UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMATICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS

ESPECIALIZACION EN ESTADISTICA APLICADA

HABILIDADES MATEMATICAS EN LA COMPRENSION DE LA ESTADISTICA Y DE LA PR0BABILIDAD EN ALUMNOS DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL SUR

TESINA QUE PARA OBTENER EL DIPLOMA DE

ESPECIALIZACION EN ESTADISTICA APLICADA

PRESENTA JUAN DE DIOS HERNANDEZ GARZA

DIRECTOR: DR. IGNACIO MENDEZ RAMIREZ

CIUDAD UNIVERSITARIA **2006**

INDICE

PRESENTACION

Este trabajo se ha dividido en 6 apartados ó capítulos y un apéndice.

1. En éste apartado se menciona la problemática en la enseñanza de la Matemática desde un enfoque transmisivo y la perspectiva de desarrollar el pensamiento crítico expresada en los planes y programas de estudio por diversas instituciones educativas. También se establece el problema, los objetivos, el propósito y el supuesto del estudio.

2. Aquí se plantean las ideas de algunos pedagogos o especialistas en la enseñanza de las Matemáticas, que han visto la conveniencia de que se incluyan y desarrollen las habilidades matemáticas en la formación académica de los estudiantes.

3. En este capítulo se revisan los trabajos que tratan sobre el desarrollo de las operaciones intelectuales. En particular las ideas de V. A. Krutetskii sobre las habilidades matemáticas.

4. En este apartado se detallan los procedimientos para la elaboración de las pruebas sobre las habilidades matemáticas: flexibilidad de pensamiento, generalización y reversibilidad de los procesos mentales. También se describe el procedimiento de aplicación de las pruebas, el análisis de los resultados y se definen la población y la muestra.

5. Aquí se analizan las tablas y gráficas correspondientes a las variables bajo estudio, se calcula el coeficiente Alpha de Cronbach para la fiabilidad de las pruebas, se plantea una introducción al Análisis de Componentes Principales y se determinan las correlaciones: (parcial) entre las variables y entre Matemáticas I a IV y las habilidades.

6. Se dan las conclusiones parciales y finales derivadas del estudio exploratorio y se sugieren algunos problemas no rutinarios con el propósito de promover el desarrollo de algunas habilidades matemáticas en los estudiantes.

Bibliografía. Se señalan las fuentes consultadas.

Apéndice. Se da el procedimiento formal para el cálculo de los Componentes Principales.

1. INTRODUCCION

1.1. CONSIDERACIONES INICIALES

Anteriormente, la enseñanza de la Matemática se proyectaba desde la perspectiva de la clásica disciplina mental y los esfuerzos se orientaban a familiarizar a los alumnos con el contenido del programa o del plan de estudios, sin considerar las aptitudes y el desarrollo de capacidades intelectuales en los estudiantes.

Concebida la enseñanza como “dar clases”, ese reduce a la simple transmisión de los temas del contenido del programa y a la ejecución por parte de los alumnos de algunos problemas tipo en los que por lo general se pide la “aplicación” directa de los conocimientos enseñados

Ojeda (1996) escribe que, generalmente, en las clases de bachillerato el profesor expone el tema oralmente y guiándose por sus apuntes, utilizando el pizarrón al frente de la clase, proporcionando a los alumnos sinopsis del contenido, planteando preguntas y problemas para ejemplificar la aplicación de los resultados obtenidos, sin que haya lugar para la reflexión.

Nickerson (1987) mencionan que los enfoques tradicionales de la educación se han centrado en la enseñanza de material de “contenido de los cursos” o, lo que es lo mismo, en impartir un conocimiento práctico. En comparación, se ha prestado relativamente poca atención a la enseñanza de las habilidades de pensamiento, o al menos, a la enseñanza de las habilidades que intervienen en actividades de orden superior tales como el razonamiento, el pensamiento creativo y la solución de problemas.

Santos y Vargas (2003) apuntan que resulta inadecuada la instrucción de centrar la atención de los estudiantes en el empleo de reglas, fórmulas o procedimientos, que se aplican a situaciones dirigidas donde el mismo contexto en estudio les permite identificar los recursos que necesitan para resolver los problemas. Este tipo de instrucción genera serias dificultades en los estudiantes cuando se enfrentan a problemas donde ellos mismos tienen que identificar la estructura profunda que les permita acceder a una serie de recursos y representaciones para resolverlos.

Así el estudiante debe transformar la actividad mecánica de aplicar reglas, algoritmos u operaciones, en procesos de estimación de resultados, cuantificación y análisis de relaciones y en la solución de problemas o soluciones.

Esta situación se manifestó de manera general en el periódico “Uno más uno” (5 de dic. de 2001): “Reprueban a México”. Según un examen de conocimientos escolares que aplicó la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) a 31 países. Los alumnos mexicanos obtuvieron en Matemáticas un promedio de 387 puntos, mientras que el promedio de la OCDE es de 500 puntos. En Ciencias el resultado fue de 422 puntos.

Santos y Vargas (2003) mencionan que aún cuando el tipo de preguntas que generalmente incluyen esos exámenes tienden a ser de respuesta corta y no dan cuenta de los procesos y cualidades de razonamiento que los estudiantes puedan exhibir en sus caminos de solución, lo que resulta evidente es que aún en las pruebas estandarizadas, los estudiantes mexicanos experimentan serias dificultades.

Bazán (2001) plantea que en una cultura marcada por un proceso acelerado de acrecentamientos, el acento no puede ponerse en los conocimientos mismos, mañana reformulados, sino en las habilidades que permitan una actualización sin término, la adopción de formas de trabajo intelectual más racionales y eficaces, según necesidades sucesivamente determinadas.

Díaz (2003) reporta que la intención de fomentar el desarrollo del pensamiento crítico aparece hoy en día en casi todos los proyectos curriculares de educación media y media superior, expresada en los objetivos, los contenidos o las actividades educativas. En la perspectiva psicológica de corte cognitivo, el término de pensamiento crítico se utiliza en ocasiones como sinónimo de juicio evaluativo, análisis, emisión de juicios u opiniones personales, pensamiento formal, desarrollo de la metacognición, o simplemente como un proceso de razonamiento y solución de problemas en general.

Schmelkes (2004) menciona que la investigación educativa demostró que el conocimiento adquirido que no se utiliza tiene más probabilidades de olvidarse y de perderse, lo que llevó a uno de los planteamientos fundamentales de la currícula actual: es más importante el desarrollo de habilidades y el apoyo en la conformación de los esquemas personales y sociales, que transmitir conocimientos preestablecidos. Ahora sabemos que la educación que más sirve no es la que pone en primer lugar la transmisión de conocimientos, sino la que pretende desarrollar habilidades básicas (escuchar, expresarse oralmente y por escrito, comprender lo que se lee, solucionar problemas, buscar información, hablar otra u otras lenguas) y habilidades superiores (de razonamiento, de análisis, de síntesis, de discriminación y clasificación de información, de criticidad y de creatividad)

En lo fundamental se trata de aprender a aprender, de poder acceder a los conocimientos. Si se desarrollan bien, estas habilidades nunca se olvidan. Se siguen profundizando en la vida y el trabajo.

En el Plan de Estudios Actualizado (PEA, 1996) para el Colegio de Ciencias y Humanidades se enuncia que la formulación más general de la identidad del Bachillerato, consiste en colaborar al desarrollo de la personalidad de los alumnos, a fin de que alcancen una primera maduración y, en consecuencia, su inserción satisfactoria en los estudios superiores y en la vida social. No se reduce, por lo tanto, a la simple transmisión de conocimientos, sino que se propone contribuir a la participación reflexiva y consciente de los alumnos en la cultura de nuestro tiempo con las características de esta en nuestro país.

Se menciona que este Bachillerato es un Bachillerato de cultura básica, es decir, un bachillerato de fuentes y no de comentarios, puesto que se propone dotar al alumno de los conocimientos y habilidades que le permitan acceder por si mismo a las fuentes de conocimiento y más en general, de la cultura; por ello pone el acento en el trabajo intelectual del alumno y excluye concebirlo como repetidor del saber del profesor, con quién comparte, en cierta igualdad radical, la posibilidad de conocer, juzgar, opinar y fundar intelectualmente.

Con todo, la conciencia de que poco menos de la mitad de los alumnos que se inscriben en el primer semestre, no terminarán el ciclo, impone la necesidad de insistir en los aspectos de formación humana, en las habilidades intelectuales que permitan a los alumnos, de todas maneras, un desarrollo personal y una participación social responsable y positiva.

En lo referente a las asignaturas de quinto semestre, concretan en el Modelo Educativo del Bachillerato del Colegio la cultura de la especialidad, en relación estrecha con la cultura básica, en la medida en que se orientan a la síntesis de lo aprendido en un área en los cuatro primeros semestres y su aplicación a campos específicos de la misma. Estas asignaturas deben mantener la unidad del área a la que se adscriben, en concepciones, métodos de selección, continuidad y progresión de contenidos, prestando atención explícita a las habilidades y conocimientos requeridos para un comienzo fructífero de los estudios superiores.

Bazán (2001) nos dice que a través de los distintos campos de la Matemática, el alumno tiene la posibilidad de entrenarse para lo que aparentemente o de primera intención, no puede conocer, a no ser que ponga en juego estrategias de pensamiento que le permitan acercarse a lo incógnito, aunque sea indirectamente, a partir de lo conocido.

Cuanto hay que enfocar con pertinencia y trabajar con sentido pedagógico para que la Matemática cumpla con esta función educativa trascendental de multiplicar los procedimientos de pensar racional de los alumnos, en vez de seguir siendo la incomprensible trampa oscura donde se hunden las estadísticas de egreso, nadie escapa y nadie puede sustraerse de la responsabilidad de contribuir a tal cambio.

Dentro de esta responsabilidad, el Plan de Estudios Actualizado recomienda al profesor utilizar en el aula recursos y estrategias que permitan alentar el trabajo y la discusión de ideas en equipo y grupal, promover la curiosidad y el interés por investigar, favorecer la creatividad y la autonomía intelectual, ampliar la capacidad de razonamiento, utilizar distintas formas de representación y comunicación de ideas, fomentar la perseverancia en el trabajo y el desarrollo de diversas habilidades y capacidades como la flexibilidad de pensamiento, redondeo de cantidades, estimación de resultados, imaginación espacial, identificación de patrones de comportamiento y regularidades, visualización de relaciones, formulación y contrastación de hipótesis y en general, todos aquellos aspectos relacionados con la elaboración y manejo de conceptos y procedimientos, así como la formación de valores, actitudes y normas en el estudiante.

Si se trata de que el docente desarrolle su labor de manera eficaz, de acuerdo con los nuevos enfoques y métodos de enseñanza centrados en el desarrollo de habilidades intelectuales, resulta necesario que se haga una mayor difusión interpretativa sobre la metodología sugerida que incluya ejemplos de secuencias didácticas y estrategias de enseñanza y aprendizaje para ilustrar su empleo en el aula.

Estévez (2003) afirma que la aplicación exitosa, por parte del profesor, de modelos didácticos centrados en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, es un campo poco explorado por la investigación por lo que están pendientes de responder preguntas acerca de cuáles y en que consisten los aspectos cognitivos del profesor que entran en juego de manera determinante en situaciones didácticas prácticas, en contextos y culturas específicas. Buscar respuestas a este tipo de preguntas y a otras relacionadas con el profesor como agente educativo, es una tarea de estudio necesaria, si deseamos que la investigación en el campo temático de la cognición se desarrolle atendiendo a la diversidad de factores y agentes que participan en la educación.

1.2. EL PROBLEMA, OBJETIVOS, PROPOSITO Y SUPUESTO DEL TRABAJO

Previamente al establecimiento del problema, definiremos el concepto básico de habilidad matemática (de acuerdo con Krutetskii) usado en el presente trabajo:

“la capacidad para aprender las matemáticas de los cursos escolares, pero centrada en la resolución creativa de problemas; entendiendo por esto, el resolver un problema de varias maneras originales, el resolver problemas no rutinarios, la deducción independiente de fórmulas, en general, la manifestación de creatividad independiente de la instrucción escolar”.

Las habilidades matemáticas se pueden manifestar, por ejemplo, deduciendo una ley general a partir del análisis de casos particulares o encontrando varios métodos en la solución de un problema.

Bajo las consideraciones teóricas y pedagógicas anteriores, el problema en estudio consiste en determinar qué habilidades matemáticas están presentes en los alumnos de quinto semestre (grupo 503, turno matutino del Colegio de Ciencias y Humanidades en el Plantel Sur) para una actividad exitosa en Estadística y Probabilidad.

Los objetivos son:

1 Correlacionar habilidades matemáticas (en el contexto estadístico-probabilístico) con desempeño académico en Estadística y Probabilidad I.
2 Correlacionar habilidades matemáticas (en Estadística y Probabilidad) con el desempeño académico en Matemáticas I a IV.

El propósito es:

Sentar bases que permitan, en la práctica, el desarrollo de estas operaciones intelectuales en el alumno, como objetivos operativos planteados en un curso de Estadística y Probabilidad I.

El supuesto:

Se parte del supuesto de que de acuerdo con los objetivos curriculares del Plan de Estudios Actualizado, los cursos de Matemáticas y de Estadística y Probabilidad promueven procesos cognitivos para formar alumnos capaces en esta área del conocimiento.

2. LOS OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

2.1. LA OPINION DE LOS PEDAGOGOS CON RESPECTO A LOS OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

Dentro de los enfoques innovadores en la enseñanza de las Ciencias, diversos pedagogos e instituciones educativas han planteado que dentro de los objetivos de la enseñanza de la Matemática, se incluyan aquellos que se refieren al desarrollo de las capacidades del estudiante relacionadas con la actividad propia de la Matemática, en particular la capacidad para resolver problemas.

Nickerson (1987) menciona que enseñar a pensar debe implicar cuatro tipos de objetivos:

a) Capacidades subyacentes al pensamiento: clasificación, análisis, formulación de hipótesis, étc.
b) Métodos que ayudan al pensamiento.
c) Conocimientos sobre el pensamiento.
d) Actitudes que conducen al pensamiento.

Gibbs y Fox (2000) reportan que algunos especialistas en la enseñanza de las ciencias plantearon seis etapas hacia la competencia científico-matemática:

a) Sustituir la memorización por la exploración y la inventiva.
b) Partir de las ideas preconcebidas de los alumnos.
c) Evaluar el rendimiento, no la regurgitación.
d) Seleccionar los textos de Matemáticas atendiendo a lo importante.
e) Centrarse en el currículo de secundaria superior.
f) Eliminar los niveles de rezagamiento.

El Programa para la Modernización Educativa (SEP, 1990), para el primer año de secundaria (versión preliminar), plantea que los lineamientos para el desarrollo del curso se refieren principalmente a el desarrollo de algunas habilidades Matemáticas por medio del estudio de la Aritmética. Dichas habilidades son:

a) Flexibilidad del pensamiento.
b) Reversibilidad del pensamiento.
c) Memoria generalizada.
d) Resolución de problemas.

Santos y Vargas (2003) afirman que en los últimos 15 años se ha reconocido que aprender Matemáticas va más allá de que el estudiante aprenda un conjunto de reglas, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios. Se acepta que en el proceso de aprender la disciplina los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar donde constantemente busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planteen conjeturas, utilicen distintos sistemas de representación, establezcan conexiones, empleen varios argumentos y comuniquen sus resultados. Por ejemplo, El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) identifica dos componentes fundamentales que todos los estudiantes preuniversitarios deben desarrollar en sus experiencias de aprendizaje:

i) líneas de contenido que comprenden el desarrollo del pensamiento numérico, algebraico, geométrico, y aspectos relacionados con la actividad de medir, ordenar y manejar información (estadística).

ii) procesos inherentes al quehacer de la disciplina donde se destaca la resolución de problemas, el razonamiento matemático, las conexiones matemáticas, el empleo de representaciones y la comunicación de resultados.

Mari Mollá (1998) escribe que lo más importante de la Educación Matemática es el aprendizaje de procesos y procedimientos, por ser destrezas generales, válidas en muchos contextos y situaciones, y el enfoque de las matemáticas desde la resolución de problemas puesto que desde este enfoque se utilizan todas las capacidades básicas del individuo ejercitándose las destrezas y procesos cognitivos generales, insistiéndose en la aplicabilidad de estos conocimientos.

Celorrio (2003) menciona que la capacidad de desarrollo del pensamiento innovador se ha convertido en la actualidad (educativa) en una de las claves de formación. En su trabajo “Desarrollo del pensamiento creativo” plantea que los programas de intervención cognitiva se centran en las habilidades de pensamiento con el objetivo fundamental de enseñar a pensar. Expresado de otro modo, el objetivo de estos programas no es conseguir una mejora en el coeficiente intelectual o en rendimiento escolar de los sujetos, sino en desarrollar capacidades y en adquirir procedimientos, estrategias y técnicas para ejecutar diferentes tipos de tareas que sirvan de base para la actividad cognitiva y, por tanto, para el desarrollo creativo.

De manera general en estos objetivos no se considera a la Matemática como la clásica disciplina mental, el énfasis se coloca sobre capacidades o habilidades intelectuales como, crear, inventar, relacionar, conjeturar, establecer conexiones, etcétera

2.2. LOS OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADISTICA Y DE LA PROBABILIDAD.

Gal (2005) habla de la Cultura Estadística y de la Cultura Probabilística:

a) La Cultura Probabilística está estrechamente ligada a la Cultura Estadística.
b) La Cultura Estadística hace referencia a la habilidad de la gente para

interpretar, evaluar críticamente, y cuando expresa pertinentemente sus opiniones relacionadas con información estadística, argumentos relacionados con datos o fenómenos estocásticos.

c) El comportamiento de Cultura Estadística, requiere la activación conjunta de componentes cognitivos como: conocimiento estadístico, conocimiento matemático, conocimiento contextual o del mundo, conocimiento de preguntas críticas que han de ser requeridas; y componentes de disposición: involucra la presencia de una postura crítica, así como ciertas creencias como creer en el poder del proceso estadístico, creencia en sí mismo como capaz de pensar estadísticamente y una creencia en la legitimidad de adoptar una perspectiva crítica sobre información que uno recibe de fuentes presumiblemente "oficiales" o de expertos.

Monzó y Queralt (1995) afirman que el estudio de la Estadística y de la Probabilidad ayuda al desarrollo personal del alumnado. El estudio de estos contenidos en un contexto aplicado permite el desarrollo de habilidades matemáticas tanto cognitivas como metacognitivas, desarrollo de habilidades numéricas, introducción a la modelización matemática de problemas reales, conocimiento más profundo de la naturaleza e importancia de la variabilidad, tratamiento de la incertidumbre, etc. También es necesario animar a los estudiantes a descubrir generalizaciones y que relacionen el efecto de modificar un conjunto de datos por medio de transformaciones aditivas o multiplicativas de la media, la mediana, la moda y la varianza. Los futuros universitarios deben ser capaces de obtener generalizaciones de resultados por medios algebraicos.

Rossman y Chance (1999) reportan que la reforma de la Educación Estadística enfatiza el aprendizaje activo por parte de los alumnos, la comprensión conceptual de las ideas estadísticas básicas y el desarrollo de habilidades para comunicarse estadísticamente.

Garfield y Chance (2000) mencionan que los objetivos comúnmente aceptados en la enseñanza de la Estadística en la mayoría de los grados y niveles son.

a) Comprender el propósito y la lógica de la investigación (en general).
b) Comprender el proceso de la investigación utilizando la estadística.
c) Comprender la probabilidad y las posibilidades.
d) Fomentar el desarrollo de la literatura estadística.
e) Desarrollar la disposición para usar la Estadística.
f) Desarrollar el pensamiento estadístico.

La profundidad o nivel de desarrollo de estos objetivos difieren de acuerdo con el nivel educativo. Sin embargo, de acuerdo con los cambios en la Educación Estadística se ha incrementado el desarrollo de:

a) La habilidad de los estudiantes para producir descripciones razonadas, juicios, inferencias y opiniones acerca de la forma en que se obtienen los datos (planteamiento del problema y de la hipótesis, diseño, ejecución, análisis y conclusiones).

b) La habilidad para pensar críticamente usando el razonamiento estadístico.

Algunas de las habilidades de razonamiento estadístico que es necesario fomentar son:

a) Interpretación correcta de las probabilidades.
b) Comprender cuando seleccionar un promedio adecuado.
c) Entender las probabilidades como frecuencias relativas.
d) Usar el razonamiento combinatorio.
e) Comprender la independencia.
f) Comprender la variabilidad muestral.
g) Distinguir entre correlación y causalidad.
h) Interpretar correctamente las tablas de doble entrada (de contingencia).
i) Comprender la importancia de las muestras grandes.

2.3. LOS ESTANDARES DE DESEMPEÑO EN ESTADISTICA Y PROBABILIDAD PARA BACHILLERATO EN LA CIUDAD DE NUEVA YORK.

El Consejo de Educación de la ciudad de Nueva York propone los siguientes estándares

El alumno:

a) Organiza, analiza y expone apropiadamente datos de una variable.
b) Organiza, analiza y expone apropiadamente datos de dos variables. Utiliza técnicas de muestreo para realizar inferencias.
c) Entiende que la inferencia a partir de una muestra incluye incertidumbre y que el papel de la Estadística es estimar el tamaño de tal incertidumbre.
d) Formula hipótesis para resolver problemas y usa datos para probar hipótesis.
e) Interpreta representaciones de datos, compara distribuciones de datos y critica conclusiones.
f) Crea y usa modelos de probabilidad y entiende el papel de las suposiciones.
g) Utiliza conceptos y analiza situaciones que incluyen cambios.
h) Construye espacios muestrales apropiados y aplica los principios de suma y multiplicación de probabilidades.
i) Selecciona y usa un modelo de probabilidad apropiado.
j) Usa frecuencias relativas basado en datos empíricos para arribar a una probabilidad experimental de un evento aleatorio.
k) Trabaja con la distribución normal de probabilidad.

2.4. LOS OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA EN EL PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO PARA EL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES.

En el Plan de Estudios Actualizado (PEA, 1996) para el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), se menciona que entre los diversos aspectos que es necesario desarrollar en los cursos de Matemáticas están:

a) La habilidad para comunicar sus ideas correctamente utilizando diferentes elementos de representación simbólica.
b) La capacidad para realizar inferencias lógicas correctas a partir de hechos matemáticos dados, en situaciones particulares.
c) La capacidad para efectuar generalizaciones a partir del establecimiento de similitudes o razonamientos lógicos inductivos o deductivos.
d) La capacidad para aplicar los conocimientos algebraicos y geométricos para modelar situaciones prácticas o teóricas de la Matemática u otras disciplinas.

2.5. LOS OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADISTICA Y DE LA PROBABILIDAD EN EL PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO PARA EL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

La materia de Estadística y Probabilidad contribuye a la formación de la personalidad del adolescente, mediante el desarrollo de conocimientos y destrezas intelectuales. Entre los diferentes aspectos que interesan desarrollar están:

a) Capacidad para formular conjeturas acerca de situaciones probabilísticas; construir argumentos válidos y aceptar o refutar otros
b) Habilidad para el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas de la vida diaria y obtención de resultados correctos.

Un análisis general de los objetivos propuestos anteriormente nos lleva a establecer un denominador común: al finalizar sus estudios o un tema, el estudiante debe ser capaz de comprender algunos conceptos, desarrollando un cierto número de capacidades que se traduzcan en ciertos comportamientos estadísticos como:

a) Capacidad para formular conjeturas acerca de situaciones probabilísticas y juicios razonados para construir argumentos válidos.
b) Capacidad para el pensamiento crítico usando el razonamiento estadístico como herramienta conceptual para resolver problemas en su vida cotidiana.

La Comisión para la Revisión y Ajuste de los Programas de Estadística y Probabilidad I y II (2004) del Colegio de Ciencias y Humanidades plantea que durante el proceso de enseñanza y aprendizaje se tengan presentes los Principios

Educativos del Colegio de Ciencias y Humanidades. Explícitamente señala:

a) Poner énfasis en el significado de conceptos y procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos y en el desarrollo de habilidades matemáticas como la generalización, tránsito de un registro a otro, flexibilidad y reversibilidad de pensamiento, más que la memorización o la práctica irreflexiva de algoritmos.

b) El logro de un adecuado desarrollo de habilidades compromete al profesor a promover en el alumno acciones para que organice, sistematice, compare, clasifique, explore, argumente y aplique los conocimientos que va adquiriendo. Estas acciones favorecen una mejor comprensión y el crecimiento de sus capacidades intelectuales.

En la práctica habitual de la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, los procesos cognoscitivos involucrados en el logro de los objetivos, generalmente, distan mucho de las actividades que el alumno desarrolla en el aula.

En este sentido Ponce (2000) menciona que esta situación se ve favorecida por las características de trabajo en el aula, especialmente si el docente comienza por definir las nociones y proponer, acto seguido, una serie de problemas para que los alumnos apliquen los conceptos. Como el saber ya está construído, acabado y no hay nada para construir, la actividad de los alumnos se centra en comprobar en los problemas lo que ya fue determinado.

3. MARCO TEORICO

3.1. ESTUDIOS Y PERSPECTIVAS SOBRE LA INVESTIGACIÓN EN HABILIDADES MATEMATICAS

Estévez y De Gunther (2003) abordan la investigación sobre cognición en México en el período de 1991 a 2001. El estado del conocimiento en el campo de la cognición está basado en 149 investigaciones recopiladas. Estos trabajos coinciden en enfatizar los procesos cognitivos y no los productos. También existen coincidencias acerca de cuáles son los componentes principales del sistema cognitivo. La mayoría de los investigadores reconoce, aunque con distinta denominación, la existencia de:

1) un componente activo de la mente conocido como los procesos y las operaciones.
2) un componente estático conocido como las estructuras y los esquemas que están conformados por los conocimientos y la información adquirida.
3) otro componente dinámico que permite vincular los dos anteriores y es conocido con el nombre de estrategias cognitivas.

Los procesos pueden ser definidos como operadores intelectuales que actúan sobre los conocimientos para transformarlos y generar nuevas estructuras de conocimiento. Algunos procesos básicos o elementales son: la observación, la relación, la comparación, la clasificación, el análisis, la síntesis, etcétera; procesos de mayor nivel de complejidad son los implicados en la solución de problemas, la toma de decisiones, la creatividad, etcétera.

Las estructuras, en cambio, son entidades cognoscitivas de tipo declarativo o semántico en torno a las cuales actúan los procesos; son la materia prima indispensable para que ocurran las operaciones de pensamiento: hechos conceptos, principios, reglas, teorías que conforman un campo de estudio; también son la información acerca de hechos o situaciones de la vida cotidiana.

Las estrategias cognitivas son mecanismos a través de los cuales se pueden relacionar los procesos y las estructuras, son heurísticos que dependen de las demandas del tipo de situación y del tipo de tarea; una misma estrategia puede servir a muchas situaciones, todo depende de que el sujeto seleccione uno o varios procesos que sea capaz de aplicar y que también sean los adecuados al tipo de situación o tarea.

La actividad de los alumnos para asimilar y aplicar los conocimientos también ha sido investigada por otros psicólogos y pedagogos quienes la consideran la actividad prototipo del pensar.

Dentro de los trabajos que tratan aspectos relativos a las aptitudes y procesos del pensamiento, están las investigaciones de Rubinstein, Piaget, Shardakov y Krutetskii, que revelaron que el pensamiento se realiza en acciones mentales u operaciones intelectuales como el análisis y la síntesis, la abstracción y la generalización, la identificación y la diferenciación, la clasificación y la ordenación en serie, la codificación y la decodificación.

Aunque estos procesos están sujetos a leyes generales, la posibilidad de desarrollarlos depende de que se satisfagan ciertas condiciones acordes con éstas leyes y de la posesión de cierto tipo de habilidades que dependen del objeto de estudio, siendo ésta la razón de que existan otras capacidades más específicas o habilidades matemáticas componentes de la capacidad matemática.

En particular el psicólogo ruso V. A. Krutetskii (1976) menciona que para la resolución de problemas matemáticos, es necesario que el individuo posea una cierta estructura psicológica llamada la Estructura de las Habilidades Matemáticas, y que según el, es desarrollable en la educación.

De acuerdo con Krutetskii, Nickerson (1987) dice que la mera posibilidad de que se puedan enseñar las habilidades de pensamiento nos obliga a esforzarnos por enseñarlas. Si lo intentamos, y descubrimos que eso no conduce a nada, el costo es sólo una minucia de esfuerzo dilapidado. Pero si se puede enseñar, y optamos por no intentarlo, el costo, traducido a potencial intelectual desperdiciado, podría ser tremendo.

Krutetskii elaboró un extenso estudio (entre 1955 y 1966) sobre la capacidad matemática de los alumnos, estableciendo el siguiente concepto básico de habilidad matemática escolar (mencionado anteriormente) “la habilidad para aprender las matemáticas de los cursos escolares, pero centrado en la resolución creativa de problemas; entendiendo por esto, el resolver un problema de varias maneras originales, el resolver problemas no rutinarios, la deducción independiente de fórmulas, en general, la manifestación de creatividad independiente de la instrucción escolar”.

Los resultados de su investigación le permitieron identificar varias capacidades o habilidades matemáticas que son esenciales para el dominio de las Matemáticas. Estas capacidades son:

1) Habilidad para una rápida, amplia y detallada generalización del material matemático.
2) La habilidad para abreviar el proceso de razonamiento y
3) La habilidad para el cambio de una forma de pensar directa a una inversa.

Estas habilidades se expresan en grados variables en los alumnos capaces, promedio y menos capaces. Bajo algunas condiciones, los alumnos capaces demuestran “abreviación” y “reversibilidad” con un número mínimo de ejercicios. Los alumnos menos capaces expresan estas habilidades débilmente y los alumnos promedio pueden desarrollarlos de modo muy gradual a través de un sistema de ejercicios especialmente organizados. En otras palabras, bajo condiciones idénticas, los alumnos capaces y los menos capaces experimentan asociaciones que son cuantitativa y cualitativamente diferentes.

Orton (1998) menciona que de una forma más detallada, Krutetskii concibió así los componentes de la capacidad matemática:

a) Una capacidad para extraer la estructura formal del contenido de un problema matemático y para operar con ella.
b) Una capacidad para generalizar a partir de resultados matemáticos.
c) Una capacidad para operar con símbolos, incluyendo los números.
d) Una capacidad para conceptos espaciales, exigidos en ciertas ramas de las matemáticas.
e) Una capacidad de razonamiento lógico.
f) Una capacidad para abreviar el proceso de razonamiento.
g) Una capacidad para ser flexible al pasar de un enfoque a otro, incluyendo tanto la evitación de la fijación, como la capacidad de invertir el curso del pensamiento.
h) Una capacidad para lograr claridad, simplicidad, economía y racionalidad en las argumentaciones y pruebas matemáticas.
i) Una buena memoria para el conocimiento y las ideas matemáticas.

Orton también escribe que resulta muy interesante comparar este análisis con el descrito por Suydam y Weaver (1977), reflexionando sobre las características de quienes resuelven bien los problemas matemáticos:

a) Capacidad para estimar y analizar.
b) Capacidad para ver e interpretar hechos y relaciones cuantitativos.
c) Capacidad para comprender términos y conceptos matemáticos.
d) Capacidad para advertir semejanzas, diferencias y analogías.
e) Capacidad para seleccionar procedimientos y datos correctos.
f) Capacidad para advertir detalles irrelevantes.
g) Capacidad para generalizar sobre la base de sólo algunos ejemplos.
h) Capacidad para cambiar fácilmente de método.
i) Resultados superiores en la propia estimación e inferiores en ansiedad ante un test.

Waring (1994) reporta que al desarrollar con sus alumnos la asociación entre variables, las gráficas le sugirieron alguna correlación entre habilidades algebraicas y habilidades geométricas. La correlación entre estas habilidades fue investigada por Krutetskii quien encontró altas correlaciones al comparar resultados de pruebas en Algebra y Geometría de 1512 niños de Moscú. Utilizando los resultados de sus alumnos en pruebas de Algebra, Geometría y Estadística, Waring encuentra baja correlación entre habilidades matemáticas y capacidad en Estadística.

Posteriormente, trabajando con alumnos con un alto desempeño en Matemáticas, tuvo la oportunidad de probar la hipótesis: “los alumnos matemáticamente capaces necesariamente tienen buen desempeño en Estadística”
El estudio riguroso con alumnos hábiles en Matemáticas (59 de octavo grado y 43 de décimo grado) le arrojaron los siguientes resultados:

a) Existen niveles relativamente altos de asociación entre habilidades algebraicas y habilidades geométricas.
b) Los resultados de los alumnos muestran bajos grados de asociación entre las habilidades matemáticas y el desempeño en Estadística.

Waring concluye que la baja correlación entre habilidades matemáticas y capacidad para los conceptos estadísticos, probablemente sea explicada por un factor común de inteligencia general. La suposición de que los alumnos matemáticamente capaces, también deben ser hábiles en Estadística y que los alumnos con menos capacidad matemática, necesariamente son no capaces en Estadística, continúa abierta.

Gil Flores (1999) reporta que en diferentes estudios se han encontrado correlaciones positivas entre las actitudes hacia la Estadística y variables tales como nivel de conocimientos previos sobre Estadística, habilidades matemáticas básicas o número de cursos de contenido matemático desarrollados previamente (Roberts y Saxe, 1982; Collings, Oberg y Shera, 1989).

Barbera (1977) propone algunas habilidades que contribuyen al desarrollo cognitivo del alumnado. En su trabajo reporta que las habilidades que no se acostumbran utilizar en contextos evaluativos son: recogida de datos, invención de ejemplos o situaciones matemáticas, argumentación de procesos resolutivos y evaluación de expresiones matemáticas o de los procesos de resolución. Las habilidades con mayor presencia se refieren a la aplicación y reproducción de soluciones matemáticas preestablecidas y a la relación entre expresiones matemáticas. En el caso de las habilidades de aplicación, las demandas dirigidas a los alumnos suponen el desarrollo de propiedades matemáticas y a la reproducción de algoritmos y, a mayor distancia, se encuentra la aplicación de fórmulas.

Como conclusión menciona que los diferentes resultados del desarrollo de los objetivos propuestos revelan unas rutinas que estereotipan la evaluación escrita, apreciándose un desface entre el proceso de enseñanza y aprendizaje y el proceso de evaluación.

Orton (1998) también reporta que la existencia de diferentes formas de habilidad matemática elevada (Hadamard, 1945) junto con el carácter esquivo de una sola destreza matemática, tal como reveló el análisis factorial, indica que la capacidad matemática puede adoptar muchas formas, derivada, cada una de ellas, de una diferente mezcla de otras aptitudes. Entre estas figuran presumiblemente la habilidad numérica, la espacial, el razonamiento verbal y no verbal, las destrezas del pensamiento convergente y del divergente, etc.

López (2001) escribe que las habilidades matemáticas son herramientas intelectuales que propician la construcción de conexiones significativas entre ideas matemáticas, mediante el uso de estrategias y conocimientos, y desencadenan, según estas relaciones, formas particulares de razonamiento "contextual", es decir, el contexto del problema genera en la experiencia del resolutor una manera de organizar, interpretar y asignar un significado a la información de aquél y en consecuencia éste libera determinados argumentos.

En ocasiones con solo analizar el enunciado de un problema un resolutor puede identificar las conexiones que son requeridas para resolverlo, y en consecuencia afirmar que se trata de un problema de estimación o generalización sólo por citar dos casos. Las habilidades evolucionan conforme el individuo avanza de manera permanente y sistemática en la interpretación y la resolución de problemas que cubren diversos contextos matemáticos.

Dependiendo de la selección cuidadosa de los problemas y las actividades es como se promoverá el florecimiento de aquéllas, de este modo, las habilidades que desarrolla el estudiante le permiten razonar de cierta forma sobre contenidos específicos y le ayudan a encontrar relaciones significativas, y la manera como organiza y mira esas conexiones está en función de sus conocimientos previos y de las experiencias u oportunidades que le ofrece el medio en el cual se desenvuelve.

Algunas razones para respaldar el desarrollo de habilidades matemáticas son:

a) El estudiante adquiere una visión integrada de los contenidos matemáticos al mostrar, entre otras cosas, flexibilidad para transitar sin dificultad por diferentes representaciones de un mismo concepto.
b) El estudiante se apropia de un conjunto de estrategias ricas y variadas que le ayudan a enfrentar de manera exitosa los problemas, es decir, adquiere una gama amplia de recursos que le permiten entre otras cosas estimar resultados, efectuar acciones reversibles como el análisis de atrás hacia adelante (del resultado a los datos y viceversa), imaginar la transformación o conservación de las propiedades de figuras y cuerpos geométricos y observar regularidades en arreglos geométricos y numéricos que ayudan a generalizar resultados y procedimientos.
c) El estudiante gana confianza y adquiere seguridad al saber que la solución de un problema y las ideas que encierra un mismo concepto se puede lograr por medio de distintas representaciones o diferentes procedimientos. La investigación ha mostrado que entre más representaciones posea un estudiante de un concepto, él tendrá mayores posibilidades de comprender a éste y lograr nuevas conexiones con otras ideas matemáticas.

Hernández (2000) realizó una investigación sobre habilidades matemáticas (flexibilidad, generalización y reversibilidad) en alumnos de nivel preparatoria, concluyendo que:

a) Existe una correlación relativamente alta entre conocimiento algebraico y reversibilidad.
b) La correlación entre conocimiento algebraico y reversibilidad, está influenciada por la presencia de la flexibilidad y la generalización.
c) La flexibilidad, la generalización y la reversibilidad se manifestaron tanto en

procedimientos aritméticos como en procedimientos algebraicos, esto según el tipo de actividades realizadas.

De acuerdo con los trabajos anteriores, parece ser que la flexibilidad de pensamiento, la generalización y la reversibilidad de los procesos mentales representan las habilidades presentes en la descripción del pensamiento capaz en Matemáticas.

3.2. LA FLEXIBILIDAD DE PENSAMIENTO

Todos los profesores de Matemáticas se han encontrado con alumnos que muestran una firme preferencia por métodos o algoritmos rígidos apropiados o no, que en ocasiones resultan ineficientes en la solución de problemas

Algunos educadores matemáticos se han aproximado a las ideas de rompimiento de fijaciones y de rígidez mental, considerando principalmente las nociones de pensamiento flexible y pensamiento divergente como componentes de la creatividad en las Matemáticas escolares. Estos educadores han usado la noción de pensamiento divergente en situaciones matemáticas como una forma de identificar la flexibilidad de los procesos mentales señalados por Krutetskii.

Krutetskii identifica la flexibilidad de los procesos mentales como una componente importante de las habilidades matemáticas en los escolares. Esta flexibilidad se muestra, por ejemplo, en vencimiento de fijaciones o en el rompimiento de un método estereotipado de solución encontrando diversos caminos para resolver un problema. El énfasis en esta habilidad se centra en el rompimiento de los estereotipos para mostrar la flexibilidad de pensamiento como una descripción de la habilidad matemática.

De Bono, citado por Rugarcía (1987) hace una importante distinción entre pensamiento convergente y pensamiento divergente al resolver problemas. Esto se relaciona con la creatividad, ya que el pensamiento convergente conduce a una reducción de las alternativas de solución, mientras que el pensamiento divergente lleva a una ampliación de la definición del problema, de modo que sea posible generar una gran variedad de soluciones posibles, muchas de las cuales son aceptables y algunas de ella pueden ser creativamente superiores. Esta parece ser una de las diferencias críticas entre el proceso creativo de solución de problemas y el no creativo.

La relación entre creatividad matemática y los logros matemáticos ha sido explorada usando los “test de producción divergente” a los estudiantes se les dan situaciones matemáticas o problemas y se les pide que produzcan muchas y variadas respuestas. Evaluando la creatividad en términos de medidas tales como facilidad (número de respuestas), flexibilidad (número de categorías de la respuesta) y originalidad (la infrecuencia estadística de las respuestas

Haylock (1984) sugiere tres caminos para la construcción de test en los que el pensamiento divergente ha sido reconocido:

a) Solución de problemas, por ejemplo: si (p+q)(r+s) = 36, ¿cuáles son los valores posibles que pueden tomar p, q, r, s?
b) Modelar situaciones problemáticas: Prouse (1964) y Balka (1974) hacen uso de cuestiones en donde al estudiante se le presenta un párrafo conteniendo información numérica (por ejemplo, acerca de viajes o costos) y se le pide que escriba tantas cuestiones acerca de la situación y cuáles se pueden contestar con la información dada.
c) Redefinición: se dan al alumno situaciones que puede responder en muchos, variados y originales caminos, solamente por la continua redefinición de los elementos de la situación en términos de sus atributos matemáticos, por ejemplo (Haylock, 1978) da a los estudiantes un diagrama geométrico y les pide que escriban tantas afirmaciones diferentes como sea posible acerca de un segmento de recta en el diagrama. Para tener éxito en ésta tarea, se requiere una continua redefinición del segmento en términos de sus relaciones con las otras partes del diagrama.

La redefinición de Haylock (1984) es mencionada por Rubinstein (1959) como parte esencial en la solución de problemas: en el transcurso del análisis (a través de la síntesis), los elementos iniciales del problema (por ejemplo, segmentos en los problemas geométricos), al adquirir nuevas relaciones, cada vez aparecen con una nueva cualidad y, en consecuencia, con una nueva caracterización conceptual (como bisectriz de un ángulo, como mediana o como secante de dos líneas paralelas); así el que un problema se formule de uno u otro modo influye de manera decisiva en la orientación del análisis y en el curso de su solución.

Cohen (1987) menciona que la rígidez que los estudiantes muestran en su selección de estrategias puede ser atribuída al predominio de los efectos de sus experiencias iniciales y a su limitada elección de métodos para resolver ecuaciones u otros conceptos algebraicos. Un ingrediente esencial en la importante actividad de resolver problemas en Algebra, es la habilidad del estudiante para aproximarse a un problema desde perspectivas diferentes, así la cuestión es cómo fomentar ésta habilidad y, por consiguiente, la flexibilidad de pensamiento.

Menschinskaia (1960) dice que la flexibilidad de pensamiento consiste en la posibilidad de cambiar los medios para la solución cuando éstos resulten equivocados. El sujeto de pensamiento flexible está libre de las suposiciones impuestas y de los métodos rutinarios para resolver problemas, sabe apreciar los cambios que exigen modificar el planteamiento de las preguntas, así como renunciar a las soluciones anteriores y tomar otras nuevas.

López (2001) plantea las siguientes sugerencias para favorecer la flexibilidad de pensamiento:

a) Representar un mismo concepto de diferentes maneras. Es importante que los estudiantes construyan y conecten diferentes representaciones de un mismo concepto y que el profesor promueva y facilite esas acciones.

b) Motivar a los estudiantes para que resuelvan un mismo problema de diferentes maneras. Saber que un problema se resuelve de diferentes formas estimula la confianza de los estudiantes y ellos aprenden a creer en su propio trabajo.
c) Escoger problemas que tengan más de una solución. Es importante que los alumnos reconozcan que hay problemas que tienen más de una solución porque esto es una invitación para que comprueben sus resultados e intercambien opiniones con sus compañeros.

3.3. LA GENERALIZACION

Rubinstein (1959) menciona que con frecuencia ocurre que un alumno que ha resuelto un problema utilizando una determinada propiedad o ley, no puede resolver el mismo problema introduciéndole algunas modificaciones en su planteamiento. Cuando no se sabe transferir la solución de un problema a otro problema similar, ocurre que el análisis de los términos del primer problema ha sido insuficiente, no se ha correlacionado lo dado, lo conocido en el problema con lo que en él se pide; no se ha visto cuales son sus propiedades esenciales que permiten incluirlo o compararlo con otro problema o fenómeno con propiedades comunes, es decir, no se ha generalizado su solución o se ha generalizado deficientemente. La generalización es la herramienta que permite la transferencia de la solución de un problema a otro que le es análogo.

Polya (1986) dice que la generalización consiste en pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado.

Krutetskii considera que cualquier generalización efectiva en el contexto del simbolismo numérico y algebraico puede ser considerando desde dos puntos de vista:

a) uno debe ser capaz de ver una situación similar (dónde aplicar).
b) uno debe ser capaz de manejar un tipo de solución generalizada de una prueba o argumento (qué aplicar).

En uno u otro caso, se debe hacer abstracción del contenido específico y aislar lo que es similar, general, y esencial en la estructura de los objetos, relaciones y operaciones.

En su estudio de las habilidades matemáticas, Krutetskii considera la habilidad para generalizar bajo dos perspectivas:

a) como una habilidad personal para ver algo general y reconocerlo en lo que es concreto y particular (tratar un caso particular bajo un concepto general conocido)

b) como la habilidad para ver algo general y establecer lo desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general de casos particulares, para formar un concepto).

Para un alumno, una cosa es ver la posibilidad de aplicar una fórmula a un caso particular dado, y otra el deducir una fórmula desconocida sobre las bases de unos casos particulares.

En este sentido, Rubinstein (1959) menciona que al transferir la solución de un problema a otro semejante, no sólo exige un análisis la generalización que parte de los casos particulares a una fórmula generalizada, sino también la aplicación de la fórmula a casos concretos: el análisis de los casos en los que ésta se cumple y también las relaciones que guarda la fórmula con respecto a dichos casos particulares.

López (2001) menciona que es importante que los estudiantes sepan analizar los casos particulares que van caracterizando una expresión matemática y a partir de este examen logren identificar la regularidad o el patrón que define a esa expresión, es básico que ellos puedan ver poco a poco las generalizaciones de algunos conceptos matemáticos obtenidos mediante procesos de abstracción y también es fundamental que reconozcan el carácter general de algunos enunciados matemáticos.

Algunas recomendaciones para fomentar la generalización son:

a) Proponer de manera graduada y sistemática problemas o actividades para que los estudiantes reconozcan regularidades o patrones en secuencias numéricas o gráficas.
b) Proponer enunciados o preguntas que permitan al estudiante reflexionar y conjeturar sobre el paso de casos particulares a casos generales y viceversa.
c) Proponer al estudiante enunciados generales para que argumente sobre la verdad o falsedad de éstos (uso de contraejemplos).

3.4. LA REVERSIBILIDAD DE PENSAMIENTO

Shardakov (1963) escribe que la reversibilidad constituye uno de los rasgos cualitativos de los nexos y relaciones entre los fenómenos de la realidad. Se manifiesta en la influencia dinámica y recíproca que ejercen entre sí los componentes de un todo. En la dependencia causal que manifiestan ciertos fenómenos existe no solo la dependencia directa de causa a efecto, sino también la contraria de efecto a causa. En estos casos. la consecuencia que se desprende de una causa inicial pasará a ser consecuencia.

Stavy y Rager (1990) reportan que en un estudio con alumnos de noveno y décimo grado sobre relaciones inversas (el caso de la cantidad de materia), en problemas simples de Química, encontraron que el razonamiento sobre razones inversas es más difícil que el razonamiento sobre razones directas, mencionando que sería muy interesante encontrar la causa de esta dificultad y si la dificultad de los estudiantes en la conversión de razones inversas está relacionada con su dificultad para resolver otros problemas paralelos de razón inversa, por ejemplo ,en matemáticas, o si se relacionan solamente por el contenido específico de estas tareas.

Para Krutetskii la reversibilidad de un proceso mental significa una reconstrucción en el sentido de cambiar de un tren de pensamiento directo a uno inverso. En su trabajo Krutetskii distingue dos procesos diferentes pero interrelacionados. En primer lugar, está el establecimiento de una asociación de dos direcciones (cadenas) de tipos A ® B, como opuesto a una cadena en una dirección del tipo A « B, la cual funciona únicamente en una dirección. En segundo lugar, la reversibilidad de los procesos mentales de razonamiento, pensando en una dirección inversa partiendo del resultado o del producto de los datos iniciales, lo cual ocurre por ejemplo en la transición de un teorema directo a uno inverso. En un tren de pensamiento inverso, el pensamiento no viaja por la misma ruta precisamente sino que simplemente se mueve en sentido inverso.

En ambos casos, ocurren “cambios repentinos” en el pensamiento para moverse de una ruta directa a una inversa, y estos cambios representan ciertas dificultades para muchos alumnos. Una fijación hacia la meta es aún retenida en la mente, pero se debe hacer un cambio brusco inmediatamente después empezando a moverse desde la meta en dirección inversa. Esto proporciona bases para poner de manifiesto la flexibilidad de pensamiento.

López (2001) escribe que la matemática es un campo de estudio que incluye problemas, actividades, conceptos y procedimientos que están relacionados en algunos casos, por medio de enunciados o acciones reversibles. El estudiante tiene mejores posibilidades para analizar y comprender ideas que implican acciones de ida y vuelta cuando a él se le acercan las oportunidades para desarrollar esta habilidad denominada reversibilidad.

Algunas sugerencias para desarrollar esta habilidad son:

a) Proponer a los estudiantes que analicen parejas de problemas reversibles.
b) Estimular a los alumnos para que inventen y resuelvan otros problemas al intercambiar algunos de los datos del problema inicial por su pregunta.
c) Proponga a los estudiantes que comprueben sus resultados. Es común que al efectuar un procedimiento los alumnos cometan errores y no se den cuenta de ello, posiblemente se deba a la falta de conocimientos básicos. Por ejemplo, en álgebra la comprobación del resultado ayuda a que los estudiantes reflexionen sobre sus acciones.
d) Proponer operaciones incompletas y su comprobación posterior.
e) Proponer problemas o preguntas en las que el estudiante tenga que traducir o pasar de una a más representaciones de un concepto o una idea matemática en diferentes relaciones.

4. MARCO METODOLOGICO

Para obtener la información se procedió de la siguiente manera:

4.1. Se proponen las definiciones operacionales de las variables bajo estudio.
4.2. Se plantean los criterios en el diagnóstico de las habilidades.
4.3. Se elabora una primera versión de los instrumentos que servirán para obtener la información.
4.4. Se aplica esta versión preliminar a un grupo piloto, el análisis de los resultados permitió la construcción final de las pruebas.
4.5. Los datos para el análisis exploratorio final se obtienen de una muestra (a conveniencia) de estudiantes que cursan el quinto semestre de bachillerato en el Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Sur.
4.6. Se realiza un análisis exploratorio de los datos
4.7. Las calificaciones de los alumnos en Matemáticas I a IV se obtienen a partir de su Historia Académica proporcionada por la Dirección General de Administración Escolar de la UNAM.

A continuación se detallan estos procedimientos:

4.1. LAS VARIABLES EN ESTUDIO Y DEFINICIONES OPERACIONALES DE LAS HABILIDADES

Las variables involucradas en el estudio son las habilidades matemáticas y el conocimiento estadístico-probabilístico.

Las habilidades matemáticas comprenden las siguientes componentes:

1. La flexibilidad de pensamiento.
2. La generalización.
3. La reversibilidad de los procesos mentales.

Definiciones operacionales de las habilidades.

La flexibilidad de pensamiento.

Consideraremos que la flexibilidad de pensamiento se manifiesta en conductas como:

a) Capacidad para liberarse de algoritmos y argumentos matemáticos comunes.
b) Capacidad para dar varias interpretaciones a un dato numérico, estadístico o probabilístico en el contexto de las relaciones en una información numérica, estadística o probabilística.
c) Capacidad para cambiar la estrategia de solución de un problema, cuando la que se sigue resulta insuficiente.

d) Capacidad para dar más de una solución a un problema (encontrar la solución de varias maneras).

La generalización

La generalización se manifiesta en conductas como:

a) Reconocer patrones y semejanzas.
b) Relacionar subetapas en la solución de un problema con problemas ya vistos.
c) Inventar o usar símbolos para expresar ideas o fórmulas matemáticas.
d) Deducir una ley general a partir del análisis de casos particulares.

La reversibilidad de los procesos mentales

La reversibilidad de los procesos mentales se manifiesta en conductas como:

a) La capacidad para darse cuenta por si mismo del carácter inverso de ciertos procesos de operación.
b) La capacidad de obtener algoritmos por si mismo, conociendo el que se sigue en un proceso operativo que es el inverso de otro.
c) La capacidad para discriminar en dos problemas inversos con contextos semejantes, las operaciones adecuadas para resolverlos.

4.2. CRITERIOS EN EL DIAGNOSTICO DE LAS HABILIDADES

Flexibilidad

Según el tipo de problemas planteados se espera que en su solución el estudiante proponga varias respuestas o que dé varias interpretaciones a un dato numérico o que capte la relación correcta entre el dato o datos y la pregunta, estableciendo un procedimiento canónico y un procedimiento alternativo o aplicando exclusivamente un procedimiento alternativo.

Así en el análisis de las respuestas y del método o métodos empleados por cada examinado, diremos que hay flexibilidad cuando se propongan varias respuestas o interpretaciones o se resuelva un problema correctamente por el método alternativo o cuando se usan ambos métodos; asimismo establecemos que no existe flexibilidad cuando los problemas solo sean resueltos por el método canónico o cuando se proponga una sola respuesta o interpretación.

Generalización.

A partir de la observación de casos particulares y sus relaciones, juzgaremos la

habilidad para generalizar por el número de problemas resueltos estableciendo una regla en palabras o en símbolos
Reversibilidad.

Se espera que el examinado discrimine en cada par de problemas, entre los cambios aparentemente no importantes en el contexto de los problemas y las operaciones adecuadas para resolverlos.

De acuerdo con esto diremos que el alumno muestra reversibilidad si resuelve cada par de problemas por separado o si intenta resolver el problema inverso igual al directo pero rectifica su procedimiento y da una solución correcta.

El conocimiento En Estadística y Probabilidad.

El conocimiento estadístico-probabilístico se refiere al comportamiento académico mostrado por los examinados en un examen que incluye contenidos temáticos de Estadística y Probabilidad I del Plan de Estudios Actualizado (1996).

Los contenidos temáticos del examen son:

a) Medidas de Tendencia Central.
b) Medidas de Dispersión.
c) Distribución binomial.
d) Distribución normal.

4.3. CONSTRUCCION DE LAS PRUEBAS SOBRE HABILIDADES MATEMATICAS

Puesto que una prueba, sin importar qué tan extensa sea, solo constituye un ejemplo limitado de los muchos posibles que podrían incluirse, resulta difícil determinar el número de reactivos necesarios para evaluar el objetivo propuesto.

Con la intención de eliminar posibles explicaciones alternativas que influyan en la descripción de la asociación entre las variables, el número y tipo de reactivos se proponen según los siguientes criterios:

a) Los problemas deben ser de dificultad graduada (baja, promedio y alta) de manera que no sean extremadamente difíciles o muy simples.
b) Los problemas deben ser tales que su solución no dependa de los conocimientos particulares de los alumnos, de manera que el resultado que arrojen las pruebas mida el grado de habilidad y no el de destreza.
c) De la opinión de los expertos, para ver si los problemas cumplen con su propósito básico.
d) De una primera aplicación exploratoria a un grupo piloto con el objetivo de cuestionar la calidad de los reactivos. Si algunos problemas no cumplen con su propósito, se eliminarán o reemplazarán por otros.

Todos estos elementos constituyen parte de la validez de las pruebas.

4.4 PROPOSITO, CONTENIDO Y DESCRIPCION DE LAS PRUEBAS

Prueba de Flexibilidad

Propósito

Los reactivos en esta prueba están encaminados a investigar la capacidad del alumno para dar varias respuestas a un problema o para cambiar de un método de solución de un problema a otros métodos de solución en el mismo problema.

Contenido

El contenido de la prueba abarca los temas de Medidas de Tendencia Central y Medidas de Dispersión o Variabilidad.

Descripción

La prueba incluye problemas que proporcionan un acercamiento al rompimiento de fijaciones o al rompimiento de métodos estereotipados de solución como manifestación del pensamiento divergente y de la flexibilidad de pensamiento.

La prueba piloto es la siguiente

Nombre ______________________________ Fecha ____ Grupo _______

Instrucciones
a) Resuelva los problemas en las hojas proporcionadas.
b) Escriba todas las operaciones diagramas o dibujos que requiera para resolver los problemas.
c) No borre ninguna operación o dibujo. Si desea cancelar o suprimir algo, cruzelo con dos rayas.
d) En el problema 1 encuentre 5 soluciones completando la tabla proporcionada.
e) En el problema 2 .encuentre el mayor número de soluciones.
f) En el problema 3 dé el mayor número de interpretaciones.
g) En los problemas 4, 5 y 6 encuentre dos métodos de solución (encuentre la respuesta de dos maneras).

1. Si $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \dfrac{1}{2}$ encuentre los valores de $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$, y n, de manera que se verifique la fórmula para s^2.

Soluciones	$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$	n
1		
2		
3		
4		
5		

2. Escriba el mayor número de nuevas ecuaciones posibles a partir de las ecuaciones $n\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$ y $n - i = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0$ (Puede usar una o las dos ecuaciones anteriores).

3. En una encuesta realizada a 50 familias, se encontró que el promedio del número de hijos es de “0.5” (observe la tabla). Escriba el mayor número de interpretaciones de este promedio.

Número de hijos	0	1	2
Número de familias	30	15	5

4. Si $2\bar{x} + 2\bar{y} = 170$ y $3\bar{x} - 2\bar{y} = 20$, encuentre el valor de $(\bar{x} + \bar{y})$ (), es decir, $\bar{x} + \bar{y} = ?$

5. A continuación se presentan dos conjuntos con 7 datos cada uno (n = 7) y con una misma media $(\bar{x} = 45)$ (a los alumnos se les presentaron dos gráficas).

X	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
F	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

X	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
F	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

¿En cuál conjunto de datos existe mayor dispersión o variación?

6. Los datos siguientes corresponden al tiempo (en minutos) que 15 alumnos hacen de su casa a la escuela.

Tiempo (minutos)	Número de alumnos
$[10, 15)$	2
$[15, 20)$	3
$[20, 25)$	5
$[25, 30)$	3
$[30, 35]$	2

Encuentre la media aritmética, la mediana y la moda

.Prueba de Generalización

Propósito

El propósito de esta prueba es evidenciar la presencia de la habilidad para generalizar material probabilístico.

Contenido
En el contenido de la prueba están presentes los eventos independientes.

Descripción

La prueba consta de 4 situaciones dirigidas para que el alumno razone inductivamente y para que haga conjeturas y analogías. La prueba se presenta a continuación

Nombre ___________________________ Fecha ______ Grupo _______

Instrucciones

a) Se le presentan problemas de probabilidad numerados del 1 al 4.
b) El objetivo en cada problema es encontrar la regla (fórmula) para calcular la probabilidad de ocurrencia de *n* eventos independientes.
c) Para los problemas 1 y 2 se propone un método que puede usar o no para resolver los problemas 3 y 4.
d) Se recomienda que encuentre las reglas para cada problema en el orden en que se presentan.

1. Encuentre la regla para calcular la probabilidad de ocurrencia de águilas (A) y soles (S) en 1, 2, 3, 4,… hasta *n* lanzamientos de una moneda

Propuesta

Complete la tabla siguiente hasta encontrar la regla o fórmula (para cualquier secuencia de águilas (A) y soles (S)).

NUMERO DE LANZAMIENTOS: *n*	EVENTO	PROBABILIDAD
1	A	P(A)=0.5
2	AyS	P(AyS)=(0.5)(0.5)
3	AySyA	P(AySyA)=(0.5)(0.5)(0.5)
4	AySyAyS	P(AySyAyS)=(0.5)(0.5)(0.5)(0.5)

Escriba la regla en palabras o en símbolos.

2. En *n* lanzamientos de un dado común se definen los eventos, A: *Obtener 6 en el primer lanzamiento*; B: *No obtener 6 en el segundo lanzamiento, no obtener 6 en el tercero, no obtener 6 en el cuarto y así sucesivamente hasta el enésimo lanzamiento.*

NUMERO DE LANZAMIENTOS: *n*	EVENTO	PROBABILIDAD
1	A	$P(A)=\frac{1}{6}$
2	AyB	$P(AyB)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$
3	AyByB	$P(AyByB)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$
4	AyByByB	$P(AyByByB)=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$
n		

Escriba la regla en palabras o en símbolos.

Los problemas 3 y 4 se refieren al cálculo de probabilidades en *n* lanzamientos simultáneos de una moneda y un dado.
Sean los eventos, S: *Obtener un sol*; M: *Obtener un 6*; B: *No obtener un 6*.

3. Encuentre la regla para $P(SyMySyMy...yM)$, hasta *n* lanzamientos de una moneda y un dado.

NUMERO DE LANZAMIENTOS: *n*	EVENTO	PROBABILIDAD
1	SyM	P(SyM)=
2	SyMySyM	P(SyMySyM)=
3	SyMySyMySyM	P(SyMySyMySyM)=
4		

Escriba la regla en palabras o en símbolos.

4. Encuentre la regla para $P(SySySy...yS)P(ByByBy....yB)$

NUMERO DE LANZAMIENTOS: *n*	EVENTO	PROBABILIDAD
1	(S)y(B)	P(S)P(B)=
2	(SyS)y(ByB)	P(SyS)P(ByB)=
3	(SySyS)y(ByByB)	P(SySyS)P(ByByB)=
4		

Encuentre la regla en palabras o en símbolos.

Prueba de Reversibilidad

Propósito.

Por medio de esta prueba se investiga la habilidad del estudiante para invertir los procesos mentales.

Contenidos.

Los contenidos de la prueba son sobre distribución de probabilidad, esperanza matemática, varianza matemática y distribución binomial.

Descripción.

Los problemas son por parejas: uno directo y uno inverso, de manera que en el problema inverso se desconocen uno o varios datos proporcionados en el problema directo. La prueba es:
Nombre ________________________ Fecha ______ Grupo ________

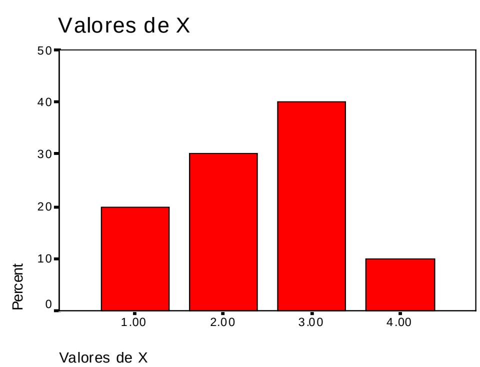
Instrucciones

a) Resuelva los problemas en las hojas proporcionadas.
b) Escriba todas las operaciones diagramas o dibujos que requiera para resolver los problemas.
c) No borre ninguna operación o dibujo. Si desea suprimir o cancelar algo, cruzelo con dos rayas.

1.a) Construya la gráfica correspondiente a la función de distribución de probabilidad de los datos que aparecen en la siguiente tabla.

Variable (X)	0	1	2
Frecuencia (F)	30	15	5

1.b) Construya la tabla de distribución de frecuencias correspondiente a la siguiente gráfica. Considere *n*=50 datos.



2. a) Encuentre la varianza matemática (σ^2) en la siguiente función de distribución de probabilidad

X	5	3	1	4
P(X)	0.4	0.3	0.2	0.1

b) Encuentre x_4 en la siguiente función de distribución de probabilidad, si $E(X) = m = 5$ y $s^2 = 4$

X	5	3	1	x_4
P(X)	0.3	0.2	0.1	0.4

3. a) Si X_i es una variable aleatoria discreta con distribución binomial con *n*=6 y *q*=0.6, construya la función de distribución de probabilidad para X_i

X_i	0	1	2	3	4	5	6
P(X_i)							

b) Si X_i es una variable aleatoria discreta con distribución binomial, $E(X) = np = 2$ y $s^2 = npq = \frac{4}{3}$, encuentre *n* y *p*.

4.5 . APLICACIÓN Y REVISION DE LAS PRUEBAS

Resulta importante señalar que las pruebas sobre habilidades se aplicaron como parte del proceso normal de evaluación: al inicio del semestre se les dijo a los alumnos que se realizarían 3 evaluaciones parciales y una evaluación final. De esta manera, cada prueba, era una situación rutinaria para ellos, ignorando que (en las pruebas sobre habilidades) se trataba de situaciones no convencionales; solamente la prueba sobre conocimiento se aplicó de manera rutinaria.

Las pruebas exploratorias se aplicaron a 44 alumnos del grupo 501 que cursan Estadística y Probabilidad I en el turno matutino (lunes y miércoles de 7 a 9 horas) en el CCH-Sur. La razón por la que se elige a este grupo obedece al hecho de que con el se desarrollaron primero los contenidos temáticos del Programa de Estadística y Probabilidad I, en el semestre lectivo 2004-I.

Estas pruebas se aplicaron (diferidas a lo largo del semestre) de acuerdo a como se iban cubriendo los contenidos temáticos del programa, en el siguiente orden: prueba de flexibilidad, prueba de generalización, prueba de reversibilidad y prueba de conocimientos.

A partir de la revisión de los porcentajes de respuestas correctas y de los procedimientos mostrados por los examinados, solamente en la prueba de flexibilidad se elimina un reactivo y en los demás se dan algunas sugerencias para su solución. Los problemas de las pruebas sobre generalización y reversibilidad se consideraron adecuados, por lo que no se modificaron (se aplicaron las mismas pruebas mostradas anteriormente).

La prueba final de Flexibilidad se muestra a continuación.

Prueba de Flexibilidad.

Nombre ____________________________ Fecha ________ Grupo ______

Instrucciones

a) Resuelva los problemas en las hojas proporcionadas.
b) Escriba todas las operaciones diagramas o dibujos que requiera para resolver los problemas.
c) No borre ninguna operación o dibujo. Si desea cancelar o suprimir algo, cruzelo con dos rayas.
d) En el problema 1, 3 y 5 encuentre dos métodos de solución (encuentre la respuesta de dos maneras).
e) En el problema 2 .encuentre el mayor número de soluciones.
f) En el problema 4 dé el mayor número de interpretaciones.

1. A continuación se presentan dos conjuntos con 7 datos cada uno (n = 7) y con una misma media ($\bar{x} = 45$)

X	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
F	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

X	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
F	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

¿En cuál conjunto de datos existe mayor dispersión o variación? Sugerencia: construya las gráficas correspondientes a cada tabla y compárelas.

2. Escriba el mayor número de nuevas ecuaciones posibles a partir de las ecuaciones $n\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$ y $n - \sum_{i=1}^{n} F_i = 0$. (Puede usar una sola ecuación y realizar transformaciones con ella o usar ambas ecuaciones y combinarlas).

3. Los datos siguientes corresponden al tiempo (en minutos) que 15 alumnos hacen de su casa a la escuela.

Tiempo (minutos)	Número de alumnos
$[10,15)$	2
$[15,20)$	3
$[20,25)$	5
$[25,30)$	3
$[30,35]$	2

Encuentre la media aritmética, la mediana y la moda. Sugerencia: construya un histograma y observe el comportamiento de los datos.

4. En una encuesta realizada a 50 familias, se encontró que el promedio del número de hijos es de "0.5" (observe la tabla). Escriba el mayor número de interpretaciones de este promedio.

Número de hijos	0	1	2
Número de familias	30	15	5

5. Si $2\bar{x}+2\bar{y}=170$ y $3\bar{x}-2\bar{y}=20$, encuentre el valor de $(\bar{x}+\bar{y})$, es decir, $\bar{x}+\bar{y}=\,?$. Sugerencia. Compare la primera ecuación con lo que se pide.

Construcción y aplicación de la prueba sobre conocimiento en Estadística y Probabilidad.

Después de aplicar las pruebas sobre habilidades, se aplicó la prueba estándar sobre conocimiento. A continuación se presenta la prueba exploratoria:

Nombre ________________________________ Grupo ____ Fecha _____

Instrucciones
Antes de seleccionar una opción, primero justifique su respuesta. No se calificará ninguna respuesta si no se detalla el procedimiento.

1. En un área de la ciudad hay 100 familias. Sus ingresos varían de \$15000 a \$25000. La mitad de las familias tienen ingresos alrededor de \$20000, un cuarto tienen ingresos de cerca de \$15000 y el resto tiene ingresos alrededor de \$25000.

   a) ¿Cuál es la mediana del ingreso cerca de:?
      i) \$25000 ii) \$10000 iii) \$20000

b) ¿Cuál es la desviación estándar?
i) $20000   ii) $5000 o menos   iii) $10000

Ahora suponga que una familia nueva se cambia a ésta área. Esta nueva familia tiene un ingreso de $1000000.

c) ¿Qué le pasa a la mediana?
i) se queda más o menos igual ii) decrece sustancialmente iii) aumenta sustancialmente

d) ¿Qué le pasa a la media?
i) se queda más o menos igual ii) decrece sustancialmente iii) aumenta sustancialmente

2. Para analizar la conducta del uso del cinturón de seguridad, se observa a los conductores en un crucero para ver si traen o no el cinturón de seguridad. Se registra S como Si y N como No, para los tres primeros conductores

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?
i) 4   ii) 6   iii) 8

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona no traiga cinturón?
i) 1 de 4   ii) 3 de 8   iii) 1 de 2

3. Suponga que el 28% de los conductores usa cinturón de seguridad, si se seleccionan 5 conductores al azar,

a) La probabilidad de ninguno traiga cinturón es:

i) 0   ii) casi 20%   iii) casi 80%

b) La probabilidad de que al menos uno traiga cinturón es:
i) casi 1   ii) casi 20%   iii) casi 80%

4. Si X es una variable con distribución normal con media 460 y desviación estándar 100,
a)¿cuál es el valor estandarizado para X=420

i) 40   ii) 4   iii) -4

5. La circunferencia de los cráneos de los adultos tienen media de 58 cm. Y una desviación estándar de 2 cm. La distribución es aproximadamente normal. ¿Qué proporción de la población tiene una circunferencia menor de 65 cm?
i) 0.0002   ii) 0.9998   iii) 0.90

Aplicación de la prueba final

En la prueba final sobre conocimiento estadístico-probabilístico, se eliminó el reactivo 2. Los reactivos 1, 3, 4 y 5 se conservaron iguales.

4.6. CLASIFICACION DEL ESTUDIO, POBLACION Y MUESTRA

Tipo de estudio

El estudio es prospectivo, transversal y de tipo descriptivo porque solamente se estudia una población y únicamente se pretende describir la situación de ésta en un momento determinado, en función de las variables mencionadas anteriormente.

Población y muestra

La muestra se compone por 37 alumnos del grupo 503, del turno matutino que cursan Estadística y Probabilidad I en el semestre lectivo 2004- 1 en el CCH-Sur. El grupo se elige por la conveniencia de que después de revisar el examen exploratorio de flexibilidad (aplicado al grupo 501), se ajustaba a la fecha en que se acordó con este grupo aplicar el primer examen parcial. En la pruebas de generalización y reversibilidad se sigue la misma secuencia: primero se aplicaron al grupo 501 y después al grupo 503

Las pruebas finales se aplicaron en el siguiente orden: primero se aplicó la prueba sobre flexibilidad, después la prueba sobre generalización y en tercer lugar se aplica la prueba sobre reversibilidad. El tiempo de duración de la aplicación fue aproximadamente de dos horas en cada una.

Una consideración relevante es el hecho de que un posible factor que de alguna manera, pudiera influir en los resultados, es el hecho de que el grupo tenga buen rendimiento escolar en sus cursos anteriores de Matemáticas.

La población (definida a partir de la muestra), está formada por los alumnos del CCH-Sur, del turno matutino, que cursan Estadística Y Probabilidad I en el semestre lectivo 2004-1

4.7. ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS PRUEBAS

Las variables se midieron de la siguiente manera:
La flexibilidad de pensamiento se midió en una escala del 1 al 5 (número de reactivos donde el examinado propuso soluciones alternativas correctas o da varias respuestas o interpretaciones a un problema).

La generalización se tipificó en la escala del 1 al 4 (número de veces que el alumno da, correctamente, la regla en palabras o en símbolos).

La escala en la reversibilidad es del 1 al 3 (número de veces que el examinado resuelve correctamente, cada par de problemas, de manera independiente).

La escala en la prueba de conocimiento es del 1 al 10 (se plantean 8 reactivos, cada uno con un valor de 1.25).
Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Conocimiento	Reversibilidad	Generalización	Flexibilidad
2.00	1.00	.00	2.00
2.50	.00	.00	1.00
5.00	1.00	1.00	1.00
6.30	.00	4.00	3.00
1.30	1.00	.00	2.00
8.80	1.00	2.00	2.00
3.80	2.00	.00	2.00
6.00	1.00	2.00	3.00
6.00	.00	3.00	2.00
6.30	1.00	1.00	1.00
2.50	1.00	.00	1.00
2.50	.00	2.00	1.00
10.00	2.00	4.00	5.00
8.80	2.00	4.00	3.00
6.30	1.00	.00	1.00
10.00	3.00	4.00	5.00
4.40	.00	1.00	1.00
2.50	1.00	.00	.00
1.30	.00	.00	1.00
5.00	.00	1.00	3.00
3.80	1.00	.00	2.00
5.00	.00	3.00	1.00
4.40	3.00	3.00	5.00
6.00	.00	.00	1.00
2.50	1.00	2.00	2.00
10.00	1.00	4.00	2.00
8.80	.00	1.00	1.00
5.00	.00	1.00	.00
7.50	2.00	4.00	2.00
1.30	.00	3.00	3.00
1.30	.00	.00	1.00
3.80	2.00	4.00	3.00
1.30	.00	.00	.00
2.50	2.00	1.00	2.00
3.50	.00	.00	2.00
7.50	1.00	2.00	2.00
8.80	.00	.00	2.00
Escala: 1a 10	Escala: 1 a 3	Escala: 1 a 4	Escala: 1 a 5

Con el propósito de tener un análisis exploratorio de los datos, estos se transforman en unidades comparables (estandarizadas), expresando cada observación en forma decimal, por ejemplo si un alumno muestra flexibilidad en 3 de los 5 reactivos, su calificación es $\frac{3}{5} = 0.6$, si logra las 4 generalizaciones obtiene 1; si presenta reversibilidad en 2 de los 3 problemas pareados se le asigna 0.66 y si obtiene 7.5 en el examen de conocimiento se le califica con 0.75

Los valores estandarizados de las calificaciones y su distribución de frecuencia se muestran en la tabla dada a continuación

Calificación estandarizada	Conocimiento	Reversibilidad	Generalización	Flexibilidad
0		16	14	3
0.13	5			
0.2	1			12
0.25	7		7	
0.33		13		
0.35	1			
0.38	3			
0.4				13
0.44	2			
0.5	3		5	
0.6	3			6
0.63	3			
0.66		6		
0.75	2		4	
0.8	4			
1	3	2	7	3
Total	37	37	37	37

En el apartado 5 se muestran tablas con medidas descriptivas, gráficas y la matriz de correlación entre las variables estudiadas (usando SPSS).

5. RESULTADOS DEL ANALISIS EXPLORATORIO DE LOS DATOS

5.1. OBSERVACIONES CON RESPECTO AL ANALISIS DE TABLAS Y GRAFICAS.

		Conocimiento	Reversibilidad	Generalización	Flexibilidad
N		37	37	37	37
Media		0.4981	0.2770	0.3851	0.3838
Mediana		0.4400	0.3300	0.2500	0.4000
Moda		0.25	.00	0.00	0.40
Desv. E.		0.2767	0.2977	0.3891	0.2511
Varianza		0.0765	0.0886	0.1514	0.063
Cuartiles	0.25	0.2500	0.0000	0.0000	0.2000
	0.50	0.4400	0.3300	0.2500	0.4000
	0.75	0.6900	0.3300	0.7500	0.5000

En términos generales, en la tabla anterior, observamos que:

- La media para la flexibilidad y generalización es igual (0.3838 y 0.3851), lo cual significa que cada alumno resuelve en promedio 2 problemas en cada prueba.
- Las medias para la reversibilidad (0.2770) y para el conocimiento (0.4981) son muy distintas, esto significa que en promedio los alumnos muestran reversibilidad en 1 problema pareado y que solamente resuelven correctamente la mitad del examen de conocimientos.
- De acuerdo con los valores correspondientes al tercer cuartil (equivalente a 28 alumnos), estos resuelven 7 reactivos o menos en el examen de conocimiento, y muestran reversibilidad en, a lo más, dos reactivos pareados.
- El 75% de los examinados logran, a lo más, generalizar en tres problemas y muestran flexibilidad en (aproximadamente) tres reactivos.

Resultados sobre la prueba de Conocimiento

Valores	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acum
0.13	5	13.5	13.5
0.20	1	2.7	16.2
0.25	7	18.9	35.1
0.35	1	2.7	37.8
0.38	3	8.1	45.9
0.44	2	5.4	51.4
0.50	3	8.1	59.5
0.60	3	8.1	67.6
0.63	3	8.1	75.7
0.75	2	5.4	81.1
0.88	4	10.8	91.9
1.00	3	8.1	100.0
Total	37	100.0	

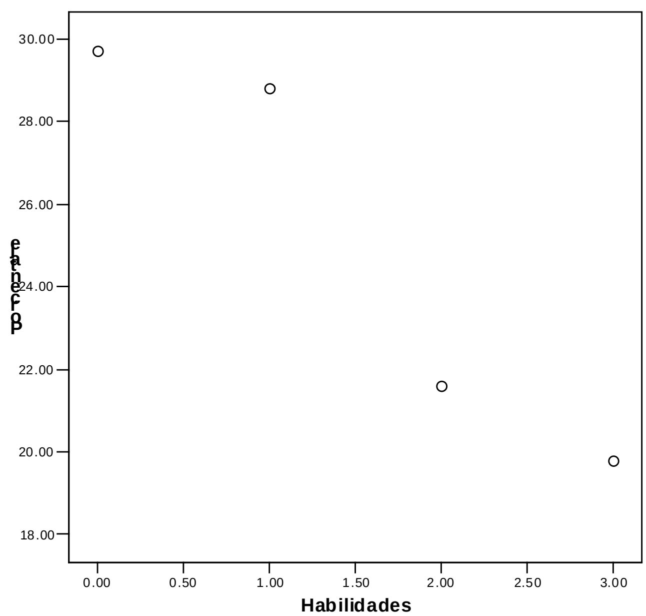
En esta tabla se observa que la mediana de los puntajes es aproximadamente 0.44 (4.4 puntos) y que (aproximadamente) la mitad de los alumnos obtienen calificaciones superiores a este valor.

Resultados en las pruebas sobre habilidades

Antes de analizar por separado, los resultados de las pruebas sobre habilidades, primero se presentan los resultados de manera general:

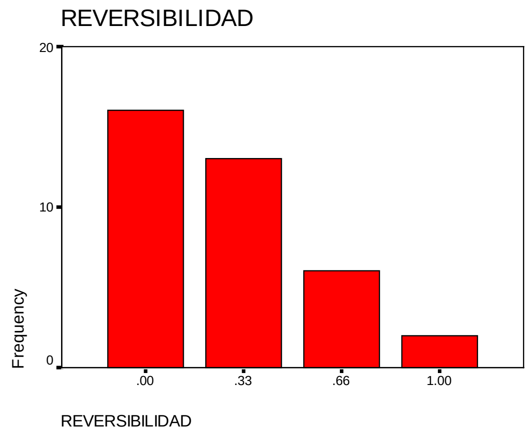
Número de veces que se muestra la habilidad	Reversibilidad	Generalización	Flexibilidad	porcentaje
0	16	14	3	29.7
1	13	7	12	28.8
2	6	5	13	21.6
3 o más	2	11	9	19.8
Total	37	37	37	100

En esta tabla y en la gráfica siguiente se observa que existe una relación inversa entre el número de veces que se presenta la habilidad y el porcentaje de alumnos.



Reversibilidad

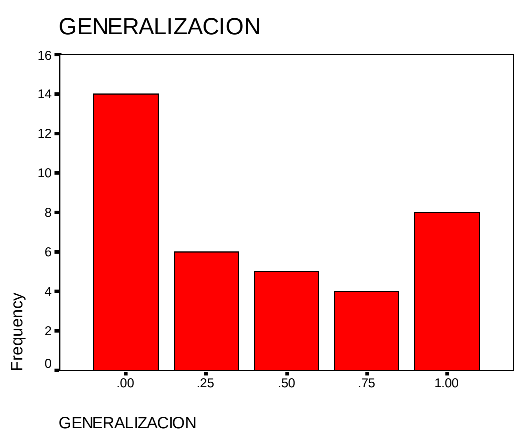
Valores	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acum.
0.00	16	43.2	43.2
0.33	13	35.1	78.4
0.66	6	16.2	94.6
1.00	2	5.4	100.0
Total	37	100.0	



Los resultados gráficos de la reversibilidad muestran sesgo a la derecha. Las dos primeras barras son más altas (0 indica ausencia de reversibilidad y 0.33 significa pensamiento reversible en un problema pareado) lo que quiere decir que la mayoría de los examinados presentan pensamiento reversible a lo más, en un problema pareado.

Generalización

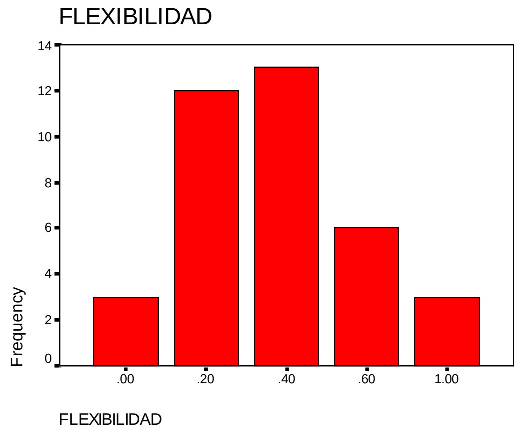
Valores	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acum.
0.00	14	37.8	37.8
0.25	7	18.9	56.8
0.50	5	13.5	70.3
0.75	4	10.8	81.1
1.00	7	18.9	100.0
Total	37	100.0	



En la gráfica para la generalización la tendencia es sesgada a la derecha, en la primera barra se observa que 14 de los examinados no logran encontrar la fórmula y que 7 obtienen calificación de 1 (logrando encontrar las cuatro fórmulas).

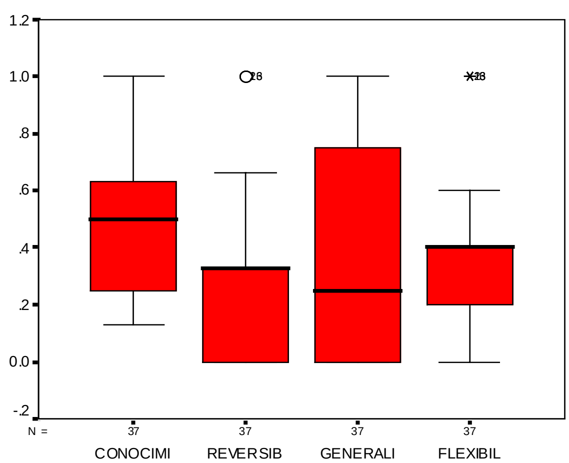
Flexibilidad

Valores	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acum.
0.00	3	8.1	8.1
0.20	12	32.4	40.5
0.40	13	35.1	75.7
0.60	6	16.2	91.9
1.00	3	8.1	100.0
Total	37	100.0	



En la gráfica para la flexibilidad, la mayor parte de los alumnos (25), muestran pensamiento flexible para 1 y 2 reactivos (0.20 indica flexibilidad en un problema, 0.40 indica flexibilidad en dos problemas) también se observa una cierta tendencia simétrica. Esta prueba presenta la menor desviación estándar (0.25), lo que sugiere menor variación en las respuestas de los alumnos. La poca asimetría que presenta esta gráfica se refleja en la comparación de la media (0.3838) y la mediana (0.4) ya que son muy parecidas.

Diagramas de caja para el conocimiento y las habilidades



La presentación conjunta de los diagramas de caja muestran que la mediana de las respuestas son:

- Conocimiento: 0.5, lo que significa que aproximadamente el 50% de los examinados resuelve correctamente 5 problemas o menos.
- Reversibilidad: 0.33, lo que significa que el 50% de los alumnos resuelven, a lo más, un problema pareado
- Generalización: 0.25, lo que significa que la mitad de los alumnos logran cuando mucho, una sola generalización.
- Flexibilidad: 0.4, lo que se traduce en el hecho de que el 50% de los alumnos muestran flexibilidad en 1 o 2 problemas.

5.2. EL COEFICIENTE ALPHA DE CRONBACH

Con la idea de tener otros elementos para juzgar la calidad de los reactivos, se calcula el coeficiente Alpha de Cronbach, que mide la confiabilidad en términos de obtener resultados similares cuando se apliquen nuevamente las pruebas.

El procedimiento para calcular este coeficiente utiliza el número de variables (K=4), la media de las covarianzas entre los reactivos ($\overline{\text{cov}}$) y la media de las varianzas entre los reactivos ($\overline{\text{var}}$):

$$a = \frac{\dfrac{K(\overline{\text{cov}})}{\overline{\text{var}}}}{1 + (K - 1)\left(\dfrac{\overline{\text{cov}}}{\overline{\text{var}}}\right)}$$

Estadísticos de resumen de los elementos

	Media	N de elementos
Medias de los elementos	0.386	4
Varianzas de los elementos	0.095	4
Covarianzas inter-elementos	0.045	4
Correlaciones inter-elementos	0.486	4

Sustituyendo en la fórmula, se obtiene el coeficiente estandarizado:

$$a = \frac{\dfrac{4(0.045)}{0.095}}{1 + 3\left(\dfrac{0.045}{0.095}\right)} = \frac{1.894736}{2.421052} = 0.78$$

Estadísticos de resumen de los elementos

	Media	No. de elementos
Medias de los elementos	2.303	4
Varianzas de los elementos	3.156	4
Covarianzas inter-elementos	1.164	4
Correlaciones Inter.-elementos	.486	4

El coeficiente no estandarizado es:

$$a = \frac{\dfrac{4(1.164)}{3.156}}{1 + 3\left(\dfrac{1.164}{3.156}\right)} = \frac{1.475285}{2.106463} = 0.7$$

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach basada en los elementos tipificados	No. de elementos
.700	.78	4

Estos valores indican una fiabilidad relativamente alta para los reactivos.

5.3. ANALISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES (ACP)

Consideraciones iniciales

Funcionalmente el ACP, es una técnica multivariada cuyo propósito es explicar las relaciones entre un conjunto numeroso de variables correlacionadas y difíciles de interpretar en términos de un conjunto, en un grupo de nuevas variables menos numerosas llamadas componentes principales, independientes (estadísticamente) y que son combinaciones lineales de las variables originales.

Antes de aplicar el análisis de componentes principales, se determinan los coeficientes de correlación entre las variables bajo estudio (si las variables no están correlacionadas, no tiene sentido utilizar el ACP). Los coeficientes de correlación se presentan en la siguiente:

Matriz de correlación

	Flexibilidad	Generalización	Reversibilidad	Conocimiento
Flexibilidad	1.000			
Generalización	0.634	1.000		
Reversibilidad	0.630	0.423	1.000	
Conocimiento	0.399	0.538	0.292	1.000

En esta matriz observamos lo siguiente:

1 La mayor correlación se da entre las habilidades matemáticas: entre Flexibilidad y Generalización (0.634) y entre Flexibilidad y Reversibilidad (0.630).
2 La correlación entre Conocimiento y las habilidades es: Conocimiento y Generalización, 0.538; Conocimiento y Flexibilidad, 0.399; Conocimiento y Reversibilidad, 0.292

Dado que las variables están correlacionadas en mayor o menor grado, tiene sentido aplicar un análisis de componentes principales.

Componentes Principales

El análisis de componentes principales (ACP) es un procedimiento matemático que transforma un conjunto de variables posiblemente correlacionadas en un conjunto menor de variables no correlacionadas llamadas *componentes principales:* $Y_1, Y_2, ..., Y_p$.

El uso de la técnica de CP es principalmente exploratoria y en general como un paso intermedio para análisis posteriores.

Los objetivos principales son

a) Reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos
b) Interpretar un conjunto de datos.

Las características de las nuevas variables (CP), son tales que:

1. No están correlacionadas.
2. La primera componente principal explique la mayor variabilidad posible de los datos.
3. Cada componente subsecuente explique la mayor variabilidad posible

restante no explicada por las componentes anteriores.

Elementos del ACP

a) Eigenvalores de la matriz de varianza y covarianza

Son las varianzas de cada componente principal. En tanto se sabe que las CP van “capturando” varianza en orden descendente (la primera componente “captura” la mayor parte de la varianza, seguida de la segunda y así sucesivamente, siendo la última componente la que menos varianza “captura”).

b) Eigenvector de la matriz de varianza y covarianza

Las propiedades de las que gozan los eigenvectores, los hacen “candidatos propicios” para (en un principio) servir como base de la construcción de las CP. De hecho las entradas de cada eigenvector, son los pesos involucrados en la expresión de una combinación lineal de las variables originales; dicha combinación lineal no es cualesquiera, sino precisamente una CP.

c) Cargas (loadings)

La interpretación de los componentes se basa en las cargas (a_{ij}) de los componentes las cuales son las correlaciones entre los factores y las variables originales. De este modo, las cargas proporcionan una indicación de qué variables originales están correlacionadas con cada componente y el grado de correlación.

Estos elementos se muestran a continuación (utilizando el paquete estadístico S-Plus):

```
     *** Principal Components Analysis ***
The number of variables is 4 and the number of observations
is 37

Importance of components:
                       Comp. 1     Comp. 2    Comp. 3   Comp. 4
Standard deviation     1.7345085  0.7598171  0.6435513     0
Proportion of Variance 0.7521299  0.1443305  0.1035396     0
 Cumulative Proportion 0.7521299  0.8964604  1.0000000     1

Loadings
```

Variables	Y_1
X_1: Conocimiento	a_{11}= 0.437
X_2: Reversibilidad	a_{12}= 0.474
X_3: Generalización	a_{13}= 0.532
X_4: Flexibilidad	a_{14}= 0.550

De acuerdo con los elementos del ACP y observando la salida del S-Plus, se pueden plantear los siguientes hechos:

a) Los eigenvalores de cada CP, son

Componente	Desv. Estándar	Varianza (eigenvalor)
1	1.7345085	$(1.7345085)^2=3.008$
2	0.7598171	$(0.7598171)^2=0.577$
3	0.6435513	$(0.6435513)^2=0.414$

b) El primer CP explica la mayor parte de la variación entre las variables (72.2%).

c) El componente que explica esta mayor proporción de varianza, es: $Y_1=0.437X_1+0.474X_2+0.532X_3+0.550X_4$

d) Existe mayor correlación entre el primer CP (Y_1) y las variables X_3 (Generalización) y X_4 (Flexibilidad). Estas correlaciones son, respectivamente 0.532 y 0.550

5.4. CORRELACION PARCIAL ENTRE LAS VARIABLES Y CORRELACION ENTRE MATEMATICAS I A IV Y LAS HABILIDADES

Correlación parcial

Siegel (1985) menciona que en situaciones como esta (donde no se usan controles experimentales), pueden aplicarse controles estadísticos como los métodos de correlación parcial. En la correlación parcial, los efectos de variación de una tercera variable sobre la relación entre las variables X y Y son eliminados, es decir, la correlación entre X y Y se encuentra al tener la tercera variable (Z) como un valor constante.

En la tabla siguiente se presentan las correlaciones entre Conocimiento y las demás variables.

	Reversibilidad	Generalización	Flexibilidad
Conocimiento	0.292	0.538	0.399

Los coeficientes de correlación parcial son:

a) Eliminando la influencia de la flexibilidad.

	Reversibilidad	Generalización
Conocimiento	0.0571	0.4021

b) Eliminando la influencia de la Reversibilidad

	Generalización	Flexibilidad
Conocimiento	0.4782	0.2890

c) Eliminando la influencia de la Generalización

	Reversibilidad	Flexibilidad
Conocimiento	0.0844	0.0880

La comparación de los coeficientes permite proponer las siguientes conclusiones:

1 Eliminando la Flexibilidad: la correlación entre Conocimiento y Reversibilidad disminuye de 0.292 a 0.0571, la correlación entre Conocimiento y Generalización cambia de 0.538 a 0.4021
2 Controlando la Reversibilidad: la correlación entre Conocimiento y Generalización varía de 0.538 a 0.4782, la correlación entre Conocimiento y Flexibilidad cambia de 0.399 a 0.289
3 Sin la influencia de la generalización, la correlación entre Conocimiento y Reversibilidad, baja de 0.292 a 0.0844, la correlación entre Conocimiento y Flexibilidad disminuye (pasa de 0.399 a 0.0880).

Las correlaciones entre las habilidades **con** y sin (la influencia del conocimiento) son respectivamente:

a) Entre Reversibilidad y Generalización: **0.283** y 0.3296
b) Entre Reversibilidad y Flexibilidad: **0.446** y 0.5859
c) Entre Flexibilidad y Generalización: **0.497** y 0.5431

Correlaciones entre Matemáticas I a IV y las Habilidades

Con el objetivo de observar y comparar las correlaciones entre los resultados de las habilidades en las pruebas de Flexibilidad, Generalización y Reversibilidad (en Estadística y Probabilidad) con los resultados obtenidos por los examinados en los cursos de Matemáticas I a IV, se calculan los coeficientes de correlación. Estos se muestran en la tabla que sigue.

	Mate I	Mate II	Mate III	Mate IV
Flexibilidad	0.121	0.368	0.243	0.428
Generalización	0.177	0.369	0.113	0.342
Reversibilidad	0.153	0.413	0.282	0.154

La inspección de los resultados arroja las algunas conclusiones:

a) De manera general, existe baja correlación entre las habilidades en Estadística y Probabilidad y Matemáticas I a IV.
b) Existe correlación moderada entre Reversibilidad y Matemáticas II (0.413).
c) Existe correlación moderada entre Flexibilidad y Matemáticas IV (0.428).

6. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS DERIVADAS DEL ANALISIS EXPLORATORIO

6.1. CONCLUSIONES PARCIALES

a) A lo más, el 50% de los examinados presentan habilidades matemáticas: muestran pensamiento reversible en un problema, logran una generalización y son de pensamiento flexible en 2 problemas o menos (esto se concluye al observar las medianas).
b) Las habilidades manifiestan mayor presencia cuando se elimina la influencia del conocimiento (esto se deduce de los coeficientes de correlación parcial).
c) Se puede decir que existe un factor general de capacidad matemática que explica el rendimiento académico de los alumnos y tal vez alguna habilidad especifica (esto se obtiene del análisis de componentes principales).
d) Las habilidades matemáticas están estructuradas y relacionadas, de manera que la mayor o menor presencia de alguna de ellas influye en las habilidades restantes (de acuerdo con las correlaciones parciales), es decir, no se presentaron de manera aislada sino que la presencia o ausencia de alguna de ellas, ayudó a que se manifestaran otras con mayor o menor intensidad.

6.2. CONCLUSIONES FINALES

Estas conclusiones solamente describen los resultados observados en la muestra.

a) Los alumnos mostraron ser potencialmente capaces, al evidenciar la presencia de habilidades matemáticas en Estadística y Probabilidad, aún cuando no se les enseñó con esta metodología, es decir, no se les enseñó de manera sistemática a desarrollar habilidades.
b) El propósito planteado se cumple, porque es posible desarrollar habilidades matemáticas en la enseñanza de la Estadística y de la Probabilidad si se plantea como un objetivo curricular de enseñanza y aprendizaje.
c) Con respecto a los objetivos planteados en este trabajo, se cumplen parcialmente porque si bien, se encontraron correlaciones entre las variables, puede ser que haya influencia de otros factores no considerados en el estudio.
d) Puesto que las habilidades manifiestan mayor correlación entre si, existe la posibilidad (como un factor de confusión) de que la correlación de cada una de ellas con el conocimiento no sea directa, es decir, que sea el resultado del hecho de que, la correlación entre conocimiento y cualquier habilidad sea influenciada por los efectos de variación de una tercera capacidad.
e) Las correlaciones entre los resultados en habilidades matemáticas y calificaciones de Matemáticas I a IV, al ser menores que las correlaciones entre habilidades matemáticas y Conocimiento en Estadística y Probabilidad, sugiere que, posiblemente, no se dió la circunstancia de que los alumnos mostraran estas

capacidades en los cursos previos de Matemáticas.

f) Las habilidades en el contexto matemático o en Estadística y Probabilidad solo se manifiestan en la actividad con los conceptos que son objeto de estudio de estas asignaturas, siempre y cuando se les enseñe a los estudiantes, a poner de manifiesto los rasgos esenciales de los conceptos y fenómenos que estudian.

6.3. SUGERENCIAS

Puesto que las habilidades matemáticas no son consecuencia de cualquier tipo de enseñanza, para su desarrollo es necesario plantear y estructurar actividades de aprendizaje para forzar a los estudiantes a ser innovadores.

I. Cambiando algunos problemas rutinarios se puede fomentar el uso del pensamiento divergente o la búsqueda de métodos alternativos de solución.

Ejemplos

a) En lugar de pedir encontrar la media de los pesos de, digamos, 16 personas, se puede cambiar el objetivo a: encontrar los pesos posibles de 16 personas en un elevador que soporta un peso total de 1120 kgs.

b) En vez de pedir el cálculo de la varianza de una conjunto de *n* datos, se puede cambiar por: si, $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1} = 4$ y encontrar los valores de $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ y n de manera que $s^2 = 4$ Algunos valores son:

$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$	n
36	10
40	11
52	14

II. Para promover la habilidad de generalizar, se puede solicitar a los alumnos que encuentren la fórmula o regla (en palabras o en símbolos) para la media aritmética de series de números enteros positivos.
Ejemplos:

a) Encontrar la regla para calcular la media aritmética de 1, 3, 5, 7,… hasta n números impares, como se observa en la siguiente tabla

Series	Número de términos	Suma	$\overline{X}$
1	1	1	1
1+3	2	4	2
1+3+5	3	9	3
1+3+5+7	4	16	4
.			
.			
n			

b) Encuentre la fórmula para determinar la media aritmética de: 2, 4, 6,8 ,10,… hasta n números pares.

Series	Número de términos	Suma	$\overline{X}$
2	1	2	2
2+4	2	6	3
2+4+6	3	12	4
2+4+6+8	4	20	5

c) La distribución de probabilidad binomial puede ser útil para que los estudiantes descubran la solución general a la siguiente situación: en n repeticiones o ensayos de un experimento de Bernoulli, ¿cuál debe ser la probabilidad de éxito (*p*) para que la probabilidad de ocurrencia de $(x-1)$ éxitos y x éxitos, sea igual? Es posible guiar a los alumnos para que desarrollen:

$$P(x-1) = P(x)$$
$$C^{n}_{n-1} p^{x-1}(1-p)^{n-(x-1)} = C^{n}_{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

y que logren encontrar la solución general: $p = \dfrac{x}{n+1}$

III) Con el propósito de que se manifieste el pensamiento reversible, se pueden plantear las siguientes cuestiones:

a) Los datos siguientes (agrupados) corresponden al diámetro, en centímetros de 34 plantas de una especie común. Los diámetros varían desde 8 hasta 32 centímetros. Complete esta tabla:

Intervalos (Diámetro)	Punto Medio del Intervalo	Numero de plantas	Frecuencia Relativa
	10		0.0588
	14		0.1470
	18		0.2058
	22		0.2352
	26		0.1764
	30		0.0882

b). En la siguiente función de distribución de probabilidad, encuentre x_3 si $m = E(X) = 3.2$

X	4	7	x_3	2	8
$P(X)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

IV. La flexibilidad y la reversibilidad se pueden explorar con los siguientes problemas:

1. La media de 4 números es 4.6, la media de otros 6 números diferentes es 4.3 Encuentre:

   a) La suma de los primeros 4 números.

   b) La suma de los otros 6 números.

   c) La media de todos los (10) números juntos.

2. Los datos bivariados de la tabla que se presenta a continuación se refieren a la relación lineal entre el número de artículos comprados y el precio por artículo.

No. de artículos (X)	1	3	5	10	12	15	24
Costo por artículo (Y)	55	52	48	36	32	30	25

a) Construya el diagrama de dispersión de los datos y (sin hacer los cálculos), proponga varios valores para el coeficiente de correlación.

b) La interpretación de la ecuación de regresión es: “a partir de un precio inicial de $53.8 por artículo, el precio (inicial) disminuye $1.4 por cada artículo comprado” Escriba la ecuación de regresión lineal, $y = b - mx$.

3. Sean A y B, dos eventos mutuamente excluyentes, encuentre varios valores para P(A) y P(B), de manera que P(A)+P(B)=0.8

4. Sean A y B, dos eventos independientes, encuentre varios valores para P(A) y P(B), de manera que P(A)xP(B)=0.48

Estas y otras acciones implican replantear el proceso de enseñanza y aprendizaje para que los alumnos vean la Estadística y la Probabilidad bajo una perspectiva no convencional, y como dijo S. Roy: “Creo que si a un joven estudiante se le inicia en su futura carrera, en el camino de la habilidad para generalizar un resultado, para interpretarlo de tantas formas como sea posible y para descubrir sus significados físicos inherentes, no odiará a las Matemáticas y tratará de ser más creativo, que lo que sería si fuera otro el caso”.

BIBLIOGRAFIA

BARBERA, E. (1997). La evaluación en el Area Matemática: Contenido y tendencias. Anuario de Psicología. Universidad de Barcelona.

BAZAN, J. J. (2001). Horizontes Actuales de la Educación Media Superior, México.

CATENA, A. y otros (2003). Análisis Multivariado. Un manual para investigadores. Serie de Psicología. Editorial Biblioteca Nueva, Madrid.

CELORRIO, R. (2003). Desarrollo del pensamiento creativo en la ESO. Revista de Ciencias de la Educación. No. 196

COHEN, M. P. (1987). Flexibility and Algebraic Problem Solving. Mathematics Teacher. Vol. No. 4.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES (1996). Programas de Estudio para las Asignaturas de Estadística y Probabilidad I y II. Quinto y sexto semestres. UNAM, México.

COMISION DE REVISION Y AJUSTE DE LOS PROGRAMAS DE ESTADISTICA Y PROBABILIDAD I Y II. (2004). Area de Matemáticas. CCH-UNAM.

CONSEJO DE EDUCACION DE LA CIUDAD. DE NUEVA YORK (s/f). Estándares de Desempeño en Matemáticas para Bachillerato. Traducción de J. J. Hernández y Patricio A. Rosen.

DIAZ B. F. (2003). Las habilidades del pensamiento crítico y su enseñanza en contextos escolares. Revista Educación 2001. No. 95. México.

ESTEVEZ, E. y De GUNTHER, L. (2003). La investigación sobre cognición en México: 1991-2001. Revista Educación 2001. No. 95. México.

GAL, I. (2005). Towards “Probability Literacy” for all Citizens: Building Blokcs and Instructional Dilemma. Traducción de Miguel Mercado. A Jones Graham Editor. Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning. K. A. P. Netherlands.

GARFIELD, J. and CHANCE, B. (2000). Assessment in Statistics Education: Issues and Challenges. Mathematical Thinking and Learning. Vol. 2. Editor Brian Greer. London.

GIBBS, W. y FOX, D. (2000). Enseñanza de las Ciencias. Tendencias en Educación. Revista Investigación y Ciencia.

GIL FLORES, G. (1999). Actitudes hacia la Estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. Revista Española de Pedagogía. No. 214.

HAYLOCK, D. W. A. (1987). Framework for Assesing Mathematical Creativity in School Children. Educational Studies in Mathematics. No. 18.

HERNANDEZ, J. D. (2000). Habilidades Matemáticas Utilizadas por Estudiantes de Preparatoria en la Comprensión del Algebra. Tesis de Maestría, UNAM

JOHNSON, D. (2000). Métodos Multivariados Aplicados al Análisis de Datos. International Thompson Editores, México.

KRUTETSKII, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in School Children. University of Chicago Press, Chicago.

KRZANOWSKI, W. J. (2000). Principles of Multivariate Análisis. Oxford University Press.

LOPEZ RUEDA, G. (2001). Habilidades matemáticas en la educación básica y normal. Algunas ideas para su desarrollo. GEI, México.

MARI MOLLA, R. (1998). Evaluación de las habilidades matemáticas. Bordón. Sociedad Española de Pedagogía. Vol. 50, No. 2.

MARTINEZ, R. (1996). Psicometría. Teoría de los test psicológicos y educativos. Editorial Síntesis, Madrid.

MENDEZ, I. y otros. (1997). El protocolo de investigación. Lineamientos para su elaboración y análisis. Trillas, México.

MENSCHINSKAIA, N. A. (1960). El pensamiento. Redacción de S. L. Rubinstein y otros. Psicología. Tratados y Manuales Grijalvo, México.

NICKERSON R y otros (1987). Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual. Temas de Educación. Paidós. Barcelona.

NIETO, L. (2005). Modulo 6. Análisis Multivariado. Extensión Universitaria. ITAM.

NUÑEZ A. J. M. (2005). Percepciones que tienen los estudiantes en tres de las principales universidades del D. F. sobre algunos posibles candidatos a la presidencia de la R. M. para el período 2006-2012. Tesina de Especialización en Estadística Aplicada. IIMAS-UNAM.

ORTON, A. (1998)- Didáctica de las Matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula. Ediciones Morata. Madrid.

PLAN DE ESTUDIOS ACTUALIZADO (1996). Colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM, México.

POLYA, G. (1986). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, México.

PONCE, H. (2000). Enseñar y Aprender Matemática. Ediciones Novedades Educativas, Buenos. Aires – México.

ROOSSMAN, A. and CHANCE, B. (1999). Teaching the Reasoning of Statistical Inference: A Top Ten List. The College Mathematics Journal. Vol. 4.

RUBINSTEIN, S. L. (1959). El Pensamiento y los Caminos de su Investigación. Grijalvo, México.

RUGARCIA, A. Y DELGADO, A. (1987). Resolución Creativa de Problemas en la Enseñanza de las Ingenierías. Revista de la Educación Superior No. 62. ANUIES.

S. ROY (1982). La creatividad matemática. ¿Puede enseñarse a edad temprana? Internacional Journal of Math. Educ. Sci. Technol. Vol. 13, No. 2.

SANTOS, T. M. y VARGAS, J. C. (2003). Más allá del uso de exámenes estandarizados. Revista Avance y Perspectiva. Conacyt. Vol. 22.

SCHMELKES, S. (2004). ¿Cómo nos ayuda la investigación a educar mejor? Ciencia y Desarrollo. Vol. 30 No.179. México.

SEP (1990). Planes de Estudio de Educación Básica. Primer Grado. Secundaria. Revista Informativa del Profesor de Matemáticas. Edición Especial. ANPM.

SHARDAKOV, M. N. (1963). El desarrollo del Pensamiento en el Escolar. Colección Pedagógica Grijalvo, México.

SIEGEL, S. (1985). Estadística No Paramétrica. Trillas, México.

STAVY, R. and RAGER, T. (1990). Inverse Relations: The Case of Quantity of Matter. Fourteent. PME Conference. Vol. 3. México.

VARGAS, F. (2001). Reprueban a México. Uno Más Uno. México.

VISAUTA, B. Y MARTORI, J. (2003). Análisis Estadístico con SPSS para Windows. Volumen II. Estadística Multivariante. Mc. Graw Hill, Madrid.

WARING, S. (1994). ¿Are mathematically able pupils necessarily good at statistics? Mathematics Teaching 148.

APENDICE: COMPONENTES PRINCIPALES

A.1. INTRODUCCION

Johnson (2000) menciona que el Análisis de Componentes Principales (ACP) comprende un procedimiento matemático que transforma un conjunto de variables correlacionadas de respuestas, $X_1, X_2, .., X_p$ en un conjunto menor de variables no correlacionadas llamadas *componentes principales*: $Y_1, Y_2, ..., Y_p$.

Por su parte, Visauta (1998) establece que el objetivo del ACP consiste en encontrar una serie de componentes que expliquen el máximo de *varianza total* de las variables originales.

Catena, Ramos y Trujillo (2003), afirman que el ACP es una técnica de reducción de datos, cuyo objetivo es reducir un conjunto de variables observadas a un conjunto menor de variables no observadas o subyacentes. Las variables observadas, son las que el investigador mide a sus sujetos en el curso de su investigación. Las variables subyacentes se consideran una manifestación de variables no observadas directamente

El método consiste básicamente en llevar a cabo una combinación lineal de todas las variables de modo que, el primer componente principal sea una combinación que explique la mayor proporción de la varianza de la muestra, el segundo componente la segunda mayor que a su vez no esté correlacionado con el primero, y así sucesivamente hasta tantos componentes como variables:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ...+ a_{1p}X_p \\
Y_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ...+ a_{2p}X_p \\
\\
Y_p &= a_{p1}X_1 + a_{p2}X_2 + ...+ a_{pp}X_p
\end{aligned}
$$

Y_1 es el primer CP; $X_1, X_2, ..., X_p$ corresponden a las *p* variables analizadas; a_{1j}, con $j = 1, ..., p$ corresponde a las cargas del primer componente en las *p* variables, (y así sucesivamente).

Si se utilizan tantos CP como variables, cada variable puede ser explicada por ella misma y por tanto toda la variabilidad de cada variable, expresada en unidades de desviación estandarizada, es igual a la unidad. Martínez (1996) afirma que, teóricamente, el número de CP es igual al número de variables originales, pero que las CP introducen propiedades que las hacen más deseables que las variables originales, como son: *varianza máxima e independencia*.

A.2. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LOS CP

De acuerdo con Krzanowski (2000), supongamos que una muestra de *n* individuos a los que se les ha medido las estaturas (X_1) y los pesos (X_2), se representan en un nuevo sistema de coordenadas Y_1Y_2, sin que se altere su forma. En este nuevo sistema de coordenadas, se observa que los puntos se dispersan sobre el eje Y_1, lo que significa que los individuos difieren ampliamente en su *talla*, pero que son muy similares en su f*orma*, en otra palabras, podemos caracterizar las diferencias entre los *n* individuos lo suficientemente bien, si en vez de valorar la estatura (X_1) y el peso (X_2) de cada uno, solamente observamos su *talla*, de tal forma que se pueden reemplazar las variables originales X_1 y X_2 por una variable singular Y_1.

2.2 Representations based on subspace projection

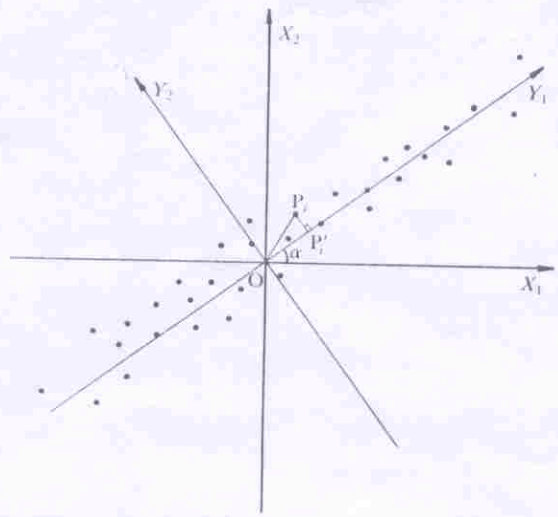


Fig. 2.12 Second sample of heights (x_1) and weights (x_2) of n individuals

En la figura anterior se ilustra un punto típico P_i y su proyección ortogonal sobre el eje Y_1 (denotada por P_i'). De acuerdo con Pearson, para definir la linea OY_1 se puede minimizar $\sum_{i=1}^{n} (P_iP_i')^2$ Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo OPP_i': $(OP_i)^2 = (OP_i')^2 + (P_iP_i')^2$ y sumando sobre todos los puntos P_i, se obtiene. Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{1}{n-1}$, se obtiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (OP_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (OP_i')^2 + \sum_{i=1}^{n} (PP_i')^2\right)\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

Si el miembro izquierdo de la ecuación pitagórica es utilizada para una muestra cualesquiera, independientemente del sistema de coordenadas empleado, podemos seleccionar OY_1 que minimize.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(P_iP_i')^2}{n-1}$$

lo que es equivalente a maximizar

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(OP_i')^2}{n-1}$$

Dado que O es el centroide de los puntos, $\frac{\sum_{i=1}^{n}(OP_i')^2}{n-1}$ es justamente la varianza de la muestra cuando los individuos están dados por las coordenadas en Y_1. Encontrar la línea OY_1 que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones perpendiculares con respecto a ella, es exactamente equivalente a encontrar la línea OY_1 tal que las proyecciones de los puntos con respecto a ella tengan varianza máxima.

Si ahora pensamos en un conjunto de datos de *p=2* dimensiones (dos variables X_1 y X_2), con una matriz asociada (n*p*). Podemos considerar una secuencia de pasos como en el caso anterior. Los datos se modelarían de manera usual en una nube de n puntos en *2* dimensiones, donde el eje OY_1 corresponde a una variable medida Y_1. De aquí se sigue que podemos pensar en una línea OY_1 de manera que cuando los n puntos se proyectan sobre ella se tiene la mayor varianza. Esta secuencia define una nueva variable de la forma

$$Y_i = a_1X_1 + a_2X_2$$

con coeficientes a_i que satisfacen $\sum_{i=1}^{p=2} a_i^2 = 1$ y con la condición de maximizar la varianza de Y_1.

En el caso general si tenemos n puntos con *p* dimensiones $(X_1,...,X_p)$, el proceso puede continuar hasta obtener *p* líneas mutuamente ortogonales OY_i ($i = 1,..., p$). Cada una de estas líneas define una variable

$$Y_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ...+ a_{ip}X_p$$

Donde las constantes a_{ij} están determinadas por la condición de que la varianza de Y_i es máxima. A las variables así obtenidas se les llama Componentes Principales y al proceso de obtenerlas se le llama Análisis de Componentes Principales.

A.3. CONSIDERACIONES MATEMATICAS EN EL ACP

Según Krzanowsky (2000) si el centroide de los puntos se encuentra en el origen de los ejes de coordenadas, el uso del Teorema de Pitágoras muestra que el total de varianza de los puntos S_r^2 en el subespacio definido por las primeras *r* componentes principales, está dada por la suma de las varianzas de los puntos cuando éstos son proyectados en el eje de cada componente.

Ahora bien, el total de la varianza del sistema original S_p^2 es justamente la suma de las varianzas de cada variable X_i, y ésta, es la suma de los elementos de la diagonal en la matriz de varianzas y covarianzas Σ. Esta suma es matemáticamente denotada como la traza de: Σ $tr(\Sigma)$ y la teoría matemática establece que $S_p^2 = tr(\Sigma)$. Esta ecuación es exactamente una reflexión del hecho de que no se a realizado cambio alguno en el sistema original, los componentes principales son simplemente una rotación de la forma de referencia de los puntos, de tal manera que el total de la variabilidad de X_i es igual a la variabilidad de Y_i y que la proporción del total de varianza del sistema que es "explicada" por las primeras *r* Componentes Principales está dada por: $\frac{S_r^2}{tr(\Sigma)}$

A.4. MEDIDA DE LA VARIABILIDAD DE LAS VARIABLES

Siguiendo las consideraciones anteriores, para medir la variabilidad total de las variables bajo estudio Var($X_1, X_2, ..., X_p$) se considera la traza de la matriz Σ de varianzas y covarianzas. Esta matriz es cuadrada (de dimensiones px*p*) y simétrica, de manera que en la diagonal principal se tienen las varianzas ($\sigma_{11}, ..., \sigma_{PP}$)

$$\sigma_{11}....\sigma_{12}..........\sigma_{1p}$$
$$\sigma_{21.}...\sigma_{22}.........\sigma_{2p}$$
$$.$$
$$.$$
$$\sigma_{p1}..................\sigma_{pp}$$

Cada elemento en esta diagonal proporciona una medida de la varianza de cada variable, de manera que:

$$\sigma_{11} = Var(X_1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_1 - \mu_1)^2}{n}, \ldots, \sigma_{pp} = Var(X_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_p - \mu_p)^2}{n}$$

La traza de Σ : $tr(\Sigma)$ se calcula sumando los elementos: $\sigma_{11} + ... + \sigma_{pp}$.

A.5. EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

Los eigenvalores y los eigenvectores son valores y vectores que caracterizan a una matriz cuadrada y satisfacen la igualdad

$$\Sigma w = \lambda w$$

Donde λ es un eigenvalor y w es un eigenvector. Los eigenvalores se obtienen como solución a la ecuación

$$\Sigma - \lambda I = 0$$

Donde I es la matriz identidad. Esta expresión toma la forma de una ecuación polinomial en λ de grado p: $C_1\lambda^{p} + C_2\lambda^{p-1} + ... + C_p\lambda + C_{p+1} = 0$ Las raíces de esta ecuación son los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ de Σ

Puesto que los eigenvalores son números reales, se pueden ordenar en forma descendente $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq .... \geq \lambda_p$. Para cada eigenvalor λ_j existe un eigenvector w_j que satisface la ecuación

$$\Sigma w = \lambda w$$

Propiedades de la suma de los eigenvalores

Los eigenvalores tienen la propiedad de que sumados proporcionan la traza de Σ Según esta propiedad, se tiene

$$tr(\Sigma) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_p$$

De la propiedad anterior se deduce que la variabilidad total de las variables es equivalente a $tr(\Sigma)$.

A.6. PROCEDIMIENTO FORMAL PARA EL CALCULO DE LOS CP

Sea X una variable aleatoria multivariada con dimensión p: $X = X_1, X_2, ..., X_p$ matriz de varianzas y covarianzas Σ, y con eigenvalores ordenados en forma descendente $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ..... \geq \lambda_p$

Los CP son aquellas combinaciones lineales $Y_1, Y_2, ..., Y_p$ no correlacionadas cuyas varianzas son tan grandes como sea posible:

$$Y_1 = a_1'X = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ...+ a_{1p}X_p$$
$$Y_2 = a_2'X = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ...+ a_{2p}X_p$$

$$Y_p = a_p'X = a_{p1}X_1 + a_{p2}X_2 + ...+ a_{pp}X_p$$

Primer CP

$Y_1 = a_1'X$, con $a' = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1p})$ como vector de pesos, de manera que los elementos a_{ij} miden la importancia de las variables en el primer CP y a_1 maximiza a $Var(a_1'X)$ sujeto a $a_1'a_1 = 1$
Es demostrable que el máximo de la varianza de $Y_1 = a_1'X$ entre todos los vectores a_1 que satisfacen $a_1'a_1 = 1$ es igual a λ_1 y por lo tanto, a_1 es el eigenvector de S correspondiente al eigenvalor λ_1

Segundo CP

También se puede demostrar que el valor máximo de la varianza de $Y_2 = a_2'X$ entre todas las combinaciones lineales que satisfacen a $a_2'a_2 = 1$ y que no están correlacionadas con $Y_1 = a_1'X$ es igual a λ_2 Por lo tanto a_2 es el eigenvector de S correspondiente al eigenvalor λ_2:

El caso general

De manera general, el valor máximo de la varianza $Y_k = a_k'X$ entre todas las combinaciones lineales que satisfacen $a_k'a_k = 1$ y que no están correlacionadas con $Y_1, Y_2, ..., Y_{k-1}$ es igual a λ_k. Por lo tanto, a_k es el eigenvector de S correspondiente al eigenvalor λ_k

De acuerdo con esto, la varianza del conjunto de los CP: $Var(Y_1 + Y_2 + ...+ Y_k)$ es igual a la varianza del conjunto original de variables: si llamamos λ_i a la varianza de Y_i, se tiene $Var(Y_i) = \lambda_i$, con $i = 1, ..., p$, o sea $Var(Y_1 + Y_2 + ...+ Y_k) = \lambda_1 + \lambda_2 + ...+ \lambda_k)$

Proporción de varianza explicada por cada CP
La proporción de la variabilidad explicada por la k-ésima CP, es: $\dfrac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + ...+ \lambda_k}$
con $k = 1, ..., p$

A.7. NUMERO DE CP

Existen técnicas para evaluar qué tan bien ajusta a los datos el modelo con un número particular de componentes, muchas de estas técnicas son procedimientos que se basan más en la experiencia y en la intuición. Algunas de estas técnicas son:

1. Si nos basamos en la matriz de correlación, es quedarse con los componentes asociados a los eigenvalores mayores a 1.
2. La prueba con la gráfica de codo (gráfica Scree): se grafican los eigenvalores vs el número de componentes (nos quedamos donde se presente el cambio más significativo).
3. La prueba "ji-cuadrada" (sólo para muestras grandes).

Según Nieto (2005) el número de CP que de alguna forma pudieran reemplazar a las variables originales ($X_1, X_2, ...X_p$), sin mucha pérdida de información depende del problema en particular. Una forma de decidir el número de CP significativos es graficando la varianza contra el número de variables. Cuando las barras tienden a nivelarse, estos CP están cercanos a cero y se pueden ignorar.

A.8. ALGORITMO PARA EL CALCULO DE COMPONENTES PRINCIPALES

A continuación se proporcionan los pasos seguidos para conocer los componentes principales:

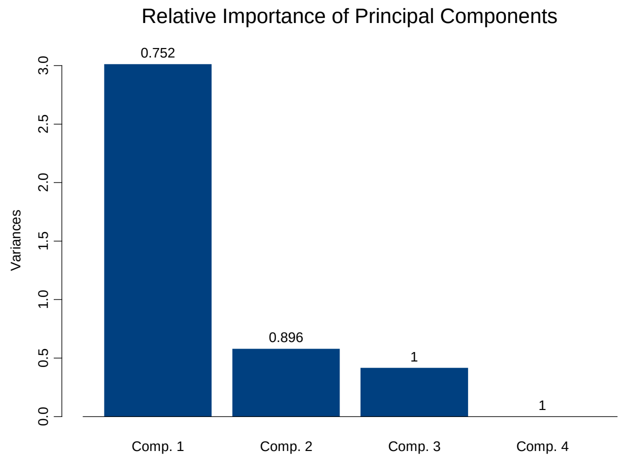
1. Se parte de los resultados de las pruebas, considerando que son p=4 variables: Conocimiento (X_1), Reversibilidad (X_2), Generalización (X_3), Flexibilidad (X_4) y n=37 individuos.

2. Se calcula la matriz de correlaciones (considerando que si no hay correlación entre las variables, no tiene sentido usar el ACP).

Matriz de correlaciones

	Flexibilidad	Generalización	Reversibilidad	Conocimiento
Flexibilidad	1.000			
Generalización	0.634	1.000		
Reversibilidad	0.630	0.423	1.000	
Conocimiento	0.399	0.538	0.292	1.000

3. Se determinan los CP (usando los resultados proporcionados por el paquete estadístico S-Plus).



En el eje vertical de la gráfica se tienen los eigenvalores. A cada eigenvalor le corresponde una proporción de varianza explicada. Estos resultados se ilustran en la siguiente tabla:

Componente	Eigenvalor	Proporción de varianza explicada
Y_1	$l_1 = 3.008$	75.2%
Y_2	$l_2 = 0.577$	14.43%
Y_3	$l_3 = 0.414$	10.35%
Y_4	$l_4 = 0$	0%

Importancia de los componentes:

	Comp. 1	Comp. 2	Comp. 3	Comp. 4
Desviación estándar	1.7345085	0.7598171	0.6435513	0
Proporción de Varianza	0.7521299	0.1443305	0.1035396	0
Proporción acumulada	0.7521299	0.8964604	1.0000000	1

De acuerdo con la gráfica y tablas anteriores, solamente hay un eigenvalor mayor a 1 $(1.734)^2 = 3.008$, por lo que se decide que un componente explica la mayor variabilidad entre las variables.

4 Este CP es:

$$Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = 0.437X_1 + 0.474X_2 + 0.532X_3 + 0.550X_4$$

Donde los valores a_{1j} representan los pesos de cada variable (X_p) en este componente (Y_1) y satisfacen la condición

$$(a_{11})^2 + (a_{12})^2 + (a_{13})^2 + (a_{14})^2 = (0.437)^2 + (0.474)^2 + (0.532)^2 + (0.550)^2 = 1$$

Los pesos de las variables en los componentes se presentan a continuación (usando la salida del paquete estadístico S-Plus):

Variables	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1: Conocimiento	$a_{11} = 0.437$	$a_{21} = -0.706$	$a_{31} = 0.537$	$a_{41} = 0.152$
X_2: Reversibilidad	$a_{12} = 0.474$	$a_{22} = 0.598$	$a_{32} = -0.512$	$a_{42} = -0.394$
X_3: Generalización	$a_{13} = 0.532$	$a_{23} = -0.249$	$a_{33} = -0.610$	$a_{43} = -0.532$
X_4: Flexibilidad	$a_{14} = 0.550$	$a_{24} = 0.286$	$a_{34} = -0.278$	$a_{44} = 0.734$

5. La proporción de variabilidad explicada por este componente, se determina como sigue:

$$Var(Y_1) = \frac{(1.7345085)^2}{4} = \frac{3.008}{4} = 0.752$$

O de manera equivalente:

1. Primero se calculan los coeficientes de correlación (r_{1j}) entre Y_1 y las 4 variables (multiplicando la carga de la variable en este componente por su desviación estándar)

Variables	$a_{1j} = \sqrt{l_{1j}} = r_{1j}$
X_1: Conocimiento	$(a_{11})(\sqrt{3.008}) = (0.437)(1.734) = 0.758$
X_2: Reversibilidad	$(a_{12})(\sqrt{3.008}) = (0.474)(1.734) = 0.822$
X_3: Generalización	$(a_{13})(\sqrt{3.008}) = (0.532)(1.734) = 0.922$
X_4: Flexibilidad	$(a_{14})(\sqrt{3.008}) = (0.550)(1.734) = 0.954$

2. En segundo lugar, se determina la suma de los cuadrados de estos coeficientes y se divide entre el número total de variables:

$$Var(Y_1) = \frac{(0.758)^2 + (0.822)^2 + (0.922)^2 + (0.954)^2}{4} = \frac{3.008}{4} = 0.752$$

Los resultados anteriores se pueden usar en análisis subsecuentes como una manera de reducir la dimensionalidad del problema, por ejemplo, en Análisis de Factores.