UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

MULTIPLICIDAD DE SOLUCIONES SIMÉTRICAS DE PROBLEMAS ELÍPTICOS CON EXPONENTE CRÍTICO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

ALFREDO CANO RODRÍGUEZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MÓNICA CLAPP

MÉXICO, D.F. MAYO, 2006

Índice general

Capítulo 2

El problema variacional

2.1. Formulación variacional del problema

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x)\,|u|^{2^*-2}\,u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto suave y acotado, $N \geq 3$, $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev y $a, f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ son funciones continuas que satisfacen las siguientes condiciones:

(a_1) $\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} a(x) > -\lambda_1$, donde λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$.

(f_1) $f(x) > 0$ para toda x en $\overline{\Omega}$.

Consideremos el funcional $E_{a,f} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$E_{a,f}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + a(x)u^2\right) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega f(x)\,|u|^{2^*}$$

El teorema de encaje de Sobolev [4, 15] garantiza que esta función está bien definida y es continua en $H_0^1(\Omega)$. Más aún, $E_{a,f}$ es de clase C^2 y su derivada en cada punto $u \in H_0^1(\Omega)$ está dada por

$$E'_{a,f}(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega a(x)uv - \int_\Omega f(x)\,|u|^{2^*-2}\,uv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.2}$$

Una solución débil de (2.1) es, por definición, un punto crítico de $E_{a,f}$, es decir, una función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $E'_{a,f}(u) = 0$. Usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_a \ &: = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega a(x)uv, \qquad \|u\|_a := \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + a(x)u^2 \right) \right)^{1/2}, \\ |u|_{f,2^*} \ &: = \left(\int_\Omega f(x) \, |u|^{2^*} \right)^{1/2^*}, \qquad\qquad |u|_2 := \left(\int_\Omega u^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Si $a \equiv 0$ entonces

$$\|u\|_0 = \|u\| \, , \qquad \langle u, v \rangle_0 = \langle u, v \rangle \, ,$$

son la norma y el producto escalar usuales de $H_0^1(\Omega)$, y si $f \equiv 1$ entonces $|u|_{f,2^*}$ es la norma usual de $L^{2^*}(\Omega)$. Recordemos que el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ está dado como sigue:

$$\lambda_1 := \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{|u|_2^2}.$$

Proposición 2.1 *Si a satisface (a_1) entonces $\|\cdot\|_a$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$ equivalente a la norma usual. Si f satisface (f_1) entonces $|\cdot|_{f,2^*}$ es una norma equivalente a la norma usual de $L^{2^*}(\Omega)$.*

Demostración: Si f satisface (f_1) entonces, como Ω es acotado, cumple que $\min_{\overline{\Omega}} f > 0$. Dado que

$$\min_{\overline{\Omega}} f \int_\Omega |u|^{2^*} dx \leq \int_\Omega f(x) \, |u|^{2^*} dx \leq \max_{\overline{\Omega}} f \int_\Omega |u|^{2^*} dx,$$

se tiene que $|\cdot|_{f,2^*}$ es equivalente a la norma usual en $L^{2^*}(\Omega)$. Si a satisface (a_1) entonces, para todo $-\lambda_1 < a_0 \leq \min\{0, a(x) : x \in \overline{\Omega}\}$, se cumple que

$$\begin{aligned} \|u\|_a^2 \ &= \ \int (|\nabla u|^2 + a(x)u^2) dx \\ &\geq \ \int (|\nabla u|^2 + a_0 u^2) \\ &\geq \ \|u\|^2 + \frac{a_0}{\lambda_1} \|u\|^2 \\ &= \ \left(\frac{\lambda_1 + a_0}{\lambda_1} \right) \|u\|^2 . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por tanto, $\|u\|_a$ es una norma bien definida en $H_0^1(\Omega)$ y además que $\|u\|_a^2 \geq c_1 \|u\|^2$ con $c_1 > 0$. Por otra parte

$$c_2 \|u\|_1^2 = c_2 \int (|\nabla u|^2 + u^2) \geq \int (|\nabla u|^2 + (\max_{\overline{\Omega}} a)u^2) \geq \int (|\nabla u|^2 + a(x)u^2) = \|u\|_a^2,$$

donde $c_2 = \max\{1, a(x) : x \in \overline{\Omega}\}$. Dado que Ω es acotado, de la desigualdad de Poincaré se sigue que $\|u\|_1^2 \leq c_3 \|u\|^2$. En consecuencia, $\|u\|_a$ es una norma equivalente a $\|u\|$.
■

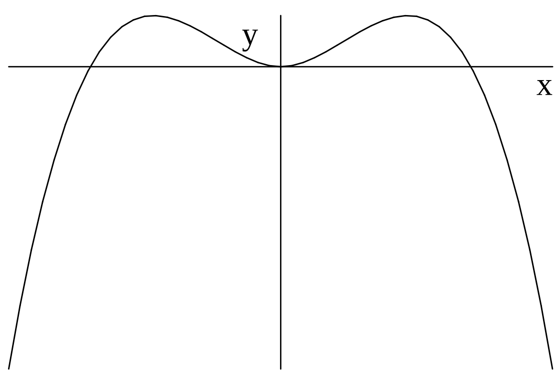
Rescribimos el funcional $E_{a,f}$ como

$$E_{a,f}(u) = \frac{1}{2} \|u\|_a^2 - \frac{1}{2^*} |u|_{f,2^*}^{2^*}. \tag{2.4}$$

Nos interesa demostrar la existencia de puntos críticos de $E_{a,f}$. Empecemos analizando su gráfica. Para ello fijemos una dirección $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$ y veamos cómo es la gráfica de $E_{a,f}$ sobre la recta generada por u. Es decir, consideremos la función $E_{a,f,u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$E_{a,f,u}(t) := E_{a,f}(tu) = \left(\frac{1}{2} \|u\|_a^2\right) t^2 - \left(\frac{1}{2^*} |u|_{f,2^*}^{2^*}\right) |t|^{2^*}.$$

Notemos que los coeficientes de t^2 y de $|t|^{2^*}$ son positivos, de modo que, como $2^* > 2$, la gráfica de esta función tendrá la siguiente forma:



En particular, $E_{a,f,u}$ no está acotada inferiormente y tiene un mínimo local en 0, que es obviamente solución de (2.1). Los únicos puntos críticos no triviales de $E_{a,f,u}$ son justamente los dos máximos. El conjunto de máximos de $E_{a,f,u}$ para todas las direcciones $u \neq 0$ es el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{a,f} \quad : & \quad = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ E'_{a,f}(u)u = 0\} \\ & = \quad \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0,\ \|u\|_a^2 = |u|_{f,2^*}^{2^*}\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Claramente los puntos críticos no triviales de $E_{a,f}$ están contenidos en este conjunto.

Proposición 2.2 *(a)* $u \in \mathcal{N}_{a,f}$ *si y sólo si* $\max_{t\geq 0} E_{a,f}(tu) = E_{a,f}(u)$.
(b) $\mathcal{N}_{a,f}$ *es una variedad de clase* C^2. *Se le llama la variedad de Nehari de* $E_{a,f}$.
(c) El espacio tangente a $\mathcal{N}_{a,f}$ *en* u *es*

$$T_u\mathcal{N}_{a,f} = \{v \in H_0^1(\Omega) : 2\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + a(x)uv) = 2^* \int f(x)|u|^{2^*-2}uv\}.$$

(d) El campo vectorial radial $u \mapsto u$ *en* $H_0^1(\Omega)$ *es transversal a* $\mathcal{N}_{a,f}$*, es decir,* $u \notin T_u\mathcal{N}_{a,f}$ *para toda* $u \in \mathcal{N}_{a,f}$.

Demostración: Como en cada dirección radial $u \in H_0^1(\Omega)\diagdown\{0\}$ el funcional $E_{a,f,u} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sólo tiene un máximo como punto crítico, se tiene que, para $t > 0$,

$$E'_{a,f,u}(t) = E'_{a,f}(tu)u = 0 \Leftrightarrow E'_{a,f}(tu)tu = 0,$$

esto último implica que $tu \in \mathcal{N}_{a,f}$ ya que $tu \neq 0$, Esto demuestra (a). Para (b) consideramos el siguiente funcional de clase C^2:

$$\phi_{a,f} : H_0^1(\Omega)\diagdown\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \phi_{a,f}(u) := \|u\|_a^2 - |u|_{f,2^*}^{2^*}.$$

Como $\phi_{a,f}^{-1}(0) = \mathcal{N}_{a,f}$ basta probar que 0 es un valor regular de $\phi_{a,f}$. Supongamos que $u_0 \neq 0$ en $\phi_{a,f}^{-1}(0)$ es un punto crítico, entonces para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\phi'_{a,f}(u_0)v = 2\int (\nabla u_0 \nabla v + a(x)u_0 v) - 2^* \int f(x)\left|u_0\right|^{2^*-2} u_0 v = 0. \tag{2.6}$$

En particular si tomamos $v = u_0$,

$$\phi'_{a,f}(u_0)u_0 = 2\left\|u_0\right\|_a^2 - 2^*\left|u_0\right|_{f,2^*}^{2^*} = 0,$$

pero como $u_0 \in \mathcal{N}_{a,f}$, $\phi'_{a,f}(u_0)u_0 = (2-2^*)\left\|u_0\right\|_a^2 = 0$, lo cual es una contradicción. Así pues $u_0 \in \phi_{a,f}^{-1}(0)$ es un valor regular y por lo tanto $\phi_{a,f}^{-1}(0) = \mathcal{N}_{a,f}$ es una variedad de clase C^2. Finalmente, como $\ker \phi'_{a,f}(u) = T_u\mathcal{N}_{a,f}$ para cada $u \in \mathcal{N}_{a,f}$, (c) es consecuencia de (2.6) y $u \notin \ker \phi'_{a,f}(u)$ si $u \in \mathcal{N}_{a,f}$, es decir, se cumple (d). ■

Decimos que un punto $u \in \mathcal{N}_{a,f}$ es un punto crítico de $E_{a,f}|_{\mathcal{N}_{a,f}} : \mathcal{N}_{a,f} \to \mathbb{R}$ si $E'_{a,f}(u)v = 0$ para todo $v \in T_u\mathcal{N}_{a,f}$. Una consecuencia de la proposición anterior es que las soluciones no triviales de (2.1) son justamente los puntos críticos de $E_{a,f}|_{\mathcal{N}_{a,f}}$.

Corolario 2.3 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ *es un punto crítico de* $E_{a,f} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *si y sólo si* $u \in \mathcal{N}_{a,f}$ *y* u *es un punto crítico de* $E_{a,f}|_{\mathcal{N}_{a,f}} : \mathcal{N}_{a,f} \to \mathbb{R}$.

Demostración: Si $u \in \mathcal{N}_{a,f}$ es punto crítico de $E_{a,f}\mid_{\mathcal{N}_{a,f}}$ entonces $E'_{a,f}(u)v = 0$ $\forall v \in T_u\mathcal{N}_{a,f}$. Además, por definición de $\mathcal{N}_{a,f}$, se cumple que $E'_{a,f}(u)u = 0$. De la Proposición 2.2 (d) se sigue que $H_0^1(\Omega) = T_u\mathcal{N}_{a,f} \oplus lin(u)$ y, en consecuencia, que $E'_{a,f}(u)w = 0$ para todo $w \in H_0^1(\Omega)$. ■

2.2. Formulación variacional del problema simétrico

Sea $O(N)$ el grupo de todas las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^N$ y sea Γ es un subgrupo cerrado de $O(N)$. Consideremos el problema

$$(\wp^{\Gamma}_{a,f}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x)\,|u|^{2^*-2}\,u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u(\gamma x) = u(x) & \forall x \in \Omega,\ \gamma \in \Gamma \end{cases}$$

planteado en la introducción, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto suave acotado y Γ-invariante, $N \geq 3$, $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev y $a, f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ son funciones continuas Γ-invariantes.

Nos interesa encontrar soluciones positivas y soluciones que cambian de signo para este problema.

Sea

$$\tau : G \to \mathbb{Z}/2$$

un homomorfismo continuo donde G es un subgrupo cerrado de $O(N)$ y cuyo núcleo es Γ, es decir,

$$\Gamma := \ker \tau.$$

Consideremos ahora el problema

$$(\wp^{\tau}_{a,f}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x)\,|u|^{2^*-2}\,u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u(gx) = \tau(g)u(x) & \forall x \in \Omega,\ g \in G \end{cases}$$

donde, además de las condiciones anteriores, supondremos que Ω es G-invariante, y que $a, f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ son funciones G-invariantes.

Diremos que u es τ-equivariante si satisface

$$u(gx) = \tau(g)u(x) \qquad \forall x \in \Omega, g \in G.$$

Notemos que, si u es τ-equivariante, entonces u es Γ-invariante, es decir, $u(gx) = u(x)$ para toda $x \in \Omega$, $g \in \Gamma$. Además cumple que $u(gx) = -u(x)$ para toda $x \in \Omega$ y $g \in \tau^{-1}(-1)$. En consecuencia

- Toda solución de $(\wp^{\tau}_{a,f})$ es una solución de $(\wp^{\Gamma}_{a,f})$, con $\Gamma = \ker \tau$.
- Si $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ es un epimorfismo, entonces toda solución no trivial de $(\wp^{\tau}_{a,f})$ es una solución de $(\wp^{\Gamma}_{a,f})$ que cambia de signo.

A continuación daremos una formulación variacional para el problema $(\wp^{\tau}_{a,f})$. Dada una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definimos

$$gu : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad (gu)(x) := \tau(g)u(g^{-1}x). \tag{2.7}$$

Proposición 2.4 *a) La función* $(g,u) \mapsto gu$ *define una acción ortogonal en* $H_0^1(\Omega)$ *y una acción isométrica en* $L^{2^*}(\Omega)$ *para los productos escalares y las normas definidas en la sección 2.1, es decir,*

$$\begin{aligned} \langle gu, gv\rangle_a &= \langle u, v\rangle_a \qquad \forall u,v \in H_0^1(\Omega),\ g \in G, \\ |gu|_{f,2^*}^{2^*} &= |u|_{f,2^*}^{2^*} \qquad \forall u \in L^{2^*}(\Omega),\ g \in G. \end{aligned}$$

b) El funcional $E_{a,f} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *es* G*-invariante, es decir,* $E_{a,f}(gu) = E_{a,f}(u)$ *para toda* $u \in H_0^1(\Omega)$, $g \in G$.

c) La variedad de Nehari $\mathcal{N}_{a,f}$ *es* G*-invariante, es decir,* $gu \in \mathcal{N}_{a,f}$ *para toda* $u \in \mathcal{N}_{a,f}$ *y* $g \in G$.

d) La derivada de $E_{a,f}$ *satisface* $E'_{a,f}(gu)(gv) = E'(u)v$ *para toda* $u, v \in H_0^1(\Omega)$, $g \in G$.

Demostración: a) Sea $g \in G \subset O(N)$ y u, v en $H_0^1(\Omega)$. Entonces, por definición de gu (2.7) se tiene que $\nabla(gu)(x) = \tau(g)\nabla u(g^{-1}x)$. Utilizando que G actúa ortogonalmente en $\mathbb{R}^N$ y que a es G-invariante, y haciendo el cambio de variable $y = g^{-1}x$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle gu, gv\rangle_a &= \int_\Omega [\nabla(gu)\nabla(gv) + a(x)(gu)(gv)] \\ &= \int_\Omega [\tau^2(g)\nabla u(g^{-1}x)\nabla v(g^{-1}x) + a(x)\tau^2(g)u(g^{-1}x)v(g^{-1}x)]dx \\ &= \int_\Omega [\nabla u(y)\nabla v(y) + a(gy)u(y)v(y)]\,|\det(g)|\,dy \\ &= \int_\Omega [\nabla u\nabla v + a(y)uv]dy = \langle u, v\rangle_a\,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

y, en consecuencia,

$$\|gu\|_a^2 = \|u\|_a^2 \qquad \forall u,v \in H_0^1(\Omega),\ g \in G. \tag{2.9}$$

Además, como f también es G-invariante,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)\,|gu|^{2^*}\,dx &= \int_\Omega f(x)\left|\tau(g)u(g^{-1}x)\right|^{2^*}dx \\ &= \int_\Omega f(y)\,|u|^{2^*}\,dy,\end{aligned}$$

es decir,

$$|gu|_{f,2^*}^{2^*} = |u|_{f,2^*}^{2^*} \qquad \forall u\in L^{2^*}(\Omega),\ g\in G. \tag{2.10}$$

b) es consecuencia inmediata de (2.9), (2.10) y la definición (2.4). *c)* es consecuencia inmediata de (2.9), (2.10) y la definición (2.5). *d)* se sigue de la definición (2.2) usando (2.8) y la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)\,|gu|^{2^*-2}\,(gu)\,(gv)\,dx &= \int_\Omega f(x)\left|u(g^{-1}x)\right|^{2^*-2}u(g^{-1}x)v(g^{-1}x)dx \\ &= \int_\Omega f(y)\,|u|^{2^*-2}\,uvdy, \qquad \forall u,v\in L^{2^*}(\Omega),\ g\in G.\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. ■

Consideremos el subespacio de puntos fijos de $H_0^1(\Omega)$ bajo la acción definida en (2.7), es decir, el espacio

$$\begin{aligned}H_0^1(\Omega)^\tau \quad &: \quad = \{u\in H_0^1(\Omega): gu=u \ \ \forall g\in G\} \\ &= \quad \{u\in H_0^1(\Omega): u(gx)=\tau(g)u(x) \ \ \forall g\in G,\ x\in\Omega\}.\end{aligned}$$

Si $\tau\equiv 1$ entonces $G=\Gamma$ y $H_0^1(\Omega)^\tau$ es el espacio de funciones Γ-invariantes al que denotaremos por

$$H_0^1(\Omega)^\Gamma := \{u\in H_0^1(\Omega): u(gx)=u(x) \ \ \forall g\in\Gamma,\ x\in\Omega\}.$$

Nótese que, mientras que $H_0^1(\Omega)^\Gamma$ es siempre un espacio de dimensión infinita, $H_0^1(\Omega)^\tau$ puede ser, en ocasiones, trivial. Por ejemplo, si Ω es una bola o una esfera en $\mathbb{R}^N$ y $\tau: O(N)\to\mathbb{Z}/2$ es la función que a cada matriz en $O(N)$ le asocia su determinante, entonces $\ker\tau = SO(N)$. En este caso, $H_0^1(\Omega)^{SO(N)}$ es el espacio de funciones radiales, mientras que $H_0^1(\Omega)^\tau=\{0\}$. En esta tesis nos interesa sobre todo el caso en el que G es finito y τ es un epimorfismo. En ese caso, tanto $H_0^1(\Omega)^\Gamma$ como $H_0^1(\Omega)^\tau$ son de dimensión infinita.

En vista del Corolario 2.3, los puntos críticos de $E_{a,f} : \mathcal{N}_{a,f} \to \mathbb{R}$ que están contenidos en

$$\mathcal{N}^{\tau}_{a,f} := \mathcal{N}_{a,f} \cap H^1_0(\Omega)^{\tau}$$

son soluciones no triviales del problema $(\wp^{\tau}_{a,f})$. Denotaremos por

$$\mathcal{N}^{\Gamma}_{a,f} := \mathcal{N}_{a,f} \cap H^1_0(\Omega)^{\Gamma}.$$

Como un caso particular del principio de criticalidad simétrica de Palais [22] obtenemos

Teorema 2.5 (principio de criticalidad simétrica) *$u \in H^1_0(\Omega)^{\tau} \diagdown \{0\}$ es punto crítico de $E_{a,f} : H^1_0(\Omega)^{\tau} \to \mathbb{R}$ si y sólo si u es punto crítico de $E_{a,f}|_{\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}} : \mathcal{N}^{\tau}_{a,f} \to \mathbb{R}$.*

Demostración: Por la Proposición 2.3 sabemos que $u \in H^1_0(\Omega) \diagdown \{0\}$ es punto crítico de $E_{a,f} : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ si y sólo si u es punto crítico de $E_{a,f}|_{\mathcal{N}_{a,f}} : \mathcal{N}_{a,f} \to \mathbb{R}$. Por otra parte de la Proposición 2.4 *a)* y *d)* se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \nabla E_{a,f}(gu), v \rangle_a &= E'_{a,f}(gu)v \\ &= E'_{a,f}(u)(g^{-1}v) \\ &= \left\langle \nabla E_{a,f}(u), g^{-1}v \right\rangle_a \\ &= \langle g \nabla E_{a,f}(u), v \rangle_a \end{aligned}$$

para toda $u, v \in H^1_0(\Omega)$. Si además suponemos que $u \in H^1_0(\Omega)^{\tau}$ entonces $g\nabla E_{a,f}(u) = \nabla E_{a,f}(u)$, es decir $\nabla E_{a,f} \in H^1_0(\Omega)^{\tau}$. En consecuencia, $\nabla (E_{a,f}|_{\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}})(u) = \nabla E_{a,f}(u)$. ■

Notemos que

$$E_{a,f}(u) = \frac{1}{N} \|u\|^2_a = \frac{1}{N} |u|^{2^*}_{f,2^*} \qquad \forall u \in \mathcal{N}_{a,f}. \tag{2.11}$$

En particular, $E_{a,f}$ está acotada inferiormente en $\mathcal{N}_{a,f}$. Sean

$$\mu^{\Gamma}(a,f) := \inf_{\mathcal{N}^{\Gamma}_{a,f}} E_{a,f}, \qquad \mu^{\tau}(a,f) := \inf_{\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}} E_{a,f}.$$

Estudiaremos a continuación las propiedades de estos ínfimos.

2.3. Propiedades de $\mu^{\tau}(a,f)$

Proposición 2.6 $\mu^{\tau}(a,f) \geq \mu^{\Gamma}(a,f) > 0$.

Demostración: Como $\mathcal{N}^\tau_{a,f} \subset \mathcal{N}^\Gamma_{a,f}$ se tiene que $\mu^\tau(a,f) \geq \mu^\Gamma(a,f)$. Sabemos que $\mu^\Gamma(a,f) \geq 0$. Supongamos que $\mu^\Gamma(a,f) = 0$. Entonces existe una sucesión (u_n) en $\mathcal{N}^\Gamma_{a,f}$ tal que

$$E_{a,f}(u_n) \to \mu^\Gamma(a,f) = 0.$$

Por otro lado sabemos que $E_{a,f}(u_n) = \frac{1}{N}\left\|u_n\right\|_a^2$. Como $\left\|\cdot\right\|_a$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|$ de $H^1_0(\Omega)$ se tiene que $u_n \to 0$ fuertemente en $H^1_0(\Omega)$; pero como $\mathcal{N}_{a,f}$ es cerrada en $H^1_0(\Omega)$ entonces $0 \in \mathcal{N}_{a,f}$ lo que contradice la definición de $\mathcal{N}_{a,f}$. ■

Consideremos la proyección radial sobre la variedad de Nehari dada por

$$\pi_{a,f} : H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathcal{N}_{a,f}, \qquad \pi_{a,f}(u) = \left(\frac{\|u\|_a^2}{|u|_{f,2^*}^{2^*}}\right)^{\frac{N-2}{4}} u. \tag{2.12}$$

Tomando en cuenta (2.11) obtenemos

$$E_{a,f}(\pi_{a,f}(u)) = \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|_a^2}{|u|_{f,2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}} \tag{2.13}$$

y, por consiguiente,

$$\mu^\tau(a,f) = \inf_{u \in H^1_0(\Omega)^\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|_a^2}{|u|_{f,2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

Usando esta última igualdad es sencillo demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.7 *Sean $a, b, f, h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funciones continuas y G-invariantes, tales que a y b satisfacen la propiedad (a_1) y f y h satisfacen la propiedad (f_1).*

(i) Si $a(x) \leq b(x)$ para todo $x \in \Omega$, entonces

$$\mu^\tau(a,f) \leq \mu^\tau(b,f).$$

(ii) Si $f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in \Omega$, entonces

$$\mu^\tau(a,f) \geq \mu^\tau(a,h).$$

(iii) Si $\Omega_0 \subset \Omega$ es abierto y G-invariante entonces

$$\mu^\tau(a,f) \leq \mu^\tau(a,f,\Omega_0) := \frac{1}{N} \inf_{u \in H^1_0(\Omega_0)^\tau \setminus \{0\}} \left(\frac{\|u\|_a^2}{|u|_{f,2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

(iv) Si G' es un subgrupo cerrado de G y $\sigma = \tau \mid G' : G' \to \mathbb{Z}/2$ entonces

$$\mu^\tau(a,f) \geq \mu^\sigma(a,f).$$

Demostración: *(i)* es fácil si observamos que

$$\mu^\tau(a,f) \leq \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|_a^2}{|u|_{f,2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}} \leq \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|_b^2}{|u|_{f,2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}},$$

para toda u en $H_0^1(\Omega)^\tau \smallsetminus \{0\}$. Por lo tanto $\mu^\tau(a,f) \leq \mu(b,f)^\tau$.
(ii) se sigue de manera análoga, observando que

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|_a^2}{|u|_{f,2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}} \geq \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|_a^2}{|u|_{h,2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}} \geq \mu(a,h)^\tau$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)^\tau \smallsetminus \{0\}$. Concluimos que $\mu^\tau(a,f) \geq \mu^\tau(a,h)$.
(iii) y *(iv)* son claras, ya que $H_0^1(\Omega_0)^\tau \subset H_0^1(\Omega)^\tau$ y $H_0^1(\Omega)^\tau \subset H_0^1(\Omega)^\sigma$. ■

Sea λ_1 el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$.

Lema 2.8 *Si a y f satisfacen (a_1) y (f_1) respectivamente, entonces para todo $-\lambda_1 < a_0 \leq \min\{0, a(x) : x \in \overline{\Omega}\}$ se cumple*

$$E_{0,f}(\pi_{0,f}(u)) \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_0}\right)^{\frac{N}{2}} E_{a,f}(u) \qquad \forall u \in \mathcal{N}_{a,f}.$$

Demostración: Sea $-\lambda_1 < a_0 \leq \min\{0, a(x) : x \in \overline{\Omega}\}$ y sea $u \in H_0^1(\Omega) \smallsetminus \{0\}$. Usando (2.3) obtenemos

$$\|u\|_a^2 \geq \left(\frac{\lambda_1 + a_0}{\lambda_1}\right)\|u\|^2.$$

En consecuencia, elevando esta desigualdad a la $N/2$ obtenemos que

$$\|u\|_a^N \geq \left(\frac{\lambda_1 + a_0}{\lambda_1}\right)^{\frac{N}{2}}\|u\|^N.$$

Como $\lambda_1 + a_0 > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} E_{0,f}(\pi_{0,f}(u)) &= \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|^N}{|u|_{f,2^*}^N}\right) \\ &\leq \frac{1}{N}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_0}\right)^{\frac{N}{2}}\left(\frac{\|u\|_a^N}{|u|_{f,2^*}^N}\right) \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_0}\right)^{\frac{N}{2}} E_{a,f}(u), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración del lema. ■

Una consecuencia inmediata de este lema es la siguiente.

Corolario 2.9 *Si a y f satisfacen (a_1) y (f_1) respectivamente, entonces para todo $-\lambda_1 < a_0 \leq \min\{0, a(x) : x \in \overline{\Omega}\}$ se cumple que*

$$\mu^\tau(0, f) \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_0}\right)^{\frac{N}{2}} \mu^\tau(a, f).$$

2.4. Estimaciones para $\mu^\Gamma(a, f)$

Consideremos el conjunto

$$M := \left\{ y \in \overline{\Omega} : \frac{\#\Gamma y}{f(y)^{\frac{N-2}{2}}} = \min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right\}.$$

donde $\Gamma y := \{\gamma y : \gamma \in \Gamma\}$ es la Γ-órbita del punto y y $\#\Gamma y$ denota su cardinalidad. Recordemos que la Γ-órbita de y es Γ-homeomorfa al espacio homogéneo Γ/Γ_y, donde $\Gamma_y := \{\gamma \in \Gamma : \gamma y = y\}$ es el grupo de isotropía de y. El homeomorfismo está dado por

$$\Gamma/\Gamma_y \to \Gamma y, \qquad [\gamma] := \gamma \Gamma_y \mapsto \gamma y.$$

Proposición 2.10 *M es cerrado.*

Demostración: Si todas las Γ-órbitas de Ω son infinitas entonces $M = \overline{\Omega}$. Supongamos pues que alguna Γ-órbita es finita. Sea (y_n) una sucesión en M tal que $y_n \to y$ en $\overline{\Omega}$. Como f es continua, $f(y_n) \to f(y)$. Dado que $y_n \in M$, se tiene entonces que $\#\Gamma y_n = k$ y $f(y_n) = f(y)$ para toda n suficientemente grande. En consecuencia, $\#\Gamma y \geq \#\Gamma y_n$. Probemos que $\#\Gamma y = \#\Gamma y_n$. Sean $g_1, ..., g_k \in \Gamma$, tales que $g_i y \neq g_j y$ si $i \neq j$, y sea $\delta > 0$ tal que las bolas $B_\delta(g_i y)$, $i = 1, ..., k$, son ajenas por pares. Como para toda n suficientemente grande $g_i y_n \in B_\delta(g_i y)$ concluímos que $\#\Gamma y \leq \#\Gamma y_n$. En consecuencia, $y \in M$. ■

Como veremos más adelante, si todas las Γ-órbitas de Ω son infinitas, nuestro problema tiene una infinidad de soluciones. De modo que supondremos en el resto de este capítulo que se cumple

(fin) Existe $y \in \Omega$ tal que $\#\Gamma y < \infty$.

Supondremos además en el resto de este capítulo que $a, f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfacen, además de (a_1) y (f_1), las siguientes dos condiciones:

(a_2) $a(x) < 0$ para toda x en M.

(f_2) f es localmente plana en M, es decir, que existen $r > 0$, $\alpha > N$ y $A > 0$ tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq A\,|x-y|^{\alpha} \quad \text{si } y \in M \ \text{ y } \ |x-y| < r.$$

Fijemos $s > 0$ tal que

$$\max_{B_s(M)} a < 0,$$

donde $B_s(M) := \{y \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(y, M) \leq s\}$, y sea

$$\rho_s^{\Gamma} := \inf\{r, \frac{s}{2}, \frac{|\gamma y - y|}{4} : y \in M,\ \gamma \in \Gamma,\ \gamma y \neq y\},$$

donde $r > 0$ es la constante de la condición (f_2).

Lema 2.11 $\rho_s^{\Gamma} > 0$.

Demostración: Supongamos lo contrario, es decir, que existen sucesiones (γ_n) en Γ, (y_n) en M, tales que $\gamma_n y_n \neq y_n$ y $|\gamma_n y_n - y_n| \to 0$. Como Γ y M son compactos, sin perder generalidad podemos suponer que $\gamma_n \to \gamma$ en Γ y que $y_n \to y$ en M. Entonces $\gamma y = y$. En consecuencia, dada $\delta > 0$, se cumple que $\gamma_n y_n, y_n \in B_\delta(y)$ para toda n suficientemente grande. Esto implica que $\#\Gamma y_n \geq 2\#\Gamma y$, lo cual contradice que $y_n \in M$. ■

Las soluciones de energía mínima del problema

$$(\mathcal{P}_\infty) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}\, u & \text{en } \mathbb{R}^N \\ \ \ u(x) \to 0 & \text{cuando } |x| \to \infty \end{cases}$$

son los instantones de Aubin y Talenti

$$U_{\varepsilon,y}(x) = a_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x-y|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}, \qquad \varepsilon > 0,\ y \in \mathbb{R}^N, \tag{2.14}$$

donde $a_N := [N(N-2)]^{(N-2)/4}$, véase [1, 28, 20]. Ellos satisfacen que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\varepsilon,y}|^2 = S^{N/2} = \int_{\mathbb{R}^N} |U_{\varepsilon,y}|^{2^*},$$

donde $S^{-1/2}$ es la mejor constante para el encaje de Sobolev en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, es decir,

$$S := \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\smallsetminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\right)^{2/2^*}}.$$

Utilizaremos estos instantones para obtener una cota superior para $\mu^\tau(a,f)$.

Fijemos $0 < \rho \leq \rho_s^\Gamma$ y fijemos una función de corte $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ radialmente simétrica y tal que $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, y $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}^N$. Para cada $y \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \Gamma$, denotamos

$$\varphi_{\gamma y} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_{\gamma y}(x) := \varphi\left(\frac{x - \gamma y}{\rho}\right).$$

Sea

$$M_s^- := \{y \in M : \ \mathrm{dist}(y, \partial\Omega) \geq s\}.$$

Para cada $y \in M_s^-$ y $\varepsilon > 0$, definimos

$$w_{\varepsilon,y}^\Gamma(x) := \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_y} f(y)^{\frac{2-N}{4}} \varphi_{\gamma y}(x) U_{\varepsilon,\gamma y}(x). \tag{2.15}$$

Observemos que $w_{\varepsilon,y}^\Gamma > 0$, $w_{\varepsilon,y}^\Gamma$ es Γ-invariante, y su soporte satisface

$$\mathrm{sop}(w_{\varepsilon,y}^\Gamma) = B_{2\rho}(\Gamma y) \subset B_s(M_s^-) \subset \overline{\Omega},$$

por tanto, $w_{\varepsilon,y}^\Gamma \in H_0^1(\Omega)^\Gamma$.

Brezis y Nirenberg probaron las siguientes estimaciones.

Lema 2.12 (Brezis-Nirenberg 1983) *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña la función $u_\varepsilon(x) := \varphi(\frac{x}{\rho}) U_{\varepsilon,0}(x)$ satisface*

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|^2 &= S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}), \\
|u_\varepsilon|_{2^*}^{2^*} &= S^{N/2} + O(\varepsilon^N), \\
|u_\varepsilon|_2^2 &\geq \begin{cases} d\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon^2) & \text{si } N = 4 \\ d\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}) & \text{si } N \geq 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

donde d es una constante positiva.

Usaremos este resultado para probar el siguiente.

Lema 2.13 *Para todo $y \in M_s^-$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, la función $w_{\varepsilon,y}^\Gamma$ satisface*

$$\begin{aligned}
\left\|w_{\varepsilon,y}^\Gamma\right\|^2 &= \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}),\\
\left|w_{\varepsilon,y}^\Gamma\right|_{f,2^*}^{2^*} &= \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) S^{N/2} + O(\varepsilon^{N}),\\
\int_\Omega a(x)\left(w_{\varepsilon,y}^\Gamma\right)^2 &\leq \begin{cases} -c\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}), & \textit{si } N \geq 5,\\ -c\varepsilon^2\left|\ln\varepsilon\right| + O(\varepsilon^2) & \textit{si } N = 4,\end{cases}
\end{aligned}$$

donde c es una constante positiva.

Demostración: Nuestra elección de ρ garantiza que el soporte de $w_{\varepsilon,y}^\Gamma$ es una unión de bolas con interiores ajenos por pares

$$\operatorname{sop}(w_{\varepsilon,y}^\Gamma) = B_{2\rho}(\Gamma y) = \bigcup_{z\in\Gamma y} B_{2\rho}(z).$$

La primera identidad es consecuencia inmediata del Lema 2.12, ya que

$$\begin{aligned}
\left\|w_{\varepsilon,y}^\Gamma\right\|^2 &= \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_y} f(y)^{\frac{2-N}{2}} \int_\Omega \left|\nabla\left(\varphi_{\gamma y} U_{\varepsilon,\gamma y}\right)\right|^2\\
&= \frac{\#\Gamma y}{f(y)^{\frac{N-2}{2}}} \left\|u_\varepsilon\right\|^2\\
&= \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2})
\end{aligned}$$

para toda $y \in M_s^-$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña.
La segunda igualdad requiere la propiedad (f_2).

$$\begin{aligned}
\left|w_{\varepsilon,y}^\Gamma\right|_{f,2^*}^{2^*} &= \frac{\#\Gamma y}{f(y)^{\frac{N-2}{2}}} \int \frac{f(x)\left|\varphi_y U_{\varepsilon,y}\right|^{2^*}}{f(y)} dx\\
&= \frac{\#\Gamma y}{f(y)^{\frac{N-2}{2}}} \left(\int \left|U_{\varepsilon,y}\right|^{2^*} + \int \frac{f(x)\varphi_y^{2^*} - f(y)}{f(y)} \left|U_{\varepsilon,y}\right|^{2^*} dx\right)\\
&= \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right)\left(S^{\frac{N}{2}} + \varepsilon^N a_N^{2^*} \int \frac{f(x)\varphi_y^{2^*} - f(y)}{f(y)(\varepsilon^2 + |x-y|^2)^N} dx\right).
\end{aligned}$$

Queremos probar que la última integral está acotada. Para ello, la descomponemos en dos partes y usamos que f es continua y localmente plana:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|x-y|\leq\rho} \left|\frac{f(x)\varphi_y^{2^*} - f(y)}{f(y)(\varepsilon^2 + |x-y|^2)^N}\right| dx &= \int\limits_{|x-y|\leq\rho} \frac{|f(x) - f(y)|}{f(y)(\varepsilon^2 + |x-y|^2)^N} dx \\
&\leq \int\limits_{|x-y|\leq\rho} \left(\frac{A\,|x-y|^{\alpha}}{f(y)\,|x-y|^{2N}}\right) dx \\
&= a_1 \int_{|x|\leq\rho} |x|^{\alpha-2N}\, dx \\
&= a_1 \int_0^{\rho} r^{\alpha-N-1} dr \\
&= a_2 \rho^{\alpha-N}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|x-y|\geq\rho} \left|\frac{f(x)\varphi_y^{2^*} - f(y)}{f(y)(\varepsilon^2 + |x-y|^2)^N}\right| dx &= \int\limits_{|x-y|\geq\rho} \frac{\left|f(x)\varphi_y^{2^*} - f(y)\right|}{f(y)\,|x-y|^{2N}} dx \\
&\leq a_3 \int_{|x|\geq\rho} |x|^{-2N}\, dx \\
&= a_3 \int_{\rho}^{\infty} r^{-N-1} dr \\
&= a_4 \rho^{-N}.
\end{aligned}$$

De lo anterior, usando el Lema 2.12, obtenemos que

$$\left|w_{\varepsilon,y}^{\Gamma}\right|_{f,2^*}^{2^*} = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) S^{\frac{N}{2}} + O(\varepsilon^N)$$

para toda $y \in M_s^-$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña.
Para la última desigualdad observamos que, como $\operatorname{sop}(w_{\varepsilon,y}^{\Gamma}) \subset B_s(M_s^-)$ y

$$-a_1 := \max_{B_s(M_s^-)} a < 0,$$

el Lema 2.12 implica que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)\left(w^\Gamma_{\varepsilon,y}\right)^2 &\leq -a_1\int_\Omega \left(w^\Gamma_{\varepsilon,y}\right)^2\\
&= -a_1\frac{\#\Gamma y}{f(y)^{\frac{N-2}{2}}}\left|u_\varepsilon\right|_2^2\\
&\leq \begin{cases} -c\varepsilon^2+O(\varepsilon^{N-2}), & \text{si } N\geq 5,\\ -c\varepsilon^2\left|\ln\varepsilon\right|+O(\varepsilon^2) & \text{si } N=4,\end{cases}
\end{aligned}$$

con $c = da_1\left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) > 0.$ ∎

Proposición 2.14 *Supongamos que a y f satisfacen las condiciones (a_1), (f_1), (a_2) y (f_2) y que se cumple (fin). Dada $s>0$ tal que $\max_{B_s(M)} a<0$, existe $\varepsilon_s>0$ con la siguiente propiedad:*
Para cada $\varepsilon\in(0,\varepsilon_s)$ existe θ_ε tal que

$$E_{a,f}(\pi_{a,f}(w^\Gamma_{\varepsilon,y}))\leq\theta_\varepsilon<\frac{1}{N}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right)S^{N/2}\qquad\forall y\in M_s^-,$$

donde $\pi_{a,f}$ es la proyección radial sobre la variedad de Nehari. En consecuencia, si $M_s^-\neq\emptyset$,

$$\mu^\Gamma(a,f)<\frac{1}{N}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right)S^{N/2}.$$

Demostración: De (2.13) y del Lema 2.13 se sigue que existen constantes $c, c_i>0$ tales que

$$\begin{aligned}
E_{a,f}(\pi_{a,f}(w^\Gamma_{\varepsilon,y})) &= \frac{1}{N}\left(\frac{\left\|w^\Gamma_{\varepsilon,y}\right\|_a^2}{\left|w^\Gamma_{\varepsilon,y}\right|_{f,2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}}\\
&= \frac{1}{N}\left[\frac{\left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right)S^{\frac{N}{2}}+O(\varepsilon^{N-2})+\int_\Omega a(x)\left(w^\Gamma_{\varepsilon,y}\right)^2}{\left[\left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right)S^{\frac{N}{2}}+O(\varepsilon^N)\right]^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{2}}\\
&\leq \frac{1}{N}\left[\left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\frac{2}{N}}S+c_1\varepsilon^{N-2}+c_2\int_\Omega a(x)\left(w^\Gamma_{\varepsilon,y}\right)^2\right]^{\frac{N}{2}}\\
&= :\theta_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Usando ese mismo lema obtenemos

$$c_1\varepsilon^{N-2} + c_2 \int_\Omega a(x) \left(w^\Gamma_{\varepsilon,y}\right)^2 \leq \begin{cases} -c\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^{N-2} & \text{si } N \geq 5 \\ -c\varepsilon^2 \left|\ln \varepsilon\right| + c_4\varepsilon^2 & \text{si } N = 4 \end{cases}.$$

En consecuencia,

$$c_1\varepsilon^{N-2} + c_2 \int_\Omega a(x) \left(w^\Gamma_{\varepsilon,y}\right)^2 < 0$$

para toda $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña y, por lo tanto,

$$\mu^\Gamma(a, f) \leq E_{a,f}(\pi_{a,f}(w^\Gamma_{\varepsilon,y})) \leq \theta_\varepsilon < \frac{1}{N}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) S^{N/2},$$

como afirma el enunciado. ■

2.5. Estimaciones para $\mu^\tau(a, f)$

Sea $\Omega^\tau = \{y \in \Omega : \Gamma y = Gy\}$ y consideremos el conjunto

$$M^-_{\tau,s} := \{y \in M : \operatorname{dist}(y, \partial\Omega \cup \Omega^\tau) \geq s\}.$$

Observemos que $M^-_{\tau,s}$ es un conjunto cerrado, que puede ser vacío (por ejemplo, cuando $\tau \equiv 1$). Este conjunto tiene la siguiente propiedad.

Lema 2.15 $\inf\{|gy - y| : y \in M^-_{\tau,s},\ g \in G,\ gy \neq y\} > 0.$

Demostración: Supongamos lo contrario, es decir, que existen una sucesiones (y_n) en $M^-_{\tau,s}$ y (g_n) en G tales que $|g_n y_n - y_n| \to 0$. En vista del Lema 2.11, $\tau(g_n) = -1$. Como G y $M^-_{\tau,s}$ son compactos podemos suponer que $g_n \to g$ en G y $y_n \to y$ en $M^-_{\tau,s}$. Entonces $gy = y$ y, como τ es continua, $\tau(g) = -1$. Esto implica que $Gy = \Gamma y$, lo cual es una contradicción, pues $y \in M^-_{\tau,s}$. ■

Definimos

$$\rho^\tau_s := \inf\{\rho^\Gamma_s, \frac{|gy - y|}{4} : y \in M^-_{\tau,s},\ g \in G,\ gy \neq y\}.$$

Fijemos $0 < \rho \leq \rho^\tau_s$ en la construcción de las funciones $w^\Gamma_{\varepsilon,y}$ de la sección anterior, y tomemos $g_\tau \in G$ tal que $\tau(g_\tau) = -1$. Para cada $y \in M^-_{\tau,s}$, $\varepsilon > 0$, definimos

$$w^\tau_{\varepsilon,y} := w^\Gamma_{\varepsilon,y} - w^\Gamma_{\varepsilon,g_\tau y}.$$

Como la función $w^{\Gamma}_{\varepsilon,y}$ sólo depende de la Γ-órbita Γy y no de y mismo, $w^{\tau}_{\varepsilon,y}$ no depende de nuestra elección de g_τ. Nuestra elección de ρ garantiza que los soportes de $w^{\Gamma}_{\varepsilon,y}$ y $w^{\Gamma}_{\varepsilon,g_\tau y}$ tienen interiores ajenos y, por tanto, $w^{\tau}_{\varepsilon,y} \in H^1_0(\Omega)^\tau \smallsetminus \{0\}$ y

$$\left(w^{\tau}_{\varepsilon,y}\right)^+ = w^{\Gamma}_{\varepsilon,y}, \qquad \left(w^{\tau}_{\varepsilon,y}\right)^- = -w^{\Gamma}_{\varepsilon,g_\tau y}. \tag{2.16}$$

Una consecuencia inmediata de este hecho y de la Proposición 2.14 es el siguiente.

Corolario 2.16 *Supongamos que a y f satisfacen las condiciones (a_1), (f_1), (a_2) y (f_2) y que se cumple (fin). Dada $s > 0$ tal que $\max_{B_s(M)} a < 0$, existe $\varepsilon_s > 0$ con la siguiente propiedad:*
Para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_s)$ existe θ_ε tal que

$$E_{a,f}(\pi_{a,f}(w^{\tau}_{\varepsilon,y})) \leq 2\theta_\varepsilon < \frac{2}{N}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) S^{N/2} \qquad \forall y \in M^-_{\tau,s}.$$

En consecuencia, si $M^-_{\tau,s} \neq \emptyset$, entonces

$$\mu^\tau(a,f) < \frac{2}{N}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) S^{N/2}.$$

Demostración: Sea $t > 0$ tal que $\pi_{a,f}(w^{\tau}_{\varepsilon,y}) = tw^{\tau}_{\varepsilon,y}$. Se sigue de (2.16) y de la Proposición 2.2*(a)* que

$$\begin{aligned} E_{a,f}(\pi_{a,f}(w^{\tau}_{\varepsilon,y})) &= E_{a,f}(tw^{\tau}_{\varepsilon,y}) = E_{a,f}(tw^{\Gamma}_{\varepsilon,y}) + E_{a,f}(tw^{\Gamma}_{\varepsilon,g_\tau y}) \\ &= 2E_{a,f}(tw^{\Gamma}_{\varepsilon,y}) \leq 2E_{a,f}(\pi_{a,f}(w^{\Gamma}_{\varepsilon,y})). \end{aligned}$$

Las afirmaciones del corolario son ahora consecuencia inmediata de la Proposición 2.14. ■

Para concluir el capítulo observemos que, para $s > 0$ tal que $\max_{B_s(M)} a < 0$, y $\varepsilon > 0$, hemos definido funciones continuas

$$\alpha^{\Gamma}_s : M^-_s/\Gamma \to \mathcal{N}^{\Gamma}_{a,f}, \qquad \alpha^{\Gamma}_s(\Gamma y) = \pi_{a,f}(w^{\Gamma}_{\varepsilon,y}), \tag{2.17}$$
$$\alpha^{\tau}_s : M^-_{\tau,s}/\Gamma \to \mathcal{N}^{\tau}_{a,f}, \qquad \alpha^{\tau}_s(\Gamma y) = \pi_{a,f}(w^{\tau}_{\varepsilon,y}), \tag{2.18}$$

donde

$$M^-_s/\Gamma = \{\Gamma y : y \in M^-_s\}, \qquad M^-_{\tau,s}/\Gamma = \{\Gamma y : y \in M^-_{\tau,s}\}$$

son los espacios de Γ-órbitas de M^-_s y $M^-_{\tau,s}$ con la topología cociente.

La función α_s^τ tiene además una propiedad de simetría. El homomorfismo $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ induce una involución en el espacio de órbitas $\mathbb{R}^N/\Gamma$, a la que denotaremos nuevamente por τ, definida como sigue:

$$\tau : \mathbb{R}^N/\Gamma \to \mathbb{R}^N/\Gamma, \qquad \tau(\Gamma y) = \Gamma(g_\tau y). \tag{2.19}$$

Esta involución no depende de la elección de $g_\tau \in \tau^{-1}(-1)$. El conjunto de puntos fijos de esta involución es

$$(\mathbb{R}^N/\Gamma)^\tau := \{\Gamma y : \tau(\Gamma y) = \Gamma y\} = \{\Gamma y : \Gamma y = G y\},$$

de modo que, como

$$M_{\tau,s}^-/\Gamma \subset \left(\mathbb{R}^N/\Gamma\right) \smallsetminus (\mathbb{R}^N/\Gamma)^\tau,$$

se tiene que τ actúa libremente en $M_{\tau,s}^-/\Gamma$. La función α_s^τ es $\mathbb{Z}/2$-equivariante, es decir,

$$\alpha_s^\tau(\tau(\Gamma y)) = -\alpha_s^\tau(\Gamma y), \qquad \forall y \in M_{\tau,s}^-. \tag{2.20}$$

Capítulo 3

Representación de sucesiones de Palais-Smale y existencia de soluciones Γ-invariantes

3.1. Sucesiones equivariantes de Palais-Smale

Como en el capítulo anterior, G es un subgrupo cerrado de $O(N)$ y $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ es un homomorfismo continuo. Queremos estudiar la pérdida de compacidad para el problema

$$(\wp^{\tau}_{a,f}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x)\left|u\right|^{2^*-2} u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u(gx) = \tau(g)u(x) & \forall x \in \Omega,\ g \in G \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado suave y G-invariante y $a, f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, G-invariantes que satisfacen (a_1) y (f_1).

Sea

$$H^1_0(\Omega)^{\tau} = \{u \in H^1_0(\Omega) : u(gx) = \tau(g)u(x),\ \forall x \in \Omega,\ g \in G\},$$

y sea $E_{a,f} : H^1_0(\Omega)^{\tau} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E_{a,f}(u) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\left|\nabla u\right|^2 + a(x)u^2)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\Omega} f(x)\left|u\right|^{2^*} dx \\ &= \frac{1}{2}\left\|u\right\|_a^2 - \frac{1}{2^*}\left|u\right|_{f,2^*}^{2^*}, \end{aligned}$$

el funcional asociado al problema $(\wp^{\tau}_{a,f})$.

Definición 3.1 *Diremos que una sucesión (u_n) en $H_0^1(\Omega)$ es una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale para $E_{a,f}$ en c, si cumple que*

$$u_n \in H_0^1(\Omega)^\tau, \qquad E_{a,f}(u_n) \to c, \qquad \nabla E_{a,f}(u_n) \to 0.$$

Si $\tau \equiv 1$ diremos que (u_n) es una sucesión Γ-invariante de Palais-Smale para $E_{a,f}$ en c.
Diremos que $E_{a,f}$ satisface la condición τ-equivariante de Palais-Smale en c o -más brevemente- que cumple $(PS)_c^\tau$, si toda sucesión τ-equivariante de Palais-Smale tiene una subsucesión que converge fuertemente en $H_0^1(\Omega)^\tau$. Si $\tau \equiv 1$ diremos que cumple $(PS)_c^\Gamma$.

El funcional $E_{a,f}$ no cumple $(PS)_c^\tau$ para todo c. Daremos en esta sección una descripción completa de todas las sucesiones τ-equivariantes de Palais-Smale para $E_{a,f}$ en términos de las soluciones del problema

$$(\wp_\infty) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u & \text{en } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 & \text{si } |x| \to \infty \end{cases}$$

al que llamaremos el problema límite. El funcional asociado a $(\wp_\infty)$ es $E_\infty : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, donde

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)^N\}$$

con la norma $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2$ y

$$\begin{aligned} E_\infty(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

Como antes, denotaremos por

$$Gy := \{gy : g \in G\}$$

a la G-órbita de y, y por

$$G_y := \{g \in G : gy = y\}$$

al grupo de isotropía de y. Recordemos que la G-órbita de y es G-homeomorfa al espacio homogéneo G/G_y. El homeomorfismo está dado por

$$G/G_y \to Gy, \qquad [g] := gG_y \mapsto gy.$$

En esta sección probaremos el siguiente resultado.

Teorema 3.2 *Sea (u_n) una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale para $E_{a,f}$ en c. Entonces, para una subsucesión a la que continuamos denotando (u_n), existen una solución τ-equivariante u del problema $(\wp^{\tau}_{a,f})$, un entero $m \geq 0$, subgrupos cerrados $G_1, ..., G_m$ de índice finito en G, sucesiones $(y_{1,n}), ..., (y_{m,n})$ en Ω, sucesiones $(\varepsilon_{1,n}), ..., (\varepsilon_{m,n})$ en $(0, \infty)$ y soluciones no triviales $\widehat{u}_1, ..., \widehat{u}_m$ del problema límite $(\wp_\infty)$, con las siguientes propiedades:*
(i) $G_{y_{i,n}} = G_i$ *para toda* $n \geq 1$, *y* $y_{i,n} \to y_i$ *cuando* $n \to \infty$, *para cada* $i = 1, ..., m$,
(ii) $\varepsilon_{i,n}^{-1}\text{dist}(y_{i,n}, \partial\Omega) \to \infty$ *y* $\varepsilon_{i,n}^{-1} |gy_{i,n} - g'y_{i,n}| \to \infty$ *cuando* $n \to \infty$ *para todas* $[g] \neq [g']$ *en* G/G_i, $i = 1, ..., m$,
(iii) $\widehat{u}_i(\gamma z) = \tau(\gamma)\widehat{u}_i(z)$ *para todas* $z \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \in G_i$, $i = 1, ..., m$,
(iv) $\left\| u_n - u - \sum_{i=1}^{m} \sum_{[g]\in G/G_i} f(y_i)^{\frac{2-N}{4}} \varepsilon_{i,n}^{\frac{2-N}{2}} \tau(g)\widehat{u}_i(g^{-1}\varepsilon_{i,n}^{-1}(\cdot - gy_{i,n})) \right\| \to 0$ *en* $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *cuando* $n \to \infty$,
(v) $E_{a,f}(u) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{|G/G_i|}{f(y_i)^{\frac{N-2}{2}}} \right) E_\infty(\widehat{u}_i) = c.$

La demostración de este resultado se basa en el siguiente.

Lema 3.3 *Sea (u_n) una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale para $E_{0,f}$ en $c > 0$, tal que $u_n \rightharpoonup 0$ débilmente en $H^1_0(\Omega)^\tau$. Entonces, para una subsucesión de (u_n), existen un subgrupo cerrado K de G de índice finito, una sucesión (y_n) en Ω, una sucesión (ε_n) en $(0, \infty)$, una solución no trivial $\widehat{u}$ del problema límite $(\wp_\infty)$, y una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale (v_n) para $E_{0,f}$, con las siguientes propiedades:*
(i) $G_{y_n} = K$ *para toda* $n \geq 1$ *y* $y_n \to y_0$ *en* $\overline{\Omega}$,
(ii) $\varepsilon_n^{-1}\text{dist}(y_n, \partial\Omega) \to \infty$ *y* $\varepsilon_n^{-1} |gy_n - g'y_n| \to \infty$ *cuando* $n \to \infty$ *si* $[g] \neq [g'] \in G/K$,
(iii) $\widehat{u}(gz) = \tau(g)\widehat{u}(z)$ *para todas* $z \in \mathbb{R}^N$, $g \in K$,
(iv) $v_n = u_n - \sum_{[g]\in G/K} \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} \tau(g) f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \widehat{u}(g^{-1}\varepsilon_n^{-1}(\cdot - gy_n)) + o(1)$ *en* $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,
(v) $E_{0,f}(v_n) = E_{0,f}(u_n) - |G/K| \, f(y_0)^{\frac{2-N}{2}} E_\infty(\widehat{u}) + o(1).$

Demostración: La demostración es larga, por lo que la subdividimos en varios pasos.

I) Definición de ε_n.

Observemos que

$$\frac{1}{N} \|u_n\|^2 = E_{0,f}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle \nabla E_{0,f}(u_n), u_n \rangle \leq a(1 + \|u_n\|), \tag{3.1}$$

$a > 0$. En consecuencia, (u_n) es acotada en $H^1_0(\Omega)$ y, por tanto,

$$|u_n|_{f,2^*}^{2^*} = N \left(E_{0,f}(u_n) - \frac{1}{2} \langle \nabla E_{0,f}(u_n), u_n \rangle \right) \to Nc > 0.$$

Sea $\delta := \min\{\frac{Nc}{2}, (\frac{S}{2})^{\frac{N}{2}}(\max_{\overline{\Omega}} f)^{\frac{2-N}{2}}\}$. Denotemos por $B_r(y)$ a la bola cerrada en $\mathbb{R}^N$ con centro y y radio r. La función de concentración de Levy

$$Q_n(r) := \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int\limits_{B_r(y)} f(x)\,|u_n|^{2^*}$$

es continua, creciente, y satisface que $Q_n(0) = 0$ y que $Q_n(r) = |u_n|_{f,2^*}^{2^*}$ si $r \geq \frac{1}{2}R$ donde R denota al diámetro de Ω. Por tanto, para n suficientemente grande, existen $\varepsilon_n > 0$ y $\xi_n \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$Q_n(\varepsilon_n) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int\limits_{B_{\varepsilon_n}(y)} f\,|u_n|^{2^*} = \int\limits_{B_{\varepsilon_n}(\xi_n)} f\,|u_n|^{2^*} = \delta. \tag{3.2}$$

Observemos que las sucesiones (ε_n) y (ξ_n) están acotadas.

II) Existencia de K y (y_n) tales que $G_{y_n} = K$ y $\varepsilon_n^{-1}|gy_n - g'y_n| \to \infty$ si $[g] \neq [g'] \in G/K$.
Denotemos por $V := \mathbb{R}^N$ y, para cada subgrupo cerrado H de G, denotamos por

$$V^H := \{x \in V : gx = x\ \forall g \in H\}$$

al espacio de puntos fijos de V bajo H. Este es un subespacio cerrado de V. Para cada $x \in V$, denotamos por x^H a su proyección ortogonal sobre V^H. Probaremos que existe un subgrupo cerrado K de G que cumple lo siguiente:
(a) $|G/K| < \infty$,
(b) $G_{\xi_n^K} = K$,
(c) $\varepsilon_n^{-1}\left|g\xi_n^K - g'\xi_n^K\right| \to \infty$ para todos $[g] \neq [g'] \in G/K$.
(d) $\varepsilon_n^{-1}\left|\xi_n - \xi_n^K\right| < C < \infty$.
Observemos que el inciso *(c)* garantiza que las bolas $B_{\varepsilon_n}(g\xi_n^K)$ y $B_{\varepsilon_n}(g'\xi_n^K)$ no se intersectan para n suficientemente grande. Consideramos dos casos:

Si $\varepsilon_n^{-1}\left|\xi_n - \xi_n^G\right| < C < \infty$, entonces $K := G$ cumple las condiciones *(a)*-*(d)*.

Si $\varepsilon_n^{-1}\left|\xi_n - \xi_n^G\right| \to \infty$, procedemos como sigue:
Sea V^1 el complemento ortogonal de V^G en V, y escribamos a ξ_n como $\xi_n = \xi_n^G + \xi_n^1$ con $\xi_n^1 \in V^1$, entonces

$$\varepsilon_n^{-1}\left|\xi_n^1\right| \to \infty. \tag{3.3}$$

En particular, $\xi_n^1 \neq 0$ para n grande y, como la esfera unitaria en V^1 es compacta, una subsucesión satisface que

$$\eta_n^1 := \frac{\xi_n^1}{\left|\xi_n^1\right|} \to \eta^1 \in V^1.$$

Sea $G^1 := G_{\eta^1}$. Notemos que G^1 es un subgrupo propio de G. Queremos probar que

$$G_{\xi_n^{G^1}} = G^1. \tag{3.4}$$

Cada subgrupo cerrado H de G^1 deja fijo a η^1, en consecuencia,

$$(\eta_n^1)^H \to (\eta^1)^H = \eta^1$$

y, para cada $g \in G_{(\eta_n^1)^H}$, se cumple que

$$(\eta_n^1)^H = g(\eta_n^1)^H \to g\eta^1.$$

Concluímos que $g\eta^1 = \eta^1$ para toda $g \in G_{(\eta_n^1)^H}$, lo cual implica que $G_{(\eta_n^1)^H} \subset G^1$. Ahora bien, como $\xi_n^H = \xi_n^G + (\xi_n^1)^H$ tenemos que

$$G_{\xi_n^H} = G_{(\xi_n^1)^H} = G_{(\eta_n^1)^H} \subset G^1.$$

En consecuencia, tomando $H = G^1$, obtenemos la afirmación (3.4).
Ahora queremos probar que

$$\left|G/G^1\right| < \infty. \tag{3.5}$$

Tomemos un conjunto finito de elementos $\{g_1, ..., g_m\}$ en G, tales que $[g_i] \neq [g_j]$ en G/G^1 si $i \neq j$. Sea $\rho > 0$ tal que

$$\left|g_i\eta^1 - g_j\eta^1\right| > \rho \qquad \forall i \neq j.$$

Sea H un subgrupo cerrado de G^1. Como $(\eta_n^1)^H \to \eta^1$, se sigue de

$$\left|g_i\eta^1 - g_j\eta^1\right| \leq \left|g_i\eta^1 - g_i(\eta_n^1)^H\right| + \left|g_i(\eta_n^1)^H - g_j(\eta_n^1)^H\right| + \left|g_j(\eta_n^1)^H - g_j\eta_n^1\right|$$

que, para n suficientemente grande,

$$\left|g_i(\eta_n^1)^H - g_j(\eta_n^1)^H\right| \geq \rho \qquad \forall i \neq j.$$

Multiplicando por $\varepsilon_n^{-1}\left|\xi_n^1\right|$ obtenemos que

$$\rho\varepsilon_n^{-1}\left|\xi_n^1\right| \leq \varepsilon_n^{-1}\left|g_i(\xi_n^1)^H - g_j(\xi_n^1)^H\right| \qquad \forall i \neq j \tag{3.6}$$

y, por (3.3), concluímos que

$$\varepsilon_n^{-1}\left|g_i(\xi_n^1)^H - g_j(\xi_n^1)^H\right| \to \infty \qquad \forall i \neq j$$

para todo subgrupo cerrado $H \subset G^1$. En particular, tomando $H = \{1\}$, obtenemos que, para n suficientemente grande,

$$B_{\varepsilon_n}(g_i\xi_n^1) \cap B_{\varepsilon_n}(g_j\xi_n^1) = \emptyset \qquad \forall i \neq j.$$

Por (3.2), como u_n es τ-invariante, obtenemos

$$m\delta = \sum_{i=1}^{m} \int_{B_{\varepsilon_n}(g_i\xi_n^1)} f\,|u_n|^{2^*} \leq \int_\Omega f\,|u_n|^{2^*} = Nc + o(1) \qquad \forall m \leq \left|G/G^1\right|,$$

de donde se sigue (3.5). Y de (3.6) con $H = G^1$ y $m = |G/G^1|$ se sigue que

$$\varepsilon_n^{-1}\left|g\xi_n^{G^1} - g'\xi_n^{G^1}\right| \to \infty \qquad \forall [g] \neq [g'] \in G/G^1.$$

Así pues, si el grupo G^1 cumple además que $\varepsilon_n^{-1}\left|\xi_n - \xi_n^{G^1}\right| < C < \infty$, entonces $K := G^1$ satisface las propiedades *(a)-(d)*. Si no es así, iteramos el proceso para obtener subgrupos cerrados

$$G = G^0 \supsetneqq G^1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq G^k =: K,$$

subespacios vectoriales no triviales

$$V = V^0 \supset V^1 \supset ... \supset V^k,$$

y puntos

$$\xi_n =: \xi_n^0,\ \xi_n^1,\ ...\ \xi_n^k,$$

tales que

- ► $|G^i/G^{i+1}| < \infty, \quad V^i = (V^i)^{G^i} \oplus V^{i+1}, \quad \xi_n^{i+1} = \xi_n^i - (\xi_n^i)^{G^i} \in V_{i+1},$
- ► $G^i_{(\xi_n^i)^K} = G^i_{(\xi_n^{i+1})^K} = G^{i+1}_{(\xi_n^{i+1})^K} = K,$
- ► $\varepsilon_n^{-1}\left|g\xi_n^K - g'\xi_n^K\right| \to \infty$ si $[g] \neq [g'] \in G^i/G^{i+1}$,
- ► $\varepsilon_n^{-1}\left|\xi_n - \xi_n^{G^i}\right| \to \infty$ si $i = 1, ..., k-1$, y $\varepsilon_n^{-1}\left|\xi_n - \xi_n^K\right| < C < \infty$.

En consecuencia, K satisface las propiedades *(a)-(d)*.
Definimos

$$y_n := \xi_n^K.$$

Entonces $G_{y_n} = K$ y $\varepsilon_n^{-1}|gy_n - g'y_n| \to \infty$ si $[g] \neq [g'] \in G/K$.

III) Definición de $\widehat{u} \neq 0$, tal que $\widehat{u}(gx) = \tau(g)\widehat{u}(x)$ para todas $x \in \mathbb{R}^N$, $g \in K$.
Consideremos las funciones

$$\widetilde{u}_n(z) := \varepsilon_n^{\frac{N-2}{2}} u_n\left(\varepsilon_n z + y_n\right)$$

y

$$f_n(z) := f\left(\varepsilon_n z + y_n\right).$$

Como $G_{y_n} = K$ y u_n es τ-equivariante, para todo $g \in K$ se tiene que

$$\begin{aligned} \tau(g)\widetilde{u}_n(g^{-1}z) &= \tau(g)\varepsilon_n^{\frac{N-2}{2}} u_n\left(\varepsilon_n g^{-1}z + y_n\right) \\ &= \tau(g)\varepsilon_n^{\frac{N-2}{2}} u_n\left(g^{-1}(\varepsilon_n z + y_n)\right) \\ &= \varepsilon_n^{\frac{N-2}{2}} u_n\left(\varepsilon_n z + y_n\right) \\ &= \widetilde{u}_n(z), \end{aligned} \tag{3.7}$$

es decir, $\widetilde{u}_n$ es $\tau\mid_K$-equivariante. Además, f_n es K-invariante, es decir,

$$f_n(gz) = f\left(\varepsilon_n gz + y_n\right) = f\left(g(\varepsilon_n z + y_n)\right) \quad \forall g \in K.$$

Observemos que

$$\int f_n(z)\left|\widetilde{u}_n\right|^{2^*} dz = \int f(x)\left|u_n\right|^{2^*} dx \qquad \text{y} \qquad \left\|\widetilde{u}_n\right\|^2 = \left\|u_n\right\|^2.$$

En consecuencia, $(\widetilde{u}_n)$ es una sucesión acotada en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y una subsucesión satisface que

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_n &\rightharpoonup \widetilde{u} \text{ débilmente en } D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \\ \widetilde{u}_n &\to \widetilde{u} \text{ c.d. en } \mathbb{R}^N, \\ \widetilde{u}_n &\to \widetilde{u} \text{ en } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Se sigue de (3.7) que $\widetilde{u}$ es $\tau\mid_K$-equivariante. Queremos probar que $\widetilde{u} \neq 0$. Supongamos lo contrario, es decir, que $\widetilde{u} = 0$. Sea $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\operatorname{sop}(h) \subset B_1(z)$. Entonces

$$\left\langle \nabla E_{0,f}(u_n), h^2(R_n(\cdot - y_n))u_n \right\rangle = \int \nabla\widetilde{u}_n \cdot \nabla(h^2\widetilde{u}_n) - \int f_n(x)\left|\widetilde{u}_n\right|^{2^*} h^2,$$

y, como (u_n) es de Palais-Smale, se tiene que

$$\int \nabla\widetilde{u}_n \cdot \nabla(h^2\widetilde{u}_n) = \int f_n(x)\left|\widetilde{u}_n\right|^{2^*} h^2 + o(1).$$

Usando las desigualdades de Sobolev y de Hölder, así como (3.2) y la definición de δ, obtenemos

$$\begin{aligned}
S\left(\int |h\widetilde{u}_n|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \int |\nabla(h\widetilde{u}_n)|^2 = \int |h\nabla\widetilde{u}_n + \widetilde{u}_n\nabla h|^2 \\
&= \int \left(h^2 |\nabla\widetilde{u}_n|^2 + 2h\widetilde{u}_n\nabla\widetilde{u}_n\nabla h + \widetilde{u}_n^2 |\nabla h|^2\right) \\
&= \int \nabla\widetilde{u}_n(h^2\nabla\widetilde{u}_n + 2h\widetilde{u}_n\nabla h) + o(1) \\
&= \int \nabla\widetilde{u}_n\nabla(h^2\widetilde{u}_n) + o(1) \\
&= \int f_n |\widetilde{u}_n|^{2^*} h^2 + o(1) \\
&\leq \left(\max_{\overline{\Omega}} f\right)^{\frac{N-2}{N}} \left[\int |h\widetilde{u}|^{2^*}\right]^{\frac{2}{2^*}} \left[\int_{B_1(z)} f_n |\widetilde{u}_n|^{2^*}\right]^{\frac{2}{N}} + o(1) \\
&\leq \left(\max_{\overline{\Omega}} f\right)^{\frac{N-2}{N}} \delta^{\frac{2}{N}} \left[\int |h\widetilde{u}_n|^{2^*}\right]^{\frac{2}{2^*}} + o(1) \\
&\leq \frac{S}{2}\left[\int |h\widetilde{u}_n|^{2^*}\right]^{\frac{N-2}{N}} + o(1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int |h\widetilde{u}_n|^{2^*} \to 0 \qquad \text{para toda } h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Pero esto último sucede sólo si $\widetilde{u}_n \to 0$ en $L^{2^*}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, lo cual es una contradicción ya que

$$0 < \delta = \int_{B_1(0)} f_n |\widetilde{u}_n|^{2^*} \leq \left(\max_{\Omega} f\right) \int_{B_1(0)} |\widetilde{u}_n|^{2^*}.$$

Por lo tanto concluimos que $\widetilde{u} \neq 0$. Como la sucesión (y_n) está acotada, una subsucesión converge a un punto $y_0 \in \mathbb{R}^N$. Definimos

$$\widehat{u} := f(y_0)^{\frac{N-2}{4}}\widetilde{u}.$$

Entonces $\widehat{u} \neq 0$ y es $\tau|_K$-equivariante.

IV) Se cumple que $y_n \in \Omega$, $\varepsilon_n^{-1} dist(y_n, \partial\Omega) \to \infty$, **y** $\widehat{u}$ **es solución de** $(\wp_\infty)$. Como (ε_n) está acotada una subsucesión de ella converge. Si $\varepsilon_n \to \varepsilon > 0$ entonces, como $u_n \rightharpoonup 0$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$, tendríamos que $\widetilde{u}_n \rightharpoonup 0$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, lo cual no es posible pues acabamos de probar que $\widetilde{u} \neq 0$. En consecuencia, $\varepsilon_n \to 0$. Denotemos por

$$d_n := \varepsilon_n^{-1}\mathrm{dist}(y_n, \partial\Omega)$$

y supongamos, por contradicción, que (d_n) está acotada. Pasando a una subsucesión se tiene entonces que $d_n \to d \in [0, \infty)$. Denotemos por $\nu(\zeta)$ a la normal interior a Ω en cada punto $\zeta \in \partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ es suave y compacta existe $r_0 > 0$ tal que

$$B_{r_0}(\zeta + r_0\nu(\zeta)) \subset \overline{\Omega} \quad \text{y} \quad B_{r_0}(\zeta - r_0\nu(\zeta)) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega \qquad \forall \zeta \in \partial\Omega. \tag{3.8}$$

Sea $\zeta_n \in \partial\Omega$ tal que $|y_n - \zeta_n| = \operatorname{dist}(y_n, \partial\Omega)$. Como $\operatorname{dist}(y_n, \partial\Omega) \to 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} y_0 &= \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \zeta_n \in \partial\Omega, \\ \nu_n &: = \nu(\zeta_n) \to \nu(y) =: \nu. \end{aligned}$$

Consideraremos dos casos:
Supongamos primero que una subsucesión de (y_n) está en $\overline{\Omega}$. El hiperplano

$$P_n = \{z \in \mathbb{R}^N : \nu_n \cdot z = -d_n\}$$

es la imagen del espacio tangente a $\partial\Omega$ en ζ_n bajo la tranformación $x \mapsto \varepsilon_n^{-1}(x - y_n)$. Consideremos el plano límite

$$P = \{z \in \mathbb{R}^N : \nu \cdot z = -d\}$$

y el semiespacio

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{R}^N : \nu \cdot z > -d\}.$$

Probaremos que $\widetilde{u} \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$ y que satisface

$$-\Delta u = f(y_0)\,|u|^{2^*-2}\,u \ \text{ en } \ \mathbb{H}. \tag{3.9}$$

Sea $X \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{H}}$ compacto. Entonces existen $r > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $n \geq n_0$, X está contenido en la bola $B_r(-(d_n + r)\nu_n)$ de radio r tangente a P_n en $\varepsilon_n^{-1}(\zeta_n - y_n)$. La transformación $z \mapsto \varepsilon_n z + y_n$ aplica a $B_r(-(d_n + r)\nu_n)$ en la bola $B_{\varepsilon_n r}(\zeta_n - \varepsilon_n r\nu_n)$ de radio $\varepsilon_n r$ tangente a $\partial\Omega$ en ζ_n. Se sigue de (3.8) que

$$B_{\varepsilon_n r}(\zeta_n - \varepsilon_n r\nu_n) \subset B_{r_0}(\zeta_n - r_0\nu_n) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega \qquad \forall n \geq n_1$$

y, por tanto, que

$$X \subset B_r(-(d_n + r)\nu_n) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega_n \qquad \forall n \geq n_1,$$

donde

$$\Omega_n := \{z \in \mathbb{R}^N : \varepsilon_n z + y_n \in \Omega\}.$$

En particular, si $z \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{H}}$ entonces $z \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_n$ para $n \geq n_1$ y, por tanto, $\widetilde{u}_n(z) = 0$ para todo $n \geq n_1$. Pero $\widetilde{u}_n(z) \to \widetilde{u}(z)$ para casi todo $z \in \mathbb{R}^N$. En consecuencia

$\widetilde{u}(z) = 0$ para casi todo $z \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{H}$, es decir, $\widetilde{u} \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$. Procediendo de manera análoga, se tiene que para todo compacto $X \subset \mathbb{H}$ existen $r > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $X \subset \text{int}B_r((r - d_n)\nu_n)$ para todo $n \geq n_0$. La transformación $z \mapsto \varepsilon_n z + y_n$ aplica a $B_r((r - d_n)\nu_n)$ en la bola $B_{\varepsilon_n r}(\zeta_n + \varepsilon_n r\nu_n)$. Se sigue de (3.8) que

$$\text{int}B_{\varepsilon_n r}(\zeta_n + \varepsilon_n r\nu_n) \subset \text{int}B_{r_0}(\zeta_n + r_0\nu_n) \subset \Omega \qquad \forall n \geq n_1$$

y, por tanto, que

$$X \subset \text{int}B_r((r - d_n)\nu_n) \subset \Omega_n \qquad \forall n \geq n_1.$$

Así pues, si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{H})$, entonces $\text{sop}(\psi) \subset \Omega_n$ para toda $n \geq n_1$ y, en consecuencia, $\psi \in C_c^\infty(\Omega_n)$ para toda $n \geq n_1$. Se cumple entonces que

$$\int \nabla\widetilde{u}_n \nabla\psi - \int f_n \left|\widetilde{u}_n\right|^{2^*-2} \widetilde{u}_n\psi \leq \|\nabla E_{0,f}(u_n)\| \, \|\psi\| \to 0.$$

Por tanto,

$$\int \nabla\widetilde{u}\nabla\psi - \int f(y_0) \left|\widetilde{u}\right|^{2^*-2} \widetilde{u}\psi = 0 \qquad \forall\psi \in C_c^\infty(\mathbb{H}),$$

es decir, $\widetilde{u}$ es solución de (3.9). De la identidad de Pohozaev [23] se sigue que $\widetilde{u} = 0$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, si $(y_n) \in \overline{\Omega}$ entonces cumple que $\varepsilon_n^{-1}\text{dist}(y_n, \partial\Omega) \to \infty$.

Supongamos ahora que una subsucesión de (y_n) está en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. De manera totalmente análoga se prueba que también en este caso $\varepsilon_n^{-1}\text{dist}(y_n, \partial\Omega) \to \infty$.

En consecuencia, $y_n \notin \partial\Omega$. Además, si $y_n \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ entonces $B_{\varepsilon_n}(y_n) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ y, en consecuencia, $u_n \mid B_{\varepsilon_n}(y_n) = 0$, para n suficientemente grande, contradiciendo (3.2). Por tanto, $y_n \in \Omega$.

Finalmente, si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\text{sop}(\psi) \subset B_\rho(0)$ entonces, como $\varepsilon_n^{-1}\text{dist}(y_n, \partial\Omega) \to \infty$, se tiene que $B_{\varepsilon_n\rho}(y_n) \subset \Omega$ para $n \geq n_2$ y, en consecuencia, $\psi \in C_c^\infty(\Omega_n)$ para toda $n \geq n_2$. Argumentando como antes obtenemos que

$$\int \nabla\widetilde{u}\nabla\psi - \int f(y_0) \left|\widetilde{u}\right|^{2^*-2} \widetilde{u}\psi = 0 \qquad \forall\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

es decir, $\widehat{u} := f(y_0)^{\frac{N-2}{4}}\widetilde{u}$ es solución del problema $(\wp_\infty)$.

V) Definición de la sucesión τ-equivariante (v_n) y demostración de *(iv)*. Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ radialmente simétrica tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ en $B_1(0)$ y $\varphi \equiv 0$ fuera de $B_2(0)$. Tomemos una sucesión (r_n) en $(0, \infty)$ tal que

$$4r_n = \text{mín}\left\{\text{dist}(y_n, \partial\Omega), \;\; |gy_n - g'y_n| \;\; \text{con } [g] \neq [g'] \in G/K\right\}.$$

Entonces $\varepsilon_n^{-1}r_n \longrightarrow \infty$.

Sea

$$w_n(z) := \sum_{[g]\in G/K} \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(g)\widehat{u}(\varepsilon_n^{-1} g^{-1}(z-gy_n))\varphi(r_n^{-1}(z-gy_n)).$$

Como $G_{y_n} = K$ y $\widehat{u}$ es $\tau\,|_K$-equivariante, w_n no depende de la elección del representante de $[g]$ en G/K. Además, para toda $\gamma \in G$ se cumple que

$$\begin{aligned}
(\gamma w_n)(z) &= \tau(\gamma) \sum_{[g]\in G/K} \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(g)\widehat{u}(\varepsilon_n^{-1} g^{-1}(\gamma^{-1}z-gy_n))\varphi(r_n^{-1}(\gamma^{-1}z-gy_n)) \\
&= \sum_{[g]\in G/K} \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(\gamma g)\widehat{u}(\varepsilon_n^{-1} (\gamma g)^{-1}(z-\gamma g y_n))\varphi(r_n^{-1} g^{-1}(z-\gamma g y_n)) \\
&= \sum_{[\widetilde{g}]\in G/K} \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(\widetilde{g})\widehat{u}(\varepsilon_n^{-1} \widetilde{g}^{-1}(z-\widetilde{g}y_n))\varphi(r_n^{-1}(z-\widetilde{g}y_n)) \\
&= w_n(z),
\end{aligned}$$

es decir, $w_n \in H_0^1(\Omega)^\tau$.

Definimos

$$v_n := u_n - w_n \in H_0^1(\Omega)^\tau.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
&\left\| v_n - u_n + \sum_{[g]\in G/K} \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(g)\widehat{u}(\varepsilon_n^{-1} g^{-1}(\cdot - gy_n)) \right\|^2 \\
= &\left\| \sum_{[g]\in G/K} \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(g)\widehat{u}(\varepsilon_n^{-1} g^{-1}(\cdot - gy_n)) \left[1-\varphi\left(r_n^{-1}(\cdot - gy_n)\right)\right] \right\|^2 \\
\leq &\sum_{[g]\in G/K} f(y_0)^{\frac{2-N}{2}} \left\| \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} \widehat{u}(\varepsilon_n^{-1} g^{-1}(\cdot - gy_n)) \left[1-\varphi\left(r_n^{-1}(\cdot - gy_n)\right)\right] \right\|^2 \\
= &\,|G/K|\, f(y_0)^{\frac{2-N}{2}} \left\| \widehat{u}[1-\varphi\left(r_n^{-1}\varepsilon_n(\cdot)\right)] \right\|^2 \\
\leq &\, C_1 \frac{|G/K|}{f(y_0)^{\frac{N-2}{2}}} \left[\int\limits_{|z|>2\varepsilon_n^{-1}r_n} |\nabla \widehat{u}|^2 + (\varepsilon_n^{-1} r_n)^{-2} \int\limits_{\varepsilon_n^{-1}r_n<|z|<2\varepsilon_n^{-1}r_n} |\widehat{u}|^2 \right] \\
\leq &\, C_2 \frac{|G/K|}{f(y_0)^{\frac{N-2}{2}}} \left[\int\limits_{|z|>2r_n^{-1}\varepsilon_n} |\nabla \widehat{u}|^2 + \left(\int\limits_{|z|>2r_n^{-1}\varepsilon_n} |\widehat{u}|^{2^*} \right)^{2/2^*} \right].
\end{aligned}$$

En la última desigualdad usamos la desigualdad de Hölder. Como

$$\widehat{u} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)^N\}$$

y $\varepsilon_n^{-1} r_n \to \infty$ las dos últimas integrales tienden a 0 cuando $n \to \infty$. Esto prueba *(iv)*.

VI) Demostración de *(v)* **y de que** $\nabla E_{0,f}(v_n) \to 0$.
Sea $G/K = \{[g_1], ..., [g_m]\}$. Como $\varepsilon_n^{-1} |g_i y_n - g_j y_n| \to \infty$ si $i \neq j$ y como $\widetilde{u}_n \rightharpoonup \widetilde{u}$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, donde

$$\widetilde{u}_n(z) := \varepsilon_n^{\frac{N-2}{2}} u_n\left(\varepsilon_n z + y_n\right), \qquad \widehat{u} := f(y_0)^{\frac{N-2}{4}} \widetilde{u},$$

se tiene que

$$\widetilde{u}_n \circ g_1^{-1} - \widetilde{u} \circ g_1^{-1} \rightharpoonup 0 \qquad \text{y} \qquad \widetilde{u} \circ g_i^{-1}\left(\cdot + \frac{g_1 y_n - g_i y_n}{\varepsilon_n}\right) \rightharpoonup 0$$

débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para toda $i \neq 1$ y, en consecuencia, tomando en cuenta que $\|\cdot\|_0^2$ es invariante bajo translaciones y dilataciones y que u_n es τ-equivariante, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \left\| u_n - \sum_{i=1}^m \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(g_i) \widehat{u}(\varepsilon_n^{-1} g_i^{-1}(\cdot - g_i y_n)) \right\|^2 \\
= & \left\| \varepsilon_n^{\frac{N-2}{2}} u_n\left(\varepsilon_n \cdot + g_1 y_n\right) - \sum_{i=1}^m \tau(g_i) \widetilde{u}(g_i^{-1}(\cdot + \varepsilon_n^{-1}(g_1 y_n - g_i y_n)) \right\|^2 \\
= & \left\| \tau(g_1)(\widetilde{u}_n \circ g_1^{-1}) - \tau(g_1)(\widetilde{u} \circ g_1^{-1}) - \sum_{i\neq 1} \tau(g_i) \widetilde{u}(g_i^{-1}(\cdot + \varepsilon_n^{-1}(g_1 y_n - g_i y_n)) \right\|^2 \\
= & \left\| \tau(g_1)(\widetilde{u}_n \circ g_1^{-1}) - \sum_{i\neq 1} \tau(g_i) \widetilde{u}(g_i^{-1}(\cdot + \varepsilon_n^{-1}(g_1 y_n - g_i y_n)) \right\|^2 - \left\| \tau(g_1)(\widetilde{u} \circ g_1^{-1}) \right\|^2 + o(1) \\
= & \left\| \varepsilon_n^{\frac{N-2}{2}} u_n\left(\varepsilon_n \cdot + g_1 y_n\right) - \sum_{i\neq 1} \tau(g_i) \widetilde{u}(g_i^{-1}(\cdot + \varepsilon_n^{-1}(g_1 y_n - g_i y_n)) \right\|^2 - \|\widetilde{u}\|^2 + o(1) \\
= & \left\| u_n - \sum_{i\neq 1} \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(g_i) \widehat{u}(\varepsilon_n^{-1} g_i^{-1}(\cdot - g_i y_n)) \right\|^2 - f(y_0)^{\frac{2-N}{2}} \|\widehat{u}\|^2 + o(1).
\end{aligned}$$

Inductivamente obtenemos

$$\left\| u_n - \sum_{i=1}^m \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(g_i) \widehat{u}(\varepsilon_n^{-1} g_i^{-1}(\cdot - g_i y_n)) \right\|^2 = \|u_n\|^2 - m f(y_0)^{\frac{2-N}{2}} \|\widehat{u}\|^2 + o(1).$$

Se sigue de *(iv)* que

$$\|v_n\|^2 = \|u_n\|^2 - mf(y_0)^{\frac{2-N}{2}} \|\widehat{u}\|^2 + o(1).$$

Argumentando de manera análoga, usando el lema de Brezis-Lieb [5], obtenemos

$$|v_n|_{f,2^*}^{2^*} = |v_n|_{f,2^*}^{2^*} - mf(y_0)^{\frac{2-N}{2}} |\widehat{u}|_{2^*}^{2^*} + o(1),$$

y, en consecuencia,

$$E_{0,f}(v_n) = E_{0,f}(u_n) - |G/K|\, f(y_0)^{\frac{2-N}{2}} E_\infty(\widehat{u}) + o(1),$$

como se afirma en *(v)*.
Un argumento análogo, usando el Lema 8.9 de [29], demuestra que

$$\nabla E_{0,f}(v_n) \to 0.$$

Por lo tanto, (v_n) es una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale para $E_{0,f}$. ■

Usaremos el lema anterior para demostrar el Teorema 3.2.

Demostración del Teorema 3.2. Sea (u_n) una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale para $E_{a,f}$. Como en (3.1) se prueba que (u_n) es acotada. Por tanto existe una subsucesión $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)^\tau$. Argumentando como en el Lema 8.10 de [29] es fácil ver que $\nabla E_{a,f}(u) = 0$, que la sucesión $(u_n - u)$ es una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale para $E_{0,f}$ y que

$$E_{a,f}(u_n) - E_{0,f}(u_n - u) \to E_{a,f}(u).$$

Sea $u_n^1 := u_n - u$. Entonces (u_n^1) es una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale para $E_{0,f}$ tal que $u_n^1 \rightharpoonup 0$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$. Si $E_{0,f}(u_n^1) \to c \leq 0$, entonces de la igualdad

$$\frac{1}{N} \left\|u_n^1\right\|^2 = E_{0,f}(u_n^1) - \frac{1}{2^*} \left\langle \nabla E_{0,f}(u_n^1), u_n^1 \right\rangle$$

obtenemos que $\|u_n^1\| \to 0$ y que $c = 0$. Por tanto, $u_n \to u$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$ y el teorema se cumple con $m = 0$. Si $E_{0,f}(u_n^1) \to c > 0$ aplicamos el Lema 3.3 para obtener un subgrupo cerrado G_1 de G de índice finito, una sucesión $(y_{1,n})$ en Ω, una sucesión $(\varepsilon_{1,n})$ en $(0, \infty)$, una solución no trivial $\widehat{u}_1$ del problema límite $(\wp_\infty)$, y una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale (u_n^2) para $E_{0,f}$, con las siguientes propiedades:
(i) $G_{y_{1,n}} = G_1$ para toda $n \geq 1$ y $y_{1,n} \to y_1$ en $\overline{\Omega}$ cuando $n \to \infty$,
(ii) $\varepsilon_{1,n}^{-1} dist(y_{1,n}, \partial\Omega) \to \infty$ y $\varepsilon_{1,n}^{-1} |gy_{1,n} - g'y_{1,n}| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ si $[g] \neq [g'] \in$

G/G_1,
(iii) $\widehat{u}_1(gz) = \tau(g)\widehat{u}_1(z)$ para todas $z \in \mathbb{R}^N$, $g \in G_1$,
(iv) $u_n^2 = u_n^1 - \sum_{[g]\in G/K} \varepsilon_{1,n}^{\frac{2-N}{2}} \tau(g) f(y_1)^{\frac{2-N}{4}} \widehat{u}_1(g^{-1}\varepsilon_{1,n}^{-1}(\cdot - gy_{1,n})) + o(1) \quad \text{en} \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$,
(v) $E_{0,f}(u_n^2) = E_{0,f}(u_n^1) - |G/G_1|\, f(y_1)^{\frac{2-N}{2}} E_\infty(\widehat{u}_1) + o(1)$.
Como $E_{a,f}(u) = \frac{1}{N}\|u\|^2 \geq 0$ y $E_\infty(\hat{u}_1) \geq \frac{1}{N} S^{N/2}$, la igualdad *(v)* implica que

$$\lim_{n\to\infty} E_{a,f}(u_n) \geq \lim_{n\to\infty} E_{0,f}(u_n^1) \geq \lim_{n\to\infty} E_{0,f}(u_n^2) + \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#Gx}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) \frac{1}{N} S^{N/2}.$$

De la igualdad *(iv)* se sigue que $u_n^2 \rightharpoonup 0$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$. Aplicamos este razonamiento ahora a la sucesión (u_n^2) y así sucesivamente. La desigualdad

$$\lim_{n\to\infty} E_{0,f}(u_n^i) \geq \lim_{n\to\infty} E_{0,f}(u_n^{i+1}) + \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#Gx}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) \frac{1}{N} S^{N/2}$$

garantiza que $\lim_{n\to\infty} E_{0,f}(u_n^{m+1}) = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y, por tanto, que $\|u_n^{m+1}\| \to 0$. Esto concluye la demostración. ■

3.2. Existencia de soluciones Γ-invariantes

Consideremos el problema

$$(\wp_{a,f}^\Gamma) \qquad \begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x)\,|u|^{2^*-2}\,u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u(\gamma x) = u(x) & \forall x \in \Omega,\ \gamma \in \Gamma \end{cases}$$

donde Γ es un subgrupo cerrado de $O(N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto suave acotado y Γ-invariante, $N \geq 4$, $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev y $a, f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ son funciones continuas Γ-invariantes.

Queremos obtener resultados de existencia de soluciones positivas y de soluciones que cambian de signo para este problema.

3.2.1. Soluciones positivas Γ-invariantes

Consideremos el conjunto

$$M = \left\{ y \in \overline{\Omega} : \frac{\#\Gamma y}{f(y)^{\frac{N-2}{2}}} = \min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right\}.$$

Recordemos que M es cerrado (Proposición 2.10). El siguiente corolario del Teorema 3.2 describe el comportamiento de las sucesiones Γ-invariantes de Palais-Smale para $E_{a,f}$ en niveles de energía c cercanos al mínimo.

Corolario 3.4 *Sea (u_n) una sucesión Γ-invariante de Palais-Smale para $E_{a,f}$ en c.*
(a) Si $c < \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$, entonces una subsucesión de (u_n) converge en $H_0^1(\Omega)^\Gamma$.
(b) Si $c = \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$ entonces, o bien una subsucesión de (u_n) converge en $H_0^1(\Omega)^\Gamma$, o bien existen sucesiones (y_n) en Ω y (ε_n) en $(0, \infty)$ con las siguientes propiedades:
(b.1) $y_n \to y_0$ en M cuando $n \to \infty$, y $\Gamma_{y_n} = \Gamma_{y_0}$ para toda $n \geq 1$,
(b.2) $\varepsilon_n^{-1} \mathrm{dist}(y_n, \partial\Omega) \to \infty$, $\varepsilon_n^{-1} |\gamma y_n - \gamma' y_n| \to \infty$ si $[\gamma] \neq [\gamma'] \in \Gamma / \Gamma_{y_0}$,
(b.3) $\left\| u_n - \sum_{[\gamma] \in \Gamma/\Gamma_{y_0}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} \widehat{U}(\varepsilon_n^{-1}(\cdot - \gamma y_n)) \right\| \to 0$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, donde $\widehat{U}$ es, salvo signo, el instantón $U(x) = a_N \left(\frac{1}{1+|x|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}$.

Demostración: Aplicaremos el Teorema 3.2 con $G = \Gamma$ y $\tau \equiv 1$. Como $\frac{1}{N} S^{N/2}$ es la energía mínima de una solución no trivial del problema $(\wp_\infty)$, de la afirmación *(v)* del Teorema 3.2 se sigue que, si $m \geq 1$, entonces

$$c \geq \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{1}{N} S^{N/2}.$$

En consecuencia, si $c < \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$, necesariamente $m = 0$ y la afirmación *(iv)* garantiza entonces que una subsucesión $u_n \to u$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$. Esto demuestra *(a)*.

Si $c = \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$ y (u_n) no tiene ninguna subsucesión convergente, entonces el Teorema 3.2 garantiza la existencia de un subgrupo cerrado Γ_1 de Γ, de sucesiones (y_n) en Ω y (ε_n) en $(0, \infty)$, y de una solución no trivial $\widehat{U}$ del problema $(\wp_\infty)$ tales que $y_n \to y_0$ en $\overline{\Omega}$, $\Gamma_{y_n} = \Gamma_1$, $\varepsilon_n^{-1} dist(y_n, \partial\Omega) \to \infty$, $\varepsilon_n^{-1} |\gamma y_n - \gamma' y_n| \to \infty$ si $[\gamma] \neq [\gamma'] \in \Gamma / \Gamma_1$,

$$u_n = \sum_{[\gamma] \in \Gamma / \Gamma_{y_0}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} \widehat{U}(\gamma^{-1} \varepsilon_n^{-1}(\cdot - \gamma y_n)) + o(1) \text{ en } D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

y

$$\left(\frac{\#\Gamma y_n}{f(y_0)^{\frac{N-2}{2}}}\right) E_\infty(\widehat{U}) = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) \frac{1}{N} S^{N/2}.$$

Como $E_\infty(\widehat{U}) \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$ se sigue de esta última identidad que $y_n, y_0 \in M$, $\Gamma_{y_n} = \Gamma_{y_0}$, y $E_\infty(\widehat{U}) = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$. Como los instantones (2.14) son, salvo signo, las únicas soluciones no triviales de energía mínima de $(\wp_\infty)$, remplazando de ser necesario a la sucesión (ε_n) por un múltiplo positivo de ella, obtenemos que $\widehat{U} = \pm U$. Observemos que, como $\widehat{U}$ es radialmente simétrica,

$$\widehat{U}(\gamma^{-1}\varepsilon_n^{-1}(\cdot - \gamma y_n)) = \widehat{U}(\varepsilon_n^{-1}(\cdot - \gamma y_n)).$$

Esto concluye la demostración de *(b)*. ■

Probaremos ahora el resultado de existencia de soluciones positivas enunciado en la introducción (Teorema 1.13). Como en el capítulo anterior requerimos que las funciones a y f satisfagan, además de las condiciones (a_1) y (f_1), también las condiciones (a_2) y (f_2).

Teorema 3.5 *Si $N \geq 4$, a y f satisfacen las condiciones (a_1), (f_1), (a_2) y (f_2) y $M \cap \Omega \neq \emptyset$, entonces el problema $(\wp^\Gamma_{a,f})$ tiene al menos una solución positiva que satisface*

$$\frac{1}{N}\|u\|_a^2 = \mu^\Gamma(a,f).$$

Demostración: Sea (u_n) una sucesión minimizante para $E_{a,f}$ en $\mathcal{N}^\Gamma_{a,f}$, es decir, $u_n \in \mathcal{N}^\Gamma_{a,f}$ y

$$E_{a,f}(u_n) \to \inf_{\mathcal{N}^\Gamma_{a,f}} E_{a,f} =: \mu^\Gamma(a,f)$$

Por el principio variacional de Ekeland [29, Teorema 8.5] podemos suponer que (u_n) es una sucesión Γ-invariante de Palais-Smale para $E_{a,f}$. En la Proposición 2.14 probamos que

$$\mu^\Gamma(a,f) < \frac{1}{N}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) S^{\frac{N}{2}}.$$

El corolario anterior garantiza que una subsucesión de (u_n) converge fuertemente a $u_0 \in \mathcal{N}^\Gamma_{a,f}$ y, como $E_{a,f}$ es de clase C^1, se tiene que u_0 es un mínimo de $E_{a,f}$ en $\mathcal{N}^\Gamma_{a,f}$. Dado que $|u_0| \in \mathcal{N}^\Gamma_{a,f}$ y $E_{a,f}(|u_0|) = E_{a,f}(u_0)$, se tiene que $|u_0|$ es también un mínimo de $E_{a,f}$ en $\mathcal{N}^\Gamma_{a,f}$, es decir, $|u_0|$ es una solución positiva de $(\wp^\Gamma_{a,f})$. ■

3.2.2. Soluciones τ-equivariantes

Supondremos ahora que Γ es el núcleo de un epimorfismo continuo $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$, y que Ω, a y f son G-invariantes. El siguiente corolario del Teorema 3.2 describe el comportamiento de las sucesiones τ-invariantes de Palais-Smale para $E_{a,f}$ en niveles de energía c cercanos al mínimo. De nuevo consideramos el conjunto

$$M = \left\{ y \in \overline{\Omega} : \frac{\#\Gamma y}{f(y)^{\frac{N-2}{2}}} = \min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right\}.$$

Corolario 3.6 *Supongamos que $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ es un epimorfismo con $\ker\tau = \Gamma$. Sea (u_n) una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale para $E_{a,f}$ en c.*

(a) Si $c < \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2}}$, entonces una subsucesión de (u_n) converge en $H_0^1(\Omega)^\tau$.

(b) Si $c = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2}}$ entonces, o bien una subsucesión de (u_n) converge en $H_0^1(\Omega)^\tau$, o bien existen sucesiones (y_n) en M y (ε_n) en $(0,\infty)$ con las siguientes propiedades:

(b.1) $y_n \to y_0$ en M cuando $n \to \infty$, y $\Gamma_{y_n} = \Gamma_{y_0} \subset \Gamma$ para toda $n \geq 1$,

(b.2) $\varepsilon_n^{-1}\mathrm{dist}(y_n, \partial\Omega) \to \infty$, $\varepsilon_n^{-1} |gy_n - g'y_n| \to \infty$ si $[g] \neq [g'] \in G/G_{y_0}$,

(b.3) $\left\| u_n - \sum_{[g]\in G/\Gamma_{y_0}} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(g) \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} \widehat{U}(\varepsilon_n^{-1}(\cdot - gy_n)) \right\| \to 0$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, donde $\widehat{U}$ es, salvo signo, el instantón $U(x) = a_N \left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}$.

Demostración: Supongamos que ninguna subsucesión de (u_n) converge y que

$$c \leq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2}}. \tag{3.10}$$

Demostraremos entonces que

$$c = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right) \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2}}$$

y que existen sucesiones (y_n) en M y (ε_n) en $(0,\infty)$ que satisfacen *(b.1)-(b.3)*. Esto demuestra el resultado.

Con estas hipótesis, el Teorema 3.2 asegura que existen un subgrupo cerrado G_1 de G, sucesiones (y_n) en Ω y (ε_n) en $(0,\infty)$, y una solución no trivial $\widehat{u}$ del problema $(\wp_\infty)$

tales que $y_n \to y_0$ en $\overline{\Omega}$, $G_{y_n} = G_1$, $\varepsilon_n^{-1} dist(y_n, \partial\Omega) \to \infty$, $\varepsilon_n^{-1} |gy_n - g'y_n| \to \infty$ si $[g] \neq [g'] \in G/G_1$, $\widehat{u}$ es $\tau|_{G_1}$-equivariante, y

$$c \geq \frac{|G/G_1|}{f(y_0)^{\frac{N-2}{2}}} E_\infty(\widehat{u}). \tag{3.11}$$

Supongamos que $\tau|_{G_1}\colon G_1 \to \mathbb{Z}/2$ es un epimorfismo y tomemos $g_\tau \in G_1$ con $\tau(g_\tau) = -1$. Entonces $\widehat{u}$ satisface $\widehat{u}(z) = -\widehat{u}(g_\tau z)$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$, es decir, $\widehat{u}$ cambia de signo, $\widehat{u}^-(z) = -\widehat{u}^+(g_\tau z)$ y, por tanto, $\|\widehat{u}^\pm\|^2 = |\widehat{u}^\pm|_{2^*}^{2^*}$. En consecuencia, $\widehat{u}^\pm$ está en la variedad de Nehari

$$\mathcal{N}_\infty = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : u \neq 0, \ \|u\|^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\}$$

asociada al funcional E_∞ y cumple

$$E_\infty(\widehat{u}) = E_\infty(\widehat{u}^+) + E_\infty(\widehat{u}^-) = 2E_\infty(\widehat{u}^+) \geq \frac{2}{N} S^{N/2}.$$

Si $E_\infty(\widehat{u}) = \frac{2}{N} S^{N/2}$ entonces $E_\infty(\widehat{u}^+) = \frac{1}{N} S^{N/2}$ y $\widehat{u}^+$ una solución de $(\wp_\infty)$, lo cual es imposible ya que $\widehat{u}^+$ se anula en un abierto de $\mathbb{R}^N$. En consecuencia, $E_\infty(\widehat{u}) > \frac{2}{N} S^{N/2}$ y (3.11) implica que

$$c > \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{2}{N} S^{N/2},$$

lo que contradice (3.10).
Por tanto, $\tau|_{G_1} \equiv 1$, es decir, $G_1 \subset \Gamma$ y, como $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ es un epimorfismo, se tiene que $|G/G_1| \cong 2\,|\Gamma/G_1|$. Se sigue de (3.11) que

$$c \geq \left(\frac{2\,|\Gamma/G_1|}{f(y_0)^{\frac{N-2}{2}}} \right) E_\infty(\widehat{u}) \geq \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{2}{N} S^{N/2},$$

y (3.10) implica que

$$\left(\frac{2\,|\Gamma/G_1|}{f(y_0)^{\frac{N-2}{2}}} \right) E_\infty(\widehat{u}) = c = \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{2}{N} S^{N/2}.$$

En consecuencia, $\Gamma_{y_n} = \Gamma_{y_0} = G_1$, $y_n, y_0 \in M$ y $E_\infty(\widehat{u}) = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$. Como los instantones (2.14) son, salvo signo, las únicas soluciones no triviales de energía mínima de $(\wp_\infty)$, de la propiedad *(iv)* del Teorema 3.2 se sigue que, remplazando a la sucesión (ε_n) de ser necesario por un múltiplo positivo de ella,

$$u_n = \sum_{[g] \in G/G_1} f(y_0)^{\frac{2-N}{4}} \tau(g) \varepsilon_n^{\frac{2-N}{2}} \widehat{U}(\varepsilon_n^{-1}(\cdot - gy_n)) + o(1),$$

donde $\widehat{U} = \pm U$. Esto concluye la demostración. ■

Como consecuencia de este resultado obtenemos la existencia de soluciones τ-equivariantes.

Teorema 3.7 *Sea $N \geq 4$. Supongamos que a y f satisfacen las condiciones (a_1), (f_1), (a_2) y (f_2). Si Γ es el núcleo de un epimorfismo continuo $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ definido en un subgrupo cerrado G de $O(N)$ tal que Ω, a y f son G-invariantes y $Gy \neq \Gamma y$ para algún $y \in M \cap \Omega$, entonces el problema $(\wp^{\Gamma}_{a,f})$ tiene al menos un par de soluciones τ-equivariantes $\pm u$ que satisfacen*

$$\frac{1}{N} \|u\|_a^2 = \mu^\tau(a, f).$$

Demostración: Como $Gy \neq \Gamma y$ para algún $y \in M \cap \Omega$, tenemos que $M^-_{\tau,s} \neq \emptyset$ para $s > 0$ suficientemente pequeña, y el Corolario (2.16) asegura que

$$\mu^\tau(a, f) < \frac{2}{N} \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) S^{\frac{N}{2}}.$$

Sea (u_n) una sucesión minimizante para $E_{a,f}$ en $\mathcal{N}^\tau_{a,f}$, es decir, $u_n \in \mathcal{N}^\tau_{a,f}$ y

$$E_{a,f}(u_n) \to \inf_{\mathcal{N}^\tau_{a,f}} E_{a,f} =: \mu^\tau(a, f)$$

Por el principio variacional de Ekeland [29, Teorema 8.5] podemos suponer que (u_n) es una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale para $E_{a,f}$. El corolario anterior garantiza que una subsucesión de (u_n) converge fuertemente a $u_0 \in \mathcal{N}^\tau_{a,f}$ y, como $E_{a,f}$ es de clase C^1, se tiene que u_0 es un mínimo de $E_{a,f}$ en $\mathcal{N}^\tau_{a,f}$, es decir, u_0 es una solución no trivial de $(\wp^\tau_{a,f})$. ■

En la Sección 4.5 probaremos que la solución obtenida es $(\Gamma, 2)$-nodal concluyendo así la demostración del Teorema 1.15 enunciado en la introducción.

Capítulo 4

Multiplicidad de soluciones Γ-invariantes

4.1. Teoría equivariante de Lusternik-Schnirelmann

Sea X un espacio topológico. Una involución en X es una función continua $\tau_X : X \to X$ que cumple $\tau_X \circ \tau_X = id_X$. Cada involución define una acción del grupo $\mathbb{Z}/2$ en X y viceversa. La involución $\tau_X = id_X$ corresponde a la acción trivial. En nuestras aplicaciones consideraremos la involución inducida por un homomorfismo $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ cuyo núcleo es $\Gamma = \ker \tau$ en el espacio de órbitas $\mathbb{R}^N/\Gamma$, definida como sigue:

$$\tau : \mathbb{R}^N/\Gamma \to \mathbb{R}^N/\Gamma, \qquad \tau(\Gamma y) = \Gamma(g_\tau y),$$

donde $g_\tau \in \tau^{-1}(-1)$, véase (2.19). Consideraremos también la involución antípoda en $\mathcal{N}^\tau_{a,f}$ dada por $u \mapsto -u$.

Sean X, Y espacios topológicos con involuciones $\tau_X : X \to X$ y $\tau_Y : Y \to Y$ respectivamente. Diremos que una función continua $f : X \to Y$ es $\mathbb{Z}/2$-equivariante si $\tau_Y \circ f = f \circ \tau_X$. Dos funciones $\mathbb{Z}/2$-equivariantes $f_0, f_1 : X \to Y$ son $\mathbb{Z}/2$-homotópicas si existe una homotopía $\Theta : X \times [0,1] \to Y$ tal que $\Theta(x,0) = f_0(x)$, $\Theta(x,1) = f_1(x)$ y $\Theta(\tau_X x, t) = \tau_Y \Theta(x,t)$ para todas $x \in X$, $t \in [0,1]$. Un subconjunto A de X es $\mathbb{Z}/2$-invariante si $\tau_X a \in A$ para toda $a \in A$.

Definición 4.1 *La $\mathbb{Z}/2$-categoría de una función $\mathbb{Z}/2$-equivariante $f : X \to Y$ es el mínimo entero*

$$k =: \mathbb{Z}/2\text{-cat}(f)$$

tal que existen k subconjuntos abiertos $\mathbb{Z}/2$-invariantes $X_1, ..., X_k$ de X que satisfacen:
(i) $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$.
(ii) Para cada $i = 1, ..., k$, existe un punto $y_i \in Y$ y una función $\mathbb{Z}/2$-equivariante

$\alpha_i : X_i \to \{y_i, \tau_Y y_i\}$ tal que la restricción $f\mid_{X_i}: X_i \to Y$ es $\mathbb{Z}/2$-homotópica a α_i. Si no existe tal cubierta definimos $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(f) := \infty$.

Si A es un subconjunto $\mathbb{Z}/2$-invariante de X y $\iota : A \hookrightarrow X$ es la inclusión denotamos

$$\mathbb{Z}/2\text{-}cat_X(A) := \mathbb{Z}/2\text{-}cat(\iota) \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}/2\text{-}cat(X) := \mathbb{Z}/2\text{-}cat_X(X).$$

Si $\tau_X = id_X$ entonces

$$\mathbb{Z}/2\text{-}cat_X(A) =: cat_X(A), \qquad \mathbb{Z}/2\text{-}cat(X) := cat(X)$$

es simplemente la categoría de Lusternik-Schnirelmann [29, Definición 5,4].

Lema 4.2 *a) Si $f : X \to Y$ y $h : Y \to Z$ son $\mathbb{Z}/2$-equivariantes se cumple*

$$\mathbb{Z}/2\text{-cat}(h \circ f) \leq \text{mín}\{\mathbb{Z}/2\text{-cat}(f), \mathbb{Z}/2\text{-cat}(h)\}.$$

En particular, $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(f) \leq \mathbb{Z}/2\text{-cat}(Y)$.
b) Si $f_0, f_1 : X \to Y$ son $\mathbb{Z}/2$-homotópicas, entonces $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(f_0) = \mathbb{Z}/2\text{-cat}(f_1)$.

Demostración: a) Sean $Y_1, ..., Y_m$ subconjuntos abiertos $\mathbb{Z}/2$-invariantes de Y tales que $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ y tales que existen $z_1, ..., z_m \in Z$ y funciones $\mathbb{Z}/2$-equivariantes $\beta_i : Y_i \to \{z_i, \tau_Z z_i\}$ que son $\mathbb{Z}/2$-homotópicas a $h|_{Y_i}$. Entonces $X_i := f^{-1}(Y_i)$ es un subconjunto abierto $\mathbb{Z}/2$-invariante de X, se cumple que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$, y las funciones $\alpha_i := \beta_i \circ f : X_i \to \{z_i, \tau_Z z_i\}$ son $\mathbb{Z}/2$-homotópicas a $h \circ f|_{X_i}$. Por tanto,

$$\mathbb{Z}/2\text{-}cat(h \circ f) \leq \mathbb{Z}/2\text{-}cat(h).$$

Análogamente se prueba que

$$\mathbb{Z}/2\text{-}cat(h \circ f) \leq \mathbb{Z}/2\text{-}cat(f).$$

b) Sean $X_1, ..., X_m$ subconjuntos abiertos $\mathbb{Z}/2$-invariantes de X tales que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ y tales que existen $y_1, ..., y_m \in Y$ y funciones $\mathbb{Z}/2$-equivariantes $\alpha_i : X_i \to \{y_i, \tau_Y y_i\}$ que son $\mathbb{Z}/2$-homotópicas a $f_0|_{X_i}$. Como f_0 y f_1 son $\mathbb{Z}/2$-homotópicas, α_i es $\mathbb{Z}/2$-homotópica a $f_1|_{X_i}$. Esto prueba que

$$\mathbb{Z}/2\text{-}cat(f_0) \geq \mathbb{Z}/2\text{-}cat(f_1)$$

La otra desigualdad es análoga. ■

Denotaremos por $\widehat{X}$ al espacio de $\mathbb{Z}/2$-órbitas de X, y por $q_X : X \to \widehat{X}$ a la correspondiente aplicación cociente. Si $f : Y \to X$ es una función $\mathbb{Z}/2$-equivariante, denotaremos por $\widehat{f} : \widehat{Y} \to \widehat{X}$ a la función inducida por f. Decimos que la acción de $\mathbb{Z}/2$ en X dada por la involución τ_X es libre, si $\tau_X x \neq x$ para toda $x \in X$.

Lema 4.3 *Supongamos que la acción de $\mathbb{Z}/2$ en X es libre. Entonces se cumple lo siguiente:*
a) Para toda función $\mathbb{Z}/2$-equivariante $f : Y \to X$ se cumple que $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(f) = \text{cat}(\widehat{f})$.
b) Si existen funciones continuas $f : Y \to X$ y $h : X \to Z$ tales que h es $\mathbb{Z}/2$-invariante, es decir, $h(\tau_X x) = h(x)$ para toda $x \in X$, entonces

$$\text{cat}(h \circ f) \leq \mathbb{Z}/2\text{-cat}(X).$$

Demostración: a) Observemos que, si U es $\mathbb{Z}/2$-invariante y abierto en Y entonces $\widehat{U} := q_Y(U)$ es abierto en $\widehat{Y}$. Además, toda $\mathbb{Z}/2$-homotopía $\Theta : U \times [0,1] \to X$ tal que $\Theta(y,0) = f(y)$ y $\Theta(y,1) \in \{x, \tau_X x\}$ para algún $x \in X$ y todo $y \in Y$, induce una homotopía $\widehat{\Theta} : \widehat{U} \times [0,1] \to \widehat{X}$ tal que $\widehat{\Theta}(q_Y(y), 0) = \widehat{f}(q_Y(y))$ y $\widehat{\Theta}(q_Y(y), 1) = q_X(x)$. De aquí se sigue fácilmente que

$$\mathbb{Z}/2\text{-cat}(f) \geq \text{cat}(\widehat{f}).$$

Para probar la desigualdad opuesta observemos que, si $\widehat{U}$ es abierto en $\widehat{Y}$ y $\widehat{\Theta} : \widehat{U} \times [0,1] \to \widehat{X}$ es una homotopía tal que $\widehat{\Theta}(\widehat{y}, 0) = \widehat{f}(\widehat{y})$ y $\widehat{\Theta}(\widehat{y}, 1) = \widehat{x}$ para algún $\widehat{x} \in X$ y todo $\widehat{y} \in Y$, entonces $U := q_Y^{-1}(\widehat{U})$ es $\mathbb{Z}/2$-invariante y abierto en Y. Como la acción de $\mathbb{Z}/2$ en X es libre, $q_X : X \to \widehat{X}$ es una aplicación cubriente y tiene, por tanto, la propiedad de levantamiento único de homotopías [25, Cap.2, Sec.2, Teoremas 2 y 3]. Sea $\Theta : U \times [0,1] \to X$ un levantamiento de $\widehat{\Theta} \circ (q_Y \times id) : U \times [0,1] \to \widehat{X}$ que empieza con f, es decir,

$$\Theta(y,0) = f(y) \quad \text{y} \quad \widehat{\Theta}(q_Y(y), t) = q_X(\Theta(y,t)) \quad \forall y \in U,\ t \in [0,1]. \tag{4.1}$$

Entonces, $\Theta(y,1) \in q_X^{-1}(\widehat{x})$ para todo $y \in U$ y, dado que $\Phi(y,t) := \tau_X \Theta(\tau_Y y, t)$ también satisface (4.1), la unicidad del levantamiento implica que $\Theta(\tau_Y y, t) = \tau_X \Theta(y,t)$ para todas $y \in U$, $t \in [0,1]$, es decir, Θ es una $\mathbb{Z}/2$-homotopía. De esta observación se deduce fácilmente que

$$\mathbb{Z}/2\text{-cat}(f) \leq \text{cat}(\widehat{f}).$$

b) Sea $q : X \to \widehat{X}$ la aplicación cociente. Como h es $\mathbb{Z}/2$-invariante, existe una función continua $\widehat{h} : \widehat{X} \to Z$ tal que $\widehat{h} \circ q = h$. Por el lema anterior,

$$cat(h \circ f) = cat(\widehat{h} \circ q \circ f) \leq cat(q \circ f) \leq cat(\widehat{X}) = \mathbb{Z}/2\text{-}cat(X)$$

como afirma el enunciado. ■

La categoría equivariante de Lusternik-Schnirelmann proporciona una cota inferior para el número de pares de puntos críticos de un funcional par en una variedad de

Hilbert. Recordemos que un funcional $\phi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 satisface la condición de Palais-Smale $(PS)_c$ en c si toda sucesión (u_m) en M tal que

$$\phi(u_m) \to c \quad \text{y} \quad \nabla\phi(u_m) \to 0$$

contiene una subsucesión convergente. Denotamos

$$\phi^d := \{u \in M : \phi(u) \leq d\}.$$

Una demostración del siguiente resultado clásico se encuentra, por ejemplo, en [12, Teorema 1,1], [27, Teorema 5.7].

Teorema 4.4 *Sea $\phi : M \to \mathbb{R}$ un funcional par de clase C^1 definido en una subvariedad M de clase C^2 de un espacio de Hilbert que es simétrica respecto al origen (es decir, $u \in M \Leftrightarrow -u \in M$). Supongamos que ϕ está acotada inferiormente y satisface la condición $(PS)_c$ para toda $c \leq d$. Entonces ϕ tiene al menos $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\phi^d)$ pares de puntos críticos $\pm u$ con valores críticos $\phi(\pm u) \leq d$.*

4.2. Infinidad de soluciones Γ-invariantes

El Corolario 3.6 garantiza que, si todas las Γ-órbitas de Ω son infinitas, entonces $E_{a,f} : H_0^1(\Omega)^\tau \to \mathbb{R}$ satisface $(PS)_c^\tau$ para todo homomorfismo $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ y todo $c \in \mathbb{R}$. Usaremos este hecho para probar la existencia de una infinidad de soluciones en ese caso. Para poder aplicar el teorema de Lusternik-Schnirelmann requerimos verificar que la restricción de $E_{a,f}$ a la variedad de Nehari $\mathcal{N}_{a,f}^\tau$ satisface $(PS)_c^\tau$.

4.2.1. La propiedad de Palais-Smale en la variedad de Nehari

Sea $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ un homomorfismo continuo con $\Gamma = \ker \tau$. Consideremos la restricción del funcional

$$E_{a,f} : H_0^1(\Omega)^\tau \to \mathbb{R}, \qquad E_{a,f} = \frac{1}{2}\|u\|_a^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{f,2^*}^{2^*}$$

a la variedad de Nehari

$$\mathcal{N}_{a,f}^\tau := \{u \in H_0^1(\Omega)^\tau : u \neq 0, \ \|u\|_a^2 = |u|_{f,2^*}^{2^*}\}.$$

El gradiente $\nabla(E_{a,f}|_{\mathcal{N}_{a,f}^\tau})(u)$ de la restricción de $E_{a,f}$ a $\mathcal{N}_{a,f}^\tau$ es la proyección ortogonal del gradiente $\nabla E_{a,f}(u)$ de $E_{a,f}$ sobre el espacio tangente a $\mathcal{N}_{a,f}^\tau$ en u,

$$T_u\mathcal{N}_{a,f}^\tau = \{v \in H_0^1(\Omega)^\tau : 2\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + a(x)uv) = 2^* \int f(x)|u|^{2^*-2}uv\}.$$

Proposición 4.5 *Sea* (u_n) *una sucesión en* $\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}$ *tal que* $E_{a,f}(u_n) \to c$. *Entonces*

$$\nabla(E_{a,f} \mid_{\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}})(u_n) \to 0 \quad \textit{si y sólo si} \quad \nabla E_{a,f}(u_n) \to 0.$$

Es decir, (u_n) *es una sucesión* τ*-equivariante de Palais-Smale para* $E_{a,f} \mid_{\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}}$ *si y sólo si es una sucesión* τ*-equivariante de Palais-Smale para* $E_{a,f}$.

Demostración: Sea $F : H^1_0(\Omega)^\tau \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ el funcional definido por $F(u) = \|u\|^2_a - |u|^{2^*}_{f,2^*}$. Entonces $\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}(\Omega) = F^{-1}(0)$. La derivada de F en u cumple

$$\begin{aligned} F'(u)v &= 2\int_\Omega (\nabla u \nabla v + a(x)uv) - 2^* \int f(x)\,|u|^{2^*-2}\,uv \qquad (4.2)\\ &= 2^* E'_{a,f}(u)v - (2^*-2)\int_\Omega (\nabla u \nabla v + a(x)uv) \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega)^\tau. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\nabla F(u) = 2^* \nabla E_{a,f}(u) - (2^*-2)u. \tag{4.3}$$

Sea t_n tal que

$$\nabla E_{a,f}(u_n) = t_n \nabla F(u_n) + \nabla(E_{a,f} \mid_{\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}(\Omega)})(u_n). \tag{4.4}$$

Como $u_n \in \mathcal{N}^{\tau}_{a,f}(\Omega)$, se cumple que $\langle \nabla E_{a,f}(u_n), u_n \rangle = 0$ y $E_{a,f}(u_n) = \frac{1}{N}\|u_n\|^2_a$. En consecuencia, (u_n) está acotada. Multiplicando (4.4) escalarmente con u_n y usando (4.3), obtenemos

$$0 = t_n(2-2^*)\|u_n\|^2_a + o(1) = \frac{4N}{N-2} c t_n + o(1).$$

Por lo tanto, $t_n \to 0$. Usando las desigualdades de Hölder y de Sobolev, a partir de (4.2) concluímos que

$$|F'(u)v| \le C\,\|u\|^{2^*-1}\,\|v\|, \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega)^\tau$$

para alguna constante positiva C. En particular, $\|\nabla F(u_n)\| \le C\,\|u_n\|^{2^*-1}$. Por tanto, $(\nabla F(u_n))$ está acotada y se sigue de (4.4) que $\nabla E(u_n) \to 0$, como afirma el enunciado.
■

4.2.2. Infinidad de soluciones Γ-invariantes

Empecemos observando lo siguiente.

Lema 4.6 *Para todo subgrupo cerrado* Γ *de* $O(N)$ *y para todo abierto* Γ*-invariante* Ω *de* $\mathbb{R}^N$ *se cumple que* $\dim H_0^1(\Omega)^\Gamma = \infty$.

Demostración: Sea Γx una Γ-órbita principal en Ω y sea V una vecindad tubular de Γx en Ω, es decir, una vecindad tal que existe un homeomorfismo Γ-equivariante $\phi : \mathbb{B}^m \times \Gamma x \cong V$ donde $\mathbb{B}^m$ es una bola de dimensión $m = N - \dim(\Gamma x)$. La aplicación

$$\Phi : H_0^1(V)^\Gamma \to H_0^1(\mathbb{B}^m), \qquad \Phi(u) = u(\phi(\cdot, x)),$$

es un isomorfismo lineal. Dado que $H_0^1(V)^\Gamma$ es un subespacio vectorial de $H_0^1(\Omega)^\Gamma$, concluímos que

$$\dim H_0^1(\Omega)^\Gamma \geq \dim H_0^1(V)^\Gamma = \dim H_0^1(\mathbb{B}^m) = \infty,$$

como afirma el enunciado. ∎

Este resultado no es cierto, en general, si cambiamos $H_0^1(\Omega)^\Gamma$ por $H_0^1(\Omega)^\tau$. Por ejemplo, si Ω es una bola o una esfera en $\mathbb{R}^N$ y $\tau : O(N) \to \mathbb{Z}/2$ es la función que a cada matriz en $O(N)$ le asocia su determinante, entonces $\ker \tau = SO(N)$. En este caso, $H_0^1(\Omega)^{SO(N)}$ es el espacio de funciones radiales, que es de dimensión infinita, mientras que $H_0^1(\Omega)^\tau = \{0\}$.

Teorema 4.7 *Si* a *y* f *satisfacen* (a_1) *y* (f_1), *y si todas las* Γ*-órbitas de* Ω *son infinitas entonces el problema* $(\wp_{a,f}^\Gamma)$ *tiene una infinidad de soluciones.*

Demostración: El funcional $E_{a,f} : \mathcal{N}_{a,f}^\Gamma \to \mathbb{R}$ es par y está acotado inferiormente. Como todas las Γ-órbitas de Ω son infinitas, el Corolario 3.4 junto con la Proposición 4.5 garantizan que este funcional satisface la condición de Palais-Smale $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. El teorema de Lusternik-Schnirelmann (Teorema 4.4) garantiza que $E_{a,f} : \mathcal{N}_{a,f}^\Gamma \to \mathbb{R}$ tiene al menos $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\mathcal{N}_{a,f}^\Gamma)$ puntos críticos. Ahora bien, $\mathcal{N}_{a,f}^\Gamma$ es radialmente difeomorfo a la esfera unitaria $\mathcal{S}^\Gamma$ en $H_0^1(\Omega)^\Gamma$. El lema anterior garantiza que dicha esfera es de dimensión infinita. En consecuencia, usando el Lema 4.3 obtenemos

$$\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\mathcal{N}_{a,f}^\Gamma) = \mathbb{Z}/2\text{-cat}(\mathcal{S}^\Gamma) = \text{cat}(\mathbb{R}P^\infty) = \infty,$$

donde $\mathbb{R}P^\infty$ es el espacio proyectivo real de dimensión infinita. Por tanto, $(\wp_{a,f}^\Gamma)$ tiene una infinidad de soluciones. ∎

4.3. La función bariórbita

Supondremos de aquí en adelante la siguiente condición de no-existencia:

(ne) $E_{0,f}$ no alcanza su ínfimo en $\mathcal{N}_{0,f}^{\Gamma}$.

El Corolario 3.4 implica que, si (ne) se cumple, entonces

$$\mu^{\Gamma}(0,f) := \inf_{\mathcal{N}_{0,f}^{\Gamma}} E_{0,f} = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}. \tag{4.5}$$

Es bien sabido que, si $\Gamma = \{1\}$ y f es constante, la condición (ne) siempre se cumple (véase, por ejemplo, [27, Cap. III, Teorema 1.2]). De la igualdad (4.5) se sigue que (ne) no se cumple si todas las Γ-órbitas de Ω son infinitas (pero en ese caso acabamos de probar la existencia de una infinidad de soluciones, véase Teorema 4.7).

Consideremos el conjunto

$$M := \left\{ y \in \overline{\Omega} : \frac{\#\Gamma y}{f(y)^{\frac{N-2}{2}}} = \min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right\}.$$

Observemos que, para todos $y \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \Gamma$, se cumple que $\Gamma_{\gamma y} = \gamma \Gamma_y \gamma^{-1}$, es decir, el grupo de isotropía de γy es conjugado al grupo de isotropía de y, y todos los subgrupos conjugados a Γ_y son grupos de isotropía de algún punto en la Γ-órbita de y. Consideremos el conjunto (finito) de todas las clases de conjugación de grupos de isotropía de puntos de M, y escojamos un representante $\Gamma_i \subset \Gamma$, $i = 1, .., m$, en cada una de tales clases. Denotemos por

$$V^i := \{z \in \mathbb{R}^N : \gamma z = z \quad \forall \gamma \in \Gamma_i\}$$

al espacio de puntos fijos de $\mathbb{R}^N$ bajo la acción de Γ_i. Denotemos por

$$M^i := \{y \in M : \Gamma_y = \Gamma_i\}.$$

Notemos que M es la unión de subconjuntos cerrados, ajenos por pares,

$$M = \Gamma M^1 \cup \Gamma M^2 \cup \cdots \cup \Gamma M^m, \qquad \Gamma M^i \cap \Gamma M^j = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$

donde

$$\Gamma M^i := \{\gamma y : \gamma \in \Gamma,\ y \in M^i\} = \{y \in M : (\Gamma_y) = (\Gamma_i)\}.$$

De la definición de M se sigue que f es constante en cada ΓM^i. Denotemos por

$$f_i := f(\Gamma M^i) \in \mathbb{R}.$$

Fijemos $\delta_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |y - \gamma y| &\geqq 3\delta_0 \quad \forall y \in M,\ \gamma \in \Gamma \text{ con } \gamma y \neq y, \qquad (4.6) \\ \operatorname{dist}(\Gamma M^i, \Gamma M^j) &\geqq 3\delta_0 \quad \forall i,j = 1,...,m \text{ con } i \neq j, \qquad (4.7) \end{aligned}$$

y tal que el subgrupo de isotropía de cada punto en $M^i_{\delta_0} := \{z \in V^i : \operatorname{dist}(z, M^i) \leq \delta_0\}$ es precisamente Γ_i. Definimos

$$W_{\varepsilon,z} := \sum_{[g]\in\Gamma/\Gamma_i} f_i^{\frac{2-N}{4}} U_{\varepsilon,gz} \quad \text{ si } z \in M^i_{\delta_0},$$

donde $U_{\varepsilon,y}$ es el instantón de Aubin y Talenti

$$U_{\varepsilon,y}(z) = a_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |z-y|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}, \quad a_N := [N(N-2)]^{(N-2)/4}. \qquad (4.8)$$

Para cada $\delta \in (0, \delta_0)$ consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} M^i_\delta &: = \{z \in V^i : \operatorname{dist}(z, M^i) \leq \delta\}, \\ M_\delta &: = M^1_\delta \cup \cdots \cup M^m_\delta, \\ B_\delta &: = \{(\varepsilon, z) : \varepsilon \in (0,\delta),\ z \in M_\delta\}, \\ \Theta_\delta &: = \{\pm W_{\varepsilon,z} : (\varepsilon, z) \in B_\delta\}, \qquad \Theta_0 := \Theta_{\delta_0}. \end{aligned}$$

Probaremos el siguiente resultado.

Proposición 4.8 *Supongamos que $E_{0,f}$ no alcanza su ínfimo en $\mathcal{N}^\Gamma_{0,f}$. Sea $\delta \in (0, \delta_0)$. Entonces existe $\eta > \mu^\Gamma(0,f)$ con la siguiente propiedad: Para cada $u \in \mathcal{N}^\Gamma_{0,f}$ tal que $E_{0,f}(u) \leq \eta$ se cumple que*

$$\inf_{W\in\Theta_0} \|u - W\| < \sqrt{\frac{1}{2} N \mu^\Gamma(0,f)},$$

y existen exactamente un $\nu \in \{-1, 1\}$, un $\varepsilon \in (0, \delta_0)$ y una Γ-órbita $\Gamma z \in M_{\delta_0}$ tales que

$$\|u - \nu W_{\varepsilon,z}\| = \inf_{W\in\Theta_0} \|u - W\|.$$

Además $(\varepsilon, z) \in B_\delta$.

Para la demostración de este resultado se requieren varios lemas. Continuamos suponiendo que se cumple (ne).

Lema 4.9 *Dados* $\delta \in (0, \delta_0)$ *y* $\rho > 0$ *existe* $\eta > \mu^\Gamma(0, f)$ *con la siguiente propiedad: Para cada* $u \in \mathcal{N}_{0,f}^\Gamma$ *con* $E_{0,f}(u) \leq \eta$ *existe* $W \in \Theta_\delta$ *tal que*

$$\|u - W\| < \rho.$$

Demostración: Supongamos lo contrario, es decir, que existe una sucesión (u_n) en $\mathcal{N}_{0,f}^\Gamma$ con $E_{0,f}(u) \leq \mu^\Gamma(0, f) + \frac{1}{n}$ y tal que

$$\inf_{W \in \Theta_\delta} \|u_n - W\| \geq \rho. \tag{4.9}$$

Por el principio variacional de Ekeland podemos suponer que (u_n) es una sucesión de Palais-Smale Γ-invariante. Como $E_{0,f}$ no alcanza su ínfimo en $\mathcal{N}_{0,f}^\tau$, la sucesión (u_n) no contiene una subsucesión convergente. Esto, junto con (4.9), contradice al Corolario **??**.
■

Lema 4.10 *(i)* $\|W_{\varepsilon,z}\|^2 \to N\mu^\Gamma(0, f)$ *cuando* $\varepsilon \to 0$ *uniformemente en* $z \in M_{\delta_0}$.
(ii) $\|W_{\varepsilon,z} + W_{\varepsilon',z'}\|^2 \geq 2N\mu^\Gamma(0, f)$ *para todos* z, $z' \in M_{\delta_0}$, $\varepsilon, \varepsilon' > 0$.

Demostración: Sea $U = U_{1,0}$. Observemos que $U_{\varepsilon,z} = \varepsilon^{-\frac{N-2}{2}} U(\frac{x-z}{\varepsilon})$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\langle U_{\varepsilon,z}, U_{\varepsilon',z'} \rangle &= (\varepsilon\varepsilon')^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla U(\frac{x-z}{\varepsilon}) \nabla U(\frac{x-z'}{\varepsilon'}) dx \\
&= (\frac{\varepsilon}{\varepsilon'})^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla U(y) \nabla U(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} y - \frac{z'-z}{\varepsilon'}) dy \\
&= (\frac{\varepsilon}{\varepsilon'})^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} U(y)^{2^*-1} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} U(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} y - \frac{z'-z}{\varepsilon'}) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} U(y)^{2^*-1} (\frac{\varepsilon}{\varepsilon'})^{\frac{N-2}{2}} U(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(y - \frac{z'-z}{\varepsilon})) dy.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Sean $z \in M_\delta^i$ y $z' \in M_\delta^j$. Calculamos

$$\langle W_{\varepsilon,z}, W_{\varepsilon',z'} \rangle = \sum_{[\gamma] \in \Gamma/\Gamma_i} \sum_{[\gamma'] \in \Gamma/\Gamma_j} f_i^{\frac{2-N}{4}} f_j^{\frac{2-N}{4}} \langle U_{\varepsilon,\gamma z}, U_{\varepsilon',\gamma' z'} \rangle. \tag{4.11}$$

En particular, si $z \in M_\delta^i$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|W_{\varepsilon,z}\|^2 &= f_i^{\frac{2-N}{2}} \left[\sum_{[\gamma] \in \Gamma/\Gamma_i} \|U\|^2 + \sum_{[\gamma] \neq [\gamma']} \int_{\mathbb{R}^N} U(y)^{2^*-1} U(y + \frac{\gamma z - \gamma' z}{\varepsilon}) dy \right] \quad (4.12) \\
&\longrightarrow \frac{\#(\Gamma/\Gamma_i)}{f_i^{\frac{N-2}{2}}} S^{\frac{N}{2}} = N\mu^\Gamma(0, f) \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Esto prueba *(i)*.
Se sigue de (4.10) y (4.11) que $\langle W_{\varepsilon,z}, W_{\varepsilon',z'}\rangle \geq 0$, y de (4.12) que $\|W_{\varepsilon,z}\|^2 \geq N\mu^{\Gamma}(0,f)$. En consecuencia,

$$\|W_{\varepsilon,z} + W_{\varepsilon',z'}\|^2 = \|W_{\varepsilon,z}\|^2 + \|W_{\varepsilon',z'}\|^2 + 2\langle W_{\varepsilon,z}, W_{\varepsilon,z'}\rangle \geq 2N\mu^{\Gamma}(0,f).$$

Esto prueba *(ii)*. ■

Lema 4.11 *(i) Si* $\varepsilon_n' \to 0$ *y* $\varepsilon_n \geq \delta > 0$ *o* $\operatorname{dist}(\Gamma z_n, \Gamma z_n') \geq \delta$ *entonces*

$$\left\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\|^2 + o(1) \geq 2N\mu^{\Gamma}(0,f).$$

(ii) Si $\left\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\| \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$ *y* $\varepsilon_n' \to 0$, *entonces, para alguna subsucesión,*

$$\left|\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n'} - 1\right| \to 0 \qquad y \qquad (\varepsilon_n\varepsilon_n')^{-1}\operatorname{dist}(\Gamma z_n, \Gamma z_n')^2 \to 0.$$

Demostración: *(i)* De (4.11), (4.10) y las hipótesis se tiene

$$\left\langle W_{\varepsilon_n,z_n}, W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\rangle \to 0.$$

Por otra parte de (4.12) se cumple $\|W_{\varepsilon_n,z_n}\|^2 \geq N\mu^{\Gamma}(0,f)$. Entonces sólo observamos que

$$\left\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\|^2 + 2\left\langle W_{\varepsilon_n,z_n}, W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\rangle = \|W_{\varepsilon_n,z_n}\|^2 + \left\|W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\|^2,$$

de donde $\left\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\|^2 + o(1) \geq 2N\mu^{\Gamma}(0,f)$.
(ii) Del Lema 4.10 *(i)* y como

$$\left\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\|^2 = \|W_{\varepsilon_n,z_n}\|^2 + \left\|W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\|^2 - 2\left\langle W_{\varepsilon_n,z_n}, W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\rangle,$$

se tiene que $\left\langle W_{\varepsilon_n,z_n}, W_{\varepsilon_n',z_n'}\right\rangle \to N\mu^{\Gamma}(0,f)$. De (4.11) se sigue que $i = j$ y, para una subsucesión, existe una única $[\gamma] \in \Gamma/\Gamma_i$ tal que $\operatorname{dist}(\Gamma z_n, \Gamma z_n') = |z_n - \gamma z_n'|$,

$$\left\langle U_{\varepsilon_n,z_n}, U_{\varepsilon_n',\gamma z_n'}\right\rangle \to S^{N/2} \quad \text{y} \quad \left\langle U_{\varepsilon_n,z_n}, U_{\varepsilon_n',\gamma' z_n'}\right\rangle \to 0 \text{ si } [\gamma'] \neq [\gamma].$$

De (4.10) obtenemos que

$$\left\langle U_{\varepsilon_n,z_n}, U_{\varepsilon_n',\gamma z_n'}\right\rangle = \left\langle U, U_{\frac{\varepsilon_n'}{\varepsilon_n}, \frac{\gamma z_n' - z_n}{\varepsilon_n}}\right\rangle.$$

Por tanto,

$$\left\| U - U_{\frac{\varepsilon_n'}{\varepsilon_n}, \frac{\gamma z_n' - z_n}{\varepsilon_n}} \right\|^2 = \|U\|^2 + \left\| U_{\frac{\varepsilon_n'}{\varepsilon_n}, \frac{\gamma z_n' - z_n}{\varepsilon_n}} \right\|^2 - 2 \left\langle U, U_{\frac{\varepsilon_n'}{\varepsilon_n}, \frac{\gamma z_n' - z_n}{\varepsilon_n}} \right\rangle \longrightarrow 0$$

y, en consecuencia, $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n'} \to 1$ y ${\varepsilon_n}^{-1} |\gamma z_n' - z_n| \to 0$. ∎

Lema 4.12 *Dadas* $0 < \delta < \delta_0$ *y* $R > 0$ *existe* $\eta > \mu^\Gamma(0, f)$ *tal que para toda* $u \in \mathcal{N}_{0,f}^\Gamma$ *con* $E_{0,f}(u) \leq \eta$ *se cumple lo siguiente:*
(i) $\inf_{W \in \Theta_0} \|u - W\|^2 < \frac{N}{2} \mu^\Gamma(0, f)$, *y este ínfimo se alcanza.*
(ii) Si $\widehat{W} \in \Theta_0$ *satisface* $\left\| u - \widehat{W} \right\| = \inf_{W \in \Theta_0} \|u - W\|$ *entonces* $\widehat{W} \in \Theta_\delta$.
(iii) Si $\nu_s W_{\varepsilon_s, z_s} \in \Theta_0$ *satisfacen* $\|u - \nu_s W_{\varepsilon_s, z_s}\| = \inf_{W \in \Theta_0} \|u - W\|$, $s = 1, 2$, *entonces* $z_1, z_2 \in M_{\delta_0}^i$ *para la misma* $i \in \{1, ..., m\}$ *y se cumple que*

$$\nu_1 = \nu_2, \quad \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1 \right| < R \quad y \quad (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{-1} \mathrm{dist}(\Gamma z_1, \Gamma z_2)^2 < R.$$

Demostración: Sea $R' \in (0, R)$ tal que, si $\left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - 1 \right| < R'$ y $(\varepsilon \varepsilon')^{-1} \mathrm{dist}(\Gamma z, \Gamma z')^2 < R'$ entonces $|\varepsilon - \varepsilon'| < \frac{\delta}{2}$ y $\mathrm{dist}(\Gamma z, \Gamma z') < \frac{\delta}{2}$. Por el Lema 4.11 *(ii)* existen $0 < \rho < (\frac{N}{2} \mu^\Gamma(0, f))^{1/2}$ y $\delta' \in (0, \frac{\delta}{2})$ tales que, si $\varepsilon, \varepsilon' \in (0, \delta')$ y $\|W_{\varepsilon,z} - W_{\varepsilon',z'}\| < 2\rho$ entonces $\left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - 1 \right| < R'$ y $(\varepsilon \varepsilon')^{-1} (\mathrm{dist}(\Gamma z, \Gamma z'))^2 < R'$. Para tales δ' y ρ tomamos $\eta > \mu^\Gamma(0, f)$ como en el Lema 4.9. Entonces para $u \in \mathcal{N}_{0,f}^\Gamma \cap E_{0,f}^\eta$, se cumple

$$\inf_{W \in \Theta_0} \|u - W\|^2 \leq \inf_{W \in \Theta_{\delta'}} \|u - W\|^2 < \rho^2 < \frac{N}{2} \mu^\Gamma(0, f). \tag{4.13}$$

Dado que $\langle u, U_{\varepsilon,z} \rangle \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ y cuando $\varepsilon \to \infty$ uniformemente en $z \in M_{\delta_0}$, se tiene que existen $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty > 0$ tales que

$$\|u \pm W_{\varepsilon,z}\|^2 \to \|W_{\varepsilon,z}\|^2 + \|u\|^2 \geq \|u\|^2 \geq N \mu^\Gamma(0, f) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \cup (\varepsilon_\infty, \infty), \ z \in M_{\delta_0}.$$

Esto, junto con (4.13) y la compacidad de $[\varepsilon_0, \delta_0] \times M_{\delta_0}$, implica que el ínfimo $\inf_{W \in \Theta_0} \|u - W\|$ se alcanza. Esto prueba *(i)*.
Notemos ahora que, si $\|u - \nu W_{\varepsilon,z}\| < \rho$ y $\|u - \nu' W_{\varepsilon',z'}\| < \rho$ con $\nu, \nu' \in \{\pm 1\}$, $\varepsilon, \varepsilon' \in (0, \delta')$, entonces

$$\|\nu W_{\varepsilon,z} - \nu' W_{\varepsilon',z'}\| < 2\rho < (2N \mu^\Gamma(0, f))^{1/2}.$$

El Lema 4.10 implica que $\nu = \nu'$ y nuestra elección de ρ y δ' implica que $\left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - 1 \right| < R'$ y $(\varepsilon \varepsilon')^{-1} (\mathrm{dist}(\Gamma z, \Gamma z'))^2 < R'$.

En particular, si $u \in \mathcal{N}_{0,f}^{\Gamma}$, $E_{0,f}(u) \leq \eta$ y $\|u - \nu_s W_{\varepsilon_s,z_s}\| = \inf_{W\in\Theta_0} \|u - W\|$, entonces $\|u - \nu_s W_{\varepsilon_s,z_s}\| < \rho$ y, en consecuencia, $\nu_1 = \nu_2$, $\left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right| < R'$ y $(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1}\mathrm{dist}(\Gamma z_1, \Gamma z_2)^2 < R'$. Se sigue de *(ii)* que $z_1, z_2 \in M_\delta$. Nuestra elección de R' implica además que $\mathrm{dist}(\Gamma z_1, \Gamma z_2) < \frac{\delta}{2}$. Usando (4.7) concluímos que $z_1, z_2 \in M_{\delta_0}^i$ para la misma $i \in \{1, ..., m\}$. Esto prueba la afirmación *(iii)*.
Finalmente, supongamos que $\widehat{W} = \nu W_{\varepsilon,z} \in \Theta_0$ satisface $||u - \widehat{W}|| = \inf_{W\in\Theta_0} \|u - W\|$. De (4.13) se sigue que existe $\nu' W_{\varepsilon',z'} \in \Theta_{\delta'}$ tal que $||u - \nu' W_{\varepsilon',z'}|| < \rho$. Entonces $\nu = \nu'$, $\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - 1\right| < R'$ y $(\varepsilon\varepsilon')^{-1}(\mathrm{dist}(\Gamma z, \Gamma z'))^2 < R'$. Nuestra elección de R' implica entonces que $|\varepsilon - \varepsilon'| < \frac{\delta}{2}$ y $\mathrm{dist}(\Gamma z, \Gamma z') < \frac{\delta}{2}$ y, como $(\varepsilon', z') \in B_{\delta'}$ y $\delta' < \frac{\delta}{2}$, se tiene que $(\varepsilon, z) \in B_\delta$, es decir, $\widehat{W} = \nu W_{\varepsilon,z} \in \Theta_\delta$. Esto prueba *(ii)*. ■

Lema 4.13 *Existen $\delta \in (0, \delta_0)$, $\rho > 0$ y $R > 0$ tales que si $\nu_s W_{\varepsilon_s,z_s} \in \Theta_\delta$, $s = 1, 2$, satisfacen*

$$\|u - \nu_s W_{\varepsilon_s,z_s}\| = \inf_{W\in\Theta_0} \|u - W\| < \rho$$

$z_1, z_2 \in M_\delta^i$ para la misma $i \in \{1, ..., m\}$, $\left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right| \leq R$ y $(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1} |z_1 - z_2|^2 \leq R$, entonces $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ y $z_1 = z_2$.

Demostración: Consideremos la función $\chi_u : (0, \infty) \times M_{\delta_0}^i \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\chi_u(\varepsilon, z) := \|u - W_{\varepsilon,z}\|^2 .$$

Escribimos $\zeta = (\varepsilon, z)$. Sea $h = (h_0, h_1, ..., h_d) \in \mathbb{R} \times V^i$ donde $d := \dim V^i$. La primera y segunda derivadas de la función χ_u están dadas por

$$\begin{aligned} \chi_u'(\zeta)h &= -2 \langle u - W_\zeta, D_\zeta W_\zeta(\cdot)h\rangle , \\ \frac{1}{2}\chi_u''(\zeta)(h, h) &= \|D_\zeta W_\zeta(\cdot)h\|^2 - \left\langle u - W_\zeta, D_\zeta^2 W_\zeta(\cdot)(h, h)\right\rangle , \end{aligned}$$

donde

$$W_\zeta = W_{\varepsilon,z} = \sum_{[\gamma]} f_i^{\frac{2-N}{4}} U_{\varepsilon,\gamma z}.$$

Entonces

$$D_\zeta W_\zeta(\cdot)h = \sum_{[\gamma]} f_i^{\frac{2-N}{4}} D_\zeta U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)h = \sum_{[\gamma]} f_i^{\frac{2-N}{4}} \sum_{j=0}^{d} \partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)h_j,$$

donde $\partial_0 = \partial_\varepsilon$, $\partial_j = \partial_{z_j}$ y la suma es sobre $[\gamma] \in \Gamma/\Gamma_i$. Su norma está dada por

$$\|D_\zeta W_\zeta(\cdot)h\|^2 = f_i^{\frac{2-N}{2}} \sum_{j,k} \sum_{[\gamma],[\gamma']} \langle \partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)h_j, \partial_k U_{\varepsilon,\gamma' z}(\cdot)h_k \rangle \,. \tag{4.14}$$

Para calcular los sumandos de esta última expresión observemos que

$$U_{\varepsilon,z}(x) = \varepsilon^{-\frac{N-2}{2}} U(\frac{x-z}{\varepsilon}).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\nabla_z U_{\varepsilon,z}(x) &= \varepsilon^{-\frac{N-2}{2}} \nabla U(\frac{x-z}{\varepsilon})(-\frac{1}{\varepsilon}) = -\varepsilon^{-\frac{N}{2}} \nabla U(\frac{x-z}{\varepsilon}), \\
\partial_\varepsilon U_{\varepsilon,z}(x) &= \varepsilon^{-\frac{N-2}{2}} \nabla U(\frac{x-z}{\varepsilon}) \cdot (-\frac{x-z}{\varepsilon^2}) + (-\frac{N-2}{2})\varepsilon^{-\frac{N}{2}} U(\frac{x-z}{\varepsilon}) \\
&= -\varepsilon^{-\frac{N}{2}} [\nabla U(\frac{x-z}{\varepsilon}) \cdot (\frac{x-z}{\varepsilon}) + \frac{N-2}{2} U(\frac{x-z}{\varepsilon})].
\end{aligned}$$

Si denotamos por

$$\begin{aligned}
V_0(y) &= \nabla U(y) \cdot y + \frac{N-2}{2} U(y), \\
V_j(y) &= \frac{\partial U}{\partial y_j}(y), \qquad j = 1, ..., d, \\
A &= (a_{jk}) \quad \text{con} \quad a_{jk} = \langle V_j, V_k \rangle \,,
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)h_j, \partial_k U_{\varepsilon,\gamma' z}(\cdot)h_k \rangle &= \varepsilon^{-N} \int \nabla(V_j(\frac{x-\gamma z}{\varepsilon})) \cdot \nabla(V_k(\frac{x-\gamma' z}{\varepsilon}))h_j h_k dx \\
&= \varepsilon^{-2} \int \nabla V_j(y) \cdot \nabla V_k(y - \frac{\gamma' z - \gamma z}{\varepsilon})h_j h_k dy.
\end{aligned}$$

Insertando estas expresiones en (4.14) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|D_\zeta W_\zeta(\cdot)h\|^2 &= \varepsilon^{-2} \frac{\#(\Gamma/\Gamma_i)}{f_i^{\frac{N-2}{2}}} \left(\sum_{j,k} a_{jk} h_j h_k + o_\varepsilon(1) \right) \\
&= \varepsilon^{-2} \frac{\#(\Gamma/\Gamma_i)}{f_i^{\frac{N-2}{2}}} (Ah \cdot h + o_\varepsilon(1)) \,,
\end{aligned}$$

donde $o_\varepsilon(1) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Análogamente se demuestra que

$$\begin{aligned}
\left\langle u - W_\zeta, D_\zeta^2 W_\zeta(\cdot)(h,h) \right\rangle &\leq \|u - W_\zeta\| \left\| D_\zeta^2 W_\zeta(\cdot)(h,h) \right\| \\
&= \varepsilon^{-2} \frac{\#(\Gamma/\Gamma_i)}{f_i^{\frac{N-2}{2}}} \left(\|u - W_\zeta\| \widetilde{A} h \cdot h + o_\varepsilon(1) \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existen $\delta \in (0, \delta_0)$, $\rho > 0$ y $c > 0$ tales que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\chi_u''(\zeta)(h,h) &\geq \varepsilon^{-2}\frac{\#(\Gamma/\Gamma_i)}{f_i^{\frac{N-2}{2}}}\Big(Ah\cdot h - \|u - W_\zeta\|\,\widetilde{A}h\cdot h + o_\varepsilon(1)\Big)\\ &\geq c\varepsilon^{-2}|h|^2 \qquad \text{si } \|u - W_\zeta\| < \rho \text{ y } \varepsilon < \delta.\end{aligned}$$

Supongamos que $\zeta_1 = (\varepsilon_1, z_1)$, $\zeta_2 = (\varepsilon_2, z_2) \in (0, \delta) \times M_\delta^i$ son dos mínimos para χ_u y que se cumple

$$\|u - \nu_s W_{\varepsilon_s, z_s}\| < \rho, \qquad s = 1, 2.$$

De la fórmula de Taylor se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= \chi_u(\zeta_1 + h) - \chi_u(\zeta_1) = \frac{1}{2}\chi_u''(\zeta_1)(h,h) + r(h)\\ &\geq c\varepsilon_1^{-2}|h|^2 + r(h), \end{aligned}\tag{4.15}$$

donde $\frac{r(h)}{|h|^2} \to 0$ si $h \to 0$.
Tomemos $h := \zeta_2 - \zeta_1$. Si $h \neq 0$ obtenemos de (4.15) que

$$0 \geq c + \frac{r(h)}{\varepsilon_1^{-2}|h|^2}. \tag{4.16}$$

A continuación probaremos que

$$\frac{r(h)}{\varepsilon_1^{-2}|h|^2} \to 0 \quad \text{cuando } \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \to 1 \text{ y } (\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1}|z_1 - z_2|^2 \to 0. \tag{4.17}$$

En consecuencia, existe $R > 0$ tal que

$$\frac{r(h)}{\varepsilon_1^{-2}|h|^2} < c \quad \text{si } \left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right| < R \text{ y } (\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1}|z_1 - z_2|^2 < R.$$

Esto contradice (4.16). En consecuencia $h = 0$, es decir, $(\varepsilon_1, z_1) = (\varepsilon_2, z_2)$ como afirma el lema.
Probemos ahora la afirmación (4.17). El residuo de la fórmula de Taylor está dado por

$$r(h) = \frac{1}{2}[\chi_u''(\zeta_t) - \chi_u''(\zeta_1)](h,h)$$

donde $\zeta_t = (1-t)\zeta_1 + t\zeta_2$ con $0 \leq t \leq 1$. Sea $\zeta_t =: (\varepsilon_t, z_t)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{r(h)}{\varepsilon_1^{-2}|h|^2} &= \frac{\frac{1}{2}[\chi_u''(\zeta_t) - \chi_u''(\zeta_1)](h,h)}{\varepsilon_1^{-2}|h|^2} \\
&= \left[\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_1}\right)^{-2} - 1\right] \frac{\#(\Gamma/\Gamma_i)}{f_i^{\frac{N-2}{2}}} \left[\frac{Ah\cdot h + o_\varepsilon(1)}{|h|^2}\right] \qquad (4.18)\\
&+ \frac{1}{\varepsilon_1^{-2}|h|^2}\left\langle W_{\zeta_t} - W_{\zeta_1}, D^2_{\zeta_t}W_{\zeta_t}(\cdot)(h,h)\right\rangle \qquad (4.19)\\
&+ \frac{1}{\varepsilon_1^{-2}|h|^2}\left\langle u - W_{\zeta_1}, [D^2_{\zeta_t}W_{\zeta_t}(\cdot) - D^2_{\zeta_1}W_{\zeta_1}(\cdot)](h,h)\right\rangle. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

El término (4.18) tiende a 0 cuando $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \to 1$. En cuanto a los términos (4.19) y (4.20) se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon_1^{-2}|h|^2}\left[\left\langle W_{\zeta_t} - W_{\zeta_1}, D^2_{\zeta_t}W_{\zeta_t}(\cdot)(h,h)\right\rangle + \left\langle u - W_{\zeta_1}, [D^2_{\zeta_t}W_{\zeta_t}(\cdot) - D^2_{\zeta_1}W_{\zeta_1}(\cdot)](h,h)\right\rangle\right] \\
\leq\ & \frac{\#(\Gamma/\Gamma_i)}{f_i^{\frac{N-2}{2}}}\left[\frac{\widetilde{A}h\cdot h + o_\varepsilon(1)}{|h|^2}\right]\left(\left\|W_{\zeta_t} - W_{\zeta_1}\right\|\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_1}\right)^{-2} + \left\|u - W_{\zeta_1}\right\|\left[\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_1}\right)^{-2} - 1\right]\right) \\
\leq\ & c'\left(\left\|W_{\zeta_t} - W_{\zeta_1}\right\|\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_1}\right)^{-2} + \rho\left[\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_1}\right)^{-2} - 1\right]\right)
\end{aligned}$$

Usando la identidad (4.10) es fácil comprobar que $\left\|W_{\zeta_t} - W_{\zeta_1}\right\| \to 0$ cuando $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \to 1$ y $(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1}|z_1 - z_2|^2 \to 0$. En consecuencia (4.19)+(4.20) tiende a 0 cuando $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \to 1$ y $(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1}|z_1 - z_2|^2 \to 0$. Esto demuestra (4.17) y concluye la demostración del lema. ■

Demostración de la Proposición 4.8. Sean $\delta \in (0, \delta_0)$, $\rho > 0$ y $R > 0$ como en el Lema 4.13. Sin perder generalidad podemos suponer que esta δ es más pequeña que la dada por la proposición. De los Lemas 4.9 y 4.12 se sigue que existe $\eta > \mu^\Gamma(0, f)$ tal que para toda $u \in \mathcal{N}^\Gamma_{0,f}$ con $E_{0,f}(u) \leq \eta$ se cumple que

$$\inf_{W\in\Theta_0} \|u - W\| < \rho$$

y se cumplen además las propiedades *(i), (ii)* y *(iii)* del Lema 4.12, es decir,

$$\inf_{W\in\Theta_0} \|u - W\|^2 < \frac{N}{2}\mu^\Gamma(0, f)$$

y este ínfimo se alcanza. Además, si $\nu_s W_{\varepsilon_s,z_s} \in \Theta_0$ satisfacen

$$\|u - \nu_s W_{\varepsilon_s,z_s}\| = \inf_{W\in\Theta_0} \|u - W\|, \qquad s = 1, 2,$$

entonces $\nu_s W_{\varepsilon_s,z_s} \in \Theta_\delta$, $z_1, z_2 \in M^i_\delta$ para la misma $i \in \{1, ..., m\}$, y se cumple que

$$\nu_1 = \nu_2, \qquad \left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right| < R \quad \text{y} \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1}\text{dist}(\Gamma z_1, \Gamma z_2)^2 < R.$$

Sin perder generalidad podemos suponer que $\text{dist}(\Gamma z_1, \Gamma z_2) = |z_1 - z_2|$ y, remplazando u por $-u$ si es necesario, podemos suponer además que $\nu_1 = \nu_2 = 1$. El Lema 4.13 implica entonces que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ y $z_1 = z_2$. ■

4.3.1. Definición de la función bariórbita

Continuamos suponiendo la condición

(ne) $E_{0,f}$ no alcanza su ínfimo en $\mathcal{N}^\Gamma_{0,f}$.

Fijemos $\delta \in (0, \delta_0)$ y escojamos $\eta > \mu^\Gamma(0, f)$ como en la Proposición 4.8. Como antes, denotamos por

$$\begin{aligned} E^\eta_{0,f} \ &: = \{u \in H^1_0(\Omega) : E_{0,f}(u) \le \eta\}, \\ B_\delta(M) \ &: = \{z \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(z, M) \le \delta\}, \end{aligned}$$

y por $B_\delta(M)/\Gamma$ al espacio de Γ-órbitas de $B_\delta(M)$.

Definición 4.14 *La* función bariórbita *es la función*

$$\beta^\Gamma : \mathcal{N}^\Gamma_{0,f} \cap E^\eta_{0,f} \to B_\delta(M)/\Gamma,$$

definida como sigue:

$$\beta^\Gamma(u) = \Gamma y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|u \pm W_{\varepsilon,y}\| = \min_{W\in\Theta_0} \|u - W\|.$$

La Proposición 4.8 garantiza que esta función está bien definida.

Proposición 4.15 *La función bariórbita $\beta^\Gamma : \mathcal{N}^\Gamma_{0,f} \cap E^\eta_{0,f} \to B_\delta(M)/\Gamma$ es continua y es $\mathbb{Z}/2$-invariante, es decir,*

$$\beta^\Gamma(u) = \beta^\Gamma(-u) \qquad \forall u \in \mathcal{N}^\Gamma_{0,f} \cap E^\eta_{0,f}.$$

Demostración: Es inmediato comprobar que β^Γ es $\mathbb{Z}/2$-invariante. Supongamos que $u_n \to u$ en $\mathcal{N}_{0,f}^\Gamma \cap E_{0,f}^\eta$. Sean $\varepsilon_n, \varepsilon \in (0,\delta)$, $y_n, y \in M_\delta$ tales que, cambiando signo a u_n y u si es necesario, se cumple que

$$\|u_n - W_{\varepsilon_n,y_n}\| = \min_{W\in\Theta_\delta} \|u - W\|, \qquad \|u - W_{\varepsilon,y}\| = \min_{W\in\Theta_\delta} \|u - W\|.$$

Entonces $\beta^\Gamma(u_n) = \Gamma y_n$ y $\beta^\Gamma(u) = \Gamma y$. Como M_δ es compacto, tomando una subsucesión podemos suponer que $y_n \to y'$ y que $\varepsilon_n \to \varepsilon' \in [0,\delta]$. Si $\varepsilon' = 0$ entonces $\langle u_n, W_{\varepsilon_n,y_n}\rangle \to 0$ y, en consecuencia, para n suficientemente grande,

$$\frac{N}{2}\mu^\Gamma(0,f) > \|u_n - W_{\varepsilon_n,y_n}\|^2 = \|u_n\|^2 + \|W_{\varepsilon_n,y_n}\|^2 - 2\langle u_n, W_{\varepsilon_n,y_n}\rangle \geq N\mu^\Gamma(0,f)$$

Por tanto $\varepsilon' \neq 0$. Entonces $W_{\varepsilon_n,y_n} \to W_{\varepsilon',y'}$ y tomando límites cuando $n \to \infty$ en

$$\|u_n - W_{\varepsilon,y}\| \geq \|u_n - W_{\varepsilon_n,y_n}\| \geq \|u - W_{\varepsilon_n,y_n}\| - \|u - u_n\|,$$

obtenemos

$$\|u - W_{\varepsilon,y}\| \geq \|u - W_{\varepsilon',y'}\|.$$

En consecuencia,

$$\|u - W_{\varepsilon,y}\| = \|u - W_{\varepsilon',y'}\| = \min_{W\in\Theta_0} \|u - W\|.$$

Por tanto, $\varepsilon = \varepsilon'$, $\Gamma y = \Gamma y'$ y

$$\beta^\Gamma(u) = \Gamma y' = \lim_{n\to\infty} \Gamma y_n = \lim_{n\to\infty} \beta^\Gamma(u_n),$$

es decir, β^Γ es continua. ■

Supongamos ahora que Γ es el núcleo de un epimorfismo continuo $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$. Escojamos $g_\tau \in \tau^{-1}(-1)$. Si $u \in \mathcal{N}_{0,f}^\tau$ entonces u cambia de signo y $u^-(x) = -u^+(g_\tau^{-1}x)$. Por tanto, $\|u^+\|^2 = \|u^-\|^2$ y $|u^+|_{f,2^*}^{2^*} = |u^-|_{f,2^*}^{2^*}$. En consecuencia,

$$u \in \mathcal{N}_{0,f}^\tau \Longrightarrow u^\pm \in \mathcal{N}_{0,f}^\Gamma \;\text{ y }\; E_{0,f}(u) = 2E_{0,f}(u^\pm). \tag{4.21}$$

Observemos primero que se cumple lo siguiente.

Lema 4.16 *$E_{0,f}$ no alcanza su ínfimo en $\mathcal{N}_{0,f}^\tau$ y, en consecuencia,*

$$\mu^\tau(0,f) := \inf_{\mathcal{N}_{0,f}^\tau} E_{0,f} = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}\right)\frac{2}{N}S^{\frac{N}{2}} = 2\mu^\Gamma(0,f).$$

Demostración: Supongamos, por contradicción que existe $u \in \mathcal{N}_{0,f}^{\tau}$ tal que $E_{0,f}(u) = \mu^{\tau}(0,f)$. Entonces $u^{+} \in \mathcal{N}_{0,f}^{\Gamma}$ y, como

$$\mu^{\tau}(0,f) \leq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

se tiene que

$$\mu^{\Gamma}(0,f) \leq E_{0,f}(u^{+}) = \frac{1}{2}\mu^{\tau}(0,f) \leq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} = \mu^{\Gamma}(0,f).$$

Es decir, u^{+} es un mínimo de $E_{0,f}$ en $\mathcal{N}_{0,f}^{\Gamma}$, lo cual contradice a la condición (ne). Así pues, $E_{0,f}$ no alcanza su ínfimo en $\mathcal{N}_{0,f}^{\tau}$. El Corolario 3.6 implica entonces que

$$\mu^{\tau}(0,f) = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{2}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

como afirma el enunciado. ∎

La propiedad (4.21) implica, en particular, que

$$u^{\pm} \in \mathcal{N}_{0,f}^{\Gamma} \cap E_{0,f}^{\eta} \qquad \forall u \in \mathcal{N}_{0,f}^{\tau} \cap E_{0,f}^{2\eta}.$$

Dado que

$$\left\|u^{+} - \nu W_{\varepsilon,y}\right\| = \left\|-u^{+} \circ g_{\tau}^{-1} + \nu W_{\varepsilon,y} \circ g_{\tau}^{-1}\right\| = \left\|u^{-} + \nu W_{\varepsilon,g_{\tau}y}\right\|,$$

se tiene que

$$\left\|u^{+} - \nu W_{\varepsilon,y}\right\| = \min_{W\in\Theta_0} \left\|u^{+} - W\right\| \Longleftrightarrow \left\|u^{-} + \nu W_{\varepsilon,g_{\tau}y}\right\| = \min_{W\in\Theta_0} \left\|u^{-} - W\right\|. \tag{4.22}$$

En particular,

$$\beta^{\Gamma}(u^{+}) = \Gamma y \Longleftrightarrow \beta^{\Gamma}(u^{-}) = \Gamma(g_{\tau}y). \tag{4.23}$$

Lema 4.17 *Para toda $u \in \mathcal{N}_{0,f}^{\tau} \cap E_{0,f}^{2\eta}$ se cumple que $\beta^{\Gamma}(u^{+}) \neq \beta^{\Gamma}(u^{-})$.*

Demostración: Sea $y \in M_{\delta}$ tal que $\beta^{\Gamma}(u^{+}) = \Gamma y$ y sea $\nu = \pm 1$ tal que

$$\left\|u^{+} - \nu W_{\varepsilon,y}\right\| = \min_{W\in\Theta_0} \left\|u^{+} - W\right\|.$$

Si $\beta^{\Gamma}(u^{+}) = \beta^{\Gamma}(u^{-})$, las propiedades (4.22) y (4.23) implican que

$$\left\| u^{-} + \nu W_{\varepsilon,y} \right\| = \min_{W \in \Theta_0} \left\| u^{-} - W \right\|.$$

De la Proposición 4.8 se sigue que

$$\begin{array}{rcl} \|u\| & = & \left\| u^{+} - \nu W_{\varepsilon,y} + u^{-} + \nu W_{\varepsilon,y} \right\| \\ & \leq & \min\limits_{W \in \Theta_0} \left\| u^{+} - W \right\| + \min\limits_{W \in \Theta_0} \left\| u^{-} - W \right\| \\ & < & 2\sqrt{\frac{1}{2} N \mu^{\Gamma}(0,f)}. \end{array}$$

En consecuencia, el Lema 4.16 garantiza que

$$E_{0,f}(u) = \frac{1}{N} \|u\|^2 < 2\mu^{\Gamma}(0,f) = \mu^{\tau}(0,f).$$

Esto no es posible, ya que $u \in \mathcal{N}^{\tau}_{0,f}$. ■

Denotemos por

$$B_{\delta}(M)^{\tau} := \{ z \in B_{\delta}(M) : Gz = \Gamma z \}$$

Proposición 4.18 *La función*

$$\beta^{\tau} : \mathcal{N}^{\tau}_{0,f} \cap E^{2\eta}_{0,f} \to \left(B_{\delta}(M) \setminus B_{\delta}(M)^{\tau} \right) / \Gamma, \qquad \beta^{\tau}(u) := \beta^{\Gamma}(u^{+}),$$

está bien definida, es continua, y es $\mathbb{Z}/2$-equivariante para la acción definida en (2.19), es decir,

$$\beta^{\tau}(-u) = \Gamma(g_{\tau} y) \Longleftrightarrow \beta^{\tau}(u) = \Gamma y.$$

Demostración: Si $u \in \mathcal{N}^{\tau}_{0,f} \cap E^{2\eta}_{0,f}$ y $\beta^{\tau}(u) = \Gamma y \in B_{\delta}(M)^{\tau}/\Gamma$ entonces $\beta^{\Gamma}(u^{+}) = \Gamma y = \Gamma(g_{\tau} y) = \beta^{\Gamma}(u^{-})$, contradiciendo al Lema 4.17. En consecuencia, $\beta^{\tau}(u) \notin B_{\delta}(M)^{\tau}/\Gamma$. La continuidad se sigue del Lema 4.15 y la equivariancia de (4.23), ya que

$$\beta^{\tau}(-u) = \beta^{\Gamma}((-u)^{+}) = \beta^{\Gamma}(-u^{-}) = \beta^{\Gamma}(u^{-}).$$

Esto concluye la demostración. ■

4.4. Multiplicidad de soluciones Γ-invariantes

Consideremos el problema

$$(\wp^{\Gamma}_{a,f}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x)\,|u|^{2^*-2}\,u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u(\gamma x) = u(x) & \forall x \in \Omega,\ \gamma \in \Gamma \end{cases}$$

donde Γ es un subgrupo cerrado de $O(N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto suave acotado y Γ-invariante, $N \geq 4$, $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev y $a, f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ son funciones continuas Γ-invariantes.

Consideremos el conjunto

$$M := \left\{ y \in \overline{\Omega} : \frac{\#\Gamma y}{f(y)^{\frac{N-2}{2}}} = \min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right\}.$$

Supondremos en toda esta sección que a, f satisfacen las siguientes condiciones:

(a_1) $\min_{\overline{\Omega}} a > -\lambda_1$ donde λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ en $H^1_0(\Omega)$

(a_2) $a(x) < 0$ para toda x en M.

(f_1) $f(x) > 0$ para toda x en $\overline{\Omega}$.

(f_2) f es localmente plana en M, es decir, que existen $r > 0$, $\alpha > N$ y $A > 0$ tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq A\,|x - y|^{\alpha} \quad \text{si } y \in M \ \text{ y } \ |x - y| < r.$$

Supondremos además que

(ne) $E_{0,f}$ no alcanza su ínfimo en $\mathcal{N}^{\Gamma}_{0,f}$.

Queremos obtener resultados de multiplicidad de soluciones para este problema. Los siguientes resultados incluyen parte de las afirmaciones de los Teoremas 1.14 y 1.16.

4.4.1. Multiplicidad de soluciones Γ-invariantes

Denotemos por

$$\ell^{\Gamma}_f := \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$$

y, para $\delta > 0$, denotemos por

$$M^-_{\delta} := \{y \in M : \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) \geq \delta\}, \qquad B_{\delta}(M) := \{z \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(z, M) \leq \delta\}.$$

Teorema 4.19 *Sea $N \geq 4$. Supongamos que se cumplen $(a_1), (a_2), (f_1), (f_2)$ y (ne). Dadas $\delta, \delta' > 0$ existe $a_0 \in (-\lambda_1, 0)$ tal que, si $\min_{\overline{\Omega}} a \geq a_0$, entonces el problema $(\wp^{\Gamma}_{a,f})$ tiene al menos*

$$\mathrm{cat}_{B_\delta(M)/\Gamma}(M_\delta^-/\Gamma)$$

pares $\pm u$ de soluciones que satisfacen

$$\ell_f^\Gamma - \delta' \leq E_{a,f}(u) < \min\left\{\ell_f^\Gamma, 2\mu^\Gamma(a,f)\right\}.$$

Demostración: De la Proposición 4.5 y el Corolario 3.4 se sigue que $E_{a,f}\mid_{\mathcal{N}^\Gamma_{a,f}}: \mathcal{N}^\Gamma_{a,f} \to \mathbb{R}$ satisface la condición de Palais-Smale $(PS)_c$ para toda $c < \ell_f^\Gamma$. Del Teorema 4.4 se sigue que $E_{a,f}\mid_{\mathcal{N}^\Gamma_{a,f}}$ tiene al menos

$$\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\mathcal{N}^\Gamma_{a,f} \cap E^\theta_{a,f})$$

pares $\pm u$ de puntos críticos con $E_{a,f}(u) \leq \theta$, para toda $\theta < \ell_f^\Gamma$. Queremos estimar esta categoría.

Sin perder generalidad podemos suponer que $\delta \in (0, \delta_0)$. Escojemos $\eta > \ell_f^\Gamma = \mu^\Gamma(0,f)$ como en la Proposición 4.8 y consideramos la función bariórbita

$$\beta^\Gamma : \mathcal{N}^\Gamma_{0,f} \cap E^\eta_{0,f} \to B_\delta(M)/\Gamma$$

de la Definición 4.14. Esta es continua y $\mathbb{Z}/2$-invariante (Proposición 4.15). Sin perder generalidad podemos suponer que $\delta' < \ell_f^\Gamma$. Sea $a_0 \in (-\lambda_1, 0)$ tal que

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_0}\right)^{\frac{N}{2}} = \min\left\{2,\ \eta/\ell_f^\Gamma,\ \ell_f^\Gamma/(\ell_f^\Gamma - \delta')\right\}.$$

Si $\min_{\overline{\Omega}} a \geq a_0$, se sigue del Lema 2.8 que, para cada $\theta < \ell_f^\Gamma$,

$$E_{0,f}(\pi_{0,f}(u)) \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_0}\right)^{\frac{N}{2}} E_{a,f}(u) < \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_0}\right)^{\frac{N}{2}} \ell_f^\Gamma \leq \eta \quad \forall u \in \mathcal{N}^\Gamma_{a,f} \cap E^\theta_{a,f},$$

donde $\pi_{0,f} : H_0^1(\Omega)^\Gamma \smallsetminus \{0\} \to \mathcal{N}^\Gamma_{0,f}$ denota a la proyección radial. En consecuencia, la función

$$\beta^\Gamma \circ \pi_{0,f} : \mathcal{N}^\Gamma_{a,f} \cap E^\theta_{a,f} \to B_\delta(M)/\Gamma$$

está bien definida, es continua y $\mathbb{Z}/2$-invariante.

Fijemos $0 < s < \delta$ tal que $\max_{B_s(M)} a < 0$ y $\varepsilon \in (0, \varepsilon_s)$, donde ε_s es como en la Proposición 2.14. Dicha proposición garantiza la existencia de una $\theta := \theta_\varepsilon$ tal que

$$E_{a,f}(\pi_{a,f}(w^\Gamma_{\varepsilon,y})) \leq \theta < \ell_f^\Gamma \qquad \forall y \in M_s^-.$$

La función

$$\alpha_\delta^\Gamma : M_\delta^-/\Gamma \to \mathcal{N}_{a,f}^\Gamma \cap E_{a,f}^\theta, \qquad \alpha_\delta^\Gamma(\Gamma y) = \pi_{a,f}(w_{\varepsilon,y}^\Gamma),$$

está bien definida y es continua. De la Definición 4.14 de la función bariórbita se sigue inmediatamente que

$$\beta^\Gamma \circ \pi_{0,f} \circ \alpha_\delta^\Gamma(\Gamma y) = \Gamma y \qquad \forall y \in M_\delta^-.$$

El Lema 4.3 garantiza entonces que

$$\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\mathcal{N}_{a,f}^\Gamma \cap E_{a,f}^\theta) \geq \text{cat}_{B_\delta(M)/\Gamma}(M_\delta^-/\Gamma).$$

Puesto que $\mu^\Gamma(0,f) = \ell_f^\Gamma$, del Corolario 2.9 y la definición de a_0 se sigue que

$$\theta < \ell_f^\Gamma \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_0}\right)^{\frac{N}{2}} \mu^\Gamma(a,f) \leq 2\mu^\Gamma(a,f).$$

Por tanto, $E_{a,f}\mid_{\mathcal{N}_{a,f}^\Gamma}$ tiene al menos

$$\text{cat}_{B_\delta(M)/\Gamma}(M_\delta^-/\Gamma)$$

pares $\pm u$ de puntos críticos con $E_{a,f}(u) < \text{mín}\{\ell_f^\Gamma, 2\mu^\Gamma(a,f)\}$. El Corolario 2.9 implica además que

$$\ell_f^\Gamma - \delta' \leq \left(\frac{\lambda_1 + a_0}{\lambda_1}\right)^{\frac{N}{2}} \ell_f^\Gamma \leq \mu^\Gamma(a,f) \leq E_{a,f}(u).$$

Esto concluye la demostración. ■

4.4.2. Multiplicidad de soluciones τ-equivariantes

Denotemos por

$$B_\delta(M)^\tau := \{z \in B_\delta(M) : Gz = \Gamma z\}.$$

Teorema 4.20 *Sea $N \geq 4$. Supongamos que se cumplen $(a_1), (a_2), (f_1), (f_2)$ y (ne). Supongamos además que existen un subgrupo cerrado G de $O(N)$ y un epimorfismo continuo $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ tales que Ω, a y f son G-invariantes y $\ker\tau = \Gamma$. Dadas $\delta, \delta' > 0$ existe $a_0 \in (-\lambda_1, 0)$ tal que, si $\text{mín}_{\overline{\Omega}}\, a \geq a_0$, entonces el problema $(\wp_{a,f}^\Gamma)$ tiene al menos*

$$\mathbb{Z}/2\text{-cat}_{(B_\delta(M)\smallsetminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma}(M_{\tau,\delta}^-/\Gamma) = \text{cat}_{(B_\delta(M)\smallsetminus B_\delta(M)^\tau)/G}(M_{\tau,\delta}^-/G)$$

pares $\pm u$ de soluciones τ-equivariantes que satisfacen

$$2\ell_f^\Gamma - \delta' \leq E_{a,f}(u) < \text{mín}\left\{2\ell_f^\Gamma, 2\mu^\tau(a,f)\right\}.$$

Demostración: De la Proposición 4.5 y el Corolario 3.6 se sigue que $E_{a,f}\mid_{\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}}:\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}\to\mathbb{R}$ satisface la condición de Palais-Smale $(PS)_c$ para toda $c<2\ell^{\Gamma}_f$. Del Teorema 4.4 se sigue que $E_{a,f}\mid_{\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}}$ tiene al menos

$$\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}\cap E^{\theta}_{a,f})$$

pares $\pm u$ de puntos críticos tales que $E_{a,f}(u)\leq\theta$ para toda $\theta<2\ell^{\Gamma}_f$. Queremos estimar esta categoría.

Sin perder generalidad podemos suponer que $\delta\in(0,\delta_0)$. Escojemos $\eta>\ell^{\Gamma}_f=\mu^{\Gamma}(0,f)=\frac{1}{2}\mu^{\tau}(0,f)$ como en la Proposición 4.8. Consideremos la función bariórbita

$$\beta^{\tau}:\mathcal{N}^{\tau}_{0,f}\cap E^{2\eta}_{0,f}\to(B_\delta(M)\smallsetminus B_\delta(M)^{\tau})/\Gamma$$

de la Proposición 4.18. Esta es continua y $\mathbb{Z}/2$-invariante. Sin perder generalidad podemos suponer que $\delta'<\ell^{\Gamma}_f$. Sea $a_0\in(-\lambda_1,0)$ tal que

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+a_0}\right)^{\frac{N}{2}}=\text{mín}\left\{2,\ \eta/\ell^{\Gamma}_f,\ \ell^{\Gamma}_f/(\ell^{\Gamma}_f-\delta')\right\}.$$

Si $\text{mín}_{\overline{\Omega}}\,a\geq a_0$, se sigue del Lema 2.8 que, para cada $\theta<2\ell^{\Gamma}_f$,

$$E_{0,f}(\pi_{0,f}(u))\leq\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+a_0}\right)^{\frac{N}{2}}E_{a,f}(u)<\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+a_0}\right)^{\frac{N}{2}}2\ell^{\Gamma}_f\leq2\eta\quad\forall u\in\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}\cap E^{\theta}_{a,f},$$

donde $\pi_{0,f}:H^1_0(\Omega)^{\tau}\smallsetminus\{0\}\to\mathcal{N}^{\tau}_{0,f}$ denota a la proyección radial. En consecuencia, la función

$$\beta^{\tau}\circ\pi_{0,f}:\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}\cap E^{\theta}_{a,f}\to(B_\delta(M)\smallsetminus B_\delta(M)^{\tau})/\Gamma$$

está bien definida, es continua y $\mathbb{Z}/2$-equivariante.

Fijemos $0<s<\delta$ tal que $\text{máx}_{B_s(M)}\,a<0$ y $\varepsilon\in(0,\varepsilon_s)$, donde ε_s es como en el Corolario 2.16. Dicho corolario asegura entonces la existencia de una $\theta:=\theta_\varepsilon$ tal que

$$E_{a,f}(\pi_{a,f}(w^{\tau}_{\varepsilon,y}))\leq\theta<2\ell^{\Gamma}_f\qquad\forall y\in M^{-}_{\tau,s}.$$

La función

$$\alpha^{\tau}_{\delta}:M^{-}_{\tau,\delta}/\Gamma\to\mathcal{N}^{\tau}_{a,f},\qquad\alpha^{\tau}_{\delta}(\Gamma y)=\pi_{a,f}(w^{\tau}_{\varepsilon,y}),$$

definida en (2.18) es continua y $\mathbb{Z}/2$-equivariante (2.20). Se tiene además que

$$\beta^{\tau}\circ\pi_{0,f}\circ\alpha^{\tau}_{\delta}(\Gamma y)=\Gamma y\qquad\forall y\in M^{-}_{\tau,\delta}.$$

El Lema 4.2 garantiza entonces que

$$\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\mathcal{N}^{\tau}_{a,f}\cap E^{\theta}_{a,f})\geq\mathbb{Z}/2\text{-cat}_{(B_\delta(M)\smallsetminus B_\delta(M)^{\tau})/\Gamma}(M^{-}_{\delta}/\Gamma)$$

y, como la acción de $\mathbb{Z}/2$ en $(B_\delta(M) \smallsetminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma$ es libre, el Lema 4.3 asegura que

$$\mathbb{Z}/2\text{-cat}_{(B_\delta(M)\smallsetminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma}(M_\delta^-/\Gamma) = \text{cat}_{(B_\delta(M)\smallsetminus B_\delta(M)^\tau)/G}(M_\delta^-/G).$$

Puesto que $\mu^\tau(0,f) = 2\ell_f^\Gamma$, del Corolario 2.9 y la definición de a_0 se sigue que

$$\theta < 2\ell_f^\Gamma \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_0}\right)^{\frac{N}{2}} \mu^\tau(a,f) \leq 2\mu^\tau(a,f).$$

Por tanto, $E_{a,f}\mid_{\mathcal{N}_{a,f}^\Gamma}$ tiene al menos

$$\text{cat}_{(B_\delta(M)\smallsetminus B_\delta(M)^\tau)/G}(M_\delta^-/G)$$

pares $\pm u$ de puntos críticos con $E_{a,f}(u) < \text{mín}\{2\ell_f^\Gamma, 2\mu^\tau(a,f)\}$. El Corolario 2.9 implica además que

$$2\ell_f^\Gamma - \delta' \leq \left(\frac{\lambda_1 + a_0}{\lambda_1}\right)^{\frac{N}{2}} 2\ell_f^\Gamma \leq \mu^\tau(a,f) \leq E_{a,f}(u).$$

Esto concluye la demostración. ■

Para concluir las demostraciones de los Teoremas 1.14 y 1.16 necesitamos comprobar que las soluciones obtenidas en los dos teoremas anteriores tienen las propiedades nodales requeridas. Este es el objetivo de la siguiente sección.

4.5. Propiedades nodales de las soluciones

La siguiente proposición es una versión simétrica de un resultado de Benci y Cerami [?]. Nos da una condición suficiente para que un punto crítico de $E_{a,f}\mid_{\mathcal{N}_{a,f}^\Gamma}: \mathcal{N}_{a,f}^\Gamma \to \mathbb{R}$ no cambie de signo.

Proposición 4.21 *Si $u \in \mathcal{N}_{a,f}^\Gamma$ es un punto crítico de $E_{a,f}$ tal que $E_{a,f}(u) < 2\mu^\Gamma(a,f)$ entonces, o bien $u \geq 0$, o bien $u \leq 0$.*

Demostración: Si $u \in \mathcal{N}_{a,f}^\Gamma$ es un punto crítico de $E_{a,f}$ entonces

$$0 = E'_{a,f}(u)u^\pm = \int_\Omega \left(\nabla u \nabla u^\pm + a(x)uu^\pm - |u|^{2^*-2}\, uu^\pm\right) = \left\|u^\pm\right\|_a^2 - \left|u^\pm\right|_{f,2^*}^{2^*},$$

donde $u^+ = \text{máx}\{u,0\}$ y $u^- = \text{mín}\{u,0\}$. Así pues, si $u^+ \neq 0$ y $u^- \neq 0$, entonces $u^\pm \in \mathcal{N}_{a,f}^\Gamma$ y, en consecuencia,

$$E_{a,f}(u) = E_{a,f}(u^+) + E_{a,f}(u^-) \geq 2\mu^\Gamma(a,f)$$

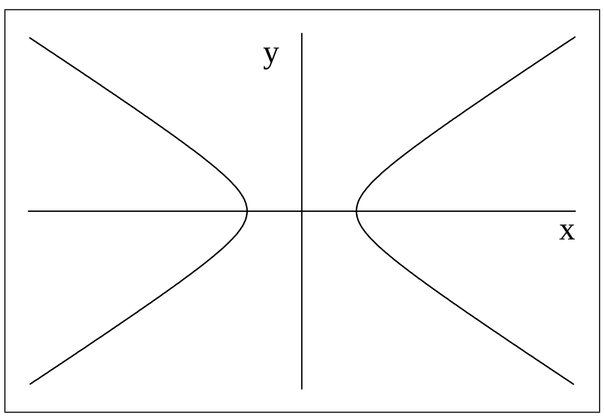
contradiciendo nuestra hipótesis. Por tanto, o bien $u^+ = 0$, o bien $u^- = 0$. ■

Supongamos ahora que existen un subgrupo cerrado G de $O(N)$ y un epimorfismo continuo $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ tales que Ω, a y f son G-invariantes y $\ker \tau = \Gamma$. Queremos estudiar las propiedades nodales de las soluciones de energía pequeña del problema $(\wp^{\tau}_{a,f})$. Para ello introducimos las siguientes nociones.

Sea Γ un subgrupo cerrado de $O(N)$ y sea A un subconjunto Γ-invariante de $\mathbb{R}^N$.

Definición 4.22 *Decimos que A es Γ-conexo si no se puede expresar como la unión de dos subconjuntos ajenos Γ-invariantes abiertos en A.*

Notemos que un subconjunto Γ-conexo no es necesariamente conexo. Por ejemplo, si $\Gamma = \{1, -1\}$ actúa por multiplicación en $\mathbb{R}^2$, entonces $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x^2 - 1\}$ es Γ-conexo, pero no es conexo.



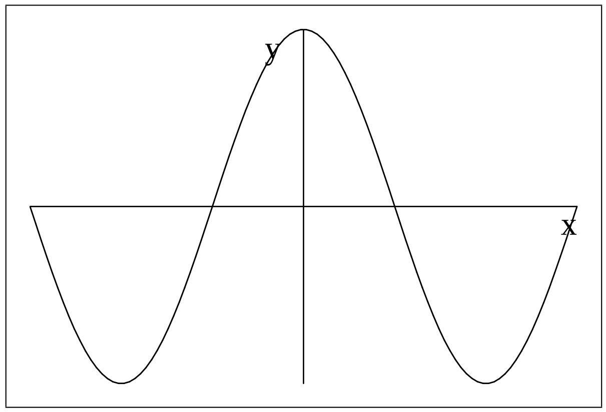
Definición 4.23 *Una función continua Γ-invariante $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es $(\Gamma, 2)$-nodal si los conjuntos*

$$\{x \in A : u(x) > 0\} \quad y \quad \{x \in A : u(x) < 0\}$$

son no vacíos y Γ-conexos.

Observemos que una función $(\Gamma, 2)$-nodal puede cambiar de signo más de una vez. Por ejemplo, si $\Gamma = \{1, -1\}$ actúa por multiplicación en $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, la función $u(x) =$

$\cos x$ es $(\Gamma, 2)$-nodal pero cambia de signo dos veces:



Proposición 4.24 *Sean G un subgrupo cerrado de $O(N)$, $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ un epimorfismo continuo y $\Gamma = \ker \tau$. Supongamos que Ω, a y f son G-invariantes. Si $u \in \mathcal{N}^{\tau}_{a,f}$ es un punto crítico de $E_{a,f}$ tal que $E_{a,f}(u) < 2\mu^{\tau}(a, f)$ entonces u es $(\Gamma, 2)$-nodal.*

Demostración: Como u es una solución del problema $(\wp^{\tau}_{a,f})$, se tiene que u es continua en $\overline{\Omega}$. Supongamos que existen dos abiertos ajenos Γ-invariantes U_1 y U_2 tales que

$$\{x \in \Omega : u(x) > 0\} = U_1 \cup U_2.$$

Sea $g_\tau \in G$ tal que $\tau(g_\tau) = -1$. Notemos que

$$g_\tau : \{x \in \Omega : u(x) > 0\} \cong \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$$

es un homeomorfismo. Definimos

$$u_i(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } \; x \in U_i \cup g_\tau(U_i) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces $u_i \in H^1_0(\Omega)^{\tau}$ para $i = 1, 2$. Como u es punto crítico de $E_{a,f}$ se tiene que

$$0 = E'_{a,f}(u)u_i = \int_{\Omega} \left(\nabla u \nabla u_i + a(x)uu_i - |u|^{2^*-2}\, uu_i \right) = \|u_i\|^2_a - |u_i|^{2^*}_{f,2^*}.$$

En consecuencia, si $U_1 \neq \emptyset$ y $U_2 \neq \emptyset$, entonces $u_1, u_2 \in \mathcal{N}^{\tau}_{a,f}$ y

$$E_{a,f}(u) = E_{a,f}(u_1) + E_{a,f}(u_2) \geq 2\mu^{\tau}(a, f),$$

contradiciendo nuestra hipótesis. Por tanto, $\{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ y $\{x \in \Omega : u(x) < 0\}$ son Γ-conexos. ■

El Teorema 1.14 es consecuencia inmediata del Teorema 4.19 y la Proposición 4.21, y el Teorema 1.16 es consecuencia inmediata del Teorema 4.20 y la Proposición 4.24.

4.6. Propiedades simétricas de las soluciones

Podría ocurrir que las soluciones Γ-invariantes proporcionadas por los resultados anteriores tuvieran de hecho muchas más simetrías. Los resultados que daremos a continuación (Teoremas 1.17 y 1.18 de la Introducción) restringen las simetrías de las soluciones. Usaremos la notación y las hipótesis introducidas al principio de la Sección 4.4.

Teorema 4.25 *Sea $N \geq 4$. Supongamos que se cumplen $(a_1), (a_2), (f_1), (f_2)$ y (ne). Sea $\widetilde{\Gamma}$ un subgrupo cerrado de $O(N)$ tal que $\Gamma \subset \widetilde{\Gamma}$ y Ω, a y f son $\widetilde{\Gamma}$-invariantes y se cumple*

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} < \min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\widetilde{\Gamma} x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}. \tag{4.24}$$

Entonces, dada $\delta > 0$ existe $a_0 \in (-\lambda_1, 0)$ tal que, si $\min_{\overline{\Omega}} a \geq a_0$, entonces el problema $(\wp^{\Gamma}_{a,f})$ tiene al menos

$$\mathrm{cat}_{B_\delta(M)/\Gamma}(M^-_\delta/\Gamma)$$

soluciones positivas que no son $\widetilde{\Gamma}$-invariantes.

Demostración: Sea $\delta > 0$. El Teorema 1.14 asegura que existe $a_1 \in (-\lambda_1, 0)$ tal que, si $\min_{\overline{\Omega}} a \geq a_1$, entonces el problema $(\wp^{\Gamma}_{a,f})$ tiene al menos

$$cat_{B_\delta(M)/\Gamma}(M^-_\delta/\Gamma)$$

soluciones positivas que satisfacen

$$E_{a,f}(u) < \ell^{\Gamma}_f.$$

Dado que $\mu^{\widetilde{\Gamma}}(a, f)$ es la mínima energía posible de una solución $\widetilde{\Gamma}$-invariante, bastará probar que existe $a_0 \in (a_1, 0)$ tal que

$$\ell^{\Gamma}_f \leq \mu^{\widetilde{\Gamma}}(a, f) \qquad \text{si } \min_{\overline{\Omega}} a \geq a_0. \tag{4.25}$$

Ahora bien, el Corolario 2.9 afirma que, para toda $-\lambda_1 < a_2 \leq \min\{0, a(x) : x \in \overline{\Omega}\}$, se cumple

$$\left(\frac{\lambda_1 + a_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{N}{2}} \mu^{\widetilde{\Gamma}}(0, f) \leq \mu^{\widetilde{\Gamma}}(a, f).$$

Así pues, para obtener (4.25) bastará probar que

$$\ell^{\Gamma}_f < \mu^{\widetilde{\Gamma}}(0, f). \tag{4.26}$$

Consideraremos dos casos: Supongamos primero que $\mu^{\widetilde{\Gamma}}(0,f)$ no se alcanza. Entonces $\mu^{\widetilde{\Gamma}}(0,f) = \ell_f^{\widetilde{\Gamma}}$ y la condición (4.24) garantiza que $\ell_f^{\Gamma} < \ell_f^{\widetilde{\Gamma}} = \mu^{\widetilde{\Gamma}}(0,f)$. Supongamos ahora que existe $u \in \mathcal{N}_{0,f}^{\widetilde{\Gamma}}$ tal que $E_{0,f}(u) = \mu^{\widetilde{\Gamma}}(0,f)$. Observemos que $\mathcal{N}_{0,f}^{\widetilde{\Gamma}} \subset \mathcal{N}_{0,f}^{\Gamma}$. La condición (ne) asegura que $E_{0,f}$ no alcanza su ínfimo en $\mathcal{N}_{0,f}^{\Gamma}$, en consecuencia,

$$\mu^{\widetilde{\Gamma}}(0,f) = E_{0,f}(u) > \mu^{\Gamma}(0,f) = \ell_f^{\Gamma}.$$

Esto prueba la afirmación (4.26) y concluye la demostración del teorema. ∎

Teorema 4.26 *Sea $N \geq 4$, sean $G \subset \widetilde{G}$ subgrupos cerrados de $O(N)$ y sea $\tau : \widetilde{G} \to \mathbb{Z}/2$ un epimorfismo con kernel $\widetilde{\Gamma} := \ker \tau$, tal que $\tau|_G : G \to \mathbb{Z}/2$ también es un epimorfismo y su kernel es $\Gamma = \ker \tau|_G$. Supongamos que Ω, a y f son $\widetilde{G}$-invariantes y que se cumplen $(a_1), (a_2), (f_1), (f_2)$ y (ne). Supongamos además que*

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}} < \min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\widetilde{\Gamma} x}{f(x)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Entonces, dada $\delta > 0$ existe $a_0 \in (-\lambda_1, 0)$ tal que, si $\min_{\overline{\Omega}} a \geq a_0$, entonces el problema $(\wp_{a,f}^{\Gamma})$ tiene al menos

$$\operatorname{cat}_{(B_\delta(M) \setminus B_\delta(M)^\tau/G}(M_{\tau,\delta}^{-}/G)$$

pares de soluciones $(\Gamma, 2)$-nodales $\pm u$ que son $\tau|_G$-equivariantes pero no son τ-equivariantes.

Demostración: La demostración es totalmente análoga a la anterior. ∎

4.7. Un resultado de no-existencia

A fin de poder aplicar los resultados anteriores requerimos dar condiciones para que se cumpla la condicion de no-existencia (ne). Veremos a continuación que esto ocurre si el dominio Ω es suficientemente delgado.

Sea $\varphi : \mathbb{S}^{N-1} \to [1,2]$ una función de clase C^∞ en la esfera unitaria en $\mathbb{R}^N$, sea $S_\varphi := \{\varphi(z)z : z \in \mathbb{S}^{N-1}\}$ y sea $\kappa > 0$. Consideremos el conjunto

$$A_{\varphi,\kappa} := \{z + tn_z : z \in S_\varphi,\ 0 < t < \kappa\},$$

donde n_z denota la normal unitaria exterior a S_φ en z. Diremos que Ω es (φ,κ)-*delgado* si $\overline{\Omega} \subset A_{\varphi,\kappa}$.

Se tiene el siguiente resultado de no-existencia [2]:

Teorema 4.27 (Ben Ayed, El Mehdi, Hammami, 2002) *Sea $N \geq 4$. Dada $C > 0$ existe $\kappa_0 > 0$ tal que, para toda $\kappa \in (0, \kappa_0)$, el problema*

$$(\wp_0 [A_{\varphi,\kappa}]) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u & \text{en } A_{\varphi,\kappa} \\ u = 0 & \text{sobre } \partial A_{\varphi,\kappa} \end{cases}$$

no tiene ninguna solución positiva tal que

$$\int_{A_{\varphi,\kappa}} |\nabla u|^2 \leq C.$$

Usaremos este resultado para probar el Teorema 1.19 de la introducción.

Teorema 4.28 *Sea $\varphi : \mathbb{S}^{N-1} \to [1, 2]$ una función Γ-invariante de clase C^∞, $N \geq 4$. Entonces existe $\kappa_0 > 0$ tal que para todo dominio Γ-invariante (φ, κ_0)-delgado Ω que satisface*

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \#\Gamma x = \min_{z \in \mathbb{S}^{N-1}} \#\Gamma z, \tag{4.27}$$

el problema

$$(\wp_0^\Gamma [\Omega]) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u(\gamma x) = u(x) & \forall x \in \Omega,\ \gamma \in \Gamma \end{cases}$$

no tiene ninguna solución tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \#\Gamma x \right) S^{\frac{N}{2}}. \tag{4.28}$$

Demostración: Para $C := (\min_{x \in \overline{\Omega}} \#\Gamma x) S^{\frac{N}{2}}$ tomemos $\kappa_0 > 0$ como en el Teorema 4.27. Sea $\Omega \subset A_{\varphi,\kappa}$ con $\kappa \in (0, \kappa_0)$ un dominio Γ-invariante que satisface (4.27). Denotemos por $\mu^\Gamma(0, 1, \Omega)$ y por $\mu^\Gamma(0, 1, A_{\varphi,\kappa})$ a la mínima energía posible de una solución Γ-invariante no trivial de los problemas $(\wp_0^\Gamma [\Omega])$ y $(\wp_0^\Gamma [A_{\varphi,\kappa}])$ respectivamente. Supongamos, por contradicción, que existe una solución u de $(\wp_0^\Gamma [\Omega])$ que satisface (4.28). Entonces, usando la Proposición 2.7 y la propiedad (4.27) obtenemos

$$\left(\min_{x \in \overline{A}_{\varphi,\kappa}} \#\Gamma x \right) \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} = \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \#\Gamma x \right) \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \geq E_{0,1}(u) \geq \mu^\Gamma(0, 1, \Omega) \geq \mu^\Gamma(0, 1, A_{\varphi,\kappa}).$$

La Proposición 4.21 y el Teorema 4.27 aseguran que $E_{0,1}(u) \neq \mu^\Gamma(0, 1, A_{\varphi,\kappa})$. En consecuencia,

$$\left(\min_{x \in \overline{A}_{\varphi,\kappa}} \#\Gamma x \right) \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} > \mu^\Gamma(0, 1, A_{\varphi,\kappa}).$$

Del Corolario 3.4 *(a)* se sigue entonces que el mínimo $\mu^\Gamma(0, 1, A_{\varphi,\kappa})$ se alcanza y la Proposición 4.21 asegura que tal mínimo no cambia de signo. Esto contradice al Teorema 4.27. ■

4.8. El problema de Brezis-Nirenberg

Aplicaremos los resultados anteriores al problema de Brezis-Nirenberg

$$(\wp_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2} u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un abierto acotado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 4$ y $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$.

Observemos que las funciones $a \equiv \lambda \in (-\lambda_1, 0)$ y $f \equiv 1$ cumplen $(a_1), (a_2), (f_1), (f_2)$.

Diremos que Ω es simétrico respecto al origen si $-x \in \Omega$ para toda $x \in \Omega$. Diremos que una solución de $(\wp_\lambda)$ es 2-*nodal* si los conjuntos

$$\{x \in \Omega : u(x) > 0\} \quad \text{y} \quad \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$$

son conexos y no vacíos.

Los Teoremas 1.20, 1.21 y 1.22 enunciados en la Introducción se obtienen a partir de los teoremas generales que probamos anteriormente. Para su demostración requerimos además los siguientes resultados topológicos.

Proposición 4.29 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es simétrico respecto al origen, $0 \notin \Omega$ y existe una función impar y continua $\mathbb{S}^{k-1} \to \Omega$, entonces $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\Omega) \geq k$.*

Demostración: Sea $m = \mathbb{Z}/2\text{-}cat(\Omega)$ y sean $U_1, ..., U_m$ abiertos simétricos tales que $\Omega = U_1 \cup \cdots \cup U_m$ y tales que existen $y_1, ..., y_m \in \Omega$ y funciones continuas impares $\alpha_i : U_i \to \{y_i, -y_i\}$ como en la Definición 4.1. Como $0 \notin \Omega$, se tiene que $y_i \neq -y_i$, por tanto $\{y_i, -y_i\} \cong \{1, -1\}$. Denotemos por $\psi_i : U_i \to \{1, -1\}$ a la composición de α_i con ese homeomorfismo y tomemos una partición de la unidad par $\{\varrho_i : \Omega \to [0, 1] : i = 1, ..., m\}$ subordinada a la cubierta $\{U_1, ..., U_m\}$. La función

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m \smallsetminus \{0\}, \qquad f(x) = (\psi_1(x)\varrho_1(x), ..., \psi_m(x)\varrho_m(x))$$

está bien definida y es impar y continua. Como, por hipótesis, existe una función impar y continua $\mathbb{S}^{k-1} \to \Omega$, el teorema de Borsuk-Ulam implica que $m \geq k$. ■

Proposición 4.30 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es simétrico respecto al origen y $0 \notin \Omega$, entonces* $\text{cat}(\Omega) \geq 2$.

Demostración: Supongamos, por el contrario, que Ω es contraíble. Probaremos entonces, por inducción que existe una función continua e impar $\mathbb{S}^m \to \Omega$ para toda $m \geq 0$. Esto es obviamente cierto si $m = 0$. Supongamos que existe una tal función

$\mathbb{S}^{m-1} \to \Omega$. Como Ω es contraíble, dicha función tiene una extensión continua $f : \mathbb{S}^m_+ \to \Omega$ al hemisferio $\mathbb{S}^m_+ = \{(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{S}^m : x_m \geq 0\}$. La función $\overline{f} : \mathbb{S}^m \to \Omega$ dada por

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x_m \geq 0 \\ -f(-x) & \text{si } x_m \leq 0 \end{cases}$$

es impar y continua.
Por otra parte, como $\Omega \subset \mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$, existe una función impar y continua $\Omega \to \mathbb{S}^{N-1}$. Esto contradice al teorema de Borsuk-Ulam. ■

Teorema 4.31 *Si Ω es simétrico respecto al origen y admite una función impar y continua $\mathbb{S}^{k-1} \to \Omega \smallsetminus \{0\}$, entonces existe $\lambda^* \in (-\lambda_1, 0)$ tal que, para toda $\lambda \in (\lambda^*, 0)$, el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos $k+1$ parejas de soluciones $\pm u$; más precisamente, $(\wp_\lambda)$ posee al menos*

- ▶ $\text{cat}(\Omega)$ *soluciones positivas, y*
- ▶ $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\Omega \smallsetminus \{0\}) \geq k$ *parejas de soluciones impares 2-nodales.*

Demostración: Sea $G = \{Id, -Id\} = \mathbb{Z}/2$ y sea τ la identidad. Entonces $\Gamma = \ker \tau = \{Id\}$ es el grupo trivial. El Teorema 1.5 garantiza que se cumple (ne). El resultado de Rey y Lazzo (Teorema 1.7) asegura que, para λ suficientemente cercana a 0, el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos $\text{cat}(\Omega)$ soluciones positivas. Aplicaremos ahora el Teorema 1.16 para obtener soluciones impares 2-nodales. Como $\Gamma = \{Id\}$ y $f \equiv 1$ se tiene que $M = \overline{\Omega}$, y $\Omega^\tau = \{x \in \Omega : \pm x = x\} \subset \{0\}$. Escojamos $\delta > 0$ suficientemente pequeña tal que

$$M^-_{\tau,\delta} = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega \cup \{0\}) \geq \delta\}$$

sea equivariantemente homotópicamente equivalente a $\Omega \smallsetminus \{0\}$. El Teorema 1.16 garantiza que, para λ suficientemente cercana a 0, el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos $\mathbb{Z}/2$-$\text{cat}(\Omega \smallsetminus \{0\})$ parejas de soluciones impares 2-nodales y, dado que existe una función impar y continua $\mathbb{S}^{k-1} \to \Omega \smallsetminus \{0\}$, la Proposición 4.29 asegura que $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\Omega \smallsetminus \{0\}) \geq k$.
■

Teorema 4.32 *Si Ω es simétrico respecto al origen, $0 \notin \Omega$ y admite una función impar y continua $\mathbb{S}^{k-1} \to \Omega$, entonces existe $\lambda^* \in (-\lambda_1, 0)$ tal que, para toda $\lambda \in (\lambda^*, 0)$, el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos $k+3$ parejas de soluciones $\pm u$; más precisamente, $(\wp_\lambda)$ posee al menos*

- ▶ $\text{cat}(\Omega) \geq 2$ *soluciones positivas que no son pares,*
- ▶ *una solución positiva par, y*
- ▶ $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\Omega) \geq k$ *parejas de soluciones impares 2-nodales.*

Demostración: Aplicaremos el Teorema 1.17 a los grupos $\Gamma = \{Id\}$ y $\widetilde{\Gamma} = \{Id, -Id\} = \mathbb{Z}/2$. Como $0 \notin \Omega$ se cumple la desigualdad

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \#\Gamma x = 1 < 2 = \min_{x \in \overline{\Omega}} \#\widetilde{\Gamma} x.$$

El Teorema 1.5 garantiza que se cumple (ne). Se tiene que $M = \overline{\Omega}$. Escojamos $\delta > 0$ suficientemente pequeña tal que los conjuntos

$$M_\delta^- := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) \geq \delta\} \quad \text{y} \quad B_\delta(M) := \{x \in \mathbb{R}^N : dist(x, \Omega) \leq \delta\}$$

sean homotópicamente equivalentes a Ω. El Teorema 1.17 garantiza que, para λ suficientemente cercana a 0, el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos $\text{cat}_{B_\delta(M)}(M_\delta^-) = \text{cat}(\Omega)$ soluciones positivas que no son pares, y la Proposición 4.30 asegura que $\text{cat}(\Omega) \geq 2$. Del Teorema 1.13 se sigue que $(\wp_\lambda)$ tiene al menos una solución positiva par, y del teorema anterior se sigue que tiene $\mathbb{Z}/2\text{-}cat(\Omega) \geq k$ parejas de soluciones impares 2-nodales, para λ suficientemente cercana a 0. ■

Teorema 4.33 *Sea $\varphi : \mathbb{S}^{N-1} \to [1, 2]$ una función par de clase C^∞, $N \geq 4$. Entonces existe $\kappa_0 > 0$ con la siguiente propiedad: Para todo dominio (φ, κ_0)-delgado Ω, simétrico respecto al origen que admite una función impar y continua $\mathbb{S}^{k-1} \to \Omega$, existe $\lambda^* \in (-\lambda_1, 0)$ tal que, para toda $\lambda \in (\lambda^*, 0)$, el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos $2k + 2$ parejas de soluciones $\pm u$; más precisamente, $(\wp_\lambda)$ posee al menos*

- $\text{cat}(\Omega) \geq 2$ *soluciones positivas que no son pares,*
- $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\Omega) \geq k$ *soluciones positivas pares, y*
- $\mathbb{Z}/2\text{-cat}(\Omega) \geq k$ *parejas de soluciones impares 2-nodales.*

Demostración: El teorema anterior garantiza que, para λ suficientemente cercana a 0, el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos $cat(\Omega) \geq 2$ soluciones positivas que no son pares y $\mathbb{Z}/2\text{-}cat(\Omega) \geq k$ parejas de soluciones impares 2-nodales. Aplicaremos el Teorema 1.14 para obtener las restantes. Sea $\Gamma = \{Id, -Id\} = \mathbb{Z}/2$. Puesto que

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \#\Gamma x = \min_{z \in \mathbb{S}^{N-1}} \#\Gamma z = 2,$$

el Teorema 4.27 garantiza que existe $\kappa_0 > 0$ tal que, si Ω es (φ, κ_0)-delgado Ω y simétrico respecto al origen el problema

$$(\wp_0) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

no tiene ninguna solución par tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq 2S^{\frac{N}{2}}.$$

Es decir, la afirmación *(i)* del Teorema 1.14 no se cumple. Como $0 \notin \Omega$, se tiene que $M = \Omega$. Escojamos $\delta > 0$ suficientemente pequeña tal que los conjuntos

$$M_\delta^- := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) \geq \delta\} \quad \text{y} \quad B_\delta(M) := \{x \in \mathbb{R}^N : dist(x, \Omega) \leq \delta\}$$

sean equivariantemente homotópicamente equivalentes a Ω. El Teorema 1.14 asegura que, para λ suficientemente pequeña, el problema $(\wp_\lambda)$ tiene al menos

$$\mathrm{cat}_{B_\delta(M)/\Gamma}(M_\delta^-/\Gamma) = \mathrm{cat}(\Omega/\Gamma)$$

soluciones positivas pares. El Lema 4.3 y la Proposición 4.29 aseguran que $\mathrm{cat}(\Omega/\Gamma) = \mathbb{Z}/2\text{-}cat(\Omega) \geq k$. Esto concluye la demostración. ■

Bibliografía

[1] Th. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geom. **11** (1976), 573-598.

[2] M. Ben Ayed, K. El Mehdi, M. Hammami, *A nonexistence result for Yamabe type problems on thin annuli,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 19 (2002), 715-744.

[3] V. Benci, G. Cerami, *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems,* Arch. Rat. Mech. Anal. **114** (1991), 79-93.

[4] H. Brezis, *Análisis funcional,* Alianza Editorial, Madrid 1984.

[5] H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals,* Proc. Amer. Soc. **88**, (1983), 486-490.

[6] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Commun. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[7] A. Capozzi, D. Fortunato, G. Palmieri, *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent,* Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire **2** (1985), 463-440.

[8] A. Castro, M. Clapp, *The effect of the domain topology on the number of minimal nodal solutions of an elliptic equation at critical growth in a symmetric domain,* Nonlinearity **16** (2003), 579-590.

[9] G. Cerami, S. Solimini, M. Struwe, *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents,* J. Funct. Anal. **69** (1986), 289-306.

[10] M. Clapp, *A global compactness result for elliptic problems with critical nonlinearity on symmetric domains,* en *Nonlinear Equations: Methods, Models and Applications,* 117-126, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **54**, Birkhauser, Boston, 2003.

[11] M. Clapp, O. Kavian, B. Ruf, *Multiple solutions on nonhomogeneous elliptic equations with critical nonlinearity on symmetric domains,* Comm. in Contemp. Math. **5** No. 2, (2003) 147-169.

[12] M. Clapp, D. Puppe, *Critical point theory with symmetries*, J. reine angew. Math. **418** (1991), 1-29.

[13] M. Clapp, T. Weth, *Multiple solutions for the Brezis-Nirenberg problem,* Advances in Differential Equations **10** (2005), 463-480.

[14] G. Devillanova, S. Solimini, *A multiplicity result for elliptic equations at critical growth in low dimension,* Comm. Contemp. Math. **5** (2003), 171-177.

[15] L. C. Evans, *Partial differential equations,* GSM **19**, Amer. Math. Soc., Providence RI 1998.

[16] E. Hebey, M. Vaugon, *Existence and multiplicity of nodal solutions for nonlinear elliptic equations with critical Sobolev growth,* J. Funct. Anal. **119** (1994) 298-318.

[17] I. M. James, *On category, in sense of Lusternik-Schnirelmann,* Topology **17**, (1978) 331-348.

[18] J. Kazdan, F. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 567-589.

[19] M. Lazzo, *Solutions positives multiples pour une équation elliptique non linéaire avec l'exposant critique de Sobolev,* C.R. Acad. Sci. Paris **314**, Série I (1992), 61-64.

[20] P. L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case,* Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145-201, y **2** (1985), 45-121.

[21] P. L. Lions, *Symmetries and the concentration compactness method*, in *Nonlinear variational problems*, Research Notes in Math. **127**, Pitman, London 1985, 47-56.

[22] R. Palais, *The principle of symmetric criticallity,* Comm. Math. Phys. **69** (1979), 19-30.

[23] S. Pohožaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 1408-1411.

[24] O. Rey, *A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness,* Nonl. Anal. T.M.A. **133** (1989), 1241-1249.

[25] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York 1966.

[26] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math. Z. **187** (1984), 511-517.

[27] M. Struwe, *Variational methods,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1996.

[28] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality,* Ann. Mat. Pura Appl. **110**, (1976), 353-372.

[29] M. Willem, *Minimax theorems,* PNLDE **24**, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin 1996.