UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓMOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

El problema del paradigma en la demostración. la ciencia de la Grecia antigua, Aristóteles y Gödel.

Tesis que para obtener el grado de maestro en filosofía presenta
Mario Javier Flores Ventura.

Asesora: Doctora María Teresa Padilla Longoria

Abril de 2006

Se pretende reconocer las aportaciones de la filosofía griega antigua, en general, y aristotélica, en particular, su influencia en el pensamiento científico occidental y sus repercusiones en el concepto de demostración contemporánea de Gödel, sobre todo en su noción de verdades indemostrables.

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis hijos

Habacuc Hiddekel
Nathanael Javier
Catherine Zulema

A mi Mamá

Juana Ventura Vera

Con afecto y cariño.

Agradecimientos

A los autores de los textos consultados que me permitieron disponer de su capacidad crítica.

A los sinodales:

Atocha Aliseda Llera, que con su análisis me permitió integrar los conceptos de reducción al absurdo en todos los capítulos.

Axel Barceló Aspeitia, que con su aguda crítica, maduró mis conceptos sobre Gödel.

A José Molina Ayala por su estilo amable y paciencia, para corregir el estilo y la parte filológica de la tesis.

A José Antonio Robles García, que con su capacidad de síntesis me permitió recopilar y aclarar puntos cuestionables.

Y en particular a mi asesora, Maria Teresa Padilla Longoria, por su guía, paciencia y enseñanza, que agudizó la visión y perspectiva de la tesis.

De todos ellos me considero deudor, no sólo por su dedicación y amable colaboración, sino también por el interés creciente que demostraron.

Sin embargo, todos los errores de interpretación y énfasis sólo deben atribuirse a mí.

Mario Javier Flores Ventura.

TABLA DE CONTENIDO

Siglas

A Obras y revistas de referencia

Diels, H. & Kranz, H., ***Die Fragmente,* der Vorsokratiker**, Berlin, Weidmann, 3 vol., 1964 (11ª ed.), *[DK]*.
Liddell, H. D., Scott, R. & Jones, H.S., **A**, ***Greek-English Lexicon***, Oxford, Claredon Press, 1940 (9ª ed.), *[LSJ]*.

AA	Articles on Aristotle.
AMM	The American Mathematical Monthly.
ASSV	Aristotelian Society Supplementary Volume.
BJPS	British Journal for the Philosophy of Science.
CUP	Cambridge University Press.
HPL	History and Philosophy of Logic.
JP	Journal of Philosophy.
JPL	Journal of Philosophical Logic.
OUP	Oxford University Press.
PAS	Proceedings of the Aristotelian Society.
PQ	Philosophical Quarterly.
PR	Philosophical Review.
RKP	Routledge & Kegan Paul.
RMM	Revue de Métaphysique et de Morale.
UP	University Press.

B Obras diversas

Alcmaeon

Alexander Aphrodisiensis, *[Alex. Aphr.]*
In Apr. = in Aristotelis Analyticorum Priorum librum I.
In Metaph.=in Aristotelis Metaphysica commentaria
in SE = in Aristotelis Sophisticos Elenchos commentarium.
in Top. = in Aristotelis Topicorum libros octo commentaria.

Aristophanes, *[Ar.]*
Nu. Nubes

Clemens Alexandrinus *[Clem. Al.]*
Paed. = Paedagogus
Prot. = Protrepticus
Strom. =stromateis

Diogenes Laertius, *[D.L.]*
Anthologia Graeca

Empedocles, *[Emp.]*
Sphaer = Sphaera

Euclides, *[Euc.]*
Dat = Data
Fr. = Fragmenta
Opt. = Optica
Phaen. = Phaenomena
Sect. Can. = Sectio Canonis.
Elementa(cit. sólo por n.).
Def. = Definitiones.
Post. = Postulata.
Comm. = Communes Concepciones
Cor. = Corollarium
Sch. = Scholia.

Eudoxus, *[Eudox.]*
Ars = Ars astronomica

Eusebio *[Eus.]*
PE = Preparaciones Evangélicas

Heraclitus, *[Heraclit.]*

Herodianus, *Grammaticus, [Hdn.]*
P. Dichr. = Perì dichrónōn.
P. mon. léx. = Perì monérous léxeōs.

Hippolytus, *[Hippol.]*
Haer. = Refutatio Omnium Haeresium

Isocrate, *[Isoc.]*
Ep.=Epistulae.
Fr.= Fragmenta.
Sch.= Scholia.

Parmenides, *[Parm.]*

Porphyrius Tyrius, *Philosophus, [Porph.]*
Antr. = de Antro Nympharum

Proclus, *[Procl.]*
in Ti. = in Platonis Timaeum commentaria
in Euc.= in primum Euclidis Elementorum librum commentarii.
in Prm.= in Platonis Parmenidem commentarius.

Protagoras, *Philosophus, [Protag.]*

Plutarchus*, Philosophus, [Plu.]*
Moralia
Vitae Parallelae

Pseudo-Plutarchus, *[Ps. Plu.]*
De superstitione

Seneca
Ep. = Epistulae

Pythagoras, *[Pythag.]*

Sextus Empiricus, *[S.E.]*
M.= adversus Mathematicus
P.= Πυρρώνειοι ὑποτυπώσεις

Simplicius, *[Simp.]*
in Cael. = in Aristotelis de Caelo commentaria.
in Cat. = in Aristotelis Categorias commentarium (cit. por p. y lín.).
in de An. = in libros Aristotelis de Anima commentaria.
in Epict. = in Epictetum commentarius.
in Ph. = in Aristotelis Physica commentaria.

Stobaeus, Joannes, *[Stob.]*
Ecl.=Eclogae Physicae, Dialecticae et Ethicae
Flor.=Florilegium

Theodorus, *Epigrammaticus, [Theod.]*

Theophrastus, *Philosophus, [Thphr.]*
Sens. = de Sensu

Xenophanes, *Poeta Philosophus, [Xenoph.]*

Zeno Eleaticus, *Philosophus, [Zeno Eleat.]*

Plato, *[Pl.]*
Cra.=Cratylus
Chrm. = Charmides
Euthd. = Euthydemus.
Lg.=Leges
Ly.=Lysis
Men. = Meno
Phd. = Phaedo
Phlb. = Philebus
Prt. = Protagoras
R. = Republica
Smp.=Symposium
Sph. = Sophista
Tht. = Theaetetus
Ti. = Timaeus

Aristoteles, *[Arist.]*
APo. = Analytica Posteriora
APr. = Analytica Priora
Cael. = de Caelo
Cat. = Categoriae
de An. = de Anima
EE = Ethica Eudemia
EN = Ethica Nicomachea
GA = de Generatione Animalium
GC = de Generatione et Corruptione
Int. = de interpretatione
Metaph. = Metaphysica
Mete. = Metereologica
PA = de partibus animalium
Ph. = Physica
Rh. = Rhetorica
SE = Sophistici Elenchi
Sens. = de Sensu
Top. = Topica
Xen. = de Xenophane

Pseudo Aristoteles, *[Ps. Arist.]*
de Mund. = de Mundo

C Abreviaturas

a. C., antes de Cristo.

Bew, del alemán *Beweisbar,* demostrable.

cfr., *Cónfer,* del latín *confere:* compárese, confronte, véase, confróntese.

cfr. supra, Ver más arriba.

cit., citado.

e.g., del latín, *exempli gratia,* por ejemplo.

et. al., del latín *et alii,* y otros

i.e., del latín *id est, esto es*

ibid., del latín *ibidem,* en el mismo lugar

id., del latín *idem,* el mismo, lo mismo

vid., del latín *vide, véase*

wid, del alemán *widerspruchsfrei, consistente.*

INTRODUCCIÓN

Demostrar va más allá de la evidencia visual, es un proceso de descubrimiento filosófico, de argumentación y de formalización lógico-deductiva, que en ocasiones lleva a la intuición de una doble respuesta dando origen a la paradoja.

La demostración busca seguridad frente a la duda. Plantear su utilidad o eficacia parece una hipótesis innecesaria que, de alguna manera, es cuestionable. En el discurso científico, la demostración lógica es una forma de representación del conocimiento. En el discurso de las ciencias humanas, la demostración se enfrenta a la seducción, a la indiferencia, e incluso a la agresión, la interpretación de la demostración se mezcla con la realidad, lo demostrado esfuma la comprensión metodológica en una metáfora que provoca un enigma y la volatilización de la realidad, transformándola en una paradoja.

El discurso de la demostración nos lleva a establecer la distinción entre *mostrar* y *demostrar*. Hay pruebas de afirmaciones que sólo muestran en el sentido de sólo dejar ver que la afirmación es verdadera. Por ejemplo una mostración visual del teorema de Pitágoras; pero hay razones que justifican la necesidad de demostrar, en el sentido de apartarse de la evidencia visual, en el caso de que ésta no sea posible o no sea clara, o bien, pueda llevar a confusiones. Esto último se puede ejemplificar con *pruebas* seductoras de figura-fondo, o distorsión del aire caliente que usa la evidencia visual de una figura, de modo incorrecto, esto se debe a que las ilusiones ópticas no son conceptuales sino perceptivas.

Así pues, el filósofo debe tener conciencia de lo que sí es y de lo que no es demostrar, así como de cuándo una demostración está terminada. También es muy importante aclarar la diferencia entre el proceso de descubrimiento de una demostración, es decir, su heurística,[1] y la formalización y organización lógico-deductiva de ella, lo cual constituye la demostración propiamente dicha. Sin embargo, son incontables las respuestas que tiene la demostración.

Tan sólo la realidad considerada como inexplorada, invisible e incluso abstracta, permite al menos dos posibilidades, ser o no ser, que se pueden transcribir para la filosofía de la ciencia en hechos e hipótesis;[2] los hechos denotan por lo menos cuatro cosas distintas:

1) Son algunos elementos que comprendemos en la percepción sensorial; o bien, 2) denotan la proposición que interpreta lo dado en la experiencia sensorial; *3)* en ocasiones sólo son una proposición que afirma una sucesión o conjunción invariable de caracteres y *4)* también pueden denotar esos casos que existen en el espacio o el tiempo (así como las relaciones entre ellos) en virtud de los cuales una proposición es verdadera. En este sentido, los hechos no son verdaderos ni falsos, simplemente están ahí dentro de un marco teórico dado.

Esto da margen a que se acuñe la paradoja que inspira sistemáticamente la posibilidad o la intuición de una doble respuesta diametralmente opuesta, sin permitir ambigüedades ni ser contradictoria para la demostración; esto se logra formulando los enunciados en forma correcta.

---

[1] La heurística se plantea desde la Grecia antigua. Sin embargo, la formalización y el alto grado de rigor matemático de las ciencias modernas y contemporáneas le ha restado importancia al estudio de su descubrimiento y a la creatividad que implicaba su aparición considerándolo más bien de interés para la psicología y las matemáticas en la resolución de problemas. Aunque existe el campo de la teoría de la demostración en la heurística, éste nada tiene que ver con encontrar métodos en la demostración o reglas para sus teoremas.

[2] Cohen, Morris. Nagel, Ernest. *Introducción a la lógica y el método científico II*, trad., Míguez, Néstor A., Amorrortu, Buenos Aires, 2000, p. 36.

Para entender el sentido de la paradoja, hay que revisar el fenómeno, darle fuerza, cuestionar su existir dándole significado para sentirlo. Eliminar de él cualquier carácter secreto, arbitrario, accidental; descifrar sus apariencias y extraer su sentido; apartar la ambigüedad, para devolverle su finalidad; arrancarlo de su enigma para devolverle su forma; pero sin caer en la simulación, en el dogmatismo de reconocer un solo camino en la demostración, ya que ésta se asemeja a la táctica de la desilusión, es decir, al dominio de la fantasía y al exterminio de la posibilidad de evitar la demostración.

Por ende, lo que se opone a la demostración no es la teoría de lo real, que no es más que el intento de palpar un caso particular de la demostración, sino su interpretación.[3] Y no hay en esto crisis de la realidad; muy al contrario: de lo real siempre habrá más, ya que esto se produce constantemente mediante la diversidad cultural y lingüística. Y es que la expansión de la demostración no es sólo un acto biológico, a la manera de una población que crece; constituye una auténtica confirmación de nuestra condición humana: es la posibilidad del pensamiento que aniquila constantemente la interpretación del mundo, que le arrebata la trascendencia y lo limita, permaneciendo sola, como mera esperanza, la demostración.

Para conocer la demostración, hay que devolver su fuerza y su sentido radical a la ilusión. Pero la ilusión del mundo es el encanto que tienen las cosas al ofrecerse como posibilidad, sin embargo no son, en absoluto, más que esperanza.

---

[3] En la modernidad, Freud, Marx y Nietzsche, tienen algo que decir sobre la realidad y la sensibilidad que se percibe con los sentidos, cuestión antes inexplorada, que da lugar a los planteamientos de Lacan, Althusser y Foucault, sintetizados en la siguiente forma: El ojo se engaña fácilmente cuando ve las cosas demasiado claras, reduciendo a la imagen de la apariencia el objeto percibido, a través de un proceso más práctico que intelectual, relacionándolo de ahí en adelante, como una marca de fuego o tatuaje indeleble sobre futuras consideraciones sobre el objeto.

En apariencia,[4] las cosas son tal como se ofrecen a la experiencia de nuestros sentidos. Aparecen y con el tiempo se degradan en la memoria desapareciendo sin dejar nada. Se despliegan sin preocuparse por su ser, y ni siquiera claman por su demostración. Hacen señales, pero no se dejan descifrar.[5] En la simulación, por el contrario, en ese gigantesco dispositivo de engaño a los sentidos, de cálculo y de eficiencia que engloba todos nuestros artificios técnicos, incluyendo la actual realidad virtual o la futura polidimensión, se ha perdido la ilusión del signo a favor de su operación. La indiferenciación afortunada de lo verdadero y lo falso, de lo real y lo irreal, cede ante el simulacro que, en cambio, consagra la indiferenciación desafortunada de lo verdadero y lo falso, de lo real y sus signos, destino desafortunado, necesariamente desafortunado, del sentido en nuestra cultura de arquetipos que limitan la demostración a parámetros que destilan disimulo por sus técnicas tan crípticas.

Y ¿qué decir de la reducción al absurdo cuya metáfora es la ilusión? ya que mientras una ilusión colectiva no es reconocida como error, su valor es exactamente equivalente al de una realidad. Pero, una vez reconocida la ilusión como tal, deja de serlo. Es pues, el concepto de ilusión y sólo él, lo que en la reducción al absurdo es una ilusión. Esto vale para la ilusión subjetiva, la del sujeto que se equivoca al demostrar, que confunde en la demostración lo

[4] DK 22 B 21' Clem. Al., *Strom*., 3. 21.1: θάνατός ἐστιν ὁκόσα ἐγερθέντες ὁρέομεν, ὁκόσα δὲ εὕδοντες ὕπνος.

DK 22 B 56, Hippol., *Haer*., 9. 9.5: ἐξηπάτηνται οἱ ἄνθρωποι πρὸς τὴν γνῶσιν τῶν φανερῶν παραπλησίως Ὁμήρωι, ὃς ἐγένετο τῶν Ἑλλήνων σοφώτερος πάντων. ἐκεῖνόν τε γὰρ παῖδεςh φθεῖρας κατακτείνοντες ἐξηπάτησαν εἰπόντες· ὅσα εἴδομεν καὶ ἐλάβομεν, ταῦτα ἀπολείπομεν, ὅσα δὲ οὔτε εἴδομεν οὔτ᾽ ἐλάβομεν, ταῦτα φέρομεν.
Para el texto griego de Heráclito, véase la versión de Robinson, T.M., *Heraclitus Fragments*, the Phoenix Pre-Socratics series, 2000. Y para la versión en castellano de Marcovich, M., *Heraclitus*, Talleres Gráficos Universitarios, Mérida, Venezuela, 1968.

[5] DK 22 B 1, S. E., *M*., 7. 132: τοῦ δὲ λόγου τοῦδ᾽ ἐόντος ἀεὶ ἀξύνετοι γίνονται ἄνθρωποι καὶ πρόσθεν ἢ ἀκοῦσαι καὶ ἀκούσαντες τὸ πρῶτον· γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον τόνδε ἀπείροισιν ἐοίκασι, πειρώμενοι καὶ ἐπέων καὶ ἔργων τοιούτων, ὁκοίων ἐγὼ διηγεῦμαι κατὰ φύσιν διαιρέων ἕκαστον καὶ φράζων ὅκως ἔχει· τοὺς δὲ ἄλλους ἀνθρώπους λανθάνει ὁκόσα ἐγερθέντες ποιοῦσιν, ὅκωσπερ ὁκόσα εὕδοντες ἐπιλανθάνονται.

aparente con lo existente, o peor aún: lo innegable con lo real. Para la manifestación de la demostración, que es compleja y multiforme, lo innegable se ajusta a lo que es la vida orgánica, pasional, sentimental; lo real se acerca más a los sentidos, rechaza toda explicación bioquímica del pensamiento, duerme pero despierta importunado por constantes sobresaltos, manteniendo en insomnio cíclico a la razón y la verdad. Resolver los cuestionamientos es el valor vital de la demostración, cuya afirmación es su utilidad o fracaso

En contra de esta ilusión de la alteridad y de su expresión abstracta de entender al otro, se da la ilusión elemental, la ilusión intencionada del mundo, que evoca contradicción en un lenguaje seductor que hace intervenir, en diferente sentido, la misma objetividad que durante tanto tiempo hemos utilizado a favor de la verdad y de la demostración, como lo fue, en otros tiempos, creer en una realidad objetiva de la verdad. Realidad objetiva que desde Platón trasciende la misma sensibilidad, acompañándonos, aun en el plano de espectadores de la demostración.[6] Es decir, la ilusión, sea en la sensibilidad o en el espacio cibernético, representa una insensibilidad a nuestros sentidos y, sin duda, una deslealtad filosófica pero es un espacio que ha desbordado la razón hasta las pasiones de su demostración e interpretación.

La ilusión necesita para su metamorfosis jugar con la imagen y el tiempo, pero un tiempo que la humanidad invoca desde sus ancestros, profundamente ajeno e indiferente al cuestionamiento de la demostración, ya que ésta depende del desarrollo del pensamiento entre nosotros y los otros.

Es por eso que el tiempo es inaprensible para la demostración. El hecho objetivo es que jamás se puede detener el instante y su presencia total sólo es

[6] Pl., *R.*, 486a: La sensibilidad es parte de nuestra humanidad y no podemos renunciar a ella, ni para convertirnos en espectadores permanentes de toda la demostración. Trad. Eggers, Lan.

sobreentendida. El argumento demostrativo entiende y describe lo que ha de demostrar, pero no su tiempo, nunca el momento en que se reúna todo el acto de existir. Así, el tiempo real no existe, porque no tiene evidencia específica; cualquier evidencia sólo representa un fragmento del tiempo para el ojo que la mira, así que nada ocurre en tiempo real, sólo es la repetición de la humanidad en el instante.

En la demostración, el mecanismo no es el tiempo cíclico, ni la repetición exacta, sino las apreciaciones que permiten entender las acciones lógico-deductivas; en fin, es un juego que confirma nuestras intuiciones y sensaciones transformadas en verbos acotados por todas las conjugaciones del ser.

Esto se debe a que es posible representar, en los métodos contemporáneos, ciertas formas clásicas de deducción, utilizadas en la Grecia antigua, como los silogismos, pero sin olvidar que no se sitúan al mismo nivel de precisión.

El espíritu general de la logística es analítico: comienza estudiando las operaciones elementales hasta donde lo permiten; luego, obtiene operaciones más complejas, hasta que los sentidos escapan de la intuición.

La logística comienza en forma de cálculo haciendo ciertas operaciones, definidas por un conjunto de reglas; luego estudia los resultados que puede obtener combinando sus operaciones de diferentes maneras.

Pero luego, la logística adquiere rápidamente una forma axiomática y deductiva. Las propiedades de sus operaciones fundamentales son ahora fijadas por ciertas relaciones, enunciados condicionales a título de axiomas, dando reglas que permitan deducir las proposiciones válidas.

Esta desenvoltura en la demostración tiene sus límites acotados totalmente por las posibilidades humanas, que se hacen evidentes en la humanidad a través de retos, como en los juegos Olímpicos donde está en juego el trascender; sujetos a un tiempo y un espacio que antes no tenían, los deportistas pretenden superar los tiempos para mantener viva su competencia; así, en los cien metros planos hay una barrera de tiempo que son los ocho segundos y que nadie ha podido rebasar; esto se puede demostrar a través de argumentos biomecánicos y fisiológicos que nos llevan a conocer los límites del hombre.

Pero cuando se instala la rutina, ausentándose la trascendencia, el tiempo es más corto, sobre todo, si lleva el lastre de espacio y materia, considerados en el análisis que hicieron Aristóteles, Agustín y Heidegger. Nada que no sea trascendente puede afirmarse o negarse, aquí es donde podemos transpolar la concepción de Gödel mediante un juego lógico-filosófico sobre la trascendencia del pensamiento griego, que en la demostración no es ni demostrable ni refutable.

Esto es paradójico a la manera de la vivencia infantil, cuya materialidad tiene mucha espesura, acaba disolviendo el tiempo de los demás, ya que su espacio es pequeño, pero es transgresor de otros espacios, de otras demostraciones que, sólo trascendiendo, pueden demostrar lo indemostrable.

Para pensar la demostración vamos a concentramos en tres temas de particular importancia: el desarrollo y utilización del método dialéctico; la formulación y aplicación rigurosa de la noción de demostración y, por último, su análisis lógico-matemático.

Aunque el método dialéctico, el diálogo vivo, anima cualquier tipo de demostración filosófica, necesitamos también hacer énfasis en la noción de demostración y prueba. La noción de demostración no aparece súbitamente, sino que va conformándose paulatinamente, gradualmente y sin desaparecer, acumulando y sumando experiencias anteriores.

Así, el uso del argumento, en el periodo antiguo de la Grecia especulativa, culmina con el trabajo de Parménides y sus seguidores. Le sigue el uso de la retórica y la dialéctica, y su influencia en la ciencia natural griega. Para culminar con el desarrollo axiomático de la teoría y práctica de la demostración hasta su aplicación contemporánea.

Estas tres líneas de desarrollo de la demostración: su manifestación objetiva, su método y manifestación subjetiva, nos llevan por el camino de la reducción al absurdo, las paradojas, los axiomas y las funciones recursivas,[7] que son instrumentos de la demostración, las implicaciones griegas trascienden nuestro espacio que, en ocasiones es virtual, nuestro tiempo solipsista contemporáneo, contemplándose asimismo en la teoría gödeliana de verdades indemostrables.

---

[7] Una función recursiva es una función definible a partir de cálculos de finalización predecible en un número finito de definiciones por sustitución, por inducción y por minimalización en caso normal.

Capítulo I

La Grecia antigua

Este capitulo describe brevemente que las fuentes de la demostración son: la filosofía, la dialéctica y la matemática; su influencia en la demostración de los presocráticos, de Platón y de Aristóteles así como los aspectos de la demostración que desarrollaron, destacando la reducción al absurdo y la paradoja.

En el pensamiento griego surge la noción de demostración como un desafío a lo irracional, y como una necesidad de confirmar las concepciones relacionadas con la verdad y la sensibilidad de los sentidos, el término griego correspondiente a verdad es *alêtheia* remite a una dualidad: lo que aparece ante nosotros y el fundamento de la auténtica verdad. De modo que la noción griega de verdad remite a lo inescrutable; también surge como desafío a la racionalidad, que le da un giro a la forma de entender la naturaleza a la cual, sin embargo, no la redime de la paradoja, ya que conocer la raíz de las cosas no es suficiente; el no ser nos guarda sorpresas de naturaleza multiescalar.

Desde el fondo del silencio originario en la repetición interminable de los días y las noches, surgen múltiples ilusiones, fantasías,[8] cuestionamientos y argumentaciones, tamizados por el lenguaje que se viste con múltiples posibilidades de infinitos signos y símbolos para su desciframiento, el cual nos permite ese acercamiento súbito a la antigüedad en donde la reducción al absurdo y la paradoja se mezclan con conceptos teológicos y filosóficos.

[8] Arist., *de An*., 427a 16-429a 9. La fantasía en Aristóteles es imaginar, opinar acerca del objeto sensible percibido no accidentalmente. Refuta así el pensamiento de Platón *(Ti*., 52a; *Sph*., 263a-64b, y *Phlb*., 38b, 39c*)* en donde la fantasía es la sensación y la opinión tomadas conjuntamente.

Un concierto espléndido de sonidos griegos que no sabemos como fueron emitidos, de pensamientos que comparten el conocimiento de la demostración, dan forma de comunicación filosófica en pleno siglo VI a.C. Mediante el surgimiento de un lenguaje que quiere mostrar que su discurso rompe con la idea de decir por decir, para mostrar o poner algo de manifiesto, esto es, algo que no se había dado hasta entonces. Un lenguaje que rebasa el paradigma del pensamiento colectivo e interno, que fortalece esa fragilidad de una comunicación que tiene dificultades para ser precisa, reconociendo el poder de la razón y de la sensibilidad para resolver crisis a partir del objeto de la demostración.

Esta sensibilidad para sentir más de lo que se pueda decir, provoca un desarrollo asimétrico en la demostración, que forma paulatinamente una actitud original dentro de algunas tradiciones y círculos griegos, que no tuvo otro igual en otras culturas de sus contemporáneos como, por ejemplo, en los escribas egipcios o en los sacerdotes y magos babilonios o, por qué no decirlo, aun en sabios y exégetas hindúes.

Fonemas, signos y grafías de la argumentación, perturbaron la forma de pensar la realidad natural y social, en lo que, para algunos, son las raíces del pensamiento filosófico y científico de Occidente y que atrapó variadas formas de comunicar los hechos, las sensaciones y los pensamientos.

Pero la originalidad de este complejo fenómeno cultural, no sólo radica en la apertura al conocimiento o la riqueza de la argumentación que practicaban algunos griegos de los siglos V y IV a.C.; también consiste en la racionalización griega del pensamiento, lo que se siente y contempla, mediante un lenguaje que trata de decir lo que ve implicado en un compromiso de veracidad que no admite sustitución e interpretación, sin demostración.

Este lenguaje alimenta la conciencia reflexiva, el análisis crítico, bajo diversas formas de comprometer la demostración en algo racional, para convencer a alguien de algo, sobre todo, si está sustentado en la demostración de cuestiones lógicas, metodológicas y epistemológicas.
Dichas cuestiones conducen desde el siglo IV a.C., a la racionalización sistemática de las artes retórica y dialéctica, así como al estudio de las condiciones de efectividad y corrección que corresponden a las distintas clases de argumentos. Esta forma de decir las cosas alcanza a expresar criterios generales de discriminación entre los usos genuinos y los usos falseados de esas formas discursivas e, incluso, llega a desarrollar algunos de estos criterios de manera sistemática.

Por si esta peculiaridad no fuera suficiente, algunos griegos parecen ser portadores de una originalidad aún más radical, precisamente en relación con la demostración y con el método deductivo. De hecho suele tenerse como un tópico histórico indiscutible que las ideas de demostración y de método deductivo son una invención griega y que ellas constituyen la matriz racional de nuestra cultura filosófica y científica.

En un intento por entender su contenido y liberar la ciencia de incoherencias y de refutaciones, entre hechos y supuestos se fue fraguando la idea de demostración y, en este sentido, no hay una respuesta simple y lineal a la cuestión de su origen; la idea de demostración se dio en un proceso gradual e interdisciplinario que en principio se alimentó de tres fuentes: la filosofía, la dialéctica y la matemática.

1. La filosofía

Un formidable espíritu filosófico de búsqueda nos lleva a la misma intimidad de la demostración, la cual, en los siglos VI y V a.C., se plantea como la discusión en una lucha crítica de ideas cosmológicas y cosmogónicas entre los jonios, en su búsqueda de una explicación genética y unitaria del mundo natural; entre tanto es sorprendente, en cuanto a la deducción, el grado de generalización conceptual alcanzado por los pitagóricos, en su interpretación de la armonía del *Cosmos* y, más aún, el alcanzado por los eléatas, en su intento de establecer la estructura inteligible de la demostración por debajo de sus manifestaciones múltiples, no afines o paradójicas.

Lo anterior abre un horizonte epistemológico en el s. IV a.C., haciendo un esfuerzo deliberado por comprender la naturaleza del pensamiento y sus modos de conceptualización y teorización. En todo caso, la disociación crítica de Parménides entre lo genuinamente real (pensable, expresable) y lo meramente ilusorio o aparente, hace casi inevitable la incorporación de motivos epistemológicos a una toma de posición filosófica sobre la realidad, la verdad y la demostración.

Pues bien, por lo que concierne a la idea de demostración, la apertura de este horizonte epistemológico y la discusión de las relaciones entre la sensación y el conocimiento, contribuyen a marcar un nivel de abstracción conveniente y hacen posible la aparición de métodos *no empíricos* de inferencia y de prueba que, entre otras cosas, abren la alternativa de conocer que:

La demostración se lleva a cabo mediante el principio de contradicción o de la paradoja, argumento que encierra una idea extraña, una expresión de discrepancia, de coexistencia ilógica de dos cosas en apariencia incompatibles o mediante el método axiomático, que utiliza proposiciones que se consideran verdaderas y que en una argumentación demuestra su razón de ser, puesto que dichas proposiciones verifican y no hay otras anteriores que, a su vez, las puedan demostrar.

2. La dialéctica

Ligada a la tradición filosófica se desarrolla el diálogo argumentado, el examen minucioso, racional, para resolver o determinar las causas intelectuales de los conflictos entre opiniones y propuestas sobre diversos temas, entre otros, el de la demostración. Sin embargo, la dialéctica no es un enjambre de polémicas o discusiones en torno a si existimos o a si sólo prefiguramos lo que hacemos. Es, ante todo, una actitud continua de pregunta, de crítica en torno a la sensación, la percepción y la razón. El diálogo filosófico ofrece posibilidades infinitamente diversas alrededor de la ontología de la demostración, acercándonos a lo que compartimos como una realidad de la demostración y el encanto de poder sorprendernos y captarla como tal al comprobar una demostración.

La dialéctica tuvo varios sentidos en la antigüedad pero, sobre todo, tuvo un lugar privilegiado en las dualidades, en los desacuerdos y en las descripciones densas, bajo el intento de acercarse a la realidad. También surgieron estrategias dialécticas de confrontación entre concepciones opuestas, y son los eléatas quienes advierten, antes y mejor, la eficacia crítica del discurso de las diversas formas de ver el mundo y quienes empiezan a practicar argumentos tácticos de refutación o de exclusión en este sentido.

Así pues, surgió la táctica del poema de Parménides que desarrolla la polaridad entre extremos contrapuestos de manera que resulte insostenible uno de ellos (*lo que no es, lo múltiple*) y parezca obligado el otro (*lo que es, lo uno*) la estrategia es refutar una proposición mostrando que de ella se siguen consecuencias opuestas o aporías irreconciliables;[9] o la de asegurar una tesis por medio de la refutación de la tesis contraria.[10]

Es muy posible que en este contexto dialéctico apareciese la noción informal de la reducción al absurdo en Zenón.[11] Sin embargo para Platón, Zenón es un erístico. Ya que el erístico no llega absolutamente a nada, los erísticos son amantes de los debates, de las contradicciones y de la refutación de lo que sea.[12]

Por el contrario, la hipótesis que sustenta la demostración, puede distinguir entre el error y el engaño; se puede caer en el error pero éste se puede detectar; en el engaño, empero, se busca no decir lo que son las cosas en sí mismas. Sin embargo, en este orden de ideas, Platón es el primero en desarrollar y madurar la noción filosófica de la dialéctica, διαλέγεσθαι, conversación filosófica, diálogo;[13] más allá de ser una propuesta de entender el mundo es también una indagación sobre cómo lo entienden otros seres humanos, para poder llegar así a acuerdos dialógicos con base en lo que las cosas son.

---

[9] Eggers, Lan, *Los filósofos Presocráticos*, Vol. 2, Gredos, Madrid, 1994, pp. 61-62.
DK 29B [1,] Simpl., Fís., 141. 1-8: Según Zenón: si existe lo múltiple, es necesario que sea pequeño y grande; pequeño de modo tal que no tenga magnitud, grande de modo tal que la magnitud sea infinita.

[10] DK 30B 1' Simpl., *Fís*., 162. 24-26: Así aboga Meliso en favor de la condición no generada y eterna de lo real: *siempre era lo que era y siempre será. Si, en efecto, se hubiera generado, habría sido necesario que antes de generarse fuera nada; pero si era nada, de ningún modo podría haberse generado algo a partir de la nada.* Trad. Eggers, Lan.

[11] Las paradojas de Zenón de alguna manera desarrollan los conceptos de movimiento, continuidad, infinito e infinitesimal.

[12] Pl., *Men*., 75 c-d; Id., *R*.,VII, 539.

[13] Padilla, Longoria, *Philosophy as Dialogue: Plato and the history of dialectic*, University of Durham, UK, 2000, p.117.

En el sentido que para Platón filosofía y dialéctica se intercambian y porque la filosofía es fundamentalmente educación, ésta es una conducción del alma, es un poner a prueba nuestras tesis a través del diálogo, ya que nos interesa conocer el sentido de lo existente, e indagar las posibilidades de su conocimiento. Platón ve en la dialéctica el Λόγον διδόναι es decir, el pensar, expresar algo, dar razón sobre algo, haciendo a un lado las visiones personales.

Con todo, Platón considera que el diálogo racional es compatible entre el objeto y el sujeto, ya que, mientras el sujeto no se pueda asociar o disociar en relación con un objeto, no se realiza un proceso dialéctico.

El hecho de que Platón tuviera preferencia por el discurso hablado, no significa que no pudiera percibir las implicaciones tecnológicas e históricas de la comunicación escrita.[14]

A pesar de todo, Platón aplica las relaciones de oposición y dilema, disipa algunas dificultades de su uso, sienta las bases de un método de división (*diaíresis*) y forcejea con distintos opuestos en *El Sofista,* cuando trata de elucidar las relaciones que median entre los cinco grandes géneros (ser, reposo, cambio, igualdad, diferencia) en lo que se refiere a su ser y su no ser respectivos.

Platón también incursiona[15] en las precisiones de tiempo y de decisión sobre dos asertos que afirman y niegan algo de un mismo sujeto, y si son contradictorios o no, así como en el principio de no contradicción. Es evidente que una misma cosa nunca producirá ni padecerá cosas contrarias en el

[14] Reale, G., *Platón, en búsqueda de la sabiduría secreta*, trad. Roberto, Heraldo, Bernet, Herder, Barcelona, 2001, pp. 43 ss.
[15] Pl., *Euthd*., 293c.

mismo sentido, con respecto a lo mismo y al mismo tiempo.[16] Pero ni el tiempo como movimiento, ni la percepción de la diferencia entre una prueba concluyente y un argumento retórico[17] privarán al Sócrates platónico de señalar los vicios comunes del sofista, sea con fines críticos o destructivos,[18] sea con fines constructivos. Empero la dialéctica platónica es en esencia un diálogo filosófico[19] que sirve como forma particular de desarrollo para captar la realidad: capta géneros, es decir, reúne cosas comunes, identifica las especies, las similitudes y también las diferencias. Asimismo la dialéctica sirve para argumentar si la realidad tiene estructuras, o qué son las cosas y su red de interrelaciones. La dialéctica platónica apunta al ser y a la esencia de las cosas en una forma racional,[20] porque hace un ejercicio racional de la realidad; así, la revolución platónica consiste en entender el no ser como alteridad, al encontrar la demostración de la positividad del no ser, como diferente del ser.

En cambio para Aristóteles,[21] la sofística, y el problema dialéctico (que es solo una opinión), son ajenos del discurso filosófico. Así pues, la dialéctica, para Aristóteles, ya no es central, ni sinónimo de filosofía; el diálogo es más susceptible de error que el pensamiento solitario. Con todo, Aristóteles le atribuye un sentido más amplio a la actividad dialéctica de Zenón, ya que esta actividad se orientaba a combatir el pluralismo y el pitagorismo, dada la oposición que la escuela de Elea había manifestado en contra de los pitagóricos. En el pensamiento Aristotélico lo que hace Zenón es dialéctica.

---

[16] Pl., *R*., 436b 8 ss.
[17] Pl., *Tht*., 162e-163a; *Ti*., 51e.
[18] Pl., *Prt*., 330c.
[19] Padilla, Longoria, p. 114.
[20] Pl., *R*., 532a-b.
[21] Arist., *Metaph*., Γ, IV, 1004b, 18-26, El filósofo investiga la verdad y, en este sentido, los dialécticos y los sofistas revisten la misma figura que el filósofo, la Sofística es sabiduría aparente, y los dialécticos disputan acerca de todas las cosas... la Dialéctica es tentativa de aquellas cosas de las que la filosofía es cognoscitiva, y la Sofística es aparente, pero no real; *Top*. 104a 3-35, Hay que aclarar que Aristóteles acepta la proposición dialéctica como plausible; *Top*. 104b 1-5, no así el problema dialéctico que lo ve como una opinión.

Aristóteles, pues, considera que la dialéctica y la retórica son dos caras de la misma moneda. Así lo expresa en un fragmento del diálogo llamado *El Sofista:*[22] *Zenón de Elea fue el inventor de la dialéctica, Empédocles de la retórica*. En la *Retórica,* Aristóteles insiste en que la dialéctica y la retórica son lo mismo. Aristóteles considera que la dialéctica[23] entraña un arte de examinar que recurre a la interrogación,[24] pero que no implica conocimiento científico,[25] ya que, por su inexactitud, la dialéctica está al alcance de todos, en tanto que la ciencia, no; por lo tanto, la dialéctica pierde su estatus porque no tiene ningún poder demostrativo. Ya que según Aristóteles, la dialéctica de Platón todavía no es capaz de investigar las relaciones entre contrarios:[26] aún no está en condiciones de captar y analizar la lógica de la oposición, pese a utilizar ya la reducción al absurdo que, en algunas ocasiones, es contundente.

Si Platón atribuye a Sócrates el investigar las cosas en *Toîs lógois*,[27] Aristóteles considera que Platón tiene el mismo proceder y en los mismos términos;[28] en fin, el mismo Aristóteles exalta esas dos funciones del lenguaje discursivo,[29] y las pone en práctica como un punto de partida natural no sólo del esclarecimiento filosófico,[30] sino también de la investigación.[31] La proposición dialéctica no sólo fue la base práctica de la teoría de la argumentación fundada por Aristóteles,[32] sino que, también, tuvo que ver con la teoría de la demostración científica de los *Analíticos*. Aporta la idea de demostración un rasgo típico: demostrar es una manera de explicar algo a alguien y hacerle saber, en forma razonada e irrefutable, que tal es el caso.

---

22 DK. 29A 10; DK 29A 21, D.L., 5. 8. 57, *Lives of eminent philosophers*, trad. R. D. Hicks.
23 Arist., *Top*., 104b.
24 Arist., *SE*., 178 ss .
25 Arist., *APr*., 77.
26 Arist., *Metaph*., M 4, 1078b 25-26.
27 Pl., *Phd*., 100a.
28 Arist., *Metaph*., A 6,987b 31-32.
29 Arist., *Top*., I, 2, 101a 35-b4.
30 Arist., *EN*, VII.
31 Arist., *Ph*., II.
32 Arist., *Top*.,104a 2-35 y 183b 34-184b 3.

Sin embargo aunque se razone en forma irrefutable hay que poner a prueba lo que se dice oscuramente mediante el *élenjos.*

El *élenjos,*[33] es la afirmación de lo contrario con respecto a lo *uno* y *el mismo*, no al nombre, sino al objeto. Su procedimiento es caracterizado como "un silogismo con una conclusión contradictoria de la proposición original".[34] *Élenjos* de alguna manera es una forma especial de dialéctica. Este proceso dialéctico puede establecer las premisas, cuya ayuda, y con el punto de partida en proposiciones universales, puede demostrar el pro y el contra de dichas premisas. Sin embargo, su argumentación no tiene que ver con una ciencia especial, ni demuestra nada.

Aristóteles considera que la dialéctica[35] es una τέχη, aunque la distingue de su método apodíctico, pues con preguntas y respuestas no se puede en manera alguna demostrar ninguna cosa. También ve que la dialéctica emplea a menudo conceptos y proposiciones negativos como ser y no ser.

Según Aristóteles, el proceso *elenjético* (interrogativo), si finge saber,[36] no sirve de nada, es un ejercicio en el vacío que se supedita al mero intercambio de ignorancias disfrazadas. Luego entonces, el proceso *elenjético* incluso lo hacen los ignorantes mediante un banal intercambio de palabras.

La dialéctica[37] trata como ejercicio lo que la filosofía intenta entender, la sofística parece filosofía, pero no lo es.

[33] El élenjos platónico y socrático tienen un sentido y orientación ética de poner a prueba sus propias refutaciones.
[34] Arist., *Top*., 160a 18-34.
[35] Arist., *Top*., 1,8.
[36] Arist., *SE*, X, 171b 5. La critica es como una dialéctica y dirige su mirada, no al que sabe, sino al que ignora y finge saber, trad. E. S. Forster.
[37] Arist., *Metaph*., IV 2a parte, 1004b 25.

El dialéctico puede llegar a esa iluminación del principio de actividades científicas.

Según M. T. Padilla[38] la idea aristotélica de la dialéctica difiere de la platónica, ya que la dialéctica platónica implica el *élenjos* socrático, que para Aristóteles es *ad hominem* (hacia el hombre); es decir, se trata de argumentar en contra de las tesis más débiles, sin argumentar directamente sobre el tema. La argumentación se oponía al adversario:

Aristóteles ve en la dialéctica platónica un predominio de puntos de vista particulares más que preguntas objetivas, por lo que considera que hay parcialidad en sus argumentos.

Por otro lado, según Aristóteles no está claro si el *élenjos* es un método científico, ya que el *élenjos* no enfrenta las cosas con la realidad y entre sí, por lo que considera que es una manera no científica de abordar la realidad.

Como método científico, Aristóteles considera ineficaz e insuficiente la dialéctica platónica para buscar la verdad.

La búsqueda de la verdad es posible según Platón debido a las asunciones ontológicas y epistemológicas previas, tan explícitas como sea posible.

Finalmente, Aristóteles considera que la dialéctica platónica implica un diálogo con el interlocutor, pero el intercambio verbal mediatiza el vínculo entre el sujeto y los objetos.

---

[38] Padilla, Longoria, pp. 128-134.

Sin embargo, Aristóteles no puede evitar ser platónico[39] ya que la διάνοια (diálogo silencioso del alma consigo misma), requiere la calma que proporciona la filosofía porque es un acto reflexivo, un proceso de dar a conocer a otras personas que *la verdad es esencialmente comunicable*.[40]

En Aristóteles la dialéctica solo es una forma de discurso que recurre al diálogo en sentido platónico por su referencia a otras filosofías.

Aunque ambos se interesan por lo deductivo y por lo inductivo, Platón privilegia la deducción, no confía en los particulares;[41] pero Aristóteles privilegia los procesos inductivos.

3. La matemática

La Matemática griega se centra en la demostración de las formas geométricas, en su abstracción y sistematización lograda por Hipócrates de Quíos. El estudio de los inconmensurables se sistematiza con los resultados de Teodoro de Cirene; otras contribuciones de Teodoro y de Teeteto, desembocan en la teoría de las proporciones de Eudoxo, de esta manera el cálculo, la deducción, el método de exhaución y la demostración causal desarrollan nuevas condiciones en la demostración. Finalmente Aristóteles muestra que la definición y la demostración son operaciones metódicas independientes.

Hay barruntos de que la tradición matemática griega venía madurando los procedimientos de análisis en su tratamiento de ciertos problemas. Tal vez, en principio, este análisis se centraba en lo geométrico, en las condiciones de una solución posible para esos problemas o procurando determinar los supuestos

---

[39] Pl., *Chrm*., 166; *Tht*., 189-199; *Sph*., 263; *Phlb*., 38d.
[40] Padilla, Longoria, p. 114.
[41] Pl., *R*.,V.

que permitieran derivar la solución una vez que se suponían resueltos; pero pronto hubo una transición que, de modo natural, al investigarse los nexos con la realidad y la demostración, hizo que las indagaciones sobre la verdad de ciertas proposiciones, así como las pruebas deductivas de algunos teoremas, se volvieran más complejas y abstractas.

Es posible, además, que la confluencia con las preferencias de organización deductiva, como las que ofrecerían los *Elementos* de Euclides, abriera una perspectiva aún más general: en ella se seleccionan unos cuantos problemas o teoremas y se organizan en secuencias deductivas a partir de ciertos supuestos o de otros resultados conocidos, ya sea con el fin de incorporar nuevos resultados a este núcleo de conocimientos, ya sea con el fin de descartar otras proposiciones como resultados inviables de suyo o incompatibles con aquellos principios o resultados previamente asumidos.

Un proceder análogo es seguido por Hipócrates de Quíos, quien partiendo de un sistema de verdades *a priori*, de carácter intuitivo, utilizó por primera vez el conocido esquema: *Premisa-Teorema-Demostración*, introdujo la designación de figuras geométricas por letras, y el método de demostración por reducción al absurdo. Con éste esquema Hipócrates demostró que las áreas de dos círculos se hallan entre sí en la misma proporción que los cuadrados de sus diámetros. Esto equivale a haber descubierto que el área de un círculo es π por $\mathbf{r}^2$, sin determinar el valor de π presentándose con ello, la primera situación de lo que posteriormente sería el método de exhaución, o la resolución del problema de cuadratura de lúnulas, que consiste en cuadrar una figura con lados curvados (y precisamente a él se remonta la confección de los primeros *Elementos*, en la segunda mitad del siglo V a. C.); la primera lúnula cuadrada por Hipócrates fue una especialmente construida por él; más tarde él mismo consiguió cuadrar otros dos casos particulares de lúnula.[42]

Otra línea de investigación que también facilitaba el empleo de la deducción condicional, aunque en este caso a efectos esencialmente críticos o reductivos, es la investigación de los inconmensurables. El estudio de los inconmensurables fue tomando un aire relativamente sistemático en la segunda mitad del s. V a.C., los resultados atribuidos a Teodoro de Cirene[43] quien demostró la irracionalidad de las longitudes $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}, \ldots, \sqrt{17}$, de éstas raíces podemos concluir que la diagonal de un cuadrado y su lado no son conmensurables, lo cual quiere decir que no tienen una medida común o, dicho en términos modernos, que su cociente no es igual a ningún cociente de números enteros. La sencillez de la demostración la ha convertido en paradigma del método de reducción al absurdo. Las longitudes obtenidas de las raíces sólo pudieron establecerse por un tipo de prueba un tanto singular en el marco de la matemática de los egipcios y los babilonios. Estos resultados no nacen de eventuales fracasos en diversos intentos de conmensuración numérica, digamos, de ciertas magnitudes lineales o de sus cuadrados; son casos de inconmensurabilidad y se han de establecer por medios conceptuales e inferenciales distintos de los que llevarían a la mera comprobación de un error de cálculo o a una aproximación indefinida al valor buscado. Otras contribuciones de Teodoro de Cirene y de Teeteto[44] desembocan en la teoría

---

[42] Shenitzer., *The Evolution of Integration*, ***AMM*** (The American Mathematical Monthly), January, 1994, Volume 101, Number 1, pp. 66–72.
En 1711, Euler encontró otros dos casos de lúnulas cuadrables. En 1882 Liendemann creyó haber demostrado la imposibilidad de cuadrar el círculo. Y en el s. XX N.G. Tschebatorew y A.W. Dorodnow demostraron que estas cinco lúnulas eran las únicas que se podían cuadrar con regla y compás.

[43] *Cfr.* Diels, Hermann, *Fragmenta et testimonia,* Theod., 1. 2725, p. 397.

[44] En el diálogo de Platón *Teeteto*, dedicado a honrar la memoria del discípulo de Teodoro, Teeteto, tras su muerte acaecida en el 369 a.C. como consecuencia de una enfermedad y de las heridas sufridas en el campo de batalla, en éste diálogo, Platón expone cómo Teodoro generalizó el resultado de que la diagonal de un cuadrado con respecto a cada uno de sus lados no tienen una medida común Se le atribuyen las proposiciones iniciales del libro X, siendo en X.9 donde aparece el resultado general mencionado.

de las proporciones de Eudoxo,[45] y la de los escolia del libro V de los *Elementos* que, al atribuir la teoría a Eudoxo, glosan la generalidad de sus resultados aplicables a todo tipo de magnitud y a cualquier rama matemática.

En la primera mitad del s. IV a.C. hay clara constancia de dos aportaciones sustanciales al estudio de los inconmensurables:

Por un lado se encuentra el uso heurístico de la deducción condicional en geometría, en el contexto de un peculiar método de hipótesis, donde cabe entender por hipótesis una proposición que sirve como supuesto o condición para obtener alguna conclusión positiva o negativa sobre la cuestión planteada. Por otro, el rigor y la necesidad que acompañan a la demostración geométrica, o matemática en general, llegan hasta el punto de hacer una función de contraste en la argumentación meramente plausible o verosímil.[46]

La filosofía, la dialéctica y la matemática, van configurando tres presupuestos importantes de las ideas de demostración y de método deductivo, a saber:

a) El conocimiento es creado intencionalmente, se explica y construye a partir de lo existente;

b) El lenguaje diferencia entre lo existente y lo incierto, entre la realidad y la idea, para poder demostrar algo,

c) La deducción es un esfuerzo por lograr pruebas en la filosofía, la dialéctica y la matemática, y por organizar el conocimiento disponible a partir de la demostración de un modo coherente y más o menos sistemático.

---

[45] Arist., *APo*., 74a 17-25; 99a 9-11.
[46] e.g., Pl., *Tht*., 162e 4-7, *Ti*., 51e; Arist., *EN*, I, 3, 1094b 25-26.

Conocemos, por el mismo Aristóteles, la existencia de discusiones en torno a la demostración, y otras nociones conexas, dentro de la Academia o entre gente relacionada con ella. Aristóteles muestra que la delimitación o división sólo alcanza a ser tarea preliminar en la elaboración del concepto; que la definición y la demostración son operaciones metódicas independientes en principio (una definición no demuestra ni es demostrable en sentido propio, aunque una demostración pueda establecer la naturaleza esencial o causal de su objeto); que el desarrollo del conocimiento científico no se cifra tanto en la captación de esencias conceptuales como en la demostración y explicación causal de las propiedades inherentes a todo cuanto caiga bajo un género natural determinado.

Por otra parte se presentaban ciertos equívocos acerca de la idea misma de demostración que Aristóteles se siente obligado a despejar.[47] Pensaba que la demostración es imposible por envolver una regresión infinita: si la verdad de la conclusión se demuestra sobre la base de la verdad de las premisas, esta verdad habrá de establecerse en razón de unas proposiciones previas las que, a su vez, precisarían demostrarse a partir de otras, y así sucesivamente *ad infinitum*; algunos seguidores de Jenófanes de Colofón simplificaban su explicación sobre la imposibilidad de la demostración remitiéndose a una especie de proceso circular. Ninguno de ellos advierte que *la demostración efectiva de una proposición* ha de descansar, en última instancia, sobre ciertos supuestos o principios indemostrables.

Jenófanes de Colofón

[47] Arist., *APo*., I, 3, 72b 5-30.

En Jenófanes (570-475 a. C.) advertiremos que la demostración, para su maduración requiere de tiempo y elementos de juicio; debido a que la realidad está infectada por el error, concluye, por eso, que la observación debe ser fortalecida con la deducción racional.

Para Jenófanes el conocimiento humano es una adquisición paulatina,[48] producto de una lenta y ardua investigación; esta idea implica una concepción optimista en el progreso humano.[49]

En Jenófanes, las opiniones humanas dependen del grado de elementos de juicio, ya que, en último término, nunca serán inequívocamente ciertas o falsas. Los fragmentos 35, 36, 39, son una llamada a la cautela, en oposición al dogmatismo milesio.[50] Aunque hizo poco eco en los demás presocráticos, se ve continuado en la teoría del *homo mensura* de Protágoras.[51]

Jenófanes[52] descubre en el conocimiento humano algo que es importante para sus contemporáneos y sus inmediatos sucesores: la adquisición del conocimiento humano por descubrimiento y el desarrollo de sus facultades por la comprensión. Su influencia es identificada en la terminología usada por Alcmeón de Crotona en su fragmento 1.[53] En donde diferencia al ser humano de otras especies por su capacidad para comprender, que está vinculado en su exégesis al fragmento 34.

Encauzando las analogías en el fragmento 34, Jenófanes asegura que nadie es capaz de conocer todo, y si fuera capaz de expresar algo perfecto, ni lo notaría. La paradoja consiste en dar razón del concepto de demostración

---

[48] Bernabé, Alberto, trad., *De Tales a Demócrito, Fragmentos Presocráticos*, Alianza, Madrid, 2001, p. 101.
[49] DK 21 B 18 Stob., *Ecl*., 1. 8. 2: Ya que los dioses en el principio no revelaron todas las cosas a los mortales, pero éstos, buscando, al transcurrir el tiempo, descubren lo mejor. Trad. Bernabé.
[50] Lesher, J.H., trad., *Xenophanes of Colophon, fragments*,The Phoenix Pre-Socratics series, *2000*, p.182.
[51] DK 21 B 34, S.E., *M*., 7. 49.
[52] Lesher, p. 182.
[53] DK 24 B 1, Thphr., *De Sens*., 25: El hombre se distingue de los demás porque es el único que comprende. Los demás sienten, pero no comprenden. trad. Bernabé.

imposible, ya que, si fuera posible, nadie lo notaría a causa de la condición humana en su imposibilidad de poder abarcar la totalidad de un fenómeno. Posteriormente, Parménides,[54] quien tal vez haya sido discípulo de Jenófanes, le da un giro mortal a la *Doxa* tamizándola como una postura escéptica del fragmento 34.

El dios parmenídeo se caracteriza por entender la condición humana, es astuta, sagaz, aunque inconsciente acerca de la creencia de la propia existencia.[55]

Jenófanes, al considerar la *Doxa* como mortal, ya que ve la realidad infectada por el error, decide seguir a los dioses en el camino de la verdad científica y filosófica. En Jenófanes, el estudio de los dioses no estuvo separado del estudio sobre la naturaleza (*physis*); su hipótesis, realizada a partir de la observación de fósiles,[56] demuestra un claro sistema de *deducción racional*.

Según Hipólito, Jenófanes decía que la tierra debió ser en algún momento barro, ya que las plantas existieron, en otro tiempo, en lo que ahora son rocas; por su parte existen también restos de peces en lo que actualmente es tierra firme. Por último, los hombres perecen cuando la tierra retorna al fango. Este razonamiento le llevó a concluir que todo sería producido de nuevo y que este proceso acontecería en toda la ordenación de la superficie de la tierra. Esta deducción racional[57] fluye en la observación;[58] se da como una

---

[54] Lesher, p. 183.
[55] DK 28 B 6, Simp., *in Ph.*, 86. 27-28; 143. 31 a 144. 1; 117. 5 y 8-13.
DK 28 B 8 , 51-61, Simp., *in Ph.*, 38, 31-32 a 39, 1-9.
DK 28 B 9, 1-4, Simp., *in Ph.*, 180, 9-12.
[56] Kirk, C.S., J.E., Raven y M., Schofield. *Los filósofos presocráticos*, Gredos, Madrid, 1987, Capítulo V.
[57] DK 21 B 35, Plu., *Moralia, Quaest. Conviv.*, 9.7.746b: Que estas cosas sean conjeturas [de modo que] se asemejen a las verdaderas. trad., Lesher.
[58] DK 21 B 36, Hdn., *P. Dichr.*, 296.9: Cuantas cosas se han manifestado a los mortales han de ser vistas. trad., Lesher.

situación originaria,[59] selectiva y que corresponde a un punto de vista teológico que adopta la observación y comparación[60] para sacar dicha deducción. En esta paradoja entre el dios y el hombre, entre la fe y la razón, entre el alma y la ciencia aparecen los argumentos demostrativos de Pitágoras, sus profundas interrogantes nos acercan en pleno siglo veintiuno al reencuentro con la ontología de la demostración.

[59] DK 21 B 37, Hdn., P. *mon. léx.*, 30. 30: También en ciertas cavernas gotea el agua. trad., Lesher.
[60] DK 21 B 38, Hdn., P. *mon. léx.* 41. 5:Si dios no hubiese engendrado la miel amarillenta, se diría que los higos son mucho más dulces < de lo que parecen>. trad., Lesher.

Dos son las teorías en las que podemos pensar bajo el influjo de Pitágoras:

Que el alma humana tiene origen divino. Y la investigación de la ciencia, en especial los teoremas de geometría y la doctrina de las proporciones que rebasó los simples cálculos y supo integrarlos en un sistema deductivo. Sin embargo, el *teorema*[61] como una proposición enunciada fundada en intuiciones o cálculos prácticos, como el llamado teorema de Pitágoras, ha sido de uso corriente en Babilonia unos cuantos siglos antes de que naciera Pitágoras. Si se piensa, en cambio, en la demostración de la proposición, sin la cual el teorema no adquiere estatus científico, es imprescindible contar con la demostración deductiva como procedimiento. Es por eso que al retomar el pensamiento de Pitágoras para la demostración, se hace con moderación, ya que se tiene cierto recelo de la originalidad de sus escritos; en cuanto a la manifestación e interpretación de sus principios, curiosamente jamás es igual la manera en que plantea un acercamiento a la naturaleza o macrocosmos con respecto al cuerpo y alma o microcosmos; aquí, el meollo del asunto es que la demostración busca mejorar la vida de los seres humanos mediante la perfección que depende de la armonía de los *elementos* materiales.

Diógenes Laercio, VIII, en sus, *Memorias Pitagóricas*[62] plantea la demostración bajo tres aspectos. 1. *La mónada* como causa activa de la demostración,[63] que da origen *a*, 2*. los elementos* mediante los cuales nace el mundo,[64] dotado de alma e intelecto, y de todos aquellos fenómenos y habitantes que hacen posible la demostración; por último, 3. se plantea la

[61] Eggers, Lan, Conrado. Victoria E. Juliá, *Los filósofos presocráticos*, Vol. 1. Gredos, Madrid, 1994, p.186.
[62] Festugière, A.J., *Études de philosophie grecque*, J., Vrin, Paris, 1971, p.373.
[63] D.L., *Anthologia Graeca*., 8. 25, Los principios. en *Lives of eminent philosophers*, trad. R. D. Hicks.
[64] D.L., *Anthologia Graeca*., 8. 25-27, Del mundo.

demostración del alma[65] como la que da vida a todos los seres, y que en la humanidad es vista en tres partes, la facultad de representación, la facultad de razonamiento, y el principio de los sentimientos.

Pitágoras introduce la necesidad de demostrar las proposiciones matemáticas de manera simbólica e intelectual, al margen de su sentido práctico. A partir del teorema que lleva su nombre aparece el problema de la raíz cuadrada de 2, que es un número *inconmensurable*.

LA IRRACIONALIDAD DE LA RAÍZ DE DOS.

La segunda de las aportaciones de Pitágoras a la teoría de la demostración está referida a la ciencia pura y al método de reducción al absurdo, que está relacionado con el descubrimiento de los números irracionales.[66] Lo que no está tan claro es en qué contexto se realizó tal descubrimiento: muchos opinan que fue al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo, mientras que otros creen que fue al estudiar las propiedades del pentágono estrellado, símbolo de los pitagóricos.

Sea como fuere, ambos trabajos proporcionaron los primeros ejemplos de números irracionales: la raíz de dos, el primero, y la razón áurea, el segundo. Aquí vamos a centrarnos sólo en la raíz de dos:

Lo que realmente demostraron los pitagóricos fue que la diagonal de un cuadrado y su lado no son conmensurables, lo cual quiere decir que no tienen una medida común o, dicho en términos modernos, que su cociente no es igual a ningún cociente de números enteros. La sencillez de la demostración la ha

[65] D.L., *Anthologia Graeca*., 8.30, Del alma y del cuerpo.
[66] Bell Temple Eric. *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York, 1986, pp. 21- 22.

convertido en paradigma del método de reducción al absurdo.[67] Aunque la prueba pitagórica original no se ha conservado, una cita de Aristóteles[68] acerca de una demostración en la que se utilizan los números pares e impares permite la siguiente reconstrucción:

Inconmensurabilidad

Teorema:

La diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables.

Demostración:

Sea **h** la diagonal de un cuadrado y **c** su lado.

Por el teorema de Pitágoras: $\mathbf{h}^2 = \mathbf{c}^2 + \mathbf{c}^2 = 2\mathbf{c}^2$

Entonces: $\mathbf{h}^2/\mathbf{c}^2 = (\mathbf{h/c})^2 = \mathbf{2}$

Supongamos que **h** y **c** son conmensurables.

Entonces existen dos números naturales **a** y **b**, primos entre sí, (*es decir, dos números que simultáneamente son divisibles solamente por la unidad [cuyo único factor común es 1] aunque independientemente pueden ser divisibles por otros números diferentes de uno. También llamado números primos relativos*) tales que **h/c= a/b**.

Entonces: $\mathbf{h}^2/\mathbf{c}^2 \mathbf{= a^2/b^2 = 2}$ **«** $\mathbf{a^2=2b^2}$

De la última igualdad se deduce que $\mathbf{a^2}$ es par, por lo que **a** debe ser par (y por tanto **b** impar, al ser primos entre sí).

[67] Reducción al absurdo es un método demostrativo que consiste en suponer lo contrario de lo que se quiere demostrar, y llegar a partir de dicho supuesto a una contradicción.

[68] Arist., *Metaph*., I, 5, 986a 15-20.

Sea $\mathbf{r}$ natural tal que $\mathbf{a} = \mathbf{2r}$.

Se tiene entonces: $\mathbf{a}^2 = (\mathbf{2r})^2 = \mathbf{4r}^2 = \mathbf{2b}^2$

Simplificando: $\mathbf{2r}^2 = \mathbf{b}^2$

De la última igualdad se deduce que $\mathbf{b}^2$ es par, por lo que **b** debe ser par, pero esto es una contradicción, pues se ha dicho previamente que **b** es impar.

Por tanto, **h** y **c** son inconmensurables.

IRRACIONALIDAD DE LA RAÍZ DE DOS.

La irracionalidad de √2 se deduce como aplicación directa del teorema anterior elevado al cuadrado. Sin embargo, lo habitual es encontrar la siguiente demostración, adaptación de la anterior:

Supongamos que √2 es racional. Entonces existen dos números naturales **a y b**, primos entre sí, tales que $a/b = \sqrt{2}$

Entonces: $\mathbf{a^2/ b^2 = 2} \ll \mathbf{a^2=2\, b^2}$

De la última igualdad se deduce que $\mathbf{a}^2$ es par, por lo que **a** debe ser par (y por tanto **b** impar, al ser primos entre sí).

Sea $\mathbf{r}$ natural tal que $\mathbf{a} = 2\mathbf{r}$.

Se tiene entonces: $\mathbf{a}^2 = (2\mathbf{r})^2 = 4\mathbf{r}^2 = 2\mathbf{b}^2$

Simplificando: $2\mathbf{r}^2 = \mathbf{b}^2$

De la última igualdad se deduce que $\mathbf{b}^2$ es par, por lo que **b** debe ser par, pero esto es una contradicción, pues se ha dicho previamente que **b** es impar.

Por tanto, $\sqrt{2}$ es irracional.

Empezamos como antes, suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional y que por tanto existen dos números naturales **a** y **b** tales que $\mathbf{a}^2 = 2\mathbf{b}^2$.

Si descomponemos $\mathbf{a}^2$ en factores primos es obvio que aparecerán los factores de **a** pero duplicados. Y lo mismo ocurrirá con $\mathbf{b}^2$. Sin embargo, en la expresión $2\mathbf{b}^2$ hay un 2 disparejo. Contradicción.

Obsérvese que esta demostración es aplicable a cualquier número natural que no sea un cuadrado perfecto, de modo que sirve para demostrar que toda raíz cuadrada de un número natural o es entera o es irracional.

Otra demostración, la veremos en el capitulo IV dedicado a Euclides.

Heráclito

En la concepción heracliteana de la demostración, rica en imágenes, de atrevidas comparaciones, áspera en momentos, pero profunda e intuitiva, prevalece un convencimiento de la unidad de todo ente.[69] En oposición a Jenófanes que identifica la ἀρχή, el Uno, con la divinidad, lo permanente, Heráclito considera que todo fluye, que nada es permanente. Considera que la razón universal es el *Logos* que el ser humano la manifiesta en el lenguaje.

---

[69] DK 22 B 10, Ps. Arist., *De Mund*. 5. 396b 20: συλλάψιες ὅλα καὶ οὐχ ὅλα, συμφερόμενον διαφερόμενον, συνᾶιδον διᾶιδον, καὶ ἐκ πάντων ἓν καὶ ἐξ ἑνὸς πάντα.
todas las cosas brotan de uno y de uno todas las cosas. Trad., Robinson.

La comprobación del ser y la demostración

Es en los orígenes de la argumentación,[70] en donde podemos reconocer signos, como el contacto del agua,[71] y símbolos que forman palabras, un estado en el que hallamos vívidas imágenes sensoriales[72] y emocionales y un conocimiento intuitivo operante, con un mínimo análisis racional.

Como lo atestiguan los himnos Védicos y los más antiguos Upanishads, las primeras investigaciones filosóficas sobre el origen de las cosas llegan a descubrir lo que Aristóteles llamará la causa material, que nos habla de la demostración de diversas y múltiples realidades.

En la aurora del pensamiento griego,[73] explicar la *Physis*, es la coyuntura de todo lo existente y de su explicación material. El agua en Tales o el aire en Anaxímenes son ejemplos significativos.

Tales entra en contacto con el fenómeno en la geometría y en la astronomía, pero declara que el mundo está plagado de dioses; por otra parte, investiga el origen único de las cosas dentro del elemento acuático, el orden místico de la unidad del mundo dentro del *sôma poiêtikon*, más imaginario y poético que materialmente comprobado o experimentado. Anaxímenes, por su parte ve en el aire el origen de las cosas.

Nosotros asistimos en la aurora del pensamiento jonio, a una misma investigación de la unidad ontológica dentro de la misteriosa ἀρχή primordial

---

[70] DK 22 B 101, Plu. *Ad.co.*, 1118c: Me pregunté [dirigí] a mí mismo. Trad. Marcovich.
[71] DK 22 B 77, Porph. *Antr.*, 10:. . . ψυχῆισι τέρψιν ἢ θάνατον ὑγρῆισι γενέσθαι. para las almas es alegría o la muerte de llegar a ser mojado.
[72] DK 22 B 116, Stob. *Flor.*, 3.5.6 :ἀνθρώποισι πᾶσι μέτεστι γινώσκειν ἑωυτοὺς καὶ σωφρονεῖν.Todas las personas tienen un reclamo al conocimiento de sí mismo [literalmente, la comprobación del ser] y el sonido que piensa. Trad. Robinson.
[73] Somville, Pierre. *Parménide de Élée. Son temps et le nôtre*, Vrin, Paris,1976.

que los físicos asimilan, algunas veces, como elementos como el agua, el aire; algunas veces como el *ápeiron*, y otras como el sustrato material que Heráclito considera como portador del suceder mismo, como soporte para la transformación continua.

Con Anaximandro, estamos en presencia de una explicación unificante de la diversidad en las cosas, tentativa Metafísica del pensamiento occidental y, de alguna manera, poder radical y constructivo de su imaginación; Anaximandro crea una forma de ver el universo, su forma, su devenir. Visto como una intuición sensible, él formula en su confección de conceptos una visión Metafísica. En efecto, el filósofo no recurre a una visión netamente poética, ya que Tales y Anaxímenes orientan su razonamiento a lo sensible, al tratar de explicar los fenómenos de la naturaleza, capaces de razonar sobre las cosas sensibles contaminadas de los anteriores. El ápeiron de Anaximandro, lo indefinido, nace de lo desorganizado que contienen todas las cosas en potencia para acceder al ser y al devenir; para discriminar y formar parejas de opuestos. De alguna manera todo retorna a un ciclo terminado. Es el intento de racionalización del Caos de la cosmogonía arcaica, que implica el mismo proceso de transición, de lo desorganizado al orden y de la demostración al Cosmos. Para Heráclito el ser se presenta con una nueva manera de pensar, de manera idéntica a la Teogonía hesiódica de un Zeus vencedor de poderes obscuros e instaurador de un orden nuevo. He aquí el motivo de explicar y justificar cómo ve el ser humano el orden en el mundo. Por lo demás, éste es el problema eterno de la filosofía y de la ciencia, la implicación de dos caminos radicalmente diferentes, si se comparan las teogonías con el pensamiento de Anaximandro. Nosotros encontramos, en efecto, la línea de ruptura extremadamente tenue, pero esencial, en donde el pensamiento pasa de un lenguaje mítico, de Muthos, a los primeros balbuceos del lenguaje racional y de la conciencia lógica en el mundo del Logos.

En el *Logos,* Heráclito participa como su heraldo. Él aceptará el monoteísmo de la parte trascendente, ya que se vislumbra una separación entre teología y ciencia que, como el *Señor del Oráculo de Delfos, no habla, ni disimula, da señas*, [74] para explicar las oposiciones de la demostración perpetuamente en lucha contra sí misma. Heráclito prueba de una manera particularmente dramática, la lucha de contrarios que asimila a una guerra incesante: *La guerra es el padre de todos y rey de todos*.[75] Es la tensión de fuerzas opuestas del mundo; de quien duerme, sueña, o está despierto;[76] mirando sin querer mirar, apegado a lo absurdo e inmanente de lo que no se puede solucionar en el ámbito de una realidad *Metafísica*. Junto al mundo las pretensiones humanas se ven desgarradas con antagonismos aparentes; el filósofo buscando la unidad profunda, original y final, que lo sostiene.[77]

Todo deviene simple dentro de la transparencia del *Logos*, aunque los seres humanos por generaciones conservan para Heráclito el apodo *del oscuro*, quizás sea porque la humanidad no entiende cómo (todo) lo divergente, sin embargo, converge hacia lo mismo:

> *En realidad, se trata de una conexión o ajuste basado en tendencias opuestas, como en el caso del arco o bien de la lira.*[78]

Así, trágicamente sensibilizado por las contradicciones del devenir, Heráclito describe el *Logos*, como palabra y pensamiento, o un *Logos* que se

---

[74] DK 22 B 93, Plu., *Moralia*., *De Pyth. Or*., 404d-e **:**ὁ ἄναξ, οὗ τὸ μαντεῖόν ἐστι τὸ ἐν Δελφοῖς, οὔτε λέγει οὔτε κρύπτει ἀλλὰ σημαίνει. El señor del oráculo de Delfos ni revela ni encubre sino que da señas (indica). trad. Marcovich.

[75] DK 22 B 53, Hippol. *Haer*.9. 9.4***:*** πόλεμος πάντων μὲν πατήρ ἐστι, πάντων δὲ βασιλεύς, καὶ τοὺς μὲν θεοὺς ἔδειξε τοὺς δὲ ἀνθρώπους, τοὺς μὲν δούλους ἐποίησε τοὺς δὲ ἐλευθέρους.

[76] DK 22 B 89, Plu. *De Superst*, 166c***:*** τοῖς ἐγρηγορόσιν ἕνα καὶ κοινὸν κόσμον εἶναι, (τῶν δὲ κοιμωμένων ἕκαστον εἰς ἴδιον ἀποστρέφεσθαι).

[77] DK 22 B 60, Hippol. *Haer*., 9. 10.4***:*** ὁδὸς ἄνω κάτω μία καὶ ὡὐτή. El camino hacia arriba y el hacia abajo es uno y el mismo. Trad. Robinson.

[78] DK 22 B 51, Hippol., *Haer*., 9. 9.2***:***οὐ ξυνιᾶσιν ὅκως διαφερόμενον ἑωυτῶι συμφέρεται· παλίντονος ἁρμονίη ὅκωσπερ τόξου καὶ λύρης.

resuelve en los contrarios, y se nos presenta, a la vez, como trascendente e inmanente. Trascendente, como la unidad del ser de una historia de las ideas que suelen llamar globalización, dentro de su propio entorno filosófico, e inmanente, como el fuego que habita dentro de las cosas, en lo más íntimo del misterio, que trabaja una posibilidad de fermentar la unidad, para que participe el pensamiento del ser humano, en la totalidad del *Uno* y el *Logos*.

La demostración requiere una mirada imparcial y así lo hace notar:

> *Si habéis oído no a mí, sino al Logos, es prudente convenir en que todas las cosas son Uno.*[79]
>
> En cuanto al Fuego se puede leer,
>
> *todas las cosas son equivalentes del fuego, y el fuego lo es de todas las cosas, lo mismo que las mercancías lo son del oro, y el oro, de las mercancías.*[80]

El fuego es la forma arquetípica[81] de la materia y el cosmos, concebido como totalidad, puede describirse como un fuego que cuando una determinada cantidad se extingue, se vuelve a encender en una parte proporcional; no todo él está ardiendo al mismo tiempo; siempre estuvo y siempre estará en ese estado.

---

[79] DK 22 B 50, Hippol., *Haer*., 9. 9.1:οὐκ ἐμοῦ, ἀλλὰ τοῦ λόγου ἀκούσαντας ὁμολογεῖν σοφόν ἐστιν ἓν πάντα εἶναι.

[80] DK 22 B 90, Plu., *Moralia*., *De E*., 338d-e**.:** πυρός τε ἀνταμοιβὴ τὰ πάντα καὶ πῦρ ἁπάντων ὅκωσπερ χρυσοῦ χρήματα καὶ χρημάτων χρυσός.

[81] Referido a los patrones de comprensión de la realidad que proviene de las palabras griegas *arjé* = elemento fundante, principio, y *typos* = tipo. Un presupuesto ontológico que nos remite a las ideas de un mundo uránico-trascendente en Platón y las formas como Modelos naturales arquetípicos (*Gorgias, República, Parménides*) la realidad de lo manifestado no se encuentra en el mundo sensible, que es cambiante y temporal, sino en los arquetipos que sirven de modelo a los objetos del mundo sensible. Estos arquetipos o ideas no son objetos creados por la mente sino realidades que se ubican fuera de la mente, inteligibles, inmateriales, inmutables e independientes, no dependen del mundo sensible para existir; forman el reservorio simbólico de nuestra experiencia filogenética. Amigo, María Luisa, *Guía para leer a Platón*, Universidad Deusto, Bilbao, 1989, pp. 198-202.

Heráclito fue el único entre los filósofos presocráticos que sospechó la existencia de la cualidad: según él, no todo en el universo se reduce a la cantidad; las acciones mecánicas de condensación y de dilatación en las que se expresan las transformaciones del fuego primordial no son la causa sino los efectos del cambio de sustancia, estas transformaciones o “tropos” implican un cambio cualitativo del conjunto tanto como de las partes; el mecanismo no es más que la utilización de un fin, la operación de una sabiduría, armonía o justicia, que gobierna el mundo siguiendo una necesidad inteligente y que pone de acuerdo los contrarios sin que por esto los identifique o los confunda, como hace el pensamiento humano. Todo fuego personifica la regla de la medida en el cambio inherente al proceso del mundo, del que el Logos es una expresión. Así, a través de las ansiedades de la búsqueda, el Efesio reflexiona cómo la unidad se encuentra dentro de la calma y lo profundo de un pozo; ya que el alma pertenece al *Logos*, ella posee la profundidad.[82] Tal innovación dentro del mundo del pensamiento se logró dentro de un sistema con amplitud y fuerza de cohesión que universalmente permanecen para las cuestiones ulteriores de la filosofía.

A veinticuatro siglos de distancia, pensadores como Hegel y Nietzsche pueden reencontrarse en el reclamo heraclíteo y construir sus propios sistemas, ya que sus palabras casi no han sido desmentidas.

En la obra tempestuosa que, iluminada de relámpagos sucesivos, se conservan en la forma fulgurante de un centenar de apotegmas, se marca la misma tendencia del espíritu humano para disipar esa duda que se opone al recurso mismo, al principio de identidad unificado que representa el valor universal.

---

[82] DK 22 B 45. D.L., 9. 7: ψυχῆς πείρατα ἰὼν οὐκ ἂν ἐξεύροιο πᾶσαν ἐπιπορευόμενος ὁδόν· οὕτω βαθὺν λόγον ἔχει. Al salir (buscando), jamás encontrarás los cabos (principio / y fin) del alma, aun recorriendo todo camino: tan profunda medida posee. Trad. Marcovich.

Heráclito, que asume la complejidad y la variedad del mundo para proclamarlas encerradas en leyes sujetas al *Logos*, tampoco deshace toda ambigüedad en la demostración. Quizá sea Demócrito el llamado a dar su justo valor a la investigación de las condiciones materiales del comportamiento regular del mundo natural, y a estudiar, en una perspectiva desacralizada, las relaciones entre el azar y la necesidad. Esta perspectiva es una de las condiciones que permitirán pensar en opciones metódicas de prueba y de explicación.

Al rechazar que el conocimiento de muchas cosas sea sintomático de ser inteligente,[83] el conocimiento se presenta como la diferenciación entre memoria y demostración; o, al decir que los opuestos dan significado a las cosas,[84] muestra una dualidad necesaria entre demostrable o no demostrable; incluso, al asegurar que *los hombres deberían tratar de comprender la coherencia subyacente a las cosas*,[85] pretende condenar la reducción al absurdo como elemento relevante para aceptar o rechazar algo, ya que la fórmula o elemento de ordenación de todas ellas está expresada en el *Logos* que permite la trascendencia en el pensamiento del ser humano y que se manifiesta en la totalidad del *Uno* y la ἀρχή.

[83] DK 22 B 40, D.L., 9.1: πολυμαθίη νόον οὐ διδάσκει· Ἡσίοδον γὰρ ἂν ἐδίδαξε καὶ Πυθαγόρην αὖτίς τε Ξενοφάνεά τε καὶ Ἑκαταῖον.

[84] DK 22 B 10, Ps. Arist., *De Mundo*., 5. 396b 20: συλλάψιες ὅλα καὶ οὐχ ὅλα, συμφερόμενον διαφερόμενον, συνᾷδον διᾷδον, καὶ ἐκ πάντων ἓν καὶ ἐξ ἑνὸς πάντα.

[85] DK 22 B 1, S.E. *M*., 7. 132: τοῦ δὲ λόγου τοῦδ᾽ ἐόντος ἀεὶ ἀξύνετοι γίνονται ἄνθρωποι...

Parménides

Víctimas del reduccionismo, Parménides y Heráclito fueron considerados como dos polos opuestos; desde este punto de vista, para Heráclito el movimiento y el cambio constante son la base de la realidad, del mundo, en cambio para Parménides, será todo lo contrario, su pensamiento se desarrollará en torno al estatismo.

En realidad, no es tan radical la oposición entre Heráclito y Parménides pues sus diferencias son demasiado relativas para encasillarlas ya que han girado alrededor de ciertos pares de conceptos como:

Pluralismo/monismo: esta oposición no es válida en todos los niveles, ya que Heráclito ha enseñado el monismo cósmico y metafísico.

Dinamismo/estatismo: pero en el plano cósmico se invierte la oposición. Parménides lleva al límite el dinamismo al hablar de la desaparición del mundo. Heráclito muestra un cierto estatismo cuando afirma que en el movimiento cósmico se conservan las medidas, las esencias.

Devenir/Ser: el devenir de Heráclito incluye al Ser, al que niega como sustancia. El Ser de Parménides incluye al devenir, al que niega como sustancia o caracteriza como apariencia.

Energetismo/sustancialismo: en el sistema de Heráclito se puede entender que ha desaparecido la sustancia. Pero si se entiende por la sustancia el Ser de Parménides, la distinción se neutraliza.

Pensamiento dialéctico/pensamiento metafísico: Heráclito suele ser visto como prototipo del pensamiento dialéctico que proclama el movimiento universal y la contradicción de lo real. Parménides es considerado el prototipo del pensamiento metafísico al negar el movimiento.

Un punto de unión entre Heráclito y Parménides sería su concepción del ser como un solo significado. Para Heráclito todo se disuelve, desaparece. En Parménides las múltiples formas del mundo, con sus oposiciones, son meras apariencias. El rasgo común entre Heráclito y Parménides es la concepción de las formas del mundo como apariencias, como realidades cuyo ser consiste en desvanecerse.

Parménides desecha la idea fundamental de Heráclito sobre la
ἀρχή :
fr. 6 *errantes, se agitan de un lado a otro* aludiendo a las oposiciones de Heráclito.

fr. 49a *El camino de vuelta* se refiere a la παλιντεοπος ἁρμίη de Heráclito.

El desenvolvimiento de la filosofía occidental tal como Alfred North Whitehead nos dice, consiste en una serie de notas a pie de página de Platón; se puede, en forma similar, exagerar, al decir que los escritos de Platón consisten en una serie de notas a pie de página de Parménides de Elea; pero, ¿cuántos argumentos se han escrito alrededor del pensamiento filosófico de lo ya pensado?[86] Lo cierto es que la demostración, en Parménides, inaugura la paradoja de la verdad[87] frente a la opinión y la demostración.[88]

---

[86] DK 28 B 8,1-3, Simp., *in Ph.*, 145. 1-3.
Un solo camino narrable queda: que es. Y sobre este camino hay signos abundantes. Trad. Gallop, David.
[87] DK 28 B1, 28-32, Simp., *in Cael.*, 557. 28.
Y ahora es necesario que te enteres de todo:
Por un lado, el corazón inestremecible de la verdad bien redonda;
por otro, las opiniones de los mortales, para los cuales no hay fe verdadera.
Pero igualmente aprenderás también tales cosas: cómo
lo que se les parece al penetrar todo, debe existir admisiblemente. Trad. Gallop, David.
[88] DK 28 B6, 1-2 Simp., *in Ph.*, 86. 27-28.
Se debe decir y pensar lo que es; pues es posible ser,
Mientras a la nada no le es posible ser. Trad. Gallop, David.

De la vida de Parménides se conoce muy poco. La tradición nos dice que fue discípulo de Jenófanes de Colofón, probablemente el que se menciona en el *Sofista* de Platón (242d), asociado a la escuela pitagórica. Mencionado incluso por Diógenes Laercio, Plutarco también menciona a Parménides como nativo de Elea; empero la evidencia, de alguna manera, es conflictiva. Diógenes Laercio nos menciona que floreció en la 69 Olimpiada (504-501 a.C.) pero se cree que nació alrededor del 551 a.C. Platón lo retrata en forma imaginaria, como una venerable y formidable figura. En el diálogo que lleva su nombre asume una manera didáctica y un aire de autoridad intelectual por el magistral tono de su *Poema.*

El *Poema* realizado en hexámetros de la tradición épica griega, contiene numerosas temáticas y estilística de la *Odisea,* pero se cuestiona que esto sea deliberado; no es de fácil lectura. La austeridad en la dicción de Parménides, aunada a la complejidad del tema, presenta una inusitada complejidad en su construcción. Su sintaxis está repleta de múltiples ambigüedades,[89] de un lenguaje oscuro, que deja a su paso cierto escándalo interpretativo sobre el autor.

De gran valor es el fragmento 1 del *Poema*, en la línea 32, preservado por Sexto Empírico. Luego en otros 17 fragmentos se cuenta con 9 líneas. La reconstrucción se dificulta en los detalles, al punto de que en algunos casos se vuelve hasta enigmático.

Los fragmentos se formaron en grupos; en el proemio se describe cómo los caballos, hijos del sol, se presentan a los dioses, y se les promete a los hombres mortales encontrar la verdad.

---

[89] DK 28 B1, 8-11 S.E. *M.*, 7. 111.

En los fragmentos cortos (2-3,6-7) los dioses les dan a los humanos ciertos principios para encontrar el camino de la verdad[90] (o *Alétheia).*[91] Después surcan (8.1-51) el camino de la deducción mostrando que la realidad es singular. Finalmente, en las 55 líneas (8.51—61 de los fragmentos 9-19) se habla sobre el camino de las apariencias (*o doxa*) en los mortales. Esta pequeña sección habla sobre la certeza. Parménides, en forma original, argumenta sobre el camino de la verdad. Afortunadamente estos fragmentos están intactos. Su influencia histórica se hace evidente a través de la doctrina del camino de la verdad, que incluso Aristóteles menciona, así como su significado filosófico posterior.

El *Poema* filosófico de Parménides, nos deja un enorme legado.[92]no solamente a sus inmediatos sucesores, Zenón y Meliso, sino también, a los subsecuentes filósofos griegos y a la tradición posterior del discurso intelectual de occidente.

La obra de Parménides, considerado como el antecedente del pensamiento de occidente, contiene explícitamente una concienzuda argumentación sobre la demostración[93]. Sin embargo, a pesar de la dificultad conceptual en sus versos, éstos son de gran importancia, al grado que aún hoy se ensayan diferentes interpretaciones de su pensamiento, al mismo tiempo que son fuente de diversas reacciones; en algunas ocasiones, de asombro, en otras, de fascinación, lo cual encierra una constante preocupación por su legado. Parménides es considerado uno de los más importantes filósofos antes de Sócrates, pero, siempre actual, en el mundo ha tenido detractores y seguidores.

---

[90] DK 28 B1, 15-17 S.E. *M.*, 7. 111.
[91] DK 28 B2, 4 Simp., *in Ph.*, 116, 29:
Es el camino de la persuasión (acompaña, en efecto, a la verdad). Trad. Gallop, David.
[92] DK 28 B2, 1-2, 3-8 Procl., *in Ti.*, I 345, 18-20.
[93] DK 28 B7, 3-6 S.E. *M.*, 7. 114.

En Parménides la verdad es imperecedera y en la demostración cuenta con la realidad, como pretendiendo desvincular del tiempo la verdad,[94] y la demostración[95] condicionada a una demostración de su ser[96] en forma contundente.[97]

En Parménides se ha querido ver la irrupción del pensamiento racional,[98] la instauración del discurso de la razón inmanente, de *Logos*, pero su contribución no sólo es más sutil, sino más ambigua. Anuncia el autocontrol y la autonomía del pensamiento frente a las veleidades e inconsistencias de las manifestaciones ordinarias de las cosas; pone en movimiento una dinámica analítica interna de los sentidos de *estì*, es decir, como expresión abstracta. Pero no renuncia a los dones de la revelación y la iluminación, ni transforma la visión anterior del mundo[99] como entramado de coerciones y obligaciones en un sistema de causas y necesidades naturales. Reconoce un poder público e impersonal representado por la fuerza de la razón, capaz de dirimir, por la vía de la argumentación, la demostración. " *juzga por la razón* (*krinai de lógoi*) *el muy controvertido criterio estipulado por mi* ".[100] En su *Poema,* Parménides utiliza la noción de contradicción lógica y su uso metódico para la obtención de una demostración indirecta.[101]

El asunto es saber si Parménides efectivamente dio con una reducción al absurdo en el curso de su poema identificándose en su argumentación: *lo que*

---

[94] DK 28 B8, 6-11 Simp., *in Ph.*, 5. 6-11**.**
[95] DK 28 B8, 19, 20 Simp., *in Ph.*, 145, 20-21**.**
[96] DK 28 B8, 3 Simp., *in Ph.*, 145, 3.
DK 28 B6, 1-2 Simp., *in Ph.*, 86.27-28**.**
[97] DK 28 B8, 36-37 Simp., *in Ph.*, 86. 31-32
Pues nada existe ni existirá
Ajeno aparte de lo que es. Trad. Gallop, David.
[98] DK 28 B4, 1, Clem., *Strom.*, 5. 15**:** Observa cómo, estando ausentes, para el pensamiento las cosas están presentes. Trad. Gallop, David.
[99]DK 28 A 22 Ps. Plu., *Strom.*, 7. 5 ***:***
Parménides … declaró que el universo es eterno. Trad. Gallop, David*.*
[100] DK 28 B7, 5-6 S.E.*M.*,7. 111.
[101] Es la demostración de una tesis en forma indirecta mediante la reducción al absurdo de la tesis contraria.

es, es, en tanto que, lo que no es, no puede ser de ninguna manera. ¿Hay en realidad una prueba lógicamente concluyente de su tesis sobre la vía de la verdad? Ya que una reducción de este tipo supone el uso efectivo de la idea de contradicción que, hasta la fecha, ningún filósofo ha podido rastrear. Como quiera que sea, en el pensamiento contemporáneo se conserva esta herencia de reducción y contradicción y aún se sigue trazando y aprovechando en la demostración a la manera de la esfera de Parménides referida al ser, sin lesión ni menoscabo.[102]

Verdad y falsedad parecen una dicotomía que genera posibilidad, ya que si es posible buscar una verdad desinteresada, también lo es buscar una falsedad desinteresadamente,[103] aquí el límite entre argumentación y llega a su máxima expresión en los argumentos sofísticos de Protágoras, un antropocentrismo finamente acabado que disuelve la demostración y la reducción al absurdo con el riesgo de quedar en entredicho si no aciertan a argumentar la verdad como un límite de la realidad[104] y la demostración.[105]

[102] DK 28 B8, 42-49 Simp., *in Ph*., 146. 15. 2**.**
[103] DK 28 B9, 1-4 Simp., *in Ph*., 146. 15. 2: Simp., *in Ph*., 180, 9-12**.**
[104] DK 28 B8, 29-30 Simp., *in Ph*., 145. 30-31.
[105] DK 28 B8, 3,5-6 Simp., *in Ph*., 145. 3-6.

Empédocles

Su personalidad da paso a dos actividades: físicas y místicas, irreconciliables, pero que en el fondo muestran unidad.

Empédocles piensa que, en determinados aspectos de la realidad y en cuanto al sentido de su origen y destino,[106] la Ignorancia humana produce la incapacidad de los hombres para conocer la realidad a través de los sentidos y esto limita las posibilidades de la ciencia.

La sencillez puede llevar a conocer la realidad aunque curiosamente algunos filósofos traducen como religiosidad,[107] en contraposición a quienes persiguen un éxito fácil aun a costa de hablar con temeridad de lo que no conocen.[108]

Empédocles muestra, con respecto a Parménides, una actitud de conciliación de los datos que se estiman como fiables al ser captados por los sentidos.[109] Niega la posibilidad de que algo nazca del no ser o de que el ser perezca;[110] rechaza la existencia del vacío o de degradaciones del ser,[111] es decir, niega que pueda haber crecimiento o disminución de lo que existe, y la posibilidad de nacimiento o muerte de lo que es.[112]

La innovación en el pensamiento de Empédocles es que no parte de un ser unitario, como la idea de Parménides, sino múltiple, así lo que la gente

---

[106] Bernabé, Alberto,trad., *De Tales a Demócrito, fragmentos presocráticos*, Alianza, Madrid, 2001, pp.181 ss.
[107] DK 31 B2 y 3, S.E.*M*., 7. 122**,** *Cfr*. fr.8-9, Inwood, Brad. *The Poem of Empedocles*, University of Toronto Press, 1992.
[108] DK 31 B5, Plu. *Moralia, Quaest. Conviv*., 8. 8.728 E; Inwood, CTXT-107.
[109] DK 31 B 3, S.E.*M*. 7.124.
[110] DK 31 B9, Plu. *Moralia, Adv. Col*., 1113.
[111] DK 31 B10, Plu. *Moralia, Adv. Col*., 111; Inwood, CTXT-17.
[112] DK 31 B12 y 13. Ps. Arist., *M.J.G*. 2, 6, 975b y 28, 976b; *Cfr*. fr. 9-10, Wright, M.R., *Empedocles the extant fragments*, Bristol Classical Press, London, 1995.

denomina nacimiento y muerte es pura mezcla y disociación de varias raíces, sólo son perecederos los seres resultantes de las mezclas de las raíces originarias, ingénitas e imperecederas.

Llegamos así a la novedosa teoría de las raíces que posteriormente la escuela de Aristóteles las traduce como elementos.

En la primera designación las raíces reciben nombres divinos,[113] lo que se aviene perfectamente con su ser eterno. Luego aparecen con designaciones variables:

> Fuego: *Zeus*, sol, el radiante, *Hefesto*, llama.
> Aire: *Hera*, luz, cielo, éter, calor.
> Agua: *Nestis*, lluvia, mar, ponto.
> Tierra: *aidoneo*.

Esta multiplicidad se debe a una plasticidad de lo que narra.

Al mismo tiempo, Empédocles se encuentra influido por Heráclito al creer en la multiplicidad de las cosas y en su continuo cambio; para poder explicar las apariencias del mundo tiene que aceptar una pluralidad de entes que son increados, imperecederos y cualitativamente inmutables, condicionados al movimiento del espacio; pero al ser inmutables, tiene que concebirlos como inmóviles; esta dualidad lo lleva a admitir dos principios que originan el movimiento: el amor y el odio φιλότης νεῖκος. El odio separa; el amor une.[114]

Lo nuevo en la teoría de la demostración es que frente a los opuestos heracliteanos y al resultado de la evolución de un solo elemento originario para

---

[113] DK 31 B6, S.E.*M*., 10. 35.
[114] DK 31 B20, Simp., *in Ph*., 1124. 9-12.

Jenófanes, Empédocles propone que los cuatro elementos, aire, tierra, agua y fuego, son igualmente originarios, ingénitos e imperecederos, es decir, existen con las propiedades del ser parmenídeo, excluida la unidad,[115] a la que Empédocles llama el esfero, que no tiene principio ni fin y que constituye la verdadera ἀρχή.[116]

Para Heráclito, si el Logos puede expresar contradicciones como reflejo de la realidad, en tanto que Parménides considera que un mundo contradictorio no puede ser pensado, en Empédocles, aunado a la pluralidad de entes, se da paso a la concepción protagórica de la demostración.

[115] DK 31 B17, Simp., *in Ph.*, 157. 25 y 161. 14.
[116] DK 31 B27, Arist., *GC*, 1. 315a.

Capítulo II

El planteamiento de la demostración en la concepción de la verdad de Protágoras.

Los sofistas representados en el pensamiento de protágoras, tienen su manera peculiar de entender la demostración, en un primer momento como una verdad relativa, pero este relativismo nos conduce a un juego sin fin que nos lleva a un clímax de entendimiento afirmativo o negativo como legítimo, surge así una demostración que depende de la existencia de contrarios

Se dicen tantas cosas de los Sofistas, que se pierden entre el resentimiento y la alabanza, lo cierto es que la idea de demostración maduró también a partir de la concepción de verdad de Protágoras que realiza un avance sobre la imposibilidad de la reducción al absurdo planteada por Heráclito al relacionar lenguaje y realidad, y los atributos y cualidades de la argumentación.

Desde mediados del siglo V a.C., apareció en el discurso la noción de confusión: se trata de una argumentación torcida por las circunstancias prácticas, la inquietud o el malentendido que, sin ninguna pretensión, se le considera una retórica que acomoda el lenguaje a su conveniencia y enturbia sus intenciones, siempre bajo el pretexto de aparentar una lúcida y transparente apariencia de verdad en la demostración.

Al filósofo explorador de la verdad esto le inquieta y, tentado por la razón, busca la verdad desinteresada, pero a partir de una realidad que raya en la inocencia de sus sentidos, sólo le queda argumentar a favor de una verdad que está atada a la posibilidad del fenómeno, por lo que, buscando evitar la confusión, propone la demostración mediante la abstracción de cuestiones concretas. Los sofistas, por su parte, al ocuparse de la verdad y del bien aplicado a la utilidad cotidiana, apelan a la razón humana para resolverlo.

Una parte importante para la comprensión de Protágoras es entender cómo se percibe su profesión en la antigua Grecia, ya que es el primero en influir a otros Sofistas.[282]

Los criterios de inclusión y exclusión utilizados para construir nuestro corpus de sofistas son controvertidos porque dependen de interpretaciones. Así, los Sofistas se sintieron herederos de los antiguos rapsodas [poetas antiguos vestidos con un manto púrpura que usaban la poesía para fines educativos].

La educación sofística se caracterizó por tener una doble vertiente, una, retórica, que los preparaba para los debates políticos y forenses, y la otra, política que los preparaba para asegurar la recta administración de los asuntos propios y de la ciudad. En cuanto a sus métodos de enseñanza: uno de sus sistemas era la declamación de discursos demostrativos [epideíxeis].

Otros métodos de enseñanza consistían en desarrollar temas de carácter antitético, como el arte de la erística [*tékhnē eristikôn*] que Protágoras escribió. O los *Discursos dobles* que reproducen las técnicas de antilogías [*antilogikoí*], ya que su forma de argumentar es oponer un *Logos* a otro. Protágoras asegura que sobre cualquier asunto hay dos razonamientos capaces de formulación verbal, mutuamente opuestos.[283]

---

[282] Schiappa, Edward, *Protagoras and Logos. A study in Greek philosophy and rhetoric*, University of South Carolina Press, Carolina, 1991, pp. 3-17.
[283] D. L., 9.51; Clem. Al., *Strom*., 6. 65.

Platón,[284] aprueba el buen uso del *élenjos*. Mediante el *élenjos* un aserto determinado conduce a una contradicción, es decir a dos asertos que son mutuamente contradictorios.

El descubrimiento de las reglas lógicas del lenguaje llevó a Gorgias a la construcción de frases, lógicamente correctas del tipo *Lo que no es es,* haciendo hincapié en que los contenidos del pensamiento [*tà phronoúmena*] no son iguales a la realidad [*tà ónta*]. Si el *Logos* puede expresar contradicciones, éstas son un reflejo de la realidad, tal como defendía Heráclito. Mas, como sostenía Parménides, un mundo contradictorio no puede ser pensado, luego, no existe. Este contraste entre Heráclito y Parménides es el punto de partida para las discusiones sofísticas de la teoría del lenguaje.

No es fácil separar la instrucción sofística de la retórica, que era una instrucción sobre los *logoi*. La retórica sofística, basada en argumentos de verosimilitud, necesitaba de un conocimiento profundo de las reacciones humanas: sus móviles, debilidades y comportamientos. Los sofistas en este sentido comprobaron cómo el comportamiento humano varía según las circunstancias privadas o públicas, bajo presión o sin ella. De ahí que los sofistas desarrollaran una doctrina del *Logos,* que comprendía desde cuestiones gramaticales a otras lógicas u ontológicas.

Kerferd[285] señala que el término *Logos*, entre los sofistas y sus contemporáneos, se aplica a tres áreas conexas, aunque distintas:

a) Al campo de la lengua y la formulación lingüística.
b) Al campo del pensamiento y los procesos mentales (pensar, razonar, explicar).

---

[284] Pl., *Phd*., 85c-d; *R*., 534b-c.
[285] Kerferd, George. B., *The First Greek Sophists*, Classical Review , 64, 1950, pp. 8-10.

c) Al campo del mundo real: todo aquello de lo que podemos hablar (principios estructurales, fórmulas, leyes naturales).

Por lo general, el término *Logos* remite siempre, en distintos grados, a los tres campos.

La palabra SOFISTA tiene por lo menos dos interpretaciones: una, originaria, con sus matices y, otra, contemporánea. La definición más familiar de *sofista* es peyorativa, ya que se refiere a alguien que fabrica falacias. El *Oxford English Dictionary*[286] describe al sofista como un especialista en comunicación y conocimiento. Que da instrucción profesional en el campo intelectual y ético a cambio de un salario o pago. Se concibe al sofista como el primer profesional de la enseñanza en la historia de Occidente.

Pero, a todo esto, ¿cuál es el origen de la definición negativa de sofista? Karl Popper[287] lo sitúa en Platón, ya que, al atacar a los sofistas, creó una mala asociación conectada con la palabra. W.K.C. Guthrie se opone a la tesis de Popper y asegura que la connotación negativa es anterior a los platónicos, es el caso de Aristófanes que en su tragedia *Las nubes*, 112 ss., ve el engaño en los sofistas y en Sócrates, en cuanto a cuestiones prácticas.

Eric A. Havelock ofrece también una explicación plausible. Considera que, en Platón, el término *sofista* adquiere un carácter desdeñoso, no como la palabra actual *intelectual*.

En los escritos de Platón encontramos algunos conceptos positivos del sofista,[288] pero por alguna razón ha predominado más el sentido peyorativo y un prejuicio anti-intelectual que, al popularizarlo, disminuyó la respetabilidad

---

[286] Stevenson, Angus, Elliot, Julia, and Jones, Richard (editors), *The Colour Oxford English Dictionary* Second Edition, 2002.

[287] Popper, Karl Raymond, *The Open Society and Its Enemies*, Routledge and Kegan Paul, London, 1966, vol.1: Plato, p. 263.

[288] Pl., *Smp*., 208; *Ly*., 204a; *R*., 596d.

del titulo sofista. Platón nos ofrece en el diálogo El Sofista, una definición sistemática respondiendo a la pregunta ¿Qué es el sofista?; desarrolla diferentes miradas de un mismo objeto, desenvuelve, a través del diálogo, siete definiciones progresivas del sofista. En última instancia Platón disocia el concepto general y tradicional de sofista como poseedor o falsificador del conocimiento, valorado negativamente respecto al filósofo, buscador de la verdad, valorado positivamente.

En la moderna terminología, se dice que Aristóteles diferencia el sistema de los sofistas que presuponen sistemas epistemológicos, ontológicos o éticos. En una refutación al *Sofista* de Platón, Aristóteles asegura que los Sofistas utilizan las falacias (164a), y dice que el arte del sofista está encaminado a buscar más bienes que verdad (165a).

En la *Metafísica* asegura que la dialéctica platónica encamina su crítica a lo que no es filosofía tal como Platón la maneja en el *Sofista.*[289] Aunque hay una diferente manera de ver al sofista en la *Metafísica,*[290] Aristóteles asegura que la concepción platónica sobre la sofística es correcta, ya que trata sobre el No-ente, y sus consideraciones se refieren al accidente, que ni es siempre ni generalmente. Finalmente, Aristóteles define al sofista como un pensador con una deficiente moral en la práctica de la retórica y de la dialéctica, con excepción de Protágoras a quien ve como un pensador serio.

Kerferd, en *Lecturas de la historia de la filosofía,* publicada en 1830, hace una redefinición de sofista a partir de los escritos de G.W.F. Hegel, Hegel identifica la historia como un movimiento triádico de esquema dialéctico: Tesis, antitesis y síntesis. De acuerdo con la interpretación de Kerferd, Hegel ve en los presocráticos la representación del primer estadio de la búsqueda filosófica.

---

[289] Arist., *Metaph.*, 1004b.
[290] Ibid., 1026 b, 14-27.

Sócrates y los Sofistas representan la antítesis, que presupone el principio de subjetividad; y funda la síntesis a través de los trabajos de Platón y Aristóteles.

La siguiente redefinición de sofista es propuesta por George Grote, en su famoso capítulo 67 sobre la *Historia de Grecia.*[291]

Grote, contrario a lo que se piensa de los sofistas, asegura que fueron una fuerza positiva en la cultura y en la filosofía y propone algunos argumentos:

Primero: Grote asegura que Platón ataca a los sofistas, pero no en la forma viciosa de los modernos historiadores. Platón no caracteriza a los sofistas, entre ellos a Protágoras, como moralmente corruptos.

Platón es visto por Grote en una imaginaria disputa con los sofistas, que en el sentido moderno no pasa de ser una disputa moral que culmina en proponer un antídoto para la corrupción de Gorgias y Protágoras.

Segundo: Grote nota, en cambio, que los sofistas buscan indefectiblemente el pago por sus servicios.

Tercero: Grote defiende a los sofistas que enseñan y que argumentan en público.

Cuarto: Grote asegura que los historiadores alemanes recientes ven el término *sofista* como atribuible a personas con doctrinas, principios, o métodos, que sólo tienen en común el cobrar honorarios por su profesión. Y es por esto

[291] Grote, George, *Histoire de la Grèce depuis les temps les plus reculés jusqu'a la fin de la génération contemporaine d'Alexandre le Grand*. Librairie Internationale, Paris, 1864-1867, capítulo 67.

último que los historiadores alemanes critican y aseguran que la concepción de sofista es inapropiada, inadecuada e inconveniente.

Finalmente, Grote defiende a los sofistas del cargo de ser responsables del declive ateniense específicamente entre los años480-415 a. C.

Por todo lo anterior, el concepto de sofista es tratado equivocadamente y no es doctrinal. Por ello, hace falta releer conceptos para verlos desde su perspectiva individual y de grupo.

Con respecto a Protágoras, hay cuatro razones que justifican su estudio individual y su influencia en la antigua filosofía y retórica griegas.

PRIMERO: Protágoras desarrolla un pensamiento original fundando un escape de la razón, de la verdad y del lenguaje; mediante el pensamiento adaptado a las circunstancias provoca el movimiento sofístico.

Protágoras hace a un lado el contenido del pensamiento, basando sus discursos en la palabra y acercándose más a lo erístico.[292]

SEGUNDO: Hay sólida evidencia que sugiere que la doctrina de Protágoras tuvo una significación práctica y filosófica.

TERCERO: el pensamiento de Protágoras es continuado por los estudiantes de la teoría retórica.

CUARTO: Los sofistas, en general, y Protágoras, en particular, viven una época de transición, de su cultura, del modelo mítico-poético, y de su manera de pensar irracional-racionalista.

---

[292] S.E., *P.*, 3. 144.

Ante todo esto, podemos notar que la clasificación de Protágoras y su interés filosófico permanecen en la reflexión moderna.

Platón, por su parte, aborda el concepto que tuvo Protágoras del hombre, como la medida de todas las cosas, en el *Teeteto, 166d,* diálogo concerniente a la naturaleza del conocimiento. El diálogo *Protágoras* desarrolla el concepto de *areté* (excelencia en la virtud). Por lo que se aprecia en el diálogo, el pensamiento de Protágoras fue un esfuerzo por ver en la filosofía su aspecto educativo. Sin embargo, podemos ver en Protágoras dos categorías: una interpretación subjetiva que lo reduce a sofista, maestro de la retórica, y una interpretación heracliteana.

La diferencia entre la interpretación subjetiva y la heracliteana son dos palabras clave, *Logos* y *prágmata*. En la interpretación subjetiva, *prágmata* es traducida como edición (producto), pregunta, sujeto. La palabra anacrónica subjetiva *prágmata,* desde la perspectiva de los actos y preguntas, se refiere obviamente a creaciones humanas. Esto implica dos *logoi* como palabras o argumentos, que son objeto de interrogatorio. Los fragmentos *Toîs lôgois* tienen una lógica extensión de la tesis popular heracliteana referida a la moderna teoría del flujo y a la doctrina sobre la *unidad de los opuestos*.

Los fragmentos *Toîs lôgois* y el de la medida del hombre responden a las teorías eleáticas que conciernen a la habilidad humana comprendida en la habilidad para hablar correctamente acerca de *qué es*.

Heráclito, en su doctrina de la unidad de los opuestos, plantea que la filosofía antigua tiene en común dos características. La primera concibe un conflicto en los opuestos debido a que los límites de su significación no están bien definidos. La segunda, establece que usualmente en los opuestos uno predomina sobre el otro.

Hesíodo aborda poéticamente el conflicto de la noche con el día, y justamente la noche hace efímera la luz del día y la visión del hombre; la muerte hace fugaz la vida humana.[293]

Hay una considerable disparidad sobre la evolución de la teoría presocrática acerca de los opuestos. Aristóteles, por su parte, considera que la filosofía que le precedió privilegia la teoría de los opuestos, pero es claro que Aristóteles exagera al sobresimplificar el papel que jugó la teoría de los opuestos en la filosofía presocrática.

Algunos de los presocráticos que consideraban la teoría de los opuestos son: Anaxímenes, Heráclito, Parménides, Anaxágoras, Empédocles, Alcmaeón y Meliso, todos ellos impregnados de la palabra de racionalización sobre acontecimientos místicos, y de palabras con un enfoque teísta y la explicación que perpetúa a los poetas, Homero y Hesíodo.

El avance de la teoría heracliteana en el desenvolvimiento del pensamiento acerca de la relación entre lenguaje y realidad, y entre cosas y predicados, atributos y cualidades fundamenta la teoría de la demostración de la existencia en tanto que produce una ruptura entre imaginación y realidad, ya que la realidad vuela en el sentido de los hechos y la imaginación vuela hacia lo indecible.

Heráclito predica un escepticismo frente a toda proposición que se presente como universal, incluso las matemáticas son susceptibles de crítica.

---

[293] Hes., *Th.*, 748-57.

En la obra de Protágoras se encuentra *Sobre la verdad*, obra conocida también como *Discursos demoledores*, en donde la demostración gira alrededor del relativismo. La humanidad es legítimamente dueña de su verdad, la cual, aunque sea arbitraria, es válida, incluso pueden darse dos puntos de vista radicalmente opuestos sobre una cosa, y ser ambos justificados por una dialéctica hábil.

Precisamente esta dialéctica efectiva es la que Protágoras enseñaba a sus discípulos, de modo que hicieran del argumento más débil el más fuerte.

Protágoras defendió un relativismo del conocimiento y de los valores, esto es, negó que existieran valores y verdades universales para todos los hombres. *El hombre es la medida de todas las cosas, de las que son, en tanto que son, y de las que no son, en cuanto que no son.* No hay verdades objetivas, absolutas y universales, sino que las cosas son tal y como son percibidas por cada uno de nosotros. Este relativismo se aplica a todos los ámbitos de nuestra existencia.

Por ejemplo, lo que para una persona sana es un sabor agradable, para un enfermo es amargo. ¿Está confundida la persona enferma? Protágoras dirá que para él, en su situación, la verdad es que el sabor es amargo.

El relativismo impide establecer un criterio de verdad, teniendo todas las opiniones la misma validez. Esto nos lleva a poder permitirnos defender tesis contrarias al mismo tiempo, técnica que el filósofo destacó con maestría y que fue duramente criticada por Platón y un poco menos por Aristóteles.

Este relativismo se vincula en cierto sentido con el *kairós* en las *Antilogías* en la medida en que, según el *kairós, la misma cosa puede aparecer alternativamente con caracteres contrapuestos*, ya que el término cairos remite a un campo semántico que propone la respuesta adecuada ante una situación critica que se tiene que responder.[294]

Sin embargo, según Guthrie,[295] Protágoras difuminó la radicalidad de este criterio hacia una postura utilitarista argumentando que *en todas las cosas hay dos razones contrarias entre sí,* aun aceptando que las opiniones particulares tengan la misma validez, algunas son más ventajosas que otras. En el caso del binomio salud-enfermedad, es más propicia la salud que la enfermedad, ya que es raro que el ser humano desee estar enfermo.

El relativismo de los valores implica que una misma cosa o acción puede ser buena para un sujeto y mala para otro. Es más, una acción puede ser mala o buena para un mismo sujeto dependiendo de cada circunstancia, y en la medida en que él lo crea así.

En Protágoras la concepción de argumentos contradictorios y la noción de existencia en el planteamiento de la demostración de la existencia produce serios problemas entre verdad y lenguaje así como entre existencia y verdad.

En *Discursos demoledores*, el término verdad, *alētheia*, de la poesía pasa a la prosa, donde se materializa como historia, investigación o búsqueda de la verdad. El oráculo délfico exigía, en muchas ocasiones, abrir una investigación para encontrar la verdad de algún suceso. La verdad se convirtió en una especie de deber universal unido frecuentemente a una demanda de justicia.[296]

---

[294] S.E., *P.*, 32. 216-219.
[295] Guthrie, W.K.C., *The Sophists*, Cambridge University Press, UK, 1971, p. 244.
[296] *Sofistas testimonios y fragmentos*, nota 60, p.116.

La doctrina del *homo mensura*[297] no supone necesariamente la negación de una realidad objetiva, externa al hombre, sino, más bien, un subjetivismo *sensu lato*, según el cual cada hombre particular percibe no los factores reales que existen en las cosas, sino aquellos otros que son causa de la percepción. Dado que todas las percepciones son infalibles y, por tanto, verdaderas, la contradicción no es posible, ya que, en caso de predicados diferentes, o dicen lo mismo o hacen referencia a objetos diferentes, o alguno de ellos no hacen referencia a nada. Por ejemplo, calor o frío son dos realidades diferentes, que los distintos sujetos pueden percibir en el mismo o distinto grado, según se encuentren habitando en un país cálido o frío.

Porfirio, por su parte, asegura que Protágoras siguió la filosofía de Heráclito, negando, por tanto, la unidad del ser, y que siguió las concepciones de Demócrito, y esto es algo tan palpable que hasta Platón tuvo que asociar su conocimiento al de filósofos anteriores, lo que hace notar en sus diálogos.

> *Son escasos los libros de los filósofos anteriores a Platón, porque, en el caso contrario, se podría descubrir mayor número de [plagios] del filósofo. Es el caso al leer su tratado* ***Sobre el ser****, que éste se sirve, en contra de los que han introducido la doctrina de que el ser es uno, de refutaciones análogas,*[298] (y Eusebio añade: “*Después de haber sostenido esto, desarrolla con amplitud la demostración*”).[299]

Según Protágoras, el ser humano constituye el criterio de lo real. Realmente todas las cosas que se manifiestan a los hombres son; por lo tanto, lo que no se revela a ningún hombre, no es. Vemos, pues, que Protágoras sostiene que la materia fluye y que en ella reside la posibilidad de conocimiento

---

[297] Ibid., nota 61.
[298] Ibid., p. 119.
[299] Porfirio, tomado de Eus., *PE*, 3. 25.

de todas las cosas que se manifiestan, las cuales son obscuras e inaprensibles para nosotros.[300]

En *La verdad*, Protágoras nos dice[301] que el *hombre es la medida de todas las cosas*. El sofista encuentra esta fórmula en razón de diversas ideas; para él, lo importante es medir el alcance de la percepción de los sentidos y el alcance de la manifestación de las cosas. A grandes rasgos, su postura es clara y habla bien del ser y del no ser, pero toda cuestión de realidad o de verdad desaparece en lo sucesivo para no descuidar la subsistencia del hombre; y sólo deciden sus sensaciones y su opinión, sensaciones y opiniones que no se pueden ni confrontar ni confirmar, y que varían en función de personas y circunstancias.

La actividad del ser humano y sus consecuencias son el único criterio, la única medida: *tal como me parecen las cosas, tales son,* resume Sócrates.[302]

De golpe, el ser humano sólo juzga o siente, he ahí que todas las ideas que vacilan sólo buscan afianzarse en la existencia.

Pero las argumentaciones del relativismo, que en el pequeño tratado de *Discurso Doble*, tienden a probar que el bien y el mal, lo bello y lo feo, lo justo y lo injusto, se confunden, al parecer, por razón de que no están en función de un hombre o de una situación, sino de sus circunstancias.

He aquí un principio absolutamente revolucionario, que es la *tabula rasa* de toda creencia en una verdad objetiva. De todo este ajetreo se ve el comienzo de la posibilidad de la ciencia y de la existencia misma del error; de

---

[300] S. E., *P.*, 1. 216 a 219.
[301] Jacqueline, de Romilly. *Les grands sophistes dans l' Athènes de Périclès*, Fallois, Paris,1987, p. 140.
[302] Pl., *Cra.*, 386a.

ahí se comprende que Platón, en la idea de *ser agradable* (en el *Teeteto* en particular) no esté de acuerdo con Protágoras.

El mismo Aristóteles[303] lo conmina a hacer más explícita esta idea. Protágoras, resueltamente obliga a la existencia misma hacia una verdad puntal inversa, un puntal por lo demás audaz, ya que se puede argumentar a favor de lo argumentado.

En este sentido, Platón, dentro de su filosofía, responde, en buena parte, a Protágoras, aceptando la reacción sobre las dificultades de la búsqueda desinteresada, no solamente cuando habla, sino también en la crítica de algunas de sus argumentaciones. Así construye su propia crítica sobre la base de las ideas que responden a Protágoras.

En el *Sofista,* Platón define una serie de consideraciones sobre el manejo de la verdad, hace un largo recorrido y analiza el concepto de *no ser* en Parménides, para establecer la posibilidad de error entre existencia y lo que no es. El *ser* y el *no ser*, y el conocimiento de la verdad en Parménides, es una propuesta reveladora contra el pensamiento de los sofistas que, inspirados por Protágoras, no parecen distinguir entre error y verdad; sin embargo, Platón propone, con un rigor obstinado, una filosofía contraria. La oposición está dada por los términos mismos.

La fórmula que suena constantemente en Protágoras, es de un antropocentrismo que, de primera intención, da la idea de un relativismo sin fondo: “*El hombre es la medida de todas las cosas*”. Pero también puede ser manifestación de un juego obsesivo del ser humano por medir todas las cosas y en el proceso volverlas cosas abstractas:

---

[303] Arist., *Metaph.*, III.

El hombre reconoce su relación con el ser, toda verdad relacionada con los dioses, establece así un universo nuevo, una nueva forma de ver las cosas.

Protágoras, a fuerza de interrogarse sobre la medida exacta del ser humano en sus estados individual y colectivo, pierde el contraste esencial entre intercambio de opiniones, sensaciones e ideas.

Así que Platón, irónicamente lleva hasta sus últimas consecuencias los temas de Protágoras, ya que él dirá a Sócrates,[304] que el inicio de Protágoras le ha sorprendido: "*Que él no dice la verdad, que la medida de todas las cosas es el puerco o el cinocéfalo o cualquier otra cosa más extraña que permita una sensación*". Pero esta ironía platónica olvida que Protágoras, se encamina más bien a la trascendencia; éste se enferma dentro de un mundo de sensaciones, de opiniones y de intereses (que son individuales, colectivos y generales, pero que ve la posibilidad de reconstruir, a partir de su mundo, todo un sistema de pensamiento y toda una moral). Su objetivo no es partir de la idea del absoluto ontológico, religioso o ético, sino una demostración de que el hombre se dimensiona a partir de las cosas. Todo se juega alrededor de esta frase. Y Platón la sobrentiende en forma decisiva; prueba de esto es que busca lo mismo en su investigación, en el escrito de las *Leyes*[305] *La divinidad proporciona el ser para nosotros, más que su ser, es decir, es la medida de todas las cosas*.

Los dos polos opuestos de la filosofía occidental son designados por sus dos frases discrepantes; Protágoras asegura que el hombre y Platón que la divinidad, es la medida de todas las cosas.

---

[304] Pl., *Tht*., 161c.
[305] Pl., *Lg*., 716c.

El movimiento de reconstrucción de Protágoras es constante y revelador. Permite recuperar un concepto de la humanidad con todos sus valores y virtudes.

La reconstrucción pasa por el análisis de destrucción: en lo que concierne a la ontología que permea la vida de los hombres y que funciona como una compensación. Por otra parte, Protágoras pone en tela de juicio la verdad, al decir que el hombre es la medida de todas las cosas, sin importar ni su intención, ni la apariencia subjetiva que tenga, ni su sentir personal de las cosas, y deja en entredicho algunas afirmaciones sobre la paradoja de la verdad entre la razón individual y la razón colectiva.

Sin embargo, deja señalado que su relativismo comporta ciertos límites y reclama correctivos: éstos son formulados por Sócrates en el *Teeteto* en donde presenta una defensa de Protágoras.

El principio de la corrección es simple: busca sustituir la noción de verdad por la idea práctica de utilidad. Es el primer pensamiento de recuperación efectuada por los sofistas, que pretende desvincular utilidad y verdad; en efecto, no es de la verdad de la que huyen, sino del peligro de quedar atrapados en un callejón sin salida al internarse en la verdad, entendida como la negación de toda posibilidad y, al caer en una verdad que les dice que lo que es, es; esta revancha de juicios y de gustos, algunos más útiles que otros, restituyen el lugar de la sabiduría y su juicio.

La diferencia entre verdad y utilidad en la demostración protagórica consiste en que argumenta la utilidad sobre la cualidad de lo que se dice, como seducción del lenguaje que se interpreta como diferencia frente a la aplicación que desdeña la verdad por considerarla inoperante y rígida, lo que evita su aplicación.

Lo más importante de los escritos de Protágoras se halla[306] bajo cuatro títulos diferentes: *Del ser, La verdad, Las palabras fulminantes, El gran discurso*. Sin dejar de mencionar dos títulos *Antilogías y Politeia*, y vestigios de once fragmentos de Protágoras.

Por lo demás, el uso del método de división en el seno de la Academia se prestó a nuevos equívocos acerca de la fuerza lógica de argumentación sobre opuestos, y contrajo nuevas confusiones entre la definición o delimitación de conceptos, y la demostración; véase por ejemplo, el testimonio critico de Aristóteles.[307]

Así pues, de la proposición de que el hombre es la medida de todas las cosas, existen dos interpretaciones rivales:[308]

La primera, tradicional, se relaciona con el *ser*, formulada por Platón en el *Teeteto*, al reunir sus comentarios sobre los aforismos de la medida del hombre, Platón distingue en Protágoras una teoría de la percepción sensible impregnada de una filosofía sensible, entendida como algo negativo: *la inmutabilidad de la unidad del ser*. La percepción que viene de fuera, como reencuentro de cualquier cosa activa, causa la impresión en el sujeto impresionado como cosa pasiva.

La segunda es de Gomperz,[309] que comprende la idea de otra manera: el hombre, que es de naturaleza distinta a las cosas, presenta diferentes tipos de razonamiento, en forma individual o colectiva, y Protágoras considera que *el hombre y su naturaleza es la medida de la existencia de las cosas*.

---

[306] Dupréel Eugène, *Les sophistes*, Neuchatel, Bruxelles, 1980, p.12.
[307] Arist., *APo*., II 5, 91b13 ss.
[308] Pl., *Phd*., 78d1 ss.; 51b7 ss.
[309] Ibid., Dupréel Eugène, p. 15.

Así entendido Protágoras sería un precursor de Kant y de los empiristas modernos, ya que transporta la idea de naturaleza del objeto para encontrarla en el sujeto cognoscente; tenemos entonces una naturaleza que descubrir, que explorar.

La doctrina de Protágoras sería de un subjetivismo a la manera kantiana. Vemos, en efecto, que el pensamiento griego pasa de la idea de naturaleza universal y objetiva a la de una naturaleza humana, objeto propio de la meditación prudente, pero con trazos de un relativismo que pone en duda las enseñanzas sobre moral, derecho y lenguaje.

En el *Teeteto* (152 c) se menciona la frase de Protágoras: *El hombre es la medida de todas las cosas*, a propósito de una buena definición de la ciencia, diciendo que es la sensación (αἴσθησις). Sócrates dice que de la definición de Protágoras, implicada en la frase sobre el hombre como medida de todas las cosas, se concluye que no sabrá reconocer el error de la apariencia (φαντασία) ni la del conocimiento.

Los comentarios del *Teeteto* sobre el aforismo del hombre medida de todas las cosas, muestran a Protágoras con una teoría de la percepción sensible, al mismo tiempo, que una filosofía que se presenta como algo acomodadizo:

No hay nada fijo ni inmutable, nada previsto de la unidad del ser: *A ti, que estás presente, te parezco estar sentado. A quien está ausente no se lo parezco. Es incierto si estoy o no sentado.*[310] El reencuentro de las cosas activas que vienen de fuera, causa la impresión con la cosa pasiva, el sujeto impresionado; este complejo razonamiento nos lleva al *ser* como un

[310] *Sofistas,Testimonios y Fragmentos*, trad., Antonio Melero Bellido, Gredos, Madrid, 1996, Fragmentos de Protágoras, 115-128, Discursos demoledores, p. 118.

conocimiento falso, que no es conforme a su mismo objeto, una especie de disociación, atendiendo que el objeto, independientemente de percibirlo, no existe más.

Ahora veamos el concepto de contradicción imposible[311] que es mencionado por Diógenes de Laercio 9.53; Isócrates,[312]*Contra Helena* (escrita hacia 390 a.C.); Platón, *Eutidemo* (285e-286c) y *Teeteto* (160b); Aristóteles, *Tópicos* 104b 19-21, *Metafísica* (1024b 34).

Protágoras da un paso más que Parménides y los eleáticos hacia el conocimiento de la reducción al absurdo, y le prepara el camino a Platón y Aristóteles.

Ouk éstin antilégein es una forma de relativismo fundamentado en los fragmentos de *Toîs lôgois* y la medida del hombre.

Protágoras fue el primero en plantear la imposibilidad del debate ontológico como tal, al afirmar, con una expresión muy controvertida, que no es posible contradecir la expresión *ouk éstin antilégein*. Protágoras afirmó la inagotabilidad del campo veritativo, al sostener la infalibilidad de todo fenómeno para el que lo percibe. Desde esta perspectiva, los juicios que surgen de nuestras impresiones son verdaderos, y, por lo tanto, la subjetividad del individuo coincide con la verdad.

Así, cualquier cosa que a mí me parezca correcta o verdadera es verdadera. La tesis de Protágoras implica no sólo el relativismo de las cosas sino también, como se dio cuenta Aristóteles, el relativismo de la verdad: *quien*

[311] DK 80A1, A19, Protágoras: ouk éstin antilégein.
[312] Isócrates:*Discursos*, Madrid, Gredos, 1979.

afirma que todas las apariencias son verdaderas hace relativas todas las cosas.[313]

La argumentación de Protágoras sobre esta cuestión puede resumirse de esta forma. El primer punto consiste en afirmar que, aunque existen enunciados para decir de una cosa *que es*, no pueden existir enunciados en los que alguien diga algo *que no es*: dicho de forma más radical, nadie puede expresar con palabras algo que no es.[314]

Partiendo de aquí, cuando alguien dice algo verdadero, está diciendo en palabras modernas, *lo que es el caso* sobre *lo que es el caso*. Una persona que está hablando falsamente, estaría diciendo *lo que no es el caso* sobre *lo que es el caso*. Pero lo que no es el caso, simplemente no es, con lo cual esa persona no habla sobre nada. Usa palabras pero sin referente, pues a lo que se puede referir, simplemente no está ahí. La contradicción concierne sólo a proposiciones en las cuales se afirma o se niega algo. Por tanto, si dos personas hacen declaraciones, pueden ocurrir tres cosas:

A. Ellos dicen la misma cosa en cuyo caso no hay contradicción.[315]

B. Una persona está diciendo "*lo que es el caso*", es decir que es verdadero porque la cosa sobre la que está hablando es como él dice que es, y la otra persona está diciendo otra cosa diferente de lo que la primera persona dice.[316]

---

[313] Arist., *Metaph.*, 1011a 20.

[314] Esta argumentación aparece en el *Eutidemo* platónico, allí se dice que la escuela de Protágoras hacía bastante uso de este argumento, y que lo usaron también otros más antiguos que Protágoras: *Si recuerdas, Ctesipo -dijo- hace un instante demostramos que nadie dice algo que no es; en efecto, quedó bien claro que nadie puede expresar con palabras lo que no es*. Pl, *Euthd.*, 286a *Claro está ,si el hombre es medida de todas las cosas, toda opinión individual es verdadera y falsa, lo cual hace imposible la contradicción.*

[315] Los dos dicen el enunciado de la misma cosa y, en ese caso, están diciendo lo mismo.
Cfr. Pl., *Euthd.*, 286a.

[316] Ibid, 286 b.

No es necesario recordar que eso que dice la otra persona también es verdadero. Aunque lo será, sobre otra cosa diferente de lo que decía la primera persona que estaba hablando, porque cualquier juicio, al estar relacionado con las experiencias vividas que tiene el sujeto, es verdadero.

C. Como última posibilidad, ni una ni otra dicen el enunciado propio de la cosa. En este caso, ninguno hace una mínima mención de la cosa sobre la que hablan, por lo que tampoco puede haber contradicción.[317]

Ocurre, sin embargo, que es contrario a la opinión y al sentido común de todos los seres humanos afirmar que es imposible contradecir. Todos los hombres se contradicen en sus actividades cotidianas, y en materia de pensamiento. El mismo Protágoras, curiosamente, es también de esta opinión, ya que según Diógenes Laercio, fue *El primero que dijo sobre toda cosa hay dos argumentos (que son) contrarios el uno al otro.*[318]

A partir de aquí, la posición de Protágoras[319] podría reconocerse, apunta Gomperz,[320] como la de un pensador al mismo tiempo dialéctico y dogmático. El sentido de esta antinomia desemboca en una singular multilateralidad dialéctica que, en palabras de Carchia, *se sustrae a cualquier designación lógica de un valor de verdad.*[321]

---

[317]Ibid, [Según la lógica clásica, podríamos estar, en este caso, frente a dos proposiciones contrarias. En la relación de contrariedad, dos proposiciones no pueden ser al mismo tiempo verdaderas, pero *pueden ser* al mismo tiempo falsas].

[318]D.L., 9. 51; *Cfr.* así mismo Pl. *Tht*., 152 c, Arist. *Metaph*.,1007 b, 18-24 y sobre todo 1009a 7-10, y, por último, véase Séneca, *Epístolas*, 88, 43.

[319]Tal como podemos concluir de un análisis de los *Díssoi lógoi*, o *Dialéxeis* (reconocidos como en su origen, *Cfr*. Untersteiner, Mario, *Sofisti. Testimonianze e frammenti,* fasc. 1, 1967) y de un examen de los testimonios de Platón (*Tht. y Euthd.*), Aristóteles (*Metaph.*) y Sexto Empírico (*Hipotiposis pirrónicas*).

[320]Gomperz, H., *Sophistik un Rhetorik*, Leipzig/Berlin, 1912 (Darmstadt, 1967), cap. 8, pp. 126-278.

[321]Carchia, G., *Retorica del sublime*, Roma-Bari, 1990, (existe traducción castellana de Mar García Lozano, *Retórica de lo sublime*, Tecnos, Madrid, 1994, p. 46.

¿Cómo podemos superar esta flagrante contradicción? ¿Cómo podemos atribuir a Protágoras las características de dialéctico y dogmático, sin que resulten antinómicas entre sí? Para proceder al análisis de esta segunda teoría hay que despejar dos dificultades. La primera se apoyaría en el siguiente razonamiento:

A Si cada percepción del hombre es verdad, y esta percepción constituye un argumento, podría parecer que respecto a cada cosa no sólo existen dos *logoi* sino un número mucho mayor, tantos como personas diferentes con diferentes percepciones. La respuesta ante esta dificultad es que todas las percepciones, por muchas que sean, pueden ser reducidas a dos, cuando una es tomada como punto de partida. Si el punto de partida es A, todo lo demás será tomado como no-A. Pero esto da paso a la segunda objeción más importante.

B A y no A son claramente contradictorias. Si de hecho, para Protágoras, siempre hay dos argumentos opuestos concernientes a cada cosa y los dos son verdad, ¿qué sucede con la teoría según la cual es imposible contradecir?. Si, como parece, Protágoras defendió que la contradicción es imposible, entonces tenemos un aparente conflicto con la teoría de los dos *logoi*. Digo aparente, porque lo que tenemos que comprender es que en este problema hay implicados dos niveles. Un nivel lógico-ontológico, y otro nivel retórico que radicaliza el aspecto pragmático de la retórica como consecuencia de la actitud gnoseológica de la sofística. El supuesto conflicto se reduce a que la contradicción ésta sólo es posible en la función verbal, es decir, en el debate, pero nunca puede ser aplicable dicha contradicción al ámbito de las cosas sobre las que nosotros hablamos. Por lo que cuando nosotros levantamos una contradicción sólo es aparente, y si las dos declaraciones que conforman la contradicción tienen sentido, entonces será que se refieren a diferentes e incomparables experiencias de los sujetos en relación con la realidad.

Dicho de otra forma, el dominio en que se desenvuelve la contradicción es el dominio retórico, un pensar extralógico donde se sitúa esta dialéctica de pensamientos incorregibles e irreductibles, que abren una brecha en el dogmatismo lógico del pensamiento griego. En este sentido, el desarrollo de la erística, del arte de la refutación, no es sugerido en la sofística como momento estratégico del *Logos* para llegar a una «verdad» lógico-ontológica, como sí ocurriría en el caso socrático, sino más bien como principio liberador de la pretensión de verdad. La labor del *Logos* sofístico está exenta de la persuasión extra-retórica que revela la evidencia de la *episteme* como saber ontológico.

Éstos dos órdenes, el de la cosa sobre la que se habla y lo que se dice de ella, son perfectamente recogidos por un pasaje de Séneca en que nos asombra distinguiendo entre el ámbito de las cosas, el del lenguaje que se refiere a ellas, y el ámbito de la declaración misma (metalenguaje), sobre la que se puede, como cosa que es, mantener, de forma aparente, el pro y el contra:

> *Protágoras dice que se puede sostener igualmente el pro y el contra respecto de todas las cosas, de igual modo que sobre esto mismo: si es posible o no sostener el pro y el contra respecto de todas las cosas.*[322]

La dialéctica que se produce entre las dos posiciones de Protágoras, no refiere en ningún sentido a un dato lógico, sino simplemente gnoseológico: los juicios son entidades psíquicas que remiten a las experiencias que tiene el sujeto.

---

[322] Seneca, *Ep*., 88. 43. *Protagoras ait de omni re in utramque partem disputari posse ex aequo et de hac ipsa, an omnis res in utramque partem disputabilis sit.*

Así pues, A y no A son declaraciones a las que se reducen todas las demás y pueden ser ambas verdaderas, sin contradicción, pues las declaraciones son sobre diferentes experiencias implicadas en el lenguaje que se refiere a ellas mismas. No se nos escapa que este argumento como método, niega los presupuestos de cualquier debate lógico en igualdad. Es decir, niega la posibilidad de que haya un genuino desacuerdo.

Para que exista debate el resultado del mismo debe estar abierto, ni el *sí* ni el *no* deben avanzarse como respuesta correcta: por ejemplo, no pueden estar dados, *a priori*. Esta condición es indispensable para que exista un debate externo interpersonal en donde, las razones y las consideraciones que avalan cada posición sobre una tesis dada, compiten entre sí, dialécticamente, hasta que una de ellas venza y se instale como respuesta.

Pero esta victoria no es real, sino que es una subjetiva apariencia de verdad, pues sabemos que tanto el "sí" como el "no" son igualmente válidos, según lo que le parece a alguien en ese momento. El campo de la antilogía discursiva y gnoseológica se abre en Protágoras con una fuerza retórica inversamente proporcional a su debilidad lógica. La fuerza de los juicios no está en la capacidad proposicional, pues las aserciones que efectuamos son veritativamente iguales, dado el carácter de vivencia experiencial de los juicios mismos.

Podríamos razonar, no obstante, que si el debate es un debate interno en el que uno mismo argumenta contra uno mismo, en vez de argumentar frente a otro, las dos respuestas no podrían ser válidas, pues les correspondería una única experiencia: la mía. Sin embargo, en este caso cualquier elección es inútil, o, más bien, un fraude, pues si lo que me parece a mí de una determinada manera es de esa manera tal como me parece, sobra cualquier discusión o debate sobre si lo que me parece a mí es tal como me aparece o no.[323]

La descripción protagórica es contraria a la idea de una razón garantizadora del proceso de elección. Si realmente para cada asunto hay dos argumentos igualmente válidos, la idea de la razón como valedera de la decisión que nos lleva a preferir una u otra queda colapsada.

Gomperz ha visto esta brecha lógica, abierta desde el dominio retórico, y evalúa el pensamiento desde la consideración histórica del pensar humano; es decir, «de la idea según la cual, aunque dos puntos de vista estén en contradicción entre sí, ambos pueden ser, sin embargo, subjetivamente necesarios y objetivamente válidos». Así, el *Homo mesura* remite a la inagotabilidad del campo veritativo; la verdad, como no existe de manera absoluta para ninguno, no existe de manera general.

Cuando Sexto Empírico reconoce en Protágoras a un subjetivista, para quien cada juicio es verdadero, está reconociendo que el relativismo viola (lógicamente hablando) la ley de contradicción. La crítica escéptica viene explicitada en el siguiente pasaje:

> *Ciertamente nadie podría proponer como verdadera toda apariencia, ya que caeríamos en un círculo vicioso [peritropé], como Demócrito y Platón enseñaban, refutando a Protágoras; porque si toda apariencia es verdadera, también el juicio de que ninguna apariencia es verdadera, si está basado en una apariencia, será verdadero, y entonces el juicio que toda apariencia es*

[323] Wittgenstein en las *Investigaciones* nos dice: *"es correcto lo que en cualquier caso me parezca correcto. Y esto sólo quiere decir que aquí no puede hablarse de «correcto»* [*richtig ist, was immer mir als richtig erscheinen wird. Und das heißt nur, daß hier von «richtig» nicht geredet werden kann*]".Wittgenstein, Ludwig (1889-1951): *Philosophical Investigations/philosophische Untersuchungen*, Oxford 1953 Oxford, 258. *Investigaciones filosóficas*, trad. del alemán, Alfonso, García, Suárez y A., Moulines, Critica, Barcelona, 1988.

verdadera será falso.[324]

Esta crítica a un supuesto y fuerte dogmatismo inconsecuente de Protágoras, está ordenada más por el proceso de radicalización de la sofística efectuado por Sócrates, que por el proceder antilógico del razonar protagórico.

No sorprende que este análisis de Sexto Empírico sobre la tesis del círculo vicioso de la *peritropé* esté fundado en Demócrito, en Sócrates y en Platón, quienes no tienen en cuenta esta situación retórica del pensamiento del sofista, en la que la dialéctica de las posiciones no es en ningún sentido un dato lógico. El argumento de Sexto Empírico sólo cobra valor desde una consideración ontológico relativista de la filosofía protagórica, y sólo así tiene sentido la condena por dogmático del clásico argumento sofístico, del que sólo podemos salvarnos aplicando en el proceso de decisión una vieja fórmula escéptica: suspender el juicio.

La dificultad lógica que propone el argumento escéptico y la falta de fundamento que contiene a juicio del escéptico Sexto Empírico, sólo tiene sentido si reconocemos el proceso de radicalización de la actitud gnoseológica de la sofística por parte de Sócrates. Lo cual puede hacernos llegar a decir que el argumento es ilógico y falto de fundamento. En los diálogos, cuando Platón atribuye a los sofistas el arte de lo antilógico, lo redefine y se sirve de él con valor pragmático en el estilo de su debate filosófico. Usa, a veces, las antilogías con un propósito simplemente erístico, que desarrolla la estrategia del *Logos* verdadero. Es decir, como una técnica que en sí misma no es ni buena ni mala. El proceso consistiría generalmente en elegir una respuesta a una cuestión, y después de afirmarla con decisión, buscar nuevas declaraciones que sean visiblemente inconsistentes con la primera respuesta dada. En raras ocasiones, este método lleva a Sócrates o a Platón a modificar

[324] S.E., *M.*, 7. 389-390. El último párrafo se encuentra en DK 68 A 114.

la primera respuesta presentada, pero en algunos casos el diálogo se cierra, quedando los participantes en un estado de *aporía*, incapaces de encontrar alguna salida o escape a las contradicciones en las que han sido capturados. Y esto se da así porque la característica básica del mundo fenoménico es su continuo cambio, de tal forma que éste puede ser descrito como una continua sensación entre ser algo y no ser ese algo.

En el mundo fenoménico, las cosas sobre las que hablamos pueden ser a la vez grandes y pequeñas, pesadas o ligeras, dependiendo de la referencia, por lo que podríamos decir que el mundo fenoménico es "antilógico" por naturaleza, al estar continuamente cambiando. Así pues, la oposición entre los *lógoi* que es el punto de partida de las antilogías no sólo se da en un plano argumentativo, sino en los hechos del mundo fenoménico.[325] La diferencia entre Protágoras y Platón consiste en la activación o desactivación de esa observación; para el primero, la dimensión ontológica del mundo aparente es reconocida como única viable, mientras que, para el segundo, esta dimensión aparente sólo es un reflejo erróneo y falso del mundo no-fenoménico y ontológicamente verdadero. La oposición de Sócrates a la retórica sofística se centra, equivocadamente, más en las prerrogativas de tipo lógico que pudiese tener ésta, que en su dimensión de destreza prevista por el eulégein. Lo que Sócrates combate de la retórica es justamente su dimensión menos protagórica, la lógica, es decir, su capacidad para convencer para elegir entre lo verdadero y lo falso; capacidad que no está explícita en el discurso, en el *Logos* y *antiLogos* protagórico. En este sentido, observa Carchia,[326] que la braquilogía dialógica, frente a la macrología oratoria,[327] quiere bloquear cualquier intento de que el Logos se haga autónomo. Y es justamente esa erística protagórica la que impide que la retórica sea intercambiable por una

[325] Kerferd, George, B., *The sophistic movement,* Cambridge, 1981, pp. 61-67 y Román, R., *El escepticismo antiguo, posibilidad del conocimiento y búsqueda de la felicidad*, Córdoba, 1994, pp. 154-166.
[326] *Cfr*. Carchia, G., *Op. cit.*, p. 53
[327] *Cfr***.** Pl., *Prt*., 328 d-329 b.

Metafísica de cualquier signo. Así, se niegan, pues, los presupuestos de cualquier debate, ya que se excluye la posibilidad de un desacuerdo ontológicamente genuino, por lo que se puede afirmar según esto, que Protágoras anticipa en el nivel retórico, la tesis escéptica de la *isosthéneia,*[328] la cual mantiene, precisamente, que "Sí" y "No" son igualmente válidos como respuesta ante una misma pregunta, y entre los dos no se puede elegir.

Así pues, si no hay posibilidad de un verdadero debate ontológico[329] ¿qué función tiene el *Logos* sofístico en el debate filosófico? Sólo una función retórica. No hay, pues, objeciones válidas contra el procedimiento retórico y de dilemas de las antilogías de Protágoras. Hay que rebatir, por tanto, la tesis de la *peritropé* que conduciría al pensamiento del sofista a un dogmatismo lógico que anula el principio de no contradicción; y dado el carácter de vivencia psíquica que tiene también el acto lógico mismo, dice Carchia,[330] las aserciones son veritativamente iguales pues la fuerza del juicio no está en la capacidad proposicional.

Si para Protágoras el hombre es legítimamente dueño de su verdad, aun siendo arbitraria, ya que es válida mediante su mera demostración de la existencia de contrarios, para Aristóteles una verdad despreocupada es una verdad muerta para la ciencia, es una verdad que se abandona porque es prisionera de su propia situación de ambigüedad.

---

[328] Burnyeat observa que la idea de que hay dos razones válidas para cada cuestión es una consecuencia del subjetivismo protagórico, *Cfr.* Burnyeat, M.F., «*Protagoras and Self-Refutation in Later Greek Philosophy*», *The Philosophical Review,* LXXXV, (1976), pp. 44-69, principalmente p. 60 y 61, nota 27.

[329] De ahí la incomprensión de Sócrates y Platón con respecto a la filosofía de Protágoras, observando que, como doctrina específica, el sofista defendía el sistema heraclíteo, pues no entiende que en Protágoras no existe esa conexión ontológica de la faceta retórica, *Cfr. Tht.,* 179d y **ss.**

[330] *Cfr*. Carchia, G., *Op. cit*, p.45-46.

Capítulo III

El razonamiento lógico de Aristóteles en la demostración

En Aristóteles se conjuntan el método y la disciplina; sin embargo en la demostración es la intuición lo que predomina, de ahí que la deducción y los silogismos formen parte trascendente en la organización deductiva del conocimiento.

El lenguaje transcribe el pensamiento, identifica las cosas, las reconduce mediante sus sonidos hasta la imposibilidad de voces y signos ancestrales que creemos reconocer, es el límite para llegar como objeto de discusión en el ser, expresando la ironía de evitar la metáfora sistemáticamente, convirtiéndola en metafísica o como una paradoja aleatoria de la demostración.

La lógica aristotélica[331] está alejada de la filosofía por ser mero instrumento [*órganon*] del conocer, y por lo tanto también está fuera del conocimiento *[epistḗmē]* por lo que supone un retroceso con respecto a la dialéctica platónica que devela la frescura de la verdad como fin supremo del saber humano, y que, sin embargo, desdeña los grados de certeza,[332] desde la absoluta convicción *[pístis]* que da la verdad autoevidente, pasando por lo demostrable como verdadero, hasta lo mostrable como plausible; su avance

---

[331] Eggers, Lan, Conrado. Victoria, E., Juliá. *Los filósofos Presocráticos*, Tomo II, Gredos, Madrid, 1994, pp. 8-10.

[332] Arist., *APr.*, 24a 23-25: διαφέρει δὲ ἡ ἀποδεικτικὴ πρότασις τῆς διαλεκτικῆς, ὅτι ἡ μὲν ἀποδεικτικὴ λῆψις θατέρου μορίου τῆς ἀντιφάσεώς ἐστιν (οὐ γὰρ ἐρωτᾶι ἀλλὰ λαμβάνει ὁ ἀποδεικνύων), ἡ δὲ διαλεκτικὴ ἐρώτησις ἀντιφάσεώς ἐστιν.
La proposición demostrativa difiere de la dialéctica en que la demostrativa es la asunción de una de las dos partes de la contradicción (pues el que demuestra no pregunta, sino que asume); en la dialéctica se pregunta sobre las dos partes de la contradicción.

consiste en una teoría de la significación y en un sistema de formalización del razonamiento.[333]

Aristóteles es el ordenador, el taxónomo de la existencia, que ve en la humanidad cierto afán de investigar, capaz de hacer abstracción de ciertos rasgos del mundo para considerar otros con profundidad.

Así, en la matemática y en la geometría euclídeas, se hace abstracción de la realidad. Aristóteles dice que *hay una ciencia que investiga el ser en cuanto ser.*[334] Es decir, una ciencia capaz de realizar una investigación sobre la amplia estructura de la realidad.

Aristóteles va más allá de los aspectos concretos de la realidad como los organismos o la astronomía, y logra la abstracción de las propiedades concretas que hace, de las cosas, las cosas que son, y las considera simplemente como cosas existentes; así, la ciencia puede investigar la realidad en cuanto tal, trascender la explicación del fenómeno y explicar su estructura a partir de sus propiedades. Descubre, además, que una investigación de la realidad, en cuanto tal, nos lleva a conocer una ciencia que estudia el ser en cuanto ser, que como ciencia requiere su demostración.

La realidad que investiga la humanidad, tiene una estructura organizada; su punto de partida es la arjé.[335] De ahí que la investigación sobre la realidad sea una investigación sobre el principio o filosofía primera.[336]

Para Aristóteles, la demostración es una cuestión de deducción y método para llegar a un criterio concluyente. Por ejemplo, en el inicio de *Tópicos,*[337]

---

[333] Arist., *APr.*, 25b 30. El razonamiento es más universal que la demostración, ya que no todos los razonamientos son demostraciones.
[334] Arist., *Metaph.*, IV.1, 1003a 23.
[335] Arist., *Metaph.*, IV.2, 1003b 5-19; VII, 1.
[336] Ibid., IV.2, 1004a 2-4.

distingue tres tipos de silogismo para la demostración, a partir de premisas de verdad: silogismo *dialéctico*, basado en generalizaciones y opiniones aceptadas no necesariamente verdaderas; silogismo *erístico,* cuando aparece en cuestiones de opiniones aceptadas o basadas en el examen de argumentos, y silogismo *apodíctico o demostrativo,* basado en enunciados de verdad que corresponden al discurso científico.

Hay que considerar que el discurso dialéctico[338] es epistemológicamente anterior y fundante respecto al apodíctico, pues la demostración científica o debe partir, necesariamente, de principios indemostrados, o se arriesga a quedar suspendida de una cadena infinita de presupuestos sin fundamento alguno.

Después de emprender un examen sobre las condiciones de la demostración, Aristóteles sostiene que la demostración procede de premisas indemostrables y distingue tres premisas primarias que son: *los axiomas, las definiciones y las hipótesis.*

La demostración en Aristóteles es un análisis de la idea de *apódeixis* que representa el primer indicio de lo que hoy conocemos como metodología. Sin embargo, los *Analíticos* aristotélicos y la metodología contemporánea de las ciencias deductivas son perspectivas distintas, aunque sus referentes de ciencia y demostración sean los mismos.

Para Aristóteles, el saber[339] consiste en conocer por medio de la demostración y no mediante el modo sofístico occidental; de manera que aquello de lo que hay ciencia sin más es imposible que se comporte de otra manera.

---

[337] Arist., *Top*., 100 a 27ss.
[338] Arist., *Top*., I, 2, está marcado en forma explícita; *APo*., 119, en forma implícita.
[339] Arist., *APo*., 71b 10-25.

La demostración en Aristóteles es razonamiento científico; y el razonamiento que nos permite saber, es lo científico.

Así, la ciencia demostrativa se basa en cosas verdaderas, primeras, inmediatas, más conocidas, anteriores y causales respecto de la conclusión. De esta manera los principios son también apropiados a la demostración. En efecto, hay razonamiento sin esas cosas, pero demostración, no; pues sin ellas no se producirá ciencia.

En la demostración es necesario que las cosas sean verdaderas. Pero también causales, conocidas y anteriores: causales porque conocemos la causa ya sea material, formal, eficiente o final; conocidas por saber que existen, y anteriores por ser causales.

Hay dos maneras de ser cosas anteriores[340] y más conocidas: las cosas más cercanas a la sensación, y las más lejanas. Las más lejanas son las más universales, y las más cercanas, las singulares: y todas éstas se oponen entre sí.

Partir de cosas primeras es partir de principios apropiados: en efecto, llamó a la misma cosa *Primero y Principio.*

El principio es una proposición inmediata de la demostración, y es inmediata a aquella respecto a la que no hay otra anterior.

La proposición es una de las dos partes de la aserción (es decir, afirmación o negación, las dos partes en que se divide el enunciado asertórico), que predica una sola cosa: *dialéctica* la que toma cualquiera de las

[340] Arist., *APo.*, 72a 1-14.

dos partes; *demostrativa* la que toma exclusivamente una de las dos partes de la contradicción; la contradicción es la oposición en la cual no hay intermedio; una parte de la contradicción es la afirmación de algo acerca de algo, la otra, la negación de algo respecto de algo.

El que pretende poseer la ciencia[341] que se obtiene mediante la demostración debe conocer los principios y tener certeza para ser inconmovible en su convicción.

En Aristóteles la demostración es una disposición a la ciencia, una disposición epistémica, una forma depurada del discurso racional, el *Logos*.

La filosofía de la ciencia contemporánea de alguna manera es descriptiva, en tanto que analiza y reconstruye lo que la ciencia es, cómo procede, pero también es normativa, ya que discurre sobre cómo debe ser para lograr fines cognoscitivos. Sin embargo, en Aristóteles el contenido analítico y la significación programática de su reflexión están estrechamente unidos. Para Aristóteles, el fin y la norma, lo que debe ser, como una dimensión de lo que es, *en la racionalidad teórica (en particular), el bien y el mal son la verdad y la falsedad.*[342]

En fin, hay una separación de representación ética y ontológica, es decir, en Aristóteles, lo que hay primordialmente son cosas y formas o aspectos de darse las cosas; esta variedad se trasluce en el juego del lenguaje, en donde el ser se dice de diversas maneras, y la abstracción representa la imposibilidad de representación material de las cualidades de las formas y las cosas.

[341] Ibid., 72a 37, 72b 1-4.
[342] Arist., *EN*, VI. 2, 1139a 28-29.

De esta manera, la investigación se realiza en las substancias y en los accidentes de éstas.[343]

Es propio de la misma ciencia investigar las substancias y los accidentes de cada género, pues si es propio de las demostraciones, habrá también una ciencia demostrativa la ciencia de la substancia, pero generalmente se admite que no hay demostración de la quididad.[344]

En las aporías, se debe distinguir en cuántos sentidos se dice una cosa[345] con lo Mismo, lo Otro y lo Contrario.[346] A qué ciencia corresponde indagar las opiniones de los dialécticos sobre lo Mismo y lo Otro, lo semejante y lo desemejante, y la contrariedad, sobre lo anterior[347] y lo posterior.

En todas las cosas que se demuestran hay algún género único, pues todas las ciencias demostrativas[348] utilizan los axiomas, cada género es el objeto propio de una ciencia. Lo que a la luz de la *Metafísica* es el ente que se dice de varios modos; pero todo ente se dice en orden a un solo principio.[349]

Así, el ente y el *Uno* son lo mismo[350] y una sola naturaleza porque se corresponden como el principio y la causa; no lo son en cambio como expresados por un solo enunciado; por eso, cuantas sean las especies del Uno, tantas serán las del ente, acerca de las cuales corresponde una ciencia

---

[343] Arist., *Metaph.*, 997a 25-34.
[344] Arist., *Metaph.*, 1028a 1029b 30: Ser, por una parte, significa la quididad y algo determinado, y, por otra, la cualidad o la cantidad o cualquiera de los demás predicados de esta clase. Pero, diciéndose ser en tantos sentidos, es evidente que el primer ser de éstos es la quididad, que significa la substancia, pues cuando expresamos la cualidad de algo determinado decimos que es bueno o malo, pero no que es de dos metros o un ser humano; en cambio, cuando decimos qué es, no decimos blanco ni caliente ni de dos metros, sino un hombre o un ser vivo; y los demás se llaman entes por ser cantidades o cualidades o afecciones o alguna otra cosa del ser en este sentido. Trad. García Yebra.
[345] Arist., *Metaph.*, 1004b 27.
[346] Ibid., 995b 18-27.
[347] Arist., *APr.*, 14a37: En los conocimientos demostrativos se dan lo anterior y lo posterior por el orden.
[348] Arist., *Metaph.*, 997a.10.
[349] Ibid., Γ, IV, 1003b, 5-6 y 23-35.
[350] Ibid., Γ II,23-35.

única genéricamente contemplar la quididad. Los modos de significar lo que es remiten a un sentido focal y primario, *pròs hen,* de ser, el conocimiento de lo que descansa en sus principios constituyentes, en un orden inteligible y necesario de ser, cuya exploración analítica compete a una filosofía primera opuesto a los supuestos de la filosofía de la ciencia contemporánea, en el sentido de decir cómo son las cosas (de modo que no caben más equívocos que los lingüísticos) o cómo concebimos el mundo, por ejemplo, a la manera de la comunidad científica. Esta perspectiva no se abre a una filosofía primera, sino a lo sumo, a una teoría del conocimiento científico o a una lógica del lenguaje de la ciencia.

Si llegamos a conocer cada cosa por las definiciones,[351] y los géneros son principios de las definiciones, también los géneros serán necesariamente principios de las cosas definidas.

Así, pues, está claro que corresponde a una sola ciencia[352] razonar acerca de estas nociones y de la substancia, y es propio del filósofo poder especular acerca de todas las cosas. En efecto, si no es propio del filósofo, ¿quién será el que investigue si es lo mismo "*Sócrates*" que "*Sócrates sentado*"?, aquí Aristóteles alude a la indeterminación que Protágoras menciona en los fragmentos 115-128.[353]

Teoría de la demostración

La teoría aristotélica de la demostración se despliega en los tratados del *Organon* con los *Primeros y Segundos Analíticos*:

[351] Arist., *Metaph.*, 998b 4.
[352] Ibid., 1004a 32-1004b 1-6.
[353] *Sofistas testimonios y fragmentos*. trad. Antonio, Melero, Bellido, Gredos, Madrid, 1996, p. 118.

En los *Analíticos* no hay una ciencia de la demostración; sería tanto como decir que hay una ciencia de la ciencia; se trata de un análisis lógico y metodológico que únicamente tiene carácter instrumental: constituye una especie de conocimiento propedéutico y técnico del que conviene disponer con miras a la investigación sustantiva, filosófica o científica.

En *Primeros Analíticos* Aristóteles se ocupa de la estructura lógica de la demostración. Toda demostración envuelve una deducción lógicamente válida y concluyente. Las demostraciones directas, en particular, revisten una forma lógica característica: la forma de silogismos, *i.e.,* la forma de los esquemas deductivos que componen el sistema lógico aristotélico. Los rasgos distintivos de la demostración no son precisamente de orden lógico: la validez, a lo sumo, es una condición necesaria, pero insuficiente. La demostración, aparte de la condición lógica de tener (o ser reducible a) una forma silogística, debe cumplir otras condiciones epistemológicas y metodológicas.

De ellas se ocupan los *Segundos Analíticos*, como es la condición de contar con determinado tipo de premisas: las que consisten en verdades necesarias y capaces de explicar por qué lo establecido en la conclusión es así y no puede ser de otra manera.

Otro requisito es pertenecer a un cuerpo de conocimiento deductivamente ordenado, “axiomatizado”.

Por otro lado la petición de principio para Aristóteles consiste[354], en no demostrar lo que se plantea. Así, postular la petición de principio, es demostrar por sí mismo lo que no está claro por sí mismo, esto es, no demostrar, cuando son igualmente inciertos lo demostrado y aquello a través de lo que se

[354] Arist., *APo.*, 64b 29-38.

demuestra.[355] En cambio, cuando se dé negativamente, se postulará petición de principio cuando se niegan las mismas cosas de lo mismo.

Debido a que en los razonamientos negativos los términos no se invierten, por negarse el uno al otro, ellos no pueden ser idénticos.

Se puede postular una petición de principio en las demostraciones con respecto a las cosas que se comportan de esta manera con arreglo a la verdad, y en los razonamientos dialécticos con respecto a los que se comportan de esta manera con arreglo a la opinión.

En cuanto a la objeción de la reducción al absurdo Aristóteles aclara:[356] la falsedad no está en función de eso que solemos enunciar con frecuencia en los argumentos por reducción al absurdo, cuando se trata de la contradicción de aquello que se probó por la reducción al absurdo; objeción que se hace a una argumentación *ad absurdum*, y que consiste en negar que la causa de que aparezca una contradicción con premisas ya aceptadas es la *hipótesis* (es decir, la negación de la proposición cuya verdad se pretendía demostrar indirectamente).

En efecto, ni el que no contradice dirá que no es función de eso,[357] sino que se ha puesto algo falso entre las proposiciones anteriores, ni tampoco se dirá en la argumentación demostrativa, es decir, en los razonamientos corrientes o directos, sin rodeos a través de la reducción al absurdo.

En lo referente a la comprobación,[358] no sólo los razonamientos dialécticos y demostrativos se forman a través de las figuras antes explicadas, sino también los retóricos y, sin más, cualquier argumento convincente y con

[355] Ibid., 64b 26-38.
[356] Arist., *APo.*, 65a 39.
[357] Ibid., 65b 1-5.
[358] Arist., *APo.*, 68b 10.

cualquier método, pues de todas las cosas tenemos certeza, bien a través de un razonamiento, bien a partir de la comprobación.

Aristóteles supone que no todo en la ciencia es cuestión asertiva, y considera que hay posibilidad de error en la demostración científica. Así que, en principio, *no toda ciencia es demostrativa*.[359] Por ejemplo, es imposible demostrar en forma circular,[360] ya que es preciso que la demostración se base en cosas anteriores y más conocidas. O como en el atributo propio que es exclusivo del sujeto. Así pues, si hay una sola cosa, no es necesario que haya otra.[361] Resulta vano e imposible decir que la demostración es recíproca y que puede demostrarlo todo.

Definición “acerca del todo”, “en sí” y “universal”.[362]

Acerca del todo se dice de aquello que no es en algún caso sí y en algún caso no, ni a veces sí y a veces no.

Son *en sí* todas las cosas que se dan en la esencia de algo que indica cómo están constituidas y que se dan ellos; todas las que no se dan de estas dos maneras son accidentes, como por ejemplo, la música o el adjetivo blanco.

Es *en sí* lo que es el sujeto, como aquel que camina, es caminante siendo además otras cosas, y aunque esta acción es un accidente, *caminante* se atribuirá en sí a algo que camine.

Entonces las cosas que no se dicen de un sujeto son *en sí*, y las que se dicen de un sujeto, accidentes.

---

[359] Arist., *APo.*, 72b 19.
[360] Ibid., 72b 25-27.
[361] Ibid., 73a 7-20.
[362] Ibid., 73a 22-24.

Se conoce desde Heráclito[363] la noción de universal en el sentido de delimitar dos tipos de conocimientos: el del hombre despierto y el del hombre dormido. El primero, objetivo, aquel que percibe objetos del mundo que son compartidos con otros seres humanos, en cambio, el segundo, subjetivo, propio del mundo onírico. Fue Aristóteles quien introdujo en el pensamiento filosófico la noción de universalidad, utilizando la expresión originalmente adverbial *kath'olou*, que después fue adjetivada e incluso substantivada, y en oposición a *kath'ekaston*. *Kath'olou* significa literalmente *según el todo* o *en conjunto*, y kath'ekaston *según cada uno* o *por separado*. La traducción latina, en vez de la forma adverbial, tomó como guía la forma adjetiva utilizando los adjetivos *universalis* y *singularis*, de donde formaron los adverbios y substantivos correspondientes.

El sentido del conocimiento universal tiene dos manifestaciones: lo que se puede enseñar y lo que es conocido por sus causas.

No se niega que un conocimiento sensible pueda ser indicado a otros de un modo particular, cosa que sucede incluso en las informaciones que se trasmiten los animales. Lo que se puede enseñar debe ser distinguido de lo que mera y literalmente se puede mostrar o de lo que puede significar algo con indicios y señales. Cuando se dice este jaguar o aquel árbol, es preciso acompañarlo de indicaciones sensibles para saber a qué se refiere: tenemos que señalarlo con el dedo o con referencias sensibles directas. Pero, obviamente, indicar no es enseñar, aunque el origen de la palabra latina *insignāre,* sea señalar. Que lo universal se pueda enseñar significa que no tiene necesidad de indicación sensible.

---

[363] DK 22 B 89, Ps. Plu., *De superstitione*, 166*c*: τοῖς ἐγρηγορόσιν ἕνα καὶ κοινὸν κόσμον εἶναι, (τῶν δὲ κοιμωμένων ἕκαστον εἰς ἴδιον ἀποστρέφεσθαι). Los despiertos poseen un mundo único y común, mientras que cada cual de los durmientes apártanse hacia su propio mundo. Trad. Marcovich.

Como dice Aristóteles, *enseñan verdaderamente los que dicen las causas acerca de cada cosa.*[364] Cuando Aristóteles dice que el conocimiento sensible no es universal porque nos muestra sólo el dato sensible, no el porqué, nos está sugiriendo que lo comunicable es el porqué de las cosas, no el dato sensible.

El dato sensible no puede propiamente comunicarse, pues o se conoce directamente, o no se conoce en absoluto. Es, por tanto, el conocimiento de la causa lo que hace posible enseñar el universal, o, dicho de otro modo, son las causas las que fundan la comunicabilidad universal del conocimiento. Lo universal es lo que se da en cada uno en sí y en cuanto tal, es decir, lo que es de tal naturaleza que necesariamente se ha de dar en ellos.

En cuanto a los errores en la universalidad de la demostración, Aristóteles asevera lo siguiente: cometemos un error en la universalidad de la demostración cuando no se puede predicar un auténtico género acerca de sus especies.

Saber universal: sólo se da cuando es universal la demostración, dado que la ciencia demostrativa parte de principios necesarios; pero los accidentes no son necesarios.[365]

También es posible razonar a partir de cosas verdaderas sin demostrar,[366] pero no es posible razonar a partir de cosas necesarias si no es al demostrar; por eso, la objeción: *no necesariamente*, es ingenua ya que aparenta que es admisible una argumentación de otra manera plausible y verdadera, pues lo plausible no es un principio, y no siempre lo verdadero es lo

[364] Arist., *Metaph.*, I, 2, 982a 29-30.
[365] Arist., *APo.*, 74a 32-b4.
[366] Ibid., 74b 15-18.

apropiado, por eso hay que ir con cuidado con los argumentos sofísticos que abundan en este estilo de argumentación.

En cuanto a la paradoja de los conceptos universales, éstos se pueden resumir así:

Para Aristóteles, el conocimiento científico es el producto de una demostración. Aceptamos que el ser humano es una substancia: es un particular y, por tanto, toda substancia percibe el mundo por los sentidos forma parte del entorno al que pertenece. ¿Por qué parecen contradictorias esas afirmaciones? ¿Cómo se resuelve esa paradoja?

Para Aristóteles y Platón, los conceptos universales son realmente existentes. ¿Cuál es la diferencia entre las concepciones de ambos? ¿Cuál es, en esencia, la crítica de Aristóteles a la concepción platónica?

1. Aristóteles afirma que los universales no existen separados de la substancia, siendo, por lo demás, para él igual de reales como para Platón. En esencia, Aristóteles niega su existencia separada porque es imposible entender claramente la relación de participación, que es paradójica, ya que no explica lo que son las cosas ni su movimiento. Por otro lado, no es posible probar el razonamiento de lo necesario sin partir de cosas necesarias,[367] ya que, saber el porqué, es saber a través de la causa.

2. Exclusión mutua de los géneros:[368] no es posible demostrar pasando de un género a otro; así, no es posible demostrar la aritmética por la geometría. En efecto, son tres los elementos que se dan en las demostraciones: uno, lo que se demuestra, la conclusión; dos, las

---

[367] Arist., *APo.*, 75a 13.
[368] Ibid.,75a 39- 75b 11.

estimaciones; tres, el género, el sujeto del cual la demostración indica las afecciones y los accidentes en sí.

La demostración no se puede aplicar a otro género,[369] por lo que es difícil que pueda haber una ciencia universal, ya que es difícil conocer si se sabe o no. Creemos que, si tenemos un razonamiento basado en algunas cosas verdaderas y primeras, sabemos. Pero no es eso, sino que la conclusión tiene que ser del mismo género que las proposiciones.

3. Toda ciencia demostrativa gira alrededor de tres cosas,[370] a saber: el existir, el estimar y la afección; de ahí que la demostración no se refiera a la argumentación exterior, tampoco al razonamiento, sino a lo que se da en el alma. Pues siempre es posible objetar contra la argumentación exterior, pero no siempre contra la argumentación interior.

Aprendemos por comprobación o demostración,[371] la comprobación parte de cuestiones particulares, y la demostración de cuestiones universales.

En la finitud o infinitud[372] de la demostración no es admisible el término medio, si las predicaciones hacia arriba y hacia abajo se detienen la búsqueda de su comprobación depende de su argumentación bien fundamentada, jamás de su extensión.

4. Lo que se predica de una sola cosa:[373] cuando sea preciso demostrar, hay que tomar el término medio hasta que los términos sean indivisibles y sean uno; el principio es simple, pero no en todas partes son lo mismo; así, en el

---

[369] Arist., *APo.*, 76a 22-25.
[370] Ibid., 76b 11.
[371] Arist., *APo.*, 81b 1-5.
[372] Ibid., 81b 10.
[373] Ibid., 83a 20-86a 30.

razonamiento, lo uno es la proposición inmediata, en la demostración y en la ciencia, en cambio, es la intuición.

Es una mejor demostración la que parte de menos postulados o hipótesis,[374] ya que, en tanto la de menos postulados acepta que algo es, la otra acepta que algo es y no es.

Hay superioridad de la demostración directa, con respecto a la reducción al absurdo,[375] puesto que la demostración predicativa es mejor que la privativa; está claro que también es mejor que la que conduce a lo imposible.

5. Multiplicidad de las demostraciones:[376] cabe que haya varias demostraciones de la misma cosa, no sólo tomando un medio no continuo de la misma serie en una relación de inclusión, sino, también, tomándolo de otra serie distinta, de modo que el razonamiento se hace a través de medios distintos, no de la misma serie.

Hay tres clases de definiciones, una es la explicación de qué significa el nombre, pero que encierra una dificultad: la de no saber si es o no, más que por accidente; la segunda es una demostración de qué es, y la tercera clase de definición abarca las cuestiones primeras e indemostrables,[377] que sólo cabe poner o afirmar sin más.

Así pues, la concepción aristotélica de la demostración tiene, por lo menos, tres dimensiones: epistemológica, metodológica y lógica.

---

[374] Arist., *APo.*, 86a 32.
[375] Ibid., 87a 2.
[376] Ibid., 87b 5-18.
[377] Ibid., 93b 29-94a 10.

Así como dos características relevantes de la concepción propuesta en los *Analíticos*:

La primera característica la encontramos en los *Primeros Analíticos*, pese al interés que tiene en sí misma como teoría de la deducción lógica (la primera conocida), no es, sino una lógica subyacente en la ciencia demostrativa[378] que consideran los *Segundos Analíticos.* En calidad de lógica subyacente, la silogística de Aristóteles envuelve una noción característica de consecuencia lógica, y consiste en:

Un lenguaje normalizado que cuenta con un dominio no vacío de aplicación de sus términos y sus enunciados esquemáticos, y *un sistema de deducción* capaz de convalidar todas las deducciones formulables en el lenguaje del sistema de toda demostración silogística.

La segunda característica desecha la lógica del silogismo y la metodología axiomática, por la idea misma de demostración científica. De momento podemos entender por demostración (*apódeixis*) la exposición argumentada y lógicamente concluyente de por qué un tipo de cosas es tal como es y nunca podrá ser de otra manera.

Una ciencia demostrativa (*epistéme apodeiktiké*[379]) es un conjunto finito y ordenado de demostraciones que versan sobre un sector determinado de la realidad.

---

[378] Arist., *APr.*, 32b 18: De las cosas indefinidas no hay ciencia, sino razonamiento demostrativo, por ser inestable el término medio; en cambio, de las que es natural que se produzca, sí lo hay, y casi se puede decir que las discusiones y las investigaciones tienen lugar sobre las cosas que son admisibles de este modo; en cambio, sobre aquellas otras cosas admisibles, cabe realizar un razonamiento, pero no se suele investigar.

[379] Arist., *APr.*, I 1, 24a 10-11. *perí tí* y *tínos*, aluden respectivamente, al objeto de la investigación y a la ciencia demostrativa.

Arist., *APr.*, 25b 29-31. El razonamiento es más universal que la demostración:... la demostración es un tipo de razonamiento, pero los razonamientos no son todas demostraciones.

Y, en suma, una argumentación es una *demostración científica* si es una demostración directa que forma parte de una ciencia, la primera característica parece aproximar el planteamiento de los *Analíticos* a la metodología contemporánea de la ciencia, uno de cuyos empeños distintivos es el análisis de la lógica subyacente en las teorías científicas. (Entendiendo por una teoría un conjunto de proposiciones parcialmente ordenadas y cerradas con respecto a una relación de consecuencia lógica entre ellas).

La segunda característica, en cambio, aleja de los *Analíticos* cualquier pretensión de la modernidad: desde el siglo XVII, cuando menos, se empieza a definir el concepto de demostración en función de una metodología axiomática o de una teoría lógica, como un elemento derivado de la estructura del sistema antes que a la inversa, y esta tendencia se ha ido acentuando con el paso del tiempo hasta culminar en lo que hoy se entiende por *demostración:* la llamada *teoría de la demostración* de la metodología formal de los sistemas y las ciencias deductivas.

El silogismo es un discurso en el que, sentadas ciertas cosas, se da conjuntamente de necesidad algo distinto de lo establecido por ser esto así, ya que no es preciso ningún otro término para hacer la conclusión necesaria.

El silogismo tiene los rasgos siguientes:[380]

a) Es un argumento deductivo lógicamente válido, pues envuelve una relación de consecuencia (para la que Aristóteles carece de formulación directa como nuestro *se sigue lógicamente*; en su lugar emplea la fórmula *se da conjuntamente de necesidad* (*ex anánkes symbaínei*).

[380] Vega, Reñón, Luis, *La trama de la demostración*, Alianza, Madrid, 1990, p. 107.

b) tiene un propósito cognoscitivo o informativo: concede el conocimiento de que algo es el caso, siendo esto distinto de lo ya realizado o conocido;

c) procede sobre la base de las premisas justamente pertinentes: cada una de ellas es necesaria, y todas ellas son, en conjunto, suficientes para establecer la necesidad de la conclusión.[381]

El Silogismo $_{\text{dos}}$ considerémoslo en un sentido más restringido, como un argumento que forme un esquema deductivo lógicamente válido; es decir con un criterio sistemático de prueba lógica.

Si el silogismo representa un criterio o un canon sistemático de prueba lógica, es decir, sea A un argumento cualquiera: entonces A es un silogismo $_{\text{uno}}$, es una deducción lógicamente válida, si A reviste la forma de un silogismo $_{\text{dos}}$.

Aristóteles distingue, además, entre silogismos $_{\text{dos}}$ perfectos (*téleioi*) e imperfectos:[382] es perfecto el que manifiesta su propia validez de modo que no requiere de otra cosa para saber que se trata de una deducción lógica y necesariamente concluyente.

Es imperfecto el que requiere una especie de reelaboración o reducción para evidenciar esa misma condición.

Si el silogismo $_{\text{dos}}$ representa un criterio o un canon sistemático de convalidación, su significado es más restrictivo que el silogismo $_{\text{uno}}$, pues conlleva una especie de gramática lógica y una determinada teoría de la deducción, en la que desempeña un papel importante su distinción entre

[381] Arist., *APr.*, 24b 22-26.
[382] Ibid., 24b 26.

silogismos perfectos e imperfectos y, por consiguiente, impone una normalización o regimentación al discurso lógicamente concluyente.

Todo esto incide sobre la teoría aristotélica de la demostración,[383] porque nos permite conocer la validez de sus argumentos; lo que está en juego es demostrar que la deducción se ha realizado correctamente.

El supuesto de que toda demostración científica es un silogismo es un argumento que prueba de modo pertinente la necesidad de su conclusión; sin embargo el alcance de esta tesis resulta bien distinto, según que nos atengamos al silogismo $_{\text{uno}}$ o al silogismo $_{\text{dos.}}$

En el silogismo $_{\text{uno}}$ se reconocen deducciones en una forma lógica completamente ajena o irreductible a la de los esquemas convalidables por el sistema silogístico, por ejemplo, las deducciones fundadas en relaciones de más / menos[384] o en ciertos supuestos de una lógica de la identidad: así es posible conocer muchas cosas, pero no pensarlas;[385] en otros casos:
...el aumento del accidente acompaña al aumento del sujeto,
...es evidente que el accidente se da *en el sujeto*; pero si no lo acompaña no se da. Esto se ha de aceptar por comprobación.

> *Todo lo que conviene a una de dos cosas (idénticas) es necesario que convenga asimismo a la otra... y si algo no corresponde, es evidente que no son idénticas.*[386]

---

[383] Arist., *APr*., 46a 3-22. La experiencia suministra los principios correspondientes a cada cosa; ya que, si no se deja de lado en la descripción nada de lo que se da verdaderamente en las cosas, estaremos en condiciones, acerca de todo aquello de lo que hay demostración, de encontrar y probar esa demostración, y aquello de lo que no es natural que haya demostración hacerlo evidente.
[384] Arist., *Top*., II, 10, 114 b 38-115a 14.
[385] Ibid., 10, 114b 34-115a.
[386] Ibid., VII, 152a 33-37.

De modo que al suponer algo falso o verdadero[387] (pues no hay ninguna diferencia), una de las dos cosas se elimina, y la otra, no. Así que no son lo mismo.

Si lo dicho no es claro, no hay que privarse de decir que no se comprende.[388] Si lo que se dice es conocido y es verdadero o falso, se ha de conceder o rechazar sin más.

Si es ambigua o, se debe señalar la discrepancia. Pero si lo preguntado es claro y simple, hay que responder sí o no.

Los Analíticos se inclinan por la opción más fuerte y restrictiva: toda demostración científica es un silogismo $_{\text{dos}}$.

La dimensión lógica de la idea de demostración[389]

Este sistema constituye la silogística no modal ("*asertórica*" o "*categórica*") de Aristóteles.

Consiste en suponer que toda demostración científica reviste una forma peculiar, la forma de un silogismo $_{\text{dos}}$, *i.e.,* la forma de un esquema deductivo perteneciente al sistema silogístico que proponen los capítulos 1,2 y 4-6 de los *Primeros Analíticos.*

Hay motivos ontológicos y epistemológicos en la idea aristotélica de demostración que le añaden una connotación modal. A ellos obedece la exigencia de que, entre las premisas de una demostración científica, haya de

---

387 Arist., *Top*., 152b 23-25.
388 Ibid., VIII, 20-34.
389 Vega, Reñón, Luis, pp.111-130.

haber, en principio, proposiciones necesarias o proposiciones que conlleven una predicación universal en este sentido estricto:

> Llamo universal (*kathólou*) al predicado que conviene al sujeto en cada caso y, esencialmente, y en cuanto tal; así, pues, es obvio que tales universales son necesariamente inherentes a sus sujetos.[390]

Cabría pensar entonces que la lógica de la demostración consiste en la silogística modal. Sin embargo, esas connotaciones modales no alteran sustancialmente la suposición aristotélica de que la silogística *asertórica* constituye la lógica subyacente en la teoría de la demostración de los *Segundos Analíticos*.

Elementos del sistema

La silogística no modal de los *Primeros Analíticos* contiene *Elementos* de tres tipos:

1. Esquemas *de términos consistentes* en ciertas letras del alfabeto griego. Aristóteles se sirve de estas letras para ocupar el lugar que corresponde a los términos en un esquema enunciativo, pero su uso resulta un tanto ambiguo: es, a veces, el de una variable propiamente dicha, y es, otras, el de una denominación genérica abreviada.

2. Esquemas *enunciativos o apofánticos* de una de estas cuatro formas: “A se predica de todo B”, “A se predica de ningún B”, “A se predica de algún B”, “A no se predica de algún B”, donde “A” y “B” son letras esquemáticas de términos generales y “se predica de”.

3. Esquemas *argumentales* de la forma “si ... ..., necesariamente _”, donde la línea de puntos marca el lugar de las premisas (*protáseis*) y la raya el

[390] Arist., *APo*., I, 4, 73b 26-28: Es evidente que todos los universales se dan por necesidad en las cosas. Trad. Candel, Sanmartín.

lugar de la conclusión (*sympérasma*); la construcción “si -necesariamente” denota una vinculación o una relación de consecuencia un tanto peculiar a la que llama *nexo silogístico*; se trata de la noción de consecuencia que obra implícitamente en las definiciones de silogismo uno.

Así pues, el lenguaje típico del sistema comprende:

1. La clase de las expresiones que son términos (o son letras esquemáticas de términos. Son términos el sujeto y el predicado en que se resuelve una proposición.[391]

Los términos silogísticos cumplen las condiciones siguientes:

i) son términos el sujeto y el predicado de la proposición apofántica;

ii) los términos de una proposición dada pueden intercambiar sus papeles respectivos de sujeto y predicado con arreglo a determinadas pautas de deducción inmediata.

iii) el papel del sujeto corresponde a un término cuantificado;

iv) normalmente cada término tiene, al menos, otro término subordinado, un término supraordinado y algún término contrario.

2. La clase de los esquemas apofánticos, que afirman o niegan algo de algo.

El lenguaje de la silogística no considera los enunciados de identidad; puede considerar en cambio, instanciaciones contrarias o contradictorias del tipo de, *alguna ciencia no es ciencia,*[392] en la teoría de la demostración que Aristóteles considera, el relieve de la lógica de la oposición contrasta con la irrelevancia de la lógica de la identidad.

---

[391] Arist., *APr.*, I, 1a,b 16-17.
[392] vid., *APr.*, II, 15, 63b 22 ss.

3. La clase de los esquemas argumentales o deductivos: series de dos o más esquemas apofánticos, uno de los cuales se sigue como conclusión del otro, o de los otros, considerados premisas, conforme a un nexo silogístico fundado en las relaciones que median entre los términos presentes en esas premisas.

La noción de consecuencia lógica que parece asumir Aristóteles, carece de expresión propia y es un tanto genérica.

La relación misma entre los términos, en la que se funda el nexo silogístico, resulta parejamente imprecisa.

Por ejemplo, Lukasiewicz[393] asegura que el silogismo[394] envuelve una relación de implicación, y reviste la forma de un condicional generalizado válido*: para todo A, B, Γ: si A se dice de todo B, y B de todo Γ, entonces A se dice de todo Γ.*

Aunque parece ser que una versión deductiva o argumentativa del silogismo no sólo parece mejor documentada en el texto de los *Analíticos* y es unánimemente adoptada por sus comentadores próximos (sean devotos seguidores de la lógica aristotélica, sean lógicos rivales como los estoicos o sean críticos hostiles como algunos escépticos), ya que es una interpretación más acorde con el cometido de la lógica subyacente de la teoría de la demostración que los *Analíticos* confían a la silogística.

---

[393] Lukasiewicz. *Contribución a la historia de la lógica de proposiciones*, versión y comentarios de L. Vega, Madrid, 1981, pp. 109-172.
[394] e.g., Si A se predica de todo B y B de todo Γ, A se predica necesariamente de todo Γ, *APr*., I, 4, 25b 37-39.

La dimensión epistemológica de la idea de demostración[395]

La demostración debe su calidad de discurso racional por excelencia, no tanto a sus virtudes lógicas como a sus valores cognoscitivos. Es un tipo de argumentación que depara conocimiento concluyente y hace saber.

El conocimiento científico como saber demostrado:

En Aristóteles, el conocer en general [*eidénai*] puede presentar, al menos, dos variantes:

a) La de tener idea o conocimiento, ser consciente o caer en la cuenta de algo [*gignóskein*];

b) La de saber o tener un conocimiento científico de que algo es el caso [*epístasthai*].

Esta segunda variante está constituida por el conocimiento demostrado, un conocimiento que envuelve la universalidad y la necesidad de un discurso proposicional sobre la naturaleza del caso.

La ciencia, dice Aristóteles en *Ética Nicomáquea*,[396] es un modo de ser demostrativo. Este planteamiento aristotélico parece ser una concepción convincente y uniforme del conocimiento científico, aunque mediante un programa dogmático que corta toda ciencia por el único patrón del silogismo demostrativo; es posible que incurriera ocasionalmente en algo parecido, pero la tendencia de su pensamiento se inclina por un pluralismo metodológico, por la adecuación del método tanto al dominio de objetos considerados como al propósito de la investigación o del discurso.[397]

---

[395] Dos son los aspectos epistemológicos de la demostración aristotélica: uno es su capacidad y su función explicativas; el otro consiste en su significación y su autosuficiencia cognoscitivas. Vega, Reñón, Luis, pp. 131-151.

[396] Arist., *EN*, VI, 3, 139b 32.

[397] e.g., *EN*., 1, 1094b 18-22.

La dimensión metodológica de la idea de demostración.[398]

La dimensión metodológica de la idea de demostración cobra relieve a la luz del concepto de ciencia demostrativa que sugiere Aristóteles. Una ciencia demostrativa consiste en un conjunto finito y ordenado de demostraciones silogísticas que versan sobre un género de cosas determinadas.

Los elementos necesarios de una disciplina de este tipo son tres:[399]

a) En principio cuenta con un ámbito de referencia que se supone realmente dado: el género de cosas o de objetos sobre los que la disciplina científica en cuestión hace sus demostraciones;

b) reconoce ciertas proposiciones primordiales o básicas de las que parten o se derivan tales demostraciones;

c) en base a los casos y resultados conocidos forma un cuerpo de proposiciones demostradas que pertenecen al género de cosas y de objetos considerados en la demostración.

Proposiciones primordiales de *una ciencia demostrativa.*

Las proposiciones primordiales de una ciencia demostrativa pueden ser, en principio, de dos tipos. Están por un lado sus supuestos indemostrables y comunes; Aristóteles los denomina, en ocasiones, *axiómata*, siguiendo el uso de los matemáticos, aunque su calificación más frecuente sea la de supuestos *comunes (tà koinà, koinaì dóxai).* Están, por otro lado, sus asunciones no demostradas y específicas, que son las tesis.

---

[398] Vega, Reñón, Luis, pp. 152-163.
[399] Arist., *APo.*, I, 10, 76b 11-22.

Los axiomas constituyen los presupuestos del marco discursivo en que se mueven las demostraciones de la ciencia en cuestión.

En las asunciones propias de una ciencia determinada, Aristóteles distingue entre las tesis que afirman que algo efectivamente es o no es, denominadas *hypótheses*, y las tesis que declaran lo que algo es de suyo sin otro compromiso, llamadas definiciones (*horismoí*).[400]

Formulación de las aporías:

El libro III puede dividirse en dos partes:

En la primera parte, Aristóteles explica el principio metodológico, según el cual, toda investigación debe comenzar por hacerse cargo de los problemas o aporías[401] a que ha de enfrentarse.

En la segunda parte se catalogan y exponen, brevemente, hasta catorce aporías (995b4-996a17), las cuales son:

I. Si corresponde a una o a muchas *ciencias* el estudio de las causas.
II. Y si corresponde a la ciencia considerar solamente los primeros principios de la entidad, o también ha de ocuparse de los principios a partir de los cuales

[400] Arist., *APo*., I, 2, 72a 19-25: *El principio inmediato de razonamiento es una tesis que no es posible demostrar; cuando una tesis toma cualquiera de las dos partes de la contradicción v.g.: cuando digo que algo existe o no existe, es una hipótesis que, sin esa determinación, sería una definición*. Trad. Miguel, Candel, Sanmartín.
[401] Arist., *Metaph*., 995a 24-996a 15. Edición trilingüe Valentín, García, Yebra, 2ª edición, 1998, pp.98-104; Aristóteles recurre a un juego de palabras coordinándolo con los siguientes términos:
Aporía: lit. “falta de salida” (aporía).
Aporeîn: lit. “estar sin salida” (encontrarse, hallarse en una situación aporética).
Diaporeîn: lit. “recorrer el callejón sin salida, buscando una salida” (detenerse en la aporía). Tras percatarse del problema en que uno se halla, es necesario detenerse en él, recorriendo sus distintas vertientes y aspectos.
Euporía: lit. ”salida feliz, adecuada”.
Es necesario, pues, a) catalogar (identificar) las aporías, y además, b) desarrollarlas (deteniéndose en considerarlas minuciosamente), hasta finalmente c) encontrar la salida o solución adecuada.

todos hacen las demostraciones, como, por ejemplo, si es posible o no afirmar y negar a la vez una misma cosa, y los otros principios de este tipo. [402]

III. Y en el caso de que se ocupe de la entidad, si es una sola o más de una la "ciencia" que se ocupa de todas las entidades, y en el caso de que sean más de una, si todas ellas son del mismo género, o si, por el contrario, a unas ha de darse el nombre de <sabiduría> y a otras otro nombre.

IV. Entre lo que ha de investigarse está también esto: si ha de afirmarse que existen solamente las entidades sensibles o también otras, además de éstas, y si hay un género de entidades o más de uno, como afirman los que, además de las Formas, ponen, entre éstas y las sensibles, las Realidades Matemáticas.

Ciertamente, como decimos, estas cuestiones han de someterse a examen, y

V. Si nuestro estudio se ocupa solamente de la entidad o también de los accidentes[403] que, por sí mismos, pertenecen a las entidades. Y, además, de éstos, a qué ciencia pertenece el estudio acerca de lo idéntico y lo diverso, lo semejante y lo desemejante y la contrariedad, y acerca de lo anterior[404] y lo posterior, y todos los otros opuestos de este tipo que pretenden estudiar los dialécticos, derivando su examen exclusivamente a partir de las opiniones

---

[402] Arist., *Metaph*., 996b 25. En la segunda aporía cabe preguntarse si corresponde a una misma ciencia estudiar los principios de las demostraciones:

…en cuanto a los principios demostrativos, es discutible si su estudio corresponde a una ciencia o a más de una (y llamo "principios demostrativos" a las opiniones comunes a partir de las cuales todos demuestran, por ejemplo, que "toda cosa necesariamente ha de afirmarse o negarse", y que "es imposible ser y no ser a la vez", todos los demás principios de este tipo),si la ciencia de éstos y la de la entidad son una o son distintas, y si no es una, cuál de ellas ha de caracterizarse como la que ahora andamos buscando. Trad. Valentín, García, Yebra.

[403] Arist., *APr*.,46b 26-40: Es evidente que tampoco es posible refutar con el método de la división, ni razonar acerca del accidente o de lo propio, ni acerca del género, ni cuando se ignora su comportamiento. Así, el modo de búsqueda no se ajusta a toda investigación, ni es útil en aquello en lo que más parece proceder. Resulta evidente de qué elementos constan las demostraciones y cómo y a qué tipo de cosas hay que atender en cada problema. Trad. Miguel, Candel, Sanmartín.

[404] Una cosa se llama anterior de 4 maneras: Tiempo, Existencia, Orden y Naturaleza.

comunes. Y, además, cuántos accidentes pertenecen, por sí mismos, a estas cosas, y no sólo qué es cada una de ellas, sino cómo cada una tiene un solo contrario.

VI. Y si los principios y los elementos se identifican con los géneros,[405] o bien con los constitutivos intrínsecos en que cada cosa se descompone.

VII. Y en el caso de que se identifiquen con los géneros últimos que se predican de los individuos, o más bien con los primeros, por ejemplo, si *hombre* o más bien, *animal* es principio y posee más realidad aparte de las cosas individuales.

VIII. Pero, sobre todo, ha de investigarse y tratarse si, aparte de la materia, hay (o no) algo que sea causa por sí, y si es separable o no, y si es numéricamente uno o más de uno, y si se trata de algo fuera del compuesto (hablo de *compuesto* cuando algo se predica de la materia) o no es nada fuera de él, o en unas cosas sí y en otras no, y entre las cosas que son, cuáles son de este tipo.

IX. Además, ¿son numéricamente o específicamente limitados los principios, tanto los que se dan en las definiciones como los que se dan en el sujeto?

X. ¿Y los principios de las cosas corruptibles y de las incorruptibles son los mismos o son distintos? ¿Y son todos ellos incorruptibles, o bien los de las cosas corruptibles son corruptibles?

---

[405] Arist., *APr.*, 46a 36-46b 3: La división en géneros es como un razonamiento impotente: pues postula lo que es preciso demostrar y concluye siempre alguno de los predicados superiores; por lo que no es posible hacer una demostración de la entidad y del qué es. Ya que al dividir no sabían, ni lo que se podía probar, ni lo que se podía concluir. En las demostraciones, cuando es preciso probar que algo se da, el término medio, a través del cual se produce el razonamiento, sea siempre menor y menos universal que el primero de los extremos; la división en cambio, pretende lo contrario: pues toma lo más universal como término medio. Trad. Miguel, Candel, Sanmartín .

XI. Lo más difícil de todo y que encierra la mayor aporía: ¿lo *Uno* y *lo que es* no son otra cosa que la entidad de las cosas que son, tal como afirmaban los pitagóricos y Platón? ¿O no, sino que el sustrato es otra cosa como, por ejemplo, Empédocles dice que lo es la amistad, algún otro, que el fuego; otro, que el agua o que el aire?

XII. Y si los principios son universales o como las cosas individuales.

XIII. Y si son en potencia o en acto y, además, si su actualidad o potencialidad son de otro tipo que las relativas al movimiento. Estas cuestiones, en efecto, presentan múltiples aporías.

XIV. Y, además ¿los números,[406] las longitudes, las figuras y los puntos son entidades o no? Y en el caso de que lo sean, ¿se dan separadas de las cosas sensibles o son inherentes a éstas?

Desde luego, en relación con todas estas cuestiones, no sólo es difícil hallar las salidas verdaderas, sino que tampoco es fácil desplegar las aporías razonando adecuadamente.[407]

TESIS: no parece posible que corresponda estudiarlos a una única ciencia, ya que;

a) los principios demostrativos incumben a todas las ciencias. Además,

[406] Arist., *Metaph*., 1001b 2-5:…pues tanto el Uno no es substancia como si existe el uno en sí, es imposible que el número sea una substancia.

[407] Arist., *Metaph*., β III, 992a 20-24: Óptica, armonía, matemáticas, es imposible que estas cosas existan aparte de los sensibles.

b) en rigor, no parece que pueda haber ciencia de los principios de toda demostración.

Antítesis: si de tales principios se ocupan distintas ciencias, ¿cuál de ellas será la suprema, la sabiduría? y ¿a quién con más razón que al filósofo corresponderá el estudio de tales principios?

De los primeros principios demostrativos no puede haber ciencia *ni mediante definición* (ésta es innecesaria ya que sabemos qué es cada uno de ellos[408]), *ni mediante demostración*. Respecto de este último Aristóteles argumenta, seguidamente, del siguiente modo:

a) puesto que toda ciencia versa sobre un género, demostrando sus propiedades a partir de principios o axiomas, si hubiera ciencia demostrativa de los principios, unos de ellos funcionarían como axiomas y otros como propiedades del género en cuestión;

b) por otra parte, como los principios demostrativos se extienden a todas las ciencias y demostraciones, su presunto género comprendería todas las cosas de que hay demostración, con lo cual todas las ciencias serían una sola.

El sentido de la tercera aporía:

Tesis: el estudio de los distintos tipos de entidades (sensibles y sometidas a movimiento, inteligibles e inmóviles) corresponde a distintas ciencias; ¿qué tipo de entidades estudiará la sabiduría, la ciencia suprema? Y, por el contrario, se admite que en la ***A***ntítesis: el estudio de todas ellas corresponde a la misma ciencia, habrá de admitirse que todas las entidades constituyen un único género del cual serían afecciones todas las propiedades demostrables, con lo cual tendremos (como en la aporía anterior) que todas las cosas se reducen a una sola.[409]

---

[408] Arist., *Metaph.*, 997a 3-54.

[409] Arist., *Metaph.*, 997a 20-24: Desde luego, a una misma ciencia corresponde estudiar, a partir de unos mismos principios, los accidentes que por sí pertenecen a un mismo género. Y puesto que lo estudiado

"*Sea la misma, o sea, otra*", en la aporía anterior ha quedado sin decidir si el estudio de la entidad y el de los principios demostrativos primero corresponden a la misma ciencia o a dos distintas.

La quinta aporía admite que el estudio de las entidades y el de los accidentes (propiedades) corresponden a la misma ciencia (**tesis**); habrá que admitir que hay demostración de la esencia, del *qué es; pero de la esencia no hay demostración*[410]

Si se admite que corresponde a ciencias distintas (**antítesis**), ¿cómo sería posible que una ciencia estudiara propiedades desvinculadas de la entidad o la esencia a que pertenecen?

Cuarta aporía:
A) Tanto admitir la existencia de ideas y las realidades matemáticas (**tesis**).
B) como rechazar su existencia (**antítesis**), en la medida en que tal rechazo parece dejar sin objeto a las ciencias de carácter matemático.

La estructura deductiva de la ciencia demostrativa[411]

1. Toda proposición de Γ hace referencia a un dominio determinado de objetos o entidades reales.[412]

2. Hay en Γ un subconjunto finito Γ* de proposiciones primordiales tales que.

pertenece a una sola ciencia y los principios pertenecen a una sola ciencia, es la misma o sea otra, también los accidentes (pertenecen a una sola ciencia), bien los estudien éstas, bien una sola que abarque ambas. Trad. García, Yebra.

410 Arist., *APo*., II, 3-8.

411 Vega, Reñón, Luis, p. 159.

412 Arist., *Apo*., 75b, 1-10; 76b 13.

2.1 Si α^* pertenece a Γ^*, α^* es indemostrable y constituye un axioma común o una asunción específica de Γ.[413]

2.2 Si α^* pertenece a Γ^*, α^* es una aserción verdadera, inmediata, necesaria, explicativa, prioritaria y mejor conocida en sí misma.

2.3 Si α^* pertenece a Γ^* y es un axioma común, será por lo regular un principio lógico del que se sirvan las demostraciones en Γ.[414]

2.4 Si α^* pertenece a Γ^* y es una asunción específica de Γ entonces:

i) α^* hará referencia a un dominio singular, a la existencia de un género dado de cosas o a la constitución de sus atributos esenciales, siempre que Γ sea una ciencia singular, pues una ciencia se distingue como tal por su género propio, y la ciencia Γ será diferente e independiente de otra ciencia Δ siempre que α^* no pertenezca a Δ (87a38-b1);

ii) Si α^* hace referencia a un dominio determinado, entonces toda aserción α de Γ derivable de α^* hace referencia a casos u objetos que caen dentro de este mismo dominio.[415]

3. Hay en Γ un sistema lógico subyacente, común a los distintos campos del conocimiento científico y carente de género propio (77a26-33), a saber: el sistema silogístico, capaz en principio de convalidar (por reducción a los silogismos de la primera figura) las cadenas deductivas formulables en los términos del sistema (79a16-32).

3.1 Si α pertenece a Γ, α es demostrable a partir de Γ mediante una cadena silogística finita.[416]

---

[413] Ibid., 72a 15-25; 76a 31-35.
[414] Ibid., 77a 26-28.
[415] Ibid., 75a 38-75b 21; 87b 1-4.

Si se admite esta reconstrucción de la idea de ciencia demostrativa, se nos permitirá descubrir unas condiciones estructurales de gran importancia para la delimitación y comprensión de la teoría aristotélica de la demostración.

Entre esas condiciones destacan:

a) Una condición de **realidad**, expresada en el punto 1 de la reconstrucción propuesta: toda ciencia hace referencia a un ámbito real.
Esto se aplica a los objetos de las ciencias matemáticas: son objetos que se dan en la realidad física, pero están tomados, no como cosas dotadas de atributos físicos, sino como objetos que satisfacen los predicados congruentes con una conceptualización y una abstracción aritmética o geométrica, *e.g.* tienen la propiedad de ser uno o la propiedad de ser una esfera.[417]

b) La condición de un **orden de inteligibilidad**, expresada en el punto 2.2, que responde a la propia estructura de la realidad y al convencimiento de que ésta es verdaderamente inteligible, cognoscible en sí misma, según se ha podido ver al considerar la dimensión epistemológica de la concepción aristotélica.

c) La condición de **autonomía y homogeneidad** del cuerpo de conocimientos que constituye una determinada ciencia, expresada en el punto 2.4.

d) La condición de **finitud** del conocimiento científico, derivada de los puntos 2 y 3.1. El análisis de la idea misma de demostración ya descartaba de entrada un conocimiento discursivo infinito. En Platón, el conocimiento, como examen dialéctico, es un caso específico de conocimiento discursivo racional:

---

[416] Ibid., 81a 15-23; 81b 10ss.
[417] Arist., *Metaph.*, M3, 1077b 18-1078a 31; *Ph.*, B2, 193b 23-194a 12.

si conozco α mi conocimiento de α se funda en alguna razón β, cuyo conocimiento descansa a su vez en el conocimiento de una premisa anterior γ, y así sucesivamente (Platón ya había advertido este regreso en *Teeteto*, *209e-210b*; era una posibilidad inherente a la convicción general de que todo conocimiento parte de o supone algún conocimiento previo). Las reacciones ante el problema coincidían precisamente en excluir la idea de un conocer infinito, por más que discreparan acerca de la viabilidad o naturaleza del conocimiento demostrativo: unos lo juzgaban imposible; otros le atribuían un carácter circular; Aristóteles piensa que no todo es susceptible de demostración[418] y que la existencia de proposiciones demostradas descansa, en último término, en la existencia de principios indemostrables.

Sin embargo, la condición de finitud de la ciencia demostrativa tiene ahora un significado positivo y concreto.

Cada premisa de una demostración de una ciencia Γ es, o bien una tesis indemostrable; o bien, una conclusión de una demostración anterior. Ahora bien, Γ sólo tiene un número finito de tesis indemostrables, conforme al punto 2; y toda cadena silogística, demostrativa, es infinita, según el punto 3.1; luego, el conjunto de teoremas o proposiciones demostradas de Γ es finito. En suma, una ciencia Γ es un cuerpo finito de conocimientos.

Aristóteles afirmaba[419] que no puede haber cadenas silogísticas de longitud infinita, es decir, deducciones silogísticas con infinitos pasos o infinitos miembros, así que no puede haber cadenas demostrativas de longitud infinita. El problema es mostrar que las cadenas silogísticas que se compongan de asertos afirmativos no pueden ser infinitas, ya que tienen un número finito de atributos definitorios. Así, sus tesis complementarias suponen un número finito

---

[418] Arist., *Metaph.*, 1006a 5-18.
[419] Arist., *Apo.*, 19-23.

de objetos susceptibles de demostración y un número finito de verdades científicas.

El sentido del programa aristotélico[420]

La teoría de la demostración científica de los *Analíticos* es un medio configurado por diversos estímulos y motivos; se pueden recordar:

1. Por un lado, hay unas primicias matemáticas, geométricas, de demostración directa y de exposición sistemática de resultados probados.

2. Por otro lado, la Academia platónica es un lugar propicio de encuentro entre las tradiciones filosófica, dialéctica, matemática que han precipitado el desarrollo de la argumentación y de la prueba.

3. La contribución de los *Analíticos* a la teoría de la demostración es el discurso racional y las vías de investigación discursiva, cuya preocupación ya existe en Platón y la Academia, pero que Aristóteles sistematiza, por ejemplo, la idea aristotélica de la deducción concluyente, su noción genérica del silogismo, y su idea básica de una apodíctica que descansa en la necesidad de dar cuenta y razón de las cosas que hay.

O bien la distinción entre la teoría madura y estricta de la ciencia demostrativa que recomienda en el libro I de los *Analíticos* de otras más informales que aparecen no sólo en los analíticos.

Esta teoría estricta está compuesta por las dimensiones lógica (silogística), epistemológica, y metodológica cuyo sentido prominente es el de la ciencia demostrativa programática, reconociendo, sin embargo, las

[420] Vega, Reñón, Luis, p. 164.

similitudes y diferencias qué del modo de la demostración y la necesidad; en *Ph.* II 9, 200a 13-b4 explica que las pruebas matemáticas y otras como las físicas y biológicas coinciden en proceder con una necesidad pareja a partir de una propiedad primordial de un tipo de cosas, pero discurren, al revés, en la medida en que el punto de partida de la demostración matemática es algo dado absolutamente desde el principio, mientras que el punto de partida de la demostración y de la explicación física o biológica puede ser una causa final.[421]

El modo de necesidad y demostración de las ciencias físicas y biológicas se distingue de los objetos de producción (y no ya de generación): en el primer caso se está ante una necesidad natural [pues las cosas pueden obrar movidas tanto por una finalidad como por una necesidad], y se puede partir de algo que efectivamente es (pues el proceso de generación y maduración de un ser vivo ya viene implicado en su forma seminal), mientras que en las obras humanas o en los productos del arte sólo cabe contar, al principio, con una idea del resultado que se espera alcanzar, con algo que no es, pero que será en el futuro.

Sin embargo, incluso en este contexto práctico se puede reconocer un modo de explicación y de racionalización necesaria. En todos los casos de las ciencias exactas y prácticas, cabe aspirar a deducciones igualmente legítimas y admisibles.

Siguiendo esta línea se puede llegar a un concepto central del saber científico: el saber que algo es necesariamente el caso, bien por necesidad absoluta, bien por necesidad hipotética, se conoce la necesidad de lo que ocurre o se hace con vistas a un fin, a partir de los principios que presiden un campo determinado de conocimiento.

---

[421] Arist., *AP*, 200a 19-20, Vega, Reñón, Luis, p.172.

La distinción entre el programa canónico *estrictamente silogístico* (de la ciencia demostrativa, antes considerado), y esta concepción menos rígida que permite un presupuesto importante para diagnosticar la menor o mayor contextualización de la teoría aristotélica de la ciencia:

El primero, a diferencia de lo que parece ocurrir a veces con la segunda, constituye una invención bastante singular en un marco general extra e intra-aristotélico. No tiene mucho que ver con la argumentación y la exposición que él mismo hace de sus análisis y elucidaciones, con sus pronunciamientos ante problemas heredados o ante nuevas aporías, o con la presentación de los resultados a que cree llegar y de las explicaciones que sugiere o propone; ni cuadra con la clara tendencia aristotélica a reconocer un pluralismo metodológico y a cuestionar la presunción de una metodología justa y precisa, universal y uniforme, para todas las ramas del conocimiento científico.

No se había hecho ciencia demostrativa silogística. De haberse perdido los tratados que componen el *Organon* y en particular los *Analíticos,* no conoceríamos que Aristóteles elaboró un concepto técnico de demostración silogística y de ciencia silogísticamente demostrativa.[422]

Algo evidente en Aristóteles es su concepción genérica de ciencia como saber ordenado y concluyente, deductivo y explicativo.

Así en *Analíticos Primeros,*[423] nos habla de las relaciones entre demostración y la definición planteadas a partir de una definición general sobre la manera como llegamos a averiguar lo que algo es.

[422] Le Blond, J.M., *Logique et méthode chez Aristote*, Vrin, Paris, 1973, p. 432.
Barnes, J., *Aristotle's theory of demostration*, Phronesis, vol. 14, no. 2, 1969. Revisado en J. Barnes, M. Schofield, and R. Sorabji (eds.) **AA** (Articles on Aristotle). Volume 1: Science, London: Duckworth, 1975, p. 65-87. Un artículo muy útil para explicar por qué Aristóteles piensa que, epistēmē, requiere de un silogismo demostrativo.
[423] Arist., *APo*., II, 8, 93a 15, 94a 11-14.

Aristóteles distingue tres funciones de la definición:[424]

a) La que desempeña como conclusión de una demostración.

b) La que cumple como prueba explicativa de lo que una cosa es, aduciendo esta característica primordial,[425] y

c) La que desempeña una exposición básica e indemostrable de lo que algo es.[426]

Esto no sólo significa que los *Analíticos* también abrigan pretensiones y directrices heurísticas, sino que se supone un vínculo de la teoría con ciertas investigaciones de Aristóteles en dominios científicos concretos. Una conceptualización parecida es la que sigue en el tratado sobre la *Generación de los animales.*[427]

Otros puntos metodológicos son los procedimientos de diferenciación y del análisis de diferencias, *diaphoraí,* como objetos de explicación o como factores de explicación. Empiezan teniendo un marco conceptual y ontológico de desarrollo en las *Categorías* y los *Tópicos*; gracias a él se despegan de los primeros usos platónicos de la *diaíresis* y de algunos abusos académicos posteriores.

Luego, Aristóteles, en los *Analíticos*,[428] y en la *Metafísica*,[429] ya considera un orden de diferenciación sucesiva donde la diferencia específica última implica las precedentes. Este criterio preserva la pertinencia de las divisiones clasificatorias, y garantiza la significación del proceso de definición;

[424] Ibid., 94a 11-14.
[425] Ibid., 94a 7-9.
[426] Ibid., 94a 5-7.
[427] Arist., *GA*, I, 7, 721a 30 ss.
[428] e.g., *APo*., II, 13, 97a 28-20.
[429] e.g., *Metaph*., Z, 13, 1038a 9-20.

por ejemplo, en la definición de hombre como animal bípedo, abandona la clasificación lógico-taxonómica en aras de la precisión descriptiva-explicativa, reconociendo una pluralidad de diferencias simultáneas, de modo que el hombre consiste en una serie de atributos que no permiten presentarlo en una sola línea de determinación o clasificación.[430]

El programa de la ciencia demostrativa de los *Analíticos* reviste tintes problemáticos; es el caso de la *axiomatización* que puede prestarse a equívocos que luego se presentarán en la axiomática euclídea sobre las posibles relaciones entre los *Analíticos* y *los Elementos*.

Una axiomatización es una organización estructural de un conjunto de conocimientos como una teoría deductiva; este recurso permite armar un cuerpo teórico, identificar sus conceptos y tesis capitales, perfilar las ideas de prueba deductiva y de orden de deducción en la teoría, y, en suma, convertir la teoría en un objeto preciso de análisis metateórico.

Tradicionalmente suele considerarse esa identificación de los conceptos de la tesis de una teoría el rasgo más característico del método axiomático. La identificación de los conceptos de la teoría, supone una distinción entre los términos primitivos y los demás términos definibles directa o indirectamente mediante ellos; la identificación de las tesis supone una distinción entre las asunciones primitivas y las demás proposiciones demostrables[431] directa o indirectamente a partir de ellas.

El uso del método axiomático descansa en la existencia de criterios lógicos y metodológicos de selección de axiomas y de organización de la urdimbre deductiva que ellos tejen; estos criterios pueden llegar a la

---

[430] e.g. *PA*, I, 2, 642b 26.
[431] Arist., *APr.*, 64b 25. No se puede demostrar por sí mismo lo que no está claro por sí mismo.

formalización de las reglas de definición y de deducción que, por lo regular, operan implícitamente en la teoría.

El desarrollo del método axiomático tiene tres fases históricas principales: la axiomática griega desarrollada por Aristóteles y Euclides. La axiomática clásica representada por Pascal y su obra *De l' esprit de la géométrie,* la cual cuenta con criterios lógicos y metodológicos de selección de axiomas,[432] pero, al mismo tiempo, depende de criterios informales de reconocimiento.[433] Dada esta calidad de verdades evidentes y primeras que caracterizan a los axiomas, esta axiomatización clásica proporciona teorías concretas, directamente referidas a un campo determinado de la realidad.

La axiomática moderna es inaugurada por los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert (1899), en donde renuncia a los anteriores criterios informales de identificación de las proposiciones primitivas de una teoría deductiva, y abre el nuevo horizonte del estudio de las propiedades formales y estructurales de las teorías mismas; esta perspectiva transforma la noción de axioma: si α es una proposición primitiva de T, lo que le confiere un estatuto axiomático no es alguna virtud absoluta de α,[434] sino su papel relativo en la conformación misma de esa teoría.[435] La teoría que resulta de este tipo de axiomatización es una teoría abstracta: acota un ámbito estructural de aplicabilidad que no puede determinar conceptos de primer orden, referidos a los objetos de un sector concreto de la realidad, sino conceptos de segundo orden que cabe entender a la manera de funciones que toman como dominio de definición un conjunto de sistemas homólogos de objetos, cada uno de los cuales constituye el universo de referencia de una interpretación posible de la teoría abstracta (este contexto

[432] e.g., con la condición de que los designados sean los mínimos suficientes a los efectos de la definición y de la deducción de los resultados conocidos en el ámbito de la teoría
[433] e.g., aquí hay que suponer que el título de verdad incontestable y el certificado de la evidencia intelectual son rasgos distintivos de un axioma.
[434] e.g., su calidad de verdad evidente.
[435] e.g., siendo T una teoría consistente, la supresión o la negación de α implicaría el abandono de T o su sustitución por otra teoría distinta.

es el que da sentido a los axiomas de *existencia* destinados a postular la disponibilidad de objetos que satisfagan una función o una condición estructuralmente descrita).

Es de esperarse que la axiomatización propuesta por Aristóteles nada tenga que ver con la axiomatización moderna, sin embargo, los *Segundos Analíticos* son una anticipación o prefiguración del punto de vista axiomático, ya que el acta fundacional le corresponde a los *Elementos* de Euclides.

La teoría aristotélica contiene dos distinciones básicas: la existente entre unas tesis primordiales *[tà protá]* y todas las demás; la existente entre los principios comunes a todas las ciencias *[tà koiná]* y los específicos de una ciencia o de una familia de ciencias. Los criterios de distinción no son sólo lógicos o metodológicos, sino que también descansan en supuestos ontológicos y epistemológicos. La organización deductiva que estas distinciones conllevan tiene su raíz en prioridades extralógicas: en el orden de las cosas y en el orden de su inteligibilidad intrínseca.

Si bien es cierto que la selección de los principios se ha de atener a criterios de suficiencia y adecuación. Pero lo que se sigue de ahí es la finitud de los correspondientes cuerpos de conocimiento antes que una restricción metódica del número de los principios.[436]

Aristóteles considera la impersonalidad objetiva de la exposición doctrinal y el cuerpo de conocimientos constituyen una base de la normalización disciplinaria que ha de acompañar a la presentación sistemática de la ciencia: podemos recuperar nuevamente el horizonte de la organización y de la exposición deductiva de las ciencias demostrativas. Más aún, Aristóteles

---

[436] Arist., *APr.*, I, 32, 88b 4-5, aquí, se niega expresamente que el número de las verdades primordiales sea mucho menor que el de las conclusiones derivables de ellas.

tiene, a veces, atisbos hipotético-deductivos: no faltan pasajes en que su uso de *hipótesis*[437] cobra este sentido;[438] tampoco faltan pasajes que aluden a la necesidad condicional que relaciona a los principios asumidos con los teoremas por ejemplo en la *Ética Eudemia,* describe en estos términos la correlación entre los principios matemáticos y sus conclusiones:

> *pues, en este dominio, si el principio cambia, cambiarán prácticamente todas las conclusiones; pero no cambiarán por sí mismas, destruidas unas por otras, a no ser que se destruya la hipótesis y se proceda con ello a una demostración*.[439]

Los objetos sensibles[440] permiten que los sentidos disciernan sin error cuándo son propios, en tanto que percibir las cualidades comunes a los sentidos como: el movimiento, la inmovilidad, el número, la figura y el tamaño, ya que éstos no son propios de ninguna sensación en particular, sino comunes a todas.[441]

Percibir y pensar no son lo mismo, tampoco el inteligir es lo mismo que percibir sensiblemente. La imaginación es, a su vez, algo distinto tanto de la sensación como del pensamiento. Sin sensación no hay imaginación, y sin imaginación no es posible la actividad de enjuiciar. Existen diferentes maneras de enjuiciar: ciencia, opinión, prudencia y sus contrarios. El inteligir abarca imaginar y enjuiciar.

---

[437] Arist., *APr*., 40b 23. Necesariamente toda demostración y todo razonamiento demuestran que algo se da o no se da, y esto de manera universal o particular y, además, demostrativamente o a partir de una hipótesis. (Es decir, por demostración directa o propiamente dicha, basada exclusivamente en las premisas de un razonamiento, o por demostración compuesta de un razonamiento y una hipótesis auxiliar distinta de las premisas.) La demostración por reducción a lo imposible constituye una parte de las demostraciones a partir de una hipótesis. Trad. Miguel, Candel, Sanmartín.
[438] e.g., en *APo*., I, 10, 76b 38-39; una hipótesis es del tipo de proposiciones tales que si son el caso, entonces por ser el caso resulta la conclusión.
[439] Arist., *EE*, II, 6, 1222b 23-41, trad. Palli, Bonet.
[440] Arist., *de An*., 418a 5-25**.**
[441] Ibid., 427b 1-25.

Toda opinión implica convicción; la convicción implica haber sido persuadido, y la persuasión implica la palabra.[442] Así, Aristóteles propone una demostración que implica la organización deductiva del conocimiento de lo que ya se sabe o puede saberse de la realidad, o de lo que puede hacerse saber a otros al respecto; es un modelo teórico programático que se complementa con el modelo práctico geométrico de Euclides. Aristóteles tuvo una influencia decisiva en Euclides en su obra de los *Elementos*, donde la demostración procede de nociones comunes, postulados, definiciones y axiomas.[443]

Las nociones comunes son, en la concepción helénica, principios del conocimiento demostrativo propios del entendimiento. Esto significa que su justificación no tiene como base la evidencia externa, sino interna. Estas nociones son tan fundamentales que no sólo intervienen en la geometría, sino en otras ciencias e incluso en la vida práctica, y se les puede usar con la misma seguridad que los órganos sensibles. Se llaman comunes ya que cualquier ser humano puede valerse de ellas. Aristóteles se refiere a ellas como axiomas, usando al parecer el mismo vocablo que Pitágoras, habiendo sido los estoicos los primeros en utilizar la expresión de nociones comunes.

Ahora queda por ver cómo la abstracción euclidiana puede permear el espacio y el tiempo de la demostración.

---

[442] Ibid, 428a 20-24.
[443] Arist., *APo.*, II, 2, 71b-72a.

Capítulo IV

La ciencia racional de Hipócrates de Quíos y los Elementos de Euclides .

Los aspectos internos de la deducción: rigor, generalización, y abstracción son tendencias que culminaron en una teoría general de la proporción; para Euclides la reducción al absurdo jugó un papel muy importante, ya que mediante este procedimiento, demostró que si dos magnitudes son conmensurables, entonces también lo deben ser sus cuadrados.

El modelo teórico programático justifica el pensamiento aristotélico sobre la organización deductiva de la demostración. Sin embargo, si bien es cierto que una deducción puede justificar un método de prueba, deja inconsistentes muchas manifestaciones de la diversidad, complejidad que retoma el modelo axiomático en los *Elementos* de Euclides.

Desde la tradición de la deducción matemática preeuclídea se pueden apreciar tres aproximaciones:

1. La más inmediata y superficial se da en los *Elementos* o tratados matemáticos elementales que, según el sumario eudemiano de Proclo, se remonta al atribuido a Hipócrates de Quíos (cuya madurez se sitúa hacia el 430 a.C.). Este escribió una obra de carácter enciclopédico, titulada Elementos para reunir todo el saber matemático de su época, más tarde incluido en los libros I y II de la colección que Euclides también tituló *Elementos*.

Hipócrates de Quíos, partiendo de un sistema de axiomas o verdades *a priori*, que tenían carácter intuitivo, utilizó, por primera vez, el conocido esquema Premisa-Teorema-Demostración. Introdujo la designación de figuras geométricas por letras, el método de demostración por reducción al absurdo. Fue el primero en calcular áreas de regiones delimitadas por segmentos curvilíneos no rectos, en relación con el problema de la cuadratura del círculo. Para ello se valió del teorema que afirma "la razón entre el área de dos círculos es la misma que la razón entre el cuadrado de sus radios". En relación con la duplicación del cubo probó: que ésta era posible siempre que pudieran encontrarse medias proporcionales entre un número y su duplo.

El método de prueba utilizado por Hipócrates de Quíos consiste en:

A. Partir de una proposición acerca de unas propiedades conocidas de determinados objetos, proposición que funge como sostén de un núcleo deductivo.

B. Reducir la proposición de origen a otra más simple o más general que constituya una condición directa de prueba de la primera .

C. Seleccionar las proposiciones en función de las condiciones o de las respuestas pertinentes para el problema particular que hay que resolver.

2. Otra aproximación más significativa contempla la evolución de los métodos de prueba que se dejan ver en dos maneras de plantearse las cuestiones matemáticas, como problemas a resolver o como teoremas a demostrar.

3. La tercera aproximación se centra en los aspectos internos de la deducción que desarrolla la prueba matemática, en la generalización y abstracción del marco conceptual, así como en el creciente rigor informal de la deducción, que van apareciendo en el estudio de las magnitudes inconmensurables; rigor, generalización y abstracción son tendencias que culminarán en una teoría general de la proporción, como la de Eudoxo o la del libro V de los *Elementos* de Euclides, y en el uso de un *método de exhaución*, [444] como en el aplicado en el teorema X, 1 y en el libro XII de este mismo tratado.

[444] El método de exhaución, se generó en el problema de la búsqueda de una medida exacta en la Grecia antigua.

Así mismo, Euclides, en el libro X, en la proposición 9 de sus *Elementos*,[445] demostró que si dos magnitudes son conmensurables, entonces también lo deben ser sus cuadrados, esto nos lleva a la demostración por reducción al absurdo.

Es en los *Elementos* de Euclides en donde encontramos las siguientes propuestas:

La noción de demostración en matemáticas es originada por la influencia de la filosofía eleática al no reconocer la evidencia directa.

Los eleáticos reflejan, en parte, la heterogeneidad de las áreas de estudio, los métodos usados y la concepción de la prueba operacional; a través de la geometría, se llega a la demostración, ya que la realidad no es más que un reflejo imperfecto, la autentica realidad, para los griegos, es la geometría, que es independiente de la experiencia y tiene una realidad propia. Es maravilloso cómo la humanidad llega al grado de certeza haciendo uso exclusivo de su pensamiento.

Pero también en forma complementaria ciertos contextos, y en algunos propósitos, la matemática griega emplea la heurística,[446] o métodos prácticos en donde se pierde la noción formal de prueba.

---

[445] Euc., *Elementa*, X 9.

[446] Heurística como sustantivo, arte o ciencia del descubrimiento; como adjetivo, se refiere a cosas más concretas como estrategias, reglas, silogismos y conclusiones heurísticas. Estos dos usos están íntimamente relacionados, ya que la heurística usualmente propone estrategias que guían el descubrimiento. La heurística juega un papel muy importante en el quehacer matemático. Por un lado, la selección del método adecuado para hacer una demostración, no sigue reglas rigurosas. A veces es más fácil demostrar un teorema directamente, otras por reducción al absurdo y, en ocasiones, es necesario recurrir a la demostración de un lema.

La demostración euclídea:

Los *Elementos* de Euclides no contienen declaración alguna de principios sobre las ideas de demostración y de organización deductiva general. Tampoco se conserva un tratado suyo, *Pseudaria* (o *Pseudographémata*, según Alejandro), destinado a entrenar al estudiante en el uso de los métodos de la geometría elemental, de la que tal vez los interesados hubieran obtenido mayores luces sobre la concepción euclídea de la argumentación.

Sin embargo, la práctica seguida por Euclides en las pruebas y en la disposición deductiva de los cuerpos teóricos que componen los *Elementos*, parece suficientemente clara y elocuente para permitir que nos formemos una idea un tanto precisa respecto de uno y otro.

En el primer caso, podemos cotejar las demostraciones de Euclides con las pruebas o con las concepciones de la demostración que ya hemos conocido; y, en el segundo caso, podremos pronunciarnos sobre la significación metodológica, axiomática o no, de la organización deductiva del tratado (o de sus partes más sistemáticas en particular).

La práctica de la prueba en los elementos

Los comentarios de Proclo[447] muestran un patrón general de las pruebas que Euclides ofrece en los *Elementos*.

Hay indicios de que, antes de Euclides, ya existía una pauta tradicional de prueba un tanto parecida. Aparte de ciertas huellas incidentales que se traslucen en el mismo lenguaje metasilogístico de Aristóteles en los *Primeros Analíticos*, esa

---

[447] Procl., *in Euc.*, 203.1 ss.

pauta puede vislumbrarse en la práctica seguida por Autólico de Pitania, en los primeros tratados matemáticos completos que hoy se conservan (*Sobre la esfera en movimiento, Sobre ortos y ocasos*).

Según Proclo, el desarrollo de toda proposición (sea un problema o sea un teorema, distinción no observada como una dicotomía categórica en los *Elementos*) comprende los siguientes pasos:

A. Enunciado, *prótasis*: proposición del objeto a construir cuando se trata de un problema, o del aserto a establecer cuando se trata de un teorema; su formulación perfecta declara, por una parte, lo que está o se considera dado, y, por otra parte, lo que se busca probar.
B. Exposición, *ékthesis*: presentación de lo dado o introducción de un caso determinado mediante la cláusula “sea...” y el uso de letras como abreviaturas que designan los Elementos del caso (líneas, figuras, magnitudes, números).
C. Determinación o delimitación, *diorismós*: especificación del objeto de la prueba por referencia al caso expuesto; en los problemas se concreta la tarea con la fórmula “lo que se requiere es...”, en los teoremas se concreta la aserción con la fórmula “digo que...”. Por “*diorismós*” también se entiende, a veces, una delimitación, en el sentido más preciso de fijar las condiciones de posibilidad de la prueba:
si lo buscado es imposible o es posible y, entonces, cómo se puede conseguir efectivamente; cuando tiene este significado de condición o límite de la prueba, suele seguir inmediatamente a la prótasis como un apéndice del enunciado del problema.
D. Preparación, *kataskeué*: urdimbre o disposición de construcciones y relaciones, a partir de lo dado, en orden a la obtención del resultado propuesto.
E. Demostración, *apódeixis*: proceso demostrativo propiamente dicho que consiste en la derivación de consecuencias sobre la base de los conocimientos previos,

primordiales (definiciones, postulados, nociones comunes) o sentados en pruebas anteriores.

F. Conclusión, *sympérasma*: aserción de que se ha satisfecho el *diorismós*, en el caso de problemas, o reiteración de la prótasis en el caso de teoremas, para confirmar que el objeto de la prueba ha sido establecido. La conclusión de problemas se remata con la cláusula final: "que era lo que había que hacer (*hóper édei poiêsai*)"; la de teoremas, con la cláusula final "que era lo que había que demostrar (*hóper édei deîxai*)". Proclo advierte que no siempre se dan todos estos pasos en las pruebas de los *Elementos*. Pero sí hay tres que son esenciales y nunca han de faltar: A, el enunciado; E, la demostración; F, la conclusión.

Señas de identidad de la prueba euclídea:

El rasgo más curioso es quizá la informalidad de este tipo de prueba. Esta informalidad no trunca ni debilita la reflexión intuitiva de los resultados probados.

La informalidad sustancial de las pruebas euclidianas reside en que no están explícitas ciertas reglas lógicas, básicas y difundidas, y, más aún, en la falta misma de un horizonte lógico, a pesar de que Euclides se oriente deliberadamente en una perspectiva metodológica deductiva.

Hasta aquí, no parece que la lógica griega antigua fuera capaz de analizar sistemáticamente o de teorizar la informalidad intuitiva de la deducción practicada en los *Elementos* de Euclides.

Axiomatización Euclídea

No deberíamos hablar de la *axiomática euclídea*[448] como si los *Elementos* encarnaran algún tipo genuino de axiomatización o constituyeran una muestra cabal de uso, o una muestra originaria del método axiomático.

Los *Elementos* son originariamente algo más que el manual por excelencia en que han aprendido geometría generaciones sucesivas de estudiantes hasta el siglo pasado; pero, por el otro lado, no constituyen el arquetipo fundacional del método axiomático clásico y a lo sumo representa una primicia (un pretexto, una fuente de inspiración o un motivo de referencia retrospectiva) a este respecto.

Una diferencia entre los principios aristotélicos y los geométricos puede ser la que media entre la dignidad y prioridad intrínseca de los primeros y la selección un tanto funcional de los segundos en orden a cubrir las necesidades de la deducción de ciertos resultados conocidos (herencia del análisis).

El problema de la demostración en Euclides se centra en la significación original de la composición deductiva. Tiene que ver con la discusión de las deudas internas (matemáticas) y externas (filosóficas y metodológicas). Su contexto está enmarcado por dos hipótesis hermenéuticas: hipótesis mínima, los *Elementos* no son, sino una recopilación ordenada y sistemática a efectos instructivos y didácticos del conocimiento matemático básico, disponible al filo de los siglos. IV y III a.C., los *Elementos* no abrigan mayores pretensiones que las de un manual disciplinario.

---

[448] Según Serres, axioma parece ser traducido de la peor manera, ya que el auténtico título de Euclides: Nociones comunes, trata el tema de la igualdad. Continúa Serres: No hay ciencia sin constancia, sin el signo igual. No hay conocimiento sin una invariancia. Orden, justicia armonía, es la igualdad la que condiciona a la comunidad. Quienes votan a favor de la invariancia votan a favor del orden social. Serres Michel, *Les origines de la géométrie*, Flammarion, France, 1993, p. 300.

La hipótesis máxima, los *Elementos* son el modelo que funda nuestra axiomática clásica y la obra que instaura la geometría como ciencia axiomática del espacio.

Las dos hipótesis son erróneas, una por defecto y otra por exceso. Los *Elementos* son, originariamente, algo más que un manual de geometría pero tampoco constituyen el arquetipo funcional del método axiomático clásico.

En relación con las *arjaí* euclídeos[449] en particular ¿cuál podría ser su estatuto *axiomático*? Ya tenemos alguna noticia sobre el sentido del aparato de nociones comunes, postulados y definiciones de los *Elementos*.

En principio, significan el paso desde unas *arjaí* más bien ocasionales, [450] hasta unos principios sistemáticos.

Con Euclides, su dimensión sistemática se manifiesta tanto en el orden de la deducción como en el orden de la exposición disciplinaria.

Los postulados y las definiciones son más bien asunciones dirigidas a la organización deductiva de determinados cuerpos de conocimiento.

Las definiciones específicas, los objetos primordiales y las nociones distintivas de un campo temático (la geometría plana, la teoría de la proporción, la aritmética, la clasificación de inconmensurables, la geometría del espacio) tienen una responsabilidad principal en la autodeterminación de algunos de estos ámbitos como teorías autónomas; pero asumidas bajo peculiaridades del

---

[449] Las *arjaí* en Euclides, son puntos de referencia para la solución de un problema o la prueba de un resultado.
[450] Como los empleados por Hipócrates de Quíos o los mencionados en los primeros diálogos platónicos bajo el título de hipótesis.

método axiomático: una es la de mantener el uso intuitivo de las nociones definidas, otra la de acotar objetos o nociones relativamente independientes.

Los postulados son supuestos y condiciones precipitadas por la tradición matemática en la resolución de problemas y en la prueba de teoremas: condiciones de construcción efectiva del tenor de los postulados (i)-(iii) o supuestos demostrativos adoptados con el fin de evitar peticiones de principio como parece ocurrir en el postulado v.

El uso euclídeo de todas estas *arjaí* revela un profundo sentido de la organización deductiva: los discursos capaces de defenderse y explicarse a sí mismos no son ya las demostraciones particulares, sino ciertos cuerpos teóricos más o menos definidos y autónomos.

Hay varias señales en los *Elementos* de esta madurez sistemática relativa: como los libros I, V, VII que sientan las bases de tres teorías relevantes en la tradición matemática griega; otras consisten en detalles casi nimios de procedimiento, *e.g.* la norma euclídea de desarrollar la secuencia acumulativa de las pruebas y no retrotraerse a una asunción primera a menos que sea preciso. Sin embargo, de esto no se sigue una conformación deductiva lineal y uniforme de los *Elementos*, ni mucho menos su constitución axiomática.

No hay motivos para atribuir a las *arjaí* euclídeas la calidad de *axiomas* en un sentido que vaya más allá de su carácter de principios y asunciones no demostrables a juicio de Euclides.

Hay, sin embargo, otro planteamiento más común y razonable de la deuda metodológica de los *Elementos* con una fuente externa. Tradicionalmente se ve que el espíritu axiomático de los *Elementos* es asociado a su comparación y filiación con el programa aristotélico de la ciencia demostrativa que se ha convertido en un lugar común desde que Proclo hiciera hincapié en diversos pasajes de sus comentarios al libro I. Un esquema de esta correspondencia es el siguiente:

Segundos Analíticos	*Elementos*
Axiomas comunes	nociones comunes
Definiciones (*premisas inmediatas)*	*definiciones*
Hipótesis *(premisas genéricas)*	*postulados*

En principio, Euclides parece obligado a recurrir al programa aristotélico como marca metodológica de contraste para detectar un presunto espíritu axiomático en las *arjaí* de los *Elementos*. Aunque el sentido de la teoría aristotélica puede que no sea un programa axiomático, ya que la ciencia demostrativa aristotélica no es muy precisa.

Por otro lado, sabemos que las nociones comunes, los postulados y las definiciones de los *Elementos* tampoco se acomodan a criterios cabales de identificación o de distribución.

De una y otra fuente hay serias dudas en poner en correspondencia las *arjaí* aristotélicas y las euclídeas. Sin embargo, es necesario hacer un balance entre la teoría de los *Analíticos* y la práctica de los *Elementos*, en el punto de su posible significación axiomática.

HAY TRES COINCIDENCIAS*:*

*1*ª. Hay una distinción clara entre las asunciones primeras y las proposiciones probadas, exigida por la noción técnica de la demostración (*apódeixis*) que Aristóteles y Euclides comparten.

2ª. Las *arjaí* o supuestos indemostrables constituyen, además, principios de organización deductiva de unos cuerpos de conocimiento.

3ª. Se da por supuesta la autonomía teórica y disciplinaria de cada uno de esos cuerpos que cuenten con unos principios propios y específicos de conceptualización y de organización, aunque compartiendo nociones o axiomas comunes con otras ciencias demostrativas, como las ciencias matemáticas compuestas de magnitud, número y proporción.

Y tres diferencias*:*

1ª. Si el interés aristotélico por las *arjaí* tiene claras connotaciones filosóficas y epistemológicas,[451] las *arjaí* de los *Elementos* representan un precipitado de la tradición matemática con motivos de orden filosófico como unidad[452] y número o distinción entre objetos geométricos y aritméticos lo que las hace escurridizas a un criterio unívoco y uniforme de identificación y clasificación.

2ª El programa aristotélico se centra en el análisis de las condiciones lógicas, epistemológicas y metodológicas de un concepto de demostración científica que aspira a un saber explicar la necesidad de lo que hay de carácter proposicional; la tarea de Euclides consiste en la elucidación y la organización deductiva de unos ámbitos concretos de conocimiento matemático con el doble propósito de una sistematización teórica y una exposición disciplinaria que

---

[451] Por ejemplo, los problemas suscitados por el papel que corresponde a la *epagogé* y al *noûs,* en el reconocimiento de los principios propios de una ciencia.

[452] Euc., *Elementa*, I, 1-23.

Arist. *Fís*., IV, 11, 22 a 1-21.

El punto se asemeja al ahora, instante indivisible que no forma parte del tiempo y se limita a marcar el comienzo, el final o una división en el tiempo.

El paradigma de está concepción de la unidad de magnitud sería la idea de unidad que transmite la definición 1 del libro VII *La unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es una*. (Pl., R. VII, 524e-566a). Cabe distinguir la palabra y su concepto en filosofía *stigmé* (punción) que Euclides hace eco, pero no utiliza., Euclides utiliza *semeîon* (signo, señal convencional).

faciliten el acceso a los conceptos y resultados, así como el dominio de los procedimientos, que caracterizan la investigación básica en esos diversos campos.

Euclides ofrece unos medios efectivos de saber cómo; de hacer o construir objetos geométricos a partir de unos elementos instrumentales básicos, por ejemplo a partir de la regla y el compás en geometría plana. Señal de esto mismo es la diferente función que pueden cumplir las definiciones y las hipótesis (los postulados) en los *Analíticos* y en los *Elementos*:

Dentro de la teoría aristotélica los postulados no son, sino premisas del argumento concluyente, mientras que en la práctica euclídea los postulados desempeñan un papel importante en la fase de conformación y preparación metódica de la prueba (en la *Kataskeué*) y las premisas de la *apódeixis* suelen ser, más bien, nociones comunes o proposiciones previamente establecidas.

3ª Si la idea aristotélica de demostración y de ciencia demostrativa queda marcada por su estructura lógica-silogística, las pruebas *axiomáticas* euclídeas proceden con un rigor informal que, según hemos visto, es irreductible a los sistemas de análisis lógico disponibles en ese momento.

En síntesis: Aristóteles prevé la doble dimensión metodológica y disciplinaria que ha de revestir la exposición racional de una materia en un tratado científico, aunque el rigor demostrativo de las pruebas geométricas ya se daba en el desarrollo matemático. En este sentido, el análisis aristotélico supo refinar y orientar las tendencias informales de la tradición matemática, al tiempo que se beneficiaba de otros desarrollos complementarios en el medio intelectual ateniense. Euclides, a su vez, materializó la organización deductiva o axiomatización de ciertos cuerpos teóricos matemáticos.

En tanto el Liceo aristotélico implanta una cultura oral al introducir la lectura de textos y la lección basada en notas o referencias relativamente organizadas y precisas, con los *Elementos* se marca un giro decisivo hacia la secuencia demostrativa escrita dando una orientación más decidida hacia el tratado científico. La expansión científica se da porque se explicitan verdades latentes y suposiciones tácitas con el fin de mejorar sus aplicaciones o precisar su campo de operación.

El estilo euclídeo es una señal de la compleja situación de continuidad y discontinuidad en que se desarrolla la cultura helenística. Contiene algunos supuestos tradicionales, e.g., de raíz platónica, de origen aristotélico, pero también se observa la innovación en la sensación de una neutralidad teórica y de una autosuficiencia metódica de las disciplinas científicas bien asentadas; esta sensación inspira una demarcación entre cuestiones internas, disciplinarias, y otras cuestiones externas, indisciplinadas.

Los *Elementos* de Euclides constituyen, además, un modelo real de organización deductiva y de exposición metódica de la ciencia.

Esta significación de los *Elementos* trasciende la constitución disciplinaria de la propia geometría: su disposición deductiva se ofrece como demostración general de la ciencia rigurosa e incontrovertible.

Capítulo V

Las aportaciones filosóficas de Gödel al problema de la demostración lógica.

Inicia el presente capítulo con una síntesis de la demostración griega, posteriormente continuamos con los estoicos haciendo un puente hasta el siglo XX, se abordan los antecedentes contemporáneos, el gran hallazgo de Gödel (*no todo enunciado es verdadero*) y las consecuencias actuales de su demostración.

Llega el eco al siglo XXI, resonando aún la paradoja que plantea Sexto Empírico sobre la inexistencia de la demostración, frente a la demostración en la idea axiomática euclídea, paradoja que produce, veintitrés siglos después, la metamorfosis expresada en el metalenguaje gödeliano como indecidibilidad de ciertos enunciados que hace la demostración un juicio más débil aun que la verdad, visión que se asemeja a un juego de dados, a la manera escheriana, con infinitas caras para infinitas dimensiones, de verdades que comunican un lenguaje lógico encubierto, con su ingrediente de verdad que marca un camino parecido a una banda de Möbius.

La ausencia generalizada de respuestas nostálgicas sobre la demostración sólo es enmendada a partir de los griegos, aunque sabemos que largo tiempo atrás muchas de sus interrogaciones pudieron ser intentos demostrativos sobre cuestiones eternamente cuestionadas que se quedaron en la memoria de la tradición oral.

En la tradición escrita, los presocráticos empiezan a transformar los procesos intelectuales de razonamiento. Sus fragmentos nos reflejan un tipo de reflexión trascendente de la naturaleza, que son gobernados por leyes perfectamente formuladas en la dicotomía verdad y falsedad, generada por una forma de demostración deductiva.

En Protágoras la mecanización del argumento sofístico consolida la demostración apoyada en la existencia de contrarios.

En tanto que Aristóteles codifica los silogismos para una ciencia deductiva, aunque de alguna manera critica la lógica establecida en el *Organon*, su análisis va dirigido principalmente a la argumentación sin fundamento; poco después, Euclides desarrolla la teoría de la demostración en la geometría como una disciplina deductiva mediante el método axiomático. Este tipo de demostración permite su revisión en la experiencia, en donde el número y la forma geométrica se resuelven con demostraciones distintas de espacio y signo, es decir, mediante la diferencia entre contar y describir. Al lado evidentemente verdadero de los axiomas y de la lógica normalmente impecable de la deducción, se obtiene un modelo de conocimiento científico que durará dos mil años. A través del tiempo algunos científicos comienzan a resolver la duda que ya atormentaba a Euclides sobre el quinto postulado;[451] al parecer el mismo Euclides y muchos otros geómetras no estaban seguros de si este postulado era o no demostrable a partir de los demás, ya que pospuso su utilización todo lo posible. Con este quinto postulado Euclides inicia una segunda odisea que se va fraguando a lo largo de más de dos mil años. Se trataba de probar que el quinto postulado no era un principio fundamental de la geometría sino un teorema de la geometría absoluta.

En síntesis el quinto postulado de la geometría plana de Euclides nos dice que sólo se puede dibujar una línea recta paralela a otra recta que pase

[451] Euc., *Elementa*, I, Post. 5. Una recta al incidir sobre dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos. Trad. Puertas, Castaño.

por un punto exterior a ésta; estas dos rectas nunca se encuentran por mucho que las extendamos en ambos sentidos. Durante muchos siglos los matemáticos creyeron que este postulado se podía demostrar utilizando el resto de los postulados, pero los esfuerzos para probarlo fueron infructuosos. A principios del siglo XIX, el matemático alemán Carl Friedrich Gauss,[452] el matemático ruso Nikolái Ivánovich Lobachevsky y el húngaro Janós Bolyai[453] demostraron por separado la posibilidad de construir un sistema geométrico coherente, en donde el postulado de la paralela única de Euclides se reemplaza por otro que nos dice que se puede dibujar un número infinito de paralelas a una recta que pasan por un punto exterior a ésta.

De manera independiente, tanto Janós Bolyai como Lobachevsky, parten de un objeto geométrico y establecen sobre él unos postulados que son idénticos a los de Euclides en los *Elementos*, excepto el quinto. Originalmente pretenden razonar por reducción al absurdo: si el V postulado depende de los otros cuatro, cuando lo sustituya por aquel que dice exactamente lo contrario, he de llegar a alguna contradicción lógica. Lo sorprendente es que no se llega a contradicción ninguna, lo cual quiere decir dos cosas:

Primero, el V postulado es independiente de los otros cuatro, es decir, no puede deducirse de los otros cuatro, no es un teorema, y Euclides hizo bien en considerarlo como un postulado. Segundo, existen modelos del espacio en los que, en contra de toda intuición, por un punto que no esté en una cierta recta no pasa una única recta paralela a la dada. Esto es anti-intuitivo, pues no

[452] La principal contribución de Gauss a la Geometría es la creación de la Geometría Diferencial. En base a que la Geometría estudia el espacio, las curvas y las superficies, establece la noción fundamental de curvatura de una superficie. Demuestra que si consideramos que una geodésica es una curva con menor distancia entre dos puntos sobre una superficie (es decir, si tenemos dos puntos sobre una superficie, el camino más corto entre esos dos puntos sin salirnos de la superficie es un segmento de geodésica), concepto totalmente análogo sobre la superficie al de recta en el plano, existen superficies en las que los triángulos formados por las geodésicas miden más de la medida de dos ángulos rectos, y otras en las que mide menos. Esto, esencialmente, es contradecir el V postulado de Euclides.

[453] La geometría Bolyai-Lobachevsky, llamada normalmente geometría no euclídea hiperbólica, describe la geometría de un plano que está formado sólo por los puntos interiores de un círculo en el que todas las posibles líneas rectas son cuerdas del círculo.

podemos concebir tal cosa, no podemos imaginar (ni mucho menos dibujar) una situación así, sin reinterpretar los conceptos de recta o plano. Pero desde el punto de vista lógico es perfectamente válido. Como es de imaginar, esto supuso una fuerte crisis en la Matemática del siglo XIX, que vino a sumarse a otras controversias. Es importante señalar que las geometrías de Bolyai y de Lobachevsky, no depende de si se construyen usando métodos analíticos o sintéticos. Existen formas de construirlas tanto de manera sintética como analítica. El modelo es el mismo se llegue como se llegue.

Más tarde, alrededor de 1860, el matemático alemán Bernhard Riemann[454] mostró que también es posible una geometría en la que no existen líneas paralelas. Los detalles de estos dos tipos de geometría no euclídea son complejos, pero ambos se pueden demostrar utilizando modelos sencillos.

Esta forma de concebir el espacio evolucionó con el tratamiento dado a comienzos del siglo XX en los trabajos de los matemáticos italianos R. Ricci-Curbastro y T. Levi-Civita hasta la noción que hoy denominamos como variedad riemanniana.[455]

El axioma euclídeo de la geometría plana es remplazado por Riemann con una concepción esférica del espacio mediante transformaciones. Riemann define como transformaciones aquellas aplicaciones que dejan sin variación el elemento de arco en el espacio.

[454] La geometría riemanniana o no euclídea elíptica, es la geometría de la superficie de una esfera en la que todas las líneas rectas son círculos máximos. Para distancias relativamente pequeñas, la geometría euclídea y las no euclídeas son esencialmente equivalentes. Sin embargo, al trabajar con el espacio astronómico o con problemas de la física moderna como la relatividad o la teoría de propagación de ondas, las geometrías no euclídeas dan una descripción más precisa que la euclídea de los fenómenos observados. Por ejemplo, la teoría de la relatividad desarrollada principalmente por Albert Einstein está basada en una geometría riemanniana de espacio curvo.

[455] Ricci introdujo el cálculo tensorial, un formalismo con el que se pueden expresar relaciones geométricas independientemente del sistema coordenado. Levi-Civita introdujo un concepto de paralelismo en la geometría riemanniana, proporcionó una forma de expresar la noción euclídea de paralelismo para espacios más generales. Morris Kline, *Geometría*, Matemática en el Mundo Moderno (Scientific American), septiembre, 1964.

En la variedad riemanniana se dispone de una forma en el espacio tangente de cada punto, lo que permite medir longitudes de vectores tangentes y el ángulo determinado por dos vectores. Esto permite determinar la longitud de la curva que se considere en dicha variedad; también se puede calcular el volumen del modelo. Dados dos puntos *suficientemente próximos* se pueden considerar todas las curvas que existan en el modelo, entre esos dos puntos. Existe una curva especial que es la que realiza el recorrido con menos longitud entre esos dos puntos, estas curvas se denominan geodésicas.

Al utilizar las *transformaciones* como verdades de un modelo esférico, podemos deducir cómo los axiomas euclidianos, concebidos a partir de un modelo plano, resultan simulados para nuestra interpretación, ya que son deducidos de un axioma falso en nuestra forma de ver las cosas y que, por lo tanto, no se excluye que puedan ser verdaderos en otro contexto.

Este fenómeno nos muestra cómo la geometría requiere de afirmaciones, enunciados y teoremas que le den sentido, porque de otra manera generarían un vacío intuitivo forzando la veracidad de los hechos demostrados.

En una demostración que pretende olvidar los modelos planos, los silogismos y axiomas son puestos en tela de juicio, ya que la demostración modestamente interroga sus procedimientos, insiste constantemente en su verificación buscando nuevos caminos o posibles refutaciones, pero estos procedimientos pueden resultar profundamente perturbadores.

Y es que demostrar a partir del pensamiento de Gödel parece, a primera vista, una posibilidad ilusoria; sin embargo, de alguna manera lo abstracto lleva impregnado el sello de lo concreto de la humanidad. Kurt Gödel (1906-1978) es el lógico más grande que ha producido la humanidad desde Aristóteles; las controversias desatadas, pueden atribuirse a que sus aportaciones son complejas y demandan un razonamiento profundo, en ocasiones incomprensible para quien no conoce su metalenguaje; su personalidad solitaria y reservada, su apariencia seria, huyendo a las miradas, su hipocondría, y paranoia, son por lo menos fáciles de romantizar, como las excentricidades de Einstein. La causa de su poca fama es que mientras las teorías de Einstein se aclamaron como triunfos, no así los teoremas de Gödel que constituyeron una reducción para la lógica y las matemáticas y un perturbador encuentro ontológico con la demostración.

Si bien es cierto que incursionar en la demostración entraña cierta dificultad en el contexto contemporáneo, debido a que los pensadores pretenden hacer ilusoria toda posibilidad de certeza, el significado de la demostración ha cambiado, tanto en el ámbito de interpretación de la demostración, como en la esfera de pensamiento humano.

No es así para la antigua Grecia en donde la noción de demostración tiene su fundamento en la impresión de los sentidos, es intuitiva, argumenta sus demostraciones con el propósito de hacerlas evidentes.

En cambio, la demostración contemporánea es una demostración formal, sus conceptos y argumentos son definidos únicamente por las relaciones que se afirman entre sí. Aun así, el lugar común de ayer y hoy es una demostración que sigue estando inmersa en una ciencia deductiva, que ha avanzado desde su nacimiento con los griegos, y que actualmente puede explicar magníficamente muchas de las observaciones empíricas más experimentales de otras ciencias; claro está que lo anterior se realiza sin hacer a un lado las aportaciones hechas a partir del s. XVI por Bayes en el sentido de que toda ciencia experimental es más inductiva que deductiva. Por eso, estudiar la demostración desde el punto de vista de la tradición encuentra su madurez en la demostración de Gödel, ya que permite reconocer los avances obtenidos en la representación y conceptualización de la demostración en el pensamiento humano y su plano de posibilidad, recorriendo la sutil barrera entre el lenguaje y el metalenguaje. En este sentido, lo que hago es retomar el problema, acotando el salto histórico, pero siempre respetando la tradición lógica, por lo que primero abordaremos la paradoja que se estableció a partir de las concepciones euclídeas y la inexistencia de la demostración que plantea Sexto Empírico.

Sexto Empírico, haciendo un análisis de lo que entendía por demostración, encuentra que es un tipo de signo correlativo y revelador de la conclusión. Vista de esta manera, la demostración es un razonamiento que, mediante premisas admitidas, revela por encadenamiento una consecuencia no evidente. Sin embargo, esos mismos argumentos nos llevan a una demostración inexistente, ya que el razonamiento depende de apreciaciones que se dan en el tiempo y no pueden coexistir simultáneamente porque van cambiando y madurando hacia contextos diferentes, pues cuando decimos la primera premisa, todavía no existen ni la otra premisa ni la conclusión, y cuando afirmamos la segunda, ya no existe la primera, y aún no existe la conclusión; cuando enunciamos la conclusión, ya no subsisten sus premisas, por lo que se piensa que el razonamiento ni siquiera existe.[456] De esta manera, el razonamiento bien encadenado es incomprensible para Sexto Empírico debido a que la secuencia de las partes implicadas no se resuelve. Si no puede apreciarse diferencia entre razonamientos bien encadenados y mal encadenados es porque el razonamiento es incomprensible. Es decir, se suspende el juicio, porque tanto la afirmación como la negación de un razonamiento son igualmente persuasivas. No hay criterio de verdad por el

[456] La aportación a la demostración es de la lógica estoica; aunque irónicamente la fuente es de Sexto Empírico, que estaba empeñado en la demolición del dogmatismo estoico. *Sexto Empírico, Esbozos pirrónicos*, trad. Antonio, Gallego, Cao. Teresa, Muñoz, Diego, Gredos, Madrid, 1993, pp.182 ss.

solo hecho de que haya razonamientos enunciados; las demostraciones son relativas; la causa es incapaz de explicar los hechos. La única actitud racional es la abstención de todo juicio, sólo así se logra la libertad del espíritu, pues no se sujeta a ninguna escuela o dogma. El escéptico debe ser, ante todo, un observador; debe buscar y cuestionar, sin negar ni afirmar nada, sin pretender negar la realidad, tan sólo cuestionar los juicios sobre la realidad.

Si no se puede entender el razonamiento perfecto y completo, tampoco estará claro el razonamiento que omite algo. Y, ¿qué podemos decir del razonamiento incorrecto, que por redundancia es necedad o simpleza en los razonamientos demostrativos?

En cuanto a la redundancia, incluso los razonamientos indemostrables de los estoicos aparecerán como mal encadenados; suprimidos estos razonamientos, se viene abajo toda la dialéctica, pues ellos son los que supuestamente no necesitan demostración de su consistencia, y en realidad son los razonamientos demostrativos para que los demás se encadenen bien.

Requisitos de una demostración:

> *Cuando no hay razonamiento, cuando el razonamiento no está bien encadenado, cuando no es verdadero, no puede encadenar algo abstracto con cosas concretas, y por lo tanto no puede llegar a una conclusión: entonces es claro que la demostración es inexistente.*[457]

Algunos argumentos en contra de la demostración[458] son los siguientes:

- Cuando las premisas son confusas la demostración es inexistente.

[457] S. E., *P*., II, 167-170.
[458] S. E., *P*., II, 171-ss.

- Al admitir la demostración, se establece la demostración en general o una concreta. Pero la demostración general no existe, ya que sus premisas y conclusiones son particulares, referidas a temas concretos, es decir, se refieren a una demostración en concreto. La demostración concreta no se puede plantear directamente, porque sus premisas y su conclusión son elementos que están en discusión, y en el debate van adquiriendo sentido, ya que no son evidentes por sí mismos.

Ahora bien, tampoco la prueba con que se establece la demostración será admitida ni evidente; de esta manera se cuestiona si existe la demostración, necesitándose plantear demostraciones hasta el infinito. Y puesto que ni con un signo, ni con una experiencia, ni con un criterio es posible ver que exista la demostración, y su manifestación no depende de sí misma, entonces será imposible la existencia de la demostración. En este orden de ideas, la demostración será una cosa ficticia; pues se piensa en cuanto demuestra, pero, como no es posible, no podrá demostrar nada, por lo que tampoco será demostración.[459]

La paradoja dogmática asegura que los argumentos contra la demostración implican la existencia de la demostración.

> *Si existe la demostración, existe la demostración; si no existe la demostración, existe la demostración; pero o existe la demostración o no existe la demostración; luego, existe la demostración.*[460]

Lo que sigue de los opuestos es verdadero y necesario; pero esas cosas [existe la demostración; no existe la demostración] se oponen la una a la otra, y de cada una de ellas se sigue que exista la demostración; luego, existe la demostración.

[459] Ibid., II, 184.
[460] Ibid., II, 186.

Sexto Empírico asegura que es fácil argumentar contra los opuestos de este tipo de demostración, ya que no existe ningún razonamiento demostrativo; son sólo probables, y los probables no son necesariamente demostrativos; o bien, es imposible que sea correcta una implicación compuesta por apreciaciones que se contradicen.

La crítica a la negación de la demostración en los estoicos resulta insostenible, ya que, como Sexto Empírico menciona en II, 104, sí puede ser válida una implicación en la que se contradigan el antecedente y el consecuente. *Siempre que A sea verdadera, también lo serán las implicaciones "A implica A", y "no A implica A".*

A pesar de la posición insostenible de Sexto Empírico, hay que rescatar su valioso concepto sobre la confirmación de la disyunción y la negación, que son incompatibles o de recurrencia circular, ya que hacen inconsistentes los razonamientos indemostrables.[461]

En cuanto a la inducción, Sexto Empírico también la descalifica, por considerar que los casos particulares son infinitos.

Pasado el tiempo, da la impresión que la demostración se repite u obedece a modelos que se confeccionan caprichosamente, como trastornando todo proceso, revelándolo como relativo a un escenario sin referencia, como metodología que promueve lo aleatorio, lo accidental, hace polvo el análisis y lo vuelve irrelevante: un lapsus demostrativo que escapa a la metodología para dar paso a la incertidumbre.

[461] S. E., *P.*, II, 203.

Después de veintitrés siglos de madurez va cambiando el paradigma de la demostración como modelo axiomático y metodológico a un modelo que contiene un sistema de comprobación interno; esto sólo es posible mediante un metalenguaje que sólo responde dentro de su sistema lógico, que implica un trasfondo detectado por Gödel: la imposibilidad en la demostración.

Durante su estancia en Viena, Gödel interactuó con el círculo de Viena, grupo de físicos en su mayoría, algunos filósofos, lógicos, matemáticos y lingüistas, que, entre otros, podemos mencionar a Rudolf Carnap (1891-1970), Hans Hahn (1879-1934), Moritz Schlick (1882-1936), Friedrich Waismann (1896-1959), y Otto Neurath (1882-1945). Éstos comenzaron el positivismo lógico en los años 20. El positivismo lógico combinaba, en parte, la filosofía empírica del físico Ernst Mach con la posición logicista de Bertrand Russell, pero fue más influenciado por el discípulo de Russell, Ludwig Wittgenstein y, sobre todo, por su obra *Tractatus logico-philosophicus* (1919). Pasemos ahora a los fundamentos de la demostración en los que se apoyó Gödel.

Fundamentos de la Demostración

1. La axiomática

El método axiomático moderno requiere que los argumentos estén libres de dificultades y paradojas, para ello, de los cinco postulados que Aristóteles exigía a las ciencias deductivas, desaparecen el de realidad, el de verdad, y el de evidencia. La noción de verdad se sustituye por la de validez, y los axiomas no son ya escogidos por su evidencia sino por su capacidad deductiva. Su validez es considerada como meramente hipotética. De esta manera, los teoremas deducidos de axiomas de este tipo, sólo podrán ser verdaderos bajo ciertas reglas específicas.

2. La noción de sistema formal

El sistema formal es el último y más alto grado de abstracción de la axiomática. En la axiomática formal sólo se consideran sus propiedades sintácticas dejando de lado el contenido semántico. En la axiomática formal se hace uso del lenguaje ordinario, es el caso de la axiomática de Peano presentada en 1890 en su obra *The principles of arithmetic*, y diez años después por Hilbert en *Die Grundlagen der Geometrie*.

Para formalizar una teoría deductiva se necesita explicar todo su contenido, no dejando lugar a la intuición ni a la evidencia.

3. Teoría y metateoría

En el lenguaje científico entendemos por *metateoría* un lenguaje que tiene por objeto una teoría formal, o sea un sistema formal. Cabe distinguir la metateoría sintáctica de la metateoría semántica.

La propiedad de un sistema formal es la sintaxis de ese sistema considerado en sí mismo, en sus posibilidades deductivas. La semántica de un sistema formal establece las relaciones entre el sistema y cierto dominio de objetos que el sistema es capaz de representar; sin embargo los límites entre sintaxis y semántica no es riguroso, ya que sus límites no están perfectamente definidos, porque hasta ahora no se ha podido encontrar un criterio formal de distinción.[462]

[462] Las nociones de tipo metateórico son, por su propio carácter, nociones destinadas a comparar conceptos de procedencia distinta que tardarán en imponerse. En su lugar se desata una lucha por resolver los evidentes desequilibrios que resultan de buscar una versión semántica de la consistencia, o una sintáctica de la completud. En ocasiones se provocan tensiones al faltar una distinción fundamental entre la teoría formalizada y el sistema formal, de esta manera los sistemas formales parecen más incompletos que las teorías formalizadas. Ladrière, Jean, *Les limitations internes des formalismes*, Louvain, E. Nauwelaert, Paris, Gauthier-Villars, 1957, pp.56 ss.

4. Consistencia

Un sistema formal se dice que es *sintácticamente* consistente si no es posible derivar en él, al mismo tiempo, una fórmula bien formada y su negación.[463] La noción de consistencia siempre aparece definida con relación a la consecuencia. Decimos que un sistema formal es ω-consistente, si no existe en él ninguna función proposicional con una variable libre, tal que la expresión cerrada que resulte al sustituir en dicha función la variable libre por una cifra, pertenezca al conjunto de las consecuencias de dicho sistema formal, y que, al mismo tiempo, la negación de la expresión cerrada que resulte al cuantificar universalmente la variable libre de la función proposicional, pertenezca también al conjunto de las consecuencias de dicho sistema formal.

La distinción entre la simple consistencia y la ω-consistencia reside en que la simple consistencia es menos fuerte que la ω-consistencia. Un sistema formal se dice que es sintácticamente completo con relación a la negación, si toda fórmula bien formada, según las reglas de formación del sistema, es en él derivable o refutable.[464] La noción de ω-completud y ω-consistencia son muy semejantes. ω-consistencia es una versión negativa de la ω-completud.

5. Decidibilidad

La noción de decidibilidad semántica exige la consideración de un sistema formal y de una interpretación o modelo. Un sistema es semánticamente decidible si se puede dar un procedimiento efectivo, es decir, realizable en un

[463] Recordemos brevemente que un sistema formal se dice que es consistente si en él no se pueden derivar sintácticamente proposiciones contradictorias. El sistema se dice coherente si las consecuencias sintácticas de éste son también consecuencias semánticas. El sistema se dice adecuado si todas las consecuencias semánticas son a su vez consecuencias sintácticas (*i.e.*, si todas las verdades son deducibles) Finalmente, el sistema se dice completo si para cada proposición p de éste se tiene que, o bien, p es deducible, o bien, ¬p es deducible. Tarski, *On some fundamental concepts of metamathematics* en *Logic, semantics, metamathematics, papers 1923 to 1938*, translated J.H. Woodger, Oxford, Oxford Claredon Press, 1990, pp. 30-37.

[464] Ibid., p.34.

número finito de pasos, que permita decidir para toda fórmula bien formada según las reglas del sistema si ella es o no verdadera en dicha interpretación.

6. La teoría de la demostración

La cuestión principal de la teoría de la demostración concierne evidentemente a los criterios de la demostración admitidos en un plan metamatemático.[465] La demostración es correcta si se satisfacen las condiciones enunciadas en el postulado. La demostración tiene una prueba concluyente cuya proposición es una consecuencia necesaria de las premisas. La demostración es concluyente porque, si sus premisas son verdaderas, la conclusión también debe serlo.

7. La paradoja

Una paradoja es una expresión acerca de la cual si se apuesta por la hipótesis de su falsedad, se deduce que es verdadera, y, si se apuesta por la hipótesis de su verdad, se deduce que es falsa.[466]

8. La paradoja de Richard

Gödel, en la exposición preliminar de su teorema hace notar la semejanza de su argumentación sobre la *paradoja semántica*[467] *richardiana*, propuesta por el matemático francés Jules Richard en 1905, fundamentalmente esta paradoja es la siguiente:

> *El número richardiano es un número que no posee la propiedad cuya definición está asociada a él.* [468]

---

[465] Ladrière, Jean, *Les limitations internes des formalismes*, p. 29.
[466] Ibid., p. 60.
[467] En 1926 Frank Plumpton Ramsey puso en evidencia que existen dos tipos de paradojas según PM: las tipo i lógicas o matemáticas que surgen de construcciones puramente matemáticas, un ejemplo es la paradoja de Russell, y las tipo ii son las paradojas lingüísticas o semánticas que surgen de la consideración del lenguaje que empleamos para hablar de matemáticas y lógica, un ejemplo es la paradoja de Richard. Ramsey, Plumpton Frank, *Foundations of Mathematics*. In Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, R. B. Braithwaite, editor. Routledge and Kegan Paul, New York, 1950, p. 20.
[468] *Cfr*. Richard, Jules, Sur un paradoxe de la théorie des ensembles et sur un axiome de Zermelo, en *L'Enseignement Mathématique*, Vol. 9, 1907, pp. 94-98.

PRESENTAMOS UN EJEMPLO DE LA PARADOJA DE RICHARD:

Existen muchos números reales que se pueden describir con expresiones en castellano. Sea **a** el número entero que sigue al mayor de los números enteros que se pueden definir con menos de cincuenta palabras.

Existen números reales que no están en ***A***, por ejemplo los números aleatorios.
Llamemos ***A*** = {αse puede describir con una frase en castellano}
Veamos que ***A*** es numerable:
Tomemos las 27 letras del alfabeto más el carácter "_" que indica un espacio entre dos palabras. Con estos 28 caracteres podemos escribir cualquier frase y en particular las frases que caracterizan cada elemento de ***A***.
Asignemos a estos 28 caracteres un número natural impar, de la siguiente manera:

Código	Número	Código	Número
a	1	o	29
b	3	p	31
c	5	q	33
d	7	r	35
e	9	s	37
f	11	t	39
g	13	u	41
h	15	v	43
i	17	w	45
j	19	x	47
k	21	y	49
l	23	z	51
m	25	ñ	53
n	27	_	55

Recordemos que un número es primo, si es mayor que uno y sólo es divisible por él mismo y por la unidad.

Vamos a hacer corresponder a cada número del conjunto ***A,*** un único número natural de la siguiente forma:

Sea por ejemplo $\alpha = \sqrt{2}$

Una frase empleada para mencionarlo es:

Raíz cuadrada de dos.

De acuerdo al código anterior, tenemos que los números de los caracteres que corresponden a esta expresión son, en su orden:

35 1 17 51 55 5 41 1 7 35 1 7 1 55 7 9 55 7 29 37
R a í z - c u a d r a d a - d e - d o s

Luego el número natural que le hacemos corresponder a raíz cuadrada de dos es: la secuencia de números primos elevados, consecutivamente, a la potencia de cada uno de los números del código que se formó a partir de la expresión *raíz cuadrada de dos.*

$2^{35}\ 3^{1}\ 5^{17}\ 7^{51}\ 11^{55}\ 13^{5}\ 17^{41}\ 19^{1}\ 23^{7}\ 29^{35}\ 31^{1}\ 37^{7}\ 41^{1}\ 43^{55}\ 47^{7}\ 53^{9}\ 59^{55}\ 61^{7}\ 67^{29}\ 71^{37}$

En general, si un número **a** del conjunto ***A*** está representado por una expresión cuyos caracteres corresponden en su orden a los números:

$$m_{1a}\ m_{2a}\ \ldots m_{ka}\ m_{(k+1)a}\ldots\ m_{ra}\ m_{(r+1)a}\ldots$$

la expresión que usamos para mencionar a **a** le hacemos corresponder el único número natural:

$$n_a = 2^{m1}{}_a\ 3^{m2}{}_a\ \ldots\ P_k{}^{mk}{}_a \ldots P_r{}^{mr}{}_a$$

en donde P_k es el *k*-ésimo número primo.

Si **u** es el conjunto de todas las expresiones, tenemos que a cada expresión μ **ç u** le corresponde un único número natural:

$$2^{m1}{}_{\mu}\, 3^{m2}{}_{\mu} \dots P_k{}^{mk}{}_{\mu} \dots P_r{}^{mr}{}_{\mu} = n_{\mu}$$

Además, como la descomposición de un número natural como producto de primos es única (teorema fundamental de la aritmética), entonces, si un número natural es la imagen de una expresión, por esta asignación no puede existir otra expresión que tenga como imagen dicho número. Luego, en particular, se tiene que la aplicación:

φ(A) **ç** N

Φ: ***A*** **§** N={1,2,3,…,n, n+1,…}

Φ (α)=n_{α}

es inyectiva y, por lo tanto, ***A*** es numerable.

De donde,

A= {α_1,α_2,…,α_m,…}

Sabemos que cada α_m puede expresarse en forma decimal como:

α_m=$b_{m1}b_{m2}\dots b_{mm}\dots$en donde b_{mk} **ç** {0, 1, 2,...,9} ¶k **ç** N

Si para toda k existe un número natural, ¿el número k es o no es richardiano? Esto es una paradoja, ya que si k es richardiano no debe gozar de la propiedad cuya definición está asociada a él, y como ésta es la propiedad de ser richardiano, no será richardiano. Si, al contrario, k no es richardiano, debe gozar de la propiedad cuya definición le está coordinada; por tanto será richardiano. La paradoja de Richard se debe en este sentido al vicio de la circularidad.

Desde esta perspectiva, el éxito de Gödel consiste en hacer una proposición circular semejante a la formulación de la paradoja de Richard, sin caer en la paradoja gracias a un procedimiento legítimo que le permite pasar a una proposición de la metateoría al plano de la teoría.

Podemos dejar de lado esta paradoja distinguiendo entre las proposiciones que se producen dentro de la aritmética y de las proposiciones acerca de algún sistema de notación en que se codifica esa aritmética. La construcción de esta paradoja sugiere la posibilidad de que se pueden "representar" declaraciones metamatemáticas acerca de un sistema formal suficientemente amplio dentro del sistema mismo.

La característica fundamental de la representación es que puede demostrarse que una estructura abstracta de relaciones existente en un campo de "objetos", existe también entre "objetos" pertenecientes a otro campo diferente. Esta característica es lo que impulsó a Gödel a construir sus pruebas. Si, como él esperaba, unas proposiciones metamatemáticas complicadas acerca de un sistema formalizado pudiesen ser traducidas a (o reflejadas por) proposiciones aritméticas contenidas dentro del propio sistema, se habría dado un gran paso en el camino de facilitar las demostraciones metamatemáticas.

La explotación de la idea de la representación es la clave de la argumentación de Gödel. Éste demostró que las proposiciones metamatemáticas acerca de un cálculo aritmético formalizado pueden efectivamente ser representadas por fórmulas aritméticas dentro del cálculo. Ideó un método de representación tal, que ni la fórmula aritmética correspondiente a una determinada proposición metamatemática verdadera acerca de la fórmula, ni la fórmula aritmética correspondiente a la negación de la proposición, son demostrables dentro del cálculo.

Puesto que una de estas fórmulas aritméticas debe codificar una verdad aritmética, ninguna de las cuales es, sin embargo, derivable de los axiomas, los axiomas son incompletos. Este método de representación le permitió construir una fórmula aritmética correspondiente a la proposición metamatemática: *el cálculo es consistente,* y también le permite demostrar que esta fórmula (si el cálculo es consistente) no es demostrable dentro del cálculo. De ahí se desprende que la proposición metamatemática no puede ser demostrada, a no ser que se utilicen reglas de deducción que no puedan ser representadas dentro del cálculo, de tal modo que, al demostrar la proposición, se deben emplear reglas cuya propia consistencia pueda ser tan discutible como la consistencia misma de la aritmética.

9. El antecedente del método diagonal en la demostración de Finsler. *Una pretendida anticipación a Gödel.*

Gödel no es le primero en mostrar la existencia de proposiciones indecidibles. Finsler[469] le precede al utilizar una forma parecida a la paradoja de Richard; pero en lugar de utilizar la noción de definición, él utiliza, como lo hará Gödel, la noción de derivación.

Finsler usa el argumento diagonal de la paradoja de Richard, remplazando verdad con probabilidad, para demostrar la existencia de una fórmula que es falsa, pero formalmente indecidible.

La demostración de Finsler y la paradoja de Richard están en estrecha relación con el método diagonal de Cantor, que está relacionado con el método

---

[469] *Cfr.* Ladrière, Jean., *Les limitations internes des formalismes*, 1957, p. 94.

de Gödel por lo que es necesario conocer el procedimiento utilizado por Cantor para mostrar que no es posible establecer una correspondencia biunívoca[470] entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales contenidos entre el 0 y el 1, puesto que este último conjunto tiene una potencia o cardinalidad[471] mayor que la del conjunto de los números naturales. Con este método se obtiene el resultado sorprendente de que existe una infinitud mayor que la de la serie de los enteros positivos y que, por tanto, la serie de los números reales comprendidos entre el 0 y el 1 no es numerable, porque tiene una cardinalidad mayor que el de la serie infinita de los números naturales.

Supongamos ahora que estos números hayan sido ordenados en una sucesión infinita y que cada uno de ellos se le haya hecho corresponder uno de los números de la serie infinita de los enteros positivos, de manera que cada entero designe uno de los decimales de la sucesión infinita.

Esta sucesión de fracciones se puede presentar en la forma de una tabla de infinitas líneas e infinitas columnas.

La primera línea estará constituida por todos los decimales que tienen cero en la parte correspondiente al entero, y en la parte decimal, después de la coma, se colocará sucesivamente, la primera cifra del primer decimal, luego la segunda, la tercera, y así sucesivamente hasta el infinito. En la segunda línea se procederá del mismo modo pero tomando no el primer sino el segundo decimal; y así sucesivamente.

[470] Es decir, cuando a cada elemento del segundo conjunto corresponde, sin ambigüedad, uno del primero.

[471] El cardinal indica el número o cantidad de los elementos constitutivos de un conjunto. Es interesante destacar que se diferencia del ordinal, porque el ordinal introduce orden y de ahí jerarquía: primero, segundo, tercero... El cardinal, en cambio, nombra el número de elementos constitutivos y ése es el nombre del conjunto correspondiente.

0,	$\boldsymbol{a_{11}}$	a_{12}	a_{13}	…………. a_{1n} ………..
0,	a_{21}	$\boldsymbol{a_{22}}$	a_{23}	…………. a_{2n} ………..
0,	a_{31}	a_{32}	$\boldsymbol{a_{33}}$	………….. a_{3n} ……….
………………………………………………………				
0,	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	……………… $\boldsymbol{a_{nn}}$ ………..
				ó
………………………………………………………				

Tabla 1

En la tabla 1, el signo $\boldsymbol{a_{32}}$, por ejemplo, representará la segunda cifra que aparece en el tercer decimal después de la coma. Así, cada línea representará un decimal de infinitas cifras, puesto que son infinitas las columnas. La infinitud de las líneas corresponderá a la infinitud de los números reales entre 0 y 1, si se parte del principio de que son infinitos y numerables. Si esto es así, en esta tabla se habrán representado todos los números reales entre 0 y 1.

Pero también, siguiendo la flecha, podemos construir un decimal que no está comprendido en la enumeración de la tabla. Este número será:

0, $a_{11}+1$ $a_{22}+1$ $a_{33}+1$ …………. $a_{nn}+1$ ………..

Y tendrá como primera cifra después de la coma al sucesor de la primera cifra del primer decimal, es decir, a la primera cifra del primer decimal más 1, como segunda cifra, al sucesor de la segunda cifra del segundo decimal y así sucesivamente. O bien tendrá $\boldsymbol{a_{nn}}$, en caso del numeral $a_{nn}+1$ … Este número será distinto de todos los que han aparecido en la tabla porque diferirá al menos en la primera cifra del primer decimal, en la segunda del segundo y así sucesivamente. Con esto se demuestra que la tabla no contenía todos los números reales comprendidos entre 0 y 1 y, por tanto, que el conjunto de los números reales no es enumerable porque tiene una cardinalidad mayor que el de la serie infinita de los números naturales.

Este resultado puede interpretarse como un antecedente del teorema de Incompletud de Gödel. Sin embargo, las nociones de *probabilidad formal* son diferentes. Finsler distingue entre *formal* y *conceptual,* considera que *formal* consiste en expresiones en un lenguaje inequívoco dado. Finsler considera la lista de sucesiones binarias que son definibles para una expresión lingüística finita. Podemos definir la sucesión antidiagonal, pero esta definición pertenece al dominio conceptual, no hay ninguna contradicción.

El antidiagonal es definible, pero no formalmente definible. El mismo argumento aplica a las pruebas. Nosotros podemos listar todas las pruebas que demuestran que una sucesión infinita cualquiera contiene infinita o finitamente muchos ceros. Con cada prueba nosotros podemos listar la sucesión infinita a la que se refiere. Entonces, formamos el antidiagonal. Puede que no haya ninguna prueba que determine si el antidiagonal contiene finita o infinitamente muchos ceros. Sin embargo, podemos determinar que el antidiagonal debe, de hecho, contener infinitamente muchos ceros, considerando el hecho que debe haber infinitas pruebas en la sucesión 1 1 1. . . tiene finitamente muchos ceros.

La distinción entre *verdad y probabilidad* puede expresarse como sigue. Nosotros podemos enumerar las fórmulas $F_i(x)$ con una variable libre (de un sistema apropiado) defina $a_{i,j}$ y $b_{i,j}$ como sigue: $a_{i,j} = 1$ si $F_i(j)$ es verdad y 0 en caso contrario; $b_{i,j} = 1$ si $F_i(j)$ es comprobable y 0 si no lo es. Esto implica $b_{i,j}$ **â** $a_{i,j}$. La paradoja de Richard implica que no hay ninguna k para que $1 - a_{j,j} = a_{k,j}$ para todo j. Sin embargo, nosotros podemos tener una k para que $1 - a_{j,j} = b_{k,j}$. Si tenemos semejante k, entonces podemos diagonalizar (j = k) y tenemos una k para que 1 - a k, k = b k, k. Esto implica que F k(k) es verdad pero no es comprobable.

La demostración de Finsler[472] dentro de un estudio, puede ser considerada como insuficiente, porque no formaliza, ni distingue en un sistema y en un metasistema sus propiedades. La demostración de Finsler está sujeta a las mismas críticas que las antinomias bajo su forma inmediata. La verdadera dificultad consiste en mostrar que la proposición indecidible que construye pertenece efectivamente al sistema considerado. Es sobre todo este asunto el que ligará Gödel dentro de su demostración y su herramienta esencial será la aritmetización.

Los fundamentos de la matemática

A principios del siglo XX se produjo una crisis en la fundamentación matemática que pretendía derribar no sólo los conocimientos matemáticos del presente, sino también los clásicos. Este desacuerdo dividió a lógicos y matemáticos en cuatro tendencias:

1. El platonismo[473]

El racionalismo se remonta a Platón; como tal, la cara epistemológica del platonismo asume una posición metafísica-ontológica. Esta corriente maduró en los siglos XVII y XVIII con los escritos de Descartes, Baruch Spinoza, y

[472] Ladrière. *Les limitations internes des formalismes*, pp. 94.
[473] El término *platonismo,* en el sentido utilizado por Gödel, fue propuesto por el colaborador de Hilbert, Paul Bernays en una conferencia que impartió en junio de 1934. Bernays pretendía dar nombre a un modo de razonar que es característico sobre todo del análisis y la teoría de conjuntos, aunque también del álgebra moderna y la topología. Dicho modo de pensar consiste en lo siguiente: los objetos de la teoría se conciben como elementos de una totalidad o conjunto, que se considera dada al margen de cualquier dependencia respecto al sujeto pensante, al matemático. Precisamente porque los elementos del conjunto se conciben como dados, una consecuencia de dicho modo de pensar es que para una propiedad cualquiera (expresable con los medios de la teoría) puede decirse que o bien la poseen todos los elementos del conjunto, o bien hay uno que no la posee.

Leibniz. Su principal rival[474] es el empirismo que justifica el conocimiento desde la experiencia de los sentidos y muy poco desde la pura razón. Sus antecedentes se remontan a Aristóteles y se desarrolla en los británicos, John Locke, George Berkeley, David Hume, y John Stuart Mill.[475]

La tradición empirista influyó al positivismo lógico y al Círculo de Viena, y persiste actualmente en el pensamiento de Bas van Fraassen y W.V.O. Quine, bajo un punto de vista crítico, constructivista y contextual, presentándose no sólo como el conjunto de tesis plausibles o comprensivas de la actividad demostrativa o como una visión de la ciencia más adecuada, sino como una forma de enfocar y definir la tarea de la ciencia.

En cambio, el realismo es una herencia del racionalismo. En este sentido el realismo exige seguir dos cánones de razonamiento correcto al hacer matemática.[476] En el primero, los objetos matemáticos existen independientemente de las matemáticas, de la mente, y del lenguaje, se llama *realismo ontológico o platonismo*. En el segundo, las declaraciones matemáticas tienen valor de verdad independientemente de la mente, el lenguaje o las convenciones matemáticas, y se llama *realismo con valor de verdad*.[477]

El platonismo matemático es la concepción filosófica que atribuye a los objetos matemáticos una existencia independiente de nuestras actividades de pensamiento y conocimiento.[478] Abraham Fraenkel señala, en un artículo que

---

[474] Shapiro, Stewart, *Intensional Mathematics*, studies in Logic and The foundations of Mathematics, vol. 113, Nort-Holland, 1985, p. 1.
[475] Shapiro, Stewart, *The Philosophy of Mathematics. Thinking about mathematics.* Oxford University Press, 2000, p. 4.
[476] Shapiro, Stewart, *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford University Press, 1997, p. 37.
[477] Shapiro Stewart, *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, p. 37.
[478] Benacerraf, observa un dilema ontológico en esta forma de ver los objetos matemáticos, ya que no se pueden localizar ni en el espacio, ni en el tiempo y se pregunta: Si los objetos matemáticos están

apareció en 1935 en la revista *L'Enseignement mathématique*, la diferencia del punto de vista que existe entre Platón y Aristóteles sobre la existencia de seres matemáticos:[479] para Platón el mundo de las matemáticas es un mundo independiente, por lo tanto crea en sí-mismo sus propias leyes y se considera superior a la física. La existencia de seres matemáticos es, apoyada en este hecho, independiente del pensamiento humano, como en general, de toda actividad externa. Para Aristóteles, al contrario, no hay un mundo matemático en sí; sino sólo hablado, ya que procede de *ideas abstractas de la actividad humana*, un saber de construcciones matemáticas creativas. Por esta razón también, Aristóteles considera las construcciones matemáticas como conductoras hacia una verdadera *episteme*; pero la proyección abstracta de su construcción en un mundo en sí, imaginario, sería sólo una *doxa,* es decir, que pertenece a la apariencia, al mundo de las opiniones.

El platonismo, en el sentido de Bernays, es característico de la moderna matemática abstracta,[480] fue uno de los resultados tangibles y claros del debate sobre fundamentos[481] que tuvo lugar a principios del siglo XX.[482] Aunque ese debate es famoso y bastante bien conocido, a menudo se trivializa la cuestión, pensando que en último término se reduce a una elección muy

---

fuera del nexo causal, ¿cómo podemos saber nosotros algo de ellos?.Shapiro, Stewart, *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology,* Oxford University Press, 1997, p. 4.

[479] *L'Enseignement mathématique*. *Sur la notion d'existence dans les mathématiques*, 34, 1935, p. 18-19.

[480] Bernays, Paul, *On Platonism in Mathematics*, reprinted in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.); *Philosophy of Mathematics, Selected readings,* 2nd edition, 1983, pp. 59-62.

[481] En especial el típico trío de logicismo, intuicionismo y formalismo, que no resume en absoluto todas las opciones posibles para una fundamentación.

[482] El platonismo, en el sentido en que Bernays utiliza la palabra, se opone al constructivismo. Y descansa en el supuesto de que los objetos en la teoría constituyen los elementos de una totalidad dada, de suerte que uno puede razonar así: para toda propiedad que es expresada por medio de los conceptos de la teoría, es determinada objetivamente si hay un elemento dentro de la totalidad que posee esta propiedad o si no lo hay. De una manera que podría parecer a primera vista sorprendente, Bernays pone como ejemplo de actitud Platonista, la que es adoptada por Hilbert en *Fondements de la géométrie*. Si nosotros comparamos la axiomática de Hilbert con la de Euclides, haciendo una abstracción que entraña varias asunciones sobre los postulados de la geometría griega, notaremos que Euclides habla de figuras a construir, considerando que para Hilbert los sistemas de puntos, las líneas y planos existen desde el comienzo. Euclides postula: que puede unir dos puntos construyendo una recta; mientras Hilbert expresa el axioma: Dados dos puntos cualesquiera, existe una recta que los une, es decir hay una recta sobre la que están todos situados. Existe, apunta aquí al sistema de rectas. *Sur le platonisme dans les mathématiques*, p. 53.

subjetiva entre varias posturas enfrentadas. Afortunadamente, hay mucho más de interés en el problema de los fundamentos de la matemática, y afortunadamente también, el debate de los años 20 y 30 dejó algunas conclusiones firmes. Posteriormente, en un artículo de 1971, el propio Bernays[483] resaltaba los siguientes resultados positivos y duraderos del platonismo:

1. el conocimiento de las posibilidades de formalización de teorías matemáticas por medio del simbolismo lógico: características, alcance y límites de la formalización;

2. el empleo de la formalización para consideraciones metateóricas (consistencia, decidibilidad y completud) empleando medios restringidos en Hilbert y en los famosos resultados de Gödel, o todo el poder de la matemática clásica en desarrollos posteriores como la teoría de modelos de Tarski;

3. la contraposición entre un tratamiento de la matemática constructiva, basada en consideraciones que atienden a un proceso, y el tratamiento clásico, que se basa en considerar relaciones entre objetos asumidos como existentes.

Como veremos, la denominación de platonismo puede en ocasiones resultar confusa, de manera que debemos distinguir dos sentidos del término.

1. Platonismo interno o propiamente matemático: es característico de las teorías de la matemática abstracta o moderna, donde se hace referencia a elementos cuya existencia se postula y se considera dada, es decir, algo así como una existencia ideal.

---

[483] Bernays, Paul, *Abhandludgen zur Philosophie der mhatematik. Wissenschaftliche Buchgesellschaft*, tr. al inglés de Wilfried, Sieg, Darmstadt, 1976, pp. 190-191.

2. Platonismo externo, ontológico, o propiamente filosófico (una de las posibles interpretaciones filosóficas de la matemática, en particular de la característica antes señalada de la matemática abstracta): consiste en la afirmación de que los objetos matemáticos gozan de una existencia real, análoga en algún sentido a la existencia de los objetos físicos.

Una posición de corte platónico externo puede encontrarse en Gödel, quien, desde antes de participar en el Círculo de Viena, no estaba de acuerdo en reducir la filosofía y las matemáticas a la lógica, quizás influenciado por la filosofía de Kant, ya que estaba convencido de que los objetos matemáticos eran tan reales como los objetos físicos que encontramos en la realidad cotidiana.

Este nuevo planteamiento exigió nuevas nociones de intelección, realidad y verdad. Gödel indicó que el platonismo fue crucial para que pudiera llegar a resultados del calibre de su célebre primer teorema de incompletud, o de la independencia del Axioma de Elección y la Hipótesis del Continuo.[484] Algunos han visto en ello argumentos impresionantes a favor de esa posición filosófica. Pero lo que nos interesa aquí es que la versión del platonismo que da Gödel[485] se distingue por ser ciertamente más sutil que la de Cantor.

Gödel plantea ciertas similitudes entre la teorización científica y la teorización matemática, anticipándose a puntos de vista propios de lo que se ha llamado *cuasi-empirismo*: un nombre que, por cierto, yo eliminaría, sustituyéndolo por hablar de una *concepción hipotética* de (partes de) la matemática. En realidad, la idea de que en las teorías matemáticas hay elementos hipotéticos fue otro de los resultados del debate sobre fundamentos,

---

[484] Wang, Hao, *Reflexiones sobre Kurt Gödel* , Madrid, Alianza, 1991, pp. 166-170.
[485] El método axiomático puede llamarse Platonismo, si constituye un medio conveniente para comprender una realidad que existe independientemente.

aceptado de manera muy general. Se encuentra en autores tan diferentes como Russell, Hilbert, Weyl, von Neumann, y Gödel.

Gödel en su primer ensayo filosófico: La lógica matemática de Russell, expone una filosofia realista o platónica de la lógica encontrando similitud entre la intuición matemática y la percepción sensible; en este sentido las clases y los conceptos resultan ser realidades independientes de nuestras creaciones y no son una manera de hablar; de esta manera la matemática ha perdido su absoluta certeza.

En este trabajo sobre la lógica matemática de Russell, Gödel se atreve a comparar la aceptación de los conjuntos *como objetos reales* con la aceptación de los cuerpos físicos:

> *las clases y los conceptos pueden concebirse como objetos reales … Me parece que la aceptación de tales objetos es tan legítima como la aceptación de los cuerpos físicos, y que hay tantas razones para creer en la existencia de aquéllos como en la de éstos. Son necesarios para obtener un sistema de matemática satisfactorio en el mismo sentido en que los cuerpos físicos lo son para una teoría satisfactoria de nuestras percepciones sensibles, y en ambos casos es imposible interpretar los enunciados acerca de estas entidades como enunciados acerca de «datos»*.[486]

Conviene tener en cuenta, aquí, que Gödel está aceptando (con Russell) que los objetos físicos no son un *dato*, sino entidades teóricas que postulamos para dar cuenta de los fenómenos percibidos. Algo parecido sucedería con los conjuntos. Gödel cita muy positivamente la idea de Russell de comparar los axiomas de la matemática con las leyes naturales, y la evidencia matemática con la percepción sensible. En cuanto a los datos básicos de la entidad

[486] Gödel, Kurt, *Obras completas*, trad. Jesús, Mosterín, Alianza, Madrid, 1989, p. 310.

matemática, el ejemplo obvio al que Gödel vuelve una y otra vez son las proposiciones de la teoría finitaria de números, que Hilbert tomó como la piedra de toque para las demostraciones de consistencia absoluta. Así, la '*evidencia*' matemática se limitaría a elementos tales como los números naturales y sus leyes, que servirían de base para un proceso de desarrollo teórico en que se habrían ido introduciendo elementos cada vez más abstractos. Dice:

> *los axiomas no tienen por qué ser necesariamente evidentes por sí mismos, sino que su justificación estriba (como en la física) en el hecho de que permiten que estas "percepciones sensibles" sean deducidas; esto no excluiría, por supuesto, que tuviesen también una suerte de plausibilidad intrínseca similar a la que se da en física. Creo que (en el supuesto de que evidencia se entienda de un modo suficientemente estricto) este punto de vista ha sido ampliamente justificado por posteriores desarrollos y se puede esperar que aún lo sea más en el futuro*.[487]

Gödel admite que al plantear un método hipotético-deductivo en conexión con la matemática, ésta puede perder buena parte de su *absoluta certeza*, pero insiste en que las hipótesis de que se trata nunca son puramente convencionales.

En un trabajo posterior, Gödel afirmaría que lo *dado* que subyace a la matemática está muy relacionado con elementos abstractos contenidos en nuestros conceptos empíricos, como es el concepto mismo de objeto. El que tales datos no sean de origen perceptual no implica subjetividad:

---

[487] Ibid., p. 300.

> *Pueden representar más bien un aspecto de realidad objetiva, pero, en oposición a las sensaciones, su presencia en nosotros puede deberse a otro tipo de relación entre la realidad y nosotros mismos*.[488]

Ya hemos visto que el platonismo tiende a enlazar con una concepción *a priori* del conocimiento matemático; en el mismo artículo, Gödel llega a decir:

> *a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible*.[489]

Desde luego, este tipo de ideas resultan muy complejas y sólo se podrán entender hasta que se adapte a los nuevos paradigmas lógico-filosóficos la noción de intuición matemática.

Lo más interesante es quedarse con la idea de que Gödel no era un platónico ingenuo, por ejemplo, que se pensara que todo lo que afirma la teoría de conjuntos se limita a describir una realidad exterior. Su posición era más sofisticada, admitiendo que entre los principios de la teoría hay elementos que se introducen por razones puramente teóricas, como pueden ser la búsqueda de generalidad explicativa, e incluso motivos de simplicidad y conveniencia.

---

[488] Ibid., p. 360.
[489] Ibid., p. 359.

2. La escuela logicista

Los lógicos pensaban que la Matemática se fundaba en la lógica[490] siendo sus representantes los ingleses, Whitehead (1861-1947) y B. Russell (1872-1970) quienes publicaron su obra *Principia Mathematica* entre 1910 y 1913. En esta obra afirman que la matemática puede reducirse a la lógica formal y lo explican como una tesis en dos partes.[491] La primera, asevera que todas las verdades matemáticas pueden traducirse a verdades lógicas, es decir, que el vocabulario de la matemática constituye un subconjunto apropiado del vocabulario de la lógica. La segunda, afirma que todas las pruebas matemáticas pueden transformarse en pruebas lógicas o, en otras palabras, que los teoremas de la matemática constituyen un subconjunto apropiado de los teoremas de la lógica.

3. La escuela intuicionista

Los Intuicionistas, [492] aseguran que la lógica se funda en la Matemática, su afán es descubrir nuevas propiedades y esto los hace dibujar, imaginar y buscar analogías de teorías conocidas con el mundo físico; su fundador es el Holandés L. E. Brouwer[493] (1881-1966) quien sostiene que la lógica clásica no sirve a las matemáticas; en especial el principio del *tercero excluido* que dice:

---

[490] Hay que recordar que es Gottlob Frege, con sus trabajos titulados *Begriffschrift* (1879) y *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884), el primero que comienza a explicar la matemática a partir de la lógica. La obra de Frege no recibió inicialmente mucha atención, hasta que B. Russell, a principios del siglo XX, puso de relieve el verdadero significado de dichas obras. Frege defendía una concepción logicista, según la cual los objetos de las matemáticas son abstractos, eternos e independientes de nuestra mente. Él pensaba que tenemos acceso a esos objetos (tales como los números y las colecciones de números) a través de la lógica.

[491] Russell, Bertrand, *My Philosophical Development*, New York, Routledge, 1999, p. 57.

[492] Agreguemos a éstos, el grupo francés Nicolás Bourbaki (1933), que quiso ignorar a Gödel, para afianzarse a las teorías de Hilbert. Argüelles, Rodríguez, Juan, *Historia de la Matemática*, Akal, Madrid, 1989, pp. 192-194.

[493] El matemático Brouwer fue tal vez, el más entusiasta opositor de la lógica del tercero excluido. Consideró que las matemáticas debían prescindir completamente de la lógica :Se llamó a su escuela la lógica intuicionista : en su disertación doctoral (Ámsterdam, 1907) escribía : *El mundo no es un sistema lógico, y por lo tanto no podemos discutir acerca de él lógicamente (...) sabemos que las únicas disputas posibles son aquellas que pueden entablarse mediante el razonamiento matemático. La fundamentación de la matemática en la lógica, la teoría de conjuntos y los números transfinitos muestran el peligro de caer en un camino falso por hacer uso del razonamiento lógico*.

Cualquier enunciado proposicional es verdadero o es falso, pero no se pueden dar ambas cosas simultáneamente.[494]

4. El formalismo de Hilbert

El formalismo se puede entender como un intento de conciliación entre el logicismo y el intuicionismo. Apoya una especie de realismo platónico, en cuanto considera que las entidades matemáticas existen en sí independientemente de los objetos y de los procesos mentales necesarios para su construcción.

Su líder fue David Hilbert quien realizo la obra *Fundamentos de Geometría* y *Los 23 problemas de Hilbert,* que desde su publicación en 1900, sólo tres aún no han sido resueltos.[495]

Para Hilbert la metamatemática no se reduce a la lógica[496] ya que sólo se usa como su instrumento.[497]

En el pensamiento de Hilbert la lógica o la matemática no es el sistema formal mismo sino aquello que en él se interpreta cuando se dan valores a los signos constantes.

El programa formalista de Hilbert requería la completa formalización de la matemática clásica. Sus conceptos habían de ser reemplazados por signos gráficos; sus ideas, por hileras de signos; el razonamiento, por la mera manipulación combinatoria de las hileras, y la demostración, por la deducción formal conforme a reglas mecánicas.

---

[494] Kleiner Israel, Nitsa Movshovitz-Hadar, *The role of paradoxes in the evolution of mathematics*, American mathematical monthly, 101, December 1994, pp. 963-974.
[495] Yandell, Benjamín, H. *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*, A K Peters Ltd., 2002.
[496] Hilbert, the foundations of mathematics, en Van Heijenoort, Jean, *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic*, 1879-1931, Harvard University, Cambridge, Mass, 1977, p. 473.
[497] Hilbert, on the infinite, en *From Frege to Gödel*, p. 381.

Con esto podría uno olvidarse del contenido transfinito presuntamente problemático de la matemática clásica y limitarse a inspeccionar desde fuera el juego con hileras de signos, restringiendo ahora los razonamientos a lo más evidente y menos problemático, a lo finitario.

El programa formalista de Hilbert requería dos cosas:

1) construir sistemas formales completos para las principales teorías de la matemática clásica, y
2) probar la consistencia de dichos sistemas formales.

Hacia 1930, la situación del programa formalista de Hilbert avanzaba en su primer requerimiento (formalización completa de la matemática clásica) y se pensaba que básicamente había sido cumplida la construcción del sistema formal de *Principia Mathematica* y otros comparables (como la teoría axiomática de conjuntos suplementada por un cálculo lógico). Y por esta fecha muchos matemáticos y lógicos trataban de cumplir el segundo requerimiento (es decir, trataban de probar la consistencia del sistema formal).

La teoría hilbertiana de la demostración consiste en saber cuál es el conjunto de la matemática clásica representada dentro de los formalismos adecuados (que incluye la lógica utilizada para la deducción de teoremas).

Hilbert supone una metamatemática y una teoría de la demostración, a partir del hecho de entender las propiedades de los formalismos del primer nivel y, en particular, de establecer la consistencia.[498]

[498] Según Hilbert, las verdades matemáticas abstractas llegan a la intuición sensible, mediante un cuerpo de fórmulas demostrables y una metamatemática que le permite deshacerse de las interdicciones inútiles y de las dificultades creadas por las paradojas; éstas metamatemáticas son distintas a los razonamientos puramente formales de las matemáticas propiamente dichas, ya que aplican un razonamiento intuitivo para establecer el carácter consistente de los axiomas.

Así, un sistema es consistente, cuando es imposible derivar un enunciado y su negación.

La cuestión principal de la teoría de la demostración concierne, evidentemente, a los criterios de demostración admitidos en un plan metamatemático.

Hilbert buscó un método que pudiera ofrecer demostraciones de consistencia, yendo más allá de la pura duda lógica en el uso de los modelos finitos, para establecer la coherencia de ciertos conjuntos de postulados, mediante el análisis de un número finito de rasgos estructurales de expresiones de cálculos completamente formalizados.

En los primeros proyectos de Hilbert, sus criterios son extremadamente rigurosos, mucho más restrictivos que los criterios intuicionistas. No admite los razonamientos por inducción completa, solamente la utilización de una recurrencia que se ordena dentro del infinito.

La meta de Hilbert era crear un sistema matemático formal completo y consistente, en el que todas las aseveraciones pudieran plantearse con precisión.[499]

Russell y Whitehead habían tomado una dirección diferente a la de Brouwer y Hilbert, con el objetivo de incluir las matemáticas y la filosofía dentro de la lógica.

---

[499] Nagel, Ernest. Newman, James R., *Matemáticas en el Mundo Moderno. El teorema de Gödel* (Selecciones de Scientific American), Junio, 1956, pp. 251-253.

Sus *Principia Mathematica*[500] pretendían ofrecer un sistema en que todas las matemáticas quedaran incluidas en la lógica; sin embargo, Hilbert pensaba la lógica como un subconjunto de las matemáticas.

Sin embargo Hilbert pensaba como Kant, que las matemáticas y la lógica eran cosas distintas:

> *las matemáticas tratan una materia que viene dada en forma independiente de la lógica. Las matemáticas, por lo tanto, no pueden basarse solamente en la lógica*.[501]

Había aún una condición previa adicional para el uso de la deducción lógica y para poder llevar a cabo operaciones lógicas: entender la naturaleza del fenómeno, es decir tener ciertos signos concretos extralógicos experimentados directamente por intuición, con anterioridad a todo pensamiento relacionado con la diversidad de lenguajes implicados.

De los 23 problemas de Hilbert, Gödel habría de demostrar uno conocido como *el problema de la decidibilidad*[502] *(completud) del cálculo proposicional*,[503] y de refutar otro; *el problema que establece la consistencia de*

[500] Dos son las aportaciones de *PM*, Proporcionó un sistema de símbolos que permitió codificar todas las afirmaciones de la matemática pura en una forma estándar. Y estableció de forma explícita la mayor parte de las reglas de la lógica formal que se emplea en las demostraciones matemáticas (Cambridge, 1910-1913).

[501] Benacerraf, Paul. Hilary, Putnam, *Philosophy of Mathematics*, *Selected Readings*, David Hilbert, *On the Infinite,* University Press, Cambridge,1983, p. 192.

[502] Se entiende por el problema de la decidibilidad (completud), el de comprobar la validez universal de las expresiones, o también el problema dual de la comprobación de la complibilidad de las expresiones. Hilbert, D., Ackermann, W., *Elementos de lógica teórica*, trad. Víctor, Sánchez, de Zavala, Tecnos, Madrid, 1975, pp. 138-150.

[503] Gödel, Kurt, *Obras Completas*, trad. Jesús, Mosterín, Alianza Universidad, Madrid, 1989, p. 18, La completud, según Gödel, es la propiedad que tiene una teoría formal cuando para cualquier sentencia de su lenguaje ocurre que ella o su negación es un teorema de la teoría. Diferente a la completud entendida como suficiencia de cálculo, que es una propiedad de un cálculo, cuando sus reglas y axiomas lógicos son suficientes para derivar con su ayuda todas las fórmulas lógicamente válidas.

los Axiomas para la aritmética utilizando métodos constructivos,[504] Gödel (1930) aclara, que no es posible demostrar la consistencia de la aritmética a partir de sus propios métodos (constructivos o finitistas) de deducción. Este resultado pasó a la historia con el título de Segundo Teorema de Incompletud de Gödel.

Hilbert consideraba que la Hipótesis del continuo, de Cantor, tenía la importancia suficiente como para identificarla como el primer problema de su lista; sin embargo nunca se imaginó que las contribuciones de Gödel terminarían con su programa. En el transcurso de la demostración de lo que era falso, Gödel elaboró su famosa prueba de la decidibilidad (completud), sobre la Hipótesis del Continuo (***HC***) que afirma lo siguiente: no existe un conjunto de cardinalidad estrictamente mayor que la cardinalidad del conjunto numerable y estrictamente menor que la cardinalidad del continuo. Poco después en 1939 Gödel demuestra que la negación de ***HC*** no se puede tener como consecuencia de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel (***ZF***). Y en 1963 Paul Cohen demuestra que ***HC*** no se puede tener como consecuencia de ***ZF***. En conclusión ***HC*** es independiente de ***ZF***.

David Hilbert se dio cuenta que cualquier sistema lógico formal, tal como el presentado en los *Principia Mathematica*, estaba en sí mismo sujeto a consideraciones epistemológicas de integridad y coherencia. Tales problemas eran esencialmente metamatemáticos, es decir, trascendían las matemáticas, y sólo podían ser resueltos fuera del sistema en cuestión, pero sin percibir la imposibilidad de este objetivo. Gödel fue muy claro en todas estas cuestiones.

[504] La exigencia de Hilbert impone una fuerte restricción en el estilo de una posible prueba de consistencia. Sin esta restricción si es posible demostrar la consistencia de la Aritmética, tal como lo hizo Gerhard Gentzen en 1936 utilizando inducción transfinita.

> *Una completa descripción epistemológica del lenguaje A no puede darse en el mismo lenguaje A, porque el concepto de verdad de las frases de A no pueden definirse en A*.[505]

Aquí, Gödel reconoce implícitamente que para ver dentro de un mismo sistema se requiere de un metalenguaje. Por lo tanto, las paradojas que causaron tanto pesar a Cantor, Frege y Russell, nunca podrían delimitarse a partir de su mismo lenguaje. La teoría de los conjuntos transfinitos de Cantor, había sido atacada debido a la paradoja del *conjunto de todos los conjuntos*. Los lógicos como Frege confiaron en evitar el problema reduciendo las matemáticas a la lógica matemática. Luego Russell destruyó las esperanzas de Frege cuando descubrió la paradoja del *conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos* dentro de la lógica matemática. Russell intentó crear un nuevo sistema lógico que resolviera la paradoja creando una cadena jerárquica de clases, clases de clase, y así consecutivamente, arrastrándose hasta el infinito.

Gödel vio que un sistema semejante, quedaba sujeto al problema de no poder contenerse a sí mismo. Russell no podía tener nunca éxito despejando el problema porque siempre sería posible plantear cuestiones sobre su sistema que no podían ser resueltas dentro del sistema. Hilbert se dio cuenta de que el infinito podía todavía colarse por la puerta de atrás, dado que aquellas definiciones, reglas y operaciones finitas podrían usarse en un número infinito de maneras para generar verdades matemáticas. Por lo tanto, era también necesario encontrar una vía fuera del sistema mismo para demostrar que éste era, a la vez, completo y consistente.

[505] Gödel Kurt, *Collected Works*, Vol. 1, p. 105.

Gödel intuye que el problema no residía en el infinito,[506] ni existía tampoco la necesidad de reducir las matemáticas a procesos finitos como lo manifestaban los prejuicios de los lógicos de aquel tiempo, según los cuales, los razonamientos no finitos no eran aceptados como una parte con significado de las metamatemáticas. Tampoco Gödel aceptó que el demostrar la consistencia de la aritmética (o cualquier otro sistema) probara, de forma automática, que cada enunciado verdadero podía ser determinado dentro del sistema. Russell y Hilbert pensaban que la idea de que dentro de todo sistema axiomático pudiesen existir enunciados verdaderos que no podían ser probados ni como verdaderos ni como falsos, era imposible.

Gödel, haciendo a un lado estos prejuicios, se pregunta:

> *¿Cómo podría uno realmente pensar en expresar las metamatemáticas en los sistemas matemáticos mismos, si se considera que estos últimos consisten en símbolos sin significado, que sólo adquieren un significado sustituto por medio de las matemáticas?* [507]

Poco después, Gödel fue capaz de llegar a la conclusión de usar un metalenguaje debido a que los sistemas matemáticos estaban establecidos en un sistema de creencias. Al igual que Pitágoras, Platón, y al igual que Kant, Gödel creía que las matemáticas trataban con eternas entidades paradójicas, es decir, que al utilizar ciertos símbolos o signos para designar los elementos

[506] La mente humana no tiene un referente o una experiencia previa por medio de la cual pueda construir el concepto de infinito, y, dado que la teoría sobre el infinito tiene un fundamento axiomático, el cuestionamiento sobre la existencia o no de éste es un planteamiento que queda abierto. A partir de los trabajos de Cantor se logra dar un rigor matemático al concepto de infinito. Cantor desarrolló la teoría de números transfinitos con la cual logró salvar la contradicción de la aniquilación de los números finitos por el infinito. Sin embargo, estos conceptos aún no quedan libres de cuestionamientos.

[507] Feferman, Solomon. Gödel, Kurt, *Conviction and Caution*, p. 107.

del sistema se rompen los límites entre abstracción y significado como número y forma.

El Método de Gödel

El cálculo proposicional constituye un ejemplo de un sistema matemático en que se alcanzan plenamente los objetivos de la teoría de la demostración de Hilbert. La publicación en 1931 del artículo de Kurt Gödel: *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines*, demostró que existían ciertas limitaciones en los esfuerzos que se desenvolvieran dentro de los estrictos límites del primitivo programa de Hilbert.[508]

Gödel no se contenta con trazar las posibilidades de las proposiciones indecidibles; él construye una proposición donde establece el carácter de indecidible.

Esta proposición es del mismo tipo que la antinomia del mentiroso,[509] pero su construcción utiliza el concepto de derivación y no el de verdad. Se basa en una proposición que afirma su propia inderivabilidad.

Sobre Decidibilidad (Completud) y Consistencia.[510]

En 1930 Gödel logró probar sus famosos teoremas sobre la incompletud de los sistemas formales que abarcan la aritmética recursiva primitiva, y sobre la imposibilidad de probar en ellos su propia consistencia.

[508] Careaga, Alfredo, Alejandro, El teorema de Gödel, en Hipercuadernos de divulgación científica, Mayo, 2002, México, p. 8.

[509] Dijo el cretense Epímenides allá por el siglo VI a.C: *Los cretenses, son mentirosos*. En la Biblia, Pablo de Tarso en su epístola *a Tito* (1,12), da a entender, que en realidad esto no es exactamente una paradoja, pues existe una posibilidad coherente, y es que Epiménides mintiese cuando dijo *Los cretenses, son mentirosos*. Para que sea una auténtica paradoja, hay que añadir como premisa que todas las demás afirmaciones de los cretenses son falsas.
Quine, Willard van O: *Desde un punto de vista lógico*. Orbis, Barcelona, 1984, Trad. Manuel Sacristán, p.192.

[510] Consistencia, en el sentido formal o hilbertiano es una propiedad puramente combinatoria de ciertos sistemas de signos y de sus reglas de juego. Gödel, Kurt, Obras completas, introducción y traducción de Jesús Mosterín, Alianza, Madrid, 1989, p. 92.

Si a los axiomas de Peano añadimos la lógica de *Principia Mathematica* (Con axioma de reductibilidad o sin teoría ramificada de tipos, y con los números naturales como individuos) con el axioma de elección, obtenemos un sistema formal *S*, para el cual valen los siguientes teoremas:

I. El sistema *S* no es completo; es decir, en él hay sentencias φ (que pueden efectivamente ser indicadas), tales que ni φ ni $\neg \varphi$ son demostrables, y, en especial, hay problemas indecidibles con la sencilla estructura Ñx Fx, donde x varía sobre los números naturales, y F es una propiedad (incluso decidible) de los números naturales (además en *S* hay fórmulas de primer orden para las cuales no es demostrable la validez universal ni la existencia de un contraejemplo).

II. Incluso si admitimos todos los medios lógicos de *Principia Mathematica* (por tanto, en especial el cálculo lógico de orden superior y el axioma de elección) en la metamatemática, no hay ninguna prueba de consistencia para el sistema *S* (y aún menos la hay si restringimos de alguna manera los medios de prueba). Por consiguiente, una prueba de consistencia del sistema *S* sólo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no estén formalizados en el sistema *S*, y algo análogo ocurre también con los otros sistemas formales, como el sistema axiomático de conjuntos Zermelo-Fraenkel (este resultado vale en especial también para el sistema axiomático de la matemática clásica, tal como ha sido construido, por ejemplo, por J. Von Neumann (1927).

III. El teorema I puede ser aún reforzado, en el sentido de que ni siquiera añadiendo un número finito de axiomas (o una infinidad que resulte de un número finito mediante *elevación de tipo*) al sistema *S* se obtiene un sistema completo, mientras el sistema ampliado siga siendo ω-consistente. Que un sistema formal sea ω-consistente significa aquí que no hay ninguna propiedad numérica F para que podamos deducir tanto F1, F2, …, Fn, …, *ad infinitum* como Ñx ¬Fx. (hay extensiones del sistema *S* que son consistentes, pero no ω-consistentes.)

IV. El teorema I sigue valiendo para todas las extensiones ω-consistentes del sistema *S* que resulten de añadirle una infinidad de axiomas, mientras la clase de axiomas añadidos sea decidible, es decir, mientras para cada fórmula sea metamatemáticamente decidible si es un axioma o no (y aquí suponemos que en la metamatemática disponemos otra vez de los medios lógicos de *Principia Mathematica*).

Los teoremas I, III, y IV pueden extenderse también a otros sistemas formales, como por ejemplo a la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, con tal de que tales sistemas sean ω-consistentes.

Sobre indecidibilidad

Se podría eludir este *teorema de indecidibilidad*, si todos los enunciados verdaderos fueran tomados como axiomas. Sin embargo, en ese caso, la decisión de si ciertos enunciados son verdaderos o no, se torna una problemática *a priori*. Gödel demostró que siempre los axiomas pueden ser caracterizados por un sistema de reglas mecánicas, y que resulta indiferente cuáles sean los enunciados tomados como axiomas. Si son verdaderos para los números naturales, algunos otros enunciados verdaderos acerca de los números naturales seguirán siendo indemostrables.

En particular, si los axiomas no se contradicen entre sí, entonces, ese hecho mismo, codificado en enunciado numérico, será "formalmente indecible" (esto es, ni demostrable ni refutable) a partir de dichos axiomas. Cualquier demostración de consistencia habrá de apelar a principios más fuertes que los propios axiomas. Este último resultado entristeció muchísimo a Hilbert, quien había contemplado un programa para fijar los fundamentos de las matemáticas por medio de un proceso "autoconstructivo", mediante el cual la consistencia de teorías matemáticas complejas pudiera deducirse de la consistencia de teorías más sencillas y evidentes. Gödel, por otra parte, no consideraba que sus teoremas de incompletud demostrasen la inadecuación del método axiomático, sino que hacían ver que la deducción de teoremas no puede mecanizarse.

La aritmetización:[511]

Considérese un formalismo LF: que es un cierto sistema de signos con sus reglas de formación y derivación.

Si se estudian las propiedades de LF, se debe recurrir a un metalenguaje. El metalenguaje comporta las expresiones que designan los signos de LF y las combinaciones de signos de LF que son dotados de sentido, los predicados que corresponden a los diversos tipos de series de signos de LF (componentes primitivos, proposiciones elementales, proposiciones, derivaciones), y las relaciones que experimentan las propiedades de LF.

Para constituir su metalenguaje, nos podemos servir de la lengua castellana, y añadir un cierto número de símbolos (por ejemplo los símbolos de LF entre comillas).

Pero es necesario formalizar si introducimos las relaciones de cierta complejidad, y si al mismo tiempo se analiza su relación de modo preciso, esto

[511] *Cfr.* Ladrière, *Les limitations internes des formalismes*, pp. 95-97.

hace que Gödel necesite una formalización e inventa el método de aritmetización.[512]

Gödel utiliza su método dentro de un formalismo particular, pero puede aplicarse sin importar de qué formalismo se trate.

La recursividad primitiva

Gödel introduce inmediatamente después de la aritmetización una serie de consideraciones intermedias que según dice, no tiene nada que ver, por el momento, con el sistema formal P. Se trata de consideraciones acerca de la recursividad y, concretamente, acerca de la recursividad primitiva.

La noción intuitiva de recursividad corresponde a la de un cálculo que se puede realizar paso a paso y llegar a un resultado. Se trata de una realización del principio de Kronecker de que toda definición matemática es una genuina definición si y sólo si alcanza su objetivo por medio de un número finito de pasos.

De esta manera una función recursiva es una función cuyos valores pueden ser calculados progresivamente a partir de valores ya conocidos.

El teorema y el corolario de Gödel

El artículo sobre el teorema de Gödel se divide en cuatro partes:

La primera parte constituye una presentación informal y resumida del teorema de incompletud y del camino seguido para llegar a él.

---

[512] En la aritmetización cada expresión en el cálculo es asociada con un número Gödel, que es una declaración metamatemática sobre la expresión y sus relaciones que pueden traducirse entre si como un lugar sobre el que corresponden los números de Gödel y sus relaciones aritméticas entre si. De esta manera la metamatemática se vuelve completamente aritmetizada.Nagel, Ernest, Newman, James, Gödel's Prof, New York University Press, New York, 1958, p. 77.

La segunda parte da una detallada descripción del sistema formal P, que va a servir de base a sus demostraciones, y que esencialmente consiste en la unión de la lógica de *Principia Mathematica* con los axiomas de Peano.[513]

La lógica de *Principia Mathematica* es una lógica de tipos, que distingue variables de tipo 1, las cuales se referirán a números naturales; las de tipo 2, a clases de números naturales; y así sucesivamente. Esta fijación, junto con el añadido de los axiomas de Peano, convierte a P en un sistema interpretado. Por tanto, siempre hay una interpretación natural de cada fórmula de P, conforme a la cual cada fórmula, si bien es una mera hilera o fila de signos, tiene un contenido, expresa una idea (verdadera o falsa) sobre los números naturales.

A continuación, Gödel introduce un procedimiento para codificar numéricamente la metateoría del sistema formal P. A una tal codificación se le llama desde entonces una gödelización, y el número asignado a una entidad sintáctica se le llama su número de Gödel.

Gödel asigna biunívocamente números naturales a cada signo primitivo de P, a cada hilera de signos de P, a cada fórmula de P, y a cada sucesión de

---

[513] Axiomas de Peano, para números naturales, básicamente se pueden construir a partir de 5 axiomas fundamentales:

1. 1 es un número natural *(es decir, el conjunto de los números naturales no es vacío)*
2. Si a es un número natural, entonces a +1 también es un número natural (llamado el sucesor de a).
3. 1 no es sucesor de ningún número natural *(el 1 es primer elemento del conjunto).*
4. Si hay dos números naturales a y b, tales que sus sucesores son diferentes, entonces a y b son números naturales diferentes.
5. Axioma de inducción: si un conjunto de números naturales contiene al 1 y a los sucesores de cada uno de sus elementos, entonces dicho conjunto contiene a todos los números naturales.

fórmulas de P, con lo cual cada entidad sintáctica queda representada por un cierto número natural.

Dada una hilera o una secuencia de hileras cualquiera, podemos computar efectivamente su número de Gödel. Y dado un número natural cualquiera, podemos decidir si es el número de Gödel de alguna hilera o de una secuencia de hileras de P, y, en caso afirmativo, podemos computar y escribir la correspondiente hilera o sucesión de hileras.

Esta representación numérica de las unidades sintácticas determina una serie de relaciones y funciones numéricas que corresponden exactamente a las relaciones y funciones metamatemáticas.

Así, la propiedad metamatemática de ser axioma, corresponde a la propiedad numérica de ser el número de Gödel de un axioma. A la relación metamatemática en que está una fórmula con otras dos, cuando es inferible de ellas mediante la regla de *modus ponens* (que permite inferir β de $\alpha \S \beta$ y α) corresponde la relación numérica en que está un número natural *n* con otros dos *m* y *p,* cuando *n* es el número de Gödel de una fórmula inferible por *modus ponens* de otras dos fórmulas cuyos números de Gödel son *m* y *p*.

Gödel introduce aquí una digresión para definir la clase de las funciones numéricas recursivas primitivas. Aunque funciones de este tipo habían sido usadas por otros autores[514], Gödel dio aquí su primera definición explícita (funciones obtenidas por composición y recursión a partir de ciertas funciones iniciales triviales), que se ha hecho clásica.

[514] En 1934, Gödel utiliza la idea de Herbrand de que una función f podría definirse por un conjunto de ecuaciones entre términos incluyendo la función f y símbolos para funciones previamente definidas. Gödel precisó la idea requiriendo que cada valor de f se obtenga de las ecuaciones por sustitución de las variables por números y los términos libres de variables por los valores que ya se habían probado que designaban. Esto define la clase de las funciones recursivas de Herbrand-Gödel.

En seguida, Gödel define 46 relaciones y funciones numéricas, 41 de las cuales corresponden a otras tantas nociones metamatemáticas.

El sistema formal P dispone de signos para el número 0 y para la función del siguiente; con ello dispone de signos compuestos (términos) para cada número natural.

1. La noción de ω- consistencia

Inmediatamente después de la demostración del teorema V, Gödel expone la noción de ω- consistencia y, en seguida, formula el teorema VI.

La noción de ω- consistencia tiene una clase *k* de formulas. El signo Flg *(k)* designará el conjunto de las consecuencias de k, es decir, el más pequeño conjunto de formulas que contienen todos los axiomas y todas las formulas de *k* y está cerrado con respecto a la relación de consecuencia inmediata. La clase *k* será, pues, una clase de formulas de P, mediante AG, que goce de las características dichas. A propósito de ésta clase *k*, Gödel expone su noción de ω- consistencia:

"*K* se dice ω- consistente si no existe un signo de clase a tal que

(n) [Sb ($a^{v}{}_{Z(n)}$) ε Flg(k)]& Neg(υ Gen **a) e** Flg(k)"

La ω - consistencia es una exigencia más fuerte que la mera consistencia a la que implica. Esencialmente prohíbe que afirmemos una cierta propiedad de cada número natural por separado, y al mismo tiempo neguemos que la tengan todos los números naturales. Evidentemente, todo conjunto ω-consistente de fórmulas es en especial consistente a secas, pero no todo conjunto consistente es ω - consistente.

2. La demostración del teorema VI

El teorema VI constituye el famoso teorema de incompletud de Gödel. Después de la noción de ω- consistencia, acerca de la cual dice Gödel que todo sistema ω-consistente es *a fortiori* consistente, pero no todo sistema consistente es también ω- consistente enuncia el teorema VI:

Para toda clase k de formulas ω- consistente y recursiva, existen signos de clase r recursivos, tales que ni v Gen r ni Neg(v Gen r) pertenecen a Flg(k) (en donde v es la variable libre de r).

Para demostrar el teorema, será necesario realizar los siguientes pasos:

A. Construir una formula que sea cerrada y que pertenezca a la clase k de formulas. Se tratará de una expresión de P mediante AG y no de P directamente. La razón de ser del requisito de que la formula sea cerrada es obvia. Acerca de una formula que tenga alguna variable libre no se podrá decir estrictamente que es idecidible. En efecto, una formula con una variable libre, es decir, un signo de clase, no es derivable ni él ni su negación, pero no debido a la incompletud del sistema, sino en razón de ser un signo de clase y no una formula.

B. Demostrar que esa formula es indecidible en la clase k y que por tanto, la coordinada de P es también indecidible.

Dice que en el sistema P (aunque lo completemos con cualquier clase recursiva primitiva y ω-consistente K de nuevos axiomas) hay siempre alguna sentencia tal que ni ella ni su negación es demostrable en el sistema.

En 1936, siguiendo los pasos de Gödel, pero construyendo una sentencia indecidible más complicada, Barkley Rosser logró reducir la exigencia de ω-consistencia a la mera consistencia.

Por tanto, hoy sabemos que todo sistema formal consistente y algo expresivo (es decir, en que las funciones recursivas primitivas[515] sean definibles) es incompleto.

Gödel concluye esta segunda parte haciendo varias importantes observaciones sobre su prueba del teorema de incompletud: que la prueba es constructiva (intuicionistamente aceptable); que la prueba sigue valiendo aunque añadamos el axioma de elección y la hipótesis del continuo al sistema formal considerado, y que el teorema de incompletud es válido para todos los sistemas formales algo expresivos conocidos, incluyendo la teoría axiomática de conjuntos y la aritmética de Peano.

En el proceso de construcción y de demostración de la indecidibilidad de su fórmula, Gödel no recurre, al menos explícitamente, ni al carácter circular de dicha fórmula ni a la exhibición de su verdad. La demostración se desarrolla de una manera puramente formal y, por eso mismo, es más concluyente que la esbozada en la sección preliminar de la memoria.

---

[515] Una definición recursiva (si es adecuadamente formulada) jamás conduce a una regresión infinita, ni a una paradoja. Y es así porque una definición recursiva nunca define una cosa en función de esa cosa sino, siempre, en función de las interpretaciones más simples de la misma. Hofstadter, Douglas R., *Gödel, Escher, Bach, un eterno y gracil bucle*., trad., Mario, A. Usabiaga. Alejandro, López, Rousseau, Tusquets y CONACYT, Barcelona, México, 1998, p. 141.

3. La contradicción entre los teoremas V y VI.

En primer lugar si la clase *k* de formulas es consistente las expresiones:

(3) $(x)\ R(x)\ \neg Bew_k\ [Sb\ (r^{19}{}_{(x)})\ ]$

(4) $(Ex)\ \overline{\ }\ R(x)\ \neg Bew_k\ [Neg\ Sb\ (r^{19}{}_{(x)})\ ]$

del teorema V de Gödel, no son meras implicaciones sino equivalencias metateóricas.

(x) y (Ex) no son cuantificadores sin embargo sus propiedades son análogas a las de los cuantificadores de universalización y de particularización respectivamente.

(x) es la conjunción de todos los miembros de la serie infinita f1, f2,…,fn,…

(Ex) Es la alternativa de cada uno de los miembros de la serie.

En segundo lugar, el signo de clase r que aparece en la demostración del teorema VI, es recursivo.

En conclusión, podemos decir que si no se admite la convención referida en orden a la aritmetización, convención que nace tanto de la necesidad de establecer una correspondencia biunívoca entre números naturales y las expresiones del sistema como de una correcta formalización de las proposiciones de la aritmética intuitiva, se puede demostrar la inconsistencia de la aritmética. En efecto, aparte de lo que a este respecto hemos indicado, es posible, mediante el procedimiento de Gödel, llegar de un modo más directo a esta conclusión. Si por el contrario, se admite esta convención, no sólo no se demuestra la incompletud de la aritmética sino que, siguiendo los métodos de nuestro apartado 30, se puede demostrar la completud de los sistemas formales que formalizan la aritmética. Esto por supuesto, exigirá la solución de los problemas planteados por los restantes problemas de incompletud, especialmente por el teorema de Kleene en su artículo *General Recursive Functions of Natural Numbers*.

La tercera parte expone resultados complementarios de indecibilidad, que refuerzan los ya obtenidos en la segunda.

Gödel introduce aquí la noción de *clase*, *relación* y *sentencia* aritmética.

Las *clases* y las *relaciones* aritméticas son las clases y las relaciones numéricas definibles mediante fórmulas de primer orden y usando sólo las nociones de *cero, siguiente, suma* y *producto*. Evidentemente, no todas las clases y relaciones numéricas son aritméticas. De hecho, la mayoría no lo son, pues hay una infinidad innumerable de *clases* y *relaciones* de números naturales, mientras que sólo hay una infinidad numerable de fórmulas.

Gödel formula y prueba el teorema VII:

> *Cada relación recursiva primitiva es aritmética.*

De ahí se sigue como un corolario el teorema VIII:

> *En cada sistema formal (*considerado) *hay sentencias aritméticas indecidibles.*

Después de probar que los sistemas formales considerados no sólo son incompletos sino que ni siquiera sirven para decidir cada cuestión aritmética elemental (expresable en una sentencia aritmética), pasa a mostrar que tampoco sirven para decidir la validez de una fórmula de la lógica pura (es decir, una fórmula sin constantes extralógicas y con sólo variables individuales y predicativas) de primer orden.

Gödel demuestra el teorema X:

> *Cada problema de la forma ¶x Bx (con B recursivo primitivo) es reducible al problema de determinar si una cierta fórmula de la lógica pura de primer orden puede satisfacerse o no.*

De aquí se sigue como corolario el Teorema IX:

> *En cada sistema formal (considerado) hay formulas indecidibles de la lógica pura de primer orden.*

En efecto, sólo las fórmulas válidas de la lógica pura son demostrables en el sistema formal; por tanto podría decidirse cuándo son válidas y, por tanto, cuándo pueden satisfacerse (a saber, cuando su negación no es válida).

Pero, por el teorema X, eso permitiría decidir cada cuestión de la forma *¶x Bx* (con B recursivo primitivo), y por tanto decidir en el sistema formal la sentencia en él indecidible, construida por Gödel (y que tenía esta forma), lo cual es imposible.

La cuarta y última parte está dedicada a esbozar la prueba de un descubrimiento sorprendente de Gödel, expuesta como teorema XI:

> *Si un sistema formal (de los considerados) es consistente, entonces es imposible probar formalmente su consistencia con sus propios medios; es decir, es imposible deducir en él la sentencia que dice que es consistente*.

En la prueba del teorema VI, en la sección segunda, Gödel había probado mediante razonamientos aritméticos elementales que si el sistema formal es consistente, entonces la sentencia –llamémosla φ- cuyo número de Gödel es (17 Gen r) no es demostrable, lo cual es verdad. Por tanto, Gödel había probado que si el sistema formal es consistente, entonces φ es verdad. Sea σ la fórmula que, en la interpretación natural, dice que el sistema formal es consistente (es decir, que una determinada fórmula, por ejemplo xîx, no es demostrable en él). Los razonamientos aritméticos elementales usados por Gödel pueden formalizarse en el sistema formal. Por tanto, en el sistema formal puede deducirse la fórmula σ § φ, que en la interpretación natural dice que si el sistema formal es consistente, entonces φ es verdad. Ahora bien, si se pudiera deducir la sentencia σ, entonces se podría también deducir (por regla de inferencia de *modus ponens*) la sentencia φ. Pero se había probado que si el sistema formal es consistente, entonces φ no es demostrable. Por tanto, si el sistema formal es consistente, tampoco será demostrable σ, es decir, no será demostrable la sentencia que, en la interpretación natural, dice que el sistema formal es consistente. Si el sistema formal es contradictorio podemos deducir cualquier cosa, tanto que es consistente como que no lo es. Pero si el sistema formal es consistente, entonces no podemos deducir (en él) que lo es.

4. El teorema XI

Toda la sección tercera de la memoria de Gödel está dedicada al establecimiento de una serie de teoremas cuya finalidad es redondear el resultado obtenido en la segunda sección.

El teorema XI, también llamado *corolario* de Gödel, se deduce de los resultados obtenidos en la sección segunda de la memoria y se refiere a la prueba de la consistencia del sistema formal P.

Se enuncia así:

> *Sea k una clase cualquiera de fórmulas recursiva y consistente; entonces la fórmula proposicional que afirma que k es consistente no es k-demostrable; en particular, es demostrable en P la consistencia de P, supuesto que P sea consistente (en caso contrario, como es natural, todo enunciado es demostrable).*

GÖDEL MOSTRÓ:[516]

A. Cómo construir una fórmula aritmética G que represente el enunciado metamatemático "La fórmula G no es demostrable".
Esta fórmula G dice, pues, por sí misma y de manera ostensible, que no es demostrable. Hasta cierto punto, la fórmula G se construye de manera análoga a la paradoja de Richard. En esta paradoja la expresión "richardiana" se asocia con cierto número *n* y se construye la frase "*n* es richardiano". En el argumento de Gödel la fórmula G también se asocia a cierto número *h* y se construye de tal modo que corresponda a la frase:

La fórmula a la cual se asocia el número ***h*** *no es demostrable*

B. Es demostrable G si, y sólo si, ¬G, su negación formal, es demostrable. Este paso en el argumento es, de nuevo, análogo a uno de los pasos de la paradoja de Richard, en el cual se prueba que *n* es richardiano si, y sólo si, *n*

[516] Nagel, Ernest. James, R., Newman, *La prueba de Gödel*, trad. Ramón, Xirau, UNAM, Centro de Estudios Filosóficos, Cuaderno 6, México, 1959.

no es richardiano. Sin embargo, si una fórmula y su propia negación son ambas formalmente demostrables, el cálculo aritmético no es consistente. Por lo tanto, si el cálculo es consistente, ni G ni $\neg$G pueden derivarse de los axiomas de la aritmética. Así, si la aritmética es consistente, G es una fórmula formalmente indecidible.

GÖDEL PROBÓ ENTONCES:

C. que, a pesar de que G no es demostrable formalmente, es, sin embargo, una fórmula aritmética verdadera. Es verdad en el sentido de que afirma que algún entero posee cierta propiedad aritmética que puede definirse exactamente y que es exhibida por cualquier entero que se examine.

D. Puesto que G es al mismo tiempo verdadera y formalmente indecible, los axiomas de la aritmética son incompletos. Es decir, no podemos deducir todas las verdades aritméticas a partir de los axiomas. Además, Gödel estableció que la aritmética es esencialmente incompleta: incluso si se supusieran axiomas adicionales, de modo que la fórmula verdadera G pudiera derivarse formalmente de la serie aumentada, podría construirse otra fórmula verdadera, pero, formalmente, indecidible.

E. Además Gödel describió cómo construir una fórmula A que representa el enunciado meta-matemático: “La aritmética es consistente”; y probó que la fórmula “A $\supset$ G” es demostrable. Finalmente demostró que la fórmula A no es demostrable. De esto se sigue que la consistencia de la aritmética no puede establecerse mediante un argumento que pueda representarse en el cálculo aritmético formal.

Las críticas al teorema Gödel

Siempre he pensado que imposible es el adjetivo que usan más los tontos, sin embargo, aún no encuentro nada refutable en el teorema de Gödel; sin embargo hay quienes piensan que si lo hay; es el caso de algunos autores que han querido refutarlo al ver en sus procedimientos algunas irregularidades, pero que profundizando, solo se trata de enfoques diferentes o esbozos de propuestas diferentes.

Es del dominio de la lógica el hecho de que existan sistemas formales incompletos, basta con eliminar uno de los axiomas del cálculo proposicional para obtener un sistema incompleto, pero otra cosa es asegurar lo que se infiere del teorema de Gödel, esto es, que no es posible construir un sistema que formalice la aritmética de los números naturales de modo completo, tal afirmación ha provocado algunos intentos de refutación.

1. La critica de Perelman

Como la crítica de Perelman que pretende demostrar que la proposición de Gödel no es más que una nueva paradoja, que ha de sumarse a las ya conocidas.[517]

2. La critica de Barzin

La crítica de Barzin, en 1940 aparece una crítica de Manuel Barzin al terorema de Gödel. Pretende demostrar el carácter circular de la proposición indecidible de Gödel, descansa en la introducción subrepticia de una contradicción. Su método consiste en construir, partiendo de una falsa equivalencia los enunciados fundamentales para la demostración de Gödel. Estos enunciados

[517] Perelman, Chaïm. *L'Antinomie de M. Gödel*, Bulletin de la classe des sciences de l' Academie Royale de Belgique, Vol. 22, 1936, pp. 730-736.

son por un lado la definición de Gödel y, por otro la aplicación del teorema V a ésta relación mediante su definiens.[518]

3. La crítica de Pérez Ballesteros

La crítica de Pérez Ballesteros, su tesis asegura que el teorema V y el teorema VI de la memoria de Gödel son incompatibles, así como su carácter circular o autoreferente de la proposición de Gödel. Estas argumentaciones no tienen fuerza lógica, ya que la autoreferencia no viola la teoría de los tipos y precisamente en virtud de esa circularidad a la que hace referencia es indecidible la fórmula de Gödel.[519]

4. La crítica de Wittgenstein

Wittgenstein en el *Tractatus logico-philosophicus,*[520] considera como errónea e inaceptable la solución logicista al problema de los fundamentos de las matemáticas; rechaza la teoría de clases por considerarla superflua; en cuanto a las proposiciones, considera que por ser tautológicas no dicen nada; así las cosas, la demostración pasa a ser sólo una ayuda mecánica y por lo tanto, innecesaria.

---

[518] *Sur la portée du theorème de M. Gödel*, en bulletín de la classe des sciences de la'Academie Royale de Belgique, 1940, vol. 26, pp. 230-239.

[519] *Undecidability and Reflexive Substitution*. En Akten des XIV Internationalen Kongresses für Philosophie, Herder, Wien, 1969, vol. III, pp. 49-56.

[520] Wittgenstein, Ludwig. *Tractatus logico-philosophicus*. trad. Luis M. Valdés Villanueva, Tecnos, Madrid, 2003, pp. 241-253.

6.031 En la matemática, la teoría de clases es completamente superflua.
6.1 Las proposiciones de la lógica son tautológicas.
6.11 Por tanto las proposiciones de la lógica no dicen nada.
6.1262 La demostración en lógica es sólo una ayuda mecánica para reconocer más fácilmente la tautología allí donde es complicada.
6.1265 Siempre se puede concebir la lógica de modo que toda proposición sea su propia demostración.

Wittgenstein en sus textos *Sobre la certeza; Observaciones Filosóficas,* y *Gramática Filosófica,*[521] la posición que defiende en éstas tres obras son particularmente difíciles de comprender y de caracterizar exactamente, ya que la crítica explícitamente desarrollada por el punto de vista de Wittgenstein, se defiende de toda intención y de toda pretensión revisionista.

La crítica de Wittgenstein está formulada contra la concepción platónica, paralelamente, Wittgenstein desarrolla una posición intuicionista, considerando ésta última como más seria y digna de interés.

Wittgenstein critica la significancia del teorema de incompletud de Gödel, argumentando graves defectos de claridad; sin embargo, en el fondo discrepa debido a los claros efectos del teorema y sus consecuencias filosóficas.

Hay una enorme diferencia entre cuestionar el significado del teorema, y oponerse a la coherencia del teorema de Gödel.[522]

Porque una de las desconcertantes consecuencias del teorema de Gödel es la influencia que pudo recibir de la metafísica; la sospecha de que el teorema de Gödel ha movido fuerzas que han hecho resurgir el platonismo, y

---

521 Wittgenstein, Ludwig. *Sobre la certeza*, trad. Joseph, Lluís, Prodes. Vicent, Raga, Gedisa, Barcelona, 1991, p. 66.
§501. En último término, ¿no me inclino cada vez más a decir que la lógica no puede ser descrita? Es preciso que tomes en consideración la práctica del lenguaje, entonces lo verás.
Wittgenstein, Ludwig. *Zettel*, trad. Octavio, Castro. Carlos, Ulises, Moulines, UNAM, México, 1985.
§130-135 No tiene sentido hacer paradojas solo debe entenderse si existe o no existe…es cuestión de aplicación, interpretación y el significado que posee.
§698. Traducir de un lenguaje a otro es una tarea matemática.
Wittgenstein Ludwig. *Gramática Filosófica*, trad. Luis Felipe Segura, UNAM, México, 1992, pp.723-725. En las discusiones relativas a la demostrabilidad de las proposiciones matemáticas se dice que hay proposiciones sustanciales cuya verdad o falsedad no es decidible. Quienes lo dicen ignoran que tales proposiciones, si es que queremos hacer uso de ellas y llamarlas proposiciones, son algo muy distinto de las otras cosas que llamamos proposiciones; porque una prueba modifica la gramática de una proposición… pero eso no significa que hayamos hecho un descubrimiento sino que hemos hecho una nueva estipulación o establecido un nuevo juego.

522 *Cfr*. Shanker, S.G., *Gödel's Theorem in Focus. Wittgenstein's Remarks on the significance of Gödel's theorem*, Croom Helm, London, 1988, pp. 155-242.

ésta es la principal razón de que Wittgenstein ataque el teorema de Gödel al vislumbrar una confusión conceptual en éstos trabajos.

En el debate filosófico sobre la significancia del teorema de Gödel, lo que está en disputa exactamente, son sus consecuencias epistemológicas y ontológicas.[523]

Las derivaciones Epistemológicas y Ontológicas del teorema.

Consecuencias del teorema de Gödel

El teorema de incompletud de Gödel muestra que los infinitos de orden superior tienen repercusiones sobre la teoría de los números. Su relación entre infinitos superiores y teoría de números está relacionada con un concepto de infinito como unidad. [524]

De tal forma que uno puede acercarse al infinito a través de metalenguajes finitos.

La verificación mecánica de las demostraciones es, no sólo una posibilidad teórica, sino también práctica; sin embargo, se requiere un dominio más seguro de la lógica cotidiana.

---

[523] El ideal de la ciencia y la tecnología es, por el contrario, la supresión de todo punto de vista, lo cual corresponde a los presupuestos de la ontología. Ladrière, Jean., *Les Enjeux de la Rationalité. Le défi de la science et de la technologie aux cultures.* Aubier-Montaigne /UNESCO, Paris, 1978, p. 198.

[524] Vid. Para otras aplicaciones en las máquinas y la influencia del teorema de Gödel, Lolli Gabriele, *La máquina y las demostraciones*, trad. Jesús Hernández, Alianza Universidad, Madrid, 1991.

Así, la teoría abstracta de las máquinas ha sido formulada por Turing, de acuerdo con las sugerencias de F. Post.[525] La idea de Turing consistió en describir el funcionamiento de una máquina capaz de calcular cierta serie numérica conforme a un programa dado.

La teoría de Turing, proporciona el esquema general de una máquina efectiva, capaz de resolver tal o cual categoría de problemas; y expone, de manera simbólica, el tipo de comportamiento de semejante máquina.

Alan Turing construyó, en 1936, un modelo formal de computadora, la Máquina de Turing, y demostró que había problemas de decisión que una máquina de éste tipo no podía resolver.[526]

Uno de los resultados más interesantes de Turing es el que concierne a la máquina universal. Según su teoría, toda máquina está caracterizada por su programa de operaciones.

Se concibe una máquina universal de la manera siguiente: supóngase que cada máquina esté caracterizada por cierto número entero, la teoría realiza tal correspondencia. La máquina universal será una máquina que, cuando se le proporciona como dato el número entero característico de cierta máquina, cumple el trabajo de la máquina en cuestión; es decir, calcula la serie numérica que calcula esa máquina.

En síntesis, la máquina así concebida no puede tomar decisiones; ahora se debe pensar, más bien, en una espiral de códigos, como ocurre en los genes. La lógica molecular se basa en tripletes auto-organizables y

---

525 Ladrière, Jean. *Filosofía de la cibernética*, ediciones del Atlántico, Buenos Aires, 1958, p. 37.

526 Wittgenstein, en *Remarques sur la philosophie de la psychologie* §1096, va más allá en su análisis, al considerar que hay cierta confusión en el lenguaje al pensar que la máquina puede calcular, ya que la máquina sólo repite procesos, y considera que aquí hay una dificultad filosófica: la posibilidad de definir que es un cálculo. Wagner Pierre, *Wittgenstein et les machines de Turing*, en RMM (Revue de Métaphysique et de Morale), Avril-Juin, 2005, pp.181-196.

autorreplicables, para ello requieren de un medio de registro o de codificación. En el centro del problema se encuentra el proceso de autoorganización de la materia viva.

A diferencia de las sucesiones finitas de Peano, son ahora los problemas planteados por los lenguajes y las situaciones naturales las que representan el desafío entre el hombre y la máquina. La formalización de los lenguajes naturales renueva el pensamiento de Frege y Wittgenstein.

Pero a todo esto ¿no es el teorema un vehículo epistemológico de dudas y descubrimientos?

La ontología por un lado descubre nuevas caras de la realidad es un proceso de expansión en donde la demostración va proponiendo nuevas maneras de ver el mundo.

La demostración lógica trata de atrapar esta expansión mediante metalenguajes y acotando espacios de interpretación, es decir busca su contracción.

De cualquier forma el pensamiento humano se comporta a la manera del universo, manifestándose en expansiones y contracciones.

CODA

Ésta coda, menciona los temas que sobre la demostración han quedado sin resolver a través del tiempo.

Una coda no es una conclusión, ya que prefiero pensar que el estudio de la demostración y su interrelación entre el axioma y la paradoja, abre la posibilidad a multitud de interrogantes antes que concluir respuestas definitivas.

El presente trabajo fundamenta la hipótesis de que el paradigma de la demostración se desarrolla mediante la reducción al absurdo, la paradoja o el método axiomático. Sin embargo, la idea de demostración no sólo obedece a una configuración lógica o histórica, es un proceso de conceptualización objetiva y subjetiva que respalda una diversidad efectiva de contenidos diferentes entre ideas científicas, filosóficas, ideológicas y teológicas. Para la demostración, la certidumbre científica es, las más de las veces, un deseo, una búsqueda de la explicación de la realidad, como una pretensión de éxtasis en la búsqueda, aunque sólo sea, por ingenuidad.

En la demostración el tiempo se revela como inaprensible en los acontecimientos, imprevisible ante la toma de decisiones y el febril intento demostrativo, que a la manera de los panales, trabajan parodiando a los enjambres, cuyo zumbido son sus argumentaciones, pero sin llegar jamás a producir esa miel que es la demostración definitiva, esa rara obsesión paradójica de pretender estar seguros de lo incierto.

Resulta entonces que demostrar va más allá de la evidencia visual, es un proceso de descubrimiento filosófico de argumentación y de formalización lógico-deductiva.

La noción de demostración griega es un proceso gradual que se alimenta de tres fuentes:

1. La filosofía, con un horizonte epistemológico y de argumentación de las relaciones entre sensación y conocimiento, y mediante métodos de prueba.

2. La dialéctica, que sin ser un método de demostración, apunta al ser y a la esencia de las cosas.

3. Las matemáticas, que en un principio estaban centradas en el análisis geométrico en los números, para luego investigar los nexos con la argumentación plausible y verosímil; sin embargo, nadie advierte que las proposiciones de la demostración descansan sobre ciertos supuestos o principios indemostrables.

Así, para los pensadores como Jenófanes el conocimiento humano es una adquisición paulatina, producto de una lenta y ardua investigación, es la hipótesis que parte de la observación de las cosas, y que nos muestra un claro sistema de deducción racional.

Otras cuestiones del conocimiento humano fueron desarrolladas por *los pitagóricos*, una, sobre el alma, otra sobre la ciencia pura; en ésta última se desarrolla por primera vez la reducción al absurdo.

La necesidad súbita de la demostración en la Grecia antigua que engloba toda esa libertad al espíritu, que busca las raíces del sentido de la naturaleza o del pensamiento de la humanidad, presenta aspectos bastante diferentes, según se aborde la demostración en el *logos* de un filósofo o de un sofista, o bien se trate de las ciencias racionales, matemáticas, experimentales, morales o humanas con arreglo a una verificación o una comprensión.

Pero es en la certidumbre matemática, rigurosa y privilegiada que se manifiestan diferentes tipos de demostración según sea: sintética, analítica o por reducción al absurdo.

En la demostración *sintética* la metamorfosis consiste en pasar de una verdad a otra, según sea la proposición a demostrar; comienza en lo conocido y se dirige a lo desconocido, esto supone evidentemente un cierto conocimiento de los resultados a obtener.

Este método conviene sobre todo a la enseñanza; es empleado principalmente dentro del orden teoremático.

Dentro de la demostración *analítica*, al contrario, va de lo desconocido a lo conocido; desde la proposición a establecer hasta la verdad necesaria; la primera establece la solidez de la otra. Es empleada sobre todo dentro del orden problemático y, de vez en cuando, dentro del orden teoremático.

La demostración por reducción al absurdo consiste en suponer verdadera la proposición contradictoria que va a demostrar y mostrar, que la suposición conduce a un absurdo o a una imposibilidad.

Se concluye, dentro de sus condiciones, la falsedad de la hipótesis, y se sigue que de dos proposiciones contradictorias, si una es falsa, la otra es necesariamente verdadera.

La demostración es un juego de alteridad en donde la diversidad biológica debido a sus múltiples respuestas rompe los esquemas aislados de verificación, experimentación y argumentación de la existencia; pero también, en su argumentación realiza un juego de palabras que enmudecen por la transparencia reiterativa de lo virtual, que no deja de ser copia de lo existente, negando en cada visión la originalidad de la existencia.

Razón, verdad y demostración se deben entre sí la densidad de su ser: inexistencia, vanidad, ilusión e ingenuidad, que alimenta lo paradójico.

Aristóteles busca por analogía para la demostración lo que la dialéctica ha sido y será por contradicción.

Así pues se puede distinguir entre:

Demostración deductiva: que procede desde lo general a lo particular. Realiza la inferencia que origina una conclusión desde enunciados considerados válidos, es decir, desde las premisas (como cuando se infiere desde la afirmación de una cualidad de un conjunto, la afirmación de esa cualidad en uno de los miembros del conjunto).

Demostración inductiva: desde lo particular a lo universal. En este modo de demostración, una afirmación general sobre un dominio de objetos, en general considerado como indefinido (que es lo que se denomina una afirmación universal en el lenguaje-objeto), es derivada de la validez de todos los enunciados singulares sobre ese dominio (es decir, desde una afirmación universal del meta-lenguaje). Este tipo de demostración se realiza según la llamada "regla de la inducción infinita".

Las teorías axiomáticas como es el caso de la Geometría euclidiana sólo admiten como procedimientos válidos las demostraciones *deductivas*: cada enunciado de esas teorías es demostrado mediante una inferencia lógica, ya sea desde los axiomas iniciales o ya sea desde otros previamente demostrados así.

El quinto postulado euclídeo que versa sobre la Teoría de las Paralelas ha permanecido incompleto y, desde un principio, bajo sospecha por el mismo Euclides quien lo ignora constantemente en su obra. Después de dos mil años, los conceptos involucrados no han podido ser demostrados e incluso han generado la geometría no euclidiana.

Por otro lado, para Hilbert, no tiene sentido buscar un carácter de verdad en los axiomas; lo fundamental es que el conjunto de axiomas sea consistente, es decir, que los axiomas no se contradigan entre sí.

La demostración falseada, no lo es por haber perdido su objeto propio o la frescura de su experiencia, sino por haber sido desposeída de un lenguaje natural, lo que generó un vacío conceptual que la enmudeció como filosofía, y que sólo puede recuperar el habla, y recuperarse en ella, en los bordes de sus límites: dentro de un metalenguaje; el metalenguaje es un lenguaje dentro de un lenguaje que se ha desprendido de sí mismo y ahora gravita en un espacio cada vez más silencioso.

El razonamiento que conduce a la paradoja puede constituir mecanismos de prueba correctos con la condición de eliminar las ambigüedades que son el origen de la contradicción.

La contradicción es el resultado de una formulación incorrecta de ciertos enunciados.

La principal originalidad del método de Gödel consiste precisamente en derivar de la proposición paradójica de Richard pero sin caer en una contradicción.

El método axiomático representa el ideal griego de conocimiento científico, pero la axiomática antigua es una axiomática de contenido, utiliza los conceptos fundamentales y los sentidos, y da una noción intuitiva afirmando sus proposiciones consideradas como evidentes a propósito de sus conceptos.

La axiomática moderna es una axiomática pura; sus conceptos son definidos únicamente por las relaciones que son afirmadas entre ellas.

La certidumbre experimental y la inducción experimental es la relación formulada por la proposición inducida que se aplica a todos los términos de una clase en número finito o indefinido.

La tecnología encontró nuevas dificultades como objeto del nuevo conocimiento:

En las ciencias humanas, el fenómeno no sólo es objetivo, sino también subjetivo.

La demostración en ciencias humanas es diferente a la de la ciencia matemática; no se trata tampoco de verificar y apelar; se trata de un esfuerzo por comprender la realidad, a través de su manifestación abstracta, concreta, viva, pero, sobre todo, específicamente humana.

El conjunto de todos los conjuntos de todos los números ordinales conduce a su contradicción. La aparición de las paradojas es grave, no sólo complica la noción particular (como la noción de conjunto) sino el concepto de razonamiento correcto.

Gödel llego a la conclusión de que demostrar es un concepto más débil que la verdad, independientemente del sistema axiomático de que se trate.

¿Qué ocurrirá con las propuestas de Gödel? Hasta ahora se han visto que en algunas cuestiones no es aplicable; sin embargo, queda mucho por desarrollar, así que, en todas partes, los objetos, los seres humanos, los muertos y sus fantasmas, desbordan la posibilidad de existir, aunque los alcance la fatalidad de sus limitaciones, o el encanto de su pensamiento circular o de retorno.

La primera demostración estaba empapada de geometría, y la última está absorta en las inmensidades de *gogol* infinito y de lo eterno, pero la filosofía las acompaña bajo un escrutinio que se asemeja a los primeros cazadores de verdad, argumentando contra las visiones fantasmagóricas y la falsedad.

La demostración lógicamente racional ya no será sólo la que argumenta bien, ni quien habla y comprende bien, ni aquella que domina el álgebra del pensamiento, sino aquella que procesa bien la información, dado su contexto, la que abre un dominio de la demostración por medio de la inferencia contextual no deductiva.

La demostración como reivindicación de las cosas reales suena a paradoja de los imaginarios, ya que son lenguaje humano que se crispa en la duda del límite, de la subjetividad y de la objetividad.

Conclusiones

El objetivo general de esta tesis es un análisis crítico de la ontología de la demostración desde los griegos y hasta la concepción de demostración en la lógica clásica del siglo XX. Una de sus contribuciones es la de crear un puente entre las caracterizaciones formales de la noción de demostración y la apreciación humana de los fenómenos demostrativos.

En el capítulo I se muestra cómo la filosofía, la dialéctica y las matemáticas se fusionan para dar origen a la demostración, provocando una tensión entre sensación y pensamiento que se resuelve confrontando la *arjé* y la diversidad.

En el capítulo II, se argumenta cómo la diversidad lleva a Protágoras, en un principio a un relativismo de la demostración, para luego madurar y desechar verdad y realidad a favor del ser humano, es decir una noción de demostración y utilidad que transporta la idea de demostración al descubrimiento y a la exploración; de esta manera prepara el camino a Platón y Aristóteles al debilitar el principio de reducción al absurdo, ya que sostiene que *si* y *no*, son igualmente válidos, y, por lo tanto, la demostración no depende de su capacidad proposicional.

En el capítulo III, Aristóteles parte de la *arjé* como estructura organizada para la demostración; no acepta la reducción al absurdo ya que para él sólo es la negación de lo que se pretende demostrar a partir de una proposición falsa, en la ciencia actual, la reducción al absurdo es tan sólo la hipótesis nula y no la demostración.

Las condiciones para desarrollar la demostración son realidad, orden de inteligibilidad, autonomía y homogeneidad, y finitud.

Aristóteles propone una demostración que implica una organización deductiva y lógica, y prepara el camino a Euclides, para quien la demostración procede de nociones comunes, postulados y definiciones.

El capítulo IV refiere como la noción de demostración en matemáticas es influida por la noción de la filosofía eleática al reconocer la evidencia directa.

Las *arjái* euclídeas son supuestos indemostrables que constituyen principios de organización deductiva y exposición metódica de la ciencia, por lo tanto su disposición deductiva se ofrece como demostración en la ciencia, por su carácter riguroso e incontrovertible.

En el capítulo V, se hace un puente de 23 siglos, debido a que las aportaciones sobre la demostración más significativas son las de Kant, quien transporta la idea de naturaleza del objeto para encontrarla en el sujeto cognoscente, cuestión ya abordada por Protágoras; el debate continua del siglo III a.C. al siglo XX d.C., pero son mezclas de las ideas ya expuestas. El puente lo constituye la contribución estoica de la demostración que considera a la misma como una argumentación o *logos* lógicamente concluyente, con ese toque de redundancia argumentativa que entrelazada con los procesos recursivos que propone Gödel sobre los sistemas formales de que si son consistentes son incompletos esto en la demostración de Gödel terminan por validar su propia indemostrabilidad.

El teorema de Gödel dice que "*Existen afirmaciones cuya verdad o falsedad no vamos a poder demostrar*". Gödel no se interesa en saber si una aseveración es falsa o verdadera. Lo que afirma es que en cualquier sistema lógico basado en axiomas, existen aseveraciones cuya verdad o falsedad no se pueden decidir. A partir de Gödel aparece una diferencia muy sutil entre verdad, falsedad y demostración. Dicho de otra manera, Gödel nos hace ver que la verdad es una categoría más poderosa que la demostración. Aclaremos esto. Lo que Gödel demuestra es que en todo sistema axiomático formal existen aseveraciones cuya verdad o falsedad es imposible de decidir desde dentro del sistema. Si nos salimos del sistema, entonces podremos saber si son verdaderas o falsas, pero dentro del sistema no. Este resultado se conoce como *el teorema de indecidibilidad* de Gödel.

En la actualidad el teorema de Gödel se extiende a la lógica, la física y la biología; por lo que se sale de su estricta aplicación a la aritmética.

En la coda se plantean los caminos de la demostración que han quedado abiertos durante siglos y que están pendientes de resolver debido a las tensiones conceptuales generadas entre la ontología y la ciencia contemporánea que se ha matematizado en exceso.

Finalmente, el paradigma contemporáneo de la demostración, es predominantemente *a posteriori*, así la demostración es un medio por el cual, el ser humano ha intentado comprenderse así mismo y comprender el mundo en su totalidad.

BIBLIOGRAFÍA

Anton, John, Peter, ***Aristotle's theory of contrariety*****,** Routledge, London, 2000.

Aristóteles, ***Meteorológicos***, trad. Miguel Candel, Gredos, Madrid, 1996.

Aristóteles, ***Acerca del Alma*****,** trad. Tomás Calvo Martínez, Gredos, Madrid, 1999.

Aristóteles, ***Acerca del cielo***, trad. Miguel Candel, Gredos, Madrid, 1996.

Aristóteles, ***Organon I y II,*** trad. Miguel Candel, Sanmartín, Gredos, Madrid, 2000.

Aristóteles*,* ***Etica Nicomáquea****,* trad. Julio Palli Bonet*,* Gredos, Madrid, 1988.

Aristóteles*,* ***Física***, trad. Guillermo R. De Echaundía, Gredos, Madrid, 1988.

Aristote*,* ***De la Génération et de la Corruption****,* trad. Charles Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1966.

Aristóteles, ***Metafísica****,* Edición trilingüe por Valentín García Yebra, Gredos, Madrid, 1998.

Aristotle, ***On sophistical,*** *refutations on coming-to-be and passing-away*, translated E. S. Forster, Harvard University, Cambridge, Mass, 1955.

Aristotle, ***The works of Aristotle***, translated W. D. Ross. 2 ed. Chicago, Ill.: Encyclopedia Britannica, 1993.

Argüelles, Rodríguez, Juan, **Historia de la Matemática**, Akal, Madrid, 1989.

Barnes, J., Schofield, M., Sorabji, R., ***Aristotle's Definitions of psyche***, Duckworth, 1988.

Barnes, J., Schofield, M., Sorabji, R., ***Aristotle's theory of demonstration***, Articles on Aristotle, Volume 1: Science, London: Duckworth, 1975.

Bell, Temple, Eric, ***Men of Mathematics***, Simon & Schuster, New York, 1986.

Benacerraf, Paul and Hilary, Putnam, ***Philosophy of Mathematics***, Selected Readings, Cambridge, Cambridge University Press, 1983.

Bernabé, Alberto, trad. ***De Tales a Demócrito, fragmentos presocráticos***, Alianza, Madrid, 2001.

Bernays, Paul, **On Platonism in Mathematics**, reprinted in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.) Philosophy of Mathematics, Selected Readings, Cambridge, Cambridge University Press, 1983.

Bernays, Paul, **Abhandludgen zur Philosophie der Mhatematik**, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, trad. al inglés de Wilfried Sieg, 1976.

Bloch, Raymond, ***Recherches sur les religions de l'antiquité classique***, Par... et ses amis, collègues et élèves Françoise Bader, *et al*, Droz, Genève, 1980.

Brunschvicg, Léon, ***Le rôle du pythagorisme dans l' évolution des idées***, Hermann, Paris, 1937.

Carchia, G., ***Retórica de lo*** **sublime**, trad. Mar García Lozano, Tecnos, Madrid, 1994.

Casal, Muñoz, Julio, ***Heráclito y el pensamiento metafísico***, Atlántida, Montevideo, 1958.

Cassin, Barbara, (Textos reunidos), ***Nuestros Griegos y sus Modernos*** *(Estrategias contemporáneas de la apropiación de la antigüedad),* Manantial, B.A., 1994.

Cohen, Morris, Nagel, Ernest**, Introducción a la lógica y el método científico I y II**, trad. Néstor, A. Míguez, Amorrortu, editores, Buenos Aires, 2000.

Dawson, Kleene, Solomon, Resnik, Detlefsen and Shaker, ***Gödel's Theorem in Focus***, Edited by Stuart G. Shaker, New York, 1988.

Diels, H., Kranz, H., ***Die Fragmente der Vorsokratiker***, Berlin, Weidmann, 3 vol., (11ª ed.), 1964.

Diógenes, Laertius, ***Lives of eminent philosophers***, trad. R. D. Hicks, Harvard University, Cambridge, 1991.

Dupréel, Eugéne***, Les sophistes***, Neuchatel, Bruxelles, 1980.

Eggers, Lan, Conrado. Victoria, E. Juliá, ***Los filósofos presocráticos****,* Tomos I, II y III, Gredos, Madrid, 1994.

Euclides, ***Gli elementi d'Euclide e la crítica antica e moderna***, editi da Federigo Enriques col concorso di diversi collaboratori, N. Zanichelli, Bologna, 1932-

Euclides, ***Euclid's Elements and The Works of Archimedes,*** *including the method*, translated Thomas L. Heath, The introduction to arithmetic of Nicomachus, translated Martin L. D'Ooge*, Geometría, Obras anteriores a 1800.*

Euclides, ***The Thirteen Books of Euclid's Elements***, The works of Archimedes including the Method, On conic sections by Apollonius of Perga. Introduction to arithmetic by Nicomachus of Gerasa, Chicago, Ill.: Encyclopaedia Britannica, 1952.

Euclides, ***Elementos,*** libros I-IV, trad. María Luisa Puertas Castaño, Gredos, Madrid, 2000.

Euclides, ***Elementos,*** libros X-XIII, trad. María Luisa Puertas Castaño, Gredos, Madrid, 1996.

Euclides, **Elementos,** libros X-XIII, trad. María Luisa Puertas Castaño, Gredos, Madrid 1996.

Festugière, A.J., ***Études de Philosophie Grecque***, J. Vrin, Paris, 1971.

Friedrichs, Kurt, Otto, ***From Pythagoras to Einstein***, New York, Random House, L.W. Singer, 1965.

Gadamer, Hans, Georg, ***El inicio de la filosofía occidental***, traducción de Ramón Alfonso Díez y María del Carmen Blanco, Paidós, Barcelona 1995.

Gallop David, **Parménides of Elea**, **Fragments**, University of Toronto Press, Toronto Buffalo London, 1991.

G.E.R., Lloyd***, Magic, Reason and Experience***, Studies un the origins and development of Greek Science, C.U.P., Reprint, 1993.

Giorgio, Colli, ***La sabiduría Griega***, Trotta, Milano, 1995.

Gödel, Kurt, ***Collected Works***, volume I, Publications 1929-1936, Edited by S. Feferman, John W. Dawson, Jr., Stephen C. Kleene, G. Moore, R. Solovay, and Jean van Heijenoort, Oxford University Press, 1986.

Gödel, Kurt, ***Obras completas***, trad. Jesús Mosterín, Alianza, Madrid, 1989.

Gomperz, Heinrich, ***Sophistik and Rhetorik***, Leipzig/Berlin, 1912. Österreich-Bibliothek, Auslands-Austriaca, 1985.

Grote, George, **Histoire de la Grèce depuis les temps les plus reculés jusqu'a la fin de la génération contemporaine d'Alexandre le Grand,** Librairie Internationale, Paris, 1864-1867.

Guthrie, W.K.C., ***The Sophists***, Cambridge University Press, 1971.

Heller, Agnes*, **Aristóteles y el mundo antiguo**,* Península, Barcelona, 1983.

Heráclito de Efeso, ***Epístolas pseudo-heracliteas***, trad. Angel J. Cappelletti, Facultad de Filosofía y Letras Universidad Nacional del Litoral, Rosario, Argentina, 1960.

Hilbert, David. Ackermann, W., ***Elementos de lógica teórica***, trad. Víctor, Sánchez, de Zavala, Tecnos, Madrid, 1975.

Hoffmann, Geneviève, ***La jeune fille, le pouvoir et la mort dans l'Athènes classique***. (*De l'archéologie à l'histoire)*, De Boccard, Paris, 1992.

Hofstadter, Douglas R., ***Gödel, Escher, Bach : un eterno y grácil bucle***, trad. Mario A. Usabiaga y Alejandro López Rousseau. 6a. ed., Tusquets, CONACYT, Barcelona, México, 1998.

Isócrates, **Discursos**, trad. J. M. Guzmán, Hermida, Madrid, Gredos, 1979.

Inwood, Brad, ***The Poem of Empédocles***, University of Toronto Press, 1992.

Jaeger, Werner, ***Semblanza de Aristóteles***. Fondo de Cultura Económica, México, 1997.

Jacqueline, de Romilly, ***Les grands sophistes dans l' Athènes de Périclès***, Fallois, Paris, 1987.

Jonathan, Lear, ***Aristóteles***, trad. Pilar Castrillo Criado, Alianza Universidad, Madrid, 1988.

Kerferd, George, B., ***The First Greek Sophists***, Classical Review, 64, 1950.

Kerferd, George, B., ***The Sophistic Movement***, Cambridge: Cambridge UP, 1981.

Kirk, C.S., Raven, J.E. y Schofield, M., ***Los filósofos presocráticos,*** trad. Jesús García Fernández, Gredos, Madrid, 1987.

Kleiner, Israel. Nitsa Movshovitz-Hadar, **The Role of Paradoxes in the Evolution of Mathematics**, The American Mathematical Monthly, 101, December 1994.

Körner, Stephan, ***La matemática gödeliana y sus implicaciones filosóficas***, trad. de Eli de Gortari UNAM, México, 1972.

Ladrière, Jean, ***Filosofía de la cibernética***, Ediciones del Atlántico, Buenos Aires, 1958.

Ladrière, Jean, ***Les limitations internes des formalismes***, Louvain, E. Nauwelaert, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

Ladrière, Jean, ***Les Enjeux de la Rationalité.*** *Le défi de la science et de la technologie aux cultures,* Aubier-Montaigne / UNESCO, Paris, 1978.

Le Blond, J.M., ***Logique et méthode chez Aristote,*** Vrin, Paris, 1973.

Léon, Robin, ***La pensée grecque, et les origines de l'esprit Scientifique***, La Renaissance du livre, Paris, 1923.

Lesher, J.H., trad. ***Xenophanes of Colophon***, fragments, The Phoenix Pre-Socratics series, 2000.

Liddell, H. D., Scott, R., Jones, H.S., ***A Greek-English Lexicon***, (9ª ed.) Oxford, Claredon Press, 1940.

Lolli, Gabriele, **La máquina y las demostraciones**, trad. Jesús Hernández, Alianza Universidad, Madrid, 1991.

Lucienne, Félix, ***The Modern Aspect of Mathematics***, New York, Basic Books, 1960.

Lukasiewicz, J***., Contribución a la historia de la lógica de proposiciones***, trad. L. Vega, Madrid 1981.

Mace, Federico, ***La sábiduria pitagórica,*** Eduardo Alfonso, Orión, México 1955.

Marcel, Detienne, ***The Masters of Truth in Archaic Greece****,* Zone Books, New York 1999.

Marcovich, M., trad. ***Heráclitus***, Editio minor, Talleres Gráficos Universitarios, Mérida, Venezuela, 1968.

Mondolfo, Rodolfo, ***Heráclito***: textos y problemas de su interpretación, Prólogo de Risieri Frondizi, trad. Oberdan Caletti. Siglo Veintiuno, México, 1966.

Morris, Kline, **Geometría**, Matemática en el mundo moderno (Scientific American), septiembre, 1964.

Mugnier, René, ***Le problème de la vérite***, Presses Universitaires de France, Paris, 1959.

Nagel, Ernest. James, R., Newman, ***La prueba de Gödel***, trad. de Ramón Xirau, UNAM, México, 1959.

Nagel, Ernest. James, R., Newman, ***Gödel's Proof***, New York, University Press, 1958.

Newman, James, ***El mundo de las matemáticas***, Grijalbo, México, 1985.

Padilla, Longoria, María Teresa, ***Philosophy as Dialogue***: *Plato and the history of dialectic*, tesis doctoral, University of Durham, 2000.

Parménides Eleatas, ***El poema de Parménides***: *atentado de hermenéutica histórico vital,* trad. Juan David García Baca, Centro de Estudios Filosóficos, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, México, 1942.

Perelman, Chaïm, **L'Antinomie de M. Gödel**, Bulletin de la classe des sciences de l' Academie Royale de Belgique, Vol. 22, Brouxelles,1936.

Pérez, Herranz, Fernando Miguel, *Árthra Hê Péphyiken,* ***Las articulaciones naturales de la filosofía***, Universidad Alicante, Artes Gráficas Soler, Valencia, 1998.

Philip, J., Davis. Reuben, Hersh, ***The Mathematical Experience***, Boston, Houghton Mifflin, 1981.

Platón, Diálogos. Vol. I: ***Apología-Critón-Eutifrón-Ion-Lisis-Cármides- Hipias Menor-Hipias Mayor-Laques-Protágoras***, trad. Emilio Lledó Iñigo, García Gual, J. Colonge Ruiz, Gredos, Madrid, 1998.

Platón, Diálogos. Vol. II: ***Gorgias-Menéxeno-Eutidemo-Menón-Crátilo***, Calonge, E. Acosta Méndez, F.J. Olivieri, J.L. Calvo, Gredos, Madrid, 1998.

Platón, Diálogos. Vol. III: ***Fedón-Banquete-Fedro***, G. García Gual, Martínez Hernández Iñigo, Gredos, Madrid, 1998.

Platón, Diálogos. Vol. IV: ***República***, trad. Conrado Eggers Lan, Gredos, Madrid, 2000.

Platón, Diálogos. Vol. V: ***Parménides-Teeteto-Sofista***, Ma. Isabel Santacruz, Alvaro Vallejo Campos, Néstor Luis Cordero, Gredos, Madrid, 2000.

Platón, Diálogos. Vol. VI:***Filebo-Timeo-Critias***, Ma. Angeles Duran, Francisco Lisi, Gredos, Madrid, 2000.

Platón, Diálogos. Vol. VII: ***Dudosos-Apócrifos-Cartas***, Juan Zaragoza y Pilar Gómez Cardo Gredos, Madrid, 2000.

Platón, Diálogos. Vol. VIII***: Leyes*** (Libros I-VI) Gredos, Madrid, 2000.

Platón, Diálogos. Vol. IX***: Leyes*** (Libros VII-XII) Gredos, Madrid, 2000.

Popper, Karl, Raimund, ***The Open Society and Its Enemies***, vol.1: Plato, Routledge and kegan Paul, London, 1966.

Popper, Karl, Raimund, ***El mundo de Parménides****, (Ensayos sobre la ilustración presocrática)*, Paidós, Barcelona, 1999.

Prier, Raymond, Adolph, ***Archaic Logic: symbol and structure in Heraclitus, Parmenides, and Empedocles***, The Hague, Mouton, 1976.

Quine, Willard van O., **Desde un punto de vista lógico**, trad. Manuel Sacristán Orbis, Barcelona, 1984.

Ramsey, Plumpton, Frank, **Foundations of Mathematics and Other Logical Essays**, R. B. Braithwaite, Routledge and Kegan Paul, New York, 1950.

Raymond, M., Smullyan, ***Gödel's Incompleteness Theorems,*** Oxford University Press, New York, 1992.

Reale, Giovanni, ***Platón, en búsqueda de la sabiduría secreta***, trad. Roberto Heraldo Bernet, Herder, Barcelona, 2001.

Richard, Jules, ***Sur un paradoxe de la théorie des ensembles et sur un axiome de Zermelo***, en L'Enseignement Mathématique, Vol. 9, 1907.

Robertson, Robin, ***Arquetipos junguianos,*** **una historia de los arquetipos**, trad. Monserrat Ribas Casellas, Paidós, Barcelona, 1998.

Robinson, Thomas, M., (trad.), **Heraclitus Fragments**, the Phoenix Pre-Socratics series, 2000.

Russell, Bertrand, ***My Philosophical Development***, New York, Routledge, 1999.

Samaranch, Kirner, Francisco, ***El saber del deseo,*** **releer a Aristóteles,** Trotta, Madrid, 1999.

Sanz, Romanillos, Antonio, José Ortiz. Sanz, José M. Riaño(trad.), ***Biógrafos Griegos***, Aguilar, Madrid, 1973.

Schiappa, Edward, **Protágoras and Logos**, A study in Greek Philosophy and Rhetoric, University of South Carolina Press, Carolina, 1991.

Serres, Michel, **Les origines de la géométrie**, Flammarion, France, 1993.

Sexto, Empírico, **Esbozos pirrónicos**, trad. Antonio Gallego Cao y Teresa Muñoz Diego, Gredos, Madrid, 1993.

Shapiro, Stewart, **Intensional Mathematics**, studies in Logic and The foundations of Mathematics, vol. 113, Nort-Holland, 1985.

Shapiro, Stewart, **Thinking About Mathematics**. The philosophy of mathematics, Oxford University, Press, 2000.

Shapiro, Stewart, **Philosophy of Mathematics**. Structure and Ontology, Oxford University Press, 1997.

Shenitzer, A. And Steprans, J., **The Evolution of Integration**, The American Mathematical Monthly, 101, January 1994.

Sofistas testimonios y fragmentos, trad. Antonio Melero Bellido, Gredos, Madrid, 1996.

Solomon, Feferman, ***Kurt Gödel: Conviction* and Caution**, Philosophia Naturalis, vol. 21, pp. 546-562, 1984.

Somville, Pierre, **Parménide de Élée. Son temps et le nôtre**, Paris, Vrin, 1976.

Stevenson, Angus, Elliot Julia, and Jones Richard (editors), **The Colour Oxford** English Dictionary Second Edition, 2002.

Tarski, Alfred, **Logic, semantics, metamathematics, papers** 1923 to 1938, translated by J.H. Woodger, Oxford, At the Claredon Press, 1990.

Turku, ***International Conference on Theorem Proving in Higher Order Logics***, Finland, 1996.

Untersteiner, Mario, ***Sofisti. Testimonianze e frammenti***, introduzione traduzione e commento a cura di Mario Untersteiner, fasc. 1, Biblioteca di studi superiori, Filosofia antica, Firenze: La nuova Italia, 1967.

Van Heijenoort, Jean, ***From Frege to Gödel****: a source book in mathematical logic*, 1879-1931, Harvard University, Cambridge, Mass, 1977.

Vega, Reñón, Luis, ***La trama de la demostración*** *: los griegos y la razón tejedora de pruebas*, Alianza, Madrid, 1990.

Vian, Herrero, Ana, ***Diálogo de las transformaciones de Pitágoras***, Sirmio, Barcelona, 1994.

Vlastos, Gregory, Edward Hussey, Burnet John. ***Los Sofistas y Sócrates***, Selección y nota preliminar Alberto Vargas, División de Ciencias Sociales y Humanidades, UAM, México, 1991.

Wagner, Pierre, **Wittgenstein et les machines de Turing**, en Revue de Métaphysique et de Morale, Avril Juin, 2005.

Whitehead, Alfred, North, Russell Bertrand, ***Principia Mathematica***, Cambridge University Press,1967.

Wittgenstein, Ludwig, **Gramática Filosófica**, trad. Luis Felipe Segura, UNAM, México, 1992.

Wittgenstein, Ludwig, **Sobre la certeza**, trad. Josep Lluís Prodes y Vicent Raga, Gedisa, Barcelona, 1991.

Wittgenstein Ludwig, **Tractatus logico-philosophicus**, trad. Luis M. Valdés Villanueva, Tecnos, Madrid, 2003.

Wittgenstein, Ludwig, **Zettel**, trad. Octavio Castro y Carlos Ulises Moulines, UNAM, México, 1985.

Wright, M.R., **Empedocles the extant fragments**, edited, introduction, commentary, concordance an new bibliography by Wright, Bristol Classical Press, London, 1995.

Wang, Hao**, Reflexiones sobre Kurt Gödel ,** Madrid, Alianza, 1991.

Yandell, Benjamín, H. ***The Honors Class: Hilbert's problems and their solvers***, A K Peters Ltd., 2002.

Yepes, Stork, Ricardo, ***Doctrina del acto en Aristóteles***, EUNSA, Pamplona, 1993.

Yves, Basttistini, ***Trois présocratiques***, Tel, Gallimard, France, 1988.