



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA**

**ANÁLISIS EXPERIMENTAL Y NUMÉRICO DE ESFUERZOS
EN PLACAS CON ORIFICIO CIRCULAR CENTRADO
BAJO UN GRADIENTE DE CARGA LINEAL**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA**

P R E S E N T A:

ING. JOSÉ EMILIANO MARTÍNEZ ORDAZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. JORGE CARRERA BOLAÑOS



CD. UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE, 2005



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Í N D I C E

Historia	i
Objetivos generales	ii
Importancia	iii

CAPÍTULO I . Antecedentes generales de la mecánica del medio continuo.

1. Planteamiento del problema.	1
1.1 Cinemática.	5
1.2 Condiciones de Frontera.	16
1.3 Ecuaciones Constitutivas.	17
1.4 Caracterización del problema.	18

CAPÍTULO II . Problemas bidimensionales en elasticidad.

PARTE UNO: TEORÍA

2.1 Introducción.	19
2.2 Afirmación del problema plano.	20
2.3 Ecuaciones básicas del problema plano.	22
2.4 Método de deformación plana.	23
2.5 Método de esfuerzo plano.	26
2.6 Función de esfuerzo.	27
2.7 Relaciones básicas en coordenadas polares.	28

PARTE DOS: APLICACIONES

2.8 Solución elástica para una placa delgada con orificio circular centrado bajo carga unidimensional.	30
2.9 Concentración de esfuerzos en torno a un orificio circular en una placa de espesor arbitrario.	33
2.10 Solución elástica para una placa delgada de ancho finito con orificio circular bajo una carga unidimensional.	34

CAPÍTULO III . Teoría de Fotoelasticidad.

PARTE A: UN MODELO EXPERIMENTAL DEL PROBLEMA

A.1 Justificación.	37
--------------------	----

PARTE B: TEORÍA DE FOTOELASTICIDAD

B.1 Introducción.	40
B.2 Fotoelasticidad.	40
B.3 Análisis fotoelástico de esfuerzos en dos dimensiones.	41
B.3.1 Patrones de franjas isocromáticas.	41
B.3.2 Polariscopio Circular.	43
B.4 Selección del material fotoelástico.	48
B.5 Eliminación de los patrones residuales.	51

PARTE C: RESULTADOS OBTENIDOS POR ELASTICIDAD

C.1 Franjas producidas para el caso uno [98 N].	53
C.2 Franjas producidas para el caso dos [210N].	54
C.3 Franjas producidas para el caso tres [320 N].	56

CAPÍTULO IV . Análisis numérico del problema.

4.1 Generalidades del programa ANSYS.	59
4.2 Diseño del modelo propuesto.	61
4.3 Cálculo numérico del estado de esfuerzos en la frontera del orificio circular	63
4.3.1 Análisis numérico de la placa problema	63
4.3.2 Análisis numérico de la placa original y el modelo propuesto bajo un gradiente de carga lineal (Caso uno)	64
4.3.3 Análisis numérico de la placa original y el modelo propuesto bajo un gradiente de carga lineal (Caso dos)	68
4.3.4 Análisis numérico de la placa original y el modelo propuesto bajo un gradiente de carga lineal (Caso tres)	70
4.4 Caracterización del modelo en base a los resultados obtenidos	71
4.5 Parametrización del modelo propuesto en relación de su anchura W y diámetro del orificio D	72
4.6 Parametrización del modelo propuesto con respecto a la ubicación del orificio circular	74

CAPÍTULO V . Análisis de resultados.

5.1 Resultados	76
Conclusiones	82
Bibliografía	83
Anexo A	85
Anexo B	87
Anexo C	89

Introducción.

Historia. Se sabe que por el año de 1776, Euler fue probablemente el precursor sobre estos estudios. Estudió y desarrolló un análisis matemático para problemas de vibración libre en placas. Muchos fueron los que siguieron con los estudios hechos por Euler, entre ellos Lagrange, que en 1813 corrigió y agregó un término faltante a la ecuación diferencial que regulaba el comportamiento de placas horizontales bajo vibración, con lo cual presentó propiamente la ecuación diferencial generalizada para placas.

Cauchy y Poisson fueron los primeros en formular el problema de flexión de placas en términos de ecuaciones generales de la teoría de elasticidad. Posteriormente, con colaboración de Navier, se creó la primera teoría satisfactoria para flexión en placas. Navier consideró al espesor de la placa en la ecuación general como una función de la rigidez D . El también introdujo un método “exacto” para transformar a la ecuación diferencial en expresiones algebraicas por medio de series trigonométricas de Fourier.

Cabe señalar que aún habiendo muchos otros colaboradores en el estudio de placas --desde mediados del siglo XVIII con Kirchhoff, Bernoulli, Lord Kelvin, Saint-Venant, hasta finales del siglo XIX y principios del XX con una gran escuela rusa como Timoshenko, Galerkin, Bubnov y Krylov --, no es necesario ahondar en el tema, pero si tener en cuenta que las contribuciones siguen apareciendo aún y se considere un tema gastado y viejo.

Objetivos (generales). Los objetivos de esta tesis son los siguientes: i) obtener los concentradores de esfuerzos resultantes en la periferia del orificio circular de la placa a los que ven sometidos por la carga; ii) establecer un modelo computacional “aproximado” que reproduzca el tipo de carga requerido (aportación teórica muy importante); iii) sustentar los resultados obtenidos **analíticamente**

(mediante modelos matemáticos “aproximados”), **experimentalmente** (mediante fotoelasticidad) y **numéricamente** (con el uso del software ANSYS™).

Tal vez sea necesario hacer mención del tercer objetivo, puesto que para el estudiante es de suma importancia el mostrar que la teoría no esta peleada con la práctica; y si se tiene alguna duda, retomo la frase de mi tutor: “..la teoría debe ser la mejor guía para la práctica”.

Importancia. La importancia del estudio de placas con orificio circular centrado cargado por medio de un gradiente (fig. 1.1) radica en que puede reproducir un fenómeno físico real. Por ejemplo, una alcantarilla o túnel (fig.1.2) puede estar bajo esas mismas cargas.

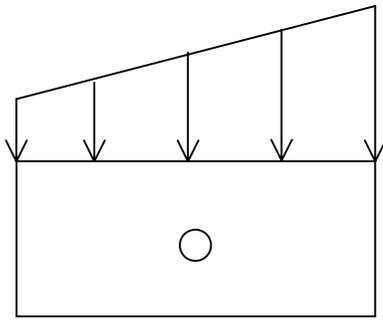


Figura 1.1

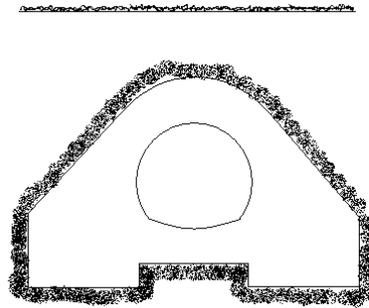


Figura 1.2

Inclusive, un puente al que se le quiera poner una tubería hidráulica o para cableado transversal a la longitud del puente (fig. 1.3), puede estar sometida al mismo tipo de carga que se propone. Y como este, pueden haber muchos otros fenómenos físicos a los que esta expuesta construcciones, máquinas, etc.

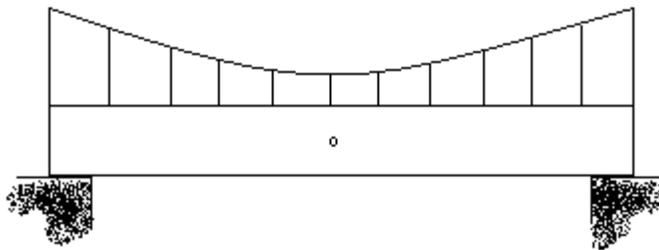


Figura 1.3

Una buena pregunta que se vislumbra en el camino es el cómo se van a obtener los resultados requeridos. Un primer camino es el uso de una herramienta computacional llamada ANSYS™, la cual ayuda al diseñador, de manera muy general, a modelar[¶] elementos mecánicos, herramientas, etc., sin la necesidad de gastar en prototipos. Inclusive, si nos salimos por un momento del tema, ni siquiera se esta diseñando una pieza, puesto que la palabra diseño implica crear, a diferencia del dibujo, donde no se crea nada.

Como se constatará mas adelante, generamos un modelo “aproximado” que reproduce en una parte en específico el mismo gradiente de esfuerzos que se requiere, inclusive aplicando una carga totalmente diferente. Los resultados obtenidos son datos necesarios para el desarrollo experimental y analítico.

En la parte experimental, se usará un polariscopio circular al cual se le adaptará la probeta de un material fotoelástico y se le aplicará la carga requerida. Se cuenta con métodos ópticos para el análisis de esfuerzos, y dentro de estos métodos esta la teoría de fotoelasticidad, la cual es la elegida para el análisis experimental. Entre el material bibliográfico se tiene a [Dally & Riley] como el más importante.

En lo que se refiere a la parte analítica, se obtendrá al campo tensorial de esfuerzos con la ayuda de un modelo matemático concreto para este caso específico. Se tiene a [Gurtin] como la guía más importante bibliográfica.

Por lo tanto, se quiere llegar a unos resultados que muestren al futuro diseñador de placas, puentes, túneles, alcantarillas, tuberías, etc., el estado de esfuerzos que se tiene en la frontera más cercana al orificio circular y, por ende, tenga conocimiento de los posibles problemas a los que se va a enfrentar. El

[¶] Hay que señalar que, aunque se usa normalmente esta palabra para decir que se está dibujando una pieza, pero no creando un modelo (aproximado o exacto), simplemente se esta recreando una misma figura física en la computadora.

factor de seguridad, pues, se beneficiará por los resultados que se obtengan, ya que se podrá evitar un posible sobre-diseño.

R E S U M E N

El estudio de placas con orificios circulares, ha sido investigado a partir del año de 1890 por G. Kirsch, pasando por Beeuwkes, Howland, etc., hasta Folias. El presente análisis es una contribución pequeña para dicho estudio. Como se sabe, orificios circulares, elípticos, etc., son algunos de los ejemplos más comunes de concentradores de esfuerzo y es por esta razón que es importante hacer un análisis completo del comportamiento que se tiene en placas con estos orificios, en caso particular, los circulares. Grandes compañías como la NASA y Boeing comparten estudios e investigaciones acerca del comportamiento en el fuselaje de sus aviones, debido a los grandes esfuerzos a los que se ven sometidos. Un análisis fotoelástico entrega resultados de suma importancia para el diseñador, y si se apoyan estos resultados con un análisis numérico se tiene un alto grado de certeza en los resultados. Como se observará en los resultados obtenidos, el diseñador contará con tablas, gráficas, estudios paramétricos y modelos que lo auxiliarán para el caso en que cuente con este tipo de placas, bajo un gradiente de carga lineal, cuestión que hasta el momento no ha sido registrada.

ABSTRACT

The plates with circular holes study has been investigated by G. Kirsch since 1890, from Beeuwkes, Howland, etc., to Folias. The following analysis is a small contribution to such study. Circular and elliptic holes, as we know, are some of the most stress concentrators' common examples, for this reason it is very important to make a complete behavior analysis of plates with holes, especially the circular ones. Companies such as NASA and Boeing, share studies and researches about their aircrafts' fuselage behavior because of the stresses they are submitted. A photoelastic analysis delivers very important results to the designer, and if it is added to a numeric analysis, you have a high certainty level result. As we will see in the obtained results, the designer would use result tables, graphics, parametric studies and patterns that will help him to face this type of plates under a linear slope load, a non registered case.

CAPÍTULO I

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA [10]

En la mecánica, como subconjunto de la física, nos interesan todos los cuerpos físicos, sea un auto, una locomotora, una mina, etc. Tomemos como ejemplo la “papa” del ingeniero (figura 1). Este cuerpo está regido por leyes físicas. Su comportamiento es predecible porque obedece leyes. Por lo tanto necesitamos conocer esas leyes para conocer su comportamiento, y ese comportamiento que es el que nos interesa es el comportamiento mecánico. Hay que recordar

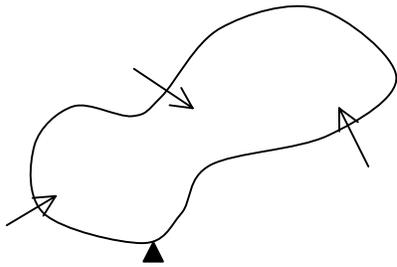


Figura 1

que la mecánica es una ciencia que trata de fuerzas y desplazamientos. En física se habla de la mecánica de la partícula, en la cual conocemos su trayectoria, desplazamiento, etc. Ahora bien, si en vez de una partícula tenemos un cuerpo rígido y que además rota, se regirá por las leyes de Newton: inercia, principios de balance y principio

de acción y reacción. Es por eso que nos llega a la mente la mecánica “clásica” o “newtoniana”. Sabemos que toda teoría tiene su origen en una explicación a sus preguntas en un problema en específico. Para conocer el comportamiento mecánico de los cuerpos se necesita saber que está sucediendo en el cuerpo desde el punto de vista mecánico.

Físicamente está difícil meterse en el cuerpo, por lo que tomamos un punto del cuerpo y lo aislamos (figura 2). Todo esto se resuelve aislando la vecindad del punto con seis planos coordenados y decimos que las leyes que rigen el comportamiento en ese punto son las mismas que rigen a todo el cuerpo en cualquier punto, y de cualquier otro cuerpo.

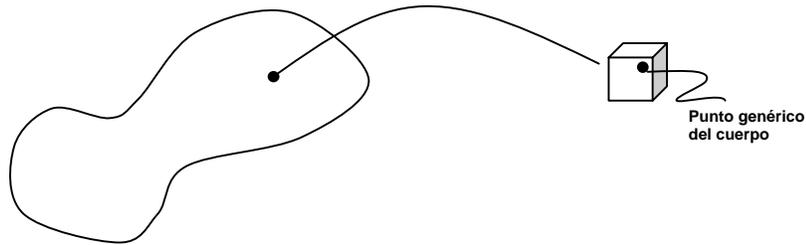


Figura 2

Luego procedo que por el principio de la acción y reacción se que la acción en la cara izquierda va a provocar una reacción en la cara derecha (figura 3), y así

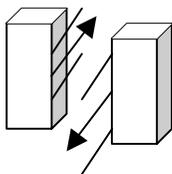


Figura 3 sucede hasta llegar a la frontera del cuerpo, y lo que esta sucediendo en la frontera ∂M esta siendo contrareestado por lo que sucede dentro del cuerpo M (figura 4), y observamos que aún en la frontera los puntos se rigen por las mismas leyes.

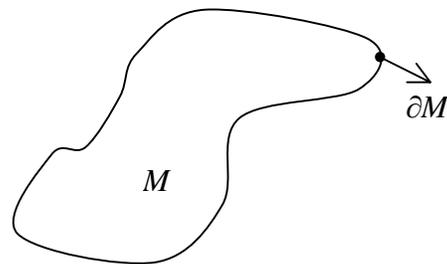


Figura 4

Hasta aquí tenemos que conocer conceptos como fuerza, desplazamiento, esfuerzo, función lineal, límite, etc. Por lo tanto, como no podemos remontarnos a los conceptos básicos del álgebra lineal, cálculo diferencial e integral, entre otros, se toman por sentado que el lector conoce y esta familiarizado con tales conceptos.

Es por eso que nos remitiremos a sólo enunciar aquellos conceptos que se consideren de suma importancia (no por eso dejan de ser importantes los omitidos) y que guarden un orden lógico con la mecánica del medio continuo.

Partimos pues de la definición de continuidad en dos o más dimensiones.

Definición 1 Continuidad. Se dice que x_0 es un punto de acumulación de M si en todo conjunto abierto[£] N que contiene a x_0 existe al menos una secuencia de puntos pertenecientes a M que converge a x_0 .

Es decir, si trazamos una curva dentro del cuerpo, consideramos que la curva toca en todos sus puntos al cuerpo. Esto claro, desde un punto de vista macroscópico.

Un punto importante acerca de la definición uno es que x_0 no necesita ser elemento de M para ser un punto de acumulación de M . A raíz de esto podemos definir lo que es un punto en la frontera de M .

Definición 2 Un punto tal que es al mismo tiempo punto de acumulación de M y de su complemento M^c se llama punto de frontera de M . El conjunto de todos los puntos frontera de M se llama frontera de M , ∂M . La frontera de un conjunto puede pertenecerle al conjunto, o no, o pertenecerle sólo en parte.

Definición 3 Todo punto de M que es un punto de acumulación de M , que le pertenece a M y no es un punto de frontera de M , se llama punto interior de M . El conjunto de todos los puntos interiores de M se llama interior de M .

Definición 4 Un punto de M que no es un punto de acumulación de M se llama punto aislado de M .

Definición 5 Si M no contiene mas que puntos interiores y posiblemente de frontera, pero ningún punto aislado, se dice que M es un conjunto continuo. Si M sólo tiene puntos aislados, se dice que M es discreto.

[£] Se define conjunto abierto como: *Un conjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ se llama un conjunto abierto de \mathbf{R}^n si todos sus puntos son puntos interiores.*

Otra manera de poder definir a un conjunto continuo es por medio del concepto de la conectividad, por lo que el lector tiene otra vía para analizar esta definición.

Habría que recordar que una gran parte del cálculo tensorial será omitida y el lector puede guiarse de los dos primeros capítulos de Gurtin[4], Chadwick[21] o Mase[24], por lo que la definición restringida de tensor y de un campo tensorial serán las únicas expuestas en el presente trabajo.

Definición (restringida) 6 Tensor. Un tensor sobre un espacio vectorial V es una función lineal de $V \rightarrow V$.

Si $V = \mathfrak{R}^n$, entonces dada una base de V , un tensor está representado en esa base por una matriz de $n \times n$.

$$a_j^i = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{ni} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Necesitamos caracterizar la manera en que un cuerpo va a reaccionar ante fuerzas (en forma general). La manera de hacer esto es por medio de un campo tensorial, el cual me va a decir cómo se va a distribuir y desviar las fuerzas. Pero hay que tener en cuenta que el campo tensorial puede no ser lineal, pero la manera en cómo varía si lo puede ser.

Definición 7 Campo tensorial. Sea (E, V, P) un espacio afín.

Un campo tensorial es una función que asocia un tensor a todos los puntos de un subconjunto $E' \subseteq E$.

Se recomienda consultar a Golovina [25] para un análisis más profundo respecto a un espacio afín.

1.1 Cinemática

Una definición poco informal de un cuerpo es aquella que lo define como algo que ocupa una región regular del espacio euclidiano ξ , en una, dos o tres

dimensiones $\begin{pmatrix} \mathfrak{R}^1 & \mathfrak{R}^2 & \mathfrak{R}^3 \\ \mathfrak{E}^1 & \mathfrak{E}^2 & \mathfrak{E}^3 \end{pmatrix}$.

Antes de definir lo que es una región regular, se puede nuevamente definir a un cuerpo como un conjunto de puntos que donde las leyes geométricas hace que esté ligado íntimamente a un subconjunto que ocupa una región regular y que cumple con:

- ◇ Acotada
- ◇ Acotada en su conjunto
- ◇ Conexo (puntos sin huecos)
- ◇ La frontera del cuerpo expresable con las leyes ya conocidas.

Definición 8 Región regular. En términos generales, se usa el término de región regular para una región cerrada \wp con una frontera suave $\partial\wp$ [Gurtin, p. 37].

Ahora bien, aunque se hable generalmente de cuerpos en tres dimensiones, nos enfocaremos únicamente en el problema plano o bidimensional. Esto debido a que, como veremos en los capítulos posteriores, los *esfuerzos* en uno de los tres ejes coordenados se mantiene constante (aunque no del todo, como se observará posteriormente).

Como se ha comentado anteriormente, se tienen varias opciones para la consulta acerca de los elementos básicos de la mecánica del medio continuo. Gurtin[4] proporciona de manera clara, aunque muy avanzada, estos elementos y maneja una notación muy simple en comparación con los demás autores como Mase[24].

Definición 9 Deformación. Una deformación es una función f que da la imagen de un punto \mathbf{p} de la configuración original en una nueva configuración llamada configuración deformada, donde

- \mathbf{x} , son puntos de la configuración deformada
- \mathbf{p} , son siempre elementos de la configuración de referencia.
- \mathbf{x}, \mathbf{p} , son funciones

y además f cumple con:

1. f es una función biunívoca o 1-1 (impenetrabilidad de los cuerpos).
2. f es derivable (en general, todas las veces que sea necesaria).
3. El gradiente de f (∇f) está dado por el *Jacobiano*, y la condición es que para todo punto $\mathbf{p} \in \beta$:

$$\det \nabla f [\mathbf{p}] \neq 0, \quad \det \nabla f [\mathbf{p}] > 0 \quad (1)$$

Hay varios tipos de deformaciones, pero las que interesan en el presente trabajo son las homogéneas, rígidas y deformaciones infinitesimales. Antes de entrar de lleno a las deformaciones, se definirá primero el campo vectorial de desplazamiento.

Tenemos una función

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{p}) \quad (2)$$

De ahí definimos un campo vectorial, el campo vectorial de desplazamientos, el cual lo expresamos de manera vectorial,

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) - \mathbf{p} \quad (3)$$

Además, si u es constante, se tiene una traslación.

Luego se define un campo tensorial para cada f :

$$F [\mathbf{p}] = \nabla f [\mathbf{p}] \quad (4)$$

De (3) se puede decir que es un tensor, donde la primera parte es un campo tensorial, y la segunda es la derivada general, llamada gradiente de deformación.

Si F es un campo tensorial constante para todo \mathbf{p} , entonces

$$F [\mathbf{p}] = T_o \quad (4)$$

se dice que la deformación es homogénea.

Lema. Si F es homogénea, entonces admite la representación:

$$f (\mathbf{p}) = f (\mathbf{q}) + F (\mathbf{p}-\mathbf{q}) \quad (5)$$

para todo $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \beta$.

Matemáticamente, una deformación homogénea es una función lineal desplazada.

Físicamente, localmente a nuestra deformación homogénea la podemos aproximar mediante funciones homogéneas, es decir, puede ser que la deformación no sea lineal, pero podemos aproximarnos en pequeños "cachitos" a esa deformación mediante funciones lineales.

Se puede concluir que toda deformación homogénea se puede descompones en una traslación, rotación y elongación (ya sea de tensión o compresión).

Esta conclusión se sabe una vez conociendo qué es una rotación, elongación y traslación, ésta última explicada con anterioridad, por lo que el lector debe hacer uso de cualquier libro recomendado en las referencias, como a Gurtin[4] o el que sea de su preferencia.

La mecánica del medio continuo tiene la gran virtud de que las deformaciones, localmente, se pueden descomponer en deformaciones homogéneas.

Definición 10 Una deformación es rígida si preserva distancias.

f es rígida si para todo $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \beta$ tenemos:

$$\|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})\| = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| \quad (6)$$

Además, las deformaciones rígidas f tienen a su vez las siguientes propiedades:

1. f se puede representar por $f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{q}) + R(\mathbf{p} - \mathbf{q})$, y dado que podemos descomponer a f en una traslación y su gradiente de deformación en este caso $\nabla f = R$, tenemos que las deformaciones son: traslaciones, o rotaciones, o mezcla de ambas.

2. $\nabla f = R$

3. $U = I = V$

$C = B = I$, donde C y B son los tensores de deformación unitaria Cauchy-Green.

Ahora se analizará el comportamiento de varios campos cinemáticos cuando su gradiente de desplazamiento ∇u es muy pequeño.

Definición 11 Sea f una deformación homogénea.

El campo de desplazamiento correspondiente es

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + u(\mathbf{p}) \quad (7)$$

$$F(\mathbf{p}) = I + \nabla u(\mathbf{p}) \quad (8)$$

Cabe mencionar que la derivada de una función $g(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, utilizando el Jacobiano da como resultado el tensor identidad I . Además, los tensores de deformación unitaria Cauchy-Green siguen las relaciones:

$$C = I + \nabla u + (\nabla u)^T + (\nabla u)^T \nabla u \quad (9)$$

$$B = I + (\nabla u)^T + \nabla u + \nabla u (\nabla u)^T$$

cuya demostración se encuentra en el anexo D.

Lema. Cuando la deformación es rígida, $C = B = I$.

Definición 12 Se define al tensor

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (10)$$

como el tensor de deformación infinitesimal.

Se puede observar que E depende estrictamente del gradiente de desplazamiento. El gradiente de desplazamiento puede estar definido como

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \overline{u_{11}} & \overline{u_{12}} & \overline{u_{13}} \\ \overline{u_{21}} & \overline{u_{22}} & \overline{u_{23}} \\ \overline{u_{31}} & \overline{u_{32}} & \overline{u_{33}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u = \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \end{pmatrix}$$

Pero, ¿qué nos dice E ? E nos dice cómo cambian los desplazamientos.

Una vez teniendo escrito y explicado (brevemente) lo que es una deformación y sus tipos, podemos definir el desplazamiento rígido infinitesimal.

Definición 13 Sea β un cuerpo. Un campo vectorial u representa un desplazamiento rígido infinitesimal, si ∇u es constante y antisimétrico, es decir, u tiene la forma

$$u(\mathbf{p}) = u(\mathbf{q}) + W(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (11)$$

— W es una rotación ortogonal = ∇u —

donde W es antisimétrico. Esto es equivalente a:

$$u(\mathbf{p}) = u(\mathbf{q}) + w \times (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (12)$$

w es el vector axial correspondiente a W .

— Si nosotros desarrollamos nuestro campo vectorial alrededor de nuestro punto y \mathbf{p} es suficientemente cercano, el movimiento va a ser de una forma determinada —

En general, ∇u es la tasa de cambio del desplazamiento en el espacio.

Lema (importante) Todo tensor puede descomponerse en una parte simétrica y una parte antisimétrica.

$$M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) \quad (13)$$

Lema (importante) Si un tensor T es simétrico, existe un sistema de coordenadas en el cual la matriz que representa T tiene la forma:

$$[T] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

donde λ_1, λ_2 , y λ_3 son los valores propios[¶] de T .

Hay que recordar que un campo tensorial se puede representar de varias maneras, como en este caso, una matriz. Esta matriz tiene valores propios, los cuales caracterizan al tensor. En mecánica de sólidos se tiene el Módulo de Young, la relación de Poisson, etc., los cuales caracterizan al tensor de esfuerzos.

Como se podrá convencer el lector, hasta aquí hemos hablado únicamente con uno de los efectos que se tiene en el cuerpo a causa de las diferentes clases de fuerzas a las que puede estar sometido, por lo que definiremos un último efecto que se tiene antes de hablar del concepto de fuerza.

Definición 14 Sea β un cuerpo. Un movimiento de β , $\beta \in \xi$, es una función al menos tres veces continuamente diferenciable.

$$x: \beta \times \square \rightarrow \xi$$

tal que para cada t , $x(\bullet, t)$ es una deformación en β , como se muestra en la figura 5.

Nos referimos a

$$\mathbf{x} = x(\mathbf{p}, t)$$

como el lugar que ocupa el punto material \mathbf{p} en el tiempo t .

A la región del espacio que ocupa en el cuerpo al tiempo t la definiremos como:

$$\beta_t = x(\beta, t)$$

[¶] Consultar a Golovina [p. 126]

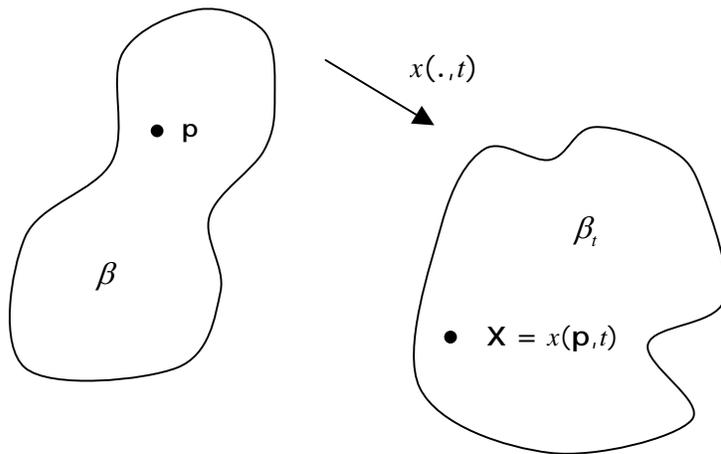


Figura 5

Para tratar de no confundirnos, se establece a continuación la diferente nomenclatura manejada por distintos autores respecto a las configuraciones. El hablar de la configuración de referencia, no deformada, lagrangiana, material, entre otras posibles, estamos hablando de la misma configuración. Así pues, el hablar de configuración deformada, espacial, euleriana, etc., se está hablando de lo mismo.

Simplemente se está hablando de diferentes nomenclaturas expuestas por diferentes autores.

Por otra parte, regresando a la definición de movimiento, es suficiente con mencionar el concepto, por lo que el lector puede analizar con mayor profundidad este concepto con Gurtin o Chadwick.

Los conceptos de masa y densidad son necesarios presentarlos puntualmente. Sin embargo no es objetivo del presente trabajo el entrar a muchos detalles al respecto, por lo que se enunciarán sólo generalidades de ambas.

Por un lado, la masa se puede interpretar como la resistencia que opone el cuerpo a alterar su estado de movimiento. Si un cuerpo está en movimiento, la masa influye en el momento, además de ser una cantidad escalar.

Por otro lado, la densidad es una distribución de la masa dentro del cuerpo. Este concepto es local; para hacerlo global "simplemente" integramos.

Se define fuerza $\mathbf{f}(\mathfrak{V}, t)$ en una parte \mathfrak{V} en el tiempo t como

$$\mathbf{f}(\mathfrak{V}, t) = \int_{\partial\mathfrak{V}} s(n) dA + \int_{\mathfrak{V}} b dV \quad (14)$$

donde s la llamamos fuerza de superficie y b la fuerza de cuerpo. Como se observa, la fuerza s esta definida en la frontera, debido obviamente a que es una fuerza de superficie, mientras que b esta definida dentro de la parte \mathfrak{V} . En general, y como es nuestro problema, las fuerzas de cuerpo son despreciables en comparación con las fuerzas aplicadas en la superficie, por lo que es despreciable.

Definición 15 Hipótesis de Cauchy. Se asume la existencia de una 'densidad de fuerza' en la superficie $s(n, \mathbf{x}, t)$ definida para cada vector unitario n y cada (\mathbf{x}, t) en la trayectoria ℓ (figura 6).

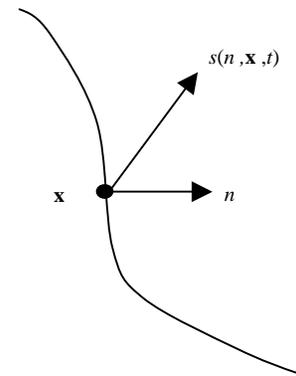


Figura 6

La importancia del concepto "densidad" radica en que es una caracterización 'local' de la masa. Es decir, la masa y de alguna manera las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son 'globales'. Esto es muy importante pero en la práctica de la física es necesario saber cómo se distribuye esa masa, de ahí la relevancia de la idea de densidad. Inclusive pasa lo mismo con el concepto de fuerza. Aquí no es necesario entender cómo se distribuye el efecto de esa fuerza a lo largo del cuerpo, es decir, dado que el cuerpo tiene una extensión, esta constituido de una o varios tipos de material y que su masa esta distribuida de manera no necesariamente homogénea, por lo que el cuerpo va a reaccionar, en general, de diferentes maneras en sus diferentes partes, y el puro concepto de 'fuerza' no nos permite hacer esa diferenciación.

Es por esta razón que Cauchy propone una 'densidad de fuerza', a la que llamamos comúnmente como 'esfuerzo'.

Definición 16 Teorema de Cauchy. Sea (s, b) un sistema de fuerzas para β durante un movimiento. Por lo que la única y suficiente condición para que la ley de balance sea satisfecha es que exista un campo tensorial espacial T (esfuerzo de Cauchy) tal que,

- (a) para cada n vector unitario

$$s(n) = Tn \quad (15)$$

- (b) sea simétrico, y

- (c) T satisfaga la ecuación de movimiento

$$\text{div } T + b = \rho \overset{\circ}{v}$$

Este teorema es uno de los resultados medulares en la mecánica del medio continuo. La afirmación más importante es que $s(n)$ es lineal en n .

Esta claro pues que el campo vectorial $s(n)$ se define sólo sobre la superficie. Es por eso que existen diferentes teoremas, sea el de divergencia [Gurtin, p. 37] entre otros con los cuales podemos pasar de una formulación integral en la frontera del cuerpo a una formulación también integral sobre el interior del cuerpo.

Dado que T debe ser simétrico, esto implica una reducción de componentes en el cálculo del esfuerzo en su forma matricial. Las constantes como el módulo de Young, relación de Poisson serán los valores propios en la matriz y por lo tanto todo se reduce a resolver nuestra matriz por medio del Jacobiano, es decir, nos queda un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que debemos aplicar para cada esfuerzo solicitado.

Ahora bien, tenemos más incógnitas que ecuaciones por lo que debemos encontrar las restantes ecuaciones que permitan resolver el sistema.

Resumiendo, es importante visualizar lo siguiente. Debido a que el tensor de esfuerzo de Cauchy T es simétrico hay una reducción en el número de componentes a conocer, esto es, de nueve componentes de esfuerzo (recordar que estamos hablando en un sistema tridimensional) quedan seis, por lo que nuestra ecuación de balance queda como

$$\operatorname{div} T = -b$$

Además, debido a que las nueve componentes de esfuerzo están encerradas en las tres relaciones de equilibrio, se observa pues que el estado de esfuerzo en cualquier punto esta completamente caracterizado por las seis componentes de esfuerzo a las que se vio reducido el sistema.

Por lo tanto las seis componentes de esfuerzo deben satisfacer las tres ecuaciones diferenciales parciales (ecuaciones de equilibrio) en el interior del cuerpo y en la frontera de éste. Y por si fuera poco, satisfacer las condiciones de frontera. Es claro pues que estas ecuaciones no son suficientes para una completa determinación del estado de esfuerzo y se debe buscar mayor información que incumba la constitución del cuerpo para que la solución de las ecuaciones de equilibrio sea única.

Se definen las leyes de balance, las cuales no serán motivo de un estudio profundo, por lo que si el lector requiere mayor información se recomienda a Gurtin [p. 100] y Sokolnikoff[6].

$$\int_{\partial \mathfrak{V}_t} s(n) dA + \int_{\mathfrak{V}_t} b dV = \int_{\mathfrak{V}_t} \overset{\circ}{v} \rho dV$$

$$\int_{\partial \mathfrak{V}_t} r \times s(n) dA + \int_{\mathfrak{V}_t} r \times b dV = \int_{\mathfrak{V}_t} r \times \overset{\circ}{v} \rho dV$$

Estas dos fórmulas se conocen comúnmente en la mecánica de sólidos como la 'suma de fuerzas' y 'suma de momentos'. La letra r se refiere, físicamente, al brazo de palanca que se ejerce sobre el punto.

1.2 Condiciones de frontera

Como se había comentado antes, así como se necesita resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, además necesitamos que estas ecuaciones cumplan con las condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera son tres: condiciones Dirichlet, von Neumann y mixtas. Definiremos brevemente en que consiste cada una y su interpretación física.

Las condiciones Dirichlet están dadas por información sobre el comportamiento espacial del fenómeno. Las obtenemos ya sea directamente midiendo cómo estaba el cuerpo antes del movimiento y cómo quedó después; o las podemos imponer exigiendo que los desplazamientos del cuerpo sean estos o aquellos. Físicamente estas condiciones las ejerceremos en el cuerpo imponiendo un 'empotramiento' en un área, punto, nodo (tratándose numéricamente). En análisis experimental, impedimos el libre movimiento en alguna dirección, y en análisis numéricos aplicando un desplazamiento de valor nulo en todos los grados de libertad (direcciones x, y y z) o sólo alguna de ellas.

Las condiciones von Neumann representan las acciones que estamos ejerciendo sobre el cuerpo. Como se dice normalmente, el sistema de sollicitaciones a las que se somete al cuerpo. Claro está que, físicamente, representa las fuerzas a las que está sometido el cuerpo.

Las condiciones mixtas son una combinación de ambas.

1.3 Ecuaciones constitutivas

Como se había dicho anteriormente, no tenemos suficientes ecuaciones para el número de incógnitas. Estas ecuaciones faltantes son las ecuaciones constitutivas. Hay de varios tipos, pero las que interesan son dos: una de tipo teórico, en este caso las que caracterizan la teoría de elasticidad lineal; y las que nos permiten caracterizar a nuestro material en estudio.

La teoría de elasticidad lineal esta basada en la ley de esfuerzo-deformación:

$$S = C[E]$$

donde C es el tensor de elasticidad, el cual se aplica a la deformación infinitesimal E . S es el tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff, por lo que se recomienda consultar a Gurtin[cap. IX y X] para el estudio de este nuevo tensor y comprender del por qué es mejor el manejo de este tensor y no el de Cauchy.

Esta ecuación es válida únicamente bajo los siguientes supuestos:

- (a) El gradiente de desplazamiento ∇u es pequeño.
- (b) Los esfuerzos residuales en la configuración de referencia desaparecen.

Por lo tanto tenemos nuestro sistema de e.d.p. como sigue:

$$S = C[E] \quad \text{Ley esfuerzo-deformación} \quad (17)$$

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad \text{Relación deformación-desplazamiento} \quad (18)$$

$$\text{Div } S + b_o = \rho_o \overset{\infty}{u} \quad \text{Ecuación de movimiento} \quad (19)$$

Es aquí donde se tiene un sistema linealizado de e.d.p. para los campos u , E y S , si es que se cuenta con C , ρ_o y b_o . El subíndice de la densidad y fuerza de cuerpo indica únicamente que son valores en la configuración de referencia.

Si el cuerpo β es isótropo, la ley de esfuerzo-deformación queda como:

$$S = 2\mu E + \lambda(\text{tr}E)I$$

donde μ y λ son los módulos de Lamé. Además, si el cuerpo es homogéneo, μ , λ y ρ_o son constantes.

En lo que se refiere a la relación deformación-desplazamiento y la ecuación de movimiento tenemos que si el cuerpo β es homogéneo e isótropo:

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla\text{Div } u + b_o = 0 \quad (20)$$

recordando que en nuestro problema es evidente la teoría estática donde $\dot{u} = 0$, ya que el problema es independiente del tiempo.

Es evidente pues que teniendo μ , λ y b_o podemos obtener el desplazamiento u , y por ende se obtendrá la deformación infinitesimal E y por último el tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff S .

1.4 Caracterización del problema

La caracterización del problema consiste en dar una forma matemática de la región de trabajo, así como la caracterización de las fuerzas que se ejercen en el cuerpo y presentarlas como condiciones de frontera. En la sección 4.3 se explican estos puntos a detalle, sin profundizar demasiado. Se detallan las medidas que tiene el cuerpo en estudio, las fuerzas que se aplican, la ubicación que tienen estas fuerzas, las restricciones de desplazamiento y su clase.

CAPÍTULO II

PARTE 1. PROBLEMAS BIDIMENSIONALES EN ELASTICIDAD

2.1 Introducción [1-3,9].

Las aproximaciones usadas para determinar la influencia de fuerzas aplicadas, así como torque en cuerpos elásticos son: mecánica de materiales y la teoría de elasticidad. Ambas recaen en las condiciones de equilibrio y hacen uso de las relaciones esfuerzo-deformación usualmente consideradas al asociar materiales elásticos. La diferencia esencial entre ambos métodos está en el tipo de simplificaciones empleadas. Por así decirlo, la mecánica de materiales es la manera *ingenieril* de analizar esfuerzos, mientras que la teoría de elasticidad es la manera *matemática* de analizar esfuerzos.

En la teoría de elasticidad, uno busca esfuerzos y deformaciones que satisfagan simultáneamente las ecuaciones de equilibrio en cada punto del cuerpo, compatibilidad en todos los desplazamientos, y las condiciones de frontera en el esfuerzo y desplazamiento. En contraste con la mecánica de materiales, este método no opera bajo ninguna suposición inicial o alguna aproximación acerca de la deformación geométrica del cuerpo. Es por esto que la teoría de elasticidad puede resolver un problema en donde uno no pueda suponer anticipadamente el cambio de deformación en un cuerpo, como en el caso para determinar los esfuerzos alrededor de un orificio en una placa [Cook, pp. 2-6].

Para averiguar la distribución de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos dentro de un cuerpo elástico sujeto a un sistema de fuerzas requerimos la consideración de un número de condiciones fundamentales relacionadas con

leyes físicas, propiedades del material y geometría. Estos principios fundamentales de análisis se describen de la siguiente manera:

1. Las *ecuaciones de equilibrio* deben satisfacerse en todo el cuerpo.
2. Las *relaciones esfuerzo-deformación* (Ley de Hooke) deben aplicarse al material.
3. *Condiciones de compatibilidad*. Las componentes de deformación deben ser consistentes con la preservación de la continuidad del cuerpo.

Además, los campos de esfuerzo, deformación y desplazamiento deben ajustarse a las condiciones de carga impuestas en la frontera, se dice pues que se deben cumplir las *condiciones de frontera* [Ugural, 1995].

2.2 Afirmación del problema plano [2].

Se considera un cuerpo homogéneo, isotrópico y elástico confinado por dos planos paralelos y una o más superficies cilíndricas cuyos generadores son perpendiculares a los planos de frontera. En la figura 2.1, se muestra el caso en donde la región ζ ocupada por el cuerpo es finita y simple conexa. Sea S_L la frontera lateral cuyo trazo en el plano medio ($z=0$) es la curva plana C . Ahora supongamos que el cuerpo es cargado sólo por fuerzas de superficie en S_L y por fuerzas de cuerpo, y que todas estas cargas externas sean paralelas a los planos de frontera y constante en la dirección z . Estas dos componentes de las fuerzas de superficie pueden denotarse por $\bar{X}_n(x,y)$ y $\bar{Y}_n(x,y)$. Estas notaciones son usadas para denotar que \bar{X}_n y \bar{Y}_n son funciones de x y y solamente, y no de z .

Las componentes de la fuerza de cuerpo son:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ Y &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde

$$\Omega = \Omega(x, y)$$

Las condiciones de frontera son,

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{t}{2} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= \bar{X}_n(x, y) \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= \bar{Y}_n(x, y) \\ \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{zy} \cos(n, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{en } S_L \quad (2.3)$$

Este tipo especial de problema se le llama problema plano, o problema bidimensional. Una gran variedad de problemas caen en esta categoría. Para resolver el problema plano, tres métodos son comúnmente utilizados.

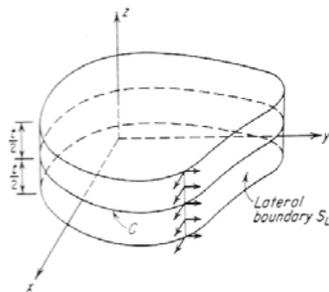


Figura 2.1 *Cuerpo cilíndrico confinado por los planos $\pm t/2$ y la superficie lateral S_L [Durelli, p. 119, 1958]*

Estos son: método de deformación plana, método de esfuerzo plano y método de esfuerzo plano generalizado. Se discutirán los dos primeros, y debido a la importancia de la sistematización que se requiere para el estudio de estos métodos, se basará del [Durelli, cap. 6, 1958] y [Ugural, cap. 3, 1995].

2.3 Ecuaciones básicas del problema plano [2].

Haciendo notar que Z , la componente en la dirección z de la fuerza de cuerpo, es cero, se obtiene las siguientes ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en términos de esfuerzos.

Ecuaciones de equilibrio,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

Ecuaciones de compatibilidad en términos de esfuerzos,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_x + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial x^2} &= \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial y^2} &= \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial z^2} &= \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial x \partial y} &= -\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial z \partial x} &= 0\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

Por lo tanto, el problema es el encontrar un grupo de componentes de esfuerzos que satisfagan las ecuaciones (2.4) y (2.5) en toda la región y las ecuaciones (2.2) y (2.3) en la frontera.

2.4 Método de deformación plana [2,1].

Se usará el método semi-inverso[£]. Las siguientes suposiciones de esfuerzos son hechas:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y)\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y) \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zx} = 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

[£] Método utilizado para la solución de problemas de elasticidad. Requiere la propuesta de una solución parcial formada por esfuerzos, deformaciones, desplazamientos, o la función esfuerzo en términos de coeficientes conocidos o indeterminados [Ugural, p.105, 1995].

Sustituyendo las ecuaciones (2.6) y (2.7) en las relaciones esfuerzo-deformación, obtenemos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y) \\ \varepsilon_z &= \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0\end{aligned}\tag{2.8}$$

Como consecuencia de las suposiciones (2.6) y (2.7) tenemos que:

1. Todas las componentes de esfuerzo y deformación son funciones sólo de x y y ; no varían en la dirección z .
2. Todas las componentes de esfuerzo y deformación en la dirección z se desvanecen excepto σ_z , la cual es igual a $\nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

Dado que todas las componentes de deformación en la dirección z desaparecen y la deformación es bidimensional, este método se llama *método de deformación plana*.

Ahora, se probará la validez de las suposiciones (2.6) y (2.7).

Sustituyendo estas ecuaciones en las ecuaciones de equilibrio (2.4), la tercera de estas se satisface. Las otras dos quedan como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0\end{aligned}\tag{2.9}$$

Las ecuaciones de compatibilidad en términos de esfuerzos [Ecs. (2.5)] quedan

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x + \sigma_y) = - \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right)$$

La cuarta ecuación de (2.10) puede ser derivada de las ecuaciones (2.9). Cada una de las restantes tres puede ser derivada de las ecuaciones (2.9) y una de las restantes dos ecuaciones (2.10).

Por tanto, el que se satisfaga una de las primeras tres ecuaciones de compatibilidad es suficiente. Arbitrariamente se usará la tercera ecuación de compatibilidad por ser la más sencilla, junto con las ecuaciones (2.9) para satisfacer el equilibrio y compatibilidad, por lo que se tiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)\tag{2.11}$$

Esta es la *ecuación de compatibilidad* en términos de esfuerzos.

Ahora tenemos tres expresiones, ecuaciones (2.9) y (2.11) en términos de *tres cantidades desconocidas*: σ_x , σ_y , y τ_{xy} . Este grupo de ecuaciones, junto con las condiciones de frontera (2.2) y (2.3), son usadas para la solución de problemas de deformación plana.

2.5 Método de esfuerzo plano [2,1].

El problema plano puede ser aproximado de una manera muy diferente a la del método de deformación plana. En vez de asumir un estado bidimensional de deformación, se asume un estado bidimensional de esfuerzos, o esfuerzo plano. Aquí se asume que

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.12)$$

Las ecuaciones de equilibrio (2.4) son de nueva cuenta simplificadas en las ecuaciones (2.9). Las ecuaciones de compatibilidad (2.5) quedan como

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial x^2} &= \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial y^2} &= \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial z^2} &= \frac{-\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial z \partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3}$$

El problema se reduce a encontrar tres componentes de esfuerzo σ_x , σ_y , y τ_{xy} que cumplan con las ecuaciones (2.9) y (2.13) en toda la región, y las condiciones en la frontera (2.2) y (2.3).

Ahora bien, al igual que en caso del método de deformación plana en donde se llega a una ecuación de compatibilidad, aquí también se llega a una sola *ecuación de compatibilidad*, la cual es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.14)$$

Por lo tanto, es necesario el introducir una ecuación de esfuerzo, llamada de Airy, para resolver estas ecuaciones diferenciales para las tres incógnitas σ_x , σ_y , y τ_{xy} .

2.6 Función de esfuerzo [1].

En las secciones pasadas se ha demostrado que para la solución de problemas planos en elasticidad se requiere de la integración de ecuaciones diferenciales de equilibrio [Ecs. (2.9)], junto con las ecuaciones de compatibilidad [Ecs. (2.11), o bien (2.14)] y las condiciones de frontera [Ecs. (2.2) y (2.3)]. En el supuesto de que las fuerzas de cuerpo X , y Y sean despreciables, estas ecuaciones se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.16)$$

junto con las condiciones de frontera. Las ecuaciones de equilibrio son satisfechas idénticamente por la *función de esfuerzo*, $\Phi(x, y)$, introducida por G.B. Airy, relacionando a los esfuerzos de la siguiente manera:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.17) en la ecuación de compatibilidad, la ecuación (2.16) queda como

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \Phi = 0 \quad (2.18)$$

Lo que se acaba de llevar a cabo es la formulación de un problema bidimensional en donde las fuerzas de cuerpo están ausentes, y debe encontrarse una vía de solución para una ecuación biarmónica, la cual debe satisfacer las condiciones de frontera.

2.7 Relaciones básicas en coordenadas polares [2, 1].

Consideraciones geométricas relacionadas, ya sea con el tipo de carga o con la frontera del sistema de carga, hacen preferente el uso de coordenadas polares en sustitución del sistema cartesiano. En general las coordenadas polares ofrecen una gran ventaja en su uso donde exista un grado de simetría axial. Como ejemplos de este cierto grado de simetría tenemos a un cilindro, un disco, vigas curvas y para placas largas con orificios circulares.

El sistema de coordenadas polares (r, θ) y el sistema cartesiano (x, y) se relacionan por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & r^2 &= x^2 + y^2 \\ y &= r \sin \theta, & \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Estas ecuaciones llevan a

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{y} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}\end{aligned}\quad (2.20)$$

Las componentes de esfuerzo en las direcciones radial y tangencial, σ_r , σ_θ , y $\tau_{r\theta}$ se relacionan con σ_x , σ_y , y τ_{xy} por las leyes de transformación de esfuerzos, por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta\end{aligned}\quad (2.21a)$$

$$\tau_{r\theta} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

ó

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (2.21b)$$

Por medio de las ecuaciones (2.20) y (2.21b) se hace un desarrollo puramente algebraico[£] y se obtienen las ecuaciones de equilibrio y la ecuación de compatibilidad en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0\end{aligned}\quad (2.22)$$

[£] Para un proceso más detallado para la obtención de las ecuaciones (1.22) ver [Durelli, pp 134-136, 1958].

$$\nabla^4 \Phi \equiv \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \quad (2.23)$$

Con las ecuaciones (2.21a) y (2.23) las ecuaciones (2.17) y (2.18) toman una nueva forma en coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\nabla^4 \Phi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (2.25)$$

El problema es el encontrar una función de esfuerzo Φ que satisfaga la ecuación (2.25) y cuyos esfuerzos correspondientes enlistados en las ecuaciones (2.24) satisfagan las ecuaciones de frontera. Una vez que Φ se encuentra, los esfuerzos son dados por las ecuaciones (2.24) y (2.7).

PARTE 2. APLICACIONES A PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

2.8 Solución elástica para una placa delgada con orificio circular centrado bajo carga unidimensional [2].

Se representa en la figura 2.2 una placa delgada, de ancho y longitud infinita, la cual tiene un orificio circular en su centro. La placa esta sujeta a una tensión uniforme de magnitud σ_{aG} en la dirección x .

El uso de coordenadas polares será lo apropiado debido al tipo de problema. Para placas delgadas, el método de esfuerzo plano es una buena aproximación a la solución exacta y será la solución buscada. La solución de esfuerzo plano generalizado tiene los mismos esfuerzos a la solución de la deformación plana primaria, excepto por σ_z .

Por lo tanto, el problema se resuelve si se puede encontrar una función Φ que satisfaga la ecuación (2.25) y que los esfuerzos correspondientes a la ecuación (2.24) satisfagan las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 & & \text{en } r = a \\ \sigma_z = \sigma_{aG} & \quad \sigma_y = 0 & \quad \tau_{xy} = 0 & \quad \text{en } r = \infty \end{aligned}$$

o, por las ecuaciones (2.21a), (2.26)

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_{aG} \cos^2 \theta & \quad \sigma_\theta = \sigma_{aG} \sin^2 \theta \\ \tau_{r\theta} = -\sigma_{aG} \sin \theta \cos \theta & \quad \text{en } r = \infty \end{aligned}$$

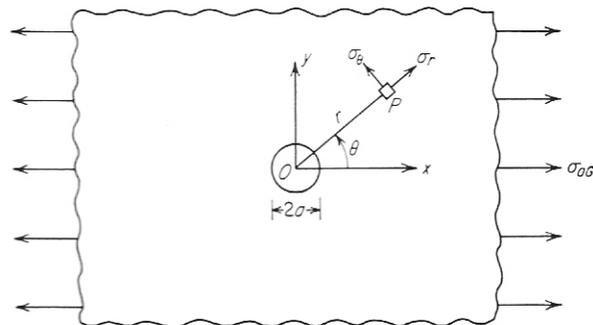


Figura 2.2 Placa delgada infinita con un orificio circular bajo una tensión unidimensional [Durelli, p.203, 1958]

Por medio del método semi-inverso se propone un valor para Φ , y haciendo un desarrollo puramente matemático [véase Durelli, pp. 204-205, 1958], se obtiene una solución para el problema plano generalizado para una placa delgada de ancho infinito con un orificio bajo tensión:[¶]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_{aG}}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_{aG}}{2} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_{aG}}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_{aG}}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_{aG}}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin 2\theta\end{aligned}\quad (2.27)$$

Los esfuerzos en la tercera dirección de la solución de esfuerzo plano generalizado,

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

Aquí el cuerpo es múltiple conexo, pero la resultante de las cargas en el exterior de la frontera de la placa se desvanecen. Por tanto la ecuación de compatibilidad asegura un campo de desplazamiento continuo, y lo arriba escrito es una correcta condición del esfuerzo plano generalizado.

En el borde del orificio, tenemos que $r = a$, y además

$$\sigma_\theta = \sigma_{aG}(1 - 2\cos 2\theta) \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$$

En $\theta = \pi/2$ o $3\pi/2$, tenemos que $\sigma_\theta = 3\sigma_{aG}$, tres veces el esfuerzo uniforme aplicado a los extremos de la placa. En $\theta = 0$ ó π , tenemos que $\sigma_\theta = -\sigma_{aG}$, un esfuerzo de compresión de igual magnitud al esfuerzo tensil aplicado.

[¶] Esta solución fue obtenida por G. Kirsch; véase *Z.Ver.deut.Ing.*, vol. 42, 1898.

Para la sección transversal de la placa a lo largo del centro del orificio y perpendicular al eje x , $\theta = \pi/2$, y tenemos

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_{aG}}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \quad (2.28)$$

Para valores suficientemente largos de r comparado con a , los últimos dos términos de la ecuación (2.27) serán bastante pequeños en comparación con el primero y $\sigma_{\theta} = \sigma_{aG}$.

2.9 Concentración de esfuerzos en torno a un orificio circular en una placa de espesor arbitrario [2].

Para una placa de espesor arbitrario, la solución de esfuerzo plano primario o de deformación plana debe ser sobrepuesta en la solución del correspondiente problema residual para obtener la solución verdadera. El problema residual para el caso de una placa infinita con un orificio circular ha sido expuesto por Sternberg y Sadowsky [17]. Sus resultados indican que bajo una carga uniaxial, el esfuerzo tangencial σ_{θ} en la raíz del orificio sigue siendo el esfuerzo máximo (Fig. 2.3). Sin embargo, este σ_{θ} no es constante a lo largo del espesor de la placa. El valor en o cerca de las dos caras extremas de la placa es ligeramente menor que tres veces la intensidad de la carga σ_{aG} . El valor en el interior de la placa es ligeramente mayor del triple del valor de la carga. Sin importar la relación de espesor t/D , los valores del mayor y menor σ_{θ} nunca es mayor del 103% o menor del 90% del valor, tres veces la carga, dada por la solución de Kirsch.

En aplicaciones de ingeniería el factor de concentración de esfuerzos de 3 puede asumirse de ser válido para cualquier espesor de placa.

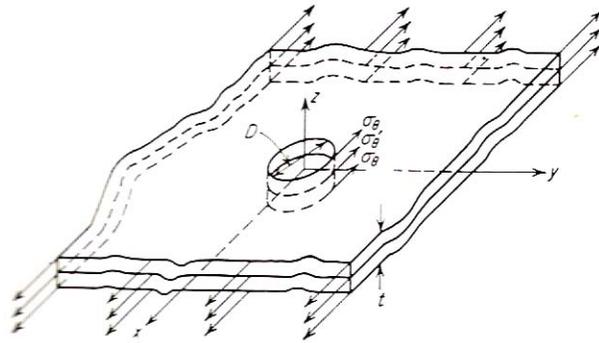


Figura 2.3 Placa infinita con orificio circular, bajo carga uniaxial. El esfuerzo máximo en las caras superior e inferior, σ_θ , es menor que el esfuerzo máximo en el interior de la placa, σ'_θ [Durelli, p. 215, 1958].

2.10 Solución elástica para una placa delgada de ancho finito con orificio circular bajo una carga unidimensional [2].

La figura 2.4 ilustra una placa delgada de longitud infinita pero con una anchura finita W , con un orificio circular de diámetro $D = 2a$ en su centro. La placa está sujeta a una tensión uniforme de magnitud σ_{aG} en dirección de su longitud. Como en el caso anterior, este también es un problema plano y se resuelve encontrando una cierta función de esfuerzo de Airy Φ que satisfaga la ecuación (2.25) y cuyos esfuerzos contenidos en las ecuaciones (2.24) satisfagan las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \tau_{r\theta} &= 0 && \text{en } r = a \\ \sigma_r = \sigma_{aG} & \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 && \text{en } x = \infty \\ \sigma_y = \tau_{xy} &= 0 && \text{en } y = \pm W/2 \end{aligned}$$

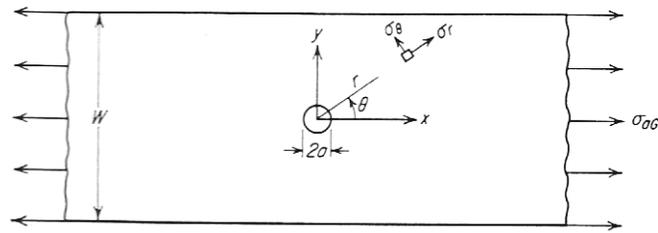


Figura 2.4 Placa delgada finita con un orificio circular, bajo carga unidimensional [Durelli, p. 215, 1958]

Sin importar el gran trabajo que hay en proponer y reproponer, no se ha encontrado una función compuesta por un número finito de funciones elementales que satisfaga las condiciones arriba descritas. La alternativa es pues, el buscar una función de esfuerzo satisfactoria compuesta por un número infinito de funciones elementales, sea por ejemplo, una función de esfuerzo en la forma de series infinitas. Para esto, se usa el método de correcciones sucesivas. En este método se escoge una función que satisface la ecuación (2.25) y conlleva a esfuerzos que satisfacen las condiciones de frontera en una parte de la frontera, sea la frontera A , y violando las condiciones de frontera en el resto de la frontera, sea la frontera B . Una segunda función que satisface la ecuación (2.25) es pues introducida para producir los esfuerzos que corrijan las discrepancias en la frontera B . Esta segunda función, sin embargo, produce esfuerzos que pueden alterar las antes satisfechas condiciones en la frontera A . Esta alteración es removida introduciendo una tercera función que satisface nuevamente a la ecuación (2.25). Las condiciones en la frontera B están ahora violadas debido a la presencia de esfuerzos dados por esta tercera función. Una cuarta función es introducida para corregir esta discrepancia, y así sucesivamente. Si se escoge correctamente estas series de funciones, es posible en algunas ocasiones el producir un crecimiento cada vez menor en las magnitudes de las discrepancias, aproximándose a cero como límite.

Bajo este sistema se obtiene una función de esfuerzo de Airy en la forma de series infinitas que satisfagan la ecuación (2.25) y las condiciones de frontera. Obviamente los esfuerzos obtenidos por la función de Airy tendrán también la forma de series infinitas. Si el rango de convergencia es rápido, sólo algunos términos en la serie deben tomarse para lograr el grado de exactitud. Por este método una solución al problema arriba descrito fue obtenido en forma de series infinitas por Howland [12]. La convergencia en la serie es lenta para los casos en donde D/W , la relación entre el diámetro del orificio y el ancho de la placa, es mayor de un medio. Por tanto, la solución es útil sólo para los casos en donde $D/W \leq \frac{1}{2}$.

CAPÍTULO III

PARTE A. UN MODELO EXPERIMENTAL DEL PROBLEMA

1 A.1 Justificación

Para efectos experimentales, se probaron diversos modelos que permitieran reproducir adecuadamente la configuración bajo análisis como se muestra en la figura 3.1.

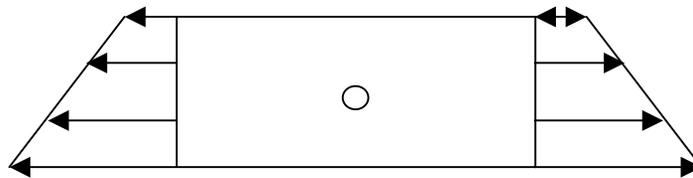


Figura 3.1

Modelo Uno. Consistía en crear una configuración en forma de “escalera” a la cual se le pudiera aplicar una carga en su extremo y reprodujera el gradiente que se requería. Esta primera opción tenía como principal obstáculo el lograr un perfecto ajuste entre cada “escalón” y estos con sus “escalón” anterior.

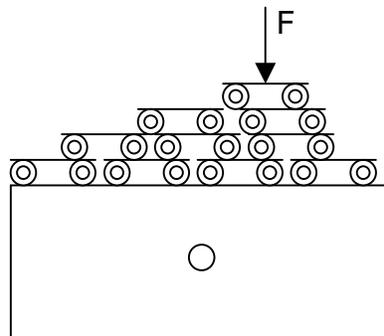


Figura 3.2

El conseguir montar esta configuración en el polariscopio es demasiado complejo, ya que son demasiados elementos que necesitan estar en equilibrio con la base y la celda de carga del polariscopio.

Como se mencionó anteriormente, *la teoría es nuestra guía para la práctica* y por lo tanto recurriremos a ella para consolidar el modelo número dos.

Se sabe que una viga a flexión pura (figura 3.3) produce un estado de esfuerzos a compresión y tensión como se muestra en la figura 3.4.

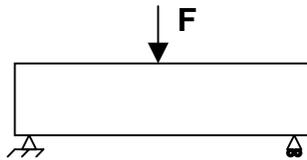


Figura 3.3

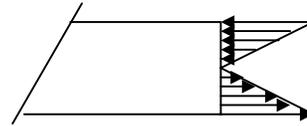


Figura 3.4

Como comienzo, no está mal. Tenemos ya un estado de esfuerzos que tiene la forma de un gradiente con las siguientes características:

1. Un esfuerzo máximo a compresión en la parte superior de la viga, y va bajando hasta llegar a cero en el eje neutro.
2. Partiendo del eje neutro, un valor de cero a un máximo a tensión en la parte inferior de la viga.

Tenemos pues, un gradiente de esfuerzos que puede iniciar o terminar en cero. Una ventaja que se puede vislumbrar es que esta configuración se puede reproducir hasta cierto grado fácilmente en el polariscopio.

Volviendo a la configuración bajo análisis, se requiere que nuestro gradiente no empiece de cero, sino de un valor inicial P . Por lo tanto, bajo sugerencia del Dr. Luis Ferrer, se optó por simplemente eliminar material del centro de la viga (figura 3.5) y así eliminar los esfuerzos que parten del eje neutro.



Figura 3.5

Modelo Dos. Por lo tanto, ya tenemos una configuración que reproduce adecuadamente nuestra configuración bajo análisis. Este modelo tiene como principales ventajas:

1. Sustento teórico bastante fuerte, ya que el estudio de vigas a flexión pura esta muy bien estudiado y se tienen un gran número de referencias a consultar.
2. El reproducir esta configuración en el polariscopio resulta mucho más fácil que la primera opción. Cierto es que el polariscopio al que tenemos acceso es muy limitado, pero no como para tener problemas con esta configuración.
3. Se cuenta con la ayuda de un experimentalista, como lo es el Dr. Ferrer, que tiene gran experiencia en el campo práctico como teórico.

Se tiene pues una configuración como se muestra en la figura 3.6, la cual reproduce el gradiente de carga lineal que requerimos.

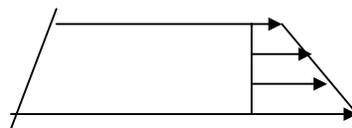


Figura 3.6

Por último, se le agrega una pequeña perforación a la viga en el centro para así tener nuevamente una configuración como se muestra en la figura 3.7 y A.0.

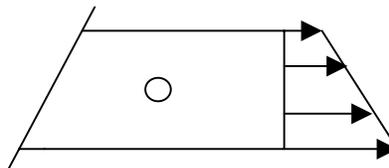


Figura 3.7

PARTE B. TEORIA DE FOTOELASTICIDAD

B.1 Introducción

Es bien conocido que las pruebas fotoelásticas aplicadas a la determinación de esfuerzos en elementos mecánicos sometidos a carga, es una técnica experimental que permite estudiar el campo tensorial de esfuerzos en la vecindad de un punto en cuestión, ofrece disponibilidad de equipo, facilidad de uso y rapidez en la obtención de resultados cualitativos. Además, que por medio de ella, se pueden estudiar cuerpos con geometrías especiales, que analizadas de otra manera resultaría difícil de resolver. Por estas razones, la evaluación experimental del problema de una placa con orificio circular centrado bajo un gradiente de carga lineal se llevará a cabo empleando esta técnica.

Es importante hacer mención que existe una gran literatura acerca de la fotoelasticidad, pero todos de una manera u otra dicen lo mismo. Para esta parte, se retomarán principalmente a los autores Dally [7], Durelli[16] y a Frocht [19].

B.2 Fotoelasticidad [7,16]

Muchos materiales transparentes no-cristalinos que son óptimamente isotrópicos cuando están libres de esfuerzos se transforman en materiales óptimamente anisotrópicos y despliegan características similares a los cristales cuando están bajo algún esfuerzo. Estas características persisten cuando las cargas se mantienen en el material, pero desaparecen cuando se remueve la carga. Este comportamiento, conocido como *birrefringencia temporal*, fue vista por primera vez por Sir David Brewster en 1816.

El método de fotoelasticidad se basa en este comportamiento físico en materiales transparentes no-cristalinos.

Los estudios realizados por Brewster demuestran que cuando un sólido transparente óptimamente isotrópico es forzado a deformarse, se vuelve óptimamente anisotrópico, y que el grado de anisotropía óptica es proporcional a la deformación del material, sin duda alguna esto marca la esencia del fenómeno fotoelástico.

Por otra parte, si estos materiales son observados con luz polarizada, se encuentra que aparece un patrón de franjas, en forma de una serie de bandas a color de manera sucesiva y continua. Cada banda representa un diferente grado de birrefringencia del material, que corresponde a la deformación del material. Así, el color de banda únicamente identifica el nivel de deformación en cualquier parte a lo largo de la banda.

B.3 Análisis fotoelástico de esfuerzos en dos dimensiones [7,16,19,20]

En análisis convencionales fotoelásticos bidimensionales, un modelo apropiado es fabricado, cargado, y puesto en un polariscopio, y el patrón de franjas es examinado y fotografiado. El siguiente paso en el análisis es la interpretación del patrón de franjas el cual, en realidad, representa los datos de la prueba sin detallar. Por lo tanto, a continuación se detallara la interpretación de los patrones isocromáticos y el ajuste de los esfuerzos entre el modelo y el prototipo en un análisis de esfuerzos típico.

B.3.1 Patrones de franja isocromáticas [7, 8, 16,20]

El patrón de franjas isocromáticas obtenido de un modelo bidimensional nos da líneas a lo largo donde la diferencia de esfuerzos principales $\sigma_1 - \sigma_2$ es igual a

una constante. Un ejemplo típico de un patrón de franjas isocromático de campo oscuro, el cual se utilizará para describir el análisis, es mostrado en la figura 3.8. El modelo fotoelástico representa un eslabón sujeto a cargas tensiles aplicadas axialmente a través de los pasadores. Primero, es necesario el determinar el orden de franja en cada punto de interés del modelo. En este ejemplo la asignación del orden de franja es relativamente simple, ya que 15 obvias franjas de $\frac{1}{2}$ orden pueden identificarse rápidamente.

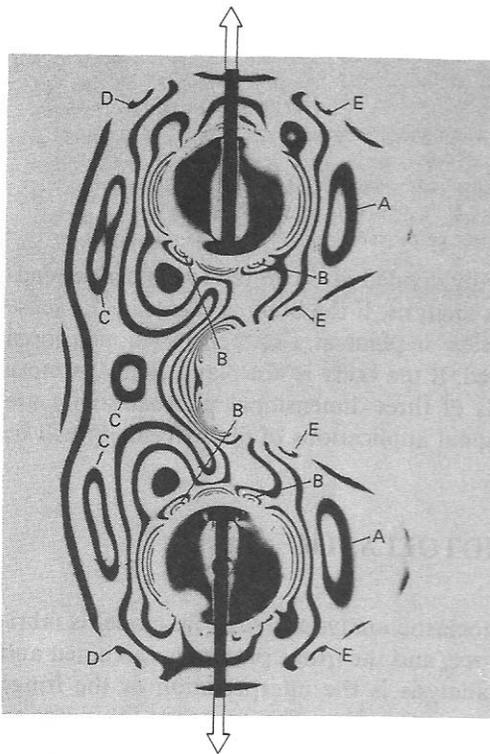


Figura 3.8

Patrón de franja isocromático de campo oscuro de un eslabón sujeto a tensión axial a través de los pasadores [Dally, p. 454]

Las dos franjas en forma de óvalo localizadas en los flancos del diente (letra A) son de $\frac{1}{2}$ orden debido a que los flancos, por su geometría, no pueden soportar esfuerzos muy grandes. Las cuatro franjas localizadas en los puntos B del agujero del pasador puede ser identificado si el modelo es visto con luz blanca dado que las franjas de orden *zero* aparecen en negro mientras que las franjas de orden *mayor* están coloreadas. Las franjas de forma irregular designadas en C cercanas al centro del eslabón son también de $\frac{1}{2}$ orden.

Debido a que el uso del polariscopio circular elimina el patrón de franjas isoclinas, y mantiene a su vez el patrón de franjas isocromáticas, se definirá únicamente este tipo de polariscopio.

B.3.2 Polariscopio Circular [7,8]

Como su nombre lo indica, el polariscopio circular emplea luz circularmente polarizada. El aparato fotoelástico contiene cuatro elementos ópticos y una fuente de luz, como se ve en la figura 3.9.

El primer elemento enseguida de la fuente de luz es el polarizador. Este convierte la luz ordinaria en luz plana polarizada. El segundo elemento es una placa de cuarto de onda puesto a un ángulo $\beta = \pi/4$ al plano de polarización. Esta placa de cuarto de onda convierte la luz plana polarizada en luz circularmente polarizada. La segunda placa de cuarto de onda es colocada con su eje "rápido" paralelo al eje "lento" de la primera placa de cuarto de onda.

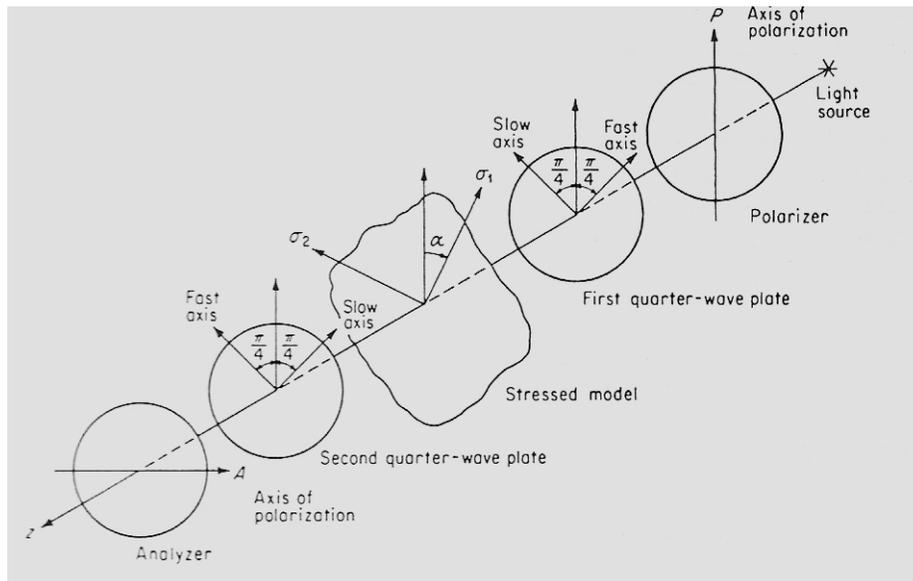


Figura 3.9 Modelo fotoelástico bajo carga en un polariscopio circular (polarizador y analizador cruzados, placas de cuarto de onda cruzadas) [Dally, p. 435]

El propósito de este elemento es el convertir la luz circularmente polarizada en luz plana polarizada vibrando en el plano vertical. El último elemento es el analizador, con su eje de polarización horizontal, y su propósito es el extinguir la luz. Esta serie de elementos ópticos constituyen el arreglo estándar para un polariscopio circular, y el cual produce un campo oscuro. Cuatro arreglos de elementos ópticos en el polariscopio circular son posibles, dependiendo de si los polarizadores y las placas de cuarto de onda estén perpendiculares o paralelos, como se muestra en la tabla 3.1.

ARREGLO	PLACAS DE CUARTO DE ONDA	POLARIZADOR Y ANALIZADOR	CAMPO
<i>A</i> [¶]	Cruzado	Cruzado	Obscuro
<i>B</i>	Cruzado	Paralelo	Claro
<i>C</i>	Paralelo	Cruzado	Claro
<i>D</i>	Paralelo	Paralelo	Oscuro

Tabla 3.1. Cuatro arreglos de los elementos ópticos en un polariscopio circular [Dally, p. 373]

Los arreglos *A* y *B* son los recomendados normalmente para campo claro y oscuro en un polariscopio ya que el posible error introducido por imperfecciones en las placas de cuarto de onda es mínimo. Debido a que las placas de cuarto de onda son de calidad muy pobre, este hecho es importante al seleccionar el arreglo óptico.

Los hechos que se pueden visualizar en la figura 3.9 son los siguientes:

1. Una onda de luz polarizada que incide en un modelo de material fotoelástico de espesor h sometido a un sistema de esfuerzos se divide en dos ondas perpendiculares entre sí **que vibra según los ejes principales de esfuerzo** ($\sigma_1 - \sigma_2$).
2. Como en general los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son de diferente magnitud, las dos ondas tienen diferente velocidad dentro del modelo,

[¶] Como se muestra en la figura B.2

es decir, se verifica un fenómeno de doble refracción o **birrefringencia**.

Para el mismo punto existen dos índices de refracción n_1 y n_2 .

3. Una onda sale antes que la otra del modelo, existiendo entre ellas un cambio de fase angular relativa (retardo relativo) R , que será mayor mientras mas grande sea la diferencia de esfuerzos principales $(\sigma_1 - \sigma_2)$.
4. Al llegar al analizador las dos ondas son forzadas a vibrar en un mismo plano (paralelo al del analizador) y entran en interferencia óptica generando las franjas isocromáticas.

Como se mencionó en el punto dos, las componentes de los esfuerzos principales no son transmitidas con la misma velocidad, así que cuando emergen de la placa llevan cierto retardo relativo, con una magnitud la cual, en cualquier punto de la placa, es *directamente proporcional a la diferencia de esfuerzos principales* $(\sigma_1 - \sigma_2)$. También el retardo relativo es proporcional al espesor de la placa, así que podemos escribir que

$$R = C(\sigma_1 - \sigma_2)h \quad (3.1)$$

donde: σ_1 y σ_2 son los esfuerzos principales, h es el espesor de la placa y C es una constante conocida como el coeficiente de esfuerzo óptico.

Despejando la diferencia de esfuerzos tenemos

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{R}{Ch} \quad (3.2)$$

Con el uso del polariscopio podemos medir el retraso R a partir de la observación e interpretación de las franjas isocromáticas. Según el orden de aparición de estas franjas en el modelo, podemos obtener el número de franja N que existen de retraso relativo R .

El analizador transmitirá sólo una componente de cada una de estas franjas (las que sean paralelas a su eje de transmisión). Estas ondas interferirán y el cambio de la fase resultante será observado como un patrón isocromático. El color observado en las franjas esta relacionado con el retraso relativo.

Por tanto,

$$R = N\lambda \quad (3.3)$$

donde,

N = Número de franja (obtenido por conteo)

λ = longitud de onda de la luz empleada (nm).

De tal forma que la ecuación (3.2) queda como:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{N\lambda}{Ch} \quad (3.4)$$

Por otra parte tenemos a f_σ como

$$f_\sigma = \frac{\lambda}{C} \quad (3.5)$$

El valor de franja del material f_σ es la propiedad del material del modelo para una longitud de onda λ y el espesor del modelo h .

Agrupando pues a la ecuación (3.5) dentro de la ecuación (3.4) tenemos finalmente

$$\boxed{\boxed{(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{Nf_\sigma}{h}}} \quad (3.6)$$

Se observa inmediatamente que a partir de la ecuación (3.6) la diferencia de esfuerzos $\sigma_1 - \sigma_2$ en un modelo bidimensional puede ser determinado si el retardo relativo N puede ser medido y si el valor de franja del material f_σ puede ser establecido mediante una calibración. Actualmente, la función del polariscopio es el determinar el valor de N en cada punto del modelo.

Por otro lado, el esfuerzo cortante máximo esta dado por

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{Nf_\sigma}{2h} \quad (3.7)$$

siempre y cuando σ_1 y σ_2 sean de signo opuesto y $\sigma_3 = 0$; de otro modo,

$$\tau_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}\sigma_1 \\ \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_2) = \frac{1}{2}\sigma_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

La Eq. (3.8₁) es válida si σ_1 y σ_2 son positivos. Del mismo modo, la Eq. (3.8₂) es válida si σ_1 y σ_2 son negativos. Cuando $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 < \sigma_3 = 0$, el esfuerzo cortante máximo es un medio del valor de $\sigma_1 - \sigma_2$ y puede ser determinado directamente del patrón de franjas isocromáticas de acuerdo a la ecuación (3.7). Sin embargo, cuando $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = 0$, el esfuerzo cortante máximo no puede ser determinado por la ecuación (3.7), ya que si se visualizan los esfuerzos en el círculo de Mohr, la ecuación nos arroja un valor diferente al de τ_{\max} . Para establecer el esfuerzo cortante máximo es necesario determinar σ_1 individualmente. Este es un punto importante ya que la teoría del esfuerzo cortante máximo es comúnmente usada para el diseño de componentes de maquinaria.

En la frontera libre del modelo, ya sea σ_1 ó σ_2 son iguales a cero y el esfuerzo tangencial a la frontera es

$$\sigma_1 \text{ ó } \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{h} \quad (3.9)$$

B.4 Selección del material fotoelástico [7,8,16]

Uno de los factores más importantes en el análisis fotoelástico es la selección de un material apropiado para el modelo fotoelástico. Desafortunadamente, un material ideal no existe, y la tarea del investigador será el seleccionar uno que se adecue a las necesidades de una lista de polímeros disponibles. La cantidad de material fotoelástico usado anualmente es demasiado pequeña como para que una compañía desarrolle y produzca un mejor polímero para aplicaciones fotoelásticas. Por ende, el investigador en esta área debe escoger de un polímero que esta diseñado para aplicaciones diferentes a la fotoelástica.

A continuación se enumera una lista de propiedades que debe exhibir un material fotoelástico. El material debe

1. Ser transparente a la luz aplicada en el polariscopio.
2. Ser sensible ya sea al esfuerzo o deformación unitaria, como lo indica un valor de franja del material bajo en términos de esfuerzo f_σ o deformación unitaria f_ε
3. Exhibir características lineales con respecto a: (a) propiedades esfuerzo-deformación, (b) propiedades de orden de franja en términos de esfuerzo, y (c) propiedades de orden de franja en términos de deformación unitaria
4. Exhibir isotropía mecánica y óptica y homogeneidad

5. No exhibir comportamiento viscoelástico
6. Tener un alto módulo de elasticidad y un límite de proporcionalidad alto
7. Tener sensibilidad f_σ ó f_ϵ que son esencialmente constantes con pequeñas variaciones en la temperatura
8. Ser libre de efectos por el tiempo
9. Ser capaz de maquinarse por métodos convencionales
10. Estar libre de esfuerzos residuales
11. Estar disponible a un costo razonable

Por lo tanto, para efectos de este estudio de tomo la decisión de manejar al *Polycarbonato*, denominado por el fabricante como PSM-1, ya que se adecua a las condiciones de trabajo que se presentan en la prueba fotoelástica, además de cumplir con el mayor número de requisitos arriba descritos.

El policarbonato es una clase de termoplástico usado en aplicaciones de Ingeniería. Las resinas de policarbonato se producen en los Estados Unidos por la General Electric Co. bajo la marca comercial de *Lexan* y por la empresa Miles Pulg. bajo el nombre de *Makrolan*.

Las resinas de policarbonato, en sus calidades más finas tienden a tener patrones residuales debido al proceso de extrusión, usado para su producción. Un recocido por un periodo largo a una temperatura igual o por encima de su ablandamiento es requerido para la eliminación de los patrones residuales. Este proceso será tratado posteriormente. Un punto sumamente negativo es el maquinado. Cualquier calentamiento significativo producido por la herramienta de corte puede causar que el material se ablande y deforme, y por ende, producir patrones residuales. El perfilado puede ser efectuado solamente bajo agua, y el fresado es posible sólo con un flujo continuo de refrigerante entre la herramienta de corte y el modelo.

Resumiendo, el policarbonato presenta como puntos a favor:

- a) Permitir observar patrones de franjas isocromáticas bien definidos.
- b) Ser transparente y de buena calidad óptica.
- c) Presentar un alto índice de sensibilidad S .
- d) Es un polímero inusualmente duro.
- e) Es un material que esta relativamente libre de efectos del envejecimiento provocados por la absorción de humedad y muestra muy poca fluencia a temperatura ambiente.
- f) Está disponible en grandes hojas con buenas características superficiales.

En contra:

- a) Difícil de maquinar debido a su alta sensibilidad al calor generado por las operaciones de corte, lo que provoca la aparición de tensiones superficiales.
- b) Alto costo.

Por supuesto que el alto costo es subjetivo ya que, por un lado el precio de la hoja de policarbonato de $90 \times 130 \text{cm}$ es de $\pm \$220.00$ USD., pero se puede conseguir un corte de hoja más pequeño y a un precio mucho más razonable en tiendas que manejen plásticos. La tabla 3.2 muestra las propiedades ópticas y mecánicas de los materiales fotoelásticos más importantes y usados.

Es claro que comparando la figura de calidad Q y el índice de sensibilidad S que el policarbonato y las resinas epóxicas exhiben propiedades superiores. Desafortunadamente, como ya se mencionó el policarbonato es difícil de maquinar y la resina epóxica requiere de especial cuidado para minimizar el efecto de envejecimiento.

Homalite 100 con su baja sensibilidad puede ser usada en aplicaciones que no requieran alta precisión. La goma de uretano es extremadamente útil en aplicaciones como modelos demostrativos para propósitos instructivos.

Propiedad	Homalite 100	Policarbonato	Resina Epoxy	Goma de Uretano
Efecto por envejecimiento	Excelente	Excelente	Buena	Excelente
Creep	Excelente	Excelente	Buena	Excelente
Maquinabilidad	Buena	Pobre	Buena	Pobre
Modulo de elasticidad E :				
psi	560,000	360,000	475,000	450
MPa	3860	2480	3275	3
Relación de Poisson ν	0.35	0.38	0.36	0.46
Valor de franja de esfuerzo f_σ				
lb/in	135	40	64	1
kN/m	23.6	7.0	11.2	0.18
Valor de franja deformación f_ϵ				
in	0.00033	0.00015	0.00018	0.00324
mm	0.0084	0.0038	0.0046	0.082
Índice de sensibilidad S				
1/in	52	125	125	20
1/mm	2.05	4.92	4.92	0.78
Figura de calidad Q				
1/in	4150	9000	7400	450
1/mm	163	354	292	17
Esfuerzo de cedencia σ_{pl}				
psi	7000	5000	8000	20
MPa	48.3	34.5	55.2	0.14

Tabla 3.2 Sumario de las propiedades mecánicas y ópticas de varios materiales fotoelásticos [Dally, p.478]

Como se ve en la tabla 3.2, el policarbonato aún teniendo pobre desempeño en cuanto al maquinado es el único que cumple con cuatro de las cinco características más importantes que se requieren para el análisis experimental.

B.5 Eliminación de los patrones residuales

Actualmente se encuentran a la venta placas de policarbonato libres de esfuerzos residuales, pero a un precio alto. Por lo tanto, el conocer el proceso de eliminación de esfuerzos residuales y llevarlo a cabo es la solución a nuestro problema financiero. El proceso es el siguiente:

1. Se necesita una placa de vidrio, de un espesor comercial (p.e. $\frac{1}{4}$ ")

2. Se coloca sobre la placa de vidrio una "cama" de talco para evitar que el policarbonato se adhiera al vidrio, como se muestra en la figura 3.10

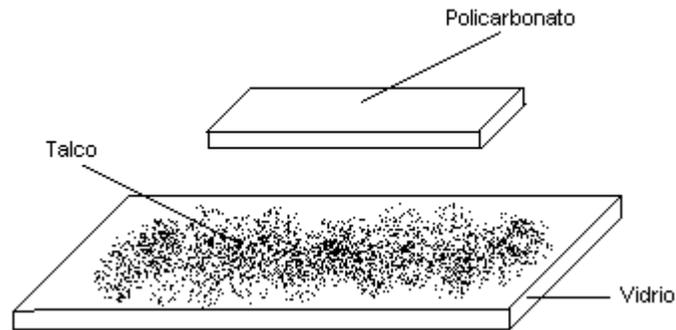


Figura 3.10

3. Una vez colocados las tres partes (policarbonato, talco, y el vidrio) dentro de un horno con temperatura controlada, se empieza a elevar la temperatura hasta los 130°C (temperatura en la cual el material se encuentra totalmente relajado).
4. El aumento de temperatura se debe llevar a cabo con un **gradiente de $\pm 4^\circ\text{C}/\text{hora}$** , hasta llegar a la temperatura arriba señalada.
5. Una vez llegando a los 130°C, se mantiene a esa temperatura durante 15 horas.
6. Por último se comienza a disminuir la temperatura, con un **gradiente de $\pm 2^\circ\text{C}/\text{hora}$** , hasta llegar a la temperatura ambiente.

Es importante señalar que el paso más importante es el número seis, ya que se debe evitar que el material baje bruscamente de temperatura y así no generar esfuerzos residuales dentro del material.

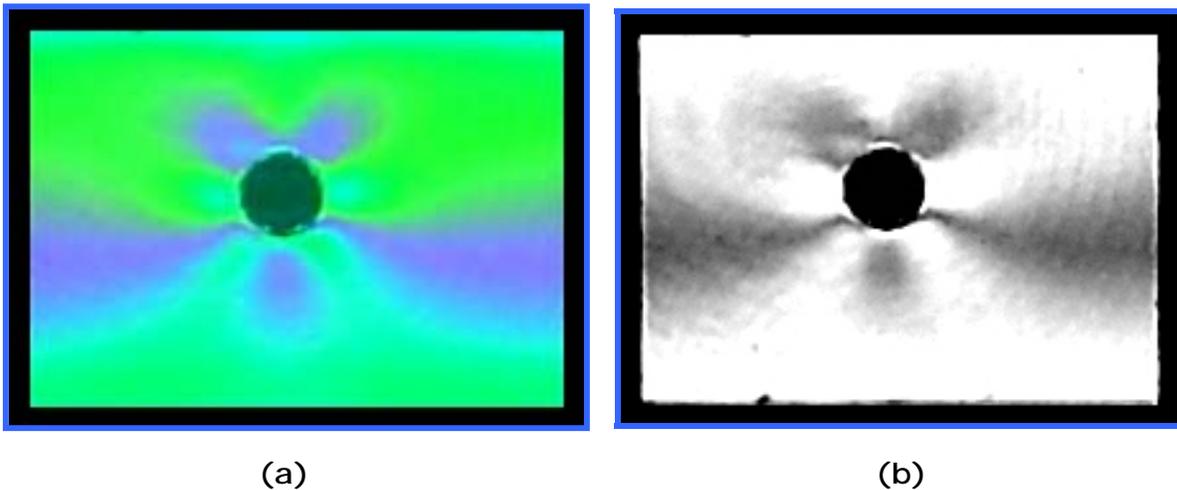
PARTE C. RESULTADOS OBTENIDOS POR FOTOELASTICIDAD

A continuación se presentarán las fotografías tomadas para los tres casos bajo análisis. Se optó por ilustrar únicamente con las mejores fotografías cada caso, aún si, como en el caso uno, se tuvieron pocas fotografías disponibles que valieran la pena mostrar. Es necesario señalar que aún y cuando se tomaron fotos en ambos campos (claro y oscuro), el orificio permanece oscuro puesto que se tuvo que obstruir el paso de luz para una mejor visualización del orificio.

Por otro lado, debido a problemas de estabilidad con el modelo propuesto, no se pudieron analizar casos con mayor carga, por lo que se tuvo una carga máxima de 32 [kg].

C.1 FRANJAS PRODUCIDAS PARA EL CASO UNO [98 N]

Para este caso se colocaron 10 [kg] de peso en el dispositivo para la aplicación de la carga, con lo cual se produjeron las franjas que se muestran en las fotografías 1a y 1b.



Fotografía 1 Estado de esfuerzos observado en la frontera del orificio circular en una placa bajo un gradiente de carga lineal.

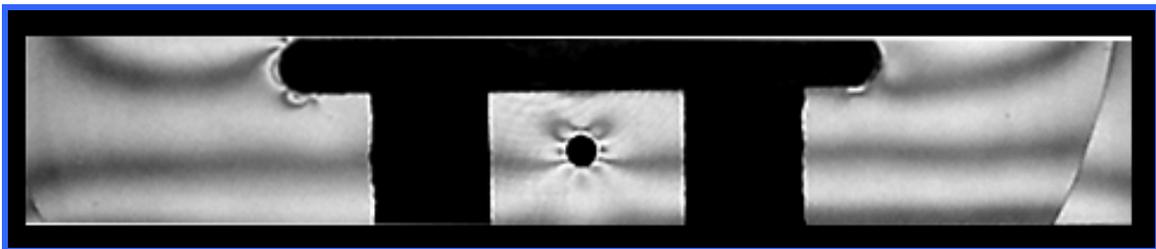
Ambas fotografías son en campo claro, donde se observa los siguientes puntos:

1. En la fotografía 1(a) se observa con relativa claridad las franjas circulares que se forman en $\Phi^{\epsilon}=0$ y $\Phi=\pi$ en la frontera del orificio. Esto es importante mencionarlo para poder ver la comparación cualitativa entre esta técnica experimental y la numérica.
2. Se tiene un eje de simetría con la vertical, que aunque muestra un corrimiento ínfimo entre ambos lados, esto se debe a que la carga no es totalmente perpendicular produciendo componentes no deseadas.

Estas son las únicas dos fotografías que pueden considerarse con la nitidez mínima necesaria para hacer un estudio profundo de ellas. Flanagan [23] y Dally [22] son referencias útiles para conseguir mejores resultados en lo que respecta a las técnicas de fotografía fotoelástica.

C.2 FRANJAS PRODUCIDAS PARA EL CASO DOS [210 N]

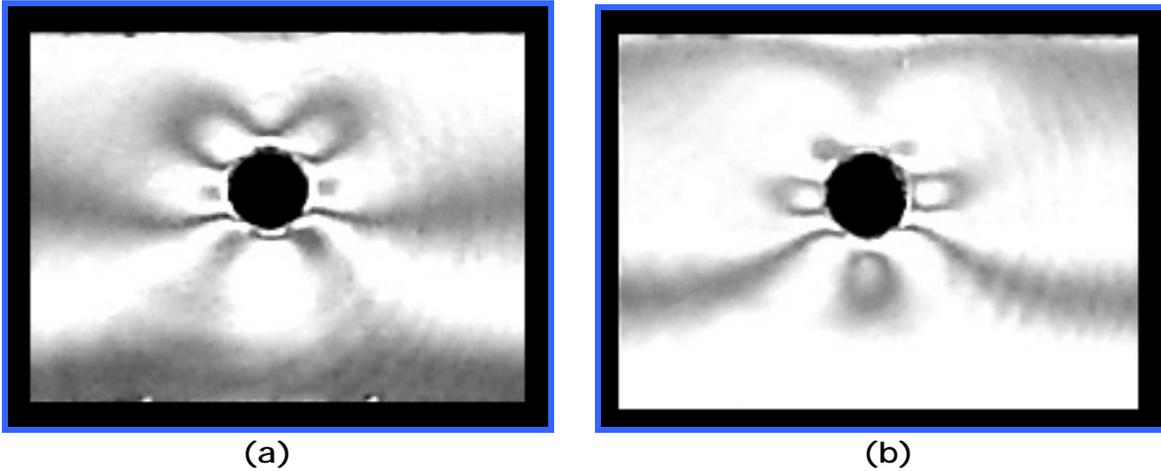
De nueva cuenta se tiene un estado de esfuerzos simétrico con respecto a la vertical. Aquí, a diferencia del caso uno, si se puede mostrar una fotografía nítida del modelo propuesto lejana. La fotografía 2 ilustra el modelo, tomada para un campo claro.



Fotografía 2 Estado de esfuerzos en el modelo propuesto bajo una carga de 210[N], campo oscuro.

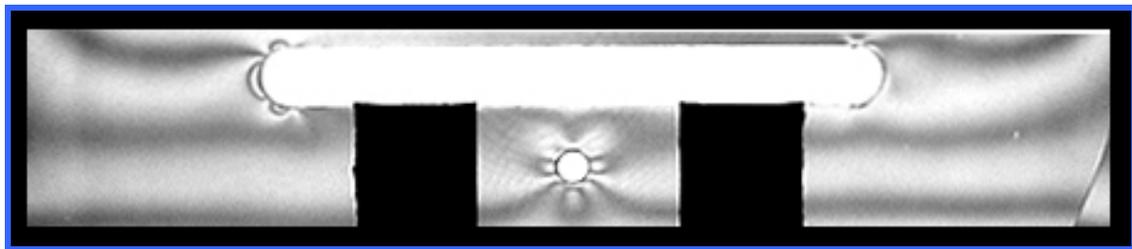
€El ángulo Φ se mide a partir de la horizontal, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

La fotografía 3a corresponde a un acercamiento de la fotografía anterior, eso con el fin de poder analizar con mayor profundidad el estado de esfuerzos en la frontera del orificio.



Fotografía 3 Estado de esfuerzos en la frontera del orificio circular. a) Campo oscuro, b) Campo claro.

La fotografía 4 muestra al modelo propuesto, tomada en campo claro, y de la cual se genera la 3b, la cual pasó por varios filtros para mejorar la nitidez, contraste, brillo, y enfoque.

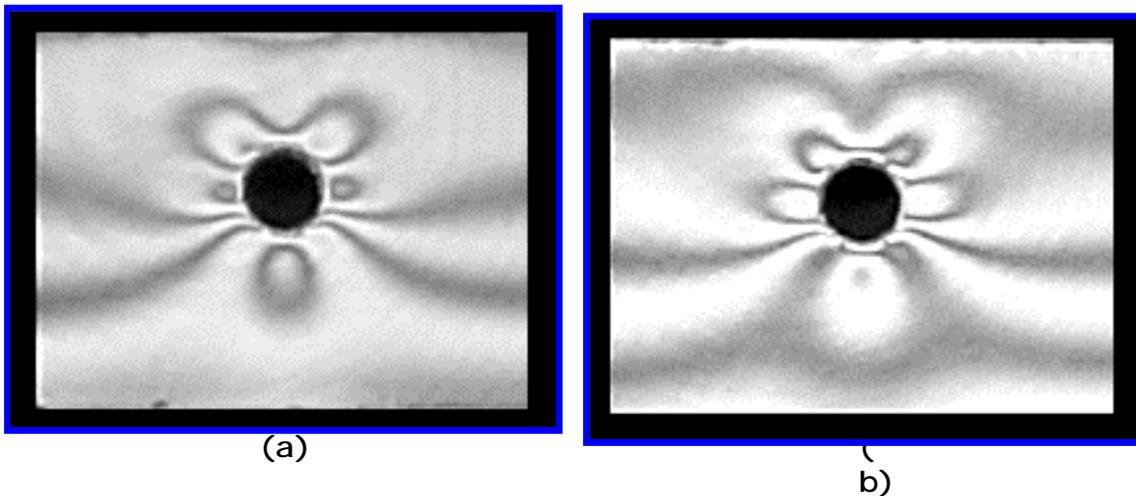


Fotografía 4 Estado de esfuerzos en el modelo propuesto para una carga de 210[N], en campo claro.

Las pequeñas franjas que se observan en la parte izquierda del orificio rectangular corresponden a los esfuerzos residuales producidos por al momento del maquinado. Como se había dicho, el policarbonato es un termoplástico con malas características en cuanto a maquinabilidad.

C.3 FRANJAS PRODUCIDAS PARA EL CASO TRES [320 N]

Para este caso se produjeron mejores franjas para el análisis en la frontera del orificio. La fotografía 5a muestra una pequeña franja en la parte inferior del orificio, en $\Phi = 3\pi/2$, medio orden de franja mayor que la franja formada debajo de esta, en la fotografía 5b. La falta de simetría se debe a que se esta introduciendo una componente la fuerza aplicada al modelo, es decir, la fuerza no se ejerce perfectamente perpendicular con respecto a la horizontal.

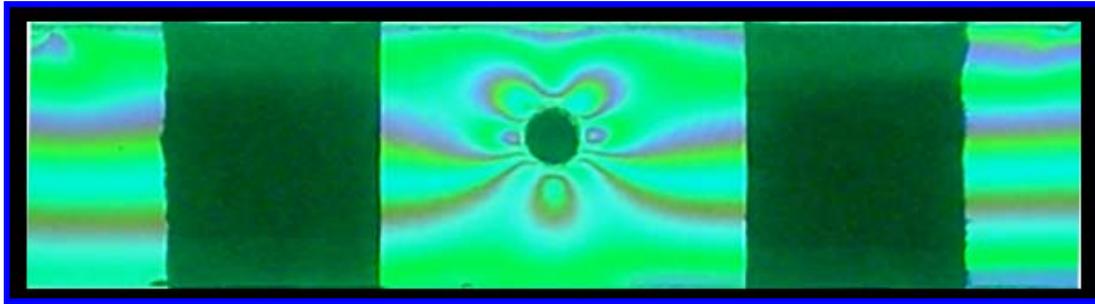


Fotografía 5 Estado de esfuerzos en el modelo para una carga de [320 N]: a) en campo claro, b) campo oscuro.

La fotografía 6 es una vista lejana, en campo claro, del modelo propuesto, que servirá si es necesario para un conteo de franjas y así obtener valores cuantitativos de $\sigma_1 - \sigma_2$, mediante la fórmula (2.6).

Hay que recordar que el conteo de franjas parte obviamente de la franja de orden $n = 0$, la cual corresponde a la franja que tanto en luz blanca como en luz monocromática permanece oscura.

Las franjas tienen un mismo patrón de color, partiendo de azul claro, azul, café y verde. Este patrón de pequeñas franjas delgadas se deben obtener mediante el análisis numérico, cualitativamente semejantes.



Fotografía 6 Estado de esfuerzos en el modelo propuesto, bajo una carga de 320 [N], campo claro.

Es obvio pues, que los métodos ópticos como lo son la fotoelasticidad y el método de Moirè, tienen un gran uso para casos como el analizado. El método fotoelástico ha tenido gran auge en estudios del factor de concentración de esfuerzos en las fronteras de orificios y esquinas, ya que el esfuerzo máximo, como hemos visto en las fotografías, sucede en la frontera del orificio, y puede obtenerse directamente por métodos ópticos debido a que uno de los esfuerzos principales desaparece en la frontera.

Las fotografías 5_a y 5_b muestran, a diferencia de sus antecesoras, mayor calidad en cuanto a nitidez para un conteo de franjas. Por tal motivo, este caso es el único que se utilizará para un análisis cuantitativo del estado de esfuerzos en la frontera del orificio. Para ubicar y reconocer la franja de orden $n = 0$ nos remitimos al análisis numérico para saber cuál es esta franja y su ubicación. Remitiéndonos a la ecuación 3.6, tenemos los siguientes valores:

$$N = 3.5$$

$$f_{\sigma} = 7.0 \left[\frac{kN}{m} \right]$$

$$h = 0.006125 [m]$$

De la ecuación 3.6 tenemos:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{(3.5)(7.0)}{(0.006125)} \frac{\frac{kN}{m}}{m}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = 4.0 [MPa] \quad (3.10)$$

El resultado obtenido en la ecuación (3.10) corresponde al esfuerzo máximo en la frontera del orificio circular, el cual adquiere su valor cuando $\Phi = \frac{3\pi}{2}$. El valor obtenido esta sujeto a pequeñas variaciones debido a que el valor de franja de esfuerzo f_{σ} que se toma es un valor promedio que se encuentra para el policarbonato, pero puede variar según la marca, proceso ocupado para su producción, entre otras.

CAPITULO IV

ANÁLISIS NÚMÉRICO DEL PROBLEMA PARA UNA PLACA CON ORIFICIO CIRCULAR CENTRADO BAJO UN GRADIENTE DE CARGA LINEAL

El presente capítulo trata sobre el análisis numérico efectuado a la placa en cuestión, esto con la finalidad de tener un parámetro más de comparación cualitativa con respecto a los resultados obtenidos por el análisis experimental. Para este efecto, se hace uso del software ANSYS en su versión 9.0 [29], ya que es el paquete con el que se cuenta actualmente en el LIMAC (Laboratorios de Ingeniería Mecánica Asistida por Computadora).

4.1 GENERALIDADES DEL PROGRAMA ANSYS

Este programa fue desarrollado a principios de los años 70's por el Dr. John Swanson, siendo actualmente un programa de elemento finito de nueva generación y de aplicación general. Se emplea en empresas líderes en los ramos automotriz, electrónico, aeroespacial, electrónico, entre otros y en organismos de investigación científica, tanto a nivel nacional como internacional. Pasando de ser usado por un grupo selecto de usuarios a estar instalado en más de 18,000 lugares, hoy día es una de las mejores opciones para la relación de análisis numéricos.

En su primera versión, el programa ofrecía solamente transferencia de calor y análisis estructural lineal, corría en modo batch y en computadoras "Mainframe". Actualmente en su versión 9.0 el paquete permite realizar análisis en dos y tres dimensiones en diferentes áreas, además de poder instalarse en plataformas como Windows 98, NT, XP, así como IBM, HP, entre otras. La tabla 4.1 muestra las áreas en las que se puede incursionar con este paquete

TABLA 4.1 *Tipos de análisis realizados en ANSYS*

◇ Estructural	_____	Análisis estático, dinámico (transitorios, frecuencia natural, respuesta armónica, vibración aleatoria, espectros de respuesta), cinemática y pandeo.
◇ Térmico	_____	En estado estable, transitorio, cambios de fase, análisis térmico estructural.
◇ Campos Magnéticos	_____	Análisis estacionario y transitorio.
◇ Flujo de fluidos	_____	En tuberías, visualización y distribución de presiones.
◇ Acústica		
◇ Análisis Combinados	_____	Magnético – Estructural, Fluido – Estructural Piezométrico, entre otros.
◇ Electromagnetismo	_____	Análisis electromagnético, estático de baja frecuencia, electroestático, conducción de corriente, simulación de circuitos, electromagnetismo.

Los resultados de los análisis pueden expresarse como esfuerzos, deformaciones unitarias, campos magnéticos, tensiones, temperaturas, vectores de velocidad, etc., dependiendo del objetivo del análisis; estos resultados son graficados en pantalla con códigos de colores y en forma de texto, de esta manera es más sencillo visualizar las áreas de interés para el analista.

4.2 DISEÑO DEL MODELO PROPUESTO.

Como se mencionó en el capítulo dos- parte A, el problema en placas con orificio circular centrado bajo un gradiente de carga lineal es demasiado complicado de desarrollar experimentalmente debido al tipo de carga a la que esta expuesta la placa. El objetivo primordial de este capítulo es demostrar que el modelo propuesto reproduce cualitativamente el mismo campo tensorial de esfuerzos en la frontera del orificio, tanto numérica como experimentalmente. Además, se hará una comparación del modelo propuesto y de la placa, ambos bajo las mismas condiciones de frontera y analizadas numéricamente.

Para poder crear un modelo lo suficientemente eficaz para el análisis de esfuerzos en la vecindad del orificio es necesario tomar a consideración que la zona de interés es la placa rectangular que se forma en la parte inferior del modelo propuesto. Así pues el mallado en esa zona deberá ser mucho mas fino en comparación al resto del modelo.

A continuación se explican los pasos que conllevan a la creación del modelo propuesto para su análisis. Es necesario mencionar que no es objetivo del capítulo el enunciar detalladamente el proceso de diseño del modelo, por lo que únicamente se apoyarán con ilustraciones los pasos más importantes del proceso.

El proceso es el siguiente:

- El tipo de análisis a desarrollar, de acuerdo a la tabla 4.1, es estructural
- El tipo de elemento recomendado en ANSYS para elementos estructurales con concentradores de esfuerzos (orificios, muescas, etc.) es el *Solid>Plane 82*.
- Se crean *keypoints* (puntos clave) para después unir cada uno mediante líneas rectas, como se muestra en la figura 4.1
- Una vez teniendo las líneas que definen el perímetro del modelo, se elige cada una de ellas, empezando por el rectángulo central inferior y se hace un control de tamaño manual para cada línea, esto con el fin de que el mallado en esa área sea mas fino.



Figura 4.1

- El procedimiento de control de tamaño manual se puede hacer antes o después de crear las áreas que forman al modelo (seis en total), las cuales se pueden ver en la figura 1 del anexo A. La ruta a seguir para crear las áreas es el siguiente:

Ruta: **Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Arbitrary>By Lines**

- Teniendo todas las áreas se debe hacer por último el barrenado en el rectángulo inferior central (Figura 2, Anexo A), siguiendo los siguientes pasos:

Ruta: **Preprocessor>Modeling>Create>Areas>Circle>Solid Circle**

- Las figuras 4.2 y 4.3 muestran un acercamiento en la sección de interés, así como la vista del modelo completo una vez mallado respectivamente.

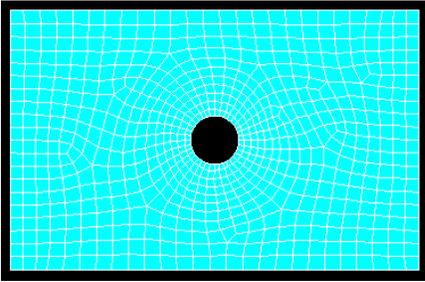


Figura 4.2

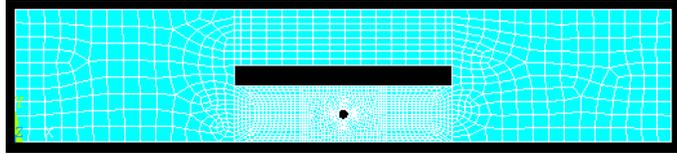


Figura 4.3

- Teniendo ya el modelo completo y mallado en su totalidad se procede a hacer el análisis.

Siguiendo estos pasos se puede crear un modelo que reproduzca de manera satisfactoria los esfuerzos en la frontera del orificio.

4.3 CÁLCULO NUMÉRICO DEL ESTADO DE ESFUERZOS EN LA FRONTERA DEL ORIFICIO CIRCULAR

Una vez habiendo explicado el procedimiento para crear el modelo, lo que corresponde ahora es aplicar las condiciones de frontera (fuerza, desplazamiento, presión, etc.) que rigen al modelo, tal y como se lo aplicamos experimentalmente a la probeta de policarbonato.

4.3.1 ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA PLACA PROBLEMA

Antes del análisis numérico, habrá de recordar las características físicas y mecánicas de la probeta de policarbonato utilizada en el análisis fotoelástico. Estos datos son requeridos para crear el modelo geométrico necesario para la simulación por medio de ANSYS. La tabla 4.2 muestra en resumen los datos necesarios para poder crear este modelo geométrico.

Tabla 4.2 Datos de la probeta de Policarbonato PSM-1 utilizados en ANSYS.

D A T O S	
Propiedades Mecánicas	
<i>Módulo de Elasticidad (E)</i>	2.0 – 2.6 [GPa] [£]
<i>Relación de Poisson (ν)</i>	0.38
Dimensiones	
<i>Largo</i>	300 [mm]
<i>Ancho</i>	60 [mm]
<i>Espesor</i>	6 [mm]

4.3.2 ANÁLISIS NUMÉRICO DE LA PLACA ORIGINAL Y EL MODELO PROPUESTO BAJO UN GRADIENTE DE CARGA LINEAL (CASO UNO).

Antes de hacer cualquier comentario acerca de los resultados obtenidos, se debe hacer mención de la ubicación de fuerzas y restricciones de desplazamiento. Esto se observa en la figura 4.4. Las observaciones a mencionar son las mismas en las demás cargas, y son las siguientes:

1. Las distancias de las fuerzas y restricciones son las mismas en ambos análisis (experimental y numérico).
2. Para tratar de reproducir estas condiciones a la distancia adecuada, se debe calcular la distancia que representa cada elemento creado en el mallado y una vez teniendo este valor multiplicarlo por el número de elementos necesarios para cubrir la distancia adecuada. En la figura 3 del anexo A se indica en que nodo correspondería la distancia buscada. Obviamente el número de elementos necesarios dependerá de cuán fino se quiera tener el mallado.
3. Es muy importante tener en cuenta que los valores cualitativos obtenidos por fotoelasticidad corresponden a franjas donde $\sigma_1 - \sigma_2$ son del mismo valor, por lo que se debe tener debido cuidado al graficar en

[£] Estos valores son referencia de la empresa Measurements Group.

ANSYS, ya que ahí se obtienen gráficas de σ_1 , σ_2 y σ_3 por separado.

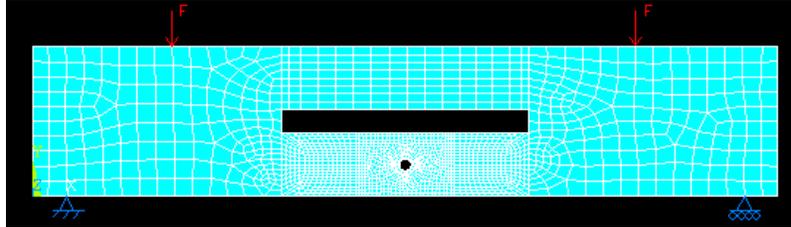


Figura 4.4

4. En cuanto a las restricciones de desplazamiento (representados de color azul en la figura 4.4) son de: cero grados de libertad en la izquierda (DOF=0), mientras que a la derecha se tiene como restricción única a cualquier desplazamiento en la coordenada Y (UY=0).

Tomando en cuenta los cuatro puntos anteriores, se procede a hacer el análisis.

Los valores de los esfuerzos principales en la frontera del orificio circular se muestran en la tabla 4.3, valores únicamente tomados en puntos clave; la lista completa se muestra en el anexo B.

Tabla 4.3 Valores numéricos de σ_1 y σ_2 obtenidos en ANSYS para una carga de 98[N]

CARGA = 98 [N]		
Φ^{ϵ}	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]
$0,2\pi$	0	-0.385291
$\frac{\pi}{2}$	0.9834	0
π	0	-0.385299
$\frac{3\pi}{2}$	1.1812	0

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestran las franjas de $\sigma_1 - \sigma_2$ sin generación de contornos nodales y con generación de contornos nodales, respectivamente.

^{\epsilon}El ángulo Φ es con respecto a la horizontal.

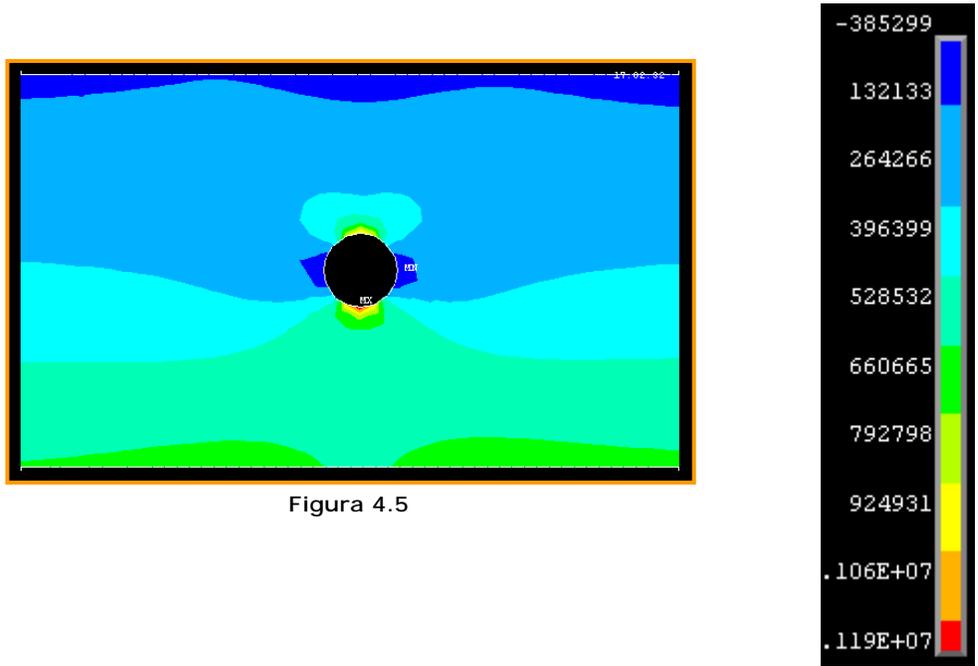


Figura 4.5

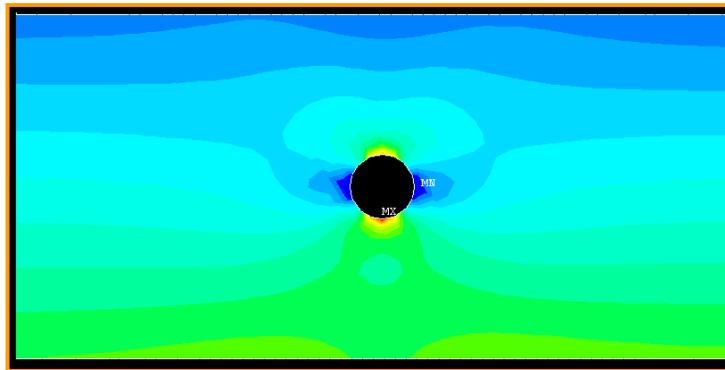


Figura 4.6



En ambas figuras se observa que el esfuerzo máximo se encuentra en la parte inferior del orificio, a $\Phi = 3\pi/2$. Además, se hace un acercamiento a la zona de mayor importancia, para facilitar al observador al momento de hacer las comparaciones cualitativas con respecto al análisis numérico de la placa original, así como las fotografías tomadas del análisis fotoelástico. En la figura 5 del anexo A se muestra al modelo completo bajo el análisis numérico.

Pero estos valores de esfuerzos principales no son los únicos importantes, ya que se pueden también calcular y graficar los esfuerzos tangenciales en la frontera del orificio, mediante la ecuación 1.21a₂ y los valores de σ_x , σ_y y τ_{xy} de la tabla 1 (Anexo B).

La figura 4.7 muestra a la placa original, es decir, la placa tal y como se presento en el objetivo del trabajo.

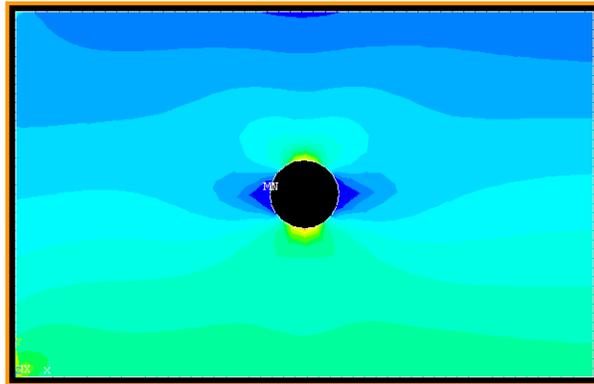


Figura 4.7



Tabla 4.4 Valores de los esfuerzos principales para la placa original bajo una carga de 98[N]

CARGA = 98 [N]		
Φ	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]
$0,2\pi$	0	-0.39931
$\pi/2$	1.0245	0
π	0	-0.40943
$3\pi/2$	1.2039	0

La figura 4.7 sirve de ejemplo para comparar y corroborar las predicciones del modelo propuesto. Si bien se observa que el esfuerzo máximo no se encuentra en la parte inferior del orificio, esto sucede porque la parte izquierda debió de ser restringida en todas sus direcciones de algún tipo de desplazamiento, esto es, DOF=0 (Degrees of Freedom por sus siglas en inglés).

Los valores máximos y mínimos encontrados en la frontera del orificio se ilustran en la tabla 4.4. Los valores negativos indican un esfuerzo de compresión en ese punto en específico.

La solución de Kirsch[€] demuestra que una placa bajo una carga uniforme de tensión σ_{aG} produce un esfuerzo tangencial σ_{θ} de tres veces la carga uniforme cuando $\Phi = \frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, mientras que para $\Phi = 0$ y π tiene una magnitud de $-\sigma_{aG}$.

4.3.3 ANÁLISIS NUMÉRICO PARA EL CASO DE LA PLACA ORIGINAL Y EL MODELO PROPUESTO BAJO UN GRADIENTE DE CARGA LINEAL (CASO DOS).

Al igual que en el anterior caso, se hace el análisis en la placa original y el modelo para una comparación cualitativa y cuantitativa.

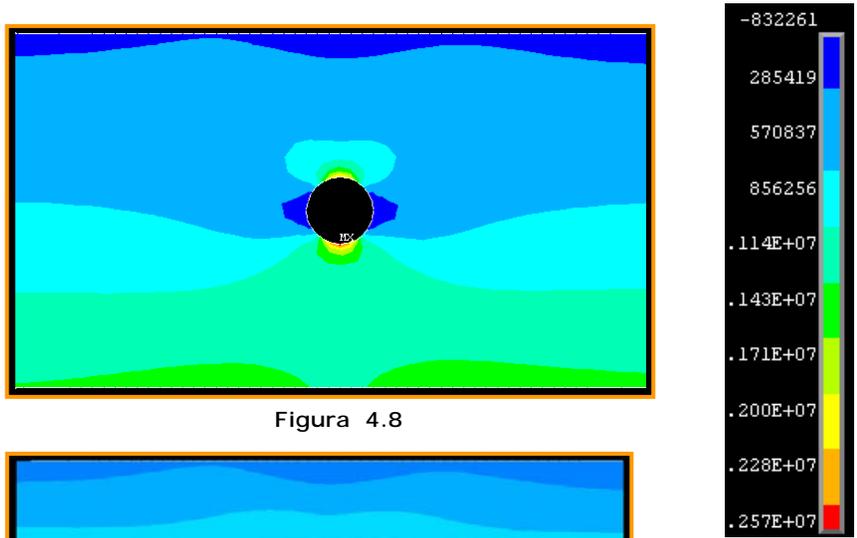
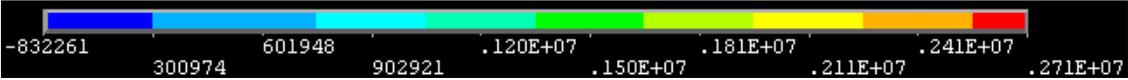


Figura 4.8

Figura 4.9



[€]G. Kirsch obtuvo la solución elástica para una placa de largo y ancho infinitos, bajo una carga de tensión uniforme.

Tabla 4.5 Valores de los esfuerzos principales para el modelo propuesto bajo una carga de 210[N].

CARGA = 210 [N]		
Φ	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]
$0,2\pi$	0	-0.832261
$\pi/2$	2.1422	0
π	0	-0.832240
$3\pi/2$	2.5688	0

La figura 4.10 muestra el estado de esfuerzos para la placa original, en la cual de nueva cuenta el esfuerzo máximo no se encuentra en la periferia del orificio debido muy probablemente a lo explicado anteriormente. La tabla 4.6 indica los valores de los esfuerzos principales en puntos clave del orificio circular.

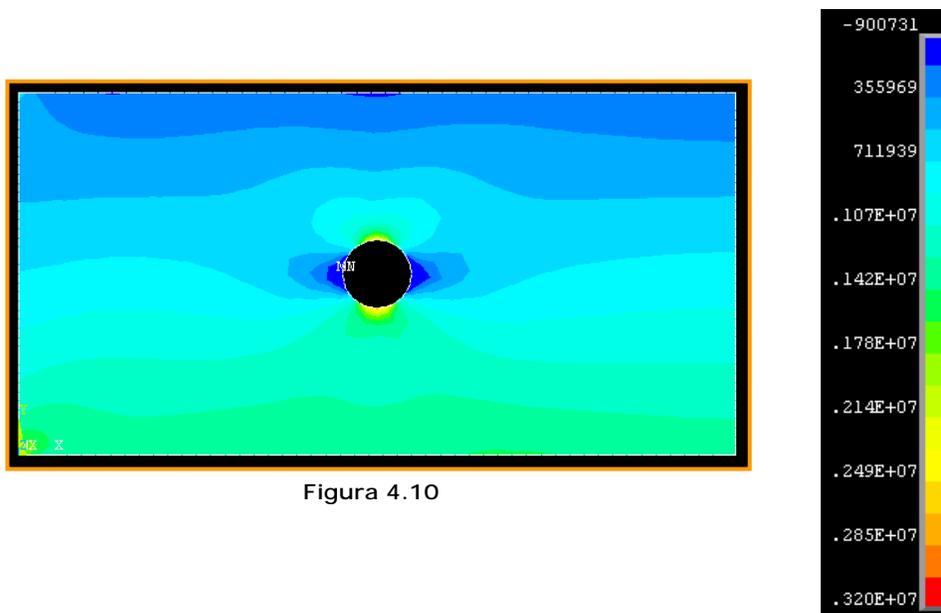


Figura 4.10

Tabla 4.6 Valores de los esfuerzos principales para la placa original bajo una carga de 210[N].

CARGA = 210[N]		
Φ	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]
$0,2\pi$	0	-0.87847
$\pi/2$	2.2502	0
π	0	-0.90073
$3\pi/2$	2.6913	0

4.3.4 ANÁLISIS NUMÉRICO PARA EL CASO DEL MODELO PROPUESTO BAJO UN GRADIENTE DE CARGA LINEAL (CASO TRES).

Una vez habiendo demostrado los valores de los esfuerzos principales en ambos casos, se pasará por alto analizar numéricamente a la placa original, y se obtendrán valores sólo para el caso del modelo propuesto. La tabla 3 del anexo B enlista los valores de σ_x , σ_y y τ_{xy} los cuales ayudarán para el cálculo del esfuerzo tangencial σ_θ .

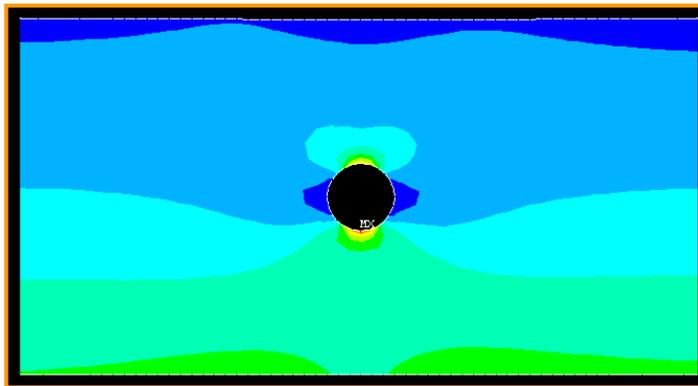


Figura 4.11

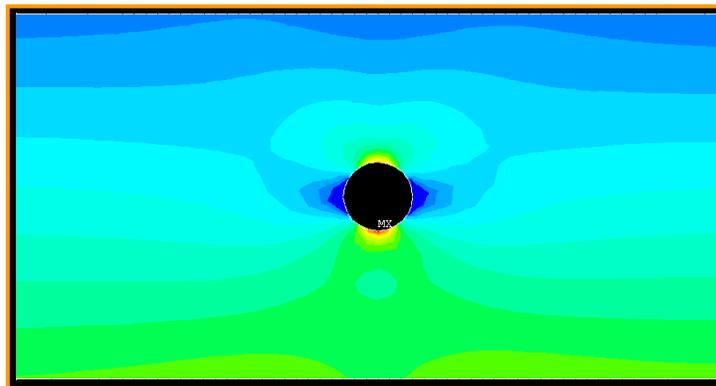
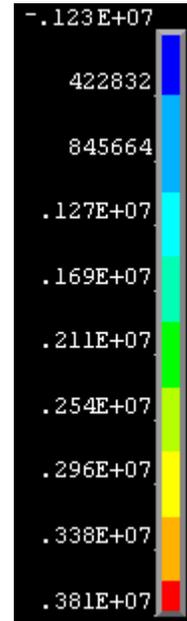


Figura 4.12



Tabla 4.7 Valores de los esfuerzos principales para el modelo propuesto bajo una carga de 320[N]

CARGA = 320 [N]		
Φ	σ_1 [MPa]	σ_2 [MPa]
$0,2\pi$	0	-1.2329
$\pi/2$	3.1736	0
π	0	-1.2331
$3\pi/2$	3.8055	0

Como es evidente en los dos primeros casos, los resultados cualitativos y cuantitativos en el modelo propuesto y la placa original son muy semejantes, por lo que para el caso tres se omite el análisis para la placa original y únicamente se obtienen los resultados para el modelo propuesto para hacer una evaluación, más adelante, de los esfuerzos y su semejanza con los obtenidos experimentalmente por medio de fotoelasticidad.

4.4. CARACTERIZACIÓN DEL MODELO PROPUESTO EN BASE A LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

Una vez habiendo obtenido los valores para los tres casos analizados, es conveniente hacer una caracterización del modelo propuesto para realizar un estudio paramétrico de éste.

Este punto es sumamente importante, ya que le permitirá al diseñador el conocer rápidamente, sin tener que hacer ningún tipo de análisis, a que tipo de esfuerzos se encuentra la periferia del orificio, qué factor de concentración de esfuerzos se tiene en la frontera del orificio circular, si esta a tensión o compresión, entre otros parámetros.

A continuación se muestra la placa en la figura 4.13 (que forma parte del modelo propuesto) con los diferentes parámetros que se modificarán en futuros análisis numéricos.

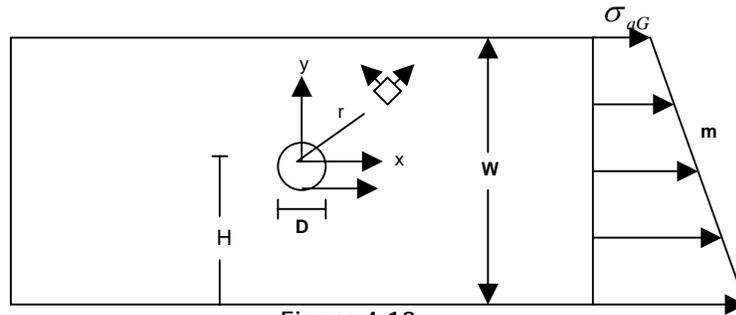


Figura 4.13

La figura 4.13 servirá de modelo para saber interpretar gráficas y conocer de que parámetros se está hablando al momento de enunciarlos. Los resultados obtenidos para los tres casos anteriores son únicamente válidos para los valores indicados en la tabla 4.8. La pendiente tiene valor negativo dado que el ángulo que forma con respecto a la horizontal es mayor de 90° .

Tabla 4.8 Placa con orificio circular centrado bajo un gradiente de carga lineal

Parámetros			
m	-4.33	-2.14	-1.48
W	25.2375 [mm]		
D	4.7625 [mm]		
t	6.35 [mm]		
H	12.61875 [mm]		

El color amarillo corresponde al caso uno, el café al caso dos y el azul para el caso tres.

4.5. PARAMETRIZACIÓN DEL MODELO PROPUESTO EN RELACIÓN DE SU ANCHURA W Y DIÁMETRO DEL ORIFICIO D.

Una de las modificaciones posibles, y muy adecuada para el diseño de placas es la relación $\frac{D}{W}$. Esta relación conlleva a que H también cambie. El parámetro H servirá únicamente para cambiar la posición del orificio circular en análisis posteriores.

El valor de la pendiente no se puede controlar debido al cambio en las proporciones de $\frac{D}{W}$, incluso sin el aumento del momento flexor.

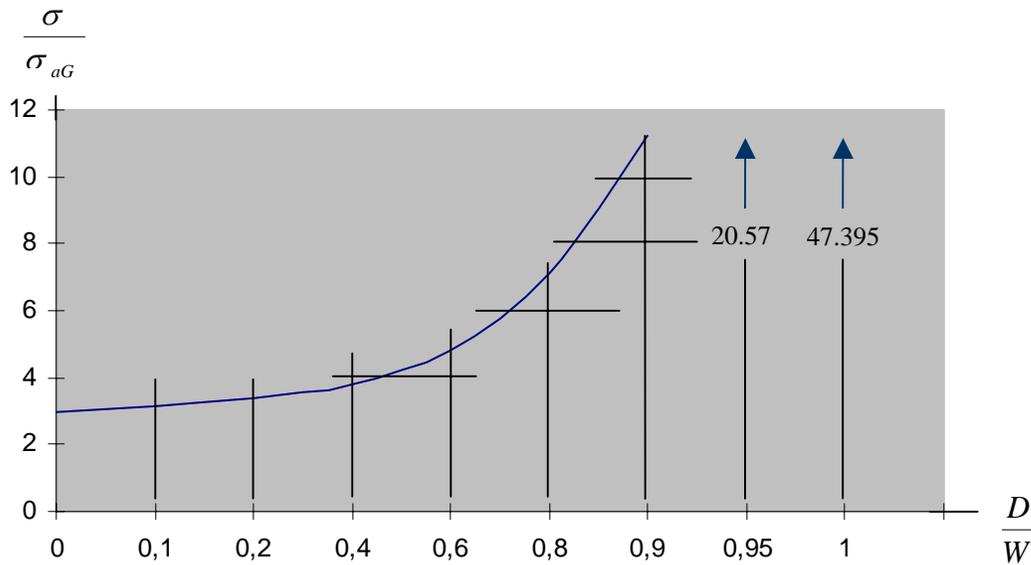


Figura 4.14 Factor de concentración de esfuerzos para una placa con orificio circular centrado, bajo un gradiente de carga lineal.

Los valores obtenidos en la tabla 4.10a son válidos para las pendientes indicadas en la tabla 4.10b, aunque se sabe que este parámetro no es factor de peso para los resultados obtenidos.

$\frac{D}{W}$	$\frac{\sigma}{\sigma_{aG}}$	m^{E}
0.1	3.167	-1.53
0.2	3.380	-1.53
0.4	3.821	-1.42
0.6	4.841	-1.32
0.8	7.124	-1.23
0.9	11.211	-1.03
0.95	20.570	-1.27
1.0	47.395	-1.21

Tabla 4.9 Pendientes obtenidas para las diferentes relaciones $\frac{D}{W}$ Analizadas numéricamente.

[‡] La pendiente en todas las relaciones $\frac{D}{W}$ forma un ángulo mayor de 90° con respecto a la horizontal y por ende, tiene valor negativo.

La tabla 4.10a es de gran ayuda para el diseñador ya que se obtiene, de manera rápida y sin necesidad de hacer algún tipo de análisis experimental o numérico, el factor de concentración de esfuerzos en una placa con orificio circular centrado bajo un gradiente de carga lineal, simplemente conociendo la relación que se tiene entre el diámetro del orificio y el ancho de la placa.

Otra gráfica que se puede obtener para ayuda del diseñador es cuando el orificio circular no se encuentra centrado en la placa, cuyos resultados se observan en la figura 4.15. Se usa la letra 'a' para designar el radio del orificio, esto con el fin de utilizar una relación entre el radio y la distancia que hay entre este y el borde de la anchura, designada con la letra 'H'.

4.6 PARAMETRIZACIÓN DEL MODELO PROPUESTO CON RESPECTO A LA UBICACIÓN DEL ORIFICIO CIRCULAR.

Como se mencionó, otra modificación importante y que con frecuencia se puede presentar es la ubicación que puede tener el orificio, el cual puede no estar centrado en la placa. Para tal caso, es conveniente presentar un diagrama con los parámetros que sufrirán cambios, así como un eje de referencia que sirva de base para saber en que dirección se desplazará el orificio circular. En la figura 4.15 se muestra este diagrama, y como se observa, a lo largo del eje y es por donde se desplazará el orificio.

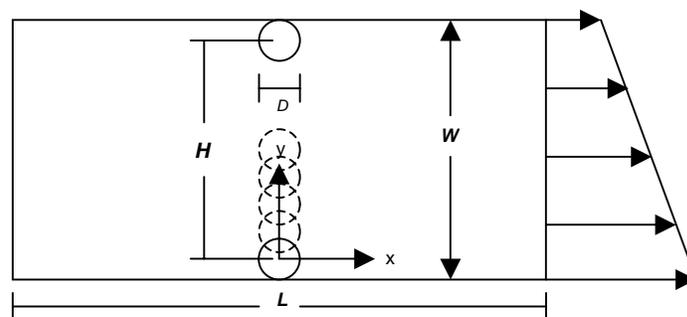


Figura 4.15

El largo de la placa L no afecta en los resultados obtenidos, siempre y cuando esa distancia no sea menor de $1.5D$ [ver Principio de Saint Venant, Durelli, p. 102, 1958] en dirección del eje x .

La gráfica ilustrada en la figura 4.16 muestra como se va modificando el factor de intensidad de esfuerzos a lo largo del eje y , así como los valores obtenidos.

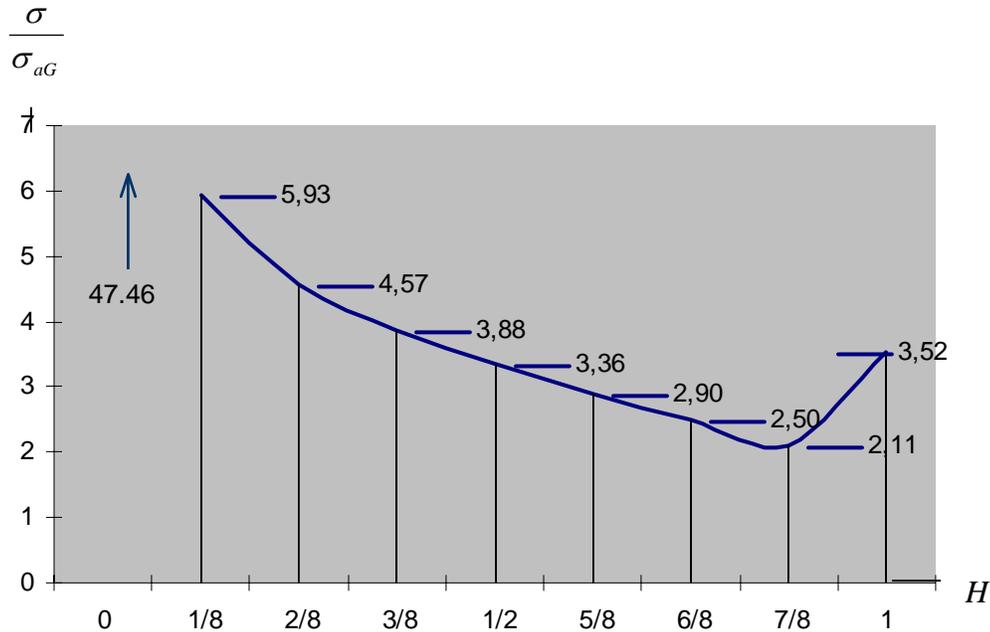


Figura 4.16 Factor de concentración de esfuerzos para una placa con orificio circular

Cabe hacer mención del valor obtenido cuando $H \rightarrow 1$, ya que hay un cambio abrupto de pendiente. Como se puede observar en la figura 4.17, el esfuerzo tangencial máximo se encuentra a $\pi/2$ (con respecto a la horizontal). El

aumento se debe a la cercanía que tiene la frontera del orificio y el borde de la placa así como el gradiente aplicado.

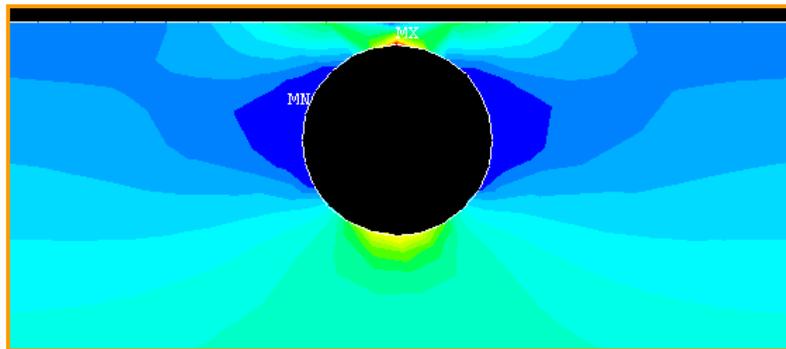


Figura 4.17 Estado de esfuerzos en la frontera del orificio circular.

CAPÍTULO V

5.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Hasta el momento, los capítulos III y IV arrojan resultados cualitativos y cuantitativos (en el caso del IV) con el fin de obtener el factor de intensidad de esfuerzos en la frontera del orificio, la distribución de esfuerzos tangenciales y por supuesto el corroborar que los resultados obtenidos por fotoelasticidad sirvan de apoyo para sustentar los obtenidos numéricamente. Los dos primeros recaen en el tercero. Por lo tanto, se comenzará con el último punto. Si se retoman tanto la figura 4.12 y la fotografía 5_b, para el caso tres, se podrá observar que ambas son cualitativamente equivalentes.

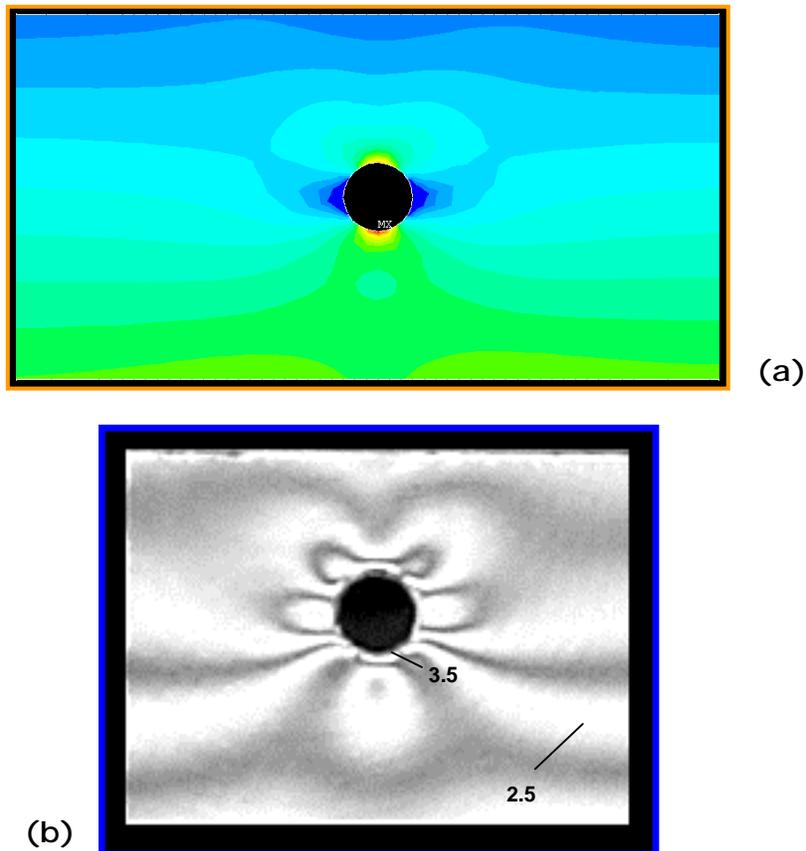


Figura 5.1 Estado de esfuerzos en la frontera de un orificio circular bajo un gradiente de carga lineal, ambos casos para una carga de [320N]: a) Análisis numérico; b) Análisis experimental.

Se tiene que tomar en cuenta que el parámetro de valores que corresponde a cada color de franja en el análisis numérico es una característica propia del programa ANSYS, y cambiar este parámetro está fuera del alcance del usuario. Pero aún así, el análisis numérico ayuda a ubicar el orden de franja cero, es decir, la franja donde el valor de $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, esto debido a que no se tiene en el polariscopio circular un compensador que ayudaría a ubicar con total certeza la franja de orden cero. La tabla 5.1 muestra los valores cuantitativos de la diferencia de esfuerzos principales, en este caso únicamente donde esta el máximo, tomando en consideración lo antes mencionado.

Tabla 5.1 Resultados obtenidos para la diferencia de esfuerzos principales, para el caso tres.

	Análisis Numérico	Análisis Experimental
$\sigma_1 - \sigma_2$	3.81 [MPa]	4.00 [MPa]

Una vez validado este punto, se analizará el comportamiento del esfuerzo tangencial en la frontera del orificio. La figura 5.2 y 5.3 muestran la distribución del esfuerzo tangencial, con sus respectivos valores.

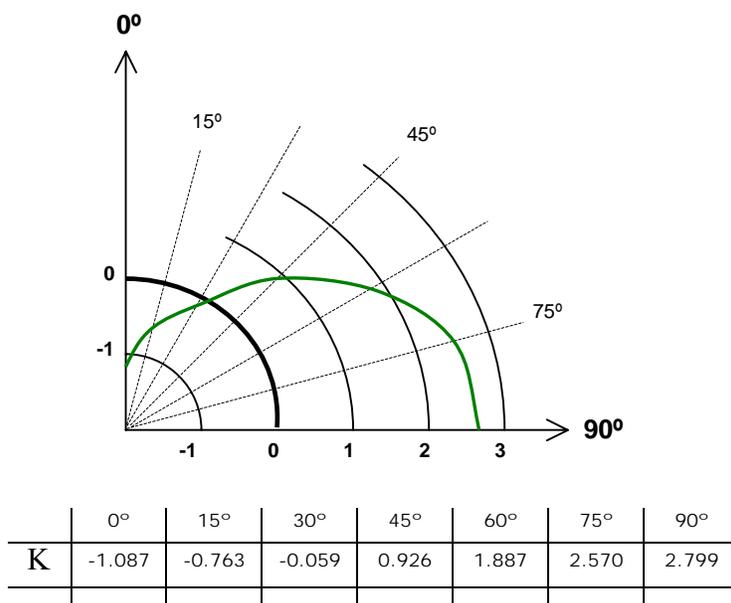


Figura 5.2 Distribución del esfuerzo tangencial en la frontera del orificio circular de una placa bajo un gradiente de carga lineal.

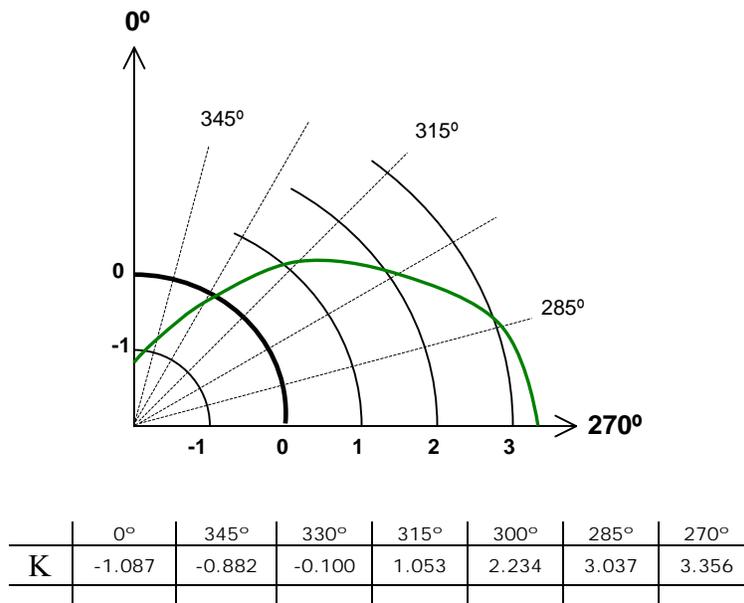


Figura 5.3 Distribución del esfuerzo tangencial en la frontera del orificio circular de una placa bajo un gradiente de carga lineal.

La razón por la que no es necesario graficar para los tres casos es debido a que, si nos remitimos al anexo C, donde se ilustra el factor de concentración de esfuerzo K para los tres casos. Este valor permanece prácticamente igual en los tres casos, y por tal motivo se tomó la decisión de utilizar el caso tres como referencia para todos los resultados a analizar.

Los valores del esfuerzo tangencial en la periferia del orificio circular se ilustran en la figura 5.4, los cuales son válidos para el caso tres.

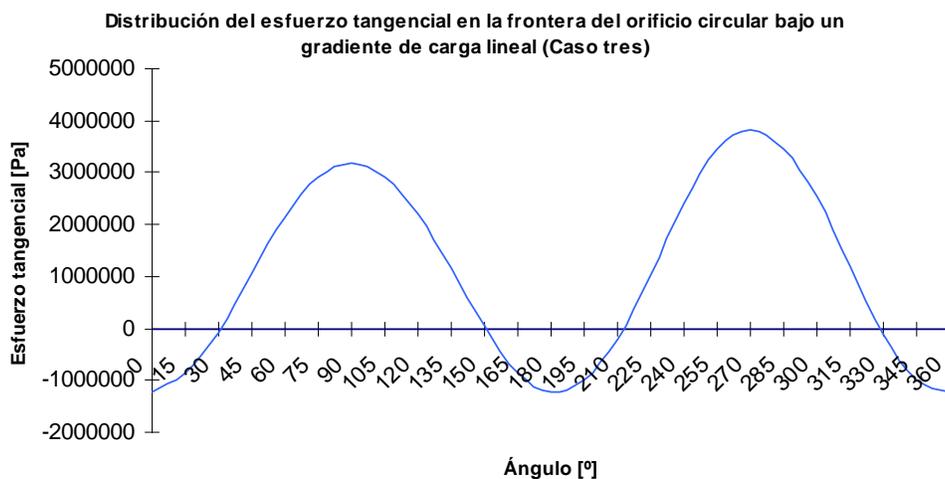


Figura 5.4 Valores del esfuerzo tangencial bajo un gradiente de carga lineal con un orificio circular

Se puede observar que el valor máximo a tensión se encuentra cuando $\Phi = \frac{3\pi}{2}$, mientras que el valor máximo a compresión cuando $\Phi = 0, \pi$. La figura 5.5 ilustra la distribución del esfuerzo tangencial en la periferia del orificio, el cual aparece como una media luna de color negro más grueso que el resto.

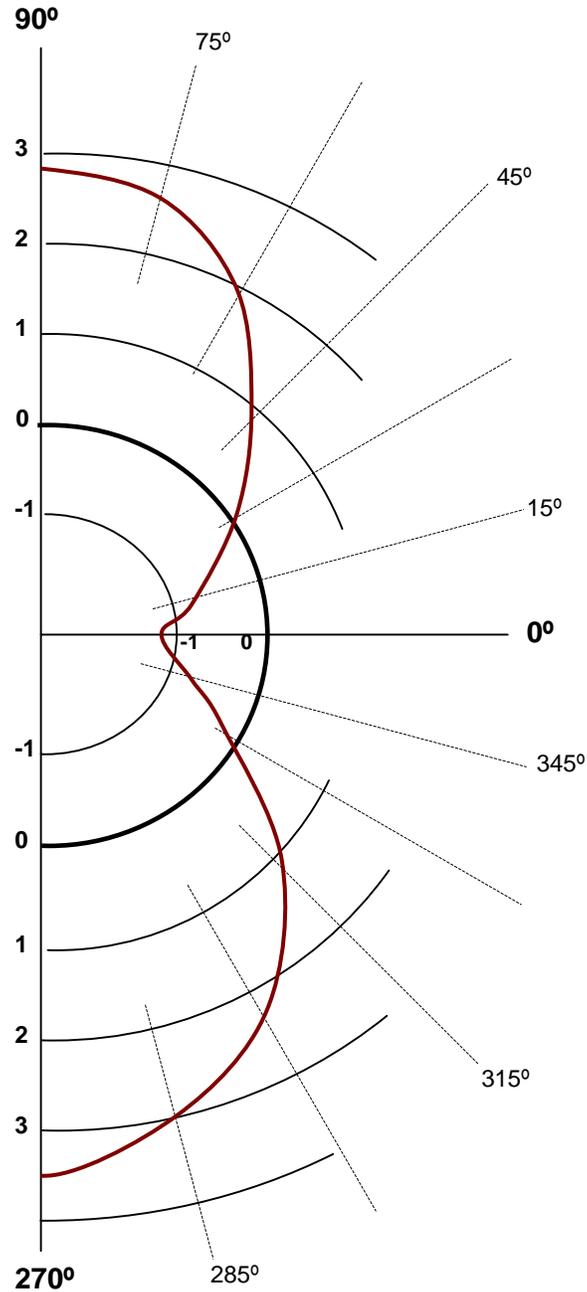


Figura 5.5 Distribución del esfuerzo tangencial a lo largo de la periferia del orificio circular.

Como hay una simetría con respecto a la vertical, la figura 5.5 muestra únicamente una mitad de la distribución de esfuerzos tangenciales. Se puede observar que el tramo de la curva (color rojo) que pasa por la parte interior de la curva cero, representa esfuerzos de compresión, así como esfuerzos de tensión los dos tramos que circulan por la parte externa a la curva cero.

Por otra parte, las gráficas mostradas en las figuras 4.14 y 4.16 se obtienen con el objetivo claro y conciso de ayudar al ingeniero en diseño de poder referirse a dichas gráficas al momento de enfrentarse con este tipo de carga en placas con orificio circular centrado o no centrado. Estos resultados bien podrían haberse presentado aquí mismo, pero por haber sido obtenidos de manera numérica se optó por plasmarlo en el instante mismo de su obtención.

Por último, la figura 5.6 corrobora los resultados obtenidos por Sternberg & Sadowsky [17], los cuales indican que bajo una carga uniaxial, el esfuerzo tangencial σ_θ en la raíz del orificio sigue siendo el esfuerzo máximo, pero este esfuerzo varía a lo largo del espesor de la placa. Este resultado está ilustrado en la figura 1.3, y numéricamente en la figura 5.6.

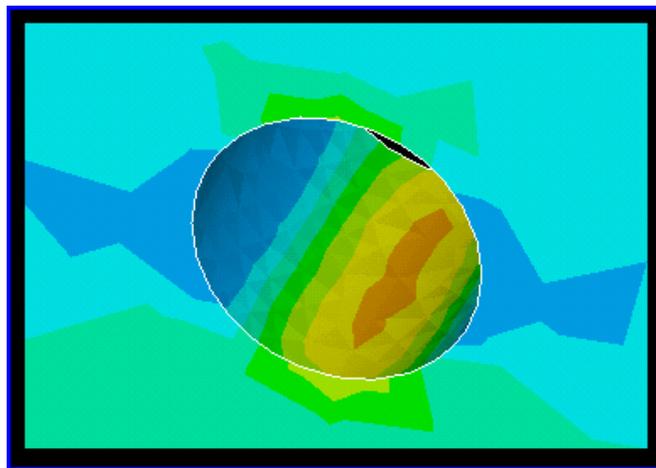


Figura 5.6 *Distribución de esfuerzo tangencial a lo largo del espesor de una placa con orificio circular centrado bajo un gradiente de carga lineal.*

El modelo propuesto está sujeto a un gradiente de carga lineal, y se sigue conservando los mismos resultados que una placa bajo una carga uniaxial obtenidos por Sternberg & Sadowsky. Con este resultado se verifica, por un lado que el programa ANSYS despliegue resultados correctos de acuerdo a los obtenidos analíticamente por varios matemáticos y físicos como Kirsch, Howland, Sternberg, etc., y por otro lado no hay cambio en la distribución de esfuerzos a lo largo del espesor por lo que un cambio en el tipo de carga, referido únicamente a un gradiente de carga lineal, no representa un parámetro de cuidado para el ingeniero en diseño.

CONCLUSIONES

1. Es muy claro que el modelo propuesto para producir un gradiente de carga es el adecuado ya que se pudo corroborar los resultados experimentales obtenidos con los numéricos.
2. Este modelo representa una opción viable para reproducir sin ningún inconveniente la carga deseada en el polariscopio circular, sin tomar en cuenta posibles problemas de estabilidad, el cual depende más de las herramientas de sujeción que del modelo en sí.
3. La relación entre el diámetro del orificio y el ancho de la placa tiene una repercusión importante en los esfuerzos obtenidos, teniendo como máximo una relación de 1:1 entre ambos parámetros.
4. Lo mismo pasa con la posición que ocupa el orificio con respecto a la vertical, teniendo un máximo en la parte inferior de la placa, y un mínimo en la parte superior (aunque tiene un pequeño "jalón" en el borde superior de la placa) como se muestra en la figura 4.16.
5. El software utilizado es de gran confianza, largamente utilizado en compañías automotrices como Chrysler, Honda, así como aeronáuticas ya sea el caso de Boeing, y se pudo observar su fidelidad con respecto a lo obtenido experimentalmente en el capítulo IV, y en la figura 5.6 que muestra cómo se desempeña el espesor de la placa bajo la carga y su similar en la figura 1.13, obtenida esta analíticamente.
6. El diseñador puede y debe ocupar los resultados obtenidos respecto a los cambios en los parámetros, así como los obtenidos para el caso concreto del problema en cuestión al momento de encontrarse con un problema como estos y que se han mencionado en la introducción de la tesis. Deberá interpretar correctamente las gráficas, tablas, etc., que le dará el beneficio de poder ahorrarse tiempo en la preparación de un modelo y dinero en la misma, sin tomar en cuenta de las herramientas necesarias para la labor experimental y numérica.

ANEXO B

Tabla 1. Valores nodales en la frontera del orificio circular bajo una carga de 98[N]

Nodo	σ_x	σ_y	τ_{xy}	$\Phi [^\circ]^\ddagger$
10818	-6404.7	-0.38376E+06	709.87	0,360
11021	-22666.	-0.25341E+06	62504.	15
11023	-8548.8	-16822.	6926.3	30
11025	0.15456E+06	0.16976E+06	-0.16460E+06	45
11027	0.49053E+06	0.17509E+06	-0.29359E+06	60
11029	0.84367E+06	64456.	-0.23144E+06	75
10819	0.98780E+06	3464.2	693.27	90
11032	0.84834E+06	60534.	0.21458E+06	105
11034	0.53528E+06	0.15920E+06	0.28842E+06	120
11036	0.19118E+06	0.17406E+06	0.18112E+06	135
11038	2238.9	8812.7	5863.3	150
11040	-22240.	-0.25187E+06	-65154.	165
10820	-6632.9	-0.38380E+06	3429.2	180
11043	-28472.	-0.28922E+06	73735.	195
11045	-24926.	-53345.	27068.	210
11047	0.15152E+06	0.16846E+06	-0.16477E+06	225
11049	0.55224E+06	0.19384E+06	-0.32905E+06	240
11051	0.99600E+06	75183.	-0.27165E+06	255
10821	0.11845E+07	4516.1	2507.0	270
11054	0.10073E+07	70524.	0.25472E+06	285
11056	0.61113E+06	0.18027E+06	0.32908E+06	300
11058	0.19422E+06	0.17681E+06	0.18620E+06	315
11060	-12010.	-27267.	-13747.	330
11062	-26766.	-0.29030E+06	-77184.	345

Tabla 2. Valores nodales en la frontera del orificio circular bajo una carga de 210[N]

Nodo	σ_x	σ_y	τ_{xy}	$\Phi [^\circ]$
10818	-14147.	-0.84765E+06	1568.0	0,360
10819	0.21818E+07	7651.8	1531.3	15
10820	-14651.	-0.84773E+06	7574.5	30
10821	0.26163E+07	9975.1	5537.5	45
11021	-50065.	-0.55972E+06	0.13806E+06	60
11023	-18883.	-37156.	15299.	75
11025	0.34140E+06	0.37496E+06	-0.36358E+06	90
11027	0.10835E+07	0.38674E+06	-0.64848E+06	105
11029	0.18635E+07	0.14237E+06	-0.51121E+06	120
11032	0.18738E+07	0.13371E+06	0.47397E+06	135
11034	0.11823E+07	0.35163E+06	0.63706E+06	150
11036	0.42228E+06	0.38446E+06	0.40005E+06	165
11038	4945.2	19465.	12951.	180
11040	-49123.	-0.55632E+06	-0.14391E+06	195
11043	-62889.	-0.63883E+06	0.16286E+06	210
11045	-55056.	-0.11783E+06	59787.	225
11047	0.33467E+06	0.37210E+06	-0.36395E+06	240
11049	0.12198E+07	0.42816E+06	-0.72680E+06	255
11051	0.22000E+07	0.16606E+06	-0.60002E+06	270
11054	0.22248E+07	0.15577E+06	0.56262E+06	285
11056	0.13503E+07	0.39818E+06	0.72687E+06	300
11058	0.42898E+06	0.39054E+06	0.41127E+06	315
11060	-26527.	-60228.	-30364.	330
11062	-59120.	-0.64121E+06	-0.17048E+06	345

[‡] El ángulo Φ es medido con respecto a la horizontal, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

ANEXO B

Tabla 3. Valores nodales en la frontera del orificio circular bajo una carga de 320[N]

Nodo	σ_x	σ_y	τ_{xy}	$\Phi [^\circ]$
10818	-20577.	-0.12329E+07	2280.7	0,360
10819	0.31736E+07	11130.	2227.3	15
10820	-21310.	-0.12331E+07	11017.	30
10821	0.38055E+07	14509.	8054.5	45
11021	-72821.	-0.81413E+06	0.20081E+06	60
11023	-27465.	-54045.	22253.	75
11025	0.49658E+06	0.54540E+06	-0.52884E+06	90
11027	0.15760E+07	0.56252E+06	-0.94324E+06	105
11029	0.27105E+07	0.20708E+06	-0.74357E+06	120
11032	0.27255E+07	0.19448E+06	0.68941E+06	135
11034	0.17197E+07	0.51146E+06	0.92663E+06	150
11036	0.61422E+06	0.55921E+06	0.58188E+06	165
11038	7192.9	28313.	18838.	180
11040	-71452.	-0.80919E+06	-0.20932E+06	195
11043	-91475.	-0.92920E+06	0.23689E+06	210
11045	-80080.	-0.17138E+06	86962.	225
11047	0.48679E+06	0.54123E+06	-0.52938E+06	240
11049	0.17742E+07	0.62277E+06	-0.10571E+07	255
11051	0.31999E+07	0.24155E+06	-0.87275E+06	270
11054	0.32361E+07	0.22658E+06	0.81835E+06	285
11056	0.19640E+07	0.57917E+06	0.10573E+07	300
11058	0.62397E+06	0.56805E+06	0.59820E+06	315
11060	-38585.	-87603.	-44165.	330
11062	-85993.	-0.93267E+06	-0.24798E+06	345

ANEXO C

CASO TRES

σ_{aG}	σ_{θ}	K	Φ
1133980	-1232900	-1,087	0
1133980	-864877	-0,763	15
1133980	-66671,7	-0,059	30
1133980	1049830	0,926	45
1133980	2139500	1,887	60
1133980	2914588	2,570	75
1133980	3173600	2,799	90
1133980	2900659	2,558	105
1133980	2220125	1,958	125
1133980	1168595	1,031	135
1133980	39347,16	0,035	150
1133980	-864431	-0,762	165
1133980	-1233100	-1,087	180
1133980	-991528	-0,874	195
1133980	-223866	-0,197	210
1133980	1043390	0,920	225
1133980	2401818	2,118	240
1133980	3438103	3,032	255
1133980	3805500	3,356	270
1133980	3443675	3,037	285
1133980	2533441	2,234	300
1133980	1194210	1,053	315
1133980	-113597	-0,100	330
1133980	-999943	-0,882	345
1133980	-1232900	-1,087	360

CASO UNO

σ_{aG}	σ_{θ}	K	Φ
354370	-383760	-1,083	0
354370	-269205	-0,760	15
354370	-20752,1	-0,059	30
354370	326760	0,922	45
354370	665926,4	1,879	60
354370	907192,6	2,560	75
354370	987800	2,787	90
354370	902857	2,548	105
354370	691039	1,950	120
354370	363740	1,026	135
354370	12247,02	0,035	150
354370	-269065	-0,759	165
354370	-383800	-1,083	180
354370	-308621	-0,871	195
354370	-69681,8	-0,197	210
354370	324760	0,916	225
354370	747605,7	2,110	240
354370	1070142	3,020	255
354370	1184500	3,343	270
354370	1071908	3,025	285
354370	788541,6	2,225	300
354370	371715	1,049	315
354370	-35358	-0,100	330
354370	-311239	-0,878	345
354370	-383760	-1,083	360

CASO DOS

σ_{aG}	σ_{θ}	K	Φ
779605	-847650	-1,087	0
779605	-594610	-0,763	15
779605	-45837,1	-0,059	30
779605	721760	0,926	45
779605	1470910	1,887	60
779605	2003811	2,570	75
779605	2181800	2,799	90
779605	1994221	2,558	105
779605	1526343	1,958	120
779605	803420	1,031	135
779605	27050,95	0,035	150
779605	-594299	-0,762	165
779605	-847730	-1,087	180

σ_{aG}	σ_{θ}	K	Φ
779605	-681679	-0,874	195
779605	-153914	-0,197	210
779605	717335	0,920	225
779605	1651317	2,118	240
779605	2363762	3,032	255
779605	2616300	3,356	270
779605	2367511	3,037	285
779605	1741758	2,234	300
779605	821030	1,053	315
779605	-78098,7	-0,100	330
779605	-687457	-0,882	345
779605	-847650	-1,087	360

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ugural, A., Fenster, S., *Advanced Strength and Applied Elasticity*, Prentice Hall, New York, 1995.
- [2] Durelli, A., Phillips, E., Tsao, C., *Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
- [3] Cook, R., Young, W., *Advanced Mechanics of Materials*, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [4] Morton, G., *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, San Diego, 2003.
- [5] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.
- [6] Sokolnikoff, I., *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
- [7] Dally, J., Riley, W., *Experimental Stress Analysis*, McGraw - Hill International Editions, New York, 1991.
- [8] Hendry, A.W., *Photoelastic Analysis*, Pergamon Press Ltd., London, 1966.
- [9] Timoshenko, S., Goodier, J., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.
- [10] Carrera, B. J., *Apuntes de Mecánica del medio continuo*, Semestre 2004-2, División de Posgrado de la facultad de Ingeniería, U.N.A.M.
Carrera, B. J., *Apuntes de Algebra Lineal*, Semestre 2003-2, División de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.
- [11] Youngdahl, C., Sternberg, E., "Three-Dimensional Stress Concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, pp. 855-865, 1966.
- [12] Howland, R. C. J., "On the Stresses in the Neighborhood of the Circular Hole in a Strip under Tension", *Transactions of the Royal Society (London)*, Vol. A229, pp.49-86, 1929-1930.
- [13] Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, no. 2, pp. A-69 – A-77, 1945.

- [14] Troyani, N., Gomes, C., Sterlacci, G., "Theoretical Stress concentration factors for short rectangular plates with centered circular holes", Transactions of the ASME, vol. 124, pp. 126-128, 2002.
- [15] Hibbeler, R., *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [16] Durelli, A., Riley, W., *Introduction to Photomechanics*, John Wiley & Sons, Chicago, 1964.
- [17] Sternberg, E., Sadowsky, M., "Three-dimensional Solution for the Stress Concentration around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness", Journal of Applied Mechanics, vol. 16, pp. 27-38, 1949.
- [18] Naghdi, P., "The effect of elliptic holes on the bending of thick plates", Journal of Applied Mechanics, vol. 22, no. 1, pp. 89-94, 1955.
- [19] Frocht, M.M., *Photoelasticity*, vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1941; vol. 2, 1948.
- [20] Kuske, A., Robertson, G., *Photoelastic Stress Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1974
- [21] Chadwick, P., *Continuum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [22] Dally, J. W., Ahimaz, F. J., "Photographic Method to Sharpen and Double Isochromatic fringes", Experimental Mechanics, vol. 2, no. 6, pp. 170 – 175, 1962.
- [23] Flanagan, J.H., "Photoelastic Photography", Procedures of the Society of Experimental Stress Analysis (SESA), vol. XV, no. 2, pp. 1-10, 1958.
- [24] Mase, G. E., Mase, G.T., *Continuum Mechanics for Engineers*, CRC Press, London, 1992.
- [25] Golovina, L.I., *Algebra Lineal y algunas de sus aplicaciones*, MIR, Moscú, 1982.
- [26] Ugural, A., *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1999.
- [27] Folias, E., Wang, J., "On the three-dimensional stress field around a circular hole in a plate of arbitrary thickness", Computational Mechanics, vol. 6, pp.379-391, 1990.