$\begin{aligned} |g_\mu(z)|^2 &= |\lambda(\mu)|^2 \left( |z|^2 + 2|z|^4 \operatorname{Re}\left(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)}\right) + \frac{|c(\mu)|^2}{|\lambda(\mu)|^2} |z|^6 + O(|z|^8) \right) \\ &= |\lambda(\mu)|^2 \left( |z| + |z|^3 \operatorname{Re}\left(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)}\right) + O(|z|^4) \right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, llamando  $r$  a  $|z|$ , se tiene, finalmente, que

$$|g_\mu(z)| = |\lambda(\mu)| \left( r + r^3 \operatorname{Re}\left(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)}\right) + O(r^4) \right). \quad (5.6)$$

Desarrollando los coeficientes de (5.6) en serie de Taylor alrededor de 0 y notando que  $|\lambda(0)| = 1$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
|g_a(z)| &= \left(1 + \frac{d}{d\mu} (|\lambda(\mu)|)_{\mu=0} \mu + O(\mu^2)\right) \times \\
&\quad \left(r + \left(\operatorname{Re} \left(\frac{c(0)}{\lambda(0)}\right) + \frac{d}{d\mu} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)}\right)\right)_{\mu=0} \mu + O(\mu^2)\right) r^3 + O(r^4)\right) \\
&= \left(1 + \frac{d}{d\mu} (|\lambda(\mu)|)_{\mu=0} \mu\right) r + 1 \operatorname{Re} \left(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)}\right) r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^4) \\
&= r + \left(\frac{d}{d\mu} (|\lambda(\mu)|)_{\mu=0} \mu + \operatorname{Re} \left(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)}\right) r^2\right) r + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^4) \quad (5.7)
\end{aligned}$$

En forma análoga, haciendo  $c(\mu) = |c(\mu)| e^{i2\pi\phi(\mu)}$  (y manteniendo  $z = r e^{i2\pi\theta}$ ), se obtiene para el argumento de  $g_\mu(z)$  una función de la forma

$$\theta \rightarrow \theta + \phi(\mu) + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)}\right) r^2 + O(r^3),$$

y desarrollando los coeficientes de esta expresión en serie de Taylor alrededor de 0, se llega a

$$\theta \rightarrow \theta + \phi(0) + \frac{d}{d\mu} (\phi(\mu))_{\mu=0} \mu + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{c(0)}{\lambda(0)}\right) r^2 + O(\mu^2, \mu r^2, r^3) \quad (5.8)$$

En suma, se ha obtenido la siguiente forma polar para la forma normal (5.5):

$$(r, \theta) \rightarrow (r + (d\mu + \alpha r^2)r + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^4), \theta + \phi_0 + \phi_1 \mu + O(\mu^2, \mu r^2, r^3)). \quad (5.9)$$

En esta expresión,

$$\begin{aligned}
d &= \frac{d}{d\mu} |\lambda(\mu)| \text{ evaluado en } \mu = 0, \\
\alpha &= \operatorname{Re} \left(\frac{c(0)}{\lambda(0)}\right) \text{ donde } c(\mu) = c_1(\mu) + i c_2(\mu), \\
\phi_0 &= \phi(0) \text{ donde } \phi(\mu) = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{c_2(\mu)}{c_1(\mu)}\right), \\
\phi_1 &= \frac{d}{d\mu} (\phi(\mu)) \text{ evaluado en } \mu = 0, \text{ y} \\
b &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \frac{c(0)}{\lambda(0)}.
\end{aligned}$$

La siguiente, la llamaremos *forma truncada* de (5.9):

$$(r, \theta) \rightarrow (r + (d\mu + \alpha r^2)r, \theta + \phi_0 + \phi_1\mu + br^2) \quad (5.10)$$

*Teorema de la bifurcación de Naimark-Sacker:* Bajo las hipótesis del teorema preliminar anterior, la dinámica de la forma normal (5.9) es conjugada, en una vecindad del cero, con la de la forma truncada (5.10) para  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . En particular, si  $\alpha < 0$  y  $d < 0$ , existe una curva simple cerrada  $\Gamma_\mu$  definida para  $-\varepsilon < \mu < 0$ , invariante bajo  $f_\mu$ , y atractora en alguna vecindad del origen. Más aún, si  $-\varepsilon < \mu < 0$ , entonces  $\Gamma_\mu \rightarrow 0$  si  $\mu \rightarrow 0$ . A su vez, para  $0 < \mu < \varepsilon$  el origen es atractor y para  $-\varepsilon < \mu < 0$  es repulsor.

*Una breve explicación acerca de la bifurcación:* Supongamos, como en el enunciado del teorema, que en  $\mu_0 = 0$  se cumplen las hipótesis mencionadas. A grandes rasgos, el análisis de (5.10) para  $\mu$  en cierto intervalo pequeño  $I$ , alrededor de  $\mu_0 = 0$ , es como sigue. Sea  $\varphi(r) = r + (d\mu + \alpha r^2)r$  la primera coordenada de (5.10). Calculando los puntos fijos de  $\varphi$  obtenemos que  $r = 0$  es uno de ellos y otro, el conjunto de puntos  $(r, \theta)$  tales que

$$0 < r = \sqrt{\frac{-\mu d}{\alpha}}. \quad (5.11)$$

Este conjunto es una *circunferencia invariante* si  $\alpha \neq 0$  y  $\frac{-\mu d}{\alpha} > 0$ . Que es invariante se deduce de que la coordenada  $r$  de los puntos en la tal circunferencia no cambia bajo iteraciones (porque este valor de  $r$  es punto fijo de  $\varphi$ ). La naturaleza atractora o repulsora, tanto del origen como de la circunferencia invariante (5.11), depende de los signos de  $\alpha$ ,  $d$  y  $\mu$ .

Por ejemplo, como  $\varphi'(0) = 1 + d\mu$ , si  $d < 0$ , el origen cambia de atractor a repulsor conforme  $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  cruza  $\mu_0 = 0$  yendo de los positivos a los negativos. Por otra parte, si  $d < 0$  y  $\alpha < 0$ , la circunferencia (5.11) existe si  $\mu < 0$ , y no existe si  $\mu > 0$ ; o sea que, bajo estas condiciones,  $d < 0$  y  $\alpha < 0$ , la circunferencia invariante nace al cruzar  $\mu$  de los positivos a los negativos. Además, si  $r$  está dado por (5.11), entonces  $\varphi'(r) = 1 + 2d\mu + 3\alpha r^2 = 1 + 2\alpha r^2$ ; por lo tanto, si  $d < 0$  y  $\alpha < 0$ , se tiene que  $\varphi'(r) < 1$  y, en consecuencia, la circunferencia invariante que nace para  $\mu < 0$  es *atractora*, es decir, en una vecindad de esta circunferencia, las órbitas de todos los puntos tienden asintóticamente a la misma.<sup>14</sup>

<sup>14</sup>Para una discusión más completa y un análisis de todos los casos en función de los signos de  $\alpha$  y  $d$  véase [[28], págs. 374-381].

Pasamos ahora a la demostración prometida de la proposición (5.7.6) de la sección 5.4. La enunciamos de nuevo a continuación.

**Proposición 5.7.6** *Para  $a \in (-1, 0)$  la familia  $\{F_a\}$  presenta una bifurcación de Naimark-Sacker cuando el parámetro  $a$  decrece y cruza el valor*

$$a_4 = \frac{-8 - \sqrt{112}}{24} = -0.7742918\dots$$

*Específicamente, en  $a = a_4$  nace una curva simple cerrada  $\Gamma_a$  atractora en torno al punto fijo  $P_a = \left(\frac{1}{2} + a, \sqrt{3a^2 + a - \frac{1}{4}}\right)$ , que subsiste para  $a \in J_a = (a_5, a_4)$  con  $a_5 \cong -0,7764 < a_4$ . Para  $a_4 < a$ ,  $P_a$  es atractor y para  $a \in J_a$  se convierte en repulsor.*

NOTA 1: Con el debido cuidado algebraico, en lo que sigue los puntos del plano se usarán indistintamente como vectores –renglón o columna– en  $\mathbb{R}^2$  o como números complejos.

*Demostración:*

*Paso 1: Traslación del punto fijo  $P_a$  al origen.*

Sea  $L(z) = z - P_a$ ; su inversa es  $L^{-1}(z) = z + P_a$ . Es inmediato que  $G_a = L \circ F_a \circ L^{-1}$  satisface  $G_a(0) = 0$  para todo  $a$  (i.e., el punto fijo es el origen) y que  $DG_a(0) = DF_a(P_a)$ . Explícitamente,  $G_a(z) = z^2 + 2a\bar{z} + 2P_a z = F_a(z) + 2P_a z$ .

Escribiendo  $P_a = (x_0, y_0)$ , en coordenadas rectangulares se obtiene

$$G_a(x, y) = (x^2 - y^2 + 2(x_0 + a)x - 2y_0y, 2xy + 2(x_0 - a) + 2y_0x)$$

y

$$DG_a(x, y) = \begin{pmatrix} 2x_0 + 2a + 2x & -2y_0 - 2y \\ 2y_0 + 2y & 2x_0 - 2a + 2x \end{pmatrix}.$$

Considerando que  $P_a = (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2} + a, \sqrt{3a^2 + a - \frac{1}{4}}\right)$ , se sigue que

$$\begin{aligned} DF_a(P_a) &= DG_a(0) \\ &= \begin{pmatrix} 2x_0 + 2a & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 - 2a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 4a & -2\sqrt{3a^2 + a - \frac{1}{4}} \\ 2\sqrt{3a^2 + a - \frac{1}{4}} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$G_a(x, y) = \begin{pmatrix} 2x_0 + 2a & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 - 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente,

$$G_a(z) = DG_a(0)z + z^2.$$

Los valores propios de  $DG_a(0) = DF_a(P_a)$  están dados por

$$\lambda_{+,-}(a) = 2 \left( \left( \frac{1}{2} + a \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2a^2 - a} \right). \quad (5.12)$$

En particular, éstos son complejos conjugados si  $a < -\frac{\sqrt{3}+1}{4} = -0.6830127\dots$ . Su módulo está dado por  $|\lambda_{1,2}(a)| = 2\sqrt{3a^2 + 2a}$  (obsérvese que  $3a^2 + 2a > 0$  si  $a < -\frac{2}{3}$ ). Por lo tanto,  $|\lambda_{+,-}(a)| = 1$  si, y sólo si,  $a = \frac{-8 \pm \sqrt{112}}{24}$ . Nos interesa la raíz negativa, así que tomamos  $a = a_4 = \frac{-8 - \sqrt{112}}{24} = -0.7742918\dots$ . Entonces, en una vecindad adecuada  $J$  alrededor de  $a_4$ , los valores propios  $\lambda_{+,-}(a)$  son complejos conjugados; en  $a = a_4$  éstos tienen módulo 1 y si  $a \in J$ , dicho módulo es mayor que 1 si  $a > a_4$  y es menor que 1 si  $a < a_4$ .

Para  $a \in J$  la forma canónica de la matriz  $DG_a(0) = DF_a(P_a) = M$  es del tipo  $2 \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  con  $2(\alpha \pm i\beta)$  los valores propios  $\lambda_{+,-}(a)$ , es decir,  $\alpha = (\frac{1}{2} + a)$  y  $\beta = \sqrt{a + 2a^2 - \frac{1}{4}}$ . El procedimiento usual nos lleva a que la matriz  $T$  dada por  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{y_0} & \frac{\beta}{y_0} \end{pmatrix}$ , con inversa  $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{\beta} & \frac{y_0}{\beta} \end{pmatrix}$ , es tal que  $T^{-1}MT = 2 \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ .

*Paso 2: Obtención de la parte lineal de (5.5).*

Sea  $H_a = T^{-1}G_aT$ . Entonces,

$$\begin{aligned} H_a(w) &= T^{-1}(G_a(T(w))) \\ &= T^{-1}(MT(w) + (Tw)^2) \\ &= T^{-1}MT(w) + T^{-1}((Tw)^2) \\ &= 2 \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} w + T^{-1}((Tw)^2). \end{aligned}$$

Haciendo  $w = (\xi, \eta) = \xi + i\eta$ , se sigue que  $2 \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} w = (2\alpha\xi - 2\beta\eta) + i(2\beta\xi + 2\alpha\eta) = 2(\alpha + i\beta)(\xi + i\eta) = \lambda_+(a)w$ .

En conclusión, escribiendo simplemente  $\lambda$  en lugar de  $\lambda_+(a)$ ,  $G_a$  es conjugada con la función  $H_a$  dada por

$$H_a(w) = \lambda w + T^{-1}((Tw)^2).$$

Nótese que la parte lineal de  $H_a$  es la de (5.5).

Seguindo a los autores citados, se procede desarrollar a  $H_a$  en serie de Taylor alrededor del origen para obtener una función de la forma

$$w \rightarrow \lambda w + \delta_1 w^2 + \delta_1 w \bar{w} + \delta_1 \bar{w}^2 + O(3) \quad (5.13)$$

donde  $O(3)$  representa términos de orden mayor o igual que 3 y  $\lambda w$  es el término lineal que ya tenemos. Una vez alcanzado este punto de partida, una serie de conjugaciones nos llevará a la forma normal deseada.

*Paso 3: Obtención de (5.13).*

Vamos a calcular explícitamente  $H_a(w)$  en términos de  $w$  y  $\bar{w}$ . Para empezar,

$$Tw = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{y_0} & \frac{\beta}{y_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{a\xi + \beta\eta}{y_0} \end{pmatrix} = \xi + i \frac{a\xi + \beta\eta}{y_0},$$

por lo que

$$(Tw)^2 = \xi^2 - \left( \frac{a\xi + \beta\eta}{y_0} \right)^2 + i2\xi \frac{(a\xi + \beta\eta)}{y_0}.$$

En consecuencia,  $T^{-1}((Tw)^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{\beta} & \frac{y_0}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^2 - \left( \frac{a\xi + \beta\eta}{y_0} \right)^2 \\ 2\xi \frac{(a\xi + \beta\eta)}{y_0} \end{pmatrix} = X + iY$ , donde, tras alguna simplificación, se obtiene,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{y_0^2} ((1 - a^2) \xi^2 - 2a\beta\xi\eta - \beta^2\eta^2); \\ Y &= \frac{1}{y_0^2\beta} ((ay_0^2 + a^3) \xi^2 + 2\beta(y_0^2 + a^2) \xi\eta + a\beta^2\eta^2). \end{aligned}$$

Haciendo ahora  $\xi = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$ ,  $\eta = \frac{1}{2i}(w - \bar{w})$  y renombrando los coeficientes de estas  $X, Y$  como sigue:  $A = \frac{1}{4y_0^2}(1 - a^2)$ ,  $B = \frac{1}{4y_0^2}(-a\beta)$ ,

$C = \frac{1}{4y_0^2}(-\beta^2)$ ,  $D = \frac{1}{4\beta y_0^2}(ay_0^2 + a^3)$ ,  $E = \frac{1}{4\beta y_0^2}\beta(y_0^2 + a^2)$  y  $F = \frac{1}{4\beta y_0^2}a\beta^2$ , se llega a que

$$\begin{aligned} X &= (A - i2B - C)w^2 + 2(A + B)w\bar{w} + (A + i2B - C)\bar{w}^2; \\ Y &= (D - i2E - F)w^2 + 2(E + F)w\bar{w} + (D + i2E - F)\bar{w}^2. \end{aligned}$$

Finalmente, tras unas cuentas adicionales, obtenemos que

$$T^{-1}((Tw)^2) = \delta_1 w^2 + \delta_1 w\bar{w} + \delta_1 \bar{w}^2$$

donde los coeficientes  $\delta_j$  están dados en términos de  $A, B, C, D, E$  y  $F$  para  $j = 1, 2, 3$ .<sup>15</sup>

Con todo lo hecho hasta aquí llegamos a que  $F_a$ , con  $a \in J$ , es conjugada a

$$H_a(w) = \lambda w + \delta_1 w^2 + \delta_2 w\bar{w} + \delta_3 \bar{w}^2, \quad (5.14)$$

que es la anhelada forma (5.13) para la familia de funciones que nos ocupa.

NOTA 2: Obsérvese que la naturaleza particular de las funciones  $F_a$  exige a la forma (5.14) de los términos  $O(3)$  que aparecen en el caso general (5.13).

*Paso 4: Comprobación de las hipótesis del teorema preliminar.*

Haciendo  $a = a_4 + t$ ,  $|\lambda(a)| = |\lambda(a_4 + t)|$  para  $a \in J$ , obtenemos que  $t = 0$  es el parámetro donde se cumple que los valores propios  $\lambda(a)$  tienen módulo 1, y que dichos valores propios son complejos conjugados en algún intervalo alrededor de 0 (el que corresponde a  $a \in J$ ). Esto implica que  $H_a$  satisface i), ii), y una parte de iii), del teorema preliminar. Para lo que falta de iii) se presenta la siguiente cuenta:

Sustituyendo  $a_4 = \frac{-8 - \sqrt{112}}{24} = -0.7742918\dots$  (que corresponde a  $t = 0$ ) en (5.12) se obtiene

$$\lambda(a_4) = -0.54858 + 0.83610i.$$

Calculamos ahora  $\lambda(a_4)^n$  para  $n = 2, 3$  y 4:

$$\begin{aligned} (-0.54858 + 0.83610i)^2 &= -0.39812 - 0.91734i \\ (-0.54858 + 0.83610i)^3 &= 0.98539 + 0.17036i \\ (-0.54858 + 0.83610i)^4 &= -0.683 + 0.73043i. \end{aligned}$$

Es claro que se cumple la hipótesis iii) del teorema preliminar. Ya se puede, entonces, concluir que nuestra familia de funciones es conjugada (para

<sup>15</sup>Concretamente,  $\delta_1 = \frac{1}{4}(A + 2E - C + i(D - 2B - F))$ ,  $\delta_2 = \frac{1}{2}(A + C + i(E + F))$  y  $\delta_3 = \frac{1}{4}(A - 2E - C + i(D + 2B - F))$ .

un intervalo adecuado de parámetros) a la forma normal (5.5); pero ello no basta, se requiere obtener explícitamente esta forma normal en el caso que estamos tratando.

*Paso 5: Dos formas normales intermedias para llegar a (5.5).*

Sea  $L_1(w) = w + a_1w^2 + a_2w\bar{w} + a_3\bar{w}^2$  con coeficientes

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-\delta_1}{\lambda(1-\lambda)}, \\ a_2 &= \frac{-\delta_2}{\lambda(1-\bar{\lambda})}, \\ a_3 &= \frac{-\delta_3}{\lambda(1-\bar{\lambda}^2)}, \end{aligned}$$

donde  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  son los coeficientes que aparecen en (5.14). Nótese que la recién comprobada hipótesis iii) del teorema preliminar garantiza, por la continuidad, que al menos en algún intervalo alrededor del origen los denominadores de los coeficientes  $a_1, a_2$  y  $a_3$  no se anulan, por lo que éstos están bien definidos. De acuerdo con [11],  $L_1$  tiene una inversa dada por  $L_1^{-1}(w) = w - a_1w^2 - a_2w\bar{w} - a_3\bar{w}^2 + O(3)$ . Sea  $h_a = L_1^{-1} \circ H_a \circ L_1$ . Por su definición,  $h_a$  es conjugada con  $H_a$  y, por ende, con  $F_a$ . Una serie de nuevos cálculos llevan a la conclusión de que  $h_a$  es de la forma

$$h_a(w) = \lambda w + O(3).$$

Es decir,  $h_a$  conserva la parte lineal de  $H_a$  y ya no tiene términos cuadráticos. No hay manera de eludir los cálculos puesto que requeriremos algún coeficiente de  $O(3)$ , así que haciéndolos –omitimos detalles– se obtiene

$$\begin{aligned} h_a(w) &= \lambda w + (2\delta_1 a_1 + \delta_2 \bar{a}_3) w^3 \\ &\quad + (2\delta_1 a_2 + \delta_2 \bar{a}_2 + \delta_2 a_1 + 2\delta_3 \bar{a}_3) w^2 \bar{w} \\ &\quad + (2\delta_1 a_3 + \delta_2 \bar{a}_1 + \delta_2 a_2 + 2\delta_3 \bar{a}_2) \bar{w}^2 w \\ &\quad + (\delta_2 a_3 + 2\delta_3 \bar{a}_1) \bar{w}^3 + O(4). \end{aligned}$$

O sea que  $h_a(w)$  es de la forma

$$h_a(w) = \lambda w + \beta_1 w^3 + \beta_2 w^2 \bar{w} + \beta_3 \bar{w}^2 w + \beta_4 \bar{w}^3 + O(4). \quad (5.15)$$

Nuevamente de acuerdo con [11], esta función es conjugada con una de la forma 5.5. Concretamente, (5.15) es conjugada con

$$g_a(w) = \lambda w + \beta_2 w^2 \bar{w} + O(4). \quad (5.16)$$

Nótese que el coeficiente  $\beta_2 = 2\delta_1 a_2 + \delta_2 \bar{a}_2 + \delta_2 a_1 + 2\delta_3 \bar{a}_3$  en (5.15) prevalece en (5.16) y se puede calcular prácticamente dado que conocemos todos los  $\delta_i$  y los  $a_i$ .

*Paso 6: La forma polar de (5.16).*

Procediendo como se indicó tras el enunciado del teorema preliminar, se obtiene una forma polar del tipo (5.9) para la función  $g_a(w)$  dada por (5.16). En este caso, los coeficientes  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  y  $b$  señalados a continuación de la ecuación (5.9) son los siguientes:

$$\begin{aligned} d &= \left( \frac{d}{da} |\lambda(a)| \right)_{a=a_4} = \left( \frac{6a+2}{\sqrt{3a^2+2a}} \right)_{a=a_4}, \\ \alpha &= \operatorname{Re} \left( \frac{\beta_2(a_4)}{\lambda(a_4)} \right), \\ \phi_0 &= \phi(a_4) = \arg \beta_2(a_4), \\ \phi_1 &= \left( \frac{d}{d\mu} (\phi(a)) \right)_{a=a_4}, \text{ y} \\ b &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{\beta_2(a_4)}{\lambda(a_4)} \right). \end{aligned}$$

Numéricamente se comprueba que  $d$  y  $\alpha$  son negativos con lo cual, utilizando el teorema de Naimark-Sacker, se cumple la proposición (5.7.6). Con esto queda concluida la demostración.  $\square$

Como ya se ha dicho en la sección 5.4, por las simetrías de  $F_a$ , para  $a \in J_a$  nacen, en realidad, cinco curvas invariantes atractoras además de  $\Gamma_a$ : una en torno a  $\bar{P}_a$  y las otras cuatro en torno a cada punto atractor de periodo dos. Todos estos puntos periódicos que eran atractores, tras la bifurcación se convierten en repulsores.

## Apendice 5D. Existencia y desaparición del hoyo $W_a$ .

Como se demostró en la sección 5.6, la definición 5.6.1 implica que si un hoyo existe, entonces el punto fijo repulsor  $P$  no puede tener imágenes inversas, distintas de  $P$ , dentro de  $S$ . Para cierta clase de funciones sencillas, en [19] se demuestra que –bajo ciertas hipótesis– esta condición necesaria es también suficiente, con lo cual se obtiene una caracterización sencilla para la existencia –y desaparición– de un hoyo y una zona anular. Ahí también se menciona –sin demostración– que dicha caracterización es válida para una clase más amplia de funciones. Siguiendo las ideas mencionadas en [19], veremos en este apartado que para cierto rango de parámetros, dicha caracterización es válida en el caso de las funciones  $F_a$ . Una vez hecho esto, la proposición 5.7.1 se desprende fácilmente.

NOTA: Como en el capítulo 1 (sección 1.4), denotamos por  $\overline{A}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , a las cuatro regiones compactas en las que se descompone  $F_a^{-1}(\overline{Z_4(a)})$  (véase figura 1.10).

Para parámetros  $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ ,  $\Lambda_a$  es una zona absorbente cuya frontera está formada por ciertos arcos de  $L$  y  $L_1$  (los que se obtienen de iterar dos veces cada uno de los tres arcos determinados por  $\Lambda_a \cap L_{-1}$ ). Consideremos ahora el parámetro particular  $a = -0.8215 < \frac{2}{3}$ . Como se muestra en las figuras 5.15, para este valor del parámetro existen, dentro de  $\Lambda_a$ , una zona anular  $B_a$  y un hoyo  $W_a = \Lambda_a - B_a \neq \emptyset$ . La zona anular  $B_a$  está determinada, o construida, de la siguiente manera: denotemos por  $\delta_a$  a la intersección de  $\Lambda_a$  con el exterior del disco  $D_{|a|}$  (cuya frontera es la circunferencia singular  $L_{-1}$ ). Esta intersección tiene tres componentes compactas ajenas  $\Lambda_a \cap \overline{A}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  (ver figura 5D1). Es decir,

$$\delta_a = (\Lambda_a \cap \overline{A}_1) \cup (\Lambda_a \cap \overline{A}_2) \cup (\Lambda_a \cap \overline{A}_3) \subset \Lambda_a. \quad (5.17)$$

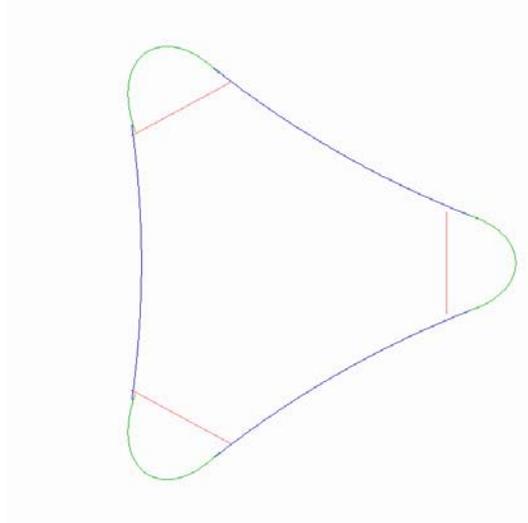


Figura 5D1:  $\delta_a = (\Lambda_a \cap \overline{A_1}) \cup (\Lambda_a \cap \overline{A_2}) \cup (\Lambda_a \cap \overline{A_3}) \subset \Lambda_a$ .

Nótese que el origen, punto fijo repulsor, no es elemento de  $\delta_a$  dado que éste es elemento de  $\Lambda_a \cap A_0$ . Obsérvese también que la frontera de  $\delta_a$  es la unión de las tres componentes de  $\Lambda_a \cap L_{-1}$  con ciertos arcos de  $\partial\Lambda_a$ , es decir,  $\partial\delta_a$  es una unión finita de arcos críticos.

Pues bien, la mencionada zona anular  $B_a$  resulta de iterar  $\delta_a$  un cierto número  $k_0$  de veces. Es decir,  $B_a = \bigcup_{j=1}^{k_0} F_a^j(\delta_a)$  y se cumple que  $F_a(B_a) \subseteq B_a$  y  $W_a = \Lambda_a - B_a \neq \emptyset$ . Numéricamente se comprueba que basta con tomar  $k_0 = 15$ . Como  $\partial\delta_a$  es unión finita de arcos críticos, por el lema 4.1.4,  $\partial B_a$  es también unión finita de arcos críticos. La frontera externa de  $B_a$  coincide con  $\partial\Lambda_a$ , y la frontera interna está formada por arcos de  $L_3$  y  $L_{15}$ . El conjunto  $W_a = \Lambda_a - B_a \neq \emptyset$  es un hoyo en torno al origen y su frontera es la frontera interna de  $B_a$  (véanse figuras 5.14(d) y 5.15 del capítulo 5).

Esta construcción se puede generalizar a parámetros  $a$  menores que  $-0.8215$ ; es claro que, al menos para valores cercanos a este último, se sigue obteniendo una zona anular y un hoyo no vacíos. Partiendo de que se lleva a cabo esta construcción, se obtiene la caracterización mencionada al principio, que formulamos como sigue.

**Proposición 5.7.7** *Sea  $a \leq -0.8215$ . Supongamos que  $B_a = \bigcup_{j=1}^{k_0} F_a^j(\delta_a)$  es tal que  $F_a(B_a) \subseteq B_a$  para cierto entero  $k_0$ . Entonces,  $W_a = \Lambda_a - B_a \neq \emptyset$  si,*

y sólo si, todas las imágenes inversas de orden uno del punto fijo repulsor  $P = 0$ , distintas de  $P$ , están en el exterior de  $\Lambda_a$ .<sup>16</sup>

*Demostración:* Sabemos que si un hoyo existe, entonces el punto fijo repulsor  $P$  no puede tener imágenes inversas, distintas de  $P$ , dentro de  $S$ . Sólo resta, entonces, probar la suficiencia.

Como se estableció en el capítulo 1 (y utilizando la misma notación), las tres preimágenes del origen distintas de éste son  $2t_{-1}^* = -2a \in \mathbb{R}$ ,  $-2v_{-1}^* \in \rho\mathbb{R}$  y  $-2u_{-1}^* \in \rho^2\mathbb{R}$ ; por las simetrías de  $F_a$ , las tres simultáneamente son (o dejan de ser) elementos de  $\partial\Lambda_a$  (o de  $\Lambda_a$ ).

Hagamos  $\alpha_1 = 2t_{-1}^*$ ,  $\alpha_2 = -2v_{-1}^*$  y  $\alpha_3 = -2u_{-1}^*$ . Obsérvese que estas tres preimágenes jamás son elementos de  $D_{|a|} = \text{int}A_0$ . En consecuencia,  $\alpha_i \in \Lambda_a$  si, y sólo si,  $\alpha_i \in A_i \cap \Lambda_a$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; es decir, estas tres preimágenes son elementos de  $\Lambda_a$  si, y sólo si, son elementos de  $\delta_a$ .

Supongamos que  $\alpha_i \notin \Lambda_a$  para  $i = 1, 2, 3$ . Esto significa que  $\alpha_i \notin \delta_a$  y por lo tanto,  $0 \notin F_a(\delta_a)$ ; como se trata de un punto fijo,  $0 \notin F_a^n(\delta_a)$  para todo  $n \geq 1$ . Como  $B_a = \bigcup_{j=1}^{k_0} F_a^j(\delta_a)$  y  $F_a(B_a) \subseteq B_a$ , se sigue que  $F_a^n(B_a) \subseteq B_a$  y también que  $F_a^n(\delta_a) \subseteq B_a$  para todo  $n \geq 0$ . En consecuencia,  $0 \notin B_a$ ; por lo tanto,  $0 \in \Lambda_a - B_a = W_a$  y  $W_a \neq \emptyset$ .  $\square$

De la proposición 5.7.7 se desprende una condición sencilla para la desaparición de  $W_a$ : basta con determinar el parámetro para el cual ocurre que las preimágenes  $\alpha_i$  del origen ingresan en  $\Lambda_a$ . Como las tres preimágenes tocan simultáneamente  $\partial\Lambda_a$ , basta con determinar en qué momento la preimagen real,  $\alpha_1 = -2a$ , toca  $\partial\Lambda_a$ . Como se estableció en el capítulo 5, esto ocurre si, y sólo si, el parámetro está dado por 5.3.

---

<sup>16</sup>En [19] se menciona, sin demostración, este resultado en una situación un poco más general.



# Apéndice 5E: El hoyo $W_a$ desaparece por una bifurcación homoclínica.

Por definición, si  $P$  es un punto fijo repulsor y  $f$  es no invertible, la variedad inestable de  $P$ ,  $W^u(P)$ , es el conjunto de todos los puntos  $w$  que tienen al menos una sucesión infinita de preimágenes (de orden creciente) convergente a  $P$ . A su vez, la variedad estable de  $P$ ,  $W^s(P)$ , son aquellos puntos cuyas órbitas convergen a  $P$ . Se puede demostrar que si  $P$  es un punto fijo repulsor, la órbita de  $z$  converge a  $P$  si, y sólo si,  $f^m(z) = P$  para alguna  $m \geq 1$ . En consecuencia, la variedad estable de un punto fijo  $P$  repulsor es el conjunto de todas las imágenes inversas de todos los órdenes de  $P$ .

**Definición 5.7.8** *Un punto  $q \neq P$  es homoclínico a un punto fijo  $P$  repulsor si  $q \in W^u(P) \cap W^s(P)$ . Es decir, si alguna sucesión de preimágenes de orden creciente de  $q$  converge a  $P$  y, a la vez, existe  $m > 1$  tal que  $f^m(q) = P$ .<sup>17</sup>*

Si  $P$  es un punto fijo repulsor y  $f$  es derivable con continuidad, existe un disco compacto  $E$  con centro en  $P$  en el cual se cumple que el módulo de los valores propios de  $Df(x)$  es mayor que 1 para todo  $x \in E$ . Más aún,  $f : E \rightarrow f(E)$  es un difeomorfismo y  $E$  se puede escoger de manera que  $E \subset f(E)$ . Por consiguiente,  $f$  tiene una inversa única definida en  $E$ ,  $f_E^{-1} : E \rightarrow E$ , que es una contracción, por lo que  $\bigcap_{k \geq 0} f_E^{-k}(E) = \{P\}$ . En estas circunstancias se prueba que  $W^u(P) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(E)$ .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el punto homoclínico  $q$  de la definición anterior es elemento del interior de este disco compacto

---

<sup>17</sup>A un punto fijo repulsor  $P$  para el cual existe un punto homoclínico  $q$ , en [17] se le llama “*Snap-back repellor*”.

$E$ . Esto es así porque, por definición, existen preimágenes de  $q$  (de orden creciente) tan cerca como queramos de  $P$ ; en consecuencia, alguna de estas preimágenes cae en el interior de  $E$ , y podemos reemplazar a  $q$  por dicha preimagen. Obsérvese que en  $E$ , dado que existe una única inversa  $f_E^{-1} : E \rightarrow E$ , la sucesión de imágenes inversas de  $q$  que converge a  $P$  está unívocamente determinada y está dada por  $\{f_E^{-k}(q) : k \geq 1\}$ .

La definición 5.7.8 es, entonces, equivalente a la siguiente

**Definición 5.7.9** *Supongamos que  $P$  es un punto fijo repulsor y que  $E$  es un disco compacto como el señalado en el párrafo previo. Un punto  $q \neq P$  es homoclínico a un punto fijo  $P$  repulsor si  $q \in E$ , la sucesión  $\{f_E^{-k}(q) : k \geq 1\}$  converge a  $P$ , y existe  $m > 1$  tal que  $f^m(q) = P$  (o simplemente, si  $q \in W^u(P) \cap W^s(P) \cap E$ ).*

Regresemos a las funciones  $F_a$  para  $a \leq -0.8215$ . Como se vió en el apéndice 5D, para parámetros en este rango pero cercanos a  $-0.8215$ , existe un hoyo  $W_a \neq \emptyset$ . Una primera relación entre puntos homoclínicos y hoyos nos la da la siguiente proposición:

**Proposición 5.7.10** *Si  $W_a \neq \emptyset$ , no existen puntos homoclínicos al origen.*

*Demostración:* Como 0 es repulsor, existe  $E \subset W_a$  vecindad de 0 como la que se utiliza en la definición 5.7.9: los valores propios de  $Df(z)$  son de módulo mayor que 1 para todo  $z \in E$ . Denotemos por  $G_a$  a la (rama de la) inversa de  $F_a$  definida en  $E$ . Como se ha señalado,  $G_a$  es una contracción, por lo que  $\bigcap_{k \geq 0} G_a^k(U) = \{0\}$ , y la variedad inestable de 0,  $W^u(0)$ , coincide con  $\bigcup_{k \geq 0} F_a^k(E)$ . Como  $\Lambda_a$  es invariante hacia adelante y  $E \subset \Lambda_a$ , tenemos que  $W^u(0) \subseteq \Lambda_a$ .

Por otro lado, como  $W_a \neq \emptyset$ , las imágenes inversas (de rango 1) del origen, distintas de éste, están en el exterior de  $\Lambda_a$ . Como  $F_a(\Lambda_a) = \Lambda_a$ , necesariamente todas las imágenes inversas del origen, de todos los órdenes, están fuera de  $\Lambda_a$ ; por lo tanto,  $(W^s(0) - \{0\}) \cap W^u(0) = \emptyset$ .  $\square$

Esta proposición sugiere, entonces, que, al menos bajo ciertas condiciones, una bifurcación que conduce a la desaparición de un hoyo puede “generar” puntos homoclínicos al punto fijo repulsor. Siguiendo a [13], se tiene la siguiente proposición.<sup>18</sup>

<sup>18</sup>En [13] se presenta una proposición general, semejante a la proposición 5.7.11, pero para funciones  $Z_0, Z_2$  (ver Apéndice 5D para la definición de estas funciones).

**Proposición 5.7.11** *Una condición suficiente para que la bifurcación que conduce a la desaparición del hoyo  $W_a$  genere puntos homoclinicos al punto fijo repulsor  $P = 0$  es que para el parámetro donde se produce dicha bifurcación,  $a = a_8$ , se cumpla que  $\overline{W^u(0)} = \Lambda_a$ .*

*Demostración:* Considérese la bifurcación que hace desaparecer al hoyo  $W_a$  cuando  $a = a_8$ . Para este valor del parámetro tenemos  $\alpha_i \in \partial\Lambda_a$ ,  $i = 1, 2, 3$  (recuérdese que  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , son las imágenes inversas de cero). Como  $\partial\Lambda_a$  está formada por arcos de  $L_1$  y  $L$ , se tiene, en particular, que  $\alpha_i \in L_1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Por lo tanto, cada  $\alpha_i$  tiene alguna imagen inversa de orden 2 en uno de los tres arcos que componen a  $L_{-1} \cap \Lambda_a$ . Llamemos  $q_i$  a esta imagen inversa de  $\alpha_i$ . Es fácil comprobar que  $q_i \in \text{int}\Lambda_a$ .

Como por hipótesis  $\overline{W^u(0)} = \Lambda_a$  si  $a = a_8$  y  $W^u(0)$  es abierto, entonces  $q_i \in W^u(0)$ . Por otra parte, como  $F_a^2(q_i) = \alpha_i$ , entonces  $F_a^3(q_i) = 0$ , por lo que  $q_i \in W^s(0)$ . En conclusión,  $q_i \in W^u(0) \cap W^s(0)$ , es decir,  $q_i$  es un punto homoclinico a 0,  $1 \leq i \leq 3$ .

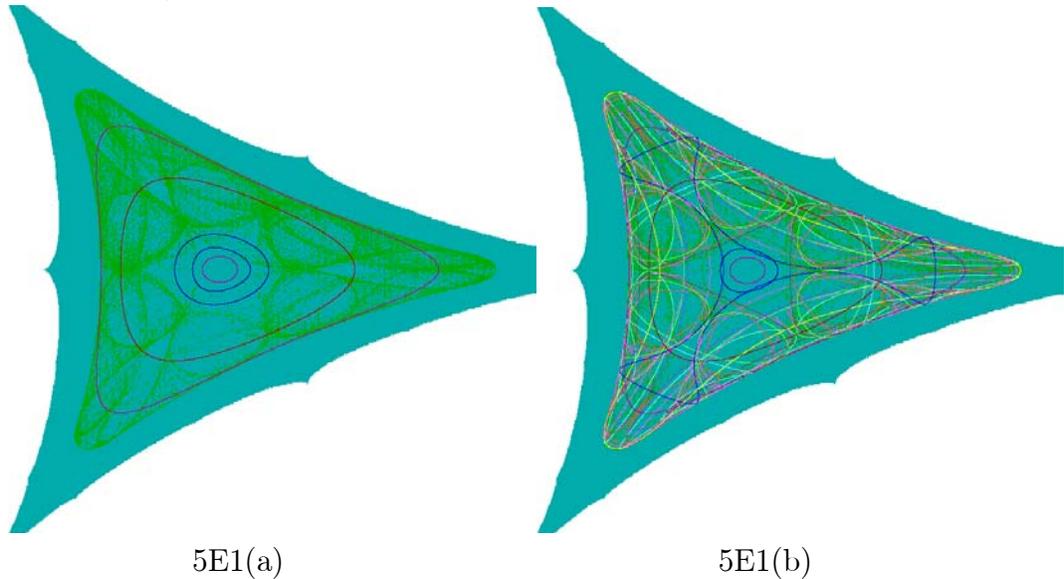
El hecho de que  $q_i \in L_{-1}$  para  $a = a_8$  significa que el punto homoclinico es un punto crítico al momento de producirse la bifurcación.

Ahora bien, para  $a < a_8$  con  $a$  cercano a  $a_8$ , digamos  $a \in I$ , con  $I$  cierto intervalo en torno a  $a_8$ , tenemos que  $\alpha_i \in \text{int}\Lambda_a$ . Es decir, al cruzar  $a_8$ , los puntos  $\alpha_i$  pasan de estar en el exterior, a estar en la frontera, a estar en el interior, del conjunto  $\Lambda_a$ . Por la proposición 5.7.1, el hoyo  $W_a$  ya no existe para  $a < a_8$  con  $a \in I$ . Sin embargo, la condición  $\overline{W^u(0)} = \Lambda_a$  persiste para todos estos parámetros  $a < a_8$  con  $a \in I$ . Entonces, si  $z \in \text{int}\Lambda_a$ , tenemos que  $z \in W^u(0)$  y por lo tanto, por definición, alguna sucesión de imágenes inversas de  $z$  converge a 0. En particular, como  $\alpha_i \in \text{int}\Lambda_a$  para  $a < a_8$  con  $a \in I$ , alguna sucesión de imágenes inversas de  $\alpha_i$  converge a 0, con lo cual  $\alpha_i \in W^u(0)$ . Como a su vez  $\alpha_i$  es una preimagen de 0,  $\alpha_i$  es un punto homoclinico al origen,  $i = 1, 2, 3$ .  $\square$

En resumen, si se cumple la hipótesis de que  $\overline{W^u(0)} = \Lambda_a$ , tenemos lo siguiente. Suponemos  $I$  un intervalo pequeño alrededor de  $a_8$  cuyo valor está dado por 5.3 en el capítulo 5:

- (i) Para  $a > a_8$  con  $a \in I$ , no hay puntos homoclinicos al origen dado que todas las imágenes inversas de éste están fuera de  $\Lambda_a$
- (ii) Para  $a = a_8$  ocurre que  $\alpha_i \in \partial\Lambda_a$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y, de acuerdo con la proposición 5.7.11, se genera un punto crítico homoclinico al origen.
- (iii) Para  $a < a_8$  con  $a \in I$  aparecen un punto homoclinico a 0 cuya órbita es no-crítica.

Por lo tanto, el problema de existencia de puntos homoclínicos al origen para  $a \in I$  equivale a demostrar que la variedad inestable del cero es densa en  $\Lambda_a$ ; es decir que  $\Lambda_a = \overline{W^u(0)}$ . Aunque no se cuenta con una demostración de esta igualdad, experimentos numéricos evidencian que, en particular para  $a = -0.8215$  (que es un parámetro un poco mayor que  $a_8$ ), esta igualdad sí se cumple. A manera de ilustración de estos experimentos, en las figuras 5E1 se muestra cómo las iteraciones de un pequeño disco  $B_r(0)$  con centro en el origen tienden a “llenar”  $\Lambda_a$  (en 5E1(a) hay cinco iteraciones y en 5E1(b) bastantes más).



Es obvio que de cumplirse para  $a = -0.8215$ , la igualdad  $\Lambda_a = \overline{W^u(0)}$  se sigue cumpliendo para parámetros cercanos, así que, en conclusión, conjeturamos que es válida la siguiente proposición.

**Proposición 5.7.12** *En  $a = a_8$  se cumple que  $\Lambda_a = \overline{W^u(0)}$  y esta igualdad subsiste para todos los parámetros en un cierto intervalo  $I$  con centro en  $a_8$ . En consecuencia, la bifurcación que hace desaparecer el hoyo  $W_a$  en  $a = a_8$ , es una bifurcación que genera puntos homoclínicos en torno al origen, es decir, una bifurcación homoclínica en torno al origen.*

De acuerdo con los resultados mencionados en [13], una consecuencia de esta proposición es que para  $a < a_8$  con  $a \in I$ , existe un conjunto tipo Cantor

$\Omega \subset E \subset \Lambda_a$  donde la dinámica es bastante compleja.<sup>19</sup>

Es nuestra impresión, también, que esta dinámica complicada persiste en  $\Lambda_a$  para  $-1 \leq a \leq a_8$ , es decir, que  $[-1, -0,8215)$  está contenido en el mencionado intervalo  $I$ . Más aún, para  $[-1, a_8)$ , la dinámica es caótica en todo el conjunto  $\Lambda_a$  y no sólo en un conjunto  $E$  contenido en las inmediaciones del origen (en  $a = -1$  se tiene  $\Lambda_a = K_a$ . Las figuras 4.3 dan idea de cómo  $\Lambda_a$  se aproxima a  $K_a$  cuando  $a$  tiende a  $-1$ ).

---

<sup>19</sup>Según dichos resultados, la existencia de un punto homoclínico a  $P$  implica que para alguna iteración de  $f$ ,  $f^M$  con  $M > 1$ , existe un conjunto tipo Cantor invariante bajo  $f^M$ . Más aún, para todo  $i \geq 1$ , existe un conjunto tipo Cantor invariante bajo  $f^{M+i}$ . Todos estos conjuntos contienen puntos periódicos de todos los periodos, están contenidos en  $E$  y el punto fijo repulsor  $P$  es elemento de todos ellos.



# Bibliografía

- [1] R.H. Abraham, L.Gardini, C.Mira, *Chaos in discrete Dynamical Systems, (A visual introduction in two dimensions)*, Springer-Verlag (Telos),.1997.
- [2] J.C. Alexander, J.A. Yorke, Zhiping You, *Riddled Basins*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 2, No. 4, 1992, 795-813.
- [3] J.C.Alexander, B.R. Hunt, I.Kan, J.A.Yorke, *Intermingled Basins for the Triangle map*, Ergod.Th. & Dynam. Sys., **16**, 1996, 651-652.
- [4] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, American mathematical Monthly, Vol. **99**, 1992, 332-334.
- [5] A. Barugola, *Quelques propriétés des lignes critiques d'une récurrence du second ordre a inverse non unique. Détermination d'une zone absorbante*, R. A. I. R. O. Analyse numérique/Numerical analysis, Vol. **18**, 1984, 137-151.
- [6] A. Barugola, J. C. Cathala, C. Mira, *Annular chaotic areas*, Nonlinear Analysis TM & A, Vol. **10**, No. 11, 1986, 1223-1236.
- [7] R. Bowen, *Topological Entropy and Axiom A*, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, 23-41.
- [8] R. Bowen, *Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. **153**, 1971, 401-414.
- [9] B. Branner, *The Mandelbrot set*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, **39**, 1988, 75-105.
- [10] J. C. Cathala, *Bifurcations occurring in absorptive and chaotic areas*, Int. J. Systems Science, Vol. **18**, No.2, 1987, 339-349.

- [11] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition*, Addison Wesley, Redwood City, 1989.
- [12] L. Gardini, R. Abraham, R. Record; d. Fournier-Prunaret, *A Double Logistic Map*, Intern. Journal of Bif. and Chaos, **4**, No.1, 1994, 145-176.
- [13] L. Gardini, *Homoclinic bifurcations in  $n$ -dimensional endomorphisms due to expanding periodic points*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **23**, Num. 8, 1994, 1039-1089.
- [14] G. Gómez and S. López de Medrano, *Iteraciones de transformaciones cuadráticas del plano*, Caos y Sistemas Dinámicos, Memorias de Coloquios, UAM-Atzacapotzalco, 1994, 33-52.
- [15] J. King, H. Méndez, G. Sienna, *Some dynamical properties of  $F(z) = z^2 - 2\bar{z}$* , Qualitative Theory of Dynamical Systems, Vol. **5**, 2004, 101-120. Preprint publicado en Reportes de Investigación”, departamento de matemáticas, fac. de Ciencias, UNAM, febrero de 2004.
- [16] Tien-Yien Li, J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, American Mathematical Monthly, **82**, Num.10, December 1975, 985-992.
- [17] F. R. Marotto, *Snap-back repellers imply chaos in  $R^n$* , Journal of mathematical analysis and applications, **63**, 1978, 199-223.
- [18] J. Milnor, *Topology from a differential viewpoint*, University of Virginia Press, 1965.
- [19] C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, J. C. Cathala, *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Non-invertible Maps*, World Scientific, 1996.
- [20] H. Nusse, J. A. Yorke, *DYNAMICS: Numerical Explorations*, Springer-Verlag. 2nd. Ed., 1994.
- [21] J. Palis, W. de Melo, *Introdução aos sistemas dinamicos*, Projeto Euclides (Cap. II), 1978.
- [22] H. O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, 1992.
- [23] I. Peterson, *Basins of Froth*, Science News, Vol. 142 (1992), (329-330).

- [24] J. Pulido, *Factors of chaotic endomorphisms*, Reporte interno, departamento de matemáticas, fac. de Ciencias, UNAM.
- [25] C. Robinson, *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Inc. 1995.
- [26] G. Sierra Loera, *On the Dynamics of The One Parameter Functions  $F_a(z) = z^2 + 2a\bar{z}$* , Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol **2**, 1996, 41-53.
- [27] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Math. **79**, Springer Verlag, New York, 1982.
- [28] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [29] A. Carrillo, J. King, G. Sierra, *Fractal Windows C++ / 2.0*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2004, <http://mmc.igeofcu.unam.mx/fractal/>