UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EXISTENCIA DE TRAYECTORIAS GEODÉSICAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

KENYA VERÓNICA ESPINOSA HURTADO

TUTORA: DRA. MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA

2006

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.
   Espinosa
   Hurtado
   Kenya Verónica
   Teléfono: 57 00 00 17
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría.

2. Datos de la tutora:
   Doctora
   Mónica Alicia
   Clapp
   Jiménez Labora

3. Datos del sinodal 1
   Doctor
   Sergio
   Hernández
   Linares

4. Datos del sinodal 2
   Doctor
   Héctor
   Méndez
   Lango

5. Datos del sinodal 3
   Doctor
   Salvador
   Pérez
   Esteva

6. Datos del sinodal 4
   Doctora
   María de la Luz Gimena
   de Teresa
   de Oteyza

7. Datos del trabajo escrito.
   Existencia de trayectorias geodésicas.
   49 páginas
   2006.

Agradecimientos

A mis padres por haberme dado su apoyo, su alegría, su amor y su educación. Les agradezco infinitamente haber inculcado en mi estas inmensas ganas de vivir, de disfrutar, valorar y de buscar día a día la felicidad.

A mi hermana por ser incondicional, por entenderme y por estar siempre ahí dispuesta a escucharme.

A Mau por enseñarme a querer de una manera diferente. Enseñarme que el amor es fuerte y nos hace ser mejores cada día.

A Marco por ser el ángel que tanto tiempo busque, que me cuida, me quiere y me mantiene siempre con los pies bien puestos sobre la tierra.

A Eric, Daniela y Clau por que al entrar a la Facultad de Ciencias mi vida cambió, los conocí y me enseñaron a amar y el verdadero sentido de la amistad. Gracias a este gran equipo, este sueño es realidad. Los quiero mucho.

A Víctor, Laurita, Toño, Azael, Preisser, Edgar Noé, Dulce, Milton y Carlos, por haber estado en esta lucha agotadora que juntos supimos enfrentar.

A Checo le agradezco su paciencia y la disposición tan grande que siempre tiene para enseñar.

A Cruz, Edgar, Lalo y Gris por estar conmigo disfrutando de esta hermosa vida universitaria.

A Víctor Neumann por haber sido el abuelo que nunca tuve, que tanto se preocupó por mi corazón y por mi alma.

A mi asesora, la Dra. Mónica Clapp, por su apoyo, su espera y por no sólo haberme guiado en este trabajo, sino por haberme enseñado una parte tan bonita de las matemáticas.

A mis sinodales por su tiempo y dedicación a este trabajo.

A Francisco Raggi, José Antonio Gómez y Héctor Méndez por ser más que buenos profesores. Les agradezco su apoyo y amistad.

A Manuel, Roberto, Juvenal y Violeta por tantas tardes juntos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por darme tanto.

Tesis elaborada con el apoyo del Proyecto PAPIIT IN110902.

Índice

Introducción

Muchos problemas de la física y de la geometría tienen una formulación variacional, es decir, pueden plantearse en términos de encontrar el mínimo (o, más en general, un punto crítico) de una función. Por ejemplo, un problema clásico muy importante es el siguiente: Dada una superficie en $\mathbb{R}^3$, ¿existe una trayectoria de longitud mínima, una geodésica, entre dos puntos dados de dicha superficie? O, dada una esfera, sabemos que entre cualesquiera dos puntos existe una trayectoria mínima y ¿si le quitamos un punto a la esfera, sigue existiendo?

Para abordar este tipo de problemas, necesitamos criterios que garanticen la existencia de mínimos de funciones reales definidas en espacios métricos y así demostrar la existencia de trayectorias geodésicas. El objetivo de esta tesis es dar esos criterios. El teorema central de este trabajo es el siguiente:

Teorema. Sea X un espacio métrico compacto. Si existe una trayectoria de longitud finita entre dos puntos ξ y η de X entonces existe una trayectoria geodésica de ξ a η en X.

Este teorema nos garantiza la existencia de trayectorias geodésicas en un espacio métrico compacto. Para su demostración se deberán resolver obstáculos, los cuales nos darán el desarrollo de esta tesis.

Nosotros sabemos que una función continua en un compacto alcanza su mínimo. Con este teorema podríamos tener resuelto nuestro problema pero no es así, pues la función longitud no es continua, como veremos en el primer capítulo.

Definiremos lo que es una función semicontinua inferiormente ($s.c.i.$) y entonces nos preguntaremos si con el siguiente teorema podremos resolver nuestro problema:

Teorema. Sean $f : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ $s.c.i.$ y $f_{\leq a} = \{x \in X : f(x) \leq a\} \neq \varnothing$. Si $f_{\leq a}$ es compacto para alguna $a \in \mathbb{R}$, entonces f está acotada inferiormente y alcanza su mínimo.

La demostración de este teorema se da en el capítulo "Existencia de mínimos". Si bien la afirmación contenida en él es muy útil, para nosotros no será suficiente ya que demostraremos que la función longitud sí es $s.c.i.$, pero $l_{\leq a}$ no es compacto, donde $l_{\leq a} = \{\sigma \in C^0(I, X) : l(\sigma) \leq a\}$ para todo $a \geq 0$.

Es importante notar que la longitud de una trayectoria no se modifica si la reparametrizamos por medio de una función continua no decreciente.

Consideremos entonces el espacio de todas las trayectorias σ de longitud finita parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco que unen a los puntos $\xi, \eta \in X$, donde X es un espacio métrico y lo denotaremos así $L_{\xi,\eta}(X)$. Nos preguntaremos nuevamente si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $l_{\leq a}$ es compacto y no vacío donde $l_{\leq a} = \{\sigma \in L_{\xi,\eta}(X) : l(\sigma) \leq a\}$.

Para demostrar que en este espacio sí existe $a \in \mathbb{R}$ favorable, estudiaremos los conceptos de compacidad y equicontinuidad en un conjunto de funciones continuas. El Teorema de Arzelá-Ascoli nos ayudará a demostrar que $l_{\leq a}$ es compacto.

Sabiendo esto podremos aplicar el teorema que garantiza que la función longitud alcanza su mínimo en $\sigma_0 \in L_{\xi,\eta}(X)$, y como todas las trayectorias se pueden reparametrizar proporcionalmente a la longitud de arco sin cambiar su longitud entonces σ_0 será una trayectoria geodésica en un espacio métrico compacto.

Capítulo 1

Longitud de trayectorias

En este capítulo empezaremos definiendo lo que es una trayectoria. Una trayectoria en un espacio métrico es una función continua que va de un intervalo cerrado al espacio métrico.

Demostraremos que la longitud de una trayectoria no es necesariamente finita. Veremos también que una trayectoria no es tan solo una curva geométrica en X ya que muchas trayectorias distintas pueden tener la misma curva imagen. Por esto el modo en que la recorremos va a afectar a la longitud de ésta, sin embargo es importante notar que la velocidad con la que lo hacemos no influye, de hecho su longitud no cambia si la reparametrizamos por medio de una función continua no decreciente.

También veremos que si la trayectoria es contínuamente diferenciable en un espacio normado entonces la longitud aquí definida coincide con la definida en nuestros cursos de cálculo.

Para poder abordar el tema sobre existencia de trayectorias geodésicas comenzaremos por ver a la longitud como una función que va del conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ a un espacio métrico.

Nosotros sabemos, por nuestros cursos de cálculo, que una función continua definida en un compacto alcanza su mínimo. Entonces nos surge la siguiente pregunta; ¿la función longitud es continua?. Veremos que la respuesta es negativa.

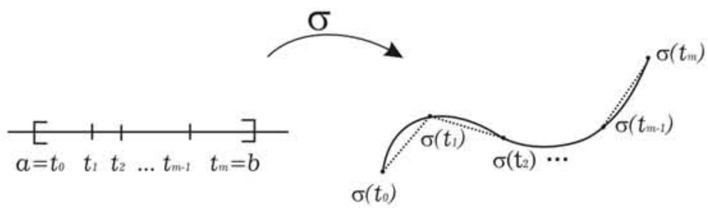
Definición 1.1 *Sea $X = (X, \rho)$ un espacio métrico y sean $\xi, \eta \in X$. Una trayectoria de ξ a η en X es una función continua $\sigma : [a, b] \to X$ tal que $\sigma(a) = \xi$ y $\sigma(b) = \eta$.*

Definimos la longitud de la trayectoria $\sigma : [a, b] \to X$ como

$$l(\sigma) \equiv \sup_{P_{[a,b]}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \rho\left(\sigma\left(t_{k-1}\right), \sigma\left(t_k\right)\right) : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b, m \in \mathbb{N} \right\}$$

donde $P_{[a,b]}$ es el conjunto de las particiones de $[a, b]$.

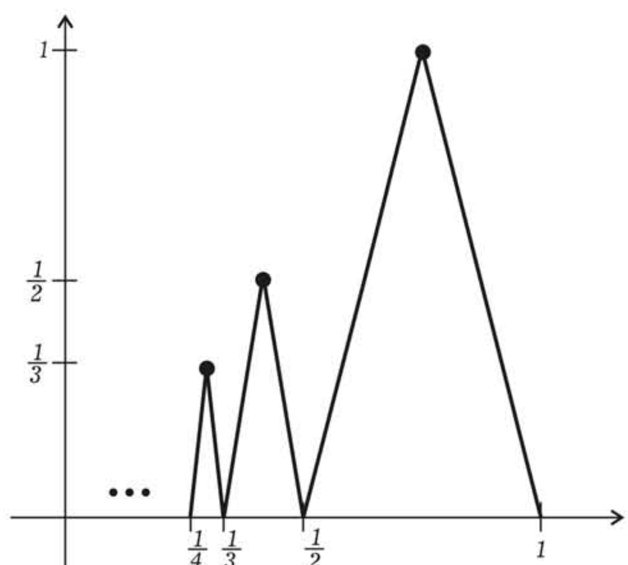
Una trayectoria de ξ a η de longitud mínima se llama una trayectoria geodésica de ξ a η.



Proposición 1.2 *La longitud de una trayectoria no es necesariamente finita.*

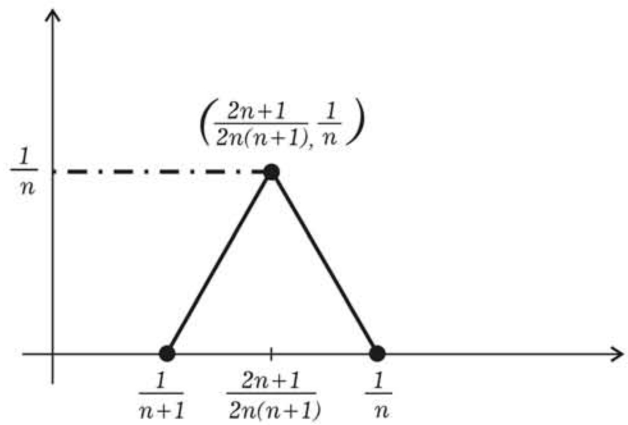
Demostración: Consideremos $\sigma(t) = (t, f(t))$ donde $t \in [0,1]$ y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ está definida asi:

$$f(t) = \begin{cases} -2(n+1)\left|t - \frac{2n+1}{2n(n+1)}\right| + \frac{1}{n} & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \le t \le \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$



Claramente f es continua en $\mathbb{R}$, entonces σ es continua y por lo tanto es una trayectoria.

Sea $h_n =$ *altura del* $n-$ *ésimo triángulo de la trayectoria.*



Observemos que $\sum\limits_{n=1}^{m} h_n \leq l(\sigma)$ y como $h_n = \frac{1}{n}$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \leq l(\sigma)$ .Tomando el límite cuando $m \to \infty$ y dado que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, se tiene que $l(\sigma)$ no es finita. ■

Proposición 1.3 *Sea X un espacio normado. Si $\sigma : [a,b] \to X$ es una trayectoria contínuamente diferenciable entonces la longitud aquí definida coincide con la usual, es decir,*

$$l(\sigma) = \int_a^b \left\| \frac{d\sigma}{dt}(t) \right\| dt$$

Demostración: Sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria contínuamente diferenciable. Sea

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

una partición del intervalo $[a,b]$.

Por el teorema del valor medio tenemos que

$$|\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})| = \left| \frac{d\sigma}{dt}(c_k) \right| |t_k - t_{k-1}|, \ c_k \in (t_{k-1}, t_k)$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{m} |\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{d\sigma}{dt}(c_k) \right| |t_k - t_{k-1}|, \ c_k \in (t_{k-1}, t_k)$$

entonces

$$\begin{aligned} & \sup_{P_{[a,b]}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} |\sigma(t_k) - \sigma(t_{k-1})| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b \right\} \\ = & \sup_{P_{[a,b]}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{d\sigma}{dt}(c_k) \right| |t_k - t_{k-1}| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b \right\} \end{aligned}$$

donde $P_{[a,b]}$ es el conjunto de las particiones de $[a,b]$.

Recordemos que:

$$l(\sigma) = \sup_{P_{[a,b]}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left|\sigma\left(t_k\right) - \sigma\left(t_{k-1}\right)\right| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b \right\}$$

y

$$\int_a^b \left|\tfrac{d\sigma}{dt}\left(t\right)\right| dt = \sup_{P_{[a,b]}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left|\tfrac{d\sigma}{dt}\left(c_k\right)\right| \left|t_k - t_{k-1}\right| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b \right\}$$

Por lo tanto

$$l(\sigma) = \int_a^b \left\|\tfrac{d\sigma}{dt}\left(t\right)\right\| dt.$$

■

Observemos que una trayectoria no es tan sólo una curva geométrica en X sino el modo como la recorremos. Muchas trayectorias distintas corresponden a la misma curva imagen. Por ejemplo:

Ejemplo 1.4 *Las trayectorias*

$$\sigma_k : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \ \sigma_k\left(t\right) = \left(\cos 2\pi kt, sen 2\pi kt\right),\ \ k \geq 1$$

de $(1,0)$ a $(1,0)$ tienen todas como imagen al círculo unitario, pero σ_k le da k vueltas al círculo, por lo que $l\left(\sigma_k\right) = 2\pi k$.

Demostración: En efecto, por la Proposición 1.3,

$$\begin{aligned}
l\left(\sigma_k\right) &= \int_0^1 \left\|\tfrac{d\sigma_k}{dt}\left(t\right)\right\| dt = \int_0^1 \left\|\left(-2\pi k sen 2\pi kt, 2\pi k \cos 2\pi kt\right)\right\| dt \\
&= \int_0^1 \left(\left(-2\pi k sen 2\pi kt\right)^2 + \left(2\pi k \cos 2\pi kt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 \left(\left(2\pi k\right)^2 \left(sen^2 2\pi kt + \cos^2 2\pi kt\right)\right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 2\pi k dt = 2\pi k.
\end{aligned}$$

■

La longitud de una trayectoria no depende de la velocidad con que la recorremos. De hecho, su longitud no cambia si la reparametrizamos por medio de una función no decreciente.

Proposición 1.5 *Si $\sigma : [a,b] \to X$ es una trayectoria de ξ a η y si $\phi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ es una función continua no decreciente tal que $\phi(\alpha) = a$ y $\phi(\beta) = b$, entonces $\tau \equiv \sigma \circ \phi : [\alpha, \beta] \to X$ es una trayectoria de ξ a η tal que $l(\tau) = l(\sigma)$.*

Demostración: Como σ y ϕ son continuas, entonces $\sigma \circ \phi$ es continua. Por lo tanto τ es continua.

Ahora $\tau(\alpha) = \sigma \circ \phi(\alpha) = \sigma(\phi(\alpha)) = \sigma(a) = \xi$ y $\tau(\beta) = \sigma \circ \phi(\beta) = \sigma(\phi(\beta)) = \sigma(b) = \eta$. Por lo tanto τ es una trayectoria de ξ a η.

Sea

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta$$

una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$.

Como ϕ es una función no decreciente tal que $\phi(\alpha) = a$ y $\phi(\beta) = b$, entonces

$$a = \phi(\alpha) = \phi(t_0) \leq \phi(t_1) \leq \ldots \leq \phi(t_m) = \phi(\beta) = b.$$

Sea

$$a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b$$

una partición del intervalo $[a, b]$.

Por el teorema del valor intermedio, dado $s_i \in [a,b]$ existe $t_i \in [\alpha, \beta]$ tal que $\phi(t_i) = s_i$.

Sean $s_i, s_j \in [a,b]$ tal que $s_i < s_j$, entonces existen $t_i, t_j \in [\alpha, \beta]$ talque $\phi(t_i) = s_i$ y $\phi(t_{j.}) = s_j$. Entonces $\phi(t_i) < \phi(t_j)$ y como ϕ es no decreciente tenemos que $t_i < t_j$.

Por lo tanto, toda partición en $[\alpha, \beta]$ induce una partición en $[a,b]$, y toda partición en $[a,b]$ induce una partición en $[\alpha, \beta]$.

Ahora,

$$\rho(\tau(t_{k-1}), \tau(t_k)) = \rho(\sigma \circ \phi(t_{k-1}), \sigma \circ \phi(t_k)) = \rho(\sigma(\phi(t_{k-1})), \sigma(\phi(t_k)))$$

con $t_{k-1} \leq t_k$ y $\phi(t_{k-1}) \leq \phi(t_k)$.

Entonces

$$\sum_{k=1}^{m} \rho(\tau(t_{k-1}), \tau(t_k)) = \sum_{k=1}^{m} \rho(\sigma(\phi(t_{k-1})), \sigma(\phi(t_k)))$$

luego

$$\begin{aligned}
& \sup_{P_{[\alpha,\beta]}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \rho\left(\tau\left(t_{k-1}\right), \tau\left(t_{k}\right)\right) : \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta \right\} \\
= & \sup_{P_{[\alpha,\beta]}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \rho\left(\sigma\left(\phi\left(t_{k-1}\right)\right), \sigma\left(\phi\left(t_{k}\right)\right)\right) : \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta \right\} \\
= & \sup_{P_{[a,b]}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \rho\left(\sigma\left(s_{k-1}\right), \sigma\left(s_{k}\right)\right) : a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b \right\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $l(\tau) = l(\sigma)$. ■

Nuestro objetivo es probar que, bajo ciertas condiciones, existe una trayectoria geodésica de ξ a η. En virtud de la proposición anterior podemos, sin perder generalidad, considerar únicamente trayectorias definidas en $I = [0,1]$ ya que, reparametrizando cualquier trayectoria de $[a,b] \to X$ mediante la reparametrización lineal

$$I = [0,1] \to [a,b], \ t \mapsto (b-a)\,t + a$$

obtenemos una trayectoria $I \to X$ de la misma longitud.

Sea $C^0(I,X)$ el conjunto de todas las funciones continuas $\sigma : I = [0,1] \to X$ con la métrica

$$\rho_\infty(\sigma,\tau) = \max_{0\le t\le 1} \rho\left(\sigma(t), \tau(t)\right), \text{ para } \sigma,\tau \in C^0(I,X).$$

La función longitud

$$l : C^0(I,X) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

en general, no es una función continua.

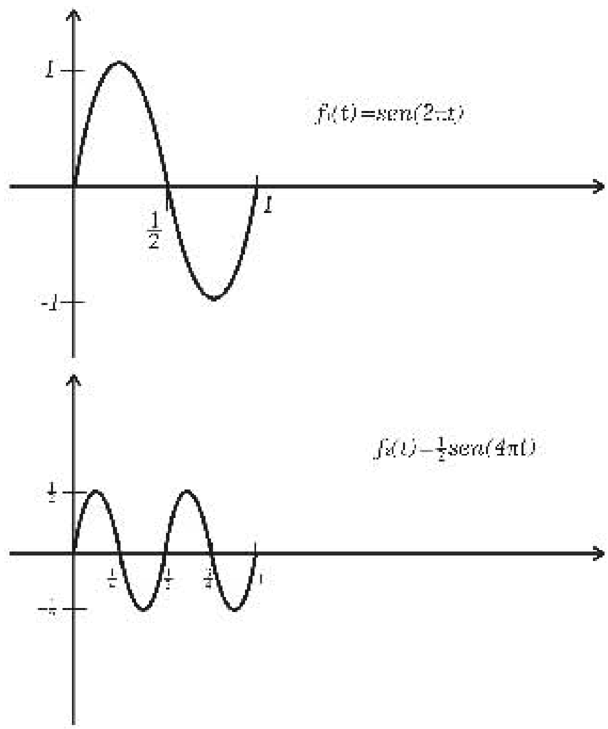
Proposición 1.6 *La función longitud*

$$l : C^0(I,\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

no es continua en $\sigma_0(t) = (t,0)$.

Demostración: Sea $\sigma_n(t) = (t, f_n(t))$ donde $t \in [0,1]$ y $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ está definida así:

$$f_n(t) = \frac{1}{n} sen 2\pi n t$$



Entonces

$$|\sigma_n(t) - \sigma_0(t)| = \frac{1}{n}|sen 2\pi n(t)| \leq \frac{1}{n}$$

por lo tanto

$$\rho_\infty(\sigma_n, \sigma_0) = \max_{0\leq t\leq 1}|\sigma_n(t) - \sigma_0(t)| \leq \frac{1}{n} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

Ahora, por la Proposición 1.3

$$\begin{aligned}
l(\sigma_n) &= \int_0^1 \left[1 + (2\pi\cos 2\pi nt)^2\right]^{\frac{1}{2}} dt \\
&> 2\pi \int_0^1 |\cos 2\pi nt|\, dt \\
&= 8\pi n \int_0^{\frac{1}{4n}} \cos 2\pi nt dt \\
&= 8\pi \left(\tfrac{sen 2\pi nt}{2\pi n} \Big|_0^{\frac{1}{4n}}\right) \\
&= 4
\end{aligned}$$

entonces $l\left(\sigma_n\right) \geq 4 \neq 1 = l(\sigma_0)$, para toda n.

Por lo tanto l no es continua. ■

Capítulo 2

Semicontinuidad

En este capítulo definiremos lo que es una función semicontinua inferiormente ($s.c.i.$) y daremos algunas equivalencias útiles. Veremos dos ejemplos típicos, uno de una función $s.c.i.$ y una que no lo es.

En el capítulo anterior vimos que la función longitud no es continua sin embargo sí es $s.c.i.$ Veremos que esta propiedad junto con la compacidad bastan para asegurar la existencia de mínimos.

Definición 2.1 *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es semicontinua inferiormente en el punto $x_0 \in X$ si dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) \ \ si \ \rho(x, x_0) < \delta.$$

Si $f(x_0) = \infty$ entonces dada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $M < f(x)$ si $\rho(x, x_0) < \delta$.
Decimos que f es semicontinua inferiormente ($s.c.i.$) si lo es en cada punto $x \in X$.

Una caracterización muy útil de la semicontinuidad inferior está dada en la siguiente proposición.

Proposición 2.2 *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(a) f es $s.c.i.$
(b) $f_{>a} = \{x \in X : f(x) > a\}$ es abierto para toda $a \in \mathbb{R}$.
(c) $f_{\leq a} = \{x \in X : f(x) \leq a\}$ es cerrado para toda $a \in \mathbb{R}$.

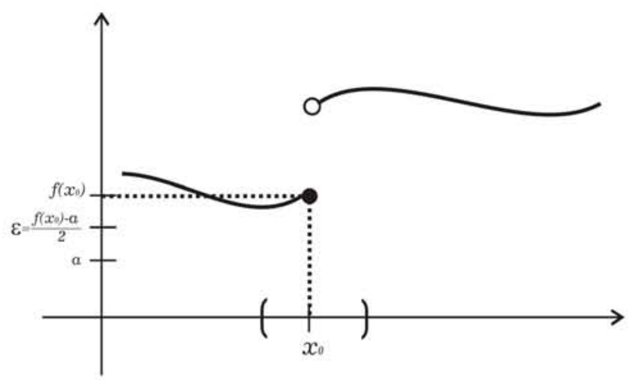
Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b)
Sea f $s.c.i.$ y $x_0 \in f_{>a}$.
Caso 1) $f(x_0) < \infty$

Tomemos $\varepsilon = \frac{f(x_0)-a}{2}$. Para esta $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ si $\rho(x, x_0) < \delta$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x_0) - \varepsilon \\ &= f(x_0) - \frac{f(x_0) - a}{2} \\ &= \frac{2f(x_0) - f(x_0) + a}{2} \\ &= \frac{f(x_0) + a}{2} \\ &> a \end{aligned}$$

si $\rho(x, x_0) < \delta$, es decir, la bola $B(x_0, \delta)$ satisface que para toda $x \in B(x_0, \delta)$, $f(x) > a$.

Entonces $B(x_0, \delta) \subset f_{>a}$, por lo tanto $f_{>a}$ es abierto.



Caso 2) $f(x_0) = \infty$

Tomemos $M = a$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > M = a$ si $\rho(x, x_0) < \delta$. Análogamente al caso anterior se tiene que $f_{>a}$ es abierto.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Sea $f_{>a}$ abierto para toda $a \in \mathbb{R}$.

Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $a = f(x_0) - \varepsilon$.

Como $f_{>a}$ es abierto entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset f_{>a}$,es decir si $x \in B(x_0, \delta)$ entonces $f(x) > a = f(x_0) - \varepsilon$.

Por lo tanto

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) \text{ si } \rho(x, x_0) < \delta$$

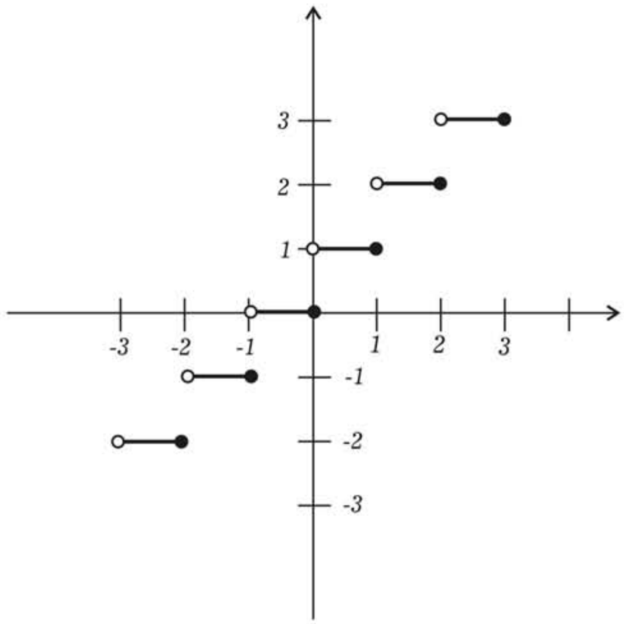
es decir f es *s.c.i.*

(b) $\Leftrightarrow$ (c)

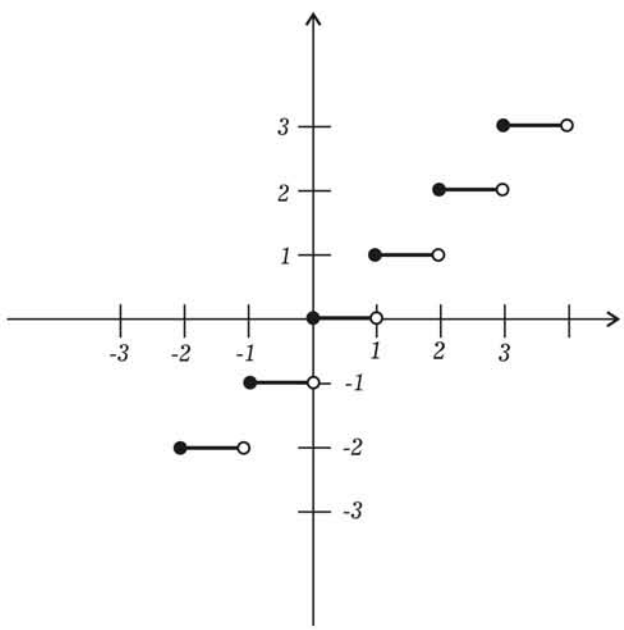
$f_{>a}$ es abierto si y sólo si $X \setminus f_{>a}$ es cerrado si y sólo si $f_{\leq a}$ es cerrado. ■

Un ejemplo típico de una función *s.c.i.* es el siguiente:

Ejemplo 2.3 *Sea* $]\,[: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función que a cada número real* t *le asocia el número entero* $]t[$ *más pequeño que es mayor o igual que* t*, es decir,* $]t[\, \equiv n$ *si* $n - 1 < t \leq n$*. Entonces,* $]\,[$ *es s.c.i.*



Ejemplo 2.4 *La función parte entera* $[\,] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, tal que* $[t] \equiv n$ *si* $n \leq t < n + 1$*, no es s.c.i.*

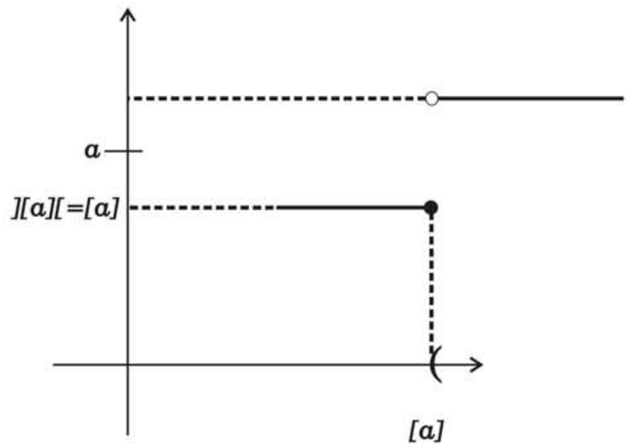


Demostración: Demostración del ejemplo 2.3.

Basta mostrar que $f_{>a} = ([a], \infty)$ y como $([a], \infty)$ es abierto entonces f es *s.c.i.*

$\supseteq$) Sea $x \in ([a], \infty)$, entonces $x > [a]$. Por tanto $f(x) \geq [a] + 1$ y como $[a] \leq a < [a] + 1$, entonces $f(x) > a$.

$\subseteq$) Sea $x \in f_{>a}$. Supongamos que $x \notin ([a], \infty)$, entonces $f(x) > a$ y $x \leq [a]$. Como $x \leq [a]$, entonces $f(x) \leq [a] \leq a$, entonces $f(x) \leq a$, lo cual es una contradicción por que $f(x) > a$.



■

Demostración: Demostración del ejemplo 2.4.

Sea $a = 0$, entonces $f(x) > 0$ si y sólo si $x \geq 1$.

Entonces $f_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = [1, \infty)$ y no es abierto. ■

Proposición 2.5 *La función longitud*

$$l : C^0(I, X) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

es semicontinua inferiormente, es decir, si dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $\sigma, \tau \in C^0(I, X)$

$$l(\sigma) - \varepsilon < l(\tau) \ \ si\ \rho_\infty(\tau, \sigma) = \max_{0 \leq t \leq 1} \rho(\tau(t), \sigma(t)) < \delta$$

Demostración: Sea $\sigma : I \to X$ una trayectoria en X y $\varepsilon > 0$. Sea

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

una partición de I tal que

$$l(\sigma) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{m} \rho(\sigma(t_{k-1}), \sigma(t_k))$$

Sea $U \equiv B\left(\sigma, \frac{\varepsilon}{4m}\right)$ la bola en $C^0_\infty(I,X)$ con centro en σ y radio $\frac{\varepsilon}{4m}$. Entonces, para cualquier $\tau \in U$, y para k, $1 \leq k \leq m$, se tiene que

$$\begin{aligned}\rho\left(\sigma\left(t_{k-1}\right), \sigma\left(t_k\right)\right) &\leq \rho\left(\sigma\left(t_{k-1}\right), \tau\left(t_{k-1}\right)\right) + \rho\left(\tau\left(t_{k-1}\right), \tau\left(t_k\right)\right) + \rho\left(\tau\left(t_k\right), \sigma\left(t_k\right)\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{4m} + \rho\left(\tau\left(t_{k-1}\right), \tau\left(t_k\right)\right) + \frac{\varepsilon}{4m}\end{aligned}$$

y sumando obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{m} \rho\left(\sigma\left(t_{k-1}\right), \sigma\left(t_k\right)\right) < \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{k=1}^{m} \rho\left(\tau\left(t_{k-1}\right), \tau\left(t_k\right)\right) + \frac{\varepsilon}{4}$$

Por lo tanto,

$$l\left(\sigma\right) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{m} \rho\left(\tau\left(t_{k-1}\right), \tau\left(t_k\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

y con ello,

$$l\left(\sigma\right) - \varepsilon < \sum_{k=1}^{m} \rho\left(\tau\left(t_{k-1}\right), \tau\left(t_k\right)\right) \leq l\left(\tau\right).$$

De aquí que

$$l\left(\sigma\right) - \varepsilon < l\left(\tau\right).$$

■

Capítulo 3

Existencia de mínimos

Veremos en este capítulo que la propiedad anterior, junto con la compacidad de $f_{\leq a}$, bastan para asegurar la existencia de mínimos.

Sabemos que toda función real continua en un espacio métrico compacto alcanza su máximo y su mínimo.

En cierto sentido las condiciones de compacidad y continuidad son opuestas la una de la otra: mientras más abiertos tenga la topología de X más fácil es que una función resulte continua pero más difícil es que X sea compacto, y viceversa. Esta disyuntiva se presenta con frecuencia en las aplicaciones. Resulta pues muy conveniente contar con resultados análogos bajo hipótesis más débiles.

A continuación probaremos un resultado que asegura la existencia de mínimos para funciones no necesariamente continuas. En la práctica resulta conveniente considerar a $+\infty$ como un posible valor de las funciones consideradas, como lo es la función longitud, de modo que así lo haremos en lo que sigue.

Definición 3.1 *Sea (t_k) una sucesión en $\mathbb{R}$. El límite inferior de (t_k) se define como*

$$\liminf_{k\to\infty} \; t_k = \sup_{n\geq 1} \; \inf_{k\geq n} t_k.$$

Este puede ser un número real o bien $+\infty$ o $-\infty$.

Decimos que el ínfimo de un conjunto no acotado por abajo es $-\infty$ y el supremo de un conjunto no acotado por arriba es $+\infty$.

Ejemplo 3.2 *Sea (t_k) una sucesión tal que $(t_k) = (-1)^k \left(\frac{1}{k} + 1\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Demostraremos que*

$$\liminf_{k\to\infty} \; t_k = \sup_{n\geq 1} \; \inf_{k\geq n} t_k = -1.$$

Demostración: Primero demostraremos que

$$\inf_{k\geq k_0}(t_k) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{k_0}+1\right) & k_0 \text{ es impar} \\ -\left(\frac{1}{k_0+1}+1\right) & k_0 \text{ es par} \end{cases}$$

Observemos que

$$t_k = \begin{cases} -\left(\frac{1}{k}+1\right) & k \text{ es impar} \\ \frac{1}{k}+1 & k \text{ es par} \end{cases}$$

Claramente $-\left(\frac{1}{k}+1\right) \leq \frac{1}{k}+1$. Entonces para probar que

$$\inf_{k\geq k_0}(t_k) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{k_0}+1\right) & k_0 \text{ es impar} \\ -\left(\frac{1}{k_0+1}+1\right) & k_0 \text{ es par} \end{cases}$$

basta demostar que

$$\inf_{k\geq k_0}(t_k) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{k_0}+1\right) & k_0 \text{ es impar} \\ -\left(\frac{1}{k_0+1}+1\right) & k_0 \text{ es par} \end{cases} \quad \text{con } k \text{ impar.}$$

Primero veremos que son cotas inferiores.
Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ y $k_0 \leq k$.
Si k_0 es impar entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &\leq \frac{1}{k_0} \\ \frac{1}{k}+1 &\leq \frac{1}{k_0}+1 \\ -\left(\frac{1}{k_0}+1\right) &\leq -\left(\frac{1}{k}+1\right). \end{aligned}$$

Si k_0 es par entonces como k es impar se tiene que $k_0 < k$, entonces

$$\begin{aligned} k_0+1 &\leq k \\ \frac{1}{k} &\leq \frac{1}{k_0+1} \\ \frac{1}{k}+1 &\leq \frac{1}{k_0+1}+1 \\ -\left(\frac{1}{k_0+1}+1\right) &\leq -\left(\frac{1}{k}+1\right). \end{aligned}$$

Ahora veremos que son las maximas cotas inferiores.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existen $k^*, k_0 \in \mathbb{N}$ tales que $0 < \frac{1}{k_0} - \frac{1}{k^*} < \varepsilon$ y existen $k^{**}, k_0+1 \in \mathbb{N}$ tales que $0 < \frac{1}{k_0+1} - \frac{1}{k^{**}} < \varepsilon$.

Caso 1)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k^*} &< -\frac{1}{k_0} + \varepsilon \\ -\frac{1}{k^*} - 1 &< -\frac{1}{k_0} - 1 + \varepsilon \\ -\left(\frac{1}{k^*} + 1\right) &< -\left(\frac{1}{k_0} + 1\right) + \varepsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$-\left(\frac{1}{k^*} + 1\right) < -\left(\frac{1}{k_0} + 1\right) + \varepsilon$$

Caso 2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_0+1} - \frac{1}{k^{**}} &< \varepsilon \\ -\frac{1}{k^{**}} &< -\frac{1}{k_0+1} + \varepsilon \\ -\frac{1}{k^{**}} - 1 &< -\frac{1}{k_0+1} - 1 + \varepsilon \\ -\left(\frac{1}{k^{**}} + 1\right) &< -\left(\frac{1}{k_0+1} + 1\right) + \varepsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$-\left(\frac{1}{k_0+1} + 1\right) < -\left(\frac{1}{k^{**}} + 1\right) < -\left(\frac{1}{k_0+1} + 1\right) + \varepsilon$$

Con lo anterior hemos demostrado que

$$\inf_{k \geq k_0}(t_k) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{k_0} + 1\right) & k_0 \text{ es impar} \\ -\left(\frac{1}{k_0+1} + 1\right) & k_0 \text{ es par} \end{cases}$$

Ahora demostaremos que $\sup\limits_{k_0 \geq 1} \inf\limits_{k \geq k_0} t_k = -1$.

Sea $(s_{k_0}) = (\inf\limits_{k \geq k_0} (t_k)$, $k_0 \in \mathbb{N}$, una sucesión. Demostraremos que (s_{k_0}) es una sucesión creciente y convergente, entonces demostrar que $\sup\limits_{k_0 \geq 1} s_{k_0} = -1$ es equivalente a probar que $\lim\limits_{k_0 \to \infty} s_{k_0} = -1$.

Demostremos por inducción que (s_{k_0}) es creciente.

Para $k_0 = 1$

$$\begin{aligned} -1 &< -\frac{1}{2} \\ -2 &< -\frac{1}{2} - 1 \\ s_1 &< s_2 \end{aligned}$$

Supongamos válido para $k_0 = n$, es decir $s_n < s_{n+1}$. Por demostrar para $k_0 = n+1$.

$$\begin{aligned} n+1 &< n+2 \\ \frac{1}{n+2} &< \frac{1}{n+1} \\ -\frac{1}{n+1} &< -\frac{1}{n+2} \\ -\frac{1}{n+1} - 1 &< -\frac{1}{n+2} - 1 \\ -\left(\frac{1}{n+1} + 1\right) &< -\left(\frac{1}{n+2} + 1\right) \\ s_{n+1} &< s_{n+2} \end{aligned}$$

Por lo tanto (s_{k_o}) es creciente.

Para ver que (s_{k_0}) converge basta probar que es acotada superiormente.

Sea $k_0 > 0$

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{k_0} \\ -\frac{1}{k_0} &< 0 \\ -\frac{1}{k_0} - 1 &< -1 \\ -\left(\frac{1}{k_0} + 1\right) &< -1 \end{aligned}$$

De manera análoga se demuestra que $-\left(\frac{1}{k_0+1} + 1\right) < -1$.

Ahora

$$\lim_{k_0 \to \infty} s_{k_0} = \begin{cases} \lim\limits_{k_0 \to \infty} -\frac{1}{k_0} - 1 \\ \lim\limits_{k_0 \to \infty} -\frac{1}{k_0+1} - 1 \end{cases}$$

se tiene entonces que

$$\lim_{k_0 \to \infty} s_{k_0} = -1.$$

Por lo tanto

$$\sup_{k_0 \geq 1} (s_{k_0}) = \sup_{k_0 \geq 1} \inf_{k \geq k_0} (t_k) = -1.$$

■

Proposición 3.3 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. f es semicontinua inferiormente en x_0 si y sólo si para toda sucesión (x_k) en X tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ se cumple*

$$f(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Demostración: $\Rightarrow$) Sea (x_k) en X tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ y sean $\varepsilon, M > 0$. Sabemos que f es *s.c.i.* entonces si $f(x_0) < \infty$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(y) > f(x_0) - \varepsilon \text{ si } y \in B(x_0, \delta).$$

Como $x_k \to x_0$ cuando $k \to \infty$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in B(x_0, \delta)$ si $k \geq k_0$, entonces

$$f(x_k) > f(x_0) - \varepsilon \text{ si } k \geq k_0.$$

Consideremos $A = \{f(x_k) : k \geq k_0\}$. Observemos que $A \neq \emptyset$ ya que al menos está $f(x_{k_0})$ y está acotado inferiormente, por lo tanto existe el ínfimo, entonces

$$\inf_{k \geq k_0} f(x_k) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

entonces

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

Dado que $\varepsilon > 0$ fue arbitrario se tiene

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq f(x_0).$$

Si $f(x_0) = \infty$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(y) > M$ si $y \in B(x_0, \delta)$. De manera análoga al caso anterior se tiene que $f(x_k) > M$ si $k \geq k_0$, entonces

$$\inf_{k \geq k_0} f(x_k) \geq M.$$

Tomemos el límite cuando $k \to \infty$, entonces

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq M.$$

$\Leftarrow$) Por contradicción. Supongamos que f no es *s.c.i.* en $x_0 \in X$, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda k existe $x_k \in X$ tal que $\rho(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$ y $f(x_k) \leq f(x_0) - \varepsilon$. Como $\rho(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$, entonces $x_k \to x_0$ cuando $k \to \infty$. Entonces $\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \leq f(x_0) - \varepsilon$ lo cual es una contradicción porque $f(x_0) - \varepsilon < \liminf_{k\to\infty} f(x_k)$. ■

Teorema 3.4 *Sea* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *s.c.i. Sí* $f_{\leq a} \neq \emptyset$ *y* $f_{\leq a}$ *es compacto para algún* $a \in \mathbb{R}$, *entonces* f *está acotada inferiormente y alcanza su mínimo en* X.

Demostración: Sea $c = \inf f \geq -\infty$. Como $f_{\leq a} \neq \emptyset$ existe $x_0 \in X$ tal que $c \leq f(x_0) \leq a$.

Caso 1) $c = a$

Entonces $f(x_0) = c$, por lo tanto f alcanza su mínimo.

Caso 2) $c < a$

Consideremos la siguiente sucesión:

$$c_k = \begin{cases} -k & \text{si} \quad c = -\infty \\ c + \frac{1}{k} & \text{si} \quad c \in \mathbb{R} \end{cases}, k \in \mathbb{N}.$$

Sea $x_k \in X$ tal que $c \leq f(x_k) \leq c_k$. Observa que para k suficientemente grande $c_k < a$, es decir $(x_k) \in f_{\leq a}$. Como $f_{\leq a}$ es compacto, (x_k) contiene una subsucesión convergente $x_{k_n} \to x_0$ en X. Como f es *s.c.i.*, por la proposición anterior,

$$c = \inf f \leq f(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k) \leq \lim_{k\to\infty} c_k = c.$$

Por lo tanto $f(x_0) = c$, es decir, x_0 es un mínimo de f. ■

Capítulo 4

Compacidad

En el capítulo anterior se demostró un teorema que garantiza la existencia de mínimos en una función. Nosotros quisieramos aplicar este teorema a nuestra función longitud, pues es semicontinua inferiormente y sólo nos faltaría ver que, para alguna $a \in \mathbb{R}$, $l_{\leq a}$ es no vacío y compacto. Por desgracia no existe a con esas propiedades, vease Proposición 6.1. Entonces definiremos lo que es precompacto y relativamente compacto, veremos algunas propiedades y daremos una relación entre estos conceptos. Esto nos ayudará, más adelante, para dar una caracterización de los compactos en el conjunto de todas las funciones continuas que van de un espacio métrico compacto a un espacio métrico completo.

Definición 4.1 *Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A es precompacto si dada $\varepsilon > 0$ existe una cubierta finita de A de bolas abiertas de radio ε.*

Proposición 4.2 *Sea X un espacio métrico. Si $K \subset X$ es compacto entonces K es precompacto.*

Demostración: Sea K compacto, entonces para toda cubierta abierta de K existe una subcubierta finita que cubre a K. Dada $\varepsilon > 0$, tomemos la siguiente cubierta abierta $U = \{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$, entonces U contiene una subcubierta finita tal que contiene a K.Sea X un espacio métrico y $K \subset X$. ■

Definición 4.3 *Decimos que K es acotado si existen $x \in X$ y $M > 0$ tales que $K \subset B(x, M)$.*

Proposición 4.4 *Sea X un espacio métrico. Si $K \subset X$ es precompacto entonces K es acotado.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$, dado que K es precompacto existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$.

Basta probar que $A = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$ es acotado.

Sea $R = \max_{2 \leq i \leq m} \rho_X(x_1, x_i)$. Veamos que $A \subset B(x_1, R + \varepsilon)$.

Sea $x \in A$ entonces existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in B(x_{i_0}, \varepsilon)$; y así tenemos

$$\begin{array}{rcl} \rho_X(x_1, x) & \leq & \rho_X(x_1, x_{i_0}) + \rho_X(x_{i_0}, x) \\ & < & R + \varepsilon. \end{array}$$

Por lo tanto $x \in B(x_1, R + \varepsilon)$; es decir K es acotado. ■

Ejemplo 4.5 *Si $X = \mathbb{R}$, entonces todos los conjuntos, $A \subset \mathbb{R}$, acotados son precompactos.*

Demostración: Sean $X = \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ acotado y $\varepsilon > 0$, entonces existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tal que $A \subset B(x, M)$, entonces $\bar{A} \subset \overline{B(x, M)}$.

Observemos que $\bar{A}$ es cerrado y acotado entonces $\bar{A}$ es compacto, entonces para cualquier cubierta abierta de $\bar{A}$ existe una subcubierta finita que cubre a $\bar{A}$. Consideremos la siguiente cubierta $V = \left\{B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) : x \in \bar{A}\right\}$ entonces V contiene una subcubierta finita V_0 tal que cubre a $\bar{A}$ pero $A \subset \bar{A}$, entonces V_0 cubre a A donde $V_0 = B\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \ldots \cup B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\bar{x}_n \in \bar{A}, n \in \mathbb{N}$.

Cada $B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, tiene dos opciones, que $x_i \in A$ o $x_i \notin A$.

Supongamos que $x_i \notin A$, y $x_i \in \bar{A}$, entonces existe una sucesión $(t_k) \in A$ tal que $t_k \to x_i$ cuado $k \to \infty$, es decir, existe t_{k_0} tal que $t_{k_0} \in B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Veamos que $B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B(t_{k_0}, \varepsilon)$

Sea $w \in B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ entonces

$$\begin{array}{rcl} |w - t_{k_0}| & \leq & |w - x_i| + |x_i - t_{k_0}| \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ & = & \varepsilon \end{array}$$

Por lo tanto $w \in B(t_{k_0}, \varepsilon)$.

Tenemos que

$$A \subset \left(\bigcup_{x_i \in A} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{y_{k_0} \in A} B(t_{k_0}, \varepsilon)\right),$$

pero claramente $\bigcup_{x_i \in A} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \bigcup_{x_i \in A} B(x_i, \varepsilon)$, por lo tanto

$$A \subset \left(\bigcup_{x_i \in A} B(x_i, \varepsilon)\right) \cup \left(\bigcup_{y_{k_0} \in A} B(t_{k_0}, \varepsilon)\right)$$

Renombremos cada t_{k_0} y cada $x_i \in A$ como z_j con $j = 1, \ldots, m.$

Entonces existen $z_1, \ldots, z_m \in A$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(z_j, \varepsilon)$.

Por lo tanto A es precompacto. ■

Mostraremos ahora que acotado y precompacto no son lo mismo, es decir, daremos un ejemplo de un espacio métrico X que tenga un subconjunto acotado que no sea precompacto.

Ejemplo 4.6 *Sean X y Y espacios métricos. Sean*

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \{f : X \to Y : f \text{ es acotada}\} \\ \rho_\infty(f,g) &= \max_{x \in X} \rho(f(x), g(x)) \;\; f,g \in B(X,Y) \end{aligned}$$

$(B(X,Y), \rho_\infty)$ es un espacio métrico.

Sea

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 1 & si \quad \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, es acotado y no es precompacto.

Demostración: Para demostrar que $\{f_n\}$ es acotado, demostraremos que $\{f_n\} \subset B(\bar{0}, 2)$.

Sea f_j, $j \in \mathbb{N}$ donde

$$f_j(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le t \le \frac{1}{J} \\ 1 & si \quad \frac{1}{J} \le t \le 1 \end{cases}$$

Ahora, $\rho_\infty(f_j, \bar{0}) = \sup_{x \in [0,1]} \rho_Y(f_j(x), \bar{0}) = 1 < 2.$

Por lo tanto $f_j \in B(\bar{0}, 2)$, es decir $\{f_n\}$ es acotado.

Ahora mostraremos que $\{f_n\}$ no es precompacto.

Sean $\varepsilon = \frac{1}{4}$, f_j y f_k con $k \neq j \in \mathbb{N}$.

Consideremos $B(f_j, \varepsilon)$ y $B(f_k, \varepsilon)$.

Para ver que no existe una cubierta finita de $\{f_n\}$ de bolas abiertas de radio $\frac{1}{4}$, basta demostar que

$$B(f_j, \varepsilon) \cap B(f_k, \varepsilon) = \varnothing$$

Supongamos que existe f^* tal que

$$f^* \in B(f_j, \varepsilon) \cap B(f_k, \varepsilon)$$

entonces

$$\begin{aligned}\rho_\infty(f^*, f_j) &= \sup_{x\in[0,1]} |f^*(x) - f_j(x)| < \frac{1}{4} \\ \rho_\infty(f^*, f_k) &= \sup_{x\in[0,1]} |f^*(x) - f_k(x)| < \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\rho_\infty(f_j, f_k) &\leq \rho_\infty(f_j, f^*) + \rho_\infty(f^*, f_k) \\ &< \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción por que

$$\rho_\infty(f_j, f_k) = \sup_{x\in[0,1]} |f_j(x) - f_k(x)| = 1.$$

Por lo tanto $\{f_n\}$ no es precompacto. ■

Proposición 4.7 *Sea $A \subset X$ precompacto y $A_0 \subset A$. Entonces A_0 es precompacto.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como A es precompacto existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$.

Como $A_0 \subset A$, $A_0 \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$. ■

Teorema 4.8 *Sea X un espacio métrico y $K \subset X$. Son equivalentes:*

(a) K es compacto.

(b) Toda sucesión en K contiene una subsucesión que converge a un punto de K.

(c) K es completo y precompacto.

Demostración: (a) $\Rightarrow$ (b)

Sea K compacto. Supongamos que existe una sucesión (x_k) en K tal que ninguna subsucesión de (x_k) converge a un punto de K.

Entonces para todo $y \in K$ existe $\varepsilon_y > 0$ talque $B(y, \varepsilon_y)$ contiene sólo a un número finito de términos de (x_k), ya que si algún $x_0 \in K$ fuera tal que $B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ tuviera a una cantidad infinita de términos de (x_k) para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces existirían

$$\begin{aligned} x_{k_1} &\in B(x_0, 1) \\ x_{k_2} &\in B\left(x_0, \frac{1}{2}\right) \text{ con } k_1 < k_2 \\ &\vdots \\ x_{k_n} &\in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \text{ con } k_1 < k_2 < \ldots < k_n \end{aligned}$$

y la subsucesión es tal que $x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\to} x_0$, lo cual es una contradicción porque $x_0 \in K$.

Observemos que$\{B(y, \varepsilon_y) : y \in X\}$ es una cubierta abierta de K y como K es compacto existe una subcubierta finita tal que $K \subset \overset{m}{\underset{i=1}{\cup}} B(y_i, \varepsilon_{x_i})$, pero $(x_k) \in K$, entonces $(x_k) \subset \overset{m}{\underset{i=1}{\cup}} B(y_i, \varepsilon_{x_i})$, contradicción, pues cada $B(y_i, \varepsilon_{y_i})$ contiene sólo a una cantidad finita de términos de (x_k) y la unión finita va a contener una cantidad finita pero (x_k) es infinita.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en K, entonces por hipótesis (x_k) contiene una subsucesión (x_{k_n}) convergente a $x \in K$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k, k_n > n_0$ entonces

$$\rho(x_k, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

y si $k_n > n_0$, entonces

$$\rho(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces si $k_n, k > n_0$

$$\begin{aligned} \rho(x_k, x) &\leq \rho(x_k, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto (x_k) converge a x, entonces K es completo.

Supongamos que K no es precompacto, entonces para alguna $\varepsilon_0 > 0$, K no se puede cubrir con un número finito de bolas abiertas de radio ε_0. Sea $x_1 \in K$ y tomemos $x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$. Inductivamente consideremos $x_k \in K \setminus \left(\overset{k-1}{\underset{i=1}{\cup}} B(x_i, \varepsilon_0)\right)$. Como K no se puede cubrir con un número finito de bolas abiertas, consideremos la sucesión (x_k) que resulta de la construcción anterior y observemos que $\rho_X(x_k, x_j) \geq \varepsilon_0$ para toda

$k \neq j$, entonces (x_k) no contiene ninguna subsucesión convergente, lo que contradice la hipótesis.

Por lo tanto K es precompacto.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Procederemos por reducción al absurdo.

Sea $U = \{V_i : i \in I\}$ una cubierta abierta de K tal que no contiene ninguna subcubierta finita. Sabemos que K es completo y precompacto, es decir, dada $\varepsilon > 0$ existen $x_1, \ldots, x_{m_1} \in X$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{m_1} B(x_i, \varepsilon)$.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$ entonces $K \subset \bigcup_{i \in A} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right)$ con A finito, entonces existe $j \in A$ tal que $B\left(x_j, \frac{1}{2}\right) \cap K$ no se puede cubrir con un número finito de elementos de U. En efecto: Supongamos que para toda $i \in A$, $B\left(x_j, \frac{1}{2}\right) \cap K$ se puede cubrir con un número finito de elementos de U, entonces $\left(\bigcup_{i \in A} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right)\right) \cap K$ se puede cubrir con un número finito de elementos de U y como $K = \left(\bigcup_{i \in A} B\left(x_i, \frac{1}{2}\right) \cap K\right)$ entonces K tiene una subcubierta finita de elementos de U, lo cual es una contradicción porque U no contiene subcubiertas finitas, por lo tanto existe $j \in A$ tal que $B\left(x_j, \frac{1}{2}\right) \cap K$ no se puede cubrir con un número finito de elementos de U.

Sea $K_1 = B\left(x_j, \frac{1}{2}\right) \cap K$ y renombremos a x_j como x_1.

Sea $x_1^* \in B\left(x_j, \frac{1}{2}\right) \cap K$. Claramente $K_1 \neq \varnothing$, ya que si fuera vacío entonces se podría cubrir con un número finito de elementos de U, lo cual es una contradicción.

Como $K_1 \subset K$ y K es precompacto entonces K_1 es precompacto, es decir, dada $\varepsilon > 0$, existen $x_1, \ldots, x_{m_2} \in X$ tal que $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{m_2} B(x_i, \varepsilon)$.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ entonces $K_1 \subset \bigcup_{i \in B} B\left(x_i, \frac{1}{2^2}\right)$ con B finito. Entonces existe $j \in B$ tal que $B\left(x_j, \frac{1}{2^2}\right) \cap K_1$ no se puede cubrir con un número finito de elementos de U.

Sea $K_2 = B\left(x_j, \frac{1}{2^2}\right) \cap K_1$ y renombremos a x_j como x_2.

Como $K_2 \neq \varnothing$, entonces tomamos $x_1^* \in B\left(x_j, \frac{1}{2^2}\right) \cap K_1$

Como $K_2 \subset K_1$ y K_1 es precompacto, entonces K_2 es precompacto.

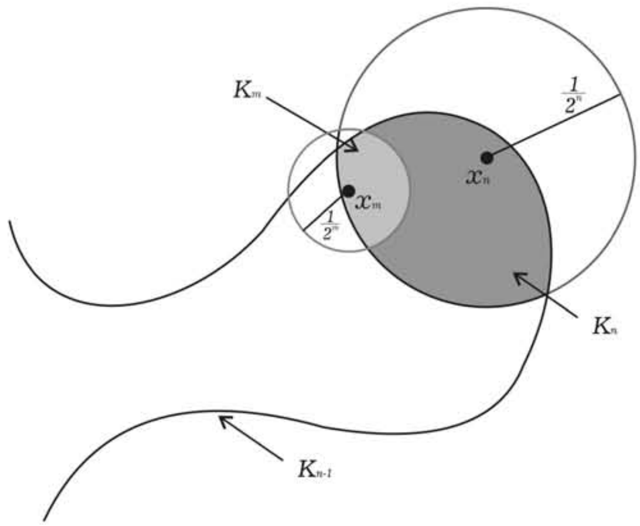
Inductivamente construyamos una sucesión (x_n^*) con

$$\begin{aligned} K &\supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots, \\ x_n^* &\in K_n = B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \cap K_{n-1}, \text{ donde } K_0 = K \end{aligned}$$

y ningún K_j se puede cubrir con un número finito de elementos de U.

Sean $x_n^* \in K_n$ y $x_m^* \in K_m$. Observemos que $\rho(x_n^*, x_m^*) < \frac{1}{2^{n-1}}$ si $n \leq m$. Sabemos que $K_m \subset K_n$ si $n \leq m$, entonces $K_m \subset \left(B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \cap K_{n-1}\right)$, como $x_m^* \in K_m$ entonces $x_m^* \in \left(B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \cap K_{n-1}\right)$, en particular $x_m^* \in B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)$, es decir $\rho(x_n, x_m^*) < \frac{1}{2^n}$ si

$n \leq m$. Entonces $\rho\left(x_n^*, x_m^*\right) \leq \rho\left(x_n^*, x_n\right) + \rho\left(x_n, x_m^*\right) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

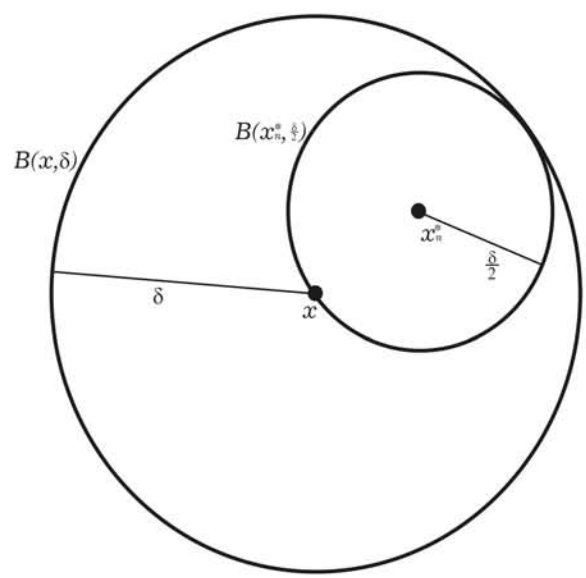


Por lo anterior, (x_n^*) es una sucesión de Cauchy, en K y por ser K completo entonces $x_n^* \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in K$. Existe $V_{i_0} \in U$ tal que $x \in V_{i_0}$, donde V_{i_0} es un abierto, por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $B\left(x, \delta\right) \subset V_{i_0}$.

Tomemos límite cuando $m \to \infty$ y obtenemos que

$$\rho\left(x_n^*, x\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Si $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\delta}{2}$ entonces $B\left(x_n^*, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \subset B\left(x, \delta\right) \subset V_{i_0}$.



Observemos que $B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \subset B\left(x_n^*, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$. Sea $y \in B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)$, es decir $\rho(x_n, y) < \frac{1}{2^n}$. Entonces $\rho(x_n^*, y) \leq \rho(x_n^*, x_n) + \rho(x_n, y) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Por lo tanto $y \in B\left(x_n^*, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$. Ahora, $K_n \subset B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)$, entonces $K_n \subset B\left(x_n^*, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \subset V_{i_0}$. Esto es una contradicción, porque ningún K_n se podía cubrir con un número finito de elementos de U.

Por lo tanto K es compacto. ■

Definición 4.9 *Sea X un espacio métrico Decimos que $x \in X$ es punto de contacto de A si para cualquier $\varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. La cerradura de A es el conjunto de todos los puntos de contacto de A y la denotamos $\bar{A}$.Decimos que A es cerrado si $A = \bar{A}$.*

Definición 4.10 *Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A es relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.*

Proposición 4.11 *Sea X un espacio métrico completo y $A \subset X$. Entonces A es relativamente compacto si y sólo si A es precompacto.*

Demostración: $\Rightarrow$)

Sea A relativamente compacto, entonces por definición $\overline{A}$ es compacto y por la Proposición 4.2 se tiene que $\overline{A}$ es precompacto. Como $A \subset \overline{A}$ entonces por la Proposición 4.7 A es precompacto.

$\Leftarrow$)

Sea A precompacto. Demostraremos que $\overline{A}$ es completo y precompacto, entonces por el teorema anterior $\overline{A}$ sería compacto y por definición A relativamente compacto.

Observemos que $\overline{A} \subset X$ es cerrado, entonces tomemos una sucesión de Cauchy $(a_n) \subset \overline{A}$ y como X es completo, (a_n) converge a a, es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $\rho(a_n, a) < \varepsilon$, entonces $B(a, \varepsilon) \cap \overline{A} \neq \varnothing$. Con lo anterior tenemos que a es punto de contacto de $\overline{A}$ y por ser $\overline{A}$ cerrado $a \in \overline{A}$. Por lo tanto $\overline{A}$ es completo.

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que A es precompacto entonces existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, entonces

$$\overline{A} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{m} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon),$$

por lo tanto $\overline{A}$ es precompacto. ■

Capítulo 5

El Teorema de Arzelá-Ascoli

Este capítulo está dedicado al Teorema de Arzelá-Ascoli, el cual será de mucha ayuda para demostrar lo que queremos.

Empezaremos definiendo el espacio de funciones continuas entre espacios métricos, veremos algunas propiedades y también definiremos equicontinuidad en un conjunto de funciones continuas.

Sean X y Y espacios métricos con métricas ρ_X y ρ_Y, X compacto. Definamos

$$\begin{aligned} C^0(X,Y) &= \{f : X \to Y \mid f \text{ es continua}\} \\ \rho_\infty(f,g) &= \max_{x\in X} \rho_Y(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

Observemos que f y g son continuas en X , por tanto, $\rho_Y(f,g)$ dada por $\rho_Y(f,g)(x) = \rho_Y(f(x), g(x))$ es continua en X, y como X es compacto entonces alcanza su máximo.

Proposición 5.1 *Sea X compacto. Entonces $(C^0(X,Y), \rho_\infty(f,g))$ es un espacio métrico.*

Demostración: a)

$\Rightarrow$) Sea $\rho_\infty(f,g) = 0$, entonces por definición $\max_{x\in X} \rho_Y(f(x), g(x)) = 0$, entonces para todo $x \in X$ se tiene $\rho_Y(f(x), g(x)) = 0$ y como Y es espacio métrico $f(x) = g(x)$.

$\Leftarrow$) Sea $f(x) = g(x)$ para toda $x \in X$. Por ser ρ_Y métrica en Y tenemos que $\rho_Y(f(x), g(x)) = 0$ para toda $x \in X$, entonces $\max_{x\in X} \rho_Y(f(x), g(x)) = 0$ y por definición $\rho_\infty(f,g) = 0$.

b) Simetría.

$$\begin{aligned} \rho_\infty(f,g) &= \max_{x\in X} \rho_Y(f(x), g(x)) \\ &= \max_{x\in X} \rho_Y(g(x), f(x)) \text{ ya que } \rho_Y \text{ es métrica en } Y \\ &= \rho_\infty(g,f). \end{aligned}$$

c) Desigualdad del triángulo.

Como ρ_Y es métrica en Y tenemos que

$$\rho_Y(f,h) \leq \rho_Y(f,g) + \rho_Y(g,h)$$

entonces

$$\begin{aligned}\max_{x\in X}\rho_Y(f(x),h(x)) &\leq \max_{x\in X}(\rho_Y(f(x),g(x)) + \rho_Y(g(x),h(x))) \\ &\leq \max_{x\in X}\rho_Y(f(x),g(x)) + \max_{x\in X}\rho_Y(g(x),h(x))\end{aligned}$$

es decir

$$\rho_\infty(f,h) \leq \rho_\infty(f,g) + \rho_\infty(g,h).$$

Por lo tanto $(C^0(X,Y), \rho_\infty(f,g))$ es un espacio métrico. ■

Proposición 5.2 *Si X es compacto y Y es completo entonces $C^0(X,Y)$ es completo.*

Demostración: Sea (f_k) una sucesión de Cauchy en $C^0(X,Y)$. Entonces por definición, dada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k, j \geq k_0$ entonces $\rho_\infty(f_k, f_j) < \varepsilon$, es decir $\max_{x\in X}\rho_Y(f_k(x), f_j(x)) < \varepsilon$.

Observemos que $\rho_Y(f_k(x), f_j(x)) \leq \max_{x\in X}\rho_Y(f_k(x), f_j(x)) < \varepsilon$ para toda $x \in X$, entonces $\rho_Y(f_k(x), f_j(x)) < \varepsilon$ para toda $x \in X$, es decir, para cada x la sucesión $(f_k(x))$ es de Cauchy en Y y como Y es completo. Entonces $f_k(x) \to f(x)$ en Y, entonces $\rho_Y(f_k(x), f(x)) < \varepsilon$ para toda $x \in X$ si $k \geq k_0$, por lo tanto $\max_{x\in X}\rho_Y(f_k(x), f(x)) < \varepsilon$ si $k \geq k_0$.

Con lo anterior tenemos que $f_k : X \to Y$ converge uniformemente a $f : X \to Y$. Es decir, dada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $x \in X$ y para toda $k \geq k_0$ se tiene que

$$\max_{x\in X}\rho_Y(f_k(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Sólo falta demostrar que $f \in C^0(X,Y)$, es decir, que f es continua para toda $x \in X$.

Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Como (f_k) converge uniformemente a f, entonces existe $k_0 > 0$ tal que $\rho_\infty(f_k, f) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $k \geq k_0$.

Como f_{k_0} es continua, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho_Y(f_{k_0}(x), f_{k_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } \rho_X(x, x_0) < \delta,$$

entonces

$$\begin{aligned}\rho_Y\left(f\left(x\right),f\left(x_0\right)\right) &\leq \rho_Y\left(f\left(x\right),f_{k_0}\left(x\right)\right)+\rho_Y\left(f_{k_0}\left(x\right),f_{k_0}\left(x_0\right)\right)+\rho_Y\left(f_{k_0}\left(x_0\right),f\left(x_0\right)\right)\\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \text{ si } \rho_X\left(x,x_0\right)<\delta.\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es continua, es decir $f\left(x\right)\in C^0\left(X,Y\right).$ ■

Definición 5.3 *Sean X y Y espacios métricos. Decimos que $f:X\to Y$ es uniformemente continua si dada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ (que no depende más que de ε) tal que para cualesquiera $x_1,x_2\in X$*

$$\rho_Y\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)<\varepsilon \text{ si } \rho_X\left(x_1,x_2\right)<\delta.$$

Lema 5.4 *Si $f:X\to Y$ es continua y X es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración: Supongamos que f no es uniformemente continua, es decir, existe $\varepsilon>0$ tal que para toda $\delta>0$ en particular de la forma $\frac{1}{k}$ con $k\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$, existen x_k y x_k' tales que $\rho_X\left(x_k,x_k'\right)<\frac{1}{k}$ y $\rho_Y\left(f\left(x_k\right),f\left(x_k'\right)\right)\geq\varepsilon.$

Sabemos que X es compacto entonces por el Teorema 4.8 (x_k) tiene una subsucesión que converge a $x\in X$, entonces (x_k') también tiene una subsucesión que converge a $x\in X$ ya que

$$\rho_X\left(x_{k_n}',x\right)\leq\rho_X\left(x_{k_n}',x_{k_n}\right)+\rho_X\left(x_{k_n},x\right).$$

Como f es continua, $f\left(x_{k_n}\right)\to f\left(x\right)$ y $f\left(x_{k_n}'\right)\to f\left(x\right)$ en Y, lo cual implica que $\rho_Y\left(f\left(x_{k_n}\right),f\left(x_{k_n}'\right)\right)<\varepsilon$. Esto contradice nuestra suposición. ■

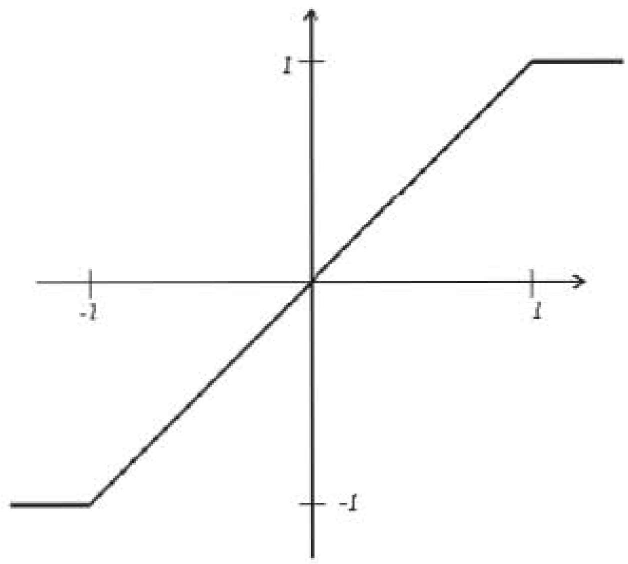
Queremos dar ahora una caracterización de los subconjuntos compactos de $C^0\left(X,Y\right).$ Para ello requerimos de los siguientes conceptos:

Definición 5.5 *Sea X un conjunto compacto. Un conjunto de funciones continuas $A\subset C^0\left(X,Y\right)$ es equicontinuo si dada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ (que depende únicamente de ε) tal que, para cualesquiera $t_1,t_2\in X$ y $f\in A$,*

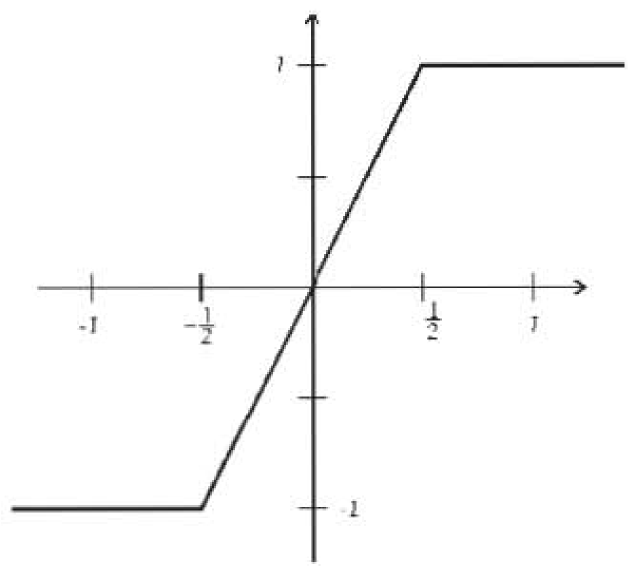
$$\rho_Y\left(f\left(t_1\right),f\left(t_2\right)\right)<\varepsilon \text{ si } \rho_X\left(t_1,t_2\right)<\delta.$$

Ejemplo 5.6 *Sea $A=\{f_k:k\in\mathbb{N}\}$ y $f_k:[-1,1]\to\mathbb{R}$, donde f_k se define por:*

$$f_k\left(x\right)=\begin{cases} 1 & si \quad \frac{1}{k}\leq x\\ kx & si \quad -\frac{1}{k}\leq x\leq\frac{1}{k}\\ -1 & si \quad x\leq-\frac{1}{k}\end{cases}$$



f_1



f_2

Afirmamos que A no es equicontinuo.

Demostración: Supongamos que sí es equicontinuo. Consideremos $\varepsilon = 1$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $|f_k(x) - f_k(0)| = |f_k(x)| < 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_0} < \delta$, como $|f_k(x)| < 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$, en particular para k_0, entonces $|f_{k_0}(x)| < 1$ si $|x| < \delta$.

Como $\frac{1}{k_0} < \delta$, entonces $\left| f_{k_0}\left(\frac{1}{k_0}\right)\right| < 1$, pero $f_{k_0}\left(\frac{1}{k_0}\right) = 1$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto A no es equicontinuo. ■

El siguiente teorema se conoce como el teorema de Arzelá-Ascoli

Teorema 5.7 *(Arzelá-Ascoli) Sea Y un espacio métrico completo y X un espacio métrico compacto. Sea $H \subset C^0(X,Y)$.*

H es relativamente compacto si y sólo si H es equicontinuo y para toda $x \in X$, $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$ es relativamente compacto en Y.

Demostración: $\Rightarrow$)

Por la Proposición 5.2, $C^0(X,Y)$ es completo.

Sea $H \subset C^0(X,Y)$ relativamente compacto entonces, por la Proposición 4.11, H es precompacto, es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de funciones $f_i \in C^0(X,Y)$ tal que para toda $f \in H$ se tiene que $\rho_\infty(f, f_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ para algún i.

Observemos que $\rho_Y(f(x), f_i(x)) \leq \rho_\infty(f, f_i)$ para toda $x \in X$, entonces $\rho_Y(f(x), f_i(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, es decir, $H(x)$ es precompacto y como Y es completo entonces $H(x)$ es relativamente compacto.

Sean $\varepsilon > 0$ y $f \in H$, entonces existe $f_i \in C^0(X,Y)$ tal que $\rho_Y(f(x), f_i(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Como cada f_i es uniformemente continua (Lema 5.4), existe $\delta_i > 0$ tal que

$$\begin{array}{rcl}\rho_Y(f(x), f(y)) & \leq & \rho_Y(f(x), f_i(x)) + \rho_Y(f_i(x), f_i(y)) + \rho_Y(f_i(y), f(y)) \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} \text{ si } \rho(x,y) < \delta_i\end{array}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_i : i = 1, \ldots, n\}$, $\delta > 0$. Entonces para toda $f \in H$

$$\rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ si } \rho(x,y) < \delta.$$

Por lo tanto H es equicontinuo.

$\Leftarrow$)

Por la Proposición 5.2, $C^0(X,Y)$ es completo entonces basta demostrar que H es precompacto. Sea $\varepsilon > 0$.

Sabemos que H es equicontinuo, es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ y $f \in H$

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{8} \text{ si } \rho_X(x_1, x_2) < \delta.$$

Como X es compacto existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tal que $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B(x_i, \delta)$.

Ahora, $H(x)$ es relativamente compacto en Y para toda $x \in X$, entonces $H(x_i)$ es relativamente compacto en Y, con $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Definamos $K = H(x_1) \cup \ldots \cup H(x_m)$. Por definición $\overline{H(x_i)}$ es compacto. Entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{H(x_i)}$ es compacto, entonces $\overline{K}$ es compacto, es decir K es relativamente compacto y por lo tanto precompacto. Entonces existen $y_1, \ldots, y_n$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{4}\right)$.

Sea Φ el conjunto de todas las funciones $\varphi : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$. Claramente Φ es finito.

Sea $L_\varphi = \left\{ f \in H : \rho_Y\left(f(x_i), y_{\varphi(i)}\right) < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ para toda } i = 1, \ldots, m \right\}$.

Sea $f \in H$. Consideremos $f(x_i)$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como $f(x_i) \in H(x_i)$ entonces $f(x_i) \in K$ y por lo tanto $f(x_i) \in B\left(y_j, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea φ definida por $\varphi(i) = j$ para cada i,entonces $\varphi \in \Phi$, entonces $f(x_i) \in B\left(y_{\varphi(i)}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$, es decir $\rho_Y\left(f(x_i), y_{\varphi(i)}\right) < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces $f \in L_\varphi$ por definición para alguna $\varphi \in \Phi$, y como Φ es finito entonces $\bigcup\limits_{\varphi \in \Phi} L_\varphi$ es una unión finita de conjuntos.

Por lo tanto $H \subset \bigcup\limits_{\varphi \in \Phi} L_\varphi$.

Sólo falta demostrar que cada L_φ está contenido en una bola abierta de radio ε.

Sean $f, g \in L_\varphi$ y $x \in X$.

Para cada $x \in X$ existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $x \in B(x_i, \delta)$, ya que $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B(x_i, \delta)$ y como H es equicontinuo tenemos que

$$\rho_Y(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{8} \text{ y } \rho_Y(g(x), g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{8}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_Y(f(x_i), g(x_i)) &\leq \rho_Y\left(f(x_i), y_{\varphi(i)}\right) + \rho_Y\left(y_{\varphi(i)}, g(x_i)\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \rho_Y(f(x), g(x)) &\leq \rho_Y(f(x), f(x_i)) + \rho_Y(f(x_i), g(x_i)) + \rho_Y(g(x), g(x_i)) \\ &< \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{8} \\ &= \frac{3}{4}\varepsilon \text{ para cada } x \in X. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho_\infty(f, g) < \varepsilon$ si $f, g \in L_\varphi$.

Para cada L_φ consideremos $h \in L_\varphi$. Denotémosla h_φ. Observemos que $\rho_\infty(h_\varphi, g) < \varepsilon$ para toda $g \in L_\varphi$. Es decir, $L_\varphi \subset B(h_\varphi, \varepsilon)$, entonces $H \subset \bigcup\limits_{\varphi \in \Phi} L_\varphi \subset \bigcup\limits_{\varphi \in \Phi} B(h_\varphi, \varepsilon)$.

Por lo tanto H es precompacto. ■

En particular, como todo espacio métrico compacto es completo se tiene que:

Corolario 5.8 *Si X es un espacio métrico compacto entonces un subconjunto A de $C^0(I,X)$ es relativamente compacto si y sólo si A es equicontinuo.*

Demostración: $\Rightarrow)$

Como X es un espacio métrico compacto, entonces, por el Teorema 4.8, X es completo. Observemos que I es un espacio métrico compacto.

Sea $A \subset C^0(I,X)$ relativamente compacto entonces por el Teorema 5.7 A es equicontinuo.

$\Leftarrow)$

Como X es un espacio métrico compacto entonces, por el Teorema 4.8, X es completo. Sea $A \subset C^0(I,X)$ y equicontinuo, observemos que $A(x) = \{f(x) : f \in A\} \subset X$ entonces por la Proposición 4.7 $A(x)$ es precompacto y por la Proposición 4.11 $A(x)$ es relativamente compacto. Observemos que I es un espacio métrico compacto.

Como A es equicontinuo, aplicando el Teorema 5.7 obtenemos que A es relativamente compacto. ■

Capítulo 6

Compacidad en espacios de trayectorias

Sean X un espacio métrico y $\xi, \eta \in X$.

Consideremos el espacio de trayectorias

$$T_{\xi,\eta}(X) = \left\{\sigma \in C^0(I, X) : \sigma(0) = \xi \text{ y } \sigma(1) = \eta\right\}$$

de ξ a η en X. Si este espacio fuese distinto del vacío y compacto podríamos aplicar el Teorema 3.4 para obtener la existencia de una trayectoria geodésica de ξ a η. Por desgracia no lo es y en la Proposición 6.1 se mostrará.

En este capítulo veremos que este problema se resuelve reparametrizando proporcionalmente con respecto a la longitud de arco. Con esto podremos asegurar ya la existencia de trayectorias geodésicas.

Proposición 6.1 *Consideremos las trayectorias $\sigma_k : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dadas por $\sigma_k(t) = (t, f_k(t))$ donde*

$$f_k(t) = \begin{cases} 0 & si \quad \frac{a}{2^k} \leq t \leq a \\ 2a - 2^{k+1}t & si \quad \frac{a}{2^{k+1}} \leq t \leq \frac{a}{2^k} \\ 2^{k+1}t & si \quad 0 \leq t \leq \frac{a}{2^{k+1}} \end{cases}$$

y la métrica usual en $\mathbb{R}^2$. Esta sucesión no contiene ninguna subsucesión convergente en $T_{\xi,\eta}(\mathbb{R}^2)$, donde $\xi = (0,0)$ y $\eta = (a,0)$.

Antes de demostrar esta proposición notaremos lo siguiente:

Lema 6.2 *Sea X un espacio métrico y (x_n) una sucesión en X tal que $\rho(x_n, x_m) = a$ para toda pareja $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, entonces (x_n) no converge.*

Demostración: Supongamos que sí converge entonces (x_n) es de Cauchy, lo cual es una contradicción porque $\rho(x_n, x_m) = a$ para toda $n \neq m \in \mathbb{N}$. ■

Corolario 6.3 *Sea (x_n) una sucesión tal que $\rho(x_n, x_m) = a$ para toda $n, m \in \mathbb{N}$, entonces (x_n) no contiene ninguna subsucesión convergente.*

Demostración: Sea (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n). Renombremos a la sucesión así $(x_{n_k}) = (y_k)$, entonces $\rho(y_n, y_m) = a$ para toda $n \neq m \in \mathbb{N}$. Aplicando el Lema 6.2 se tiene que (y_k) no converge.

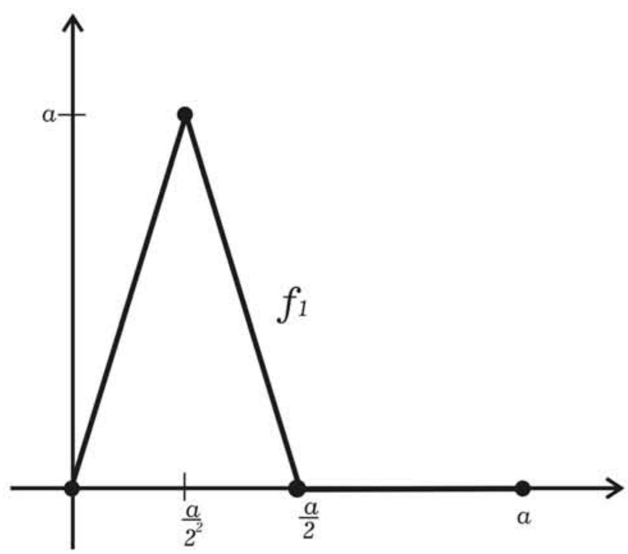
Por lo tanto (x_n) no contiene ninguna subsucesión convergente. ■

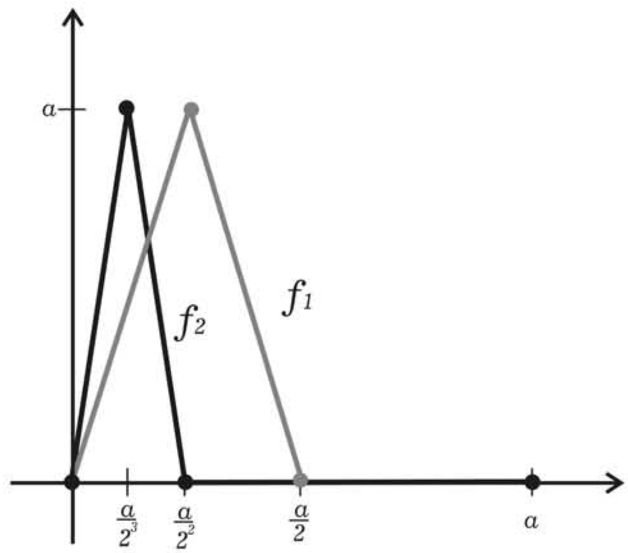
Ahora demostraremos la proposición anterior.

Demostración de la Proposición 6.1.

Demostración: Sean las trayectorias $\sigma_k : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dadas por $\sigma_k(t) = (t, f_k(t))$ donde

$$f_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{a}{2^k} \leq t \leq a \\ 2a - 2^{k+1}t & \text{si} \quad \frac{a}{2^{k+1}} \leq t \leq \frac{a}{2^k} \\ 2^{k+1}t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{a}{2^{k+1}} \end{cases}$$

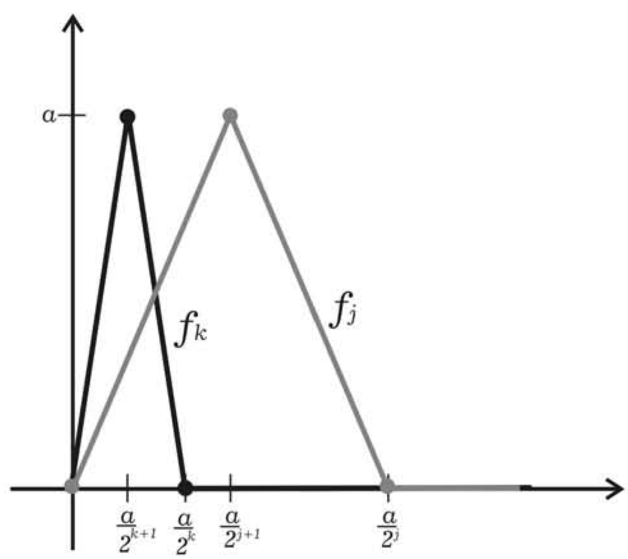




Por el corolario anterior, basta probar que $\rho_\infty(\sigma_k, \sigma_j) = a$ si $k \neq j$.

Primero veremos que $\max\limits_{0 \leq t \leq 1} |f_k(t) - f_j(t)| = a$ para toda $k \neq j$.

Para esto basta mostrar que existe un punto $t_0 \in [0,1]$ tal que $f_k(t_0) - f_j(t_0) = a$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $k > j$. Observemos que para $t_0 = \frac{a}{2^{j+1}}$ se tiene que $f_k\left(\frac{a}{2^{j+1}}\right) = 0$ y $f_j\left(\frac{a}{2^{j+1}}\right) = a$ pues $\frac{a}{2^k} \leq \frac{a}{2^{j+1}}$.



Entonces

$$\begin{aligned}\rho_\infty(\sigma_k,\sigma_j) &= \max_{0\le t\le 1}\rho_{\mathbb{R}^2}(\sigma_k(t),\sigma_j(t)) \\ &= \max_{0\le t\le 1}|f_k(t)-f_j(t)| \\ &= a \text{ si } k>j.\end{aligned}$$

Por lo tanto (σ_k) no contiene ninguna subsucesión convergente. ■

Este obstáculo se resuelve recordando que la longitud de una trayectoria no cambia si la reparametrizamos por medio de una función no decreciente.

Dada cualquier trayectoria $\sigma : I \to X$ de longitud finita podemos reparametrizarla usando como parámetro la longitud de arco como sigue: Para cada $t\in I$ sea $\sigma_t = \sigma\mid_{[0,t]}: [0,t]\to X$ la restricción de la trayectoria σ al intervalo $[0,t]$.

Proposición 6.4 *Si $\sigma : I \to X$ es una trayectoria de longitud finita, entonces la función*

$$\lambda : I\to[0,l(\sigma)] \text{ dada por } \lambda(t)=l(\sigma_t)$$

es continua y no decreciente.

Demostración: Primero demostraremos que λ es no decreciente.

Sea $\sigma\in T_{\xi,\eta}(X)$ y sean $s,t\in I$ tal que $s\le t$.

Entonces $\sigma_s = \sigma\mid_{[0,s]}: [0,s]\to X$ y $\sigma_t=\sigma\mid_{[0,t]}: [0,t]\to X$. Observemos que $l(\sigma_s)+l(\sigma_{t-s})=l(\sigma_t)$ y como la longitud es no negativa entonces $l(\sigma_s)\le l(\sigma_t)$. Por lo tanto $\lambda(s)\le\lambda(t)$.

Ahora demostraremos la continuidad.

Probaremos primero que λ es continua por la izquierda en t_0. Sea (t_n) una sucesión en $[0,1]$ tal que $t_n\le t_0$ y $t_n\to t_0$. Sea $\bar\sigma_n\in C^0(I,X)$ definida como sigue:

$\bar\sigma_n(s)=\sigma(st_n)$, $n=0,1,\ldots$

$\bar\sigma_n$ es una reparametrización de σ_{t_n}. Por tanto $l(\bar\sigma_n)=l(\sigma_{t_n})$. Probemos ahora que $\bar\sigma_n\to\bar\sigma_0$ en $C^0(I,X)$. Sea $\varepsilon>0$. Como σ es uniformemente continua (Lema 5.4) existe $\delta>0$ tal que

$$\rho(\sigma(t_1),\sigma(t_2))<\frac{\varepsilon}{2} \text{ si } |t_1-t_2|<\delta.$$

Como $t_n\to t_0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $|t_n-t_0|<\delta$ para toda $n\ge n_0$. Por tanto,

$$|st_n-st_0|=|s(t_n-t_0)|\le|t_n-t_0|<\delta$$

para toda $s\in[0,1]$, $n\ge n_0$, y en consecuencia

$$\rho(\bar\sigma_n(s),\bar\sigma_0(s))<\frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n\ge n_0 \text{ y } s\in[0,1].$$

Es decir

$$\rho_{\infty}\left(\bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}_0\right) < \varepsilon \text{ si } n \geq n_0.$$

Como $l : C^0(I, X) \rightarrow [0, \infty)$ es *s.c.i.* (Proposición 2.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} l\left(\sigma_{t_0}\right) &= l\left(\bar{\sigma}_0\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} l\left(\bar{\sigma}_n\right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} l\left(\sigma_{t_n}\right) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} l\left(\sigma_{t_n}\right) \\ &\leq l\left(\sigma_{t_0}\right) \end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a que $t_n \leq t_0$ y λ es no decreciente. Concluimos que

$$\lambda\left(t_0\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(t_n\right).$$

Es decir

$$\lim_{t\to t_0^-} \lambda(t) = \lambda\left(t_0\right).$$

Probemos ahora que λ es continua por la derecha en t_0. Sea $t_n \in [0,1]$ tal que $t_n \geq t_0$ y $t_n \rightarrow t_0$. Consideremos la trayectoria $\tau \in C^0(I, X)$ y definamos $\tau(t) = \sigma(1-t)$, $s \in [0,1]$ que se obtiene recorriendo a σ en sentido inverso. Entonces $\bar{\tau}_n(s) = \tau(st_n)$

$\bar{\tau}_n$ es una reparametrización de τ_{t_n}. Por tanto $l\left(\bar{\tau}_n\right) = l\left(\tau_{t_n}\right)$. De manera análoga al caso anterior se prueba que $\bar{\tau}_n \rightarrow \bar{\tau}_0$ en $C^0(I, X)$.

Sean $s_n := 1 - t_n \leq s_0 := 1 - t_0$ y $s_n \rightarrow s_0$. Por el caso anterior,

$$\lim_{n\to\infty} l\left(\tau_{s_n}\right) = l\left(\tau_{s_0}\right).$$

Ahora bien, $l\left(\tau_{s_n}\right) = l\left(\sigma\mid_{[t_n,1]}\right)$ y, por tanto,

$$l\left(\sigma_{t_n}\right) = l(\sigma) - l\left(\tau_{s_n}\right).$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} l\left(\sigma_{t_n}\right) &= l(\sigma) - \lim_{n\to\infty} l\left(\tau_{s_n}\right) \\ &= l(\sigma) - l\left(\tau_{s_0}\right) \\ &= l\left(\sigma_{t_0}\right). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\lim_{t\to t_0^+} \lambda(t) = \lambda\left(t_0\right).$$

Por lo tanto λ es continua. ■

Notemos con el siguiente ejemplo que λ no es necesariamente biyectiva ya que puede permanecer constante en algunos subintervalos de I.

Ejemplo 6.5 *Definamos* $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}$ *así:*

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t & si \quad t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & si \quad t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} & si \quad t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

Demostración: Mostraremos que λ no es inyectiva, es decir, que existen $x \neq y$ tal que $\lambda(x) = \lambda(y)$.

Tomemos $x = \frac{1}{3}$ y $y = \frac{2}{3}$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{1}{3}\right) &= l\left(\sigma_{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2} \\ \lambda\left(\frac{2}{3}\right) &= l\left(\sigma_{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto λ no es biyectiva.

Es importante notar que la trayectoria anterior es una curva en $\mathbb{R}$ y no en $\mathbb{R}^2$, pues la curva en $\mathbb{R}^2$ sí es inyectiva. ■

Observemos que si λ es constante en un subintervalo esto se debe a que σ es constante en dicho subintervalo.

Sea $\tilde{\sigma} : [0, l(\sigma)] \to X$ dada por $\tilde{\sigma}(s) = \sigma\left(\lambda^{-1}(s)\right)$, donde $\sigma\left(\lambda^{-1}(s)\right) = \sigma(t)$ si $t \in \lambda^{-1}(s)$ y $\lambda^{-1}(s) = \{t \in [0,1] : \lambda(t) = s\}$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\sigma"'] & {[0, l(\sigma)]} \arrow[dl, "\tilde{\sigma}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Proposición 6.6 $\tilde{\sigma}$ *está bien definida, es continua y* $l(\tilde{\sigma}) = l(\sigma)$.

Demostración: Para ver que $\tilde{\sigma}$ está bien definida tenemos que probar que dado $s \in [0, l(\sigma)]$, $\lambda^{-1}(s) \neq \varnothing$ y que si $t_1, t_2 \in \lambda^{-1}(s)$, $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$. Entonces demostraremos que λ es suprayectiva, es decir, dado $s \in [0, l(\sigma)]$ existe $x \in I$ tal que $\lambda(x) = s$.

Sabemos que λ es continua en $[0,1]$, $\lambda(0)=0$ y $\lambda(1)=l(\sigma)$. Entonces por el Teorema del valor intermedio dado $s\in[0,l(\sigma)]$ existe $x\in[0,1]$ tal que $\lambda(x)=s$, es decir $\lambda^{-1}(s)\neq\varnothing$.

Sean $x_1,x_2\in I$ tal que $\lambda(x_1)=s=\lambda(x_2)$, entonces $l(\sigma_{x_1})=l(\sigma_{x_2})$, por lo tanto $\sigma(x_1)=\sigma(x_2)$.

Por lo tanto $\tilde{\sigma}$ está bien definida.

Probaremos ahora que $\tilde{\sigma}$ es continua.

Sea $A\subset X$ cerrado. Como σ es contínua, $\sigma^{-1}(A)$ es cerrado en I y, como I es compacto, $\sigma^{-1}(A)$ es compacto. Por la Proposición 6.4, λ es continua. Por tanto, $\lambda(\sigma^{-1}(A))$ es compacto y, por ende, cerrado en $[0,l(\sigma)]$. Pero $\tilde{\sigma}^{-1}(A)=\lambda(\sigma^{-1}(A))$. Esto prueba que $\tilde{\sigma}$ es continua.

Sólo falta demostar que $l(\tilde{\sigma})=l(\sigma)$, entonces

$$l(\tilde{\sigma})=l(\tilde{\sigma}\circ\lambda)$$

ya que λ es una función continua y no decreciente, por lo que la composición no altera la longitud. Ahora, por definición de $\tilde{\sigma}$ tenemos

$$(\tilde{\sigma}\circ\lambda)(t)=\sigma\left(\lambda^{-1}(\lambda(t))\right)=\sigma(t).$$

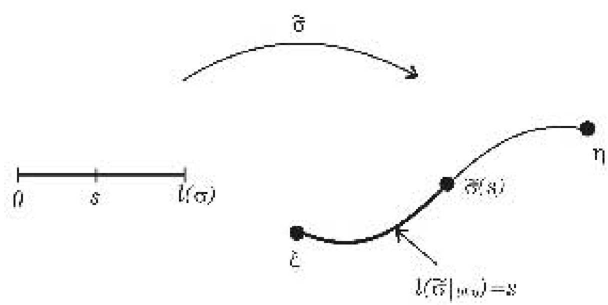
Entonces

$$l(\tilde{\sigma}\circ\lambda)=l(\sigma)$$

por lo tanto

$$l(\tilde{\sigma})=l(\sigma).$$

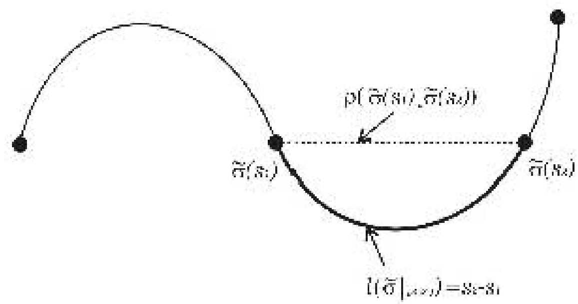
Notemos que $\tilde{\sigma}(s)$ es el punto tal que la longitud de la trayectoria $\tilde{\sigma}$ desde su inicio hasta él es precisamente s.



■

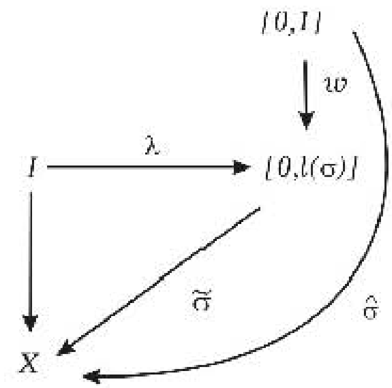
Sean s_1,s_2 tales que $0\leq s_1,s_2\leq l(\sigma)$. Consideremos $\tilde{\sigma}(s_1)$ y $\tilde{\sigma}(s_1)$. Como la longitud de la cuerda entre dos puntos de una trayectoria es menor o igual que la longitud de la trayectoria entre dichos puntos, $\tilde{\sigma}$ es tal que

$$\begin{aligned} \rho\left(\tilde{\sigma}\left(s_1\right), \tilde{\sigma}\left(s_2\right)\right) &\leq l\left(\tilde{\sigma}\mid_{[s_1,s_2]}\right) \\ &= \left|s_2 - s_1\right| \text{ para cualesquiera } 0 \leq s_1, s_2 \leq l\left(\sigma\right) \end{aligned}$$



Sea

$$\hat{\sigma} : I \rightarrow X \text{ tal que } \hat{\sigma}\left(t\right) = \tilde{\sigma}\left(l\left(\sigma\right)t\right)$$



donde $w\left(t\right) = l\left(\sigma\right)t$ es una parametrización. Observemos que $\hat{\sigma}\left(t\right) = \tilde{\sigma} \circ w\left(t\right) = \tilde{\sigma}\left(l\left(\sigma\right)t\right)$

Sabíamos que $\tilde{\sigma}$ es continua y como w es continua, Entonces la composición es continua. Por lo tanto $\hat{\sigma} \in C^0\left(I, X\right)$ y es la reparametrización proporcional a la longitud de arco de la trayectoria σ.

Lema 6.7 $l\left(\hat{\sigma}_t\right) = l\left(\hat{\sigma}\right)t$

Demostración:

$$\hat{\sigma}_t = \tilde{\sigma}_{l(\sigma)t} = \tilde{\sigma}\mid_{[0,l(\sigma)t]}$$

pero

$$l\left(\tilde{\sigma}\mid_{[0,l(\sigma)t]}\right) = l\left(\sigma\right)t$$

y además $l\left(\sigma\right) = l\left(\tilde{\sigma}\right)$.

Por tanto

$$\begin{aligned} l(\hat{\sigma}_t) &= l\left(\tilde{\sigma}_{l(\sigma)t}\right) \\ &= l\left(\tilde{\sigma}\mid_{[0,l(\sigma)t]}\right) \\ &= l(\sigma)\,t \\ &= l(\tilde{\sigma})\,t. \end{aligned}$$

Recordemos que $\hat{\sigma} = \tilde{\sigma} \circ w$ y como w es una función continua y no decreciente entonces por la proposición 1.5 se tiene que $l(\tilde{\sigma}) = l(\hat{\sigma})$.

Por lo tanto

$$l(\hat{\sigma}_t) = l(\hat{\sigma})\,t$$

■

Denotemos por

$$\mathcal{L}_{\xi,\eta}(X) = \{\sigma \in T_{\xi,\eta}(X) : l(\sigma) < \infty \text{ y } l(\sigma_t) = l(\sigma)\,t,\ \forall t \in [0,1]\}$$

al espacio de todas las trayectorias $\sigma : [0,1] \to X$ de ξ a η de longitud finita parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco. Es inmediato comprobar que:

Proposición 6.8 *Para toda $\sigma \in \mathcal{L}_{\xi,\eta}(X)$ se cumple que*

$$\rho(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) \leq l(\sigma)\,|t_2 - t_1| \text{ para cualesquiera } 0 \leq t_1, t_2 \leq 1.$$

Demostración: Sean $t_1 \leq t_2 \in I$ y sea $\sigma \in \mathcal{L}_{\xi,\eta}(X)$ entonces

$$\begin{aligned} \rho(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) &\leq l\left(\sigma\mid_{[t_1,t_2]}\right) \\ &= |t_2 - t_1|\, l(\sigma). \end{aligned}$$

■

Estamos listos para probar el teorema central de esta tesis.

Teorema 6.9 ***(Existencia de trayectorias geodésicas).*** *Sea X un espacio métrico compacto. Si existe una trayectoria de longitud finita entre dos puntos ξ y η de X entonces existe una trayectoria geodésica de ξ a η en X.*

Demostración: Consideremos la restricción

$$l : C^0(I, X) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

de la función longitud al subespacio $\mathcal{L}_{\xi,\eta}(X)$. Sea $a < \infty$ la longitud de alguna trayectoria de ξ a η. Como su reparametrización proporcional a la longitud de arco tiene la misma longitud (Proposición 1.5) entonces

$$l_{\leq a} := \{\sigma \in \mathcal{L}_{\xi,\eta}(X) : l(\sigma) \leq a\} \neq \varnothing.$$

De la proposición anterior se sigue que, para toda $\sigma \in l_{\leq a}$,

$$\begin{aligned} \rho(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) &\leq |t_2 - t_1|\, l(\sigma) \\ &\leq |t_2 - t_1|\, a \quad \text{para cualesquiera } 0 \leq t_1, t_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Dada $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$, entonces si $|t_2 - t_1| < \frac{\varepsilon}{a}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) &\leq |t_2 - t_1|\, a \\ &< \frac{\varepsilon}{a} a \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

por lo tanto $l_{\leq a}$ es equicontinuo. Entonces, por el Corolario 5.8, $l_{\leq a}$ es relativamente compacto. Recordemos que l es $s.c.i$ entonces por la Proposición 2.2 $l_{\leq a}$ es cerrado, por lo tanto es compacto.

Por Teorema 3.4 tenemos que l alcanza su mínimo en σ_0 en $\mathcal{L}_{\xi,\eta}(X)$ y, como todas las trayectorias de ξ a η en X se pueden reparametrizar proporcionalmente a la longitud de arco sin cambiar su longitud, σ_0 es una trayectoria geodésica de ξ a η en X. ■

Bibliografía

[1] J. Dieudeonnne, *Elements d'analyse*,Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[2] J. Jost, *Postmodern analysis,* Springer, New York, 1997.

[3] A. N. Kolmogorov, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional,*Mir,Moscu, 1975.