

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES TERMODINÁMICAS DE UN  
GAS DE BOSONES CON RELACIÓN  
ENERGÍA-MOMENTO  $\varepsilon = c_1 k + c_2 k^2$ .

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

JULIO CÉSAR ABARCA VÁZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. MIGUEL ÁNGEL SOLÍS ATALA

ABRIL DE 2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

### 1. Datos del alumno.

Apellido paterno Abarca  
Apellido materno Vázquez  
Nombre(s) Julio César  
Teléfono 01 (222) 224-25-16  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Carrera Física

### 2. Datos del tutor.

Grado Doctor  
Nombre(s) Miguel Ángel  
Apellido paterno Solís  
Apellido materno Atala

### 3. Datos del sinodal 1

Grado Doctora  
Nombre(s) Marcela Dolores  
Apellido paterno Grether  
Apellido materno González

### 4. Datos del sinodal 2

Grado Doctor  
Nombre(s) Doroteo  
Apellido paterno Mendoza  
Apellido materno López

### 5. Datos del sinodal 3

Grado Doctor  
Nombre(s) Carlos  
Apellido paterno Villareal  
Apellido materno Luján

### 6. Datos del sinodal 4

Grado Doctor  
Nombre(s) Gerardo  
Apellido paterno García  
Apellido materno Naumis

### 7. Datos del trabajo escrito.

Título Propiedades Termodinámicas de un Gas de Bosones con Relación Energía-  
Momento  $c_1k + c_2k^2$   
Subtítulo  
Número de páginas 65  
Año 2006

## Dedicatoria

A mi padre por su promesa.

A mi madre por su esfuerzo.

A mis hermanas por su compañía.

## Agradecimientos

A mi director de tesis Dr. Miguel Angel Solís Atala por su interés, paciencia, y especialmente, apoyo de todo tipo, no sólo académico, que ha sido fundamental para la culminación de este trabajo.

Al Dr. Manuel de Llano de la Garza por el interés mostrado a lo largo de la realización de esta tesis y por tomarse el tiempo de leerla, contribuyendo con sus críticas y sugerencias a elevar su calidad.

A los sinodales propietarios, Dra. Marcela Dolores Grether González, Dr. Doroteo Mendoza López, y suplentes, Dr. Carlos Villareal Luján y Dr. Gerardo García Naumis, por invertir su tiempo en la lectura, corrección y crítica de este trabajo.

Al Instituto de Física de la UNAM por haberme aceptado como estudiante asociado, lo que me permitió disponer de sus instalaciones y servicios a lo largo de la elaboración de esta tesis.

Al CONACyT por el apoyo económico recibido a través del proyecto 43234 – *F*.

# Índice General

Dedicatoria . . . . .	iii
Agradecimientos . . . . .	iv
Resumen . . . . .	v
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Gas de bosones con relación de dispersión generalizada en <math>d</math> dimensiones</b>	<b>6</b>
2.1 Relación de dispersión generalizada . . . . .	8
2.2 Temperatura crítica . . . . .	10
2.3 Fracción condensada . . . . .	10
2.4 Potencial químico . . . . .	11
2.5 Energía interna . . . . .	12
2.6 Calor específico a volumen constante . . . . .	13
2.7 Continuidad del $C_V$ en el punto crítico . . . . .	15
<b>3 Gas tridimensional de bosones con relación de dispersión lineal más cuadrática</b>	<b>16</b>
3.1 Temperatura crítica . . . . .	20
3.2 Temperatura crítica en los límites lineal y cuadrático . . . . .	21
3.3 Gas tridimensional de pares de Cooper . . . . .	23
3.4 Potencial químico . . . . .	26
3.5 Energía interna . . . . .	26
3.6 Calor específico . . . . .	29
3.7 La derivada del potencial químico respecto a la temperatura para una relación de dispersión $\varepsilon = c_1 k + (\alpha_2 \hbar^2 / 2m) k^2$ . . . . .	31
3.8 Calor específico para una relación de dispersión $\varepsilon = c_1 k + (\alpha_2 \hbar^2 / 2m) k^2$ . . . . .	32
3.9 Calor específico alrededor de la temperatura crítica para una relación de dispersión $\varepsilon = c_1 k + (\alpha_2 \hbar^2 / 2m) k^2$ . . . . .	33
<b>4 Gas de bosones con relación de dispersión lineal más cuadrática en <math>d</math> dimensiones</b>	<b>35</b>
4.1 Temperatura de Fermi en $d$ dimensiones . . . . .	37
4.2 Temperatura crítica . . . . .	39
4.3 Temperatura crítica como función de la dimensión $d$ del sistema . . . . .	39
4.4 Pares de Cooper en 2D . . . . .	40
4.5 Potencial químico . . . . .	42

4.6	Derivada del potencial químico respecto a la temperatura . . . . .	43
4.7	Energía interna . . . . .	45
4.8	Calor específico . . . . .	47
4.9	Calor específico alrededor de la temperatura crítica para una relación de dispersión $\varepsilon = c_1 k + (\alpha_2 \hbar^2 / 2m) k^2$ , en dos dimensiones . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>La integral en el espacio <math>k</math> <math>d</math>-dimensional</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Integral de Bose</b>	<b>55</b>
	<b>Lista de Figuras</b>	<b>57</b>

## Resumen

Las cuasipartículas en el superfluido helio-cuatro o los pares de Cooper en un superconductor, entre otras, tienen energías que se pueden escribir como desarrollos en potencias de su momento lineal. Para momentos pequeños los términos lineal y cuadrático del desarrollo son predominantes y determinan las propiedades del sistema. Aquí exploramos las propiedades de un gas de bosones con una relación de dispersión (RD) lineal más cuadrática, teniendo como referencia al gas ideal de bosones. Aunque no encontramos expresiones analíticas sencillas en términos de las integrales de Bose, obtuvimos los resultados numéricamente. Tanto en 3D como en 2D, por pequeña que sea la contribución lineal a la RD, la temperatura crítica resulta ser mayor que la temperatura crítica correspondiente del gas ideal de bosones. Por otra parte en 3D el calor específico a volumen constante tiene un salto (discontinuidad) en la temperatura crítica, indicativo de una transformación de fase de segundo orden, mientras que en 2D el calor específico es continuo.

# Capítulo 1

## 1 Introducción

En 1925, A. Einstein descubrió lo que ahora se conoce como condensación de Bose-Einstein (BEC), una repentina población macroscópica del estado base de sistemas bosónicos.

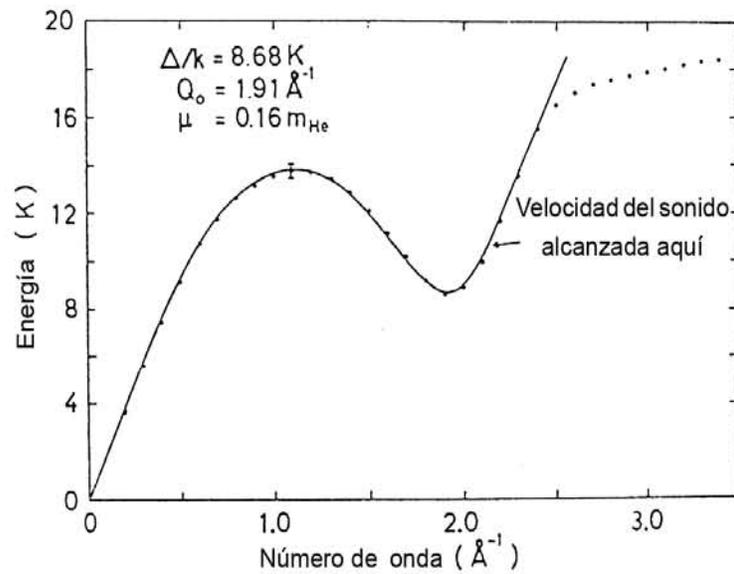
Para 1938, F. London [1] propone, por primera vez, que la transición de fase (punto  $\lambda$ ) del helio líquido a 2.186 K es esencialmente la BEC de un gas. En 1941, L. D. Landau [2] propone una teoría fenomenológica de la superfluididad del helio a temperaturas menores que la temperatura del punto  $\lambda$ , es decir, el helio II, basada en la suposición de que las excitaciones térmicas del líquido pueden describirse como constituyentes de un gas débilmente interactuante, que obedecen la estadística de Bose. Es decir, en el cero absoluto, el helio es completamente superfluido y, a medida que la temperatura aumenta la teoría propone describir termodinámicamente al fluido en términos de excitaciones elementales del superfluido; cerca del cero absoluto estas excitaciones son fonones, maxones y rotones. La energía de estas excitaciones como función del momento puede representarse mediante una curva de dispersión. La curva de dispersión fenomenológica propuesta por Landau describe cualitativamente tanto la región fonónica como la rotónica del espectro de excitación. La teoría de Landau permite calcular las propiedades termodinámicas del helio II a partir del espectro de excitación propuesto.

En principio, de acuerdo con la teoría de Landau, si uno conoce la curva de dispersión de las excitaciones, se puede construir una función de partición, y proceder mediante los métodos de la mecánica estadística, a calcular el conjunto completo de propiedades termodinámicas del líquido en equilibrio. Sin embargo, hoy en día este ideal está lejos de alcanzarse debido a que un conocimiento completo del espectro de excitación requiere de comprender las interacciones entre las componentes de un sistema de muchas partículas. En la actualidad las curvas experimentales de dispersión se determinan mediante técnicas de dispersión inelástica de neutrones, para diferentes presiones y temperaturas [3] [4]. El problema es que no hay acuerdo en la forma analítica exacta de la curva de dispersión, que representa a las curvas de dispersión medidas. Es decir, no hay acuerdo en lo que, a partir de este momento, llamaremos *relación de dispersión* (RD), la cual relaciona la energía de una partícula con su momento. Dicho de otra forma, relaciona la energía de una partícula y la magnitud de su vector de onda.

A bajas temperaturas, el problema de las excitaciones elementales en el  $\text{He}^4$  líquido fue atacado exitosamente por R. Feynman [5, 6], quien en 1953-1954 desarrolló una teoría atómica de un *líquido de Bose*. Partiendo de primeros principios Feynman estableció que el líquido de Bose sufre una transición de fase análoga a la condensación de un gas de Bose, además determinó la forma de la función de onda del líquido en presencia de *una* excitación y a partir de ella la RD para las excitaciones elementales del líquido. En la

aproximación de Feynman fonones y rotones se funden en un solo y sencillo esquema, siendo ambos, partes diferentes de un espectro de energía común y continuo.

En un intento más reciente, algunos investigadores [7] han propuesto ajustar una expresión concreta para una curva de dispersión experimental y mediante consideraciones teóricas, han concluido que un polinomio en el momento, sin término cuadrático de octavo orden, resulta ser una excelente representación del espectro de excitación medido por debajo de los 1.2 K, en el intervalo de momentos  $0 \leq p/\hbar \leq 2.15 \text{ \AA}^{-1}$  para el Helio IV. (Ver figura 1.1.) Los coeficientes en esta expresión serían función de la presión y temperatura. Sin embargo, las propiedades termodinámicas obtenidas a partir de la curva de dispersión anterior, no coinciden en todos los casos con el experimento.



**Figura 1.1** El espectro de excitación del  $He^4$  determinado experimentalmente a 1.1 K y presión de vapor saturado. Los puntos son los datos de dispersión de neutrones de Cowley y Woods [8]; la línea sólida corresponde a un polinomio de octavo orden sin término cuadrático propuesto en [7].

Por otra parte, en 1934, C. J. Gorter [9] propuso que la superconductividad podría explicarse mediante un modelo bi-fluido, en el que un gas de electrones dentro del superconductor tiene dos componentes. Una componente sin entropía transporta la supercorriente mientras la otra componente tiene toda la entropía y se comporta como un gas de electrones normal. Un modelo similar de dos fluidos también fue propuesto para explicar la superfluidez del helio líquido. Y es que hay claras analogías entre superfluidez del helio líquido y superconductividad, la principal: un flujo sin resistencia de átomos o electrones.

En 1935, F. London desarrolló un exitoso conjunto de ecuaciones fenomenológicas para los metales superconductores. Sin embargo, hasta 1950 no se disponía de una teoría microscópica de la superconductividad. A partir del trabajo de C. Bloch [10] sobre la

teoría de la resistencia eléctrica se supo de la existencia de una interacción electrón-fonón-electrón. No obstante, la idea de que pares de fermiones pudieran combinarse para formar bosones efectivos, era bien conocida en química. La primera sugerencia de BEC de pares de electrones como la causa de la superconductividad fue hecha en 1946, y vino de un químico experimental, R. Ogg [11]. El descubrimiento de H. Fröhlich del papel de la interacción electrón-fonón, probó tener importancia definitiva en favor del apareamiento de electrones.

El primer modelo teórico acerca de la superconductividad como una BEC fue propuesto independientemente por V. L. Ginzburg (1952), R. P. Feynman (1953) y M. R. Schafroth (1954) [12]. Los tres, mediante cálculos explícitos mostraron que el gas ideal de Bose cargado, por debajo del punto de condensación, tiene la respuesta característica del efecto Meissner; un efecto de importancia fundamental en superconductividad. De esta forma, se sugería que la BEC era una explicación al comportamiento superfluido (tanto en superconductores como en el helio líquido). Y es que el gas ideal de Bose, en su estado condensado tiene muchas propiedades en común con los superconductores, y aunque la correspondencia no es perfecta, es altamente sugestiva.

Un paso crucial en el camino de la explicación microscópica de la superconductividad se dio en 1956, cuando L. N. Cooper desarrolló el concepto de que la superconductividad estaba asociada a un par ligado de electrones, al que se daría el nombre de *par de Cooper* (CP). Cada electrón en el par tendría momento y espín igual y opuesto y viajaría a través de la red iónica. Los pares estarían ligados por una interacción electrón-fonón. Sobre esta idea, J. Bardeen, L. N. Cooper y J. R. Schrieffer generarían la famosa teoría BCS [13] de superconductividad en 1957. La teoría BCS, explica muchas de las observaciones experimentales en superconductores convencionales. Uno de los principales parámetros de comparación es el concepto de *longitud de coherencia*, el que puede interpretarse como la distancia a la que interactúan los electrones para formar pares de Cooper. En el formalismo BCS, los pares de Cooper aparecen muy débilmente ligados, por lo que son excesivamente extensos al compararse con el espaciamiento de la red iónica. En las circunstancias de un acoplamiento muy débil del par de Cooper, es decir, de una gran longitud de coherencia, se creía difícil considerar el par estrictamente como un bosón, y que fuera posible que ocurriera una BEC. No obstante, en 1986, tras el descubrimiento de materiales superconductores cerámicos de alta temperatura crítica, cuyas longitudes de coherencia son bastante más pequeñas, resurgió este enfoque.

En el marco de la teoría BCS, se privilegian los pares de Cooper con momento del centro de masa (MCM) igual a cero, despreciando a los pares de Cooper con MCM distinto de cero. No obstante, para explicar la superconductividad como una BEC, los pares con MCM distinto de cero son fundamentales. Los pares de Cooper con MCM distinto de cero se comportan, en el límite de momentos pequeños, como un cuasi-bosón con una RD lineal [14]. Con este tipo de cuasi-bosones se consiguen temperaturas de transición  $T_c > 0$  no sólo para  $d = 2$  y  $d = 3$  [15] sino para toda dimensionalidad  $d > 1$ . Evidentemente, este es un resultado muy distinto al de la transición de BE para bosones con energía de excitación  $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$ , que sólo se produce si  $d > 2$ , y que no puede usarse para explicar

la superconductividad en sistemas de  $d \leq 2$ .

Al tratar con pares de Cooper con MCM no nulo, se han logrado obtener RD en 2 y 3 dimensiones que pueden expresarse como una serie de potencias, en términos de la magnitud del vector de onda asociado al vector de momento del centro de masa (MCM). En particular, se ha concluido que el problema del par de Cooper de MCM no nulo, da una RD lineal que a medida que el acoplamiento se incrementa alcanza una RD cuadrática, pero que para ciertas condiciones de acoplamiento tiene las dos contribuciones [16]. Esta energía de excitación debería ser la que se introduzca en la función de distribución de Bose-Einstein para determinar la temperatura crítica en una descripción de la superconductividad (o superfluidez) basada en una BEC de los pares de Cooper.

Ahora bien, en cualquiera que sea el caso, superfluidez o superconductividad, parece que la BEC de un gas de partículas bosónicas, con alguna RD particular, podría explicar estos fenómenos. La idea es que la RD de este gas se exprese como una serie de potencias. El presente trabajo sólo aborda parcialmente esta posibilidad, pues únicamente considera el caso en que la RD tiene un término lineal y un término cuadrático en el momento. Sin embargo, para este caso particular, se obtienen aquí, resultados de completa generalidad, que son de utilidad *cualquiera* que sea la forma de la RD.

El trabajo previo [17] y fundamental para nuestro desarrollo, se resume en el Capítulo 2. Ahí se estudian algunas de las propiedades termodinámicas de un gas ideal de bosones con una RD generalizada, es decir una RD de la forma  $\varepsilon = c_s k^s$ , con  $s > 0$ . Los resultados pueden de inmediato particularizarse, ya sea al caso de un gas ideal de bosones (RD cuadrática), o a un gas de bosones con RD lineal.

En el Capítulo 3 se presenta el cálculo de algunas propiedades termodinámicas para un gas de bosones con una RD,  $\varepsilon = c_1 k + c_2 k^2$ , *exclusivamente* en 3 dimensiones, con  $c_1$  y  $c_2$  constantes con dimensiones de energía  $\times$  longitud y energía  $\times$  longitud<sup>2</sup>, respectivamente. Para poder presentar gráficamente los resultados obtenidos, se ha optado por adimensionalizar las diferentes propiedades respecto a las correspondientes cantidades de un gas ideal de bosones. Así, por ejemplo, la temperatura crítica se reporta en unidades de la temperatura crítica del gas ideal de bosones en 3D. La contribución de la parte lineal a la RD resulta ser decisiva. Cuando el término lineal desaparece, recuperamos los resultados del gas ideal de bosones en 3D, y en la medida que esta contribución deja de ser nula, las temperaturas críticas aumentan y el calor específico a volumen constante deja de ser continuo como función de la temperatura.

En el Capítulo 4, se generalizan los resultados del Capítulo 3 para  $d > 1$  dimensiones. Dado que la temperatura crítica de un gas ideal de bosones es cero para  $d \leq 2$ , ésta deja de ser útil para adimensionalizar temperaturas y energías para  $d \leq 2$ . Por otro lado, como estamos interesados en aplicar los resultados de este Capítulo a un gas de pares de Cooper en  $d = 2$ , consideramos conveniente utilizar ahora la temperatura de Fermi en  $d$  dimensiones para adimensionalizar las diferentes propiedades termodinámicas que se calculan. Al igual que en 3D, pero ahora de forma general, se confirma que las temperaturas críticas aumentan al aumentar la contribución lineal a la RD. En cuanto al calor específico a volumen constante, en particular, en 2D ya no se observa discontinuidad.

Finalmente, se añaden dos Apéndices: en el primero de ellos se calcula la integral de volumen sobre la esfera  $d$ -dimensional que resulta de utilidad tanto en el primer como tercer capítulo, donde se generaliza la BEC para diferentes dimensiones; en el segundo se discuten las funciones de Bose, de gran utilidad al momento de leer el Capítulo 2.

# Capítulo 2

## 2 Gas de bosones con relación de dispersión generalizada en $d$ dimensiones

Como es bien sabido, la *hipótesis cuántica* de Planck resolvió exitosamente el problema de radiación de cuerpo negro. Así que, muy pronto, los trabajos de principios del siglo XX, sobre el efecto fotoeléctrico, efecto Compton y dispersión de rayos X, hacían uso de la hipótesis cuántica; requerían de la existencia del *cuanto de radiación* o *fotón*. Fue entonces natural que alguien intentará obtener la fórmula de radiación de Planck, tratando la radiación de cuerpo negro como un *gas de fotones*, un poco en la misma forma que Maxwell había derivado su ley de distribución de velocidades moleculares para un gas convencional de moléculas. El problema fue resuelto por S. Bose y a la función de distribución derivada se le dio el nombre de *función de distribución de Bose*. Cuando A. Einstein leyó el artículo de Bose reconoció de inmediato su importancia y sugirió que el método empleado podría dar origen a la teoría cuántica de un gas ideal.

Implícito en la propuesta de Bose estaba el hecho de que en el caso de los fotones lo que realmente importaba era el conocimiento del conjunto de fotones en los diferentes estados de energía y no la determinación de “que fotón estaba en cada estado”; en otras palabras, los fotones eran *mutamente indistinguibles*. Fue Einstein quien llevó el concepto de indistinguibilidad de fotones a otro nivel, al argumentar que el concepto de indistinguibilidad para fotones podía también ser válido para partículas materiales, de acuerdo con el postulado de L. de Broglie.

En 1924, Einstein aplicó el método de Bose a un gas ideal de partículas, y con ello desarrolló lo que hoy conocemos como *estadística de Bose-Einstein* (BE). Para 1926, Enrico Fermi, siguiendo el principio de exclusión de Pauli, mostraría que ciertos sistemas físicos obedecen un tipo distinto de estadística, conocida como estadística de Fermi-Dirac (FD). La importante cuestión de qué partículas obedecen la estadística BE y qué partículas obedecen la estadística FD fue incierta hasta que, W. Pauli y F. J. Belinfante (1940) [18] descubrieron la conexión vital entre espín y estadística. Resulta que aquellas partículas cuyo espín es múltiplo entero de  $\hbar$  obedecen la estadística de BE, mientras que aquellas partículas cuyo espín es un múltiplo semientero de  $\hbar$  obedecen la estadística de FD.

En 1925, Einstein demostró que una colección de partículas que obedecen las reglas de conteo BE, podrían, a la temperatura y densidad adecuadas, repentinamente poblar en gran número el estado base de la colección. A esta ocupación macroscópica del estado base, transición de fase que toma lugar a una temperatura conocida como *temperatura crítica*,  $T_c$ , le fue dado el nombre de *condensación de Bose-Einstein* (BEC). Dicho en otros términos, si consideramos un gas de átomos que obedece la estadística de Maxwell-Boltzmann, habrá un gran número de estados continuos, de momento y energía, que

están microscópicamente poblados; es decir, el número de partículas ocupando cualquier estado, es sólo una pequeña fracción del número total de partículas. Sólo a  $T = 0$ , el estado base con  $\varepsilon = 0$ , está macroscópicamente ocupado por *todas* las partículas. Lo que Einstein demostró fue que para un gas ideal de bosones la ocupación macroscópica del estado base es comparable al número total de partículas en el gas y que puede ocurrir a una temperatura finita no nula; a este cambio de fase es al que se le llama BEC.

Setenta años después, mientras algunos físicos estudiaban un gas muy diluido de átomos de rubidio confinado en un espacio por un campo magnético inhomogéneo, se observó por primera vez la BEC [19]. Desde entonces la BEC se ha venido verificando experimentalmente en nubes ultra-enfriadas de átomos neutros con relación energía-momento *cuadrática*. Así, se ha logrado BEC en el Helio líquido 4 y en nubes de átomos alcalinos (H, Li, Na, y Rb) cuyos isótopos pares aseguran que el átomo tenga espín entero y que por tanto se comporte como bosón. Confirmándose además que la BEC no ocurre en sistemas de dimensión  $d < 2$ , para relaciones energía-momento cuadráticas.

El modelo del gas ideal de bosones es estudiado en muchos libros de mecánica estadística. Por tratarse de un gas ideal de partículas no relativistas, la RD de los bosones corresponde a la de una partícula libre, esto es,

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

donde hemos usado la relación de de Broglie,  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ .

Sin duda el gas ideal de bosones puede, en ciertas circunstancias, resultar ilustrativo. Pero al igual que otros gases ideales, está fuera de toda realidad: la interacción entre bosones existe; y, por otra parte, si lo vemos desde un punto de vista más general, existen otras partículas que, siendo bosones, no tienen una RD cuadrática. (Si bien, podría ocurrir que siendo cuadrática no fuera la relación exacta del gas ideal, sino alguna otra función del cuadrado del vector de onda,  $k$ .) Por ejemplo, el caso más sencillo es el de los fotones que siendo bosones tienen una RD *lineal*, es decir,  $\varepsilon = \hbar ck$ , con  $c$  la constante de la velocidad de la luz. Pero éste no es el único caso de RD lineal. Existen “partículas”, conocidas como *magnones* antiferromagnéticos [15] y los llamados *fonones* acústicos de Debye en tres dimensiones [15] que tienen RD lineal. Incluso, los pares de Cooper (CP) de electrones moviéndose, no en el vacío, sino en el mar de Fermi satisfacen una RD *lineal* [20] para momentos del centro de masa MCM pequeños (por la presencia del mar de Fermi). De esta forma, los CP considerados como bosones pueden sufrir una BEC para toda  $d > 1$ . El hecho de que los CP tengan una BEC para toda  $d > 1$ , permite explicar los superconductores como materiales en dimensiones “fractales” (fraccionarias).

Existiendo RD lineales y cuadráticas, y conociendo que hay BEC para RD cuadráticas con  $d > 2$ , y BEC para RD lineales con  $d > 1$ , parecería inmediata la suposición de que existan RD de orden mayor para bosones en  $d$  dimensiones; lo que nos lleva a preguntarnos, ¿en que casos ocurre BEC para una RD de orden dado y  $d$  dada?. En lo que sigue, por sernos útiles en la discusión de los siguientes capítulos, resumiremos las propiedades de un gas de bosones en  $d$  dimensiones, con una RD generalizada a cualquier potencia  $s$  entre

el momento y la energía. Una exposición completa de estos resultados podrá encontrarse en las referencias [15] y [17].

## 2.1 Relación de dispersión generalizada

Vamos entonces, a considerar la existencia de bosones con RD proporcional a una potencia  $s$  del momento, o de la magnitud del vector de onda,  $k$ . Supondremos, además, que dichos bosones están restringidos a moverse en una “caja” de lado  $L$  y de dimensionalidad,  $d$ , arbitraria. Tenemos así un gas de  $N$  bosones, de masa  $m$ , atrapados en una caja en  $d$  dimensiones, con  $d > 0$  y con RD

$$\varepsilon_k = c_s k^s, \quad (2.1)$$

en el que el momento,  $\mathbf{p}$ , de los bosones y su vector de onda,  $\mathbf{k}$ , están relacionados por

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad (2.2)$$

con

$$|\mathbf{k}|^2 \equiv k^2 = \sum_{i=1}^d k_i^2. \quad (2.3)$$

Claramente, el volumen del sistema es  $L^d$  y  $c_s$  es una constante con dimensiones de energía por longitud a la potencia  $s$ .

En el caso de un sistema de partículas bosónicas, el número promedio de partículas en un nivel de energía definido por  $k$  está dado por

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}. \quad (2.4)$$

A la expresión anterior se le conoce como la *función de distribución de Bose-Einstein*;  $\mu$  es el potencial químico y  $\beta \equiv 1/k_B T$ , con  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura absoluta.

De acuerdo con lo anterior, el número total  $N$  de partículas en el sistema, está dado por la suma de las partículas en cada nivel de energía, esto es

$$N = \sum_{\mathbf{k}} n_k = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}. \quad (2.5)$$

El número total de partículas en el sistema puede también escribirse como la suma de las partículas en el estado base de energía,  $N_0$ , más las partículas en los estados excitados,  $N_e$ , es decir

$$N = N_0 + N_e, \quad (2.6)$$

donde

$$N_e = \sum_{|\mathbf{k}| > 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}. \quad (2.7)$$

Ahora bien, en el límite termodinámico, esto es, cuando el número de partículas en el sistema y el volumen del mismo tienden a infinito, pero su cociente,  $N/V$ , permanece constante, la separación entre los niveles de energía cuánticos tiende a cero y la suma en (2.7) sobre estados discretos se puede aproximar con integral de volumen sobre la variable continua  $k$ . Es decir,  $N_e$  se obtiene como el volumen de la hiper-esfera en el espacio  $k$   $d$ -dimensional, dividido entre el volumen de la celda mínima,  $\Omega$ , en el mismo espacio, esto es

$$N_e = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} n_k dk_1 dk_2 \dots dk_d \quad (2.8)$$

con  $\Omega = (2\pi/L)^d$ .

Efectuando un cambio de variable, de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas podemos escribir (2.8) (ver Apéndice A) como

$$N_e = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int_{0^+}^{\infty} n_k k^{d-1} dk, \quad (2.9)$$

lo que usando la relación de dispersión (2.1) puede escribirse como

$$N_e = \frac{L^d}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}} \frac{1}{s c_s^{d/s}} \int_{0^+}^{\infty} \frac{\varepsilon^{d/s-1}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} d\varepsilon. \quad (2.10)$$

Así, mediante el uso de (2.10) podemos conocer el número de partículas en los estados excitados.

Por otra parte, en general, la suma de las partículas sobre los estados definidos por  $k$  al cruzar el límite termodinámico puede también conocerse mediante una integral de la forma

$$N_e = \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) n_k(\varepsilon), \quad (2.11)$$

donde  $g(\varepsilon)$  es conocida como la *función densidad de estados*.

Usando la RD dada por (2.1), puede determinarse de inmediato la función  $g(\varepsilon)$ . De comparar la ecuación (2.10) con la ecuación (2.11), se obtiene que la densidad de estados  $g(\varepsilon)$  está dada por

$$g(\varepsilon) = \frac{L^d}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}} \frac{1}{s c_s^{d/s}} \varepsilon^{d/s-1}. \quad (2.12)$$

En particular, para el gas ideal tridimensional de bosones,  $d = 3$ ,  $s = 2$  y  $c_2 = \hbar^2/2m$ , por lo tanto

$$g(\varepsilon) = \frac{L^3}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}. \quad (2.13)$$

Efectuando el cambio de variable  $x = \beta\varepsilon$ , y definiendo  $z \equiv e^{\beta\mu}$ , cantidad conocida como *fugacidad*, la ecuación (2.10) puede escribirse en términos de la integral de Bose respectiva [ver Apéndice B] y expresarse mediante la siguiente ecuación

$$N_e = L^d \frac{\Gamma(d/s)}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}s} \left( \frac{k_B T}{c_s} \right)^{d/s} g_{d/s}(z). \quad (2.14)$$

## 2.2 Temperatura crítica

A medida que la temperatura del sistema disminuye, el potencial químico,  $\mu$ , tiende a cero, el estado base comienza a poblarse y las partículas en los estados excitados disminuyen su número, pero con  $N$  manteniéndose siempre constante. La temperatura a la que  $\mu = 0$ , se le llama *temperatura crítica*, y es justamente la temperatura a partir de la cual comienza a ocurrir la BEC, se le denota por  $T_c$ . Para  $T = T_c$ , se tiene entonces que  $N = N_e$  y  $\mu = 0$ . Obsérvese que  $\mu = 0$ , implica a su vez que  $z = 1$ . Así pues, para  $T = T_c$  la ecuación (2.14) se convierte en

$$N = L^d \frac{\Gamma(d/s)}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}s} \left( \frac{k_B T_c}{c_s} \right)^{d/s} g_{d/s}(1). \quad (2.15)$$

Despejando de la ecuación anterior,  $T_c$ , tenemos que

$$T_c = \frac{c_s}{k_B} \left[ \frac{\Gamma(d/2)s\pi^{d/2}2^{d-1}}{\Gamma(d/s)g_{d/s}(1)} \right]^{s/d} \left[ \frac{N}{L^d} \right]^{s/d}. \quad (2.16)$$

Observemos que a partir del resultado anterior podemos hacer una importantísima conclusión: puesto que  $g_{d/s}(1) \rightarrow \infty$  para  $d/s \leq 1$  entonces, en este caso, la temperatura crítica será siempre cero, en tanto que cuando  $d/s > 1$ ,  $g_{d/s}(1) \equiv \zeta(d/s)$  es finita [ $\zeta(d/s)$  es la función zeta de Riemann de argumento  $d/s$ , véase el Apéndice B] y por lo tanto existirá una BEC con una temperatura crítica finita y mayor que cero.

## 2.3 Fracción condensada

El número de partículas que se encuentra en el estado base de energía, respecto al total de partículas, es decir, la fracción de partículas condensada,  $N_0/N$ , se calcula dividiendo la ecuación (2.6) por  $N$ , esto es,

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_e}{N}, \quad (2.17)$$

donde  $N_e/N$  resulta de dividir la ecuación (2.14) entre (2.15), esto es

$$\frac{N_e}{N} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{d/s} \frac{g_{d/s}(z)}{g_{d/s}(1)}, \quad (2.18)$$

por lo tanto

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{d/s} \frac{g_{d/s}(z)}{g_{d/s}(1)}. \quad (2.19)$$

## 2.4 Potencial químico

El potencial químico,  $\mu$ , representa una medida del cambio de la energía interna del sistema cuando se le añade una partícula a volumen y entropía constantes; es una cantidad muy importante en la teoría de la BEC [21]. Cuando  $T \leq T_c$ ,  $\mu = 0$ , debido a que cuando se añaden partículas al sistema y  $T \leq T_c$ , éstas caen en el estado base de energía. Puede obtenerse una expresión implícita para el potencial químico  $\mu$ , para temperaturas  $T$  tales que  $T > T_c$ , dividiendo la ecuación (2.14) por la ecuación (2.15), y considerando que para  $T > T_c$ , ocurre que  $N_e = N$ , se obtiene

$$g_{d/s}(z) = g_{d/s}(1) \left(\frac{T}{T_c}\right)^{-d/s} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{d/s}}. \quad (2.20)$$

Para establecer la última igualdad hemos hecho uso de la ecuación (B.5) del Apéndice B. Si definimos  $y \equiv g_{d/s}(z) = g_{d/s}(1) [T/T_c]^{-d/s}$ , la ecuación anterior se escribe

$$y = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{d/s}} = z + \frac{z^2}{2^{d/s}} + \frac{z^3}{3^{d/s}} + \dots,$$

de modo que si invertimos la serie, tenemos que

$$z = y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + \dots,$$

con

$$a_2 = -2^{-d/s}; \quad a_3 = 2^{-2d/s+1} - 3^{-d/s}; \quad a_4 = 5 \cdot 6^{-d/s} - 4^{-d/s} - 5 \cdot 2^{-3d/s}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{k_B T} &= \ln \left[ g_{d/s}(1) \left(\frac{T}{T_c}\right)^{-d/s} \right] \\ &+ \ln \left[ 1 + a_2 g_{d/s}(1) \left(\frac{T}{T_c}\right)^{-d/s} + a_3 g_{d/s}^2(1) \left(\frac{T}{T_c}\right)^{-2d/s} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

A continuación se obtiene una expresión general para  $\mu$  en el límite clásico, esto es, cuando  $T \gg T_c$ . Para temperaturas muy grandes,  $T \gg T_c$ , el número promedio de partículas en cada estado de energía es muy pequeño, es decir,

$$n_k(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \ll 1,$$

de aquí que  $z \ll 1$  y que  $g_{d/s}(z) \approx z$  (ver Apéndice B), por lo que

$$z \approx g_{d/s}(z) = g_{d/s}(1) \left( \frac{T}{T_c} \right)^{-d/s},$$

así que en este caso podemos escribir

$$\frac{\mu}{k_B T} = \ln \left[ g_{d/s}(1) \left( \frac{T}{T_c} \right)^{-d/s} \right],$$

sustituyendo la  $T_c$  dada por (2.16) se tiene finalmente que

$$\mu = -k_B T \ln \left[ \frac{L^d}{N} \frac{\Gamma(d/s)}{\Gamma(d/2) s \pi^{d/2} 2^{d-1}} \left( \frac{k_B T}{c_s} \right)^{d/s} \right], \quad T \gg T_c. \quad (2.22)$$

## 2.5 Energía interna

La energía interna del sistema se calcula a partir de la expresión

$$U = \int_0^\infty d\varepsilon n_k(\varepsilon) g(\varepsilon) \varepsilon. \quad (2.23)$$

Sustituyendo en (2.23) las ecuaciones (2.4) y (2.12) correspondientes, se encuentra que

$$U = \frac{L^d}{\Gamma(d/2) \pi^{d/2} 2^{d-1}} \frac{1}{s c_s^{d/s}} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{d/s}}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon.$$

Haciendo el cambio de variable,  $x = \beta\varepsilon$ , tendremos

$$U = \frac{L^d}{\Gamma(d/2) \pi^{d/2} 2^{d-1}} \frac{1}{s c_s^{d/s}} \frac{1}{\beta^{(d/s)+1}} \int_0^\infty \frac{x^{d/s}}{z^{-1} e^x - 1} dx.$$

De la definición de  $g_{(d/s)+1}(z)$  (ver ecuación (B.5) del Apéndice B) y el uso de la ecuación (2.14) se llega a que

$$U = \frac{d}{s} N_e k_B T \frac{g_{(d/s)+1}(z)}{g_{d/s}(z)}, \quad (2.24)$$

o bien, con el uso de (2.15),

$$U = \frac{d}{s} N k_B T \frac{g_{(d/s)+1}(z)}{g_{d/s}(1)} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{d/s}. \quad (2.25)$$

Obsérvese que en el límite en que  $T \rightarrow \infty$ ,  $\{g_{(d/s)+1}(z)\} / \{g_{d/s}(z)\} \rightarrow 1$  y  $N_e \rightarrow N$ , por lo tanto la ecuación (2.24) se reduce a

$$U = \frac{d}{s} N k_B T \quad T \gg T_c. \quad (2.26)$$

Expresión que generaliza la ley de equipartición de la energía clásica.

## 2.6 Calor específico a volumen constante

El calor específico a volumen constante se calcula mediante la relación

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N}. \quad (2.27)$$

Introduciendo (2.25) en la ecuacion anterior,

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{d}{s} N k_B T \frac{g_{(d/s)+1}(z)}{g_{d/s}(1)} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{d/s} \right] \\ &= \frac{d}{s} \frac{N k_B}{g_{d/s}(1)} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{d/s} \left[ \left( \frac{d}{s} + 1 \right) g_{(d/s)+1}(z) + T g'_{(d/s)+1}(z) \frac{dz}{dT} \right], \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde la prima denota derivada respecto al argumento de la función. Ahora bien, de acuerdo con (2.18), para toda  $T$ , se cumple que

$$\frac{N_e}{N} = \left( \frac{T}{T_c} \right)^{d/s} \frac{g_{d/s}(z)}{g_{d/s}(1)},$$

de donde

$$g_{d/s}(1) T_c^{d/s} \frac{N_e}{N} = T^{d/s} g_{d/s}(z).$$

Al derivar ambos lados de la ecuación anterior respecto a  $T$ , se encuentra que

$$\frac{dz}{dT} = - \frac{d}{s} \frac{1}{T} \frac{g_{d/s}(z)}{g'_{d/s}(z)}. \quad (2.29)$$

Por lo tanto, (2.28) puede escribirse

$$\begin{aligned}
C_V &= \frac{d}{s} \frac{Nk_B}{g_{d/s}(1)} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{d/s} \\
&\quad \left[ \left( \frac{d}{s} + 1 \right) g_{(d/s)+1}(z) + T g'_{(d/s)+1}(z) \left( -\frac{d}{s} \frac{1}{T} \frac{g_{d/s}(z)}{g'_{d/s}(z)} \right) \right] \\
&= \frac{d}{s} \frac{Nk_B}{g_{d/s}(1)} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{d/s} \left[ \left( \frac{d}{s} + 1 \right) g_{(d/s)+1}(z) - \frac{d}{s} g_{d/s}(z) \frac{g'_{(d/s)+1}(z)}{g'_{d/s}(z)} \right]. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

A partir de este punto consideraremos dos diferentes casos para  $C_V$ : cuando  $T \leq T_c$  y cuando  $T > T_c$ .

### Caso 1

Cuando  $T \leq T_c$ ,  $z = 1$ , y puesto que la prima denota derivada respecto a  $z$ , y  $z$ , en este caso es uno, el segundo sumando en los corchetes en (2.30) se anula, con lo que

$$C_V = \frac{d}{s} \left( \frac{d}{s} + 1 \right) Nk_B \frac{g_{(d/s)+1}(1)}{g_{d/s}(1)} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{d/s}, \quad T \leq T_c. \quad (2.31)$$

### Caso 2

Para  $T > T_c$ ,  $N_e = N$ , así que (2.19) se reduce a

$$\left( \frac{T}{T_c} \right)^{d/s} = \frac{g_{d/s}(1)}{g_{d/s}(z)}. \quad (2.32)$$

Por lo que al usar (2.32) en (2.30), esta última toma la forma

$$C_V = \frac{d}{s} Nk_B \left[ \left( \frac{d}{s} + 1 \right) \frac{g_{(d/s)+1}(z)}{g_{d/s}(z)} - \frac{d}{s} \frac{g'_{(d/s)+1}(z)}{g'_{d/s}(z)} \right], \quad T > T_c. \quad (2.33)$$

Pero de acuerdo con (B.8)

$$\frac{\partial}{\partial z} g_\sigma(z) = \frac{g_{\sigma-1}(z)}{z}, \quad (2.34)$$

así que

$$C_V = \frac{d}{s} Nk_B \left[ \left( \frac{d}{s} + 1 \right) \frac{g_{(d/s)+1}(z)}{g_{d/s}(z)} - \frac{d}{s} \frac{g_{d/s}(z)}{g_{(d/s)-1}(z)} \right], \quad T > T_c. \quad (2.35)$$

## 2.7 Continuidad del $C_V$ en el punto crítico

La continuidad del calor específico a volumen constante, cuando  $T = T_c$  puede analizarse mediante la diferencia  $\Delta C_V(T_c)$ , entre las ecuaciones (2.31) y (2.33), cuando son evaluadas en  $T = T_c$ , es decir

$$\Delta C_V(T_c) = C_V(T^-) - C_V(T^+),$$

donde el superíndice + o -, denota evaluación de  $C_V$  acercándose a  $T = T_c$ , por la derecha o por la izquierda, respectivamente. Así pues, luego de efectuar la diferencia indicada, se encuentra que

$$\Delta C_V(T_c) = \left(\frac{d}{s}\right)^2 \frac{g_{d/s}(1)}{g_{(d/s)-1}(1)}. \quad (2.36)$$

Respecto a este último resultado podemos concluir que, puesto que cuando  $\sigma \leq 1$ ,  $g_\sigma(z)$  diverge conforme  $z \rightarrow 1$ , entonces cuando  $(d/s) - 1 \leq 1$ , el cociente en (2.36) se hace cero; mientras que cuando  $(d/s) - 1 > 1$ , el cociente resulta ser un número finito distinto de cero. Lo anterior significa que cuando  $d/s \leq 2$ ,  $\Delta C_V(T_c) = 0$ , de modo que  $C_V$  no tiene discontinuidad en  $T = T_c$ , en tanto que cuando  $d/s > 2$  existe un salto del  $C_V$ , dado por (2.36), en  $T = T_c$ . Dicho de otra forma, respecto a  $T$ , el calor específico a volumen constante es una función continua para toda  $T$  cuando  $d/s \leq 2$  y es discontinua en  $T = T_c$  cuando  $d/s > 2$ .

# Capítulo 3

## 3 Gas tridimensional de bosones con relación de dispersión lineal más cuadrática

Consideremos un gas libre de  $N$  bosones cada uno de masa  $m$ , contenidos en una caja cuadrada tridimensional con RD

$$\varepsilon_k = c_1 k + c_2 k^2, \quad (3.1)$$

donde

$$k \equiv |\mathbf{k}| = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}. \quad (3.2)$$

El vector de onda  $\mathbf{k}$  está relacionado con el momento  $\mathbf{p}$  de cada partícula a través de la relación

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}; \quad (3.3)$$

y, a su vez, estamos suponiendo que se cumplen condiciones periódicas a la frontera, es decir

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad (3.4)$$

con  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ,  $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $i = x, y, z$ ,  $L$  la longitud de uno de los lados de la caja,  $c_1$  una constante con dimensiones de energía por longitud y  $c_2$  otra constante con dimensiones de energía por longitud al cuadrado.

El número total de partículas en la caja puede escribirse como

$$N = N_0 + N_e, \quad (3.5)$$

donde  $N_0$  es el número de partículas en el estado base y  $N_e$  es el número de partículas en los estados excitados. Específicamente,

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \quad (3.6)$$

y

$$N_e = \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} n_k = \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}, \quad (3.7)$$

donde

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}, \quad (3.8)$$

es el número de partículas en el estado de energía  $\varepsilon_k$ , es decir, la *función de distribución de Bose-Einstein*.

En el límite termodinámico:  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ , con  $N/V = cte.$ . Podemos considerar el espectro de energía del sistema como un continuo, por lo que podemos escribir la ecuación (3.7) como una integral de volumen, esto es,

$$N_e = \frac{1}{\Omega} \int n_k(k) d\mathbf{k} = \frac{1}{\Omega} \int n_k(k) dk_x dk_y dk_z, \quad (3.9)$$

donde  $\Omega$  es el volumen mínimo en el espacio de las  $k$ 's, es decir

$$\Omega = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3. \quad (3.10)$$

Dado que,  $n_k = n_k(k)$ , usaremos coordenadas esféricas para realizar la integración, obteniéndose (ver Apéndice A)

$$N_e = \frac{L^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2}{e^{\beta[\varepsilon(k) - \mu]} - 1} dk. \quad (3.11)$$

Por otra parte, sabemos que, en general

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon n_k(\varepsilon) g(\varepsilon), \quad (3.12)$$

donde  $n_k(\varepsilon)$  es la *función de distribución de Bose-Einstein* como función de la energía y  $g(\varepsilon)$  es conocida como la *función densidad de estados*. Al comparar las ecuaciones (3.11) y (3.12), podemos ver que

$$g(\varepsilon) = \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 \frac{dk}{d\varepsilon}. \quad (3.13)$$

Para establecer correcta y completamente la función  $g(\varepsilon)$  en términos de la variable  $\varepsilon$ , usaremos la RD dada en la ecuación (3.1). Una vez que se han completado cuadrados en la ecuación (3.1), podemos despejar  $k$  en términos de  $\varepsilon$ , quedándonos

$$k = \frac{1}{c_2^{1/2}} \left[ \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{1/2} - \frac{c_1}{2c_2^{1/2}} \right], \quad (3.14)$$

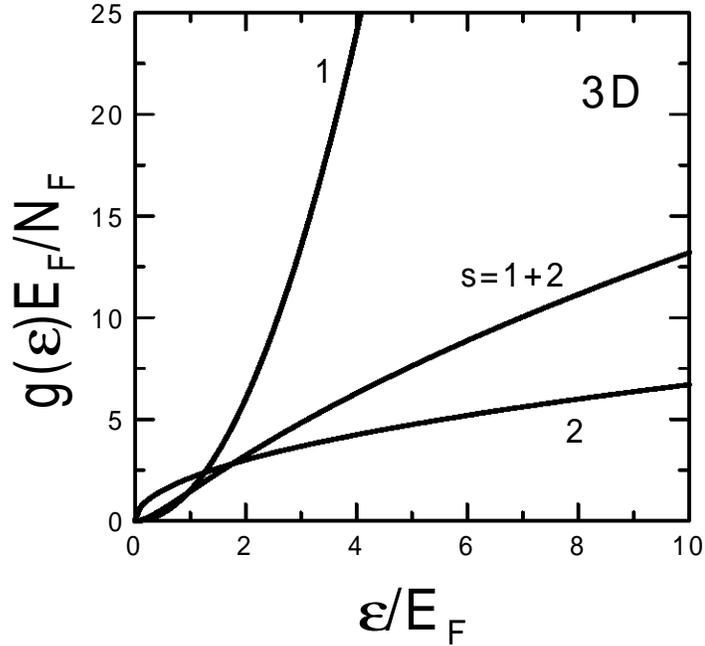
de donde

$$dk = \frac{1}{2c_2^{1/2}} \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{-1/2} d\varepsilon. \quad (3.15)$$

Sustituyendo las expresiones para  $k$  y  $dk$  de (3.14) y (3.15) en la ecuación (3.13), tenemos que la función densidad de estados tridimensional para una RD lineal más cuadrática, está dada por

$$g(\varepsilon) = \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} \left[ \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{1/2} - \frac{c_1}{c_2^{1/2}} + \frac{c_1^2}{4c_2} \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{-1/2} \right]. \quad (3.16)$$

A manera de comparación, en la figura 3.1, se muestra la densidad de estados en tres dimensiones para una RD lineal, cuadrática y la combinación de ambas. Se ha adimensionalizado respecto a la energía de Fermi de un gas de  $N_F$  partículas en tres dimensiones, la que se introduce hasta el siguiente capítulo, en la ecuación (4.16).



**Figura 3.1** Densidades de estados tridimensionales adimensionalizadas en función de la energía por partícula en unidades de la energía de Fermi. El caso lineal se denota con 1, el cuadrático con 2 y el lineal más cuadrático con 1+2.

En términos de la densidad de estados anterior, la ecuación (3.12) toma la forma

$$\begin{aligned} N_e &= \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon + c_1^2/4c_2)^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon \\ &\quad - \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} \frac{c_1}{c_2^{1/2}} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon \\ &\quad + \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} \frac{c_1^2}{4c_2} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon + c_1^2/4c_2)^{-1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sea ahora  $y = (4c_2/c_1^2)(\varepsilon + c_1^2/4c_2)$ , entonces  $\varepsilon = (c_1^2/4c_2)(y - 1)$  y  $dy = (4c_2/c_1^2)d\varepsilon$ , con lo que (3.17) se puede escribir como

$$N_e = \frac{L^3}{4\pi^2} \left( \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{3/2} \left[ \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{z^{-1}e^{\beta b(y-1)} - 1} dy \right], \quad (3.18)$$

con  $z \equiv e^{\beta\mu}$ , la *fugacidad*;  $\beta = 1/k_B T$ ;  $k_B$ , la constante de Boltzmann y  $b = c_1^2/4c_2$ , una constante con dimensiones de energía.

A continuación reformularemos la ecuación (3.18) de forma ligeramente distinta, lo que eventualmente nos permitirá un mejor manejo de la misma. Para ello, consideremos un gas *ideal* de bosones en una caja cuadrada tridimensional de lado  $L$ , y RD

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \equiv c_{20} k^2,$$

para el que la temperatura crítica, que aquí denotaremos por  $T_{c0}$ , está dada por [véase ecuación (2.16)]

$$T_{c0} = \frac{4\pi c_{20}}{k_B} \frac{1}{[\zeta(3/2)]^{2/3}} \left( \frac{N}{L^3} \right)^{2/3}. \quad (3.19)$$

De acuerdo con lo anterior podemos definir

$$\beta_{c0} \equiv \frac{1}{k_B T_{c0}} = \frac{[\zeta(3/2)]^{2/3}}{4\pi c_{20}} \left( \frac{L^3}{N} \right)^{2/3}, \quad (3.20)$$

y, a partir de esta definición hacer dos más,

$$\tilde{b} \equiv b\beta_{c0} = \frac{c_1^2}{4c_2 k_B T_{c0}}, \quad (3.21)$$

y

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\beta}{\beta_{c0}} = \frac{k_B T_{c0}}{k_B T} = \frac{T_{c0}}{T} = \frac{1}{T/T_{c0}}, \quad (3.22)$$

o bien, si

$$\tilde{T} \equiv \frac{T}{T_{c0}}, \quad (3.23)$$

podemos hacer

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{\tilde{T}}. \quad (3.24)$$

Por lo tanto,

$$\beta = \tilde{\beta}\beta_{c0} = \frac{\beta_{c0}}{\tilde{T}}, \quad (3.25)$$

y

$$b = \frac{\tilde{b}}{\beta_{c0}}, \quad (3.26)$$

con  $\beta$  y  $b$  las cantidades que aparecen en (3.18).

Con el uso de (3.25) y (3.26) podemos escribir (3.18) como

$$N_e = \frac{L^3}{4\pi^2} \left( \frac{1}{c_2\beta_{c0}} \right)^{3/2} \tilde{b}^{3/2} \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{z^{-1}e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} - 1} dy, \quad (3.27)$$

o si usamos (3.20),

$$\frac{N_e}{N} = \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \left( \frac{c_{20}}{c_2} \right)^{3/2} \tilde{b}^{3/2} \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{z^{-1}e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} - 1} dy. \quad (3.28)$$

### 3.1 Temperatura crítica

A medida que la temperatura del sistema disminuye,  $\mu \rightarrow 0$ , el estado base comienza a poblarse y las partículas en los estados excitados disminuyen su número pero con  $N$  manteniéndose siempre constante. La temperatura a la que  $\mu = 0$  se le llama *temperatura crítica*,  $T_c$ . Así, para  $T = T_c$  se tiene que  $N_e = N$  y  $\mu = 0$ . Observemos que el que  $\mu = 0$ , implica a su vez que  $z = 1$ . De esta forma, para  $T = T_c$  la ecuación (3.28) se convierte en

$$1 = \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \left( \frac{c_{20}}{c_2} \right)^{3/2} \tilde{b}^{3/2} \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} - 1} dy, \quad (3.29)$$

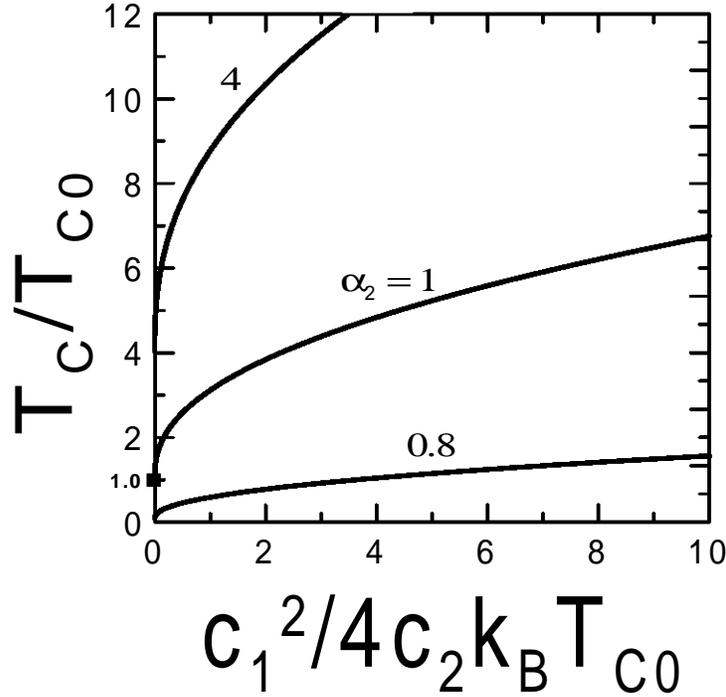
donde hemos hecho  $\tilde{T}_c = T_c/T_{c0}$ , con  $T_c$  la temperatura crítica de nuestro gas de bosones con RD lineal más cuadrática y  $T_{c0}$  la temperatura crítica del gas ideal de bosones, dada por (3.19).

Consideremos ahora el caso particular en el que  $c_2 = \alpha_2 c_{20}$ , es decir, el caso en que la parte cuadrática de nuestra RD es  $\alpha_2$  veces la relación de dispersión del gas ideal de bosones, con  $\alpha_2$  una constante adimensional. Básicamente la razón por la que consideramos que la parte cuadrática de la RD toma esta forma particular se debe a que ha podido mostrarse [16] que la RD a segundo orden del par de Cooper en 2 y 3 dimensiones tiene este coeficiente en el término de segundo grado, así que podremos emplear los resultados aquí obtenidos para estudiar ese caso. De la ecuación (3.29) tenemos entonces que

$$1 = \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \left( \frac{c_{20}}{\alpha_2 c_{20}} \right)^{3/2} \tilde{b}^{3/2} \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} - 1} dy,$$

o bien,

$$\alpha_2^{3/2} \zeta(3/2) \frac{4\pi^2}{(4\pi)^{3/2}} = \tilde{b}^{3/2} \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{e^{\tilde{b}/\tilde{T}_c(y-1)} - 1} dy. \quad (3.30)$$



**Figura 3.2** Temperatura crítica como función de  $\tilde{b}$  y  $\alpha_2$ .

De resolver numéricamente la ecuación (3.30) para diferentes valores de  $\alpha_2$ , se obtiene la figura 3.2, donde hemos graficado  $T_c/T_{c0}$  contra  $c_1^2/4c_2k_B T_{c0}$ .

En la figura 3.2 señalamos con un cuadrito negro el caso cuando  $\alpha_2 = 1$  y  $\tilde{b} = 0$ , es decir, cuando  $c_1 = 0$ , y nuestra RD se reduce a la RD del gas ideal de bosones que es el límite cuadrático para el cual  $T_c/T_{c0} = 1$ . La misma figura, nos permite concluir que el solo hecho de que exista una contribución de la parte lineal, por mínima que sea, hace que la temperatura crítica correspondiente aumente respecto a la del gas ideal de bosones en 3D. Dicho de otra forma, en el caso  $\alpha_2 = 1$ , a medida que  $\tilde{b}$  crece, a partir de cero, el valor de  $T_c/T_{c0}$  crece, a partir de uno.

Obsérvese que para cada una de las curvas la parte cuadrática de  $\tilde{b}$  está fija, por lo que cuando  $\tilde{b}$  crece, en realidad, esto se debe exclusivamente a que el coeficiente  $c_1$  está creciendo, de modo que cuando  $\tilde{b} \rightarrow \infty$ , en realidad,  $c_1 \rightarrow \infty$ , lo que significaría que  $c_1$  dominaría por completo sobre el coeficiente  $c_2$ , esto es, la parte lineal dominaría sobre la parte cuadrática. Pero al mismo tiempo la temperatura crítica que es proporcional a  $c_1$ , crecería indefinidamente.

### 3.2 Temperatura crítica en los límites lineal y cuadrático

Como ya hemos dicho, lo que hasta ahora hemos hecho, es fijar el valor de  $c_2$  y variar  $\tilde{b}$ , lo que se traduce en variar  $c_1$ . Pero está claro que con este procedimiento, dado que  $c_2$  está

fijo, podremos recuperar la temperatura crítica en el límite cuadrático de nuestra RD, pero nunca, el límite lineal. El no poder recuperar los límites ya conocidos, o incluso sólo uno de ellos, como en este caso, podría cuestionar seriamente nuestro trabajo. Una forma en la que podemos abordar, y resolver el problema de los límites ya conocidos, consiste en dar valores concretos tanto para  $c_1$ , como para  $c_2$ ; específicamente proponemos que

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_{10} [1 + \sin \theta] \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \frac{k_B T_{c0}}{\pi^{1/2}} \left(\frac{L^3}{N}\right)^{1/3} \\ &= \alpha_{10} [1 + \sin \theta] \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) c_{10}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde  $c_{10} \equiv (k_B T_{c0}/\pi^{1/2})(L^3/N)^{1/3}$ , y además

$$\begin{aligned} c_2 &= \alpha_{20} [1 + \sin \theta] \left(\frac{\theta}{\pi}\right) [\zeta(3/2)]^{2/3} \frac{k_B T_{c0}}{4\pi} \left(\frac{L^3}{N}\right)^{2/3} \\ &= \alpha_{20} [1 + \sin \theta] \left(\frac{\theta}{\pi}\right) \frac{\hbar^2}{2m} \\ &= \alpha_{20} [1 + \sin \theta] \left(\frac{\theta}{\pi}\right) c_{20}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde  $c_{20} \equiv \hbar^2/2m = [\zeta(3/2)]^{2/3} (k_B T_{c0}/4\pi)(L^3/N)^{2/3}$ .

Lo más natural, después de ver los coeficientes anteriores, sería preguntarse porqué se han propuesto de esta forma, la respuesta es la siguiente: El tomar  $\hbar^2/2m$  en el coeficiente cuadrático resulta de tomar como punto de referencia la RD del gas ideal de bosones. El añadir  $\alpha_{20}$  al coeficiente cuadrático permite que la contribución cuadrática pueda correr, en principio, desde cero (cuando  $\alpha_{20} = 0$ ) y, hasta infinito (cuando  $\alpha_{20} \rightarrow \infty$ ). La elección de la forma de  $c_{10}$  es consecuencia directa de la elección de  $c_{20}$ , y es que una vez elegido  $c_{20}$ , la única forma de  $c_{10}$  que permite la adimensionalización más limpia y sencilla de nuestras expresiones, es justamente ésta. Al igual que antes  $\alpha_{10}$  permite que  $c_1$ , en principio, tome cualquier valor, desde cero y hasta tender a infinito.

Las funciones

$$f(\theta) = [1 + \sin \theta] \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right), \quad (3.33)$$

y

$$g(\theta) = [1 + \sin \theta] \left(\frac{\theta}{\pi}\right), \quad (3.34)$$

se han escogido así debido a que permiten recuperar con facilidad, a partir de la RD lineal más cuadrática, la RD lineal o la RD cuadrática, independientemente, a conveniencia, mediante la variación del parámetro  $\theta$ . Obsérvese que cuando  $\theta = 0$ ,  $f(\theta) = 1$  y  $g(\theta) = 0$ , y con ello la RD lineal más cuadrática se reduce a la RD lineal; por su parte cuando

$\theta = \pi$ ,  $f(\theta) = 0$  y  $g(\theta) = 1$ , lo que nos permite recuperar la RD cuadrática. Pero eso no es todo, hay algo más que hace a estas funciones tan útiles para nosotros, cuando  $\theta = \pi/2$ ,  $f(\theta) = 1$  y  $g(\theta) = 1$ , lo que lleva nuestra RD a la forma

$$\varepsilon = \alpha_{10} c_{10} k + \alpha_{20} c_{20} k^2, \quad (3.35)$$

que es justamente la relación con la que hemos venido trabajando. En resumen, partiendo de nuestra RD lineal más cuadrática y adoptando  $c_1$  y  $c_2$  dados por (3.31) y (3.32), cuando  $\theta = 0$  recuperamos la RD lineal, cuando  $\theta = \pi$  recuperamos la RD cuadrática y cuando  $\theta = \pi/2$  tenemos contribución tanto lineal como cuadrática a la RD (ver Fig. 3.3).

Veamos ahora, cuales son las consecuencias de la elección anterior de los coeficientes; al sustituir (3.31) y (3.32) en la ecuación (3.28), ésta se transforma en

$$\frac{N_e}{N} = \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{[\zeta(3/2)]^2} \left( \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \right)^3 \frac{(1 - \theta/\pi)^3}{(\theta/\pi)^3} \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{z^{-1} e^{\tilde{b}/\tilde{T}(y-1)} - 1} dy, \quad (3.36)$$

con  $\tilde{b}$  ahora dada por

$$\tilde{b} = \frac{\alpha_{10}^2 [1 + \sin \theta] (1 - \theta/\pi)^2}{\alpha_{20} [\zeta(3/2)]^{2/3} (\theta/\pi)}. \quad (3.37)$$

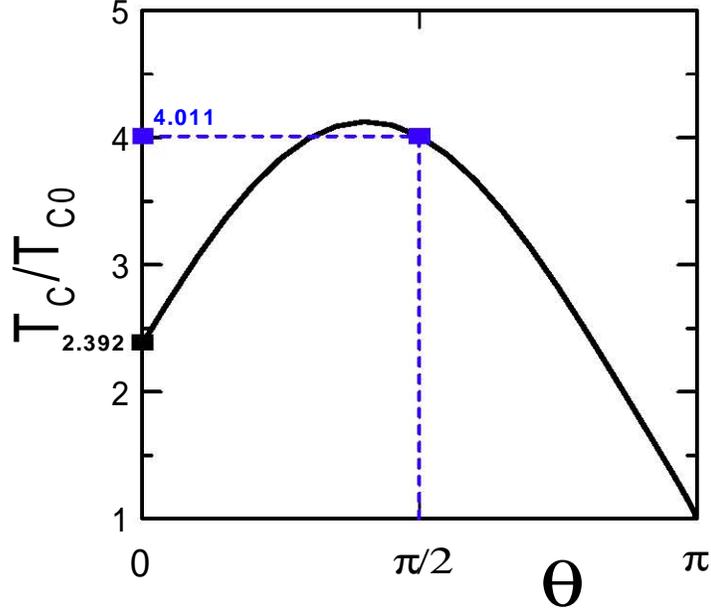
Como antes, cuando  $T = T_c$ ,  $N_e = N$  y  $\mu = 0$ , por lo que la ecuación anterior se convierte, en este caso, en

$$\frac{4\pi^2}{(4\pi)^{3/2}} [\zeta(3/2)]^2 \left( \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \right)^3 \left( \frac{(\theta/\pi)}{(1 - \theta/\pi)} \right)^3 = \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{e^{\tilde{b}/\tilde{T}_c(y-1)} - 1} dy. \quad (3.38)$$

### 3.3 Gas tridimensional de pares de Cooper

Hemos discutido en la introducción a este trabajo, que un gas de fermiones puede aparearse dos a dos a través de un potencial de interacción, hemos dicho, además, que ésta es la idea detrás de la explicación del fenómeno superconductor, es decir, detrás del concepto de los pares de Cooper. La forma de la RD de un par de Cooper (CP) depende entre otras cosas del potencial atractivo entre los electrones que constituyen el par, dicho en otros términos, la RD depende de la energía de amarre del par. La RD exacta del par puede escribirse como un desarrollo en potencias del momento del centro de masa (MCM) del par, en donde para momentos pequeños predomina la parte lineal y que, para momentos mayores en el límite de amarre fuerte, se recupera el comportamiento cuadrático de un gas ideal de pares de Cooper. Esta serie, en 3 dimensiones, hasta segundo orden, de acuerdo con [16], tiene la forma

$$\varepsilon_K = \frac{\hbar v_F}{2} K + \frac{\hbar^2}{2m} K^2, \quad (3.39)$$



**Figura 3.3** Temperatura crítica para un gas de bosones con RD  $\varepsilon = c_1 k + c_2 k^2$ , con  $c_1$  y  $c_2$  funciones de  $\theta$ , tal como lo indican las ecuaciones (3.31) y (3.32), respectivamente.

donde  $K$  es la magnitud del vector de onda asociado al MCM del par,  $v_F$  es conocida como la *velocidad de Fermi* del gas de  $2N$  electrones de masa  $m/2$  y  $m$  la masa del par.

Consideremos la descripción de la sección anterior en la que establecemos  $c_1$  y  $c_2$  dadas por

$$c_1 = \alpha_{10} c_{10} = \alpha_{10} \frac{k_B T_{c0}}{\pi^{1/2}} n^{-1/3}, \quad (3.40)$$

y

$$c_2 = \alpha_{20} c_{20} = \alpha_{20} \frac{\hbar^2}{2m} = \alpha_{20} [\zeta(3/2)]^{2/3} \frac{k_B T_{c0}}{4\pi} n^{2/3}, \quad (3.41)$$

con  $n \equiv N/L^3$ . La introducción de los coeficientes  $\alpha_{10}$  y  $\alpha_{20}$  nos permitirá establecer la conexión entre estos coeficientes y los coeficientes de la RD en (3.39).

Para un gas tridimensional de  $N_F$  ( $N_F = 2N$ ) fermiones apareados ( $N$  bosones) con RD  $\varepsilon = c_1 K = (\hbar v_F/2)K$ , donde  $v_F$  es la velocidad de Fermi asociada al sistema de  $2N$  fermiones, la temperatura crítica de los pares de fermiones, que denotaremos con  $T_{c1}$ , es [véase ecuación (2.16)]

$$T_{c1} = \frac{\hbar v_F}{2k_B} \left( \frac{\pi^2}{\zeta(3)} \right)^{1/3} n_F^{1/3} = 2\pi^{1/2} \frac{\hbar^2}{2m_F k_B} \left( \frac{3\Gamma(3/2)}{4} \right) \left( \frac{\pi^2}{\zeta(3)} \right)^{1/3} n_F^{2/3}, \quad (3.42)$$

donde  $n_F \equiv N_F/L^3$ . Así que

$$n_F^{-1/3} = \frac{\hbar v_F}{2k_B} \left( \frac{\pi^2}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \frac{1}{T_{c1}}.$$

Por otra parte, de (3.40), tenemos que

$$n^{-1/3} = \frac{c_1}{\alpha_{10}} \frac{\pi^{1/2}}{k_B T_{c0}} = \frac{\hbar v_F}{2} \frac{1}{\alpha_{10}} \frac{\pi^{1/2}}{k_B T_{c0}}.$$

Por lo tanto, de igualar las dos ecuaciones anteriores, sabiendo que  $n_F = 2n$ , tenemos que

$$\alpha_{10} = \left( \frac{\zeta(3)}{2\pi^{1/2}} \right)^{1/3} \frac{T_{c1}}{T_{c0}}.$$

Por lo que si hacemos

$$\alpha_{10} = \left( \frac{\zeta(3)}{2\pi^{1/2}} \right)^{1/3} \frac{T_{c1}}{T_{c0}}, \quad (3.43)$$

en (3.40) tendremos entonces que

$$c_1 = \alpha_{10} c_{10} = \frac{\hbar v_F}{2}.$$

De esta forma, hemos encontrado el vínculo entre el coeficiente  $c_{10}$  y el coeficiente  $\hbar v_F/2$ , que está justamente dado por (3.43). Sin embargo, aún tenemos pendiente la determinación del cociente  $T_{c1}/T_{c0}$ , para la completa identificación de  $\alpha_{10}$ . De la ecuación (3.42) y de la ecuación (3.19), resulta que

$$\frac{T_{c1}}{T_{c0}} = \frac{\hbar v_F/2k_B}{2\hbar^2/mk_B} \frac{[\pi^2 n/\zeta(3)]^{1/3}}{\pi n^{2/3}/[\zeta(3/2)]^{2/3}},$$

por tanto,

$$\alpha_{10} = \left( \frac{3\Gamma(3/2)[\zeta(3/2)]^2}{2} \right)^{1/3} \simeq 2.086. \quad (3.44)$$

En cuanto al coeficiente  $\alpha_{20}$ , claramente, debe ser igual a 1. Y entonces, de acuerdo con (3.37)

$$\tilde{b} = \left( \frac{3\Gamma(3/2)\zeta(3/2)}{2} \right)^{2/3} \simeq 2.293. \quad (3.45)$$

De resolver numéricamente la ecuación (3.38) para los valores de  $\alpha_{10}$  dado por (3.44),  $\alpha_{20} = 1$ , y (3.45), se obtiene la figura 3.3. En las gráficas de las propiedades termodinámicas que siguen, se muestra explícitamente la curva correspondiente al caso  $\tilde{b} = 2.293$ . Por último, antes de iniciar la siguiente sección, obsérvese que una de las densidades de estado en la figura 3.1 corresponde justamente al gas tridimensional de pares de Cooper.

### 3.4 Potencial químico

Como ya hemos dicho, el valor del potencial químico,  $\mu$ , es cero para  $T \leq T_c$ , pero hasta el momento no sabemos nada acerca de cómo se comporta el potencial químico para temperaturas por arriba de la temperatura crítica, y aún más, no sabemos cómo se comporta el potencial químico respecto a nuestro parámetro  $\tilde{b}$ .

Recordemos que para  $T > T_c$ , todas las partículas del sistema se encuentran en los estados excitados, es decir, para  $T > T_c$  se cumple siempre que  $N_e = N$ , por lo que (3.28) se convierte en

$$\frac{4\pi^2}{(4\pi)^{3/2}} \zeta(3/2) \left( \frac{c_2}{c_{20}} \right)^{3/2} = \tilde{b}^{3/2} \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{z^{-1} e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} - 1} dy. \quad (3.46)$$

Obsérvese que, en principio, (3.46) representa una expresión implícita para el potencial químico.

Usando (3.25), y haciendo una nueva definición

$$\tilde{\mu} \equiv \mu \beta_{c0}, \quad (3.47)$$

de donde

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\beta_{c0}} = \tilde{\mu} k_B T_{c0}, \quad (3.48)$$

podemos llevar (3.46) a la forma

$$\frac{4\pi^2}{(4\pi)^{3/2}} \zeta(3/2) \left( \frac{c_2}{c_{20}} \right)^{3/2} = \tilde{b}^{3/2} \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})} - 1} dy. \quad (3.49)$$

Finalmente, si suponemos que  $c_2 = \alpha_2 c_{20}$ , con  $\alpha_2$  una constante adimensional, entonces la ecuación (3.49) se convierte en

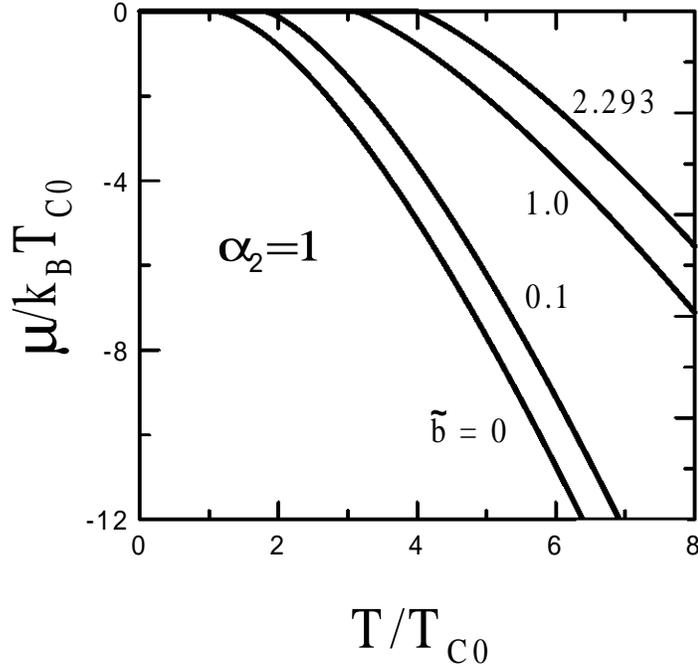
$$\alpha_2^{3/2} \frac{4\pi^2}{(4\pi)^{3/2}} \zeta(3/2) = \tilde{b}^{3/2} \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})} - 1} dy. \quad (3.50)$$

De resolver numéricamente la ecuación (3.50), se obtienen las gráficas de  $\mu/k_B T_{c0}$  contra  $T/T_{c0}$ , que aparecen en la figura 3.4. Recordemos que  $\tilde{b} = 0$  corresponde al caso del gas ideal de bosones. El caso  $\tilde{b} = 2.293$  se refiere al valor de  $\tilde{b}$  para el gas tridimensional de pares de Cooper.

### 3.5 Energía interna

La energía interna  $U(V, T)$  del gas de bosones se calcula mediante la expresión

$$U(V, T) = \sum_k \varepsilon_k n_k = \sum_k \frac{\varepsilon_k}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}, \quad (3.51)$$



**Figura 3.4** Potencial químico contra temperatura.

donde  $\varepsilon_k$  es la energía del estado excitado definido por  $k$ . En el límite termodinámico la sumatoria anterior se puede reemplazar por una integral, esto es,

$$U(V, T) = \int_0^\infty \varepsilon \, d\varepsilon \, g(\varepsilon) \, n_k(\varepsilon), \quad (3.52)$$

con  $n_k(\varepsilon)$  la *función de distribución de Bose-Einstein* y  $g(\varepsilon)$  la *función densidad de estados*.

Usando la función densidad de estados dada por (3.16) tenemos que, en el caso que nos ocupa,

$$\begin{aligned} U(V, T) &= \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\varepsilon(\varepsilon + b)^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} d\varepsilon \\ &\quad - \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} 2b^{1/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} d\varepsilon \\ &\quad + \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} b \int_0^\infty \frac{\varepsilon(\varepsilon + b)^{-1/2}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Realizando el cambio de variable  $\varepsilon = b(y - 1)$ , la ecuación (3.53) nos queda

$$U(V, T, b) = \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{b^{5/2}}{c_2^{3/2}} \left[ \int_1^\infty \frac{(y^{1/2} - 2 + y^{-1/2})(y - 1)}{z^{-1} e^{\beta b(y-1)} - 1} dy \right]. \quad (3.54)$$

Ahora bien, si como antes, usamos (3.25), (3.26), (3.48) y (3.20), podemos escribir la ecuación (3.54), como

$$U = \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \left(\frac{c_{20}}{c_2}\right)^{3/2} \tilde{b}^{5/2} Nk_B T_{c0} \left[ \int_1^\infty \frac{(y^{1/2} - 2 + y^{-1/2})(y-1)}{e^{\tilde{\mu}/\tilde{T}} e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} - 1} dy \right], \quad (3.55)$$

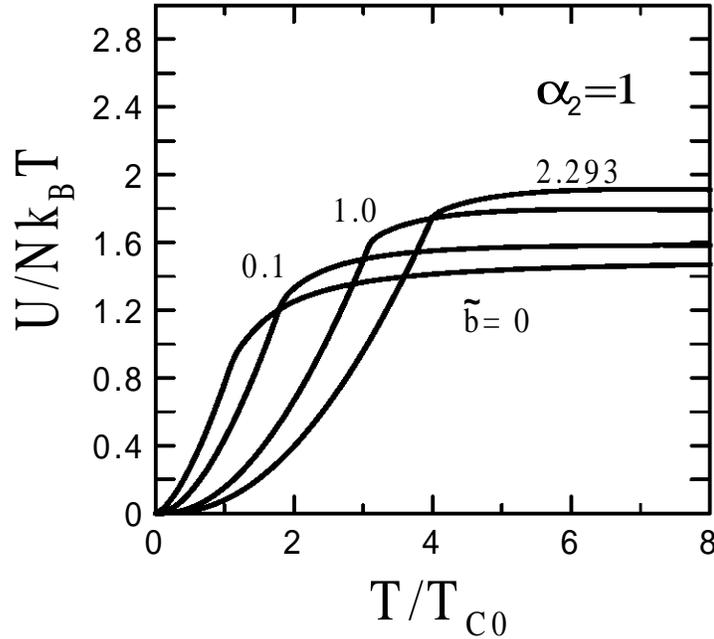
o bien, si dividimos a ambos lados entre  $Nk_B T$ , obtenemos

$$\frac{U}{Nk_B T} = \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \left(\frac{c_{20}}{c_2}\right)^{3/2} \tilde{b}^{5/2} \frac{1}{\tilde{T}} \left[ \int_1^\infty \frac{(y^{1/2} - 2 + y^{-1/2})(y-1)}{e^{\tilde{\mu}/\tilde{T}} e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} - 1} dy \right]. \quad (3.56)$$

Si en la ecuación (3.56) hacemos  $c_2 = \alpha_2 c_{20}$ , entonces la energía interna, para este caso en particular, estará dada por

$$\frac{U}{Nk_B T} = \frac{1}{\alpha_2^{3/2}} \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \tilde{b}^{5/2} \frac{1}{\tilde{T}} \left[ \int_1^\infty \frac{(y^{1/2} - 2 + y^{-1/2})(y-1)}{e^{\tilde{\mu}/\tilde{T}} e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} - 1} dy \right]. \quad (3.57)$$

De resolver numéricamente la ecuación anterior, para  $\alpha_2 = 1$ , se obtienen las gráficas de  $U/Nk_B T$  contra  $T/T_{c0}$  para  $\tilde{b} = 0, 0.1, 1$  y  $2.293$ , en la figura 3.5.



**Figura 3.5** Energía interna por partícula entre la temperatura como función de la temperatura en unidades de  $T_{c0}$ .

### 3.6 Calor específico

Para calcular el calor específico de nuestro gas de bosones recurriremos a la expresión

$$C_V \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V}. \quad (3.58)$$

Así, para calcular el calor específico lo que tenemos que hacer es derivar parcialmente, respecto a  $T$ , la ecuación (3.53). Sin embargo, habrá que ser muy cuidadosos al efectuar dicha derivación pues (3.53) es función de  $\mu$ , el potencial químico, y éste a su vez lo es de  $T$ . Aunque esta consideración parecería resolver todos nuestros problemas, esto no ocurre así, pues no disponemos explícitamente de una expresión para  $\mu(T)$  (todos nuestros cálculos para esta cantidad han sido numéricos), y por tanto no disponemos tampoco de una expresión explícita para la derivada del potencial químico.

#### Calor específico para $\tilde{T} < \tilde{T}_c$

En una primera instancia, evitaremos la dificultad que implica conocer explícitamente  $\mu(T)$  recordando que para  $\tilde{T} < \tilde{T}_c$ , el potencial químico es idénticamente cero. Así pues, estrictamente en este caso, de acuerdo con (3.58) y usando (3.53) para  $U$

$$C_V = \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \int_0^\infty \frac{\varepsilon(\varepsilon + b)^{1/2} - 2b^{1/2}\varepsilon + b\varepsilon(\varepsilon + b)^{-1/2}}{e^{(\varepsilon/k_B T)} - 1} d\varepsilon \right) \right], \quad (3.59)$$

o bien, explícitamente

$$C_V = \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} \frac{1}{k_B T^2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2(\varepsilon + b)^{1/2} - 2b^{1/2}\varepsilon^2 + b\varepsilon^2(\varepsilon + b)^{-1/2}}{e^{(\varepsilon/k_B T)} + e^{-(\varepsilon/k_B T)} - 2} d\varepsilon. \quad (3.60)$$

Si, como antes, hacemos el cambio de variable  $\varepsilon = b(y - 1)$ , entonces (3.60) queda

$$C_V = \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} \frac{b^{7/2}}{k_B^2 T^2} k_B \int_1^\infty \frac{y^{5/2} - 2y^2 - y^{3/2} + 4y - y^{1/2} + y^{-1/2} - 2}{e^{\beta b(y-1)} + e^{-\beta b(y-1)} - 2} dy, \quad (3.61)$$

lo que usando (3.25), (3.26), (3.48) y (3.20), podemos escribir nuevamente como

$$C_V = \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \left( \frac{c_{20}}{c_2} \right)^{3/2} \frac{1}{\tilde{T}^2} \tilde{b}^{7/2} N k_B \times \int_1^\infty \frac{y^{5/2} - 2y^2 - y^{3/2} + 4y - y^{1/2} + y^{-1/2} - 2}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} - 2} dy. \quad (3.62)$$

Ahora bien, en el caso en que la parte cuadrática de nuestra RD sea proporcional a la del gas ideal de bosones, con  $\alpha_2$  la constante de proporcionalidad, (3.62) se convierte en

$$\frac{C_V}{N k_B} = \frac{1}{\alpha_2^{3/2}} \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \frac{1}{\tilde{T}^2} \tilde{b}^{7/2} \times \int_1^\infty \frac{y^{5/2} - 2y^2 - y^{3/2} + 4y - y^{1/2} + y^{-1/2} - 2}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} - 2} dy. \quad (3.63)$$

De esta forma, con el uso de (3.63) podríamos obtener, para cualquier valor de  $\tilde{b}$ , la gráfica del calor específico respecto a  $\tilde{T}$  *únicamente* para  $\tilde{T}$  tal que  $\tilde{T} < \tilde{T}_c(\tilde{b})$ , donde  $\tilde{T}_c(\tilde{b})$  denota la correspondiente temperatura crítica adimensionalizada para la  $\tilde{b}$  seleccionada.

### Calor específico para toda $\tilde{T}$

Lo ideal, sin embargo, sería obtener una expresión general para  $C_V$ , esto es, una expresión válida para cualquier valor de la temperatura  $\tilde{T}$ . Intentaremos ahora obtener dicha expresión, toda vez que ya disponemos de una expresión parcial para el calor específico. De aplicar (3.58) a (3.53), tenemos que, en *general*

$$C_V = \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{1}{c_2^{3/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \int_0^\infty \frac{\varepsilon(\varepsilon + b)^{1/2} - 2b^{1/2}\varepsilon + b\varepsilon(\varepsilon + b)^{-1/2}}{e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T} - 1} d\varepsilon \right) \right], \quad (3.64)$$

o bien,

$$C_V = \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{k_B}{c_2^{3/2}} \left[ \int_0^\infty \frac{\varepsilon(\varepsilon + b)^{1/2} - 2b^{1/2}\varepsilon + b\varepsilon(\varepsilon + b)^{-1/2}}{e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T} + e^{-(\varepsilon - \mu)/k_B T} - 2} \left( \frac{\varepsilon + T\mu' - \mu}{(k_B T)^2} \right) d\varepsilon \right], \quad (3.65)$$

donde  $\mu'$  denota la derivada del potencial químico respecto a  $T$ . Luego del cambio de variable  $\varepsilon = b(y - 1)$ ,

$$C_V = \frac{L^3}{4\pi^2} \frac{b^{5/2}}{c_2^{3/2}} k_B \times \left[ \int_1^\infty \frac{(y - 1)y^{1/2} - 2(y - 1) + (y - 1)y^{-1/2}}{e^{-\beta\mu} e^{b\beta(y-1)} + e^{\beta\mu} e^{-b\beta(y-1)} - 2} \left( \frac{b(y - 1) + T\mu' - \mu}{(k_B T)^2} \right) dy \right]. \quad (3.66)$$

Adimensionalizando ahora, respecto a las variables ya conocidas, tendremos que

$$C_V = \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \left( \frac{c_{20}}{c_2} \right)^{3/2} \frac{1}{\tilde{T}} \tilde{b}^{5/2} N k_B \times \left[ \int_1^\infty \frac{(y - 1)y^{1/2} - 2(y - 1) + (y - 1)y^{-1/2}}{e^{-\tilde{\mu}/\tilde{T}} e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} + e^{\tilde{\mu}/\tilde{T}} e^{-(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1)} - 2} \left( \frac{\tilde{b}(y - 1)}{\tilde{T}} + \frac{\mu'}{k_B} - \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right) dy \right]. \quad (3.67)$$

Observemos que a pesar de la adimensionalización, nos ha quedado, dentro del paréntesis una cantidad aparentemente sin adimensionalizar, esto es,  $\mu'/k_B$ ; en la siguiente sección trataremos de identificar este cociente.

Si, por último, suponemos, que la parte cuadrática de nuestra RD es proporcional a la RD del gas ideal de Bose, con  $\alpha_2$  la constante adimensional de proporcionalidad, entonces la ecuación (3.67) se reduce a

$$C_V = \frac{1}{\alpha_2^{3/2}} \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \frac{1}{\tilde{T}} \tilde{b}^{5/2} N k_B \times \left[ \int_1^\infty \frac{(y - 1)y^{1/2} - 2(y - 1) + (y - 1)y^{-1/2}}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})} - 2} \left( \frac{\tilde{b}}{\tilde{T}}(y - 1) + \frac{\mu'}{k_B} - \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right) dy \right]. \quad (3.68)$$

Obsérvese que, en efecto, la expresión anterior se reduce a la correspondiente al caso en que  $\mu \equiv 0$ , es decir, a la ecuación (3.63). Pero, he aquí, nuestro verdadero problema en la determinación de una expresión general para el calor específico: no conocemos los valores de la función  $\mu'/k_B$ , es decir, no conocemos la derivada respecto a  $T$  del potencial químico  $\mu$ .

### 3.7 La derivada del potencial químico respecto a la temperatura para una relación de dispersión $\varepsilon = c_1 k + (\alpha_2 \hbar^2 / 2m) k^2$

Según lo discutido en la sección anterior, es indispensable el conocimiento de la derivada, respecto a la temperatura, del potencial químico, para obtener el calor específico,  $C_V$ , del gas de bosones con RD lineal más cuadrática, así que emplearemos esta sección para obtener dicha derivada, para ello consideraremos la ecuación (3.50) en una forma ligeramente distinta pero completamente equivalente

$$\alpha_2^{3/2} \frac{4\pi^2}{(4\pi)^{3/2}} \zeta(3/2) \left( \frac{k_B T_{c0}}{b} \right)^{3/2} = \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{e^{b\beta(y-1-\mu/b)} - 1} dy. \quad (3.69)$$

Como puede verse, para un valor dado de  $b$ , el lado izquierdo de la ecuación anterior es un número puro, por lo que al derivar respecto a  $T$  ambos lados, obtendríamos lo siguiente

$$0 = \frac{d}{dT} \int_1^\infty \frac{y^{1/2} - 2 + y^{-1/2}}{e^{b\beta(y-1-\mu/b)} - 1} dy, \quad (3.70)$$

de donde, al desarrollar llegamos a que

$$\mu'(T) = -\frac{1}{T} \frac{\int_1^\infty \frac{(by-b-\mu)(y^{1/2}-2+y^{-1/2})}{e^{b\beta(y-1-\mu/b)} + e^{-b\beta(y-1-\mu/b)} - 2} dy}{\int_1^\infty \frac{(y^{1/2}-2+y^{-1/2})}{e^{b\beta(y-1-\mu/b)} + e^{-b\beta(y-1-\mu/b)} - 2} dy}. \quad (3.71)$$

Ecuación que una vez adimensionalizada queda

$$\frac{\mu'(T)}{k_B} = -\frac{\tilde{b}}{\tilde{T}} \frac{\int_1^\infty \frac{(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})(y^{1/2}-2+y^{-1/2})}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})} - 2} dy}{\int_1^\infty \frac{(y^{1/2}-2+y^{-1/2})}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})} - 2} dy}. \quad (3.72)$$

Ésta es justamente la cantidad que nos estaba haciendo falta para poder obtener una expresión general para el cálculo del calor específico. Como puede verificarse,  $\mu'/k_B$  es una cantidad adimensionalizada, por tanto la ecuación (3.68) realmente es también una expresión adimensionalizada para el calor específico.

Por otra parte, puesto que de acuerdo con (3.47),

$$\tilde{\mu} \equiv \mu\beta_{c0} = \frac{\mu}{k_B T_{c0}},$$

entonces

$$\mu = \tilde{\mu} k_B T_{c0}.$$

Por lo tanto

$$\mu'(T) \equiv \frac{d\mu}{dT} = k_B T_{c0} \frac{d\tilde{\mu}}{dT},$$

pero, como

$$T = \tilde{T} T_{c0},$$

entonces

$$dT = T_{c0} d\tilde{T},$$

así que, finalmente

$$\mu'(T) = k_B T_{c0} \frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{T}} = k_B \frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{T}}. \quad (3.73)$$

Por lo que, podemos identificar  $\mu'(T)/k_B$  con  $d\tilde{\mu}/d\tilde{T}$ , o bien, hacer,

$$\tilde{\mu}' \equiv \frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{T}} = \frac{\mu'(T)}{k_B}. \quad (3.74)$$

### 3.8 Calor específico para una relación de dispersión $\varepsilon = c_1 k + (\alpha_2 \hbar^2 / 2m) k^2$

Así pues, una vez que son empleadas, simultáneamente, tanto (3.68) como (3.72), podemos obtener una expresión general para el calor específico del gas de bosones con RD lineal más cuadrática, con la parte cuadrática proporcional a la del gas ideal de bosones, para cualquier valor de  $\tilde{b}$ , la que resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{C_V}{Nk_B} &= \frac{1}{\alpha_{20}^{3/2}} \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \frac{1}{\tilde{T}} \tilde{b}^{5/2} \\ &\times \left[ \int_1^\infty \frac{(y-1)y^{1/2} - 2(y-1) + (y-1)y^{-1/2}}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T})(y-1-\tilde{\mu}/\tilde{b})} - 2} \left( \frac{\tilde{b}}{\tilde{T}}(y-1) + \tilde{\mu}' - \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right) dy \right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

con  $\tilde{\mu}'$ , dada por (3.74). De resolver numéricamente la ecuación (3.75), para  $\alpha_2 = 1$ , se obtienen las gráficas de  $T/T_{c0}$  contra  $C_V/Nk_B$  que aparecen en la figura 3.6.

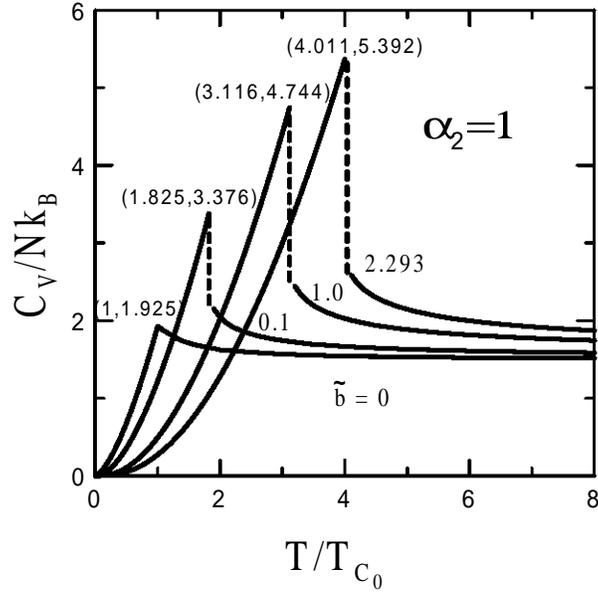


Figura 3.6 Calor específico contra temperatura.

### 3.9 Calor específico alrededor de la temperatura crítica para una relación de dispersión $\varepsilon = c_1 k + (\alpha_2 \hbar^2 / 2m) k^2$

El comportamiento de  $C_V$  cerca de la temperatura crítica se analiza mediante la diferencia

$$\Delta C_V \equiv C_V(\tilde{T}_c^-) - C_V(\tilde{T}_c^+), \quad (3.76)$$

donde  $C_V(\tilde{T}_c^-)$  denota la evaluación de la ecuación (3.75) a la izquierda de  $\tilde{T}_c$  y  $C_V(\tilde{T}_c^+)$  denota la evaluación de (3.75) a la derecha de  $\tilde{T}_c$ . De la figura del potencial químico puede verse que, al lado izquierdo de  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{\mu}' = 0$ , en tanto que a la derecha de  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{\mu}' \neq 0$ , y en ambos casos  $\tilde{\mu} = 0$ . Así pues

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C_V}{N k_B} &= -\frac{1}{\alpha_2^{3/2}} \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \frac{1}{\tilde{T}} \tilde{b}^{5/2} \tilde{\mu}'^+(\tilde{T}_c) \\ &\times \int_1^\infty \frac{(y-1)(y^{1/2}-2+y^{-1/2})}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} - 2} dy, \end{aligned} \quad (3.77)$$

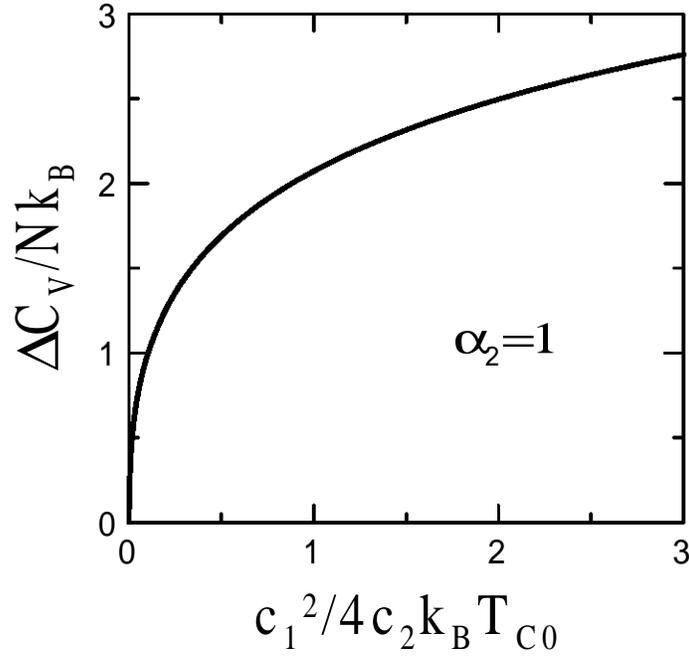
donde,

$$\tilde{\mu}'^+(\tilde{T}_c) = -\frac{\tilde{b}}{\tilde{T}_c} \frac{\int_1^\infty \frac{(y-1)(y^{1/2}-2+y^{-1/2})}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} - 2} dy}{\int_1^\infty \frac{(y^{1/2}-2+y^{-1/2})}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} - 2} dy}. \quad (3.78)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\Delta C_V}{Nk_B} = -\frac{1}{\alpha_2^{3/2}} \frac{(4\pi)^{3/2}}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta(3/2)} \frac{1}{\tilde{T}^2} \frac{1}{\tilde{b}^{7/2}} \frac{\left[ \int_1^\infty \frac{(y-1)(y^{1/2}-2+y^{-1/2})}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} - 2} dy \right]^2}{\int_1^\infty \frac{(y^{1/2}-2+y^{-1/2})}{e^{(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} + e^{-(\tilde{b}/\tilde{T}_c)(y-1)} - 2} dy}. \quad (3.79)$$

De resolver numéricamente la ecuación (3.79) para  $\alpha_2 = 1$ , se obtiene la curva de  $\Delta C_V/Nk_B$  contra  $c_1^2/4c_2k_B T_{C0}$ , mostrada en la figura 3.7.



**Figura 3.7** Discontinuidad del calor específico en la temperatura crítica.

# Capítulo 4

## 4 Gas de bosones con relación de dispersión lineal más cuadrática en $d$ dimensiones

En el capítulo anterior hemos calculado algunas de las propiedades termodinámicas de un gas de bosones tridimensional con RD lineal más cuadrática. En este capítulo nos proponemos generalizar los resultados del anterior a  $d$  dimensiones. Tenemos así, un gas de  $N$  bosones de masa  $m$  contenidos en una caja en  $d > 0$  dimensiones de volumen  $L^d$  y cuya RD es

$$\varepsilon = c_1 k + c_2 k^2, \quad (4.1)$$

donde  $k$  es la magnitud del vector de onda  $\mathbf{k}$   $d$ -dimensional, es decir,

$$k \equiv |\mathbf{k}| = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \dots + k_d^2)^{1/2}. \quad (4.2)$$

Como antes, el momento  $\mathbf{p}$  de la partícula está relacionado con el vector de onda  $\mathbf{k}$  de la misma, mediante la relación de de Broglie

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad (4.3)$$

sólo que ahora los vectores se encuentran en un espacio  $d$ -dimensional; suponemos, al igual que antes, que se satisfacen condiciones a la frontera periódicas para el vector  $\mathbf{k}$ , de modo que

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad (4.4)$$

con  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, \dots, n_d)$ ,  $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, d$ ; y  $L$  la longitud de uno de los lados de la caja.

A partir de este punto, básicamente, lo que tendríamos que hacer es repetir los cálculos del capítulo anterior, pero ahora, dejando sin especificar el valor de  $d$ . Sin embargo, antes de continuar haremos algunas observaciones. Como se recordará, resultados tales como temperatura crítica, se expresaron en términos de la temperatura crítica  $T_{c0}$  de un gas ideal de bosones en tres dimensiones; si ahora simplemente adimensionalizamos respecto a un gas ideal de bosones en  $d$  dimensiones, no en todos los casos podríamos utilizar su  $T_c$  para adimensionalizar porque  $T_c = 0$  para  $d \leq 2$ . Por otra parte, podría pensarse en adimensionalizar la temperatura respecto a la temperatura crítica del gas ideal de bosones en  $d$  dimensiones, pero con RD lineal, sin embargo, la situación mencionada arriba (dividir por cero) se repetiría cuando se quiera analizar las propiedades del sistema en dimensiones

próximas a 1. La forma en que se intentará evitar cualquiera de los problemas anteriores será adimensionalizando, respecto a un gas de Fermi de  $N_F$  partículas de masa  $m_F$  en  $d$  dimensiones.

Al igual que antes, el número total de partículas en la caja puede escribirse como la suma de las partículas en el estado base,  $N_0$ , más las partículas en los estados excitados,  $N_e$ , es decir,

$$N = N_0 + N_e. \quad (4.5)$$

Donde

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \quad (4.6)$$

y

$$N_e = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} n_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1}, \quad (4.7)$$

En el límite termodinámico:  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ ,  $N/V = cte.$ , el espectro de energía del sistema es prácticamente un continuo, por lo que podemos escribir la ecuación anterior como una integral de volumen en espacio  $k$   $d$ -dimensional, usando el resultado del Apéndice A,

$$N_e = \frac{2\pi^{d/2}}{\Omega\Gamma(d/2)} \int_0^\infty n(k)k^{d-1}dk, \quad (4.8)$$

donde

$$\Omega = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^d. \quad (4.9)$$

Es decir,

$$N_e = \frac{2\pi^{d/2}L^d}{(2\pi)^d\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{k^{d-1}}{e^{\beta|\varepsilon(k) - \mu|} - 1} dk, \quad (4.10)$$

resultado que, en efecto, se reduce al correspondiente, ya conocido, cuando  $d = 3$ .

Ahora bien, reescribiendo la ecuación anterior de la siguiente forma

$$N_e = \int_0^\infty d\varepsilon n(\varepsilon)g(\varepsilon), \quad (4.11)$$

identificamos la densidad de estados  $g(\varepsilon)$  con

$$g(\varepsilon) = \frac{2\pi^{d/2}L^d}{(2\pi)^d\Gamma(d/2)} k^{d-1} \frac{dk}{d\varepsilon}, \quad (4.12)$$

donde al sustituir las ecuaciones (3.14) y (3.15), tenemos que

$$g(\varepsilon) = \frac{2\pi^{d/2} L^d}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \frac{1}{c_2^{d/2}} \left[ \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{(d-2)/2(d-1)} - \frac{c_1}{2c_2^{1/2}} \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{-1/2(d-1)} \right]^{d-1}. \quad (4.13)$$

De nuevo, para el caso  $d = 3$ , lo anterior se reduce a la correspondiente densidad de estados que ya conocemos.

Así, en términos de esta densidad de estados

$$N_e = \frac{2\pi^{d/2} L^d}{2(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \frac{1}{c_2^{d/2}} \int_0^\infty \frac{\left[ \left( \varepsilon + c_1^2/4c_2 \right)^{(d-2)/2(d-1)} - c_1/2c_2^{1/2} \left( \varepsilon + c_1^2/4c_2 \right)^{-1/2(d-1)} \right]^{d-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon. \quad (4.14)$$

Realizando ahora el cambio de variable  $y = 4c_2/c_1^2(\varepsilon + c_1^2/4c_2)$  la ecuación anterior puede escribirse como

$$N_e = \frac{2\pi^{d/2} L^d}{2(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \frac{b^{d/2}}{c_2^{d/2}} \int_1^\infty \frac{\left[ (y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)} \right]^{d-1}}{z^{-1} e^{\beta b(y-1)} - 1} dy, \quad (4.15)$$

con  $z \equiv e^{\beta\mu}$ , la *fugacidad*,  $\beta = 1/k_B T$ ;  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $b = c_1^2/4c_2$ .

## 4.1 Temperatura de Fermi en $d$ dimensiones

Ahora bien, la *energía de Fermi*,  $E_F$ , de un sistema de  $N_F$  *fermiones* confinados en una caja cuadrada de longitud  $L$  en  $d$  dimensiones, está dada por [23]

$$E_F = \frac{2\pi\hbar^2}{m_F} \left( \frac{N_F d \Gamma(d/2)}{4L^d} \right)^{2/d} = \frac{2\pi\hbar^2}{m_F} \left( \frac{d \Gamma(d/2)}{4} \right)^{2/d} \left( \frac{N_F}{L^d} \right)^{2/d}, \quad (4.16)$$

donde  $m_F$  es la masa del fermión. Por lo tanto, la *temperatura de Fermi* del mismo sistema, definida como  $E_F/k_B$ , con  $k_B$  la constante de Boltzmann, está dada por [23]

$$T_F = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m_F} \left( \frac{d \Gamma(d/2)}{4} \right)^{2/d} \left( \frac{N_F}{L^d} \right)^{2/d}. \quad (4.17)$$

Luego, si  $\beta \equiv 1/k_B T$ , podemos entonces definir

$$\beta_F \equiv \frac{1}{k_B T_F} = \frac{m_F}{2\pi\hbar^2} \left( \frac{4}{d \Gamma(d/2)} \right)^{2/d} \left( \frac{L^d}{N_F} \right)^{2/d} = \frac{1}{E_F}, \quad (4.18)$$

y adimensionalizar  $\beta$  a partir de esta definición

$$\bar{\beta} \equiv \frac{\beta}{\beta_F} = \frac{k_B T_F}{k_B T} = \frac{1}{T/T_F} \equiv \frac{1}{\bar{T}}, \quad (4.19)$$

y, por otra parte definir

$$\bar{b} \equiv b\beta_F. \quad (4.20)$$

Por lo que

$$\beta = \bar{\beta}\beta_F \quad \text{y} \quad b = \frac{\bar{b}}{\beta_F}. \quad (4.21)$$

Con el uso de (4.21) y (4.19) podemos escribir (4.15) como

$$N_e = \frac{2\pi^{d/2}}{2(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \left( \frac{L^2}{c_2 \beta_F} \right)^{d/2} \bar{b}^{d/2} \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{z^{-1} e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1)} - 1} dy. \quad (4.22)$$

Pero de acuerdo con las definiciones anteriores

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{c_2 \beta_F} &= \frac{L^2 E_F}{c_2} = \frac{L^2}{c_2} \frac{2\pi \hbar^2}{m_F} \left( \frac{d\Gamma(d/2)}{4} \right)^{2/d} \left( \frac{N_F}{L^d} \right)^{2/d} \\ &= \frac{1}{c_2} \frac{2\pi \hbar^2}{m_F} \left( \frac{d\Gamma(d/2)}{4} \right)^{2/d} N_F^{2/d}, \end{aligned}$$

o bien

$$\left( \frac{L^2}{c_2 \beta_F} \right)^{d/2} = \frac{1}{c_2^{d/2}} \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m_F} \right)^{d/2} \frac{d\Gamma(d/2)}{4} N_F. \quad (4.23)$$

Al sustituir la ecuación anterior en (4.22), obtenemos

$$\frac{N_e}{N_F} = \frac{d}{4} \left( \frac{\hbar^2}{2m_F c_2} \right)^{d/2} \bar{b}^{d/2} \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{z^{-1} e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1)} - 1} dy. \quad (4.24)$$

En este punto podríamos elegir entre diferentes opciones para el valor de  $N_F$ , quizá lo más natural sería hacer  $N_F = N$ , es decir comparar el gas de  $N$  bosones directamente con un gas de  $N$  fermiones, ambos, de la misma masa. Sin embargo, un caso que nos será de particular interés por razones que se harán claras más adelante, es aquel en que  $N_F = 2N$  y, adicionalmente,  $m_F = m/2$ , con  $m$  la masa del bosón, en este caso, tenemos que

$$\frac{N_e}{N} = \frac{d}{2} \left( \frac{\hbar^2}{m c_2} \right)^{d/2} \bar{b}^{d/2} \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{z^{-1} e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1)} - 1} dy. \quad (4.25)$$

## 4.2 Temperatura crítica

De acuerdo con lo discutido en la sección 2.1, cuando el sistema alcanza la temperatura crítica, denotada por  $T_c$ , ocurre que  $N_e = N$  y  $\mu = 0$ , con lo que (4.25) se convierte en

$$1 = \frac{d}{2} \left( \frac{\hbar^2}{mc_2} \right)^{d/2} \bar{b}^{d/2} \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{e^{(\bar{b}/\bar{T}_c)(y-1)} - 1} dy, \quad (4.26)$$

donde  $\bar{T}_c$  es la temperatura crítica del gas de bosones, adimensionalizada respecto a la temperatura de Fermi, dada por (4.17).

Si ahora, además suponemos, como ya lo hicimos en el capítulo anterior, que

$$c_2 = \alpha_2 \frac{\hbar^2}{2m} = \alpha_2 c_{20}, \quad (4.27)$$

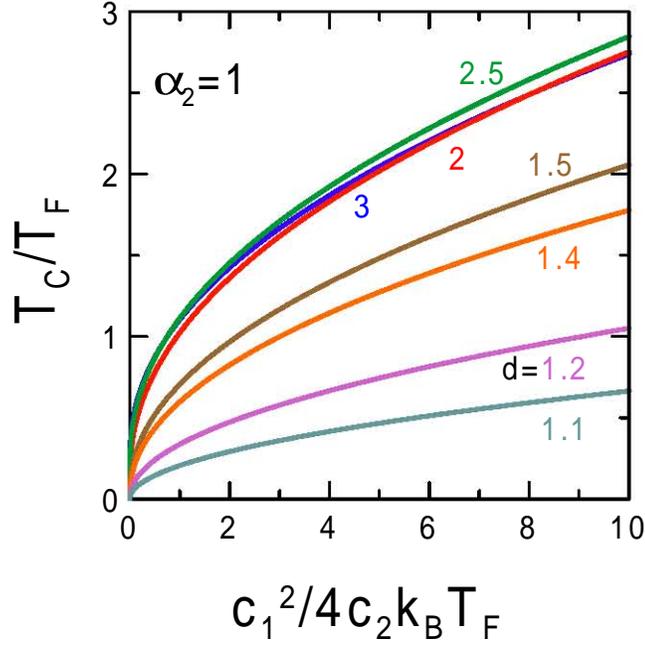
con  $c_{20} \equiv \hbar^2/2m$ ,  $\alpha_2$  una constante adimensional y  $m$  la masa del bosón, entonces, (4.26) se reduce a

$$\frac{2}{d} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)^{d/2} = \bar{b}^{d/2} \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{e^{(\bar{b}/\bar{T}_c)(y-1)} - 1} dy. \quad (4.28)$$

De resolver numéricamente la ecuación anterior para  $\alpha_2 = 1$  se obtienen las gráficas de  $T_c/T_F$  contra  $c_1^2/4c_2k_B T_F$ , para diferentes dimensiones  $d$ , que se ilustran en la figura 4.1. La figura 4.2 corresponde a una ampliación de la figura 4.1 para bajas temperaturas, en ella puede verificarse la recuperación de las temperaturas críticas para 2D y 3D de un gas ideal de bosones cuando están adimensionalizadas respecto a la temperatura de Fermi de un sistema de fermiones apareados en la misma dimensión, véase [22].

## 4.3 Temperatura crítica como función de la dimensión $d$ del sistema

Cuando, después de la ecuación (4.24), decidimos comparar un gas de  $N$  bosones respecto a un gas de  $2N$  fermiones, es decir, tomamos  $N_F = 2N$ , y además supusimos que  $m_F = m/2$ , con  $m_F$  la masa de los fermiones y  $m$  la masa de los bosones, hemos estado pensando en que los  $2N$  fermiones pueden aparearse para formar un par bosónico, y así poder estudiar la BEC de estos pares. En particular, podremos analizar, como se comporta la temperatura crítica de  $N$  pares de fermiones respecto a la dimensionalidad del mismo sistema. Este problema, para el caso de una RD generalizada, es decir, de la forma,  $\varepsilon = c_s k^s$ , con  $s = 1$  y  $2$ , ya ha sido analizado en [22]. Lo que aquí se hace, es añadir al análisis anterior lo que ocurre cuando la RD es lineal más cuadrática. Los resultados obtenidos se presentan en la figura 4.3, la que se obtiene de resolver numéricamente la ecuación (4.28) para un valor de  $\bar{b}$  dada y diferentes valores de  $d$ . (Compárese esta figura con la figura 1 de la referencia antes citada.) Como ya hemos dicho, en el Capítulo 1, la energía del par puede expresarse mediante una RD lineal, o cuadrática, o una combinación



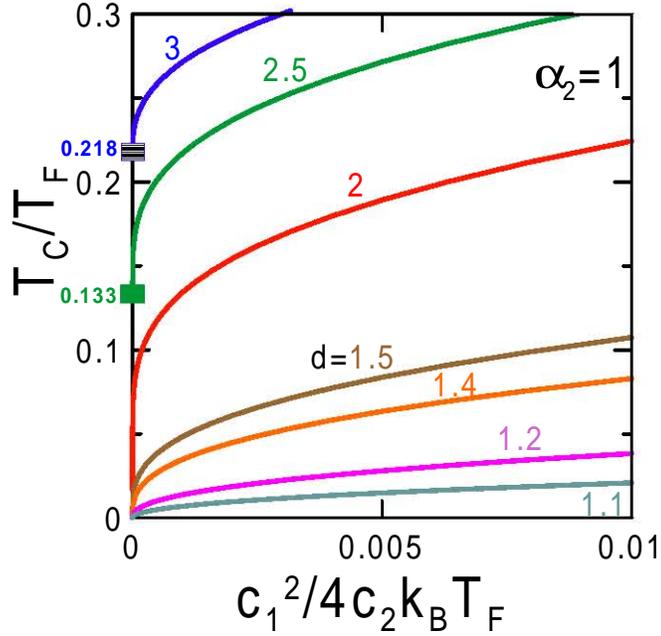
**Figura 4.1** Temperatura crítica como función de  $\bar{b}$  para diferentes dimensiones, adimensionalizada con la  $T_F$  para cada dimensión  $d$ .

de ambas, según sea el valor de la energía de amarre del par. En nuestra figura  $s = 1$  denota la curva para una RD lineal, del tipo  $a(d)\hbar v_F K$  con  $a(d)$  una función interpolada a partir de los valores de la misma para  $d = 1, 2, 3$ , que se presenta en la figura 4.4 [22], en tanto que la curva con  $s = 2$ , es la correspondiente a una RD cuadrática de la forma  $(\hbar^2/2m)K^2$ . En ambos casos,  $K$  es la magnitud del vector de onda asociado al MCM del par. Por su parte, como ya sabemos,  $\bar{b}$  es una medida de la contribución relativa lineal y cuadrática a la RD.

#### 4.4 Pares de Cooper en 2D

De acuerdo con [16], la RD del par de Cooper en dos dimensiones, a segundo orden, tiene la forma  $\varepsilon = (2\hbar v_F/\pi)K + (\hbar^2/2m)K^2$ , donde  $K$  es la magnitud del vector de onda asociado al MCM,  $m$  es la masa del par ( $m_F$  es la masa de los fermiones que constituyen el par) y  $v_F$  la velocidad de Fermi asociada a este sistema. De manera general, para cualquier dimensión, la RD del par de Cooper puede expresarse como  $\varepsilon = a(d)\hbar v_F K + (\hbar^2/2m)K^2$ , donde  $a(d)$  es una función solo de la dimensión  $d$  del sistema, véase [22]. En la figura 4.4 se muestra el parámetro  $\bar{b}$  correspondiente a la RD anterior como función de la dimensión  $d$  del sistema.

A continuación calcularemos el valor de la temperatura crítica para esta RD, lo haremos mediante el uso de las funciones  $f(\theta)$  y  $g(\theta)$  definidas en el capítulo anterior, lo que



**Figura 4.2** Detalle de la figura anterior, que permite ver la recuperación del límite cuadrático.

nos permitirá recuperar los bien conocidos límites tanto lineal como cuadrático para esta RD.

Sea

$$c_1 = [1 + \text{sen}\theta](1 - \theta/\pi)(2\hbar v_F/\pi), \quad (4.29)$$

y

$$\begin{aligned} c_2 &= [1 + \text{sen}\theta](\theta/\pi)(\hbar^2/2m) \\ &= [1 + \text{sen}\theta](\theta/\pi)(\hbar^2/4m_F), \end{aligned} \quad (4.30)$$

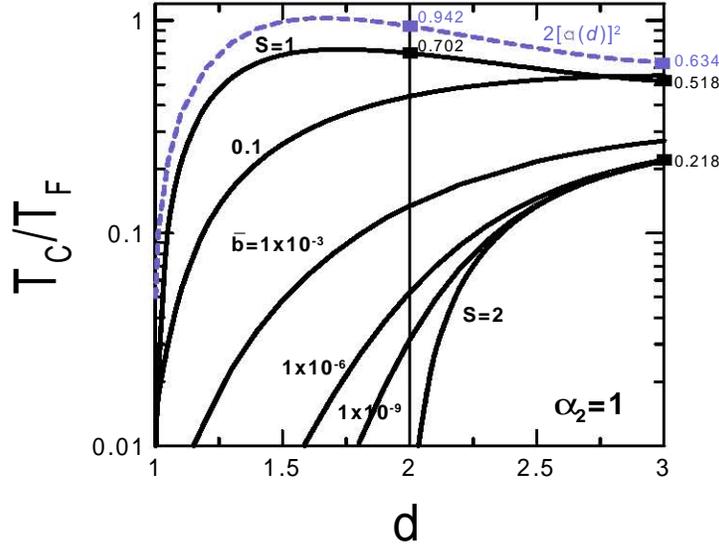
y puesto que estamos trabajando con una RD en dos dimensiones, la ecuación (4.26) se transforma en

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{(\theta/\pi)}{(1 - \theta/\pi)} \right]^2 = \bar{b} \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{e^{(\bar{b}/T_c)(y-1)} - 1} dy, \quad (4.31)$$

con

$$\bar{b} = \frac{c_1^2}{4c_2k_B T_F} = \frac{8}{\pi^2} [1 + \text{sen}\theta] \frac{(1 - \theta/\pi)^2}{(\theta/\pi)}. \quad (4.32)$$

Resolviendo numéricamente la ecuación (4.31) se obtiene la figura 4.5. Debe observarse que sólo cuando  $\theta = \pi/2$  en (4.29) y (4.30), estos coeficientes coinciden con la RD que



**Figura 4.3** Temperatura crítica como función de la dimensión del sistema.

nos hemos propuesto estudiar, cualquier otro valor de  $\theta$  da una RD distinta, de modo que en este caso, el valor de  $\bar{b}$  en (4.32) es  $8/\pi^2$ . En las gráficas de las siguientes secciones, que ilustran diferentes propiedades termodinámicas, aparecerá la correspondiente curva para este último valor particular de  $\bar{b}$ : el de los pares de Cooper en dos dimensiones. La ventaja de usar los coeficientes de esta forma, es que podemos recuperar los límites lineal y cuadrático a partir de la RD  $\varepsilon = (2\hbar v_F/\pi)K + (\hbar^2/2m)K^2$ , lo que nos permite comprobar la validez de nuestro resultado. Dicho en otras palabras, los únicos valores realmente interesante en la figura 4.5 son aquellos para  $\theta = 0$  (límite lineal),  $\theta = \pi/2$  (RD lineal más cuadrática) y  $\theta = \pi$  (límite cuadrático).

## 4.5 Potencial químico

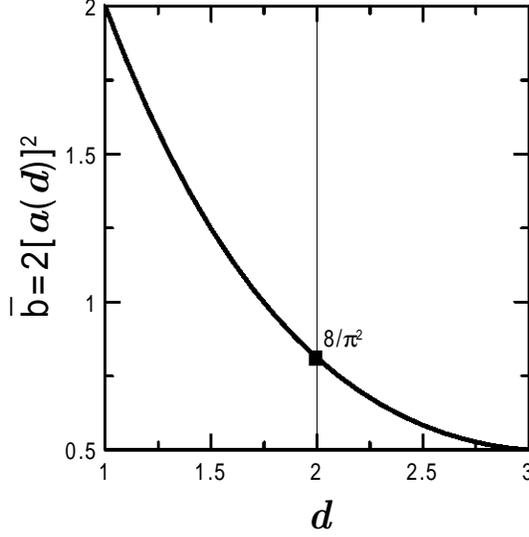
Para  $T \leq T_c$  el valor del potencial químico,  $\mu$ , es cero. Cuando  $T > T_c$ , todas las partículas del sistema se encuentran en los estados excitados, es decir,  $N_e = N$ , en este caso (4.25) toma la forma

$$1 = \frac{d}{2} \left( \frac{\hbar^2}{mc^2} \right)^{d/2} \bar{b}^{d/2} \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{z^{-1} e^{(\bar{b}/T)(y-1)} - 1} dy. \quad (4.33)$$

Ecuación que constituye una expresión implícita para el potencial químico para  $T > T_c$ .

Si definimos

$$\bar{\mu} \equiv \mu \beta_F = \frac{\mu}{k_B T_F} \quad (4.34)$$



**Figura 4.4** El parámetro  $\bar{b}$  asociado a la RD de los pares de Cooper como función de la dimensión del sistema.

entonces

$$\mu = \bar{\mu} k_B T_F = \frac{\bar{\mu}}{\beta_F} \quad (4.35)$$

así que, de acuerdo con (4.21) y (4.19), podemos escribir,

$$z \equiv e^{\beta\mu} = e^{\bar{\beta}\bar{\mu}} = e^{\bar{\mu}/\bar{T}} = e^{(\bar{b}/\bar{T})(\bar{\mu}/\bar{b})} \quad (4.36)$$

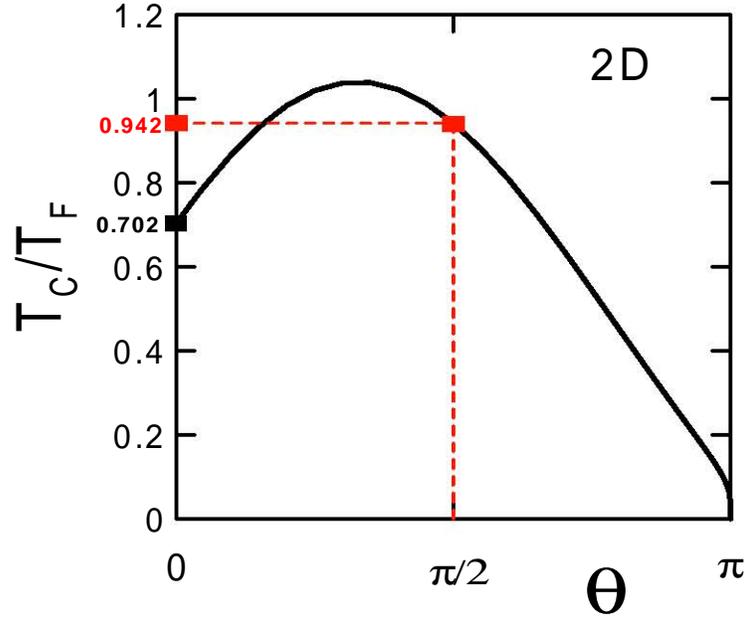
con lo que (4.33) queda

$$1 = \frac{d}{2} \left( \frac{\hbar^2}{mc_2} \right)^{d/2} \bar{b}^{d/2} \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 1} dy. \quad (4.37)$$

Si hacemos  $c_2 = \alpha_2 \hbar^2 / 2m$ , con  $\alpha_2$  una constante adimensional, entonces (4.37) se reduce a

$$\frac{2}{d} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)^{d/2} = \bar{b}^{d/2} \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 1} dy. \quad (4.38)$$

De resolver numéricamente la ecuación anterior para  $\alpha_2 = 1$  y  $d = 2$ , se obtienen las gráficas de  $T/T_F$  contra  $\mu/k_B T_F$ , de la figura 4.6.



**Figura 4.5** Temperatura crítica para bosones con RD lineal más cuadrática cuyos coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  están dados por (4.29) y (4.30), respectivamente.

## 4.6 Derivada del potencial químico respecto a la temperatura

De acuerdo con lo realizado en el capítulo anterior, acerca del cálculo del calor específico a volumen constante, esperamos que nuevamente sea necesario el conocimiento previo de la derivada del potencial químico respecto a la temperatura, para poder obtener el calor específico, por lo que procederemos a calcularla.

Puesto que lo deseable es poder graficar el calor específico respecto a la temperatura, y en general, todas las gráficas presentados en este trabajo corresponden a una RD del tipo  $\varepsilon = c_1 k + (\alpha_2 \hbar^2 / 2m) k^2$ , entonces, en esta sección, *exclusivamente* vamos a calcular la derivada del potencial químico para este tipo de RD particular. De acuerdo con lo anterior, usaremos para nuestros cálculos la ecuación (4.38), escrita en forma distinta pero completamente equivalente

$$\frac{2}{d} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)^{d/2} \frac{1}{b^{-d/2}} = \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{e^{\beta b(y-1-\mu/b)} - 1} dy. \quad (4.39)$$

Derivando respecto a la temperatura ambos lados de la ecuación anterior llegamos a que

$$0 = \int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{e^{\beta b(y-1-\mu/b)} + e^{-\beta b(y-1-\mu/b)} - 2} \left[ \beta b(y-1) + \frac{\mu'}{k_B} - \beta \mu \right] dy,$$

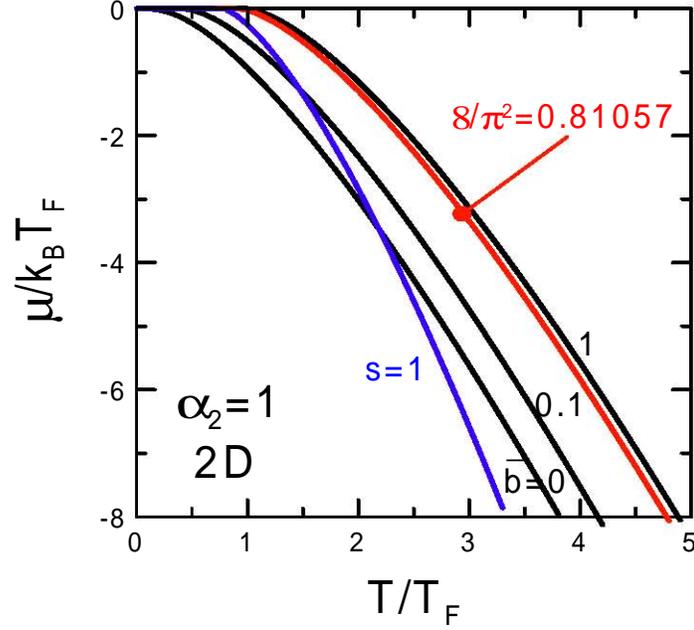


Figura 4.6 Potencial químico contra temperatura.

donde  $\mu'$  denota la derivada del potencial químico respecto a la temperatura. En términos de las cantidades adimensionalizadas de las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.34) la ecuación anterior es equivalente a

$$\frac{\mu'}{k_B} = -\frac{\bar{b}}{\bar{T}} \frac{\int_1^\infty \frac{(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} + e^{-(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 2} dy}{\int_1^\infty \frac{[(y^{1/2})^{(d-2)/(d-1)} - (y^{-1/2})^{1/(d-1)}]^{d-1}}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} + e^{-(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 2} dy} \equiv \bar{\mu}'. \quad (4.40)$$

La que en el caso particular,  $d = 2$ , se reduce a

$$\bar{\mu}' = -\frac{\bar{b}}{\bar{T}} \frac{\int_1^\infty \frac{(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})[1-y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} + e^{-(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 2} dy}{\int_1^\infty \frac{[1-y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} + e^{-(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 2} dy}. \quad (4.41)$$

## 4.7 Energía interna

La energía interna se calcula de la misma forma que en el capítulo anterior, mediante la expresión,

$$U(V, T) = \int_0^\infty \varepsilon d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon),$$

donde  $g(\varepsilon)$  es la densidad de estados y  $n(\varepsilon)$  la función de distribución de Bose-Einstein.

Introduciendo la densidad de estados dada por (4.13) en la expresión anterior

$$U(V, T) = \frac{2\pi^{d/2} L^d}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \frac{1}{c_2^{d/2}} \quad (4.42)$$

$$\times \int_0^\infty \varepsilon \frac{\left[ \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{(d-2)/2(d-1)} - \frac{c_1}{2c_2^{1/2}} \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{-1/2(d-1)} \right]^{d-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon,$$

lo que mediante el cambio de variable  $\varepsilon = b(y-1)$ , donde  $b = c_1^2/4c_2$ , se transforma en

$$U(V, T) = \frac{2\pi^{d/2} L^d}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \frac{1}{c_2^{d/2}} b^2 \quad (4.43)$$

$$\times \int_1^\infty \frac{(y-1) \left[ (\bar{b}y/\beta_F)^{(d-2)/2(d-1)} - (\bar{b}/\beta_F)^{1/2} (\bar{b}y/\beta_F)^{-1/2(d-1)} \right]^{d-1}}{z^{-1} e^{\beta b(y-1)} - 1} dy.$$

O bien, si usamos (4.21) y (4.35) y dividimos a ambos lados por  $Nk_B T$ ,

$$\frac{U(V, T)}{Nk_B T} = \frac{2\pi^{d/2} L^d}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \frac{1}{c_2^{d/2}} \frac{1}{NT} \frac{\bar{b}^2}{\beta_F} \quad (4.44)$$

$$\times \int_1^\infty \frac{(y-1) \left[ (\bar{b}y/\beta_F)^{(d-2)/2(d-1)} - (\bar{b}/\beta_F)^{1/2} (\bar{b}y/\beta_F)^{-1/2(d-1)} \right]^{d-1}}{e^{\bar{b}/T(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 1} dy.$$

A partir de este punto, por simplicidad, y dado que en el capítulo anterior hemos estudiado la BEC en tres dimensiones, ahora sólo la estudiaremos en dos dimensiones, en este caso, la ecuación (4.44) toma la forma

$$\frac{U(V, T)}{Nk_B T} = \frac{L^2}{2\pi} \frac{k_B T_F}{c_2} \frac{\bar{b}^2}{T} \int_1^\infty \frac{(y-1)[1-y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/T)(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 1} dy, \quad d=2. \quad (4.45)$$

Pero de acuerdo con (4.18), para  $d=2$

$$k_B T_F = 8\pi \frac{N}{L^2} c_{20}$$

por lo tanto

$$\frac{U(V, T)}{Nk_B T} = 4 \frac{c_{20}}{c_2} \frac{\bar{b}^2}{T} \int_1^\infty \frac{(y-1)[1-y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/T)(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 1} dy, \quad d=2. \quad (4.46)$$

Si ahora hacemos la suposición de que  $c_2 = \alpha_2 c_{20}$ , entonces de la ecuación (4.46) tenemos que,

$$\frac{U(V, T)}{Nk_B T} = \frac{4}{\alpha_2} \frac{\bar{b}^2}{T} \int_1^\infty \frac{(y-1)[1-y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/T)(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 1} dy, \quad d=2. \quad (4.47)$$

De resolver numéricamente la ecuación anterior, se obtienen las gráficas de  $T/T_F$  contra  $U/Nk_B T$  para diferentes valores de  $\bar{b}$ , en dos dimensiones, que aparecen en la figura 4.7.

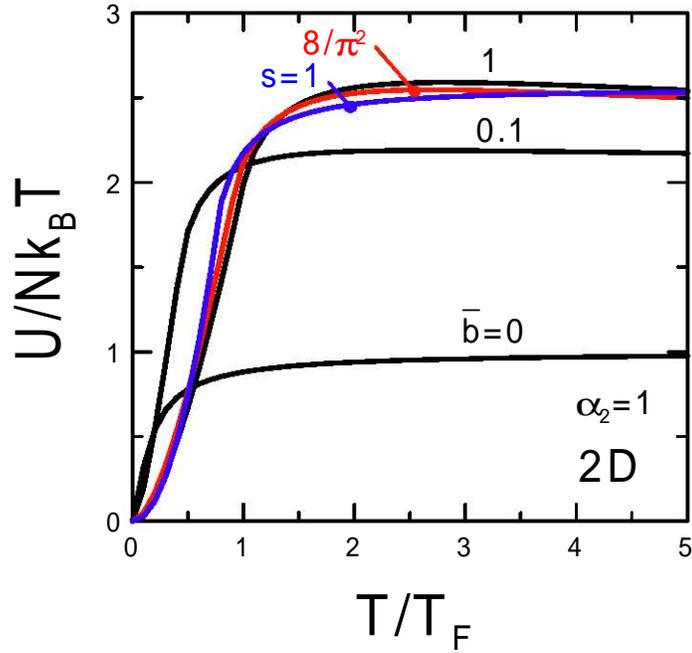


Figura 4.7 Energía interna contra temperatura.

## 4.8 Calor específico

Al igual que antes, el calor específico a volumen constante,  $C_V$ , se calculará a partir de la expresión

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} .$$

Por lo que si introducimos la ecuación (4.42) en la ecuación anterior, tendríamos, con toda generalidad, que

$$C_V = \frac{2\pi^{d/2} L^d}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \frac{1}{c_2^{d/2}} \times \frac{\partial}{\partial T} \int_0^\infty \frac{\varepsilon \left[ \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{(d-2)/2(d-1)} - \frac{c_1}{2c_2^{1/2}} \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{-1/2(d-1)} \right]^{d-1}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon. \quad (4.48)$$

Para hacer más sencillo el cálculo de la derivada parcial, y puesto que ya hemos analizado lo que ocurre con el calor específico en tres dimensiones, en el capítulo anterior,

tomaremos  $d = 2$  en la ecuación (4.48). En este caso

$$C_V = \frac{2\pi L^2}{(2\pi)^2 \Gamma(1)} \frac{1}{c_2} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^\infty \frac{\varepsilon \left[ 1 - \frac{c_1}{2c_2^{1/2}} \left( \varepsilon + \frac{c_1^2}{4c_2} \right)^{-1/2} \right]}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon. \quad (4.49)$$

Al efectuar la derivación parcial y realizar el cambio de variable  $\varepsilon = b(y - 1)$ , con  $b = c_1^2/4c_2$ , se obtiene que

$$C_V = \frac{L^2 b^2}{2\pi c_2 k_B} \frac{1}{k_B} \int_1^\infty \frac{(y-1) [1 - y^{-1/2}]}{e^{\beta b(y-1-\mu/b)} + e^{-\beta b(y-1-\mu/b)} - 2} \frac{b(y-1) - \mu + T\mu'}{T^2} dy. \quad (4.50)$$

O bien, en términos de las cantidades adimensionalizadas ya conocidas (4.19), (4.20), (4.34) y (4.40), se tiene

$$C_V = \frac{L^2}{2\pi c_2} (k_B T_F) k_B \left[ \frac{\bar{b}^3}{\bar{T}^2} \int_1^\infty \frac{(y-1)^2 [1 - y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} + e^{-(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 2} dy \right] \quad (4.51)$$

$$- \frac{L^2}{2\pi c_2} (k_B T_F) k_B \left( \bar{\mu} \frac{\bar{b}^2}{\bar{T}^2} - \bar{\mu}' \frac{\bar{b}^2}{\bar{T}} \right) \int_1^\infty \frac{(y-1) [1 - y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} + e^{-(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 2} dy.$$

Lo que al usar la ecuación (4.17) es equivalente a

$$C_V = \frac{1}{2} \frac{1}{c_2} \frac{\hbar^2}{m_F} N_F k_B \left[ \frac{\bar{b}^3}{\bar{T}^2} \int_1^\infty \frac{(y-1)^2 [1 - y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} + e^{-(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 2} dy \right] \quad (4.52)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{c_2} \frac{\hbar^2}{m_F} N_F k_B \left( \bar{\mu} \frac{\bar{b}^2}{\bar{T}^2} - \bar{\mu}' \frac{\bar{b}^2}{\bar{T}} \right) \int_1^\infty \frac{(y-1) [1 - y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} + e^{-(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 2} dy.$$

Si, por último, hacemos la suposición de que  $N_F = 2N$  y  $m_F = m/2$ , con  $N$  el número de bosones y  $m$  la masa de los mismos, todo se reduce a

$$C_V = 4 \frac{c_{20}}{c_2} N k_B \left[ \frac{\bar{b}^3}{\bar{T}^2} \int_1^\infty \frac{(y-1)^2 [1 - y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} + e^{-(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 2} dy \right] \quad (4.53)$$

$$- 4 \frac{c_{20}}{c_2} N k_B \left( \bar{\mu} \frac{\bar{b}^2}{\bar{T}^2} - \bar{\mu}' \frac{\bar{b}^2}{\bar{T}} \right) \int_1^\infty \frac{(y-1) [1 - y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} + e^{-(\bar{b}/\bar{T})(y-1-\bar{\mu}/\bar{b})} - 2} dy.$$

con  $c_{20} = \hbar^2/2m$ .

Si en la ecuación (4.53), hacemos  $c_2 = \alpha_2 c_{20}$ , y resolvemos numéricamente, se obtienen las curvas de  $C_V/Nk_B$  contra  $T/T_F$  para diferentes valores de  $\bar{b}$  que aparecen en la figura 4.8.

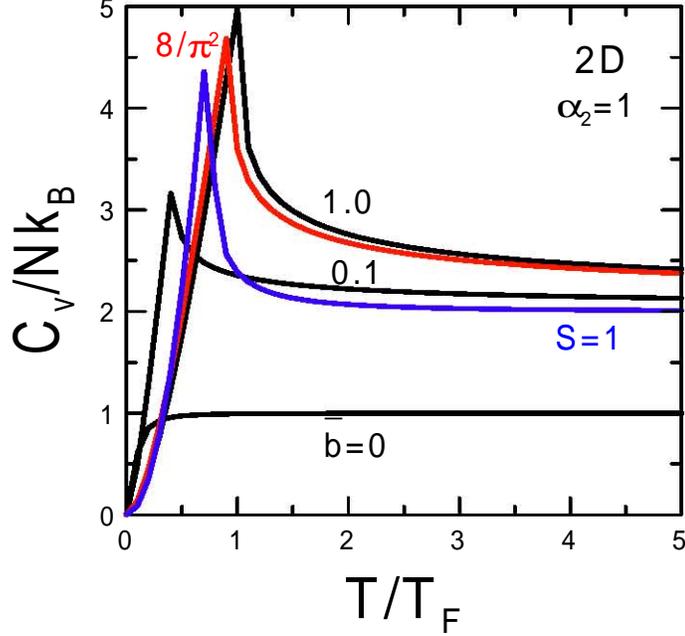


Figura 4.8 Calor específico contra temperatura.

#### 4.9 Calor específico alrededor de la temperatura crítica para una relación de dispersión $\varepsilon = c_1 k + (\alpha_2 \hbar^2 / 2m) k^2$ , en dos dimensiones

Nuevamente, estudiaremos el comportamiento del calor específico a volumen constante, mediante la diferencia del mismo, cuando se evalúa a la derecha y a la izquierda de la temperatura crítica, es decir, la diferencia en el calor específico, en  $T = T_c$ , de acuerdo con (4.53) para  $c_2 = \alpha_2 \hbar^2 / 2m$ , es igual a

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C_V}{Nk_B} &\equiv \frac{C_V(\bar{T}_c^+)}{Nk_B} - \frac{C_V(\bar{T}_c^-)}{Nk_B} \\ &= \mu'(\bar{T}_c^+) \frac{\bar{b}}{\bar{T}_c} \int_1^\infty \frac{(y-1)[1-y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T}_c)(y-1)} + e^{-(\bar{b}/\bar{T}_c)(y-1)} - 2} dy, \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde  $C_V(\bar{T}_c^+)$  denota la evaluación del calor específico por la derecha y  $C_V(\bar{T}_c^-)$  por la izquierda, y donde, para el caso que estamos tratando,  $d = 2$ , se tiene que

$$\mu'(\bar{T}_c^+) = -\frac{\bar{b}}{\bar{T}_c} \frac{\int_1^\infty \frac{(y-1)[1-y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T}_c)(y-1)} + e^{-(\bar{b}/\bar{T}_c)(y-1)} - 2} dy}{\int_1^\infty \frac{[1-y^{-1/2}]}{e^{(\bar{b}/\bar{T}_c)(y-1)} + e^{-(\bar{b}/\bar{T}_c)(y-1)} - 2} dy}, \quad (4.55)$$

de acuerdo con la ecuación (4.41). Al momento de resolver numéricamente la integral en el denominador de la ecuación (4.55), se obtiene un valor infinito para ésta, cualquiera que sea el valor de  $\bar{b}$  y su correspondiente  $T_c$ . La razón de este comportamiento se debe a que el integrando tiende a infinito cuando  $y \rightarrow 1$ . Es debido a esta causa que podemos concluir que, en dos dimensiones,  $\Delta C_V/Nk_B = 0$ ; es decir, en dos dimensiones el  $C_V$  es una curva continua respecto a la temperatura, o bien, en dos dimensiones no hay salto en  $C_V$ .

# Capítulo 5

## 5 Conclusiones

La relación de dispersión (RD) (energía de excitación) obtenida teóricamente para el problema del par de Cooper de MCM no nulo, así como la RD experimental del helio-4 obtenida mediante la técnica de dispersión inelástica de neutrones, entre otras, pueden ser escritas como series de potencias del momento del centro de masa de las partículas; éstas son también las que deben ser introducidas en la función de distribución de Bose-Einstein, para determinar, por ejemplo, la temperatura crítica  $T_c$ , las propiedades termodinámicas y/o la superconductividad o superfluidez, del sistema modelado como un conjunto de excitaciones bosónicas elementales.

Considerando que para momentos pequeños, es decir energías bajas, la contribución principal a la energía de las partículas es lineal, en este trabajo estudiamos los efectos sobre las propiedades de un gas ideal de bosones, cuando le agregamos una parte lineal a su relación de dispersión cuadrática. Es decir, estudiamos un gas de bosones con una relación de dispersión lineal más cuadrática, con coeficientes positivos.

Confirmamos en el Capítulo 2 que la termodinámica de un gas ideal de bosones con RD cuadrática o lineal, se puede describir completa y analíticamente en términos de las funciones de Bose cuyas propiedades resumimos en el Apéndice B. Sin embargo, cuando RD de los bosones es lineal más cuadrática, no es posible encontrar una forma funcional explícita para las integrales involucradas en el cálculo de cada una de las propiedades termodinámicas de los bosones por lo que hemos tenido que evaluarlas numéricamente.

Para el sistema 3D de bosones resumimos los resultados obtenidos como sigue. Al añadir una parte lineal a una RD cuadrática resulta que aun cuando la contribución lineal sea pequeñísima: a) la temperatura crítica de la BEC correspondiente aumenta respecto a la  $T_c$  de la RD cuadrática, conforme aumentamos el coeficiente de la parte lineal, como se puede observar en la figura 3.2; b) aparece un salto en el calor específico a volumen constante, lo que refleja que la transición de fase se convierte en una de segundo orden. Por lo demás, mostramos que los límites puramente lineal o puramente cuadrático, de las propiedades termodinámicas, son recuperados. Por ejemplo, partiendo de una RD lineal más cuadrática cualquiera, hemos podido verificar, mediante el uso de un par de funciones particulares, que cuando la contribución lineal se hace cero se recupera la  $T_c$  correspondiente a la RD cuadrática; de la misma forma cuando la contribución cuadrática desaparece, se logra recuperar la  $T_c$  correspondiente a la RD lineal residual.

Como una generalización de los resultados anteriores se obtuvieron numéricamente las propiedades termodinámicas de un gas de Bose en  $d$  dimensiones con RD lineal más

cuadrática. Al igual que en el caso tridimensional, se parte de un gas ideal de bosones al que se le añade una contribución lineal en la RD. Como primer resultado se reafirmó que la temperatura crítica aumenta a medida que la contribución lineal en la RD aumenta. En cuanto a las propiedades termodinámicas, tales como potencial químico, energía interna y calor específico, damos las expresiones generales para  $d$  dimensiones y explicitamos los resultados para 2D donde se observa que no hay salto en el calor específico en la temperatura crítica.

Aunque al iniciar la tesis uno de los proyectos era generalizar las expresiones para las propiedades termodinámicas en el límite termodinámico, para cualquier dimensión y relación lineal más cuadrática, al final lamentamos no existieran estas expresiones analíticas y nos limitamos a dar las relaciones para calcular los límites numéricamente.

Finalmente, el solo hecho de agregar un término más, por ejemplo el término cúbico, positivo o negativo, a la RD lineal más cuadrática, nos involucraría en un estudio más complejo en cuanto tendríamos que considerar máximos y/o mínimos, o un punto de inflexión, asociados a la existencia de excitaciones tales como los maxones o rotones que aparecen el Helio-4. Un estudio que está proyectado para un futuro próximo.

# Apéndice A

## A La integral en el espacio $k$ $d$ -dimensional

En los Capítulos 2 y 4 aparece una integral de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} n_k dk_1 dk_2 \dots dk_d, \quad (\text{A.1})$$

que indica la integral de una función  $n_k$  que depende exclusivamente de la variable  $k$ , con  $k \equiv |\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots k_d^2}$ , y que nos permite el conteo del número de partículas en los estados excitados.

Debido a que la función a integrar en (A.1) depende únicamente de  $k$ , mediante un cambio de variables podemos llevar la integral anterior a una integral de la forma

$$\int n_k S_d(k) dk, \quad (\text{A.2})$$

donde  $S_d(k)$  denota el área de la superficie de una esfera de radio  $k$ , en un espacio de  $d$  dimensiones.

Para realizar el cambio de variable, consideremos un espacio  $d$  dimensional en el que la posición de un punto se denota por el vector  $\mathbf{k}$ , de componentes cartesianas  $(k_1, k_2, \dots k_d)$ . El elemento de volumen,  $dV_d$ , en este espacio sería

$$dV_d = dk_1 dk_2 \dots dk_d = \prod_{i=1}^d dk_i. \quad (\text{A.3})$$

Obviamente, el volumen  $V_d$  de una esfera de radio  $k$  en este espacio sería proporcional a  $k^d$ , así que podemos escribirlo como

$$V_d(k) = C_d k^d, \quad (\text{A.4})$$

con  $C_d$  una constante que depende únicamente de la dimensión del espacio. De esta forma, el elemento de volumen  $dV_d$  podría también escribirse como

$$dV_d = S_d(k) dk = d C_d k^{d-1} dk, \quad (\text{A.5})$$

donde  $S_d(k)$  denota el área de la superficie de la esfera. Obsérvese que nuestro objetivo es determinar  $C_d$  o  $S_d(k)$ , de acuerdo con la ecuación (A.2), ya que de igualar (A.3) y (A.5) tenemos

$$dV_d = \prod_{i=1}^d dk_i = S_d(k) dk = d C_d k^{d-1} dk. \quad (\text{A.6})$$

Para evaluar  $C_d$  haremos uso de la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \pi^{1/2}. \quad (\text{A.7})$$

Multiplicando  $n$  de estas integrales, cada una correspondiente a una coordenada  $k_i$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \pi^{d/2} &= \int_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \int_{k_d=-\infty}^{\infty} \exp(-k_1^2) \exp(-k_2^2) \dots \exp(-k_d^2) dk_1 dk_2 \dots dk_d \\ &= \int_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \int_{k_d=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sum_{i=1}^d k_i^2\right) \prod_{i=1}^d dk_i \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-k^2) d C_d k^{d-1} dk \\ &= d C_d \int_0^{\infty} \exp(-k^2) k^{d-1} dk \\ &= d C_d [1/2 \cdot \Gamma(d/2)], \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde hemos hecho uso de que

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha y^2) y^\nu dy = \frac{1}{2\alpha^{(\nu+1)/2}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right), \quad \nu > -1, \quad (\text{A.9})$$

tomando  $\alpha = 1$ . Así, llegamos a que

$$C_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)\Gamma(d/2)} = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}. \quad (\text{A.10})$$

Por lo que, en consecuencia,

$$V(k) = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} k^d, \quad (\text{A.11})$$

y

$$S_d(k) = \frac{dV}{dk} = d \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} k^{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} k^{d-1}, \quad (\text{A.12})$$

Por lo tanto la integral (A.1) es equivalente a la integral

$$\int n_k \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} k^{d-1} dk = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int n_k k^{d-1} dk, \quad (\text{A.13})$$

de acuerdo con la ecuación (A.2).

# Apéndice B

## B Integral de Bose

A lo largo del Capítulo 2 aparecen con bastante frecuencia las integrales del tipo

$$\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx, \quad (\text{B.1})$$

por lo que vale la pena dedicar este Apéndice para resolver tal integral. La integral anterior puede reescribirse como

$$\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \int_0^\infty zx^{\sigma-1}e^{-x}(1 - ze^{-x})^{-1} dx. \quad (\text{B.2})$$

Desarrollando  $(1 - ze^{-x})^{-1}$  en potencias de  $ze^{-x} < 1$ , tenemos

$$(1 - ze^{-x})^{-1} = 1 + ze^{-x} + (ze^{-x})^2 + (ze^{-x})^3 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} (ze^{-x})^l,$$

e introduciendo esto en (B.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx &= \int_0^\infty zx^{\sigma-1}e^{-x} \sum_{l=0}^{\infty} (ze^{-x})^l dx \\ &= \int_0^\infty x^{\sigma-1} \sum_{l=1}^{\infty} (ze^{-x})^l dx \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} z^l \int_0^\infty x^{\sigma-1} e^{-xl} dx. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable  $y = xl$  en la integral anterior, tenemos que

$$\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^\sigma} \int_0^\infty e^{-y} y^{\sigma-1} dy.$$

Y, por definición

$$\Gamma(\nu) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt, \quad (\text{B.3})$$

así que

$$\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \Gamma(\sigma) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^\sigma}. \quad (\text{B.4})$$

Pero la última suma es la *función de Bose* de orden  $\sigma$ ,  $g_\sigma(z)$ , la cual podemos reescribir como

$$g_\sigma(z) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx. \quad (\text{B.5})$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \Gamma(\sigma)g_\sigma(z). \quad (\text{B.6})$$

De la definición (B.5), puede verse que,  $g_\sigma(z)$  es una función monótona creciente en  $z$ . También, de la definición misma, se sigue que cuando  $z \ll 1$ ,  $g_\sigma(z)$  se comporta como  $z$  para toda  $\sigma$ , es decir, si  $z \ll 1$ ,  $g_\sigma(z) \approx z$ . El valor límite que, para nuestro trabajo, puede tener  $z$ , es  $z = 1$ . Cuando  $z \rightarrow 1$  y  $\sigma > 1$ ,  $g_\sigma(z)$  se comporta como la *función zeta de Riemann*, ya que entonces,

$$g_\sigma(1) = 1 + \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \dots = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^\sigma} \equiv \zeta(\sigma), \quad (\sigma > 1). \quad (\text{B.7})$$

Algunos de los valores numéricos de  $\zeta(\sigma)$  se presentan a continuación

$$\begin{aligned} \zeta(3/2) &\simeq 2.612, & \zeta(2) &= \pi^2/6 \simeq 1.645, \\ \zeta(5/2) &\simeq 1.341, & \zeta(3) &\simeq 1.202, \\ \zeta(7/2) &\simeq 1.127, & \zeta(4) &= \pi^4/90 \simeq 1.082. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

De derivar  $g_\sigma(z)$  respecto a su argumento se obtiene la siguiente relación de recurrencia

$$z \frac{\partial}{\partial z} [g_\sigma(z)] \equiv \frac{\partial}{\partial(\ln z)} g_\sigma(z) = g_{\sigma-1}(z). \quad (\text{B.9})$$

Para los casos en que  $\sigma \leq 1$ , de la ecuación (B.5), puede verse que  $g_\sigma(z)$  diverge conforme  $z \rightarrow 1$ . Particularmente, cuando  $\sigma = 1$ , se tiene

$$g_1(z) = \int_0^\infty \frac{1}{z^{-1}e^x - 1} dx = -\ln(1-z), \quad (\text{B.10})$$

lo que diverge logarítmicamente a  $\infty$  conforme  $z \rightarrow 1$ .

## Referencias

- [1] F. London, "On the Bose-Einstein condensation," Phys. Rev. **54**, 947 (1938); F. London, "The  $\lambda$ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy," Nature **141**, 643 (1938).
- [2] L. D. Landau, "The theory of superfluidity of helium II," J.Phys. *U.S.S.R.* **5**, 71 (1941).
- [3] J. L. Yarnell, G. P. Arnold, P. J. Bendt y E. C. Kerr, "Excitations in Liquid Helium II: Neutron Scattering Measurements," Phys. Rev. **113**, 1379 (1959).
- [4] A. Sakhel, H. R. Glyde, "Excitations and Bose-Einstein condensation in superfluid  $4\text{He}$ ," Phys. Rev. B **70**, 144511 (2004).
- [5] R. P. Feynman, "Atomic theory of the  $\lambda$  transition in helium," Phys. Rev. **91**, 1291 (1953); R. P. Feynman, "Atomic theory of liquid helium near absolute zero," Phys. Rev. **91**, 1301 (1953).
- [6] R. P. Feynman, "Atomic theory of the two-fluid model of liquid helium," Phys. Rev. **94**, 262 (1954).
- [7] J. S. Brooks, R. J. Donnelly, "The Calculated Thermodynamic Properties of Superfluid Helium-4," J. Phys. Chem. Ref. Data, Vol. 6, No. 1, pag. 51 (1977).
- [8] R. A. Cowley, A. D. B. Woods, "Inelastic scattering of thermal neutrons from liquid helium," Can. J. Phys. **49**, 177 (1971).
- [9] C. J. Gorter, H. B. G. Casimir, "On supraconductivity I," Physica **1**, 305 (1934).
- [10] C. Bloch, "On the theory of imperfect fermi gases," Physica **26**, Suplemento 1, S62 (1960).
- [11] R. Ogg, "Bose-Einstein condensation of trapped electron pairs. Phase separation and superconductivity of metal-ammonia solutions," Phys. Rev. **69**, 243 (1946); R. Ogg, "Erratum: Bose-Einstein condensation of trapped electron pairs. Phase separation and superconductivity of metal-ammonia solutions," Phys. Rev. **69**, 544 (1946).
- [12] M. R. Schafroth, "Theory of superconductivity," Phys. Rev. **96**, 1442 (1954).
- [13] J. Baarden J, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, "Theory of superconductivity," Phys. Rev. **108**, 1175 (1957)
- [14] M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, V. V. Tolmachev, "Cooper pairs as resonances," Physica C **364-365**, 95 (2001).
- [15] V. C. Aguilera-Navarro, M. de Llano, M. A. Solís, "Bose-Einstein condensation for general dispersion relations," Eur. J. Phys. **20**, 177 (1999).

- [16] S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares, “Cooper pair dispersion relation for weak to strong coupling,” *Phys. Rev. B* **62**, 8671 (2000).
- [17] F. J. Sevilla Pérez, “Gas de bosones atrapados por potenciales armónicos,” Tesis de Licenciatura, Fac. de Ciencias, UNAM (2000).
- [18] W. Pauli, F. J. Belinfante, “On the statistical behaviour of known and unknown elementary particles,” *Physica* **7** 177 (1940)
- [19] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman y E. A. Cornell, “Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor,” *Science* **269**, 198-201, (1995).
- [20] M. Casas, S. Fujita, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo y M. A. Solís, “The Cooper pair dispersion relation,” *Physica C* **295**, 93 (1998).
- [21] G. Cook, R.H. Dickerson, “Understanding the chemical potential,” *Am. J. Phys.* **63**, 737 (1995).
- [22] F. J. Sevilla, M. Grether, M. Fortes, M. de Llano, O. Rojo, M. A. Solís y A. A. Valladares, “Low-dimensional BEC,” *Journal of Low Temperature Physics*, **121**, 281 (2000).
- [23] E. Cetina, F. Magaña, A. A. Valladares, “The free-electron gas in  $n$  dimensions,” *Am. J. Phys.* **45**, 960 (1977).
- [24] G. Fischer, “On phase transformations,” *Am. J. Phys.* **25**, 100 (1957).