



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

CONTROL CARTESIANO DE  
UNA MANO MECANICA  
DE DOS DEDOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
MAESTRA EN INGENIERIA

AREA: ELÉCTRICA. CAMPO: CONTROL  
P R E S E N T A:  
MARIA ANGELICA VILLEGAS AGUILAR

ASESOR: DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PEREZ



CIUDAD UNIVERSITARIA

MEXICO, D.F. MARZO 2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

A mi familia por que siempre me apoya en lo que hago.

Al Dr. Marco Arteaga Pérez por darme la oportunidad de pertenecer a su equipo de trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por una beca otorgada durante un semestre de la Maestría.

A mis amigos del Laboratorio de Robótica por la ayuda que me brindaron y que fue muy importante.

A la UNAM por alojarme en sus instalaciones.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelo cinemático directo de un robot manipulador</b>	<b>5</b>
2.1	cinemática directa . . . . .	5
2.2	Espacio articular y espacio operacional . . . . .	8
2.3	Espacio de trabajo . . . . .	9
2.4	Jacobiano de un robot manipulador . . . . .	10
2.4.1	Jacobiano analítico . . . . .	11
2.5	Singularidades . . . . .	12
2.6	Redundancia . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Diseño de un control cartesiano de robots manipuladores</b>	<b>15</b>
3.1	Modelo dinámico de un robot manipulador . . . . .	15
3.1.1	Formulación de Euler-Lagrange . . . . .	16
3.1.2	Modelo dinámico de un robot manipulador . . . . .	16
3.2	Propiedades del modelo de robots manipuladores . . . . .	17
3.3	Diseño de una ley de control con observador . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Descripción del sistema experimental</b>	<b>21</b>
4.1	Mano mecánica de dos dedos . . . . .	21
4.1.1	Sensores de posición . . . . .	22
4.1.2	Espacio de trabajo de la mano mecánica . . . . .	23
4.2	Tarjeta de adquisición de datos . . . . .	23
4.2.1	Señales de control . . . . .	23
4.2.2	Configuración de las señales de entrada y salida del sistema experimental . . . . .	24
4.3	Computadora Personal . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>27</b>
5.1	Implementación del controlador . . . . .	27
5.1.1	Cálculo de la cinemática directa del sistema de la mano mecánica . . . . .	28
5.1.2	Cálculo del Jacobiano analítico . . . . .	30

5.1.3	Trayectoria de seguimiento . . . . .	30
5.1.4	Trabajo Coordinado . . . . .	31
5.2	Experimentos . . . . .	32
5.3	Resultados experimentales . . . . .	33
5.3.1	Condiciones iniciales del <i>dedo 1</i> . . . . .	33
5.3.2	Condiciones iniciales del <i>dedo 2</i> . . . . .	34
5.3.3	Control individual del <i>dedo 1</i> . . . . .	34
5.3.4	Control individual del <i>dedo 2</i> . . . . .	37
5.3.5	Control coordinado de la mano mecánica . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>Teorema y lema auxiliares</b>	<b>45</b>
<b>B</b>	<b>Demostración del Teorema 3.3.1</b>	<b>47</b>

---

# Índice de Figuras

2.1	Descripción de la posición y orientación del sistema del efector final. . .	6
2.2	Transformación de coordenadas en una cadena cinemática abierta. . .	7
2.3	Sentidos positivos. . . . .	8
2.4	Sistema de asignación de Denavit-Hartenberg. . . . .	8
2.5	Configuración singular. . . . .	13
4.1	Esquema general del sistema experimental. . . . .	21
4.2	Elementos del sistema experimental. . . . .	22
4.3	Designación de las articulaciones de la mano mecánica. . . . .	25
5.1	Mano mecánica de dos dedos. . . . .	27
5.2	Manipulador planar con dos eslabones. . . . .	28
5.3	Sistemas de referencia para el <i>dedo 1</i> y <i>dedo 2</i> de la mano mecánica. . .	31
5.4	Sistemas de referencia para la posición deseada del <i>dedo 1</i> y <i>dedo 2</i> . . .	32
5.5	Trayectoria de seguimiento para ambos dedos de la mano mecánica. . . . .	33
5.6	Trayectoria real (–) contra deseada (– –) para el <i>dedo 1</i> . . . . .	35
5.7	Errores de seguimiento y observación en coordenadas cartesianas del <i>dedo 1</i> . . .	36
5.8	Voltajes de entrada <i>dedo 1</i> : a) articulación 1 y b) articulación 2. . . . .	36
5.9	Seguimiento de trayectorias real (–) contra deseada para el (– –) <i>dedo 2</i> . . .	37
5.10	Errores de seguimiento y observación del <i>dedo 2</i> , en coordenadas cartesianas. . . . .	38
5.11	Voltajes de entrada <i>dedo 2</i> : a) articulación 1 y b) articulación 2. . . . .	38
5.12	Trayectorias actual (–) y deseada (– –) del <i>dedo 1</i> y <i>dedo 2</i> , respectivamente. . .	40
5.13	Errores de seguimiento y observación del <i>dedo 1</i> . . . . .	41
5.14	Errores de seguimiento y observación del <i>dedo 2</i> . . . . .	41
5.15	Voltajes de entrada <i>dedo 1</i> y <i>dedo 2</i> , respectivamente. . . . .	42

# Resumen

En esta tesis se estudia el problema de control de seguimiento para pequeños robots rígidos (dedos de la mano mecánica) sin modelo. El objetivo principal se basa en el control de una mano mecánica de dos dedos con dos grados de movilidad cada uno, construida en el Laboratorio de Robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, empleando una ley de control cartesiana para robots manipuladores basada en Parra-Vega (2003). El diseño de esta ley no requiere ningún modelo de los dedos de la mano mecánica para su implementación, además es llevado directamente a coordenadas del espacio operacional. En este esquema se emplea un observador lineal para obtener los valores de velocidad en cada una de las articulaciones de los dedos de la mano, con lo que se logra un control de seguimiento exacto. Para comprobar la estabilidad del sistema bajo el esquema de control cartesiano se realizaron diferentes experimentos que se caracterizan por llevar a los dedos de la mano mecánica de una posición inicial a una posición final, a partir del seguimiento de una trayectoria suave. Los experimentos incluyen el control individual y simultáneo de los dedos. En todos los casos analizados se observa una variación de los errores de seguimiento y observación, que se deben principalmente a pequeñas oscilaciones que se presentan por las lecturas imprecisas tomadas directamente de los sensores de posición (potenciómetros). Estos resultados se podrían mejorar utilizando otro tipo de transductores más precisos como codificadores, no obstante, la desventaja que se presenta es la integración de estos sensores a la arquitectura pequeña de la mano mecánica.

# Capítulo 1

## Introducción

El objetivo principal de un sistema de control es llevar la salida de un sistema dinámico a un valor deseado, mediante la aplicación de una ley o algoritmo de control.

Antes de llevar a la práctica una ley de control es necesario obtener un modelo matemático del sistema dinámico en estudio, y posteriormente simular en computadora el modelo bajo el esquema de control. Así, es importante destacar que la obtención del modelo matemático lleva implícitas una serie de suposiciones, simplificaciones y limitaciones que implican errores tolerables. Esto hace que siempre existan incertidumbres a la hora de modelar, y lo razonable es conocer hasta un cierto punto estos errores implícitos.

Muchas veces el modelo contiene errores debido a factores como: complejidad del sistema (en este caso, robots manipuladores no lineales), parámetros desconocidos y perturbaciones externas difíciles de cuantificar. Estos errores pueden resultar desastrosos a la hora de su puesta en práctica; por ello continuamente se desarrollan nuevos métodos y leyes de control que sean robustos a incertidumbres en el modelo.

Por otra parte, ya que la mayoría de los controladores se basan en la retroalimentación de las variables de estado del sistema, usualmente los manipuladores son equipados con sensores de posición y velocidad en cada articulación. Incorporar sensores de velocidad tiene la desventaja de incrementar costos y la dificultad de integrarlos en arquitecturas pequeñas. Sin embargo, las mediciones de velocidad obtenidas por tacómetros están contaminadas por el ruido impidiendo una lectura confiable. Además, el ruido en la medición de velocidad puede causar inestabilidad del sistema. Por ello y tomando en cuenta que los sensores de posición, como codificadores, proporcionan una muy buena aproximación de la medición del desplazamiento de cada articulación, algunas veces es más conveniente estimar las ve-

locidades a través de observadores<sup>1</sup> que utilizar tacómetros.

De lo anterior, es notorio que los dos problemas fundamentales que se tienen que resolver son: un modelo exacto del robot y la posible carencia de medidores de velocidad. Debido a esto, en las últimas décadas se han propuesto muchos diseños para lograr un control del sistema mecánico y el seguimiento exacto de trayectorias.

Uno de los primeros observadores no lineales utilizados para estimar la velocidad de las articulaciones fue propuesto por Nicosia y Tomei (1990), en su trabajo también realiza control de seguimiento. Una desventaja de su aproximación es que se requiere un conocimiento exacto del modelo del robot. Por otra parte, para solucionar el modelo inexacto del robot se han propuesto algunos esquemas de control como: el robusto (Spong 1992) y el adaptable (Slotine y Li 1987). En una técnica robusta se introduce un término extra en la ley de control para lograr acotamiento final de las trayectorias y en un esquema de control adaptable, además de ser complejo, se requiere la estimación de los parámetros sea en línea. Otra técnica reciente fue propuesta por Parra-Vega *et al.* (2003) en la cual un control PID deslizante es capaz de alcanzar una trayectoria exacta sin ningún conocimiento del modelo para su implementación.

No obstante, esto no es suficiente para resolver los dos problemas separadamente. De esta forma, se han propuesto algunos esquemas de control robusto que sólo necesitan mediciones de posición y no requieren de un modelo exacto del robot. Por ejemplo, en Canudas de Wit y Fixot (1991) se desarrolla un observador deslizante que permite la estimación de la velocidad de las articulaciones. En Berghuis y Nijmeijer (1994) se propone un observador lineal y una ley de control robusta, que no requiere de ningún conocimiento de los parámetros del modelo del robot ni de su estructura para lograr que los errores de seguimiento y observación sean uniforme y finalmente acotados (*uniform ultimately boundedness*). Otro estimador robusto se presenta en Qu *et al.* (1995) con el cual se logra también que los errores sean uniforme y finalmente acotados. En Arteaga Pérez y Kelly (2004) se propone un observador lineal junto con un esquema de control robusto, el cuál garantiza que los errores de seguimiento y observación sean uniforme y finalmente acotados. Por otra parte, en Arteaga Pérez (2003) se presenta un control adaptable con un observador para estimar las velocidades de las articulaciones, aunque sólo se logra que los errores de seguimiento y observación sean uniforme y finalmente acotados.

Todos los algoritmos de control para robots rígidos mencionados anteriormente están dados en coordenadas articulares. Sin embargo, la tarea que realiza un sistema

---

<sup>1</sup>Un observador estima las variables que no están disponibles para la retroalimentación.

---

articulado normalmente se expresa en coordenadas cartesianas, por lo que se tiene que calcular la cinemática inversa para su implementación. Alternativamente, se puede desarrollar la teoría necesaria en coordenadas del espacio de trabajo u operacional (Murray *et al.* 1994) para evitar el uso de la cinemática inversa. Por ejemplo, en Caccavale *et al.* (1999) y Xian *et al.* (2004) se proponen controladores que se aproximan al diseñado en coordenadas del espacio operacional y que no requieren mediciones de velocidad. Ambos esquemas de control utilizan cuaterniones unitarios para el seguimiento de orientación. Sin embargo, también tienen la desventaja de utilizar el modelo del robot tanto para el controlador como para el observador, donde los observadores son no lineales.

**En esta tesis se presenta el control coordinado de una mano mecánica de dos dedos mediante el diseño de una ley de control que se basa en Parra-Vega *et al.* (2003).** El diseño de esta ley no requiere ningún modelo de los dedos de la mano mecánica para su implementación, además es llevado directamente a coordenadas del espacio operacional. En este esquema se emplea un observador lineal para evitar mediciones de velocidad en cada una de las articulaciones de los dedos de la mano, con lo que se logra un control de seguimiento exacto. Por otra parte, el problema de la orientación se resuelve utilizando el Jacobiano analítico en lugar del geométrico. Para probar la teoría se realizan experimentos con una mano mecánica de dos dedos construida en el Laboratorio de Robótica en el año 2002, para probar en ella algoritmos de control.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presentan las ecuaciones cinemáticas que permiten expresar a la posición y orientación del efector final como una función de las variables articulares de la estructura de cada dedo de la mano mecánica con respecto a un sistema de referencia. También, se introducen los conceptos de espacio operacional, espacio articular, espacio de trabajo y singularidades. En el Capítulo 3 se desarrolla el diseño del controlador en el espacio cartesiano. En el Capítulo 4 se presenta una descripción del sistema experimental. En el Capítulo 5 se implementa el controlador diseñado y se muestran los resultados experimentales. Posteriormente, se presentan las conclusiones en el Capítulo 6. Finalmente, se dan los Apéndices A y B donde se demuestra el Teorema establecido para comprobar la estabilidad del controlador diseñado.

---



# Capítulo 2

## Modelo cinemático directo de un robot manipulador

Un manipulador consiste de una serie de cuerpos rígidos llamados eslabones, conectados por medio de pares o articulaciones. Las articulaciones pueden ser esencialmente de dos tipos: de revolución o prismáticas. La estructura completa forma una *cadena cinemática*. Un extremo de la cadena es conectado a una base y el efector final (gripper, herramienta) es conectado al otro extremo permitiendo la manipulación de los objetos en el espacio. La estructura mecánica del manipulador está caracterizada por el número de grados de movilidad que tiene y que determinan su configuración. Cada uno de los grados de movilidad está asociado con una articulación y constituye una *variable articular*.

En este capítulo se desarrollan las ecuaciones cinemáticas que permiten expresar a la posición y orientación del efector final como una función de las variables articulares de la estructura de cada dedo de la mano mecánica con respecto a un sistema de referencia. También, se introducen los conceptos de espacio operacional, espacio articular, espacio de trabajo y singularidades.

### 2.1 cinemática directa

El objetivo de la cinemática directa es determinar la posición del *efector final del manipulador* como una función de las variables articulares.

La posición y la orientación de un cuerpo con respecto a un sistema de referencia son descritos por el vector de posición del origen y los vectores unitarios de un sistema ligado al cuerpo. Así, con respecto a un sistema de referencia  $o_0x_0y_0z_0$ , la

cinemática directa es expresada por la matriz de transformación homogénea

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{a}$  son los vectores unitarios del sistema ligado al efector final y  $\mathbf{d}$  es el vector de posición del origen de tal sistema con respecto al origen del sistema base  $o_0x_0y_0z_0$ , Figura 2.1. Noté que  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{d}$  son funciones de la posición  $\mathbf{q}$ .

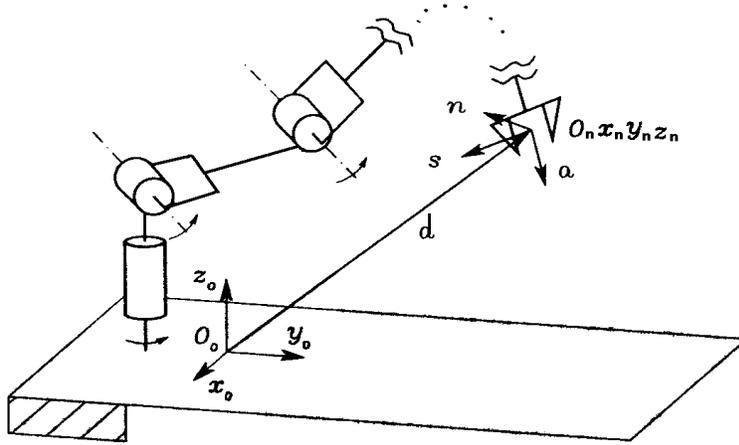


Figura 2.1: Descripción de la posición y orientación del sistema del efector final.

Sin embargo, la forma más común de representar la cinemática directa es a través de una matriz de transformación homogénea  ${}^0\mathbf{T}_n \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , donde  $n$  es el número de articulaciones del manipulador. Esta transformación da la posición y la orientación del sistema de coordenadas del efector final expresado en coordenadas del sistema inercial o base, ver Figura 2.2. La matriz  ${}^0\mathbf{T}_n$  está definida como:

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{A}_1(q_1) {}^1\mathbf{A}_2(q_2) \cdots {}^{i-1}\mathbf{A}_i(q_i) = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n & {}^0\mathbf{d}_n \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

donde  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ , es una matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto del sistema  $i$  al sistema de coordenadas  $i - 1$ ,  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$  es el vector que representa las variables de las articulaciones.  ${}^0\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz ortogonal de rotación que representa la orientación del sistema coordinado  $o_nx_ny_nz_n$  con respecto al sistema de la base  $o_0x_0y_0z_0$ , Figura 2.2, y cumple con

$${}^0\mathbf{R}_n = ({}^n\mathbf{R}_0)^{-1} = ({}^n\mathbf{R}_0)^T$$

$$\det({}^n\mathbf{R}_0) \equiv +1. \quad (2.3)$$

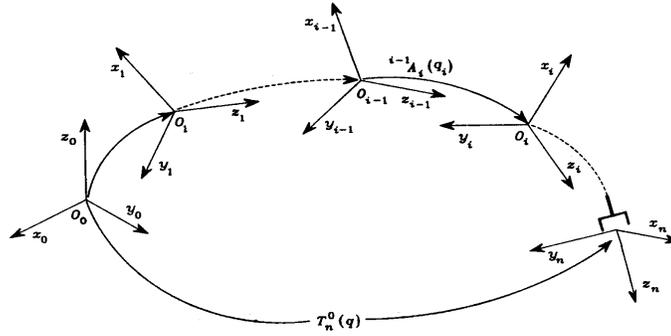


Figura 2.2: Transformación de coordenadas en una cadena cinemática abierta.

Por otra parte,  ${}^0\mathbf{d}_n \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el vector que indica la posición del origen del sistema  $n$  ligado al efector final, medido desde el origen del sistema de referencia  $o_0x_0y_0z_0$ , y con respecto a éste mismo sistema. Usualmente se utiliza la representación de Denavit-Hartenberg para calcular la matriz de transformación  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  (Spong y Vidyasagar 1989), que permite calcular cada matriz homogénea como:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \mathbf{Rot}_{z,\theta}, \mathbf{Trans}_{z,d_i}, \mathbf{T}_{x,a_i}, \mathbf{Rot}_{x,\alpha_i} \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{Rot}_{z,\theta}$  es la rotación de  $\theta$  alrededor del eje  $z$ , Figura 2.3(a),  $\mathbf{Trans}_{z,d_i}$  es la translación de una distancia  $d_i$  en dirección del eje  $z$ ,  $\mathbf{T}_{x,a_i}$  es la translación a una distancia  $a_i$  en la dirección del eje  $x$  y  $\mathbf{Rot}_{x,\alpha_i}$  es la rotación  $\alpha_i$  alrededor del eje  $x$ , Figura 2.3(b). Realizando el producto de las cuatro transformaciones básica, se obtiene

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde  $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$  y  $\alpha_i$  son parámetros del elemento y la articulación  $i$ , ver Figura 2.4, y son descritos de la siguiente forma.

$a_i$  : distancia de separación desde la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $z_i$  hasta el origen  $o_i$ , del sistema  $i$ , a lo largo del eje  $x_i$ .

$d_i$  : distancia desde el origen  $o_{i-1}$ , del sistema de coordenadas  $i - 1$ , hasta la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$  a lo largo del eje  $z_{i-1}$ .

$\theta_i$  : el ángulo de la articulación del eje  $x_{i-1}$  al eje  $x_i$  medido alrededor de  $z_{i-1}$ , utilizando la regla de la mano derecha.  $\theta_i$  es variable para cada articulación de revolución.

$\alpha_i$  : el ángulo de torsión entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$  medido alrededor de  $x_i$ , utilizando la regla de la mano derecha.

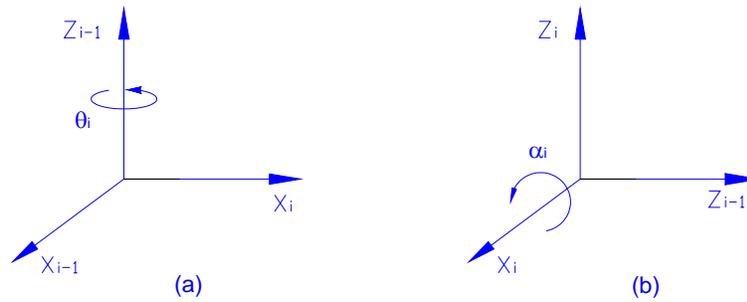


Figura 2.3: Sentidos positivos.

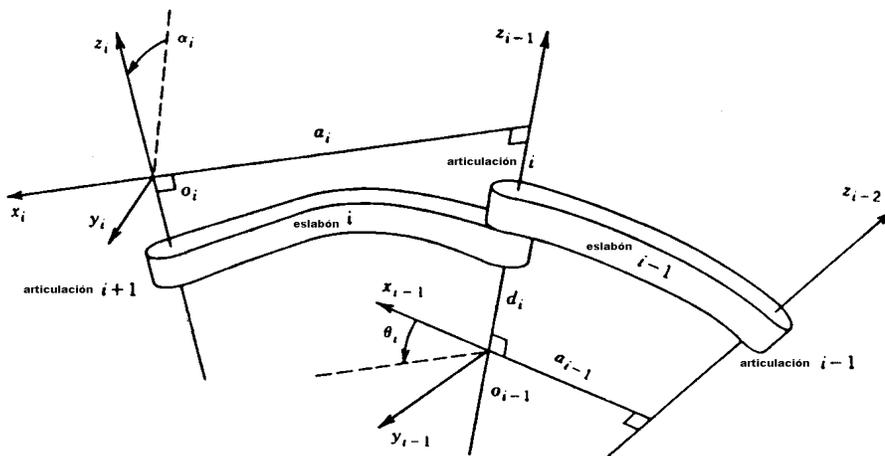


Figura 2.4: Sistema de asignación de Denavit-Hartenberg.

## 2.2 Espacio articular y espacio operacional

Las ecuaciones de la cinemática directa de un manipulador permiten expresar la posición y orientación del sistema coordenado del efector final como una función de las variables de las articulaciones con respecto al sistema de la base. Si una tarea es especificada para el efector final, es necesario asignar su posición y orientación, eventualmente como una función del tiempo. Esto es relativamente fácil para la posición. Por otro lado, especificar la orientación a través de terna de vectores unitarios  $(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a})$  es bastante difícil, puesto que sus nueve componentes deben satisfacer las restricciones de ortonormalidad impuestas por (2.3) para cada instante. El problema de describir la orientación del efector final admite una solución natural si se elige la representación (2.2). En este caso, una trayectoria de movimiento puede ser asignada para el conjunto de ángulos elegidos para representar la orientación. Por lo tanto, la posición puede ser dada por un número mínimo de coordenadas

respecto a la geometría de la estructura, y la orientación puede ser especificada en términos de una representación mínima (ángulos de Euler) describiendo la rotación del sistema coordenado del efector final con respecto al sistema de la base. De esta forma, es posible describir la configuración de posición/orientación del manipulador por medio del vector ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ), con  $m \leq n$ ;

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{p}$  describe la posición del efector final y  $\boldsymbol{\phi}$  su orientación. Esta representación de posición y orientación permite la descripción de una tarea del efector final en términos de un número de parámetros inherentemente independientes. El vector  $\mathbf{x}$  está definido en el espacio en el cual la tarea del manipulador es especificada, generalmente llamado *espacio operacional o cartesiano*.

Por otro lado, el espacio de las articulaciones (espacio de configuración) denota el espacio en el cual el vector de dimensión  $n$  de las variables de las articulaciones

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

está definido. Debido a la dependencia entre la posición y la orientación de las variables de las articulaciones, la ecuación de la cinemática directa puede ser escrita de una forma diferente a (2.2), esto es

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q}). \quad (2.8)$$

El vector función  $\mathbf{k}(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ , en general no lineal, permite el cálculo de las variables del espacio operacional a partir del conocimiento de las variables del espacio articular.

Es preciso notar que la dependencia de las componentes de la orientación de la función  $\mathbf{k}(\mathbf{q})$  en (2.8) sobre las variables articulares no es fácil expresar excepto para casos simples. De hecho, en el caso más general de un espacio operacional de seis dimensiones ( $m = 6$ ), el cálculo de las tres componentes de la función  $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{q})$  no puede ser realizado en forma cercana sino a través del cálculo de los elementos de la matriz de rotación, esto es,  $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{s}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{q})$ .

## 2.3 Espacio de trabajo

El espacio de trabajo es la región descrita por el origen del sistema del efector final cuando todas las articulaciones del manipulador ejecutan todos sus movimientos

---

posibles. El espacio de trabajo es caracterizado por la geometría del manipulador y los límites mecánicos de las articulaciones. Para un manipulador de  $n$  grados de movilidad el espacio de trabajo alcanzable es el lugar geométrico de los puntos que pueden ser alcanzados considerando las ecuaciones de la cinemática directa para la parte exclusiva de la posición, esto es,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}) \quad q_{im} \leq q_i \leq q_{iM} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.9)$$

donde  $q_{im}(q_{iM})$  denotan el límite mínimo(máximo) en la articulación  $i$ . Este volumen es finito, cerrado, conectado - $\mathbf{p}(\mathbf{q})$  es una función continua- y de esta manera es definido por el borde de su superficie. Debido a que las articulaciones son de revolución o prismáticas, es fácil reconocer que esta superficie está constituida por elementos de la superficie de tipo planar, esférica, toroidal y cilíndrica. Por lo general, el espacio de trabajo (sin efector final) es descrito en las hojas de especificaciones por el fabricante del robot en términos de una vista lateral y una vista superior. Éste representa un elemento básico para evaluar el desempeño del robot para una aplicación deseada.

## 2.4 Jacobiano de un robot manipulador

En la sección anterior, la cinemática directa estableció la relación entre las variables articulares, la posición y orientación del efector final. En esta sección se presenta la cinemática diferencial, la cual consiste en relacionar las velocidades angular y lineal del efector final con las velocidades articulares (Sciavicco y Siciliano 2000).

Matemáticamente, las ecuaciones de la cinemática directa definen una función entre el espacio cartesiano de posiciones y orientaciones y el espacio de las posiciones de las articulaciones. Las relaciones de velocidad están definidas por el *Jacobiano* de esta función. El Jacobiano o matriz Jacobiana constituye una de las herramientas más importantes para la caracterización del robot. De hecho, es útil para encontrar configuraciones singulares, análisis de redundancia, el mapeo entre las fuerzas aplicadas por el efector final y torques resultantes en las articulaciones, así como la obtención de las ecuaciones de movimiento del manipulador.

Existen dos tipos de Jacobianos: Jacobiano geométrico, cuyo mapeo, representado por una matriz, depende de la configuración del robot, y, alternativamente, el Jacobiano analítico, el cual es posible calcular vía la diferenciación de la función de cinemática directa con respecto a las variables articulares, siempre y cuando la localización del efector final sea expresada con referencia a una representación mínima en el espacio operacional. El Jacobiano analítico, en general, difiere del geométrico,

ya que éste es adoptado cuando cantidades del espacio operacional son de interés y el jacobiano geométrico es adoptado cuando cantidades físicas son de interés. Para esta tesis el Jacobiano analítico es importante debido a que el controlador que será diseñado estará en función del espacio operacional, por lo que será descrito en la siguiente sección.

### 2.4.1 Jacobiano analítico

Si la posición y orientación del efector final se especifican en términos de un número mínimo de parámetros en el espacio operacional como en (2.6), es natural preguntar si es posible calcular el Jacobiano analítico vía diferenciación de la función de cinemática directa con respecto a las variables de las articulaciones. La velocidad traslacional del sistema de coordenadas del efector final puede ser expresada como la derivada en el tiempo del vector  $\mathbf{p}$ , representando el origen del sistema del efector final con respecto al sistema de la base, esto es

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_p(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.10)$$

En lo que a la velocidad rotacional del sistema del efector final, se puede considerar la representación mínima de orientación en términos de tres variables  $\phi$  (normalmente los ángulos de Euler). Su derivada con respecto al tiempo  $\dot{\phi}$  en general difiere del vector de velocidad angular. En cualquier caso, una vez que la función  $\phi(\mathbf{q})$  es conocida, es formalmente correcto considerar el Jacobiano obtenido como

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.11)$$

Calcular el Jacobiano  $\mathbf{J}_\phi$  como  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}}$  no es simple, puesto que la función  $\phi(\mathbf{q})$  comúnmente no está disponible en forma directa y es necesario obtenerla primero. Sobre esta idea, la ecuación cinemática diferencial puede ser calculada como la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (2.8), esto es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_\phi \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.12)$$

donde el Jacobiano analítico queda definido como:

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.13)$$


---

## 2.5 Singularidades

Se dice que una **configuración singular** o singularidad se presenta cuando el manipulador pierde uno o más grados de libertad. Un ejemplo de este tipo de configuraciones se puede observar en la Figura 2.5, para un manipulador planar (Spong y Vidyasagar 1989). Cuando  $\theta_2 = 0$  o  $\pi$ , se dice que el manipulador se encuentra en una singularidad. Además, esta configuración singular también la presentan los dedos de la mano mecánica que será controlada. La identificación de singulares en un manipulador es importante debido a que.

- La existencia de movimientos infinitesimales que son inalcanzables; esto es, el efector final del manipulador no puede moverse en ciertas direcciones. En el caso de la Figura 2.5 el efector final no puede moverse en la dirección paralela a  $l_1$  de una configuración singular.
- Las velocidades acotadas del efector final pueden corresponder a velocidades no acotadas de las articulaciones.
- Fuerzas y momentos acotados del efector final pueden corresponder a momentos no acotados de las articulaciones.
- Las configuraciones singulares también están relacionadas con la unicidad de soluciones de la cinemática inversa. Por ejemplo, para una posición dada del efector final, hay en general dos posibles soluciones de la cinemática inversa. Sin embargo, la configuración singular separa estas dos soluciones en el sentido de que el manipulador no puede ir de una configuración a otra sin pasar a través una singularidad.
- La mayoría de las veces las singularidades corresponden a puntos en la frontera del espacio de trabajo del manipulador.

Por lo anterior, para muchas aplicaciones es importante planear los movimientos del manipulador de tal forma que se eviten las configuraciones singulares. Cuando un manipulador se encuentra en una singularidad, el Jacobiano analítico o geométrico pierde rango, puesto que dependen de  $\mathbf{q}$ .

## 2.6 Redundancia

Un manipulador es redundante cuando su número de grados de movilidad es más grande que el número de variables que son necesarias para describir una tarea específica. De acuerdo a los espacios definidos anteriormente, un manipulador es intrínsecamente redundante cuando la dimensión del espacio operacional es más

---

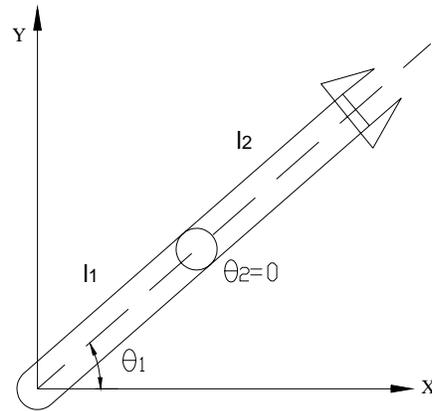


Figura 2.5: Configuración singular.

pequeña que el espacio articular ( $m < n$ ). Redundancia es, de cualquier modo, un concepto relativo a la tarea asignada al manipulador; un manipulador puede ser redundante con respecto a una tarea y no redundante con respecto a otra. Aún en el caso de  $m = n$ , un manipulador puede ser completamente redundante cuando solamente un número  $r$  de componentes del espacio operacional son de interés para la tarea asignada, con  $r < m$ . Un ejemplo típico de redundancia es el brazo humano con siete grados de movilidad: tres grados de movilidad en el hombro, uno en el codo y tres en la muñeca, eso sin considerar los grados de movilidad de los dedos.



# Capítulo 3

## Diseño de un control cartesiano de robots manipuladores

En este capítulo se presenta una descripción de las propiedades del modelo dinámico del robot necesarias para el diseño de una ley de control con observador lineal. El diseño de esta ley no requiere ningún modelo de los dedos de la mano mecánica para su implementación. Por otro lado, el observador se utiliza para estimar la velocidad en cada una de las articulaciones de los dedos de la mano, para ello requiere de una posición inicial y una posición final deseada para funcionar. Adicionalmente, se establece un Teorema para comprobar la estabilidad del controlador diseñado. Por último, el problema de la orientación se resuelve utilizando el Jacobiano analítico.

### 3.1 Modelo dinámico de un robot manipulador

Las ecuaciones de movimiento de un manipulador son un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen su conducta dinámica. Tales ecuaciones son útiles para la simulación de los movimientos del robot en computadora, el diseño de ecuaciones de control apropiadas para el robot y la evaluación del diseño y estructura del manipulador. El objetivo de control de un manipulador basado en computadora es mantener la respuesta dinámica del mismo, de acuerdo con algún rendimiento del sistema especificado y de los objetivos deseados.

El modelo dinámico de un manipulador se puede obtener a partir de leyes físicas conocidas, tales como las leyes de la mecánica newtoniana y lagrangiana. Esto conduce al desarrollo de las ecuaciones de movimiento dinámico para las diversas articulaciones del manipulador en términos de los parámetros geométricos e inerciales de los elementos. Para la dinámica del manipulador se utilizarán las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (Sciavicco y Siciliano 2000), las cuales se describirán brevemente en los párrafos siguientes.

### 3.1.1 Formulación de Euler-Lagrange

Con la formulación de Euler-Lagrange, las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas de manera sistemática, independientemente del sistema de coordenadas de referencia, una vez que el conjunto de variables  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , llamadas coordenadas generalizadas, son elegidas para describir efectivamente la posición de las articulaciones de un manipulador con  $n$  grados de movilidad, la derivación de las ecuaciones de Lagrange del sistema mecánico quedan definidas como una función de coordenadas generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

donde

$$L = K - P, \quad (3.2)$$

es el Lagrangiano  $L$  dado por la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial total del sistema (manipulador),  $K$  y  $P$  respectivamente.  $D$  representa la función de disipación de Rayleigh y  $\tau_i$  la fuerza generalizada aplicada al sistema en la articulación  $i$  para mover el elemento  $i$ , un torque para una articulación de revolución y una fuerza para una articulación prismática. Finalmente, estas ecuaciones permiten obtener el modelo dinámico de un manipulador.

### 3.1.2 Modelo dinámico de un robot manipulador

El modelo de un robot manipulador consiste en encontrar la relación entre las fuerzas ejercidas sobre la estructura y las posiciones, velocidades y aceleraciones de las articulaciones. Para un manipulador de  $n$  grados de libertad y articulaciones de revolución, la energía cinética se puede calcular como:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones y  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia simétrica positiva definida. Adicionalmente, la fricción viscosa se puede introducir tomando en consideración la función de disipación de Rayleigh

$$D = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal semidefinida positiva que considera los coeficientes de fricción viscosa de las articulaciones. Sustituyendo la ecuación (3.3)

---

y (3.4) en la ecuación (3.2), y tomando las derivadas de acuerdo a la ecuación (3.1) se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.5)$$

donde  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torques actuando en las articulaciones,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torques gravitacionales con

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3.6)$$

y

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \right)^T \quad (3.7)$$

es el vector de torques centrífugos y de Coriolis  $\mathbb{R}^n$ . Este término es cuadrático en las velocidades de las articulaciones, y en consecuencia su elemento genérico  $ij$  puede escribirse como

$$C_{ij} = \sum c_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Existen varias elecciones de los elementos  $C_{ij}$  de la matriz  $\mathbf{C}$  que satisfacen (3.8) correspondiendo a diferentes factorizaciones de los términos  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ . La elección

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \right), \quad (3.9)$$

corresponde a los símbolos de Christoffel de primera clase.

## 3.2 Propiedades del modelo de robots manipuladores

Para un vector  $\mathbf{x}$  de dimensión  $n \times 1$ , se puede definir la norma Euclideana

$$\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

La norma de una matriz  $\mathbf{A}$  de dimensión  $m \times n$  es la correspondiente norma inducida

$$\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

donde  $\lambda_{\max}(\cdot)$  ( $\lambda_{\min}(\cdot)$ ) denota el máximo (mínimo) valor propio de una matriz. Debido a que se consideran articulaciones de revolución, las siguientes propiedades pueden ser establecidas (Arteaga Pérez 1998):

---

**Propiedad 3.2.1** La matriz de inercia  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  satisface  $\lambda_h \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \leq \lambda_H \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , con

$$\lambda_h \triangleq \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$$

$$\lambda_H \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$$

y

$$0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty$$

△

**Propiedad 3.2.2** Utilizando los símbolos de Christoffel (de la primera clase) para calcular  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica. △

**Propiedad 3.2.3** Se satisface  $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\| \leq k_c \|\mathbf{x}\|$  con  $0 < k_c < \infty$ , y  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . △

**Propiedad 3.2.4** El vector  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}$  satisface  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . △

**Propiedad 3.2.5** Con una definición apropiada de los parámetros de modelo del robot, se tiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\varphi}, \quad (3.10)$$

donde  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es el regresor y  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^p$  es el vector de parámetros constantes. △

### 3.3 Diseño de una ley de control con observador

Considérese la ecuación de la cinemática diferencial (2.12)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es el Jacobiano analítico,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{(n-m)}$  es la posición del efector final y  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^m$  es una representación mínima de la orientación del efector final.

---

Normalmente,  $n = 6$  y  $m = 3$ . Siempre que el robot no esté en una singularidad y  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  sea no singular, se tiene también la siguiente relación

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}. \quad (3.12)$$

**Suposición 3.1.1** *El robot no alcanza ninguna singularidad.*  $\triangle$

La Suposición 3.1.1 se realiza para simplificar el diseño de la ley de control, aunque se puede eliminar como se explica en el Comentario 3.3.1. Supóngase que no se dispone de mediciones de velocidad y que un estimado de  $\mathbf{x}$  está dado por  $\hat{\mathbf{x}}$ . El correspondiente error de observación se define como

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.13)$$

Similar a  $\dot{\mathbf{q}}_o$  in Arteaga Pérez y Kelly (2004), se define

$$\dot{\mathbf{x}}_o \triangleq \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}, \quad (3.14)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva. Se propone el observador lineal

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\hat{\mathbf{x}}}_o + \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} + k_d \mathbf{z} \quad (3.15)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{x}}}_o = \ddot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{\Lambda}_x (\dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}}_d) - k \mathbf{s}_d + k_d \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}, \quad (3.16)$$

donde  $\mathbf{x}_d$  es la trayectoria deseada (acotada) para  $\mathbf{x}$ , con la primera y segunda derivadas acotadas y elegidas para no pasar por o cerca de una singularidad,  $\mathbf{\Lambda}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva,  $k$  y  $k_d$  son constantes positivas, y  $\mathbf{s}_d$  es definida más adelante. Aún cuando no es necesario para propósitos de estabilidad, es conveniente hacer

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_o(0) = -\mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z}(0) - k_d \mathbf{z}(0)$$

para obtener  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(0) = \mathbf{0}$ .

El error de trayectoria en coordenadas cartesianas está dado por

$$\Delta \mathbf{x} \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{x}_d. \quad (3.17)$$

Para diseñar la trayectoria del controlador, se define

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{\Lambda}_x (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_d) + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.18)$$

donde  $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva y  $\mathbf{s}_d, \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$ , con

$$\mathbf{s} = \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{\Lambda}_x (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_d) \triangleq \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} - \mathbf{s}_d \quad (3.20)$$

$$\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0)e^{-kt} \quad (3.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t (\mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 + \text{sign}(\mathbf{s}_1)) d\vartheta \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

donde  $\mathbf{K}_\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva y

$$\text{sign}(\mathbf{s}_1) \triangleq [\text{sign}(s_{11}) \ \cdots \ \text{sign}(s_{1n})]^T, \quad (3.23)$$

con  $s_{1i}$  elemento de  $\mathbf{s}_1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Alternativamente a (3.22) se puede utilizar

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 + \text{sign}(\mathbf{s}_1). \quad (3.24)$$

Finalmente se define

$$\mathbf{s}_0 \triangleq \dot{\mathbf{x}}_o - \dot{\mathbf{x}}_r. \quad (3.25)$$

Por lo que, un teorema puede ser establecido.

**Teorema 3.3.1** *Considérese una trayectoria deseada  $\mathbf{x}_d$  continua y acotada, con primera y segunda derivadas continuas acotadas, elegida suficientemente lejos de alguna singularidad. Entonces, para la ley de control*

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_o, \quad (3.26)$$

con  $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz definida positiva, siempre es posible encontrar una combinación propia de las ganancias  $k$ ,  $k_d$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_x$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_z$ ,  $\mathbf{K}_\beta$ ,  $\mathbf{K}_\gamma$  y  $\mathbf{K}_p$  tal que los errores de seguimiento y observación  $(\Delta \dot{\mathbf{x}}, \Delta \mathbf{x}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z})$  sean acotados y tiendan a cero.  $\triangle$

Es importante destacar que en el Apéndice B se realiza el desarrollo matemático detallado de la demostración, junto con las condiciones necesarias para las ganancias del esquema de control con observador.

**Comentario 3.3.1** *La expresión “suficientemente lejos de alguna singularidad” utilizada en el Teorema 3.3.1 es poco exacta. Esta se realiza para validar la Suposición 3.1.1. Nótese que se puede eliminar. El procedimiento consiste en definir un subconjunto del espacio de trabajo diestro, es decir  $\mathbb{D}_x$ , libre de singularidades. Sin embargo, no es suficiente elegir  $\mathbf{x}_d \in \mathbb{D}_x$ . De hecho, puesto que  $\mathbf{x} = \Delta \mathbf{x} + \mathbf{x}_d$ ,  $\mathbf{x}$  puede abandonar  $\mathbb{D}_x$  durante la respuesta transitoria. Así que, si se puede calcular un máximo para  $\Delta \mathbf{x}$ , una subregión de  $\mathbb{D}_x$ , por ejemplo  $\mathbb{D}_{dx}$ , puede elegirse para  $\mathbf{x}_d$  de tal forma que  $\mathbf{x}$  nunca deja  $\mathbb{D}_x$ . En general, esto puede ser muy complejo. Sin embargo, si se asume que la velocidad inicial es cero, entonces es posible tener la cota para  $\Delta \mathbf{x}$  como función de los errores de seguimiento y observación iniciales. (Debido a que el estado inicial  $(\Delta \dot{\mathbf{x}}(0), \Delta \mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{z}}(0), \mathbf{z}(0))$  es completamente conocido ahora.)  $\triangle$*

# Capítulo 4

## Descripción del sistema experimental

El objetivo principal de este capítulo es la descripción del sistema experimental que será controlado. El sistema se encuentra constituido por la mano mecánica de dos dedos (dispositivo que será controlado) y una interfaz que la comunica directamente con la computadora. La mano mecánica fue construida en el Laboratorio de Robótica Villegas (2004), para probar en ella algoritmos de control. En la Figura 4.1 se muestra un esquema del sistema completo.

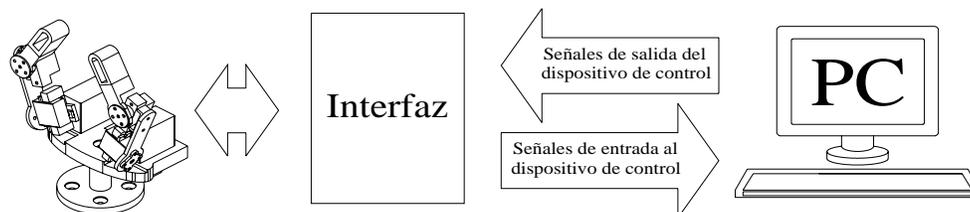


Figura 4.1: Esquema general del sistema experimental.

De forma general, el sistema experimental se puede dividir en cuatro componentes: mano mecánica de dos dedos, las tarjetas de adquisición de datos, una etapa de potencia y una computadora. La Figura 4.2 muestra los elementos que constituyen al sistema experimental.

### 4.1 Mano mecánica de dos dedos

Las partes principales que componen la mano mecánica son: dos dedos de tres grados de libertad cada uno; la palma, que soporta los dos dedos, y una base principal que permite el acoplamiento de la mano al efector final del robot manipulador A465

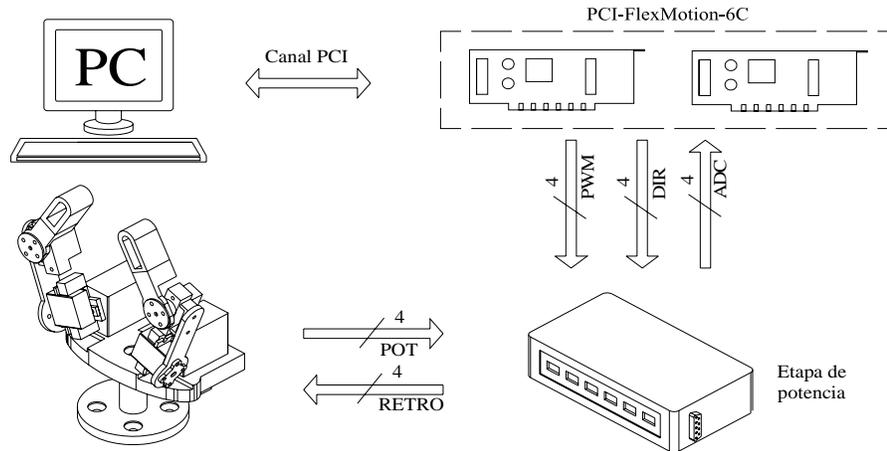


Figura 4.2: Elementos del sistema experimental.

de la marca *CRS Robotics*.

Las falanges de cada uno de los dedos están conectadas por medio de uniones o elementos de movimiento, llamados articulaciones de revolución. Los actuadores eléctricos o servomotores, que constituyen las articulaciones de la mano mecánica, están acoplados directamente, es decir, sin utilizar transmisiones de ningún tipo. Estos servomotores son básicamente motores eléctricos que sólo se pueden mover en un rango de aproximadamente 180 grados y son controlados utilizando *modulación por ancho de pulso* (PWM). Se alimentan con voltajes de 4.8 a 6 volts y un tren de pulsos que trabaja de 50 a 100 Hz. Para determinar el desplazamiento de las articulaciones se emplean potenciómetros como sensores de posición.

Debido a que el Laboratorio de Robótica cuenta con dos tarjetas de adquisición de datos que sólo generan cuatro salidas de PWM, dos salidas por tarjeta, es necesario destacar que sólo se controlan las articulaciones primera y última de cada dedo de la mano mecánica. Razón por la cuál, para esta tesis, el sistema a controlar se convierte en una mano mecánica de dos dedos de dos grados de libertad cada uno.

#### 4.1.1 Sensores de posición

Los sensores de posición utilizados por los servomotores son potenciómetros. Los potenciómetros son transductores electromecánicos que convierten desplazamiento mecánico en potencial eléctrico. La entrada del dispositivo es una forma de desplazamiento mecánico rotacional. Cuando se aplica un voltaje a través de las terminales fijas del potenciómetro, el voltaje de salida, que se mide entre la terminal variable y tierra, es proporcional al desplazamiento de entrada, de acuerdo con una relación

lineal (Kuo 1996).

### 4.1.2 Espacio de trabajo de la mano mecánica

El espacio de trabajo de la mano mecánica es el límite de posiciones en el espacio que está puede alcanzar. La Tabla 4.1 muestra los rangos de trabajo máximos de cada una de las articulaciones de la mano mecánica.

Articulación	Rango
$q_{11}$	0 - 180° (totales)
$q_{12}$	35 - 145° (totales)
$q_{21}$	0 - 180° (totales)
$q_{22}$	35 - 145° (totales)

Tabla 4.1: Rango de trabajo de las articulaciones de la mano mecánica.

## 4.2 Tarjeta de adquisición de datos

Para llevar a cabo este proyecto se utilizan dos tarjetas de adquisición de datos *PCI FlexMotion-6C* de National Instruments. Este tipo de tarjetas es capaz de admitir y transmitir señales de entrada y salida provenientes de la etapa de potencia. La flexibilidad de la tarjeta permite utilizar los DACs (convertidores digitales-analógicos), que no son utilizados por un eje, como salidas analógicas de propósito general ( $\pm 10V$ ). Asimismo, se puede utilizar cualquier canal de los ADCs (convertidores analógicos-digitales) para la medición de otros sensores analógicos; en este caso, potenciómetros para la retroalimentación de los servos utilizados en cada una de las articulaciones de la mano mecánica. Finalmente, para la generación de PWM se puede utilizar el puerto auxiliar 3 de entrada y salidas (E/S) digitales. Para una descripción más detallada consultar *Nacional Instruments 1999 (Hardware)*.

### 4.2.1 Señales de control

Las señales de control utilizadas para el sistema experimental son:

- *Señales analógicas*: Los voltajes analógicos de entrada deben estar en el intervalo de  $\pm 4.8$  [V]; esto no es difícil de obtener ya que la tarjeta PCI FlexMotion-6C trabaja en un rango de  $\pm 10$  [V] y se pueden programar sus convertidores para trabajar en el rango requerido.
- *Señales digitales*: Son voltajes con que trabajan los circuitos TTL.

Las señales de entrada y salida del sistema de control experimental son representadas en la Figura 4.2, los detalles se describen a continuación:

---

**PWM** Es un paquete de cuatro señales digitales de salida de PWM que son utilizadas para el control de cada motor de la mano mecánica, una señal por motor, y su etapa de potencia se describe en Villegas (2004).

**DIR** Es un paquete de cuatro salidas digitales utilizadas para obtener el cambio de dirección de los cuatro motores.

**POT** Es el paquete de las cuatro señales analógicas obtenidas directamente de cada uno de los sensores de posición (potenciómetros) de la mano.

**ADC** Son las señales de los cuatro ADCs utilizados en cada uno de los sensores de posición.

**RETRO** Paquete de cuatro señales analógicas de retroalimentación para el control de cada motor de la mano mecánica.

**Canal PCI** Indica la comunicación PCI con las tarjetas de adquisición de datos.

El tiempo de muestreo para las señales de entrada y salida es de 6 [ms]. Por otra parte, el sentido del giro es obtenido a partir del signo de la señal de control, es decir, si la señal de control es positiva el motor gira en un sentido y si la señal de control es negativa el motor girará en el sentido contrario.

## 4.2.2 Configuración de las señales de entrada y salida del sistema experimental

La Figura 4.3 muestra un esquema de la mano mecánica de dos dedos, en donde se observa la designación de las dos articulaciones utilizadas para cada dedo;  $\mathbf{q}_{11}$  y  $\mathbf{q}_{12}$  representan las articulaciones 1 y 2 del dedo 1; de la misma forma,  $\mathbf{q}_{21}$  y  $\mathbf{q}_{22}$  representan las articulaciones 1 y 2 del dedo 2. La designación anterior, permite establecer una configuración para las señales de entrada y salida del sistema. En la Tabla 4.2 se da una descripción más detallada de las señales de salida y en la Tabla 4.3 se muestran las señales de entrada. Además, estas tablas muestran la configuración de los conectores utilizados para las señales del dispositivo de control PortAux, UMIDB09 y UMIDB15 cuyas especificaciones se muestran en Villegas (2004).

## 4.3 Computadora Personal

La computadora es una PC ensamblada que contiene: un procesador Pentium IV de Intel con una velocidad de 1.7 GHz, 256 MB en memoria RAM y 40 GB en disco duro. Además, tiene instalado el sistema operativo Windows 2000. En las ranuras

---

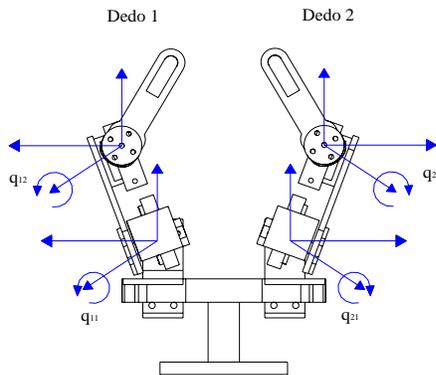


Figura 4.3: Designación de las articulaciones de la mano mecánica.

Art	Tarjeta	Salida PC (PWM)				Salida PC (dirección)			
		Núm.	Conector	Pin	Bit	Puerto	Conector	Pin	Bit
q11	1	PortAux	13	1	3	PortAux	9	3	3
q12	1	PortAux	15	0	3	PortAux	11	2	3
q21	2	PortAux	13	1	3	PortAux	9	3	3
q22	2	PortAux	15	0	3	PortAux	11	2	3

Tabla 4.2: Configuración de las señales de salida del dispositivo de control.

Art	Tarjeta	Entrada PC (Posición)		
		Núm.	Conector	Pin
q11	1	UMIDB09	1	0x51
q12	1	UMIDB09	2	0x52
q21	1	UMIDB09	3	0x53
q22	1	UMIDB09	4	0x54

Tabla 4.3: Configuración de las señales de entrada al dispositivo de control.

de expansión, se encuentran insertadas las tarjetas PCI-FlexMotion-6C de *National Instruments*.

Las tarjetas de adquisición de datos son programadas empleando el entorno de desarrollo LabWindows/CVI. Este ambiente es una herramienta gráfica para la elaboración de programas en lenguaje C, diseñado para el control de instrumentos, la adquisición de datos, análisis y el desarrollo de interface de usuario.



# Capítulo 5

## Resultados experimentales

En este capítulo se presenta el control coordinado de la mano mecánica de dos dedos que se muestra en la Figura 5.1 mediante la ley de control cartesiana descrita en el Capítulo 3. Para llevar a cabo la implementación del controlador se realizó el cálculo de la cinemática directa y del jacobiano analítico de los dedos de la mano mecánica. Adicionalmente, se propone un polinomio de quinto orden para el seguimiento de trayectoria de cada uno. Por último, se presentan resultados experimentales.



Figura 5.1: Mano mecánica de dos dedos.

### 5.1 Implementación del controlador

En esta sección se presentan los cálculos necesarios para llevar a cabo la implementación del controlador diseñado en el Capítulo 3.

### 5.1.1 Cálculo de la cinemática directa del sistema de la mano mecánica

Para el cálculo de la cinemática directa de cada uno de los dedos de la mano mecánica se considera la Figura 5.2, donde los ejes de rotación de las articulaciones del manipulador  $z_0$  y  $z_1$  son normales a la página. Se establece el marco de referencia  $O_0x_0y_0z_0$  que coincide con el origen, éste se elige en el punto de intersección del eje  $z_0$  con la página y la dirección de  $x_0$  es arbitraria. Una vez que se establece el marco de referencia se fija el sistema  $O_1x_1y_1z_1$  de acuerdo a la convención de Denavit-Hartenberg (D-H). Cuando el origen  $O_1$  ha sido localizado en la intersección de  $z_1$  y la página se fija el sistema final  $O_2x_2y_2z_2$  eligiendo el origen  $O_2$  al final del eslabón 2 (Figura 5.2). Los parámetros se muestran en la Tabla 5.1,

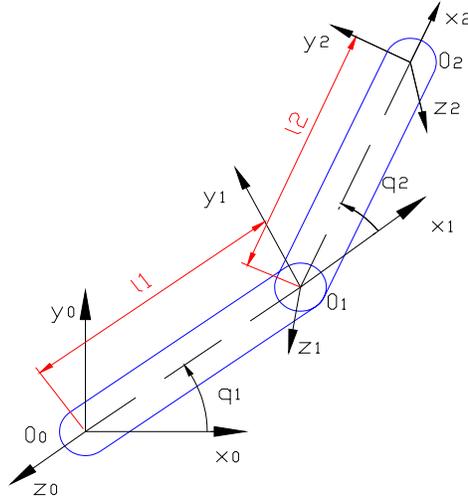


Figura 5.2: Manipulador planar con dos eslabones.

Eslabón	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1 = 0.052[\text{m}]$	0	0	$\theta_1^*(t)$
2	$l_2 = 0.056[\text{m}]$	0	0	$\theta_2^*(t)$

Tabla 5.1: Parámetros de los eslabones del manipulador. \* variable

donde

$a_i$  es la distancia a lo largo de  $x_i$ , de  $O_i$  a la intersección de los ejes  $x_i$  y  $z_{i-1}$ .

$d_i$  es la distancia a lo largo de  $z_{i-1}$ , de  $O_{i-1}$  a la intersección de los ejes  $x_i$  y  $z_{i-1}$ .

$\alpha_i$  es el ángulo de torsión entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$  medido alrededor de  $x_i$ .

$\theta_i$  es el ángulo entre  $x_{i-1}$  y  $x_i$  medido alrededor de  $z_{i-1}$ .  $\theta_i$  es la variable para cada articulación de revolución.

La matriz de transformación homogénea  ${}^0\mathbf{A}_1$  se determina como sigue:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

donde  $l_1 = 0.052\text{m}$ ,  $l_2 = 0.056\text{m}$ ;  $c_1 = \cos(q_1)$ ,  $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ ;  $s_1 = \sin(q_1)$  y  $s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$ .  ${}^1\mathbf{A}_2$  se calcula de

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

por lo tanto de (2.2) se tiene

$${}^0\mathbf{T}_2 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Nótese que las dos últimas columnas de  ${}^0\mathbf{T}_2$  son las componentes (en coordenadas cartesianas)  $x$  e  $y$  del origen  $O_2$  en el marco de referencia; esto es

$$\begin{aligned} x &= l_1c_1 + l_2c_{12} \\ y &= l_1s_1 + l_2s_{12} \end{aligned} \quad (5.4)$$

son las coordenadas del efector final en el marco de referencia. La parte rotacional de  ${}^0\mathbf{T}_2$  da la orientación del sistema  $O_2x_2y_2z_2$  relativo al marco de referencia.

Antes de continuar con el análisis es necesario determinar una trayectoria de seguimiento para cada uno de los dedos, donde su movimiento se desarrolle en el espacio cartesiano.

---

### 5.1.2 Cálculo del Jacobiano analítico

Para implementar el esquema de control con observador, se tiene que calcular el Jacobiano analítico, el cual se obtiene al diferenciar la ecuación (5.4). En este caso está dado por

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

### 5.1.3 Trayectoria de seguimiento

Para llevar el dedo o manipulador a un punto en el espacio cartesiano se necesita una trayectoria que lo lleve de un punto inicial a un punto final deseado. Para lograr tal objetivo para lo cual se elige un polinomio de quinto orden que tiene la característica de ser suave y permite que los efectores finales comiencen y terminen con velocidad y aceleración nulas. De esta manera el movimiento se realiza en  $t_f$  segundos. La ecuación para la posición deseada del  $i$ -ésimo elemento  $x_{di}(t)$ , en el caso del movimiento en el eje  $x$ , se escribe a continuación:

$$x_{di}(t) = a_{x0} + a_{x1}t + a_{x2}t^2 + a_{x3}t^3 + a_{x4}t^4 + a_{x5}t^5. \quad (5.6)$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo se puede obtener la velocidad  $\dot{x}_{di}(t)$  y aceleración  $\ddot{x}_{di}(t)$  deseadas, esto es

$$\dot{x}_{di}(t) = a_{x1} + 2a_{x2}t + 3a_{x3}t^2 + 4a_{x4}t^3 + 5a_{x5}t^4 \quad (5.7)$$

$$\ddot{x}_{di}(t) = 2a_{x2} + 6a_{x3}t + 12a_{x4}t^2 + 20a_{x5}t^3. \quad (5.8)$$

Los coeficientes  $a_{x1}$ ,  $a_{x2}$ ,  $a_{x3}$ ,  $a_{x4}$  y  $a_{x5}$  se calculan para satisfacer las posiciones inicial y final deseadas (para  $t = 0$  y  $t = t_f$ , respectivamente). De tal forma que se obtiene

$$a_{x0} = x_{0i} \quad (5.9)$$

$$a_{x1} = 0 \quad (5.10)$$

$$a_{x2} = 0 \quad (5.11)$$

$$a_{x3} = \frac{10}{t^3}(x_{fi} - x_{0i}) \quad (5.12)$$

$$a_{x4} = -\frac{15}{t^4}(x_{fi} - x_{0i}) \quad (5.13)$$

$$a_{x5} = \frac{6}{t^5}(x_{fi} - x_{0i}), \quad (5.14)$$

donde  $x_{fi}$  es la posición final deseada de  $x_i$  y  $x_{0i}$  es la posición inicial deseada. Finalmente, los cálculos de  $y_{di}$ ,  $\dot{y}_{di}$  y  $\ddot{y}_{di}$  se realizan de manera similar. Cabe hacer notar que  $t_f$  es igual en todos los casos y por lo tanto los coeficientes se calculan sólo una vez.

---

### 5.1.4 Trabajo Coordinado

Para la ejecución del trabajo coordinado de ambos dedos de la mano mecánica considérense los dos sistemas de referencia de la Figura 5.3.

Cualquier punto con coordenadas  $(x'_0, y'_0, z'_0)$  del sistema del *dedo 2* se puede expresar en el sistema base del *dedo 1* por medio de la transformación homogénea

$${}^0\mathbf{T}_{0'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

donde  $d$  es la distancia de separación entre las bases de ambos dedos. Y para representar cualquier punto  $(x_0, y_0, z_0)$  del sistema del *dedo 1* con respecto al sistema base del *dedo 2*, se utiliza la transformación homogénea

$${}^{0'}\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Para utilizar un espacio de trabajo común se elige como sistema base del *dedo 1* (en adelante cualquier trayectoria será referenciada a este marco de referencia). Por lo tanto, para trabajar con el *dedo 2* se utiliza la transformación  ${}^{0'}\mathbf{T}_0$ .

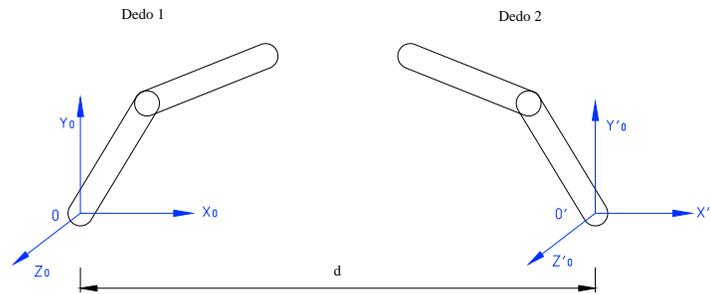


Figura 5.3: Sistemas de referencia para el *dedo 1* y *dedo 2* de la mano mecánica.

Como se menciona en la subsección 5.1.3 el seguimiento de las trayectorias de los efectores finales de ambos dedos se lleva a cabo utilizando polinomios de quinto orden. Para visualizar un poco este fenómeno, se utiliza la Figura 5.4. En esta figura se puede observar que los efectores finales de cada dedo están representados por los puntos  $P(x_0, y_0, z_0)$  y  $P'(x'_0, y'_0, z'_0)$ , respectivamente. La trayectoria de seguimiento

se tiene que realizar desde estos puntos espaciales, donde se encuentran los efectores finales en  $t = 0$  a los puntos deseado  $P_{d1}$  y  $P_{d2}$ , respectivamente.

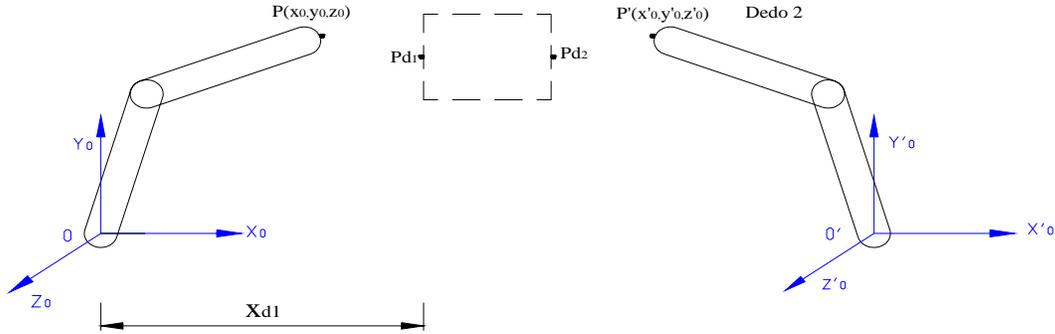


Figura 5.4: Sistemas de referencia para la posición deseada del *dedo 1* y *dedo 2*.

Una vez que se ha llegado a la posición deseada es necesario mantenerlo en esa posición un instante de tiempo para visualizar el efecto. La forma más fácil de lograrlo es que los efectores finales de los dedos se mantengan paralelos, dependiendo del movimiento que se requiera hacer.

## 5.2 Experimentos

Los experimentos que se realizaron fueron: llevar los dedos de la mano mecánica independiente y simultáneamente; desde una posición inicial hasta una posición final a partir del seguimiento de una trayectoria deseada (Figura 5.4). En ambos casos, se implementó el controlador cartesiano descrito en el Capítulo 3 y para lograr el movimiento simultáneo de los dedos se requirió la transformación homogénea de la sección 5.1.4. En la Figura 5.5 se muestran las gráficas de las posiciones deseadas,  $x_d$  e  $y_d$ , en un intervalo de tiempo de 0 a 20 segundos.

Las pruebas se realizaron utilizando el sistema experimental descrito en el Capítulo 4. Se emplearon cuatro ADC's para leer las señales de la posición de cada articulación; cuatro señales de salida PWM para la alimentación de los motores y cuatro señales digitales para el cambio de dirección.

Debido a que no es suficiente el uso de una sola tarjeta se tuvieron que programar las dos tarjetas PCI-FlexMotion-6C. En la primer tarjeta se programaron dos salidas de PWM, dos canales digitales y cuatro ADC's; en la segunda tarjeta se programaron dos canales digitales y dos salidas de PWM.

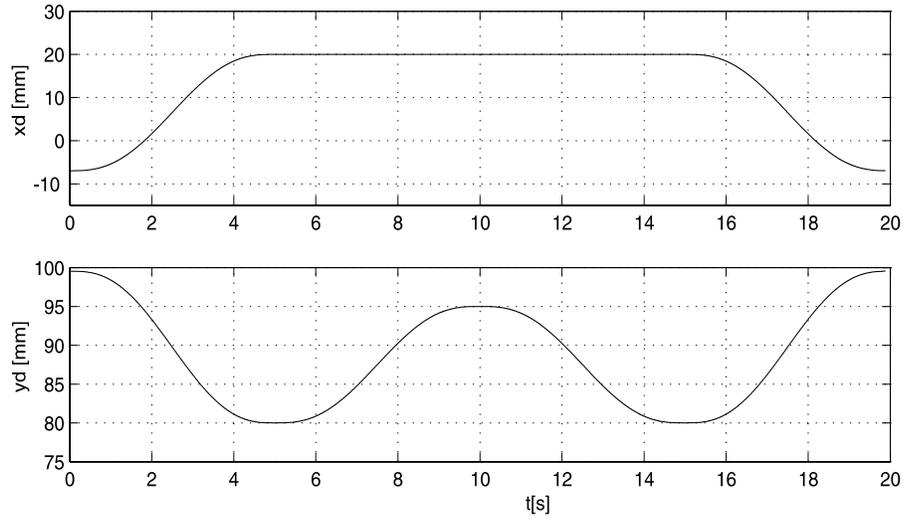


Figura 5.5: Trayectoria de seguimiento para ambos dedos de la mano mecánica.

Las tarjetas de adquisición de datos son programadas empleando el entorno de desarrollo LabWindows/CVI. Esta adquisición de datos es utilizada por el controlador cartesiano (también programado en éste entorno) para controlar la mano mecánica, donde el tiempo de muestreo de las señales es de 6 *ms*.

## 5.3 Resultados experimentales

En esta sección se presentan los resultados experimentales obtenidos durante la implementación del controlador cartesiano en los dedos de la mano mecánica. Sin embargo, antes de realizar las pruebas, es necesario establecer las condiciones iniciales de cada uno de los dedos de la mano, las cuales se definen a continuación.

### 5.3.1 Condiciones iniciales del *dedo 1*

*Posición inicial*  $\mathbf{x}(0)$ . Es la posición en la que se encuentra el *dedo 1* en  $t = 0$ , donde  $\mathbf{x}(0) = [-0.0083\text{m} \ 0.0992\text{m}]^T$ .

*Posición inicial deseada*  $\mathbf{x}_d(0)$ . En este caso se define a  $\mathbf{x}(0)$  como la posición inicial deseada  $\mathbf{x}_d(0) = [-0.0083\text{m} \ 0.0992\text{m}]^T$ .

*Posición final deseada*  $\mathbf{x}_d(t_f)$ . El experimento tiene consiste en llevar el *dedo 1* de  $\mathbf{x}(0)$  a  $\mathbf{x}_d(t_f) = [0.02\text{m} \ 0.08\text{m}]^T$ , en un tiempo final  $t_f = 20\text{s}$ .

*Posición inicial estimada*  $\mathbf{x}_e(0)$ . Debido a que el desplazamiento angular de cada una de las articulaciones del dedo es conocido se considera  $\mathbf{x}_e(0) = \mathbf{x}(0)$ .

En la Tabla 5.2 se dan las ganancias del controlador para el *dedo 1* obtenidas experimentalmente a prueba y error.

Ganancias para el Dedo 1	
$\mathbf{K}_p$	diagonal {2.0 1.8}
$\mathbf{\Lambda}_x$	diagonal {9.2 8.7}
$\mathbf{\Lambda}_z$	diagonal {9.2 8.7}
$\mathbf{K}_\beta$	diagonal {2.8 2.5}
$\mathbf{K}_\gamma$	0.01 $\mathbf{I}$
$k_d$	20
$k$	0.01

Tabla 5.2: Ganancias del controlador para el *dedo 1*.  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.

### 5.3.2 Condiciones iniciales del *dedo 2*

*Posición inicial  $\mathbf{x}(0)$ .* Es la posición en la que se encuentra el *dedo 2* en  $t = 0$ , donde  $\mathbf{x}(0) = [0.0035\text{m } 0.1000\text{m}]^T$ .

*Posición inicial deseada.* Se elige  $\mathbf{x}_d(0) = [0.0035\text{m } 0.1000\text{m}]^T = \mathbf{x}(0)$ .

*Posición final deseada  $\mathbf{x}_d(t_f)$ .* El experimento tiene por objetivo llevar el *dedo 2* de  $\mathbf{x}(0)$  a  $\mathbf{x}_d(t_f) = [-0.02\text{m } 0.08\text{m}]^T$  en un tiempo final  $t_f = 20\text{s}$ .

*Posición inicial estimada  $\mathbf{x}_e(0)$ .* Debido a que el desplazamiento angular de cada una de las articulaciones del dedo es conocido se considera  $\mathbf{x}_e(0) = \mathbf{x}(0)$ .

En la Tabla 5.3 se dan las ganancias del controlador para el *dedo 2* obtenidas experimentalmente, a prueba y error.

### 5.3.3 Control individual del *dedo 1*

En la Figura 5.6 se muestra el seguimiento real de la trayectoria  $(x, y)$  contra la trayectoria deseada  $(x_d, y_d)$  del *dedo 1*. En general se observa que el seguimiento no es muy bueno puesto que se presentan pequeñas oscilaciones que se deben principalmente a la imprecisión de las lecturas tomadas directamente de los potenciómetros. Sin embargo, se podría mejorar utilizando otro tipo de sensores de posición más precisos como encoders; aunque el problema que se presentaría sería adaptarlos a la estructura de la mano mecánica.

Ganancias para el Dedo 2	
$\mathbf{K}_p$	diagonal {1.8 1.75}
$\mathbf{\Lambda}_x$	diagonal {9.5 8.3}
$\mathbf{\Lambda}_z$	diagonal {9.5 8.3}
$\mathbf{K}_\beta$	diagonal {2.5 2.1}
$\mathbf{K}_\gamma$	$0.01\mathbf{I}$
$k_d$	15
$k$	0.01

Tabla 5.3: Ganancias del controlador para el *dedo 2*.  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.

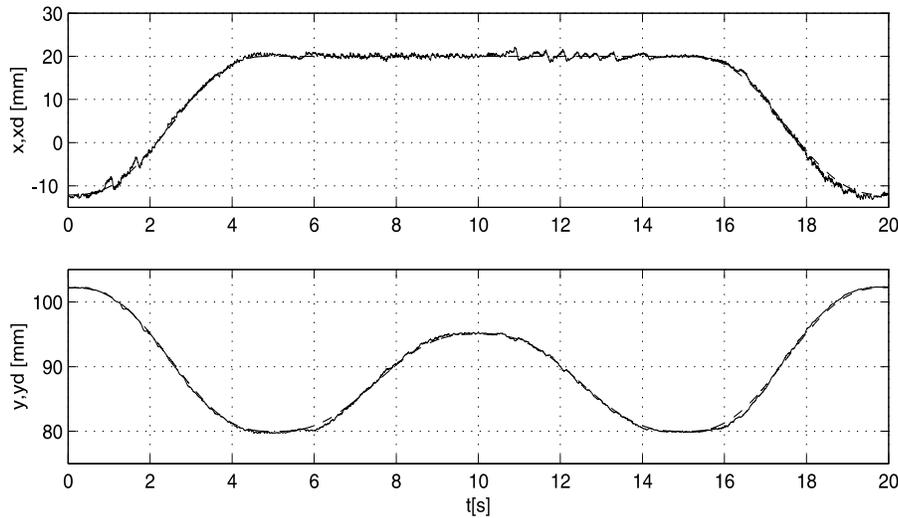


Figura 5.6: Trayectoria real (-) contra deseada (- -) para el *dedo 1*.

En la Figura 5.7 se pueden apreciar con mayor exactitud los errores de seguimiento del *dedo 1*, éstos se representan por  $\Delta x$  y  $\Delta y$ ; además, los errores de observación están representados por  $z_x$  y  $z_y$  para el mismo dedo en coordenadas cartesianas.

En cuanto a los errores de seguimiento, se observa que el error de seguimiento  $\Delta x$  es mayor que  $\Delta y$ . Es decir; el error  $\Delta x$  (menor a 2.5 mm) es casi el doble del error  $\Delta y$ , esto se debe principalmente a que la lectura de posición que se toma de los potenciómetros no es exacta. También, los errores de observación siguen el mismo parámetro que los errores de seguimiento, el error de observación  $z_x$  (menor de 1.2 mm) es más grande que el error de observación  $z_y$ . Por lo que se puede concluir que el observador está realizando bien la función de estimar la velocidad de cada articulación del *dedo 1*.

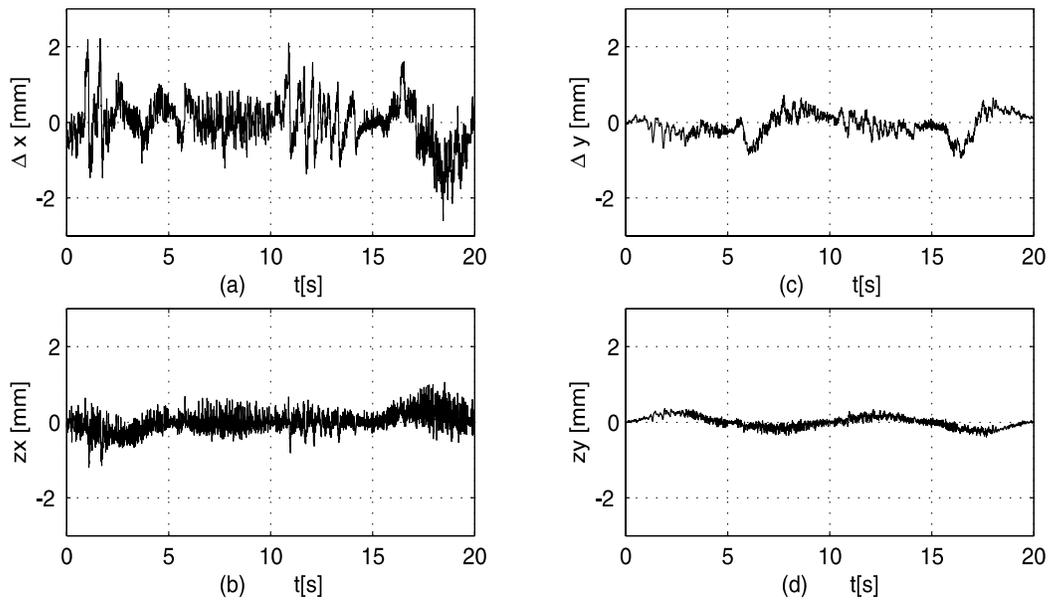


Figura 5.7: Errores de seguimiento y observación en coordenadas cartesianas del *dedo 1*.

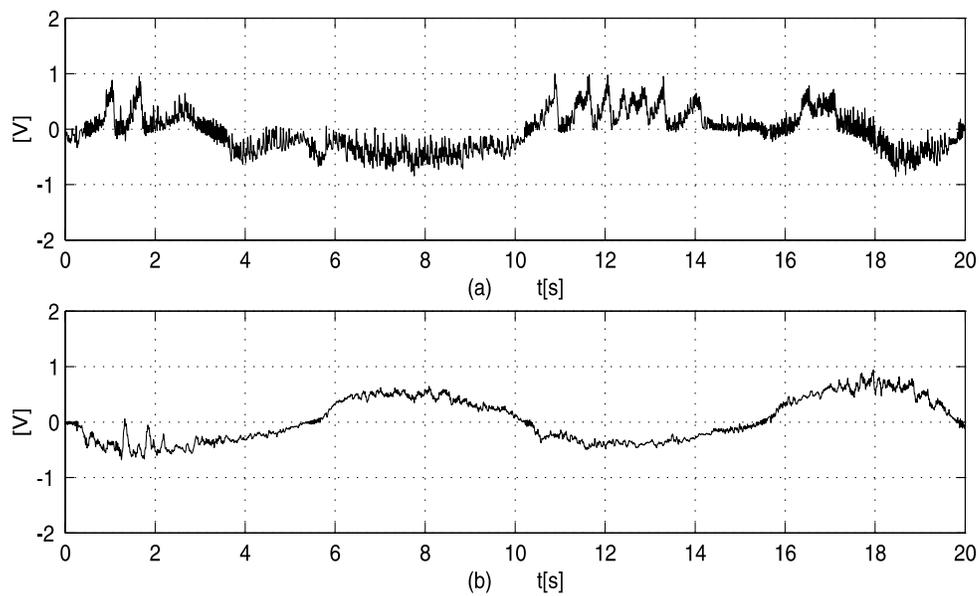


Figura 5.8: Voltajes de entrada *dedo 1*: a) articulación 1 y b) articulación 2.

Finalmente, en la Figura 5.8 se muestran los voltajes de control para cada una de las articulaciones del *dedo 1*. Se aprecia que no hay saturación; es decir, los voltajes son menores de 4.8 volts con que se alimenta el sistema experimental.

### 5.3.4 Control individual del *dedo 2*

En la Figura 5.9 se muestran el seguimiento real de trayectoria en  $x$  y  $y$  contra la trayectoria deseada  $x_d$  y  $y_d$  del *dedo 2*. Se puede observar que el seguimiento que realiza el dedo presenta pequeñas oscilaciones debido principalmente a la imprecisión de las lecturas tomadas directamente de los potenciómetros. Sin embargo, como en el caso anterior se podría mejorar utilizando otro tipo de sensores, además de presentar el mismo problema de la integración en la arquitectura.

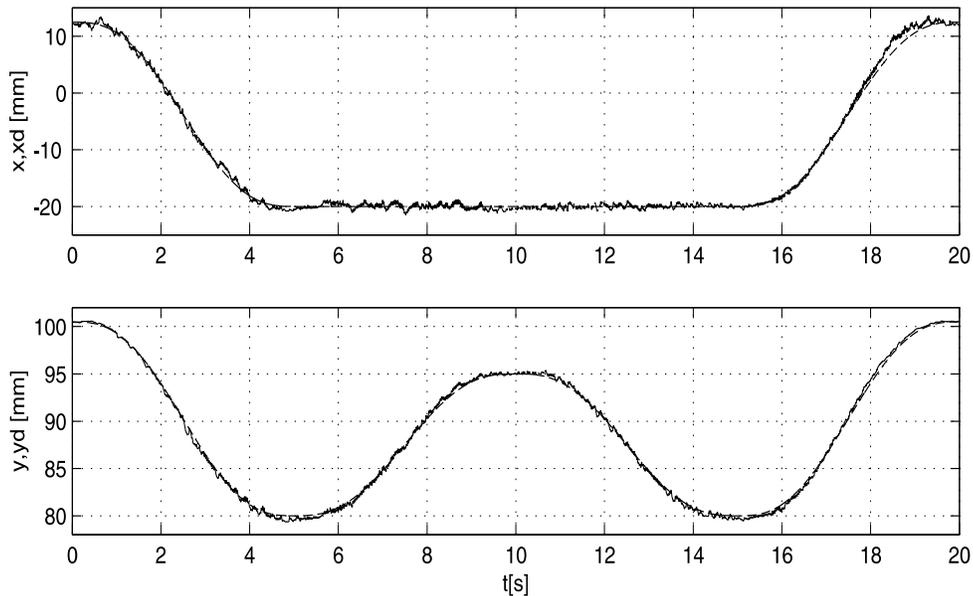


Figura 5.9: Seguimiento de trayectorias real (—) contra deseada para el (---) *dedo 2*.

En cuanto a los errores de seguimiento en la Figura f-eesod2 se observa que  $\Delta x$  es mayor que  $\Delta y$ , presentando un incremento en su valor de 2.5 mm, mientras que el error de seguimiento  $\Delta y$  es menor a 1 mm. Esto se debe principalmente a la mala lectura de posición que ofrecen los potenciómetros. Por otro lado, los errores de observación para  $x$  y  $y$  son menores a 1 mm, lo que demuestra que el observador está realizando bien la tarea de estimar la velocidad de cada articulación del *dedo 2*.

Finalmente, la Figura 5.11 muestra los voltajes de control para cada una de las articulaciones del *dedo 2*. Se puede ver que son menores a los 4.8 volts necesarios

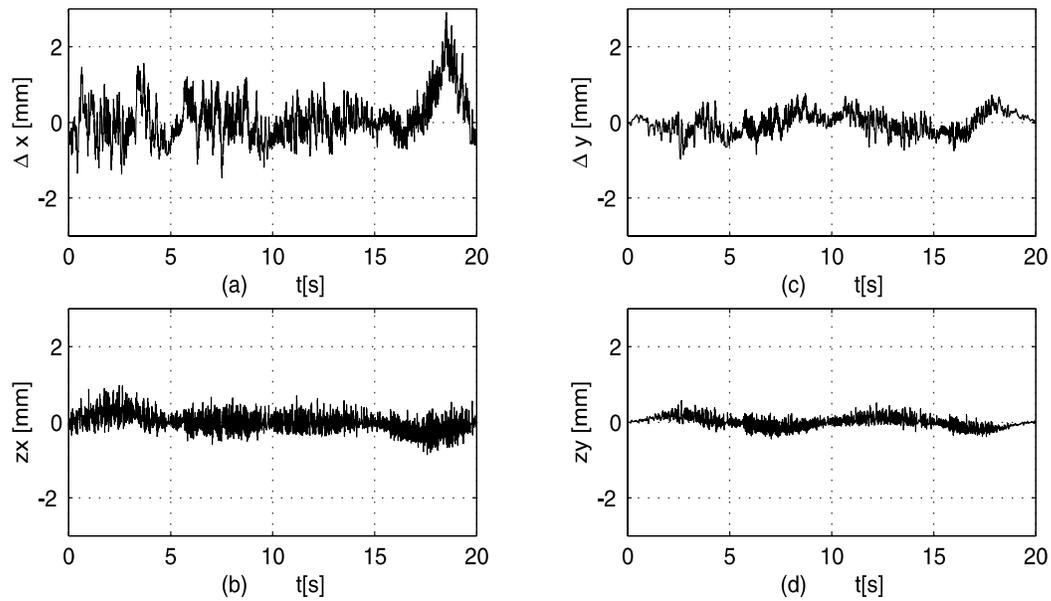


Figura 5.10: Errores de seguimiento y observación del *dedo 2*, en coordenadas cartesianas.

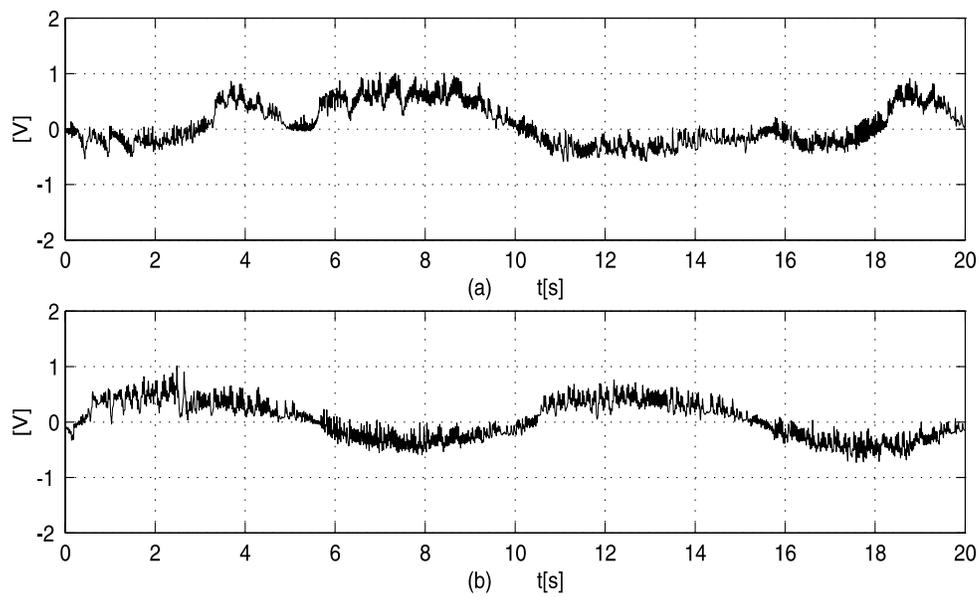


Figura 5.11: Voltajes de entrada *dedo 2*: a) articulación 1 y b) articulación 2.

para alimentar todo el sistema, por lo que no existe saturación.

### 5.3.5 Control coordinado de la mano mecánica

En esta sección, se realiza el movimiento simultaneo de los dedos de la mano mecánica. Este consiste en llevar cada uno de los dedos desde una posición inicial hasta una posición final a partir del seguimiento de una trayectoria deseada implementando en ambos casos un controlador cartesiano. Con ello, los dedos simularán la sujeción de un objeto, lo levantan y después lo regresan a su posición inicial, para después regresar a su posición de partida.

En la Figura 5.12 se muestra el seguimiento de las trayectorias reales en coordenadas cartesianas  $(x, y)$  con respecto a las coordenadas de la trayectoria deseadas  $(x_d, y_d)$  del *dedo 1* y *dedo 2*, respectivamente para la tarea descrita en el párrafo anterior. En esta figura se puede observar que los resultados, en general, no son buenos debido al tipo de sensores utilizados. Además, cuando los dedos se mueven simultáneamente, los errores de seguimiento son mayores, que cuando se mueven independientemente. Una de las causas de este resultado es que el esquema de control no contempla movimiento restringido, regulación o seguimiento de fuerzas de contacto. Además, se pueden observar pequeñas oscilaciones durante el seguimiento debidas principalmente a la imprecisión de las lecturas tomadas directamente de los potenciómetros. En la Tabla 5.4 se muestran las ganancias de control obtenidas experimentalmente para los dos dedos de la mano mecánica.

Ganancias	Dedo 1	Dedo 2
$\mathbf{K}_p$	diagonal {2.0 1.8}	diagonal {1.8 1.75}
$\mathbf{\Lambda}_x$	diagonal {9.2 8.7}	diagonal {9.5 8.3}
$\mathbf{\Lambda}_z$	diagonal {9.2 8.7}	diagonal {9.5 8.3}
$\mathbf{K}_\beta$	diagonal {2.8 2.5}	diagonal {2.5 2.1}
$\mathbf{K}_\gamma$	$0.01\mathbf{I}$	$0.01\mathbf{I}$
$k_d$	15	20
$k$	0.01	0.01

Tabla 5.4: Ganancias del controlador para el trabajo coordinado de la mano mecánica, donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.

En la Figura 5.13 se muestran los errores de seguimiento  $(\Delta x1, \Delta y1)$  y observación  $(z_{x1}, z_{y1})$  del *dedo 1* en coordenadas cartesianas. En estas figuras se puede observar que los errores de seguimiento oscilan en  $x$  entre 2.5 mm y en el eje  $y$  entre 2 mm. En cuanto a los errores de observación, se puede ver que en general son

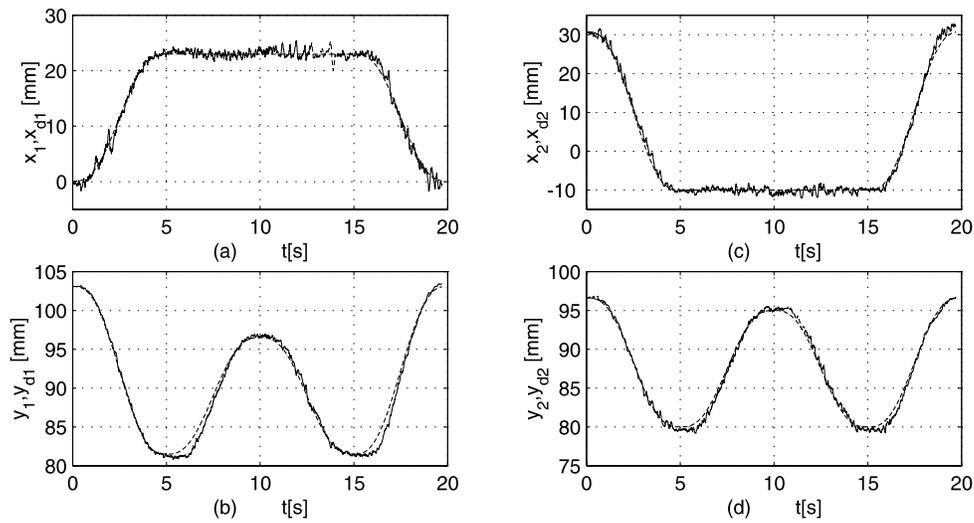
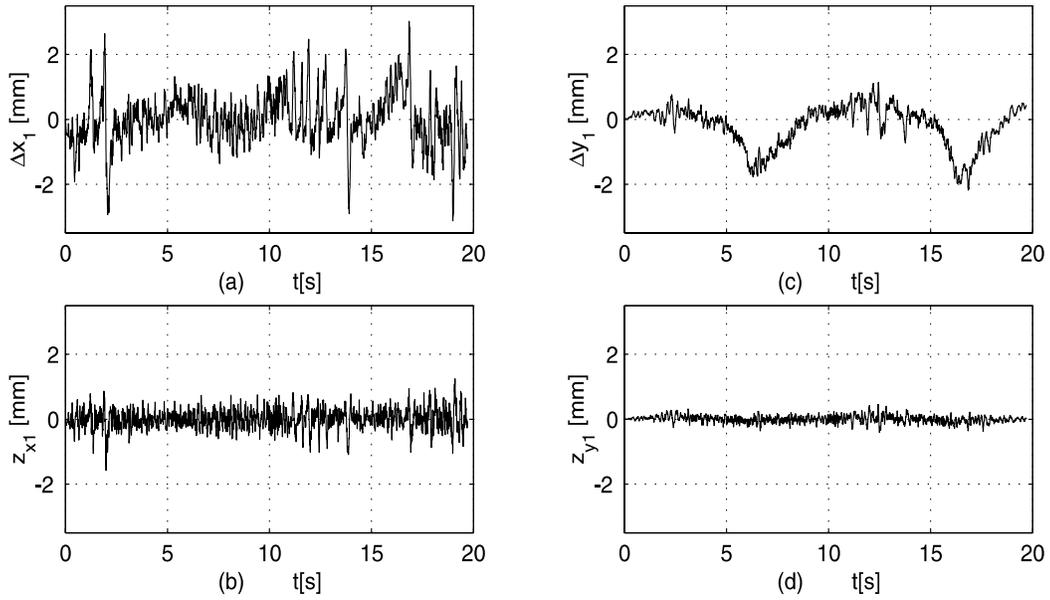
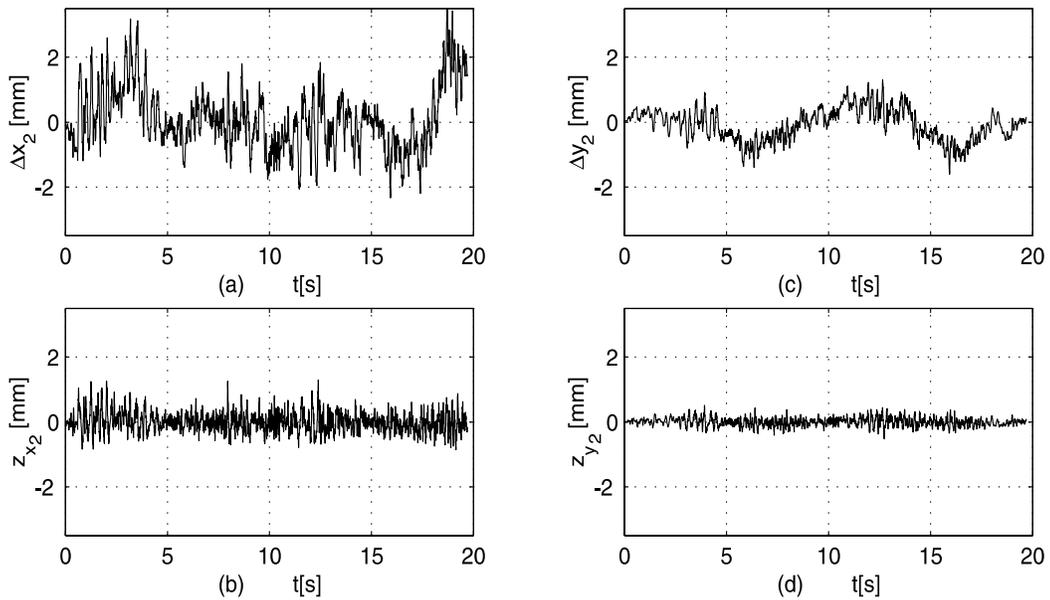


Figura 5.12: Trayectorias actual (—) y deseada (---) del *dedo 1* y *dedo 2*, respectivamente.

menores a  $1.7$  mm para  $z_{x1}$  y  $0.8$  mm para  $z_{y1}$ . De esta forma se pueden considerar pequeños, con lo cual se verificar la convergencia del observador.

En forma similar a las graficas del *dedo 1*, la Figura 5.14 muestra los errores de seguimiento ( $\Delta x_2$ ,  $\Delta y_2$ ) y observación ( $z_{x2}$ ,  $z_{y2}$ ) del *dedo 2*.

Finalmente, la Figura 5.15 muestra los voltajes de control para cada una de las articulaciones del *dedo 1* y *dedo 2*. Se puede ver que menores a los 4.8 volts necesarios para alimentar todo el sistema, por lo que no existe saturación.

Figura 5.13: Errores de seguimiento y observación del *dedo 1*.Figura 5.14: Errores de seguimiento y observación del *dedo 2*.

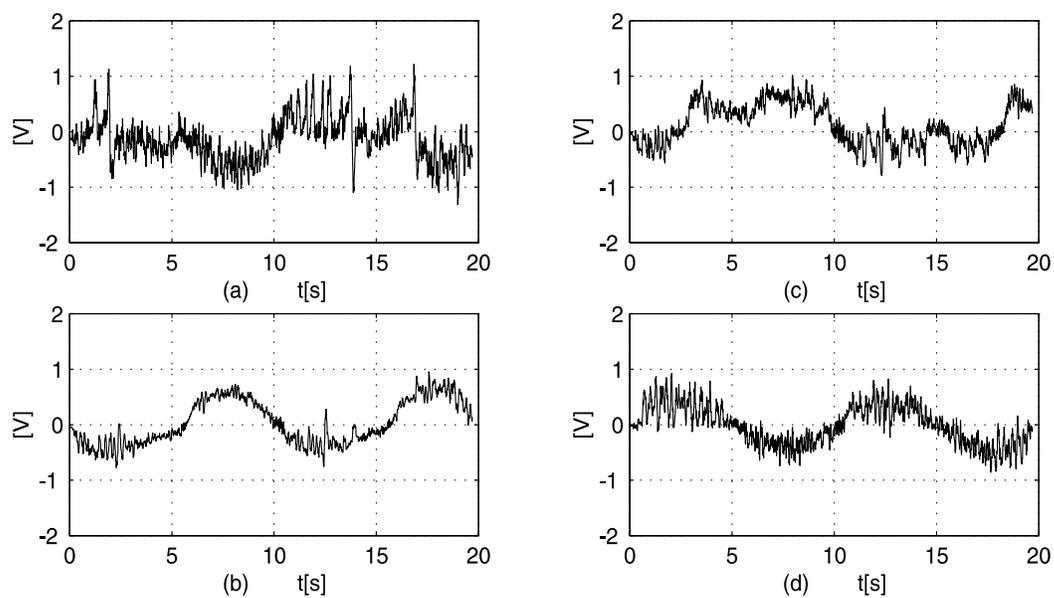


Figura 5.15: Voltajes de entrada *dedo 1* y *dedo 2*, respectivamente.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Para comprobar la estabilidad del sistema bajo el esquema de control cartesiano se realizaron diferentes experimentos que incluyen: llevar los dedos de la mano mecánica de una manera independiente y después simultáneamente de una posición inicial hasta una posición final, a partir del seguimiento de una trayectoria deseada. Para el movimiento de control independiente se muestran los resultados experimentales correspondientes a errores de seguimiento y observación. Por un lado, los errores de seguimiento son menores de 2 mm, sin embargo presentan un aumento de 2.5 mm al final del recorrido. Por otro lado, los errores de observación presentan el mismo comportamiento, con un valor de 1.2 mm. Para el caso de control de movimiento simultaneo de los dedos, los errores de seguimiento son mayores que cuando se mueven independientemente. Una de las causas es que el esquema de control no contempla movimiento restringido, regulación y seguimiento de fuerzas de contacto. Sin embargo, los errores de observación son menores de 1 mm.

De lo anterior, se puede concluir que la variación de los errores de seguimiento y observación en todos los casos analizados se deben principalmente a pequeñas oscilaciones que se presentan por las lecturas imprecisas tomadas directamente de los potenciómetros. Estos resultados se podrían mejorar utilizando otro tipo de sensores de posición más precisos como codificadores, no obstante, el problema que se presentaría sería adaptarlos a la estructura de la mano mecánica.

Otro punto importante que muestran los resultados experimentales es que el observador tiene un buen desempeño con un error en la estimación de sus parámetros menor a un 1 mm. Sin embargo, el ruido en las mediciones de posición y la discretización del esquema controlador-observación produce un error pequeño remanente en todos los casos.

A continuación se presentan las ventajas de utilizar el control cartesiano con un

observador:

- No se requiere el modelo dinámico de la mano mecánica para su control.
- No se requiere de la cinemática inversa para definir una tarea dada, ya que el esquema propuesto es diseñado en coordenadas cartesianas.
- Es posible controlar por separado y en conjunto cada uno de los dedos de la mano mecánica con el esquema de control-observador propuesto; aun cuando el tipo de sensores de posición utilizados representa una desventaja para la lectura de datos.
- Se puede utilizar un observador para estimar la velocidad de cada una de las articulaciones.
- El observador obtiene las velocidades que no son medibles directamente en coordenadas cartesianas.

Finalmente, a pesar de los sensores de posición utilizados se muestra que los errores de seguimiento y observación tienden a cero, bajo la suposición que ninguna singularidad se alcance. Esto se establece por simplicidad, no obstante para una subregión del espacio de trabajo y bajo una adecuada elección de ganancias la suposición de garantiza.

---

# Apéndice A

## Teorema y lema auxiliares

En este apéndice, se presentan un teorema y un lema auxiliares para la comprobación del Teorema 3.3.1. Primero, considérese el siguiente teorema bien conocido.

**Teorema A.0.1** (*Khalil 2002: pp. 172*)

Si  $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene al origen y  $V : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0, \quad (\text{A.2})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $K$  y  $W_3(\mathbf{x})$  es una función continua definida positiva. Considérese  $r > 0$  tal que  $\mathbb{B}_r \subset \mathbb{D}$  y suponga que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (\text{A.3})$$

Entonces, existe una función  $\beta$  clase  $KL$  para todo estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  que satisface  $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ , existe  $T \geq 0$  (dependiente de  $\mathbf{x}(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  satisface

$$\|\mathbf{x}\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{A.4})$$

$$\|\mathbf{x}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (\text{A.5})$$

Más aún, si  $\mathbb{D} = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenecen a la clase  $K_\infty$ , entonces se satisface (A.4)-(A.5) para cualquier estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$ , sin ninguna restricción en que tan grande sea  $\mu$ .  $\triangle$

**Lema A.0.1**

Considérense (3.22)-(3.24), y supóngase que se tiene la relación

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.6})$$

Si  $\|\mathbf{s}_i\| \leq \bar{s}_i < \infty$  para todo tiempo, entonces  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{s}_1$  están acotadas para todo tiempo.

*Demostración:* Se puede utilizar el Teorema A.0.1 para comprobar que  $\boldsymbol{\sigma}$  está acotada, con  $\mathbb{D} = \mathbb{R}^n$  y  $V(t, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}$ , de tal modo que

$$\alpha_1(\|\boldsymbol{\sigma}\|) = \alpha_2(\|\boldsymbol{\sigma}\|) = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}\|^2. \quad (\text{A.7})$$

Se puede calcular

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 - \|\boldsymbol{\sigma}\| \left( \frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\| - \{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\beta) \bar{s}_i + \sqrt{n}\} \right). \quad (\text{A.8})$$

Entonces, si

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| \geq \mu \triangleq \frac{2(\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\beta) \bar{s}_i + \sqrt{n})}{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma)}, \quad (\text{A.9})$$

se tiene

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \triangleq -W_3. \quad (\text{A.10})$$

Puesto que  $\mathbb{D} = \mathbb{R}^n$ , siempre puede encontrarse un valor  $r$  positivo para satisfacer (A.3). Además, ya que  $\boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0}$  como es dado en (3.22), es fácil mostrar que  $\boldsymbol{\sigma} \leq \mu \triangleq \sigma_{\max}$ . Finalmente, ya que  $\boldsymbol{\sigma}$  está acotado, de (A.6)  $\mathbf{s}_1$  tiene que estar acotada.  $\triangle$

# Apéndice B

## Demostración del Teorema 3.3.1

En este apéndice, se presenta la demostración del Teorema 3.3.1. Primeramente se define

$$\mathbf{r} \triangleq \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_o = \dot{\mathbf{z}} + \Lambda_z \mathbf{z} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{s}_x \triangleq \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_r = \Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \Delta \mathbf{x} - \Lambda_x \mathbf{z} - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.2})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}}_r \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{s}_r \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_x. \quad (\text{B.4})$$

Entonces, se puede describir (3.5) como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{s}}_r + \ddot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\mathbf{s}_r + \dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{D}(\mathbf{s}_r + \dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (\text{B.5})$$

o

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_r + \mathbf{D}\mathbf{s}_r = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi}, \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi} \triangleq \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}). \quad (\text{B.7})$$

Rescribiendo (3.26) como

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{s}_r + \mathbf{K}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{r}, \quad (\text{B.8})$$

la ecuación (B.6) se convierte en

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_r + \mathbf{K}_{DP} \mathbf{s}_r = \mathbf{K}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{r} - \mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi}, \quad (\text{B.9})$$

donde  $\mathbf{K}_{DP} \triangleq \mathbf{D} + \mathbf{K}_p$ .

Para la dinámica del error de observación, en primer lugar se nota que (3.15) puede ser escrita como  $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_o + \mathbf{\Lambda}_2 \dot{\mathbf{z}} + k_d \dot{\mathbf{z}}$ , así que sustituyendo en (3.16) se consigue después de alguna manipulación

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{s}}_x - k_d \mathbf{r} - \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (\text{B.10})$$

Nótese que (B.10) es equivalente a

$$\mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{r}} = -k_d \mathbf{J}^{-1} \mathbf{r} + \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{s}}_x + \dot{\mathbf{J}}^{-1} \mathbf{s}_x - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (\text{B.11})$$

donde  $\dot{\mathbf{J}}^{-1} = \frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{-1})$ . Ya que

$$\dot{\mathbf{s}}_r = \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{s}}_x + \dot{\mathbf{J}}^{-1} \mathbf{s}_x,$$

se obtiene, multiplicando ambos lados de (B.11) por  $\mathbf{J}^{-T} \mathbf{H}(\mathbf{q})$  y tomando en cuenta (B.6) se obtiene después de alguna manipulación

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{r}} = -k_d \mathbf{H}_r(\mathbf{q}) \mathbf{r} - \mathbf{C}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_x - \mathbf{D}_r \mathbf{s}_x + \mathbf{J}^{-T} \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^{-T} \mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{H}_r(\mathbf{q}) \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (\text{B.12})$$

con

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{C}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \mathbf{J}^{-T} \left( \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{J}}^{-1} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{D}_r \triangleq \mathbf{J}^{-T} \mathbf{D} \mathbf{J}^{-1}. \quad (\text{B.15})$$

Se puede demostrar que  $\mathbf{H}_r(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{C}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  satisfacen la Propiedad 3.2.2 (Murray *et al.* 1994). Además, ya que se asume que  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})$  existe,  $\mathbf{H}_r(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{D}_r(\mathbf{q})$  son definidas positivas y se mantiene la Propiedad 3.2.1. Puesto que  $\mathbf{s}_x = \mathbf{s}_o + \mathbf{r}$  y teniendo en cuenta (B.8) y algunas manipulaciones, finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{r} + \mathbf{H}_{\text{DR}} \mathbf{r} = & - \mathbf{C}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_o - \mathbf{D}_r \mathbf{s}_o - \mathbf{J}^{-T} \mathbf{K}_p \mathbf{J}^{-1} \mathbf{s}_o \\ & - \mathbf{J}^{-T} \mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{H}_r(\mathbf{q}) \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

con

$$\mathbf{H}_{\text{DR}} \triangleq k_d \mathbf{H}_r(\mathbf{q}) + \mathbf{D}_r.$$

Se elige

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

como estado del sistema (B.9) y (B.16). Nótese que  $\mathbf{s}_o = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r - \mathbf{r}$ . Ahora, se puede demostrar el teorema, lo cual se realiza en tres pasos.

- a) En primer lugar, se demuestra que si  $\mathbf{y}$  está acotada por  $y_{\max}$ , i.e.  $\|\mathbf{y}\| \leq y_{\max} \forall t$ , entonces cualquier señal está acotada. Esto procede como sigue. De (3.18) y (3.20) se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{B.18})$$

De aquí

$$\mathbf{s}_x = \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{r} + \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z}. \quad (\text{B.19})$$

Definiendo

$$\mathbf{s}_i \triangleq \mathbf{s}_x - \mathbf{r} + \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z},$$

se tiene una ecuación de la forma (A.6). Puesto que  $\mathbf{s}_x = \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{s}_r$ , tiene que estar acotada debido a que se están considerando articulaciones de revolución. También, en vista de (B.1),  $\mathbf{z}$  está también acotada. En consecuencia,  $\mathbf{s}_i$  está acotada y el Lema A.0.1 puede ser utilizado para demostrar que  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{s}_1$  están acotados. Por otro lado, de (B.2) se tiene

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Lambda}_x \Delta \mathbf{x} = \mathbf{s}_x + \boldsymbol{\Lambda}_x \mathbf{z} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{B.20})$$

La ecuación dinámica para  $\Delta \mathbf{x}$  representa un filtro lineal estable con entrada acotada, así que  $\Delta \mathbf{x}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$  tienen que estar acotadas. Puesto que  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ , y  $\mathbf{x}_d$  y sus derivadas están acotadas, se concluye que  $\mathbf{x}$  y  $\dot{\mathbf{x}}$  también lo son. Debido a que  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\dot{\hat{\mathbf{x}}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  tiene que estar acotada. Además, debido a la Suposición 3.1.1,  $\mathbf{q}$  tiene que estar acotada puesto que ninguna singularidad se ha alcanzado. Ahora considérese,  $\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}_r$ , la cual está acotada. Esto puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{x}}_d - \boldsymbol{\Lambda}_x \Delta \mathbf{x} + \boldsymbol{\Lambda}_x \mathbf{z} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}), \quad (\text{B.21})$$

lo cual significa que

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{x}}_d - \boldsymbol{\Lambda}_x \Delta \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Lambda}_x \dot{\mathbf{z}} - k\mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (\text{B.22})$$

Subsecuentemente de (3.24) sabemos que  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  está acotada, esto significa que  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  está acotada también. Esto, a su vez, significa que  $\mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi}$  en (B.7) está acotada. De este modo,  $\dot{\mathbf{s}}_r$  in (B.9) y  $\dot{\mathbf{r}}$  in (B.16) están acotadas.

- b) El siguiente paso es demostrar que, con una elección apropiada de ganancias, se puede conseguir  $\|\mathbf{y}\| \leq y_{\max}$ , siempre que  $\mathbf{x}_d$  y por lo menos su primera y

segunda derivadas estén acotadas. Para simplificar la discusión, considérese que  $y_{\max}$  es un valor predeterminado o dado. A continuación se define

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}, \quad (\text{B.23})$$

con  $\mathbf{M} \triangleq$  bloque diagonal  $\{\mathbf{H}(\mathbf{q}) \quad \mathbf{H}_r(\mathbf{q})\}$ . Claramente, esto satisface

$$\lambda_1 \|\mathbf{y}\|^2 \leq V(\mathbf{y}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{y}\|^2, \quad (\text{B.24})$$

con

$$\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) \quad (\text{B.25})$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{M}(\mathbf{q})). \quad (\text{B.26})$$

A continuación se utiliza  $V(\mathbf{y})$  en (B.23) y el Teorema A.0.1, con  $\alpha_1 = \lambda_1 \|\mathbf{y}\|^2$  y  $\alpha_2 = \lambda_2 \|\mathbf{y}\|^2$ . Utilizando la Propiedad 3.2.2, la derivada de  $V$  a lo largo de (B.9) y (B.16) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_{\text{DP}} \mathbf{s}_r + \mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_P \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{r} - \mathbf{s}_r^T \mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{r}^T \mathbf{H}_{\text{DR}} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{C}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_o \\ & - \mathbf{r}^T \mathbf{D}_r \mathbf{s}_o - \mathbf{r}^T \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{K}_P \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_o - \mathbf{r}^T \mathbf{J}^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{r}^T \mathbf{H}_r \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$V$  es definida positiva para todo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n}$ , por lo que para aplicar el Teorema A.0.1 es necesario encontrar una región  $\mathbb{D}$  para la cual (A.2) se satisface. A continuación se define

$$\mathbb{D} \triangleq \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|\mathbf{y}\| \leq y_{\max} \}. \quad (\text{B.28})$$

En esta región, como se demostró en el inciso a), pueden encontrarse cotas para todas las variables del sistema, de tal forma que se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_P) \|\mathbf{s}_r\|^2 - k_d \lambda_{\text{hr}} \|\mathbf{r}\|^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_P) c_2 \|\mathbf{s}_r\| \|\mathbf{r}\| \quad (\text{B.29}) \\ & + (c_3 + c_{\text{Dr}} + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_P) c_2^2) \|\mathbf{r}\| (c_1 \|\mathbf{s}_r\| + \|\mathbf{r}\|) \\ & + c_{\text{ya}} (\|\mathbf{s}_r\| + c_2 \|\mathbf{r}\|) + c_{\text{ya}} c_4 \|\mathbf{r}\|, \end{aligned}$$


---

donde

$$c_1 \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{J}(\mathbf{q})\| \quad (\text{B.30})$$

$$c_2 \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\| \quad (\text{B.31})$$

$$\|\mathbf{C}_r(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq c_3 \quad (\text{B.32})$$

$$c_{\text{Dr}} \triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{D})c_2^2 \quad (\text{B.33})$$

$$\|\mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi}\| \leq c_{ya} \quad (\text{B.34})$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) \leq \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\max} \quad (\text{B.35})$$

$$c_4 \triangleq \frac{\lambda_{\text{hr}} \lambda_{\max}(\mathbf{K}_\gamma) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\max}}{c_{ya}}. \quad (\text{B.36})$$

$\lambda_{\text{hr}}$  y  $\lambda_{\text{Hr}}$  se definen como  $\lambda_h$  y  $\lambda_H$  en la Propiedad 3.2.1 para  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ .  $c_3$ ,  $c_{ya}$  y  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\max}$  son constantes positivas finitas. Si las ganancias se eligen para satisfacer

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_p) \geq 1 + \delta + \frac{c_{ya}(1 + c_2 + c_4)}{\mu} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} k_d \lambda_{\text{hr}} &\geq (c_3 + c_{\text{Dr}} + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p)c_2^2) + \delta + \frac{c_{ya}(1 + c_2 + c_4)}{\mu} \quad (\text{B.38}) \\ &+ \frac{1}{4} (\lambda_{\max}(\mathbf{K}_p)c_2 + c_1 (c_3 + c_{\text{Dr}} + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p)c_2^2))^2, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\dot{V} \leq -\delta \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{y}\| \left( \|\mathbf{y}\| \frac{c_{ya}(1 + c_2 + c_4)}{\mu} - c_{ya}(1 + c_2 + c_4) \right). \quad (\text{B.39})$$

$\delta$  y  $\mu$  son constantes positivas. Entonces, si  $\|\mathbf{y}\| \geq \mu > 0$

$$\dot{V} \leq -\delta \|\mathbf{y}\|^2 \triangleq -W_3(\mathbf{y}). \quad (\text{B.40})$$

Finalmente, para aplicar el Teorema A.0.1 se tiene que asegurar que se puede encontrar una constante  $r$  de tal forma que se satisfaga (A.3). De hecho, puesto que  $\mu$  es un parámetro de control, el objetivo se puede lograr siempre que sea suficientemente pequeño. Además, se tiene que asumir que la condición en  $\|\mathbf{y}(0)\|$  se cumple. Nótese que esto no es de ningún modo restrictivo, debido a que  $y_{\max}$  puede ser elegida arbitrariamente grande.

- c) Ya se ha demostrado que  $\mathbf{y}$  está acotada, pero aún se tiene que probar que los errores de seguimiento y observación tienden a cero. En primer lugar, de (3.24) y (B.19) se obtiene

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = -\mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_\gamma \text{sign}(\mathbf{s}_1) + \dot{\mathbf{s}}_i, \quad (\text{B.41})$$

donde ha sido demostrado que  $\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{s}}_x - \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}}$  está acotada. Entonces, si se tiene  $V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_1\|^2$ , se puede calcular

$$\|\mathbf{s}_1\| \frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta) \|\mathbf{s}_1\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) \|\mathbf{s}_1\| + \|\mathbf{s}_1\| \dot{s}_{\text{imax}}, \quad (\text{B.42})$$

donde  $\dot{s}_{\text{imax}}$  es una cota para  $\dot{\mathbf{s}}_i$  y  $\|\mathbf{s}_1\| = |s_{11}| + \dots + |s_{1n}|$ , con  $s_{1j}$  elemento de  $\mathbf{s}_1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Puesto que  $\|\mathbf{s}_1\| \leq |\mathbf{s}_1|$ , se obtiene

$$\|\mathbf{s}_1\| \frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} \leq -(\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) - \dot{s}_{\text{imax}}) \|\mathbf{s}_1\|. \quad (\text{B.43})$$

Definiendo

$$\phi \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) - \dot{s}_{\text{imax}} > 0$$

con una elección apropiada de  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma)$ , se obtiene

$$\frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} \leq -\phi. \quad (\text{B.44})$$

Ahora se tiene que demostrar que  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$  en un tiempo finito  $t_r$ . Esto se puede realizar por medio de integración para obtener  $t_r \leq \frac{\|\mathbf{s}_1(0)\|}{\phi}$ , como es usual en la teoría de modos deslizantes. Entonces, a partir de  $t \geq t_r$  se tiene  $\mathbf{s}_1(t) = \mathbf{0}$ , así que de (3.19)–(3.21) se tiene

$$\mathbf{s} = \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0) e^{-kt}, \quad (\text{B.45})$$

con  $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_d$ . Puesto que  $e^{-kt}$  tiende a cero, se tiene que  $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ . Esto a su vez significa que  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$  tenderán a cero. Sin embargo, solamente se garantiza que  $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}_d$  y  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_d$ . Nótese que si  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  y  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$ , entonces  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{z}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{z}}$ . De esta forma la derivada de (B.2) se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{s}}_x - \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}} + k \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (\text{B.46})$$

Pero de (B.10), se obtiene

$$\dot{\mathbf{s}}_x - \dot{\mathbf{r}} = k_d \mathbf{r} + \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (\text{B.47})$$

Entonces, de (B.46)–(B.47) se tiene

$$(k_d \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_z) \dot{\mathbf{z}} + k_d \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} = k \mathbf{s}_d. \quad (\text{B.48})$$

La ecuación (B.48) representa un filtro lineal estable para  $\mathbf{z}$ , así que  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  tienden a cero (porque  $\mathbf{s}_d$  lo hace). Esto a su vez significa  $\Delta \mathbf{x}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$  también tenderán a cero.