



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

“MÉTODOS DE COLOCACIÓN TH”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS
(COMPUTACIÓN)**

P R E S E N T A:

IVÁN GERMÁN CONTRERAS TREJO

ASESOR DE TESIS:

DR. ISMAEL HERRERA REVILLA

México D.F.

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para Melissa, porque este logro es más suyo que mío.

Para Germán Contreras Espinosa, in memoriam.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México por sus magníficas instalaciones e infraestructura.

Al Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación, al profesorado y al personal administrativo.

Al Dr. Ismael Herrera Revilla por su apoyo y por guiarme en este maravilloso camino de la ciencia.

Al Dr. Robert Yates por sus consejos y sus enseñanzas, duras pero efectivas.

Al Grupo de Modelación Matemática y Computacional, a todos en general y a todos en particular, por compartir conmigo sus experiencias y conocimientos.

A mi familia, por su incondicionalidad.

A mis amigos, por serlo.

“Desatar las voces, desensoñar los sueños: escribo queriendo revelar lo real de lo maravilloso en el exacto centro de lo real horroroso de América.

En estas tierras, la cabeza del dios Eleggúa lleva la muerte en la nuca y la vida en la cara. Cada promesa es una amenaza; cada pérdida, un encuentro. De los miedos nacen los corajes y de las dudas las certezas. Los sueños anuncian otra realidad posible y los delirios, otra razón.

Al fin y al cabo, somos lo que hacemos para cambiar lo que somos. La identidad no es una pieza de museo, quietecita en la vitrina, sino la siempre asombrosa síntesis de las contradicciones nuestras de cada día.

En esa fe, fugitiva, creo. Me resulta la única fe digna de confianza, por lo mucho que se parece al bicho humano, jodido pero sagrado, y a la loca aventura de vivir en el mundo “

El libro de los abrazos
Eduardo Galeano.

Métodos de Colocación TH.

Iván Germán Contreras Trejo

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Antecedentes	3
1.2. El método de colocación TH	6
1.3. Objetivo de la tesis	9
1.3.1. Objetivo General	9
1.3.2. Objetivos Particulares	10
2. Método Convencional de Colocación	11
2.1. Interpolación Polinomial	12
2.1.1. Polinomios de Lagrange	12
2.1.2. Polinomios de Hermite	13
2.2. Método de Colocación	13
3. Fórmulas de Green para el BVPJ	18
3.1. Nociones preliminares y Notación	18
3.2. Fórmulas de Green-Herrera	19
3.3. Planteamiento del BVPJ	21
3.4. Formulación Débil del Problema Elíptico de Segundo Orden	21
4. FEM con Funciones Óptimas	23
4.1. Descomposiciones Conjugadas	23
4.2. Caracterizaciones con Funciones Óptimas	25
4.2.1. Caracterización Steklov-Poincaré	25
4.2.2. Caracterización Trefftz-Herrera	25
4.2.3. Caracterización Petrov-Galerkin	26
4.3. FEM-OF	26
4.3.1. FEM-OF de Steklov-Poincaré	26
4.3.2. FEM-OF de Trefftz-Herrera	26
4.3.3. FEM-OF de Petrov-Galerkin	27
4.4. Método Directo	27
4.4.1. Procedimiento de solución numérica	28
4.4.2. Construcción de las funciones de base óptimas	29
4.4.3. Construcción de las funciones de base óptimas en un elemento que no es de frontera	30

4.4.4. Construcción de las funciones de peso u_P en un elemento de frontera	32
4.5. Método Indirecto	33
4.5.1. Descripción	34
5. Implementación Numérica	37
5.1. Propósito de la aplicación computacional	37
5.2. ¿Que es la Programación Orientada a Objetos (POO)	37
5.2.1. Encapsulamiento	38
5.2.2. Polimorfismo	38
5.2.3. Herencia	39
5.3. Modelación Computacional Orientada a Objetos	40
5.4. Diseño de las Clases	40
5.4.1. Dominio del Problema	40
5.4.2. Descripción de las clases para modelar el Dominio	41
5.4.3. Operadores Diferencial y Variacional	42
5.4.4. Polinomios	43
5.4.5. Polinomios de Interpolación	44
5.4.6. Funciones	44
5.4.7. Matriz	45
5.4.8. Solución Numérica	45
5.4.9. Modelo de Interacción	46
6. Error y Convergencia	48
6.1. Error	48
6.2. Convergencia	49
6.3. Error en los FEM-OF	49
6.4. Experimentos numéricos	50
6.4.1. Problemas elípticos en dos dimensiones	51
7. Conclusiones	56
Apéndices	59
A.	60
A.1. El Método Convencional de Colocación en la solución de problemas locales en una dimensión	61
A.2. Descripción	61
A.3. Procedimiento con polinomios cuadráticos.	62
A.4. Procedimiento con polinomios cúbicos.	64
Bibliografía	65

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son entidades matemáticas dadas como una relación de cambio con respecto a dos o más variables (derivadas parciales) que nos permiten modelar una gran variedad de sistemas y así al resolverlas predecir el comportamiento de dichos sistemas. Propiamente, los modelos de los sistemas son las soluciones de las ecuaciones pues son ellas las que modelan el comportamiento de los sistemas.

Una ecuación diferencial tiene la forma

$$\mathcal{L}u = f_{\Omega} \tag{1.1.1}$$

donde \mathcal{L} es un operador diferencial simétrico de segundo orden, el cual es una entidad que transforma una función a otra en términos de una suma de derivadas parciales.

Ahora bien, tenemos dos métodos para obtener la solución de una EDP que son:

- Métodos Analíticos: Los cuales consisten en obtener la función exacta que satisface la ecuación.
- Métodos Numéricos: Los cuales consisten en obtener un sistema de ecuaciones para un número finito de puntos en el dominio del problema que al resolverlo nos arroja un valor cercano a el valor que arrojaría la función que satisface la ecuación de forma exacta.

Los primeros son poco utilizados pues son pocas las EDP que aparecen en sistemas físicos de las que se obtiene una solución exacta, mientras que los segundos, gracias al desarrollo computacional actual, han tenido un gran avance y son utilizados frecuentemente pues podemos encontrar soluciones aproximadas. Obviamente estas soluciones aproximadas estan restringidas por la propia capacidad computacional que tenemos, pero en general nos dan muy buenos resultados.

Como ya dijimos, para obtener una solución exacta tendríamos que resolver la EDP de forma analítica y con eso conoceríamos el comportamiento del sistema en cualquier punto donde se cumpla la ecuación diferencial, como ya sabemos, pocas EDP que nos interesan tienen solución analítica, es por eso que cuando queramos obtener la solución numérica tendremos que discretizar el dominio de la EDP para obtener la solución aproximada solo en ciertos puntos del dominio y tendríamos tantos grados de libertad como de puntos donde queremos la solución aproximada.

Sea D el espacio de funciones definidas en el dominio de \mathcal{L} . Entonces aproximar la solución u consiste en encontrar una función \hat{u} la cual esté en un subespacio $\tilde{D} \in D$, la cual satisfaga el operador de la ecuación en M puntos distintos. así la solución está dada por

$$\mathcal{L}\hat{u}(\underline{x}) = f(\underline{x}) \quad (1.1.2)$$

Donde \underline{x} se refiere a los puntos donde se satisface la ecuación.

En esta tesis nos enfocamos al estudio de ciertos métodos numéricos aún que de forma más general la clasificación de los métodos numéricos para las EDP se basa en el procedimiento utilizado en la discretización.

El procedimiento general para la formulación de los Métodos Numéricos de las EDP consiste en sustituir la EDP por un sistema de ecuaciones algebraicas con un número finito de ecuaciones y de incógnitas (sistemas con un número finito de grados de libertad). A ese proceso se le llama discretización de la EDP.

Se clasifican según su método de discretización en:

1. **Diferencias Finitas:** Consiste en aproximar las derivadas que intervienen en las ecuaciones en ciertos puntos del dominio usando polinomios de interpolación.
2. **Elementos Finitos:** Se introduce una partición en el dominio del problema y con base en dicha partición se introducen funciones aproximantes y la solución se expresa como una superposición de las funciones aproximantes. Finalmente los coeficientes en esta expansión se obtienen utilizando el método de residuos pesados. Este procedimiento consiste en imponer la condición de que el residuo en la ecuación diferencial sea cero cuando se le aplican funciones de peso de una familia previamente seleccionada.
3. **Colocación:** Este método es similar al de Elementos Finitos salvo que los coeficientes en la expansión de la solución, en lugar de utilizar el método de residuos pesados, se obtiene imponiendo la condición de que el residuo se anule en algunos puntos del dominio. A estos puntos se les llama puntos de colocación.

De los métodos de colocación el procedimiento más ampliamente utilizado por su efectividad, es el de Colocación Ortogonal. Para el caso de una dimensión, este consiste en escoger los puntos de colocación como los puntos Gaussianos de los subdominios de la partición, dichos puntos Gaussianos se obtienen con base en las raíces de los polinomios de Legendre.

Lanczos [25] introdujo el concepto de Colocación Ortogonal cuando realizó una extensión de su trabajo relacionado a la solución de ecuaciones diferenciales por series de potencias truncadas y el uso de un polinomio de orden n , seleccionando como puntos de colocación los llamados ceros del polinomio de Chebysheff de orden n . El uso de polinomios por *tramos* [24] para calcular la solución aproximada en el trabajo de Russell [31] permitió un análisis más sencillo de la colocación ya que los uso como *funciones base* para llevar a cabo la aproximación. DeBoor [6] se enfocó en ubicar los puntos de colocación con respecto a cada subregión, con lo cual demostró que si se hacían coincidir los puntos de colocación con las raíces de los polinomios de Legendre se maximizaba la precisión para problemas unidimensionales.

Otros autores, como Brill [2] comentan que los trabajos realizados antes de 1983 están basados solo en discretizaciones de colocación de ecuaciones diferenciales parciales y estuvo enfocado a estimar su precisión. A partir de ese momento el trabajo se volcó hacia los métodos iterativos para solucionar los sistemas de ecuaciones lineales que se obtienen de las discretizaciones del propio método de colocación ortogonal.

Ahora una pequeña reseña de lo que fué el trabajo en aquellos años.

- Dyksen [8] compara el método de colocación estandar con el método de Galerkin y observa que el primero es más eficiente y utiliza métodos como eliminación gaussiana y la factorización de Cholesky para resolver los sistemas lineales.
- Houstis [21] desarrolla un paquete computacional que soluciona ecuaciones elípticas en dos dimensiones con discretización de colocación ortogonal.
- Cristara [5] lleva a cabo la paralelización de la solución de la discretización mediante colocación empleando splines cuadráticos en vez de los cúbicos sobre una máquina paralela hipercubo.
- La paralelización via descomposición de dominios para el método de colocación la inició Zampieri [33] quien la aplica a la solución de elasticidad lineal.
- Herrera [15] también desarrolla un algoritmo de descomposición de dominios [17] para el método de colocación, aplicándolo a problemas de transporte y flujo subterráneo utilizando colocación ortogonal.
- Robinson [30] también emplea el método de colocación ortogonal estandar aplicándolo a ecuaciones diferenciales parciales con valores complejos.

En años recientes, nuevos y más efectivos procedimientos de colocación han sido presentados. De manera general los métodos de colocación se dividen en dos grupos de acuerdo con su forma de abordar el problema. El primero, conocido como métodos directos, busca la solución usando las soluciones locales; estas se ensamblan de tal manera que se satisfagan las condiciones de contorno en la frontera exterior y las de continuidad a través de la frontera interior. El segundo, conocido como métodos indirectos, construye funciones de peso especializadas las cuales permiten obtener suficiente información en las fronteras interiores, así como definir problemas locales bien planteados en cada una de las subregiones del problema. Esta condición asegura que la solución global pueda ser reconstruida localmente a partir de la información disponible [7].

1.2. El método de colocación TH

Uno de los métodos de aproximación basado en la discretización del dominio por medio de elementos finitos es el propuesto por Trefftz en 1926 [32] y que ha sido, especialmente desde que Jirousek y sus colaboradores lo mejoraron [23], un modelo que se ha convertido en una herramienta computacional altamente eficiente para la solución de problemas con valor de frontera. En años más recientes, Herrera interpretó el método de Trefftz como un método de Descomposición de Dominio (DDM) [17] y propuso toda una teoría basada en ello.

Las ventajas del método de colocación Trefftz-Herrera (el cual abreviaremos como método de colocación-TH) sobre los métodos de colocación ortogonal con splines pueden proveer beneficios al tratamiento numérico de muchas clases de Ecuaciones Diferenciales Parciales. Estas se deben al amplio alcance de la teoría de *Trefftz-Herrera*, en la cual la colocación-TH esta basada.

Definimos como un dominio a un subconjunto conectado, de fronteras abiertas con frontera Lipschitz continua [24]. Así, consideremos un problema con valores de frontera formulado en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con una frontera exterior $\partial\Omega$ y junto con una partición Π con E subintervalos dada como

$$\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{i-1}, \Omega_i, \dots, \Omega_{E-1}, \Omega_E\}$$

la cual genera una frontera interna denominada Σ .

Sea $\Sigma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ donde $\partial\Omega_i$ y $\partial\Omega_j$ son las fronteras de dos subregiones adyacentes y entonces definimos como *traza* a la restricción de una función cualquiera v en la subregión Σ_{ij} , pero como para esta función tenemos una restricción en cada una de las subregiones vecinas involucradas, definimos a v_+ como el valor de la función en Σ_i y a v_- como el valor de la función en Σ_j .

Así, se asume que por cada $i = \{1, \dots, E\}$ hay un espacio lineal $D(\Omega_i)$ cuyos elementos son funciones definidas en Ω_i , por lo tanto, el espacio de funciones D esta definido como

$$D \equiv D(\Omega) \equiv D(\Omega_1) \oplus \cdots \oplus D(\Omega_E) \quad (1.2.1)$$

Cuando el espacio D esta definido por (1.2.1), una función $u \in D$ es una secuencia finita de funciones $u \equiv (u_1, \dots, u_E)$ de tal forma que $u_i \in D(\Omega_i)$. Se asume que la traza de cada $u_i \in D(\Omega_i)$ esta definida en cada punto de $\partial\Omega_i$, excepto posiblemente, para un conjunto de medida cero [24]. En cualquier punto de Σ , nuevamente con la posible excepción de un conjunto de medida cero, hay definido un vector normal unitario \underline{n} con sentido elegido de manera arbitraria con respecto a Σ tomando como el lado positivo el cual hacia el cual apunta \underline{n} . Así, dada una función $u \in D$, $u \equiv (u_1, \dots, u_E)$, se definen dos trazas en cada punto de Σ , las cuales se denotan como u_+ y u_- , respectivamente. De manera general, $u_+ \neq u_-$ [18].

Dadas estas definiciones introducimos las siguientes operaciones sobre funciones.

El salto de una función esta dado por

$$[u] = u_+ - u_-$$

El promedio de una función esta dado por

$$\dot{u} = \frac{1}{2} (u_+ + u_-)$$

Ahora es importante hacer notar que los espacios de funciones $D(\Omega_i)$ introducidos aquí deben de ser formulados en términos de espacios concretos matemáticamente determinados. Una alternativa viable son los espacios de Sobolev $H^s(\Omega)$ [24], ya que estos ofrecen un marco teórico apropiado para manejar funciones completamente discontinuas [7]. Son así especialmente importantes para esta discusión esta clase de espacios y que definimos para nuestro problema como

$$\hat{H}^s(\Omega) \equiv \hat{H}^s(\Omega_1) \oplus \cdots \oplus \hat{H}^s(\Omega_E). \quad (1.2.2)$$

Cuando $\hat{H}^s(\Omega)$ cuenta con una norma [24]

$$\|v\|_{s,\Omega,\Pi} \equiv \left\{ \sum_{\alpha=1}^E \|v_\alpha\|_{s,\Omega_\alpha}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.3)$$

definida para cada $\hat{v} \equiv (v_1, \dots, v_E) \in \hat{H}^s(\Omega)$, se vuelve un espacio de Hilbert [24].

En la metodología-TH el primer paso es *localizar* el problema. Para esto, se establece un procedimiento el cual permite construir la solución global, definida en todo el dominio, resolviendo exclusivamente problemas *locales* en cada uno de los subdominios. La estrategia general para lograrlo consiste en obtener información en la frontera interna Σ de la partición, la suficiente para definir problemas bien planteados que satisfagan la solución exacta en cada uno de los subdominios de manera separada. Se establece un objetivo de información en Σ -información buscada- que posea cierta propiedad, que es escogida y definida de

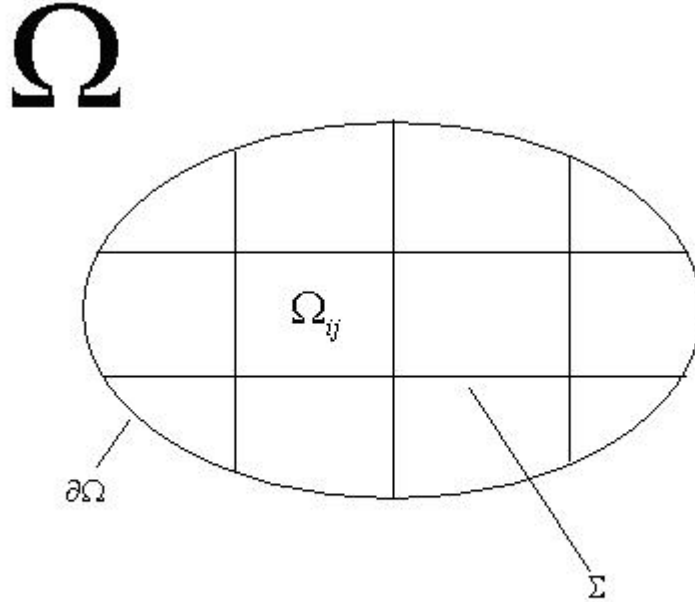


Figura 1.1: Dominio del Problema

antemano. Después se realiza una búsqueda para obtener dicha información.

Existen dos categorías de procedimientos para llevar a cabo la búsqueda: los procedimientos de localización directos y los indirectos. En el método de localización directo, las soluciones locales del operador diferencial son usadas para establecer condiciones de compatibilidad que la información buscada debe de satisfacer. Estas condiciones derivan una forma general conocidas como *condiciones de Poincaré-Steklov* [19]. Para este proposito, ciertas funciones de prueba o de peso son usadas y a las cuales nos referiremos como *funciones base óptimas*; estas son en efecto soluciones locales de la ecuación homogénea asociada con el operador diferencial. El sistema de ecuaciones global derivado de esta manera permite obtener la información buscada.

En el método de localización indirecto, por el otro lado, un sistema de funciones de peso o de prueba, a las que nos referiremos como *funciones de prueba óptimas* con la propiedad de producir la información buscada en la frontera interna Σ , es exclusivamente desarrollado y aplicado. Dichas *funciones de prueba óptimas*

son de hecho soluciones de la ecuación homogénea asociada con el operador diferencial adjunto. La idea de construir *funciones de prueba óptimas* surge de la observación de que en el método de residuos pesados la información acerca de la solución exacta que contiene la solución aproximada depende del sistema de funciones de peso que son aplicadas [7].

Para llevar un orden para acercarse a dichas *funciones de prueba óptimas* es necesario tener un procedimiento para analizar esta dependencia. En el método de localización indirecto, los ingredientes básicos de dicho análisis son las *formulas de Green-Herrera* [20] las cuales fueron originadas por Herrera y pueden ser aplicadas aún cuando las funciones de peso y de prueba son discontinuas. Estas funciones de prueba óptimas son aplicadas para derivar, como en el método directo, condiciones de compatibilidad desde las cuales la información buscada es obtenida.

Una vez que la información buscada es conocida en Σ , los problemas locales con valores de frontera pueden ser resueltos de forma individual para obtener la solución en el interior de todos los subdominios de la partición. Este último proceso, al cual nos referiremos como *interpolación óptima*, permite la construcción de la solución global en todo el dominio Ω . Si cada uno de los pasos que han sido descritos pueden ser llevados a cabo de forma exacta, la función que se obtiene será la solución exacta de el problema original. Sin embargo, en general esto no es posible.

Así la colocación-TH es un método numérico que resulta cuando las aproximaciones locales, en los subdominios de la partición, son llevados a cabo por medio de la colocación ortogonal.

1.3. Objetivo de la tesis

1.3.1. Objetivo General

El objetivo de este trabajo de tesis es desarrollar una aplicación computacional que implemente el Método Numérico Directo desarrollado por el Dr. Ismael Herrera Revilla, explicando detalladamente los fundamentos matemáticos de la discretización del dominio de las EDP, la teoría matemática desarrollada de la cual derivan dichos métodos numéricos, los resultados a los que se pretende llegar, las ventajas sobre otros métodos de solución numérica así como el diseño de la aplicación fundamentada en el paradigma de programación orientado a objetos, el cual ofrece una forma innovadora para la representación de entidades abstractas y que permiten una modelación más versátil así como una forma más eficiente para la organización y reutilización de código.

1.3.2. Objetivos Particulares

Como objetivos particulares de esta tesis tenemos:

- Revisión del Método de Colocación.
- Descripción de los métodos Directo e Indirecto que surgen de la teoría desarrollada por el Dr. Ismael Herrera Revilla y colaboradores.
- Diseño y desarrollo de una aplicación computacional que implemente el Método Directo con un paradigma orientado a objetos.
- Contraste de resultados para medir su efectividad y eficiencia con respecto al Método del Elemento Finito.

Así, en el capítulo dos se hace una descripción con relativo detalle del Método de Colocación estandar en el que están basados los actuales trabajos desarrollados en esta área. En el capítulo tres se presentan de forma detallada los fundamentos matemáticos de los cuales se obtiene la formulación teórica de los métodos numéricos desarrollados por el Dr. Herrera-Revilla, se presentan las formulaciones variacionales y las manipulaciones algebraicas de las cuales derivarán los métodos numéricos. En el capítulo cuatro se hace una exhaustiva descripción de los métodos obtenidos al discretizar el dominio de una forma determinada y combinarla con el Método del Elemento Finito (FEM por sus siglas en inglés) para la obtención de la solución en cada uno de los subdominios obtenidos de la partición, es decir, en este capítulo se hace la presentación formal de los Métodos Directo e Indirecto, como operan, el desarrollo matemático para su obtención y los procesos matemáticos para la construcción de la solución numérica. En el capítulo cinco se presenta una breve descripción de lo que es el paradigma orientado a objetos así como el diseño de la aplicación, en el cual se presentan las entidades matemáticas y se modelan computacionalmente en términos de objetos. En el capítulo seis se presentan los resultados obtenidos con la aplicación desarrollada así como la convergencia de los resultados. En el capítulo siete se presentan las conclusiones del trabajo desarrollado así como futuros trabajos y aplicaciones del mismo.

Capítulo 2

Método Convencional de Colocación

El método de colocación es un procedimiento para la solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) con valores de frontera, que se basa en la aproximación de una función general por una clase de funciones más simples. Este procedimiento es muy eficiente y aproxima a la solución numérica de la EDP con un error de discretización pequeño [11]. La clase de funciones de aproximación más común es la de los polinomios, aun que también se pueden utilizar funciones trigonométricas, exponenciales y racionales. De todas estas, la interpolación polinomial es la más utilizada y por lo anterior se describirá brevemente el procedimiento de interpolación para funciones a través de los polinomios de Lagrange y la interpolación con polinomios de más alto grado como lo son los polinomios de Hermite.

La función general que se quiere aproximar es la solución de la EDP y es expresada como la suma de aquellas funciones más simples multiplicadas por un coeficiente, que en principio es una incógnita. El método de colocación interpola en puntos conocidos, llamados nodos, así como en el interior de los intervalos utilizando ciertos *puntos de colocación* que por razones que no se analizan aquí son los *Puntos Gaussianos* de cada intervalo. Los “ceros” del polinomio de Legendre son los puntos Gaussianos aquí utilizados [10]. Así se construye un sistema de ecuaciones para despejar el valor de los coeficientes.

El Método de Colocación puede ser visto como un método de residuos pesados [28] en el cual las funciones de peso $w_i(x)$ son tomadas para ser distribuciones delta de Dirac, esto es, $w_i(x) = \delta(x - x_i)$ para un conjunto de puntos de colocación x_i . Las distribuciones delta de Dirac tienen la propiedad de que, para cualquier función integrable f definida en un dominio abierto Ω y para cualquier punto $x_i \in \Omega$ se tiene que [12]

$$\int_{\Omega} f(x)w_i(x)dx = f(x_i) \tag{2.0.1}$$

2.1. Interpolación Polinomial

2.1.1. Polinomios de Lagrange

Dado un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ se dice que un polinomio $p(x)$ interpola a una función $f(x)$ en puntos definidos como x_0, x_1, \dots, x_n , donde $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b$ es una partición, si y solo si

$$f(x_i) = p(x_i) ; i = 0, \dots, n \quad (2.1.1)$$

así dada una función

$$f(x_i) = y_i \quad (2.1.2)$$

construimos $n + 1$ polinomios $l_i(x)$ de grado n ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), de modo que en x_i tome el valor 1 y en los restantes x_j para $j \neq i$ nodos de interpolación se anule, es decir

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (2.1.3)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

se cumple que

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad (2.1.4)$$

así el polinomio

$$L(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x)y_i \quad (2.1.5)$$

satisface que $L(x_i) = f(x_i)$ y es a lo sumo, de grado n y se denomina *Polinomio de Interpolación de Lagrange*. Este polinomio pertenece a $C^n[a, b]$ cuando se utilizan los n nodos para interpolar. Esto significa que tenemos un polinomio que no presenta discontinuidades solo hasta la $n - 1$ -ésima derivada.

Otra forma de interpolar es tomando más intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ donde la interpolación se hace en m nodos donde construimos un polinomio de grado $m - 1$ de la forma (2.1.4). Así tendremos una colección de polinomios que “viven” sobre los intervalos $[x_{i-m}, x_i]$ y que se superponen con los del intervalo adyacente. Esta forma de interpolar se conoce como *Polinomio de Interpolación Lagrangiana por tramos*. Los nodos x_i son comunes a dos intervalos adyacentes y marcan las fronteras entre los intervalos. Entonces obtenemos un polinomio que pertenece a $C^0[a, b]$ y las discontinuidades ocurren en las derivadas en los nodos de frontera.

2.1.2. Polinomios de Hermite

En algunos casos conocemos también el valor de la derivada en los nodos de interpolación, $f'(x_i)$ y con ello tenemos un orden mayor de continuidad por que ahora podemos construir un polinomio que interpole en el valor de la función y que interpole también en el valor de la derivada [11]. Una clase de polinomios que satisfacen estas condiciones son los llamados *Polinomios de Hermite* los cuales, en una interpolación por tramos, pertenecen a $C^1[a, b]$.

Definimos los polinomios de Hermite para el intervalo $(0, 1)$ los cuales son

$$\begin{aligned} H_0^0(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1 & H_0^0(x) &= 6x^2 - 6x \\ H_1^0(x) &= -2x^3 + 3x & H_1^0(x) &= -6x^2 + 6x \\ H_0^1(x) &= x^3 - 2x^2 + x & H_0^1(x) &= 3x^2 - 4x + 1 \\ H_1^1(x) &= x^3 - x^2 & H_1^1(x) &= 3x^2 - 2x \end{aligned}$$

donde, dados en los mismos terminos de δ_{ij} , para el intervalo $(0, 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} H_i^0(x_j) &= \delta_{ij} & \frac{d}{dx} H_i^0(x_j) &= 0 \\ \frac{d}{dx} H_i^1(x_j) &= \delta_{ij} & H_i^1(x_j) &= 0 \\ \text{para } j &= 0, 1 \text{ y } x_0 = 0, x_1 = 1 \end{aligned}$$

Ahora necesitamos escalar y normalizar los polinomios para el intervalo $[a, b]$ donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ así los polinomios cúbicos $h_i^\alpha(x)$, para $\alpha = 0, 1$ e $i = 0, \dots, n$, se definen como

$$h_i^0 = \begin{cases} H_0^0\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right) & \text{para } x_i < x < x_{i+1} \\ H_1^0\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right) & \text{para } x_{i-1} < x < x_i \end{cases} \quad (2.1.6)$$

$$h_i^1 = \begin{cases} \Delta H_0^1\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right) & \text{para } x_i < x < x_{i+1} \\ \Delta H_1^1\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right) & \text{para } x_{i-1} < x < x_i \end{cases} \quad (2.1.7)$$

$$\text{para } \Delta = x_{i+1} - x_i$$

Así dados $\{f(x_i), f'(x_i)\}_{i=0}^n$ existe el polinomio único

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^n [h_i^0(x)f(x_i) + h_i^1(x)f'(x_i)] \quad (2.1.8)$$

2.2. Descripción del Método Convencional de Colocación en 2 Dimensiones

Definimos el operador diferencial como

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu \quad (2.2.1)$$

para el problema dado

$$\mathcal{L}u = f \quad (2.2.2)$$

en un dominio en dos dimensiones $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ generamos una partición rectangular homogénea Π con E subintervalos dada como

$$\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{i-1}, \Omega_i, \dots, \Omega_{E-1}, \Omega_E\}$$

con E_x nodos en el eje x y E_y nodos en el eje y . Lo que nos da $E = (E_x - 1)(E_y - 1)$ elementos en el dominio.

Ahora definimos un conjunto de *puntos de colocación*, que serán los puntos gaussianos mapeados en cada dimensión, para cada elemento Ω_k y aproximamos la solución u con la función \hat{u} por medio de polinomios de Hermite, para lo cual requerimos de dos puntos de colocación por eje para un total de cuatro por elemento, es decir como

$$\hat{u}_{ij} \cdot \phi_{ij} = \{u_{ij}h_i^0h_j^0 + \frac{\partial u_{ij}}{\partial x}h_i^1h_j^0 + \frac{\partial u_{ij}}{\partial y}h_i^0h_j^1 + \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x\partial y}h_i^1h_j^1\} \quad (2.2.3)$$

Donde $i = 0, \dots, E_x - 1$ y $j = 0, \dots, E_y - 1$ y definen un elemento Ω_k .

Así los vectores \hat{u}_{ij} y ϕ_{ij} tendrán la siguiente estructura

$$\hat{u}_{ij} = (u_{ij}, \frac{\partial u_{ij}}{\partial x}, \frac{\partial u_{ij}}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x\partial y}) \quad (2.2.4)$$

$$\phi_{ij} = (h_i^0h_j^0, h_i^1h_j^0, h_i^0h_j^1, h_i^1h_j^1) \quad (2.2.5)$$

donde \hat{u}_{ij} es el vector de los coeficientes del polinomio de aproximación, que en principio son incógnitas, y ϕ_{ij} los propios polinomios de aproximación.

Adoptándose esta notación en lo subsecuente, donde $h_i^\alpha(x)h_j^\beta(y)$, para $\alpha = 0, 1$ y $\beta = 0, 1$, son polinomios cúbicos de Hermite por pedazos con soporte en los intervalos que intersecta el nodo (x_i, y_j) en el elemento Ω_k , excepto en los nodos de frontera, en cuyo caso los polinomios dados interpolan con la condición de frontera.

La solución en todo el dominio se da como

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^E \sum_{j=1}^E \hat{u}_{ij} \cdot \phi_{ij} = \sum_{i=1}^E \sum_{j=1}^E \{u_{ij}h_i^0h_j^0 + \frac{\partial u_{ij}}{\partial x}h_i^1h_j^0 + \frac{\partial u_{ij}}{\partial y}h_i^0h_j^1 + \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x\partial y}h_i^1h_j^1\} \quad (2.2.6)$$

Ahora, la solución aproximada \hat{u} debe de satisfacer las *ecuaciones de colocación*:

$$[\mathcal{L}\hat{u} - f]_{x_i^e, y_j^e} = 0 \quad e = 1, \dots, E \quad (2.2.7)$$

Donde, para cada $e = 1, \dots, E$ y (x_i^e, y_j^e) son los *Puntos Gaussianos* de la partición Ω_k .

Dado lo anterior, podemos construir un sistema de ecuaciones de la forma

$$A\hat{u} = f \quad (2.2.8)$$

Ahora si sustituimos (2.2.6) en (2.2.7) el sistema de ecuaciones resultante es

$$\left[\sum_{i=1}^E \sum_{j=1}^E \left\{ u_{ij} \mathcal{L} h_i^0 h_j^0 + \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} \mathcal{L} h_i^1 h_j^0 + \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} \mathcal{L} h_i^0 h_j^1 + \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x \partial y} \mathcal{L} h_i^1 h_j^1 \right\} - f \right]_{x_i^e, y_j^e} = 0 \quad (2.2.9)$$

Donde

$$A_{ij} = \mathcal{L} \phi_{ij, x_i^e, y_j^e} \quad (2.2.10)$$

$$f_j = f_{x_i^e, y_j^e} \quad (2.2.11)$$

$$u_{ij} = \hat{u}_{x_i^e, y_j^e} \quad (2.2.12)$$

Y cuyo sistema en forma matricial de (2.2.9) queda como

Se construye así el sistema de ecuaciones, en el que se requieren los coeficientes para el polinomio de interpolación para cada nodo de la discretización. Así, dado que existen cuatro grados de libertad por nodo, entonces el número de incógnitas es de $4(E_x + 1)(E_y + 1)$. Para condiciones de frontera tipo Dirichlet, se puede observar que se conocen en las fronteras derecha e izquierda u y $\frac{\partial u}{\partial y}$, la derivada se obtiene por diferenciación y de manera similar se conocen u y $\frac{\partial u}{\partial x}$ en las fronteras superior e inferior. Así, se conocen tres valores en cada nodo esquina y dos valores en el resto de los nodos de frontera, lo que da un total de $4(E_x + E_y + 1)$ valores conocidos. Al sustituir las condiciones de frontera resulta un sistema matricial $4E_x E_y \times 4E_x E_y$ con una estructura heptadiagonal. Al resolver dicho sistema de ecuaciones obtenemos el valor de las incógnitas de \hat{u}_{ij} que serán los valores numéricos de la solución aproximada de la EDP en los nodos internos del dominio. Para una descripción más detallada del método en una dimensión y con distintos grados de polinomios de interpolación veasé el Apéndice A.

Capítulo 3

Fórmulas de Green para Funciones Discontinuas y Problemas con Saltos Prescritos

Los Métodos de Elementos Finitos con Funciones Óptimas son métodos avanzados de colocación ortogonal. Estos métodos de colocación están basados en la teoría de Descomposición de Dominio ver, [16], [17] y [19]. El concepto básico unificado de esa teoría consiste en interpretar a los métodos de Descomposición de Dominio como procedimientos para obtener información acerca de la solución buscada en la frontera interna Σ , la cual separa los subdominios unos de otros. Se busca la suficiente información para definir problemas *bien planteados* en cada uno de los subdominios (a los cuales nos referiremos como “problemas locales”). De esta manera, la solución puede ser reconstruida resolviendo exclusivamente dicho tipo de problemas [19].

3.1. Nociones preliminares y Notación

El espacio de funciones a considerar se denota como D . También consideramos operadores lineales funcionalmente valuados de la forma $P : D \rightarrow D^*$, donde D^* es el espacio dual de D , esto es, D^* es el espacio lineal cuyos elementos son funcionales lineales valuados a los reales y definidos en D [24]. Así, dado $f \in D^*$, su valor $f(v)$ para cualquier $v \in D$, se denota como $\langle f, v \rangle$, mientras que $Pu \in D^*$ será el valor de $P : D \rightarrow D^*$ para cualquier $u \in D$. Por lo tanto, dado $P : D \rightarrow D^*$, la expresión $\langle Pu, v \rangle$ define un funcional bilineal [20] único en $D \times D$ y establece una correspondencia uno a uno entre la clase de operadores lineales funcionalmente valuados que estamos considerando y cada uno de los funcionales bilineales [18]. Ahora, dado $P : D \rightarrow D^*$, adoptamos la notación P^*

para definir el operador $P^* : D \rightarrow D^*$ definido como

$$\langle P^*u, w \rangle \equiv \langle P^*w, u \rangle \quad \forall (u, w) \in D \times D \quad (3.1.1)$$

esto es, P^* , como una forma bilineal, es el transpuesto de P . Dado $f \in D^*$ y $u \in D$, la ecuación $Pu = f$ es una igualdad entre los funcionales lineales y es equivalente con

$$\langle Pu, w \rangle = \langle f, w \rangle \quad \forall w \in D \quad (3.1.2)$$

3.2. Fórmulas de Green-Herrera

Sean \mathcal{L} y \mathcal{L}^* el operador diferencial y su adjunto respectivamente. Consideramos el operador diferencial

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu \quad (3.2.1)$$

y a su operador diferencial adjunto

$$\mathcal{L}^*w = -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla w) - \underline{b} \cdot \nabla w + cw \quad (3.2.2)$$

entonces hay una forma bilineal vectorialmente valuada $\underline{\mathcal{D}}(u, w)$ tal que

$$w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w dx = \nabla \cdot \underline{\mathcal{D}}(u, w) \quad (3.2.3)$$

integrando ambos lados de la ecuación

$$\int_{\Omega} \{w\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*w\} dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\mathcal{D}}(u, w) \quad (3.2.4)$$

aplicando el teorema generalizado de la divergencia [26], se tiene la siguiente formula de *Green-Herrera*[20].

$$\sum_{i=1}^E \int_{\partial\Omega_i} w \underline{a}_n \cdot \nabla u dx = \int_{\partial\Omega} w \underline{a}_n \cdot \nabla u dx - \int_{\Sigma} [w \underline{a}_n \cdot \nabla u] dx. \quad (3.2.5)$$

La formula anterior es una extensión del teorema de la divergencia, en el cual se incluye la notación con respecto al vector normal, que ya definimos, agregando la notación $\underline{a}_n \equiv \underline{a} \cdot \underline{n}$. Dicha formula es valida aun si los coeficientes de \mathcal{L} tienen saltos discontinuos en Σ . El vector normal, se toma sobre σ de la forma en la que ya explicamos, mientras que desde Ω y Ω_i se toma hacia afuera sobre $\partial\Omega$ y $\partial\Omega_i$ respectivamente.

Donde el lado derecho de (3.2.4) lo podemos representar también como

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\mathcal{D}}(u, w) = \int_{\partial\Omega} \underline{\mathcal{D}}(u, w) \cdot \underline{n} dx - \int_{\Sigma} [\underline{\mathcal{D}}(u, w)] \cdot \underline{n} dx. \quad (3.2.6)$$

en la cual

$$[\underline{\mathcal{D}}(u, w)] = \underline{\mathcal{D}}(\dot{u}, [w]) + \underline{\mathcal{D}}([u], \dot{w}) \quad (3.2.7)$$

Ahora introduciremos un conjunto de funciones bilineales, a saber, $\mathcal{B}(u, w)$, $\mathcal{C}^*(u, w)$, $\mathcal{J}(u, w)$ y $\mathcal{K}^*(u, w)$. Las dos primeras definidas en $\partial\Omega$ y las restantes en Σ , de tal forma que

$$\underline{\mathcal{D}}(u, w) \cdot \underline{n} = \mathcal{B}(u, w) - \mathcal{C}^*(u, w); \text{ en } \partial\Omega \quad (3.2.8)$$

$$-[\underline{\mathcal{D}}(u, w)] \cdot \underline{n} = \mathcal{J}(u, w) - \mathcal{K}^*(u, w); \text{ en } \Sigma \quad (3.2.9)$$

para operadores con coeficientes continuos unas definiciones que satisfacen (3.2.9) son

$$\mathcal{J}(u, w) \equiv -\underline{\mathcal{D}}([u], \dot{w}) \cdot \underline{n} \text{ y } \mathcal{K}^*(u, w) \equiv \underline{\mathcal{D}}(\dot{u}, [w]) \quad (3.2.10)$$

aplicando (3.2.5) en (3.2.10) se tiene la siguiente formula de *Green-Herrera*[20].

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w \mathcal{L} u dx - \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}(u, w) dx - \int_{\Sigma} \mathcal{J}(u, w) dx = \\ \int_{\Omega} u \mathcal{L}^* w dx - \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^*(u, w) dx - \int_{\Sigma} \mathcal{K}^*(u, w) dx \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

donde $\mathcal{C}^*(u, w) \equiv \mathcal{C}(w, u)$, aclarado lo anterior introducimos la siguiente notación:

$$\langle Pu, w \rangle = \int_{\Omega} w \mathcal{L} u dx; \quad \langle Q^* u, w \rangle = \int_{\Omega} u \mathcal{L}^* w dx; \quad (3.2.12)$$

$$\langle Bu, w \rangle = \int_{\partial\Omega} \mathcal{B}(u, w) dx; \quad \langle C^* u, w \rangle = \int_{\partial\Omega} \mathcal{C}^*(u, w) dx; \quad (3.2.13)$$

$$\langle Ju, w \rangle = \int_{\Sigma} \mathcal{J}(u, w) dx; \quad \langle K^* u, w \rangle = \int_{\Sigma} \mathcal{K}^*(u, w) dx; \quad (3.2.14)$$

con estas definiciones P , B , J , Q^* , C^* y K^* son funcionales bilineales de valor real definidas en $D \times D$ y la ecuación (3.2.11) puede ser reescrita como

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle \equiv \langle (Q^* - C^* - K^*)u, w \rangle; \quad \forall (u, w) \in D \times D \quad (3.2.15)$$

o de manera simplificada

$$P - B - J \equiv Q^* - C^* - K^* \quad (3.2.16)$$

3.3. Planteamiento del Problema con Valores de Frontera y Saltos Prescritos (BVPJ)

Dado el dominio Ω , sea una partición de ese dominio

$$\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{E-1}, \Omega_E\}$$

la cual genera una frontera interior denominada Σ .

Sea la ecuación diferencial parcial elíptica

$$\mathcal{L}u = f_\Omega; \text{ en } \Omega_i, i = 1, \dots, E \quad (3.3.1)$$

sujeta a condiciones de frontera de Dirichlet en la frontera externa del dominio, $\partial\Omega$, y a condiciones de salto en la frontera interna Σ . Asumimos que u_∂ y u_Σ son cualesquiera funciones que satisfacen las condiciones de frontera y de salto respectivamente. Dichas condiciones pueden ser formuladas como

$$u = u_\partial \equiv g_j; \text{ en } \partial\Omega \quad (3.3.2)$$

$$[u] = [u_\Sigma] \equiv j_\Sigma^0; \text{ en } \Sigma \quad (3.3.3)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = \left[\frac{\partial u_\Sigma}{\partial n} u \right] \equiv j_\Sigma^1; \text{ en } \Sigma \quad (3.3.4)$$

se supone que las condiciones de frontera y de salto se dice que son compatibles; es decir que cuando existe una función $u_{\partial\Sigma}$ tal que se cumplen

$$[u_{\partial\Sigma}] = [u_\Sigma] \text{ en } \Sigma \quad (3.3.5)$$

$$\left[\frac{\partial u_{\partial\Sigma}}{\partial n} \right] = \left[\frac{\partial u_\Sigma}{\partial n} \right] \text{ en } \Sigma \quad (3.3.6)$$

$$u_{\partial\Sigma} = u_\partial \text{ en } \partial\Omega \quad (3.3.7)$$

3.4. Formulación Débil del Problema Elíptico de Segundo Orden

Ahora para resolver el problema elíptico de segundo orden definimos $u_\Omega \in D$, $u_\partial \in D$ y $u_\Sigma \in D$ como funciones que satisfacen la ecuación diferencial, las condiciones de frontera y las condiciones de salto respectivamente y definimos

$$f \equiv Pu_\Omega \in D \quad (3.4.1)$$

$$g \equiv Bu_\partial \in D \quad (3.4.2)$$

$$j \equiv Ju_\Sigma \in D \quad (3.4.3)$$

expresamos ahora las fórmulas de Green-Herrera en términos del problema elíptico de segundo orden donde

$$\underline{\mathcal{D}}(u, w) = \underline{a} \cdot (u \nabla w - w \nabla u) + buw \quad (3.4.4)$$

descomponemos el término anterior como describen (3.2.8) y (3.2.9) y obtenemos

$$\mathcal{B}(u, w) \equiv u(\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w) \text{ y } \mathcal{C}^*(u, w) \equiv w(\underline{a}_n \cdot \nabla u) \text{ sobre } \partial\Omega \quad (3.4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, w) &\equiv [\underline{a}_n \cdot \nabla u] \dot{w} - [u] \overline{\underline{a}_n \cdot \nabla w + \underline{b}_n w} \\ \mathcal{K}^*(u, w) &\equiv ([\underline{a}_n \cdot \nabla w] + b_n w) \dot{u} - [w] \overline{\underline{a}_n \cdot u} \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

la solución u debe de satisfacer

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle (f - g - j), w \rangle \quad (3.4.7)$$

y de manera equivalente tenemos que

$$\langle Pu, w \rangle = \int_{\Omega} w \mathcal{L}u dx = \int_{\Omega} w f dx = \langle f, w \rangle \quad (3.4.8)$$

$$\langle Bu, w \rangle = \oint_{\partial\Omega} u(\underline{a} \cdot \nabla w + bw) \cdot nds = \oint_{\partial\Omega} g(\underline{a} \cdot \nabla w + bw) \cdot nds = \langle g, w \rangle \quad (3.4.9)$$

$$\begin{aligned} \langle Ju, w \rangle &= \langle J_0 u, w \rangle + \langle J_1 u, w \rangle \\ &= - \int_{\Sigma} [u] \overline{(\underline{a} \cdot \nabla w + bw) \cdot nds} + \int_{\Sigma} w [\underline{a} \cdot \nabla u] \cdot nds \\ &= - \int_{\Sigma} j_{\Sigma}^0 [u] \overline{(\underline{a} \cdot \nabla w + bw) \cdot nds} + \int_{\Sigma} j_{\Sigma}^1 w ds = \langle j_{\Sigma}^0, w \rangle + \langle j_{\Sigma}^1, w \rangle \\ &= \langle j, w \rangle \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Capítulo 4

Método de Elementos Finitos con Funciones Óptimas (FEM-OF)

4.1. Descomposiciones Conjugadas

Con las definiciones dadas en el capítulo anterior el BVPJ tendrá su formulación *débil* como

$$(P - B - J)u = f - g - j \quad (4.1.1)$$

Que es la formulación en términos de los datos.

Y por (3.2.16) como

$$(Q^* - C^* - K^*)u = f - g - j \quad (4.1.2)$$

Que es la formulación en términos de la información complementaria.

De forma general se asume que existe una solución u del BVPJ y es única. Esto implica que las condiciones de salto y de frontera son compatibles entre ellas. Con esto se quiere decir que existe una función $u_{\partial\Sigma} \in D$ de tal forma que $Bu_{\partial\Sigma} = g$ y que $Ju_{\partial\Sigma} = j$. Así en lo subsecuente se reserva la notación $u \in D$ para la solución única del BVPJ y nos referiremos a las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2) como la formulación débil en términos de los datos y a la formulación débil en términos de la información complementaria del BVPJ, respectivamente. El Método Directo de Steklov-Poincaré deriva de la primera y el Método Indirecto de Trefftz-Herrera de la segunda.

El enfoque indirecto se obtiene de la descomposición de K^* en dos operadores S_K^* y R_K^* de tal forma que

$$K^* = S_K^* + R_K^* \quad (4.1.3)$$

De manera similar, el enfoque directo se obtiene de la descomposición de J en los operadores S_J y R_J , de tal forma que

$$J = S_J + R_J \quad (4.1.4)$$

Esta descomposición es la separación de los saltos de la función y de los saltos de la derivada de la función, respectivamente. Se asume en lo subsecuente que existen funciones bilineales, definidas de manera puntual de tal manera que cuentan con las siguientes propiedades

$$\langle S_K^* u, w \rangle = \int_{\Sigma} \mathcal{S}_K(u, w) dx ; \langle R_K^* u, w \rangle = \int_{\Sigma} \mathcal{R}_K(u, w) dx \quad (4.1.5)$$

$$\langle S_J u, w \rangle = \int_{\Sigma} \mathcal{S}_J(u, w) dx ; \langle R_J u, w \rangle = \int_{\Sigma} \mathcal{R}_J(u, w) dx \quad (4.1.6)$$

Donde una forma en las que se descomponen las ecuaciones para que satisfagan (3.2.8) y (3.2.9) es

$$\mathcal{B}(u, w) \equiv u(\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w) \quad (4.1.7)$$

$$\mathcal{C}^*(u, w) \equiv w(\underline{a}_n \cdot \nabla u) \quad (4.1.8)$$

$$\mathcal{J}(u, w) \equiv [\underline{a}_n \cdot \nabla u] \dot{w} - [u] \overline{\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w} \quad (4.1.9)$$

$$\mathcal{K}^*(u, w) \equiv [\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w] \dot{u} - [w] \overline{\underline{a}_n \cdot \nabla u} \quad (4.1.10)$$

De tal forma que para el Método Directo tenemos

$$\mathcal{S}_J(u, w) \equiv [\underline{a}_n \cdot \nabla u] \dot{w} \quad (4.1.11)$$

$$\mathcal{R}_J(u, w) \equiv -[u] \overline{\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w} \quad (4.1.12)$$

y para el Método Indirecto tenemos

$$\mathcal{S}_K(u, w) \equiv [\underline{a}_n \cdot \nabla w] \dot{u} \quad (4.1.13)$$

$$\mathcal{R}_K(u, w) \equiv -[w] \overline{\underline{a}_n \cdot \nabla u} \quad (4.1.14)$$

Para ambos enfoques consideraremos los subespacios lineales nulos $O_B \subset D$ y $O_T \subset D$ y que estan definidos por

$$O_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_J} \text{ y } O_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_{R_K} \quad (4.1.15)$$

Estos espacios se definen de manera formal más adelante, aunque de manera muy general se puede decir que son los espacios donde se anula la función en la frontera externa (N_B y N_C), en la frontera interna (N_{R_J} y N_{R_K}) y cuando se le aplica el operador diferencial (N_P y N_Q). En el enfoque indirecto las funciones $w \in O_T$ se les conoce como *funciones de prueba óptimas* mientras que en el

enfoque directo las funciones $v \in O_B$ se les conoce como *funciones de base óptimas*.

Así, definimos un subconjunto $\mathcal{E} \subset D$ como TH-completo cuando

$$\hat{u} \in D \text{ y } -\langle S^* \hat{u}, w \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathcal{E} \Rightarrow S^* \hat{u} = 0 \quad (4.1.16)$$

4.2. Caracterizaciones con Funciones Óptimas

La formulación débil puede ser aplicada tanto a problemas con condiciones de frontera homogéneas como cuando no lo son. Sin embargo para el desarrollo nos ocuparemos sólo para el caso en el que las condiciones son homogéneas. Sino lo fuera, bastará restar una función que satisfaga la condiciones de frontera para reducirlo a uno con condiciones de frontera homogénea. Así, en lo subsecuente asumiremos que $g \equiv Bu_\partial = 0$.

Partiendo del hecho de que podemos expresar la solución aproximada como una suma de las dos funciones

$$u \equiv u_H + u_P \quad (4.2.1)$$

donde u_H es la solución homogénea y la u_P es la solución particular. Así, una vez dicho lo anterior, definimos la función $u_P \in D$ como

$$(P - B - R_J)u_P = f - j_R \quad (4.2.2)$$

$$S_J u_P = 0 \quad (4.2.3)$$

para problemas elípticos de segundo orden, la condición (4.2.3) significa que el salto de la función misma es idénticamente cero y en general la condición (4.2.2) significa que el salto de la derivada de dicha función no es idénticamente cero. Esta aseveración es importante para el planteamiento del problema.

4.2.1. Caracterización Steklov-Poincaré

Asumimos que O_B es TH-completo para S_J y sea $\hat{u} \in O_B$. Entonces $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$ si y solo si

$$-\langle S_J \hat{u}, w \rangle = \langle S_J u_P, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \quad \forall w \in O_B \quad (4.2.4)$$

4.2.2. Caracterización Trefftz-Herrera

Asumimos que O_T es TH-completo para S_K^* y sea $\hat{u} \in O_T$. Entonces $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$ si y solo si

$$-\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle, \quad \forall w \in O_T \quad (4.2.5)$$

4.2.3. Caracterización Petrov-Galerkin

Asumimos que O_T es TH-completo para S_K^* y sea $\hat{u} \in O_B$. Entonces $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$ si y solo si

$$-\langle S_J \hat{u}, w \rangle \equiv -\langle S_K^* \hat{u}, w \rangle = \langle f - j, w \rangle \equiv \langle S_J u_P, w \rangle - \langle j_S, w \rangle, \forall w \in O_B \quad (4.2.6)$$

4.3. Elementos Finitos con Funciones Óptimas (FEM-OF)

Para la aplicación de las caracterizaciones de la sección anterior, conviene reemplazar las ecuaciones (4.2.4), (4.2.5) y (4.2.6) por las que se dan a continuación, las cuales se utilizarán para la formulación de los Métodos de Elementos Finitos con Funciones Óptimas (FEM-OF) y obtenemos las discretizaciones para las caracterizaciones presentadas. Para ello, los subespacios lineales O_B y O_T serán reemplazados por subespacios de dimensión finita \tilde{O}_B y \tilde{O}_T respectivamente. Además cabe destacar que los elementos $w \in \tilde{O}_B$ y $w \in \tilde{O}_T$ satisfacen solo de manera aproximada las condiciones del problema $Pv = 0$ y $Q^*w = 0$ respectivamente.

4.3.1. FEM-OF de Steklov-Poincaré

Asumimos que \tilde{O}_B es TH-completo para S_J y sea $\tilde{u} \in \tilde{O}_B$. Entonces $S_K^* \tilde{u} = S_K^* u$ si y solo si

$$\langle (P - B - J)\tilde{u}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle + \langle (P - B - J)u_P, w \rangle \forall w \in \tilde{O}_B \quad (4.3.1)$$

entonces $S_K^* \tilde{u} \approx S_K^* u$ y $u \approx \tilde{u} + u_P$ en todo Ω .

4.3.2. FEM-OF de Trefftz-Herrera

Asumimos que \tilde{O}_T es TH-completo para S_K^* y sea $\tilde{u} \in \tilde{O}_T$. Entonces $S_K^* \tilde{u} = S_K^* u$ si y solo si

$$\langle (P - B - J)\tilde{u}, w \rangle = \langle f - Pu_\Sigma, w \rangle + \langle (P - B - J)u_P, w \rangle \forall w \in \tilde{O}_T \quad (4.3.2)$$

entonces $S_K^* \tilde{u} \approx S_K^* u$

4.3.3. FEM-OF de Petrov-Galerkin

Asumimos que O_T es TH-completo para S_K^* y sea $\hat{u} \in O_B$. Entonces $S_K^* \hat{u} = S_K^* u$ si y solo si

$$\langle (P - B - J)u, w \rangle = \langle f - Pu_H, w \rangle + \langle (P - B - J)u_H, w \rangle \forall w \in O_T \quad (4.3.3)$$

Dado que podemos escribir

$$-\langle S_J(u + u_P - u_H), w \rangle = 0, \quad \forall w \in O_T \quad (4.3.4)$$

pero también sabemos que

$$(P - B - J)(u + u_P - u_H) = f - Pu_H - S_J(u + u_P - u_H) \quad (4.3.5)$$

así tenemos

$$\begin{aligned} \langle -S_J(u + u_P - u_H), w \rangle &= \langle (P - B - J)(u + u_P - u_H) - f + Pu_H, w \rangle \\ &= \int_{\Omega} \{ \nabla(u + u_P - u_H) \cdot \underline{a} \cdot \nabla w - (u + u_P - u_H) \underline{b} \cdot \nabla w + c(u + u_P - u_H)w \} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

4.4. Steklov-Poincaré FEM-OF

Partiendo del hecho de que cuando la ecuación (4.2.4) se satisface podemos expresar la solución aproximada como una suma de las dos funciones

$$u = u_H + u_P \quad (4.4.1)$$

Donde la función u_H es la solución homogénea y u_P la solución particular en la partición Ω_i

Para este procedimiento se escoge la descomposición $J = S_J + R_J$ de tal forma que las soluciones de la ecuación

$$(P - B - R_J)u_P = (P - B - R_J)u \quad (4.4.2)$$

las cuales pueden ser construidas resolviendo exclusivamente problemas locales. El subespacio lineal $O_B \subset D$ esta definido como

$$O_B \equiv \{v \in D \mid (P - B - R_J)v = 0\} \quad (4.4.3)$$

Así las *funciones base óptimas* $v \in O_B \equiv N_P \cap N_B \cap N_{R_J} \subset D$ están caracterizadas por

$$\mathcal{L}v = 0 \text{ en } \Omega_i; \quad i = 1, \dots, E \quad (4.4.4)$$

$$v = 0 \text{ en } \partial\Omega \quad (4.4.5)$$

$$[v] = 0 \text{ en } \Sigma \quad (4.4.6)$$

Una propiedad importante es que las funciones que pertenecen a O_B están únicamente determinadas por sus trazas sobre Σ . De esta manera estos valores junto con los ceros en la frontera $\partial\Omega$ y con (4.4.4) hasta (4.4.6) definen un *problema bien planteado* en cada uno de los subdominios de la partición.

4.4.1. Procedimiento de solución numérica

El procedimiento de discretización consiste en remplazar el subespacio lineal $O_B \in \mathbf{D}$, el cual es de dimensión infinita para problemas en más de una dimensión, por un subespacio de dimensión finita $\tilde{O}_B \subset \mathbf{D}$, el cual contendrá como una base a la familia de funciones

$$\mathcal{F} = \{v^1, \dots, v^N\} \quad (4.4.7)$$

Así, queremos construir una aproximación $\tilde{u}_H \in \tilde{O}_B$ para que satisfaga la ecuación (4.2.2) o (4.2.3). Sin embargo esta ecuación no puede ser satisfecha para toda $w \in D$ en problemas multidimensionales, dado que $\tilde{O}_B \subset O_B$ tiene dimensión finita. Por lo tanto, en lugar de la familia de funciones de prueba, se introduce con el mismo número de elementos que \mathcal{F} en

$$\mathcal{E} = \{w^1, \dots, w^N\} \quad (4.4.8)$$

quedando

$$\langle S_J \tilde{u}_H, w \rangle = -\langle S_J u_P, w \rangle \quad \forall w \in \mathcal{E} \quad (4.4.9)$$

De la misma forma $\tilde{u}_H \in \tilde{O}_B$ puede ser escrita como una combinación lineal de la base \mathcal{F} como

$$\tilde{u}_H = \sum_{\alpha=1}^N C_\alpha v^\alpha \quad (4.4.10)$$

Donde $\{C_1, \dots, C_N\}$ es un conjunto de coeficientes los cuales son obtenidos por el sistema de ecuaciones de $N \times N$ dado por

$$\sum_{\alpha=1}^N C_\alpha \langle S_J v^\alpha, w^\beta \rangle = -\langle S_J u_P, w^\beta \rangle, \quad \beta = 1, \dots, N \quad (4.4.11)$$

Si adicionalmente cada elemento de $\mathcal{F} \subset D$ satisface las mismas condiciones que satisface la u_H , es decir las condiciones dadas por (4.4.4), (4.4.5) y (4.4.6) entonces utilizando (4.3.6) se puede demostrar que

$$-\langle S_J v^\alpha, w^\beta \rangle = \int_{\Omega} \{ \nabla v^\alpha \cdot \underline{a} \cdot \nabla w^\beta - v^\alpha \underline{b} \cdot \nabla w^\beta + c v^\alpha w^\beta \} \quad (4.4.12)$$

y en particular, cuando $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ entonces

$$-\langle S_J v^\alpha, v^\beta \rangle = \int_{\Omega} \{ \nabla v^\alpha \cdot \underline{a} \cdot \nabla v^\beta - v^\alpha \underline{b} \cdot \nabla v^\beta + c v^\alpha v^\beta \} \quad (4.4.13)$$

y dado que $v^\alpha = u_H^\alpha$ donde u_H^α es la u_H en Ω_α podemos decir que

$$-\langle S_J u_H^\alpha, u_H^\beta \rangle = \langle S_J u_P^\beta, u_H^\beta \rangle \quad (4.4.14)$$

y por (4.4.12) tenemos finalmente que

$$-\sum_{\alpha=1}^N C_\alpha \int_{\Omega} \{ \nabla u_H^\alpha \cdot \underline{a} \cdot \nabla u_H^\beta - u_H^\alpha \underline{b} \cdot \nabla u_H^\beta + c u_H^\alpha u_H^\beta \} \quad (4.4.15)$$

$$= \int_{\Omega} \{ \nabla u_P \cdot \underline{a} \cdot \nabla u_H^\beta - u_P \underline{b} \cdot \nabla u_H^\beta + c u_P u_H^\beta \} \quad (4.4.16)$$

para $\beta = 1, \dots, N$

4.4.2. Construcción de las funciones de base óptimas

Se define una base de un espacio de funciones $v^\alpha \in F$ donde $F = \{v^1, \dots, v^N\} \subset O_B$. Ahora con estas funciones podemos construir las funciones de base óptimas para generar el sistema de ecuaciones. Las funciones de base óptimas deben de satisfacer las siguientes condiciones

$$\mathcal{L}u_P = f_\Omega \text{ en } \Omega \quad (4.4.17)$$

$$u_P = 0 \text{ en } \partial\Omega \quad (4.4.18)$$

$$[u_P] = 0 \text{ en } \Sigma \quad (4.4.19)$$

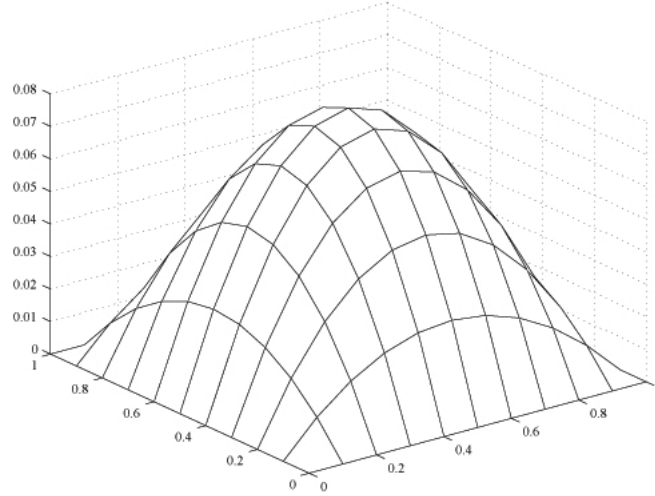


Figura 4.1: Forma general de la u_P

Mientras que para toda $v^\alpha \in O_B$ tenemos que

$$\mathcal{L}v^\alpha = 0 \text{ en } \Omega \quad (4.4.20)$$

$$v^\alpha = 0 \text{ en } \partial\Omega \quad (4.4.21)$$

$$[v^\alpha] = 0 \text{ en } \Sigma \quad (4.4.22)$$

Excepto en (x_i, y_i) donde $v^\alpha = 1$

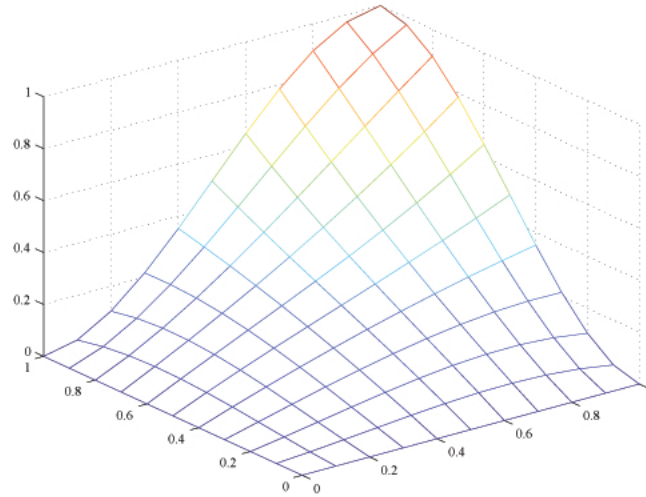


Figura 4.2: Forma general de la v^α

Ahora podemos utilizar distintos grados de polinomios para construir las funciones de base óptimas y para eso utilizaremos el Método de Colocación con n puntos gaussianos en cada elemento. Este número de puntos de colocación darán el grado de los polinomios.

4.4.3. Construcción de las funciones de base óptimas en un elemento que no es de frontera

Para construir la v^α Dadas las condiciones (4.4.20) hasta (4.4.22) utilizando polinomios de Hermite para construir polinomios de grado 3 (cúbicas) tenemos

que

$$v_{ij}^{\alpha 0} = H_i^0(x)H_j^0(y) + \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \lambda^{kl} H_{i+k}^1(x)H_{j+l}^1(y) \quad (4.4.23)$$

$$v_{ij}^{\alpha 1} = H_i^1(x)H_j^0(y) + \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \lambda^{kl} H_{i+k}^1(x)H_{j+l}^1(y) \quad (4.4.24)$$

$$v_{ij}^{\alpha 2} = H_i^0(x)H_j^1(y) + \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \lambda^{kl} H_{i+k}^1(x)H_{j+l}^1(y) \quad (4.4.25)$$

donde α es el número de elemento Ω_α $\alpha = 1, 2, 3, 4$

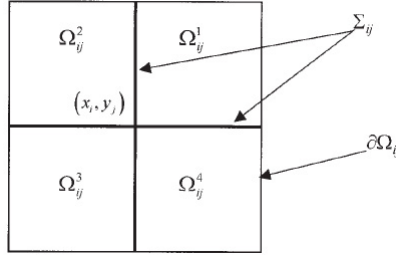


Figura 4.3: Soporte del nodo (x_i, y_j) dado por los subdominios Ω_{ij}^α

En dos dimensiones, usando dos puntos de colocación por dimensión, tenemos cuatro puntos de colocación en el elemento. Así construimos el sistema de ecuaciones de acuerdo con los puntos de colocación que se tengan.

$$\mathcal{L} \left[H_i^0(x_{a*})H_j^0(y_{b*}) + \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \lambda^{kl} H_{i+k}^1(x_{a*})H_{j+l}^1(y_{b*}) \right] = 0 ; a = 0, 1 \ y \ b = 0, 1 \quad (4.4.26)$$

$$\mathcal{L} \left[H_i^1(x_{a*})H_j^0(y_{b*}) + \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \lambda^{kl} H_{i+k}^1(x_{a*})H_{j+l}^1(y_{b*}) \right] = 0 ; a = 0, 1 \ y \ b = 0, 1 \quad (4.4.27)$$

$$\mathcal{L} \left[H_i^0(x_{a*})H_j^1(y_{b*}) + \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \lambda^{kl} H_{i+k}^1(x_{a*})H_{j+l}^1(y_{b*}) \right] = 0 ; a = 0, 1 \ y \ b = 0, 1 \quad (4.4.28)$$

Donde (x_{a*}, y_{b*}) son los puntos de colocación. Notese que se esta igualando la ecuación anterior con cero, esto por que para poder resolver este sistema aplicamos la condición (4.4.20). Lo anterior es suficiente pues por construcción de la

$v_{ij}^{\alpha\beta}$ satisface las demás condiciones, en este caso (4.4.21) y (4.4.22)

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtienen los coeficientes λ^{kl} los cuales se sustituyen en (4.4.23), (4.4.24) y (4.4.25) para obtener la función cúbica que a su vez más adelante se sustituye en (4.4.11).

De manera semejante se obtienen los coeficientes λ^{kl} para la u_P .

Dadas las condiciones (4.4.17) hasta (4.4.19) utilizando polinomios de Hermite para construir polinomios de grado 3 (cúbicas) tenemos que

$$u_{P_{i,j}}^{\alpha} = \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \lambda^{kl} H_{i+k}^1(x) H_{j+l}^1(y) ; \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (4.4.29)$$

Utilizando los puntos de colocación nuevamente junto con la condición (4.4.17) obtenemos que

$$\mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \lambda^{kl} H_{i+k}^1(x_a^*) H_{j+l}^1(y_b^*) \right] = f_{\Omega} ; a = 0, 1 \text{ y } b = 0, 1 \quad (4.4.30)$$

4.4.4. Construcción de las funciones de peso u_P en un elemento de frontera

En la frontera necesitamos preescribir la función que satisfaga $u = g_{\partial}$ así construimos

$$u_P = u_{\partial} + u_{\Omega} \text{ en } \Omega_i \quad (4.4.31)$$

Donde u_{∂} es la función que satisface la ecuación en $\partial\Omega$ mientras que u_{Ω} es la función que complementa la solución en Ω luego entonces

$$u_{\Omega} = 0 ; \text{ en } \partial\Omega \quad (4.4.32)$$

$$u_{\partial} = g_{\partial} ; \text{ en } \partial\Omega \quad (4.4.33)$$

Construimos la función u_{∂} ,utilizando los polinomios de Hermite, como una cúbica.

$$\begin{aligned} u_{\partial}^{\alpha} &= \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \{ \delta_{ij} u_{\partial} H_{i+k}^0(x) H_{j+l}^0(y) + \frac{\partial u_{\partial}}{\partial x} H_{i+k}^1(x) H_{j+l}^0(y) + \frac{\partial u_{\partial}}{\partial y} H_{i+k}^0(x) H_{j+l}^1(y) + \\ &\quad \frac{\partial u_{\partial}}{\partial x \partial y} H_{i+k}^1(x) H_{j+l}^1(y) \} ; \alpha = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

De tal manera que

$$\delta_{i+k,j+l} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_{i+k}, y_{j+l}) \in \partial\Omega, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Para la construcción de la u_Ω necesitamos tomar en cuenta que para obtener los coeficientes de la ecuación u_Ω utilizamos el Método de Colocación para obtener los coeficientes de la ecuación en Ω_i

$$u_\Omega^\alpha = 0 ; \text{ en } \partial\Omega \quad (4.4.35)$$

$$\mathcal{L}u_\Omega = \mathcal{L}u_P - \mathcal{L}u_\partial \text{ en } \Omega_i \quad (4.4.36)$$

Con las condiciones anteriores obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$u_{\Omega_{ij}}^\alpha = \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \{ \lambda^{kl} H_{i+k}^1(x) H_{j+l}^1(y) \} \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (4.4.37)$$

Con la condición (4.4.36) y aplicando el operador diferencial tenemos

$$\mathcal{L}u_{\Omega_{ij}}^\alpha = \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 \lambda^{kl} H_{i+k}^1(x) H_{j+l}^1(y) \right] = f_\Omega - \mathcal{L}u_\partial \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (4.4.38)$$

Se vuelve a utilizar el Método de Colocación para obtener los coeficientes que satisfacen la condiciones deseadas para así construir la función cúbica requerida. Lo que nos da un sistema de ecuaciones con $E + 1$ ecuaciones e igual número de incógnitas que puede ser resuelto por algún método conocido, con lo cual obtendremos la solución buscada en ciertos puntos del dominio.

4.5. Método Indirecto

El concepto unificado básico del método Trefftz-Herrera, también llamado método indirecto, consiste en interpretar los métodos de descomposición de dominio como procedimientos para obtener información sobre la solución buscada en la frontera interna Σ , la cual separa a los subdominios; la suficiente información como para definir problemas bien planteados en cada uno de los subdominios, nos referiremos a estos como “problemas locales”. De esta manera la solución puede ser reconstruida resolviendo cada uno de estos problemas de manera exclusiva. La característica distintiva de los métodos Trefftz-Herrera es el uso de funciones de peso especializadas para obtener la información en Σ . Esto proviene de la observación de cuando el método de residuos pesados es aplicado, la información acerca de la solución exacta esta contenida en la aproximación que es determinada exclusivamente por la familia de funciones de prueba que es usada. Así un tipo específico de funciones de peso son identificadas y aplicadas, las cuales tienen la propiedad de producir información exclusivamente en la frontera interna. Además de entre toda la información que uno podría considerar en Σ , se tiene que acotar y definir la información objetivo (la ya mencionada *información buscada*) y solo son aplicadas las familias de funciones de prueba que arrojan la información buscada [7].

4.5.1. Descripción

El primer paso en el enfoque indirecto es escoger la información objetivo, es decir la *información buscada*. Aquí, en este trabajo, dicha información será el promedio de la solución, \dot{u} en Σ .

Este requerimiento es suficiente, en complemento con los datos en la frontera externa para definir problemas locales bien planteados en cada uno de los subdominios de la partición. Con esta elección, una función \hat{u} contiene la *información buscada* si y solo si

$$\dot{\hat{u}} \equiv \dot{u} \text{ en } \Sigma \quad (4.5.1)$$

Ahora una posibilidad para la funcional bilineal

$$\mathcal{S}^*(\hat{u}, w) \equiv \dot{\hat{u}} [\underline{a}_n \cdot \nabla w] \text{ en } \Sigma \quad (4.5.2)$$

en cuyo caso

$$\mathcal{R}^*(\hat{u}, w) = \mathcal{K}^*(\hat{u}, w) - \mathcal{S}^*(\hat{u}, w) = -[w] \overline{\underline{a}_n \cdot \nabla \dot{\hat{u}}} \quad (4.5.3)$$

Por lo tanto, las funciones del subespacio lineal $w \in O_T \equiv N_Q \cap N_C \cap N_R \subset D$ están caracterizadas por

$$\mathcal{L}^* w = 0 \text{ en } \Omega_i ; i = 1, \dots, E \quad (4.5.4)$$

$$w = 0 \text{ en } \partial\Omega \quad (4.5.5)$$

$$[w] = 0 \text{ en } \Sigma \quad (4.5.6)$$

Toda función $w \in D$ es una solución local de la ecuación adjunta homogénea, continua sobre Ω y que se anula en la frontera externa. Así cuando $u \in D$ es la solución del BVPJ, el funcional $S^*u \in D^*$ se dice que es la *información buscada* y cualquier función $\hat{u} \in D$ se dice que *contiene la información buscada* cuando $S^*\hat{u} = S^*u$. Recordemos que

$$\langle S^*\hat{u}, w \rangle \equiv \langle Sw, \hat{u} \rangle \equiv \int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot \nabla w] \dot{\hat{u}} dx ; \forall w \in D \quad (4.5.7)$$

entonces se ve que la función $\hat{u} \in D$ contiene *información buscada* si y solo si

$$\dot{\hat{u}} = \dot{u} \text{ en } \Sigma \quad (4.5.8)$$

dado que el rango de $[\underline{a}_n \cdot \nabla w]$ es denso en $H^0(\Sigma)$ [18].

Una expresión más explícita de la formulación débil del método indirecto es

$$\langle (Q^* - C^* - K^*)u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle ; w \in D \quad (4.5.9)$$

la cual define el subespacio lineal $O_T \subset D$ como

$$O_T \equiv \{w \in D \mid (Q^* - C^* - R^*)w = 0\} \quad (4.5.10)$$

entonces, recordando que $K^* = S_K^* + R_K^*$ se ve que (4.5.9) implica que

$$-\langle S^*u, w \rangle = \langle f - g - j, w \rangle ; w \in O_T \quad (4.5.11)$$

o lo que es lo mismo

$$-\langle S^*u, w \rangle = - \int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot \nabla w] \dot{u} \quad (4.5.12)$$

Una función $\hat{u} \in D$ contiene *información buscada*, es decir satisface (4.5.8) si y solo si

$$- \int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot \nabla w] \dot{u} = \int_{\Omega} w f_{\Omega} dx - \int_{\partial\Omega} g_a(\underline{a}_n \cdot \nabla w + b_n w) dx - \int_{\Sigma} j_{\Sigma}^1 \dot{u} dx + \int_{\Sigma} j_{\Sigma}^0 \quad (4.5.13)$$

Un sistema de funciones $\mathcal{E} \subset D$ se dice que es TH-completo para S^* cuando para cualquier $v \in D$ se tiene

$$\langle S^*v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathcal{E} \subset D \Rightarrow S^*v = 0 \quad (4.5.14)$$

En más de una dimensión, los sistemas TH-completos son infinitos. El procedimiento de indirecto de discretización-TH [19] consiste en reemplazar dicho sistema por uno finito linealmente independiente

$$\bar{\mathcal{E}} \equiv w^1, \dots, w^N \quad (4.5.15)$$

entonces, tomando (4.5.13) una aproximación que la *información buscada* satisface

$$\int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot \nabla w] \dot{u} dx = \langle f - g - j, w^{\alpha} \rangle ; \alpha = 1, \dots, N \quad (4.5.16)$$

Aquí, $\hat{u} \in D$. El “sistema global de ecuaciones” se deriva de (4.5.16). Observe que las funciones de base óptimas necesitan ser definidas sólo sobre Σ . Sin embargo, los valores en la frontera externa están prescritos y cualquier opción que elijamos debe satisfacer la restricción que esta introduce en sus puntos de intersección con la frontera interna. Reestricciones adicionales son impuestas por las condiciones de salto, las cuales son muy difíciles de analizar. Esto se puede evitar si tratamos el problema para la función $u - u_{\partial\Sigma}^0$, donde $u_{\partial\Sigma}^0 \in D$ es cualquier función que satisface las condiciones de frontera junto con las condiciones de salto $[u_{\partial\Sigma}^0] = [u_{\Sigma}]$ sobre Σ . Entonces uno puede tomar como funciones base la familia de trazas del sistema $\mathcal{E} = w^1, \dots, w^N$ que está definida en Σ y que se anula en la frontera exterior. Cuando el operador es simétrico y positivo, una ventaja adicional de este procedimiento es que la matriz $\langle S^*w^{\alpha}, w^{\beta} \rangle$ seguramente será simétrica y positiva. Correspondientemente a esta opción, la aproximación

$$\hat{u} = u_{\partial\Sigma}^0 + \sum_{\alpha=1}^N d_{\alpha} w^{\alpha} \quad (4.5.17)$$

será usada en lo subsecuente. Los coeficientes d_1, \dots, d_N estarán determinados por el sistema de ecuaciones dado por

$$-\sum_{\alpha=1}^N d_{\alpha} \int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot \nabla w^{\beta}] w^{\alpha} dx = \langle f - g - j, w^{\beta} \rangle + \langle S * u_{\partial\Sigma}^0, w^{\beta} \rangle; \beta = 1, \dots, N \quad (4.5.18)$$

observe que

$$-\int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot \nabla w^{\beta}] w^{\alpha} dx \equiv \int_{\Omega} \nabla w^{\alpha} \cdot \underline{a} \cdot \nabla w^{\beta} - w^{\beta} \underline{b} \cdot \nabla w^{\alpha} + d w^{\alpha} w^{\beta} dx \quad (4.5.19)$$

por lo tanto, la matriz del sistema es positiva definida cuando el operador es formalmente simétrico ($\underline{b} \equiv 0$) y positivo ($c \geq 0$). Siempre y cuando

$$\mathcal{L}^* w = 0 \text{ en } \Omega_i \quad (4.5.20)$$

Capítulo 5

Implementación Numérica

5.1. Propósito de la aplicación computacional

Se pretende generar un modelo computacional a partir de los métodos matemáticos obtenidos a través de la teoría revisada en los capítulos anteriores. Dicho modelo computacional estará contenido en un programa de cómputo que, no sólo nos ayudará a demostrar que es factible la construcción del propio modelo computacional a partir del modelo matemático para la solución de problemas reales, sino que también sentará las bases para la construcción de una aplicación computacional completamente funcional con código bien estructurado y organizado, que sea fácil de adecuar a futuros cambios, que se ejecute en distintas plataformas y que tienda a la paralelización de procesos.

5.2. ¿Que es la Programación Orientada a Objetos (POO)

El modelo Orientado a Objetos surgió como una necesidad de crear las representaciones abstractas de los problemas que se desean solucionar. Antes de programar es conveniente generar dichas representaciones para modelar el problema de forma más conveniente. Surge así la necesidad de poder representar en lenguajes de programación los tipos de datos que reflejarán el dato de la aplicación particular. Los objetos son así, tipos de datos abstractos (TDA), entendiendo por tipo de dato a un conjunto de valores unido a las operaciones para manipularlos [22].

Los programas están conformados por dos elementos : código y datos. Así, un programa puede estar conceptualmente organizado con base en su código o en sus datos. Es decir, algunos programas se escriben en función de *lo que esta sucediendo* mientras que otros se escriben en función de *quien esta siendo afectado*. La POO organiza un programa entorno a sus datos (atributos) y a un conjunto de interfaces bien definidas para manipular esos datos (métodos, es

decir código).

Un elemento esencial de la POO es la *abstracción*. Esta es una forma de gestionar la realidad y la complejidad. Una forma poderosa de gestionar la abstracción es utilizando clasificaciones jerárquicas. Esto nos permite dividir en niveles la semántica de los sistemas complejos tratando con partes más manejables. Los Lenguajes Orientados a Objetos proporcionan mecanismos que ayudan a implementar este paradigma de programación[22]. A continuación se muestra un ejemplo de como se implementa una clase en lenguaje Java, el cual será el lenguaje en el que se implementara la aplicación computacional.

```
class Clase_A {
    int a;          /* atributo */
    double b;      /* atributo */

    Clase_A () {
        }; /* constructor */

    public int metodo_Clase_A () {} ; /* metodo de la clase */
}
```

La POO esta basada en tres principios básicos que la delinear y que son descritos a continuación.

5.2.1. Encapsulamiento

El encapsulamiento es el mecanismo que permite conjuntar el código y los datos que manipula y que mantiene a ambos alejados de posibles interferencias y usos indebidos. El encapsulado es como un envoltorio protector que evita que otro código que esta fuera pueda acceder arbitrariamente al código o a los datos. El acceso a estos se realiza de forma controlada a través de una interfaz bien definida [22]. Existen diversos calificadores para las propiedades de una clase que determinan el acceso a ellas.

Público: Cualquier clase y desde cualquier lugar puede acceder a la propiedad que tiene este calificador.

Privado: Sólo los miembros de la clase pueden acceder a la propiedad.

5.2.2. Polimorfismo

El polimorfismo (del griego *muchas formas*) es una característica que le permite a una interfaz ser utilizada por una clase general de acciones. La acción específica se determina a partir de la naturaleza exacta de la situación. De forma general, el concepto del polimorfismo se puede expresar con la frase *una interfaz, varios métodos*. Esto significa que es posible diseñar una interfaz genérica para

un grupo de actividades relacionadas. Esto reduce la complejidad permitiendo que la misma interfaz se utilice para especificar una clase general de acción [22]. A continuación se muestra un ejemplo de como se implementa el polimorfismo de una clase en lenguaje Java.

```

class Clase_C {

    int a;          /* atributo */
    double b;      /* atributo */

    Clase_C () {
        }; /* constructor */

    public int metodo_Clase_C () {}; /* metodo de la clase */
    public int metodo_Clase_C (argumentos) {}; /* metodo de la clase */
}

```

5.2.3. Herencia

La herencia vista de una forma sencilla es el proceso mediante el cual un objeto adquiere las propiedades de otro. De una manera más formal es una herramienta para organizar, construir y usar código reutilizable [4], así la herencia es un método de implementación en el cual los programas están organizados como una colección cooperativa de objetos, cada uno de los cuales representa una instancia de alguna clase, y cuyas clases son todas miembro de una jerarquía de clases unida mediante las propias relaciones de herencia. A la clase que hereda de otra se le denomina subclase, clase hija o clase derivada, mientras que la clase de la que hereda la subclase recibe el nombre de superclase, clase padre o clase base. Una subclase solo puede heredar de una superclase, pero una superclase puede tener varias subclases [1]. A continuación se muestra un ejemplo de como se implementa la herencia de una clase en lenguaje Java.

```

class Clase_B extends Clase_A {

    int a;          /* atributo */
    double b;      /* atributo */

    Clase_B () {
        }; /* constructor */

    public int metodo_Clase_B () {}; /* metodo de la clase */
}

```

5.3. Modelación Computacional Orientada a Objetos

Partiendo del modelo matemático del Método Directo como un método numérico para la solución de EDP, generaremos el diseño de una aplicación computacional aprovechando las ventajas que nos da el paradigma de la Orientación a Objetos. Así, se definirá y describirá el diseño Orientado a Objetos que se obtendrá del modelo matemático. Es decir, obtendremos de un modelo matemático abstracto un conjunto de tipos de datos abstractos (Clases) que desempeñarán la labor correspondiente a las entidades que abstraen del modelo matemático. A continuación, de forma general, mencionaremos las entidades matemáticas involucradas, para más adelante describirlas con un poco más de detalle.

- \mathcal{L} es el operador diferencial que actúa sobre alguna función u .
- Ω es el dominio del problema.
- f, u son funciones definidas en R^n
- $\langle u, w \rangle$ es un operador variacional definido en un dominio y un problema dados.
- Conjunto de polinomios de interpolación.
- u_P, u_H funciones óptimas base y funciones óptimas prueba.
- Métodos Numéricos de solución de EDP's.
- Métodos de Solución de sistemas de ecuaciones.

5.4. Diseño de las Clases

5.4.1. Dominio del Problema

El dominio del problema Ω lo modela el siguiente conjunto de clases, el cual representa un dominio cuadrado con subdominios cuadrados.

Dado un dominio en dos dimensiones $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y una frontera $\partial\Omega$ de dicho dominio, generamos una partición Π con E elementos dada como

$$\Pi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{i-1}, \Omega_i, \dots, \Omega_{E-1}, \Omega_E\} \quad (5.4.1)$$

Con lo cual generamos una frontera interna Σ que se define como

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^E \partial\Omega_i - \partial\Omega \quad (5.4.2)$$

Generamos también un conjunto de nodos los cuales existen en las esquinas de los elementos, teniéndose así nodos interiores y exteriores, según se encuentren sobre Σ o sobre $\partial\Omega$ respectivamente.

En el dominio también requeriremos de dar la ubicación de estos nodos así como de los mencionados puntos gaussianos. Para ello requerimos de las coordenadas en dos dimensiones de dichos nodos y puntos.

5.4.2. Descripción de las clases para modelar el Dominio

Clase Malla.

Contiene elementos y nodos, es decir que pueden ser vistos los nodos de manera global en este objeto de manera independiente a los elementos a los que pertenecen.

num_elemento Es el número de elementos en los que se discretiza el dominio.

num_nodos Es el número de nodos totales en el dominio.

intervalos_x Es el número de intervalos en los que se divide el dominio en el eje de las abscisas.

intervalos_y Es el número de intervalos en los que se divide el dominio en el eje de las ordenadas.

elementos Es un arreglo del tipo Coordenada que modela el los intervalos en ambos ejes.

Malla Es una variable de la clase Nodo que modela la red de nodos contenidos en el dominio.

genera_malla Es el método que genera los objetos que estan contenidos en esta clase.

despliega Muestra la información de los nodos, los elementos y las coordenadas de la clase.

Clase Elemento.

Modela los subdominios, que en este caso pueden ser cuadrados o rectángulos. Su longitud depende del número de particiones por dimensión.

Clase Nodo

Contiene la información correspondiente a un punto en n dimensiones, es decir para localizarlo en n dimensiones.

Clase coordenada

Contiene la información de un punto en una sola dimensión.

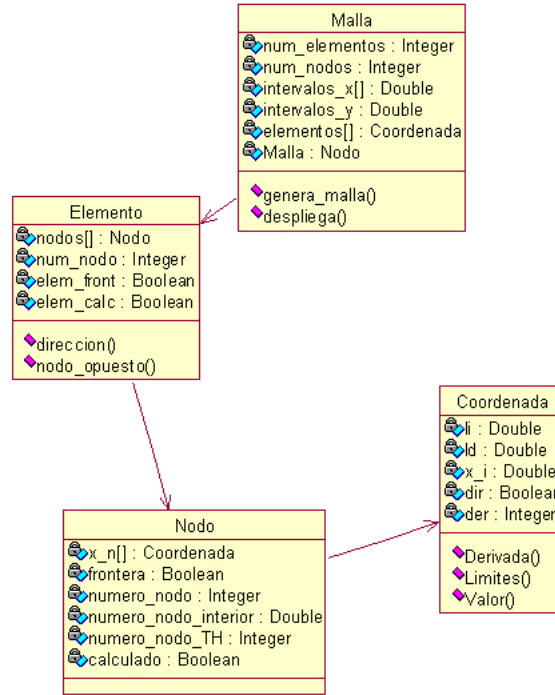


Figura 5.1: Clase que modela el dominio del problema

5.4.3. Operadores Diferencial y Variacional

Contiene las clases que modelan el operador diferencial con la clase OpDiferencial, así como los operadores bilineales de las formulas de Green-Herrera.

Clase OpDiferencial: Es la clase que aplica el operador \mathcal{L} a cualquier función u dado un punto. Devuelve el valor numérico de dicha operación.

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla w) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu \quad (5.4.3)$$

Clase OpVariacional: Es una clase abstracta que modela las *Formulas de Green-Herrera* de ella se heredan todas las formulas que intervienen en el modelo variacional.

Clase Funcion Bilineal: Es la clase que obtiene el valor numérico dadas dos funciones u y w para una de las formulas de Green-Herrera.

Clase Cuadratura_Gaussiana: Es el objeto que efectúa la cuadratura gaussiana para una función dada. Devuelve el valor de una integral para las funciones que lo conforman.

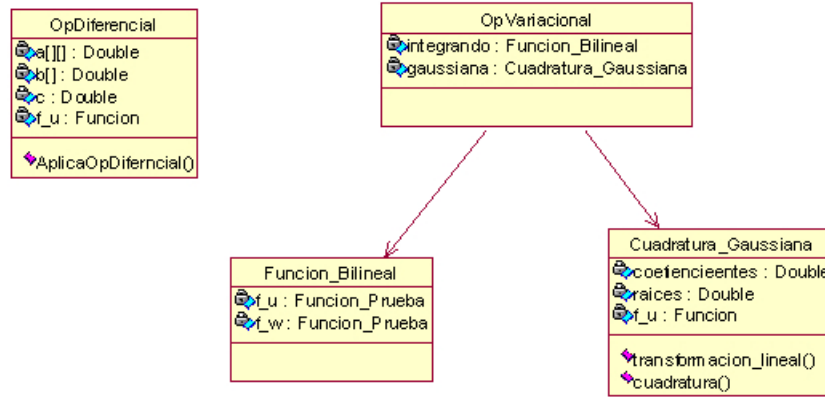


Figura 5.2: Clases propias del modelado del problema elíptico

5.4.4. Polinomios

Clase Polinomio: En la base del modelo matemático tenemos esta clase abstracta de la cual heredan todos los polinomios de grado n que se requieran pero son unidimensionales, es decir que solo trabajan con una variable.

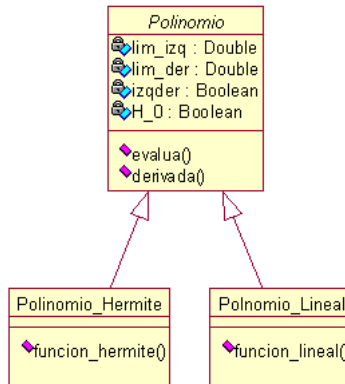


Figura 5.3: Clase abstracta Polinomio y sus clases heredadas

```

public abstract class Polinomio {

public double lim_izq, lim_der;
public boolean izqder; //indica en que lado del punto i esta. true i - i+1 ; fal
    
```

```

public boolean H_0;
public Polinomio(double ad_a, double ad_b, boolean ab_a)
{
    lim_izq = ad_a;
    lim_der = ad_b;
    izqder = ab_a;
}
public abstract double evalua(double x_i, int num_derivada );
public abstract double derivada(int num_derivada);
}

```

5.4.5. Polinomios de Interpolación

Clase Polinomio_Lineal: contiene las funciones dadas como polinomios de interpolación lineales.

$$w^i(x) = A(x - x_{i-1}) \quad (5.4.4)$$

Clase Polinomio_Cuadratico: modela las funciones dadas para los polinomios cuadráticos.

$$w^i(x) = \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})} + \lambda(x - x_{i-1})(x - x_i) \quad (5.4.5)$$

Clase Polinomio_Cubico: modela las funciones dadas para los polinomios cúbicos.

$$w^i(x) = \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})} + \lambda(x - x_{i-1}) + \mu(x - x_{i-1})(x - x_i) \quad (5.4.6)$$

Clase Polinomio_Hermite: modela las funciones dadas para los polinomios cúbicos de una manera más sencilla de interpretar y de manipular que los cúbicos simples ¹.

$$h_i^0(x) = \sum_{i=0}^n [H_i^0(x)f(x_i) + H_i^1(x)f'(x_i)] \quad (5.4.7)$$

Clase PolinomioNDim: Modela polinomios en N dimensiones, es decir que trabaja con n distintas variables.

5.4.6. Funciones

Clase Funcion: Es la función padre de la cual heredan todas las subclases que requieran modelar cualquier función con n variables.

¹Ver capítulo 2 para ver como se construyen

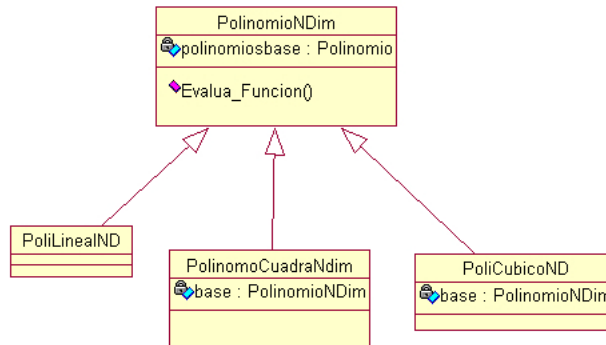


Figura 5.4: Clase para un polinomio en n dimensiones

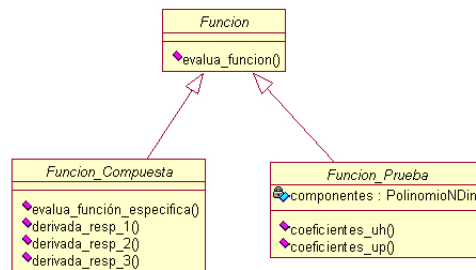


Figura 5.5: Clase abstracta para Funciones y clases derivadas para funciones multivariadas

Clase Funcion_Compuesta: Es una clase abstracta que representa los coeficientes del operador diferencial, a saber, los coeficientes de la matriz \underline{a} , del vector \underline{b} y del escalar c .

Clase Funcion_Prueba: Es una clase abstracta que modela las funciones de prueba y las funciones de peso del procedimiento de colocación-TH. Cada subclase que herede de Funcion_Prueba puede ser de cualquier grado dependiendo del tipo de objeto de su atributo *componentes*.

5.4.7. Matriz

Es la clase que soluciona problemas de la forma $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$

5.4.8. Solución Numérica

Es la clase que organiza a las demás clases y determina que método se utilizará (Directo, Indirecto, FEM) para la aproximación, así como las funciones

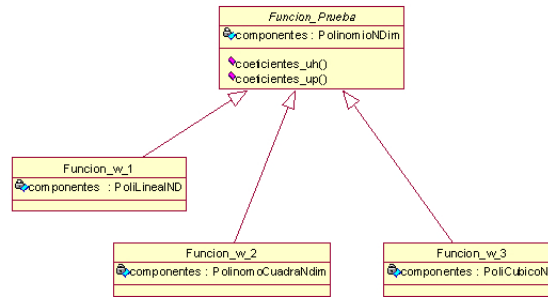


Figura 5.6: Clase que modela la función de prueba y sus subclases para interpolación con polinomios lineales, cuadráticos y cúbicos

óptimas que se usarán para interpolar en los subdominios, también determinará la forma de construir el sistema de ecuaciones global para que posteriormente lo resuelva la clase correspondiente.

5.4.9. Modelo de Interacción

El diseño orientado a objetos además de estar determinado por las clases que lo componen también lo es por las relaciones que surgen entre dichas clases. Para este diseño partimos de las interacciones entre los componentes del sistema después de describir las clases que lo conforman. Las relaciones e interacciones que surgen entre las clases que modelan el problema se ven a continuación.

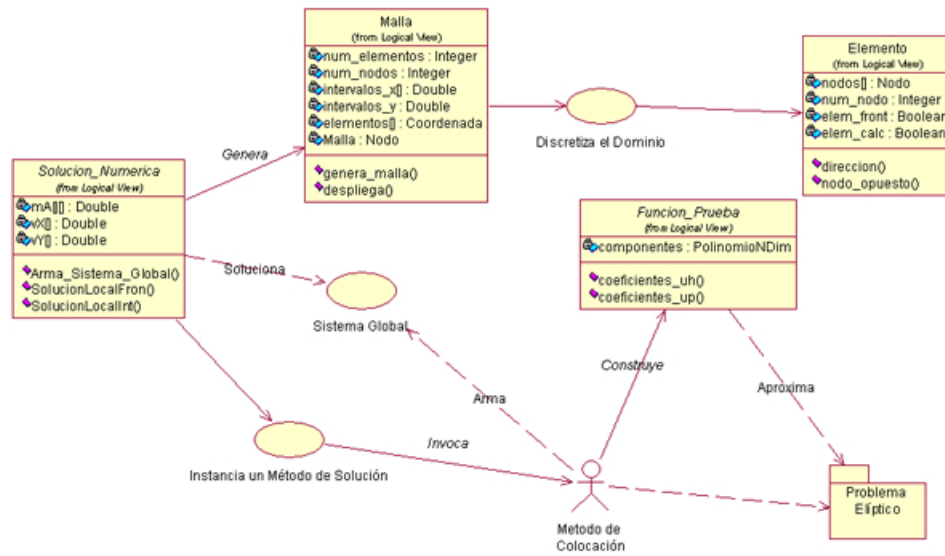


Figura 5.7: Modelo computacional con sus interacciones entre clases

Capítulo 6

Error y Convergencia

Dada la solución analítica u de una EDP, podemos conocer el valor exacto de la función en cualquier punto del dominio. Mientras que para la solución numérica \tilde{u} sólo podemos dar dicho valor de forma aproximada. Ahora, necesitamos una forma de saber que tan cerca o que tan lejos esta esa solución numérica de la solución exacta, de tal forma que u y $\tilde{u} \in D$, así que para conocer esto necesitamos tener una medida sobre la magnitud de la diferencia entre la solución numérica y la solución exacta. Así, la norma de un vector en un espacio lineal provee dicha medida [24]. En el momento de aplicar los métodos numéricos, se llevan a cabo experimentos con EDP que sí tienen solución analítica. Así, obtenemos la solución numérica que arroja nuestro método y la contrastamos con la que se obtiene de la solución analítica. Así calculamos el **error**. Del proceso de discretización obtenemos cierto error dependiendo de que tan fino sea dicho proceso. Así entre más pequeñas son las particiones menor será el error, es decir, si ejecutamos el método para distintas discretizaciones, haciendo cada vez más pequeñas las particiones, veremos como se acercan las soluciones numéricas cada vez más a la solución exacta, esto es que **converge**. Ahora necesitamos determinar que tan rápido converge un método y en función de que variable se medirá la convergencia.

6.1. Error

Existen diversas formas de medir la distancia entre u y \tilde{u} , lo cual se puede hacer a través de distintas normas y que al elegir una se genera un espacio lineal normado [24].

Para los métodos numéricos analizados aquí se utiliza la norma $\|\cdot\|_\infty$, la cual se expresa como

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |f(x)| \quad (6.1.1)$$

El error será

$$\|e\|_\infty \equiv \max_{i \in \eta} \|u_i - \tilde{u}_i\|$$

donde u es la solución exacta y \tilde{u} es la solución aproximada, mientras que η es el conjunto de todos los puntos generados por la partición del dominio.

6.2. Convergencia

En las gráficas correspondientes se realiza la comparación de la convergencia h , donde $h = x_i - x_{i-1}$, del Método Directo del error medido, como ya lo dijimos, en términos de la norma $\|\cdot\|_\infty$. El orden r del error con respecto a h , es decir $O(h^r)$, se obtiene a partir de la estimación de la pendiente de la regresión lineal en la gráfica de $-\log\|e\|_\infty$ contra $\log h$. Esto se puede verificar si se considera al error como una función de h , del tipo $e = \text{const}(h^r)$, entonces al aplicar el logaritmo en ambos miembros resulta:

$$-\log(\text{error}) = -\log \text{const} - r \log h \quad (6.2.1)$$

donde, se toman los valores de $\log(\text{error})$ y $\log h$ con signo opuesto para que sean cantidades positivas [7].

6.3. Error en los FEM-OF

Utilizamos nuevamente la siguiente notación para referirnos a la solución del BVPJ, $u \in D$, $v \in O_B \subset D$ y $w \in O_T \subset D$ serán las soluciones exactas al mismo tiempo que son las funciones óptimas *base* y de *prueba* como fueron definidas anteriormente. Además, la notación $\tilde{u} \in \tilde{D}$, $\tilde{v} \in \tilde{O}_B \subset \tilde{D}$ y $w \in \tilde{O}_T \subset \tilde{D}$ serán usadas para denotar las aproximaciones.

En los FEM-OF hemos construido el sistema $\tilde{O}_B \equiv \{\tilde{v}_{ij}\}$ y $\tilde{O}_T \equiv \{\tilde{w}_{ij}\}$ como las funciones de prueba y de base, respectivamente, donde los índices (i, j) recorren los nodos internos de la partición.

Expresamos $\omega_{ij} \equiv \tilde{v}_{ij} - v_{ij}$ como la diferencia entre las funciones exactas y aproximadas para la solución de la EDP en una de las particiones y expresamos también el error como $e = \tilde{u} - u$.

Así cada miembro de estas familias satisface $\mathcal{L}\omega_{ij} = 0$ en cada uno de los puntos Gaussianos de cada subdominio Ω_i junto con

$$\omega_{ij} = 0, \text{ en } \partial\Omega \quad (6.3.1)$$

$$[\omega_{ij}] = 0 \text{ en } \Sigma \quad (6.3.2)$$

Par el caso de Steklov-Poincaré o Método Directo tenemos que para el error aplica

$$-\langle S_J e, \tilde{v}_{ij} \rangle = \langle P u, \omega_{ij} \rangle = 0 \quad \forall \tilde{v}_{ij} \in \tilde{O}_B \quad (6.3.3)$$

La ecuación (6.3.3) puede ser escrita como

$$-\langle S_J e, v_{ij} \rangle = \langle S_J e, \omega_{ij} \rangle - \langle P e, \omega_{ij} \rangle - \langle P \tilde{u}, \omega_{ij} \rangle \quad \forall v_{ij} \in O_B \quad (6.3.4)$$

Posteriormente esta ecuación es

$$-\langle S_J e, v_{ij} \rangle = \langle (P - B - J) e, \omega_{ij} \rangle - \langle P \tilde{u}, \omega_{ij} \rangle \quad \forall v_{ij} \in O_B \quad (6.3.5)$$

Ahora, por construcción de las funciones óptimas tenemos que $Be = 0$, $R_J e = 0$ y $\langle S_J e, \omega_{ij} \rangle = 0$ y obtenemos

$$-\langle S_J e, v_{ij} \rangle = \langle P e, \omega_{ij} \rangle - \langle P \tilde{u}, \omega_{ij} \rangle \quad \forall v_{ij} \in O_B \quad (6.3.6)$$

Y de forma aun más explícita aplicando Series de Taylor [24]

$$-\int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot v_{ij}] e dx = \int_{\Omega} O(h^2) dx \quad \forall w_{ij} \in O_B \quad (6.3.7)$$

Este análisis del error sugiere el siguiente algoritmo. Aplicando la ecuación

$$\langle (P - S_J) \hat{u}, \tilde{v}_{ij} \rangle = \langle f - g - j, \tilde{v}_{ij} \rangle \quad \forall \tilde{v}_{ij} \in \tilde{O}_B \quad (6.3.8)$$

Si también sustituimos

$$\hat{u}_0 = \sum_{\alpha=1}^N d_{\alpha} \hat{v}^{\alpha} \quad (6.3.9)$$

donde \hat{v}^{α} son todas las aproximaciones a las funciones óptimas de interpolación, construidas previamente. El análisis de error nos da

$$-\int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot v_{ij}] e dx = -\int_{\Omega} \omega_{ij} \mathcal{L} e dx \quad (6.3.10)$$

Además esta ecuación del error satisface (6.3.3). Así aplicando nuevamente series de Taylor

$$-\int_{\Sigma} [\underline{a}_n \cdot v_{ij}] e dx = -\int_{\Omega} O(h^4) dx \quad (6.3.11)$$

Entonces, el error obtenido utilizando estos algoritmos permite tener $\|e\|_{L^2(\Sigma)} = O(h^4)$. Esto implica superconvergencia sobre Σ . Sin embargo para alcanzar este orden de aproximación es necesario tener funciones de interpolación en Σ que sean consistentes con la misma frontera interior. Para un análisis más detallado acerca de la convergencia veasé [13].

6.4. Experimentos numéricos

Los experimentos numéricos que fueron llevados a cabo consistieron en la aplicación del algoritmo de Steklov-Poincaré, también conocido como el Método Directo, para la solución del BVPJ, sujeto a condiciones de Dirichlet. En todos los casos que se ejecuten en la aplicación computacional el dominio del problema

es el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$. Cada uno de los ejemplos fue resuelto en una partición rectangular ($E = E_x = E_y$) usando el algoritmo ya dicho de Steklov-Poincaré, para funciones óptimas cuadráticas y cúbicas en Σ . La tasa de convergencia del error -medida en términos de la norma $\|\cdot\|_\infty$ - es $O(h^2)$ y $O(h^4)$ como se muestra en las figuras (6.1), (6.2) y (6.3).

6.4.1. Problemas elípticos en dos dimensiones

Los experimentos numéricos en dos dimensiones consistieron en resolver el problema de la ecuación elíptica general de segundo orden

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f_\Omega \tag{6.4.1}$$

donde $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ y donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2, c$ pueden ser coeficientes constantes o funciones definidas en el dominio $[0, 1] \times [0, 1]$. Con condiciones de frontera de tipo Dirichlet dadas por la propia solución analítica y con condiciones de salto

$$[u]_\Sigma = 0 \text{ en } \Sigma \tag{6.4.2}$$

Para probar el Método Directo se han obtenido resultados numéricos para los tres ejemplos presentados en la tabla (6.1). Dichos experimentos tienen las características de un problema elíptico en dos dimensiones con los coeficientes dados en la misma tabla ya mencionada y para cada ejemplo se da la solución analítica en la en la tabla (6.2). En todos los casos se prescribe el valor de frontera que esta implícito en la solución analítica dada para cada ejemplo. Los saltos para todos los ejemplos es cero.

Ej.	\underline{a}	\underline{b}	c	f_Ω
1	$a_{11} = a_{22} = 1$ $a_{21} = a_{12} = 0$	$b_1 = b_2 = 0$	1	$-2\pi \text{sen}\pi x \text{sen}\pi y$
2	$a_{11} = a_{22} = 1$ $a_{21} = a_{12} = 0$	$b_1 = b_2 = 0$	0	$(1 - x^2 - y^2)e^{xy}$
3	$a_{11} = a_{22} = xy$ $a_{21} = a_{12} = 0$	$b_1 = b_2 = 0$	0	$6(y^2 - x^2)$

Cuadro 6.1: Ecuaciones para los experimentos numéricos

	Solución Analítica
1	$\text{sen}\pi x \text{sen}\pi y$
2	e^{xy}
3	$x^2 - y^2$

Cuadro 6.2: Soluciones analíticas de las ecuaciones para los experimentos numéricos

La convergencia del algoritmo del Método Directo utilizando funciones óptimas lineales es de $O(h^2)$. Lo cual se demuestra obteniendo el error máximo para distintas mallas que van de $n \times n$ y definiendo una malla cada vez más fina $n + 1 \times n + 1$ y se obtiene la pendiente de la curva dada por -Log del Error y -Log de n dado por la gráficas (6.1), (6.2) y (6.3). Algo semejante ocurre cuando utilizamos polinomios cúbicos, pero en esta ocasión el orden de convergencia es de $O(h^4)$.

La pendiente de la curva que se presenta en las gráficas (6.1), (6.2) y (6.3) tiene el mismo valor de pendiente. Esto significa que conforme disminuimos el valor de h obtenemos una mayor aproximación que está en relación con las funciones que utilizamos para interpolar en cada uno de los elementos, es decir, la forma de elegir las *funciones óptimas de base* (lineales o cúbicas) determinan la convergencia hacia la solución. Entre mayor el orden de dichas funciones la convergencia será más rápida. Tenemos así que a mayor orden de funciones interpolantes, mayor pendiente y mayor orden de convergencia.

Los resultados de todos estos experimentos numéricos corroboran el orden de aproximación teórico mostrado en la sección anterior.

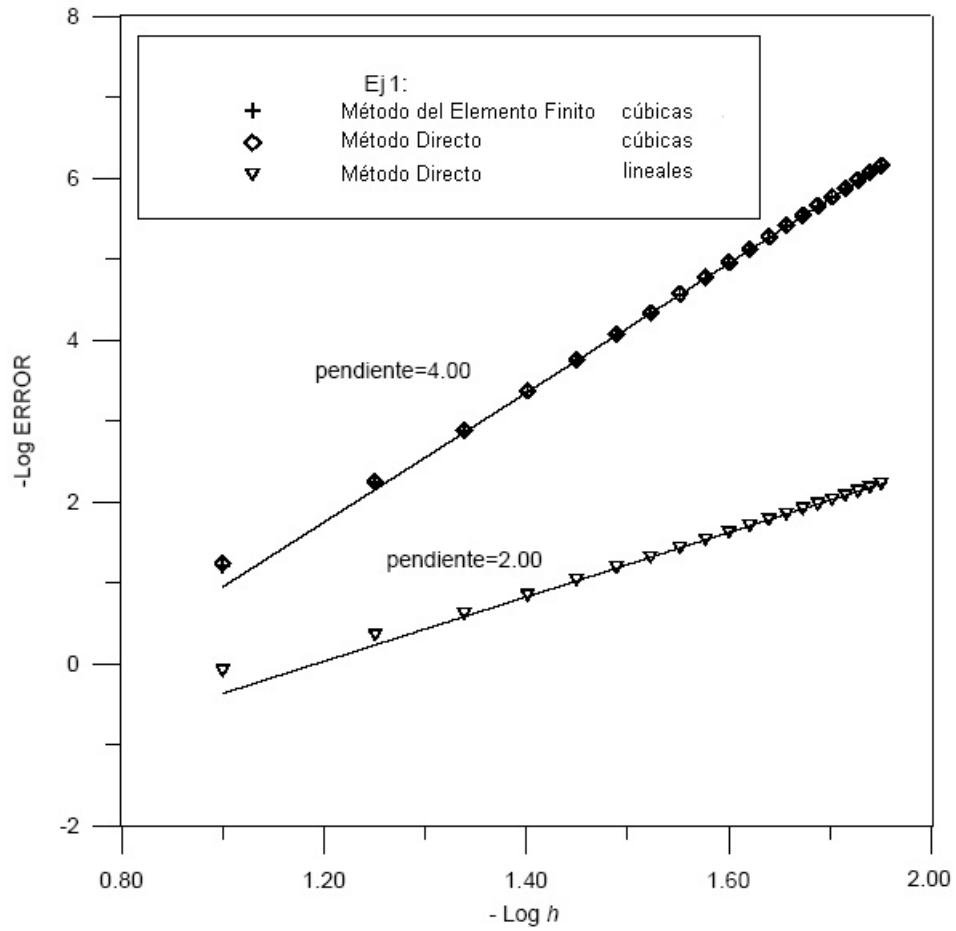


Figura 6.1: Pendiente de la convergencia del ejemplo 1 para el Método Directo utilizando FEM-OF lineales y cúbicas y comparando contra la convergencia que tiene el Método del Elemento Finito.

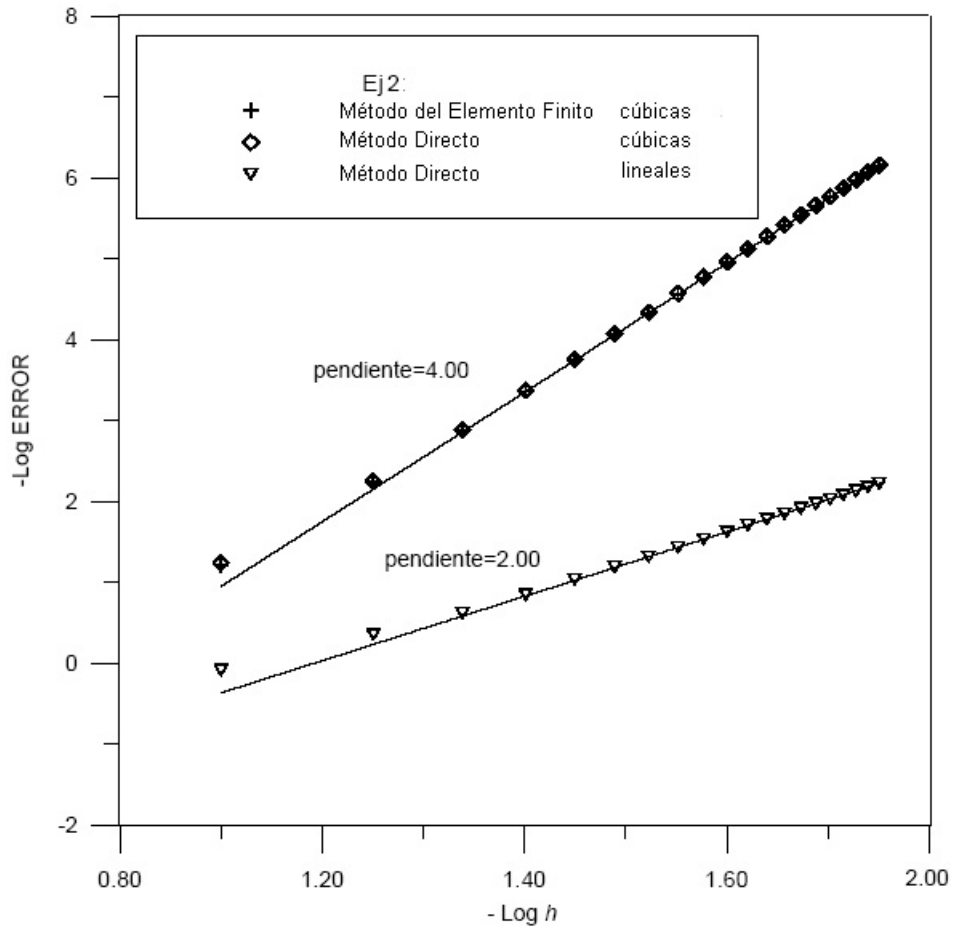


Figura 6.2: Pendiente de la convergencia del ejemplo 2 para el Método Directo utilizando FEM-OF lineales y cúbicas y comparando contra la convergencia que tiene el Método del Elemento Finito.

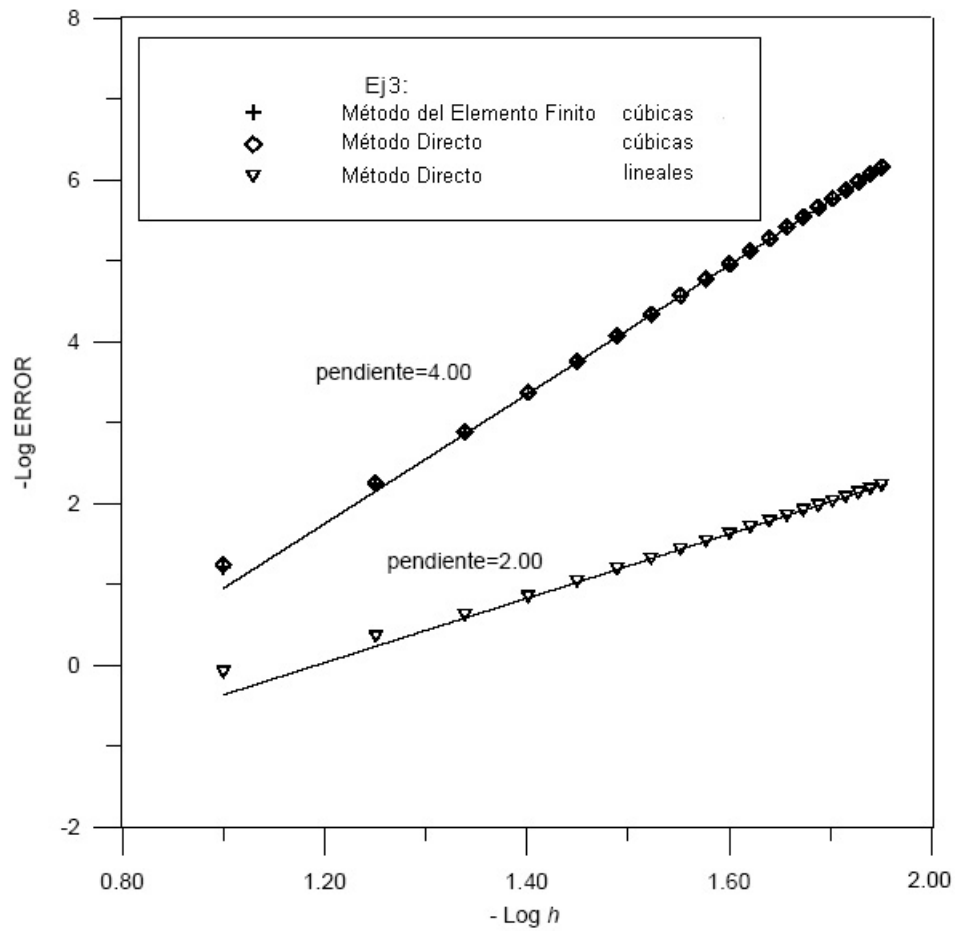


Figura 6.3: Pendiente de la convergencia del ejemplo 3 para el Método Directo utilizando FEM-OF lineales y cúbicas y comparando contra la convergencia que tiene el Método del Elemento Finito.

Capítulo 7

Conclusiones

El desarrollo de una aplicación computacional para demostrar que los métodos numéricos de Elemento Finito con Funciones Óptimas ha sido el marco para la revisión de algunos métodos de colocación como lo es el *Método de Colocación Ortogonal* y los propios métodos de colocación FEM-OF basados en la descomposición de dominio.

En este trabajo de tesis el Método FEM-OF ha sido mostrado como una metodología muy efectiva de discretización y de una aplicabilidad muy general, la cual en muchos casos, puede ser complementada de manera muy ventajosa con otros procedimientos. Además, el Método FEM-OF constituye un marco muy general y sistemático para aplicar la colocación ortogonal. Además vimos que de este método surgen dos poderosos enfoques : el directo y el indirecto.

Como ventajas de los métodos FEM-OF tenemos que :

- Si tenemos un operador diferencial simétrico y positivo definido tendremos en nuestro sistema de ecuaciones una matriz simétrica y positiva definida.
- La misma matriz estará mejor estructurada en bloques diagonales, lo cual facilita la solución de este sistema global.
- Tenemos una reducción en los grados de libertad, los cuales dependen del orden de las funciones de peso, pues dichas funciones pueden ser a lo mucho (para nuestro caso) cúbicas.
- El manejo de funciones con salto y coeficientes discontinuos puede ser reducido a un problema homogéneo, sin saltos y con coeficientes continuos.
- Las tasas de convergencia, como se anticipó, son del orden de $O(h^2)$ para funciones cuadráticas en la frontera y de $O(h^4)$ para funciones cúbicas en la frontera.

En particular, a modo de conclusiones mencionaremos lo siguiente:

- De la teoría planteada se han derivado dos enfoques : el directo y el indirecto, de los que se ha demostrado que son dos eficientes algoritmos de colocación.
- La nueva versión de la colocación ortogonal constituye una generalización de la Colocación Ortogonal con Splines, la cual tiene claras ventajas sobre la Colocación Ortogonal Estandar.
- El Método FEM-OF ha sido exhibido como un marco natural para los métodos de colocación con un solo punto de colocación.
- El uso de preconditionadores.

Recientemente se ha encontrado la forma de aplicar estas teorías a sistemas discretos y formular a ese nivel formas muy sistemáticas de realizar la descomposición de dominio para utilizar el cómputo en paralelo de sistemas continuos (físicos macroscópicos). Se ha mostrado que los métodos de descomposición de dominio derivados con esta teoría tienen ventajas claras con respecto a las formas de hacerlo que están en boga. En particular el método FETI , debido a que carece de la capacidad para tratar funciones discontinuas, duplica variables de frontera y para unificarlas posteriormente utiliza multiplicadores de Lagrange. En el método de Herrera todo esto es simplificado debido al uso sistemático de formas discontinuas. Esto ha abierto la posibilidad de desarrollar una clase muy amplia de preconditionadores con características atractivas.

- Paralelizar los algoritmos de colocación-TH.

La discretización del dominio permite ver cada partición del dominio como un problema local, donde se requieren construir soluciones que satisfagan las condiciones solamente en la i -ésima partición. Una vez generadas estas soluciones se construye el sistema general en el cual se obtendrán la aproximaciones al problema inicialmente planteado en los puntos de discretización. Esa partición permitiría que en un equipo de cómputo en paralelo cada problema de una partición fuese resuelto por un procesador para finalmente construir el sistema general de una manera más eficiente y con una reducción considerable de tiempo de procesamiento.

Un posible trabajo de tesis, para continuar este trabajo, estará dedicado a desarrollar e investigar esta clase de preconditionadores. En los métodos de solución de ecuaciones diferenciales conocidos como métodos de elemento finito discretizamos el dominio. Introducimos funciones base, que se supone resuelven la ecuación en cada uno de los intervalos en los que discretizamos el dominio y construimos un sistema de ecuaciones para obtener el valor que satisface la ecuación diferencial en cada uno de los puntos del dominio.

Las funciones base de las que se allega el método del elemento finito no contienen ningún tipo de información que pudiera mejorar la solución, son sólo funciones que cumplen ciertas características $C^0[a, b]$ y en $C^1[a, b]$.

Existe un método de colocación que supone conjuntos de puntos donde se debe de satisfacer la función base (que llamaremos ahora polinomios de colocación) cuando se le aplica un operador diferencial L . Con dichos polinomios de colocación se construyen sistemas de ecuaciones de manera local que al ser resueltos dan lugar a un sistema global que contiene la solución numérica de la ecuación diferencial.

El tamaño de dichos sistemas de ecuaciones, para la solución global, va relacionado de manera directa con el cuadrado del número de puntos en el que se haya dividido el dominio es por eso que es importante reducir ese número (grados de libertad) para mejorar el tiempo de procesamiento pero sin perder el orden del error obtenido con respecto a la solución exacta de las ecuaciones. Estos métodos tienen que ser analizados con una prueba numérica de eficiencia así como de una comparación de error y un análisis de error.

El Dr. Ismael Herrera Revilla ha desarrollado una teoría basada en la descomposición de dominio para la solución de las EDP donde combina sus estudios sobre EDP con valores de frontera y sus estudios sobre operadores diferenciales. De dicha teoría surgen dos métodos llamados directo e indirecto los cuales pueden reducir el número de elementos de la matriz del sistema para la solución de los sistemas numéricos.

Apéndices

Apéndice A

A.1. El Método Convencional de Colocación en la solución de problemas locales en una dimensión

Ya mostramos que la *interpolación* construye polinomios que satisfacen las restricciones que imponamos en la frontera $\partial\Omega$ así como en las fronteras $\partial\Omega_{ij}$ de los elementos establecidos para el caso de dos dimensiones. El método de colocación consiste en que en cada elemento elegimos ciertos puntos en el interior y construimos la solución aproximada como una solución del espacio que elegimos. Es decir, construimos $\hat{u} \in \hat{D}$ de tal forma que

$$\mathcal{L}\hat{u}(x) = f_{\Omega}(x) ; x = x_i^1, \dots, x_i^N \quad (\text{A.1.1})$$

Cuando se usan los *puntos gaussianos* se llama colocación ortogonal. Consideremos el problema en el dominio Ω con condiciones de frontera. Podemos aproximar la solución \hat{u} con la función base

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^N u(x_i)\phi_i(x) \quad (\text{A.1.2})$$

Cabe hacer notar que los polinomios de Lagrange no son utilizables pues no tienen más grados de libertad que los que dan en los nodos de los elementos. En este caso utilizaremos polinomios de Hermite para llevar a cabo el procedimiento por que tenemos más grados de libertad. De esta manera tenemos que la solución aproximada es continua en su primera derivada, es decir $\hat{u} \in C^1[\Omega]$

A.2. Descripción

Dado un espacio de funciones

$$\hat{D} \subset D = C^2[0, x_1] \times \dots \times C^2[x_{E-1}, x_E] \quad (\text{A.2.1})$$

tomemos

$$\hat{D} = P^G[0, x_1] \times \dots \times P^G[x_{E-1}, x_E]$$

donde

$$P^G[x_{i-1}, x_i] = \{p(x) \mid p(x) = \text{polinomio de grado } G \text{ en } [x_{i-1}, x_i]\}$$

El método de colocación consiste en que en cada subintervalo elegimos ciertos puntos en el interior y construimos la solución aproximada como una solución de ese espacio que elegimos.

Ahora bien, el como elegimos los puntos en el interior del intervalo puede mejorar de manera notable la aproximación. Cuando se usan los puntos gaussianos tenemos lo que se llama colocación ortogonal.

La construcción de la solución aproximada dependerá del número de puntos que se impongan como condiciones a satisfacer, a esto comunmente se le llama

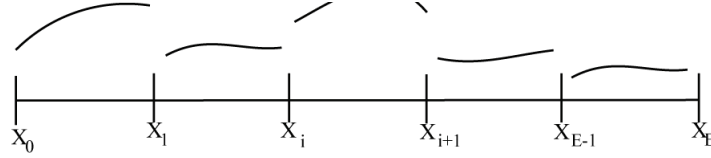


Figura A.1: Posibles aproximaciones por elemento

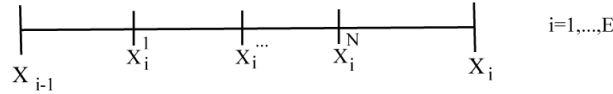


Figura A.2: Puntos de colocación gaussianos en el elemento i

grados de libertad. Un polinomio lineal satisface dos condiciones, un polinomio cuadrático tres condiciones, un polinomio cúbico cuatro condiciones y así sucesivamente, un polinomio de grado G para satisfacer $G + 1$ condiciones. Dado que los polinomios de grado G forman un espacio vectorial, de la misma forma, la dimensión del espacio será $G + 1$.

Ejemplos

$$G = 1$$

$$w^i(x) = A(x - x_{i-1}) \tag{A.2.2}$$

$$G = 2$$

$$w^i(x) = \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})} + \lambda(x - x_{i-1})(x - x_i) \tag{A.2.3}$$

$$G = 3$$

$$w^i(x) = \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})} + \lambda(x - x_{i-1}) + \mu(x - x_{i-1})(x - x_i) \tag{A.2.4}$$

Se construye el sistema de ecuaciones correspondiente al polinomio de grado G elegido. Para el caso de la construcción de las u_P y la u_H utilizando cuadráticas y cúbicas, los sistemas se construyen con las condiciones dadas a continuación.

A.3. Procedimiento con polinomios cuadráticos.

Construcción de la u_H

$$w(x_i) = 1 \tag{A.3.1}$$

$$w(x_{i-1}) = 0 \tag{A.3.2}$$

$$w(x_{i+1}) = 0 \tag{A.3.3}$$

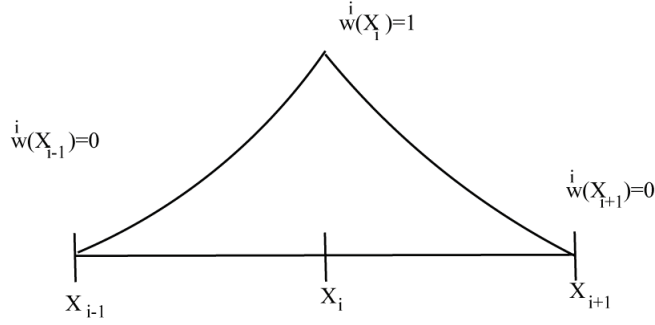


Figura A.3: Condiciones a satisfacer

$$Lw(x) = 0; x = x_i^1 \cdots x_i^N \quad (\text{A.3.4})$$

La ecuación que se debe de satisfacer es

$$w^i(x) = \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})} + \lambda(x - x_{i-1})(x - x_i) \quad (\text{A.3.5})$$

tenemos que con el primer termino se satisfacen las condiciones (A.3.1) y (A.3.2) o (A.3.3) si es el otro extremo del elemento. Y sólo necesitamos satisfacer A.4 para lo cual despejamos λ de A.4 en los puntos de colocación ortogonal (x^*);

$$\lambda = -\frac{(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})} \lambda(x - x_{i-1})(x - x_i) \quad (\text{A.3.6})$$

Construcción de la u_P

$$w(x_i) = 0 \quad (\text{A.3.7})$$

$$w(x_{i-1}) = 0 \quad (\text{A.3.8})$$

$$w(x_{i+1}) = 0 \quad (\text{A.3.9})$$

$$Lw(x) = f_\Omega; x = x_i^1 \cdots x_i^N \quad (\text{A.3.10})$$

Construcción de la u_P en la frontera del dominio

$$w(x_i) = 1 \quad (\text{A.3.11})$$

En el extremo izquierdo

$$w(x_{i-1}) = u(0); \quad (\text{A.3.12})$$

En el extremo derecho

$$w(x_{i+1}) = 0 \quad (\text{A.3.13})$$

y en ambos

$$Lw(x) = f_\Omega; x = x_i^1 \cdots x_i^N \quad (\text{A.3.14})$$

A.4. Procedimiento con polinomios cúbicos.

Construcción de la u_H

$$w(x_i) = 1 \quad (\text{A.4.1})$$

$$w(x_{i-1}) = 0 \quad (\text{A.4.2})$$

$$w(x_{i+1}) = 0 \quad (\text{A.4.3})$$

$$Lw(x) = 0; x = x_i^1 \cdots x_i^N \quad (\text{A.4.4})$$

La ecuación que se debe de satisfacer es

$$w^i(x) = \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})} + \lambda(x - x_{i-1}) + \mu(x - x_{i-1})(x - x_i) \quad (\text{A.4.5})$$

tenemos que con el primer termino se satisfacen las condiciones (A.4.1) y (A.4.2) o (A.4.3) si es el otro extremo del elemento. Y sólo necesitamos satisfacer para lo cual despejamos λ y μ de en los puntos de colocación ortogonal (x^*, x^{**});

Construcción de la u_P

$$w(x_i) = 0 \quad (\text{A.4.6})$$

$$w(x_{i-1}) = 0 \quad (\text{A.4.7})$$

$$w(x_{i+1}) = 0 \quad (\text{A.4.8})$$

$$Lw(x) = f_\Omega; x = x_i^1 \cdots x_i^N \quad (\text{A.4.9})$$

Construcción de la u_P en la frontera del dominio

$$w(x_i) = 1; \quad (\text{A.4.10})$$

En el extremo izquierdo

$$w(x_{i-1}) = u(0); \quad (\text{A.4.11})$$

En el extremo derecho

$$w(x_{i+1}) = 0 \quad (\text{A.4.12})$$

y en ambos

$$Lw(x) = f_\Omega; x = x_i^1 \cdots x_i^N \quad (\text{A.4.13})$$

Bibliografía

- [1] M.A. Acera García y A.M. Sanz Sierra, *Manual imprescindible de C/C++*. Ed. Anaya 2005.
- [2] Brill S. H., *The Solution of Two-Dimensional Partial Differential Equations via Hermite Collocation With Block Red-Black Gauss-Seidel Preconditioner*. P.H. issertation, Vermont University, 1998.
- [3] Ciarlet, Ph.G.: *The Finite Element Method for Elliptic problems*, Classics in Applied Mathematics , 40, SIAM, 2002.
- [4] Brad J. Cox, Andrew J. Novobilski, *Object-Oriented Programming, An Evolutionary Approach*. Addison-Wesley 1991.
- [5] Cristara C. C., Houstis E. N. y rice J. R., *A Parallel Spline Collocation Capacitance Method for Elliptic Partial Differential Equations*, Supercomputing.1988 Conference Proceedings. ACM Press, New York, 1988.
- [6] DeBoor C. y Swartz B., *Collocation at Gaussian Points*, S.I.A.M. J. Num. Anal. Vol. 10, No. 4 1973.
- [7] Díaz M.: *Desarrollo del Método de Colocación Trefftz-Herrera. Aplicación a problemas de transporte en las geociencias*, Tesis de Doctorado 2001.
- [8] Dyksen W. R., Houstis E.N., Lynch R.E. y Rice J. R., *The Performance of the Collocation and Galerkin methods with Hermite Bi-Cubics*. S.I.A.M.,J. Numeric Anlysis, Vol.21, No.4 1984.
- [9] Herrera I., Pinder G. : *Numerical Modeling in Science and Engineering*, Wiley, 1988.
- [10] Herrera I., Pinder G. : *Numerical Modeling in Science and Engineering* pag. 116, Wiley, 1988.
- [11] Herrera I., Pinder G. : *Numerical Modeling in Science and Engineering* pag. 60, Wiley, 1988.
- [12] Herrera I., Pinder G. : *Numerical Modeling in Science and Engineering* pag. 114, Wiley, 1988.

- [13] Herrera I., Pinder G. : *Numerical Modeling in Science and Engineering* pag. 119, Wiley, 1988.
- [14] Herrera I. : *Boundary Methods. An Algebraic Theory*, Pitman Publishing Inc, 1984.
- [15] Herrera I., Guarnaccia J. y Pinder G. F., *Domain Decomposition Method for Collocation Procedures*. Computational Methods in Water Resources X, Vol. 1, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1994.
- [16] Herrera I., Díaz M. : *Indirect Methods of Collocation: Trefftz-Herrera Collocation*, John Wiley & Sons, Inc, 1999.
- [17] Herrera I., Yates R. : *General Theory of Domain Decomposition: Beyond Schwarz Methods*, John Wiley & Sons, Inc, 2001.
- [18] Herrera I., Yates R. : *A General Effective Method for Combining Collocation and DDM: An Application of Discontinuous Galerkin Methods*, John Wiley & Sons, Inc, 2005.
- [19] Herrera I., Yates R. : *Collocation Methods: More efficient procedures for applying collocation*, Instituto de Geofísica, 2005.
- [20] Herrera I., *Boundary Methods. A Criterion for Completeness*. Proc. National Academy of Sciences, USA 1980.
- [21] Houstis E. N., Mitchell W. F. y Rice J. R., *Collocation Software for Second Order Elliptic Partial Differential Equations*. ACM Trans. Math Software, Vol. 11, No. 4, 1988.
- [22] Hibert M.P. y Fairweather G., *Java. Numeric. Math.*, Vol. 68 1994.
- [23] Jirousek J., Leon N., *A powerful finite element for plate bending*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 14, 65-92, (1978).
- [24] Kendall Atkinson, Weimin Han, *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*. Spring, 2001.
- [25] Lanczos C., : *Trigonometric Interpolation of Empirical and Analytical Functions*, J. of Math. and Phys., Vol 17, No. 3.
- [26] McAloon Kenneth. y Tromba A., *Cálculo*. PCSA, 1976.
- [27] Ochoa Luis : *Un Método Directo de Colocación con dominios uxtapuestos*, Tesis de Maestría, 2001.
- [28] Pinder G. : *Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology*, Academic Press, 1977.
- [29] Robinson M., Fairweather G.: *Orthogonal Cubic Spine Collocation Methods for Schödinger-Type Equations in One Space Variable*, Numerical Math., Vol 68, pp 355-376, 1994.

- [30] Robinson M.P. y Fairweather G., *Orthogonal Cubic Spline Collocation Methods for Schrödinger-Type Equations in One space Variable*. Numeric. Math., Vol. 68 1994.
- [31] Russell R. d. y Shampine L. F., *A Collocation Method for Boundary Value Problems*, Numeric Math., Vol. 19 1972.
- [32] Trefftz E., *Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren*. In Proceedings 2nd International Congress of Applied mechanics, Zurich,131-137,(1926).
- [33] Zampieri E., *A Multidomain Spectral Collocation Solver for the Elasticity Problem*, University of Minnesota Supercomputer Institute Research Report UMSI 91/180,1991.