



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE QUÍMICA

**PROCESOS DE RELAJACIÓN Y
TRANSFERENCIA DE ENERGÍA
EN TEJIDOS BIOLÓGICOS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN INGENIERÍA

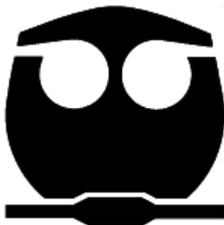
INGENIERÍA QUÍMICA - MATERIALES (POLÍMEROS)

P R E S E N T A:

I.Q. MIREILLE EVANGELINA BRAVO GUTIÉRREZ

T U T O R:

DR. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS



MÉXICO, DF.

2 0 1 0



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INTEGRANTES DEL JURADO

Presidente: Dr. Octavio Manero Brito
Vocal: Dr. Alberto Tecante Coronel
Secretario: Dr. Humberto Vázquez Torres
1º suplente: Dr. Luis Alberto Vicente Hinestroza
2º suplente: Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

Esta tesis fue desarrollada en:

Departamento de Ingeniería Química
Facultad de Química
Ciudad Universitaria
Universidad Nacional Autónoma de México

TUTOR DE TESIS

Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

SUSTENTANTE

I.Q. Mireille Evangelina Bravo Gutiérrez

"Si mi alma no murió de hambre... aún tiene algo que decir"

PAULO COELHO

AGRADECIMIENTOS

A Dios porque hace que todo sea posible y me acompaña en mi camino.

A mis papás y hermanos porque pese a todo hemos permanecidos juntos y nunca han dejado de apoyarme en todo lo que hago. Gracias por enseñarme que siempre se puede encontrar la manera de salir adelante.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y sobre todo a la Facultad de Química por abrirme las puertas y darme la oportunidad de desarrollarme personal y profesionalmente.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca otorgada durante el periodo de agosto de 2007 a septiembre de 2009, que corresponde a los cuatro semestres del posgrado de Maestría dentro del Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería.

A todos los miembros del jurado por tomarse el tiempo para revisar este trabajo y por sus valiosas aportaciones. Especialmente a mi tutor el Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos por su dedicación, guía y disponibilidad, por compartir y enseñarnos a buscar las herramientas para llegar a un conocimiento. Gracias por la confianza.

Al resto de mi familia porque nunca ha dejado de interesarse por las cosas que pasan en mi vida y porque sus palabras siempre son alentadoras. A todos los que ya partieron porque sé que continúan al pendiente de nosotros.

A todos mis compañeros y amigos porque sólo en equipo se puede tener éxito. Gracias no sólo por todo el apoyo académico, sino también por todas las risas compartidas. En particular a Moisés Hernández por haber tenido la paciencia para enseñarme a programar y para despejar mis dudas.

A mis amigos y confidentes por acompañarme y hacerme la vida feliz, por su ayuda, sus sabios consejos y porque siempre están al pendiente de las actualizaciones. Muy especialmente a ti por despertarme y enseñarme a vivir.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
2. Transferencia de Energía en Tejidos	6
2.1. Transferencia de Energía en el Cuerpo Humano	6
2.2. Medición de la Temperatura en el Cuerpo Humano	11
3. Ecuación Biológica de Transferencia de Energía	15
3.1. Ecuación Biológica de Transferencia de Energía	15
3.2. Ecuaciones Constitutivas para el Flux de Energía	18
4. Solución de las Ecuaciones de Transferencia	20
4.1. Características del Sistema de Estudio	20
4.2. Planteamiento del Problema	24
4.2.1. Problema Clásico	24
4.2.2. Problema con Relajamiento	26
4.3. Adimensionalización y Solución de las Ecuaciones de Transferencia	28
4.3.1. Estado Estacionario	30
4.3.2. Problema Transitorio	33
5. Distribuciones de Temperatura (Teoría Clásica)	38
5.1. Estado Estacionario	38
5.2. Pruebas Dinámicas	41
5.2.1. Flux Superficial Nulo o Condición Adiabática	41
5.2.2. Flux Superficial Constante	44
5.2.3. Flux Superficial Discontinuo	45
5.2.4. Flux Superficial Oscilatorio	48
5.2.5. Sistema con Medio de Enfriamiento	51

6. Distribuciones de Temperatura con Relajamiento	55
6.1. Efecto del Número de Deborah Térmico	55
6.2. Comparación de las Distribuciones de Temperatura de Fourier y de Maxwell-Cattaneo	60
7. Conclusiones	66
A. Lista de Símbolos	69
B. Relaciones Adimensionales	71
C. Resumen de las Ecuaciones de Transporte	72
Bibliografía	75

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Transferencia de energía del cuerpo con el medio ambiente	7
2.2. Metabolismo basal a través del tiempo	9
4.1. Sistema de Estudio	21
5.1. Distribuciones de temperatura en estado estacionario	40
5.2. Distribuciones de temperatura adiabáticas para diferentes tiempos . . .	42
5.3. Distribuciones de temperatura adiabáticas para diferentes coeficientes de dispersión	43
5.4. Distribuciones de temperatura con flux superficial constante	44
5.5. Distribuciones de temperatura con flux superficial discontinuo	46
5.6. Distribuciones de temperatura con flux superficial oscilatorio	48
5.7. Distribuciones de temperatura con fuentes de energía oscilatorias	50
5.8. Distribuciones de temperatura con fuentes de energía oscilatorias a dife- rentes frecuencias	50
5.9. Distribuciones de temperatura con medio de enfriamiento	53
5.10. Distribuciones de temperatura para diferentes temperaturas del medio de enfriamiento	54
6.1. Distribuciones de temperatura adiabáticas con relajamiento para una fuente de calentamiento espacial constante respecto al tiempo	57
6.2. Distribuciones de temperatura adiabáticas con relajamiento para una fuente de calentamiento espacial oscilatoria	58
6.3. Distribuciones de temperatura con relajamiento y flux superficial cons- tante	59
6.4. Distribuciones de temperatura con relajamiento y flux superficial discon- tinuo	61
6.5. Distribuciones de temperatura con relajamiento y fuentes de energía osci- latorias	63
6.6. Distribuciones de temperatura con relajamiento para diferentes tempe- raturas del medio de enfriamiento	64

INTRODUCCIÓN

La complejidad de los procesos de transferencia de masa, energía y cantidad de movimiento que se llevan a cabo en los tejidos ha hecho evidente la necesidad de realizar investigaciones multidisciplinarias, en las que se integren conceptos fundamentales de la ingeniería y de la física con las ciencias biológicas. De tal forma que se desarrollen modelos matemáticos capaces de representar adecuadamente los procesos biológicos de transferencia, y que contribuyan a entender mejor la manera como trabaja la naturaleza.

Existen muchas áreas biológicas en las que la aplicación de los principios de los fenómenos de transporte puede llevar a resultados interesantes. Tomar en cuenta la interacción de los procesos de transferencia de energía y de masa con la biología y la medicina resulta conveniente para el desarrollo de nuevos diagnósticos y terapias, con el fin de mejorar la salud [1]. Por ejemplo, estudiar la mecánica de los biofluidos permitiría analizar padecimientos orgánicos desde un punto de vista diferente al clínico, logrando así una participación conjunta en el diseño de dispositivos para aplicaciones médicas específicas. Además, se puede aprender mucho sobre varias enfermedades a través de un estudio detallado del flujo sanguíneo o de la dinámica del proceso de respiración en los pulmones [2].

La aplicación de la bioingeniería de procesos de transporte no es sencilla, por el contrario presenta grandes retos. En el caso del acoplamiento de los fenómenos de transporte con la fisiología se requiere realizar estudios en gran variedad de escalas espaciales y temporales, utilizar un gran número de variables genéticas y

bioquímicas en sistemas con geometrías complejas, así como considerar flujos en varias fases y dimensiones que incorporen las funciones vitales. Debido a que los efectos moleculares gobiernan los macrofenómenos de biotransporte, se necesita analizar los experimentos a lo largo de todo el espectro de escalas de longitud, con el objeto de desarrollar conocimientos que integren los procesos de biotransporte y sus consecuencias desde las moléculas, células, órganos y hasta los sistemas, además de las interacciones entre ellos.

Otro de los retos consiste en modificar los modelos constitutivos reológicos clásicos, incluyendo términos que contengan información sobre la naturaleza no newtoniana de algunos biofluidos y sobre las características y propiedades particulares de los diferentes tipos de materia biológica. Una vez que dichas representaciones puedan describir la dinámica de los fenómenos de transporte y la cinética de las reacciones químicas que ocurren dentro de los conjuntos celulares, se podrán utilizar para pronosticar resultados experimentales verosímiles.

En general, es necesario desarrollar modelos fenomenológicos que incluyan factores biológicos, físicos y bioquímicos de los diferentes procesos, tanto en situaciones patológicas como en estados vitales normales. También se requiere diseñar instrumentación no invasiva para la detección y la medición de los fenómenos como el flujo sanguíneo y el flux de energía, además del desarrollo de nuevos tipos de instrumentación que puedan ser usados a lo largo de numerosos campos. Es por esto que el análisis de transporte en tejidos vivos servirá para innovar y optimizar los diagnósticos y las intervenciones terapéuticas [1].

Concretamente, en el caso de la transferencia de energía en tejidos vivos, un modelo biotérmico serviría para mejorar terapias médicas en las que fuese preciso manipular la temperatura de determinado tejido. Este proceso de transferencia es complicado ya que involucra multiplicidad de mecanismos como: conducción de

energía en los tejidos, transferencia por convección debida a la perfusión¹ de la sangre de las arterias y venas a través de los poros del tejido, generación de calor metabólico, evaporación e interacciones externas como radiación [4].

Los modelos mecánicos biotérmicos desarrollados para los procesos de transferencia de energía, deben ser adecuados para describir comportamientos fisiológicos como la respuesta del flujo de perfusión de la sangre en condiciones normales y patológicas, para contribuir en el diseño de métodos para la aplicación de dosis para terapias térmicas con objetivos específicos dentro de las células y los tejidos, y para determinar el tiempo real de las respuestas térmicas de procesos de energía específicos como las cirugías oculares [1].

Un estudio térmico de los tejidos también ayudaría a estimar el daño en caso de accidentes como quemaduras por vapor a altas temperaturas, o bien, a predecir patologías. Cualquier cambio en los factores fisiológicos o ambientales puede inducir variaciones en la temperatura y el flux de energía en la superficie de la piel, reflejando el estado de salud del cuerpo humano [5]. Por ejemplo, un tumor muy vascularizado en la piel puede llevar a un aumento en el flujo local de sangre, y por ende, a un incremento en la temperatura de la piel; de la misma manera una inflamación induce alta actividad metabólica, lo que también puede incrementar la temperatura de la piel.

Por otro lado, una trombosis o esclerosis vascular en la circulación periférica disminuye el flujo de sangre hacia la piel, resultando en bajas temperaturas superficiales. En caso de quemaduras, también se presentan bajas temperaturas en la piel debido al flujo insuficiente de sangre. En general, una temperatura o flux de energía anormal en la piel puede ser índice de circulación periférica irregular. Esta información resultaría muy útil para diagnósticos clínicos [5].

¹ El proceso de perfusión es la entrega de nutrientes de la sangre arterial a la red de vasos capilares que alimentan al tejido biológico [3].

Algunas de las investigaciones realizadas hasta el momento están basadas en la teoría clásica de difusión de energía [6, 7, 8, 9]. La utilización de la ecuación de Fourier es válida en muchas situaciones, sin embargo, para algunos procesos transitorios o escalas muy pequeñas es necesario tomar en cuenta el retraso que existe entre el gradiente de temperaturas y el flux de energía [10, 11]. Por ello, en este trabajo se estudian diferentes casos de transferencia de energía en tejidos, modificando la ecuación biológica de transferencia de energía (Pennes 1948) con el modelo de Maxwell - Cattaneo (1958), de manera que se pueda estimar el tiempo real de las respuestas fisiológicas ante una perturbación térmica.

En el siguiente capítulo se exponen de manera general los procesos de transferencia en los tejidos del cuerpo humano y los diferentes métodos que se pueden utilizar para la medición de la temperatura. En el capítulo 3 se presentan las ecuaciones de transferencia biológica de energía y se comentan sus limitaciones. Asimismo, se describen los modelos seleccionados para la descripción del flux de energía.

El sistema de estudio se define en el capítulo 4, se muestran también las ecuaciones que se utilizaron para este proyecto y las consideraciones que se realizaron para la simplificación del mismo. En esta sección se incluye la adimensionalización del sistema y los métodos de solución aplicados.

Los resultados se encuentran en los capítulos 5 y 6. Específicamente en el capítulo 5 se presentan las distribuciones de temperatura calculadas utilizando la ley de Fourier, y se introducen las diferentes pruebas dinámicas que se impusieron al sistema. Por otra parte, el capítulo 6 contiene las distribuciones de temperatura con el término de relajación, así como el análisis y la comparación de la utilización de la ecuación constitutiva de Maxwell-Cattaneo en lugar de la teoría clásica.

Objetivo General

Seleccionar un modelo de transferencia de energía capaz de predecir el tiempo real de respuesta de los tejidos biológicos ante distintas perturbaciones térmicas, que se introducirán en la ecuación de transporte a través de diversas pruebas dinámicas.

Objetivos Particulares

- Comparar el uso de modelos clásicos (Ley de Fourier) con el de ecuaciones constitutivas como el modelo de Maxwell-Cattaneo, para describir el flux de energía en casos específicos de transferencia de energía en tejidos epiteliales humanos.
- Analizar la influencia de la inclusión de términos de relajación térmica del tejido epitelial, en las ecuaciones de transporte para diferentes situaciones de transferencia de energía.
- Observar el efecto de la variación de las propiedades físicas de los conjuntos celulares humanos sobre la forma en la que se transfiere la energía en los tejidos epiteliales, a través de la interpretación de las distribuciones de temperatura resultantes.
- Estudiar las diferentes respuestas térmicas de los tejidos epiteliales, obtenidas tras la aplicación de distintas pruebas dinámicas incluidas en las ecuaciones de transporte.

TRANSFERENCIA DE ENERGÍA EN TEJIDOS

Los tejidos son un conjunto de células con funciones específicas. Se pueden dividir en cuatro grupos principales: epitelial¹, conectivo², muscular y nervioso [12]. La temperatura de los tejidos está asociada con la forma en la que se transfiere la energía dentro de estos aglomerados celulares, misma que depende de factores fisiológicos y del medio circundante.

A continuación se describe el proceso de transferencia de energía en el cuerpo humano y se mencionan algunos de los métodos más comunes para cuantificar la temperatura de los tejidos.

2.1. Transferencia de Energía en el Cuerpo Humano

La temperatura corporal está controlada por diferentes procesos de transferencia de energía relacionados con el flujo sanguíneo, las actividades metabólicas y la interacción con el exterior. La mayor parte de la energía producida por el cuerpo se genera en los órganos. Ésta se transfiere a través de los vasos sanguíneos desde tejidos profundos hasta tejidos subcutáneos y se distribuye a lo largo de la piel, donde se lleva a cabo el intercambio con el ambiente. La capa de grasa, la piel y los tejidos subcutáneos actúan como aislantes y minimizan las pérdidas de energía, permitiendo así que la temperatura central interna se mantenga constante [13].

¹ Es la capa exterior de la piel, órganos y vasos sanguíneos. En este tipo de tejido las células están fuertemente unidas y organizadas en láminas [12].

² Se encuentra por debajo de la capa de tejido epitelial y puede contener fibras que forman fuertes mallas [12].

Si se considera que un individuo se encuentra relativamente aislado dentro de una habitación en la que no hay corrientes de aire o cambios repentinos de temperatura, como se ilustra en la figura 2.1, se observa que la transferencia de energía a través de la piel se da en su mayoría por radiación (rayos infrarrojos), de forma muy limitada por conducción (contacto directo con otros objetos) y todavía en menor cantidad por convección (debida al movimiento de las corrientes de aire adyacentes a la piel). A través de estos tres mecanismos un cuerpo puede intercambiar energía con su entorno según sea la dirección del gradiente de temperatura. Existen procesos de transferencia que únicamente sirven para liberar energía, tal es el caso de la evaporación (por cada kilogramo de agua que se evapora de la superficie corporal, por sudoración o por respiración, se liberan 580 kcal ; esto se traduce en una pérdida continua de energía de 0.012 a 0.016 kcal/h), o bien mecanismos como el metabolismo, que funciona como generador de energía.

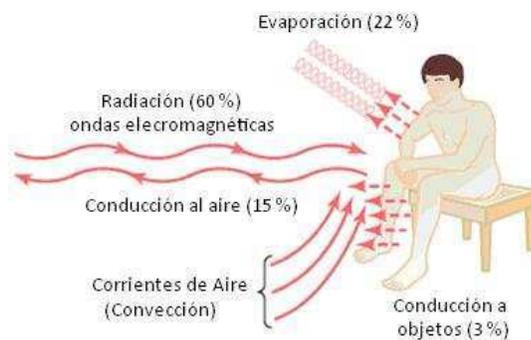


Figura 2.1: Ejemplificación de los mecanismos de transferencia de energía del cuerpo humano con el medio ambiente [13].

La mayor parte de la energía generada por procesos metabólicos se convierte en energía interna necesaria para realizar funciones vitales, o bien se disipa como calor para conservar el equilibrio térmico. El metabolismo basal comprende la cantidad mínima de energía para que el cuerpo funcione adecuadamente. Esta cantidad puede variar considerablemente de acuerdo con los siguientes factores [12, 13]:

- Alimentación: después de la ingestión de alimentos el metabolismo aumenta debido a las reacciones asociadas con la digestión, absorción y almacenamiento. El ingerir proteínas aumenta particularmente el nivel de metabolismo ya que éstas se degradan rápidamente para la producción de aminoácidos.
- Ejercicio: la actividad física constante puede aumentar el valor del metabolismo promedio 2000 veces. La realización de ejercicio extremo puede aumentar aproximadamente 50 veces la producción de energía en cuestión de segundos, lo cual puede ser perjudicial para la salud.
- Hormonas: existen varias hormonas cuya función es mantener un ritmo metabólico estable. En general la generación de éstas puede disminuir drásticamente por depresión, o bien aumentar por un estado de ansiedad o enojo. Las hormonas sexuales y de crecimiento también estimulan el metabolismo.
- Edad y sexo: la producción de calor metabólico disminuye con el paso del tiempo. El metabolismo de un niño es casi dos veces mayor que el de una persona adulta, ya que los infantes requieren más energía por estar en crecimiento continuo. En general, el cuerpo de un hombre requiere mayor energía que el de una mujer, mas una mujer embarazada presenta un aumento en el metabolismo.

En la figura 2.2 se muestra una comparación de los niveles de metabolismo basal para hombres y mujeres a través de diferentes etapas de la vida.

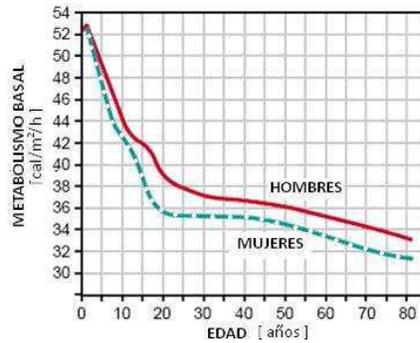


Figura 2.2: Cambio de los valores del metabolismo basal con respecto al tiempo para diferentes sexos. [13].

- Otros factores: la fiebre provoca un aumento de 120% en la actividad metabólica por cada 10 °C que se incrementan sobre la temperatura corporal. Por otro lado, el sueño, climas cálidos y una mala alimentación son factores que tienden a deprimir el metabolismo.

Por tanto, metabolismos locales e intercambios de energía entre la piel y el medio son determinantes para mantener un valor de temperatura estable.

El flujo de la sangre es un mecanismo muy eficaz de transferencia de energía desde el centro del cuerpo hasta la superficie de la piel. Un flujo sanguíneo elevado hace que la energía se distribuya con gran eficacia, mientras que la reducción de dicho flujo disminuye la conducción. El proceso de perfusión consiste en el transporte de nutrientes de la sangre arterial a la red de vasos capilares que alimentan al tejido biológico. La eficiencia de la entrega de oxígeno a los tejidos asegura que se satisfagan las necesidades energéticas de las células. Este gas se difunde desde los pulmones a los vasos sanguíneos y posteriormente se transporta

por convección a través de la sangre hacia los tejidos, en donde participa en las reacciones metabólicas que producen energía para las células [3].

La perfusión del tejido o flujo sanguíneo en capilares es una propiedad fisiológica muy importante, ya que puede servir como índice para conocer el verdadero estado de salud de los tejidos. Dado que este flujo es el responsable del transporte de nutrientes y productos de desecho en el cuerpo, una perfusión irregular podría provocar fuertes daños en los tejidos. Por ejemplo, si se presentan niveles de irrigación anormales dentro de los órganos podría generarse un mal funcionamiento que ocasione padecimientos como: sepsis, cirrosis hepática, problemas cardiacos, e incluso muerte de las células.

Muchas enfermedades se pueden identificar por alteraciones en la perfusión de la sangre. Algunas intervenciones terapéuticas consisten en aumentar o disminuir el flujo sanguíneo en determinado tejido. Por esto, es muy útil conocer el nivel de la perfusión de la sangre en determinado tejido [14]. Existen fármacos para modificar los niveles de perfusión, sin embargo, su uso está limitado por la falta de métodos no invasivos que puedan medir confiablemente el flujo volumétrico.

La piel es un tejido que está fuertemente perfundido, ya que contiene gran cantidad de vasos sanguíneos y es un órgano fundamental en el proceso de termorregulación. Es por esto que la perfusión de la sangre afecta notablemente la distribución local de temperatura y es crítica para un gran número de procesos fisiológicos. El flujo volumétrico puede variar entre diferentes tejidos, órganos del cuerpo y patologías, y depende de factores como la actividad física, estímulos fisiológicos y condiciones ambientales.

2.2. Medición de la Temperatura en el Cuerpo Humano

La temperatura corporal varía con la actividad física, metabólica y con valores extremos de temperatura en el ambiente. Cuando se acumula energía excesiva en el cuerpo, la temperatura puede aumentar temporalmente hasta 38 ó 40 °C; por el contrario, cuando el cuerpo se expone al frío, la temperatura puede reducirse a valores por debajo de 36.5 °C, lo que activa la vasoconstricción. Se ha demostrado experimentalmente que la temperatura de los seres humanos cambia aproximadamente 1 °C por cada 20 ó 30 °C de variación en la temperatura ambiental [13], lo que indica una conductividad térmica muy pequeña. Los métodos para medir la temperatura corporal se pueden clasificar *grosso modo* en invasivos y no invasivos [15].

Los métodos invasivos trabajan bajo el principio de equilibrio térmico entre dos cuerpos. Por ejemplo, al introducir algún tipo de sensor dentro de las cavidades corporales (como axilas y boca) para determinar la temperatura central del cuerpo. Dependiendo del tipo de sensor³ el equilibrio térmico se puede alcanzar en algunos minutos. Sin embargo, para medir la temperatura dentro del tejido se requiere perforar algún punto del conjunto celular, para ello, es necesario conocer el tipo de tejido que se quiere explorar y seleccionar correctamente la sección en la que se introducirá el sensor. Entre las desventajas inherentes a este método están el dolor que la punción causa, el riesgo de infección por la incisión, el número limitado de puntos que se pueden penetrar y los errores de medición que las emisiones de ondas electromagnéticas del cuerpo pueden provocar.

Existen termómetros que por su tamaño permiten medir temperaturas en tejidos muy profundos; no obstante, para que las mediciones puedan ser consideradas válidas, se debe inducir un estado adiabático. Esto se logra cubriendo la piel con

³ Termómetro de mercurio o alcohol, termistores, termopares, dispositivos con resistencias de platino y termómetros de fibra óptica con sustancias fluorescentes, entre otros.

materiales aislantes hasta que se alcanza el equilibrio térmico con la superficie. Experimentalmente se ha visto que los resultados obtenidos son coherentes con la temperatura central, pero es muy difícil conocer el punto correcto donde realizar la medición [15].

Los métodos no invasivos comprenden técnicas para determinar las temperaturas subcutáneas sin necesidad de perforar el tejido. Se clasifican en activos y pasivos. En los métodos activos se irradian ondas electromagnéticas o de ultrasonido al cuerpo. La energía puede ser reflejada por los tejidos o atravesarlos, y es modulada a su paso por la propia temperatura del tejido. Las distribuciones de temperatura se determinan al utilizar la información de los cambios en las ondas.

Pese a que en estas técnicas se está emitiendo energía al tejido, no se consideran invasivas ya que la energía que penetra en el tejido es muy débil. Una de sus ventajas es que la información obtenida es suficiente para estimar muy bien los cambios temporales de temperatura; sin embargo, sólo son útiles para determinar distribuciones por pequeños periodos. Además, los resultados son fácilmente alterados por pequeñas variaciones en las propiedades físicas y químicas de los diferentes tejidos.

Por el contrario, en los métodos pasivos se analiza la energía que el cuerpo irradia y con esta información se hace un balance para estimar la temperatura dentro del cuerpo desde el centro hasta la superficie. Estos métodos sí son en su totalidad no invasivos, mas requieren de análisis matemáticos muy complejos. Aunado a esto, deben ser lo suficientemente eficientes para detectar señales muy débiles de las ondas que emite el cuerpo, mismas que a su vez son atenuadas por los tejidos. Pese a que su aplicación no permite obtener distribuciones de temperatura en toda el área del tejido, los resultados están referidos a valores de temperatura estacionarios.

En la tabla 2.1 se resumen algunos de los métodos de medición no invasivos más comunes [15].

Tabla 2.1: Métodos no invasivos de medición de temperatura

Tipo de método	Fenómeno medido	Propiedad física dependiente de la temperatura
Activo	Transmisión o reflexión de microondas	Constante dieléctrica, conductividad térmica.
	Transmisión de rayos X	Densidad electrónica
	Resonancia magnética	Spin, equilibrio térmico, magnetización.
	Ultrasonido	Velocidad del sonido
Pasivo	Radiación de microondas	Densidad de energía
	Radiación de ultrasonido	
	Equilibrio térmico	

Algunos métodos no invasivos de termometría (microondas y ultrasonido) son más económicos y seguros. El diagnóstico obtenido por estas técnicas al medir temperaturas superficiales es atractivo si se logran establecer las correlaciones matemáticas adecuadas [5]. Uno de los métodos más utilizados es la radiometría de microondas, cuyo objetivo es determinar la temperatura subcutánea tras un análisis del espectro de ondas irradiadas de ultrasonido. La penetración de la onda depende de la frecuencia; conforme disminuye la frecuencia de las ondas emitidas, la longitud de onda aumenta y, por tanto, puede penetrar en mayores profundidades de tejido. Consecuentemente a mayores frecuencias, se alcanzarán profundidades menores.

Por ejemplo, a una frecuencia de 4.6 GHz la penetración en el tejido es de 1 cm o menos. En este punto se puede considerar que las temperaturas del tejido son simétricas y uniformes⁴. Si ahora se utiliza una frecuencia de 1.7 GHz la penetración promedio es de 2.4 cm [15].

Las estimaciones de los estados térmicos dentro del tejido permiten cuantificar propiedades fisiológicas. Por ejemplo, al insertar una sonda que mida la temperatura del tejido, se puede estimar el valor de la perfusión de la sangre. Esto se realiza tomando diferentes medidas basadas en un valor supuesto de perfusión. Una vez que las temperaturas predichas son lo suficientemente cercanas a las medidas, se puede tomar como correcto el valor de la perfusión inicialmente asignado. En una evaluación no invasiva de los estados térmicos de los cuerpos biológicos, sólo se pueden obtener datos dinámicos de la superficie de la piel, mismos que después pueden ser utilizados para inferir información fisiológica de los tejidos [5].

⁴ Al utilizar menores frecuencias y aumentar la profundidad de penetración se ha observado que la distribución de temperaturas deja de ser simétrica.

ECUACIÓN BIOLÓGICA DE TRANSFERENCIA DE ENERGÍA

La respuesta térmica de los sistemas biológicos es función de varios factores como la rapidez de perfusión, la cantidad de agua, metabolismos locales y la anatomía vascular; además de las propiedades físicas de los tejidos (capacidad calorífica, conductividad térmica y densidad) que dependen de la temperatura [14]. En esta sección se describen los modelos que comúnmente se utilizan para describir la transferencia de energía en sistemas biológicos.

3.1. Ecuación Biológica de Transferencia de Energía

La transferencia de energía en sistemas biológicos usualmente se expresa con la ecuación biológica de energía desarrollada por Pennes en 1948, quien realizó un trabajo de investigación teórico y experimental sobre la distribución de temperatura en el antebrazo de un grupo de personas [16]. El modelo matemático que derivó consiste en un balance de energía en el tejido que incorpora los efectos del metabolismo y de la perfusión de la sangre. Su forma simplificada está dada por [17]:

$$\rho_m c_{p_m} \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{q} + w_b + Q_m \quad (3.1)$$

donde T es la temperatura local del tejido, c_{p_m} el calor específico del tejido, ρ_m la densidad del tejido, \underline{q} el flux de energía, Q_m la generación de calor dentro del tejido atribuida a la actividad metabólica y w_b la perfusión de la sangre en el

tejido, que a su vez está dada por:

$$w_b = \rho_b c_{pb} \omega_b (T_a - T) , \quad (3.2)$$

donde ρ_b es la densidad de la sangre, c_{pb} el calor específico de la sangre, ω_b el flujo volumétrico de perfusión de la sangre y T_a la temperatura de la sangre en las arterias.

En la ecuación (3.1) las propiedades del tejido sólo están presentes en los términos correspondientes al mecanismo de conducción, mientras que las propiedades de la sangre sólo se toman en cuenta en el término de perfusión. Este término varía de forma lineal con la diferencia entre la temperatura de la sangre en las arterias T_a y la temperatura del tejido T en un punto dado. Asimismo, se considera que la generación metabólica Q_m se distribuye de forma homogénea a través del tejido.

El modelo establece que la temperatura T_a es uniforme en todo el sistema. Supone que la perfusión es homogénea e isotrópica y que el equilibrio térmico ocurre en los vasos capilares, esto es: la sangre entra a los capilares a la temperatura T_a donde se lleva a cabo un intercambio de energía hasta que se alcanza el equilibrio térmico con la temperatura del tejido T . Durante este intercambio no hay transferencia de energía ni antes ni después de que la sangre pase a través de los capilares, de manera que la temperatura de la sangre en las venas es la misma que en el tejido local en todo momento. El intercambio total de energía entre la sangre y el tejido es directamente proporcional a la rapidez de perfusión y está descrito en términos del cambio de energía sensible de la sangre [14].

La ecuación biológica de transferencia de energía (ecuación 3.1) ha sido utilizada en gran variedad de trabajos de investigaciones relacionados con fenómenos de transferencia de energía [6, 7, 8, 9] y ha sido encontrada muy útil por su simplicidad. A pesar de eso, se ha demostrado que algunas de las suposiciones del modelo original no son enteramente válidas.

En primera instancia, no incorpora información referente ni a la forma geométrica ni a la morfología vascular que varía considerablemente entre los diferentes órganos del cuerpo, tampoco incluye términos que describan el movimiento de las arterias y venas en contracorriente. Baish [18] presentó un nuevo modelo de transferencia biológica de energía en los tejidos. En dicho trabajo se ilustra la dependencia de la distribución de temperatura con el flujo y la geometría vascular, y se demuestra que el modelo de Pennes predice adecuadamente la temperatura media excepto cuando los pares de arterias y venas están muy cercanos.

Por otro lado, la localización del equilibrio térmico en los capilares es errónea. Se puede demostrar que no hay transferencia de energía significativa entre la sangre de los capilares y la del tejido, ya que la temperatura de la sangre en los vasos precapilares y los postcapilares es muy cercana a la temperatura del tejido que la rodea. Dado que el intercambio de energía ocurre predominantemente entre las arteriolas terminales y las vénulas, la sangre ya debe estar en equilibrio antes de ingresar a los capilares [19].

La suposición de que la perfusión es uniforme puede llevar a sobreestimar temperaturas. Al considerar que la contribución de la perfusión es una función escalar, se desprecia la dirección de la convección [14]. El análisis de los efectos de la perfusión de la sangre en la distribución interna de temperatura de un tejido vivo permanece como un tema de investigación activo, entre sus principales objetivos se encuentra el desarrollo de modelos avanzados que describan la transferencia de energía tomando en cuenta la convección de la sangre dentro de los vasos sanguíneos en los tejidos.

Wissler [17] reevaluó el trabajo original de Pennes y manifestó que muchas de las críticas del modelo no están justificadas. Demostró que los resultados predichos por el modelo son coherentes con los datos experimentales y concluyó que la ecuación de transferencia biológica de energía es un punto de partida válido para investigaciones teóricas.

3.2. Ecuaciones Constitutivas para el Flux de Energía

Los problemas de transferencia de energía en sistemas biológicos son comúnmente descritos utilizando la ley de Fourier [20]:

$$\underline{q} = -k\nabla T \quad (3.3)$$

en donde se establece que el flux de energía \underline{q} es directamente proporcional al gradiente de temperaturas ∇T y k es la conductividad térmica del tejido¹. La aplicación de esta teoría está limitada a ciertos sistemas, debido a que predice que las perturbaciones térmicas se propagan con una velocidad infinita en el medio. Esta suposición es físicamente incorrecta y cuando se está trabajando con escalas temporales y espaciales muy pequeñas, temperaturas criogénicas o grandes flux de energía puede llevar a grandes errores [11]. Por ejemplo, en procesos en los que se aplican impulsos de rayos láser a altas potencias [21, 22], para estudiar problemas de criopreservación [10] o en casos de quemaduras puntuales por llamaradas o flujos de vapor [7].

¹ Como el medio de transferencia es isotrópico, la conductividad térmica es una propiedad escalar. En caso de que se estuviera trabajando con un sistema anisotrópico esta propiedad dependería de la dirección de transferencia y sería de orden tensorial.

Esta es una de las razones por la que, para estos sistemas, se recomienda describir el flux de energía a través de modelos más elaborados como el de Maxwell-Cattaneo (1958) [10, 11]:

$$\underline{q}(\underline{r}, t + \lambda) = \underline{q}(\underline{r}, t) + \lambda \frac{\partial \underline{q}(\underline{r}, t)}{\partial t} = -k \nabla T(\underline{r}, t) . \quad (3.4)$$

En la ecuación (3.4) se incluye la dependencia del flux con el tiempo, este término está ponderado por un tiempo característico del sistema λ conocido como tiempo de relajación térmico, que está dado por el cociente entre el coeficiente de difusión térmica α y la velocidad térmica de propagación en el medio C , esto es:

$$\lambda = \frac{\alpha}{C^2} .$$

Es interesante notar que cuando $\lambda \rightarrow 0$ la ecuación (3.4) se reduce a la ley de Fourier clásica (ecuación 3.3).

Al introducir el modelo de Maxwell-Cattaneo en la ecuación de transferencia biológica de energía (ecuación 3.1) se obtiene una ecuación de tipo hiperbólico y se corrige la predicción de velocidades de propagación infinitas. Con este modelo se describe de manera más adecuada el tiempo de respuesta real del medio ante una perturbación térmica.

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE TRANSFERENCIA

En este proyecto se analiza la respuesta de los tejidos biológicos ante perturbaciones térmicas. Para ello, se plantearon diferentes situaciones dinámicas de transferencia de energía, haciendo uso tanto de la teoría clásica para describir el flux de energía (ley de Fourier) como del modelo de Maxwell-Cattaneo, que incorpora los efectos de relajamiento del tejido.

A continuación se describe el sistema de estudio utilizado y las consideraciones realizadas para obtener el modelo de transferencia de energía. Asimismo, se plantean las soluciones de las ecuaciones y se describe la secuencia aplicada de cálculo.

4.1. Características del Sistema de Estudio

El sistema de estudio seleccionado consiste en la representación de una pequeña sección de tejido epitelial en la que se analiza la aplicación de diferentes pruebas dinámicas, observando los efectos provocados en las distribuciones de temperatura calculadas de la superficie al centro del tejido (ver figura 4.1). La profundidad de la sección no debe ser mayor a 3 *cm* para poder garantizar que la temperatura central tisular permanezca constante y que las distribuciones de temperatura del tejido sean simétricas [6, 15, 16].

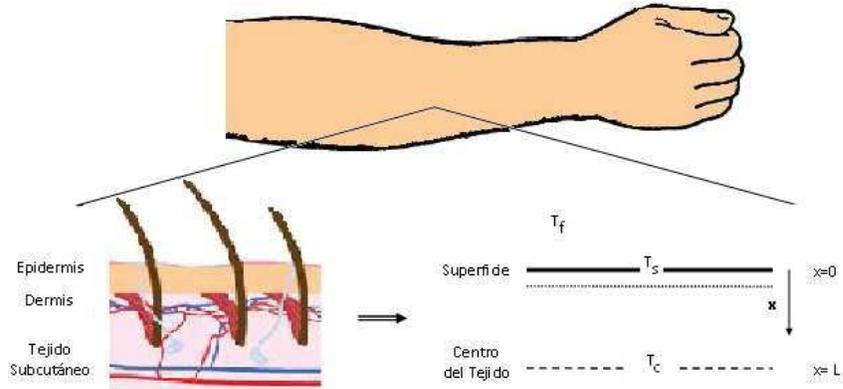


Figura 4.1: Sistema de Estudio: representación de una sección de tejido epitelial.

Para tal estudio, se utilizó la ecuación biológica de transferencia de energía (ecuación 3.1) escrita para una sola dimensión:

$$\rho_m c_{pm} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \omega_b \rho_b c_{pb} [T_a - T(x, t)] + Q_m + Q_r(x, t) \quad (4.1)$$

donde x es la variable espacial y la dirección del gradiente de temperatura, t es la variable temporal, Q_m es el calor metabólico y representa la fuente de energía en estado estacionario y Q_r es la fuente de energía debida al calentamiento espacial transitorio.

En el modelo simplificado se considera que las propiedades del tejido y de la sangre no varían con respecto al tiempo o la posición y que la perfusión de la sangre es constante. La suposición anterior permite obtener resultados bastante aceptables para describir la fisiología del tejido [6]; un modelo más detallado requeriría información sobre la arquitectura vascular de los tejidos, la circulación de la sangre [8] y la influencia de la perfusión sobre la variación del intercambio energético tisular [5].

Respecto a la temperatura de la sangre en las arterias y en el centro del tejido, se supone que están en equilibrio térmico y que se mantienen constantes, esto es: $T_a = T_c$. La temperatura superficial T_s está determinada tanto por los procesos de transferencia dentro del tejido, como por el intercambio con el medio ambiente; en donde la temperatura del aire T_f y el valor del coeficiente convectivo h_f también son constantes.

La temperatura máxima $T_{m\acute{a}x}$ es la mayor temperatura que los tejidos soportan antes de presentar algún tipo de daño. Existe una expresión para estimar el daño irreversible asociado con las quemaduras de las células, que está escrita en términos de una constante de Arrhenius [9]:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = Ae^{-\frac{\Delta E}{RT(x,t)}}$$

donde A es la constante de Arrhenius que describe la transición de una molécula en estado basal a un estado desnaturalizado, ΔE es la energía de activación efectiva, R la constante universal de los gases y ε es el índice adimensional que cuantifica el daño térmico acumulado y puede tomar valores entre 0 y 1, siendo este último señal de necrosis¹.

Como se mencionó anteriormente, el metabolismo cambia dependiendo de los requerimientos energéticos de los tejidos, entre otros factores. Es por esto que el valor del calor metabólico utilizado en este proyecto comprende un intervalo limitado por los valores reportados en la literatura para metabolismos basales. Aunado a esto, de acuerdo con los casos expuestos en [8, 23], se examinó la posibilidad de que dicho término fuera función de la posición, es decir: $Q_m = Q_m(x)$.

¹ Es importante aclarar que en este trabajo no se cuantificó el daño presentado en los tejidos, debido a que el intervalo de temperatura utilizado no sobrepasa, en gran medida, las temperaturas que el tejido epitelial humano puede soportar antes de dañarse irreversiblemente.

Los valores de las propiedades descritas anteriormente se muestran en la tabla 4.1.

Tabla 4.1: Valores típicos de las propiedades de los tejidos epiteliales humanos.

PROPIEDAD	SECCIÓN	SÍMBOLO	UNIDADES	VALOR	
Espesor	Tejido	L	m	0.003	[6]
Calor específico	Tejido Sangre	c_{pm}	$\frac{J}{kg \text{ } ^\circ C}$	3300	[7, 9]
		c_{pb}		3770	[7, 8, 9]
Densidad	Tejido Sangre	ρ_m	$\frac{kg}{m^3}$	1200	[7, 9]
		ρ_b		1060	[7, 8, 9]
Perfusión de la sangre	Tejido	ω_b	$\frac{m^3}{s \text{ } m^3}$	0.00125	[7, 9]
				0.00101 – 0.00548	[8]
				0.0005 – 0.002	[5, 6]
Conductividad térmica	Tejido	k	$\frac{W}{m \text{ } ^\circ C}$	0.235	[7, 9]
Coeficiente convectivo	Aparente	h_o	$\frac{W}{m^2 \text{ } ^\circ C}$	10	[5, 6]
	Total	h_f		0.5 – 8.3	[8]
Temperatura	Arterial Central Superficial Máxima Aire	T_a	$^\circ C$	100	[5, 6]
		T_c		113 – 220	[8]
		T_s		37	[6, 7, 9]
		$T_{máx}$		37	[6, 7, 9]
		T_f		36.5	[13]
Calor metabólico	Basal	Q_m	$\frac{W}{m^3}$	42 – 45	[7, 8, 9]
				25	[6]
Calor metabólico	Basal	Q_m	$\frac{W}{m^3}$	368	[8]
				420 – 4200	[5]

4.2. Planteamiento del Problema

4.2.1. Problema Clásico

Como se mencionó en la sección anterior, el problema que se estudiará está descrito por la ecuación (4.1):

$$\rho_m c_{pm} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \omega_b \rho_b c_{pb} [T_a - T(x, t)] + Q_m + Q_r(x, t)$$

que está sujeta a las siguientes condiciones de frontera para $t > 0$:

$$C.F.1 : \quad x = 0, \quad -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s \quad (4.2)$$

$$C.F.2 : \quad x = L, \quad T(x = L, t) = T_c \quad (4.3)$$

En la primera condición de frontera (ecuación 4.2) se especifica la forma del gradiente de temperatura entre la superficie de la piel y el aire, se puede observar que es proporcional a un flux de energía en la superficie denominado q_s . La segunda condición de frontera (ecuación 4.3) garantiza que la temperatura en el centro del tejido permanezca constante.

La correspondiente condición inicial es:

$$C.I.1 : \quad t = 0 \quad \forall \quad x, \quad T(x, t = 0) = T_o(x) \quad (4.4)$$

donde $T_o(x)$ es la temperatura del estado estacionario.

La distribución de temperatura del tejido se puede obtener separando el problema en la parte estacionaria y la parte transitoria. Para ello, se propone una solución de la forma [24]:

$$T(x, t) = T_o(x) + T_t(x, t) e^{-\frac{\omega_b \rho_b c_{pb}}{\rho_m c_{pm}} t} \quad (4.5)$$

donde $T_t(x, t)$ representa la solución de la parte transitoria.

La ecuación diferencial para la temperatura del estado estacionario se puede obtener reduciendo directamente los términos temporales de la ecuación (4.1), de lo que resulta:

$$k \frac{d^2 T_o(x)}{dx^2} + \omega_b \rho_b c_{pb} [T_a - T_o(x)] + Q_m = 0 \quad (4.6)$$

cuyas condiciones de frontera son:

$$C.F.1 : \quad x = 0, \quad -k \left. \frac{dT_o(x)}{dx} \right|_{x=0} = h_o [T_f - T_{o_s}] \quad (4.7)$$

$$C.F.2 : \quad x = L, \quad T_o(x = L) = T_c \quad (4.8)$$

De acuerdo con la primera condición de frontera (ecuación 4.7) el gradiente de temperatura en la superficie ($x = 0$) es proporcional al flux de energía convectivo en estado basal, donde la temperatura superficial del estado estacionario es: $T_{o_s} = T_o(x = 0)$.

Para obtener la ecuación diferencial de la temperatura transitoria la ecuación (4.1) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + W_b [T_a - T(x, t)] + \frac{1}{\rho_m c_{pm}} \{Q_m + Q_r(x, t)\} \quad (4.9)$$

donde α es el coeficiente de difusión térmica y W_b es el término que representa la perfusión de la sangre en el tejido, y cada uno está dado por:

$$\alpha = \frac{k}{\rho_m c_{pm}} \quad (4.10)$$

$$W_b = \omega_b \rho c_p \quad (4.11)$$

La densidad relativa $\rho = \frac{\rho_b}{\rho_m}$ y el calor específico relativo $c_p = \frac{c_{pb}}{c_{pm}}$ representan la relación entre las propiedades de la sangre y del tejido.

Al sustituir (4.5) en (4.9), se obtiene que la ecuación diferencial de la parte transitoria es:

$$\frac{\partial T_t(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T_t(x, t)}{\partial x^2} + \frac{Q_r(x, t)}{\rho_m c_{pm}} e^{W_b t} \quad (4.12)$$

cuyas condiciones de frontera para $t > 0$ son:

$$C.F.1: \quad x = 0, \quad -k \frac{\partial T_t(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = F(t) \quad (4.13)$$

$$C.F.2: \quad x = L, \quad T_t(x = L, t) = 0 \quad (4.14)$$

donde $T_{t_s} = T_t(x = 0, t)$ y $F(t)$ tiene la siguiente forma:

$$F(t) = \left[k \frac{dT_o(x)}{dx} \Big|_{x=0} + q_s \right] e^{W_b t} . \quad (4.15)$$

Por su parte, la condición inicial transitoria es:

$$C.I.1: \quad t = 0 \quad \forall \quad x, \quad T_t(x, t = 0) = 0 . \quad (4.16)$$

4.2.2. Problema con Relajamiento

Si en lugar de utilizar la ley de Fourier (ecuación 3.3) se introduce el modelo de Maxwell-Cattaneo (ecuación 3.4):

$$\underline{q}(\underline{x}, t + \lambda) = \underline{q}(\underline{x}, t) + \lambda \frac{\partial \underline{q}(\underline{x}, t)}{\partial t}$$

para describir el flux de energía, entonces la ecuación biológica de transferencia de energía (ecuación 3.1) para este problema queda escrita como:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W_b [T_a - T] + \frac{1}{\rho_m c_{pm}} \{Q_m + Q_r\} \quad (4.17)$$

donde $T = T(x, t)$, $Q_r = Q_r(x, t)$ y λ es el tiempo de relajación térmico.

Las condiciones de frontera e iniciales para este caso son las mismas descritas por las ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.4). Únicamente se requiere de una condición inicial adicional que es:

$$C.I.2: \quad t = 0 \quad \forall \quad x, \quad \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (4.18)$$

La solución de la ecuación (4.17) también está dada en términos de la ecuación (4.5):

$$T(x, t) = T_o(x) + T_t(x, t) e^{-\frac{\omega_b \rho_b c_{pb}}{\rho_m c_{pm}} t}.$$

La parte estacionaria no se modifica y queda descrita por el conjunto de ecuaciones (4.6) - (4.8). No obstante, el problema transitorio ahora está representado por:

$$\lambda \frac{\partial^2 T_t}{\partial t^2} + [1 - 2W_b \lambda] \frac{\partial T_t}{\partial t} + W_b^2 \lambda T_t = \alpha \frac{\partial^2 T_t}{\partial x^2} + \frac{Q_r}{\rho_m c_{pm}} e^{W_b t}. \quad (4.19)$$

Nuevamente las condiciones de frontera e iniciales son las mismas expuestas en las ecuaciones (4.13) a (4.16) y la condición inicial adicional es:

$$C.I.2: \quad t = 0 \quad \forall \quad x, \quad \left. \frac{\partial T_t(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (4.20)$$

Es importante mencionar que cuando $\lambda \rightarrow 0$ la ecuación (4.19) se reduce al caso clásico descrito por la ecuación (4.12).

4.3. Adimensionalización y Solución de las Ecuaciones de Transferencia

Para resolver las ecuaciones de transferencia se proponen las siguientes variables adimensionales para la posición, el tiempo y la temperatura respectivamente:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (4.21)$$

$$\tau = \frac{\alpha}{L^2} t \quad (4.22)$$

$$\theta = \frac{T}{T_c} \quad (4.23)$$

Ahora, la variable adimensional para la posición ξ está acotada en un intervalo de 0 a 1. Por otra parte, el tiempo adimensional τ está definido como el número de Fourier que compara la conducción de la energía con el almacenamiento de la misma en procesos transitorios.

Al sustituir estas variables en la ecuación (4.9) se obtiene:

$$\alpha \frac{T_c}{L^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \alpha \frac{T_c}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + W_b [T_a - \theta T_c] + \frac{1}{\rho_m c_{p_m}} \{Q_m + Q_r\}$$

que al multiplicar por $\frac{L^2}{\alpha T_c}$ se modifica como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{L^2}{\alpha} W_b \frac{[T_a - \theta T_c]}{T_c} + \frac{L^2}{\alpha T_c} \frac{1}{\rho_m c_{p_m}} \{Q_m + Q_r\} . \quad (4.24)$$

Tras analizar las dimensiones de la ecuación (4.24), se observó que la perfusión se puede escribir de forma adimensional al compararla con un tiempo difusivo, esto es:

$$\sigma = \frac{L^2}{\alpha} W_b . \quad (4.25)$$

Por su parte la expresión adimensional para la temperatura arterial está definida como:

$$\theta_a = \frac{T_a}{T_c} . \quad (4.26)$$

Asimismo, el conjunto de constantes que multiplican al término fuente de la ecuación (4.24) se pueden modificar al utilizar la definición del coeficiente de difusión térmica: $\alpha = \frac{k}{\rho_m c_{pm}}$, quedando como: $\frac{L^2}{k T_c}$ cuyas dimensiones son el inverso de un flujo de energía. Por tanto, el término adimensional de generación de energía es:

$$\Phi = \frac{L^2}{k T_c} Q, \quad (4.27)$$

en donde la combinación $\frac{k T_c}{L}$ representa un flux difusivo de energía.

Finalmente al sustituir (4.25), (4.26) y (4.27) en (4.24) se obtiene que la ecuación diferencial adimensional para las distribuciones de temperatura en el tejido es:

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \sigma [\theta_a - \theta(\xi, \tau)] + \Phi_m + \Phi_r(\xi, \tau) . \quad (4.28)$$

Tomando ahora el problema con relajamiento (ecuación 4.17), al cambiar las variables originales de la posición, el tiempo y la temperatura por las adimensionales se obtiene:

$$\lambda \frac{\alpha}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{L^2}{\alpha} W_b \frac{[T_a - \theta T_c]}{T_c} + \frac{L^2}{\alpha T_c} \frac{1}{\rho_m c_{pm}} \{Q_m + Q_r\} . \quad (4.29)$$

El grupo adimensional formado por $\lambda \frac{\alpha}{L^2}$ es la comparación de un tiempo característico del tejido λ con un tiempo característico difusivo del proceso $\frac{\alpha}{L^2}$; por tanto, se puede considerar como un número de Deborah térmico², esto es:

$$De_T = \lambda \frac{\alpha}{L^2} . \quad (4.30)$$

² En reología, el número de Deborah está definido como el cociente entre un tiempo de característico del fluido y un tiempo de observación relativo al proceso. Esta definición se puede extender a procesos de transferencia de energía, al realizar comparaciones entre un tiempo característico de un fenómeno y otro de observación.

Por tanto al sustituir los diferentes grupos adimensionales en la ecuación (4.29) se obtiene que la ecuación diferencial adimensional para las distribuciones de temperatura con relajamiento es:

$$De_{\tau} \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \sigma [\theta_a - \theta(\xi, \tau)] + \Phi_m + \Phi_r \quad (4.31)$$

donde $\Phi_r = \Phi_r(\xi, \tau)$.

La solución adimensional propuesta para ambos problemas estará dada por:

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_o(\xi) + \theta_t(\xi, \tau) e^{-\sigma \tau}, \quad (4.32)$$

en donde $\theta_o(\xi)$ es la temperatura del estado estacionario y $\theta_t(\xi, \tau)$ es la temperatura transitoria.

4.3.1. Estado Estacionario

Al despreciar los términos con dependencia temporal de la ecuación (4.28), se obtiene la ecuación diferencial adimensional para el estado estacionario:

$$\frac{\partial^2 \theta_o(\xi)}{\partial \xi^2} + \sigma [\theta_a - \theta_o(\xi)] + \Phi_m = 0 \quad (4.33)$$

cuyas condiciones de frontera son:

$$C.F.1 : \quad \xi = 0, \quad -\left. \frac{d\theta_o(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = Bi_o [\theta_f - \theta_{o_s}] \quad (4.34)$$

$$C.F.2 : \quad \xi = 1, \quad \theta_o(\xi = 1) = 1 \quad (4.35)$$

donde θ_f es la temperatura del aire escrita de forma adimensional como: $\theta_f = \frac{T_f}{T_c}$, la temperatura de la superficie es: $\theta_{o_s} = \theta_o(\xi = 0)$ y Bi_o es el número de Biot en el estado estacionario que está dado por:

$$Bi_o = \frac{h_o L}{k} \quad (4.36)$$

y compara la resistencia interna de la transferencia de energía con la transferencia de energía en la frontera, es decir, en la superficie del tejido.

La solución analítica de la ecuación (4.33) se puede obtener por el método de factor integrante; de forma general es la siguiente:

$$\theta_o(\xi) = C_1 e^{\sqrt{\sigma} \xi} + C_2 e^{-\sqrt{\sigma} \xi} + \theta_{op}(\xi) \quad (4.37)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración y $\theta_p(\xi)$ representa la solución particular que estará determinada por la forma de Φ_m , esto es:

$$\theta_{op}(\xi) = \theta_a - e^{\sigma \xi} \int e^{-\sigma \xi} \Phi_m(\xi) d\xi . \quad (4.38)$$

Haciendo uso de las condiciones de frontera para determinar el valor de las constantes de integración se obtiene que la temperatura del estado estacionario tiene la siguiente forma:

$$\theta_o(\xi) = \theta_p(\xi) + K_1 \cosh \sqrt{\sigma} \xi + K_2 \sinh \sqrt{\sigma} (1 - \xi) \quad (4.39)$$

donde las constantes K_1 y K_2 están dadas por:

$$K_1 = \frac{1 - \theta_{op}(\xi = 1)}{\cosh \sqrt{\sigma}} \quad (4.40)$$

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma} \cosh \sqrt{\sigma}} \left\{ Bi_o [\theta_f - \theta_{os}] + \left. \frac{d\theta_{op}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} \right\} . \quad (4.41)$$

Al evaluar $\xi = 0$ en la ecuación (4.39) se puede calcular la temperatura en la superficie como:

$$\theta_{os} = \frac{\theta_{op}(\xi = 0) + \frac{1 - \theta_{op}(\xi=1)}{\cosh \sqrt{\sigma}} + \frac{\tanh \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \left\{ Bi_o \theta_f + \left. \frac{d\theta_{op}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} \right\}}{1 + \frac{\tanh \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} Bi_o} . \quad (4.42)$$

Soluciones Particulares

De acuerdo con la ecuación (4.38) la solución particular de la temperatura del estado estacionario dependerá de la forma de Φ_m , a continuación se presentan los casos que se analizaron.

Caso i: Calor metabólico constante

Si Φ_m es constante, entonces sustituyendo en la ecuación (4.38) se obtiene:

$$\begin{aligned}\theta_{op}(\xi) &= \theta_a - e^{\sigma\xi} \int e^{-\sigma\xi} \Phi_m d\xi \\ \theta_{op} &= \theta_a - e^{\sigma\xi} \Phi_m \int e^{-\sigma\xi} d\xi\end{aligned}$$

Por tanto, la solución particular para el calor adimensional está dada por:

$$\theta_{op} = \theta_a + \frac{\Phi_m}{\sigma} . \quad (4.43)$$

Al ser constante, no se alterará cuando se evalúe en 0 ó 1, es decir:

$$\theta_{op} = \theta_{op}(\xi = 0) = \theta_{op}(\xi = 1) ;$$

asimismo su derivada con respecto a ξ será cero:

$$\left. \frac{d\theta_{op}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 .$$

Caso ii: Calor metabólico como función de la posición

Ahora se propone que el calor metabólico varíe linealmente con respecto a la posición de la forma: $\Phi_m(\xi) = \mu\xi$, donde μ es la pendiente de la función que contiene información sobre el flux de energía difusivo y el flux debido a la generación de energía metabólica, esto es: $\mu = \frac{L}{k T_c} m L^2$ (con m constante)³.

³ La ordenada al origen es cero dado que en la epidermis no hay calor metabólico [7, 8, 9].

La solución particular para este caso está dada por:

$$\begin{aligned}\theta_{op}(\xi) &= \theta_a - e^{\sigma\xi} \int e^{-\sigma\xi} \Phi_m(\xi) d\xi \\ \theta_{op}(\xi) &= \theta_a - e^{\sigma\xi} \mu \int e^{-\sigma\xi} \xi d\xi\end{aligned}$$

que al integrar por partes es:

$$\theta_{op}(\xi) = \theta_a + \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\sigma} \xi \quad . \quad (4.44)$$

Al evaluar (4.44) en 0 y posteriormente en 1, se obtiene:

$$\begin{aligned}\theta_{op}(\xi = 0) &= \theta_a + \frac{\mu}{\sigma^2} \text{ ,} \\ \theta_{op}(\xi = 1) &= \theta_a + \frac{\mu}{\sigma^2} [1 + \sigma] \text{ .}\end{aligned}$$

Finalmente, la derivada de (4.44) respecto a ξ evaluada en 0 es:

$$\left. \frac{d\theta_{op}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \frac{\mu}{\sigma} \text{ .}$$

4.3.2. Problema Transitorio

La ecuación diferencial para la parte transitoria del problema clásico se obtiene utilizando (4.32) en (4.28); de lo que resulta:

$$\frac{\partial\theta_t(\xi, \tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_t(\xi, \tau)}{\partial\xi^2} + \Phi_r(\xi, \tau)e^{\sigma\tau} \text{ .} \quad (4.45)$$

Las correspondientes condiciones de frontera adimensionales para $\tau > 0$ son:

$$C.F.1: \quad \xi = 0, \quad -\left. \frac{\partial\theta_t(\xi, \tau)}{\partial\xi} \right|_{\xi=0} = \left\{ \phi_s + \left. \frac{d\theta_o(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} \right\} e^{\sigma\tau} \quad (4.46)$$

$$C.F.2: \quad \xi = 1, \quad \theta_t(\xi = 1, \tau) = 0 \quad (4.47)$$

donde ϕ_s es la variable adimensional del flux de energía en la superficie dada por:

$\frac{L}{k T_c} q_s$ y como $\left. \frac{d\theta_o(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = -Bi_o [\theta_f - \theta_{os}]$ (ecuación 4.34) la primera condición se puede reescribir como:

$$C.F.1: \quad \xi = 0, \quad -\left. \frac{\partial\theta_t(\xi, \tau)}{\partial\xi} \right|_{\xi=0} = \{ \phi_s - Bi_o [\theta_f - \theta_{os}] \} e^{\sigma\tau} \text{ .} \quad (4.48)$$

La condición inicial transitoria adimensional es:

$$C.I.1: \quad \tau = 0 \quad \forall \quad \xi, \quad \theta_t(\xi, \tau = 0) = 0 . \quad (4.49)$$

La solución de la ecuación (4.45) se obtuvo de forma numérica, utilizando el método de diferencias finitas para expandir la derivada espacial e integrar respecto al tiempo. La aproximación de la segunda derivada del lado derecho de la ecuación (4.45) por diferencias finitas centrales es:

$$\left. \frac{\partial^2 \theta_t(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi_i} \approx \frac{\theta_{t_{i+1}} - 2\theta_{t_i} + \theta_{t_{i-1}}}{(\Delta \xi)^2} \quad (4.50)$$

Al sustituir (4.50) en (4.45) se tiene:

$$\frac{d\theta_{t_i}(\tau)}{d\tau} = \frac{\theta_{t_{i+1}} - 2\theta_{t_i} + \theta_{t_{i-1}}}{(\Delta \xi)^2} + \Phi_{r_i}(\tau) e^{\sigma \tau} , \quad (4.51)$$

para: $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

La ecuación (4.51) ya sólo depende del tiempo, por lo que se puede integrar numéricamente haciendo uso de la condición inicial dada por (4.49).

Los valores extremos del conjunto de funciones representadas por (4.51) se pueden determinar a partir de las condiciones de frontera. En principio, la primera derivada de θ_t con respecto a ξ se puede aproximar por diferencias finitas hacia adelante como:

$$\left. \frac{\partial \theta_t(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi_i} \approx \frac{\theta_{t_{i+1}} - \theta_{t_i}}{\Delta \xi} . \quad (4.52)$$

Cuando $\xi = 0$, $i = 0$, por tanto combinando (4.52) con la primera condición de frontera (ecuación 4.48) se tiene que la temperatura en $i = 0$ es:

$$\theta_{t_0} = \theta_{t_1} + \Delta \xi \{ \phi_s - Bi_o [\theta_f - \theta_{o_s}] \} e^{\sigma \tau} . \quad (4.53)$$

Por su parte, cuando $\xi = 1$, $i = n$ y el valor de la función estará dado por la segunda condición de frontera (ecuación 4.46):

$$\theta_{t_n} = 0 . \quad (4.54)$$

De la misma manera que con el problema clásico, si ahora se considera el problema transitorio con relajamiento, la ecuación diferencial correspondiente se obtiene utilizando (4.32) en (4.31):

$$De_T \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial \tau^2} + [1 - 2\sigma De_T] \frac{\partial \theta_t}{\partial \tau} + \sigma^2 De_T \theta_t = \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial \xi^2} + \Phi_r e^{\sigma \tau} \quad (4.55)$$

donde: $\theta_t = \theta_t(\xi, \tau)$ y $\Phi_r = \Phi_r(\xi, \tau)$.

Nuevamente es importante hacer notar que cuando $De_T \rightarrow 0$ la ecuación (4.55) se reduce al problema clásico (ecuación 4.45).

Al aplicar el método de diferencias finitas, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$:

$$De_T \frac{d^2 \theta_{t_i}}{d\tau^2} + [1 - 2\sigma De_T] \frac{d\theta_{t_i}}{d\tau} + \sigma^2 De_T \theta_{t_i} = \frac{\theta_{t_{i+1}} - 2\theta_{t_i} + \theta_{t_{i-1}}}{(\Delta\xi)^2} + \Phi_{r_i}(\tau) e^{\sigma \tau} . \quad (4.56)$$

Como para la solución de la ecuación (4.55) se vuelven a utilizar las condiciones de frontera expuestas en las ecuaciones (4.47) y (4.48), los valores extremos de la temperatura con relajamiento están dados por las ecuaciones (4.53) y (4.54).

La temperatura de la ecuación (4.56) ya sólo depende del tiempo, entonces el conjunto de ecuaciones generadas se pueden integrar numéricamente haciendo uso de la condición inicial establecida en (4.49) y de la condición adicional dada por:

$$C.I.2: \quad \tau = 0 \quad \forall \quad \xi_i, \quad \left. \frac{\partial \theta_{t_i}(\xi_i, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 . \quad (4.57)$$

Tanto en la ecuación (4.51) como en la ecuación (4.56) aparece el término fuente discretizado, pero falta especificar su forma. Para ello, se propone que el flux de energía decrezca de forma exponencial con respecto a la distancia, que es una de las formas más comunes utilizadas para describir diferentes procesos de

transferencia de energía en tejidos como el calentamiento por láser, microondas o ultrasonido [6, 21, 22]. Es por esto, que la fuente de generación de energía transitoria seleccionada tiene la siguiente forma:

$$Q_r = -\frac{\partial q_r}{\partial x} = \eta P_o(t) e^{-\eta x} \quad (4.58)$$

donde η es el coeficiente de dispersión que permite cuantificar el decremento en la intensidad de la señal de energía emitida por unidad de área, resultado de la separación de las ondas al atravesar cierto material; en otras palabras, es el área efectiva de transferencia por unidad de volumen del medio.

Por su parte, $P_o(t)$ es la potencia de calentamiento, que puede tener una forma sinusoidal como:

$$P_o(t) = a + b \cos \omega t \quad (4.59)$$

donde a es una constante, b es la amplitud de la onda de calentamiento, también constante, y ω es la frecuencia de oscilación. Es interesante notar que cuando $\cos \omega t \rightarrow 0$ la potencia de calentamiento será constante ($P_o = a$) y cuando $\cos \omega t \rightarrow 1$ se tendrá un máximo en la función dado por: $P_{o_{máx}}(t) = a + b$.

Al escribir de forma adimensional la ecuación (4.58) se tiene:

$$\Phi_r(\xi, \tau) = \beta \zeta(\tau) e^{-\beta \xi} \quad (4.60)$$

donde ahora β es coeficiente de dispersión dado por: $\beta = \eta L$ y la potencia de calentamiento $\zeta(\tau)$ está expresada como:

$$\zeta(\tau) = A + B \cos \Omega \tau \quad (4.61)$$

donde A que es la potencia de calentamiento constante ($A = \frac{aL}{kT_c}$), B la amplitud de onda ($B = \frac{bL}{kT_c}$) y Ω la frecuencia de oscilación ($\Omega = \frac{L^2}{\alpha} \omega$). Cabe reiterar que de acuerdo con la ecuación (4.60), si $B = 0$ el calor espacial se reduce a una función únicamente de la posición.

Al sustituir (4.61) en (4.60) y discretizar Φ_r se tiene:

$$\Phi_{r_i}(\tau) = \beta [A + B \cos \Omega \tau] e^{-\beta i \Delta \xi} \quad (4.62)$$

que al sustituir en (4.51) y en (4.56) e integrar respecto al tiempo, permite llegar a la solución de la parte transitoria para ambos problemas.

No se debe perder de vista que la solución completa está dada por la suma del estado estacionario más el transitorio como se indica en la ecuación (4.32).

El apéndice C contiene un resumen de las ecuaciones que se utilizaron para el cálculo de las distribuciones de temperatura que se muestran en los siguientes capítulos.

DISTRIBUCIONES DE TEMPERATURA (TEORÍA CLÁSICA)

En este capítulo se explican los distintos casos de transferencia de energía que se analizaron utilizando la ley de Fourier para calcular el flux de energía. Se estudia el efecto que las diferentes fuentes de calentamiento, tanto superficial como espacial, tiene sobre las distribuciones de temperatura; así como la variación de la temperatura como consecuencia de cambios en el valor de la perfusión, o bien, por modificaciones en las condiciones de proceso como las frecuencias de oscilación.

5.1. Estado Estacionario

Las distribuciones de temperatura en estado estacionario son un reflejo del estado basal de los tejidos, es decir, representan las condiciones bajo las cuales el tejido se encuentra en equilibrio térmico con los alrededores y cuando internamente no es afectado por ninguna reacción anormal provocada, por ejemplo, por alguna patología. Los dos factores que primordialmente afectan este estado son la actividad metabólica o término fuente y el intercambio con el ambiente, que se puede analizar utilizando el número de Biot como base.

El número de Biot es una cantidad adimensional que compara la transferencia de energía de la superficie de un cuerpo con la transferencia por conducción dentro del mismo. Un número de Biot menor a la unidad indicaría que la conducción dentro del tejido es mayor que la transferencia de energía desde la epidermis hacia el medio; por el contrario, un número mayor a la unidad sería señal de que la convección es mucho mayor que los procesos de transferencia internos.

La temperatura del estado estacionario se calculó utilizando la ecuación (4.39). Se trabajó con dos números de Biot distintos a fin de comparar los diferentes mecanismos de transferencia de energía. En lo que respecta a la generación de calor metabólico se estudió desde dos puntos de vista: el primero fue considerándolo constante, es decir, que no fuera afectado por la posición dentro del tejido y el segundo, como función de esta variable.

De acuerdo con las distribuciones que se muestran en la figura 5.1, se encontró que para números de Biot altos ($Bi_o = 1.3$) existe gran diferencia entre una fuente constante y una variable (curvas **B** y **D**). Para el cálculo de la distribución de temperatura **D** se utilizó un calor metabólico variable dado por: $\Phi_m = \mu\xi$. Esta trayectoria no es fisiológicamente aceptable porque en determinado intervalo de distancia ($0.55 < \xi < 0.75$) excede los límites de temperatura que el tejido puede soportar sin dañarse ($1.135 \leq \theta_{max}$). Esto indicaría que el tejido comienza a destruirse en estado basal, lo cual es físicamente imposible.

Por su parte, la distribución **B** no sobrepasa en ninguna posición la temperatura máxima; sin embargo, para su cálculo se utilizó un calor metabólico constante igual a 1.4554 y un valor mayor a 0.4347 puede ser señal de alguna patología como cáncer [5], por tanto, esta distribución tampoco es válida.

Finalmente, las distribuciones **A** y **C** fueron calculadas a bajos números de Biot ($Bi_o = 0.2$). En estas distribuciones no existe gran diferencia en el valor de la temperatura con la forma del calor metabólico, siendo para **A** constante y para **C** variable. Además ambas son válidas pues cumplen con los parámetros fisiológicos del estado basal.

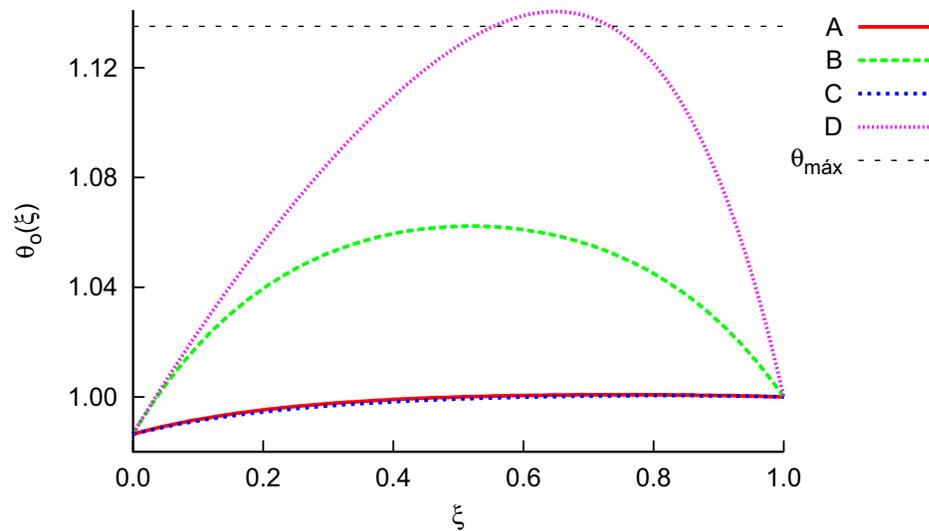


Figura 5.1: Distribuciones de temperatura en estado estacionario para diferentes números de Biot y diferentes formas del calor metabólico:

A) $Bi_o = 0.2$, $\Phi_m = 0.0381$, **B)** $Bi_o = 1.3$, $\Phi_m = 1.4554$, **C)** $Bi_o = 0.2$, $\Phi_m(\xi) = 0.0381\xi$ y **D)** $Bi_o = 1.3$, $\Phi_m(\xi) = 5.2903\xi$.

Por tanto a bajos números de Biot el efecto de la variación de la fuente de calentamiento no es significativo. En este proceso domina el mecanismo de transferencia interna por conducción sobre la convección con el aire, esto resulta razonable ya que la piel es un tejido altamente perfundido, lo que favorece la transferencia de energía.

Cabe aclarar que ambos números de Biot utilizados son del mismo orden de magnitud; sin embargo, un valor cercano a la unidad es muy grande para el sistema de estudio, ya que implica una transferencia de energía por convección considerablemente mayor que los valores reportados de los tejidos en estado basal. Es por esta razón que se hace la distinción entre un número alto y uno bajo.

5.2. Pruebas Dinámicas

La temperatura tisular se ve modificada por la utilización de diferentes fuentes de calentamiento, que varían de acuerdo con la aplicación de algunas pruebas dinámicas. Las distribuciones mostradas en esta sección fueron calculadas haciendo uso del conjunto de ecuaciones, para la parte transitoria del problema, resumido en el apéndice C (tabla C.3). La temperatura del estado estacionario utilizada corresponde a bajos números de Biot y un calor metabólico constante ($Bi_o = 0.2$ y $\Phi_m = 0.0381$), ya que ésta representa adecuadamente las condiciones basales del tejido y puede ser utilizada como punto de partida para analizar los cambios sufridos al someter al sistema a tales pruebas (Distribución **A** de la figura 5.1).

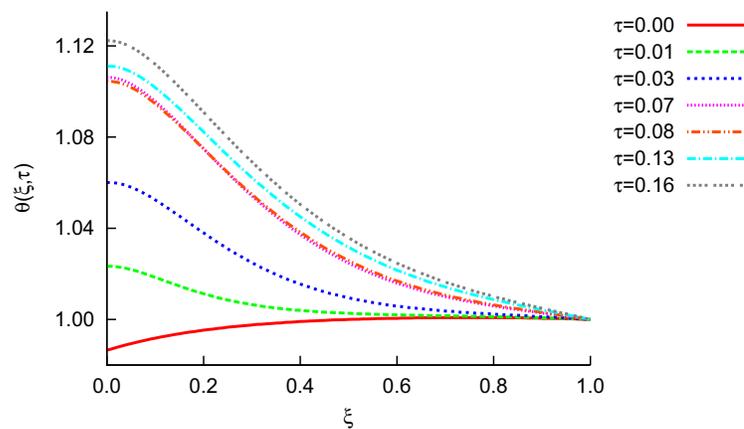
5.2.1. Flux Superficial Nulo o Condición Adiabática

Un sistema adiabático se da cuando no hay un flux en la superficie ($\phi_s = 0$) o éste es tan pequeño que no es suficiente para tener un intercambio energético con el tejido. Esta condición se lleva a cabo cuando el número de Biot tiende a cero. Para lograr este estado se debe aislar completamente el tejido y esperar hasta que ya no varíe con pequeñas perturbaciones ambientales. Bajo estas condiciones se pueden examinar tejidos que son calentados con láser de forma continua, microondas o ultrasonido, si se utiliza una fuente de calentamiento espacial que sólo sea función de la posición. También se pueden realizar estudios sobre la perfusión de la sangre si la fuente tiene una forma oscilatoria [6].

La figura 5.2 contiene las distribuciones de temperatura correspondientes, como función de la posición para diferentes tiempos. En ellas se puede observar que a mayor tiempo, la temperatura superficial también crece y decae hasta llegar a la temperatura de equilibrio en el centro del tejido. Para pequeños valores de τ dicho

decaimiento es paulatino, ya que se empieza a acercar al estado estacionario a distancias muy cortas ($\xi \approx 0.5$). En el caso de un calor espacial sinusoidal (figura 5.2b) se observan entrecruces a distancias pequeñas ($\xi < 0.3$) que se deben a la oscilación de la fuente. En ninguno de los casos se alcanza la temperatura máxima permisible.

a)



b)

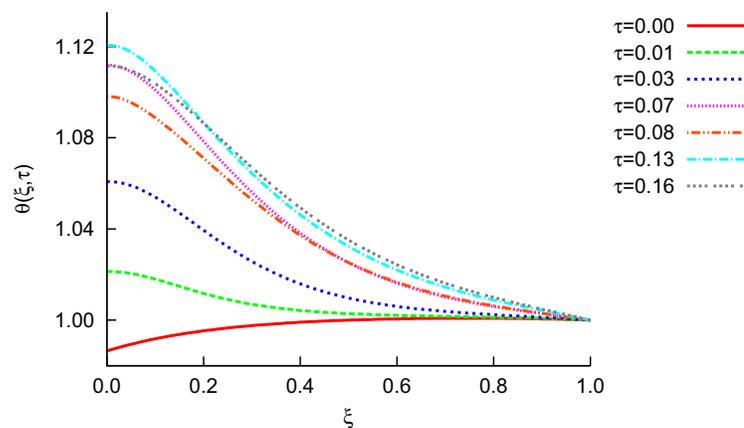
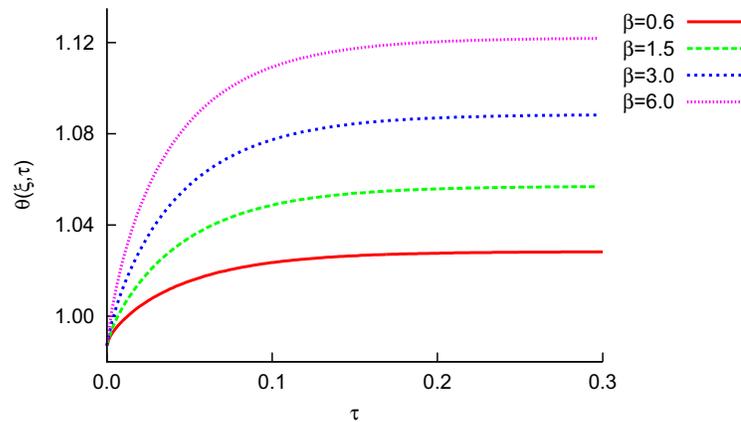


Figura 5.2: Temperatura vs posición para diferentes tiempos con $\phi_s = 0$ y:
a) $\Phi_r(\xi) = \beta A e^{-\beta \xi}$, b) $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [A + B \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi}$, donde $\beta = 6$,
 $A = 0.8626$, $B = 0.6901$ y $\Omega = 300$.

a)



b)

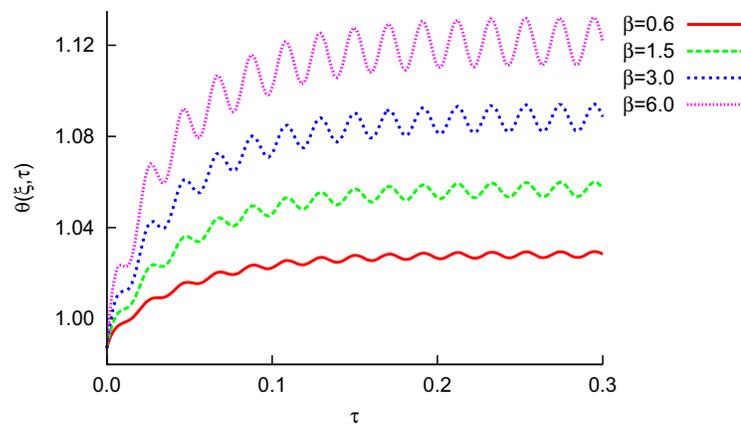


Figura 5.3: Temperatura vs tiempo para diferentes coeficientes de dispersión en $\xi = 0$ con $\phi_s = 0$: a) $\Phi_r(\xi) = \beta A e^{-\beta \xi}$, b) $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [A + B \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi}$, donde $A = 0.8626$, $B = 0.6901$ y $\Omega = 300$.

La variación con respecto al tiempo para diferentes coeficientes de dispersión se representa gráficamente en la figura 5.3. Mientras mayor es el coeficiente de dispersión, la temperatura superficial aumenta más rápidamente para tiempos cortos, sin embargo, para tiempos aproximadamente mayores a 0.15 alcanza un valor de temperatura prácticamente constante. En el caso del calentamiento espacial oscilatorio, la amplitud de la onda aumenta con el incremento de β .

Una de las ventajas de realizar estudios para diferentes coeficientes de dispersión y varias fuentes espaciales es que los aparatos que se utilizan en las terapias térmicas operan con determinados valores ya establecidos por el fabricante, por tanto, las distribuciones calculadas pueden servir como base para predecir temperaturas en los tejidos para diferentes condiciones de operación.

5.2.2. Flux Superficial Constante

En este caso se considera que la función ϕ_s es constante y que no hay otra fuente de energía ($\Phi_r = 0$). Esta situación se presenta por ejemplo cuando el tejido se quema por contacto directo puntual con algún objeto. Los resultados se muestran en la figura 5.4, en ellos se observa que alrededor de $\tau = 0.1$ las temperaturas llegan a un valor constante, mismo que es mayor conforme aumenta el valor del flux superficial. A mayor flux, más rápidamente crece la temperatura para tiempos cortos; asimismo se encontró que el tejido se empieza a dañar si se expone a flux mayores a 0.69 en un tiempo mayor a 0.5 y que el tiempo al que puede estar expuesto sin quemarse se reduce con el aumento del flux.

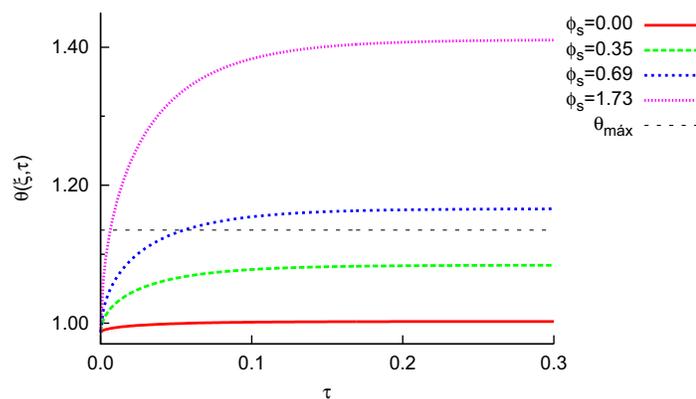


Figura 5.4: Temperatura vs tiempo en $\xi = 0$ con $\Phi_r = 0$ y diferentes ϕ_s .

5.2.3. Flux Superficial Discontinuo

Existen numerosos procesos en los que se aplica un pulso puntual por breves instantes y posteriormente se suspende, tal es el caso de una cirugía ocular o procedimientos quirúrgicos para destruir tumores. Este tipo de calentamiento se da también en accidentes por llamaradas repentinas, contacto directo con alguna superficie caliente o exposición temporal a flujos de vapor. Para representarlos se asignó a ϕ_s la forma de función escalón, esto es:

$$\phi_s(\tau) = \begin{cases} 0.6901 & \tau < 0.8 \\ 0 & \tau \geq 0.8 \end{cases} \quad (5.1)$$

Las distribuciones de temperatura se analizaron para diferentes valores de perfusión. Esto es recomendable para comparar casos normales con, por ejemplo, un tejido quemado donde se tendría un valor reducido del flujo sanguíneo. Además se realizaron observaciones para diferentes profundidades del tejido y se seleccionaron varias opciones de fuente de calentamiento espacial: $\Phi_r = 0$, $\Phi_r = \Phi_r(\xi)$ y $\Phi_r = \Phi_r(\xi, \tau)$.

En todos los casos se encontró que en la superficie de la piel $\xi = 0$ se llega a una temperatura máxima en $\tau < 0.8$, que es el punto donde se deja de aplicar el flux superficial. Posteriormente, la temperatura comienza a descender hasta alcanzar el estado estacionario. A medida que aumenta la profundidad, la temperatura máxima que alcanza el tejido es menor y ocurre varios segundos después de que se detiene el impulso. Esto indica que los procesos de transferencia de energía internos continúan pese a que se suspendió el estímulo, por lo que la respuesta térmica está retrasada (ver figura 5.5). En el caso oscilatorio (figura 5.5-3) debido a las ondas sinusoidales, existen regiones cercanas al máximo en las que la temperatura es ligeramente mayor que la temperatura en dicho punto.

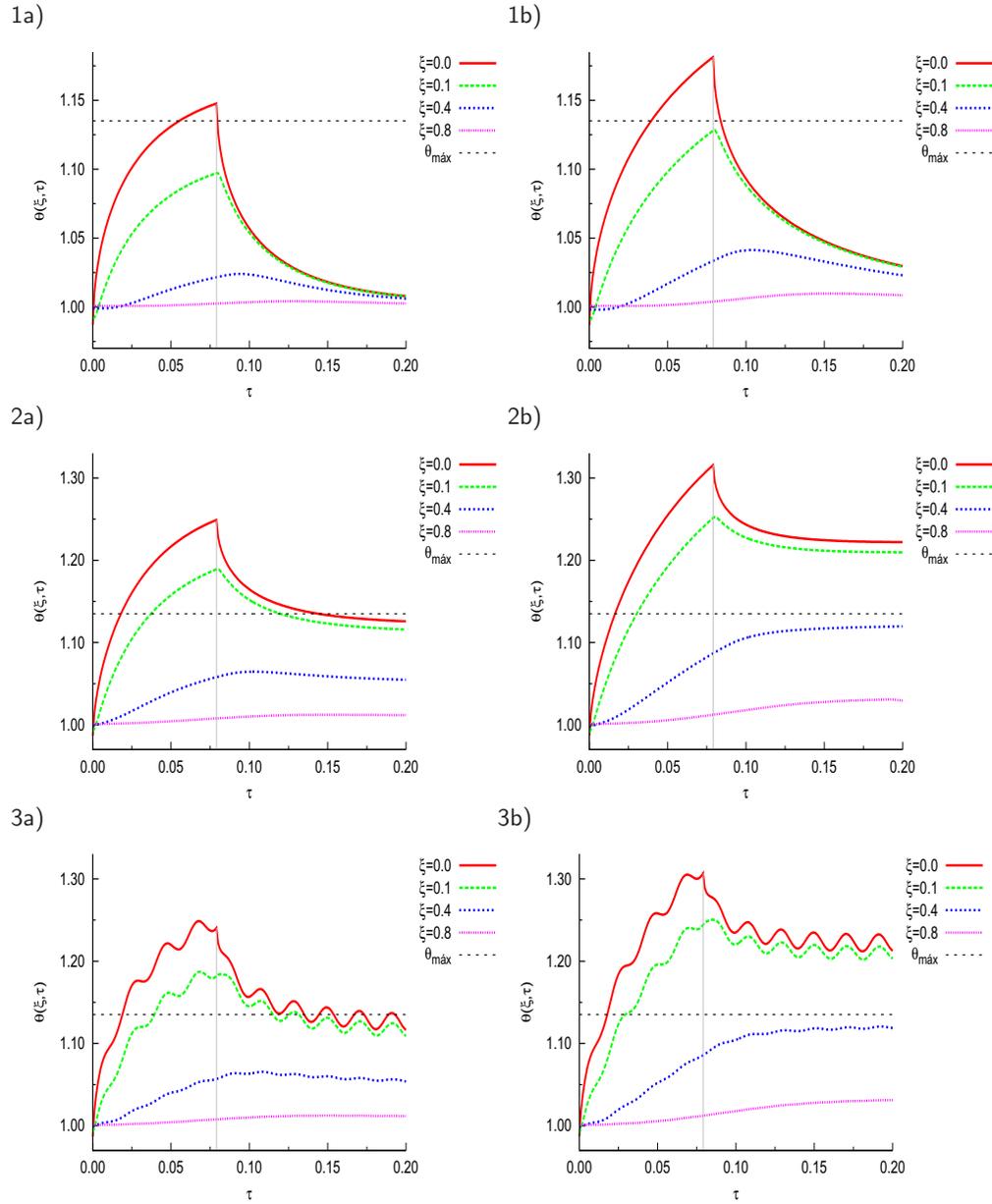


Figura 5.5: Temperatura vs tiempo para diferentes valores de ξ con $\phi_s = 0.6901$ para $\tau < 0.8$ y $\phi_s = 0$ para $\tau \geq 0.8$. Los valores de perfusión utilizados son: a) $\sigma = 17.1010$ y b) $\sigma = 6.8404$. Las diferentes fuentes de calentamiento aplicadas fueron: 1) $\Phi_r = 0$, 2) $\Phi_r(\xi) = \beta A e^{-\beta \xi}$ y 3) $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [A + B \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi}$, donde $\beta = 6$, $A = 0.8626$, $B = 0.6901$ y $\Omega = 300$.

En todos los casos se encontró que para un valor alto de perfusión ($\sigma = 17.101$) la temperatura para tiempos cortos crece rápidamente, mas al acercarse al máximo ($\tau < 0.8$) este crecimiento comienza a amortiguarse. Esto no sucede para una perfusión menor ($\sigma = 6.8404$) donde la temperatura crece rápidamente desde el inicio e incluso llega a un máximo de 0.4 unidades mayor que para el primer caso. Este hecho implica que en la primera parte del experimento domina el proceso de transferencia en la superficie, sobre los procesos internos.

Una vez que se suspende el estímulo, la temperatura comienza a descender hasta el estado estacionario, a mayores perfusiones (figuras 5.5a) el valor en el estado estacionario es menor que el calculado con perfusiones más pequeñas (figuras 5.5b). Lo anterior se puede explicar considerando que ahora el proceso dominante es la transferencia debida a la perfusión; por tanto, cuando ésta es mayor, el tejido puede recuperar su estado basal más rápidamente.

Cuando únicamente se tiene un flux en la superficie la temperatura máxima es menor que cuando se añade una fuente espacial e, incluso, la recuperación de la temperatura de estado estacionario es casi total (ver figuras 5.5-1); el tejido sólo presenta daño superficial en un intervalo de tiempo muy pequeño cercano al máximo. Para una señal espacial constante respecto al tiempo u oscilatoria, las temperaturas reportadas son muy similares. En ambos casos para un valor normal de perfusión, se empieza a presentar daño en la superficie en un tiempo menor a 0.02 que perdura hasta $\tau \approx 0.15$; a profundidades mayores ($\xi \geq 0.4$) con estas condiciones de proceso no hay daño en el tejido. Para perfusiones menores, el daño del tejido en la superficie es continuo a partir de $\tau = 0.018$.

5.2.4. Flux Superficial Oscilatorio

Cuando el tejido se calienta de manera continua mediante alguna fuente de radiación, el flux superficial puede ser representado como:

$$\phi_s(\tau) = A' + B' \cos \Omega' \tau \quad (5.2)$$

donde A' es el flux superficial constante, B' es la amplitud de onda y Ω' la frecuencia de oscilación. Este tipo de experimentos también ha probado ser útil para estimar los valores de la perfusión de la sangre en los tejidos.

De acuerdo con las distribuciones mostradas en la figura 5.6 para tiempos muy cortos, el valor de la perfusión y de la frecuencia de oscilación no produce gran efecto sobre el crecimiento de la temperatura. Conforme aumenta el tiempo, a mayor perfusión se alcanzan temperaturas menores, nuevamente esto es un índice de que dominan los procesos de transferencia superficiales sobre los internos. Un valor mayor de perfusión favorece que se alcance un régimen permanente en menor tiempo.

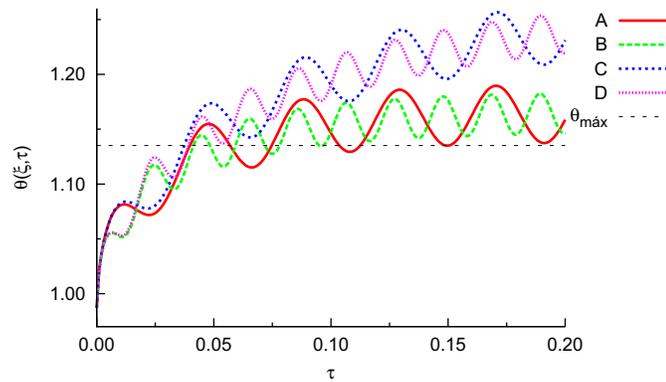


Figura 5.6: Temperatura vs tiempo en $\xi = 0$ con $\phi_s(\tau) = 0.6901 + 0.3450 \cos \Omega' \tau$ y $\Phi_r = 0$, donde: **A:** $\sigma = 17.1010$ y $\Omega' = 150$, **B:** $\sigma = 17.1010$ y $\Omega' = 300$, **C:** $\sigma = 6.8404$ y $\Omega' = 150$ y **D:** $\sigma = 6.8404$ y $\Omega' = 300$.

A una mayor frecuencia de oscilación se tendrán cambios menos repentinos de temperatura, ya que la longitud de onda es mayor que a frecuencias menores. En todos los casos se presenta daño del tejido continuo a partir de $\tau = 0.03$.

En las figuras 5.7 y 5.8 se compara el efecto de las fuentes de calentamiento. Para las distribuciones **A** únicamente se tiene calor espacial oscilatorio, en ellas se observa que a tiempos cortos la temperatura comienza a crecer amortiguada por la forma de la onda, hasta un tiempo aproximado de 0.08 en donde ya se acerca al estado estacionario. A frecuencias de oscilación más grandes, la amplitud de la onda es menor y se estabiliza más rápidamente, en el caso de una menor frecuencia, empieza incluso a presentar daño intermitente en el tejido para $\tau < 0.18$. Las distribuciones **B** no tienen fuente de calor espacial y el flux superficial oscila a una misma frecuencia. En ellas se observa un rápido crecimiento de la temperatura a tiempos cortos y a partir de $\tau = 0.04$ empieza a haber daño en el tejido.

En el caso de las distribuciones **C** se tienen las dos fuentes de calentamiento oscilatorias, la contribución de ambas hace que se alcancen temperaturas superficiales más altas que las obtenidas en los dos casos anteriores. En la figura 5.7 ambas fuentes oscilan a una misma frecuencia, se presenta daño en el tejido a partir de $\tau = 0.018$ siendo éste irreversible a partir de $\tau = 0.04$. La temperatura crece rápidamente y se estabiliza aproximadamente a partir de $\tau = 0.1$, oscilando entre un valor máximo de 1.3 y uno mínimo de 1.25.

Para diferentes frecuencias de oscilación (ver figura 5.8 curva **C**) se observan periodos de oscilación de 0.04 y que durante ellos se tendrán dos cambios de inflexión internos, debidos a la suma de ambas fuentes. Una vez más, se empieza a presentar daño en el tejido a partir de $\tau = 0.018$ y la temperatura comienza estabilizarse a partir de $\tau = 0.1$, oscilando entre 1.3 y 1.25.

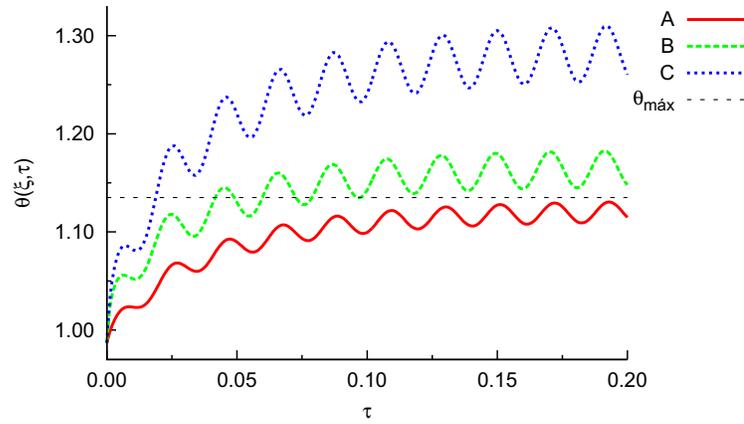


Figura 5.7: Temperatura vs tiempo en $\xi = 0$ a una misma frecuencia de oscilación con: $\sigma = 17.1010$, $\beta = 6$ y $\Omega = 300$, donde: **A:** $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [0.0826 + 0.6901 \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi}$ y $\phi_s = 0$, **B:** $\Phi_r = 0$ y $\phi_s(\tau) = 0.6901 + 0.3450 \cos \Omega \tau$ y **C:** $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [0.0826 + 0.6901 \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi}$ y $\phi_s(\tau) = 0.6901 + 0.3450 \cos \Omega \tau$.

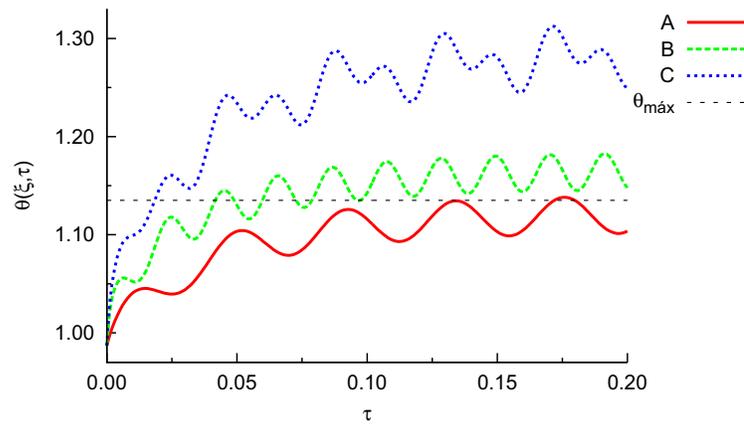


Figura 5.8: Temperatura vs tiempo en $\xi = 0$ a diferentes frecuencias de oscilación con: $\sigma = 17.1010$, $\beta = 6$, $\Omega = 150$ y $\Omega' = 300$, donde: **A:** $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [0.0826 + 0.6901 \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi}$ y $\phi_s = 0$, **B:** $\Phi_r = 0$ y $\phi_s(\tau) = 0.6901 + 0.3450 \cos \Omega' \tau$ y **C:** $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [0.0826 + 0.6901 \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi}$ y $\phi_s(\tau) = 0.6901 + 0.3450 \cos \Omega' \tau$.

5.2.5. Sistema con Medio de Enfriamiento

Si ahora el sistema original se modifica sustituyendo la aplicación de un flux de energía en la superficie por un medio de enfriamiento, como puede ser introducir el tejido en un baño con temperatura controlada o adicionar un sistema de corrientes de aire que permitan que el tejido libere energía; entonces la condición de frontera para $x = 0$ (ecuación 4.2) se debe modificar como:

$$C.F.1: \quad x = 0, \quad t > 0, \quad -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_f [T_e - T_s] \quad (5.3)$$

donde T_s es la temperatura en la superficie, que está dada por: $T_s = T(x = 0, t)$, T_e es la temperatura del medio de enfriamiento y h_f el coeficiente convectivo total.

Al escribir esta condición para la parte transitoria se obtiene:

$$C.F.1: \quad x = 0, \quad -k \frac{\partial T_t(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_f [G(t) - T_{ts}] \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

donde $T_{ts} = T_t(x = 0, t)$ y $G(t)$ tiene la siguiente forma:

$$G(t) = \left[\frac{k}{h_f} \frac{dT_o(x)}{dx} \Big|_{x=0} - T_{os} + T_e \right] e^{W_b t}. \quad (5.6)$$

Al sustituir las variables originales por las adimensionales se obtiene que la condición de frontera es:

$$C.F.1: \quad \xi = 0, \quad \tau > 0,$$

$$-\frac{\partial \theta_t(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = Bi \left\{ \left[\frac{1}{Bi} \frac{d\theta_o(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} + \theta_e - \theta_{os} \right] e^{\sigma \tau} - \theta_{ts} \right\} \quad (5.7)$$

donde θ_e es la temperatura adimensional del medio de enfriamiento dada por:

$\theta_e = \frac{T_e}{T_c}$, $\theta_{ts} = \theta_t(\xi = 0, \tau)$ y Bi es el número de Biot definido como:

$$Bi = \frac{h_f L}{k}. \quad (5.8)$$

De acuerdo con la ecuación (4.34):

$$\left. \frac{d\theta_o(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = -Bi_o [\theta_f - \theta_{os}] .$$

Al utilizar esta definición (5.10) se puede reescribir como:

$$-\left. \frac{\partial\theta_t(\xi, \tau)}{\partial\xi} \right|_{\xi=0} = Bi \left\{ \left[\frac{1}{Bi} (-Bi_o [\theta_f - \theta_{os}]) + \theta_e - \theta_{os} \right] e^{\sigma\tau} - \theta_{ts} \right\}$$

pero como: $\frac{Bi_o}{Bi} = \frac{h_o}{h_f} = h^*$ es la relación entre el coeficiente convectivo aparente y el total, entonces al sustituirla y reorganizar la ecuación anterior se obtiene:

$$-\left. \frac{\partial\theta_t(\xi, \tau)}{\partial\xi} \right|_{\xi=0} = Bi \{ [(h^* - 1)\theta_{os} + \theta_e - h^*\theta_f] e^{\sigma\tau} - \theta_{ts} \} .$$

Si se renombra el siguiente término como:

$$\theta_k(\tau) = [(h^* - 1)\theta_{os} + \theta_e - h^*\theta_f] e^{\sigma\tau}, \quad (5.9)$$

entonces la condición de frontera se puede escribir como:

C.F.1 :

$$\xi = 0, \tau > 0, \quad -\left. \frac{\partial\theta_t(\xi, \tau)}{\partial\xi} \right|_{\xi=0} = Bi \{ \theta_k(\tau) - \theta_{ts} \} . \quad (5.10)$$

Dado que las distribuciones de temperatura se obtuvieron resolviendo la parte transitoria por el método de diferencias finitas, la ecuación (5.10) se debe utilizar para calcular el valor inicial de la temperatura. Al aproximar la primera derivada de θ_t con respecto a ξ por diferencias finitas hacia adelante como:

$$\left. \frac{\partial\theta_t(\xi, \tau)}{\partial\xi} \right|_{\xi_i} \approx \frac{\theta_{t_{i+1}} - \theta_{t_i}}{\Delta\xi}$$

y sustituir en (5.10) se obtiene que el valor extremo en $i = 0$ para la temperatura transitoria se puede calcular como:

$$\theta_{t_0} = \frac{\theta_{t_1} - Bi\Delta\xi\theta_k(\tau)}{1 - Bi\Delta\xi} . \quad (5.11)$$

Utilizando esta condición de frontera se calcularon las distribuciones de temperatura para diferentes profundidades, con un mismo número de Biot y calor espacial como función únicamente de la posición. En la figura 5.9 se puede observar que el valor de la temperatura en la superficie aumenta conforme crece el tiempo. Asimismo, las temperaturas decaen de forma monótona hacia el estado estacionario. Para tiempos mayores a 0.01 empieza a haber daño en el tejido superficial. El hecho de que se tenga un número de Biot mayor a la unidad es índice de que el proceso convectivo (en este caso de enfriamiento) es mucho más importante que la conducción en el tejido.

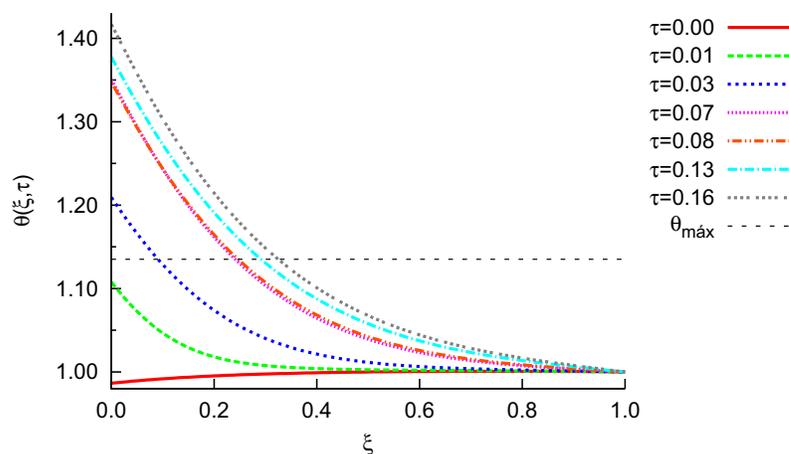


Figura 5.9: Temperatura con medio de enfriamiento vs posición para diferentes tiempos con $\Phi_r(\xi) = \beta A e^{-\beta \xi}$ ($A = 0.8626$ y $\beta = 6$), $Bi = 1.28$, $h^* = 0.16$ y $\theta_e = 0.4054$.

La variación de la temperatura del medio de enfriamiento se observa en la figura 5.10. Como se esperaba, mientras mayor es dicha temperatura, el incremento de la temperatura en el tejido también es menor y el tiempo de aplicación del calor espacial se podría extender sin que el tejido tenga algún tipo de daño. El crecimiento de la temperatura a tiempos cortos se ve amortiguado por la temperatura de enfriamiento y todas las distribuciones tienden al equilibrio.

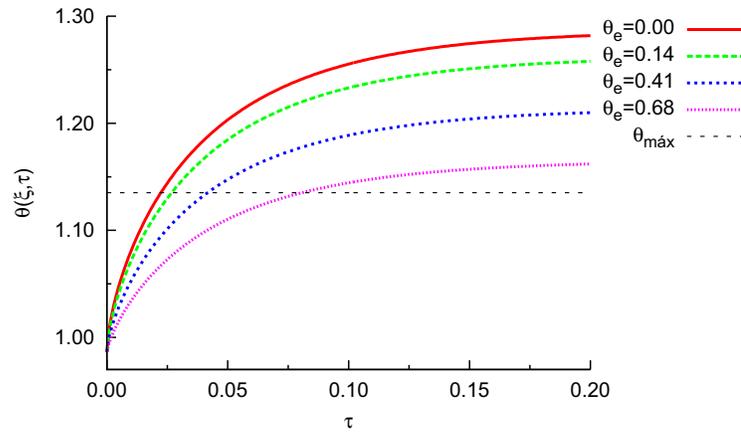


Figura 5.10: Temperatura con medio de enfriamiento vs tiempo para $\xi = 0$ con $\Phi_r(\xi) = \beta A e^{-\beta \xi}$ ($A = 0.8626$ y $\beta = 6$), $Bi = 1.28$, $h^* = 0.16$ y θ_e variable.

Las diferentes pruebas dinámicas que se presentaron ya han sido previamente estudiadas de manera teórica [6, 7]; no obstante, los datos publicados no son coherentes, en su totalidad, con los parámetros fisiológicos adecuados. En este trabajo se utilizaron valores para las propiedades tisulares, que efectivamente corresponden a los reportados para los tejidos epiteliales humanos sanos.

DISTRIBUCIONES DE TEMPERATURA CON RELAJAMIENTO

Las distribuciones de temperatura expuestas en el capítulo anterior son coherentes con resultados encontrados en la literatura [6]. Sin embargo, al tomar en cuenta que los tejidos biológicos son materiales con estructuras complejas, los diferentes procesos de transferencia que en ellos se realizan no siempre pueden ser descritos a partir de las ecuaciones constitutivas clásicas (Ley de Fourier). En esta sección se explora la posibilidad de describir la respuesta térmica de los tejidos utilizando el modelo de Maxwell-Cattaneo y se compara con los resultados previamente encontrados en el capítulo 5.

6.1. Efecto del Número de Deborah Térmico

Los procesos de relajación permiten obtener información sobre el tiempo real que determinada sustancia tarda en responder ante algún estímulo, tomando en cuenta que no siempre será de manera inmediata. El tiempo de relajamiento térmico es un tiempo característico del material que es función de la difusión y de la velocidad térmica de propagación (ver sección 3.2). Existen materiales con multiplicidad de tiempos de relajación que se manifiestan a lo largo del proceso de perturbación térmica. Para este trabajo, se consideraron tiempos de relajación de 20 a 30 s que corresponden al intervalo encontrado para tejidos biológicos [10].

Para examinar el efecto del tiempo de relajación se calcularon las distribuciones de temperatura que son descritas a partir de la ecuación (4.31), variando el número de Deborah térmico entre 0 y 0.001. Para ello, se seleccionaron los siguientes tres tipos de fuentes de calentamiento:

- Calor espacial como función de la posición y condición adiabática en la superficie: $\Phi_r = \Phi_r(\xi)$ y $\phi_s = 0$.
- Calor espacial como función de la posición y del tiempo y condición adiabática en la superficie: $\Phi_r = \Phi_r(\xi, \tau)$ y $\phi_s = 0$.
- Flux superficial constante: $\Phi_r = 0$ y $\phi_s = \text{constante}$.

En las distintas pruebas estudiadas se encontró que los efectos de relajamiento empiezan a hacerse evidentes para números de Deborah térmico mayores a 0.0007, que es un intervalo coherente con los tiempos de relajación para tejidos biológicos¹. Para $De_T < 0.0007$ no hay una diferencia significativa entre la distribución de temperatura de Maxwell-Cattaneo y la de Fourier.

Tomando el caso de una fuente de calentamiento espacial constante respecto al tiempo, se observa que para tiempos largos la temperatura superficial con relajamiento es ligeramente mayor que la temperatura calculada con la ley de Fourier (ver figura 6.1). Para tiempos muy cortos se manifiesta el efecto contrario, el tejido tarda algunos instantes en reaccionar ante la perturbación térmica y comienza a elevar su energía interna de manera más controlada, es decir, el valor de la temperatura se incrementa más lentamente que en el caso clásico. Para $De_T = 0.0013$ se observa un cambio de pendiente en aproximadamente $\tau = 0.0005$, es a partir de este punto cuando la temperatura comienza a crecer de forma continua; para instantes previos, se tiene una respuesta amortiguada por el tiempo de relajación.

¹ Para tejidos biológicos se reportan tiempos de relajación entre 20 y 30 s [10, 11].

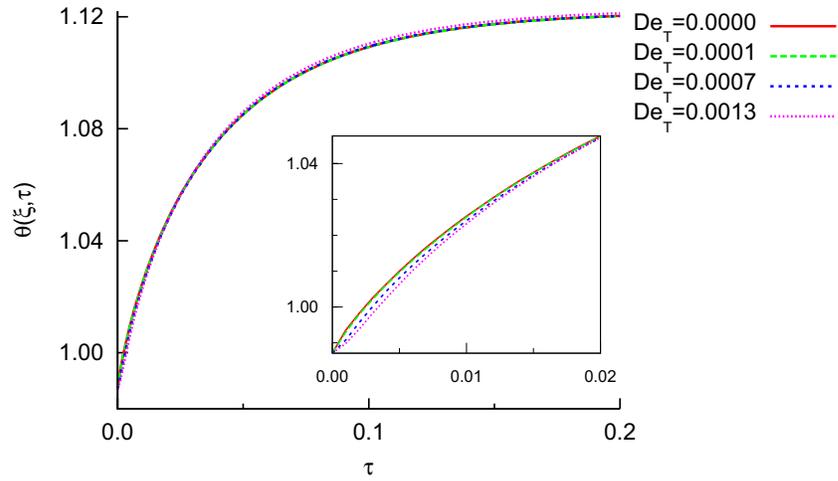


Figura 6.1: Temperatura vs tiempo para $\xi = 0$ con $\phi_s = 0$ y $\Phi_r(\xi) = \beta A e^{-\beta\xi}$, donde $\beta = 6$ y $A = 0.8626$, con diferentes De_T .

Para una fuente de calentamiento oscilatoria, nuevamente se percibe que para grandes valores del tiempo adimensional, la temperatura con relajamiento es un poco mayor que la temperatura de Fourier. De acuerdo con las distribuciones mostradas en la figura 6.2 se aprecia que para un Deborah térmico de 0.0013 la onda de temperatura está levemente desfasada de la curva correspondiente a un $De_T = 0$, es decir, está ligeramente desplazada a la derecha. Este cambio inicia a partir de $\tau = 0.02$, que es el momento en que la temperatura con relajamiento comienza a ser más alta.

Para tiempos cortos, conforme aumenta el valor del número de Deborah térmico el valor de la temperatura superficial alcanzado es menor. Para $De_T = 0.0013$ se puede distinguir un sutil cambio de pendiente a partir de $\tau = 0.001$ que corresponde al instante en que la respuesta térmica deja de estar amortiguada por el tiempo de relajación.

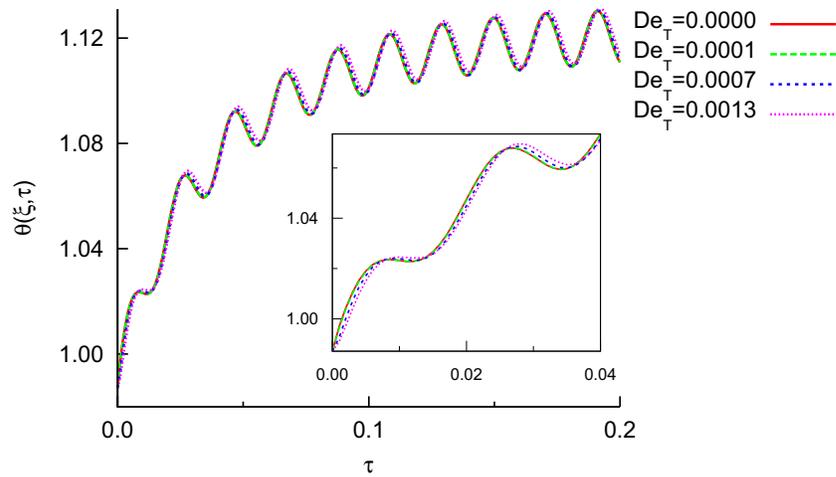


Figura 6.2: Temperatura vs tiempo para $\xi = 0$ y diferentes De_T con: $\phi_s = 0$ y $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta[A + B\cos\Omega\tau]e^{-\beta\xi}$, donde $\beta = 6$, $A = 0.8626$, $B = 0.6901$ y $\Omega = 300$.

Ahora, si se elimina la fuente de calentamiento espacial y se impone únicamente un flux superficial constante se puede distinguir que para tiempos cortos y números de Deborah térmico muy pequeños, hay un cambio en la concavidad de la curva en aproximadamente $\tau = 0.001$. Este efecto se disipa conforme crece De_T ; por tanto, a mayor relajamiento del flux de energía, el crecimiento de la temperatura se dará de manera más suavizada.

De igual manera que para los casos anteriores, para valores pequeños de τ a mayor relajamiento, menor será la temperatura superficial. Sin embargo, para tiempos grandes, no hay gran diferencia entre las distribuciones de temperatura calculadas. Lo anterior puede significar que el efecto de que una temperatura con relajamiento sea mayor a tiempos grandes que una sin relajamiento, sea provocado por el tipo de fuente de calentamiento.

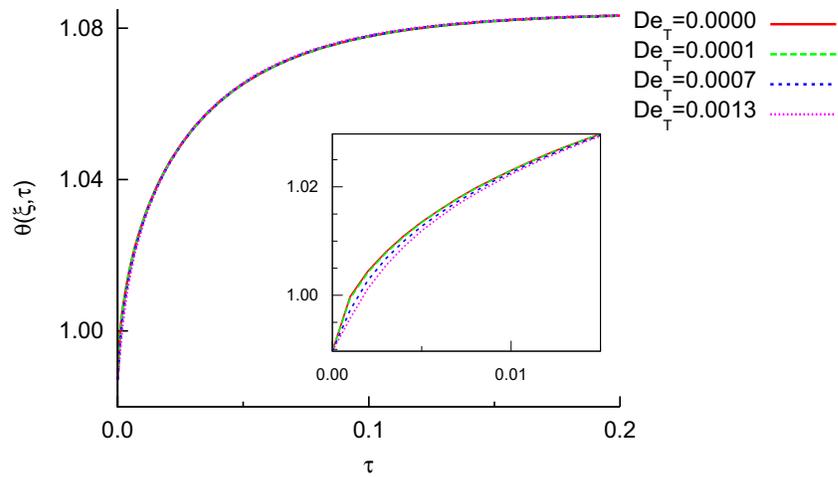


Figura 6.3: Temperatura vs tiempo en $\xi = 0$ con diferentes De_T , $\Phi_r = 0$ y $\phi_s = 0.3405$.

En los análisis anteriores se encontró que el relajamiento en tejidos biológicos se puede percibir para números de Deborah térmico mayores a 0.0007 y que sus consecuencias significativas se dan a tiempos cortos. En general, se calcularon temperaturas aproximadamente 0.003 unidades menores que para un sistema sin relajamiento. Pese a que es evidente que esta cantidad es muy pequeña, puede ser de gran importancia en un proceso de análisis térmico pues la variación de temperatura dentro del tejido está sumamente controlada y la variación máxima permisible desde el centro hasta la superficie es de 0.0135 [13]. Se puede concluir entonces, que no tomar en cuenta este retraso en el análisis puede llevar a errores significativos al estimar la temperatura del tejido que podrían reflejarse en un daño epitelial.

6.2. Comparación de las Distribuciones de Temperatura de Fourier y de Maxwell-Cattaneo

Como se especificó en el capítulo 5, existen diferentes pruebas dinámicas a las que un tejido biológico puede ser sometido ya sea por un proceso quirúrgico, por algún tipo de accidente, o bien para análisis térmicos con propósitos de investigación como en la criopreservación [10]. En esta sección se comparan las distribuciones de temperatura con y sin relajamiento que son típicas de algunos de estos procesos.

Al tomar el caso de un calentamiento superficial por pulsos (ver figura 6.4a) se encontró que para tiempos cortos, la temperatura superficial con relajamiento es menor que la temperatura de Fourier. El aumento de la temperatura es más suavizado en el caso con relajamiento y es menor hasta aproximadamente $\tau = 0.02$. Se observó además que para profundidades mayores en el tejido ($\xi \geq 0.01$) la temperatura no aumenta durante los primeros instantes de aplicación del flux superficial, esto significa que la respuesta del tejido ante el estímulo está retrasada. A medida que aumenta el valor de ξ , es mayor el tiempo que tarda en responder. A distancias cercanas al núcleo del tejido, ya no se distingue una clara diferencia entre la temperatura de Maxwell-Cattaneo y la de Fourier.

Al terminar de aplicar el estímulo $\tau \geq 0.08$, el efecto del relajamiento hace que la respuesta térmica esté retrasada. Es decir, el sistema continúa calentado por algunos instantes pese a que ya se interrumpió la señal del impulso superficial. El tiempo de este retraso incrementa con el valor de la distancia. Para estos valores de τ se tienen temperaturas con relajamiento mayores, sin embargo, esto se invierte a partir de $\tau = 0.1$; posteriormente ambas decrecen hasta alcanzar el mismo estado estacionario.

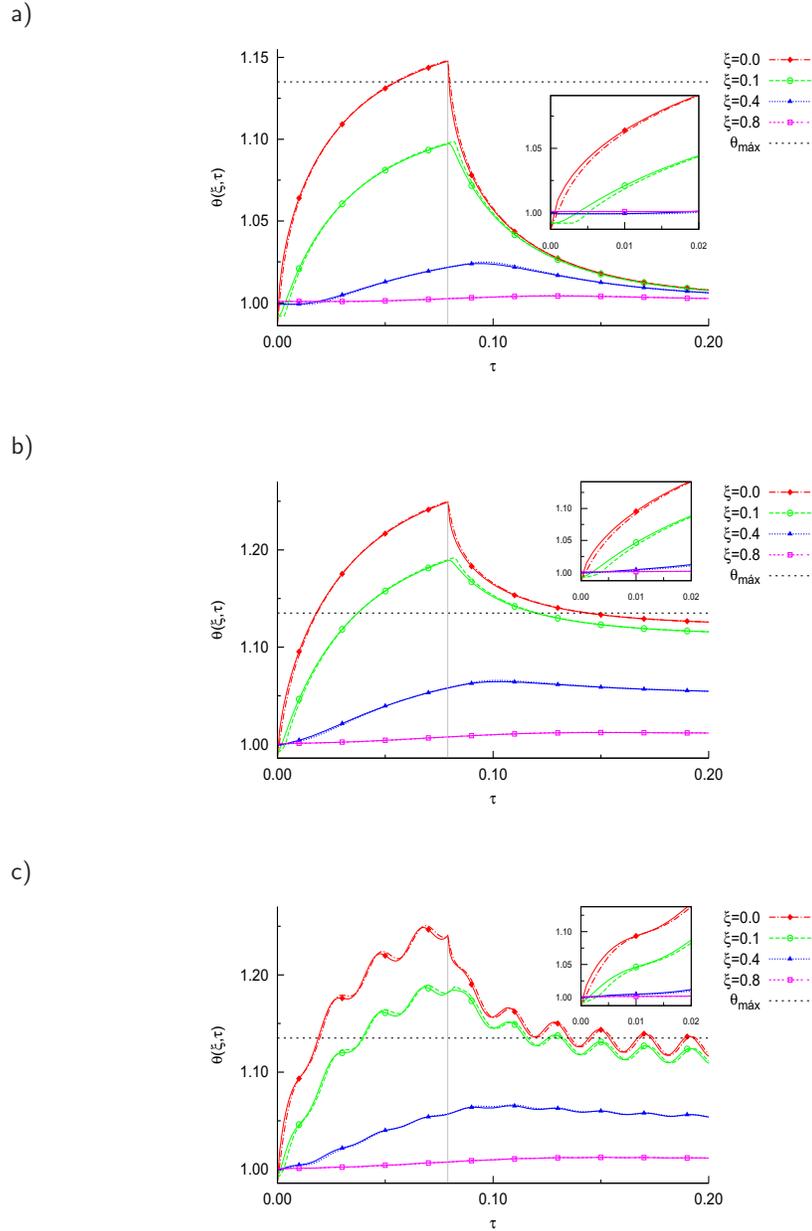


Figura 6.4: Temperatura vs tiempo para diferentes valores de ξ con $\phi_s = 0.6901$ para $\tau < 0.8$ y $\phi_s = 0$ para $\tau \geq 0.8$, con $\sigma = 17.1010$ y: a) $\Phi_r = 0$, b) $\Phi_r(\xi) = \beta A e^{-\beta \xi}$ y c) $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [A + B \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi}$, donde $\beta = 6$, $A = 0.8626$, $B = 0.6901$ y $\Omega = 300$. Las líneas sólidas corresponden a $De_T = 0$ y las líneas punteadas a $De_T = 0.0013$.

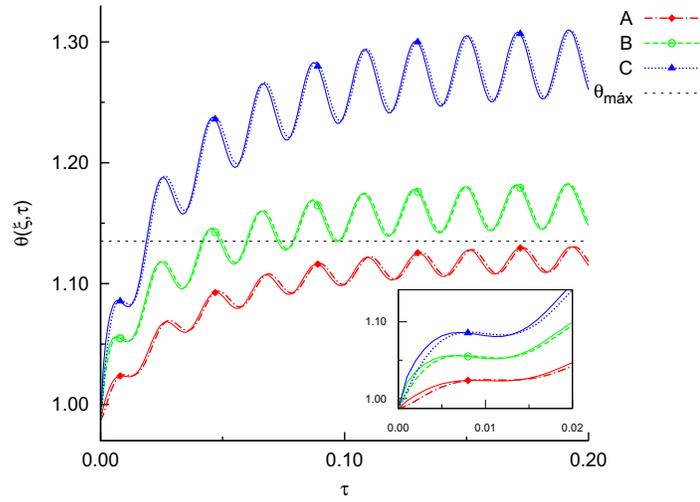
No se encontraron nuevos efectos del relajamiento de los ya mencionados, al añadir una fuente de calentamiento espacial constante respecto al tiempo (figura 6.4b). Cabe recalcar que nuevamente el efecto de la fuente espacial se ve en un incremento en los valores de la temperatura con relajamiento para tiempos largos.

Si ahora la fuente espacial añadida es oscilatoria, resulta que para tiempos largos la temperatura con relajamiento está ligeramente adelantada y presenta máximos un poco mayores. Una vez más, para tiempos cortos la temperatura con relajamiento es menor y aumenta de forma más suavizada que cuando no se considera este término. Además, a mayor profundidad la diferencia entre ambas distribuciones comienza a desvanecerse (ver figura 6.4c).

Otra prueba típica a la que se someten los tejidos es la aplicación de fuentes de radiación, para simularlas se seleccionaron una fuente espacial y un flux superficial oscilatorios. En las distribuciones con relajamiento que se muestran en la figura 6.5 se puede ver que se obtiene el mismo valor de temperaturas de Fourier, no obstante, la respuesta está retrasada. Para tiempos cortos, el tejido tarda en reaccionar ante el estímulo de calentamiento y comienza a aumentar paulatinamente y de forma más lenta que en el caso sin relajamiento.

Cuando existe fuente de calentamiento espacial (distribuciones **A** y **C**), el efecto del relajamiento hace que la temperatura superficial tarde aún más en aumentar, ya que el número de Deborah térmico hace que la respuesta está amortiguada en los primeros instantes del experimento.

a)



b)

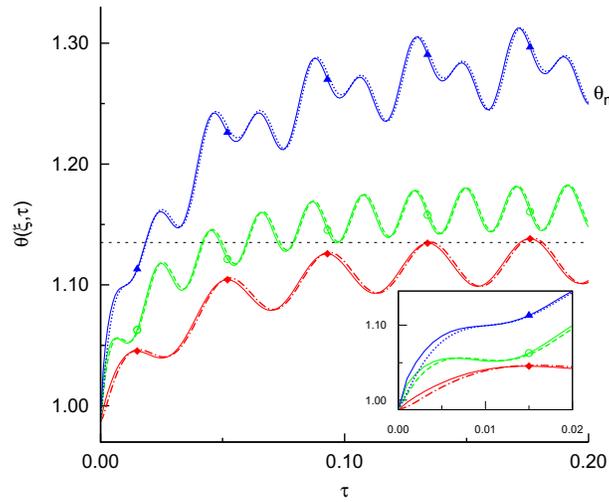


Figura 6.5: Temperatura vs tiempo en $\xi = 0$ con $\sigma = 17.1010$ donde: **A:** $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [0.0826 + 0.6901 \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi}$ y $\phi_s = 0$, **B:** $\Phi_r = 0$ y $\phi_s(\tau) = 0.6901 + 0.3450 \cos \Omega' \tau$ y **C:** $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [0.0826 + 0.6901 \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi}$ y $\phi_s(\tau) = 0.6901 + 0.3450 \cos \Omega' \tau$, donde $\beta = 6$, Las frecuencias de oscilación son a) $\Omega = \Omega' = 300$ y b) $\Omega = 150$ y $\Omega' = 300$. Las líneas sólidas corresponden a $De_\tau = 0$ y las líneas punteadas a $De_\tau = 0.0013$.

Finalmente si en lugar de un flux superficial se impone un medio de enfriamiento, el flux estará dado por el intercambio entre la superficie de la piel y la temperatura de dicho medio. En esta situación se observa que para tiempos muy grandes no hay diferencia entre la temperatura de Fourier y la de Maxwell-Cattaneo (ver figura 6.6). Los efectos interesantes se dan a tiempos muy pequeños. En donde mientras más grande sea la temperatura del medio de enfriamiento, menor será la temperatura superficial. En las distribuciones con $De_T = 0$ (líneas sólidas) se observa que hay un cambio de pendiente que indica una variación súbita en la temperatura; esta inflexión se suaviza con el aumento del número de Deborah térmico, donde el crecimiento de la temperatura se hace de forma amortiguada.

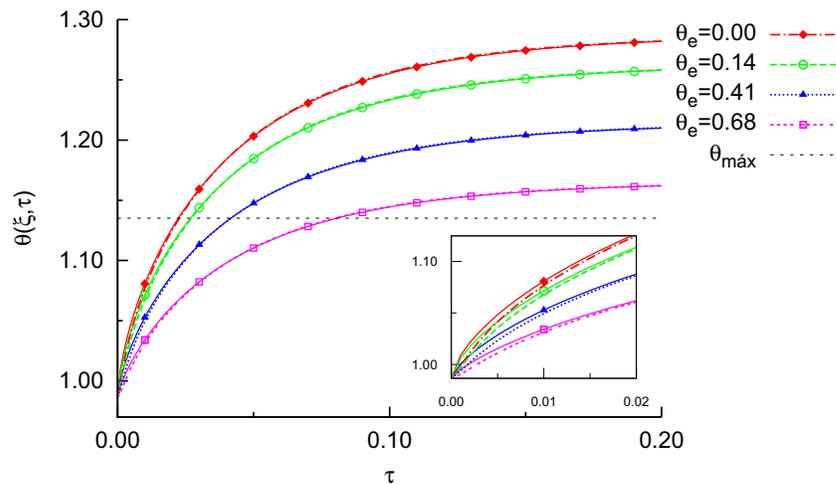


Figura 6.6: Temperatura vs tiempo para $\xi = 0$ con $\Phi_r(\xi) = \beta A e^{-\beta \xi}$ ($A = 0.8626$ y $\beta = 6$), $Bi = 1.28$, $h^* = 0.16$ y θ_e variable. Las líneas sólidas corresponden a $De_T = 0$ y las líneas punteadas a $De_T = 0.0013$.

Los casos anteriores son muy importantes para terapias médicas ya que describen las pruebas a las que se somete el tejido en caso, por ejemplo, de una cirugía oftalmológica. En tal situación se aplican pulsos interrumpidos por algunos segundos, si no se toma en cuenta que en la superficie y profundidades menores habrá un retraso en la respuesta térmica, se podría llegar a quemar el tejido.

En general se puede observar que al introducir el modelo de Maxwell-Cattaneo en la ecuación de transferencia de energía se obtienen distribuciones de temperatura que a tiempos grandes pueden ser descritas, sin ningún error, por la ley de Fourier. No obstante, es muy importante tomar en cuenta que a tiempos cortos el tejido va a relajar, lo que implica que habrá un retraso en la respuesta del tejido ante alguna perturbación térmica; por tanto, la temperatura superficial y en profundidades adyacentes tardará en responder, ya sea aumentando o disminuyendo. El resultado se verá en las distribuciones calculadas, en donde es evidente que dicha propiedad cambiará (ya sea respecto al tiempo o posición) de forma amortiguada.

CONCLUSIONES

La transferencia de energía en tejidos biológicos comprende una serie de mecanismos a nivel celular que compiten con otras funciones vitales dentro del cuerpo y con la interacción con el medio. El realizar este tipo de estudios acerca al hombre a una mejor comprensión sobre la forma como el cuerpo trabaja. El conocimiento obtenido puede ser después empleado en diferentes actividades para el beneficio de la salud.

Los procesos internos están gobernados por reacciones metabólicas y por las características del flujo sanguíneo. Los resultados de este proyecto indican que para el estado basal domina la transferencia por conducción dentro del tejido sobre los procesos convectivos, debidos al gradiente de temperatura entre el ambiente y la superficie de la piel; es por esto que se utilizaron números de Biot muy pequeños. Lo anterior también demuestra que la piel efectivamente es una capa aislante que evita las pérdidas o ganancias de energía de grandes magnitudes, manteniendo así un equilibrio térmico en todo el cuerpo.

La perfusión de la sangre, o el flujo de este líquido vital para el transporte de nutrientes dentro de las células, de forma general favorece la transferencia de energía. Se observó que a mayor perfusión es más fácil recuperar las condiciones del estado estacionario. La relevancia de hacer diferentes pruebas con el valor

de la perfusión radica en que muchas veces el flujo sanguíneo estará entorpecido por algún tipo de patología y es necesario saber cómo tratar con tejidos que no cumplen con los estándares fisiológicos normales.

En este trabajo se probaron diferentes modelos biológicos de transferencia de energía a fin de seleccionar el más adecuado para la representación de la temperatura dentro del tejido. Se encontró que para tiempos muy grandes la distribución de temperaturas puede estar descrita perfectamente por las leyes constitutivas clásicas. No obstante, los efectos a tiempos pequeños ya no pueden ser igualmente predecibles con estas teorías.

Dada la complejidad de los tejidos, su respuesta ante una perturbación térmica no será inmediata si se está trabajando con escalas temporales pequeñas. Por tanto, es importante tomar en cuenta el tiempo que tardará en transmitir la señal del estímulo a toda su estructura, para evitar aplicar terapias térmicas que terminen dañando al conjunto celular. El efecto de la introducción de un término de relajamiento se hace evidente para números de Deborah cercanos a 0.001, que es el intervalo que comprenden los tiempos característicos de los tejidos.

Considerando los resultados de este estudio, se recomienda modificar el modelo biológico de transferencia de energía para la predicción de distribuciones de temperatura en las que impliquen la aplicación de diferentes pruebas dinámicas, como el calentamiento con láser o algún otro tipo de radiación electromagnética a tiempos cortos. Cabe mencionar que el decir tiempos cortos comprende un periodo aproximado entre 0 y 300 segundos.

Las distribuciones de temperatura calculadas para los conjuntos epiteliales son coherentes con los resultados publicados en estudios previos y cumplen con los estándares fisiológicos adecuados para mantener al tejido sano. Con el objetivo de darle continuidad a esta investigación, se recomienda la comparación de los resultados de la aplicación de las pruebas dinámicas aquí sugeridas con datos experimentales obtenidos de casos concretos, como: el proceso de termorregulación en el cerebro, cáncer en tejidos de pecho, malfuncionamiento renal, almacenamiento de tejidos bajo criopreservación, entre otros. De tal manera que se llegaran a desarrollar mapas térmicos que posteriormente pudieran ser utilizados para el beneficio de la comunidad en terapias médicas no invasivas.

Variables dimensionales

x	dirección espacial
t	tiempo
$T(x, t)$	temperatura del tejido
$T_o(x)$	temperatura del estado estacionario
$T_t(x, t)$	temperatura transitoria
T_s	temperatura superficial del tejido
T_{o_s}	temperatura superficial del estado estacionario
T_{t_s}	temperatura superficial transitoria
T_a	temperatura de la sangre arterial
T_c	temperatura central del tejido
T_f	temperatura del aire
T_e	temperatura del medio de enfriamiento
$T_{máx}$	temperatura segura máxima
c_p	calor específico relativo
c_{p_m}	calor específico del tejido
c_{p_b}	calor específico de la sangre
ρ	densidad relativa
ρ_m	densidad del tejido
ρ_b	densidad de la sangre
ω_b	perfusión de la sangre
W_b	perfusión en el tejido
L	espesor del tejido
k	conductividad térmica del tejido
h_o	coeficiente convectivo aparente
h_o	coeficiente convectivo total
α	coeficiente de difusión térmica
λ	tiempo de relajación del tejido

Q_m	f fuente de energía metabólica
$Q_r(x, t)$	f fuente de energía espacial
$P_o(t)$	f potencia de calentamiento
η	f coeficiente de dispersión
a	f potencia de calentamiento constante
b	f amplitud de la onda de la potencia de calentamiento
ω	f frecuencia de oscilación de la potencia de calentamiento
q_s	f flux de energía en la superficie

Variables adimensionales

ξ	f dirección espacial
τ	f tiempo
$\theta(\xi, \tau)$	f temperatura del tejido
$\theta_o(\xi)$	f temperatura del estado estacionario
$\theta_t(\xi, \tau)$	f temperatura transitoria
θ_s	f temperatura superficial del tejido
θ_{o_s}	f temperatura superficial del estado estacionario
θ_{t_s}	f temperatura superficial transitoria
θ_a	f temperatura de la sangre arterial
θ_f	f temperatura del aire
θ_e	f temperatura del medio de enfriamiento
$\theta_{máx}$	f temperatura segura máxima
σ	f perfusión en el tejido
Bi_o	f número de Biot del estado estacionario
Bi	f número de Biot
h^*	f coeficiente convectivo relativo
De_T	f número de Deborah térmico
Φ_m	f fuente de energía metabólica
$\Phi_r(\xi, \tau)$	f fuente de energía espacial
$\zeta(\tau)$	f potencia de calentamiento
β	f coeficiente de dispersión
A	f potencia de calentamiento constante
B	f amplitud de la onda de la potencia calentamiento
Ω	f frecuencia de oscilación de la potencia de calentamiento
ϕ_s	f flux de energía en la superficie
A'	f flux de energía en la superficie constante
B'	f amplitud de la onda del flux de energía en la superficie
Ω'	f frecuencia de oscilación del flux de energía en la superficie

B

RELACIONES ADIMENSIONALES

Tabla B.1: Comparación de algunas de las propiedades y variables dimensionales y adimensionales utilizadas.

VARIABLE	RELACIÓN ADIMENSIONAL	EJEMPLO
Posición	$\xi = \frac{x}{L}$	$x = 0.003 \text{ m}$ $\xi = 1$
Tiempo	$\tau = \frac{\alpha}{L^2} t$	$t = 10 \text{ s}$ $\tau = 0.007$
Perfusión	$\sigma = \frac{L^2}{\alpha} W_b$	$W_b = 0.0011 \text{ s}^{-1}$ $\sigma = 17.101$
Conductividad térmica, coeficiente convectivo, número de Biot	$Bi = \frac{hL}{k}$	$k = 0.235 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{°C}}$ $h_o = 1.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{°C}}$ $Bi_o = 0.2$
Temperatura	$\theta = \frac{T}{T_c}$	$T = 1 \text{ °C}$ $\theta = 0.027$ $T_a = 37 \text{ °C}$ $\theta_a = 1.000$ $T_s = 36.5 \text{ °C}$ $\theta_s = 0.986$ $T_{m\acute{a}x} = 42 \text{ °C}$ $\theta_{m\acute{a}x} = 1.135$
Fuente de energía	$\Phi = \frac{L^2}{k T_c} Q$	$Q_m = 368 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$ $\Phi_m = 0.038$
Coefficiente de dispersión	$\beta = \eta L$	$\eta = 200 \text{ m}^{-1}$ $\beta = 6$
Frecuencia de oscilación	$\Omega = \frac{L^2}{\alpha} \omega$	$\omega = 0.01 \text{ s}^{-1}$ $\Omega = 150$
Tiempo de relajación térmico, Número de Deborah térmico	$De_T = \lambda \frac{\alpha}{L^2}$	$\lambda = 20 \text{ s}$ $De_T = 0.0013$

RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE TRANSPORTE

Tabla C.1: Ecuaciones utilizadas para calcular las distribuciones de temperatura tisulares.

Ecuación diferencial	<p>I. Problema clásico:</p> $\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \sigma [\theta_a - \theta(\xi, \tau)] + \Phi_m + \Phi_r(\xi, \tau) \quad (4.28)$ <p>II. Problema con relajamiento:</p> $De_T \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \sigma [\theta_a - \theta(\xi, \tau)] + \Phi_m + \Phi_r \quad (4.31)$
Solución	$\theta(\xi, \tau) = \theta_o(\xi) + \theta_t(\xi, \tau) e^{-\sigma \tau} \quad (4.32)$

Tabla C.2: Ecuaciones utilizadas para calcular las distribuciones de temperatura tisulares del estado estacionario.

Ecuación diferencial	$\frac{\partial^2 \theta_o(\xi)}{\partial \xi^2} + \sigma [\theta_a - \theta_o(\xi)] + \Phi_m = 0 \quad (4.33)$
Condiciones de frontera	$\xi = 0, \quad -\left. \frac{d\theta_o(\xi)}{d\xi} \right _{\xi=0} = Bi_o [\theta_f - \theta_{os}] \quad (4.34)$
	$\xi = 1, \quad \theta_o(\xi = 1) = 1 \quad (4.35)$

Tabla C.2: Ecuaciones utilizadas para calcular las distribuciones de temperatura tisulares del estado estacionario (continuación).

Solución analítica	$\theta_o(\xi) = \theta_p(\xi) + K_1 \cosh\sqrt{\sigma} \xi + K_2 \sinh\sqrt{\sigma}(1 - \xi) \quad (4.39)$
	donde:
	$K_1 = \frac{1 - \theta_{op}(\xi=1)}{\cosh\sqrt{\sigma}} \quad (4.40)$
	$K_2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma} \cosh\sqrt{\sigma}} \left\{ Bi_o [\theta_f - \theta_{os}] + \left. \frac{d\theta_{op}(\xi)}{d\xi} \right _{\xi=0} \right\} \quad (4.41)$
	Caso i: $\Phi_m \neq \Phi_m(\xi)$ $\theta_{op} = \theta_a + \frac{\Phi_m}{\sigma} \quad (4.43)$
Caso ii: $\Phi_m = \Phi_m(\xi)$ $\theta_{op}(\xi) = \theta_a + \frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\sigma} \xi \quad (4.44)$	

Tabla C.3: Ecuaciones utilizadas para calcular las distribuciones de temperatura tisulares transitorias.

Ecuación diferencial	I. Problema clásico: $\frac{\partial \theta_t(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_t(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \Phi_r(\xi, \tau) e^{\sigma \tau} \quad (4.45)$
	II. Problema con relajamiento: $De_T \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial \tau^2} + [1 - 2\sigma De_T] \frac{\partial \theta_t}{\partial \tau} + \sigma^2 De_T \theta_t = \frac{\partial^2 \theta_t}{\partial \xi^2} + \Phi_r e^{\sigma \tau} \quad (4.55)$
	donde: $\Phi_r(\xi, \tau) = \beta [A + B \cos \Omega \tau] e^{-\beta \xi} \quad (4.60)$
Condiciones de frontera	Caso i: sistema con flux de energía aplicado en la superficie: $\xi = 0, \quad - \left. \frac{\partial \theta_t(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right _{\xi=0} = \{ \phi_s - Bi_o [\theta_f - \theta_{os}] \} e^{\sigma \tau} \quad (4.48)$
	Caso ii: sistema con medio de enfriamiento: $\xi = 0, \quad - \left. \frac{\partial \theta_t(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right _{\xi=0} = Bi \{ \theta_k(\tau) - \theta_{ts} \} \quad (5.10)$
	donde: $\theta_k(\tau) = [(h^* - 1)\theta_{os} + \theta_e - h^* \theta_f] e^{\sigma \tau} \quad (5.9)$
	$\xi = 1, \quad \theta_t(\xi = 1, \tau) = 0 \quad (4.47)$

Tabla C.3: Ecuaciones utilizadas para calcular las distribuciones de temperatura tisulares transitorias (continuación).

Condiciones iniciales	$\tau = 0, \quad \theta_t(\xi, \tau = 0) = 0$ (4.49)
	$\tau = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta_{t_i}(\xi_i, \tau)}{\partial \tau} \right _{\tau=0} = 0$ (4.57)
Solución numérica (por diferencias finitas)	<p>para: $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$</p> <p>I. Problema clásico:</p> $\frac{d\theta_{t_i}(\tau)}{d\tau} = \frac{\theta_{t_{i+1}} - 2\theta_{t_i} + \theta_{t_{i-1}}}{(\Delta\xi)^2} + \Phi_{r_i}(\tau) e^{\sigma\tau}$ (4.51) <p>II. Problema con relajamiento:</p> $De_T \frac{d^2\theta_{t_i}}{d\tau^2} + [1 - 2\sigma De_T] \frac{d\theta_{t_i}}{d\tau} + \sigma^2 De_T \theta_{t_i} = \frac{\theta_{t_{i+1}} - 2\theta_{t_i} + \theta_{t_{i-1}}}{(\Delta\xi)^2} + \Phi_{r_i}(\tau) e^{\sigma\tau}$ (4.56) <p>donde:</p> $\Phi_{r_i}(\tau) = \beta [A + B \cos \Omega \tau] e^{-\beta i \Delta \xi}$ (4.62) <p>para: $i = 0$:</p> <p>Caso i: sistema con flux de energía aplicado en la superficie:</p> $\theta_{t_0} = \theta_{t_1} + \Delta\xi \{ \phi_s - Bi_o [\theta_f - \theta_{o_s}] \} e^{\sigma\tau}$ (4.53) <p>Caso ii: sistema con medio de enfriamiento:</p> $\theta_{t_0} = \frac{\theta_{t_1} - Bi \Delta \xi \theta_k(\tau)}{1 - Bi \Delta \xi}$ (5.11) <p>para: $i = n$:</p> $\theta_{t_n} = 0$ (4.54)

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Schmid-Schönbein G. & Diller K., *Transport processes in biomedical systems: a roadmap for future research directions*, Annals of Biomedical Engineering, 33 (9), pp. 1136 - 1141, 2005.

- [2] Bluestein D. & Moore J.E., *Biofluids educational issues: an emerging field aims to define its next generation*, Annals of Biomedical Engineering, 33 (12), pp. 1674 - 1680, 2005.

- [3] Truskey G.A., Yuan F. y Katz D.F., *Transport phenomena in biological systems*, Prentice Hall, USA, 2004.

- [4] Khaled R.A. & Vafai K., *The role of porous media in modeling flow and heat transfer in biological tissues*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 46, pp. 4989 - 5003, 2003.

- [5] Liu J. & Xu L.X., *Boundary information based diagnostics on the thermal states of biological bodies*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 43, pp. 2827 - 2839, 2000.

- [6] Deng Z.-S. & Liu J., *Analytical study on bioheat transfer problems with spatial or transient heating on skin surface or inside biological bodies*, Journal of Biomechanical Engineering, 124, pp. 638 - 649, 2002.

- [7] Torvi D.A. & Dale J.D., *A finite element model of skin subjected to a flash fire*, ASME, 116, pp. 250 - 255, 1994.

- [8] Fiala D., Lomas K.J. & Stohrer M., *A computer model of the human thermoregulation for the wide range of environmental conditions: the passive system*, Journal of Applied Physiology, 87, pp. 1957 - 1972, 1999.

- [9] Gowrishankar T.R. *et al.*, *Transport lattice models of heat transport in skin with spatially heterogeneous, temperature-dependent perfusion*, BioMedical Engineering OnLine, 3 (42), 2004.
- [10] Deng Z.-S. & Liu J., *Non-Fourier heat conduction effect on prediction of temperature transients and thermal stress in skin cryopreservation*, Journal of Thermal Stresses, 26, pp. 779 - 798, 2003.
- [11] Liu K.C., *Thermal propagation analysis for living tissue with surface heating*, International Journal of Thermal Sciences, 47, pp. 507-513, 2008.
- [12] Van Wynsberghe D., Noback C.R. & Carola R., *Human anatomy & physiology*, 3rd ed., Mc Graw Hill, USA, 1995.
- [13] Guyton A.C. & Hall J.E., *Textbook of medical physiology*, 11th ed., Elsevier Saunders, China, 2006.
- [14] Valvano J., *Bioheat transfer*, Department of Electrical and Computer Engineering of the University of Texas, USA, 1995.
- [15] Miyakawa M. & Bolomey J.C., *Non-invasive thermometry of the human body*, CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [16] Pennes, H.H., *Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm*, Journal of Applied Physiology, 1, pp. 93-102, 1948.
- [17] Wissler E.H., *Pennes' 1948 paper revisited*, Journal of Applied Physiology, 85, pp. 35 - 41, 1998.
- [18] Baish J.W., *Formulation of a statistical-model of heat transfer in perfused tissue*, Journal of Biomechanical Engineering - Translation ASME, 116, pp. 521 - 527, 1994.
- [19] Chen, M.M. & Holmes, K.R., *Microvascular contributions in tissue heat transfer*, Annals of The New York Academy of Sciences, 335, pp. 137-150, 1980.

-
- [20] Bird R.B., Stewart W.E. & Lightfoot E.N., *Transport phenomena*, 2nd ed., John Wiley & Sons, USA, 2002.
- [21] Zhang D.M. *et al.*, *Non-Fourier heat conduction studying on high-power short-pulse laser ablation considering heat source effect*, The European Physical Journal Applied Physics, 33, pp. 91 - 96, 2006.
- [22] Zhang D.M. *et al.*, *Non-Fourier conduction model with thermal source term of ultra short high power pulsed laser ablation and temperatura evolvement before melting*, Physica B, 364, pp. 285 - 293, 2005.
- [23] Sukstanskii A.L. & Yablonskiy D.A., *An analytical model of temperature regulation in human head*, Journal of Thermal Biology, 29, pp. 583 - 587, 2004.
- [24] Carslaw H.S. & Jaeger J.C., *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, London, 1959.