UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN PSICOLOGÍA
RESIDENCIA EN PSICOLOGÍA ESCOLAR

REPORTE DE EXPERIENCIA PROFESIONAL

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN A TRAVÉS DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN PSICOLOGÍA

PRESENTA:

MARÍA CRISTINA TÉLLEZ GUTIÉRREZ

DIRECTORA DEL REPORTE:
DRA. ROSA DEL CARMEN FLORES MACÍAS

JURADO DE EXAMEN:
MTRA. HILDA PAREDES DÁVILA
DRA. BENILDE GARCÍA CABRERO
MTRA. MARTHA ROMAY MORALES
MTRA. ROSALINDA LOZADA GARCÍA
MTRA. ROXANNA PASTOR FASQUELLE
MTRA. NORMA COFFIN CABRERA

MÉXICO,2006

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Psicología. Por la formación que me han ofrecido y por el orgullo de ser universitaria.

A la Dra. Rosa del Carmen Flores
Por compartir sus conocimientos y experiencia con gran sencillez. Por brindarme su confianza y su amistad.

A la Mtra. Hilda Paredes
Por sus amables comentarios y sugerencias para el presente trabajo.

A los alumnos del PAES
Por permitirme aprender junto con ellos

A mis compañeros de la residencia
Por ser el mejor grupo que he tenido. Por todos los momentos que compartimos. Todos son excelentes personas, grandes profesionales y sobre todo, inigualables amigos. Cada uno es especial.
Gina: Eres una gran amiga, tu apoyo es muy valioso para mí.
Liz: Tu sonrisa te distingue, la buena actitud con la que afrontas todo es admirable.
Mónica: Transmites tu deseo de aprender y de superarte.
Rosy: Me mostraste lo importante que es tener esperanza.
Raúl: Tu sentido del humor aligera cualquier momento por difícil que parezca.
Andrés: Siempre tienes un gesto amable y generoso.
Gracias a todos.

Dedicatorias

A mi madre

Por el amor incondicional que constantemente me demuestra. Por ser la mejor.

A Raúl Álvaro

Compartió su tiempo para el logro de esta meta y me motiva a dar lo mejor de mí. Por su incomparable apoyo. Por estar a mi lado

A mis hermanos
Porque siempre he contado con su apoyo y ejemplo

A Rebe, J. Armando, Juan Carlos, Benjamín y Paco
Porque me contagian su entusiasmo y juventud

A la memoria de mi padre
Porque a pesar de ya no estar físicamente, está siempre presente

INDICE

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se inserta en el Programa Alcanzando el Éxito en Secundaria (PAES), que es una sede de la Residencia en Psicología Escolar del Programa de Maestría en Psicología

El PAES tiene como uno de sus propósitos que se desarrollen productos tecnológicos, como es el caso de los manuales, que contribuyan a resolver las necesidades detectadas en los alumnos de secundaria que atienden y que sirvan de apoyo para otros tutores y demás profesionales de la educación.

Los productos tecnológicos son realizados conjugando la literatura teórico metodológica especializada en un campo y la experiencia que se tiene de trabajo directo con los alumnos. Tal es el caso del manual para la enseñanza de la división que se presenta en este reporte.

El manual se enfoca en el tema de la división, debido a que entre los alumnos que asisten al PAES se han observado dificultades en matemáticas y, en particular en la realización de este algoritmo. Esto repercute en sus logros en la materia misma de matemáticas y en otras como Física o Química, igualmente en el entendimiento de las relaciones de proporción y reparto que el alumno enfrenta en su vida diaria.

El presente manual se realizó considerando que tradicionalmente se ha observado que los estudiantes de todos los niveles educativos enfrentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, lo cual repercute en diferentes aspectos, como son: el alto índice de reprobación que se presenta en esta asignatura, el rechazo hacia la misma y la aversión que muestran algunos alumnos respecto a todo aquello que se asocie con el empleo del conocimiento acerca de los números y sus operaciones.

Así mismo se consideró que las actitudes que los estudiantes adoptan hacia las matemáticas, están estrechamente relacionadas con las creencias que tienen acerca de lo que implican. Desafortunadamente estas actitudes son negativas pues generalmente, los alumnos ven a las matemáticas únicamente como conjuntos de reglas, pasos o fórmulas sin sentido para ellos que deben memorizar y aplicar cuando les sea indicado.

Igualmente se consideró que las creencias que tienen los estudiantes, pueden tener un fuerte impacto en el interés y en la motivación que muestren para realizar tareas que involucren el empleo de las matemáticas.

El caso particular del algoritmo de la división, representa mayores complicaciones para los alumnos, debido a que éste tiene características particulares que lo distinguen de los demás (implica las cuatro operaciones, hay dos resultados, etc.), y porque a causa de las prácticas de enseñanza tradicional, los estudiantes están acostumbrados a mecanizar y memorizar los pasos claves para resolverlos, sin que medie en ellos un proceso de comprensión de lo que significan (Uriegas, 1996).

De esta manera, algunas de las dificultades específicas que presentan los alumnos se asocian con la manera en que les ha sido enseñado el algoritmo en la escuela. Es decir, en muchos casos han “aprendido” a resolver el algoritmo de una manera descontextualizada y aislada, que no tiene sentido para ellos. Lo cual ocasiona que se les dificulte comprender su significado, y por lo tanto, que no sepan emplearlo adecuadamente para solucionar problemas cotidianos.

Por ello, las propuestas de enseñanza actuales enfatizan que los alumnos comprendan los conceptos y los encuentren aplicables a su vida cotidiana y proponen la enseñanza de los algoritmos dentro del contexto de la solución de problemas (Flores,2002).

Considerando que los errores son un indicador del desarrollo de su conocimiento, comprender el significado de los errores de los alumnos es clave para generar apoyos que les sirvan para solucionarlos. El presente manual para la enseñanza de la división contiene algunos elementos que permitirán comprender las dificultades de un alumno así como el origen de tales dificultades.

Asimismo, se presenta una propuesta para la enseñanza del algoritmo de la división, con la cual se pretende corregir algunos de los errores más comunes que presentan los alumnos. Dicha propuesta está enfocada en la solución de problemas y sugiere el empleo de material manipulable, que facilitará la comprensión de las relaciones numéricas implícitas en el sistema decimal y que son necesarias para dar sentido a los procedimientos del algoritmo.

Como fundamento de la propuesta, en la primera parte del presente trabajo, se presentan las características del Programa Alcanzando el Éxito en Secundaria (PAES) y de los alumnos a los que atiende. Después se abordan los diferentes aspectos relacionados con sus dificultades en la resolución del algoritmo de la división.

En la segunda parte del trabajo se presenta la propuesta del manual para la enseñanza de la división, que paso a paso guía el proceso de enseñanza y resalta aspectos que son centrales para que los alumnos aprendan a usar esta herramienta durante la solución de problemas.

1 EL PROGRAMA ALCANZANDO EL ÉXITO EN SECUNDARIA (PAES)

Comenzaremos en este apartado por describir los antecedentes y características del PAES, que es el programa dentro del cual se realizó el presente trabajo.

El Programa Alcanzando el Éxito en Secundaria tiene como objetivo atender a estudiantes de secundaria con problemas de aprendizaje. Se considera que la mayoría de los alumnos que reprueban o desertan, no han desarrollado de manera óptima las competencias cognoscitivas, afectivas y sociales que son necesarias para responder a las demandas escolares y no poseen la motivación necesaria para involucrarse en ellas (Stevens y Shenker,1992; Flores,2001).

Por lo cual, el PAES intenta brindarles a estos estudiantes el apoyo necesario para que desarrollen dichas competencias y puedan terminar sus estudios de secundaria.

El PAES surge de las propuestas del programa Taylor, desarrollado por la Dra. Stevens y colaboradores en la Universidad de McGill en Canadá para atender a alumnos con problemas de aprendizaje y por las propuestas de la Dra. Flores y la Dra. Macotela de la Facultad de Psicología de la UNAM, integrando ambas experiencias para la creación del programa.

El programa apoya a los estudiantes en los aspectos en los que se manifiestan sus dificultades, esto es, en el aspecto cognoscitivo, emocional y social. Las metas principales del programa son las siguientes (Flores,2001):

- Ayudar a los alumnos para que reconozcan y utilicen sus propias fortalezas para subsanar sus dificultades.
- Apoyar a los alumnos para que adquieran estrategias cognoscitivas, metacognoscitivas y motivacionales que les permitan planear, desarrollar y evaluar sus tareas académicas.
- Apoyar a los alumnos para que generalicen las estrategias aprendidas para la resolución de conflictos sociales de una manera autónoma y reflexiva.
- Propiciar una ambiente de aprendizaje motivante en el que el estudiante tenga oportunidad de experimentar situaciones de éxito que lo lleven a mejorar su percepción de eficacia en la realización de tareas académicas.
- Ayudar a los alumnos a que aprendan a entender y controlar su conducta.

El programa funciona en horario extraescolar dos veces por semana en sesiones de dos horas de duración. La forma de trabajo es en sesiones de tutoría entre un tutor y tres alumnos, donde los alumnos trabajan en el logro de las metas que ellos mismos se plantean, las cuales generalmente consisten en la realización de actividades escolares como hacer tareas, preparar exámenes o exposiciones.

La función del tutor es generar un ambiente de aprendizaje motivante y tomar la actividad-meta de los alumnos como punto de partida para la enseñanza y desarrollo de estrategias cognoscitivas y metacognoscitivas por parte del alumno. Cuando los alumnos no tienen una tarea escolar específica, se les apoya para que propongan una actividad a realizar que puede consistir en lectura, escritura o matemáticas.

Asimismo, los alumnos pueden participar también en los diferentes programas y talleres desarrollados y llevados a cabo por los diferentes tutores como parte de las actividades de investigación y desarrollo de productos tecnológicos del PAES, los cuales se han enfocado en diferentes aspectos como son: comprensión lectora, estrategias para el aprendizaje del inglés, toma de apuntes; y en el área de matemáticas, en fracciones y álgebra, entre otros.

En general en el PAES se ayuda a los alumnos a que tomen control sobre su aprendizaje, reconozcan y usen sus propias fortalezas y a que desarrollen mejores estrategias (Flores,2001).

Dado que los estudiantes que asisten al Programa son alumnos con problemas de aprendizaje, a continuación se aborda este tema y se describen algunas de sus características.

2 PROBLEMAS DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS

En la investigación relacionada con los problemas de aprendizaje, a lo largo del tiempo, se ha intentado describir principalmente el origen de tales problemas, y después de varias controversias, finalmente se ha reconocido que están relacionados con una combinación de factores que corresponden tanto al individuo como al medio ambiente en el que se desenvuelve. Entre los factores individuales se ubican disfunción neurológica, déficits en estrategias y/o habilidades cognoscitivas, diferencias en el desarrollo y factores motivacionales; en tanto que como factores del medio ambiente se mencionan programas instruccionales pobres, descuido paterno y factores culturales y socio-económicos (Adelman,1994).

Cuando se menciona el término de "problemas de aprendizaje" es común que existan diferentes interpretaciones que dificultan su comprensión ya que a pesar de que es un tema reconocido y estudiado aún no se ha llegado a una definición ampliamente aceptada del mismo (Defior,2000).

Los problemas de aprendizaje se pueden abordar desde diferentes perspectivas y en las distintas formulaciones del concepto existen algunos criterios que coinciden en cierta medida como son el fracaso en las tareas, discrepancia entre rendimiento y capacidad, factores excluyentes, etc. (Flores,2001).

De manera general, se consideran como problemas de aprendizaje aquellos que experimentan los estudiantes durante su vida escolar y comprenden las dificultades específicas en lectura, escritura y matemáticas.

Un alumno que tiene dificultades en el aprendizaje presenta las siguientes características (Flores,2001):

En el aspecto cognitivo:

- Responden de manera impulsiva, no planifican ni evalúan las estrategias que utilizan, por lo que responden de manera rápida y con errores.
- Atienden a detalles irrelevantes o insignificantes a la situación de aprendizaje.
- Tienden a actuar de forma dependiente a otros (maestros y /o compañeros) cuando se enfrentan a situaciones académicas que requieren solucionar.
- Tienen dificultad para organizar y coordinar actividades cognoscitivas en forma simultánea o secuencial.
- Carecen de flexibilidad en la aplicación de estrategias.
- Se les dificulta emplear estrategias meta-cognoscitivas como planear, monitorear, verificar y evaluar durante las actividades de solución de problemas o durante el aprendizaje.

Además de las características cognoscitivas mencionadas, los alumnos con dificultades en el aprendizaje presentan también algunas características socio-emocionales y motivacionales debido a que tienen toda una historia de experiencias de fracaso y frustración en relación con su actividad académica; entre tales características destacan las siguientes (Flores,2001; Bender,1992):

- No creen que sus esfuerzos tengan resultados positivos, por lo que están poco dispuestos a enfrentar tareas que perciben difíciles.
- Establecen metas y estándares personales de éxito ajenos a sus competencias por lo que poseen una percepción de auto-eficacia pobre.
- Tienen un auto-concepto pobre y perciben sus competencias académicas de manera devaluada.
- Tienden a evadir la tarea o a reaccionar de manera negativa debido a que sus habilidades para afrontar situaciones de presión son muy deficientes.
- Atribuyen sus éxitos y fracasos en actividades escolares a causas fuera de su control.
- Se muestran poco motivados intrínsecamente para realizar tareas escolares.

Se considera que debido a sus características estos alumnos requieren de un ambiente motivante ya que, si bien sus deficiencias académicas pueden ser el origen de sus problemas en la escuela, esta situación tiene como consecuencia la falta de motivación y una situación emocional inadecuada, lo cual lleva al alumno a un círculo de fracaso-frustración, del que el alumno no puede salir a menos de que empiece a experimentar situaciones que logra controlar y en las que tenga éxito.

Las dificultades que presentan estos alumnos tienden a incrementarse con el tiempo, tal es el caso de los estudiantes que asisten al PAES que son adolescentes que han experimentado lo anterior a lo largo de toda su vida escolar. Los déficits comunes que muestran los alumnos con problemas de aprendizaje se ubican en diferentes áreas tales como atención, lenguaje y memoria, entre otras (Bender,1992).

Respecto a las dificultades de aprendizaje en matemáticas, se ha encontrado que los alumnos que las presentan, pueden también manifestar problemas en algunas otras habilidades tales como escritura, relaciones espaciales, lateralidad y lectura.

En relación con los tipos de problemas que pueden presentar los alumnos con dificultades en matemáticas, se mencionan los siguientes (Wallace y Mc Loughlin,1979; Wallace, Larsen y Elrksnin,1992; Bender,1992):

- Discriminación de figuras: dificultades para diferenciar entre una figura geométrica y otra.
- Discriminación de tamaños: Falta de habilidad para discriminar entre varios tamaños, lo cual juega un papel importante en la comprensión de los números.
- Correspondencia uno a uno: este conocimiento es considerado crucial para el desarrollo del significado de conteo e implica que a cada objeto de una colección le corresponde un solo número.

Cuando no se domina, se puede dejar un objeto sin asignarle un número o contar alguno dos veces.

- Conteo: Dificultad para contar objetos que difieren en tamaño o forma, los que se deben mover para contarlos, los que tienen varias caras o aquellos que no están presentes simultáneamente.
- Asociación auditiva-visual: Se manifiesta en dificultad para asociar la palabra hablada y el símbolo escrito, por ejemplo, la palabra seis con el símbolo 6. Lo cual genera dificultad para reconocer y escribir algunos números.
- Habilidades de cómputo: Problemas específicos con las operaciones matemáticas básicas de adición, sustracción, multiplicación y división.
- Medición: Dificultades para comprender mediciones de líquidos, tiempo, longitud.
- Solución de problemas: Dificultad para comprender los problemas que se les plantean, debido a una inadecuada comprensión lectora o dificultades en habilidades de razonamiento y síntesis.

En cuanto a las dificultades que tienen estos alumnos específicamente con los algoritmos, se ha encontrado que debido a que los algoritmos están compuestos por secuencias ordenadas de pasos que permiten llegar a una solución correcta, los alumnos pretenden seguir éstos con cierta rigidez, en muchas ocasiones sin comprenderlos, lo cual los lleva a cometer diversos errores como por ejemplo (Defior,2000):

- Sustituir, invertir u omitir pasos

- Colocar los números en posiciones incorrectas
- Interpretar los signos + - x de manera inadecuada.

Más específicamente en las diferentes operaciones, algunos ejemplos son los siguientes (Mercer,1991):

- Operar en un sentido contrario (en adición, sustracción y multiplicación de izquierda a derecha, y en división de derecha a izquierda)
- Omitir ceros
- Olvidar “llevar” o hacerlo inadecuadamente
- Reagrupar incorrectamente o no hacerlo

Debido a las dificultades que para los alumnos con problemas de aprendizaje representa aprender los algoritmos, en el presente trabajo se considera que el aprendizaje de los mismos no debe verse únicamente como la adquisición mecánica de pasos, sino que debe promoverse que los alumnos comprendan los principios que sustentan tales pasos, para que puedan así tener un sentido para ellos.

En este sentido se considera que lo que debe interesar cuando un alumno tiene dificultades no es centrarse únicamente en el resultado, sino que deben tomarse en cuenta los mecanismos cognoscitivos que está utilizando para llegar a esa respuesta, por lo que el análisis de los posibles errores en la ejecución de la tarea, en este caso en un algoritmo de división, es un procedimiento imprescindible para evaluar, determinar y localizar donde se encuentran las dificultades de un alumno (Defior,2000).

Dado que hablamos de las dificultades que presentan los alumnos en el algoritmo de la división y de la necesidad de que el aprendizaje de los mismos no se dé de una manera mecánica y carente de comprensión, a continuación se aborda el tema de la enseñanza de los algoritmos y de las dificultades que se advierten en la misma.

3 LA ENSEÑANZA DE LOS ALGORITMOS

Se considera que los algoritmos son una herramienta cultural que se ha desarrollado como una forma de ayudar a que la gente resuelva de manera más eficiente los problemas cotidianos a los que se enfrenta. Sin embargo, el proceso para que éstos se volvieran un conocimiento universal data de hace muchos siglos (Flores,2005).

Pese a que se reconoce la importancia que tienen los algoritmos como herramienta, en la actualidad, se observa que muchos alumnos conocen los algoritmos pero desconocen las situaciones apropiadas para su aplicación ya que no saben aplicarlos de manera correcta a problemas de la vida diaria; la explicación para esto tal vez se encuentre en la manera en que los algoritmos son enseñados en la escuela (Flores,2005; Carraher, Carraher y Schliemann,2002).

Es común observar que en la escuela los alumnos aprenden a sumar, restar, multiplicar y dividir de una manera repetitiva, esto es, aprendiendo pasos y reglas de una manera rígida y restrictiva , muchas veces carente de comprensión, lo cual no favorece que el alumno aprenda a utilizar tales algoritmos (Carraher, Carraher y Schliemann,2002).

Se ha observado que entre las principales causas de lo anterior se encuentran las siguientes (Flores,2005):

- Se enseña la definición de los conceptos, se pasa después a su ejercitación y, por último, a su aplicación para solucionar problemas.
- Se enfatiza más el aprendizaje del procedimiento que el significado del algoritmo.
- No se valoran los procedimientos no algorítmicos, por lo que no se aprecian las respuestas espontáneas de los alumnos.
- No se reconoce a los errores como valiosos para comprender los procesos de comprensión de los alumnos y como una oportunidad de aprender.

Todo lo anterior tiene como consecuencia que los alumnos no sepan reconocer qué algoritmo emplear para resolver un problema, que cuando se les cambia el formato de los problemas ya no puedan resolverlos, que se sientan limitados para emplear formas no algorítmicas alternativas para solucionar un problema y finalmente que la comprensión que tienen de los algoritmos y de su utilidad resulte superficial (Marton y Neuman,1996; Flores,2005).

Al respecto, Carraher, Carraher y Schliemann (2002) presentan un ejemplo obtenido en una de sus investigaciones sobre las diferencias entre las matemáticas enseñadas en la escuela y las matemáticas que los niños emplean en su vida diaria. En el ejemplo se muestra la dificultad que enfrenta un niño al tratar de resolver de forma escrita un problema de división en el que intentó seguir el procedimiento para resolver divisiones que su maestra le había enseñado.

Al mencionar en voz alta el procedimiento que siguió, podía notarse que trató de seguir las reglas enseñadas, pero no logró llegar al resultado correcto debido a que los pasos que aprendió y siguió no tenían sentido para él. Lo anterior era notorio pues nombraba los números sin considerar su valor relativo.

Sin embargo, cuando ese mismo niño resolvió el problema de manera oral lo hizo de manera correcta; al cuestionarlo acerca de cómo lo había hecho mencionó que en su imaginación había repartido y se mostraba satisfecho porque ese resultado sí le parecía coherente con el problema que tenía que resolver.

El ejemplo anterior denota que la noción de dividir (distributividad) no tienen relación con los pasos del algoritmo en la forma en que se enseña; la relación se pierde en el momento en que se enseña una secuencia de pasos sin buscar su comprensión.

Debido a lo anterior es que cuando hablamos sobre la enseñanza de la aritmética debemos comprender que nuestras ideas sobre ésta dependen de cómo entendemos que los niños aprenden. Por lo que en la medida en que comprendamos cómo aprenden, podremos intentar facilitar su aprendizaje, ya que la metodología que empleemos interferirá directamente en su proceso de aprendizaje; esto es, que si se enseñan únicamente los algoritmos, éstos se toman como reglas impuestas por los adultos que los niños sólo consiguen explicar diciendo que así se lo enseñó el maestro, por lo que las dificultades que se manifiestan en éste reflejan que los alumnos no le atribuyen un significado al algoritmo que emplean, por que lo ven como un trabajo con números aislados de los datos de una situación (Moreno,1996; UPN.,1994).

En relación con lo anterior, es importante considerar que al trabajar con alumnos con problemas de aprendizaje, dadas sus características, resulta aún más relevante enfatizar en la comprensión del significado de los algoritmos ya que estos alumnos requieren de más apoyo que les permita tener aprendizajes que resulten significativos para ellos, evitando que se produzca únicamente un conocimiento memorístico sin sentido, por lo que debe buscarse que los algoritmos se presenten para los alumnos como una forma de representar y resolver lo que ya saben.

De esta manera se confronta la noción implícita y aceptada en la escuela de que primero se deben enseñar a los niños las operaciones aritméticas aisladas de cualquier contexto y presentar después esas mismas operaciones en el contexto de solución de problemas (Carraher, Carraher y Schliemann,2002).

Como se ha visto, el hecho de que los alumnos en muchas ocasiones no comprendan los algoritmos se debe en gran medida a que desconocen los principios que los sustentan, lo cual los lleva a cometer errores al resolverlos. Los errores más frecuentes que presentan los alumnos en división así como su origen se explicarán a continuación.

4 ERRORES SISTEMÁTICOS EN LA REALIZACIÓN DE LOS ALGORITMOS

a) Teoría de los campos conceptuales

La teoría de los campos conceptuales (Vergnaud,1996), brinda una estructura para estudiar las competencias y actividades cognitivas complejas y la forma como se desarrollan éstas a través de la experiencia y del aprendizaje.

De acuerdo con esta teoría, podemos considerar a la noción de dividir como un conocimiento que constituye en sí un concepto, por lo cual es importante tener presente que el conocimiento matemático al igual que todo conocimiento se deriva de la adaptación del individuo a su medio ambiente, a través de una serie de asimilaciones y acomodaciones. La acción es el factor principal en el proceso de conocer así como su interiorización progresiva; la acción es transformada en conocimiento matemático por la abstracción de las propiedades y relaciones características de las acciones del individuo, constituyéndose así la acción en la fuente de la formación de conceptos (Brun,1996; Vergnaud,1996). Es decir, un alumno construye el concepto de dividir a través de sus acciones y de su experiencia en las mismas.

Asimismo, un concepto no toma significado de una sola clase de situaciones y una situación no es analizada por el significado de un solo concepto. En el caso de la división, las situaciones que se presentan son de reparto y de distribución, para las cuales se enseña en la escuela el uso del algoritmo para resolverlas. Sin embargo, durante el proceso de construcción y adaptación del conocimiento en un niño se presentan continuidades y discontinuidades de las cuales la unidad básica es el esquema, el cual es el que organiza y al mismo tiempo da sentido a las acciones.

Es decir, en el caso de la división, se emplea el uso del algoritmo como el esquema que deberá organizar y darle sentido a la acción de dividir, lo cual como anteriormente se vió, no ocurre de esta forma debido a que en la práctica común el algoritmo se enseña como algo ajeno al individuo que está aprendiendo.

De acuerdo con Brun (1996), los esquemas están caracterizados por sus unidades estructurales y funcionales, ya que son por un lado, productos de la actividad cognitiva, y por otro, las herramientas de la asimilación. De ahí la importancia de que el alumno tenga claro los principios que sustentan al algoritmo y no únicamente se le enseñe éste de manera aislada.

Si se analiza cómo funcionan los esquemas en tareas de solución de algoritmos, ciertos errores que presentan los alumnos, pueden ser considerados como trazos de la construcción progresiva de un esquema de algoritmo.

Se ha visto que los errores que cometen los niños en las operaciones matemáticas no son aleatorios o producto de la falta de atención, sino que señalan la presencia de "vicios" procedimentales que aparecen sistemáticamente, esto se da porque los niños que no comprenden plenamente las bases matemáticas de las rutinas del cálculo inventan estrategias simplificadoras que son incorrectas, lo que ocurre en algunos casos es que cuando los niños se enfrentan a una situación en la que no saben cómo actuar tratan de salir de ella inventando un modo de operar a partir de los conocimientos y procedimientos que ya poseen (Defior,2000)

En el caso de los algoritmos, el aspecto mecánico es remarcable y en cierto modo, organiza la acción; sin embargo, este aspecto mecánico no previene al alumno para tener el control sobre las condiciones de realización de la operación.

Cuando resuelven un algoritmo, los alumnos son capaces de generar una serie de acciones diferentes que dependen de las características de la situación; si llevar o no, si intercalar un cero o no, etc.; es decir, en su conducta se incluyen tanto acciones mecánicas como decisiones conscientes, sin embargo, considerando que los algoritmos son esquemas, éstos son frecuentemente eficientes pero no siempre efectivos (o eficaces), que sería llegar a la respuesta correcta en un número limitado de pasos (Brun,1996).

En el contexto de la escuela, los errores en la solución de algoritmos son vistos como fallas "específicas en el algoritmo", es decir, los maestros usualmente ven el error como parte de un paso dentro del procedimiento del algoritmo, por lo que lo ven de manera aislada o bien se centran en el paso particular e intentan corregirlo. Sin embargo, para comprender los errores observados en los alumnos, se debe dejar de lado el énfasis en corregirlos y en su lugar se debe considerar un error como algo organizado pero que está sujeto a adaptaciones, ya que para comprender los errores se requiere localizar las dimensiones tanto cognitivas como didácticas de la estructura interpretativa del alumno (Graeber y Baker,1991).

En este sentido, es importante considerar que los errores encontrados en los alumnos generalmente tienen un carácter organizado por lo que se les conoce como errores sistemáticos; esto es, son regularidades entre diferentes individuos y en el mismo individuo en diferentes momentos.

Esos errores son caracterizados por una lógica interna la cual puede ser reproducida ya que existen modelos que tienen un valor real predictivo pues describen los procesos implantados por los alumnos, y proporcionan claves que indican la interpretación y el uso que los alumnos han hecho de las reglas que les han sido enseñadas.

b) Errores cometidos en la realización del algoritmo de la división

En el caso de las operaciones de división con residuo, que es el tema del presente manual, se han encontrado una gran variedad de errores, los cuales se clasifican en tres categorías principales (Brun,1996):

- Dominio de la relación numérica entre dividendo, divisor, cociente y residuo.

Por ejemplo:

- ✓ Problemas cuando el dividendo es igual que el divisor

9 | 94

- ✓ Cuando el residuo en el dividendo es menor que el divisor

2
42 | 85
16

- ✓ Cuando el residuo en el dividendo es más grande que el divisor

85
7 | 603
43
8

- ✓ Cuando el residuo es más pequeño pero cercano al divisor

2
39 | 81
37

- ➢ Operaciones intermedias, en particular la resta.

- ✓ Cometer errores específicos en suma, resta o multiplicación
- ✓ Manejo inadecuado de las tablas de multiplicar
- ✓ Olvidar “llevar”
- ✓ Estimaciones incorrectas

- ➢ Colocación de los datos en el diagrama.

- ✓ Colocar los datos en el lugar incorrecto
- ✓ Alterar el orden de los pasos
- ✓ Crear combinaciones propias de las reglas
- ✓ Estimaciones incorrectas

Dentro de la situación de cómputo, el alumno debe anticiparse, hacer elecciones, planear y controlar sus acciones, todo lo cual está basado en su propio conocimiento numérico y no solamente en el dominio que tenga de la secuencia de pasos del algoritmo.

Como indica Brun (1996), el esquema del algoritmo al estar siendo construido por el alumno, presenta diferentes organizaciones provisionales ya que está constituido por sub-esquemas que pueden ser combinados o yuxtapuestos sin ser adaptados a la situación, éstos pueden también ser causa de conflictos entre sí. Lo cual puede verse en el caso de los alumnos que se aprenden algunos pasos del algoritmo pero los emplean de manera incorrecta y confusa.

Por lo anterior, es que los cómputos que realiza el alumno pueden ser considerados como intentos activos para adaptarse a la variedad de situaciones de división que se le presentan, por lo que la elección y la organización del conocimiento aplicado a esas situaciones debe guiar a la resolución exitosa de la tarea, por lo tanto, los errores son invenciones que corresponden a diferentes variaciones de esas elecciones y organizaciones (Brun,1996).

El hecho de que se resalte la naturaleza conceptual de tales errores se debe a que, si bien muchos de los errores se relacionan con aspectos mecánicos del algoritmo o al procedimiento como una secuencia de acciones pertinentes, éstos no engloban la totalidad de los errores observados. Por el contrario, muchos de los errores respetan de manera estricta el orden de los pasos, pero el error puede entonces atribuirse a combinaciones originales pero erróneas del conocimiento y de las reglas, tales combinaciones se justifican entre sí, creando así su propia secuencia (Moreno,1996).

Un esquema básico que ayuda a los alumnos a asimilar el total de las situaciones de división es el esquema de repartir y distribuir. El reparto es definido por otra cantidad que es la que ha de ser distribuida. La división puede ser, un reparto desde el punto de vista del dividendo (por ejemplo: Hay 96 naranjas que se reparten en 8 costales y se quiere saber cuántas naranjas se pondrán en cada costal) y una distribución desde el punto de vista del divisor (Se tienen 12 naranjas por costal y se quiere saber cuántos costales hay si en total se tenían 96 naranjas) (Nunes y Bryant, 2003).

Este esquema corresponde a diversas situaciones como por ejemplo: Teniendo el número 426, se tendrían las siguientes situaciones:

a) Deseas saber cuántas veces el número 3 debe ser repetido para hacer 426.
b) Cuántas veces el número 3 está contenido en 426
c) Saber cuál número repetido 3 veces es igual a 426
d) Cuál número está contenido 3 veces en 426

En los ejemplos anteriores puede verse que una fuente de dificultad para los alumnos consiste en que la misma expresión simbólica de una división, en este caso 3 426 puede representar situaciones diferentes y, por lo tanto, tener respuestas diferentes dependiendo de los aspectos del contexto de la situación planteada y de las cantidades involucradas en un problema (Silver,1992).Un ejemplo en el que se muestran las diferentes situaciones es el siguiente:

María hizo 426 galletas y tiene 3 cajas

a) ¿Cuántas veces repartirá una galleta en cada una de las cajas hasta terminar de completar 426?

b) ¿Cuántas galletas tendrá que repartir por igual en 3 ocasiones hasta terminar de acomodar las 426?

c) ¿Qué número de galletas se repetirá 3 veces para hacer un total de 426?.

Debido a tal variedad de situaciones es que los alumnos tienen obstáculos para asimilar el esquema, es entonces que los diferentes errores están relacionados con las características de las situaciones y las formas de adaptar el esquema a éstas. Algunos errores resultantes de las diferentes situaciones son los siguientes (Brun,1996):

1) Cuando el dividendo es igual al divisor

$$8 \,\overline{\big)\, 84}$$

Este error se presenta debido a que en algunos alumnos el esquema de reparto y distribución trabaja sólo cuando el dividendo es más grande que el divisor, ya que consideran que la cantidad que va a dividirse debe ser más grande que las partes en la que ha de ser distribuida y si no es así, la división no puede realizarse. Lo que los alumnos suelen hacer en este caso es tomar un número de la siguiente columna para hacer al dividendo mayor que el divisor.

2) Cuando el residuo parcial es más grande que el divisor

```
     99
 7 | 703
      73
      10
```

En este caso el esquema de reparto y distribución se coordina con una regla de numeración que indica que el número 9 es el número más grande posible para el cociente, por lo que el alumno lleva a cabo esta indicación de manera sucesiva hasta el fin, teniendo como resultado una sucesión de nueves en el cociente. O bien otra forma de solucionar este conflicto por parte de los alumnos es colocar en el cociente números de dos dígitos, como por ejemplo 12.

3) Cuando el dividendo es más pequeño que el divisor

```
      11
 5 | 457
      07
       2
```

Estos casos son solucionados por el alumno continuando con la siguiente columna pero sin colocar el cero correspondiente en el cociente. O cuando no hay otra columna, lo que hacen es concluir el cómputo.

4) Cuando se tiene un residuo menor que el divisor pero cercano a éste.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \cline{2-2} 39 & 817 \\ & 37 \end{array}$$

Esto es resuelto en dos formas; añadiendo un cero extra en el cociente o bien un 1.

Los errores presentados anteriormente tienen un carácter dinámico y organizado: dinámico en el sentido de que el algoritmo forma un todo y es llevado a cabo de acuerdo a una lógica interna, la cual es usada para negociar las diferentes características del algoritmo, algunas de ellas son consideradas inviolables en tanto que otras son consideradas insignificantes o sin importancia, todo esto para poder completar el algoritmo sin contratiempos. Los errores son sistemáticos, debido a que representan una organización del conocimiento matemático que tiene el alumno, el cual adapta a las situaciones que se le presentan, ya que lo que hace es generalizar las características superficiales que conoce ya que el algoritmo carece de un significado real para el alumno (Maurer,1987).

Con todo lo anterior, puede verse que los errores que cometen los alumnos parecen ser una mezcla de diferentes formas del algoritmo enseñadas durante lo que se considera los estados intermedios del aprendizaje del algoritmo; sin embargo, su ejecución, en muchas ocasiones, es fluida más que segmentada y tiene también un carácter organizado de un todo, el alumno negocia con las diferentes características pero no logra alcanzar el equilibrio que el esquema constituye, por lo que sus errores son sólo un intento para adaptarse activamente durante la solución de un problema, en este caso un algoritmo (Graeber y Baker,1997).

En el manual que se presenta en este trabajo, se consideró como un aspecto importante que se detecten los errores que cometen los alumnos, lo cual permite entender cómo están abordando la tarea y poder identificar cuál es el origen de tales errores con el fin de apoyarlos para su solución.

Otro aspecto relevante en relación con los errores que presenta un alumno al resolver un algoritmo son las creencias que tiene respecto a lo que para él significa el algoritmo, pues es común que al tener un esquema de resolución, en ocasiones bien establecido pero erróneo, persista en emplearlo. Por lo anterior, a continuación se abordará el tema de las creencias.

5 CREENCIAS EN MATEMÁTICAS

De acuerdo con algunos investigadores, las creencias se definen como concepciones personales que median las acciones (Kloosterman,2002; Tsamir y Tirosh,2002). Las creencias influyen en el pensamiento y en las acciones de las personas, esto es, una creencia es algo que el estudiante sabe o siente y que afecta su esfuerzo, en este caso, su esfuerzo para aprender matemáticas.

Como características de las creencias se puede decir que son percibidas por la persona como ciertas y que no necesitan justificación, que están asociadas a un sentimiento de certeza, que persisten, y que el individuo tiende a rechazar aquellas alternativas que la contradigan (Lester,2002). Lo cual puede explicar, en parte, el caso de los errores sistemáticos y su persistencia.

En relación con las creencias de los alumnos respecto a las matemáticas, Kloosterman (2002) realizó una investigación en la que abordó algunos aspectos respecto a las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas y del aprendizaje de las matemáticas. Al respecto, encontró que es difícil para los estudiantes describir la naturaleza de las matemáticas y que muchos de ellos mencionan que éstas sólo involucran pasos, procedimientos y/o fórmulas, lo cual es debido a que las matemáticas tradicionalmente han sido enseñadas como una serie de procedimientos que deben ser aplicados y memorizados.

Con respecto a las creencias acerca de las operaciones matemáticas, se considera que la experiencia inicial de los niños durante los primeros años en la escuela con esas operaciones los guía a desarrollar creencias específicas acerca de cada una de las cuatro operaciones matemáticas básicas y de las características generales de éstas, lo cual afecta los procesos de pensamiento de los estudiantes, su comprensión de los conceptos matemáticos y por lo tanto su desempeño en tareas de matemáticas (Tsamir y Tirosh, 2002).

En este punto, es necesario notar que la manera en que los alumnos experimentan las matemáticas en su salón de clases los puede llevar a adoptar o a desarrollar creencias de las cuales generalmente no son conscientes, que las reproducen y persisten con el tiempo debido a que tienen una función para el alumno que es darle sentido a lo que hacen, en ocasiones, como una forma de compensar la falta de comprensión de una tarea.

Debido a la importancia que lo anterior tiene, en el manual que se presenta en este trabajo, se propone como punto de partida, antes de intervenir, que se identifiquen los errores sistemáticos que comete un alumno así como las creencias que pueden estarlos manteniendo. Asimismo se pretende buscar una forma de que el alumno comprenda el concepto de dividir y las situaciones a las que se aplica. Por eso, a continuación se presenta, a modo explicativo el proceso de cambio conceptual y su relación con el presente trabajo.

5.1 El cambio conceptual en matemáticas

La investigación sobre el aprendizaje y la instrucción ha mostrado que los humanos construyen sistemas de conocimiento individuales con base en sus experiencias cotidianas; este conocimiento pre-existente sirve como una plataforma desde la cual los aprendices interpretan su mundo. Sin embargo, frecuentemente este conocimiento se conflictúa con la información científica ya que los estudiantes se encuentran con que el conocimiento que ellos tienen es incompatible con el que les está siendo enseñado en la escuela, por lo que requieren reorganizar sus estructuras de conocimiento, lo cual es considerado como un cambio conceptual (Sinatra,2001).

El aprendizaje bajo estas circunstancias frecuentemente implica no solamente la integración de nueva información dentro de la memoria sino también la re-estructuración de las representaciones de conocimiento existentes (Montague,1997).

Aunque se considera que el cambio conceptual es un proceso de re-estructuración de conocimiento que involucra un grupo de habilidades consideradas como sofisticadas, aún hay confusión respecto a lo que implica debido a que este proceso puede ser interpretado en muy diferentes formas ya que no es solamente el reemplazo de concepciones previas por unas nuevas sino que implica un cambio en las formas de pensamiento acerca de un dominio de conocimiento y una diferenciación entre contextos de interpretación (Sinatra,2001).

Para tratar de explicar cómo se da el cambio conceptual se han desarrollado algunos modelos teóricos (Limón, 2001; Vosniadou, Ioaonides, Dimitrakopolou y Papademetriou, 2001; Sinatra, 2005), los cuales se han intentado aplicar al contexto del aprendizaje escolar, ya que en un inicio se habían estudiado de manera desvinculada.

Algunos factores para el cambio conceptual que se han considerado importantes en los modelos desarrollados son: la motivación de los estudiantes, su conocimiento previo, sus creencias y actitudes, sus estrategias de aprendizaje, y el trabajo con pares (Limón,2001; Sinatra,2005). Dichos factores son abordados a continuación.

a) Factores motivacionales

Para que los alumnos consideren la nueva información que se les presenta como significativa, ésta tiene que ser relevante para ellos, esto es, que necesitan sentir curiosidad y estar motivados.

Se considera que hay varios factores motivacionales que funcionan como mediadores del proceso de cambio conceptual, éstos son las metas (los propósitos que tiene un alumno al aprender), las creencias, la percepción de auto-eficacia (qué tan capaz se percibe un alumno para realizar una tarea) y el valor que el estudiante concede a la tarea o a las actividades que se le presentan.

El factor motivacional es importante porque, a pesar de que los estudiantes pueden tener conocimientos previos similares, la motivación que tengan para resolver las discrepancias entre su conocimiento y las nuevas concepciones puede hacer la diferencia al actuar con un efecto mediático en el proceso de información y finalmente en el cambio conceptual (Sinatra,2005).

b) Conocimiento previo

Es importante considerar la relevancia que tiene el conocimiento previo en el proceso de adquisición de conocimiento y, por lo tanto, también durante un cambio conceptual. De acuerdo con una visión constructivista, el aprendiz es un constructor activo de su conocimiento, que posee conocimiento previo relacionado con los nuevos contenidos de aprendizaje. Dicho conocimiento es una base que apoya la construcción de futuros aprendizajes, la conexión entre el nuevo conocimiento que va a ser adquirido y el conocimiento existente que los estudiantes tienen es importante para promover el aprendizaje significativo (Harel y Behr,1991).

En el caso del aprendizaje del algoritmo de la división, por ejemplo, debe considerarse el conocimiento que un alumno tiene respecto a varios conocimientos involucrados, tales como las demás operaciones básicas, el sistema decimal, el valor posicional y la noción de dividir, antes de enseñarle al alumno el algoritmo, ya que esto le permitirá hacer la asociación entre lo que ya conoce y el nuevo conocimiento que está construyendo y poder aprenderlo de manera que el conocimiento del algoritmo tenga sentido para él.

En la investigación sobre cambio conceptual se ha considerado como una paradoja el hecho de que el conocimiento previo, que de acuerdo con la literatura es un facilitador del aprendizaje, frecuentemente se observa como una barrera para el cambio, por lo que uno de los principales intereses de los investigadores en este tema ha sido describir las numerosas concepciones erróneas, preconcepciones, concepciones alternativas o teorías ingenuas que tienen los aprendices ya que se considera que éstas constituyen en muchas ocasiones un obstáculo para la re-estructuración del conocimiento, debido a que provocan resistencia al cambio (Limón,2001).

Otro punto controversial en este sentido es acerca de lo que debe ser considerado como cambio conceptual, ya que se habla de que éste puede darse en diferentes niveles o grados que van desde la toma de consciencia o discriminación de la discrepancia hasta una re-estructuración total (Tirosh y Tsamir, 2004).

Junto con el conocimiento previo, los estudiantes tienen también creencias acerca de la signatura que están aprendiendo, lo cual es otro factor para el cambio conceptual.

c) Creencias

Como se mencionó anteriormente, las creencias que tienen los alumnos son muy importantes y en ocasiones parecen facilitar o dificultar el cambio conceptual. De acuerdo con algunas investigaciones (Hammer, citado en Limón,2001) ciertos fragmentos del conocimiento de los estudiantes, a pesar de ser erróneos, permanecen de algún modo porque ellos no se percatan de las incoherencias o bien, porque los estudiantes no piensan que deberían tratar de modificar su propia concepción.

En algunos casos, incluso se considera que los estudiantes se encuentran en cierto modo involucrados afectivamente con el tema, que aunque puedan reconocer que hay inconsistencia entre la información que ellos poseen o su creencia y la que les está siendo enseñada, aún así se resisten a aceptarla. Por lo que se considera que tener conciencia de las creencias que tienen los estudiantes podría ayudar a tomar decisiones para mejorar el diseño instruccional y, en consecuencia, las prácticas educativas al interior del salón de clases.

Por otro lado, se ha visto también que la relevancia que tiene para el estudiante un conocimiento puede ser un factor importante para el cambio conceptual.

d) Valores y actitudes de los estudiantes

La importancia que para un alumno tenga un conocimiento y su actitud hacia éste parece ser un factor que lo lleve a hacer el esfuerzo necesario para modificar su comprensión. La resistencia a cambiar las creencias personales que están involucradas en su comprensión puede explicar en parte la carencia en la eficacia de muchas de las estrategias instruccionales que se emplean para promover el cambio conceptual.

Pareciera que para considerar la posibilidad de un cambio sería necesario algunas veces cambiar las actitudes de los estudiantes. En este sentido es que se considera relevante la necesidad de enlazar de algún modo el campo del cambio conceptual con el campo del cambio de creencias (Limón,2001).

Un factor más que se considera relevante para favorecer el cambio conceptual está relacionado con el aspecto social, en el cual se enfatiza el rol de los pares.

e) Factores sociales: el rol de los pares

En el procesamiento de información contradictoria se considera que los efectos de la colaboración entre pares pueden variar dependiendo del proceso del grupo. Se ha encontrado que los estudiantes se ven beneficiados de las discusiones en el salón de clases ya que éstas les ayudan a revisar sus ideas y a construir nuevos conceptos (Mason,2001).

Las discusiones entre pares acerca de un tema pueden llevar a los estudiantes a comprometerse de manera colaborativa en los razonamientos y argumentaciones lo cual los motiva a preguntar, a investigar y gradualmente a transformar su conocimiento, ya que la discusión en el grupo puede inducir a la adopción de nuevas perspectivas y metas que pueden facilitar la reorganización del conocimiento (Limón,2001).

A pesar de que se considera que el cambio conceptual es un proceso individual, parece ser que los factores sociales pueden ayudar a promover la toma de conciencia sobre las propias creencias, y por lo tanto, la concientización también de un posible conflicto o el reconocimiento de las diferencias y similitudes entre las creencias propias y la nueva información lo cual puede guiar a una solución, lo que implica algún grado de cambio conceptual (Sinatra, 2005).

Por otro lado, y continuando con la caracterización de lo que implica un cambio conceptual, se considera al conflicto cognitivo como una estrategia útil para promoverlo (Limón,2001).

f) El conflicto cognitivo

Limón (2001) indica que el conflicto cognitivo es el punto de inicio en el proceso de cambio conceptual. Para comenzar el proceso de cambio, este conflicto tiene que ser significativo para el individuo, para inducir un conflicto cognitivo significativo, los estudiantes deben estar motivados e interesados en el tema, activar su conocimiento previo y tener adecuadas habilidades de razonamiento. Aunque no es fácil reunir todos esos aspectos, parece que constituyen una condición necesaria para aplicar la estrategia de conflicto cognitivo.

Desde una perspectiva de la enseñanza, de acuerdo con Limón (2001), el punto inicial para promover cualquier cambio en el plano conceptual es guiar al individuo a concientizarse de las diferencias entre sus propias ideas, creencias, o conceptos y la nueva información. A continuación se resumen en un esquema (figura 1) las variables que de acuerdo con las investigaciones podrían contribuir para inducir un conflicto cognitivo significativo y por lo tanto llevar al individuo a un cambio conceptual.

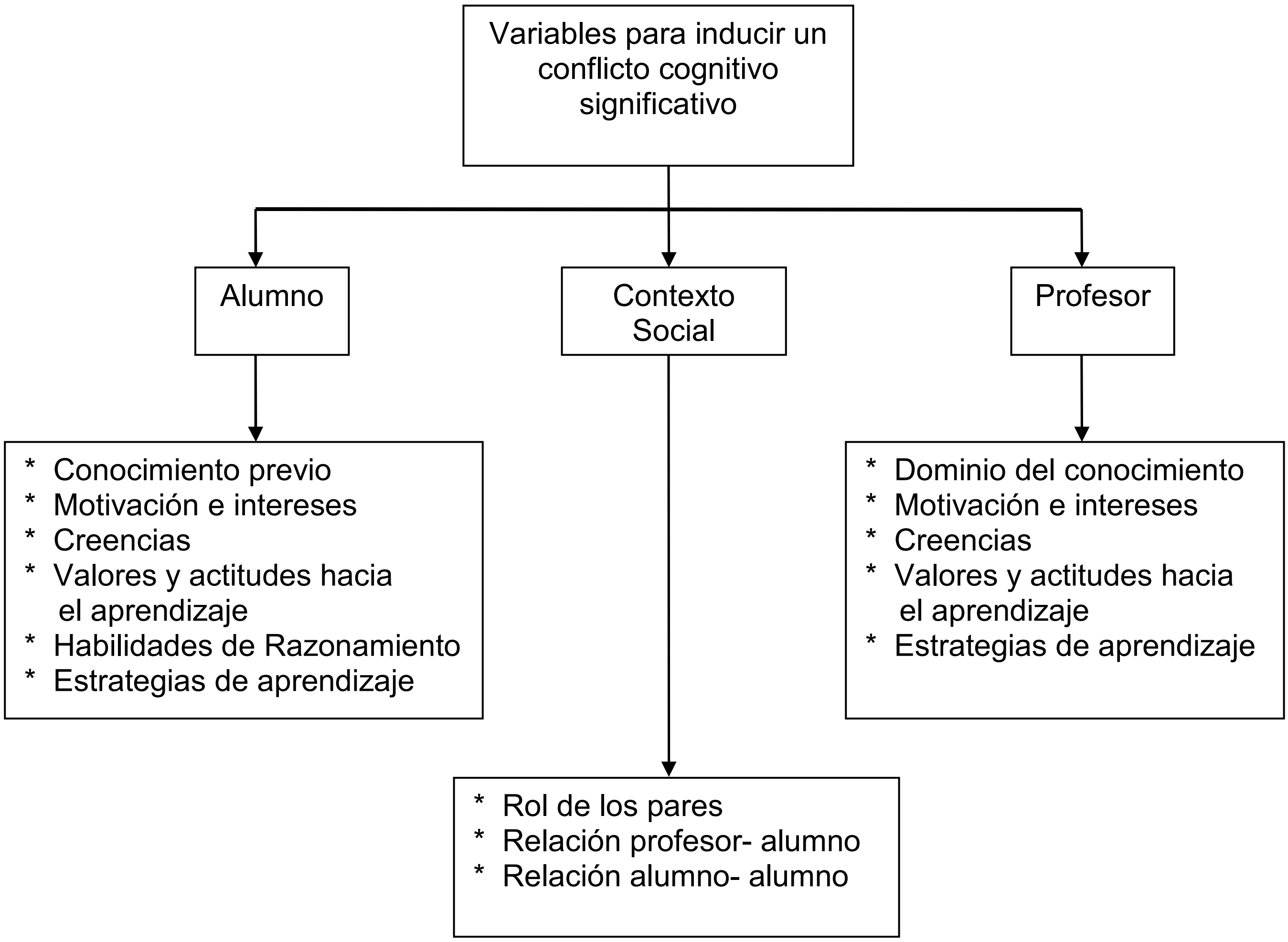


Fig.1. Variables consideradas relevantes para inducir un conflicto cognitivo que lleve a un cambio conceptual.

5.2 Modelos de cambio conceptual

Un modelo que describe el proceso de cambio conceptual es el que proponen Dole y Sinatra, llamado Modelo de Reconstrucción Cognitiva del Conocimiento (Sinatra,2005), en el que se enfatizan el conocimiento previo y los factores motivacionales (Dicho esquema está ilustrado en la figura 2).

Respecto al conocimiento previo, en este modelo se consideran tres aspectos claves del conocimiento que posee el estudiante, éstos son la fuerza, la coherencia y el compromiso, los cuales influyen en la probabilidad del cambio. La fuerza se refiere a qué tan ricamente están representadas y qué tanto están conectadas entre sí las ideas. La coherencia se refiere a la coherencia conceptual o estabilidad de las ideas, ya que cuando las ideas son menos coherentes son más susceptibles al cambio. Finalmente, el compromiso está relacionado con la adherencia del individuo con una idea, ya que si está fuertemente comprometido con ella hay menor probabilidad de un cambio.

En este sentido, es importante considerar que los aspectos del conocimiento previo tienen también una influencia motivacional. El aprendiz es más resistente a la noción de cambio cuando sus ideas son conceptualmente fuertes, cuando se le presenta información contradictoria con la que posee, se crea una situación de desequilibrio, la cual el estudiante o aprendiz está o no motivado a resolver. El grado de compromiso con las ideas está relacionado con las creencias, si las creencias tienen fuerza se crea resistencia al cambio.

En cuanto a los factores motivacionales que tienen influencia para el cambio conceptual en este modelo se mencionan la falta de satisfacción, la relevancia o valor personal y el contexto social; en este sentido se ve a la motivación como una característica del aprendiz pero en interacción con el contexto.

En la descripción de este modelo se considera que las características mencionadas del conocimiento previo y la motivación interactúan con las características de la información o mensaje presentado al estudiante. El mensaje o la información debe ser comprensible, coherente y convincente para los estudiantes para facilitar el cambio, ya que tales características se relacionan con el procesamiento cognitivo de la información. Todo lo anterior interactúa de manera que si el mensaje carece de esas características para el aprendiz, éste carecerá de motivación para procesarlo (Sinatra,2005).

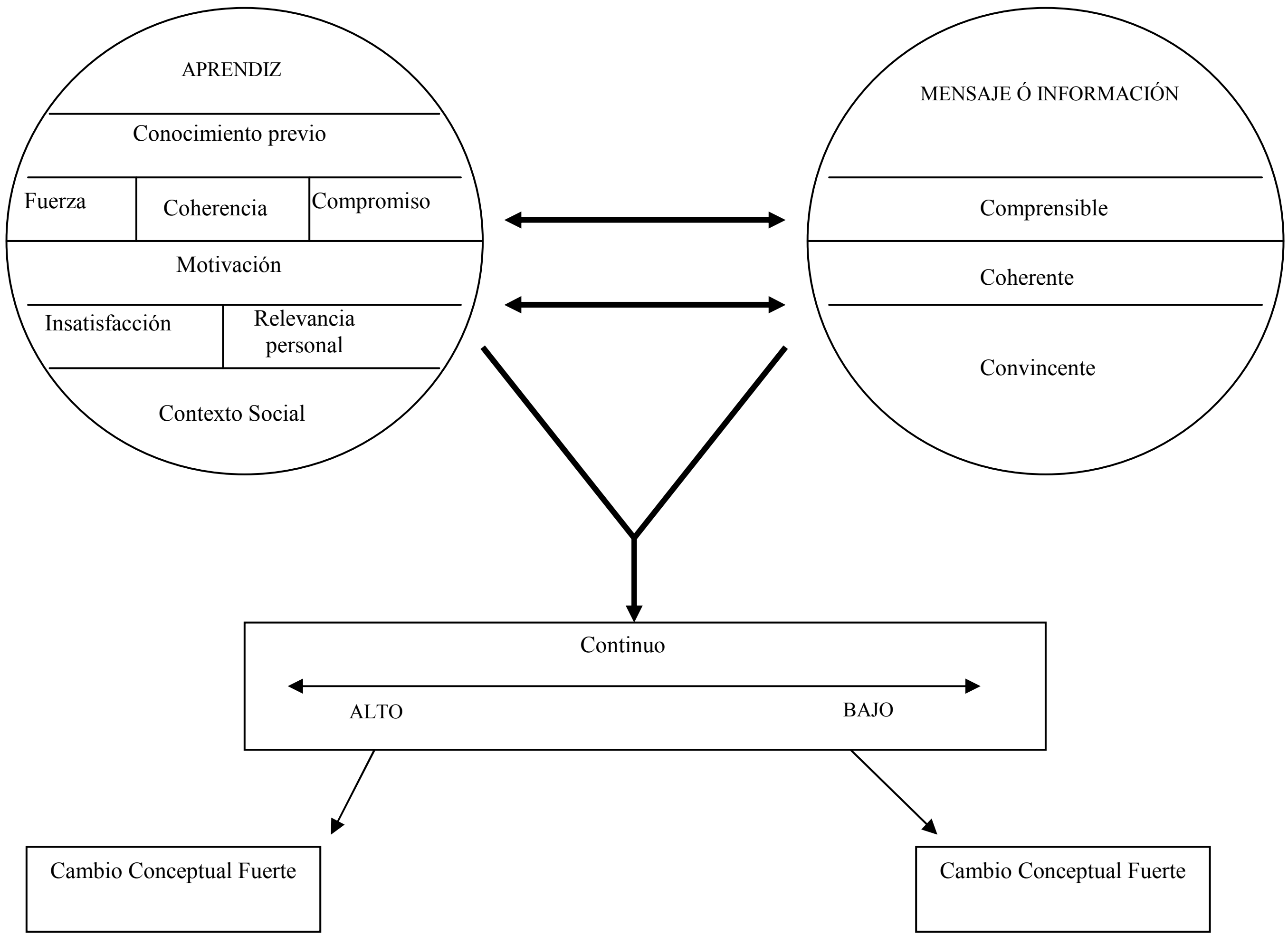


Figura 2. Modelo de Reconstrucción Cognitiva del Conocimiento, (Adaptado de Sinatra,2005)

Se considera que el Modelo de Reconstrucción Cognitiva del Conocimiento, al igual que el proceso de cambio conceptual que describe, no es lineal, ya que sólo alude a las condiciones necesarias para que el cambio se dé. Es importante considerar que el cambio conceptual es un proceso gradual y no un proceso de todo o nada, por lo que no pueden esperarse cambios muy radicales inmediatos o en intervenciones muy breves (Limón,2001; Sinatra,2005).

El aprendizaje y, por lo tanto, también el cambio conceptual son procesos que requieren la reorganización significativa de las estructuras de conocimiento existentes y no sólo su enriquecimiento, ya que la persona que lo enfrenta se ve forzada a crear nuevas representaciones cualitativamente diferentes. En tanto que las anteriores representaciones pueden continuar o desaparecer (Vosniadou, et al.,2001).

En relación con la enseñanza en matemáticas, en los estudios realizados al respecto se han encontrado evidencias de que el conocimiento previo de los estudiantes frecuentemente es incompatible con algunas nociones matemáticas que están aprendiendo, que el desarrollo de la comprensión de esas nociones es lento y gradual y que su adquisición está acompañada por la creación de modelos que integran los intentos del estudiante por asimilar la nueva información a su conocimiento base existente (Tirosh y Tsamir,2004).

De acuerdo con lo anterior, se considera que la teoría del cambio conceptual podría explicar el desarrollo de la comprensión de los conocimientos matemáticos por parte del estudiante y de las dificultades comunes que ellos se encuentran en su aprendizaje.

Debido a que en el presente trabajo se aborda el tema de las dificultades que tienen los alumnos específicamente con el algoritmo de la división, a continuación, se hará referencia a las nociones básicas que se deben considerar para su aprendizaje y que explican en parte el origen de las dificultades que representa para los estudiantes.

6 NOCIONES BÁSICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LA DIVISIÓN

Nunes y Bryant (2003) señalan que la primera aproximación que se tiene al concepto de división es la de reparto en partes iguales; sin embargo, en realidad abarca diversas acepciones que los estudiantes deben reconocer tales como: reparto, partición, número de veces que un número está contenido en otro o número que falta en un producto.

Asimismo, se considera a la división como la operación inversa a la multiplicación, pero el concepto matemático de división implica una reorganización del concepto de multiplicación cuyo resultado final debe ser una estructura de conocimiento aritmético unificada, que incluya las cuatro operaciones. Esto implica la consolidación de diferentes conceptos aritméticos para que sea comprendida y aplicada de manera correcta.

La actividad de repartir se considera un tipo de situación que implica un razonamiento de la multiplicación, ya que repartir implica la distribución de un conjunto entre diversos receptores. Repartir es distinto de sumar y restar porque implica crear una relación de multiplicación entre dos o más conjuntos.

Las relaciones parte-todo entran en el ámbito de repartir y dividir, pero en estos casos hay que considerar tres elementos: el tamaño del todo, el número de partes y el tamaño de éstas que debe ser igual. Por lo que para repartir los niños necesitan comprender las relaciones entre tres conjuntos o variables: el número total de objetos, el número entre el que hay que repartir y el número de objetos que le tocará a cada uno.

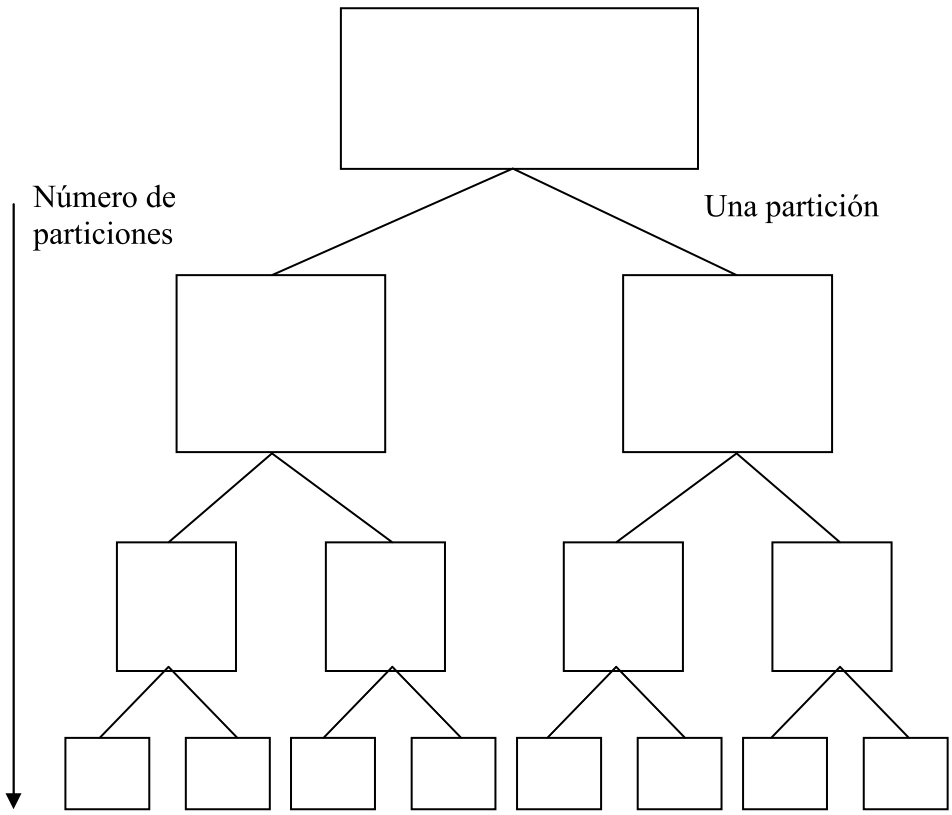
Repartir, por lo tanto es una acción que se relaciona con la división. Se distingue repartir -que es una acción- de la división como operación porque entender la división implica ir más allá de repartir, implica darse cuenta de la relación inversa entre el número de receptores y el tamaño de su porción.

Cuando se aplica sucesivamente una división, las situaciones se vuelven más complejas, ya que una serie de divisiones o particiones sucesivas muestran una progresión que difiere de las situaciones de multiplicación. El número de divisiones sucesivas no tiene el mismo significado que el número de duplicaciones sucesivas, ya que con la duplicación no se transforma la relación entre las variables, mientras que con la división existe una transformación en la relación parte-todo.

Un ejemplo que explica lo anterior, sería el siguiente: Al partir un pastel en rebanadas, si éste se parte primero en 2 rebanadas y después cada una de éstas se parte a su vez en 2 y las 4 resultantes se vuelven a partir en 2 y así sucesivamente (lo que serían divisiones sucesivas) se tendrán como resultado 8, 16 rebanadas, etc. (figura 3).

En esta situación se pueden ver tres significados del número que son el número de particiones o divisiones, el número de partes en cada división y el tamaño de las partes. Una partición en 2 rebanadas da por resultado dos rebanadas y dos particiones de 2 dan 4 rebanadas; sin embargo, esto no ocurre con una partición en 3, en donde el índice de aumento es diferente puesto que una partición en 3 da como resultado 3 rebanadas y dos particiones de 3 dan 9 rebanadas. Por lo tanto, puede verse que el resultado de las particiones sucesivas difiere del de duplicar.

Un ejemplo de duplicación con la relación 1:2 es el número de manos en una persona: una persona tiene 2 manos, 2 personas tienen 4, tres personas tienen 6, 4 personas tienen 8 manos, en este caso la secuencia es 2,4,6,8,etc. Sin embargo, cuando se divide es distinto, puesto que se causa una progresión aritmética; esto es, como en el ejemplo de las rebanadas de pastel donde la secuencia de cada división sería 2,4,8,16,etc.



Una partición en 2: dos partes
Dos particiones en 2: cuatro partes
Tres particiones en 2: ocho partes

Figura 3. Ejemplo de divisiones sucesivas (Nunes y Bryant, 2003)

Como Nunes y Bryant (2003) indican, desde un plano conceptual, mientras que la adición, la sustracción y la multiplicación son siempre exactas, en el sentido de que el resultado se origina efectivamente de la aplicación del operador al operando.

La división, por su parte, no es siempre exacta, y el cociente es sólo el resultado de la aplicación del operador al operador, por lo que el verdadero resultado es la pareja de cociente y residuo.

Como el esquema de la división se describe como de repartir y distribuir, pareciera que para los alumnos la división solamente consiste en repartir una cantidad en partes, este reparto es definido por otra cantidad que son las partes que son distribuidas (Moreno,1996).

Por lo anterior, se considera que el aprendizaje de la división es el más difícil de todos los algoritmos ya que cuenta con características en su resolución que la diferencian de las otras operaciones, entre estas se encuentran las siguientes (Defior,2000):

- Se lleva a cabo de izquierda a derecha mientras que todos los demás se ejecutan de derecha a izquierda.
- Aporta dos resultados (cociente y residuo) mientras que en los otros se busca un solo resultado.
- Tiene una fase de estimación o de tanteo que no existe en las demás operaciones.
- Requiere que los otros algoritmos estén automatizados.
- Conlleva ciertas prohibiciones como que el residuo sea mayor que el cociente.

Se considera que una de las principales fuentes del significado de una operación está en el tipo de problemas que se pueden resolver con ella; por lo tanto, es necesario que los alumnos se enfrenten a diversos problemas que la implican para que comprendan qué es la división (UPN,1994; Moreno,1996).

En este sentido, cuando se les presentan a los alumnos problemas con diversos conceptos y diversas relaciones entre sus datos, esto les permite construir el significado de la división, lo cual es algo que no se logra con el sólo aprendizaje del algoritmo (Carraher, Carraher y Schliemann,2002).

a) Tipos de problemas de división

Dependiendo de dónde se ubique la incógnita, se tienen los siguientes tipos de problemas de división (Watson,1991; Greer,1992; English y Halford,1995):

- De tipo agrupamiento o tasativa: Consiste en dividir un total entre el número que hay en cada grupo para encontrar cuántos grupos hay. Esto es, determinar cuántas veces una cantidad dada está contenida en una cantidad mayor.

Ejemplo:
Hay 4 canicas por bolsa ¿Cuántas bolsas hay si se tienen 20 canicas?

- De reparto: Consiste en dividir un total entre el número de grupos para encontrar el número que corresponderá a cada grupo. Esto es, repartir una cantidad en partes iguales o sub-cantidades.

Ejemplo:
Se tienen 20 canicas que se reparten en 5 bolsas, ¿cuántas canicas se ponen en cada bolsa?

Se considera que las situaciones de reparto ocurren más naturalmente y con más frecuencia en la vida cotidiana, por lo que suelen tener más significado para los alumnos, como indican algunos autores (English y Halford,1995), siendo por esto común que cuando a la gente se le pide que dé un ejemplo de problema de división mencionen situaciones de reparto generalmente. Por lo anterior, se reconoce a las situaciones de reparto como las más apropiadas para modelar el algoritmo de la división.

Por otro lado, se ha observado que una dificultad inherente al algoritmo de la división se deriva de la forma de representar la operación con la galera / ya que esto genera que el primer número que se presenta para expresarla (el dividendo), se anota a la derecha del segundo (divisor). Ejemplo: 85/5, se coloca como 5 85. Con esto es común que los alumnos lean la expresión en la forma en que ésta se presenta es decir, pueden decir “5 entre 85” en lugar de “85 entre 5”, ya que manejan los números sin contexto y con esto se les dificulta percatarse de sus errores, por lo que cuando se habla de objetos concretos como 5 autobuses y 85 personas tienen más posibilidades de identificar el error.

De esta manera se evita una creencia errónea frecuente entre los alumnos de que “x dividido entre y” es lo mismo que “y dividido entre x” que representa una sobregeneralización de la propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación que se genera por la confusión al leer la división (English y Halford,1995).

Esta confusión se evita al enseñar el algoritmo dentro de un contexto, esto es un problema o situación.

Con base en todos los elementos abordados previamente, es que se elaboró la propuesta para la enseñanza de la división que se presenta a continuación.

PRESENTACIÓN AL MANUAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN

El presente trabajo se realizó dentro del marco del Programa Alcanzando el Éxito en Secundaria (PAES), por lo cual asumimos que los alumnos que asisten a dicho programa ya han tenido de algún modo contacto con el algoritmo de la división. Sin embargo debido a las dificultades que enfrentan, un gran número de ellos no lo dominan y cometen errores en el procedimiento de solución, como ya se vio previamente.

Debido a esto, se considera que en muchos casos los alumnos con este tipo de dificultades, deben enfrentarse a cambiar las concepciones que tienen al respecto pues las que poseen no les permiten tener resultados correctos y generalmente carecen de sentido para ellos.

Respecto a lo anterior, si se toma en cuenta que para el cambio conceptual deben modificarse o reemplazarse los conceptos, creencias o ideas del aprendiz; es importante entonces comenzar por conocer cuáles son las creencias, ideas, o conceptos que los estudiantes tienen y además comprender cómo se puede conectar su conocimiento previo con los nuevos contenidos que van a ser enseñados. Esto se consideró al momento de incluir el primer apartado del manual, el cual está dirigido a realizar una evaluación diagnóstica que nos permita identificar y comprender los errores que presenta un alumno en particular, para poder brindarle un apoyo más oportuno.

En relación con los aspectos involucrados en el proceso de cambio conceptual, en el manual se incluyen algunas viñetas que ilustran ejemplos de experiencias obtenidas durante el piloteo de la propuesta, en los cuales se retoman algunos aspectos motivacionales.

Por otra parte, respecto a la importancia del papel de los pares en el proceso de aprendizaje - en la propuesta de enseñanza planteada en este trabajo-se sugiere la aplicación en pequeños grupos conformados por 3 o 4 alumnos, lo cual es acorde con la forma de trabajo en el PAES.

De la misma manera, debido a la necesidad de que el algoritmo sea enseñado dentro de un contexto -ya sea un problema o situación-, en el presente manual se propone la enseñanza de la división de esta manera, como lo veremos más adelante.

El manual está destinado a tutores del PAES y para otros profesionales de la educación interesados en el tema. El manual muestra una propuesta que puede ser útil como una guía para abordar las dificultades de los alumnos en relación al algoritmo de la división; sin embargo, se considera que puede ser adaptado a las necesidades de quien lo emplee

A continuación se describe la estructura del manual

a) Guía para realizar una evaluación diagnóstica, la cual incluye:

⇒ Ejemplos de las situaciones de división que existen, señalando la importancia de conocerlas,

⇒ Descripción de los errores típicos que suelen presentarse en la resolución del algoritmo de la división así como el origen de tales errores. Con lo cual se pretende tener una comprensión de las dificultades de los alumnos.

b) Una propuesta para la enseñanza de la división, en la cual se consideran las dificultades de los alumnos y con la cual se propone apoyarlos para que identifiquen sus errores y eventualmente los corrijan. En dicha propuesta se incluyen:

⇒ Ejemplos de cómo la propuesta apoya a los alumnos para la comprensión de varios de los errores típicos.

⇒ Una descripción del papel del tutor y del alumno durante las sesiones que permite comprender el desarrollo de las mismas.

La propuesta de enseñanza que se presenta fue piloteada durante varias sesiones con algunos alumnos que asisten al PAES. La experiencia de aplicación sirvió para complementar diversos aspectos del manual, como es el caso de algunas viñetas que se encuentran insertadas en el mismo y que contienen ejemplos ilustrativos de situaciones que se presentaron en las sesiones, los cuales pueden resultar útiles para quién decida poner en práctica esta propuesta.

1 MANUAL PARA LA ENSEÑANZA DEL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

2. GUÍA PARA REALIZAR LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

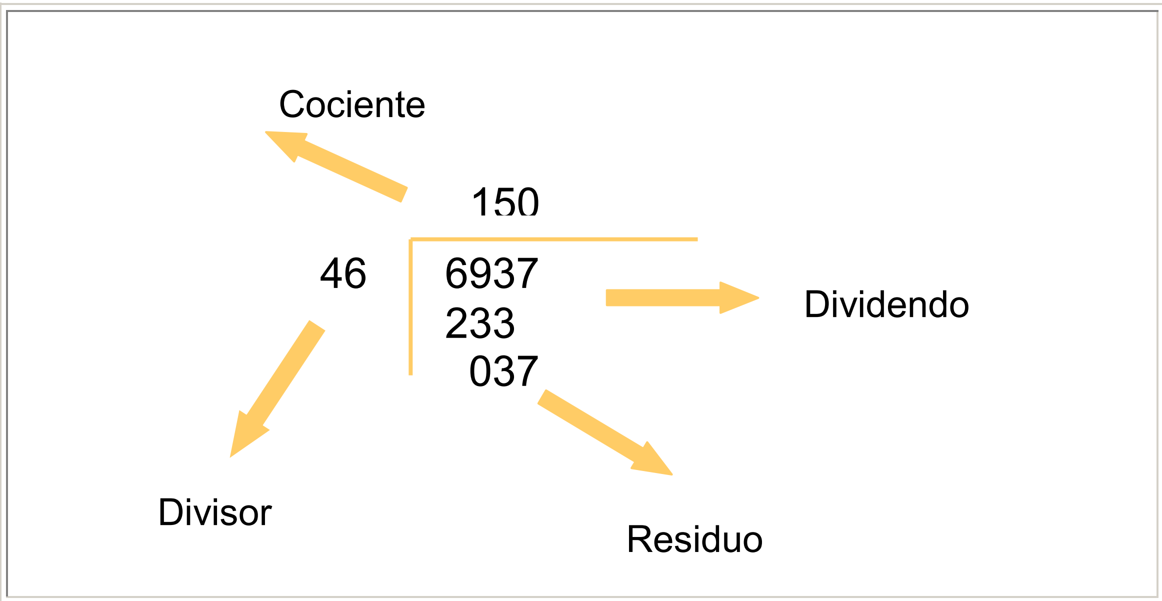
La División

¿Qué es dividir?

Dividir consiste en distribuir un conjunto entre diversos receptores. Se deben considerar tres elementos: el tamaño del todo, el número de partes y el tamaño de éstas que debe ser igual.

Los elementos de la división

- El tamaño del todo está representado en el dividendo.
- El número de partes se representa en el divisor.
- El tamaño de las partes, que generalmente es el resultado principal, se ubica en el cociente.
- La parte que sobra es el residuo, que es también parte del resultado.



Problemas que pueden solucionarse con división

¿Qué dice la teoría?

Se considera que una de las principales fuentes del significado de una operación está en el tipo de problemas que se pueden resolver con ella. Por lo que es necesario que los alumnos se enfrenten a diversos problemas que la implican para que comprendan que es la división.

Cuando se les presentan problemas con diversos conceptos y diversas relaciones entre sus datos, esto les permite construir el significado de la división, lo cual no se logra con el solo aprendizaje del algoritmo (Moreno, 1996; Carraher, Carraher y Schliemann, 2002).

El significado que para los niños tenga una operación, esta dado principalmente por los problemas que ellos pueden resolver con esa operación.

Existen dos tipos principales de problemas de división que difieren en la relación que se establece entre los datos (SEP,1998). Estos son:

a) De agrupamiento

En los cuales se relacionan dos magnitudes del mismo tipo y se trata de ver cuántas veces cabe una en la otra.

Ejemplos:
¿Cuántas veces 30 lápices “caben” en 360 lápices?
¿Cuántas veces 5 manzanas “caben” en 35 manzanas?

b) De reparto

En estos problemas se relacionan magnitudes de distinto tipo y puede decirse que se trata de repartir una en la otra.

Ejemplos:
Se tienen 360 lápices y se requieren distribuir en 6 cajas, de tal manera que en cada caja haya la misma cantidad. ¿Cuántos lápices se deben poner en cada caja?
Luis tiene 35 manzanas y las quiere repartir en partes iguales entre sus 5 amigos ¿Cuántas manzanas les dará a cada uno.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

¿Qué dice la teoría?

Los conocimientos previos ocupan un papel crucial en el aprendizaje ya que constituyen la base para la adquisición y comprensión de otros nuevos. Por lo que el diseño educativo debe permitir siempre de los conocimientos previos de los estudiantes y adecuarse a ellos.

En el caso de las matemáticas el estudio de los errores sistemáticos que los alumnos cometen, ponen de relieve que aplican conceptos y principios matemáticos, así como reglas y estrategias incorrectas para la tarea que se está realizando, las cuales frecuentemente tienen su origen en "procedimientos viciados", debido a un mal aprendizaje, o un desconocimiento; cuando algunos pasos del proceso no están claros para el alumno, éste puede inventar reglas, confundirlas o usarlas inadecuadamente para resolver algoritmos o situaciones problemáticas que se le plantean. Por lo tanto, analizar dichos errores es un procedimiento de gran valor para intervenir en la solución de sus dificultades, pues nos permite evaluar, determinar y localizar dónde se encuentran sus éstas. (Defior, 2000).

¿Cómo evaluar?

A continuación se presentan algunas formas a través de las cuales se puede evaluar el conocimiento y los procedimientos que sigue un alumno al enfrentarse a resolver una división.

a) Análisis de tarea

Para facilitar la identificación de las dificultades y fortalezas de los alumnos a continuación se presenta una descripción de los pasos, así como las acciones correspondientes a cada uno que deben seguirse para la solución de un algoritmo de división.

División	
Pasos para su resolución	**Acciones requeridas**
1) $13\overline{)25{,}78}$	1) Determinar las primeras cifras del divisor que han de dividirse.
2) $13\overline{)25{,}78}$	2) Realizar una estimación de cuantas veces el divisor (13) cabe en las primeras cifras del dividendo (25).
3) $\begin{array}{rl} & 1 \\ 13 & \overline{)2578} \\ & \ \ 13 \end{array}$	3) Multiplicar el número obtenido por el divisor (1x13).
4) $\begin{array}{rl} & 1 \\ 13 & \overline{)2578} \\ & \underline{-13} \\ & \ \ 12 \end{array}$	4) Colocar el resultado debajo del dividendo y restar.

1 5) 13 ⌐2578 -13 127	5) Bajar el siguiente dígito del dividendo.
19 6) 13 ⌐2578 -13 127	6) Realizar nuevamente una estimación.
19 7) 13 ⌐2578 -13 127 -117 10	7) Repetir los pasos sucesivamente

Para conocer el nivel en el que se ubica un alumno en cuanto a la resolución de una operación de división, en un principio resulta útil presentarle diferentes ejercicios con un grado creciente de dificultad; esto es, comenzar con cantidades pequeñas e ir aumentando éstas a centenas, millares, etc., de manera que podamos ubicar si el alumno conoce el procedimiento y lo realiza correctamente. Si sólo lo conoce parcialmente, si sabe realizar las operaciones con números pequeños y las demás ya no etc., o bien, si comete errores.

4 ⌐81	2 ⌐846	3 ⌐159	7 ⌐7357
12 ⌐245	8 ⌐1447	23 ⌐210	66 ⌐3004

Posterior al análisis de tarea o simultáneo a éste si es posible, debe realizarse el siguiente paso que es la identificación de errores o dificultades para facilitar la identificación, a continuación se mencionan los errores típicos que se presentan en la solución de divisiones.

Errores típicos en resolución de una división

- ***Dificultad en la identificación de las relaciones numéricas***:

Son generados principalmente por desconocer las relaciones numéricas entre dividendo, divisor, cociente y residuo.

Algunos de los problemas más frecuentes se dan en los siguientes casos:

Problemas cuando el dividendo es igual que el divisor

9 | 94

Cuando el residuo en el dividendo es menor que el divisor

2
42 | 85
16

Cuando el residuo en el dividendo es más grande que el divisor

85
7 | 603
43
8

Cuando el residuo es más pequeño pero cercano que el divisor

2
39 | 81
37

- ***Problemas con las operaciones básicas al dividir***

- Cometer errores específicos en suma, resta o multiplicación
- Manejo inadecuado de las tablas de multiplicar
- Olvidar “llevar”

- Estimaciones incorrectas

> ➢ ***Dificultad en el orden de los pasos y en la colocación de los datos en el algoritmo.***

- Colocar los datos en el lugar incorrecto
- Alterar el orden de los pasos
- Crear combinaciones propias de las reglas

b) Identificar los errores o dificultades

Para poder realizar la identificación es necesario revisar paso por paso cuál fue el procedimiento que llevó a cabo el alumno para llegar al resultado.

La identificación de los errores o dificultades es un paso crucial, y una forma en la que se puede hacer de manera objetiva es preguntándole al alumno cómo resolvió la operación o bien, pidiéndole que mencione en voz alta el procedimiento mientras lo realiza, ya que de otra manera podemos hacer interpretaciones erróneas si únicamente tratamos de inferir el procedimiento que siguió.

Ejemplo:	
2 42 | 856 0	1) Primero digo 8 entre 4 y me da 2 y me sobra 0.
2 42 | 856 01	2) Después digo 5 entre 4 y me toca 1 y me sobra 1. El que me sobra lo pongo abajo del 5.

<table>
<tr><td>2
42 | 856
016</td><td>3) Bajo el 6.</td></tr>
<tr><td>23
42 | 856
016
0</td><td>4) Pongo 16 entre 4 y me toca 3, pongo el 3 y me sobra 0 y lo pongo abajo del 1.</td></tr>
<tr><td>230
42 | 856
016
0</td><td>5) Ese cero ya no me alcanza entre 4 entonces pongo cero arriba.</td></tr>
<tr><td>230
42 | 856
016
00</td><td>6) Y me sobra otro 0 y lo pongo abajo.</td></tr>
</table>

En este caso el alumno ha cometido varios errores que pueden identificarse claramente a través de la descripción que da, como por ejemplo:

- Comienza dividiendo sólo la primera cifra del dividendo y del divisor.
- Ignora la segunda cifra del divisor y nunca la retoma
- Presenta errores específicos en resta y multiplicación.
- Tienen un manejo inadecuado de las tablas de multiplicar.
- Coloca los datos en el lugar incorrecto
- En general refleja que los pasos del procedimiento no están claros para él.

A continuación se muestran algunos otros errores comunes que pueden presentar los alumnos (Wallace, Larsen y Elrksnin 1992):

50 7 | 370 370	80 9 | 729 720 9
No se realiza la operación completa, suspende después del primer cociente parcial	Deja el residuo igual o más grande que el divisor
20 30 | 60	30 4 | 1230 1200 3
Confunde el valor posicional del cociente, por lo que añade un 0 extra.	Omite el cero en el cociente, por lo que coloca los números en el lugar incorrecto
2 6 | 30	15 4 | 735 700 3 3 0
Invertir el divisor y el dividendo. Piensa 6 entre 3, en lugar de 30 entre 6	Coloca el resultado parcial en el cociente en el lugar de las decenas en vez de las unidades

c) Identificar el origen de los errores

Una vez que hemos identificado cuáles son los errores que comete un alumno y sabemos cuáles son los pasos que siguió para realizar la división, podremos identificar en dónde se encuentra el origen de tales errores. Por ejemplo:

- Debidos a fallas en el conocimiento y comprensión del sistema decimal, como son:
  - Dificultad para comprender cómo se agrupan unidades, decenas, centenas, etc.
  - Desconocer el valor relativo de los números.

- Dificultad en la realización de las operaciones básicas que empleó para solucionar la división (suma, resta y multiplicación)
- Desconocimiento o falla en el procedimiento de resolución del algoritmo de la división.

Los errores que presenta un alumno generalmente se deben a que el alumno no ve al algoritmo como un todo y lo reduce al seguimiento de una secuencia de pasos que puede confundir fácilmente.

d) Identificación de las fortalezas

Así como es necesario identificar los errores o dificultades que presenta un alumno, también es importante conocer cuáles son las fortalezas con las que cuenta, ya que éstas nos permitirán tener una base para partir en la intervención.

Las fortalezas de un alumno pueden ser de diversa índole, por ejemplo: que tenga un manejo adecuado de las tablas de multiplicar, que resuelve con facilidad, sumas, restas y/o multiplicaciones, que conozca el procedimiento para resolver la división.

De igual manera es importante considerar que el alumno tenga una disposición favorable hacia la tarea y que se sienta seguro del apoyo que recibirá.

Cuidando la motivación
Varios de los alumnos se mostraron renuentes cuando fueron invitados a participar en el taller, sus comentarios más frecuentes fueron: "¿Matemáticas?, ¡No!"; "Yo no sé nada de eso"; "No sé hacer divisiones"; "No me gusta". *Sus comentarios en general no eran buenos, sin embargo el material fue de su agrado. Después de la primera sesión su actitud cambió y algunos de sus comentarios fueron: "¡Así es más fácil!"; "Es divertido"*

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 23 \\ \hline 42 & 856 \\ & 016 \\ & \ \ 00 \end{array}$$

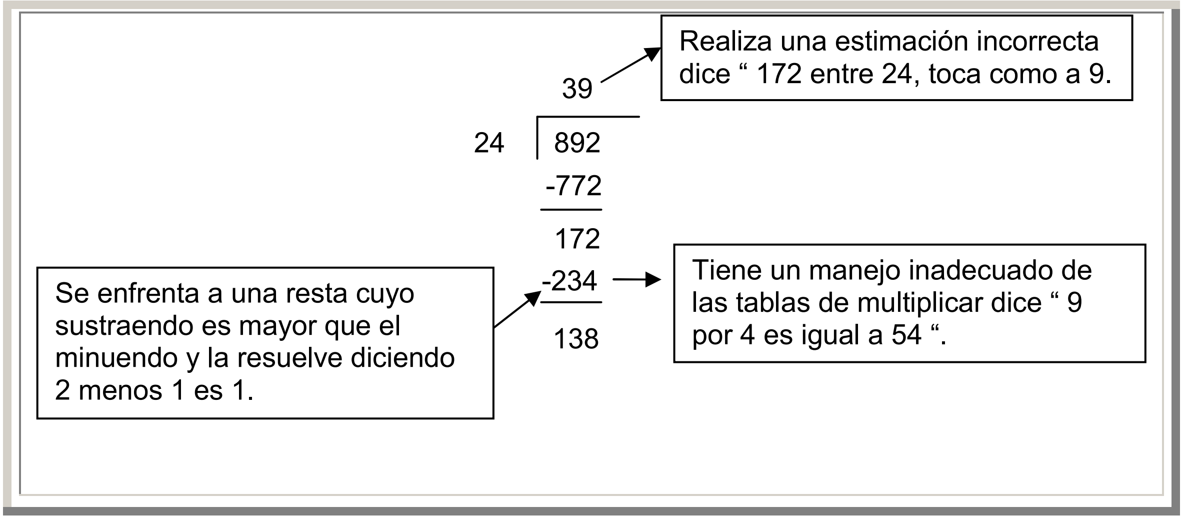
Considerando el ejemplo anterior, en este alumno se pueden identificar como fortalezas, que maneja adecuadamente algunas tablas de multiplicar, que considera la relación entre cociente y residuo como "a cuánto me toca y cuánto sobra " y que conoce algunas reglas aunque no siempre las aplica correctamente.

e) Diagnóstico

Con la información anterior, es decir, cuando sabemos cuáles son los errores o dificultades de un alumno, el origen de los mismos, así como cuáles son sus fortalezas, estaremos en posibilidad de realizar un diagnóstico del alumno en cuanto a su situación, lo cual nos permitirá determinar la manera en la que podemos apoyarlo y establecer la intervención adecuada.

En el caso del ejemplo mencionado anteriormente en el que conocimos los pasos que siguió para realizar la división, podemos decir que este alumno identifica las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y residuo, pero tiene dificultad para el reconocimiento del valor posicional de las cifras en la operación; que conoce algunas reglas para realizar el algoritmo de la división, aunque no las aplica correctamente en todas las ocasiones; que tiene dificultad en el manejo de algunas tablas de multiplicar así como en las restas. En su caso, se tendría que intervenir a través del planteamiento y análisis de situaciones que le permitan comprender la noción de división, identificar el valor posicional de los números en una cantidad, reforzando el conocimiento del sistema decimal, así como por último, el empleo correcto de las reglas para la resolución del algoritmo.

Ejemplo de identificación
Al trabajar en una sesión con Diego, en la que debía solucionar el siguiente problema: En una escuela hay 892 alumnos, los cuales están distribuidos en 24 grupos con un número igual de alumnos en cada uno, a excepción de 1°A, que tiene más. ¿Cuántos alumnos hay en 1°A, y cuántos hay en cada uno de los demás grupos? Diego tuvo dificultad para comprender qué es lo que se le preguntaba, y por lo tanto no sabía qué operación realizar. Debido a que quería terminar pronto, decidió hacer una multiplicación ya que era la que más “le sonaba”. Hasta aquí, Diego había mostrado varias de las dificultades típicas en la solución de problemas: Resolver los problemas de manera impulsiva, basarse en un análisis superficial de las relaciones expresadas en el texto del problema y no comprender la situación problemática planteada. Cuando se le apoyó con la estrategia para la solución de problemas (Flores,2001)(Ver anexo1)., pudo determinar que debía realizar una división. Al momento de resolver la división, su resultado fue el siguiente:



En el ejemplo presentado se identifican varios de los errores típicos que se tienen al resolver divisiones, con lo cual se puede determinar que este alumno tiene un manejo inadecuado de las tablas de multiplicar, realiza estimaciones incorrectas que lo llevan a tener residuos que no corresponden y no es capaz de identificar tales errores ya que desconoce cada paso que va realizando porque no se percata de la incongruencia de los resultados que va obteniendo e incluso no es conciente de que el resultado obtenido en esta caso es inexacto y por mucho, mayor que el divisor.

Cuidando la motivación

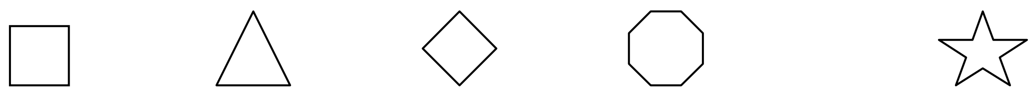
En un grupo conformado por tres alumnas, todas ellas tímidas, que hablan en voz baja y cuando se les hace una pregunta a veces responden bien pero de manera casi inaudible. La tutora procede a :

- *Identificar lo que si saben*
- *Hacerles preguntas y dirigirlas a cada una de acuerdo al nivel que ha identificado en ellas*
- *Reconocerles sus respuestas correctas y reforzarlas*
- *Identificar sus errores y analizar el origen de los mismos*
- *Apoyarlas para clarificar sus dudas.*

3 PROPUESTA DE TRABAJO PARA LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN

Se propone el empleo de fichas de fomy y/o material imantado de diferentes colores o formas, con el cual se representen las unidades, decenas, centenas, unidades de millar,etc.

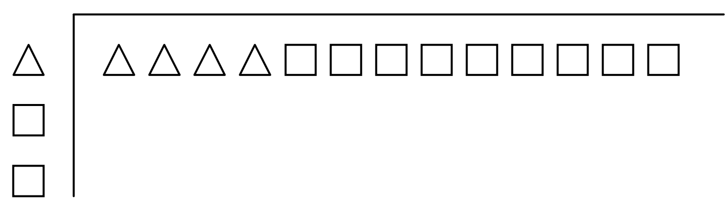
Ejemplo



Unidades	Decenas	Centenas	Unidades de millar	Decenas de millar

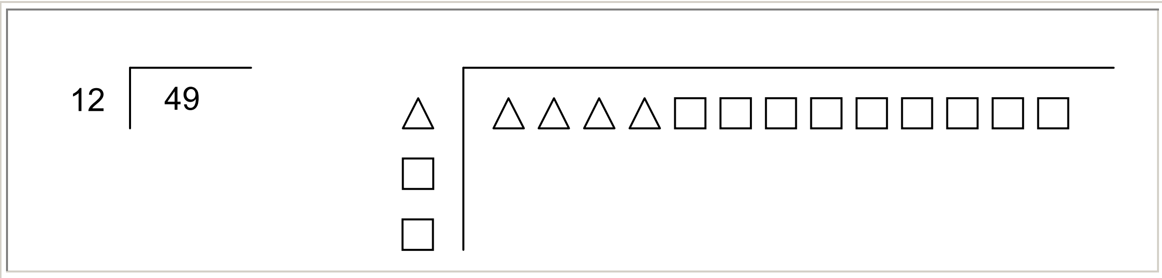
Con las fichas se podrán representar las cantidades implicadas en las divisiones.

Ejemplo:

División en algoritmo	División con fomy
12 | 49	

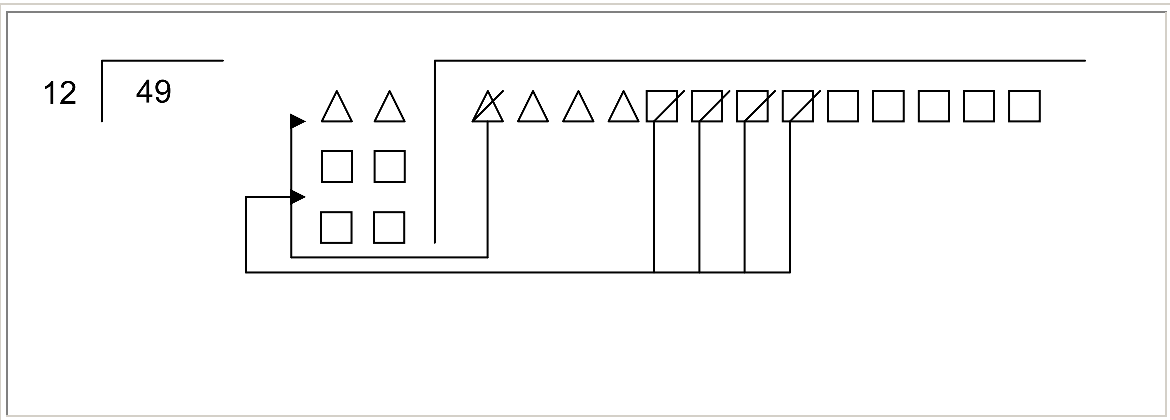
El procedimiento para resolver la división es el siguiente:

a) Representar la división con las fichas

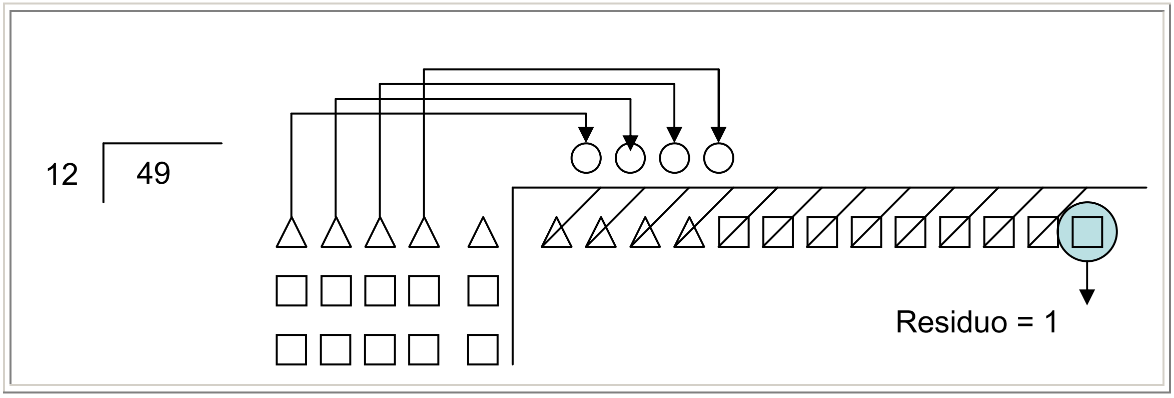


b) Comenzar a repartir equitativamente. A cada ficha del divisor debe corresponderle exactamente una igual de las del dividendo.

Las fichas que se van repartiendo se van colocando a un lado del divisor y por lo tanto van "desapareciendo" del dividendo, mostrando así de manera clara el reparto.

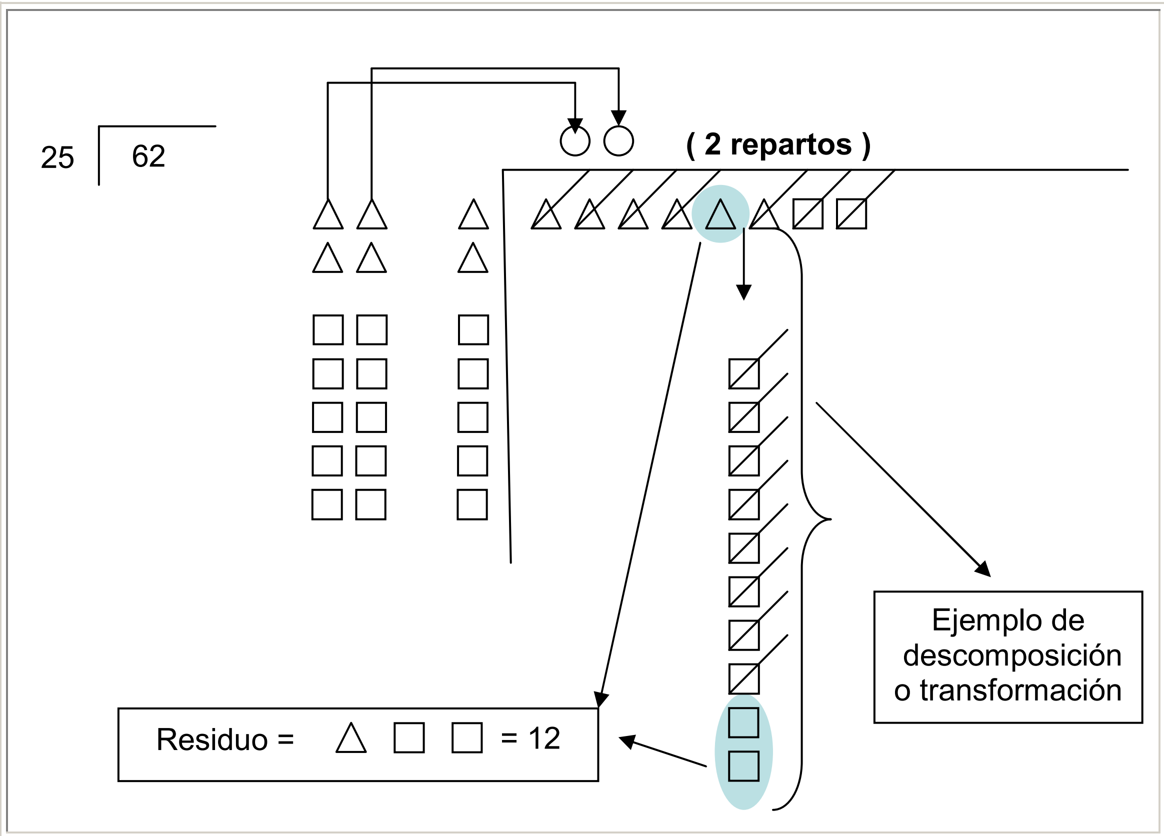


c) Cada reparto se representará con una pequeña marca (en este caso un círculo) en lugar correspondiente al cociente, para llevar la cuenta del número de repartos realizados.



Las fichas que ya han sido repartidas permanecerán siempre presentes para poder realizar una comprobación al llegar al resultado final.

d) En los casos en los que la cantidad de unidades no sea suficiente para continuar repartiendo y existan aún decenas por repartir, una decena o las que sean necesarias podrán ser descompuestas en las unidades correspondientes (transformadas). Lo mismo pasará en el caso de las centenas, que podrán descomponerse en decenas o de las unidades de millar en centenas.

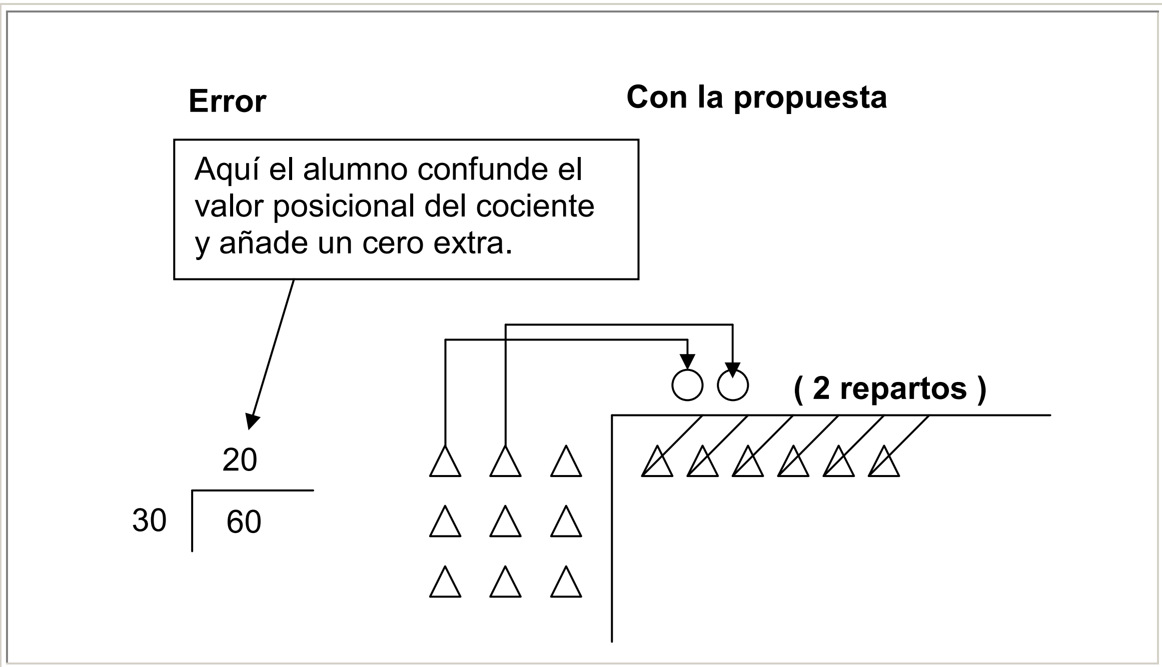


3.1 Errores que pueden corregirse con la metodología propuesta

A continuación se muestran algunos ejemplos de errores que presentan los alumnos, así como la forma en que la propuesta puede apoyar para la corrección de los mismos.

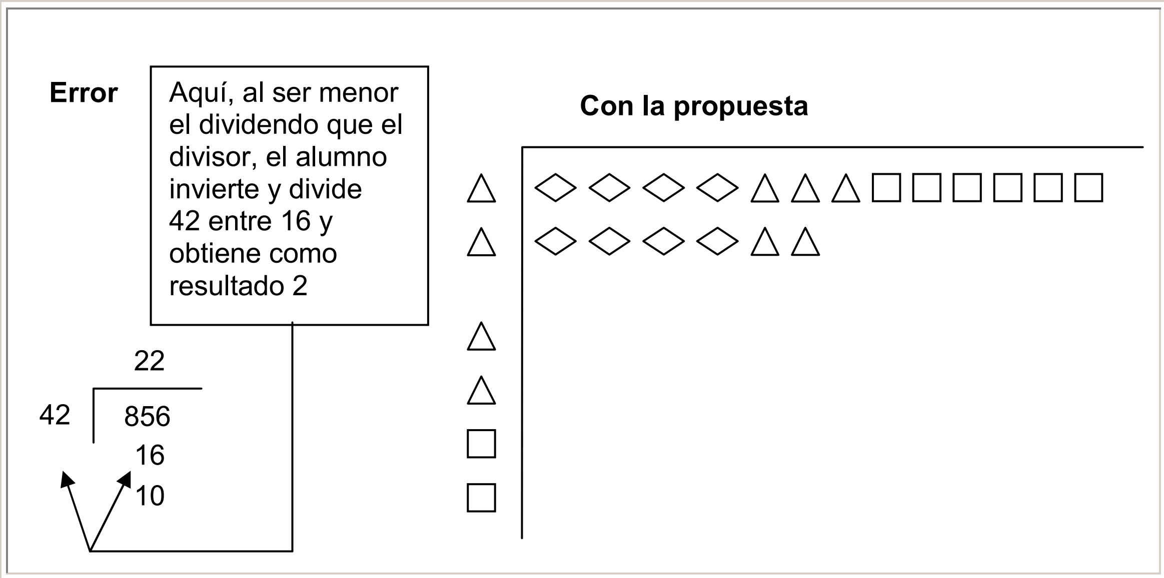
- Ayuda a identificar la agrupación de unidades en decenas, de las decenas en centenas, etc. Con lo que disminuye la posibilidad de confusiones y de omisiones en el cociente.

Ejemplo:



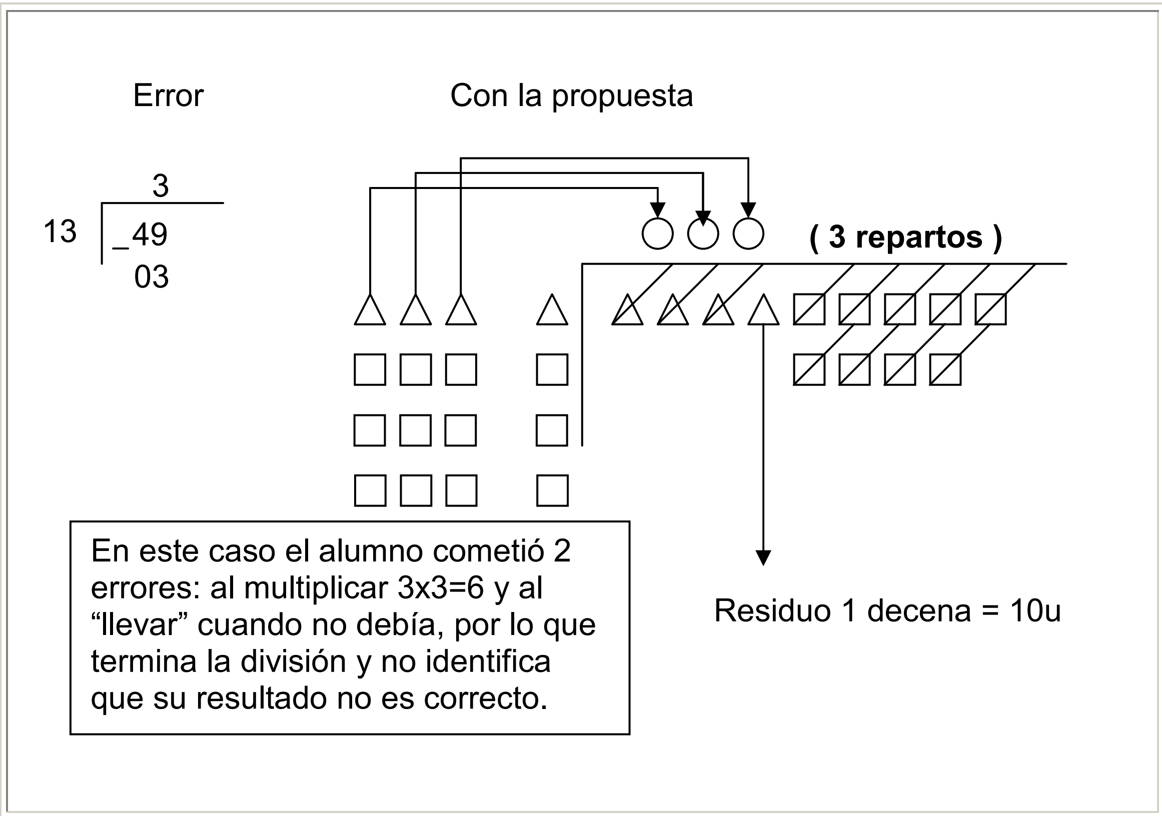
En este ejemplo el alumno podrá darse cuenta de que el número de repartos que pueden realizarse es 2 y no 20.

- Evita confusiones entre el número del todo (dividendo) y el número de partes en las que ha de dividirse (divisor) porque se hace la distinción entre “lo que estoy repartiendo y en cuántas partes”.

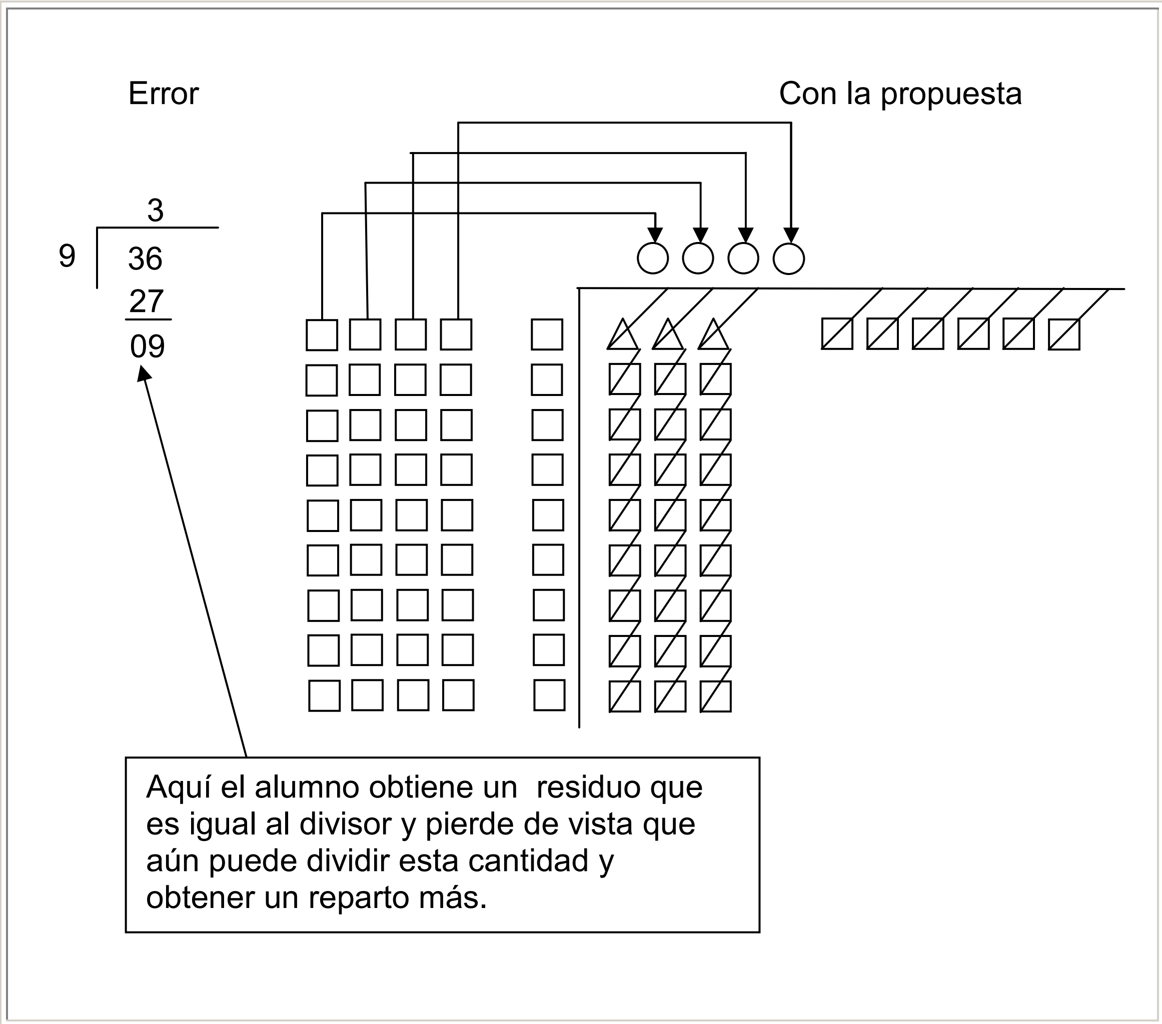


En este ejemplo, al alumno le será más fácil identificar cuáles son los que está repartiendo y evitará que realice inversiones entre dividendo y divisor.

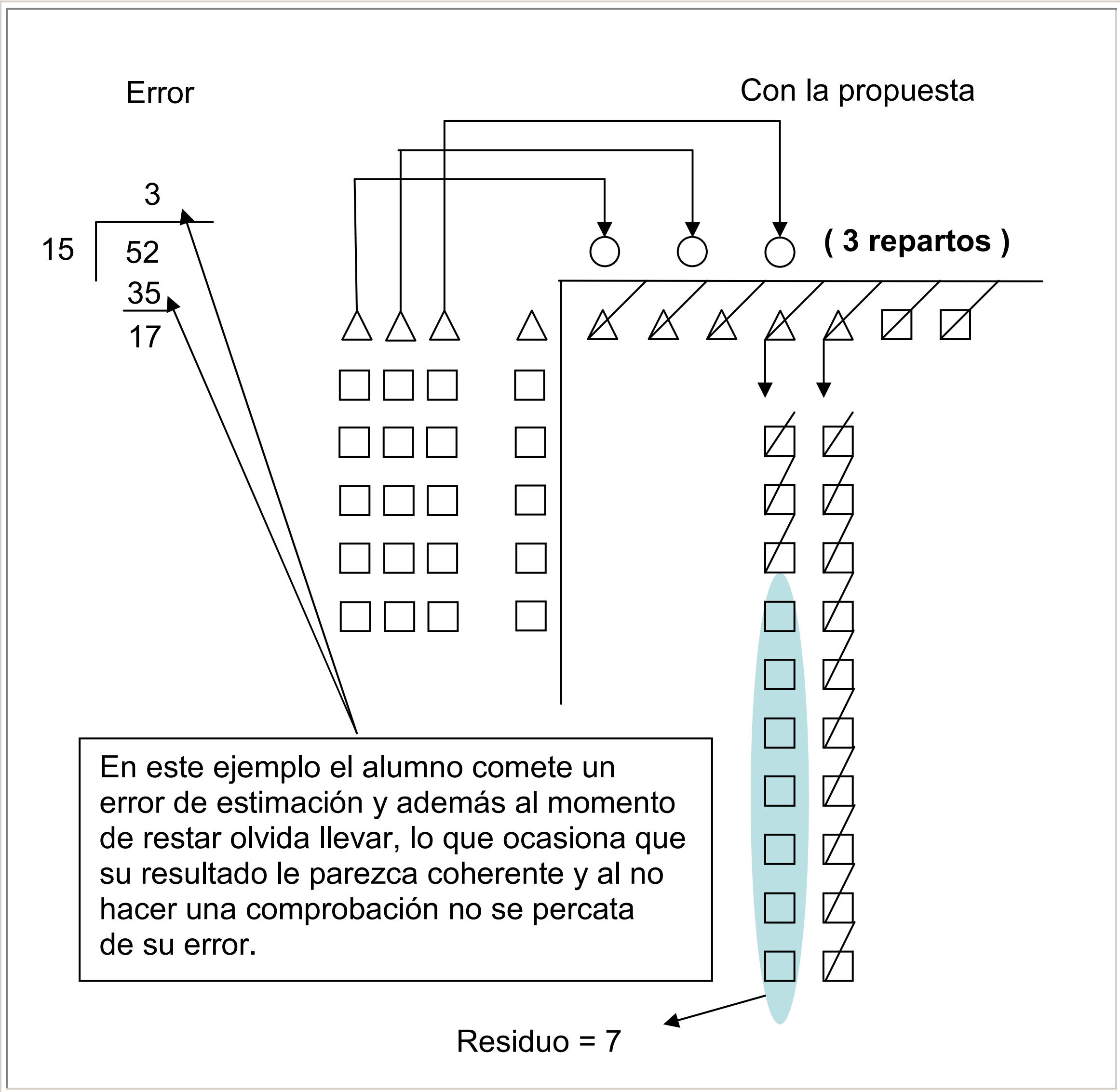
- Permite identificar los repartos que ya hice, cuántos me tocaron y cuántos me sobraron con más facilidad.



➢ Permite tener claridad en cuanto al residuo "lo que me sobra, pero que ya no me alcanza para repartir más de manera equitativa" (al menos en unidades) evitando así residuos que son iguales o mayores que el divisor.



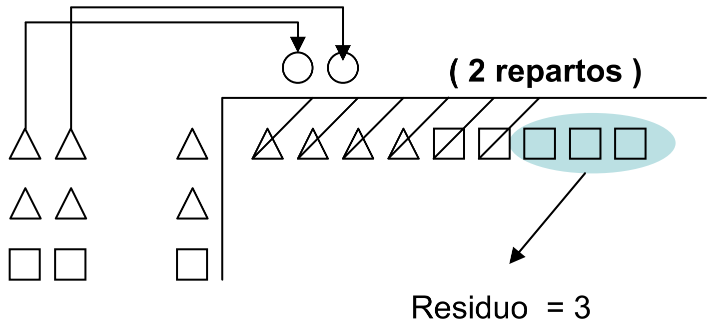
➢ Permite hacer una comprobación fácil del resultado obtenido.



➢ Puede facilitar el paso a las divisiones con punto decimal y la comprensión del resultado de éstas en números fraccionarios. Porque puede guiar a la reflexión de que “para poder repartir equitativamente lo que me sobra, podría fraccionarlo en cantidades menores a la unidad.

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} & \;\;2 \\ \hline 21 & 45 \\ & 42 \\ \cline{2-2} & \;\;3 \end{array}$$



- Permite no perder de vista a la división como un todo, al no tener que seguir una secuencia de pasos que en ocasiones carecen de sentido para los alumnos.

Cuidando la motivación
En ocasiones algunos alumnos se muestran inseguros al responder, y cuando se les pide que lo hagan, hacen comentarios como "Es que no se si estoy bien". *En una ocasión en que Ana contestó algo así, le dije: "Tenemos que verlo para comprobar si está bien, si es así, ¡Qué bueno!, pero si no, no hay ningún problema, lo volvemos a intentar las veces que sea necesario" ante lo cual sonrió y se animó a participar.*

A continuación se presenta la secuencia de una sesión, empleando la propuesta.

3.2 Secuencia de la sesión

- **PLANTEAR LA SITUACIÓN PROBLEMA**

LO QUE HACE **EL TUTOR**	LO QUE HACE **EL ALUMNO**
a) Presenta a los alumnos un problema para resolver. b) Pregunta a los alumnos cómo podría resolverse el	a) Escucha el problema e identifica los datos. b) Explican el problema y dan opciones para su solución.

problema c) Invita a quien desee escribir el algoritmo correspondiente. d) Pide que identifique cuál es el dividendo y cuál es el divisor. e) En sesiones posteriores puede invitar a los alumnos a que sean ellos los que planteen las cantidades o todo el problema.	c) Uno de los alumnos escribe el algoritmo en el pizarrón. d) Identifica el dividendo y el divisor. Si lo requiere sus compañeros lo apoyan. e) En sesiones posteriores plantean ellos los problemas y se sigue el mismo procedimiento.

Problemas que pueden surgir:

- ✓ Que los alumnos no comprendan el problema que se les plantea.

Solución: Emplear la estrategia para solución de problemas (Flores,2001) que les permite identificar las variables del problema. (Ver anexo 1).

- ✓ Que los alumnos confundan el dividendo con el divisor al colocar los datos en el algoritmo, lo cual puede ocurrir principalmente en las primeras sesiones.

Solución: Clarificar el problema a través de identificar qué es lo que se está repartiendo, lo cual constituye el dividendo; y entre cuántos se realizará el reparto, lo que compone el divisor.

Cuidando la motivación
Cuando se les plantean los problemas a los alumnos es importante que éstos sean claros y de situaciones que les resulten familiares, posibles e interesantes. *En ocasiones puede resultar motivante para ellos tener la oportunidad de plantear los problemas ellos mismos, ya que la solución de problemas así como la utilidad del algoritmo adquiere así más sentido para los alumnos.* *En algunas de las sesiones los problemas que se plantearon fueron acerca de pulseras de cuentas, niños y escuelas, chocolates, pasajeros de combis y asistentes a conciertos.*

- **REPRESENTAR CANTIDADES**

LO QUE HACE **EL TUTOR**	LO QUE HACE **EL ALUMNO**
a) En la primera sesión presenta a los alumnos el material y explica la equivalencia de los colores o figuras de las fichas. b) Explica a los alumnos cómo pueden representarse con las fichas las cantidades del problema. c) En las sesiones siguientes, invita a quien desee representar el dividendo correspondiente. También verifica las respuestas. d) Pide que otro alumno represente el divisor. e) Pregunta a los alumnos si están de acuerdo con las representaciones y en todo momento verifica que todos estén comprendiendo.	a) Identifica las unidades, decenas y/o centenas de cada cantidad de las que consta el problema. b) Quien lo decida representa en el pizarrón el dividendo, para lo cual debe tomar el número de fichas correspondientes de cada color o forma. (Por ejemplo, para representar el 84 necesitará 8 fichas de triángulo y 4 fichas de cuadrado) c) Otro alumno representará el divisor de la misma manera. Los datos se representan en la misma forma empleando la galera representativa del algoritmo de la división.

Problemas que pueden surgir:

- ✓ Que los alumnos confundan los colores o las formas de las fichas y representen por ejemplo las unidades con unidades con triángulos.

Solución: Tener siempre a la vista en el pizarrón las fichas representativas para unidades, decenas, centenas,etc.

- ✓ Que los alumnos no tengan claro en una cantidad, de cuántas unidades o decenas consta ésta.

Solución: Llevar a cabo actividades de familiarización con el sistema decimal y equivalencias.

Ocurrió en una sesión
Paco ha estado muy atento durante la actividad y cuando se invita a un alumno a que pase a representar el divisor (el dividendo ya había sido representado con ayuda de la tutora), Paco se ofrece a pasar pero se equivoca : debe representar el número 12 y él elige 10 fichas de triángulo (decenas) y dos fichas de cuadrado (unidades) y las coloca en el lugar del divisor. Cuando la tutora le pregunta cómo sabe que las fichas que colocó forman el número 12, el dice que *"son 10 triángulos de decena y 2 cuadrados de unidades"*, la tutora le dice que es cierto que las fichas de triángulo representan las decenas, y le pregunta cuánto vale una decena y el contesta correctamente *"10"*. La tutora lo remite al dividendo que ya estaba representado, que en este caso era 89 y le pregunta "¿Con cuántas fichas representamos el 80?" y el contesta *"Con 8"*, a la pregunta del por qué él responde *"Porque son 8 decenas"* y rápidamente voltea a ver las fichas que el colocó y dice *"me equivoqué"* y comienza a quitarlas y a colocar el resultado correcto.

- **INICIAR EL REPARTO**

LO QUE HACE **EL TUTOR**	LO QUE HACE **EL ALUMNO**
a) Explica a los alumnos cómo realizar el reparto, que a cada ficha del divisor corresponderá una igual de las del dividendo. b) En las primeras sesiones	a) Quien lo desee realiza en el pizarrón el primer reparto, para lo cual debe tomar del dividendo las fichas correspondientes y colocarlas

puede modelar el primer reparto, el cuál se colocará al lado del divisor y se representará en el lugar del cociente. c) En las sesiones siguientes Invita a quien desee realizar los primeros repartos y procura que los alumnos se alternen para realizar los repartos subsecuentes. d) Hace notar a los alumnos que el dividendo va disminuyendo conforme se realiza cada reparto. e) Se cerciora de que cada reparto es realizado y marcado correctamente en el lugar correspondiente al cociente. f) Verifica siempre las respuestas y cuando hay duda cuestiona a los alumnos para identificar el origen de éstas y para ayudarlos a que mediante la reflexión se percaten de sus errores y los corrijan.	al lado del divisor. b) Los otros alumnos alternadamente realizarán los demás repartos. c) Cada reparto que se realice deberán marcarlo en el lugar del cociente.

Problemas que pueden surgir:

- ✓ Que los alumnos no realicen completo cada reparto.

Solución: Con el material empleado es fácil notarlo y verificarlo, ya que cada reparto es visible en todo momento, por lo que al alumno hay que recordarle que para dar por terminado un reparto debe estar completo y marcarlo adecuadamente para poder continuar con los siguientes.

Ocurrió en una sesión
Era una de las primeras sesiones cuando después de plantear el problema cuyas cantidades eran 96/15, les pregunté si recordaban cómo se representaban las cantidades, Nelly se apresuró a decir *"Yo me acuerdo, yo paso"*, sin embargo al momento de tomar las fichas dijo *"Necesito primero 9 fichas , pero ¿de qué forma?",* a lo que le recordé las fichas grandes que estaban en el pizarrón y que ejemplificaban cada cantidad (cuadrado=unidad, triángulo=decena) y le pregunté qué cantidad iba a representar y ella contestó *"el 9",* muy bien, le dije, pero ¿Son 9 unidades o 9 decenas". Lo pensó un poco y dijo *"es 90",* entonces ¿qué son? le cuestioné y contestó *"Son 9 decenas, entonces…van con triángulo"* y las representó correctamente, y a continuación dijo *" y las otras 6 son con cuadrados porque son unidades".*

- **REALIZAR TRANSFORMACIONES**

LO QUE HACE **EL TUTOR**	LO QUE HACE **EL ALUMNO**
a) Cuando se presenta una situación en el momento del reparto en la que el número de unidades del dividendo, por ejemplo no sea suficiente para repartir entre las unidades del divisor, el tutor pregunta a los alumnos posibles soluciones y los apoyará para llegar a la explicación de cómo realizar las transformaciones. Que cada decena corresponde a 10 unidades, por lo cual podrá ser transformada cuando sea requerido en el momento del reparto.	a) Cuando se enfrenta a un caso en el que requiere hacer una transformación, deberán realizarla físicamente, es decir, eliminar del dividendo una ficha de triángulo y poner en su lugar 10 fichas de cuadrados para poder continuar con los repartos. b) Cuando uno de los alumnos no sabe u olvida lo que debe hacer, será apoyado por sus compañeros o por el tutor.

b) Siempre que se presente una situación similar en la que sea necesario transformar decenas en unidades, centenas en decenas, etc. Si el alumno que está realizando el reparto tiene alguna dificultad o duda, se buscará el apoyo de los compañeros y en caso de ser necesario el tutor apoyará a los alumnos para realizar las transformaciones necesarias.	

Problemas que pueden surgir:

- ✓ Que el alumno no sepa qué hacer cuando ya no tiene fichas correspondientes a las cantidades que necesita para continuar con el reparto, pero sí cuente con fichas de cantidades mayores.

Solución: Preguntarle cuánto tiene aún en el dividendo y cuánto necesita para hacer un reparto, y con base en sus respuestas hacerle notar al alumno que la cantidad total que tiene en el dividendo aún le alcanza para repartir al divisor. Hasta llegar a comprender que la cantidad que todavía tiene puede ser descompuesta en sus cantidades correspondientes (Por ejemplo, una decena se puede descomponer o transformar en 10 unidades, por lo que una ficha de triángulo puede convertirse en 10 fichas de cuadrado, que es su equivalente)

Ocurrió en una sesión
Se estaba realizando un reparto de manera adecuada hasta que llegó un momento en que en el dividendo quedaban solamente 2 decenas (2 fichas de triángulo) y el divisor era 14. Tania estaba repartiendo y de pronto volteó a vernos, le pregunté qué pasaba y contestó *"Ya no se puede"*, su compañera Luz estuvo de acuerdo con eso, por lo que les dije: "Vamos a ver, ¿Cuántos tenemos por repartir todavía?, Tania contestó *"2 triángulos"*, y eso cuánto es les pregunté. Luz contestó *"2 decenas"*, y cuánto son dos decenas, les dije. *"Pues 20"* dijeron a coro. "Muy bien, tenemos entonces 20 por repartir, y lo tenemos que repartir ¿entre cuánto?", *"entre 14"* dijo Tania. ¿Entonces qué pasa? Pregunté, *"que si se puede"* contestaron. ¿Qué podemos hacer entonces?, *"Ah, pues cambiamos uno de los triángulos por 10 cuadrados, ¿verdad?"* dijo Tania y Luz la apoyó diciendo *"Sí es cierto"*.

- **RESOLVER EL ALGORITMO. VERIFICAR CANTIDADES Y RESULTADOS**

LO QUE HACE **EL TUTOR**	LO QUE HACE **EL ALUMNO**
a) Al concluir el reparto invita a un alumno a realizar el algoritmo en el pizarrón. b) Les hace notar a los alumnos que pueden apoyarse con los datos que obtuvieron en el reparto para realizar la estimación. c) Pide a todos los alumnos que apoyen al compañero que está en el pizarrón resolviendo el algoritmo. d) Si hay alguna duda apoya a los alumnos.	a) Un alumno resuelve el algoritmo, con apoyo de los datos del reparto realizado y con apoyo de sus compañeros o del tutor si lo requiere. b) Entre todos verifican los resultados parciales comparando los resultados del reparto y los del algoritmo. c) Cuentan las fichas repartidas, verifican el número de repartos (cociente) y las fichas que les sobraron (residuo)

e) Cuando se llega a los primeros resultados, invita a los alumnos a verificar la cantidad repartida. f) Por ejemplo, para la siguiente división: 89/12, el resultado de multiplicar el cociente por el divisor (12x7), es 84, lo cual puede verificarse contando las fichas repartidas y sumando las cantidades que representan con lo cual pueden ver de manera clara cuál fue la cantidad que repartieron, cuántos repartos hicieron y cuánto les sobró. $$\begin{array}{r\|l} & 7 \\ \hline 12 & 89 \\ & \underline{-84} \\ & 05 \end{array}$$	

Referencias del manual

Carraher,T., Carraher,D. y Schliemann,A.(2002) En la vida diez, en la escuela cero. México: Siglo XXI.

Defior,S.(2000) Las dificultades de aprendizaje: un enfoque cognitivo. Madrid:Aljibe

Flores, Macías, R.C. (2001) Instrucción estratégica en alumnos con problemas de aprendizaje. *Revista Mexicana de Psicología* 18 (2), 247-256.

Moreno,E. (1996) Introducción a la noción de la división en la escuela primaria. Tesis de maestría. DIE-CINVESTAV-IPN, México.

SEP (1998) La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. México: SEP.

Wallace,G., Larsen,S. y Elrksnin,L. (1992) Educational Assessment of learning problems. U.S.A: Allyn and Bacon.

ANEXO

Estrategia de solución de problemas, las acciones requeridas y las autoinstrucciones de apoyo para recordarlas (Flores,2001)

COMPONENTES DE LA ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
Pasos de la estrategia	Acciones	Autoinstrucciones
Análisis y planificación	1 Leer y expresar lo que se comprendió del problema	Leo el problema
		Lo platico
	2 Identificar la Interrogante	Digo la pregunta
	3 Identificar los datos numéricos que se emplearán en la solución	Busco los datos
Ejecución y monitoreo de la solución	4 Modelar gráficamente el problema y solucionarlo	Hago un dibujo del problema
		Con mi dibujo busco la solución
	5 Vincular la representación gráfica con un algoritmo	Con mi dibujo busco la operación
	6 Escribir y realizar el algoritmo	Escribo
		Resuelvo
Evaluación de la solución	7 Comprobar el algoritmo y la correspondencia entre resultado y pregunta	Compruebo mi operación
		Compruebo mi resultado
	8 Redactar el resultado relacionándolo con la interrogante	Escribo completa la respuesta

REFERENCIAS

Adelman,H.(1994) Learning disabilities. On interpreting research translations. En Jordan,N. y Goldsmith,J. (Eds) *Learning disabilities:New directions for assessment and intervention*.(p.1-19) Boston:Allyn and Bacon.

Bender,W.(1992) Learning disabilities,characteristics, identification and teaching strategies. U.S.A.: Allyn and Bacon

Brun,J. (1996) The theory of conceptual fieldsand its application to the study of systematic errors in written calculation. En H.Mansfield,N.Pateman y N.Bednarz (Eds) *Mathematics for tomorrow´s young children,* (120-135). Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Carraher,T.,Carraher,D. y Schliemann,A.(2002) En la vida diez, en la escuela cero. México: Siglo XXI.

Defior,S.(2000) Las dificultades de aprendizaje: un enfoque cognitivo. Madrid:Aljibe

English, L. y Halford, G. (1995) Mathematics Education. Models and process. U.S.A.: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Flores, Macías, R.C. (2000) Alcanzando el éxito en secundaria, programa de apoyo para adolescentes con dificultades en el aprendizaje. Manuscrito de circulación interna. Facultad de Psicología, U.N.A.M.

Flores, Macías, R.C. (2001) Instrucción estratégica en alumnos con problemas de aprendizaje. *Revista Mexicana de Psicología* 18 (2), 247-256.

Flores, Macías, R.C. (2002) El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción: un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación. Tesis de doctorado. Universidad Autónoma de Aguascalientes. México.

Flores, Macías,R.C. (2005) El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas. *Educación matemática* 17 (2),(7-34)

Graeber,A. y Baker,K. (1991) Curriculum materials and misconceptions concerning multiplication and division. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 13 (3), 25-38.

Greer,B., Verschaffel,L.y De la Corte,E.(2002) “The answer is really 4.5”:beliefs about word problems. En G.Leder, E.Pehkonen y G. Törner (Eds), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education* (271-292). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Harel,G. y Behr,M. (1991) “Ed´s strategy for solving division problems”. *Arithmetic Teacher* 39 (2), 38-40.

Kloosterman,P.(2002) Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: measurement and implications for motivation. En Leder,G., Pehkonen,E. Y Törner,G. (Eds), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education* (247-269) Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lester,F.(2002) Implications of research on students´beliefs for classroom practice. En G.Leder, E.Pehkonen y G. Törner (Eds), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education* (345-353) Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Limón,M.(2001) On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change: a critical appraisal. *Learning and Instruction*. 11, 357-380.

Marton,F. y Neuman,D.(1996) Phenomenogrphy and children´s experience of division. En L.Steffe, P.Nesher, P.Cobb (Eds) *Theories of Mathematical Learning* (315-334) New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Mason,L.(2001) Responses to anomalous data on controversial topics and theory change . A qualitative analysis. *Learning and Instruction.* 11.

Maurer,S. (1987) New Knowledge about errors and new views about learners. En A.Schoenfeld (Ed) *Cognitive Science and mathematics education.* U.S.A: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Maza,C. (1991) Enseñanza de la multiplicación y la división. Madrid: Síntesis.

Mercer,C.(1991) Dificultades de aprendizaje. Barcelona: CEAC

Montague,M. (1997) Cognitive strategy instruction in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities* 30 (2), 164-177.

Moreno,E. (1996) Introducción a la noción de la división en la escuela primaria. Tesis de maestría. DIE-CINVESTAV-IPN, México.

Nunes,T. y Bryant P.(2003) Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño. México: Siglo XXI , sexta edición.

SEP (1998) La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. México: SEP.

Silver,E.(1992) Referential mappings and the solution of division story problems involving remaninders. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 14 (3), 29-39

Sinatra,G.(2005) The “Warming Trend” in conceptual change research: The legacy of Paul R. Pintrich. *Educational Psychologist*, 40 (2), 107-115.

Stevens,R. y Shenker,L. (1992) To Succeed in High School. A Multidimensional Treatment Program for Adolescents with Learning Disabilities. The learning center of Québec.

Tsamir,P. y Tirosh,D.(2002) Intuitive beliefs,formal definitions and undefined operations: cases of division by zero. En G.Leder, E.Pehkonen, y G. Törner (Eds), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education* (331-344). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tirosh,D.y Tsamir,P. (2004) What can mathematics education gain from the conceptual change approach? And what can the conceptual change approach gain from its application to mathematics education?. *Learning and Instruction*. 14, 535-540.

U.P.N. (1994) Construcción del conocimiento matemático en la escuela. Antología Básica. México: UPN.

Uriegas,S. (1996) La división: un problema difícil de operacionalizar. *Difusión Educativa* 6 (13), 9-10.

Vergnaud,G.(1996) The theory of conceptual fields. En L.Steffe; P.Neshler; P.Cobb; G. Goldin y B. Greer (Eds) *Theories of mathematical learning* (219-239). N.J: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Vosniadou,S., Ioaonides,C., Dimitrakopoulou,A. y Papademetriou,E. (2001) Designing learning environments to promote conceptual change in sciencie. *Learning and Instruction*. 11, 381-419.

Wallace,G. y Mc Loughin (1979) Learning disabilities: concepts and characteristics. U.S.A: Merril Publishing Company.

Wallace,G., Larsen,S. y Elrksnin,L. (1992) Educational Assessment of learning problems. U.S.A: Allyn and Bacon