



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO  
INSTITUTO DE FÍSICA

PROPAGACIÓN DE UNA ONDA  
ELECTROMAGNÉTICA  
EN UN CRISTAL LÍQUIDO FLUCTUANTE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN FÍSICA

PRESENTA

JORGE VELÁZQUEZ CASTRO

Asesor: Dr. Rosalío F. Rodríguez Zepeda

Mayo de 2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Cristales Líquidos</b>	<b>5</b>
1.1. Generalidades .....	5
1.2. Composición Química .....	6
1.3. Clasificación .....	8
1.3.1. Nemáticos .....	9
1.3.2. Colestéricos .....	10
1.3.3. Esméticos .....	10
1.4. Descripción Mesosocópica .....	12
1.5. Ecuaciones Hidrodinámicas .....	13
1.6. Campos externos en un nemático .....	15
1.6.1. Efectos de Campo Magnético estático .....	15
1.6.2. Efectos del Campo Eléctrico .....	17
<b>2. Modelo</b>	<b>18</b>
2.1. El Arreglo .....	18
2.2. Energía Libre de Helmholtz .....	18
2.3. Ecuaciones Generales .....	20
2.4. Modos Transversos .....	21
2.5. Ecuaciones del Modelo Determinista .....	22
2.6. Modelo Fluctuante .....	23
<b>3. Métodos Estocásticos</b>	<b>25</b>
3.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas .....	25
3.2. Generalidades .....	27
3.3. Comparación entre Métodos .....	27
3.3.1. Tratamiento Heurístico de Ecuaciones multiplicativas ....	28

3.3.2. Aproximación Difusiva para Procesos Estocásticos no Lineales .....	34
3.3.3. Aplicación del método de van Kampen al oscilador armónico con frecuencia fluctuante .....	36
3.3.4. Ecuación para la función de distribución para una onda electromagnética en un medio con permitividad eléctrica fluctuante .....	39
3.3.5. Función de distribución en la Aproximación Difusiva .....	41
<b>4. Tratamiento Estocástico del Modelo</b>	<b>45</b>
4.1. La Expansión Sistemática .....	45
4.1.1. Análisis de la Expansión Sistemática .....	48
4.2. Aproximación Paraxial no Vectorial .....	53
4.2.1. Propagación de una Onda Monocromática .....	54
4.3. Aproximación Paraxial Vectorial .....	57
<b>5. Resultados</b>	<b>64</b>
<b>6. Discusión</b>	<b>67</b>
Bibliografía	69

# Resumen

Se construye un modelo para describir la propagación de una onda electromagnética plana en una celda que contiene un nemático cuyo tensor dieléctrico es aleatorio. De las ecuaciones hidrodinámicas del nemático y de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, se obtiene una ecuación de Fokker-Planck (FP) para la distribución espacial de probabilidad del modo normal transversal de una onda electromagnética. La ecuación FP es obtenida por medio de dos métodos distintos: el método de la aproximación difusiva utilizado por Klyatskin [1] y el método descrito por van Kampen [2]. Se hace una comparación entre ambos métodos y se elige uno para el estudio posterior. La ecuación FP resultante es no lineal y para resolverla se utiliza el desarrollo sistemático de van Kampen para obtener la función de autocorrelación de las fluctuaciones así como su espectro. Se emplea la aproximación paraxial para obtener el promedio de la amplitud y calcular la función de coherencia de la onda conforme se propaga en el nemático fluctuante.

# Introducción

## Propagación de ondas en fluidos anisótropos

En años recientes se ha prestado mucha atención a los cristales líquidos debido a los variados fenómenos ópticos no lineales que presentan. Uno de éstos es, por ejemplo, la transición de Freedericksz óptica (TFO), que fue observada por primera vez en 1980 [3, 4, 5]. Este fenómeno esencialmente consiste en la reorientación de las moléculas de un cristal líquido inducida por un haz láser polarizado linealmente que incide sobre la muestra. Tanto el láser como la fuerzas elásticas producidas por el mismo medio, ejercen torcas sobre las moléculas del nemático. Cuando la intensidad del campo óptico sobrepasa cierto valor crítico, las torcas eléctricas vencen a las elásticas y las moléculas del nemático se alinean, en promedio, en la dirección del campo eléctrico. Este fenómeno y otros como el autoenfocamiento o la generación de segundos armónicos, se han estudiado ampliamente en la literatura debido a su gran importancia tecnológica [6]. Debido a las propiedades ópticas de los nemáticos, se les emplea en el diseño y construcción de dispositivos electro-ópticos que se utilizan para aplicaciones diversas, tanto en comunicaciones como en tecnología digital de computadoras. Algunos ejemplos de estos dispositivos son los interruptores ópticos[7], moduladores de fase[8], selectores de modos transversos[9, 10].

En particular, recientemente se ha estudiado la capacidad de los nemáticos de producir un efecto de guía de onda en fibras ópticas con núcleos líquido-cristalinos [11, 12, 13]. El mecanismo básico se debe a las propiedades fotorrefractivas del cristal líquido para producir dicho efecto, sin tener que acudir al mecanismo usual basado en la reflexión total interna. Por ejemplo, Palffy et al. [14, 15, 16] calcularon numéricamente, la amplitud y la fase de algunos modos transversos de un modelo de guía de onda para una geometría cilíndrica en donde se analiza, principalmente, la configuración orientacional del cristal líquido y su dependencia con un parámetro de orden en su fase nemática.

Por otro lado, también se ha hecho investigación concerniente al análisis de diversas guías de onda no lineales cuyos núcleos son cristales líquidos,

pero sólo en sus fases isotrópicas[17, 18, 19]. Se han hecho cálculos numéricos [20] y análisis teóricos [21] de algunos modos transversos en guías de onda planares con núcleos líquido-cristalinos en fase nemática y con condiciones de frontera mixtas[32].

Es importante señalar que el análisis en los trabajos mencionados es totalmente determinista, es decir, no toma en cuenta las posibles fluctuaciones en diversas propiedades físicas del nemático. Estas fluctuaciones se pueden presentar por diversas causas, como son, diferencias de temperatura en el cristal líquido a lo largo de la trayectoria de propagación de la onda, o diferencias de presión que pueden ser inducidas por medios controlados o por factores externos fuera de control. Tampoco se tomaron en cuenta las fluctuaciones térmicas en el efecto de guía de onda, aunque sí se han discutido en otro contexto [23, 24, 25, 28]. Las fluctuaciones pueden llegar a influir de manera importante en el comportamiento de propagación de ondas en un nemático y en el efecto de guía de onda mismo. Como se muestra en un caso particular en este trabajo.

## Objetivo

El interés que presenta este problema es debido, principalmente, al gran número de problemas prácticos que han surgido en los últimos cincuenta años y que continúan surgiendo [30]. Estos problemas se presentan en diversas ramas de la física, como son la física de radiaciones, acústica, óptica y física de plasmas. Sus aplicaciones prácticas van, entre otros, desde la dispersión de luz en la atmósfera y el paso de radiación a través de la atmósfera de las estrellas y los planetas; reflexión difusa de las ondas de radio en la ionosfera; dispersión de sonido y ultrasonido en el mar, hasta la propagación de haces láser en el aire y otros fluidos. Como es de esperarse, la gran cantidad de problemas ha estimulado el desarrollo y refinamiento de métodos estocásticos para describir la propagación de ondas en medios aleatoriamente inhomogéneos o que atraviesan una capa de tal medio.

El objetivo esencial de esta tesis, es analizar la propagación de ondas electromagnéticas en un nemático tomando en cuenta la presencia de fluctuaciones en el tensor dieléctrico del medio. A partir del análisis de cómo afectan éstas fluctuaciones a la propagación de una onda electromagnética en el cristal líquido, se podrá determinar qué tipo de fluctuaciones y de qué escala espacial son las más importantes y, por lo tanto, las que habría

que tomar principalmente en cuenta en el diseño de dispositivos, entre ellos las guías de onda con núcleos líquido-cristalinos. Adicionalmente, estas fluctuaciones, que son pequeñas cerca de estados de equilibrio termodinámico, pueden crecer y ser dominantes en la dinámica del sistema cuando ésta se encuentra cerca de un estado inestable como la TFO.

Nuestro estudio lo haremos a nivel de medios continuos con fluctuaciones, es decir, a un nivel mesoscópico. Esto es, no trataremos casos en donde haya reflexión por superficies aleatorias ni dispersión por incrustaciones discretas dentro del nemático, como dispersantes artificiales, burbujas, etc..

## Metodología y estructura de la tesis

Para lograr el objetivo anterior, la tesis se ha dividido en 6 capítulos. El primer capítulo describe someramente las propiedades de los cristales líquidos en general, así como las ecuaciones hidrodinámicas y la electrodinámica en un medio anisótropo. En el capítulo 2 se describe la geometría del sistema que se estudiará y se obtienen las ecuaciones del campo electromagnético para nuestro sistema en particular. En estas ecuaciones se propone un coeficiente fluctuante para modelar el ruido externo que puede tener diversos orígenes. Es decir, nos enfocaremos a estudiar el efecto de ruido en el vector director de un nemático sin importar el origen y por lo tanto las estadísticas específicas. Este ruido puede ser generado por perturbadores externos, como un campo eléctrico fluctuante, ya sea inducido o generado por el ambiente que rodea al nemático [31]. En el capítulo 3 se describen y comparan dos métodos para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas, a saber, la aproximación difusiva [1] y el método de desarrollo en un parámetro que mide la intensidad de las fluctuaciones introducido por van Kampen en [2]. Se hace un análisis de las características de ambos métodos y se decide el que se usará en el resto del trabajo. En el capítulo 4 se construye un modelo específico del sistema y se obtiene una ecuación de Fokker-Planck para el mismo. Se muestra que sólo los modos transversos magnéticos (T.M.) se acoplan con la dinámica del nemático y, por lo tanto, que son los únicos que afectan la reorientación de las moléculas que forman el nemático. Debido al carácter no lineal de la ecuación, se hace a continuación un desarrollo sistemático de dicha ecuación para resolverla y poder analizar las fluctuaciones. Se obtiene la función de autocorrelación, así como el espectro de fluctuaciones de los modos TM. En este mismo capítulo se emplea la aproximación paraxial para calcular la



función de coherencia del haz de luz dentro de una celda nemática. En el capítulo 5 se grafican y analizan las propiedades calculadas. Finalmente, el capítulo 6 discute críticamente las ventajas y limitaciones de los métodos y resultados obtenidos en este trabajo.

## **Importancia del trabajo**

Es importante señalar que este análisis permite calcular cantidades físicas, como la función de coherencia, que son susceptibles de ser medidas. En este sentido, se encontraron resultados originales y de los cuales actualmente hay muy poca literatura disponible sobre cristales líquidos fluctuantes. Desafortunadamente, en la actualidad no conocemos resultados experimentales específicos con los cuales comparar nuestras predicciones teóricas. Actualmente, los cristales líquidos han tomado una importancia indiscutible en la tecnología. Por lo anterior, este trabajo es un punto de partida para el estudio de los cristales líquidos en dispositivos electrónicos afectados por el ruido siempre presente en estos dispositivos.

# Capítulo 1

## Cristales Líquidos

En este capítulo se describen las características generales de los cristales líquidos, clasificación y los efectos que sobre éstos producen agentes externos como son, las fronteras que los confinan y diversos tipos de campos externos, eléctricos y magnéticos estáticos, así como campos ópticos. Finalmente, se describirá brevemente el efecto de reorientación producido por estos campos sobre las moléculas del cristal líquido.

### 1.1. Generalidades

Para entender el concepto de cristal líquido es necesario hacer referencia a algunos aspectos relativos a la estructura microscópica de los sólidos cristalinos y de los líquidos isotrópos.

En un cristal sólido compuesto por moléculas isotrópas, los centros de masa de las moléculas están anclados a un arreglo periódico tridimensional presentando orden posicional de largo alcance. Esto se manifiesta en el patrón de difracción de rayos X, que presenta picos de intensidad de difracción bien definidos [26]. Por el contrario, en el líquido isotrópo, los centros de masa de las moléculas están distribuidos aleatoriamente, por lo que sólo existe orden posicional de corto alcance y, en consecuencia, su patrón de difracción no presenta máximos de intensidad [27].

Si los sólidos cristalinos estuvieran compuestos por moléculas anisótropas, entonces la estructura molecular presentaría dos tipos de orden de largo alcance: posicional y orientacional.

Para estas sustancias, ambos tipos de orden desaparecen en el punto de

fusión de la transición sólido cristalino-líquido isotrópico. Sin embargo, existen algunos compuestos orgánicos que presentan fases intermedias en las que el orden posicional permanece, mientras que el orden orientacional se reduce o desaparece. Cuando esto ocurre estas sustancias reciben el nombre de *plásticos cristalinos*. En el caso inverso, cuando el orden orientacional se conserva y el orden posicional se reduce o desaparece, entonces las sustancias reciben el nombre de *cristales líquidos* o *compuestos mesogénicos* y las fases intermedias son conocidas como *mesofases* o *fases líquido-cristalinas* [34, 35, 36, 37].

Así pues, los compuestos mesogénicos son sustancias orgánicas constituidas por moléculas altamente anisótropas, en donde la transición del estado sólido al estado líquido, pasa por una o más fases termodinámicas bien diferenciadas, presentando orden orientacional a largo alcance, así como diversos grados de orden posicional el cual dependerá de las características químicas de las moléculas [36] (fig 1.1).

Las propiedades mecánicas de estas mesofases son semejantes a las de un líquido convencional debido a que los centros de masa de las moléculas no están fijos espacialmente y por tanto fluyen. Por otro lado, al existir orden orientacional de largo alcance, estas sustancias tienen propiedades anisótropas semejantes a aquellas de cristales sólidos, como la anisotropía en la permitividad eléctrica y en la susceptibilidad magnética, manifestándose principalmente en propiedades ópticas anisótropas como la birrefringencia [31, 34, 36, 38].

## 1.2. Composición Química

Las unidades estructurales que constituyen un cristal líquido son moléculas geoméricamente anisótropas con una parte rígida polarizable. La forma geométrica más común, es alargada como una “varilla” (calamíticas) o planas en forma de discos (discóticas) [10] (fig 1.2).

Estas unidades pueden constituirse por moléculas orgánicas pequeñas o largas, así como por estructuras moleculares complejas. Las *moléculas orgánicas pequeñas* son calamíticas, sus dimensiones son, típicamente, de unos 20 Å de longitud por 5 Å de ancho. Ejemplos típicos son: el azoxianisol-p (PAA) y la butilanilina-p (MBBA). Las *moléculas largas* existen en forma natural (DNA, virus mosaico del tabaco) o se obtienen artificialmente por medio de fibras plásticas flotando en agua, así como polipéptidos sintéticos disueltos

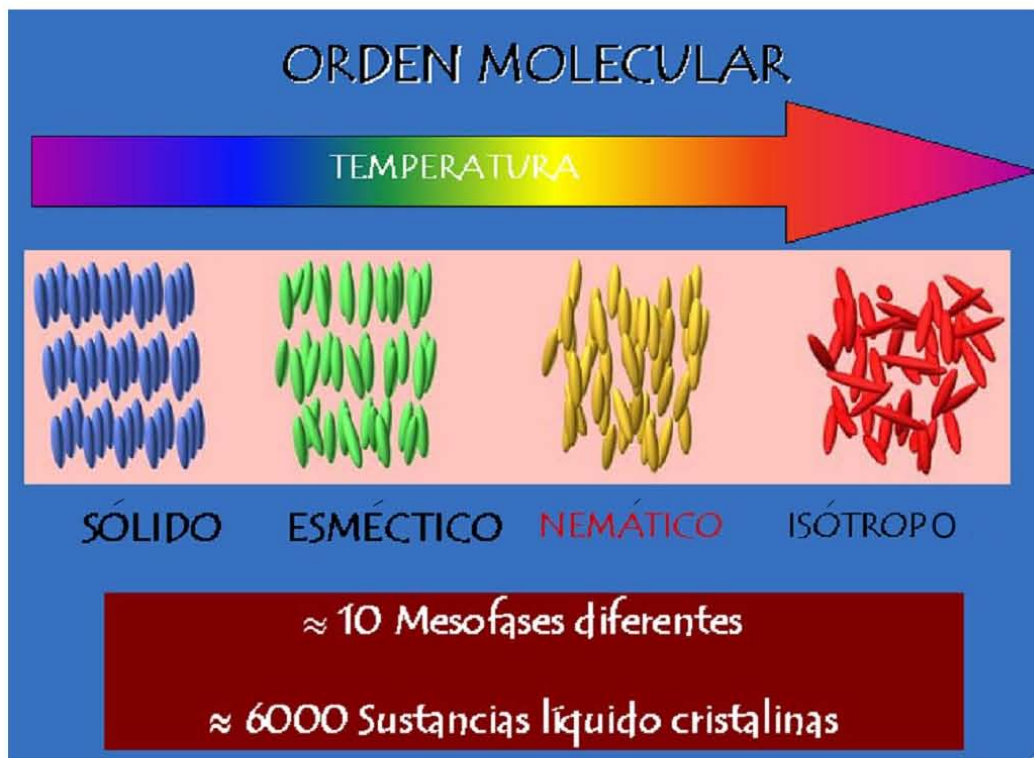


Figura 1.1: Diversas mesofases en cristales líquidos termotrópicos. Conforme la temperatura aumenta el orden posicional desaparece dando lugar a una o más mesofases. Aquí se muestra la fase esméctica A y la nemática. Nótese que la fase esméctica presenta un grado mayor de orden posicional que la nemática.

en ciertos solventes. Las dimensiones para estas moléculas, que también son calamíticas, pueden variar desde unos 300 Å de largo por 20 Å de ancho para los polipéptidos sintéticos, hasta 3000 Å de largo por 200 Å de ancho para el virus mosaico del tabaco.

En este trabajo sólo se consideran cristales líquidos compuestos por moléculas orgánicas pequeñas y que presentan una mesofase específica, la fase nemática, que se discute con más detalle en la siguiente sección.

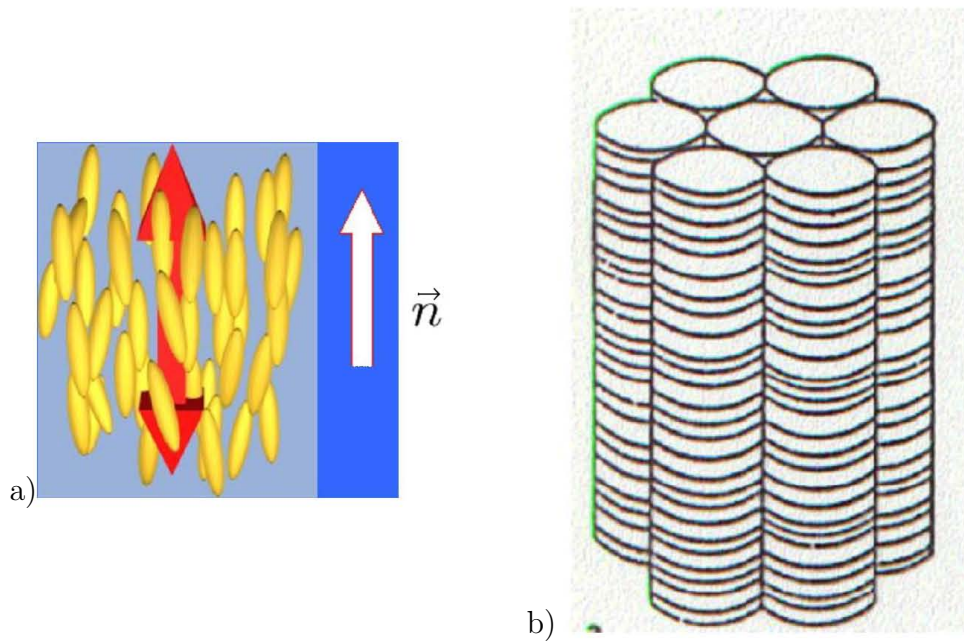


Figura 1.2: Estructura de las moléculas mesogénicas. a) Calamíticas, b)Discóticas. El vector  $\vec{n}$  indica la orientación promedio de los ejes largos de las moléculas.

### 1.3. Clasificación

Existen dos grupos principales de cristales líquidos que se caracterizan por la variación de ciertos parámetros físicos que inducen las transiciones de una mesofase a otra. Estos son:

**Cristales líquidos liotrópicos** formados por moléculas de alto peso molecular (por ejemplo, compuestos anfifílicos, DNA), cuya transición se induce por cambios en la concentración del solvente en el cual se encuentran disueltas.

**Cristales líquidos termotrópicos** constituídos por moléculas de bajo peso molecular  $\sim 10^5$ , en donde la transición se efectúa mediante cambios en la temperatura.

A su vez, los cristales líquidos termotrópicos se clasifican estructuralmente [40] en tres mesofases principales: *Nemáticos*, *Colestéricos* y *Esméticos*.

### 1.3.1. Nemáticos

En la figura 1.3 se representa esquemáticamente el orden estructural de los cristales líquidos nemáticos.

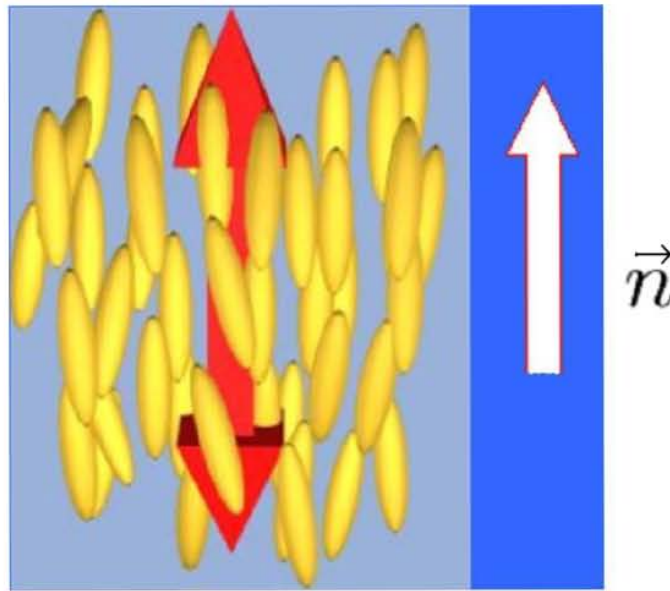


Figura 1.3: Arreglo estructural de las moléculas en un nemático. El vector  $\vec{n}$  indica la dirección preferencial de alineación espontánea de las moléculas.

Como se puede apreciar en la figura 1.3, las moléculas de esta mesofase se encuentran distribuidas aleatoriamente como en un líquido isotrópico, por lo que no existe orden posicional a largo alcance. Esto trae como consecuencia que las propiedades de transporte como la viscosidad sea muy parecida a la de un líquido isotrópico ( $\sim 10^{-2}$ poise).

Ya que los ejes largos de las moléculas son mutuamente paralelos, fijan una dirección macroscópica preferencial. Dicha dirección se describe por un vector unitario  $\vec{n}$  que indica la orientación promedio de alineación de las moléculas.

La polarización a lo largo de  $\vec{n}$  es nula, debido a que el número de moléculas con momento dipolar permanente en una dirección, es igual al número de moléculas con momento dipolar permanente en dirección opuesta, por lo que los estados  $\vec{n}$  y  $-\vec{n}$  son indistinguibles en ausencia de algún campo externo.

Las características ópticas de esta mesofase corresponden a las de un medio uniaxial con eje óptico paralelo al vector  $\vec{n}$ , alrededor del cual existe

simetría rotacional. Esto se refleja notablemente en las propiedades ópticas como la birrefringencia.

Cabe señalar que el tipo de moléculas que constituyen esta fase generalmente son ópticamente inactivas y tienen simetría de espejo (aquirales); aunque el nemático puede estar constituido por un sistema de moléculas ópticamente activas (moléculas quirales) en donde se tiene la misma cantidad de moléculas izquierdas y derechas [39].

El nemático puede tener condiciones a la frontera de tal forma que el director sea perpendicular a la superficie que lo confina, a esta configuración se le llama homeotrópica. Y cuando el director es paralelo a la superficie que lo confina se le llama que esta en una configuración planar.

### 1.3.2. Colestéricos

La mesofase colestérica es un caso particular de la fase nemática formada por moléculas ópticamente activas en las que existe un número mayor de moléculas izquierdas o derechas (quirales).

El orden orientacional se preserva, pero ahora,  $\vec{n}$  varía espacialmente de tal forma que adquiere una estructura helicoidal, como se muestra en la figura (1.4).

Para esta conformación, cada plano perpendicular al eje de la hélice contiene moléculas que presentan el mismo orden orientacional y posicional que la fase nemática, pero la dirección preferencial gira ligeramente en los planos adyacentes. Para este caso el vector director  $\vec{n}$  se describe en términos del ángulo de rotación  $\phi$ , que es función de la distancia sobre el eje de la hélice. Al tomar el eje de la hélice a lo largo del eje  $z$ ,  $\vec{n}$  se escribe como

$$n_x = \cos(pz + \varphi), \quad n_y = \sin(pz + \varphi), \quad n_z = 0.$$

La estructura helicoidal es entonces periódica a lo largo del eje de la hélice. Si  $p$  es la distancia en la que  $\vec{n}$  describe una rotación completa, entonces el período es  $\frac{p}{2}$ , debido a que los estados  $\vec{n}$  y  $-\vec{n}$  son equivalentes e indistinguibles. A  $p$  se le conoce como el *paso* de la hélice.

Esta estructura helicoidal da lugar a fenómenos ópticos muy interesantes, por ejemplo, la actividad óptica que presentan los colestéricos. En la que el poder rotatorio es miles de veces mayor que el de las sustancias ópticamente activas ordinarias (por ejemplo, la glucosa). Además, el paso de la hélice puede variar por la acción de agentes externos como la temperatura o la

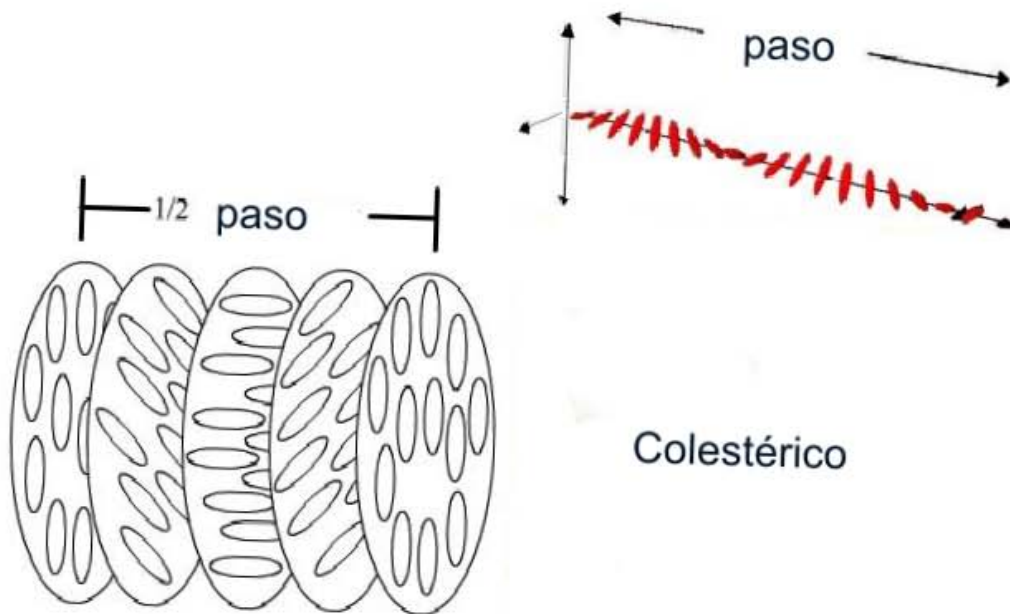


Figura 1.4: Arreglo estructural de las moléculas en la fase colestérica.

presión. Esto se manifiesta a simple vista ya que el paso es del orden de la longitud de onda en el visible, por lo que estas variaciones producen cambios en la coloración o en la textura del cristal líquido [34]

### 1.3.3. Esmécticos

Esta mesofase es la más ordenada de todas. Se caracteriza por presentar al menos orden posicional en una dimensión, por lo que las moléculas forman capas bidimensionales que pueden deslizarse una sobre la otra y dentro de las cuales el orden posicional de las moléculas puede ser nulo como en el caso de los nemáticos (fase A y C), o inclusive pueden ordenarse en estructuras hexagonales (fase B), fig(1.5).

El espaciamiento  $d$  entre cada capa está bien definido y puede obtenerse a partir del espectro de difracción de rayos X. La dirección de orientación de las moléculas puede ser perpendicular al plano de las capas o, en su defecto, formar un cierto ángulo con las capas. En el primer caso se tiene un compuesto uniaxial (fase A) y para el segundo se tendrá un medio con características de medio biaxial (fase C) fig(1.6), aunque la desviación respecto a la uniaxialidad



es, en general, pequeña.

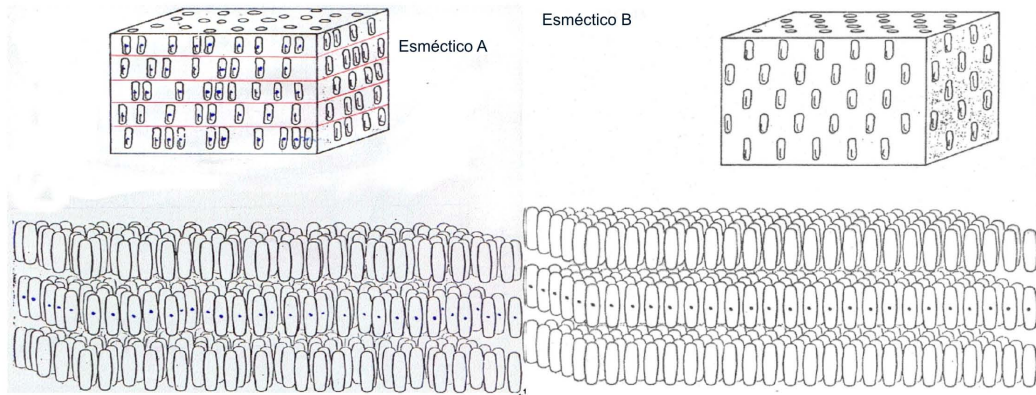


Figura 1.5: Arreglo estructural de las moléculas en el esméctico. a) Fase A, b) Fase B. En esta última las moléculas están ordenadas en cada capa en una estructura hexagonal.

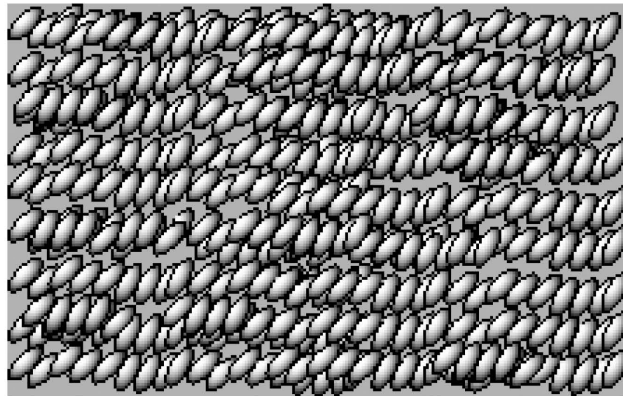


Figura 1.6: Esmético fase C.

## 1.4. Descripción Mesoscópica

Existen diversos niveles de descripción teórica de los cristales líquidos nemáticos [34, 41, 42, 43, 44]. En particular, esta descripción puede hacerse fenomenológicamente como lo hace de Gennes [34], o a un nivel microscópico utilizando el formalismo de Maier-Saupe [43].

En este trabajo se adopta el formalismo de de Gennes, en el que se considera al cristal líquido como un medio continuo. En efecto, la conformación ideal de un nemático, esto es, el estado de mínima energía, supone que todas las moléculas están alineadas a lo largo de una cierta dirección común  $\vec{n}$ , la cual no presenta variaciones espaciales. Sin embargo, esta configuración no es compatible con las constricciones que imponen agentes externos, como las fronteras que confinan al nemático o los campos externos que interactúan con él, ya que estos producen distorsiones en el estado de alineación de las moléculas elevando la energía. Por estas razones, en general  $\vec{n}$  presenta variaciones espaciales, convirtiéndose en una función de punto.

Las observaciones experimentales muestran que la magnitud de las distorsiones ( $l > \mu m$ ) son mucho mayores que las dimensiones moleculares ( $a \sim 20\text{\AA}$ ), por lo que es posible describir al sistema como un medio continuo en el cual se ignoran los detalles de la estructura molecular. Así, las distorsiones se describen por medio de un campo vectorial  $\vec{n}(\vec{r})$ , de magnitud unitaria,  $n^2 = 1$ , que describe la orientación promedio de los ejes largos de las moléculas que constituyen el cristal líquido. Si además se supone que las variaciones de  $\vec{n}$  son pequeñas en una escala macroscópica y lentas comparadas con tiempos moleculares típicos, entonces  $\vec{n}(\vec{r}, t)$  será una variable hidrodinámica local.

De esta forma, la deducción de las ecuaciones hidrodinámicas del cristal líquido puede realizarse a partir de la termodinámica irreversible lineal, en donde las distorsiones inducidas por las fronteras o por los campos externos se visualizan como procesos irreversibles e isotérmicos lineales.

Con la interpretación anterior y bajo la hipótesis de equilibrio local, es posible construir un potencial termodinámico, como la energía libre de Helmholtz, a partir de la cual se puede construir una descripción dinámica.

## 1.5. Ecuaciones Hidrodinámicas

Como primer paso, es necesario obtener la forma explícita de la funcional de energía libre de Helmholtz para las distorsiones elásticas que presenta el nemático.

Si se considera un sistema ligeramente distorsionado ( $a/l \ll 1$ ), en el cual el estado de distorsión local está descrito por  $\vec{n}(\vec{r})$  y sus gradientes, entonces bajo las siguientes suposiciones es posible obtener la forma explícita de la energía libre de Helmholtz asociada  $F_d$ :

1. Las variaciones de  $\vec{n}$  son lentas a escala molecular, i.e.,  $a\nabla\vec{n} \ll 1$ , donde  $a$  es una dimensión molecular típica.
2. Las únicas fuerzas intermoleculares de importancia son de corto alcance.

Con estas hipótesis se desarrolla a la energía libre de distorsión  $F_d$  como una serie de potencias en los gradientes de  $\vec{n}(\vec{r})$ , en la cual sólo se considerarán hasta términos de orden dos. Para construir dicho desarrollo es necesario considerar que [45]:

1.  $F_d$  debe ser par en  $\vec{n}$ , ya que los estados  $\vec{n}$  y  $-\vec{n}$  son indistinguibles (simetría nemática).
2. Los términos lineales en  $\nabla\vec{n}$  no se consideran, ya que  $F_d$  debe ser invariante ante rotaciones del cuerpo rígido.
3. Los términos en  $F_d$  que tienen la forma  $\vec{\nabla} \cdot \vec{n}$ , contribuyen a la densidad de energía superficial cuando se integran. En este trabajo los descartaremos porque consideraremos las condiciones de frontera dadas.

Al tomar en cuenta las tres consideraciones anteriores, notamos que  $F_d$  sólo contendrá términos de orden  $(\nabla\vec{n})^2$ , ya que cumple con las tres condiciones anteriores, siendo  $(div\vec{n})^2$ ,  $(\vec{n} \cdot rot\vec{n})^2$ ,  $(\vec{n} \times rot\vec{n})^2$  los únicos términos que satisfacen las condiciones mencionadas arriba. De esta forma la densidad de energía de distorsión elástica, también llamada energía de Frank [45], es

$$F_d = \int_V f_d d\vec{r}, \quad (1.1)$$

donde  $V$  es el volumen ocupado por el nemático y  $f_d$  está dada por

$$f_d = \frac{1}{2}K_1(div\vec{n})^2 + \frac{1}{2}K_2(\vec{n} \cdot rot\vec{n})^2 + \frac{1}{2}K_3(\vec{n} \times rot\vec{n})^2. \quad (1.2)$$

Esta es la fórmula fundamental en la teoría del continuo para un nemático. Las constantes elásticas  $K_i$  son positivas y con un valor del orden de  $10^{-7}$  dinas. Cada término en la ecuación anterior está asociada a los tres tipos fundamentales de distorsiones elásticas en un cristal líquido. Las tres constantes elásticas  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  están asociadas con las deformaciones *splay*, *twist* y *bend* respectivamente (Fig. 1.7). Así, los términos en la ec.(1.2) están asociados con la energía libre debido a cada una de las deformaciones.

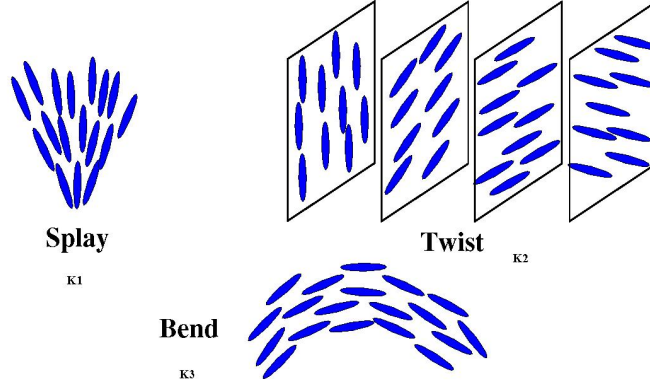


Figura 1.7: Deformaciones en un cristal líquido

En muchos casos es usual hacer la aproximación de constantes elásticas iguales,

$$K_1 = K_2 = K_3 = K, \quad (1.3)$$

de tal forma que la ec. (1.2) se reduce entonces a

$$f_d = \frac{1}{2}K\{(div\vec{n})^2 + (rot\vec{n})^2\} \quad (1.4)$$

## 1.6. Campos externos en un nemático

En esta sección se analizara brevemente los efectos de los campos magnético y eléctrico en la energía libre de un nemático.

### 1.6.1. Efectos de campo magnético estático

Cuando las moléculas que constituyen un nemático son orgánicas, éstas son también diamagnéticas. Éste diamagnetismo es mas intenso cuando hay anillos de benceno en las moléculas. El vector  $\vec{n}$  generalmente se encuentra en el plano de estos anillos. Los anillos generan una corriente al sentir la presencia de un campo magnético  $\vec{H}$  normal a su plano, de tal forma que el flujo magnético a través de ellos se reduzca, lo que implica que la energía del sistema aumenta. Por otro lado, si  $\vec{H}$  es paralelo a los anillos, no existe flujo

alguno a través de ellos y , por tanto, no se induce ninguna corriente, por lo que la energía del sistema se mantiene inalterada.

El efecto del campo magnético sobre las moléculas de cristal líquido es inducir una torca, de tal forma que las moléculas tiendan a alinearse en una dirección en la cual  $\vec{H}$  esté contenido en el plano de los anillos y por tanto la energía sea mínima.

Las moléculas típicas de nemático contienen al vector director  $\vec{n}$  en el plano de los anillos, minimizándose la energía cuando  $\vec{n}$ , que coincide con el eje óptico, es paralelo al campo  $\vec{H}$ .

La magnetización  $\vec{M}$  inducida por el campo magnético estático  $\vec{H}$ , para medios anisótropos está dada por

$$\vec{M} = \vec{\chi} \cdot \vec{H},$$

donde  $\vec{\chi}$  es el tensor de susceptibilidad magnética. En el caso particular de un nemático uniaxial este tensor está dado por:

$$\chi_{ij} = \chi_{\perp} \delta_{ij} + \chi_a (n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij})$$

en donde  $\chi_a = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$  es la anisotropía en la susceptibilidad magnética, que generalmente es positiva;  $\chi_{\parallel}$  y  $\chi_{\perp}$  son las susceptibilidades magnéticas paralela y perpendicular a  $\vec{n}$ , respectivamente.

Así, la magnetización inducida en el nemático está dada por:

$$\vec{M} = \chi_{\perp} \vec{H} + \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H}) \vec{n}, \quad (1.5)$$

La contribución a la densidad de energía libre de Helmholtz debido al acoplamiento entre  $\vec{n}$  y un campo magnético estático  $\vec{H}$  es entonces,

$$f_H = - \int_0^H \vec{M} \cdot d\vec{H} = -\frac{1}{2} \chi_{\perp} H^2 - \frac{1}{2} \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H})^2. \quad (1.6)$$

El primer término es independiente de la orientación y, por tanto, se omitirá debido a que solo se estudiarán los efectos de la orientación del director. Entonces, la contribución a la energía libre de Helmholtz está dada por

$$F_H = -\frac{1}{2} \int_V d\vec{r} \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H})^2. \quad (1.7)$$

Nótese que para  $\chi_a > 0$  la energía se minimiza cuando  $\vec{n}$  es colineal a  $\vec{H}$ .

Finalmente, la expresión para la torca magnética (por unidad de volumen) ejercida sobre el nemático es:

$$\vec{\Gamma}_H = \vec{M} \times \vec{H} = \chi_a (\vec{n} \cdot \vec{H}) \vec{n} \times \vec{H}. \quad (1.8)$$

De donde notamos que un campo magnético tiende a orientar las moléculas del nemático en la misma dirección que el campo aplicado.

### 1.6.2. Efectos del Campo Eléctrico

Si se considera el caso de nemáticos aislantes, entonces el acoplamiento del nemático con el campo eléctrico estático involucra dos procesos diferentes: uno es la anisotropía de la permitividad eléctrica con consecuencias similares a las estudiadas para el campo magnético, y el otro corresponde a la polarización dieléctrica inducida por distorsiones elásticas. Debido a que sólo nos interesan las propiedades debido a la anisotropía, sólo se considerará el primer caso.

La relación entre el vector desplazamiento  $\vec{D}$  y el campo  $\vec{E}$  para medios anisótropos uniaxiales, está dada en forma análoga a la ec.(1.5), esto es,

$$\vec{D} = \varepsilon_{\perp} \vec{E} + \varepsilon_a (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n}. \quad (1.9)$$

En este caso,  $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$  es la anisotropía dieléctrica que puede ser positiva o negativa, dependiendo de la estructura química de las moléculas;  $\varepsilon_{\parallel}$  y  $\varepsilon_{\perp}$  son, respectivamente, las permitividad dieléctrica paralela y perpendicular al eje del nemático. Por ejemplo, si cada molécula tiene su momento dipolar permanente paralelo a su eje largo, el dipolo se orienta en la dirección de  $\vec{E}$ , para este caso tenemos que  $\varepsilon_a > 0$ . Por otro lado, si el momento dipolar es normal al eje largo de las moléculas tenemos que  $\varepsilon_a < 0$  y  $\vec{n}$  se orienta perpendicularmente al campo  $\vec{E}$ .

La contribución eléctrica a la densidad de energía libre se obtiene a partir de la ecuación anterior, en sistema gaussiano de unidades,

$$f_e = -\frac{1}{4\pi} \int_0^E \vec{D} \cdot d\vec{E} = \frac{\varepsilon_{\perp}}{8\pi} E^2 - \frac{\varepsilon_a}{8\pi} (\vec{n} \cdot \vec{E})^2. \quad (1.10)$$

El primer término de esta ecuación no es de interés ya que no acopla al campo con el director; el segundo término muestra que  $\vec{n}$  se alinea con  $\vec{E}$  si  $\varepsilon_a > 0$  o perpendicularmente si  $\varepsilon_a < 0$ .

# Capítulo 2

## Modelo

Se quiere modelar una celda de cristal líquido que se pueda construir en un laboratorio, y a través del modelo poder describir los efectos de las fluctuaciones en el director del nemático en la propagación de un haz luminoso.

### 2.1. El Arreglo

Consideramos una capa de nemático con grosor  $l$  medido a lo largo del eje  $z$  y contenido entre dos placas planas paralelas las cuales, en general, podrían ser dieléctricas, como se muestra en la figura (2.1). Las dimensiones transversales a lo largo de  $x$  y  $y$  son muy grandes comparadas con  $l$ , pero la celda tiene un volumen finito  $V = L^2l$ . Se hace incidir un haz laser oblicuo cuya polarización permanece en el plano  $y-z$ .

### 2.2. Energía Libre de Helmholtz

La densidad de energía libre de un cristal líquido nemático debida a deformaciones locales elásticas está dada por la energía de distorsión de Oseen-Frank (Ec.1.2)

$$f_d = \frac{1}{2}K_1(\text{div}\vec{n})^2 + \frac{1}{2}K_2(\vec{n} \cdot \text{rot}\vec{n})^2 + \frac{1}{2}(\vec{n} \times \text{rot}\vec{n})^2. \quad (2.1)$$

En presencia de un campo eléctrico, hay una energía libre adicional dada por (Ec.1.10)

$$f_{em} = -(1/8\pi)\vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (2.2)$$

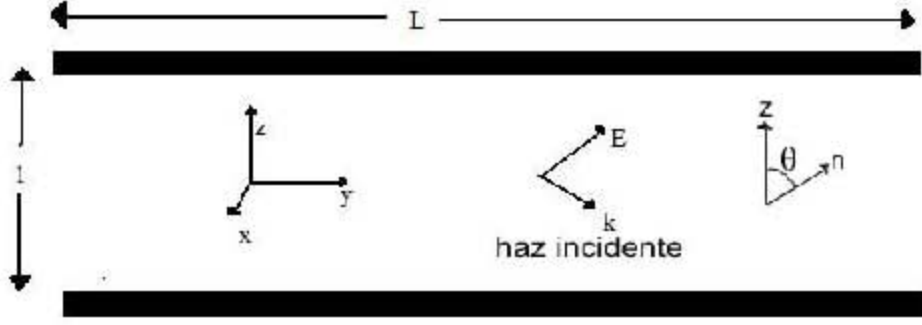


Figura 2.1: Arreglo esquemático de una celda con un medio nemático.  $\mathbf{k}$  es el vector de onda,  $\mathbf{E}$  es la componente del campo eléctrico de la onda,  $\theta$  es el ángulo entre el eje  $z$  y  $\vec{n}$

El vector de desplazamiento y el vector de campo eléctrico  $\vec{E}$  están relacionados por

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}, \quad (2.3)$$

en donde  $\epsilon_{ij}$  es el tensor de permitividad dieléctrica que para un nemático uniaxial está dado por

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{\perp} \delta_{ij} + \epsilon_a n_i n_j, \quad (2.4)$$

donde  $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ ,  $\epsilon_{\perp}$  es la componente perpendicular al director, y  $\epsilon_{\parallel}$  es la componente paralela al director de la permitividad eléctrica. Para la geometría que se asumió y en la aproximación de constantes elásticas iguales,  $K_1 = K_2 = K_3 = K$ , la funcional de energía libre es

$$F = \int dv \left[ (1/2)K(d\theta/dz)^2 - (1/8\pi)(\epsilon_{\perp}|\mathbf{E}|^2 + \epsilon_a(|\mathbf{E}_y|^2 \text{sen}^2 \theta + (E_y^* E_z + E_y E_z^*) \text{sen} \theta \cos \theta + |\mathbf{E}_z|^2 \cos^2 \theta) + |\mathbf{H}|^2) \right], \quad (2.5)$$

donde \* denota complejo conjugado. El primer término sólo depende de la derivada con respecto de  $z$  ya que  $n = n(\theta(z))$  solo es función de  $z$  por la simetría a lo largo de este eje.



## 2.3. Ecuaciones Generales

La configuración estacionaria se debe determinar minimizando esta densidad de energía libre bajo la restricción de que  $|\vec{n}| = 1$ . Sin embargo, como la Ec.(2.5) está expresada en términos de  $\theta$ , ya satisface la restricción  $|\vec{n}| = 1$  y por lo tanto, basta con minimizar la energía libre, para obtener la ecuación que determina la configuración de equilibrio. Esto se consigue exigiendo que la derivada funcional  $\frac{\delta F}{\delta \theta}$  se anule. Donde la derivada funcional de una funcional

$$F[f] = \int dx G(f(x), \frac{df}{dx}),$$

está definida como

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} = \int dx \left\{ \frac{\partial G}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial \frac{df}{dx}} \right) \right\} \delta(x - y).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \delta F / \delta \theta &\equiv \int dv' \frac{d}{d\theta} [(1/2)K(d\theta/dz)^2 - (1/8\pi)(\varepsilon_{\perp}|\mathbf{E}|^2 + \varepsilon_{\mathbf{a}}(|\mathbf{E}_{\mathbf{y}}|^2 \text{sen}^2 \theta \\ &\quad + (E_y^* E_z + E_y E_z^*) \text{sen} \theta \cos \theta + |\mathbf{E}_z|^2 \cos^2 \theta) + |\mathbf{H}|^2)] \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \\ &= d^2 \theta / d\zeta^2 + q [\text{sen} 2\theta (|\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{y}}|^2 - |\bar{\mathbf{E}}_z|^2) - 2\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{y}} \bar{\mathbf{E}}_z^* \cos 2\theta] = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se ha escrito esta ecuación en forma adimensional introduciendo las variables  $\zeta \equiv z/l$ ,  $\bar{E}_y \equiv E_y/E_0$  y  $\bar{E}_z \equiv E_z/E_0$ , así como el parámetro  $q = \varepsilon_{\mathbf{a}} E_0^2 l^2 / K$ . Aquí  $E_0^2$  representa la intensidad del campo óptico incidente. Nótese que el parámetro  $q$  es proporcional a la razón entre la densidad de energía eléctrica del haz incidente,  $E_0^2/8\pi$ , y la densidad de energía elástica,  $KL/l^2L$ .

Los modos Transversos Magnéticos (TM) son los modos de propagación de la onda que no contienen componentes magnéticas del campo en la dirección del eje longitudinal de la celda y los modos Transversos Eléctricos (TE) son los modos de propagación que no contienen componentes eléctricas del campo en dirección del eje longitudinal de la celda. De la geometría dada Fig.(2.1) notamos que las componentes de los modos TM son  $E_z, E_y, H_x$  y las componentes de los modos TE son  $E_x, H_y$  y  $H_z$ . Antes de seguir adelante, es importante señalar que, como se puede ver la Ec.(2.6), los modos TE ( $E_x, H_y$  y  $H_z$ ), no afectan la dinámica reorientacional de  $\vec{n}$ ; por lo cual en lo que sigue no se tomarán en cuenta.

Las ecuaciones que gobiernan la propagación de las ondas electromagnéticas a través del nemático se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes [46]. Para una onda monocromática donde los campos tienen la forma  $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{(-i\omega t)}$  y suponiendo el caso más común, donde el medio es no magnético, las ecuaciones de Maxwell en sistema gaussiano de unidades, siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío, son

$$i\omega\vec{H} = c\nabla \times \vec{E}, \quad (2.7)$$

$$i\omega\vec{D} = c\nabla \times \vec{H}. \quad (2.8)$$

La relación entre la densidad de flujo magnético  $\vec{B}$  y el campo magnético  $\vec{H}$  está dada por  $\vec{B} = \vec{\mu}_0 \cdot \vec{H}$ , en donde se supondrá que la permeabilidad magnética  $\vec{\mu}$  del cristal líquido es la del vacío, esto es,  $\vec{\mu} = \vec{\mu}_0 = 1$ . En otras palabras, consideraremos que el cristal líquido es no magnético. Esto es razonable ya que la susceptibilidad magnética de muchos nemáticos es mucho más pequeña que la susceptibilidad eléctrica [47].

## 2.4. Modos Transversos

Si se supone que la onda incidente es monocromática y, como lo sugiere la geometría de la celda, se mueve libremente en la dirección  $y$  con una amplitud que depende sólo de  $z$ , entonces proponemos una forma general de las componentes eléctricas y magnéticas de la forma

$$E_j(y, z, t) = E_j(z, k) \exp[i(\beta y - \omega t)], \quad (2.9)$$

$$H_j(y, z, t) = H_j(z, k) \exp[i(\beta y - \omega t)], \quad j = x, y, z. \quad (2.10)$$

$\beta$  es la constante de propagación,  $\omega$  es la frecuencia angular óptica de la onda y  $k = \omega/c$ . Sustituyendo las relaciones (2.9) y (2.10) en las ecuaciones (2.7) y (2.8) obtenemos las ecuaciones de Maxwell para la forma particular del campo propuesto:

$$H_i = -\frac{ic}{\omega} \epsilon_{ijk} [\delta_{jz} \partial_z E_k + \delta_{jy} i\beta E_k], \quad (2.11)$$

$$\epsilon_{ij} E_j = \frac{ic}{\omega} \epsilon_{ijk} [\delta_{jz} \partial_z H_k + \delta_{jy} i\beta H_k], \quad (2.12)$$

donde  $\partial_z$  denota derivada parcial respecto  $z$ . En las ecuaciones anteriores  $\epsilon_{ijk}$  representa el tensor de Levi-Civita, las  $\delta_{ij}$  son deltas de Kronecker y se ha

empleado la convención de suma sobre índices repetidos. Los índices  $x$ ,  $y$  y  $z$  representan a la coordenada que denotan y por lo tanto no cambian.

Al desarrollar los términos contraídos para los modos transversos magnéticos (TM)  $E_y(\zeta, k_0)$ ,  $E_z(\zeta, k_0)$  y  $H_x(\zeta, k_0)$ , además de eliminar cualquier campo eléctrico que aparezca en la ecuación de  $H_x$  por medio de las respectivas ecuaciones de  $E_y$  y  $E_z$ , se obtiene el siguiente un conjunto de ecuaciones para las componentes de los modos TM.

$$\varepsilon_{zz} \frac{d^2 H_x}{d\zeta^2} + [-2iklp_y \varepsilon_{zy} + \frac{d\varepsilon_{zz}}{d\zeta}] \frac{dH_x}{d\zeta} + k_z l [kl(\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} - p_y^2 \varepsilon_{yy}) - ip_y \frac{d\varepsilon_{zy}}{d\zeta}] H_x = 0, \quad (2.13)$$

$$E_y = \left( \frac{1}{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \right) [-\varepsilon_{zy} p_y H_x - \varepsilon_{zz} \frac{i}{kl} \frac{dH_x}{d\zeta}], \quad (2.14)$$

$$E_z = \frac{1}{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} [p_y \varepsilon_{yy} H_x + \varepsilon_{zy} \frac{i}{kl} \frac{dH_x}{d\zeta}], \quad (2.15)$$

donde  $\zeta \equiv z/l$ , en el interior de la celda, y  $p_y \equiv \beta/k$  es el número de onda en dirección  $y$  dentro de la celda. Como podemos ver de las ecuaciones anteriores, las componentes del campo eléctrico  $E_y$  y  $E_z$  quedan determinadas al encontrar  $H_x$ . Por lo que en el trabajo posterior nos enfocaremos en resolver la ecuación (2.13).

## 2.5. Ecuaciones del Modelo Determinista

El objetivo de este trabajo es analizar el efecto de las fluctuaciones del director en la propagación de la onda, suponiendo que el tensor dieléctrico fluctúa. Las variaciones en  $\vec{\varepsilon}$  debido a fluctuaciones en el director son más grandes en la dirección perpendicular al director que a lo largo de éste. Esto se puede observar de la Ec.(??) al analizar el primer término de su desarrollo en serie de las componentes de  $\varepsilon$  alrededor de un ángulo  $\theta$  que indique la desviación de la dirección promedio. La variación en un eje perpendicular al director va como  $\delta\varepsilon_{n_{\perp}} \approx \varepsilon_a \delta \sin^2 \theta \approx \delta\theta^2$  y para la dirección paralela al director  $\delta\varepsilon_{n_{\parallel}} \approx \varepsilon_a \delta \cos^2 \theta \approx 0$ . Para tomar ventaja de este hecho, elegimos una configuración homeotrópica. Es en esa configuración donde tienen más importancia los efectos debido a las fluctuaciones del director. Para esta configuración  $\varepsilon_{yz} = 0$ ,  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel}$  y  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}$  y podemos escribir la ecuación

(2.13) como

$$\frac{d^2 H_x}{d\zeta^2} + (kl)^2 \varepsilon_{\perp} \left(1 - \frac{p^2}{\varepsilon_{\parallel}}\right) H_x = 0. \quad (2.16)$$

Para la región en que  $p^2 \ll \varepsilon_{\parallel}$ , que equivale a que el haz del laser incida casi perpendicularmente a la celda y por lo tanto no hay propagación de la onda a lo largo del eje  $y$ , ya que  $p$  es el número de onda en dirección  $y$ . Podemos despreciar el segundo término dentro del paréntesis de la ecuación anterior y concluir con la ecuación

$$\frac{d^2 H_x}{d\zeta^2} + (kl)^2 \varepsilon_{\perp} H_x = 0. \quad (2.17)$$

En esta ecuación sólo está presente un parámetro del medio  $\varepsilon_{\perp}$ , que es el promedio de la permitividad eléctrica perpendicular al director. Con lo cual se justifica la elección de la configuración homeotrópica.

## 2.6. Modelo Fluctuante

Para tomar en cuenta las fluctuaciones del medio en la ecuación (2.17), es posible escribirla como

$$\frac{d^2 H_x}{d\zeta^2} + (k_0 l)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle [1 + \tilde{\varepsilon}_{\perp}] H_x = 0, \quad (2.18)$$

donde

$$\tilde{\varepsilon}_{\perp} = \frac{\varepsilon_{\perp} - \langle \varepsilon_{\perp} \rangle}{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle},$$

son las fluctuaciones de la permitividad eléctrica. La ecuación (2.18) es una ecuación diferencial estocástica multiplicativa. Cabe resaltar que debido a la geometría elegida, así como a las aproximaciones hechas, el modelo es ahora manejable en el contexto de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

En el capítulo siguiente, se procederá a dar las definiciones y dos métodos aproximados de resolución de las ecuaciones diferenciales estocásticas. El modelo aquí presentado ya se ha estudiado en [21] y [29]. Sin embargo, sólo ha sido tratado de forma determinista. En este trabajo se aborda desde otro enfoque que es el de analizar el efecto de las fluctuaciones del director. Debido a esto, ahora nos interesa calcular propiedades estocásticas como son

funciones de correlación y la función de coherencia que físicamente nos indica la distribución de intensidad dentro de la celda Fig.(2.1). Además, no es posible usar las mismas estrategias del cálculo analítico usadas en [21], donde se empleó la óptica de rayos u óptica geométrica y la aproximación WKB.

# Capítulo 3

## Métodos Estocásticos

En este capítulo haremos una revisión somera de los métodos que nos ayudan a describir los fenómenos con propiedades estocásticas.

### 3.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas [2]

Cuando sobre un sistema actúan fuerzas fluctuantes externas, sus ecuaciones de movimiento se convierten en ecuaciones diferenciales con coeficientes aleatorios, es decir, en “ecuaciones estocásticas”. Resolver una ecuación estocástica consiste en encontrar la función de distribución de probabilidad para las variables aleatorias que definen el problema en particular. Algunas veces estas ecuaciones pueden ser resueltas en forma exacta, aunque en la mayoría de los casos sólo en forma aproximada.

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación diferencial en la cual alguno o algunos de los coeficientes son números aleatorios o funciones aleatorias de las variables independientes. De la misma forma que en las ecuaciones diferenciales ordinarias, los coeficientes se suponen conocidos. Es decir, en una ecuación diferencial estocástica las propiedades aleatorias de los coeficientes se suponen dadas. Debido a lo anterior, estas ecuaciones son útiles para describir sistemas con fluctuaciones producidas por algún agente externo al sistema. Ejemplos son una partícula Browniana descrita por la ecuación de Langevin correspondiente, es un sistemas pequeño interactuando con un baño térmico grande. El baño tiene que ser grande para que no cambie sus propiedades al contacto con el sistema pequeño; ondas electromagnéticas en una atmósfera turbulenta; crecimiento de una población en un clima fluc-

tuante, entre otros.

La forma general de una ecuación diferencial estocástica es

$$\dot{u} = F(u, t; Y(t)), \quad (3.1)$$

donde  $u$  y  $F$  pueden ser vectores, y  $Y(t)$  indica una o más funciones aleatorias, cuyas propiedades estadísticas son conocidas. Esta ecuación, junto con una condición inicial  $u(t_0) = a$ , determina para cada realización particular  $y(t)$  de  $Y(t)$ , una  $U(t; [y], a)$ , la cual es una funcional de  $y(t)$ ; es decir, depende de todos los valores  $y(t')$  en  $0 \leq t' \leq t$ . El ensamble de soluciones  $U(t; [y], a)$  para todos las posibles  $y(t')$  constituye un proceso estocástico. Se dice que la ecuación estocástica se resuelve, cuando las propiedades estadísticas de este proceso se determinan.

Algunas veces el valor inicial  $a$  es también una cantidad o vector aleatorio. El proceso estocástico resultante  $U(t; [y], a)$  es entonces una función de la variable aleatoria  $a$ , como también funcional de  $y$ .

Se puede hacer la siguiente clasificación de las ecuaciones estocásticas.

Ecuaciones diferenciales lineales:

1. Ecuaciones diferenciales lineales en las cuales solo el término inhomogéneo es una función aleatoria, como por ejemplo, la ecuación de Langevin. A este tipo de ecuaciones se les ha llamado *aditivas* y en principio pueden resolverse.
2. Ecuaciones diferenciales lineales en las cuales uno o más de los coeficientes que multiplican a  $u$  son funciones aleatorias. A este tipo de ecuaciones se les ha llamado *multiplicativas* y pueden ser resueltas sólo en casos especiales, aunque existen métodos para encontrar soluciones aproximadas.

Ecuaciones diferenciales no lineales:

1. Ecuaciones diferenciales no lineales aditivas.
2. Ecuaciones diferenciales no lineales multiplicativas.

Las ecuaciones diferenciales estocástica pueden referirse ya sea a procesos markovianos o no markovianos. Los procesos Markovianos son aquellos que no tienen memoria de su evolución anterior. Es decir el ruido en estos procesos es blanco. En los procesos no markovianos el ruido es de color o una combinación de ruidos de color, lo cual se refleja en que el sistema guarda memoria de sus estados anteriores.

## 3.2. Generalidades

A pesar de que las causas de las fluctuaciones de los parámetros de un modelo pueden ser diversas en un problema, y totalmente distintas en problemas distintos, como pueden ser ruido térmico, inestabilidades, turbulencia, etc., los métodos usados para su análisis teórico son frecuentemente muy semejantes. Por ejemplo el método de van Kampen y el de la aproximación difusiva.

Un método que toma en cuenta la finitud de la longitud de correlación en las fluctuaciones, es empleado por van Kampen [2] para describir sistemas sujetos a parámetros fluctuantes.

Por otra parte, una herramienta muy poderosa que hace posible resolver muchos problemas complejos en procesos estocásticos, es la teoría de procesos de tipo difusivo, la cual fue desarrollada basada en la teoría del movimiento Browniano y la teoría de los procesos Markovianos. [1] A este método se le conoce como el de la *aproximación difusiva* de procesos estocásticos para sistemas dinámicos no lineales. Y se basa en el desarrollo de la solución en un parámetro pequeño, el cual es el radio de correlación, ya sea temporal o espacial, de la variable fluctuante. Este radio debe de ser muy pequeño en comparación con las escalas características de observación. En la teoría del movimiento Browniano esta aproximación corresponde a desprestigiar el tiempo entre colisiones aleatorias en comparación con otras escalas temporales.

Cuando este método se aplica a problemas de sistemas dinámicos que satisfacen ecuaciones diferenciales ordinarias estocásticas, se obtiene una aproximación Markoviana.

Este método para obtener la ecuación de Fokker-Planck (EFP) que describe la aproximación difusiva, fue propuesto por Novikov [22] en teoría de turbulencia. Y hace posible obtener la EFP directamente de las ecuaciones dinámicas del problema y al mismo tiempo se determinan las limitaciones de validez de la EFP.

## 3.3. Comparación entre métodos

Ahora se quieren comparar las ventajas y limitaciones del método de van Kampen y el de la aproximación difusiva. Para poder confrontar los métodos, se empleará cada uno por separado para resolver la ecuación estocástica (2.18).



### 3.3.1. Tratamiento heurístico de ecuaciones multiplicativas <sup>1</sup>

Considérese una ecuación estocástica lineal homogénea

$$\dot{u} = A(t)u = \{A_0 + \alpha A_1(t)\}u, \quad (3.2)$$

donde  $u$  puede ser un vector,  $A_0$  una matriz constante,  $A_1(t)$  una matriz aleatoria y  $\alpha$  es un parámetro que mide la magnitud de la fluctuación. Además, se supone que  $A_1(t)$  tiene un tiempo de correlación finito,  $\tau_c$ , en el sentido de que para dos tiempos  $t_1, t_2$  tales que  $|t_1 - t_2| \gtrsim \tau_c$ , sea posible tratar todos los elementos de la matriz  $A_1(t_1)$  como estadísticamente independientes de aquellos de  $A_1(t_2)$ . El método que se describirá dará una solución aproximada de la ecuación (3.2) en la forma de un desarrollo en serie en potencias de  $\alpha\tau_c$ .

Es conveniente suponer que  $A_1(t)$  es un proceso estacionario. Entonces,  $\langle A_1(t) \rangle$  es independiente del tiempo y puede ser incorporado en  $A_0$  si se hace el siguiente cambio de variable

$$A'_0 = A_0 + \alpha \langle A_1(t) \rangle, \quad \alpha A'_1(t) = \alpha \{A_1(t) - \langle A_1(t) \rangle\}, \quad (3.3)$$

de esta forma si sustituímos  $A'_0$  en (3.2) y tenemos en cuenta la definición de  $A'_1(t)$  obtenemos

$$\dot{u} = \{A'_0 + \alpha A'_1(t)\}u \quad (3.4)$$

de tal manera que  $\langle A'_1(t) \rangle = 0$ . De aquí en adelante supondremos que esto ya se ha hecho y omitiremos las primas en la notación subsecuente.

También podemos eliminar  $A_0$  haciendo otro cambio de variable, que equivale a pasar a la representación de interacción

$$u(t) = e^{tA_0}v(t). \quad (3.5)$$

Usando (3.5) en (3.4), tras simplificar se obtiene

$$\dot{v} = \alpha e^{-tA_0} A_1(t) e^{tA_0} v \equiv \alpha V(t)v, \quad (3.6)$$

que es la ecuación a resolver para una condición inicial  $v(0) = u(0) = a$ . Formalmente, la solución a esta ecuación se puede expresar como

$$v(t) = a + \alpha \int_0^t dt V(t)v. \quad (3.7)$$

---

<sup>1</sup>Para una descripción más amplia del método, ver [2] capítulo XIV

Esta ecuación puede ser resuelta de manera aproximada en forma de una serie de potencias en  $\alpha$  mediante iteraciones, es decir,

$$\begin{aligned} v^{(1)}(t) &= a + \alpha \int_0^t dt V(t) a, \\ v^{(2)}(t) &= a + \alpha \int_0^t dt V(t) v^{(1)}(t), \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde el superíndice indica el orden de la solución en  $\alpha$ . De esta manera, a segundo orden en  $\alpha$  la solución es

$$v(t) = a + \alpha \int_0^t dt_1 V(t_1) a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) a + \dots, \quad (3.8)$$

y si se toma el promedio respecto a las posibles realizaciones de  $V(t)$  condicional con un valor fijo de  $a$ ,

$$\langle v(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle V(t_1) V(t_2) \rangle a + \vartheta((\alpha\tau_c)^3). \quad (3.9)$$

Donde es posible intercambiar las integrales con el promedio, debido a que el promedio es sobre las posibles realizaciones de  $V(t)$  y las integrales son sobre  $t$ . Claro, esta aproximación a segundo orden puede ser usada siempre y cuando los términos de orden mayor sean pequeños. Como cada término sucesivo involucra una integración adicional sobre el tiempo, la restricción de que los términos superiores sean cada vez más pequeños se cumple si  $\alpha t \ll 1$ . Por otro lado, si queremos usar esta ecuación para períodos largos comparados con  $\tau_c$ ; entonces debemos suponer que  $\alpha\tau_c \ll 1$ . De esta manera podemos reescribir la ecuación (3.9) como

$$\langle v(t) \rangle \simeq a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} d\tau \langle V(t_1) V(t_1 - \tau) \rangle a.$$

Nótese que cuando  $t_1 > \tau_c$ , el límite superior  $t_1$  de la integración en  $\tau$  puede ser reemplazado por  $\infty$ , ya que el integrando se anula de cualquier modo. Y a pesar de que  $t_1$  varíe de 0 a  $t$ , es mayor a  $\tau_c$  en la mayor parte del intervalo. De aquí que para  $\tau_c \ll t \ll \alpha^{-1}$  tenemos de forma aproximada

$$\langle v(t) \rangle \simeq a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^\infty d\tau \langle V(t_1) V(t_1 - \tau) \rangle a.$$

Por otra parte, puede comprobarse fácilmente que esta expresión es también solución a orden  $\alpha^2$  de la ecuación diferencial lineal

$$\partial_t \langle v(t) \rangle = \alpha^2 \left[ \int_0^\infty \langle V(t)V(t-\tau) \rangle d\tau \right] \langle v(t) \rangle. \quad (3.10)$$

Por lo tanto, podemos concluir que la evolución de  $\langle v(t) \rangle$  puede ser descrita mediante esta ecuación, la cual en la representación original es

$$\partial_t \langle u(t) \rangle = \left[ A_0 + \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t)e^{\tau A_0} A_1(t-\tau) \rangle e^{-\tau A_0} d\tau \right] \langle u(t) \rangle. \quad (3.11)$$

Si ahora además suponemos que no sólo  $\alpha\tau_c \ll 1$ , sino que también

$$\tau_c |A_0| \ll 1,$$

esta condición adicional establece que el movimiento libre de  $u$  es muy lento comparado con las fluctuaciones en  $A_1$ . Al desarrollar las exponenciales  $e^{\tau A_0}$  o orden cero, la ecuación (3.11) se reduce en este caso a

$$\partial_t \langle u(t) \rangle = \left[ A_0 + \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t)A_1(t-\tau) \rangle d\tau \right] \langle u(t) \rangle. \quad (3.12)$$

Como se supuso que  $A_1$  es estacionaria, la integral es independiente del tiempo. Así que el efecto de las fluctuaciones en el promedio es “renormalizar”  $A_0$  sumándole un término constante de orden  $\alpha^2$ . El término sumado es la función de autocorrelación de  $A_1$  integrada. En particular, si uno tiene un sistema no disipativo descrito por  $A_0$ , el término adicional debido a las fluctuaciones, es generalmente disipativo. Esto debido a que las fluctuaciones disipan la energía al baño térmico en el que se encuentra el sistema.

El mismo método puede ser usado para encontrar *momentos de orden superior* de  $u$ . Sea  $u = \{u_\nu\}$  un vector real de  $n$  componentes el cual obedece la ecuación (3.2), i.e.,

$$\partial_t u_\nu = \sum_{\lambda=1}^n A_{\nu\lambda}(t) u_\lambda \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (3.13)$$

Entonces los productos  $u_\nu u_\mu$  obedecen también una ecuación diferencial estocástica lineal

$$\begin{aligned} \partial_t (u_\nu u_\mu) &= \sum_\lambda A_{\nu\lambda}(u_\lambda u_\nu) + \sum_\lambda A_{\mu\lambda}(u_\nu u_\lambda) \\ &\equiv \sum_{\lambda\varrho} \mathcal{A}_{\nu\mu;\lambda\varrho}(u_\lambda u_\varrho), \end{aligned} \quad (3.14)$$

con

$$\mathcal{A}_{\nu\mu;\lambda\varrho}(t) = A_{\nu\mu}(t)\delta_{\mu\varrho} + A_{\mu\varrho}(t)\delta_{\nu\lambda}.$$

De aquí que sus promedios obedecen una ecuación similar a (3.11). Para escribir esta ecuación en forma explícita considérense los  $\frac{1}{2}n(n+1) = N$  productos  $u_\nu u_\mu$  como componentes de un solo vector  $\mathcal{U}_a$  de tal forma que (3.14) se reescribe como

$$\partial_t \mathcal{U}_a = \sum_{b=1}^N \mathcal{A}_{ab}(t) \mathcal{U}_b \quad (a = 1, 2, \dots, N). \quad (3.15)$$

Así, para  $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 + \alpha \mathcal{A}_1(t)$ , se obtiene que

$$\partial_t \langle \mathcal{U}_a \rangle = \left[ \mathcal{A}_0 + \alpha \langle \mathcal{A}_1(t) \rangle + \alpha^2 \int_0^\infty \langle \langle \mathcal{A}_1(t) e^{\tau \mathcal{A}_0} \mathcal{A}_1(t - \tau) \rangle \rangle e^{-\tau \mathcal{A}_0} d\tau \right] \langle \mathcal{U}_a \rangle.$$

### Obtención de la función de distribución

Consideremos nuevamente el caso general de una ecuación estocástica no lineal (3.1). Esta ecuación puede ser convertida a una ecuación estocástica lineal considerando la ecuación asociada de Liouville. Para lograr esto considérese, por ahora, una sola realización  $y(t)$  de  $Y(t)$  y la ecuación (no estocástica) determinista

$$\dot{u}_\nu = F_\nu(u, t; y(t)), \quad (3.16)$$

la cual describe un flujo en el espacio  $u$ . La densidad de este flujo varía de acuerdo con

$$\frac{\partial \varrho(u, t)}{\partial t} = - \sum_\nu \frac{\partial}{\partial u_\nu} \{ F_\nu(u, t; y(t)) \varrho \}, \quad (3.17)$$

que es la ecuación de continuidad,  $\dot{\varrho} = -\nabla \cdot (\varrho \mathbf{v})$ , escrita para un número arbitrario de dimensiones. Si ahora se permite a  $y(t)$  tomar todas las realizaciones  $Y(t)$ , con sus probabilidades correspondientes, la ecuación (3.17) se convierte en una ecuación diferencial lineal estocástica para  $\varrho(u, t)$ .

La ecuación (3.17) tiene la misma forma general que (3.2) si se toma a la  $\varrho$  como la cantidad análoga a  $u$  en (3.2). El operador lineal  $\sum (\partial/\partial u_\nu) F_\nu$  es el análogo de la matriz  $A$ . Formalmente, esta es la razón por la que se puede aplicar el método anterior ya discutido para obtener una ecuación aproximada de  $\langle \varrho(u, t) \rangle$  dado  $\varrho(u, 0)$ .

Para una realización determinada de  $y(t)$ ,  $\varrho(u, t) = \delta(u - a^t)$ , donde  $a^t$  es la solución para esa realización. Además, recordando la transformación de

variables,

$$P_Y(y) = \int \delta[f(x) - y]P_X(x)dx \equiv \langle \delta[f(x) - y] \rangle,$$

obtenemos que

$$\langle \varrho(u, t) \rangle = \langle \delta(u - a^t) \rangle = P(u, t),$$

donde  $P(u, t)$  es la función de distribución de  $u$ . Así, al obtener una ecuación para  $\langle \varrho(u, t) \rangle$  se obtiene la ecuación diferencial para la función de distribución.

En conclusión, para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma (3.16), se deben convertir a una ecuación lineal equivalente de la forma (3.17). Después, puede emplearse el método descrito anteriormente para ecuaciones lineales para encontrar una ecuación diferencial aproximada para  $\langle \varrho(u, t) \rangle = P(u, t)$ . El resultado es una ecuación para la distribución de probabilidad de la forma

$$\dot{P}(u, t) = \mathbb{K}P(u, t), \quad (3.18)$$

con el operador  $\mathbb{K}$  actuando en la dependencia de  $u$ .

### Ejemplo para la obtención de la EFP

Un ejemplo ilustrativo de este procedimiento es el del problema de una partícula cargada que se mueve en una dimensión en un campo eléctrico  $E$ ,

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \alpha E(x, t),$$

en donde  $E(x, t)$  es un campo aleatorio con promedio cero, estacionario en el tiempo y el espacio, y con un tiempo de autocorrelación  $\tau_c$ . La densidad de un ensamble de dichas partículas es  $\varrho(x, v, t)$  y, por lo tanto, la ecuación (3.17) tomará la forma

$$\frac{\partial \varrho(x, v, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \dot{x} \varrho - \frac{\partial}{\partial v} \dot{v} \varrho,$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho(x, v, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} v \varrho - \alpha \frac{\partial}{\partial v} E(x, t) \varrho \\ &= \{A_0 + \alpha A_1(t)\} \varrho. \end{aligned}$$

Para poder aplicar (3.11) es necesario determinar primero el operador  $e^{\tau A_0}$ . En este caso  $A_0 = -v\partial/\partial x$ . Para poder ver la forma en que opera, lo aplicamos a una función arbitraria  $f(x, v)$ ,

$$e^{\tau A_0} f(x, v) = \exp \left[ -\tau v \frac{\partial}{\partial x} \right] f(x, v) = f(x - \tau v, v).$$

Vemos que es una traslación en  $x$  por una cantidad  $-\tau v$ . De aquí que la cantidad  $e^{-\tau A_0} \langle u(t) \rangle$  que aparece en (3.11) sea, para este caso,  $P(x + \tau v, v)$ . Posteriormente hay que aplicarle el operador  $A_1(t - \tau)$ , o sea,

$$-\frac{\partial}{\partial v} [E(x, t - \tau) P(x + \tau v, v)] = -E(x, t - \tau) \left( \frac{\partial P}{\partial v} + \tau \frac{\partial P}{\partial x} \right) (x + \tau v, v).$$

El operador  $e^{\tau A_0}$  traslada el argumento  $x$  en su posición original,

$$e^{\tau A_0} A_1(t - \tau) e^{-\tau A_0} P(x, v) = -E(x - \tau v, t - \tau) \left( \frac{\partial P}{\partial v} + \tau \frac{\partial P}{\partial x} \right) (x, v).$$

Después de aplicar  $A_1$  una vez más, obtenemos la forma final de (3.11) que para este caso es

$$\frac{\partial P(x, v, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty \langle E(x, t) E(x - \tau v, t - \tau) \rangle \left( \frac{\partial P}{\partial v} + \tau \frac{\partial P}{\partial x} \right) d\tau,$$

o bien

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial v} c_0(v) \frac{\partial P}{\partial v} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial v} c_1(v) \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (3.19)$$

que es una EFP bi-variada y en donde

$$\begin{aligned} c_0(v) &= \int_0^\infty \langle E(x, t) E(x - \tau v, t - \tau) \rangle d\tau, \\ c_1(v) &= \int_0^\infty \tau \langle E(x, t) E(x - \tau v, t - \tau) \rangle d\tau. \end{aligned}$$

Por medio de esta ecuación es posible obtener los momentos y las correlaciones de las variables independientes.

### 3.3.2. Aproximación Difusiva para Procesos Estocásticos para Procesos Dinámicos no Lineales.

Ahora daremos una breve descripción de la Aproximación Difusiva desarrollada por Klyantskin [1]. Esto con motivos de comparación entre dos métodos que se encontraron en la literatura para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas. De esta forma se podrán ver las ventajas y limitaciones de cada uno.

Considérese el caso en que una variable aleatoria multidimensional  $\xi(t) = \{\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)\}$  satisface el sistema de ecuaciones dinámicas

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = v_i(\xi, t) + f_i(\xi, t), \quad (3.20)$$

para la condición inicial dada  $\xi(0) = \xi_0$ . Donde  $v_i(\xi, t)$  son funciones deterministas conocidas y  $f_i(x, t)$  son funciones estocásticas de  $n + 1$  variables. Supóngase que  $f_i(x, t)$  es una función Gaussiana en un espacio  $n + 1$  dimensional, y que  $\langle f_i(x, t) \rangle = 0$ .

Las características estocásticas del campo  $f_i(x, t)$  están completamente descritas al especificar su tensor de correlación

$$B_{ij}(x, t; x', t') \equiv \langle f_i(x, t) f_j(x', t') \rangle.$$

La aproximación difusiva consiste en reemplazar esta correlación por una correlación efectiva,

$$B_{ij}^{\text{eff}}(x, t; x', t') = 2\delta(t - t') F_{ij}(x, x', t), \quad (3.21)$$

donde  $F_{ij}$  se determina a partir de la condición de la igualdad de las integrales  $B_{ij}$  y  $B_{ij}^{\text{eff}}$  con respecto a  $t'$ ,

$$F_{ij}(x, x', t) = (1/2) \int_{-\infty}^{\infty} dt' B_{ij}(x, t; x', t'). \quad (3.22)$$

Ahora, para obtener la EFP introducimos la densidad de probabilidad para la solución de  $\xi(t)$  del sistema (3.20) como

$$P_t(x) = \langle \delta(x - \xi(t)) \rangle, \quad (3.23)$$

donde  $\xi(t)$  es la solución del sistema (3.20) correspondiente a una realización determinada de  $f(x, t)$ , y el promedio es sobre el arreglo de todas las realizaciones.

Al diferenciar (3.23) con respecto a  $t$ , obtenemos

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \delta(x - \xi(t)) \right\rangle = - \left\langle \frac{d\xi_k}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta(x - \xi(t)) \right\rangle$$

y al tomar en cuenta la ecuación (3.20), puede reescribirse de la siguiente forma

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \delta(x - \xi(t)) [v_k(\xi(t), t) + f_k(\xi(t), t)] \rangle. \quad (3.24)$$

Al usar la identidad

$$\delta(x - \xi(t)) v_k(\xi(t), t) \equiv \delta(x - \xi(t)) v_k(x, t),$$

y al sacar el factor no estocástico fuera del símbolo de promedio y con la definición (3.23), obtenemos

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(x, t) P_t(x) + \langle f_k(x, t) \delta(x - \xi(t)) \rangle]. \quad (3.25)$$

Para calcular el promedio del lado derecho de la ecuación anterior, empleamos la fórmula obtenida por Furutsu y Novikov [22]

$$\langle f(t) R[f] \rangle = \int dt' \langle f(t) f(t') \rangle \left\langle \frac{\delta R[f]}{\delta f(t')} \right\rangle, \quad (3.26)$$

donde  $\frac{\delta R[f]}{\delta f}$  es la derivada funcional de  $R$  con respecto a  $f$  y con la cual se pueden calcular correlaciones de un campo Gaussiano  $f(t)$  ( $\langle f(t) \rangle = 0$ ) con una funcional  $R[f]$  del campo.

Ahora, si usamos la expresión (3.21) para la función de correlación del campo  $f_j(x, t)$ ,

$$\begin{aligned} \langle f(t) R[f] \rangle &= \int dt' 2\delta(t - t') F_{ij}(x, x', t) \left\langle \frac{\partial \delta[f]}{\partial \xi_i} \frac{\delta \xi_i}{\delta f(t')} \right\rangle \\ &= 2F_{ij}(x, x', t) \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \frac{\delta \xi_i}{\delta f(t)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

De esta forma podemos llegar a la EFP

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(x, t) P_t(x) + 2F_{ij}(x, x', t) \frac{\delta \xi_i}{\delta f(t)} \frac{\partial P}{\partial \xi_i}]. \quad (3.28)$$



donde los valores de  $\frac{\delta \xi_i}{\delta f(t)}$  para cada problema particular se obtienen de la funcional

$$\xi_i(t) = \int dt [v_i(\xi, t) + f_i(\xi, t)].$$

y el término  $v_k(x, t)$  se obtiene de la parte determinista de las ecuaciones de movimiento. Notamos que es un método que nos permite obtener EFP directamente de las ecuaciones dinámicas del sistema.

### 3.3.3. Aplicación del método de van Kampen al oscilador armónico con frecuencia fluctuante

De capítulos anteriores obtuvimos una ecuación aproximada para la propagación de una onda electromagnética en un fluido nemático. Esta es:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial \zeta^2} + (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle [1 + \tilde{\varepsilon}_{\perp}] H_x = 0, \quad (3.29)$$

donde  $\tilde{\varepsilon}_{\perp}$  es la parte aleatoria de la permitividad eléctrica perpendicular. Ahora podemos emplear el resultado del método descrito por van Kampen para obtener un valor aproximado a segundo orden en la magnitud de las fluctuaciones del campo  $H_x$ . Definiendo

$$y \equiv \frac{dx}{d\zeta}, \quad x \equiv H_x,$$

para simplificar la notación, podemos escribir la ecuación (3.29) como un sistema de ecuaciones de primer orden,

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{d\zeta} \\ \frac{dx}{d\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle (1 + \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta)) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

el cual puede separarse en una parte independiente y otra dependiente de  $\zeta$ , a saber,

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{d\zeta} \\ \frac{dx}{d\zeta} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Si identificamos

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

al sustituir estas matrices en la ec. (3.11), obtenemos

$$\frac{d}{d\zeta} \left\langle \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle = \left[ \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha^2 \int_0^{\infty} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{\tau A_0} \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-\tau A_0} d\tau \right] \left\langle \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (3.33)$$

Para reducir esta ecuación, es necesario conocer primero qué forma toman  $e^{-\tau A_0}$  y  $e^{\tau A_1}$ .

Para esto nótese que

$$e^{-\tau A_0} = I - \tau A_0 + \frac{\tau^2 A_0^2}{2!} - \frac{\tau^3 A_0^3}{3!} + \frac{\tau^4 A_0^4}{4!} - \frac{\tau^5 A_0^5}{5!} + \dots, \quad (3.34)$$

y como por otro lado

$$A_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -(kl)^2 I,$$

entonces

$$A_0^3 = A_0^2 A_0 = -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle A_0,$$

en donde  $I$  es la matriz identidad. Generalizando, tenemos que

$$A_0^n = (-(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle)^{n/2} I$$

para  $n$  par, y

$$A_0^n = (-(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle)^{(n-1)/2} A_0$$

para  $n$  impar. Ahora podemos reescribir la serie (3.34) como

$$\begin{aligned} e^{-\tau A_0} &= I - \tau A_0 - \frac{\tau^2 (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle I}{2!} + \frac{\tau^3 (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle A_0}{3!} + \frac{\tau^4 ((kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle)^2 I}{4!} + \dots \\ &= \left( 1 - \frac{\tau^2 (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle}{2!} + \frac{\tau^4 ((kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle)^2}{4!} - \dots \right) I \\ &\quad - \left( \tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle} - \frac{\tau^3 (kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle})^3}{3!} + \frac{\tau^5 (kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle})^5}{5!} - \dots \right) \frac{1}{kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}} A_0 \\ &= \cos(\tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}) I - \frac{1}{kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}} \operatorname{sen}(\tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}) A_0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

De la misma forma se encuentra que

$$e^{\tau A_0} = \cos(\tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}) I + \frac{1}{kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}} \sin(\tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}) A_0. \quad (3.36)$$

Con estas expresiones y desarrollando el álgebra necesaria se encuentra que

$$A_1 e^{\tau A_0} A_1(\zeta - \tau) e^{-\tau A_0} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad \text{con}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \sin^2(\tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta - \tau) \\ M_{12} &= (kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle})^3 \sin(\tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}) \cos(\tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta - \tau) \\ M_{21} &= 0 \\ M_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Al sustituir este resultado en (3.11) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \left\langle \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle &= \left[ \begin{pmatrix} 0 & -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \alpha^2 \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\tau \right] \left\langle \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde

$$a_{11} = -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \sin^2(\tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}) \langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta - \tau) \rangle$$

y

$$a_{12} = (kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle})^3 \sin(\tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}) \cos(\tau kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle}) \langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta - \tau) \rangle.$$

Al reescribir este sistema como una sola ecuación de segundo orden y regresando a la notación original donde  $x = H_x$ , se obtiene

$$\frac{d^2 \langle H_x \rangle}{d\zeta^2} = -\alpha^2 (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \frac{1}{2} c_2 \frac{\langle H_x \rangle}{d\zeta} + (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle (\alpha^2 (kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle})^3 \frac{1}{2} c_1 - 1) \langle H_x \rangle \quad (3.38)$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^{\infty} \langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta - \tau) \rangle \sin(2kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle} \tau) d\tau, \\ c_2 &= \int_0^{\infty} \langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta - \tau) \rangle (1 - \cos(2kl \sqrt{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle} \tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Para llegar a estos resultados se usaron las identidades  $\frac{1}{2}\text{sen}2\theta = \text{sen}\theta \cos\theta$  y  $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$ , respectivamente.

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  pueden ser expresadas en términos de la densidad espectral de  $\tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta)$  que se define como

$$S(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta) \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta - \tau) \rangle d\tau,$$

quedando como

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \frac{2kl\sqrt{\langle \varepsilon_\perp \rangle}}{(2kl\sqrt{\langle \varepsilon_\perp \rangle})^2 - \omega^2} d\omega \\ c_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \frac{4i(kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle}{\omega(\omega^2 - 4(kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle)} d\omega. \end{aligned}$$

De las relaciones anteriores se observa que el sistema es mas afectado cuando en la densidad espectral de las fluctuaciones hay frecuencias alrededor de  $\omega = \pm 2kl\sqrt{\langle \varepsilon_\perp \rangle}$ .

### 3.3.4. Ecuación para la función de distribución para una onda electromagnética en un medio con permitividad eléctrica fluctuante (método de van Kampen)

Ahora se empleará el mismo método para obtener una ecuación diferencial para la función de distribución para el caso particular de nuestro sistema, dado por la ec. (3.29).

En el espacio de nuestras variables, se cumple con la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho(y, x, \zeta)}{\partial \zeta} = -\nabla \cdot \vec{j}, \quad (3.39)$$

donde  $\vec{j} = (\dot{y}\rho)\hat{y} + (\dot{x}\rho)\hat{x}$ . De acuerdo con la ec. (3.30)  $\dot{y} = -(kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle (1 + \alpha \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta))x$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial}{\partial x} \{ \partial_\zeta x \rho \} - \frac{\partial}{\partial y} \{ \partial_\zeta y \rho \} \\ &= \left\{ -y \frac{\partial}{\partial x} + (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle (1 + \alpha \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta)) x \frac{\partial}{\partial y} \right\} \rho \\ &= \left\{ \left( -y \frac{\partial}{\partial x} + (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle x \frac{\partial}{\partial y} \right) + (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle \alpha \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta) x \frac{\partial}{\partial y} \right\} \rho. \end{aligned} \quad (3.40)$$

De la expresión anterior podemos identificar fácilmente la parte dependiente e independiente de  $\tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta)$ ,

$$A_0 = (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad A_1 = (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta) x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Para poder emplear la ecuación (3.11), donde  $\langle \rho(y, x, \zeta) \rangle = P(y, x, \zeta)$ , tenemos que saber cómo opera  $e^{-\tau A_0}$  sobre  $P(y, x, \zeta)$ , es decir,

$$\begin{aligned} e^{-\tau A_0} P(y, x, \zeta) &= \exp[-\tau (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle x \frac{\partial}{\partial y}] \exp[\tau y \frac{\partial}{\partial x}] P(y, x, \zeta) \\ &= P(y - \tau (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle x, x + \tau y, \zeta). \end{aligned}$$

Como podemos ver, su acción es una traslación en  $y$  y en  $x$  por las cantidades  $-\tau (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle x$  y  $\tau y$ , respectivamente. Ahora aplicamos  $A_1(t - \tau)$ ,

$$\begin{aligned} A_1(t - \tau) e^{-\tau A_0} P(y, x, \zeta) &= (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle x \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta - \tau) \frac{\partial}{\partial y} P(y - \tau (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle x, x + \tau y, \zeta) \\ &= (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle x \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta - \tau) \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \tau \frac{\partial P}{\partial x} \right) (y - \tau (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle x, x + \tau y, \zeta). \end{aligned} \quad (3.41)$$

El efecto de aplicar  $e^{\tau A_0}$  por el lado izquierdo, es regresar los argumentos a la posición original. Y, nuevamente, tenemos que aplicar  $A_1$

$$\begin{aligned} A_1 e^{\tau A_0} A_1(t - \tau) e^{-\tau A_0} P &= ((kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle)^2 \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta) \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta - \tau) x \frac{\partial}{\partial y} (x - \tau y) \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \tau \frac{\partial P}{\partial x} \right) \\ &= (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle^2 \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta) \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta - \tau) \left[ x^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \tau \frac{\partial P}{\partial y \partial x} \right) - \tau x \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial P}{\partial y} - x \tau \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial P}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

y promediando

$$\begin{aligned} \langle A_1 e^{\tau A_0} A_1(t - \tau) e^{-\tau A_0} \rangle P &= (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle^2 \langle \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta) \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta - \tau) \rangle \left[ x^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau \frac{\partial P}{\partial y \partial x} \right) - \tau x \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial P}{\partial y} - x \tau \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial P}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Finalmente, podemos sustituir estos resultados en la ecuación (3.11) obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \zeta} = & (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle^2 x \frac{\partial P}{\partial y} - y \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha^2 (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle^2 \left[ k_0 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + k_1 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \right. \\ & \left. - k_1 x \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial P}{\partial y} - k_1 x \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial P}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

en donde definimos

$$\begin{aligned} k_0 &= \int_0^{\infty} \langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta - \tau) \rangle d\tau, \\ k_1 &= \int_0^{\infty} \tau \langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta - \tau) \rangle d\tau. \end{aligned}$$

Regresando a nuestra notación original, la ecuación para P es

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \zeta} = & (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle^2 H_x \frac{\partial P}{\partial (\partial_{\zeta} H_x)} - (\partial_{\zeta} H_x) \frac{\partial P}{\partial H_x} + \alpha^2 (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle^2 \\ & \left[ k_0 H_x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial (\partial_{\zeta} H_x)^2} + k_1 H_x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial (\partial_{\zeta} H_x) \partial H_x} \right. \\ & \left. - k_1 H_x \frac{\partial}{\partial (\partial_{\zeta} H_x)} (\partial_{\zeta} H_x) \frac{\partial P}{\partial (\partial_{\zeta} H_x)} - k_1 H_x \frac{\partial}{\partial (\partial_{\zeta} H_x)} (\partial_{\zeta} H_x) \frac{\partial P}{\partial H_x} \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Los coeficientes de difusión en la ecuación anterior, son los coeficientes de los términos que contienen  $\alpha^2 (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle^2$ . Los demás son los términos de arrastre. La ecuación anterior es no lineal en sus coeficientes de difusión, es decir, el coeficiente de difusión depende cuadráticamente de una o más de las variables independientes y por lo tanto no se puede resolver de forma cerrada.

### 3.3.5. Función de distribución en la Aproximación Difusiva

Ahora emplearemos el método de la aproximación difusiva para encontrar la función de distribución asociada a la ecuación para la amplitud del campo  $H_x$  en el cristal líquido. Como ya se ha discutido, la ecuación estocástica que describe la distribución espacial de la componente transversa magnética  $H_x$  es

$$\frac{d^2 H_x}{d\zeta^2} + (kl)^2 \langle \varepsilon \rangle [1 + \tilde{\varepsilon}_{\perp}] H_x = 0, \quad (3.46)$$

donde

$$\tilde{\varepsilon}_{\perp} = \frac{\varepsilon_{\perp} - \langle \varepsilon \rangle}{\langle \varepsilon_{\perp} \rangle},$$

son las fluctuaciones de la permitividad eléctrica.

Para simplificar la notación se utilizará la misma notación que la subsección anterior, además  $\alpha \equiv 1/\langle \varepsilon \rangle$  y  $\tilde{\varepsilon}'_{\perp} \equiv \varepsilon_{\perp} - \langle \varepsilon_{\perp} \rangle$ . Entonces la ecuación (3.46) se reescribe como el siguiente sistema de ecuaciones de primer orden,

$$y = \frac{dx}{d\zeta}, \quad (3.47)$$

$$\frac{dy}{d\zeta} = -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle (1 + \alpha \tilde{\varepsilon}'_{\perp}(\zeta))x. \quad (3.48)$$

Por sencillez en la notación, de ahora en adelante omitiremos la prima de la parte fluctuante de la permitividad eléctrica.

Nuestro objetivo es encontrar una ecuación tipo Fokker-Planck para las variables independientes  $(x, y)$ . Para esto definimos una función de distribución asociada con la solución del sistema de ecuaciones anterior,

$$P(x, y, \zeta) = \langle \delta[x - x(\zeta)] \delta[y - y(\zeta)] \rangle \equiv \langle R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}] \rangle. \quad (3.49)$$

Aquí  $x(\zeta)$  y  $y(\zeta)$  son soluciones de las ecuaciones (3.47) y (3.48) correspondientes a una realización particular de  $\tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta)$  y el promedio se realiza sobre todas las posibles realizaciones del ruido. La función de distribución cumple con una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.50)$$

con

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y},$$

y

$$\vec{j} = \langle (yR[\tilde{\varepsilon}_{\perp}], \dot{y}R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}]) \rangle,$$

$\dot{y}$  denota derivada con respecto a  $\zeta$  y el operador  $\nabla$  actúa sobre el espacio de las variables  $(x, y)$  y, por lo tanto, el flujo  $\vec{j}$  está en este espacio. Al escribir en forma explícita el flujo  $\vec{j}$  y  $\nabla$ , la ec. (3.50) toma la forma

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{\partial \langle yR[\tilde{\varepsilon}_{\perp}] \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \dot{y}R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}] \rangle}{\partial y} = 0. \quad (3.51)$$

El flujo de nuestra función de distribución estará determinado por las ecuaciones de movimiento (3.47) y (3.48).

Sustituyendo  $\dot{y}$  en (3.51) encontramos

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} + y \frac{\partial P}{\partial x} - (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle x \frac{\partial P}{\partial y} - (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \alpha x \frac{\langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}] \rangle}{\partial y} = 0. \quad (3.52)$$

**Evaluación de  $\langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}] \rangle$ .**

$R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}] = \delta[x - x(\zeta)]\delta[y - y(\zeta)]$  es una funcional de la variable estocástica  $\tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta)$ . Para expresar  $\langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}] \rangle$  en términos de  $P$  utilizaremos la fórmula de Furutsu-Novikov [22].

$$\langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}] \rangle = \int \langle \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta) \tilde{\varepsilon}_{\perp}(s) \rangle \left\langle \frac{\delta R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}]}{\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}(s)} \right\rangle ds. \quad (3.53)$$

En donde  $\frac{\delta}{\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}(s)}$  denota la derivada funcional de  $R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}]$ . Evaluaremos primero  $\frac{\delta R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}]}{\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}(z)}$ .

$$\frac{\delta R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}]}{\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}(z)} = \frac{\partial R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}]}{\partial x} \left( -\frac{\delta x(\zeta)}{\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}} \right) + \frac{\partial R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}]}{\partial y} \left( -\frac{\delta y(\zeta)}{\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}} \right), \quad (3.54)$$

en donde se empleó la regla de la cadena, ya que  $R$  es función de las coordenadas de nuestro espacio extendido las cuales, a su vez, son funcionales de  $\tilde{\varepsilon}_{\perp}$ .

De las ecuaciones de movimiento (3.47) y (3.48) obtenemos las funcionales,

$$x(\zeta) = \int_0^{\zeta} y ds, \quad (3.55)$$

$$y(\zeta) = \int_0^{\zeta} [-(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle (1 + \alpha \tilde{\varepsilon}_{\perp}(s)) x] ds, \quad (3.56)$$

y a partir de ellas evaluamos las derivadas

$$\frac{\delta x(\zeta)}{\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}} = 0, \quad \frac{\delta y(\zeta)}{\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}} = -(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \alpha x. \quad (3.57)$$

Empleando la solución anterior en (3.54) obtenemos la igualdad

$$\frac{\delta R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}]}{\delta \tilde{\varepsilon}_{\perp}(\zeta)} = (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \alpha x \frac{\partial R[\tilde{\varepsilon}_{\perp}]}{\partial y}, \quad (3.58)$$



que al sustituirla en (3.53) implica que

$$\langle \tilde{\varepsilon}_\perp R[\tilde{\varepsilon}_\perp] \rangle = (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle \alpha x \int_0^\infty \langle \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta) \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta + z) \rangle dz \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (3.59)$$

donde se usó la definición (3.49) y se hizo el cambio de variable  $s = \zeta + z$ . Finalmente, sustituyendo este resultado en la ecuación (3.52) obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} + y \frac{\partial P}{\partial x} - (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle x \frac{\partial P}{\partial y} - ((kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle \alpha x)^2 k_0 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (3.60)$$

con

$$k_0 = \int_0^\infty \langle \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta) \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta + z) \rangle dz.$$

Al reescribirla en la notación original obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} + (\partial_\zeta H_x) \frac{\partial P}{\partial H_x} - (kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle H_x \frac{\partial P}{\partial (\partial_\zeta H_x)} - ((kl)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle \alpha x)^2 k_0 \frac{\partial^2 P}{\partial (\partial_\zeta H_x)^2} = 0 \quad (3.61)$$

Ahora podemos comparar las ecuaciones (3.45) y (3.61). De estas ecuaciones, se ve que el método de van Kampen toma en cuenta tiempos de correlación del ruido diferentes de cero, mientras que la aproximación difusiva se aplica sólo cuando  $\tau \sim 0$ . La ecuación (3.45) da el mismo resultado que (3.61) cuando  $k_1 = 0$ . Recordando la definición de

$$k_1 = \int_0^\infty \tau \langle \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta) \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta - \tau) \rangle d\tau,$$

se observa que cuando  $\tau \ll 1$  entonces  $k_1 \approx 0$ .

Este resultado es de esperarse ya que en la aproximación difusiva se supuso explícitamente que  $\langle \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta) \tilde{\varepsilon}_\perp(\zeta - \tau) \rangle = \delta(\zeta)$ . El análisis sólo nos muestra que en el límite apropiado los dos métodos son equivalentes. En este trabajo nos interesa estudiar la influencia del ruido externo en el cristal líquido, en particular el ruido en los instrumentos electrónicos que no siempre es blanco. Tomando en cuenta lo anterior y para no perder generalidad al sólo tomar en cuenta ruido blanco, en el trabajo posterior se empleará el método de van Kampen que puede ser usado también para ruido de color.

# Capítulo 4

## Tratamiento Estocástico del Modelo

### 4.1. La expansión sistemática

En la aproximación de van Kampen, encontramos la ecuación para la distribución de probabilidad  $P$  de la componente transversa magnética  $H_x$  en el medio fluctuante,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \zeta} = & (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle^2 H_x \frac{\partial P}{\partial (\partial_{\zeta} H_x)} - (\partial_{\zeta} H_x) \frac{\partial P}{\partial H_x} + \alpha^2 (kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle^2 \left[ k_0 H_x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial (\partial_{\zeta} H_x)^2} \right. \\ & + k_1 H_x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial (\partial_{\zeta} H_x) \partial H_x} - k_1 H_x \frac{\partial}{\partial (\partial_{\zeta} H_x)} (\partial_{\zeta} H_x) \frac{\partial P}{\partial (\partial_{\zeta} H_x)} \\ & \left. - k_1 H_x \frac{\partial}{\partial (\partial_{\zeta} H_x)} (\partial_{\zeta} H_x) \frac{\partial P}{\partial H_x} \right]. \end{aligned}$$

Por simplicidad en la notación, se empleará la misma notación que en el capítulo anterior además,  $(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle \equiv A$ ,  $(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle^2 k_0 \equiv b$  y  $(kl)^2 \langle \varepsilon_{\perp} \rangle^2 k_1 \equiv c$ . Entonces la ecuación anterior queda de la forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \zeta} = & Ax \frac{\partial P}{\partial y} - y \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha^2 \left[ bx^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + cx^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \right. \\ & \left. - cx \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial P}{\partial y} - cx \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial P}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Recuérdese que el parámetro  $\alpha$  mide la magnitud de las fluctuaciones, y si las fluctuaciones son pequeñas, es un buen parámetro de expansión. Para

resolver (4.1), haremos una expansión sistemática en potencias sucesivas de  $\alpha$ , como la desarrollada por van Kampen [2] para la ecuación maestra. La aplicación de este método a la EFP es un aspecto original de este trabajo. En la literatura se han empleado otros métodos de aproximación para resolver este tipo de ecuaciones [48, 49, 50, 51], pero no hay un acuerdo general en los métodos de aproximación. Aquí se empleará el método de van Kampen [33] que es un desarrollo sistemático en potencias de un parámetro bien definido.

Para lograr una expansión sistemática se hace la siguiente transformación, que hace explícita la dependencia de las variables del problema en el parámetro de expansión  $\alpha$ :

$$x = \phi(\zeta) + \alpha\xi \quad (4.2)$$

$$y = \psi(\zeta) + \alpha\eta. \quad (4.3)$$

Estas ecuaciones expresan que  $x$  y  $y$  consisten en dos partes, la parte macroscópica cuya dependencia en  $\zeta$  está descrita por las funciones desconocidas  $\phi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  que tendrán que ser determinadas consistentemente y que describen la evolución del sistema en ausencia de fluctuaciones, y una parte fluctuante de orden  $\alpha$  alrededor de  $\phi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$ . El parámetro  $\alpha$  se puede interpretar como el inverso del tamaño del sistema. Así, a mayor tamaño las fluctuaciones serán más pequeñas y por lo tanto también el parámetro  $\alpha$  [2]. De acuerdo con esto, la distribución de probabilidad  $P(x, y, \zeta)$  será ahora una distribución de probabilidad para las nuevas variables  $\xi$ ,  $\eta$ . Es decir,

$$P(x, y, \zeta) = P[\phi(\zeta) + \alpha\xi, \psi(\zeta) + \alpha\eta, \zeta] = \Pi(\xi, \eta, \zeta). \quad (4.4)$$

De las ecuaciones (4.2) y (4.3) obtenemos la dependencia de  $\xi$  y  $\eta$  en  $x$ ,  $y$  y  $\zeta$

$$\xi(x, \zeta) = \alpha^{-1}(x - \phi(\zeta)), \quad (4.5)$$

$$\eta(y, \zeta) = \alpha^{-1}(y - \psi(\zeta)). \quad (4.6)$$

Empleando la regla de la cadena y las ecuaciones anteriores, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} \\ &= -\alpha^{-1} \dot{\phi} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \alpha^{-1} \dot{\psi} \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \alpha^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \alpha^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta \partial \xi}. \quad (4.9)$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación de Fokker-Planck (4.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} + \alpha^{-1} [-\dot{\phi} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \dot{\psi} \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}] &= \alpha^{-1} A \phi \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} + \alpha \xi \alpha^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} - \psi \alpha^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \alpha \eta \alpha^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \\ &+ \alpha^2 [b(\phi + \alpha \xi)^2 \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} + c(\phi + \alpha \xi)^2 \alpha^{-2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta \partial \xi}] \\ &- \alpha^2 c(\phi + \alpha \xi) \alpha^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} (\psi + \alpha \eta) \alpha^{-1} \frac{\Pi}{\partial \eta} \\ &- \alpha^2 c(\phi + \alpha \xi) \alpha^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} (\psi + \alpha \eta) \alpha^{-1} \frac{\Pi}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Exigimos que  $\phi$  y  $\psi$  satisfagan las leyes macroscópicas que se obtienen de la ec(3.30) cuando  $\alpha = 0$ ,

$$\dot{\phi} = \psi \quad (4.11)$$

y

$$\dot{\psi} = -A\phi. \quad (4.12)$$

Que igualando los términos de orden más bajo  $\alpha^{-1}$ , se encuentra que el segundo término del lado izquierdo de la ecuación anterior se cancela con el tercer término del lado derecho si  $\phi(\zeta)$  obedece (4.11). De la misma forma, el segundo término del lado izquierdo se cancelará con el primero del lado derecho, si  $\psi(\zeta)$  obedece (4.12).

Al tomar los términos restantes obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} &= A \xi \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + \phi^2 b \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} + \phi^2 c \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta \partial \xi} - c \phi \frac{\partial}{\partial \eta} \psi \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} - c \phi \frac{\partial}{\partial \eta} \psi \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \\ &+ \alpha^2 \phi \xi (b \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} + c \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta \partial \xi}) - \alpha c \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \psi \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} - \alpha c \phi \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} \\ &- \alpha c \phi \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \alpha c \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \psi \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \\ &+ \alpha^2 \xi^2 (b \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} + c \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta \partial \xi}) - \alpha^2 c \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} - \alpha^2 c \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La ecuación anterior se empleará para hacer un análisis de las fluctuaciones.

### 4.1.1. Análisis de la Expansión Sistemática

#### Orden $\alpha^{-1}$

Anteriormente se había dicho que los términos de orden  $\alpha^{-1}$  se eliminan si cumplen con el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \psi, \\ \dot{\psi} &= -A\phi.\end{aligned}$$

La solución para este sistema de ecuaciones con condiciones iniciales dadas  $\phi(0)$ ,  $\psi(0)$  es

$$\begin{aligned}\phi &= \cos[\sqrt{A}\zeta]\phi(0) + \frac{\psi(0)}{\sqrt{A}}\text{sen}[\sqrt{A}\zeta] \\ \psi &= \psi(0)\cos[\sqrt{A}\zeta] - \phi(0)\sqrt{A}\text{sen}[\sqrt{A}\zeta].\end{aligned}$$

que representa la trayectoria del sistema en ausencia de fluctuaciones.

#### Orden $\alpha^0$

Al tomar en cuenta sólo los términos de orden  $\alpha^0$  en la ec. (4.13) tenemos la siguiente ecuación para  $\Pi$ ,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\zeta} = A\xi\frac{\partial\Pi}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} + \phi^2b\frac{\partial^2\Pi}{\partial\eta^2} + \phi^2c\frac{\partial^2\Pi}{\partial\eta\partial\xi} - c\phi\frac{\partial}{\partial\eta}\psi\frac{\partial\Pi}{\partial\eta} - c\phi\frac{\partial}{\partial\eta}\psi\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}.$$

El coeficiente de difusión de esta ecuación es función de la distancia  $\zeta$  a través de  $\phi$  y  $\psi$ , sin embargo ya no depende de ninguna de las variables independientes. Esta ecuación es una EFP multivariada, lineal con coeficientes dependientes de  $\zeta$  y puede ser resuelta de forma cerrada. Esta aproximación es la aproximación gaussiana, es decir, las fluctuaciones se toman como si tuvieran una distribución gaussiana. A continuación se grafica la solución para distintos valores de  $\zeta$  con la condición inicial  $\Pi(\eta, \xi, \zeta = 0) = \delta(\eta - 0)\delta(\xi - 0)$ , figura 4.1.1.

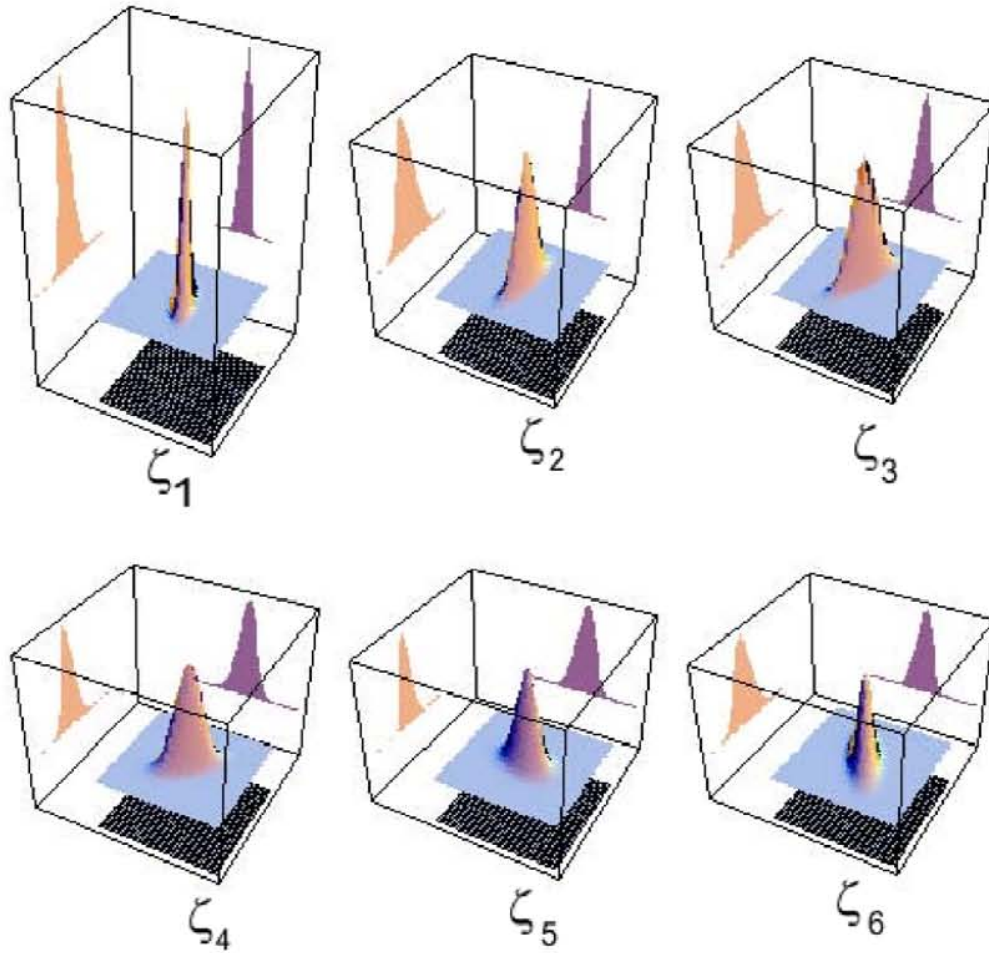


Figura 4.1: Aproximación gaussiana para distintos valores de  $\zeta$ .

### Orden $\alpha^1$

Al tomar en cuenta términos de orden superior en  $\alpha$ , se encuentran correcciones a la aproximación gaussiana:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = & A\xi \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + \phi^2 b \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} + \phi^2 c \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta \partial \xi} - c\phi \frac{\partial}{\partial \eta} \psi \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} - c\phi \frac{\partial}{\partial \eta} \psi \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \\
 & + \alpha 2\phi \xi \left( b \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} + c \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta \partial \xi} \right) - \alpha c \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \psi \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} - \alpha c \phi \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} \\
 & - \alpha c \phi \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \alpha c \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \psi \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Notamos que el método de van Kampen permite ir más allá de la aproximación Gaussiana, a diferencia de otros métodos. Sin embargo, estas correcciones usualmente se desprecian si las fluctuaciones son pequeñas. Vemos que a orden  $\alpha^1$ , el coeficiente de difusión en la EFP es lineal en las variables independientes. Lo anterior hace que ya no sea posible obtener una solución analítica.

### Autocorrelación y Espectro de Fluctuaciones

Como para obtener las autocorrelaciones y el espectro de fluctuaciones es necesario encontrar solamente las ecuaciones diferenciales de los primeros y segundos momentos, emplearemos la ecuación (4.13) que tiene todas las correcciones a la aproximación gaussiana. Además esta ecuación describe la desviación del comportamiento del sistema sin fluctuaciones, por lo que es esta ecuación la que tenemos utilizar para analizar el comportamiento de las fluctuaciones.

Al multiplicar la Ec.(4.13) por las variables independientes y luego integrar por partes, encontramos ecuaciones diferenciales para los primeros y segundos momentos,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \xi \rangle = \langle \eta \rangle \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \eta \rangle = (-A + \alpha^2 c) \langle \xi \rangle - \alpha^2 c \langle \eta \rangle + \alpha c (\phi - \psi) \quad (4.16)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \xi^2 \rangle = 2 \langle \eta \xi \rangle \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \eta^2 \rangle &= -2(A + \alpha^2 c) \langle \xi \eta \rangle + \alpha(4c\phi - 2c\psi) \langle \xi \rangle + \alpha^2 2b \langle \xi^2 \rangle - \alpha^2 2c \langle \eta^2 \rangle \\ &\quad + 2b\phi^2 - 2c\phi\psi - \alpha^2 2c\psi \langle \eta \rangle \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \xi \eta \rangle &= (-A + 2\alpha^2 c) \langle \xi^2 \rangle + \langle \eta^2 \rangle + \alpha 3c\phi \langle \xi \rangle - \alpha 2c\psi \langle \xi \rangle \\ &\quad - \alpha c\phi \langle \eta \rangle - \alpha^2 2c \langle \xi \eta \rangle + c\phi(\phi - \psi). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para una descripción estacionaria de las fluctuaciones, tenemos que tomar el promedio temporal en las ecuaciones anteriores para los momentos. Recordemos que previamente se separó la dependencia temporal de la espacial y

sólo se trabajó con la parte espacial, por lo tanto, las ecuaciones anteriores nos dan una descripción espacial.

Al promediar con respecto al tiempo y tomando en cuenta que la dependencia temporal de la onda tiene la forma  $e^{i\omega t}$ , se tienen las siguientes ecuaciones para los momentos de las fluctuaciones

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \xi \rangle = \langle \eta \rangle, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \eta \rangle = -A' \langle \xi \rangle - \alpha^2 c \langle \eta \rangle, \quad (4.21)$$

$$A' = A - \alpha^2 c. \quad (4.22)$$

De la misma forma,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \xi^2 \rangle = 2 \langle \eta \xi \rangle, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \eta^2 \rangle = -2(A + \alpha^2 c) \langle \xi \eta \rangle + \alpha^2 2b \langle \xi^2 \rangle - \alpha^2 2c \langle \eta^2 \rangle + 2b \langle \phi^2 \rangle_t, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \xi \eta \rangle = (-A + 2\alpha^2 c) \langle \xi^2 \rangle + \langle \eta^2 \rangle - 2\alpha^2 c \langle \xi \eta \rangle + c \langle \phi^2 \rangle_t. \quad (4.25)$$

El subíndice  $t$  en el promedio denota promedio temporal.

A partir de estas ecuaciones encontramos que los valores de equilibrio son,

$$\langle \xi^2 \rangle^{\text{eq}} = -\frac{b \langle \phi^2 \rangle_t + \alpha^2 c^2 \langle \phi^2 \rangle_t}{\alpha^2 b - A c \alpha^2 + 2\alpha^4 c^2}, \quad (4.26)$$

$$\langle \eta^2 \rangle^{\text{eq}} = -\frac{A b \langle \phi^2 \rangle_t - b c \alpha^2 \langle \phi^2 \rangle_t}{\alpha^2 (b - A c + 2\alpha^2 c^2)}, \quad (4.27)$$

$$\langle \xi \eta \rangle^{\text{eq}} = 0. \quad (4.28)$$

Estos valores en equilibrio nos ayudarán a obtener la función de Autocorrelación.

### **Función de Autocorrelación y Espectro de Fluctuaciones**

Para calcular el espectro de fluctuaciones primero tenemos que calcular la función de autocorrelación

$$\langle q_0 \langle q(\zeta) \rangle_{q_0} \rangle^{\text{eq}}, \quad (4.29)$$



donde  $q$  puede representar  $\xi$  o  $\eta$ , y  $q_0$  es el conjunto de valores iniciales  $\xi_0, \eta_0$ . La notación indica lo siguiente: tomar un cierto valor  $q_0$  a  $\zeta = 0$ , calcular el promedio  $\langle q(\zeta) \rangle_{q_0}$  condicional a la  $q_0$  dada; multiplicar este promedio condicionado por  $q_0$  y promediar este producto sobre los valores de  $q_0$ , de acuerdo a la distribución de equilibrio. Por lo tanto, la tarea principal es calcular los promedios condicionados  $\langle \xi(\zeta) \rangle_{\xi_0, \eta_0}, \langle \eta(\zeta) \rangle_{\xi_0, \eta_0}$ . Estos promedios los obtenemos al resolver las Ecs. (4.20),(4.21) simultáneamente, a saber:

$$\begin{aligned} \langle \xi(\zeta) \rangle_{\xi_0, \eta_0} &= (2(-1 + e^{\zeta\lambda})\eta_0 + (c(-1 + e^{\zeta\lambda})\alpha^2 \\ &\quad + (1 + e^{\zeta\lambda})\lambda)\xi_0)e^{-\frac{1}{2}\zeta(c\alpha^2 + \lambda)} / (2\lambda), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \langle \eta(\zeta) \rangle_{\xi_0, \eta_0} &= (-2A'(-1 + e^{\zeta\lambda})\xi_0 + (-c(-1 + e^{\zeta\lambda})\alpha^2 \\ &\quad + (1 + e^{\zeta\lambda})\lambda)\eta_0)e^{-\frac{1}{2}\zeta(c\alpha^2 + \lambda)} / 2\lambda, \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde se definió  $\lambda = \sqrt{-4A' + c^2\alpha^4}$ .

A continuación evaluaremos la correlación posición-posición. Usando (4.29) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle q_0 \langle q(\zeta) \rangle_{q_0} \rangle^{\text{eq}} &= (2(-1 + e^{\zeta\lambda})\langle \xi\eta \rangle^{\text{eq}} + (c(-1 + e^{\zeta\lambda})\alpha^2 \\ &\quad + (1 + e^{\zeta\lambda})\lambda)\langle \xi^2 \rangle^{\text{eq}}) \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta(c\alpha^2 + \lambda)}}{(2\lambda)} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} &= \left( (c(-1 + e^{\zeta\lambda})\alpha^2 + (1 + e^{\zeta\lambda})\lambda) \left( -\frac{b\langle \phi^2 \rangle_t + \alpha^2 c^2 \langle \phi^2 \rangle_t}{\alpha^2 b - A c \alpha^2 + 2\alpha^4 c^2} \right) \right) \\ &\quad \times \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta(c\alpha^2 + \lambda)}}{(2\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Tomando en cuenta que en forma natural en muchos experimentos espectroscópicos (dispersión de neutrones, luz, ultrasonido, etc.) la respuesta del sistema se mide en función de la frecuencia, es conveniente calcular la densidad espectral de la correlación anterior. De acuerdo con el teorema de Wiener-Khinchine, el espectro de fluctuaciones está dado por la transformada de Fourier de la función de correlación

$$S(\Omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \langle q_0 \langle q(\zeta) \rangle_{q_0} \rangle^{\text{eq}} e^{i\Omega\zeta} d\zeta. \quad (4.34)$$

Entonces, para la autocorrelación de posición-posición (4.33) encontramos el espectro

$$S(\Omega) = -\frac{\langle \phi^2 \rangle_t (b + \alpha^2 c^2) 2\lambda (\alpha^2 c - i\Omega)}{(\pi\lambda (b\alpha^2 - A c \alpha^2 + 2c^2 \alpha^4)) (A' + i\Omega(-c\alpha^2 + i\Omega))} \quad (4.35)$$

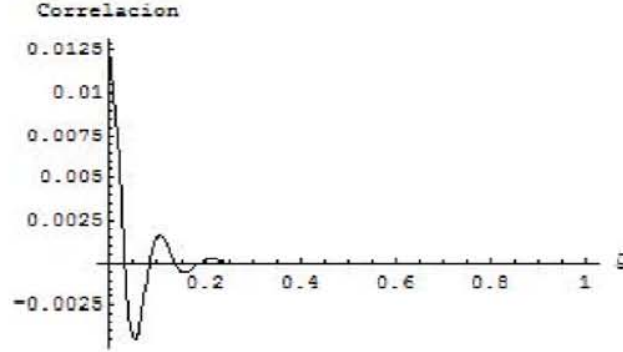


Figura 4.2: Correlación posición-posición.  $l/\lambda = 100$ ,  $k_0 = 0,1$ ,  $k_1 = 0,01$

En general, este espectro es una superposición de componentes individuales fundamentales. Para identificarlas, se hará un desarrollo en fracciones parciales de la parte real de  $S(\Omega)$ . Así se encuentra,

$$S(\Omega) = \left( \frac{-2\langle\phi^2\rangle_t(b + \alpha^2 c^2)}{\pi\lambda(b\alpha^2 - Aca^2 + 2c^2\alpha^4)} \right) \times \left( \frac{(\alpha^2 c + \lambda)}{(c\alpha^2 - \lambda)(1 + \frac{4\Omega^2}{(-c\alpha^2 + \lambda)^2})} + \frac{(-\alpha^2 c + \lambda)}{(c\alpha^2 + \lambda)(1 + \frac{4\Omega^2}{(c\alpha^2 + \lambda)^2})} \right).$$

Esta expresión anterior, indica que el espectro no es simple y es la suma de dos Lorentzianas. En la Fig.(4.3) se grafica éste espectro de fluctuaciones para valores específicos de los parámetros involucrados.

De la gráfica (4.3) se observa que el espectro tiene un comportamiento bimodal con una depresión central. Esta estructura es reminiscente de los espectros de dispersión de luz que se observan en otros fluidos complejos, como son algunas soluciones poliméricas [52, 53].

## 4.2. Empleo de Aproximación Paraxial no vectorial

Cuando una onda electromagnética se propaga en un medio con inhomogeneidades espaciales a escalas grandes en comparación con la longitud de onda, las dispersiones múltiples causan que las fluctuaciones en la onda se

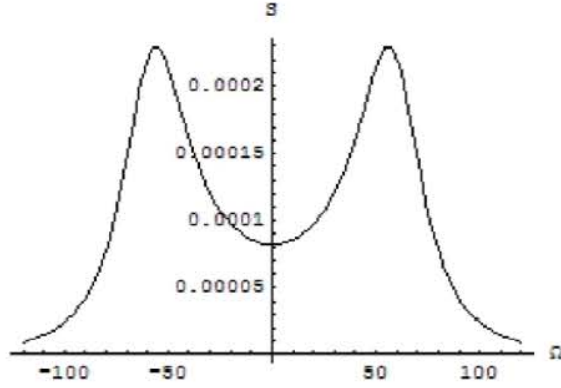


Figura 4.3: Espectro de fluctuaciones.  $l/\lambda = 100$ ,  $k_0 = 0,1$ ,  $k_1 = 0,01$

incrementen rápidamente con la longitud de penetración. A continuación se estudia este efecto causado por las fluctuaciones de  $\tilde{\varepsilon}_\perp$ . De ahora en adelante se omitirá el subíndice  $\perp$ .

#### 4.2.1. Propagación de Luz Monocromática

La propagación de luz monocromática en un cristal líquido con inhomogeneidades espaciales en el director en escala grande en relación con la longitud de onda y cuando la depolarización es pequeña, puede ser descrita con suficiente precisión por una ecuación de onda escalar (3.29)

$$\nabla^2 H_x + k^2[1 + \tilde{\varepsilon}(\vec{r})]H_x = 0. \quad (4.36)$$

Aquí  $H_x$  esta relacionada con el campo magnético  $\mathcal{H}_x$  por la relación  $\mathcal{H}_x = H_x \exp(-i\omega t)$ ,  $k^2 = (\frac{\omega}{c}l)^2 \langle \varepsilon_\perp \rangle$ , donde  $\tilde{\varepsilon}(\vec{r}) = [\varepsilon(\vec{r}) - \langle \varepsilon \rangle] / \langle \varepsilon \rangle$  es la parte fluctuante de la permitividad eléctrica. Si despreciamos la dispersión a ángulos grandes, entonces podemos usar en lugar de (4.36) una ecuación para  $u(z)$ , la cual esta conectada con  $H_x$  por la relación

$$\begin{aligned} H_x &= u \exp(ikz) \\ 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + \Delta_\perp u + k^2 \tilde{\varepsilon}(z, \rho) u(z, \rho) &= 0, \\ \rho = \{x, y\}, \quad \Delta_\perp &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

donde el eje  $z$  es la dirección inicial de propagación de la onda y  $u$  es una amplitud compleja. Nótese que al pasar de (4.36) a (4.37), se despreció el

término  $\partial^2 u / \partial z^2$ . A esta aproximación se le llama la aproximación paraxial y equivale, precisamente, a no tomar en cuenta reflexiones a ángulos grandes.

Ahora tenemos las dos ecuaciones estocásticas,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{i}{2k}(\Delta_{\perp} u + k^2 \tilde{\varepsilon}(z, \rho) u(z, \rho)), \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z} = \frac{-i}{2k}(\Delta_{\perp} u^* + k^2 \tilde{\varepsilon}(z, \rho) u^*(z, \rho)), \quad (4.39)$$

Para obtener la ecuación de Fokker-Planck asociada empleamos nuevamente el método de van Kampen.

Recuérdese que para la ecuación estocástica se cumple una ecuación de continuidad en el espacio de nuestras variables

$$\frac{\partial \varrho(u, u^*, \zeta)}{\partial \zeta} = -\nabla \cdot \vec{J}, \quad (4.40)$$

donde  $\vec{J} = (\dot{u}\varrho)\hat{u} + (\dot{u}^*\varrho)\hat{u}^*$  y  $\nabla = \int d\rho \hat{u} \frac{\delta}{\delta u} + \hat{u}^* \frac{\delta}{\delta u^*}$ , donde empleamos derivada funcional  $\frac{\delta}{\delta u}$  porque ahora la función de distribución es una funcional de  $\rho$ . Lo anterior es debido a que se tomará en cuenta la dependencia de la intensidad con respecto a las coordenadas perpendiculares y no sólo la coordenada en la dirección de propagación. De las ecuaciones (4.38) y (4.39) se obtiene  $\dot{u}$  y  $\dot{u}^*$  respectivamente. La ecuación (4.40) toma entonces la siguiente forma para el caso aquí tratado,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \zeta} = \int d\rho \left[ -\frac{\delta}{\delta u} \left\{ \frac{i}{2k} (\Delta_{\perp} + k^2 \tilde{\varepsilon}(x, \rho) u) \right\} + \frac{\delta}{\delta u^*} \left\{ \frac{i}{2k} (\Delta_{\perp} u^* + k^2 \tilde{\varepsilon}(x, \rho) u^*) \right\} \right] \varrho \quad (4.41)$$

Reescribimos la ecuación anterior separando la parte del operador no estocástica de la parte estocástica,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \zeta} = \int d\rho \left[ \underbrace{-\frac{i}{2k} (\Delta_{\perp} u \frac{\delta}{\delta u} - \Delta_{\perp} u^* \frac{\delta}{\delta u^*})}_{A_0} - \frac{ik}{2} \tilde{\varepsilon}(x, \rho) \underbrace{(\frac{\delta}{\delta u} u(x, \rho) - \frac{\delta}{\delta u^*} u^*(x, \rho))}_{A_1} \right] \varrho. \quad (4.42)$$

De donde vemos que  $A_0$  es la parte no estocástica del operador y  $A_1$  es su parte estocástica.

Ahora utilizaremos la ecuación (3.11)

$$\partial_t \langle u(t) \rangle = \left[ A_0 + \alpha^2 \int_0^{\infty} \langle A_1(t) e^{\tau A_0} A_1(t - \tau) \rangle e^{-\tau A_0} d\tau \right] \langle u(t) \rangle,$$

para obtener  $\langle \rho \rangle = P(u, u^*, \zeta)$ . Primero se observa que el operador

$$e^{-\tau A_0} = \exp\left[\int d\rho\left(\frac{i\tau\Delta_{\perp}u}{2k}\frac{\delta}{\delta u} - \frac{i\tau\Delta_{\perp}u^*}{2k}\frac{\delta}{\delta u^*}\right)\right]$$

es una traslación por  $\frac{i\tau\Delta_{\perp}u}{2k}$  y  $-\frac{i\tau\Delta_{\perp}u^*}{2k}$  en  $u$  y  $u^*$  respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} A_1(\zeta - \tau, \rho)e^{-\tau A_0}P(u, u^*, \zeta) &= -\frac{ik}{2}\tilde{\varepsilon}(\zeta - \tau)\int d\rho\left(\frac{\delta}{\delta u(\rho)}u(\zeta - \tau, \rho)\right. \\ &\quad \left.\frac{\delta}{\delta u^*(\rho)}u^*(\zeta - \tau, \rho)\right)P\left(u + \frac{i\tau}{2k}\Delta_{\perp}u, u^* - \frac{i\tau}{2k}\Delta_{\perp}u^*\right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} e^{\tau A_0}A_1(\zeta - \tau, \rho)e^{-\tau A_0}P(u, u^*, \zeta) &= -\frac{ik}{2}\tilde{\varepsilon}(\zeta - \tau)\int d\rho\left[\frac{\delta}{\delta u(\rho)}\left\{u - \frac{i\tau}{2k}\Delta_{\perp}u\right\}\right. \\ &\quad \left.-\frac{\delta}{\delta u^*(\rho)}\left\{u^* + \frac{ik}{2k}\Delta_{\perp}u^*\right\}\right]P(u, u^*, \zeta), \end{aligned} \quad (4.44)$$

y finalmente,

$$\begin{aligned} A_1(\zeta, \rho_1)e^{\tau A_0}A_1(\zeta - \tau, \rho)e^{-\tau A_0}P(u, u^*, \zeta) &= -\frac{k^2}{4}\tilde{\varepsilon}(\zeta, \rho)\tilde{\varepsilon}(\zeta - \tau, \rho) \times \\ &\quad \int d\rho_1 d\rho\left[\frac{\delta}{\delta u(\rho_1)}u(\zeta, \rho_1)\frac{\delta}{\delta u(\rho)}u(\zeta - \tau, \rho)\right. \\ &\quad -\frac{\delta}{\delta u(\rho_1)}u(\zeta, \rho_1)\frac{\delta}{\delta u^*(\rho)}u^*(\zeta - \tau, \rho) - \frac{\delta}{\delta u^*(\rho_1)}u^*(\zeta, \rho_1)\frac{\delta}{\delta u(\rho)}u(\zeta - \tau, \rho) \\ &\quad +\frac{\delta}{\delta u^*(\rho_1)}u^*(\zeta, \rho_1)\frac{\delta}{\delta u^*(\rho)}u^*(\zeta - \tau, \rho) \\ &\quad -\frac{i\tau}{2k}\Delta_{\perp}u(\rho)\left(\frac{\delta}{\delta u(\rho_1)}u(\rho_1)\frac{\delta}{\delta u(\rho)} + \frac{\delta}{\delta u^*(\rho_1)}u^*(\rho_1)\frac{\delta}{\delta u(\rho)}\right) \\ &\quad \left.-\frac{i\tau}{2k}\Delta_{\perp}u^*(\rho)\left(\frac{\delta}{\delta u(\rho_1)}u(\rho_1)\frac{\delta}{\delta u^*(\rho)} + \frac{\delta}{\delta u^*(\rho_1)}u^*(\rho_1)\frac{\delta}{\delta u^*(\rho)}\right)\right]P. \end{aligned}$$

Se observa que si se emplea la igualdad anterior en la ecuación (3.11) se obtiene una ecuación Fokker-Planck que en la aproximación difusiva, es decir

para  $\tau = 0$ , toma la forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \zeta} = & -\frac{i}{2k} \int d\rho (\Delta_{\perp} u \frac{\delta}{\delta u} - \Delta_{\perp} u^* \frac{\delta}{\delta u^*}) \\ & -\frac{k^2}{4} C(\rho_1 - \rho) \int d\rho_1 d\rho [(\frac{\delta}{\delta u(\rho_1)} u(\rho_1) - \frac{\delta}{\delta u(\rho_1)} u(\rho_1)) (\frac{\delta}{\delta u(\rho)} u(\rho) \\ & - \frac{\delta}{\delta u(\rho)} u(\rho))] P. \end{aligned}$$

donde  $C(\rho_1 - \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \tilde{\varepsilon}(\zeta, \rho_1) \tilde{\varepsilon}(\zeta - \tau, \rho) \rangle$ .

A partir de la ecuación anterior se obtiene el primer momento de la amplitud así como la función de coherencia de segundo orden definida como  $\Gamma(\zeta, \rho_1 - \rho) = \langle u(\zeta, \rho_1) u^*(\zeta, \rho) \rangle$ ,

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \zeta} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \langle u \rangle - \frac{k^2}{8} C(\rho_1 - \rho) \langle u \rangle \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle \Gamma \rangle = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \rho_1 \partial \rho} - \frac{k^2}{4} D(\Delta \rho) \Gamma \quad (4.46)$$

con  $D(\Delta \rho) = C(0) - C(\rho_1 - \rho)$ . La ecuación (4.46) para la función de coherencia de segundo orden, describe la distribución espacial promedio de la intensidad dentro del medio. Nos interesa calcular esta cantidad ya que es medible experimentalmente y de esta forma las predicciones del modelo se pueden comparar con el experimento.

Para el caso particular de una onda plana, resolviendo las ecuaciones anteriores tenemos

$$\langle u \rangle = u_0 \exp[-k^2 C(0) \zeta / 8], \quad (4.47)$$

$$\Gamma(\zeta, \Delta \rho) = |u_0|^2 \exp[-k^2 D(\Delta \rho) \zeta / 4]. \quad (4.48)$$

De donde se observa que en la aproximación difusiva, la amplitud como la intensidad de un haz luminoso decaen exponencialmente debido a las dispersiones de la onda conforme penetra en el medio.

### 4.3. Aproximación Paraxial Vectorial

Recordemos que obtuvimos la ecuación (3.29) a partir de tener una configuración homeotrópica en la celda nemática. Ahora generalizaremos el estudio no sólo para esta configuración, sino cualquier configuración no mixta.

La ecuación que describe propagación de luz monocromática en un medio anisótropo es,

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.49)$$

y el campo magnético está relacionado con el eléctrico a través de

$$\nabla \times \vec{E} = i \frac{\omega}{c} \vec{H}.$$

Para poder emplear la aproximación paraxial y tomar ventaja de ella, se propone la siguiente forma del campo,  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})e^{ikz}$ , donde el eje  $z$  se ha elegido como la dirección inicial de propagación de la onda. Al sustituir esta forma del campo en la ecuación (4.49), se obtiene una ecuación para la amplitud compleja y otra ecuación para el valor conjugado de la amplitud compleja, las cuales son, respectivamente,

$$\Delta_\rho E_j + 2ik\partial_z E_j - k^2 E_j + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ji}(\rho, z) E_i = 0, \quad (4.50)$$

$$\Delta_\rho E_j^* - 2ik\partial_z E_j^* - k^2 E_j^* + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ji}(\rho, z) E_i^* = 0, \quad (4.51)$$

$$\rho = \{x, y\}, \quad \Delta_\rho = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2,$$

donde se ha despreciado  $\partial^2 E_j/\partial z^2$  de acuerdo con la aproximación paraxial.

Para poder estudiar los efectos de perturbaciones en el director, las cuales tienen sus consecuencias en el tensor dieléctrico, el mismo se expresa como el promedio más una desviación del promedio, a la cual llamaremos la fluctuación,  $\varepsilon_{ji} = \langle \varepsilon_{ji} \rangle + \tilde{\varepsilon}_{ji}$ .

Con el tensor dieléctrico así expresado, se obtiene el siguiente par de ecuaciones estocásticas,

$$\partial_z E_j = \frac{i}{2k} \left\{ \Delta_\rho E_j - k^2 E_j + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon_{ji} \rangle E_i + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_{ji}(\rho, z) E_i \right\} \quad (4.52)$$

$$\partial_z E_j^* = \frac{-i}{2k} \left\{ \Delta_\rho E_j^* - k^2 E_j^* + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon_{ji} \rangle E_i^* + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_{ji}(\rho, z) E_i^* \right\} \quad (4.53)$$

Que son las ecuaciones análogas a la ec.(3.30) en donde no se empleó la aproximación paraxial.

## Ecuación Fokker-Planck

Se quiere resolver ahora el sistema de ecuaciones estocásticas (4.52) y (4.53), lo que significa obtener una función de probabilidad para  $\vec{E}$  y  $\vec{E}^*$ . Para lograr esto, aplicamos nuevamente el método de van Kampen [2] para encontrar la ecuación de Fokker-Planck correspondiente.

La ecuación de continuidad en el espacio de variables para una realización determinada de la función estocástica  $\tilde{\varepsilon}(\rho, z)$  es,

$$\frac{\partial \varrho[\vec{E}(\rho), \vec{E}^*(\rho), z]}{\partial z} = \int d\rho \left[ -\frac{\delta}{\delta E_i(\rho)} \{\dot{E}_i(\rho) \varrho\} - \frac{\delta}{\delta E_i^*(\rho)} \{\dot{E}_i^*(\rho) \varrho\} \right] \quad (4.54)$$

donde  $\varrho$  es la distribución para una realización determinada de  $\tilde{\varepsilon}$  y el punto representa derivada con respecto a  $z$ , además hay suma sobre índices repetidos. Se ve que ahora la distribución, así como la distribución de probabilidad es una funcional de las funciones  $\vec{E}(\rho)$  y  $\vec{E}^*(\rho)$ . Esto significa que la distribución nos dará la probabilidad de encontrar una determinada función para la amplitud compleja  $\vec{E}$  a lo largo de las coordenadas transversales  $\{x, y\}$  del sistema.

Sustituyendo las ecuaciones (4.52) y (4.53) en la ecuación de continuidad (4.54) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial z} = & \int d\rho \left[ -\frac{\delta}{\delta E_i(\rho)} \left\{ \frac{i}{2k} (\Delta_\rho E_i(\rho) - k^2 E_i(\rho)) \right. \right. \\ & + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{ij} E_j(\rho) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\rho, z) E_j(\rho) \left. \left. \right\} + \frac{\delta}{\delta E_i^*(\rho)} \left\{ \frac{i}{2k} (\Delta_\rho E_i^*(\rho)) \right. \right. \\ & - \left. \left. k^2 E_i^*(\rho) + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{ij} E_j^*(\rho) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\rho, z) E_j^*(\rho) \right\} \right] \varrho \end{aligned}$$

Si se utiliza la ecuación

$$\partial_t \langle u(t) \rangle = \left[ A_0 + \alpha^2 \int_0^\infty \langle A_1(t) e^{\tau A_0} A_1(t - \tau) \rangle e^{-\tau A_0} d\tau \right] \langle u(t) \rangle,$$

para obtener la distribución de probabilidad  $\langle \varrho \rangle = P[\vec{E}(\rho), \vec{E}^*(\rho), z]$  como lo indica el método. Aquí

$$\begin{aligned} A_0 = & \int d\rho \left[ -\frac{\delta}{\delta E_i(\rho)} \left\{ \frac{i}{2k} (\Delta_\rho E_i(\rho) - k^2 E_i(\rho)) + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{ij} E_j(\rho) \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\delta}{\delta E_i^*(\rho)} \left\{ \frac{i}{2k} (\Delta_\rho E_i^*(\rho) - k^2 E_i^*(\rho)) + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{ij} E_j^*(\rho) \right\} \right] \end{aligned}$$



es la parte determinista del operador de flujo en la ecuación (4.55), y

$$A_1 = \frac{-i\omega^2}{2k} \frac{1}{c^2} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\rho, z) \left( \frac{\delta}{\delta E_i(\rho)} E_j(\rho) - \frac{\delta}{\delta E_i^*(\rho)} E_j^*(\rho) \right) \quad (4.55)$$

es la parte estocástica del mismo.

Primero tenemos que ver cómo opera  $e^{\tau A_0}$  en la funcional  $P[\mathbf{E}(\rho), \mathbf{E}^*(\rho), z]$ . Para ésto desarrollamos la parte de  $\tau A_0 P$  que opera sobre  $\mathbf{E}$ ,

$$\begin{aligned} \tau A_0 P &= \int d\rho \left[ -\frac{\tau i}{2k} (\Delta_\rho E_i(\rho)) \frac{\delta}{\delta E_i(\rho)} - k^2 (\delta_{ii} \delta(0)) P + E_i(\rho) \frac{\delta}{\delta E_i(\rho)} P \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{ij} (\delta_{ji} \delta(0)) P + E_j(\rho) \frac{\delta}{\delta E_j(\rho)} P \right] \\ &= \int d\rho \left[ -\frac{\tau i}{2k} (\Delta_\rho E_i(\rho)) \frac{\delta}{\delta E_i(\rho)} - k^2 E_i(\rho) \frac{\delta}{\delta E_i(\rho)} P + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{ij} E_j(\rho) \frac{\delta}{\delta E_j(\rho)} P \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

ya que  $3k^2 = \omega^2/c^2 \langle \varepsilon \rangle_{ii}$ . Haciendo un análisis similar para la parte de  $\tau A_0$  que opera sobre  $\mathbf{E}^*$ , se llega a un resultado similar de donde se concluye que el operador  $e^{\tau A_0}$  traslada a la funcional sobre la que opera de

$$P[\mathbf{E}(\rho), \mathbf{E}^*(\rho), z]$$

a

$$\begin{aligned} P[\mathbf{E}(\rho) - \frac{i\tau}{2k} (\Delta_\rho \mathbf{E}(\rho) - k^2 \mathbf{E}(\rho) + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle \cdot \mathbf{E}(\rho)), \\ \mathbf{E}^*(\rho) + \frac{i\tau}{2k} (\Delta_\rho \mathbf{E}^*(\rho) - k^2 \mathbf{E}^*(\rho) + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle \cdot \mathbf{E}^*(\rho)), z] \equiv P_T, \end{aligned}$$

para facilitar la notación hemos denotado por  $P_T$  a la distribución trasladada, de tal forma que  $\exp[-\tau A_0] P = P_{-T}$ .

Ahora se tiene que aplicar el operador  $A_1(z - \tau)$ ,

$$A_1(z - \tau) P_{-T} = -\frac{i\omega^2}{2kc^2} \int d\rho_2 [\tilde{\varepsilon}_{ij}(\rho_2, z - \tau) \left( \frac{\delta}{\delta E_i(\rho_2)} E_j(\rho_2) - \frac{\delta}{\delta E_i^*(\rho_2)} E_j^*(\rho_2) \right)] P_{-T}. \quad (4.57)$$

Después de algunos cálculos directos se llega a que

$$\begin{aligned} A_1(z - \tau) P_{-T} &= -\frac{i\omega^2}{2kc^2} \int d\rho_2 [\tilde{\varepsilon}_{ij}(\rho_2, z - \tau) \{ E_j(\rho_2) \left( \frac{i\tau}{2k} (\omega^2/c^2 \langle \varepsilon \rangle_{li} - k^2 \delta_{li}) + \delta_{il} \right) \frac{\delta P_{-T}}{\delta E_l(\rho_2)} \\ &\quad - E_j^*(\rho_2) \left( -\frac{i\tau}{2k} (\omega^2/c^2 \langle \varepsilon \rangle_{li} - k^2 \delta_{li}) + \delta_{il} \right) \frac{\delta P_{-T}}{\delta E_l^*(\rho_2)} \}]. \end{aligned}$$

De manera sencilla también se puede operar con  $e^{\tau A_0}$ , que como anteriormente se vió, es una traslación,

$$e^{\tau A_0} A_1(z - \tau) e^{-\tau A_0} P = -\frac{i\omega^2}{2kc^2} \int d\rho_2 [\tilde{\varepsilon}_{ij}(\rho_2, z - \tau) \{F_{jk} E_k(\rho_2) C_{il} \frac{\delta P}{\delta E_l(\rho_2)} - F_{jk}^* E_k^*(\rho_2) C_{il}^* \frac{\delta P}{\delta E_l^*(\rho_2)}\}], \quad (4.58)$$

con

$$F_{jk} = (\delta_{jk} - \frac{i\tau}{2k} (\Delta_{\rho_2} \delta_{jk} - k^2 \delta_{jk} + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{jk})) \quad (4.59)$$

$$C_{il} = (\frac{i\tau}{2k} (\omega^2/c^2 \langle \varepsilon \rangle_{li} - k^2 \delta_{li}) + \delta_{il}) \quad (4.60)$$

$$F_{jk}^* = (\delta_{jk} + \frac{i\tau}{2k} (\Delta_{\rho_2} \delta_{jk} - k^2 \delta_{jk} + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{jk})) \quad (4.61)$$

$$C_{il}^* = (-\frac{i\tau}{2k} (\omega^2/c^2 \langle \varepsilon \rangle_{li} - k^2 \delta_{li}) + \delta_{il}). \quad (4.62)$$

Finalmente, tenemos que operar  $A_1(z)$  por el lado izquierdo de la ecuación (4.58) y promediar. Ahora sustituyendo ese resultado de la forma como lo indica la ec. (3.11) se obtiene la correspondiente ecuación de Fokker-Planck,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= \int d\rho [-\frac{i}{2k} (\Delta_{\rho} E_i(\rho) \frac{\delta}{\delta E_i(\rho)} - k^2 E_i(\rho) \frac{\delta}{\delta E_i(\rho)} + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{ij} E_j(\rho) \frac{\delta}{\delta E_j(\rho)}) \\ &\quad + \frac{i}{2k} (\Delta_{\rho} E_i^*(\rho) \frac{\delta}{\delta E_i^*(\rho)} - k^2 E_i^*(\rho) \frac{\delta}{\delta E_i^*(\rho)} + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{ij} E_j^*(\rho) \frac{\delta}{\delta E_j^*(\rho)})] P \\ &\quad + \frac{k^2}{4} \int d\rho_1 d\rho_2 d\tau \langle \tilde{\varepsilon}_{mn}(\rho_1, z) \tilde{\varepsilon}_{ij}(\rho_2, z - \tau) \rangle [\frac{\delta}{\delta E_m(\rho_1)} E_n(\rho_1) F_{jk} E_k(\rho_2) C_{il} \frac{\delta P}{\delta E_l(\rho_2)} \\ &\quad - \frac{\delta}{\delta E_m^*(\rho_1)} E_n^*(\rho_1) F_{jk} E_k(\rho_2) C_{il} \frac{\delta P}{\delta E_l(\rho_2)} - \frac{\delta}{\delta E_m(\rho_1)} E_n(\rho_1) F_{jk}^* E_k^*(\rho_2) C_{il}^* \frac{\delta P}{\delta E_l^*(\rho_2)} \\ &\quad + \frac{\delta}{\delta E_m^*(\rho_1)} E_n^*(\rho_1) F_{jk}^* E_k^*(\rho_2) C_{il}^* \frac{\delta P}{\delta E_l^*(\rho_2)}] \end{aligned}$$

O bien, simplificando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial z} = & \int d\rho [a_{ij} \frac{\delta}{\delta E_j(\rho)} E_i(\rho) + a_{ij}^* \frac{\delta}{\delta E_j^*(\rho)} E_i^*(\rho)] P \\
& + \frac{k^2}{4} \int d\rho_1 d\rho_2 [A_{nmk}(\Delta\rho) \frac{\delta}{\delta E_m(\rho_1)} E_n(\rho_1) E_k(\rho_2) \frac{\delta P}{\delta E_l(\rho_2)} \\
& - A_{nmk}(\Delta\rho) \frac{\delta}{\delta E_m^*(\rho_1)} E_n^*(\rho_1) E_k(\rho_2) \frac{\delta P}{\delta E_l(\rho_2)} \\
& - A_{nmk}^*(\Delta\rho) \frac{\delta}{\delta E_m(\rho_1)} E_n(\rho_1) E_k^*(\rho_2) \frac{\delta P}{\delta E_l^*(\rho_2)} \\
& + A_{nmk}^*(\Delta\rho) \frac{\delta}{\delta E_m^*(\rho_1)} E_n^*(\rho_1) E_k^*(\rho_2) \frac{\delta P}{\delta E_l^*(\rho_2)}] \quad (4.63)
\end{aligned}$$

con

$$a_{ij} = -\frac{i}{2k} (\Delta_\rho \delta_{ij} - k^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{ij})$$

$$A_{nmk}(\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1) = \int_0^\infty d\tau \langle \tilde{\varepsilon}_{nm}(\rho_1, z) \tilde{\varepsilon}_{ij}(\rho_2, z - \tau) \rangle F_{jk} C_{il}$$

Esta es la EFP para la amplitud compleja del campo eléctrico y de donde es posible obtener los momentos de  $\mathbf{E}$ .

## Momentos

Con la ecuación de Fokker-Planck (4.63) es posible obtener ecuaciones cerradas para los momentos del campo  $\mathbf{E}$ . Al multiplicar la EFP por  $\mathbf{E}$  y por  $E_q E_p^*$  y al integrar por partes, se obtiene que el campo promedio  $\langle \mathbf{E} \rangle$  y la función de coherencia de segundo orden  $\Gamma_{qp}(z, \rho_1, \rho_2) = \langle E_q(\rho_1) E_p^*(\rho_2) \rangle$  respectivamente.

$$\frac{\partial \langle E_q \rangle}{\partial z} = \frac{i}{2k} (\Delta_\rho \langle E_q \rangle + T_{iq} \langle E_i \rangle) - \frac{k^2}{4} (A_{lqlk}(0) - 2iK_{lqlk}) \langle E_k \rangle \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \Gamma_{qp}(z, \rho_1, \rho_2) = & \frac{i}{2k} (\Delta_{\rho_1} \Gamma_{qp} - \Delta_{\rho_2} \Gamma_{pq} + T_{iq} \Gamma_{ip} - T_{ip} \Gamma_{qi}) \\
& - \frac{k^2}{4} [A_{lqlk}(0) \delta_{jp} + A_{lplj}^*(0) \delta_{kq} - A_{jprk}(\Delta\rho) - A_{kqpj}^*(\Delta\rho) \\
& + 2i(K_{kqll}(\rho_1) \delta_{jp} - K_{jpll}(\rho_2) \delta_{kq})] \Gamma_{kj},
\end{aligned}$$

con

$$K_{ijkl}(\rho_1) = \text{Im} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_0^{\infty} d\tau \langle \tilde{\varepsilon}_{ij}(\rho_1, z) \tilde{\varepsilon}_{mn}(\rho, z - \tau) \rangle C_{nk}^* C_{ml} \right]$$

y

$$T_{ij} = \frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle_{ij} - k^2 \delta_{ij}.$$

Para el caso en que  $\tau \ll kz$ , que físicamente equivale a suponer que la longitud de onda es mucho más pequeña que las longitudes de correlación, los momentos anteriores se reducen a,

$$\frac{\partial \langle E_q \rangle}{\partial z} = \frac{i}{2k} (\Delta_\rho \langle E_q \rangle + T_{iq} \langle E_i \rangle) - \frac{k^2}{4} A_{lqlk}(0) \langle E_k \rangle, \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \Gamma_{qp}(z, \rho_1, \rho_2) &= \frac{i}{2k} (\Delta_{\rho_1} \Gamma_{qp} - \Delta_{\rho_2} \Gamma_{pq} + T_{iq} \Gamma_{ip} - T_{ip} \Gamma_{qi}) \\ &\quad - \frac{k^2}{4} [A_{lqlk}(0) \delta_{jp} + A_{lplj}(0) \delta_{kq} - 2A_{jppk}(\Delta\rho)] \Gamma_{kj}. \end{aligned}$$

Para el caso particular de una onda plana incidente, la solución a la ecuación (4.65) y  $\langle \Gamma_{qq}(z, \rho_1, \rho_2) \rangle$  (suma sobre  $q$ ) que describe la distribución promedio de la intensidad dentro del medio fluctuante, está dada por

$$\langle E_q(\rho, z) \rangle = \exp[-k^2 A_{qllj}(0) z/4] E_j^{(0)}, \quad (4.66)$$

$$\langle \Gamma_{qq}(z, \rho_1, \rho_2) \rangle = \exp[-k^2 D(\Delta\rho) z/2] |E^{(0)}|, \quad (4.67)$$

$$D(\Delta\rho) = A_{qllq}(0) - A_{qllq}(\rho_2 - \rho_1)$$

El superíndice cero denota condiciones iniciales. De los resultados (4.66) y (4.67) se observa que la amplitud y la intensidad de un haz luminoso decrecen exponencialmente conforme la onda penetra en el medio con fluctuaciones, y la longitud de penetración decrece mientras mayor sea el número de onda  $k$ .

# Capítulo 5

## Resultados

Para poder comparar los resultados obtenidos con el experimento, es necesario expresarlos en términos de algún parámetro que caracterice a un determinado cristal líquido. En nuestro caso este término es la anisotropía del tensor dieléctrico  $\varepsilon_a$ . Al tomar en cuenta que  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{\perp}\delta_{ij} + \varepsilon_a n_i n_j$ , siendo  $n_s$  las componentes del campo director, y que  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \langle \varepsilon_{ij} \rangle$ , se demuestra fácilmente que  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_a(n_i n_j - \langle n_i n_j \rangle)$ . Entonces, el tensor  $A_{ijkl}(\Delta\rho)$  de las Ecs.(4.66),(4.67) toma la forma

$$A_{ijkl}(\Delta\rho) = \varepsilon_a^2 R_{ijkl}(\Delta\rho), \quad (5.1)$$

donde se ha definido

$$R_{ijkl}(\Delta\rho) = \int_0^{\infty} d\tau (\langle n_i n_j(\rho_1, z) n_m n_n(\rho_2, z - \tau) \rangle - \langle n_i n_j(\rho_1, z) \rangle \langle n_m n_n(\rho_2, z - \tau) \rangle) F_{ml} C_{nk}. \quad (5.2)$$

Para el caso particular cuando  $\tau \ll 1$  la ecuación (4.67) toma la forma

$$\langle \Gamma_{qq}(z, \rho_1, \rho_2) \rangle = \exp[-k^2 \varepsilon_a^2 R(\Delta\rho) z/2] |E^{(0)}| \quad (5.3)$$

siendo

$$R(\Delta\rho) = \int_0^{\infty} d\tau (\langle n_q n_l(\rho_1, z) n_l n_q(\rho_2, z - \tau) \rangle - \langle n_q n_l(\rho_1, z) \rangle \langle n_l n_q(\rho_2, z - \tau) \rangle),$$

que sólo depende de las propiedades del ruido.

A continuación se grafica figs.(5.1),(5.2) la función de coherencia de segundo orden que nos da la intensidad promedio para dos cristales líquidos diferentes.

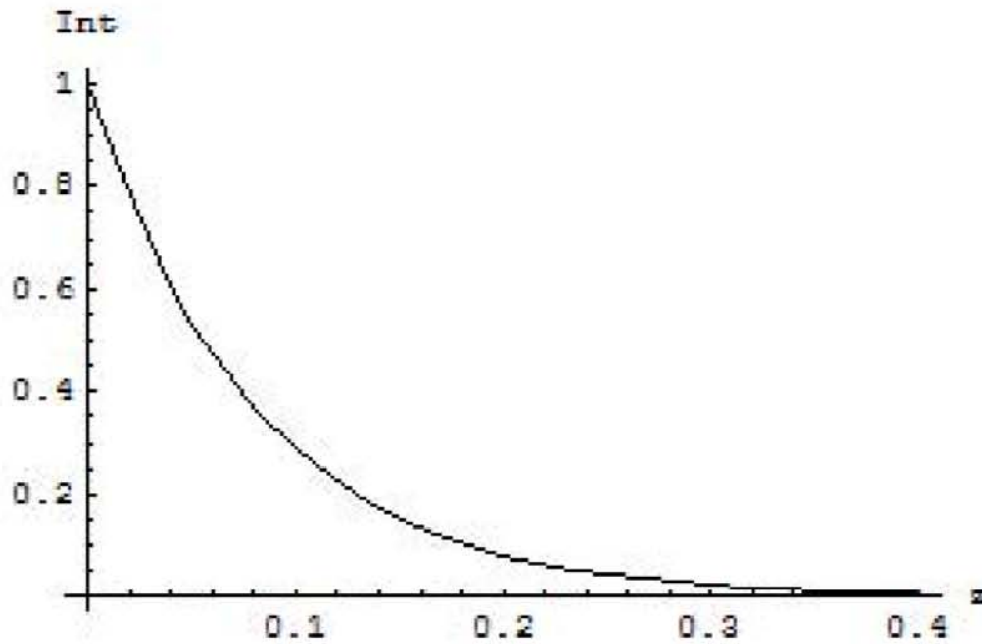


Figura 5.1: Cristal líquido MLC-13800100, con anisotropía en la permitividad eléctrica de  $\varepsilon_a = 5$ , a temperatura  $T = 20^\circ C$ , y frecuencia de la onda incidente de  $1kHz$

$z$  está en unidades adimensionales dada por  $z = l/R$ . Los valores de la anisotropía del cristal líquido fueron obtenidos de [30].

De la gráfica se observa que la longitud de coherencia disminuye dramáticamente con la anisotropía del cristal líquido. Esto es porque porque las fluctuaciones del director se acoplan con mayor fuerza a las fluctuaciones de la permitividad eléctrica.

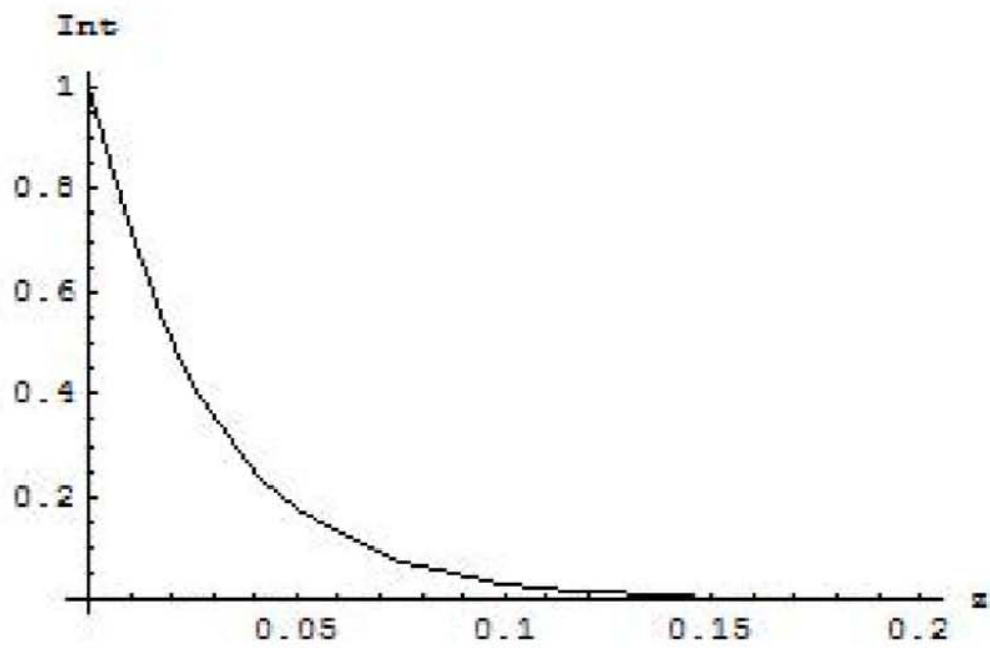


Figura 5.2: Cristal líquido MLC-1390000, con anisotropía en la permitividad eléctrica de  $\epsilon_a = 8,3$ , a temperatura  $T = 20^\circ C$ , y frecuencia de la onda incidente de  $1kHz$

# Capítulo 6

## Discusión

Se propuso un modelo estocástico para describir la propagación de una onda electromagnética en una celda de cristal líquido con permitividad eléctrica fluctuante. Se analizaron y compararon críticamente dos métodos para resolver el modelo estocástico propuesto: el método de la aproximación difusiva y el método de van Kampen. A partir del método más exacto, el de van Kampen, se obtuvo una ecuación Fokker-Planck para la propagación de un campo óptico a través de un medio con permitividad dieléctrica fluctuante. Se ha empleado un desarrollo sistemático que permite calcular los efectos de las fluctuaciones en el campo óptico, así como también se obtuvo el espectro de fluctuaciones. También se empleó la aproximación paraxial para obtener resultados sobre la amplitud y la intensidad del campo óptico así como su distancia de penetración en un cristal líquido debido a las fluctuaciones del campo director, que son cantidades que se pueden comparar con el experimento. El parámetro que caracteriza los resultados en el capítulo 5 es la anisotropía del medio. Para un medio isótropo este parámetro es cero y nuestros resultados no mostrarían ninguna diferencia con el modelo determinista. Esto quiere decir que se tomó en cuenta solamente las fluctuaciones del director y no las fluctuaciones de la permitividad dieléctrica debido a variaciones de densidad que es un efecto pequeño en un cristal líquido. Sin embargo, este método puede ser empleado para estudiar estas últimas y así tener un resultado más completo.

Aunque no se encontraron en la literatura resultados experimentales contra los cuales poder comparar, el modelo que se estudió predice valores cuantitativos de una propiedad medible, la intensidad del haz.

Es importante mencionar que el modelo tiene ciertas limitaciones como, el



no tomar por ejemplo, en cuenta el efecto que causaría un flujo hidrodinámico en la celda, ni tampoco el acoplamiento del cristal líquido con el campo incidente. Es decir, el modelo puede ser empleado sólo para intensidades pequeñas del haz incidente con respecto a la energía elástica del nemático. Para poder emplear el modelo para intensidades mas grandes del haz incidente, es necesario tomar en cuenta el acoplamiento del campo electromagnético con el director del cristal líquido.

Existen muchos modelos para medios aleatorios [22, 1, 2], sin embargo, todos son para medios isótropos, y este modelo es uno de los pocos modelos estocásticos que se han hecho para cristales líquidos.

# Bibliografía

- [1] V.I. Klyatskin and V.I. Tatarskii, *Sov. Phys. Usp.***16**,494 (1973)
- [2] N.G. van Kampen “Stochastic Processes in Physics and Chemistry”(North-Holland, Amsterdam, 1991) 2<sup>nd</sup> edition, Caps. IX, XIV.
- [3] B.Ya.Zelldovich, N.F.Piliotskii, A.V.Sulchov and N.V.Tabiryan, *JETP Lett.***31**,363(1980).
- [4] S.D.Durbin, S.M.Arabelian and Y.R.Shen, *Phys.Rev.Lett* **47**,1411 (1981).
- [5] N.V.Tabiryan, A.V.Sukkov and Ya.Zelldovich, *Mol.Cryst.Liq.Cryst.* **13b**, 1 (1986).
- [6] I.C.Khoo, *Prog.Optics* **26**,108 (1988).
- [7] H.M.Gibbs, P.Mandel, N.Peyghambaryan and S.D.Smith, *Optical Bistability* (Springer Verlag, New York, 1986)
- [8] J.G.Pasko, J.Tracy and W. Elser, *SPIE, Proc.*,**202**, 82 (1979)
- [9] S.T.Wu, U.Efron, J.Grinberg, L.D.Hess and H.S. Welkosky, *SPIE, Proc.*,**572**, 94 (1985)
- [10] Birendra Bahdur, *Liquid Crystals, Applications and Uses* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [11] E. Santamoto, F. Abatte and L.Marrucci, *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1377 (1990).

- [12] P.V.Vidakovic, M.Coquilay and F.Salin, J.Opt. Soc. Am. B, **4**, 988 (1987).
- [13] H. Lin, P.Palffy-Muhoray and M.A. Lee, Mol.Cryst,Liq.Cryst., **204**, 189 (1991).
- [14] H.Lin. and P.Palffy-Muhoray, Opt.Lett., **17**, 722 (1992).
- [15] H.Lin. and P.Palffy-Muhoray, Liq.Cryst., **14**, 1978 (1993).
- [16] H.Lin. and P.Palffy-Muhoray, Opt. Lett. **19**, 463 (1994).
- [17] R.H. Stolen and H.W.K. Tom, Opt. Lett., **12**, 57 (1987).
- [18] Y. Aoki and K.tajma, J.Opt. Soc. Am. B, **5**, 358 (1988).
- [19] I.N. Duling III, Opt. Lett. **16**, 539 (1991).
- [20] H. Lin, D.S.Moroi and P.Palffy-Muhoray, Mol.Cryst.Liq.Cryst., **223**, 241 (1992).
- [21] J.A.Reyes, Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México (1995), Cap. I
- [22] E.A.Novikov, Zh.Eksp.Teor.Fiz. **47**, 1919 (1964)[Sov.Phys. JETP **20**, 1290 (1965)]
- [23] H.Híjar and R.F.Rodríguez, Phys,Rev.E **69**, 051701 (2004).
- [24] J.F.Camacho, H.Híjar and R.F.Rodríguez, Physica A **348**, 252(2005).
- [25] R.F.Rodríguez and H.Hijar, European J.Phys.B(2006) (en prensa).
- [26] Kittel, Charles, Introduction to Solid State Physics, 7th Ed., Wiley, (1996).
- [27] B.J.Berre and R.Pecon, Dynamic Light Scattering (Dover, NewYork, 2000).
- [28] H.Híjar, Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México (2006).
- [29] R.F.Rodríguez and J.A.Reyes,Mol,Cryst.Liq.Cryst. **282**, 287-296(1996)

- [30] Liquid Crystal Displays, Ernst Lueder, University of Stuttgart, Germany (2001).
- [31] R.F.Rodríguez, J.A.Olivares and R.Díaz-Uribe, Rev.Mex.Fis. **43**, 93-107(1997).
- [32] J.A.Reyes and R.F.Rodríguez., J. Nonlinear Op. Phys. and Materials. **4**, No.4,943-958(1995).
- [33] R.F.Rodríguez and N.G. van Kampen., Physica **85A**,347-362(1976).
- [34] P.G.de Gennes, The Physics of Liquid Crystals (Oxford University Press, Oxford, 1974)
- [35] S. Chandrasekhar , Liquid Crystals (Cambridge University Press, Cambridge, 1977)
- [36] G. Vertogen, and W.H.de Jeu, Thermotropic Liquid Crystals, Fundamentals (Springer-Verlag, Berlin, 1988)
- [37] P.M.Chaikin and T.C.Lubensky, Principles of Condensed Matter (Cambridge University Press, Cambridge , 1995)
- [38] I. Janossy, editor, Optical Effects in Liquid Crystals (Kluwer Academic Publishers, Milan, 1991)
- [39] Tesis de Licenciatura J.A.Olivares Efectos de Ruido Externo no Lineal Sobre la Birrefringencia de Cristales Líquidos Nemáticos, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO Cap. 1 (1995)
- [40] G. Friedel, Ann. Phys **18**, 273(1922).
- [41] F.M.Leslie, Quart. J. Mech. Appl. Math. **19**, 357 (1966).
- [42] O.J.Pardi, Phys. (Fr.) **31**, 581 (1970).
- [43] W.Maier-Saupe, A. Z., Z. Natur. **A13**, 564(1958).
- [44] Brand, H. and Pleiner, H., J. Physique **41**, 553 (1980).
- [45] Frank, F.C., Discuss. Faraday Soc. **25**, 19 (1958).

- [46] J.D.Jackson, Classical Electrodynamics (J.Wiley, New York, 1986) 2nd edition
- [47] H. Kelker and R.Hatz, Handbook of Liquid Crystals (Verlag Chemie, Weinheim, 1980) Cap. 4
- [48] R.Zwanzig, Phys.Rev. **124**, 983(1961)
- [49] H.Mori,Prog.Theor.Phys. **33**, 245(1971)
- [50] M.Bixon and R.Zwanzig,J.Stat.Phys.**3**, 245(1971).
- [51] H.Fujisaka,Prog.Theor.Phys.**55**,430(1976).
- [52] G.D. Patterson, A.Muñoz-Rojas, Ann.Rev.Phys.Chem. **38**, 181(1987).
- [53] M.H.Evans, P.Grigolini, G. Pastori Parravicini, Memory Functions Approaches to Stochastic Problems in Condensed Matter (Wiley N.Y. 1985).