



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“MEDICIÓN DE SUPERFICIES POR PROYECCIÓN
DE PUNTOS”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

P R E S E N T A:

JOSÉ ALEJANDRO JIMÉNEZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: Dr. RUFINO DÍAZ URIBE



2005



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A

Martiniana

Alejandro

Y

Pablo

Agradecimientos:

Agradezco en especial a mi tutor, Dr. Rufino Díaz Uribe por su confianza y apoyo para la realización de este trabajo de tesis.

Agradezco al laboratorio de Sistemas Ópticos del Centro de ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico de la UNAM (CCADET) por permitirme el uso de sus instalaciones para el desarrollo de este trabajo de tesis.

Agradezco a mi madre Margarita Hernández y a mi familia, por su apoyo incondicional en todos los aspectos para mi superación personal.

Agradezco a los miembros del jurado por sus observaciones y correcciones para realizar un mejor trabajo de tesis.

Agradezco al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo parcial con una beca crédito con número de registro 177807.

Agradezco Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo con una beca proyecto para realización de trabajo de tesis con número de registro 37077-E.

Agradezco a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por permitirme realizar estudios de posgrado.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
VOTOS APROBATORIOS

DR. WILFRIDO RIVERA GÓMEZ FRANCO
Coordinador del Programa de Posgrado
en Ingeniería, U N A M
P r e s e n t e

Por este medio comunico a usted que he leído la tesis titulada: **"MEDICION DE SUPERFICIES POR PROYECCION DE PUNTOS"** para obtener el grado de MAESTRO EN INGENIERIA en el campo del conocimiento **INGENIERIA ELECTRICA**, que presenta el alumno: **JOSE ALEJANDRO JIMENEZ HERNANDEZ**.

Al mismo tiempo me permito informarle mi decisión de otorgar o no el voto aprobatorio.

JURADO		VOTO APROBATORIO	FIRMA	FECHA
PRESIDENTE	DR. SALVADOR CARLOS CUEVAS CARDONA	✓ (SI) (NO)		06/09/05
VOCAL	DR. RUFINO DIAZ URIBE	✓ (SI) (NO)		06/09/05
SECRETARIO	DR. JORGE A. MARQUEZ FLORES	✓ (SI) (NO)		06/09/05
SUPLENTE	DRA. MARTHA ROSETE AGUILAR	✓ (SI) (NO)		14/10/05
SUPLENTE	DR. NEIL BRUCE DAVIDSON	✓ (SI) (NO)		19/09/05

INDICE GENERAL

Introducción	1
Capítulo 1	
Algunos métodos de luz estructurada.	6
1.1 Base matemática para obtención de información tridimensional	7
1.2 Métodos de luz estructurada, el problema de correspondencia.	11
1.3 Método de Posdamer-Altshuler	13
1.4 Método de Griffin-Narashimhan-Yee.	14
1.5 Método de Maruyama-Abe.	17
1.6 Propuesta de utilizar rejillas de difracción rectangulares como sistema de proyección.	18
Capítulo 2	
Teoría.	
2.1 Condiciones para intersección entre rectas.	21
2.2 Modelo matemático para obtener información 3D.	22
2.3 Características de la difracción.	25
2.4 Ejemplos de patrones de difracción de Fraunhofer.	27
2.5 Redes bidimensionales.	30
2.6 Aberraciones del campo difractado.	31
2.7 Aberraciones en sistemas ópticos.	33
2.8 Aberraciones de tercer orden o de Seidel.	36
Capítulo 3	
Dispositivo experimental.	
3.1 Arreglo experimental.	39
3.2 Orientación de la cámara CCD.	41
3.3 Posición de la cámara CCD para mayor sensibilidad al cambio de posición de un punto imagen dependiendo de la forma de la superficie para un punto objeto respectivo.	43
3.4 Obtención de un mayor número de puntos proyectados con el arreglo de tres rejillas de difracción.	44
3.5 Calibración del arreglo de rejillas de difracción.	46
3.6 Determinación de las coordenadas en el plano imagen.	48

3.7 Determinación de las coordenadas de los puntos proyectados sobre la superficie a medir considerando distancias mínimas.	48
3.8 Evaluación de la distorsión de la lente de cámara CCD.	50

Capítulo 4

Resultados y análisis.

4.1 Sistema de proyección.	53
4.2 Posición de los puntos vía determinación del centroide.	53
4.3 Correspondencia entre puntos objeto y puntos imagen utilizando como fuentes de luz dos láseres de diferente longitud de onda.	54
4.4 Evaluación de la distorsión de la lente de la cámara CCD.	56
4.5 Medición de superficies.	58

Conclusiones generales.

Apéndice A.	70
Apéndice B.	72
Apéndice C.	75
Apéndice D.	76
Apéndice E.	77
Apéndice F.	78
Apéndice G.	80
Apéndice H.	81
Apéndice I	82

Bibliografía.

84

Introducción.

El Gran Telescopio Milimétrico (GTM) es un esfuerzo conjunto del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) en Tonazintla, México y la Universidad de Massachusetts (UMass) en Amherst, E.U [1]. El GTM es una antena de 50m de diámetro diseñada para captar ondas electromagnéticas con longitud de onda entre $1mm$ y $4mm$, llamadas microondas u ondas milimétricas. El telescopio esta siendo construido en la cima del volcán sierra negra, en el estado de Puebla, México y se espera concluir el trabajo en 2007.

El GTM requiere de un total de 180 paneles para formar la superficie de $50m$ de diámetro de su espejo primario. La compañía Composite Optics (COI), en San diego, está desarrollando la tecnología de los paneles, incluyendo el proceso de tallado y manufactura. Los paneles son membranas de fibra de carbono soportados por ajustadores que descansan sobre una estructura de reacción muy rígida. Los paneles se fabrican mediante un proceso de moldes inversos con una precisión de $200\mu m$. El espejo secundario del GTM, es un espejo de alta calidad (con una especificación de error de 12 micras) con un diámetro de $2600mm$, también hecho de fibra de carbono y recubierto de una capa de aluminio. El secundario y el molde están siendo diseñados y fabricados en instalaciones del INAOE. La finalidad del presente trabajo es la de diseñar un método para medir la forma del molde para la construcción del espejo secundario del GTM. Dicho molde tiene una profundidad de 468.9 mm.

Para medir forma de superficies existen diversos métodos, sin embargo, para este caso la superficie que se desea medir, aparte de su tamaño, es metálica y rugosa por lo que los métodos que se utilizan comúnmente en óptica, presentan dificultades al aplicarse a este tipo de superficies. Por ejemplo, aplicar un método interferométrico puede utilizarse para determinar rugosidad pero de dimensiones pequeñas del orden de varias longitudes de onda hasta de fracciones de longitud de onda [2] y para nuestro caso se tienen rugosidades del orden de micras. Con proyección de franjas y técnicas de Moire, presenta problemas al proyectar franjas con superficies profundas como el molde en cuestión, ya que la región que se puede analizar de la superficie esta limitado al espaciamiento entre las líneas proyectadas y un ángulo α entre la dirección de visión y la dirección de proyección de líneas, donde para mejores resultados se toma el ángulo α no menor a la mayor pendiente que puede encontrarse en algún punto sobre la superficie [3]. Con estereoscopia [4] se tiene el problema de correspondencia, al no tener forma de identificar la posición de un punto con la posición de su imagen debido a que la misma superficie no presenta puntos de referencia que identifiquen sin ambigüedad, a menos que la superficie se pinte con patrones de puntos identificables.

Otro método, es utilizar palpadores que van mapeando por contacto sobre la superficie, coordinada a coordinada mediante desplazamientos mecánicos; por las dimensiones de este tipo de superficies, sin embargo, se requieren varios metros del brazo palpador, requiriendo un sistema robusto y un gran espacio para su instalación, además requiere componentes de alta precisión para su desplazamiento (Fig.1).

Se puede obtener información 3D utilizando sistemas de luz estructurada, en los cuales se utiliza un proyector de algún patrón regular determinado (puntos, líneas, círculos, etc.) y se captura la imagen con una cámara CCD. De éste patrón de proyección se diseña un método de codificación particular para facilitar la correspondencia de cada punto en la escena con su respectiva imagen utilizando triangulación [5].

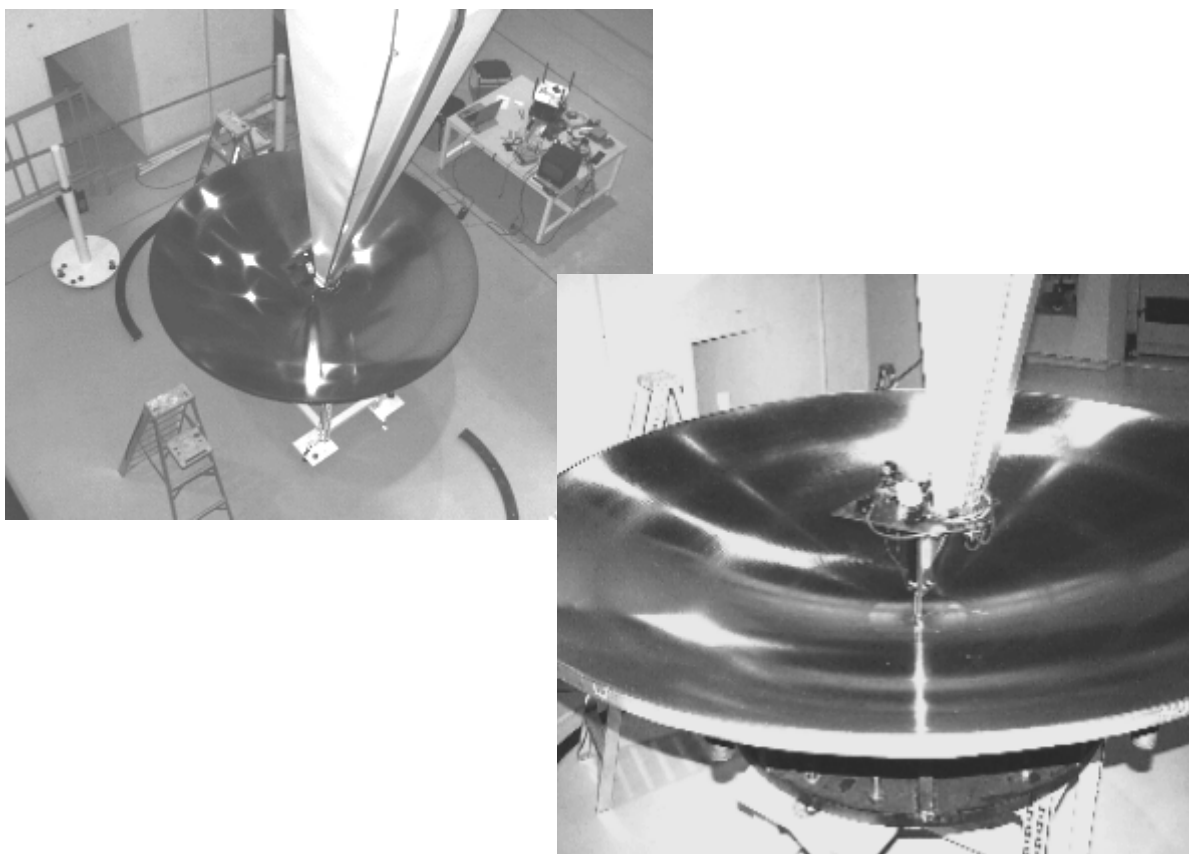


Fig.1 Molde para construcción de espejo secundario de fibra de carbono de 2600mm de diámetro y una profundidad de 468.9mm, se muestra el uso de un palpador para medir forma de la superficie.

En los métodos de luz estructurada conocidos, se realiza una codificación tan compleja como se requiera, sin embargo, no es muy claro qué tan factible sea su aplicación a nuestro problema por la forma de proyección del patrón, pues es importante asegurar que la profundidad de foco permita su aplicación a superficies como la del molde descrito antes.

En general, los problemas que se tienen que resolver en los sistemas de luz estructurada son los siguientes:

1. Determinar las coordenadas de los puntos en la escena, vía triangulación, intersectando un par de rectas que se construyen conociendo la posición del proyector, de la cámara y de las coordenadas en el plano imagen entre otros parámetros.
2. Tener una forma de codificación del patrón proyectado que no sea compleja, para permitir realizar la correspondencia adecuada entre puntos en la escena y los puntos respectivos en la imagen.
3. Que el método se pueda aplicar a objetos de cualquier forma y tamaño.
4. Los algoritmos para proceso de información, no requieran de mucho tiempo para obtener la información.
5. El sistema de proyección no sea de grandes dimensiones.

En este trabajo para resolver en forma alternativa estos problemas, lo que se propone es utilizar como sistema de proyección un arreglo de rejillas de difracción rectangulares, sobre las que incide un haz láser, para obtener un patrón de puntos distribuidos en forma de malla cuadrada (Para el caso de aproximación paraxial); si se superponen dos o más de estas formando un ángulo de una con respecto a otra, se genera un mayor número de puntos proyectados. La forma de codificación se realiza identificando el orden cero de difracción para dos haces láser de diferente longitud de onda que inciden en el mismo punto sobre las rejillas de difracción y, que de acuerdo a la teoría de difracción de Fraunhofer [6], en este punto la posición el orden cero coincide (Fig.2).

Con respecto a la posición del orden cero de difracción se realiza la correspondencia entre los puntos en la escena y los correspondientes puntos en la imagen. También, dado que las coordenadas de los puntos proyectados en la escena se determinan con la intersección de un par de rectas, puede ocurrir que el sistema de ecuaciones que determinan dicha intersección no tenga solución, por lo que en este trabajo se optó por trabajar tomando la distancia mínima entre rectas para encontrar dichas coordenadas.

Por lo descrito antes, las ventajas de estas modificaciones a los métodos de luz estructurada es la de utilizar dos láseres de diferente longitud de onda para identificar las coordenadas del orden cero y a partir de este punto realizar la correspondencia entre puntos objeto e imagen respectivos sin realizar realmente una codificación compleja.

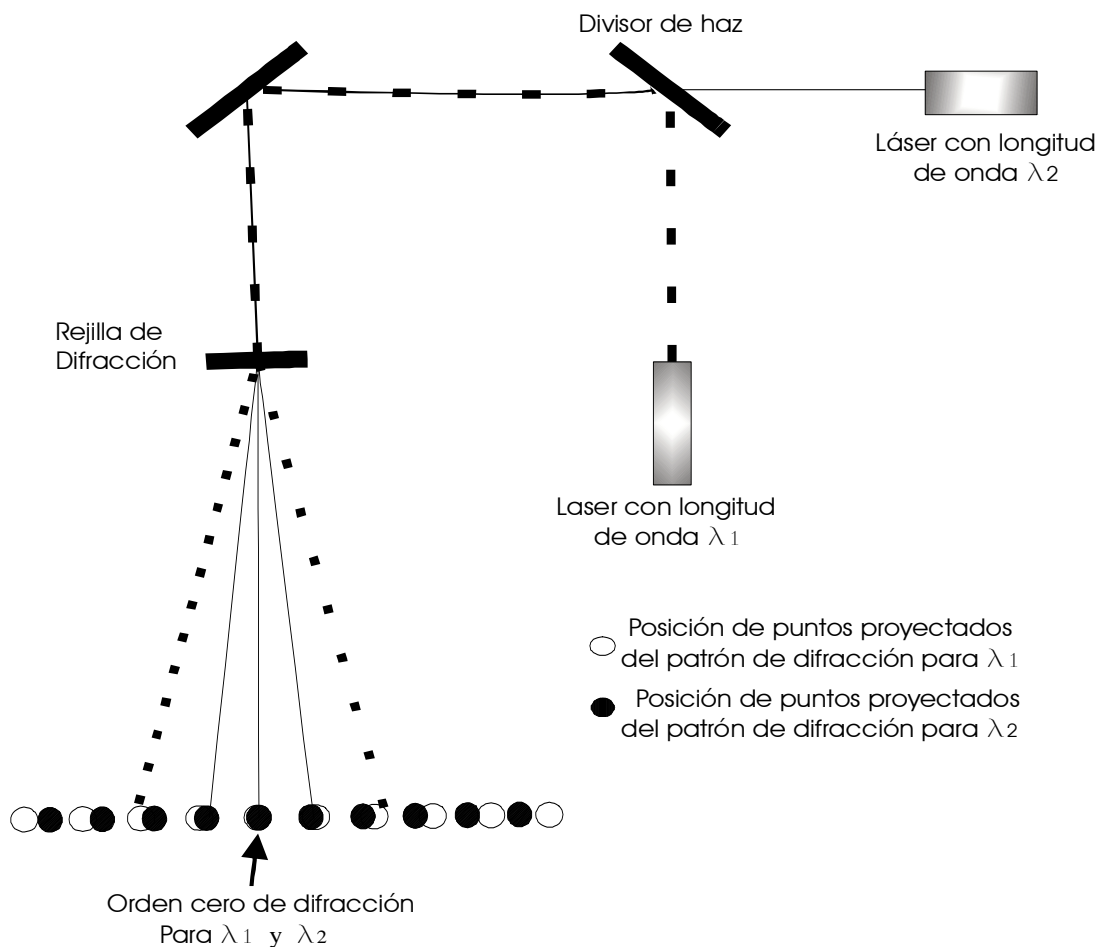


Fig.2 Proyección de puntos difractados de una rejilla de difracción rectangular cuadrada mostrando la posición de superposición de las dos longitudes de onda en el orden cero. Las líneas se pintan continuas y punteadas para ver de qué fuente láser provienen los diferentes órdenes de difracción.

El trabajar tomando la distancia mínima entre rectas permite encontrar en forma objetiva la posición de los puntos para la medición. El muestreo se puede incrementar utilizando rejillas cruzadas idénticas formando un ángulo y se tiene un sistema de proyección que no es robusto ni de contacto con la superficie a medir. Se logran medir deformaciones de hasta $\sim 13 \mu m$. Las mediciones se probaron en un espejo de fibra de carbono de $383 mm$ de diámetro, un plano horizontal, unas aspas de aluminio y un rostro de yeso a escala real, estos últimos para demostrar lo factible del método para medir cualquier forma de superficie no especular.

La organización de la tesis es como sigue: en el capítulo 1 se da una breve descripción de algunos métodos de luz estructurada para obtener información 3D así como ventajas y desventajas de cada uno de ellos. En el capítulo 2 se dan las bases teóricas utilizando triangulación para determinar las coordenadas de los puntos proyectados sobre la superficie a medir, así como los aspectos

generales de difracción de Fraunhofer, incluyendo un análisis de la distorsión generada por las rejillas de difracción al considerar términos de orden superior así como aberraciones en sistemas ópticos; se detalla la aberración de distorsión por considerar más significativa su influencia en la medición (Sin implicar con esto que no existen otras aberraciones las cuales podrían evaluarse). En el capítulo 3 se describe el dispositivo experimental primero trabajando con una sola rejilla de difracción y después con un arreglo de tres rejillas de difracción rotadas un ángulo φ entre ellas para tener un mayor número de puntos. En el capítulo 4 se dan los resultados del método de medición por proyección de puntos realizando un análisis y terminando con las conclusiones generales del trabajo.

C A P Í T U L O 1

Algunos métodos de luz estructurada.

En este capítulo se presentan métodos básicos donde se aplican la técnica de luz estructurada para obtener información 3D para medición de superficies. Se enfatizan los métodos de codificación que se utilizan para resolver el problema de correspondencia entre puntos proyectados sobre una superficie y su punto en el plano imagen en el plano del CCD. Se finaliza con la propuesta de utilizar como sistema de proyección un conjunto de dos o más de estas rejillas de difracción rectangulares holográficas con las cuales se puede realizar un muestreo más denso, colocando cada una con diferente orientación respecto a las demás. También, se propone utilizar dos láseres de diferentes longitudes de onda, de los que el orden cero de difracción coincide y con respecto a este punto se realiza la correspondencia entre puntos objeto y puntos imagen.

En los métodos de estereoscopia para realizar triangulación, se puede presentar la situación en la que una superficie que tenga rugosidades, en las cuales para identificación de puntos correspondientes en el par de imágenes se dificultaría pues no hay una referencia o una característica con respecto a la cual definir lo anterior, así por ejemplo, si se toma un par de imágenes de la región superior de una esfera (Fig.1.1) se tendría una imagen de un círculo para cada cámara, e identificar cual punto se relaciona con el respectivo para cada imagen se complica por no tener alguna marca o patrón con respecto al cual relacionarlos para obtener su posición.

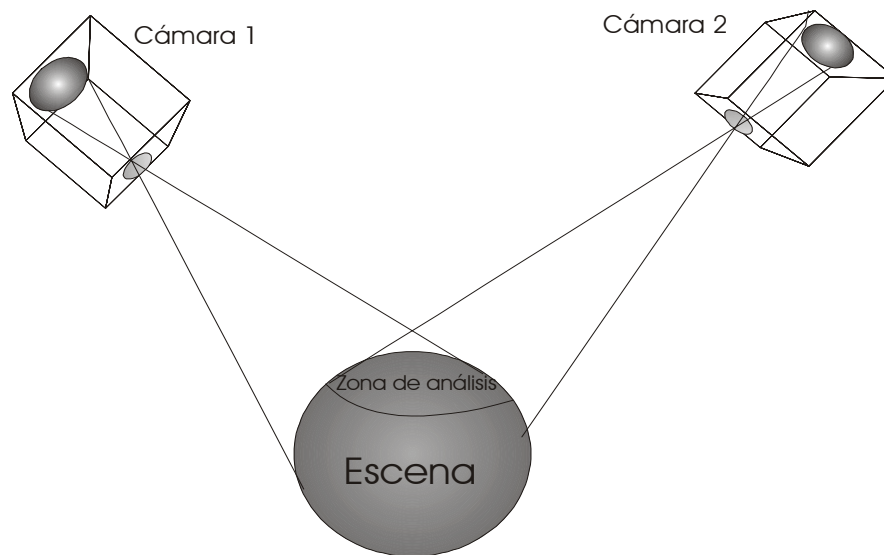


Fig.1.1 Estereoscopia para un objeto en el cual es difícil identificar puntos correspondientes por que en las imágenes no se tienen marcas o alguna referencia para dicha identificación.

1.1 Base matemática para la obtención de información tridimensional.

El principio general en que se basan los sistemas de luz estructurada para obtener información tridimensional en la medición de superficies se apoya en el método de triangulación. A continuación se da una descripción matemática general del proceso antes de realizar una breve descripción de algunos métodos que aplican este sistema. Para este desarrollo se considera como origen del sistema de referencia O_I el centro del plano donde se captura una imagen como se muestra en la Fig1.2. El punto focal de la lente de la cámara tiene coordenadas $F_I=(0,0,f_I)^t$ y el punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)^t$ del objeto en la escena se construye la recta que contiene al punto respectivo $P_I=(x_I,y_I,0)^t$, el súper índice t indica transpuesto, en plano imagen dada por:

$$P_1 = F_1 + \alpha(P_0 - F_1) \tag{1.1}$$

Que expresado en forma de matriz se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_{p1} \\ y_{p1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x_{p0} \\ y_{p0} \\ z_{p0} - f_1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

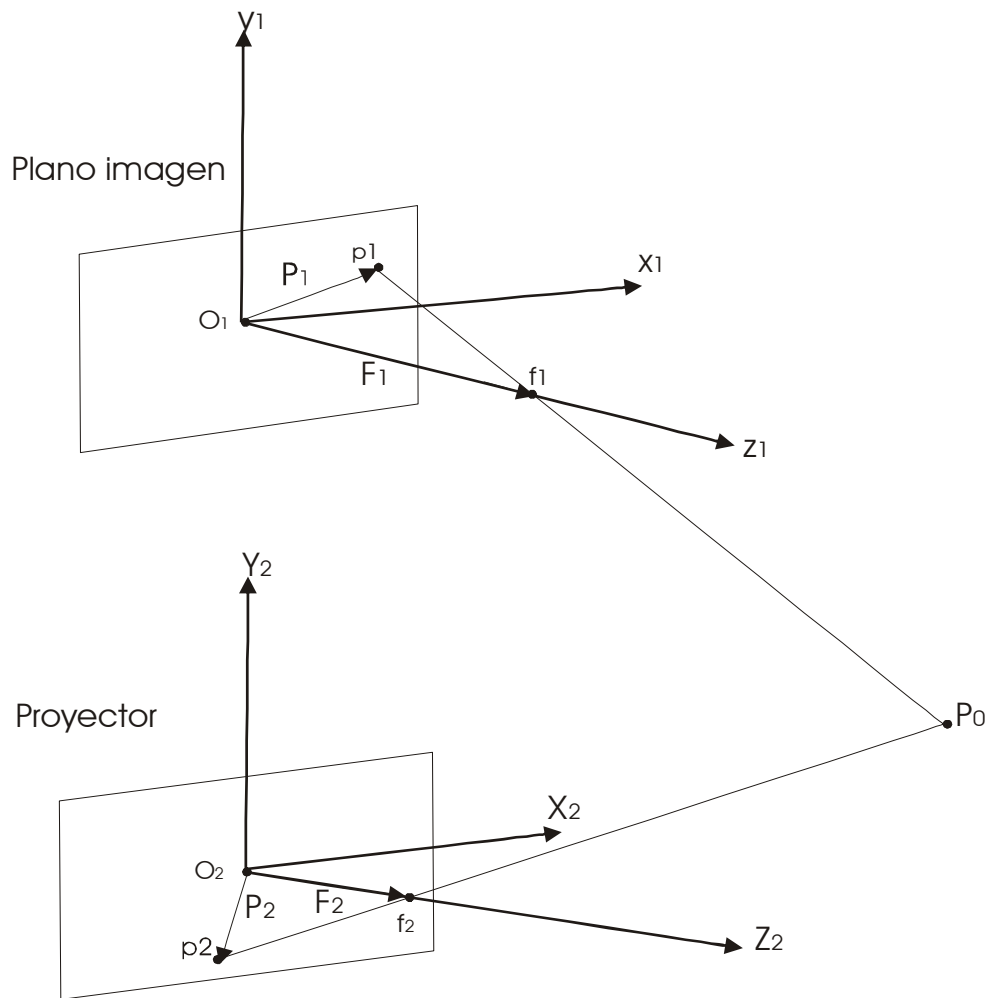


Fig.1.2 Geometría para sistema de medición de luz estructurada.

En el plano del proyector (sistema que genera el patrón regular a proyectar sobre la superficie) en forma análoga a lo anterior, se consideró un origen de coordenadas con la misma orientación y centrado con el plano imagen, cuyo origen se localiza en $O_2=(x',y',z')^t$ y suponen el punto focal en este plano localizado en $F_2=(0,0,f_2)^t$ que con respecto al plano de referencia del sistema O_1 esta localizado considerando la traslación como $F_2=(x_2, y_2, z_2 + f_2)$ por lo que para obtener las coordenadas de $P_2=(x_2,y_2,0)^t$ se tiene:

$$P_2 = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'+x_2 \\ y'+y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Por lo que considerando P_0 y F_2 se tiene para este caso:

$$P_2 = F_2 + \beta(P_0 - F_2)$$

$$\begin{bmatrix} x'+x_2 \\ y'+y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z'+f_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_0 - x' \\ y_0 + y_2 \\ z_0 - z' - f_2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Por lo que despejando de las ecuaciones (1.1) y (1.4) y simplificando se tiene:

$$z_0 = x' + \frac{f_1 f_2}{f_1 x_2 - f_2 x_1} (x' + x_2 - x_1 + \frac{z' x_2}{f_2}) \quad (1.5)$$

$$z_0 = x' + \frac{f_1 f_2}{f_1 y_2 - f_2 y_1} (y' + x_2 - y_1 + \frac{z' y_2}{f_2}) \quad (1.6)$$

En forma análoga se determinan las coordenadas para x_0 y y_0 únicamente conociendo las coordenadas del punto imagen (x_1, y_1) y las coordenadas del proyector (x_2, y_2) del punto respectivo además de f_1, f_2, x_2, y_2 y z_2 . La traslación y orientación del plano imagen quedan determinadas al calibrar el sistema basándose en coordenadas homogéneas[7] en las que puede ser expresado en una sola matriz la traslación, rotación, escalamiento y perspectiva. Se debe observar que z_0 se determina ya sea conociendo las coordenadas x_2 o las coordenadas y_2 .

Para relacionar la proyección de un punto sobre el objeto en la escena y la imagen capturada son como sigue: del proceso de calibración la matriz que relaciona la posición de los puntos objeto con la el sistema coordenado de la cámara esta dado, utilizando coordenadas homogéneas, por la matriz

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{111} & A_{112} & A_{113} & A_{114} \\ A_{121} & A_{122} & A_{123} & A_{124} \\ A_{131} & A_{132} & A_{133} & A_{134} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

En forma análoga para el sistema coordenada del proyector:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{211} & A_{212} & A_{213} & A_{214} \\ A_{221} & A_{222} & A_{223} & A_{224} \\ A_{231} & A_{232} & A_{233} & A_{234} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Realizando operaciones y ordenando términos se tiene:

$$(A_{111} - A_{131}x_1)x_0 + (A_{112} - A_{132}x_1)y_0 + (A_{113} - A_{133}x_1)z_0 = A_{134}x_1 - A_{114}x_1 \quad (1.9)$$

$$(A_{121} - A_{131}y_1)x_0 + (A_{122} - A_{132}y_1)y_0 + (A_{123} - A_{133}y_1)z_0 = A_{134}y_1 - A_{124}x_1 \quad (1.10)$$

$$(A_{211} - A_{231}x_2)x_0 + (A_{212} - A_{232}x_2)y_0 + (A_{213} - A_{233}x_2)z_0 = A_{234}x_2 - A_{214}x_1 \quad (1.11)$$

$$(A_{221} - A_{231}y_2)x_0 + (A_{222} - A_{232}y_2)y_0 + (A_{223} - A_{233}y_2)z_0 = A_{234}y_2 - A_{224} \quad (1.12)$$

Ordenando las coordenadas del punto imagen y las coordenadas del punto imagen como una matriz se obtiene:

$$PV = F \quad (1.13)$$

Donde cada matriz se expresa:

$$P = \begin{bmatrix} A_{111} - A_{131}x_1 & A_{112} - A_{132}x_1 & A_{113} - A_{133}x_1 \\ A_{121} - A_{131}y_1 & A_{122} - A_{132}y_1 & A_{123} - A_{133}y_1 \\ A_{211} - A_{231}x_1 & A_{212} - A_{232}x_2 & A_{213} - A_{233}x_2 \\ A_{221} - A_{231}y_2 & A_{222} - A_{232}y_2 & A_{223} - A_{233}y_2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} x_{p0} \\ y_{p0} \\ z_{p0} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{bmatrix} A_{134}x_{p1} - A_{114} \\ A_{134}y_{p1} - A_{124} \\ A_{234}x_{p2} - A_{214} \\ A_{234}y_{p2} - A_{224} \end{bmatrix}$$

Para la determinación de las coordenadas objeto, es decir, la matriz V de acuerdo al álgebra lineal la ecuación (1.13) es una ecuación normal [8] que cumple $P^t P V = P^t F$ por lo que puede determinarse que:

$$V = (P^t P)^{-1} P^t F \quad (1.14)$$

El supraíndice -1 indica inverso y t indica transpuesto. Un desarrollo más detallado se da en la referencia [9].

1.2 Métodos de luz estructurada, el problema de correspondencia.

Antes de ver en detalle algunos métodos de luz estructurada se debe remarcar que para todo este proceso debe existir la correspondencia precisa entre el punto imagen y el respectivo punto proyectado. Lo anterior se puede ver en la idea de las ecuaciones (1.5), (1.6) y (1.14) en que las coordenadas del punto objeto P_o , pueden determinarse a partir del conocimiento de las variables generales (Que para todos los puntos proyectados valen lo mismo) f_1, f_2 distancias focales, x_2, y_2, z_2 posición del proyector respecto a la cámara, pero además de las variables específicas de cada punto $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

El problema de la correspondencia es que con un solo punto no hay duda de cómo debe introducirse las variables específicas en las ecuaciones. Cuando se tienen por ejemplo dos puntos a y b es posible confundir la imagen del punto a con la del punto b y viceversa. Esto haría que las cantidades que se introducen en las ecuaciones serían incorrectas. Esto es, se deben usar las parejas de puntos:

$$\begin{aligned} P_{1a} = (x_{p1a}, y_{p1a}, 0) \quad \text{con} \quad P_{2a} = (x_{p2a}, y_{p2a}, 0) \\ P_{1b} = (x_{p1b}, y_{p1b}, 0) \quad \text{con} \quad P_{2b} = (x_{p2b}, y_{p2b}, 0) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Pero si por falta de cuidado o por confusión, evaluamos z_{p0} usando las parejas P_{1a} con P_{2b} y P_{1b} con P_{2a} , es obvio que se producirá un error importante. Esto aparentemente es trivial, pero es común que suceda si uno no se percató antes del problema. Esto es el problema de la correspondencia; debemos asegurarnos siempre que en las expresiones, las parejas de puntos imagen P_{1j} correspondan a su respectivo punto objeto P_{2j} . Esto no es meramente un problema de numeración, sino de identificación de cada punto imagen correcto a cada punto objeto.

Cuando se maneja una cantidad grande de puntos tal vez desde algunas decenas ya se puede complicar el problema; es muy común, sin embargo, llegar a tener cientos y pocos miles de puntos. En tal caso se hace relevante diseñar métodos para identificar los puntos objeto y sus correspondientes puntos imágenes. Este es el problema de correspondencia y es particularmente difícil de hacer cuando el arreglo de puntos objeto y su imagen son muy simétricos.

Esto es también importante cuando en la proyección de los puntos parte de ellos se oculta a la cámara o de plano se pierden por el tamaño finito del objeto bajo medición. En la Fig.1.3 vemos que el proyector presenta siete puntos *a, b, c, d, e, f* y *g*. Sin embargo, los puntos *c* y *b* están ocultos a la cámara y el punto *g* se pierde a lo lejos pues al objeto no alcanza a ser intersectado por este rayo. En la imagen aparecen los puntos *a, d, e* y *f*, sin embargo por el desconocimiento de otra información uno tendería a asignar a letras *a, b, c* y *d* o *b, c, d, e*, también *c, d, e, f* a los puntos siendo todas incorrectas.

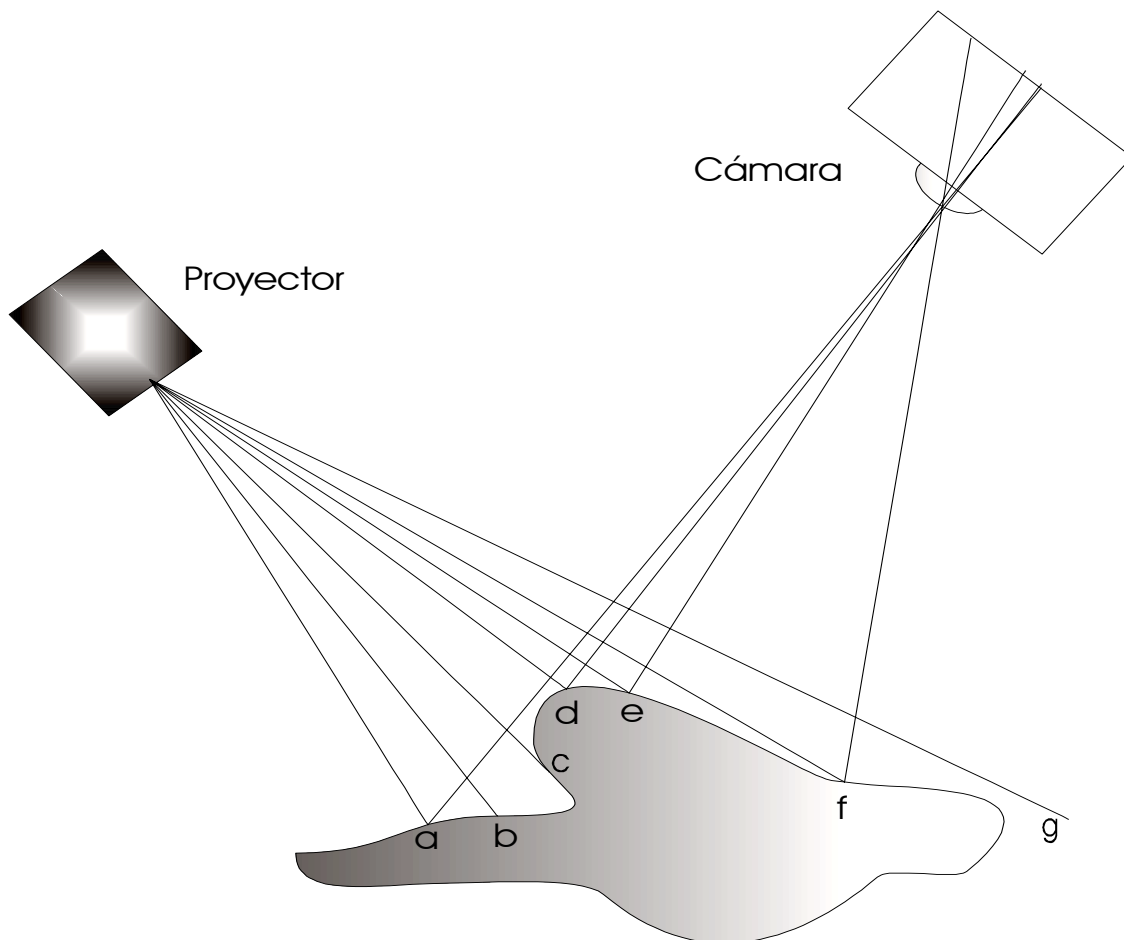


Fig.1.3 Ocultamiento de puntos para una cámara CCD de puntos proyectados sobre una superficie muy irregular.

Si se observa en la Fig.1.4, debe ser claro que a falta de otra indicación, no es posible decir cual punto imagen proviene de cada objeto. ¿ P_{1L} es imagen de P_{2A} o de P_{2B} ?

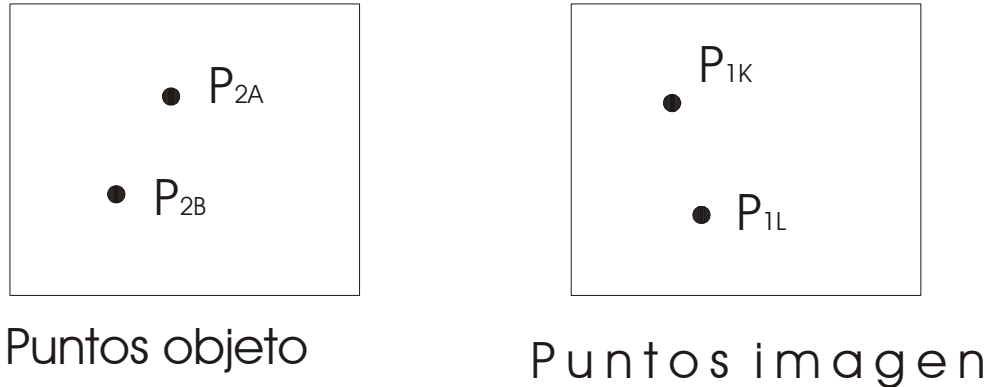


Fig.1.4 Esquema para mostrar la dificultad de asociar para un punto objeto su correspondiente punto imagen sin tener alguna indicación para ello.

1.3 Método de Posdamer-Altschuler.

Para este método [10] se propone proyectar una matriz $n \times n$ de puntos con haces de luz binarios, llamados así porque puede controlarse independientemente cada columna manteniéndola encendida o apagada formando un código binario de unos y ceros respectivamente, formando mascarar que se proyectan temporalmente para diferenciar una columna de puntos de sus vecinos cercanos (Fig.1.5), a partir de éste se dio la pauta para más desarrollos de codificación.

En la Fig. 1.5(a) se muestra el objeto que se quiere reconstruir. En este sistema primero se proyecta el patrón con todas las columnas encendidas y se toma como referencia (Fig.1.5(b)), posteriormente proyectar las demás mascarar de las cuales con la codificación que se tiene se determina a que columna corresponde para cada patrón proyectado con esto cada punto detectado tiene un código que permite determinar de que columna proviene. En la Fig.1.5(c) y (d) se muestra esquemáticamente, la región clara u oscura o encendido apagado, de acuerdo a la codificación binaria, que relaciona la zona del objeto para la cual se tiene su correspondiente imagen. Este método esta limitado a escenas estáticas por requerir tomar la imagen respectiva para cada mascarar proyectada, si existiera un movimiento en la escena entre dos patrones proyectados se genera un error de correspondencia.

Se puede extender a escenas dinámicas proyectando los diferentes patrones con diferente frecuencia pero utilizando n cámaras una para cada patrón proyectado permitiendo proyectarlos al mismo tiempo lo cual va generando un sistema cada vez más robusto. Al método se le realizan otra serie de mejoras pero lo anterior es la idea básica.

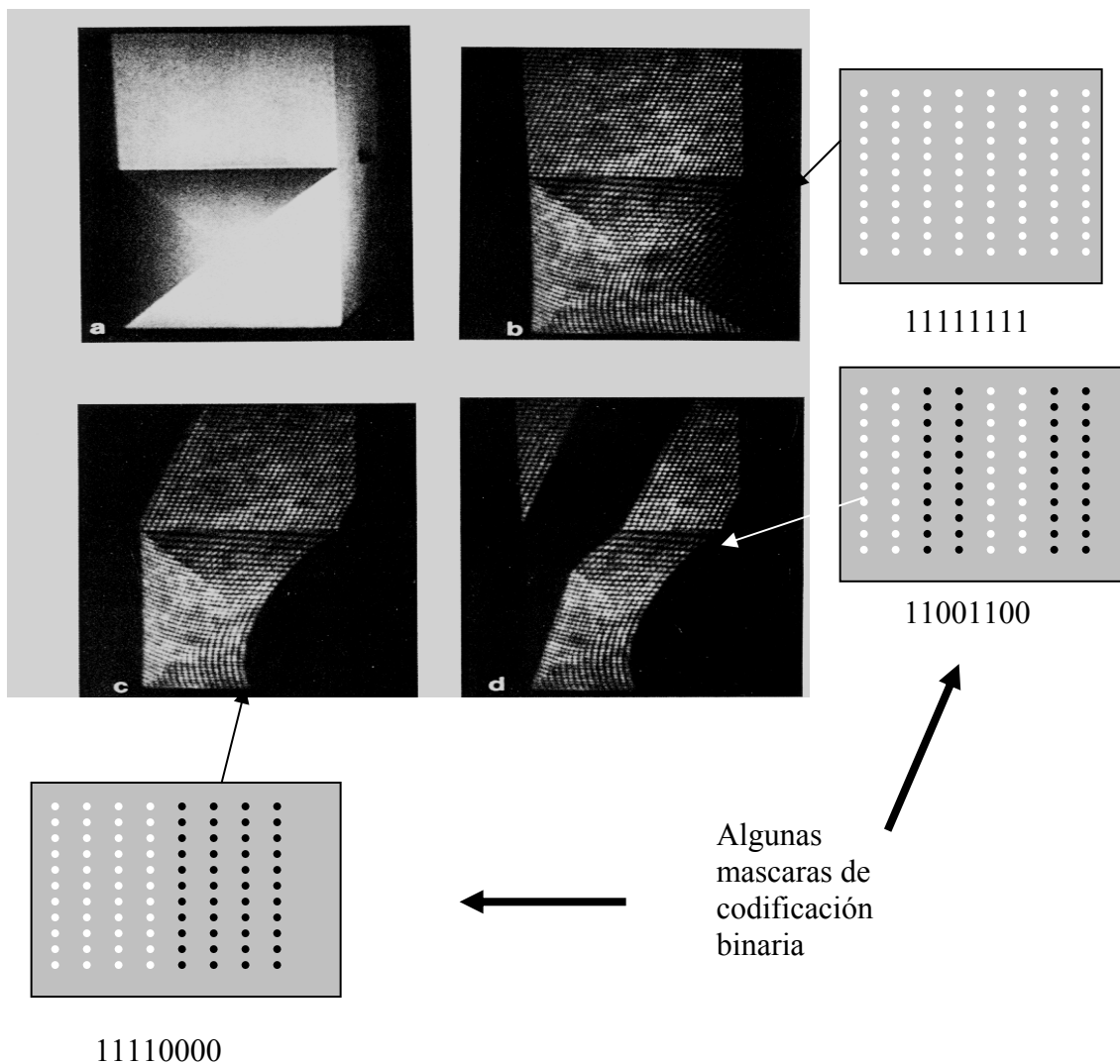


Fig.1.5 Patrones binarios proyectados sobre una superficie. (a) Objeto, (b) patrón de referencia, (c) máscara proyectada con codificación 11110000, (d) máscara proyectada con codificación 11001100 y en los rectángulos grises codificación para tres mascarar diferentes.

1.4 Método Griffin-Narasimhan-Yee.

Este método pretende determinar el mayor tamaño de la matriz de puntos que se puede proyectar para lo que suponen lo siguiente [11]:

1. La posición de coordenadas de un punto es codificada en base a la información de sus cuatro vecinos cercanos al norte, sur, este y oeste (Fig.1.6).
2. No se permite que dos diferentes puntos tengan la misma codificación, si así fuere, se tendría que perder esta información para no asociar las coordenadas de un punto en la escena a varios puntos en la imagen.
3. La información se codifica con una base fija de símbolos.
4. El mayor tamaño de matriz es de acuerdo a la resolución que se requiere.

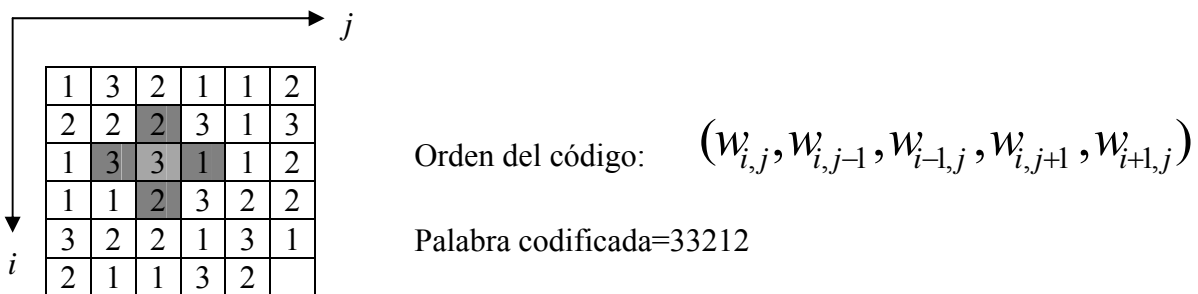


Fig.1.6 Ejemplo de codificación utilizando tres símbolos numéricos y se muestra los cuatro vecinos cercanos del símbolo 3 en el cuadro gris claro.

El grupo de Griffin demuestra que con una base b de símbolos (números letras, etc.), en este caso números, dada como $\{1,2,3\}$, se puede obtener la mayor matriz de puntos tomando el mayor vector horizontal (Vhm) y el mayor vector vertical (Vvm). Si se toma una base con tres elementos el vector Vhm se construye tomando los tripletes sin repetición que pueden formarse, por lo que el primer renglón esta dado como

$$f_{0j} = Vhm_i \tag{1.16}$$

Realizando las combinaciones de ternas de acuerdo a esta base de tres números se toma el primer elemento y se combina con los restantes para posteriormente hacer las combinaciones con el siguiente elemento de la base sin considerar el anterior. Con esta secuencia se garantiza que se tiene la máxima secuencia horizontal de combinaciones, donde i es el índice del renglón y varía como $i = 0 \dots longitud\ de\ Vhm$. El vector Vvm se construye tomando todos los pares de números que pueden formarse sin repetición. Para construir la matriz de codificación obteniendo cada elemento de esta, de acuerdo al desarrollo teórico dado por los autores de este método, esta dado como:

$$f_{ij} = 1 + ((f_{i-1,j} + Vvm_j) \bmod b) \tag{1.17}$$

$j = 0 \dots longitud\ de\ V_{vm}$. Así por ejemplo para una base de 3 números se tienen los siguientes vectores horizontal y vertical:

$$\begin{aligned} V_{hm} &= (33132131123122121113323222333) \\ V_{vm} &= (3121132233) \end{aligned} \tag{1.18}$$

Para obtener la siguiente matriz:

```

33132131123122121113323222333
33132131123122121113323222333
11213212231233232221321333111
33132131123122121113213222333
11213212231233232221321333111
22321323312311313332132111222
22321323312311313332132111222
11213212231233232221321333111
33132131123122121113323222333
33132131123122121113323222333
33132131123122121113323222333
    
```

Para esta matriz codificada se asocia para cada elemento de la base un color que para este caso se toman los colores rojo, verde y azul que se asocian a los números 1,2 y 3 respectivamente para tener el patrón que se muestra en la figura 1.7.

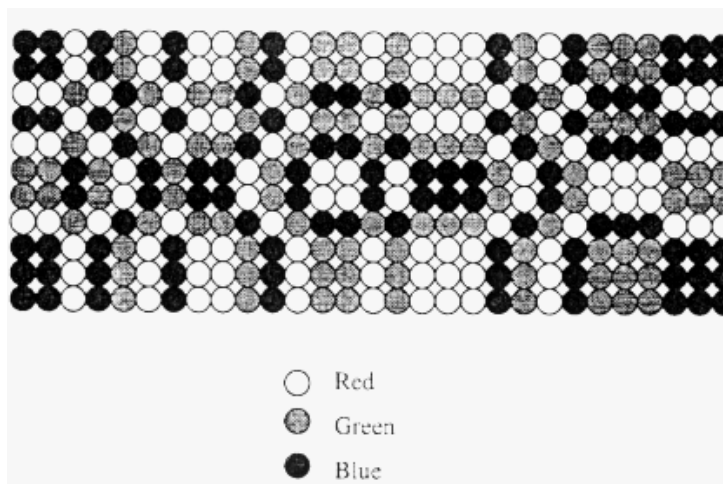


Fig.1.7 codificación de la base b de números $\{1,2,3\}$ asociando colores rojo, verde y azul a los números de la base respectivamente.

Si no se cuenta con cámara a color se tiene que trabajar con una base diferente de tal forma que se pueda asociar la codificación con imágenes en blanco y negro.

1.5 Maruyama-Abe.

El método consiste en proyectar líneas verticales múltiples (Fig.1.8) las cuales tienen cortes de tamaño aleatorio que se realizan para tener líneas cortas que satisfacen la condición de que la longitud debe estar en el intervalo $[L_0 - \Delta, L_0 + \Delta]$ donde L_0 es la longitud estándar y Δ es un número aleatorio[12].

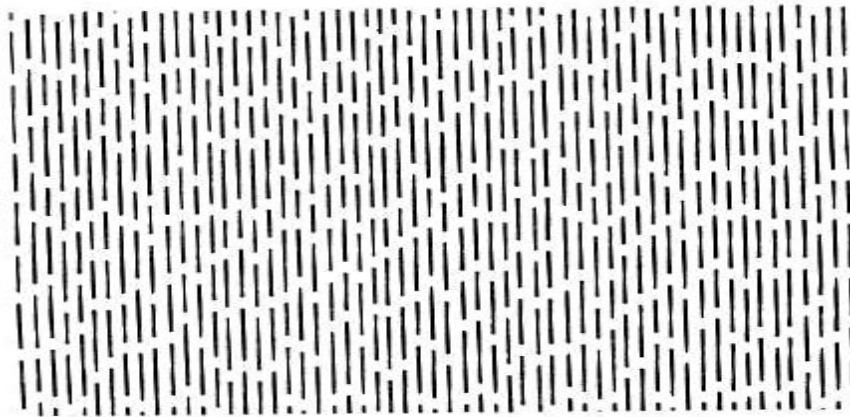


Fig1.8 Patrón proyectado compuesto por múltiples líneas verticales con cortes aleatorios.

La relación se realiza entre los extremos de segmentos de línea por los cortes a lo largo de las líneas epipolares (Línea que se obtiene al intersectar el plano formado por los puntos f_1 , f_2 y P_1 con el plano imagen, figura 1.2). El hecho de que se tengan cortes de tamaño aleatorio mas de un patrón puede estar relacionado con un segmento de imagen determinado (fig.1.9) y para este método se clasifican los segmentos de imagen como sigue: (1) segmentos que se relacionan solamente un elemento del patrón con su respectiva imagen, (2) Segmentos que únicamente se pueden relacionar utilizando relaciones adyacentes con sus vecinos cercanos para los que no se puede realizar el apareamiento de segmentos debido al ruido o a la discontinuidad en la superficie y (3) otros casos. El grupo de Maruyama considera que las líneas epipolares se pueden calcular horizontalmente ya que sólo se examina la dirección x para relacionar la imagen con el patrón respectivamente. El método permite encontrar información 3D únicamente para superficies relativamente suaves.

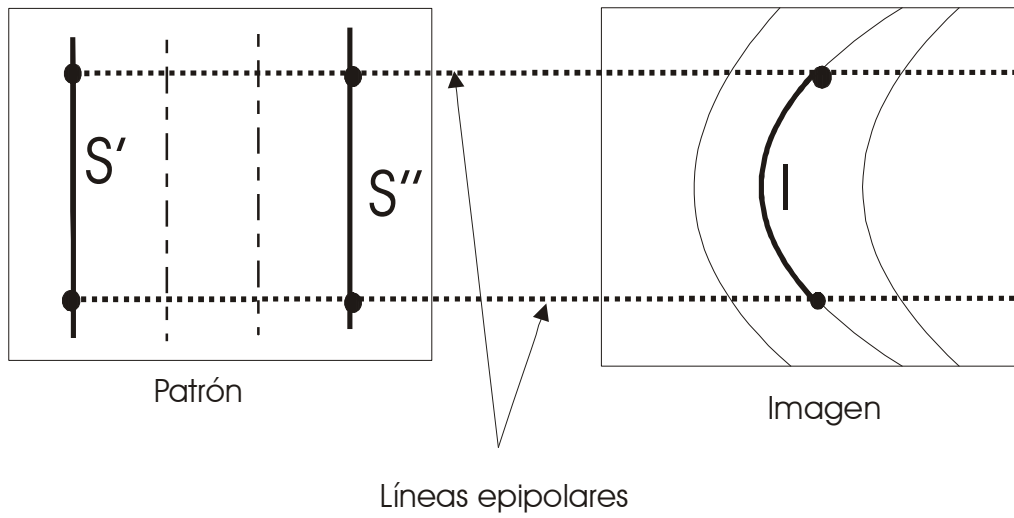


Fig.1.9 Usando un segmento del patrón como en la Fig.1.8, se muestran las líneas epipolares para ejemplificar como para los segmentos s' y s'' les correspondería una misma imagen.

1.6 Propuesta de utilizar rejillas de difracción rectangulares como sistema de proyección.

Lo que se propone en este trabajo es utilizar como sistema de proyección rejillas de difracción rectangulares cuyo patrón generado es un arreglo rectangular de puntos para el caso ideal dentro del modelo clásico de difracción aunque para el caso general se tienen que realizar correcciones por distorsión. Con estas rejillas, es posible incrementar el número de puntos proyectados superponiendo dos o tres de estas rejillas logrando un mayor muestreo sobre la superficie a medir (Fig.1.10). También para resolver el problema de correspondencia se hace incidir sobre las rejillas de difracción en un mismo punto dos haces de luz láser de diferente longitud de onda y se identifica la posición del orden cero de difracción para ambas longitudes de onda, resultando que para esta posición el orden cero coincide para ambos haces. Con respecto a este orden cero se realiza la correspondencia entre puntos objeto y puntos imagen.

Ahora, para encontrar las coordenadas de los puntos proyectados sobre la superficie a medir, en los métodos descritos se habla de intersección entre dos rectas, una que se construye del proyector al punto proyectado sobre la superficie y del reflejo de este punto al detector (Cámara CCD), sin embargo, puede ocurrir que no exista intersección entre dichas rectas teniendo indeterminaciones por no tener solución el sistema de ecuaciones, por lo que se propone tomar la distancia mínima entre estas rectas.

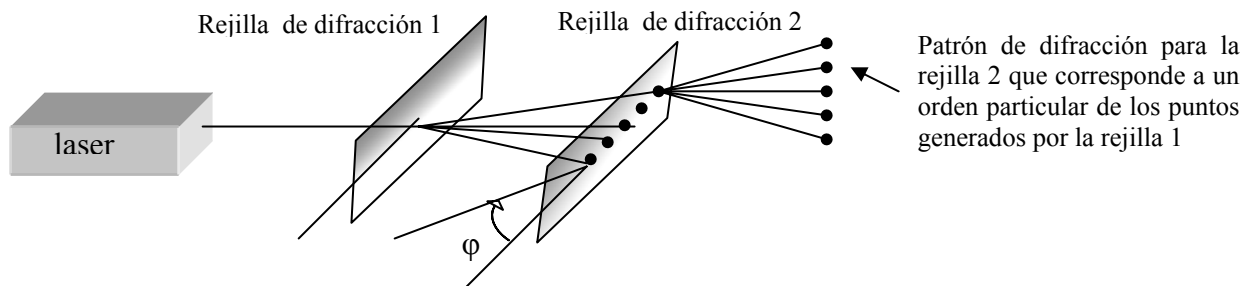


Fig.1.10 Superposición de dos rejillas de difracción para generar un mayor número de puntos y por lo tanto tener un mayor muestreo.

Como puede observarse el problema de correspondencia es un factor importante en los métodos de luz estructurada que se puede resolver formulando métodos de codificación que permitan identificar la imagen de cada punto objeto en la escena para evitar confusión y se logre en forma precisa esta correspondencia.

En los métodos que se mencionan antes, la codificación puede ser tan compleja como se quiera o llevar mucho tiempo de procesamiento por lo que la propuesta que presento, considero que se desarrolla un método de codificación sencillo y el tomar distancias mínimas permite determinar las posiciones de los puntos proyectados sobre la superficie a medir en forma objetiva.

C A P Í T U L O 2

Teoría

Se desarrollan las bases teóricas para obtener información tridimensional las cuales incluyen el método de triangulación, que se aplica a los métodos de luz estructurada. Se da la propuesta de utilizar como sistema de proyección rejillas de difracción rectangulares holográficas, se introducen las bases teóricas fundamentales de difracción así como un análisis de la distorsión que se genera al trabajar con el caso no paraxial recalando que esta distorsión es inherente a los procesos de difracción al trabajar con términos de orden superior y que esto no corresponde a los defectos o aberraciones de los sistemas ópticos formadores de imágenes. Se muestra el comportamiento de incrementar el número de puntos proyectados al cruzar dos o más rejillas girando una con respecto a otra un cierto ángulo. Para sistemas ópticos formadores de imágenes también se presenta un análisis en la distorsión que se tiene en la lente de la cámara CCD.

2.1 Condiciones para la intersección entre rectas.

Consideremos la recta L que pasa por P y por Q (Fig.2.1). Esta recta es paralela al vector $\bar{v} = \overline{PQ}$, por lo tanto dado un punto $R = (x, y, z) \in L$, se debe cumplir $\overline{PR} = t\bar{v}$, es decir, $R - P = t\bar{v}$ con $t \in \mathcal{R}$ por lo que se define la ecuación vectorial de la recta como $\bar{R} = (x, y, z) = \bar{P} + t\bar{v}$ con $t \in \mathcal{R}$ y como se puede elegir cualesquiera dos puntos (distintos) de una recta para obtener una ecuación implica que la ecuación de una recta no es única.

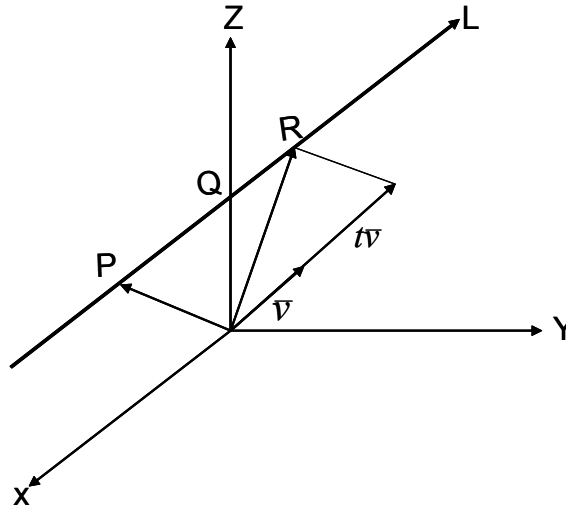


Fig.2.1 Esquema para obtención de la ecuación vectorial de una recta.

Para calcular la intersección entre dos rectas L_1 y L_2 (Fig.2.2), se igualan sus ecuaciones:

$$P + tv = Q + sw \quad (2.1)$$

Donde $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{w}, \bar{v}$ son conocidas y t, s las incógnitas.

Cuya solución al sistema:

$$\begin{cases} tv_1 - sw_1 = q_1 - p_1 \\ tv_2 - sw_2 = q_2 - p_2 \\ tv_3 - sw_3 = q_3 - p_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

v_1, v_2, v_3 las componentes del vector \bar{v} y w_1, w_2, w_3 las componentes del vector \bar{w} , q_1, q_2, q_3 las componentes del vector \bar{Q} , p_1, p_2, p_3 las componentes del vector \bar{P} .

Esto nos determina el punto de intersección entre L_1 y L_2 . Como el sistema es lineal se tienen las siguientes posibles soluciones:

1. Si hay solución única, las rectas se intersectan en un solo punto.
2. Si hay infinitas soluciones: las rectas coinciden.
3. Si no hay solución: las rectas no se intersectan.

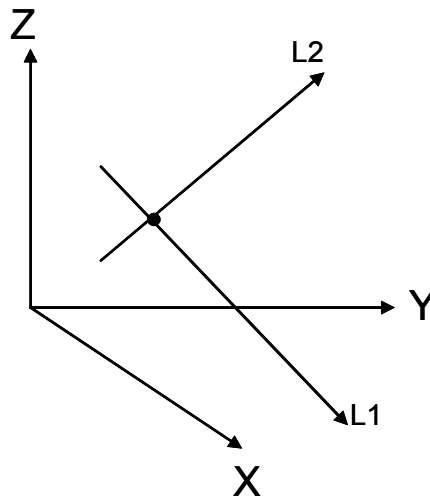


Fig. 2.2 Esquema para mostrar la intersección entre rectas.

Desde luego, el primer caso es el que interesa en la aplicación de los métodos de luz estructurada para obtener información tridimensional al aplicar triangulación, siendo esto relevante por el hecho de que en los métodos descritos, desde mi punto de vista, no se menciona como se resuelven los casos 2 y 3 para los cuales, por no tener solución o soluciones infinitas el sistema de ecuaciones, la información para obtener información 3D se pierde por no poder determinar las coordenadas de los puntos proyectados sobre la superficie.

2.2 Modelo matemático para obtener información 3D.

Experimentalmente el sistema de proyección se realiza con rejillas de difracción generando puntos con un arreglo rectangular (para aproximación paraxial) que se proyectan sobre la superficie a medir, con una cámara CCD que captura, para cada punto objeto en la escena su respectiva imagen. Primero se proyectan los puntos sobre un plano horizontal para obtener puntos de referencia cuyas coordenadas están bien determinadas, así mismo la posición de la rejilla es fija y se conocen sus coordenadas. Entonces, con cada una de las posiciones de los puntos proyectados y la posición de la rejilla se construye una primera recta $L1$. También en el plano imagen de la CCD se conocen las coordenadas de las imágenes de cada punto proyectado en el plano horizontal y por lo tanto, con esta información se puede construir una segunda recta $L2$ (Fig. 2.3).

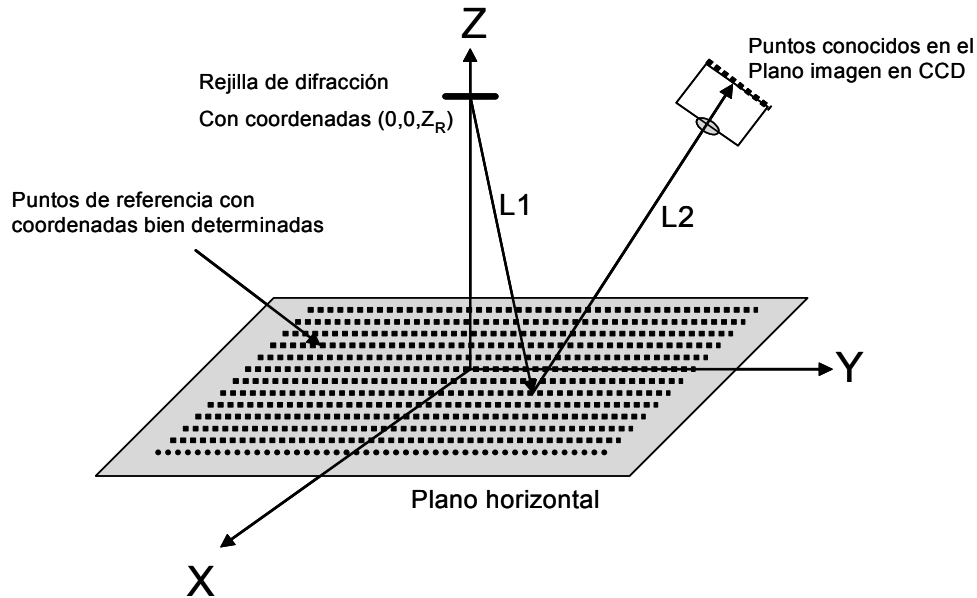


Fig.2.3 Construcción de rectas $L1$ y $L2$ conociendo las coordenadas de posición de la rejilla de difracción, de los puntos proyectados en el plano horizontal y las coordenadas de sus respectivas imágenes en el plano de la CCD.

Para un objeto cuya forma se desea medir, se coloca sobre el plano de referencia y lo que se tiene es que los puntos proyectados cambian de posición por la forma de la superficie, tanto en la escena como en el plano imagen, por lo que en forma análoga de lo descrito antes, con la construcción de la recta $L1$ de la rejilla de difracción al punto proyectado sobre la superficie y $L3$ de un punto proyectado sobre la superficie y el respectivo punto en el plano imagen de la CCD (Fig. 2.4), para después determinar la intersección de estas rectas para encontrar las coordenadas de los puntos proyectados sobre la superficie a medir.

Siguiendo el método de triangulación se realiza el siguiente modelo para obtener información tridimensional en la medición de superficies (Fig.2.5). tomando las siguientes condiciones:

1. La rejilla de difracción se coloca perpendicular a la dirección Z con coordenadas fijas.
2. El pinhole o centro de la cámara CCD esta en el plano ZY con un ángulo θ de inclinación con respecto al eje Z .
3. El rayo principal que va de la superficie a la cámara CCD que tiene la característica de que al pasar por el centro de una lente no se desvía (En aproximación de lentes delgadas).

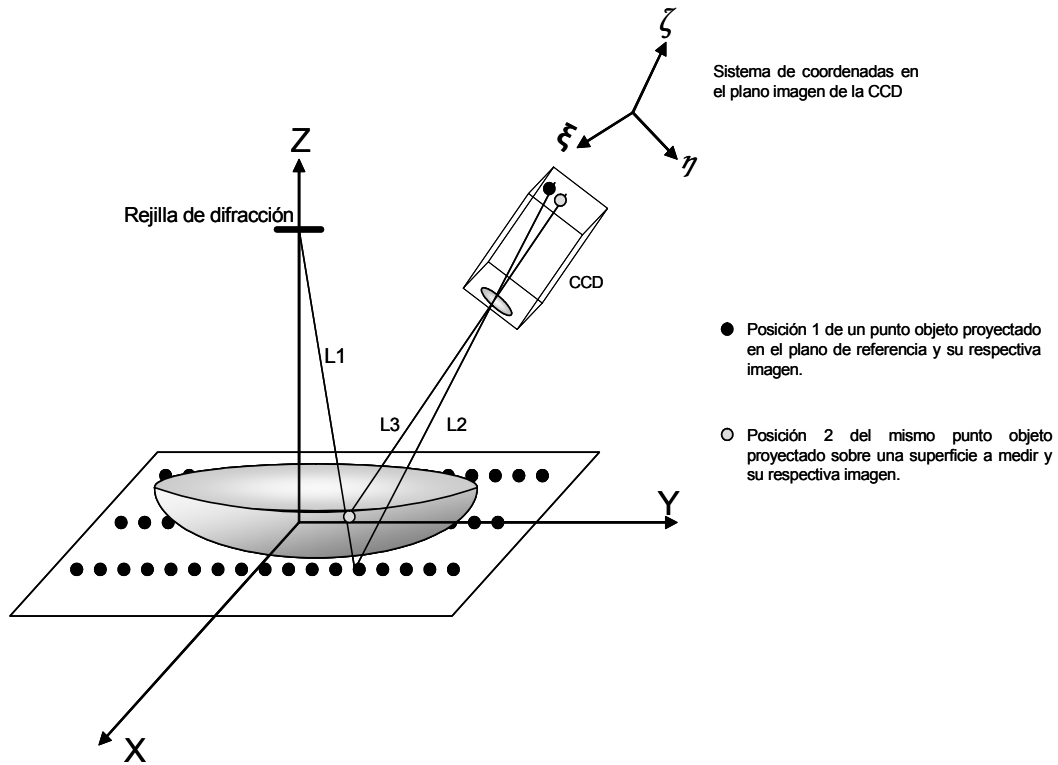


Fig.2.4 Cambio de posición de un punto proyectado en el plano de referencia al proyectarse sobre una superficie con determinada forma, tanto en la escena como en el plano imagen.

Conociendo dos puntos que corresponden a la posición de la rejilla de difracción con coordenadas $(0,0,Z_R)$ y los puntos proyectados sobre la superficie a medir con coordenadas (x_0, y_0, z_0) se encuentra la ecuación de la recta $L1$ de la rejilla a la superficie a medir dada por:

$$\frac{x - x_o}{x_n - x_o} = \frac{y - y_0}{y_n - y_0} = \frac{z - z_R}{z_R - z_0} \quad (2.3)$$

Para un punto sobre la superficie y uno en la cámara CCD se construye la recta $L3$ (Fig.2.4):

$$\frac{x - x_c}{\xi - x_0} = \frac{y - y_c}{\eta - y_0} = \frac{z - z_c}{\zeta - z_c} \quad (2.4)$$

Con $(0, y_c, z_c)$ coordenadas del centro de la lente (Pinhole o diafragma de la lente) de la cámara CCD y $(\xi, \eta, 0)$ coordenadas en el plano de detección de la CCD.

El método en general, pretende determinar las coordenadas de los puntos (X, Y, Z) proyectados sobre la superficie a medir conociendo las coordenadas $(X, Y, 0)$ de un plano de referencia en el sistema XYZ , y las coordenadas $(\xi, \eta, 0)$ en el plano imagen de la cámara CCD además de los parámetros de posicionamiento de la rejilla de difracción y de la cámara CCD, para encontrar las ecuaciones de las rectas dadas por (2.3) y (2.4) y de la intersección de cada par correspondiente de estas se determinan dichas coordenadas.

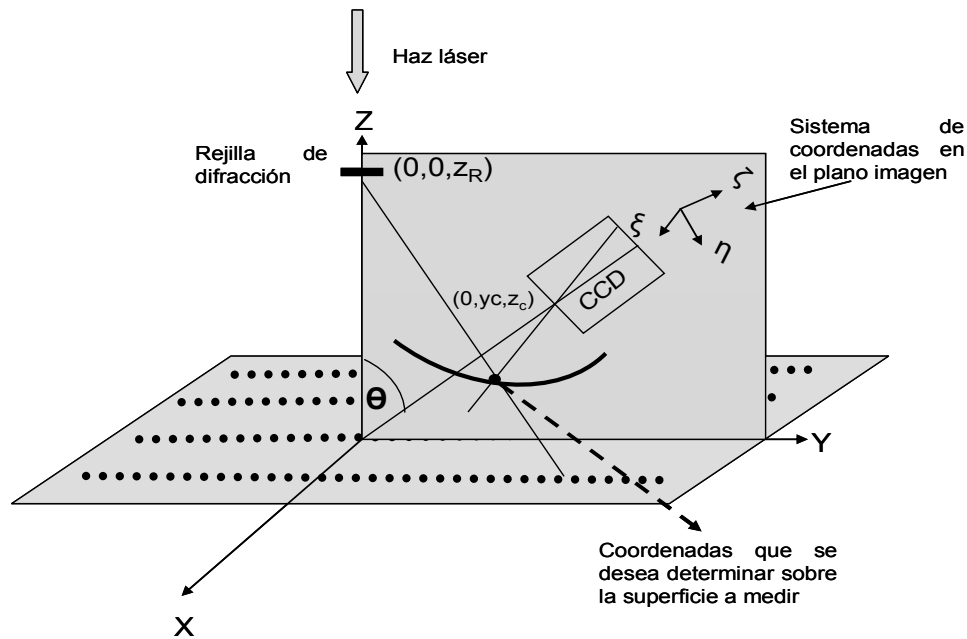


Fig.2.5. Esquema del modelo matemático para determinar la ecuación de las rectas para los diferentes puntos correspondientes a los diferentes órdenes de difracción.

2.3 Características de difracción.

El hecho de tener un sistema de proyección de puntos generado por rejillas de difracción y de acuerdo a los métodos de luz estructurada, se debe tener un patrón con un arreglo regular, sin embargo el trabajar con patrones de difracción para el caso clásico se puede decir que se logra la condición de obtener un patrón de puntos regular por considerar únicamente términos de difracción de primer orden pero para el caso general se tienen que considerar términos de orden superior lo que implica que se presenten aspectos como distorsión en el patrón generado para lo cual es necesario una corrección para poder conocer las posiciones precisas de los diferentes órdenes de difracción. Por ello se realiza un breve desarrollo de los aspectos teóricos difracción.

La difracción es un fenómeno óptico que se produce cuando la luz encuentra un obstáculo en su trayectoria. Es observable cuando el obstáculo es suficientemente pequeño. Sommerfeld[13] definió la difracción como la propagación no rectilínea de la luz que no se puede interpretar a partir de las leyes de la reflexión y de la refracción.

Grimaldi, en el siglo XVII, fue el primero que observó fenómenos de difracción: al hacer pasar un haz de luz a través de una abertura hecha sobre una pantalla observó que al proyectar el haz sobre otra pantalla, el paso de la zona iluminada a la sombra no era abrupto (como indica la propagación rectilínea). Años después, Fresnel realizó el primer intento serio de explicar los fenómenos de difracción (1818), basándose en unas modificaciones arbitrarias del principio de Huygens.

En 1882, Kirchhoff propuso la explicación de los fenómenos de difracción en términos de la teoría escalar. Su teoría tiene inconvenientes formales de carácter matemático que fueron solucionados por Sommerfeld en 1894, introduciendo algunas modificaciones en la teoría anterior. La teoría escalar [13] es suficientemente rigurosa para explicar la mayor parte de los resultados experimentales microscópicos. Pese a que se trata de una simplificación que no tiene en cuenta el carácter vectorial de los campos electromagnéticos, la teoría escalar funciona con éxito cuando las aberturas son más grandes que la longitud de onda de la luz y cuando las distancias de observación son suficientemente grandes. En estas condiciones, la polarización del campo electromagnético no es una información relevante y, por lo tanto se puede prescindir del formalismo vectorial.

El caso más sencillo de tratar teóricamente la difracción, se produce cuando tanto la fuente de luz como la pantalla donde se observa el patrón están muy alejados del objeto que genera la difracción. Si además se considera que la fuente puede describirse como una magnitud escalar, de acuerdo a lo descrito antes, el tratamiento teórico del fenómeno se simplifica. En el caso de la difracción de Fraunhofer, el campo difractado por una abertura, es proporcional a la transformada de Fourier de la función de abertura [13][14]. La perturbación total que llega a un punto P en el plano de observación esta dada por [15]:

$$E(x, y, z) = C \iint_A \exp[ik(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta \quad (2.5)$$

Donde las coordenadas de la fuente P_0 y P en la pantalla son $(x_0, y_0, z_0), (x, y, z)$ respectivamente y $Q(\xi, \eta, 0)$ representa un punto arbitrario dentro de la abertura; los parámetros se muestran en la Fig.2.6 y están dados como:

$$l = \frac{x}{r'}, m = \frac{y}{r'}, l_0 = -\frac{x_0}{r'}, m_0 = \frac{-y_0}{r'}, p = l - l_0, q = m - m_0$$

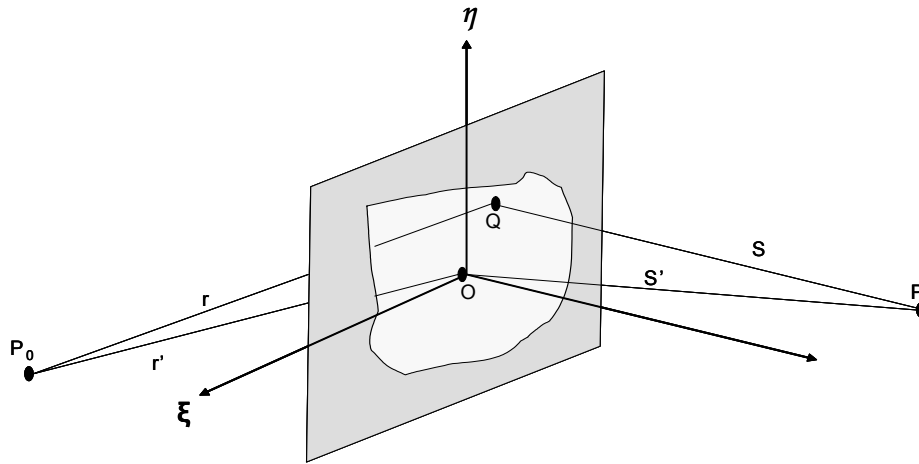


Fig. 2.6. Campo de la fuente P_0 que llega a una abertura cualquiera tomando un elemento Q que contribuye para obtener el campo difractado en P .

La ecuación (2.5) implica que no hay una distribución de amplitud a lo largo del frente de onda en el plano de la abertura. Si por el contrario, en la abertura se tiene una distribución de amplitud en el frente de onda, la ecuación (2.5) resulta en:

$$E(x, y, z) = C \iint_A A(\xi, \eta) e^{ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (2.6)$$

Con $C = \frac{iA}{\lambda r's'} e^{-ik(r'+s')}$ y A el área de la abertura. La ecuación (2.6) indica que el campo difractado es la transformada de Fourier de la función de abertura $A = (\xi, \eta)$.

2.4 Ejemplos de patrones de difracción de Fraunhofer.

Aplicando la difracción de Fraunhofer a una abertura rectangular de lados $2a$ (horizontal) y $2b$ (vertical), en el caso de que el eje óptico del colimador utilizado para tener haces paralelos o a infinito, sea normal al plano de la abertura y la fuente este en dicho eje, se obtiene la siguiente distribución de intensidades:

$$I_p = Ca^2 b^2 \left[\frac{\text{sen}(k\alpha'a)}{k\alpha'a} \right]^2 \left[\frac{\text{sen}(k\beta'b)}{k\beta'b} \right]^2 \quad (2.7)$$

Con $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ el número de onda y λ la longitud de onda de la luz monocromática usada y los demás parámetros se describen en la sección anterior. La función de intensidad presenta mínimos cuando $\text{sen}(k\alpha'a) = m\pi$, o $\alpha' = m\lambda/a$, excepto para $m=0$ que hay un máximo central. A m se le conoce como orden de difracción. Entre cada dos mínimos hay un máximo.

De la distribución de intensidad en la pantalla se deduce que entre más pequeña es la abertura más se separan los mínimos y máximos sobre la pantalla, por lo tanto, el patrón se alarga y se observa más claramente. También a mayor longitud de onda, mayor separación entre mínimos y por tanto se observa mejor el patrón de difracción (Fig.2.7).

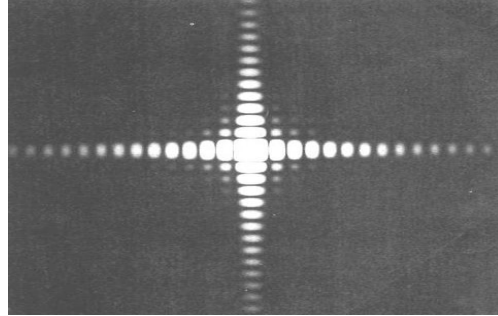


Fig.2.7 Patrón de difracción para una abertura rectangular de lados a y b

En el caso de una rendija podemos suponer $a \ll b$, por lo que el patrón correspondiente al eje vertical está muy concentrado, y sólo observamos claramente separados los máximos y mínimos en la dirección de menores dimensiones de la rendija. El patrón observado será una serie de bandas de pequeña altura correspondientes a los máximos de diferentes órdenes. La anchura de un máximo dado vendrá dada por la separación entre los mínimos adyacentes a él. Así, la anchura del máximo central ($m=0$) es la separación angular entre los mínimos correspondientes a $m=1$ y $m=-1$ (Fig.2.8).

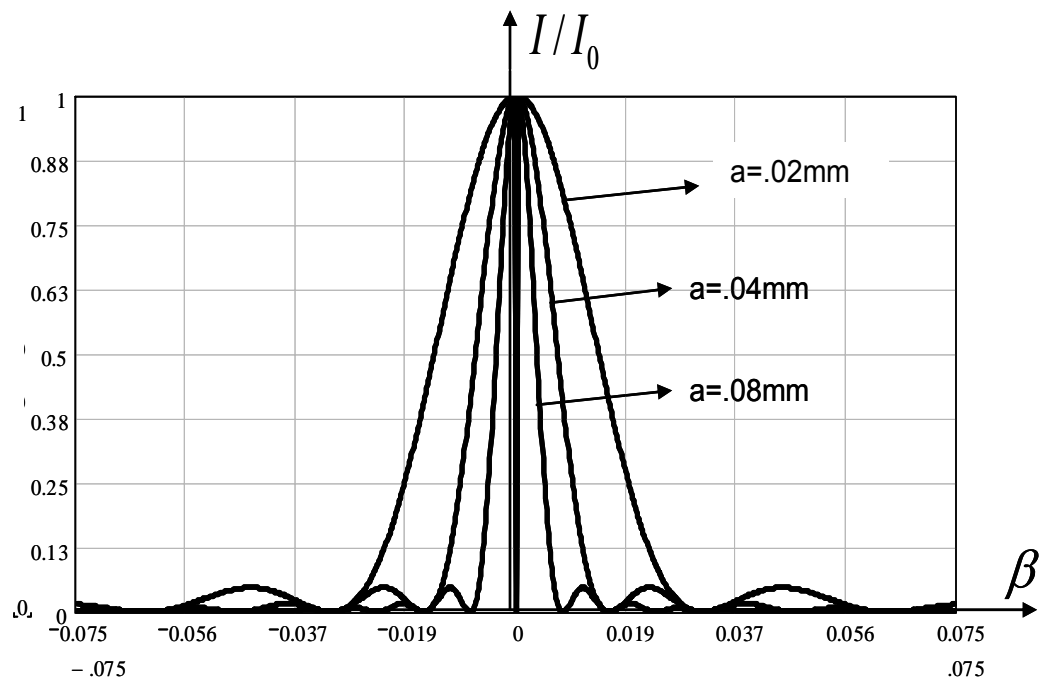


Fig. 2.8 Curvas de intensidad para aberturas de diferente tamaño y con la misma longitud de onda λ .

Si tenemos un número N de rendijas como objeto difractante, y cada rendija de tamaño a y separadas una distancia $2d$, la intensidad resultante sobre el plano de observación se obtiene sumando sus contribuciones las N rendijas resultando:

$$I_p = C \left[\frac{\text{sen}(k\alpha'a)}{k\alpha'a} \right]^2 \left[\frac{\text{sen}(Nk\beta'b)}{k\beta'b} \right]^2 \tag{2.8}$$

El término que depende del tamaño a de la abertura de las rendijas tiene una frecuencia menor que el que depende de su separación d , así que actúa como envolvente moduladora de la intensidad. Si N es muy grande y d pequeño, tenemos una red de difracción. En la Fig.2.9 vemos ambos términos y su superposición.

Sobre el plano de observación, veremos una serie de máximos de menor intensidad conforme aumenta su orden, alejándonos del máximo central. Examinando el término en d , se presentan dos tipos de máximos, los llamados principales que ocurren si numerador y denominador se anulan simultáneamente, y los secundarios, cuando el numerador se hace máximo.

Los máximos principales se dan para valores de $\alpha' = \frac{m\lambda}{2d}$, y los secundarios están situados entre dos mínimos del numerador, es decir, $\alpha' = \frac{3\lambda}{4Nd}, \frac{5\lambda}{4Nd}, \dots, \frac{2N-3\lambda}{4Nd}$. Estos máximos secundarios tienen una intensidad mucho menor que los principales, por lo que generalmente se apreciarán los principales solamente. La separación entre los máximos principales depende, del número de rendijas de la red. Para los máximos principales se tiene que $\alpha' = \text{sen}\theta = \frac{m\lambda}{2d}$ o bien $2d\text{sen}\theta = m\lambda$ la cual es la ecuación de la red, que relaciona la dispersión angular con respecto al orden cero con la longitud de onda y la separación entre rendijas.

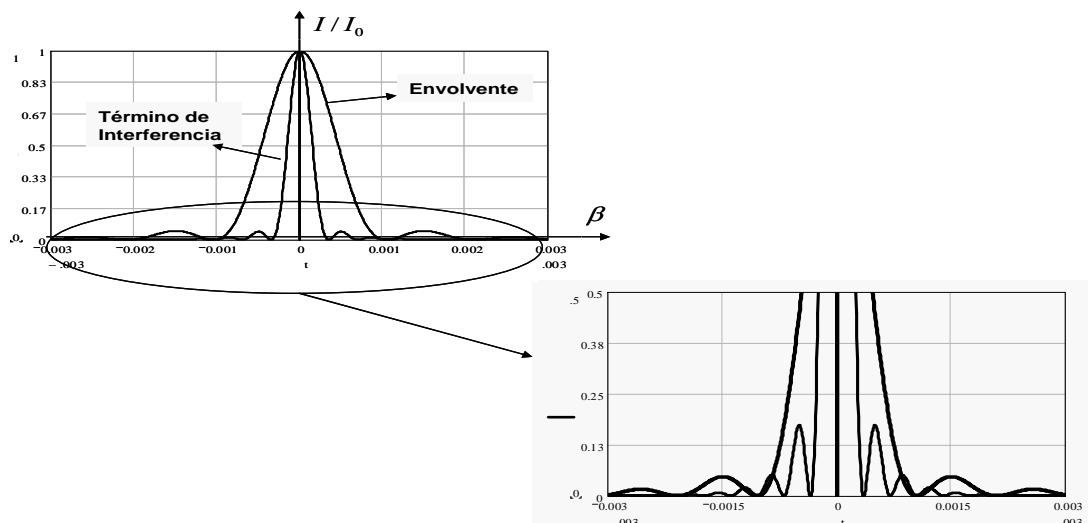


Fig.2.9 Superposición de los términos mostrando las curvas de intensidad para N rendijas.

2.5 Redes bidimensionales.

Una pantalla opaca con un número de pequeñas aberturas ubicada en los puntos de intersección de dos familias de líneas paralelas y equidistantes, mutuamente perpendiculares forma una red bidimensional (Fig. 2.10).

Considerando el caso de un conjunto bidimensional regular de elementos difractores bajo iluminación de ondas planas incidentes normalmente. Cada elemento pequeño se comporta como una fuente coherente.

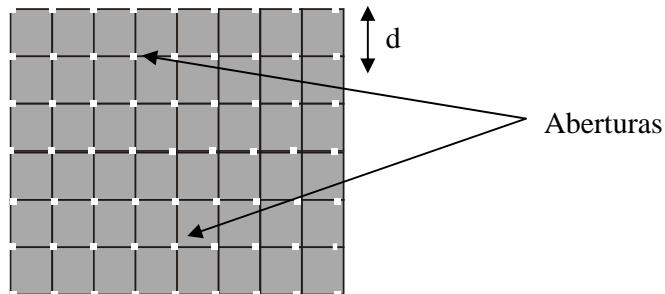


Fig.210 Esquema de una red de difracción bidimensional.

Debido a la periodicidad regular de la red de emisores cada onda emergente tiene una relación de fase fija con respecto a las otras [16]. Habrá ciertas direcciones en las que se tenga interferencia constructiva es decir, máximos de intensidad, desde luego esto ocurre cuando las distancias desde cada elemento difractor a un punto arbitrario P en la pantalla de observación, son tales que las ondas están casi en fase al llegar. El fenómeno se puede observar mirando a una fuente puntual a través de una pieza de tejido cuadrado, una tela delgada. La imagen difractada es efectivamente la superposición de dos patrones de red perpendiculares entre sí (Fig.2.11).

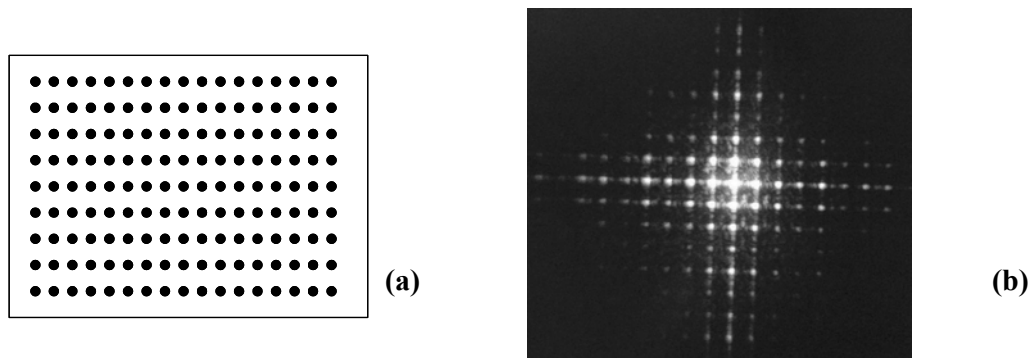


Fig.2.11 (a) Rejilla de difracción rectangular. (b) Patrón de difracción resultante para esta rejilla, fotografía tomada en el laboratorio de Óptica de la Facultad de Ciencias UNAM.

2.6 Aberraciones del campo difractado.

La notación que se presenta corresponde a la utilizada por Joseph W. Goodman[17] para no tener confusión. La integral de difracción de Rayleigh-Sommerfeld se utiliza ampliamente en la solución de problemas de interés práctico. Si únicamente se toma en cuenta los dos primeros términos de la expansión binomial de la cantidad l , (que es la distancia del elemento difractado a la pantalla como se describe en [17][18], de la integral de Rayleigh-Sommerfeld se tiene:

$$U(x_2, y_2; z) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} U_0(x_1, y_1; 0) x \frac{z}{l} \frac{\exp(i2\pi \hat{l})}{\hat{l}} dx_1 dy_1 \quad (2.9)$$

Se utiliza un sistema de coordenadas escalado donde todas las variables espaciales son normalizadas por la longitud de onda de la luz por lo que $\hat{x} = \frac{x}{\lambda}$, $\hat{y} = \frac{y}{\lambda}$, $\hat{z} = \frac{z}{\lambda}$. Las variables reciprocas en el espacio de la transformada de Fourier precisamente son los cosenos directores α , β de los vectores de propagación de las componentes de la onda plana dados como: $\alpha = \frac{\hat{x}}{r}$, $\beta = \frac{\hat{y}}{r}$, $\gamma = \frac{\hat{z}}{r}$.

Teniendo restricciones en el tamaño de la abertura y el ángulo de difracción. Si se consideran todos los términos de la expansión binomial de l la ecuación anterior se modifica como sigue:

$$U(\alpha, \beta; r) = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} U_0(x, y; \alpha, \beta) x \exp[-i2\pi(\alpha x + \beta y)] dx dy \quad (2.10)$$

Con

$$U_0(x, y; \alpha, \beta) = T(x, y; 0) \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \exp(i2\pi \hat{W}) \quad (2.11)$$

Donde α y β son los cosenos directores de un punto de observación arbitrario, $T(x, y; 0)$ la función de abertura y un término de fase. \hat{W} son los términos de la expansión binomial [19] de tercer orden y superiores. Igualando coeficientes término a término con la función de aberración de frente de onda para el caso de sistemas con simetría de revolución se expresa en serie de potencias esta dada por:

$$\begin{aligned} \hat{W} = & \left[\hat{W}_{000} \right] + \left[\hat{W}_{200} \rho^2 + \hat{W}_{020} \alpha^2 + \hat{W}_{111} \rho a \cos(\phi' - \phi) \right] \\ & + \left[\hat{W}_{400} \rho^4 + \hat{W}_{040} \alpha^4 + \hat{W}_{131} \rho a^3 x \cos(\phi' - \phi) + \hat{W}_{222} \rho a^2 \cos^2(\phi' - \phi) + \hat{W}_{220} \rho a^2 \right] \\ & + \left[\hat{W}_{311} \rho^3 \alpha \cos^2(\phi' - \phi) \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Donde cada término corresponde desde el orden cero hasta términos de orden superior. Con esto se tiene una expresión para los coeficientes de aberración en términos del diámetro de las aberturas, distancia de observación y el apropiado parámetro de campo [20] de tercer orden. Estas aberraciones son diferentes a los originados por imperfecciones del sistema formador de imágenes, pues son inherentes al proceso de difracción.

Con las bases anteriores se puede observar empíricamente Fig.2.12(a) que para el caso paraxial los ordenes de difracción forman un arreglo lineal de puntos igualmente espaciados, si se modifica ligeramente el ángulo de incidencia el patrón de difracción no cambia en su forma funcional como lo predice la teoría simple de Fourier.

Si tomamos una rejilla con un mayor número de líneas mas finas Fig. 2.12(b) se tiene un patrón de difracción como un arreglo lineal pero que no están igualmente espaciados por lo que se tiene un caso no paraxial. Si ahora se coloca una rejilla con una cierta inclinación (2.12(c)), es decir que el haz incide en forma oblicua, el patrón se proyecta como una parábola en el plano de observación y también corresponde a difracción no paraxial que no pueden ser modelados exactamente con técnicas simples de Fourier. En un análisis teórico-experimental realizado por E. Harvey[21], se muestra que el término de distorsión afecta significativamente la posición de los órdenes de difracción.

Entonces para la aproximación paraxial, la proyección de un patrón de difracción sobre una pantalla perpendicular al eje óptico a una distancia L se tendrá un arreglo rectangular (Fig.2.13(a)) de los m, n órdenes difractados cuya distancia radial esta determinada por:

$$r_{mn} = L \frac{\lambda}{d} (m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

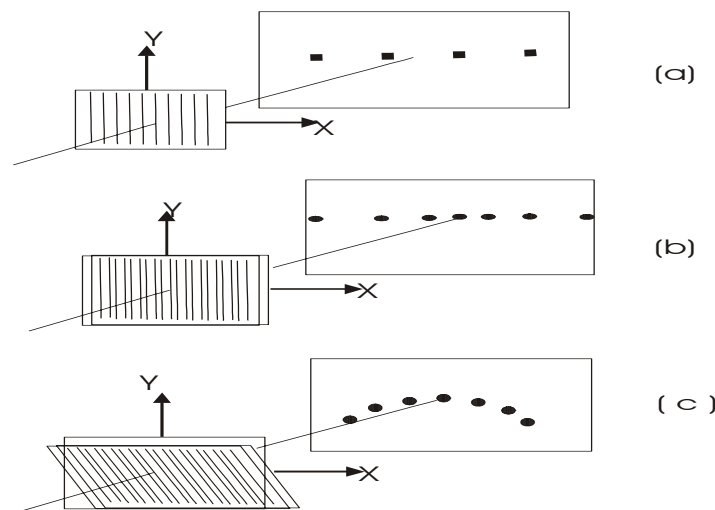


Fig. 2.12 (a) difracción paraxial. (b) Difracción no paraxial con una rejilla con un mayor número de líneas y (c) Difracción no paraxial de un haz que incide sobre una rejilla en forma oblicua.

Con d el periodo de la rejilla, m y n los ordenes de difracción y λ la longitud de onda del haz incidente. Ahora para el caso general de incidencia oblicua (Fig.2.13 (b)) se tiene que la distancia radial esta dada como:

$$r_{mn} = L \frac{\lambda}{d} \left\{ \frac{m^2 + n^2}{1 - \left[\left(\frac{m\lambda}{d} \right)^2 + \left(\frac{n\lambda}{d} \right)^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

El propio Harvey, demostró tales predicciones, en el apéndice A se da un desarrollo para obtener dichas ecuaciones y explicar el porque se da esta distorsión.

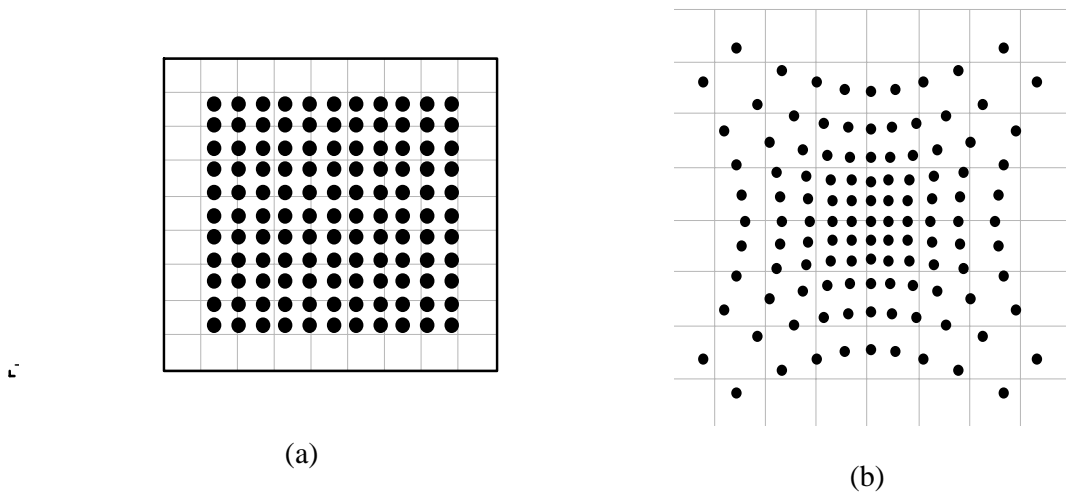


Fig.2.13. (a) Patrón de difracción para el caso paraxial. (b) Patrón de difracción para una rejilla con mayor número de aberturas presentando distorsión que corresponde al término \widehat{W}_{311} que corresponde al caso no paraxial.

2.7 Aberraciones en sistemas ópticos.

A continuación hacemos una descripción tratamiento general de la teoría de aberraciones geométricas [22], para el caso de sistemas con simetría de revolución. La aberración de un rayo se define como aquella en que un punto en el plano objeto tiene una posición P_1 en el plano imagen que difiere del que corresponde a la óptica gaussiana. Un punto P_0 tiene una imagen en un punto en el plano imagen. A nivel paraxial, su imagen ideal debería en P_1^* , por lo que la aberración de rayo resulta en un vector $\delta_1 = \overline{P_1^* P_1}$ (Fig.2.14).

Si se considera un frente de onda que pasa por O_0' cumplirá, si no existen aberraciones, que debe coincidir en el plano imagen con una esfera S centrada en el punto imagen P^* , llamada esfera de referencia (Fig. 2.15).

Si se toman Q y \bar{Q} como los puntos de intersección de P_1 y P_1' con la esfera de referencia S y el frente de onda W , se tiene que la longitud de camino óptico $\Phi = [\bar{Q}Q]$ es llamada la aberración de la onda. A esta longitud de camino óptico se le conoce como función característica (De acuerdo a la función característica de Hamilton) dada como:
 $\Phi = V(X_0, Y_0, 0; X, Y, Z) - V(X_0, Y_0, 0; 0, 0, D_1)$. Donde (X_0, Y_0) son las coordenadas de P_0 y (X, Y, Z) las coordenadas de Q .

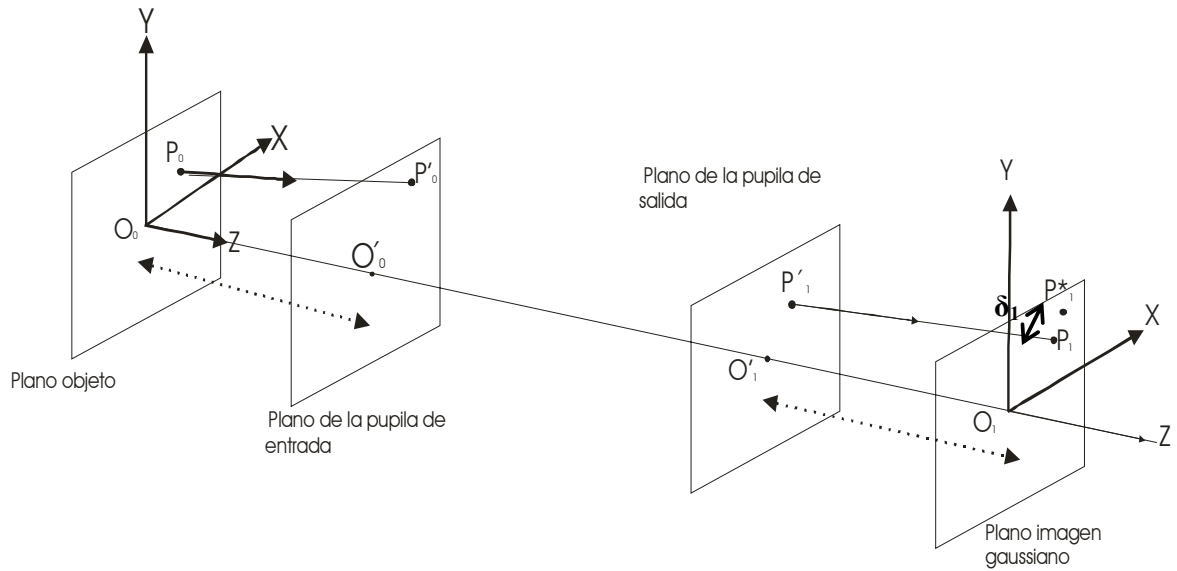


Fig.2.14 Plano objeto, plano imagen y planos de las pupilas de entrada y salida para el análisis de la aberración de un rayo.

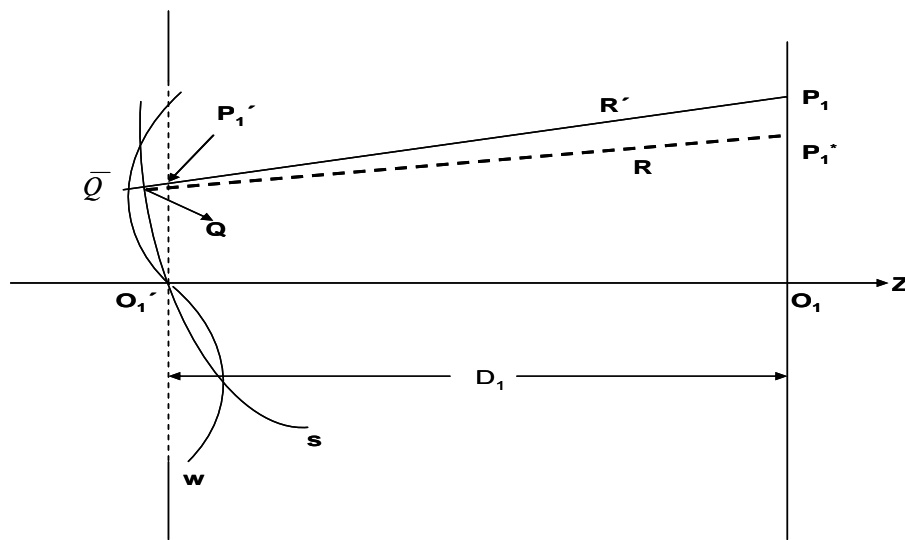


Fig. 2.15 geometría para mostrar el frente de onda con aberración y el rayo con aberración.

Con esta función característica aplicada a un punto V, se realiza un análisis de tal forma que Φ tenga la dependencia $\Phi = \Phi(X_0, Y_0; X, Y)$ para determinar que las coordenadas de la aberración de rayo estén dadas.

Tomando en cuenta la simetría, Φ depende de cuatro variables con las siguientes posibles combinaciones $X_0^2 + Y_0^2$, $X^2 + Y^2$ y $X_0X + Y_0Y$. Para este caso las componentes de la aberración de rayo son:

$$\begin{aligned} X_1 - X_1^* &= \frac{R'}{n_1} \frac{\partial \Phi}{\partial X'} \\ Y_1 - Y_1^* &= \frac{R'}{n_1} \frac{\partial \Phi}{\partial Y'} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si se realiza una transformación a coordenadas polares se tiene:

$$\begin{aligned} X_0 &= r_0 \cos \theta_0, & X &= r \cos \theta \\ Y_0 &= r_0 \sin \theta_0, & Y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por lo que Φ es una función de r_0, r, θ_0 y θ únicamente por ser invariante ante rotación con respecto al eje del sistema. Entonces la función de aberración Φ en estas coordenadas se expresa como función de los siguientes productos escalares: $r_0^2 = X_0^2 + Y_0^2$, $r^2 = X^2 + Y^2$, $r_0 \cdot r = X_0X + Y_0Y$ de los vectores $r_0(X_0, Y_0)$ y $r(X, Y)$. Con este resultado, si se realiza una expansión en serie de potencias con respecto a las cuatro coordenadas [25], la serie contiene términos pares por lo que:

$$\Phi = C(X_0^2 + Y_0^2) + \Phi^{(4)} + \Phi^{(6)} + \dots \quad (2.17)$$

Con C una constante y $\Phi^{(2k)}$ un polinomio de grado $2k$. Cada término de una potencia particular representa una aberración de onda de orden $2k$.

Para generalizar lo realizado antes, Shchwarzchild [22] aplica lo que denomina como perturbación Eikonal, donde introduce ciertas variables, dentro de los límites de aproximación de la óptica gaussiana, se tienen valores constantes para cada rayo que pasa por algún sistema óptico. Con estas consideraciones se toman en cuenta términos mayores al cuarto orden en la expansión en serie de la función característica. A estas variables especiales les llama variables de Seidel que son definidas como nuevas unidades de longitud en el plano objeto y en el plano imagen, así como unidades de longitud entre el plano de la pupila de entrada y de salida por lo que la función de aberración queda en términos de las variables de Seidel: $\Phi(X_0, Y_0; X_1', Y_1') = \phi(x_0, y_0; \xi, \eta)$. Las componentes para el rayo con aberraciones está dado por:

$$\begin{aligned}x_1 - x_0 &= -\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} + O(D_1 \mu^5) \\y_1 - y_0 &= -\frac{\partial \phi}{\partial \eta_1} + O(D_1 \mu^5)\end{aligned}\tag{2.18}$$

Sin embargo, resulta extremadamente laborioso realizar los cálculos para ordenes mayores al cuarto por esto se restringe a la teoría de Seidel[22][23].

2.8 Aberraciones de tercer orden o de Seidel.

De la sección anterior las variables involucradas se presentan con las siguientes combinaciones:

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \rho^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2, \quad k^2 = x_0 \xi_1 + y_0 \eta_1.\tag{2.19}$$

Entonces en la expresión $\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(4)} + \Psi^{(6)} + \dots$. El término $\Psi^{(4)}$ se puede expresar:

$$\Psi^{(4)} = \frac{1}{4} A r^4 - \frac{1}{4} B \rho^4 - C k^4 - \frac{1}{2} D r^2 \rho^2 + E r^2 k^2\tag{2.20}$$

Con A,B,C,..... constantes. Aplicado a la aberración de onda para ordenes menores a cuatro se tiene:

$$\Phi^{(4)} = -\frac{1}{4} B^4 - C k^4 - \frac{1}{2} D r^2 \rho^2 + E r^2 k^2 + F \rho^2 k^2\tag{2.21}$$

Sustituyendo (18) en (15) se tiene la expresión para las componentes de la aberración del rayo de orden menor a cuatro:

$$\begin{aligned}\Delta^{(3)} x &= x_1 - x_0 = \frac{n_1 \lambda_1}{D_1} (X_1 - X_1^*) \\&= x_0 (2Ck^2 - Er^2 - F\rho^2) + \xi_1 (B\rho^2 + Dr^2 - 2Fk^2) \\ \Delta^{(3)} y &= y_1 - y_0 = \frac{n_1 \lambda_1}{D_1} (Y_1 - Y_1^*) \\&= y_0 (2Ck^2 - Er^2 - F\rho^2) + \eta_1 (B\rho^2 + Dr^2 - 2Fk^2)\end{aligned}\tag{2.22}$$

Los coeficientes A,B,C,.... corresponden a las diferentes aberraciones. Un caso particular que es de interés en este trabajo es el término de distorsión $E \neq 0$ y considerar que los demás términos no están presentes es decir que sean cero se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta^{(3)} x &= 0 \\ \Delta^{(3)} y &= -E y_0^3\end{aligned}\tag{2.23}$$

Entonces la distancia no es proporcional entre objeto e imagen por lo que las líneas que estén en posiciones diferentes a las centrales se curvarán como se muestra en la Fig. Si $E > 0$ se tiene distorsión de barril, si $E < 0$ se tiene distorsión de corsé (Fig. 2.16).

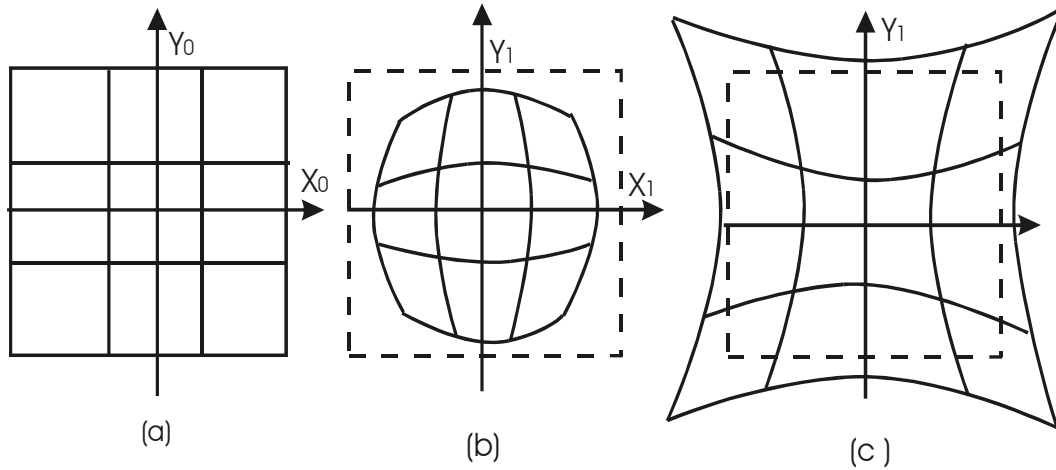


Fig. 2.16 Esquema mostrando los casos para: (a) Objeto del que se toma la imagen. (b) Imagen para $E > 0$, distorsión de barril. (c) Imagen para $E < 0$, distorsión de corsé.

Si en la ecuación (2.22) elevamos al cuadrado y sumamos se obtiene la relación en coordenadas radiales lo que permite determinar los coeficientes E de distorsión y M de amplificación dada como:

$$R = R_0 M - ER_0^3 \tag{2.24}$$

Con R coordenadas radiales en el plano imagen, R_0 coordenadas radiales en el, plano objeto. El término M corresponde a la amplificación transversal dada por $M_x = \frac{x}{x_0}$ en la dirección x , en

forma análoga en la dirección y $M_y = \frac{y}{y_0}$.

C A P Í T U L O 3

Dispositivo Experimental

Se presentan las adecuaciones que son necesarias para aplicar el método de medición de superficies por proyección de puntos, iniciando en lo que consiste el método en general, para después particularizar cada aspecto del método como la determinación de los centroides de los puntos imagen, determinación de la posición de la cámara CCD para tener mayor sensibilidad en el cambio de posición de los puntos imagen debido al cambio de altura dependiendo de la forma de la superficie, calibración del arreglo de rejillas de difracción para encontrar las coordenadas de los puntos proyectados en el plano de referencia, determinación de la distancia mínima entre rectas, evaluación de la distorsión así como la utilización de los programas *Math Cad* y *Origin* como apoyo para semi-automatizar el manejo de la información que nos permite realizar la medición de la superficie.

3.1 Arreglo experimental.

En la Fig.3.1 se muestra el esquema del sistema de proyección de un patrón regular generado por tres rejillas de difracción las cuales se giran una con respecto a otra hasta encontrar un arreglo cuadrado de puntos con la finalidad de determinar sus posiciones en forma sencilla. Se utilizan dos láseres de diferente longitud de onda de tal forma que se pueda localizar las coordenadas del punto donde se localiza el orden cero de difracción para ambas longitudes de onda, que coinciden en dicho punto. Antes de pasar por las rejillas los haces laser se hace coincidir su trayectoria hacia un espejo plano de primera superficie para ello se obliga a pasar por un divisor de haz para después dirigirlos sobre las rejillas de difracción. La proyección de los puntos (órdenes de difracción) se realiza primero sobre un plano horizontal de una placa de vidrio 500mm^2 , cuya superficie se pinto en blanco mate para favorecer la reflexión difusa, que sirve como referencia para realizar la calibración inicial del proyector. Con respecto a las coordenadas que corresponde al orden cero de difracción para ambas longitudes de onda, la correspondencia se realiza de los puntos proyectados sobre la superficie a medir con sus respectivas imágenes en el plano de detección de la cámara CCD. La cámara CCD tiene una cierta inclinación con respecto a la dirección Z del sistema de coordenadas centrado en el plano de referencia para tener mayor sensibilidad en el cambio de posición de las coordenadas de los puntos proyectados sobre la superficie a medir dependiendo de su forma (Fig.3.2). La posición de la CCD es tal que su origen de coordenadas de su plano de detección coincida con el origen de coordenada del plano de referencia y este contenida en el plano YZ. Las características de elementos experimentales se dan en la tabla 3.1.

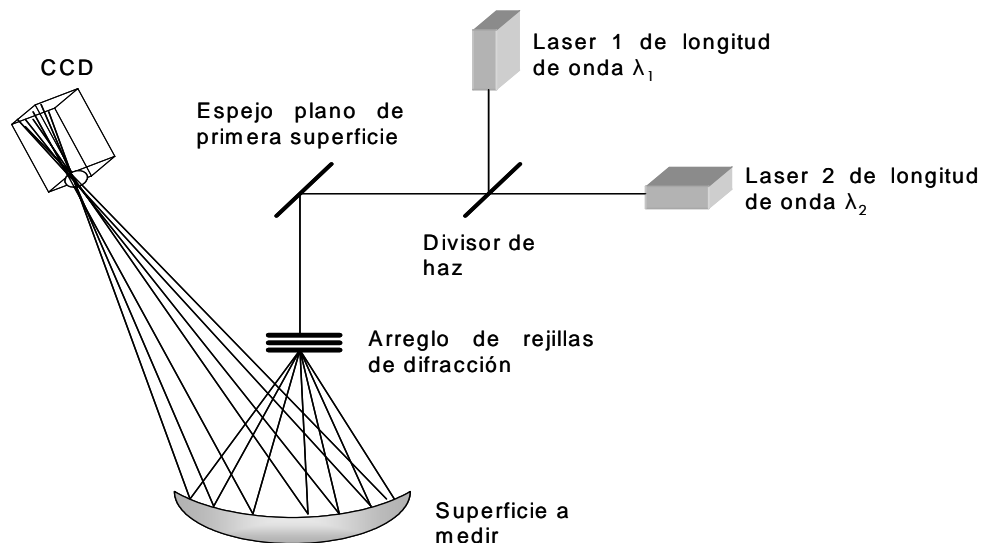


Fig. 3.1 Esquema del Arreglo experimental del método de medición de superficies por proyección de puntos.

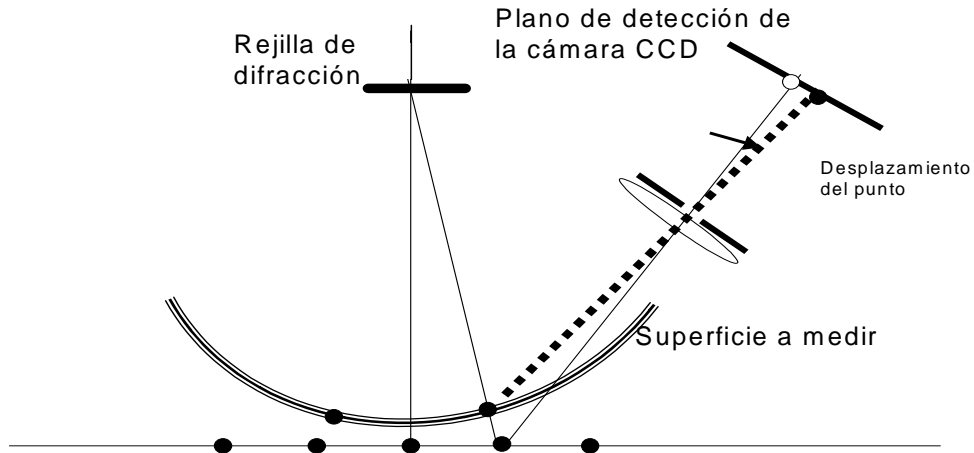


Fig.3.2 Cambio de posición en el plano imagen para un punto objeto particular dependiendo de la forma de la superficie.

Tabla 3.1

No.	Elemento o dispositivo experimental	Características	Función
1	Láser rojo He-Ne. Diodo láser verde.	$\lambda=632.8\text{nm}$ $\lambda=533\text{nm}$	Incidir en rejilla de difracción para generar patrón de puntos
2	Platina con ajustes de tilt.	Realiza ajustes de inclinación en dos direcciones <i>XY</i> con tornillos micrométricos.	Alinear el láser rojo de He-Ne
3	Montura para espejo	Realiza ajustes de inclinación en tres direcciones <i>XYZ</i> con tornillos micrométricos	Alinear diodo láser
4	Divisor de haz	-----	Hacer coincidir los haces de los láseres en el espejo plano en un mismo punto.
5	Espejo plano de primera superficie.	Realiza ajustes de inclinación. Tamaño 25 x 33 mm	Desviar los haces láser hacia el arreglo de rejillas de difracción.
6	Platina giratoria	Parker	Alinear los puntos proyectados con el arreglo de píxeles en el monitor de la PC girando el arreglo de rejillas de difracción
7	Platina para posicionar cámara CCD	Realiza ajustes de posición en tres direcciones <i>XYZ</i> y rotación de la cámara.	Alinear el origen de coordenadas de la cámara CCD con el origen de coordenadas del plano de referencia.
8	Cámara CCD	SONY XC-ST70 monocromática Área de sensado (HxV): 8.8x6.6mm; lente con iris Marca Computar, f=16mm	Registro de las imágenes.
9	Rejilla de difracción.	Holográfica de transmisión, 6.8 μm de espaciado entre líneas.	Generar patrón de difracción de proyección.

3.2 Orientación de la cámara CCD.

La posición de la cámara CCD, referido a la rotación de esta con respecto al eje óptico de la lente de la CCD, es importante para determinar la correspondencia entre puntos objeto y puntos imagen ya que para diferentes orientaciones de la CCD para un punto objeto en particular la posición de su respectivo punto imagen depende de esto como se muestra en la Fig.3.3.

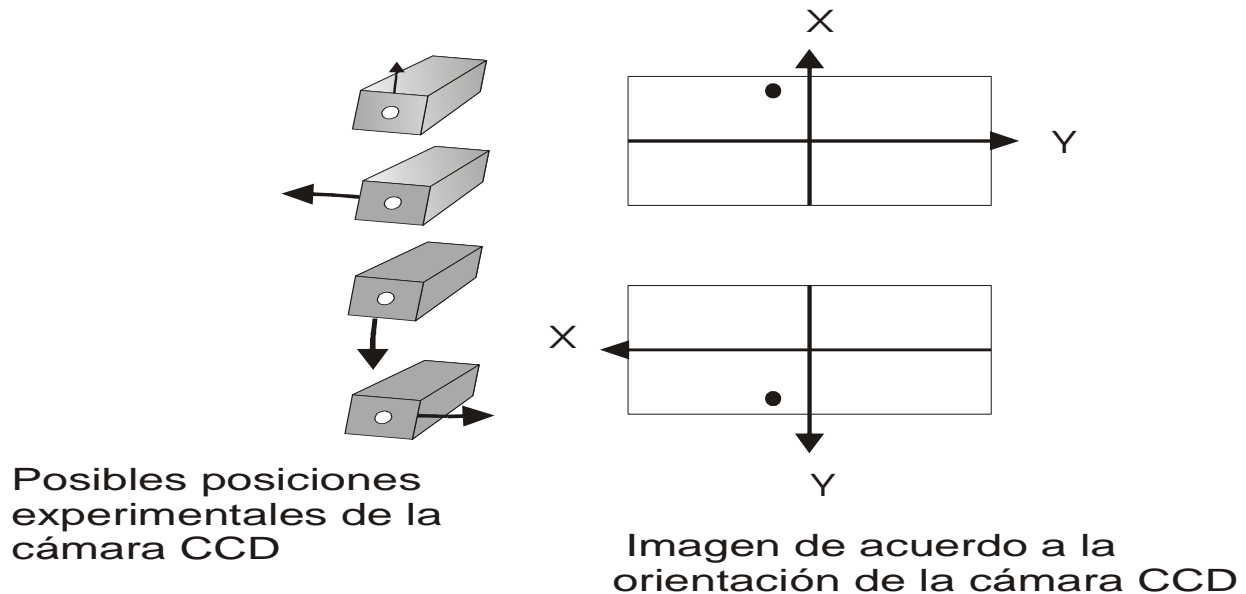


Fig.3.3 Posición de un punto imagen correspondiente a un punto objeto particular dependiendo de la orientación de la cámara CCD, la cual experimentalmente puede tener cuatro orientaciones.

Debido a que la imagen que proporciona la cámara consiste de un arreglo ordenado de puntos, es difícil identificar las direcciones correctas de los ejes x y y del sistema general y su relación con las direcciones x y y propias del CCD.

Cuando capturamos una imagen y la analizamos se tiene una matriz de 640(horizontal) por 480(vertical) números que representan los niveles de gris de cada píxel, convencionalmente se denomina a la dirección horizontal como dirección x y a la vertical como dirección y . La matriz numera cada entrada con dos subíndices i,j (i representa la dirección vertical y j la dirección horizontal, en *Math Cad*). El origen de los subíndices es el $(0,0)$ y se encuentra en la esquina superior derecha de la imagen sin importar cual es la orientación real de la cámara. Para evitar confusiones es útil tomar una imagen de los ejes x y y reales dibujados sobre una hoja de papel y con esto poder determinar la relación de orientación de los ejes de coordenadas del plano objeto y del plano imagen (Fig.3.4).

Para trabajar con respecto a un sistema de coordenadas se toma el sistema en la escena XYZ , por lo que se realiza la transformación de coordenadas de las imágenes de los puntos del sistema en el plano imagen de la CCD quedando determinadas como:

$$X_1 = \xi$$

$$Y_1 = \zeta \operatorname{sen}\theta_0 + \eta \cos\theta_0 + Y_2 - S_i \operatorname{sen}\theta_0 \quad (3.1)$$

$$Z_1 = \zeta \cos\theta_0 - \eta \operatorname{sen}\theta_0 + Z_2 + S_i \cos\theta_0$$

Con θ_0 como el ángulo de inclinación con respecto al eje Z , ζ y ξ son las coordenadas con respecto al sistema del plano imagen, Y_2 y Z_2 son las coordenadas del centro de la lente del CCD y los términos $S_i \operatorname{sen}\theta_0$, $S_i \cos\theta_0$ son las traslaciones en la dirección respectiva del centro de la lente al plano imagen de la CCD.

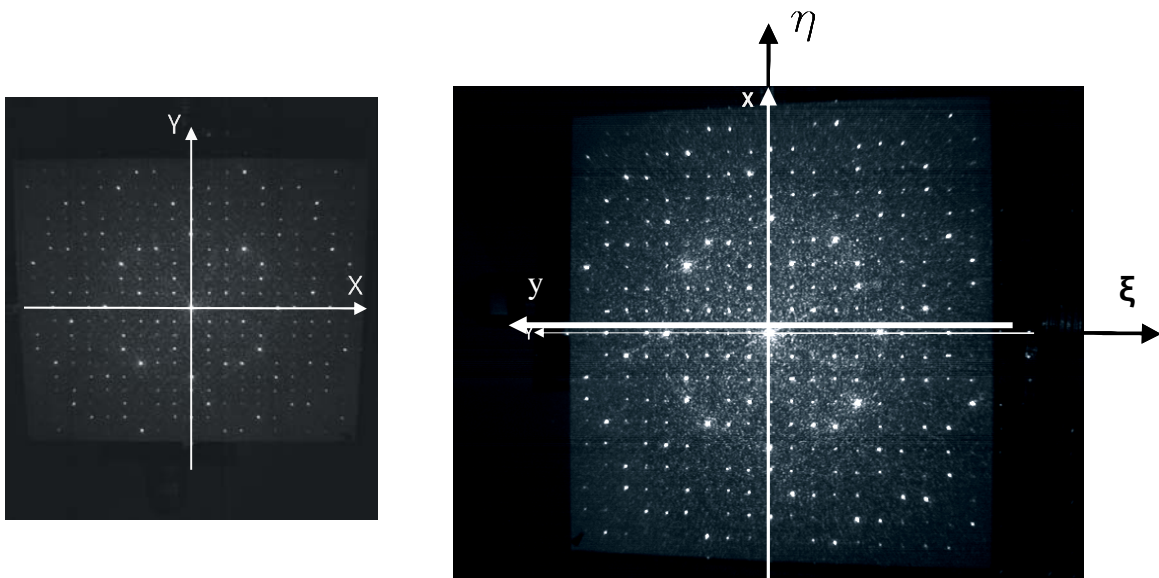


Fig.3.4 Correspondencia de coordenadas dependiendo de la orientación de la CCD. (a) XY en el plano imagen y (b) comparación de la dirección de los ejes en el sistema XY en la escena con $\xi \eta$ en el plano imagen.

3.3 Posición de la cámara CCD para mayor sensibilidad al cambio de posición de un punto imagen dependiendo de la forma de la superficie para un punto objeto respectivo.

En la determinación de la posición de la cámara CCD para tener mayor sensibilidad para un punto en el plano imagen y su respectivo punto objeto, se realiza un análisis con la geometría que se muestra en la figura 3.5 y lo que se desea obtener es la dependencia del cambio $\Delta\xi$ con respecto al cambio y_c del desplazamiento de la CCD horizontalmente en la dirección y .

Para un punto particular que se encuentra a una cierta altura Δh de acuerdo a la forma de la superficie a medir, es decir, se desea encontrar la mejor posición de la cámara de manera que el desplazamiento $\Delta\xi$ del punto imagen sea lo más grande posible para que pueda ser medido con facilidad y mayor precisión. No es difícil darse cuenta que si la cámara se acerca mucho al eje Z , $\Delta\xi$ se hace muy pequeño. Conforme se aleja la cámara del eje Z , $\Delta\xi$ aumenta; sin embargo, si se aleja mucho $\Delta\xi$ vuelve a decrecer por lo que nos interesa encontrar una región donde $\Delta\xi$ sea óptima (grande). Es posible demostrar que la expresión resultante, de acuerdo a la geometría que se muestra en la Fig.3.5, es la siguiente:

$$\Delta\xi = \left[\frac{(dz_c + x_c)(x_c - x_1) - (z_c - \Delta h)(dx_c - \xi z_c)}{(dz_c + x_c \xi)(z_c - \Delta h) - (dx_c - \xi y_c)(x_c - x_1)} \right] \left(\frac{d^2 + \xi \xi'}{d} \right) \tag{3.2}$$

Donde: $\xi = \frac{x_c d}{y_c}$ y $\xi' = \left[\frac{d(x_c - x_1)^2}{(x_c - x_1)^2 + (Z_c - \Delta h)^2 - x_c^2} \right]^{1/2}$

El desarrollo se da en el apéndice B.

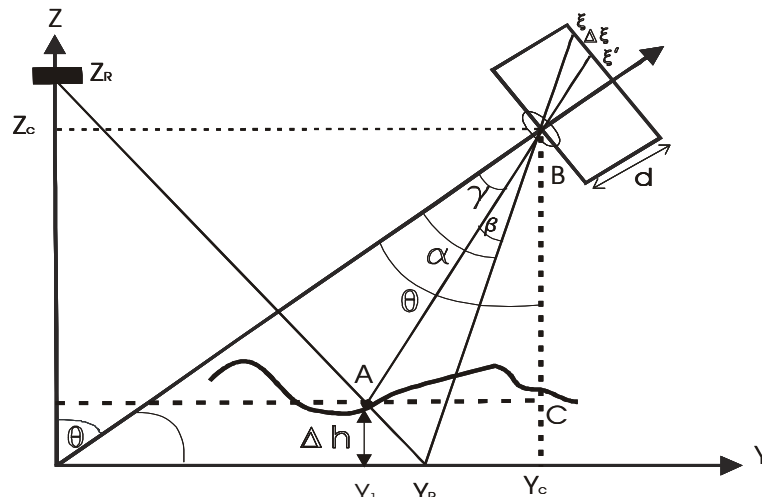


Fig.3.5 Esquema para determinar posición de la cámara CCD para una mayor sensibilidad para $\Delta\xi$ con un ángulo de inclinación Θ con respecto a Z y con un desplazamiento de la cámara paralela a la dirección y .

Lo que se puede concluir de acuerdo a lo descrito en la Fig.3.6, es que con respecto al punto central de observación entre mas alejada este la CCD mayor sensibilidad al cambio de posición en el plano imagen dependiendo de la forma de la superficie a medir. Se decidió esta forma de desplazamiento paralelo al eje Y ya que experimentalmente es más sencillo colocar la cámara CCD.

Sin embargo, puede colocarse moviéndose en una esfera centrada en el origen de coordenadas del sistema XYZ , sobre una línea vertical etc., pero pienso que esta elección facilita el montaje del sistema de proyección y la captura de imágenes, pues únicamente se desplaza linealmente en una sola dirección. Entre más alejada del eje Z se tiene mayor sensibilidad al cambio de $\Delta\xi$, sin embargo, se pierde información de los puntos proyectados por ocultamiento de estos por la misma superficie por lo que se toma la posición en la que se pierda menos información, es decir, que la inclinación de la cámara con respecto a la dirección Z dependerá del tamaño del objeto a medir (Ver apéndice B).

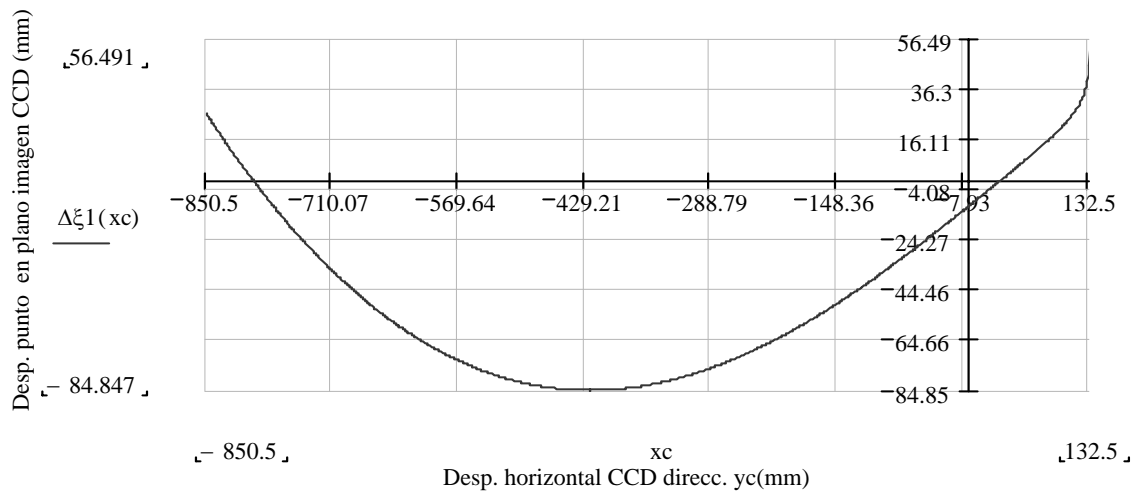


Fig.3.6 Comportamiento al cambio en $\Delta\xi$ al desplazar la cámara horizontalmente en la dirección y .

3.4 Obtención de un mayor número de puntos con el arreglo de tres rejillas de difracción.

Como ya se menciona, para una primera rejilla rectangular de difracción se tiene un patrón de difracción de puntos, los que al incidir en una segunda rejilla cada punto de la primera funciona como una fuente y genera individualmente su propio patrón de difracción; análogamente para una tercera rejilla. La condición es que las rejillas sean paralelas una con respecto a otra y el haz de luz incida perpendicularmente sobre estas. Mediante una simulación con el programa Math Cad se presenta para diferentes ángulos de rotación de las rejillas se incrementa el número de puntos de difracción, se realizó para dos rejillas idénticas y para un ángulo de aproximadamente 37.5 grados resulta en un arreglo rectangular para el caso donde no hay distorsión de las mismas. En la Fig. 3.7 se muestra el arreglo físico de las rejillas de difracción.



Fig.3.7 Montaje físico del arreglo de tres rejillas de difracción rectangulares holográficas.

El sistema de proyección de un patrón regular con un arreglo de rejillas de difracción rectangulares holográficas permite tener una distribución regular de puntos, en la simulación se realizó el caso de aproximación paraxial variando el ángulo de rotación Θ entre las rejillas hasta encontrar una distribución simétrica de puntos y experimentalmente se giran las rejillas hasta encontrar para este ángulo la distribución de puntos como se muestra en la figura 3.8 (d), para con esto incrementar el número de puntos proyectados de difracción y por lo tanto tener un mejor muestreo (Ver apéndice C).

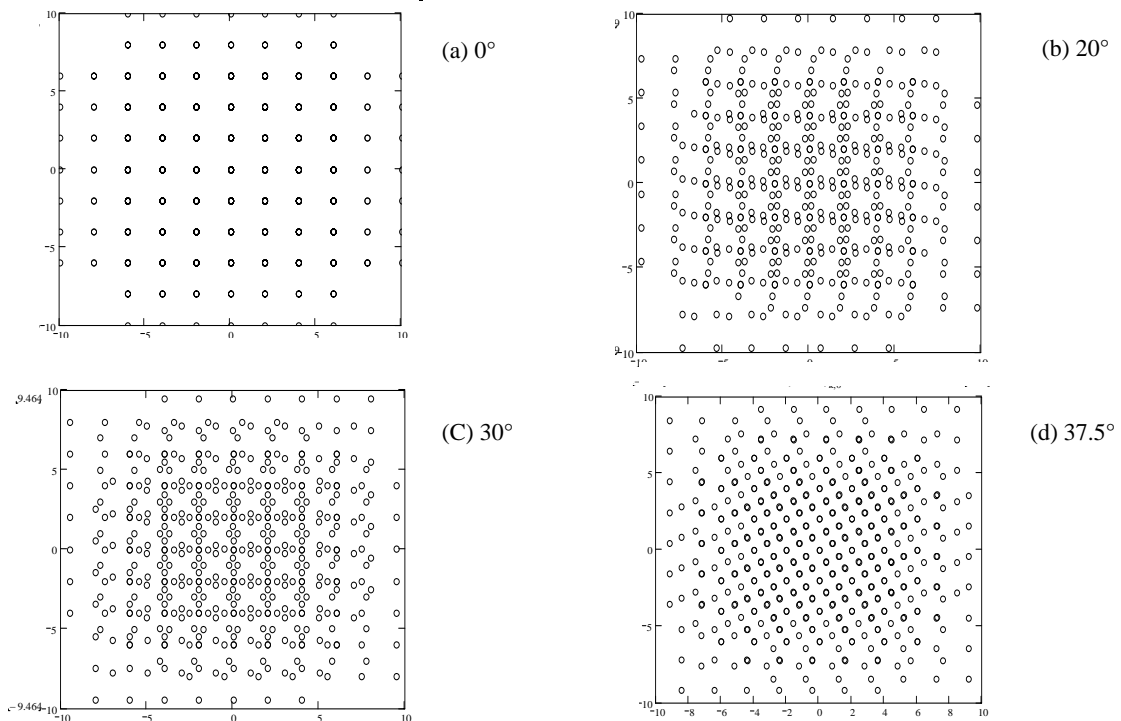


Fig.3.8 Superposición de dos rejillas paralelamente, sobre las que incide un haz láser perpendicularmente y girando una son respecto a otra un ángulo de (a) 0° , (b) 20° , (c) 30° y (d) 37.5° .

3.5 Calibración del arreglo de rejillas de difracción rectangular.

En el capítulo 2 se demostró que cuando se consideran términos de difracción de Fraunhofer de orden superior estamos en el caso de difracción no paraxial por lo cual no se tiene un arreglo cuadrado de puntos de difracción, sin embargo se puede determinar la posición de los puntos de acuerdo a la ecuación (2.13). Ahora, como se conocen las coordenadas de los puntos en el plano imagen y la coordenada del centro de la lente tiene una posición fija, se construye una recta para cada punto y se interseca con el plano de referencia determinándose las coordenadas en el plano objeto (Fig.3.9) cuya normal esta en la dirección Z (Ver apéndice E).

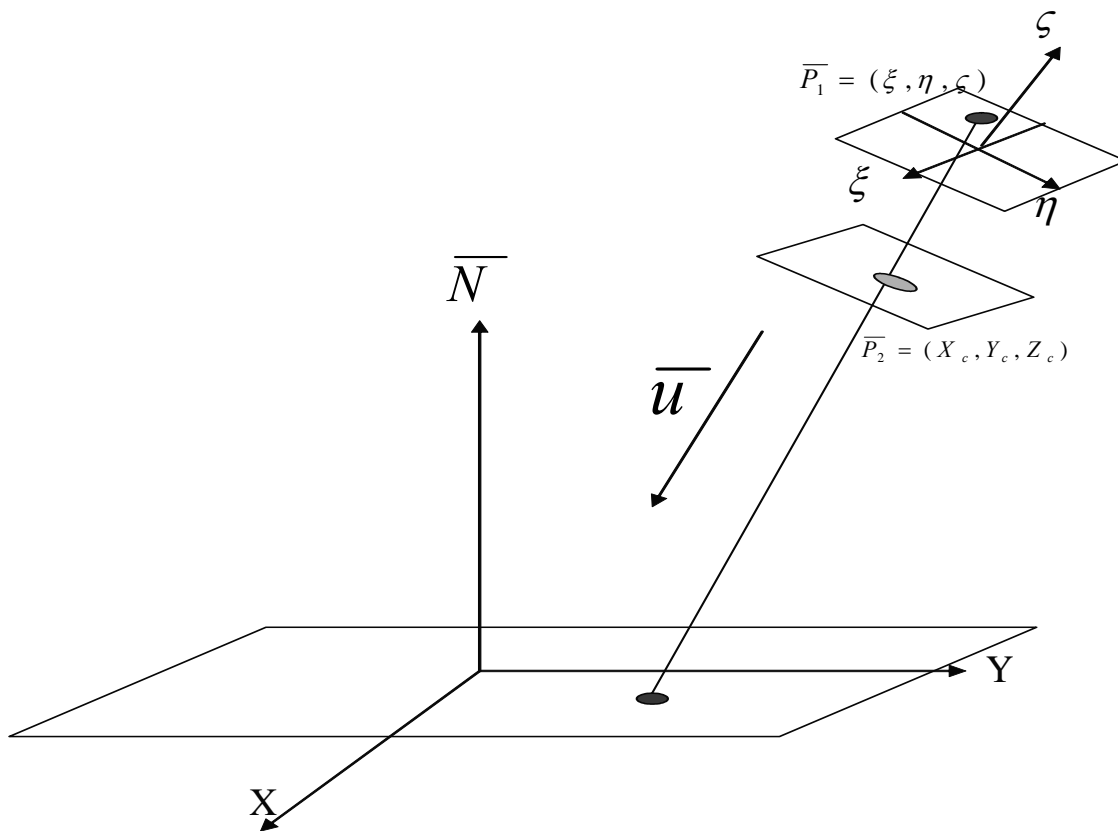


Fig.3.9 Geometría para calibrar el arreglo de rejillas de difracción intersectando una recta y un plano.

Utilizando la ecuación normal de un plano dado por

$$(\vec{P} - \vec{P}_0) \cdot \vec{N} = 0$$

La ecuación vectorial de la recta:

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + tu$$

Se realiza su intersección las coordenadas de los puntos proyectados se determinan por:

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \left[\frac{(\bar{P}_0 - \bar{P}_1) \cdot \bar{N}}{\bar{u} \cdot \bar{N}} \right] \bar{u} \tag{3.3}$$

Por lo que de la ecuación (3.3) las componentes de \bar{P} determinan las coordenadas de la posición de los puntos proyectados en el plano de referencia, siendo para cada coordenada las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} X &= \xi + \left(\frac{d \cos \theta - \eta \operatorname{sen} \theta + Z_c}{-d \cos \theta + \eta \operatorname{sen} \theta} \right) \xi \\ Y &= d \operatorname{sen} \theta + \eta \cos \theta + Y_c + \left[\frac{d \cos \theta - \eta \operatorname{sen} \theta + Z_c}{-d \cos \theta + \eta \operatorname{sen} \theta} \right] (d \operatorname{sen} \theta + \eta \cos \theta) \\ Z &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

En la figura 3.10 se muestran las posiciones de los puntos proyectados y un atabla donde se tabulan algunas posiciones de las coordenadas para 16 puntos pero se puede desplegar el total de puntos. Esta posición permanece fija para cada una de las superficies a las que se realizará la medición la rutina de programa se da en el apéndice F.

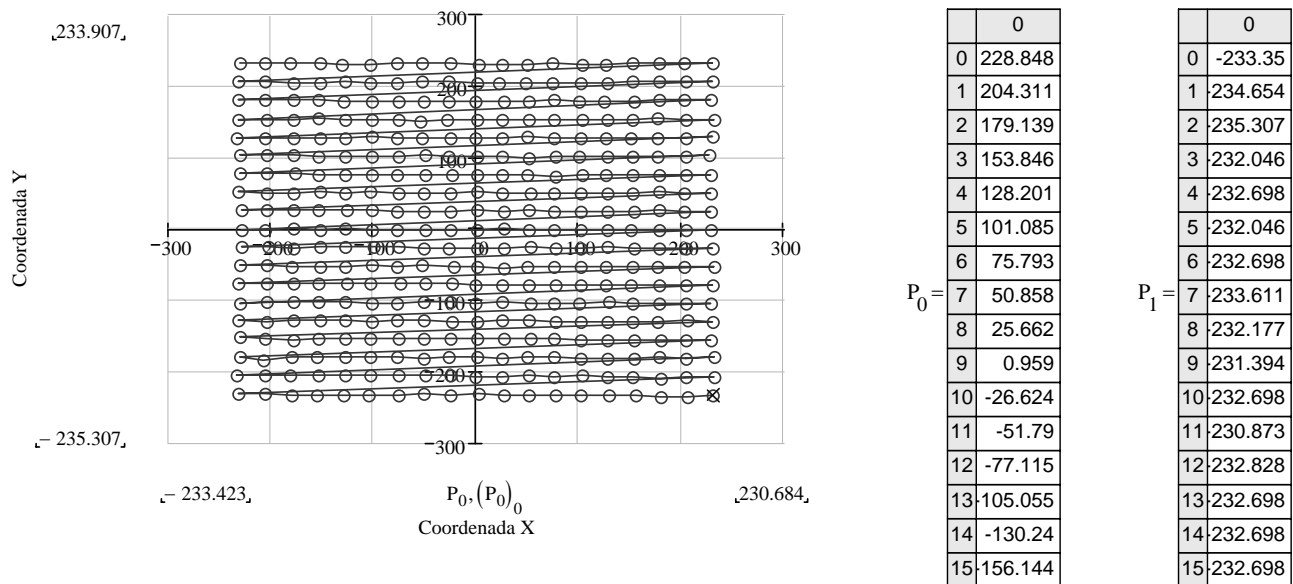


Fig. 3.10 Calibración del arreglo de rejillas de difracción intesectando la recta que se construye de cada uno de los puntos imagen y la coordenada del centro de la lente de la cámara CCD y el plano XY donde se proyecta el patrón de puntos utilizando el programa Math Cad.

3.6 Determinación de las coordenadas en el plano imagen.

En la teoría se supone que el patrón de proyección son puntos de luz, sin embargo, lo que se tiene en realidad es una mancha de luz para cada punto, la cual en términos de una imagen, esta constituida por un determinado número de píxeles (Fig. 3.11) y se debe determinar cual sería la posición de coordenadas adecuada para cada punto y poder realizar la intersección de las rectas en el proceso de triangulación.

La imagen para cada punto tiene una distribución no simétrica, y varia porque se tienen diferente tamaño de la mancha pues tienen diferente intensidad además se reflejan sobre una superficie no especular, por lo que se opto por encontrar el centroide para cada orden de difracción. Esto se realizó con el programa de procesamiento de imágenes *Image j* colocando una ventana rectangular en cada

punto imagen y determinar el centroide dado por la expresión $C = \left(\frac{\sum x_i * I}{I_i}, \frac{\sum y_i * I}{I_i} \right)$. Donde I corresponde al valor en tono de gris.

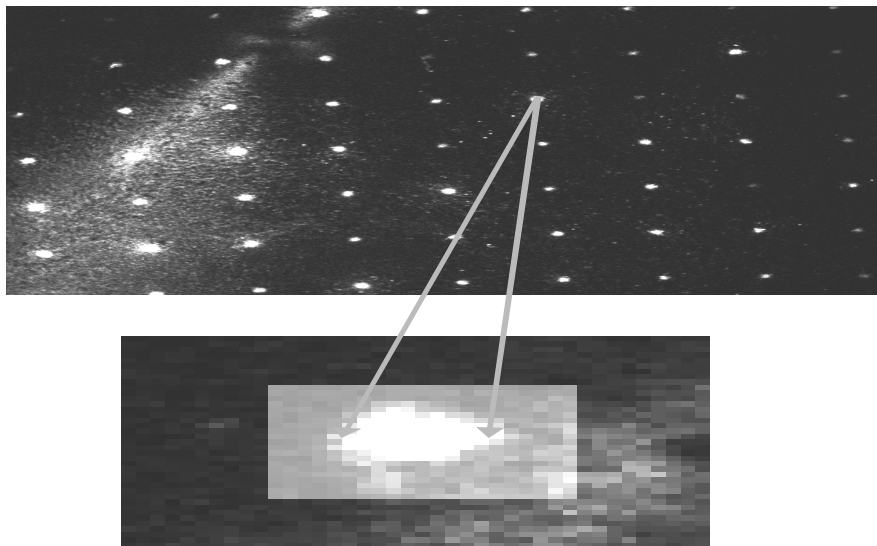


Fig.3.11 Amplificación de la imagen de un punto proyectado sobre una superficie mostrando que la constituye un determinado numero de píxeles.

3.7 Determinación de las coordenadas de los puntos proyectados sobre la superficie a medir considerando distancia mínima entre rectas.

Como se mencionó en la sección anterior, cada punto en la imagen tiene una distribución de píxeles y además no se distribuyen simétricamente.

Esto implica que la posición del centroide varía dependiendo de lo anterior, lo que implica que podría suceder que no hubiera intersección entre rectas en la triangulación por lo que se decidió a encontrar los puntos más cercanos entre las dos rectas, estos puntos deberían estar muy cerca de los puntos de intersección, con esto se pretende determinar en forma objetiva la posición de los puntos proyectados en la Fig. 3.12 se muestra la geometría para determinar distancia mínima entre rectas.

A continuación se explica la geometría para determinar la distancia mínima para las respectivas rectas. Se considera un orden de difracción del arreglo de rejillas y su respectivo punto proyectado sobre la superficie a medir. La otra recta se determina desde este punto proyectado hasta la lente de la CCD sobre la línea de visión de la CCD, considerando el rayo principal, es decir tomando el rayo que pasa por el centro de la lente.

De la ecuación vectorial de la recta se tiene para las dos rectas:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \bar{r}_1 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \\ \bar{R} &= \bar{r}_3 + s(\bar{r}_4 - \bar{r}_3)\end{aligned}\quad (3.5)$$

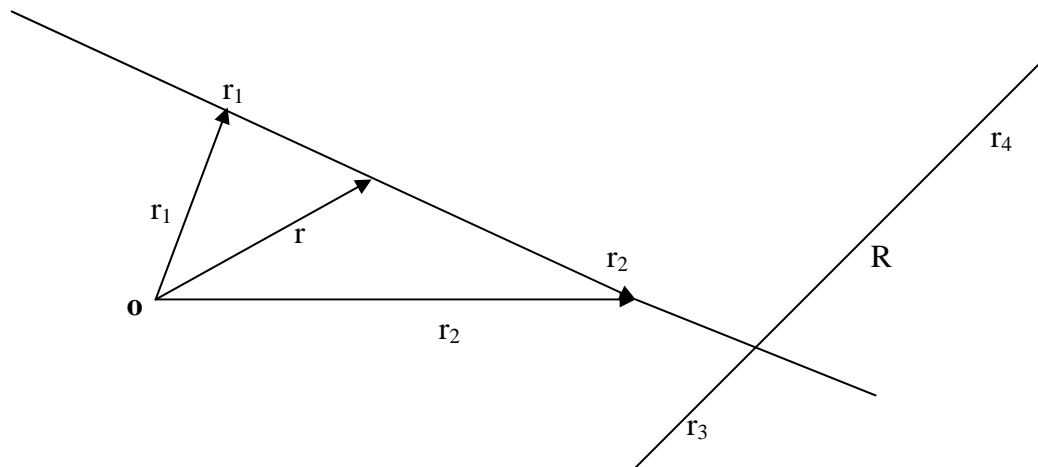


Fig 3.12 Geometría para determinar distancia mínima entre rectas.

Tomando la distancia entre rectas y realizando las operaciones para tener la condición de tener un

mínimo se tiene $d^2 = |\bar{r} - \bar{R}|^2$ cuando $\frac{\partial d}{\partial s} = \frac{\partial d}{\partial t} = 0$

Realizando las derivadas se obtienen los parámetros t_{\min} y s_{\min} para construir la distancia mínima de las rectas representándolas como:

$$\begin{aligned}\bar{r}_m &= \bar{r}_1 + t_{\min}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \\ \bar{R}_m &= \bar{r}_3 + s_{\min}(\bar{r}_4 - \bar{r}_3)\end{aligned}\quad (3.6)$$

El desarrollo se da en el apéndice F. Con un programa en Math Cad se determinan las coordenadas de los puntos proyectados sobre la superficie a medir.

3.8 Evaluación de la distorsión de la lente de la cámara CCD.

Otro aspecto importante que debe considerarse al realizar la medición de superficies es la distorsión que se genera por la lente de la cámara CCD. Con esto no se quiere decir que la lente no tenga algún otro tipo de aberración pero para una lente de este tipo se considera más significativo evaluar la distorsión. En este caso únicamente se realiza la evaluación de la distorsión ya que junto con la distorsión de coma, se puede modificar o alterar la evaluación del centroide. En la Fig. 3.13 se muestra el esquema para evaluar la distorsión.

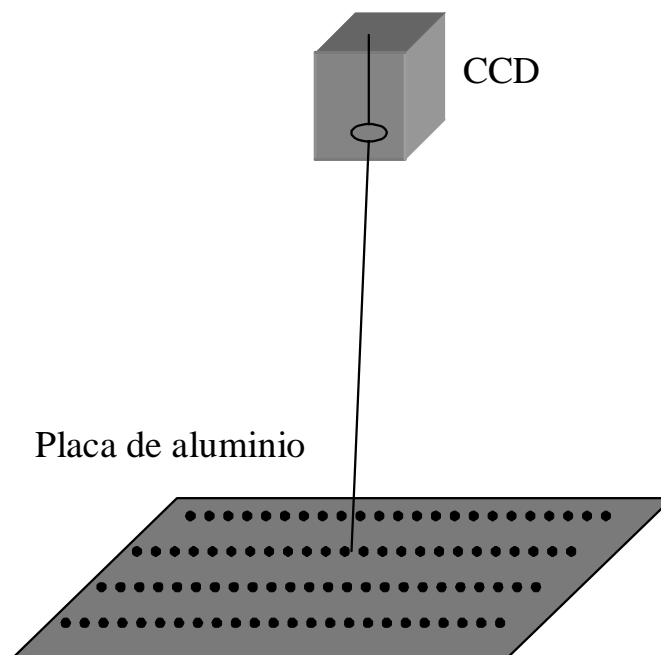


Fig.3.13 Arreglo experimental para realizar una evaluación de la distorsión

Se utiliza como objeto una placa de aluminio (Que se ilumina por la parte de abajo con lámparas fluorescentes) con perforaciones cuya separación es de 25.4 ± 0.025 mm en cada dirección XY , se toma la imagen de un área aproximada de 600×700 mm. La cámara CCD se coloca perpendicular a la placa a una altura de 1402 mm y centrada con respecto a esta área.

Las coordenadas de los puntos imagen se determinan con un programa en Math Cad el cual se construye una malla cuadrada de tal forma que cada punto quede contenido en un cuadro de la malla (Fig.3.14). Se toma el umbral considerando que aquellos píxeles que tengan un valor en tono de gris menor a 133 se les asigne cero o negro y para valores mayores a este se les asigne 255 o blanco.

El valor en tono de gris de 133 se elige de tal forma que se pudieran ver todos los puntos imagen ya que estos varían en intensidad. La posición para cada punto se realiza, para cada cuadrado de la malla, considerando que los valores en tono de gris igual a cero no contribuyen en el valor del centroide.

En la figura 3.10 se puede observar que dependiendo de la forma de la mancha que forma la distribución en píxeles será la posición del centroide para cada cuadro de la malla. Este programa funciona bien para puntos que se distribuyen simétricamente con respecto al centro de la imagen (Ver apéndice G). Una vez que se tienen las coordenadas de los puntos imagen se realiza la evaluación utilizando la ecuación (2.23) para determinar la distorsión E y la amplificación M con el programa *Origin*.

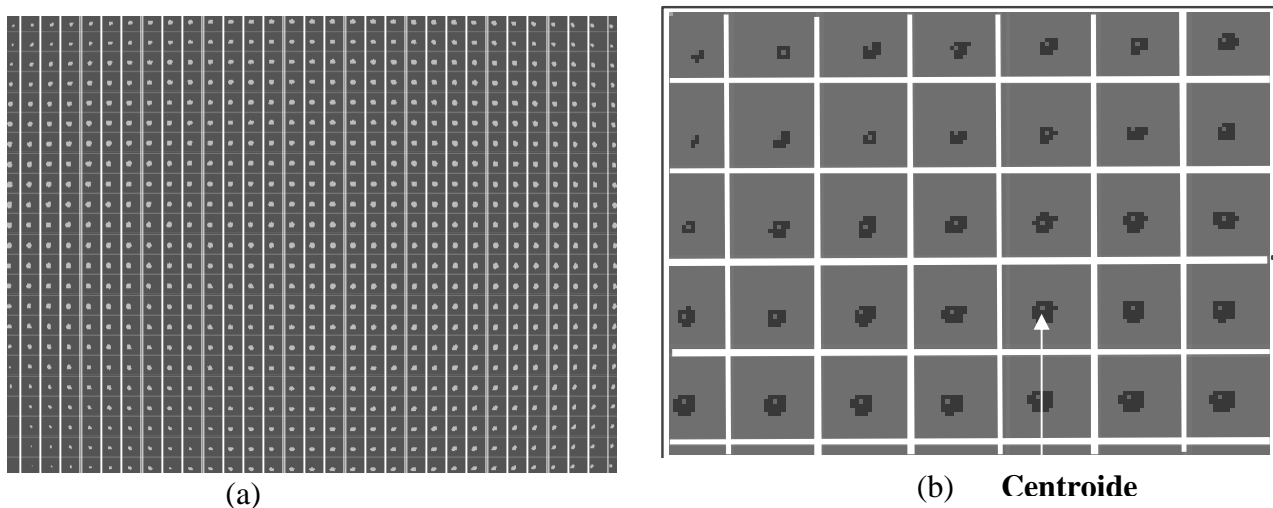


Fig.3.14 (a) Determinación de los centroides de los puntos imagen utilizando una malla cuadrada y con un programa en Math Cad. (b) Amplificación de una región de los puntos imagen de la placa señalando la posición del centroide punto claro dentro de la mancha negra.

C A P Í T U L O 4

Resultados y Análisis

Se dan los resultados obtenidos con la propuesta de utilizar como sistema de proyección rejillas de difracción holográficas rectangulares, haciendo una rotación de una con respecto a otra para tener un mayor número de puntos proyectados y realizar un mejor muestreo. Se realiza un análisis en detalle para un espejo de fibra de carbono cóncavo para determinar la resolución que se logró con este sistema de medición. Se menciona también las dificultades que implica la captura de los haces reflejados de los puntos proyectados sobre los objetos dependiendo de la forma de los mismos.

4.1 Sistema de proyección.

El sistema de proyección con un patrón regular de un arreglo de rejillas de difracción rectangulares holográficas permite realizar un mayor muestreo y como ya se menciona para los diferentes ordenes de difracción de una primer rejilla se toman cada uno de ellos como una fuente para una segunda rejilla generando su propio patrón de difracción. Realizando la rotación de una con respecto a otra se encontró que a 37.5° se obtiene un patrón regular con el cual se realizó la proyección de puntos de trabajo para la medición de la superficie. En la Fig.4.1 (a) y (b) se muestra el incremento de puntos proyectados para un arreglo de dos y tres rejillas logrando 168 y 459 puntos respectivamente.

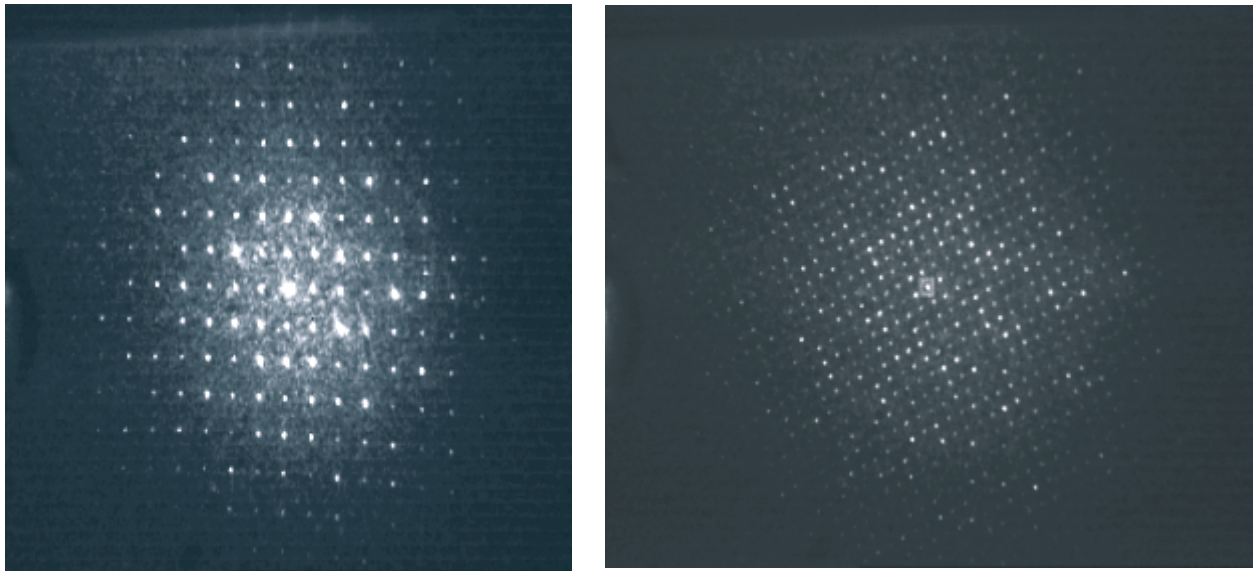


Fig. 4.1(a) Proyección de 168 puntos con dos rejillas cruzadas, (b) Proyección de 459 puntos con tres rejillas cruzadas.

4.2 Posición de los puntos imagen vía determinación del centroide.

Como ya se mencionó en realidad no tenemos puntos proyectados sino manchas de diferente tamaño en las que se tiene una distribución de intensidades en forma no simétrica por lo que se decidió por determinar las coordenadas de trabajo localizando el centroide para cada mancha de luz, utilizando el programa de procesamiento de imágenes *image j*, el centroide se determina posicionando una ventana que abarque la región para el punto del que se requiere determinar las coordenadas, repitiendo el proceso para cada uno de los puntos en la imagen.

Como puede observarse en la Fig. 4.2 cada mancha tiene un tamaño diferente con una distribución en píxeles asimétrica y depende de el proceso de difracción y de la dirección del reflejo dependiendo del punto sobre la superficie a medir en que se proyectan los puntos de difracción. Lo anterior implica que se tiene que ser muy cuidadoso en la región que delimitará la ventana y se realiza de acuerdo a lo que el experimentador considere adecuado lo cual repercute en variaciones de ~ 1 píxel en el resultado de la posición del centroide. Para superficies cuya forma permite que los puntos proyectados tengan una distribución simétrica el centroide puede determinarse en forma automática mediante un programa en *Math Cad* como se verá más adelante.

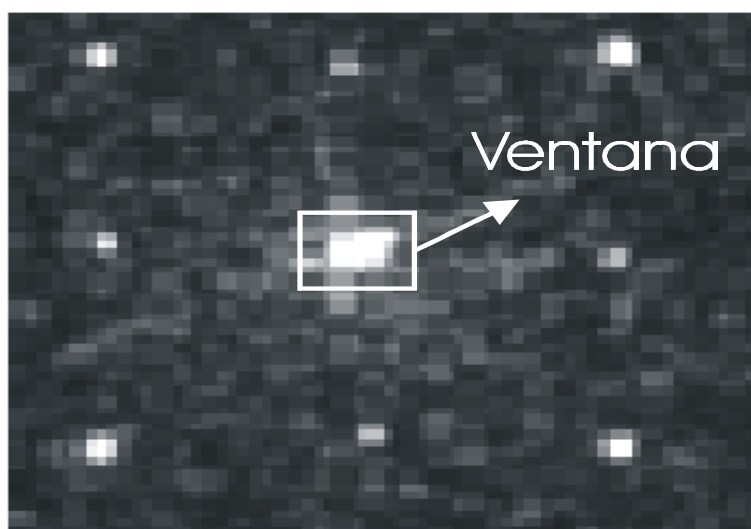


Fig.4.2 Posicionamiento de la ventana manualmente con el programa image j para determinar las coordenadas del centroide para cada mancha de luz.

4.3 Correspondencia entre puntos objeto y puntos imagen utilizando como fuentes de luz dos láseres de diferente longitud de onda.

La solución del problema de correspondencia es un factor clave para los métodos de luz estructurada pues con esto se determina, para cada punto en el plano objeto, el correspondiente punto en el plano imagen que se modifica en ambos planos de acuerdo a la forma de la superficie que se desea medir. Para realizar esta correspondencia se toma dos láseres con diferente longitud de onda e inciden en el arreglo de rejillas de difracción proyectando los patrones de difracción correspondiente para cada longitud de onda, donde para el orden cero para ambas longitudes de onda coinciden como se indica en la fig.4.3.

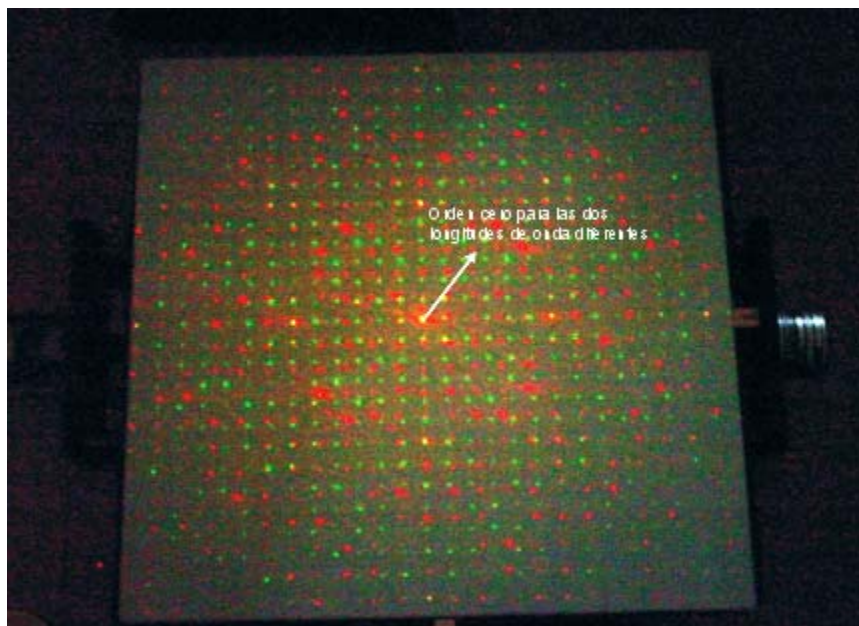


Fig. 4.3 Localización del orden cero de difracción para dos longitudes de onda diferentes correspondiente a la posición donde se superponen completamente los dos haces de luz.

Con este sistema de proyección, una vez identificado el orden cero, se observa un comportamiento característico que consiste en que tomando radialmente por ejemplo para el haz de longitud de onda λ_1 la separación entre un punto correspondiente al orden m_1 para el haz de longitud de onda λ_1 y el análogo n_1 para el haz de longitud de onda λ_2 la separación entre estos es cada vez mayor conforme nos alejamos del orden cero, lo mismo para los siguientes órdenes consecutivamente (Fig.4.4).

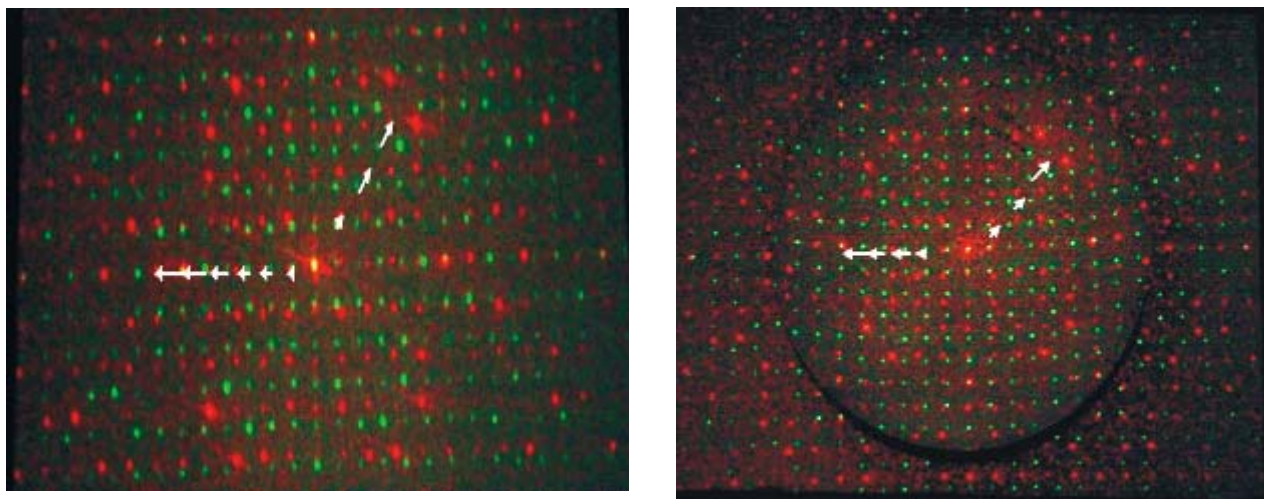


Fig. 4.4 Comportamiento de la separación radial conforme los órdenes de difracción para λ_1 y λ_2 respectivos se alejan del orden cero de difracción para un plano horizontal y un espejo de fibra de carbono.

4.4 Evaluación de la distorsión de la lente de la cámara CCD.

Como se menciona en la sección 4.2 para una distribución de puntos simétrica es posible determinar la posición del centroide utilizando un programa realizado en *Math Cad* (ver apéndice) para determinar la posición de una ventana que abarque la región para el punto del que se requiere determinar las coordenadas, repitiendo el proceso para cada uno de los puntos en la imagen mediante umbralización. En la Fig. 4.5(a) se muestra la distribución de perforaciones en la placa de aluminio teniendo una separación entre perforaciones adyacentes de 25.4mm tanto en las direcciones X como en la dirección Y y se observa la regularidad formando un arreglo rectangular y para más claridad se muestra solo un renglón de perforaciones para verificar lo anterior.

En la Fig. 4.5(b) se muestra la distribución de puntos en la imagen de la placa de aluminio observándose la distorsión de barril, también se toma un renglón para mostrar que los puntos ya no tienen una separación regular en la posición del punto que le corresponde y la separación entre puntos consecutivos alejándose del origen varían en forma cúbica como lo predice la teoría. Una vez teniendo las coordenadas de los centroides de las posiciones de los orificios de la placa en el plano imagen toman, que ahora si nos referiremos como puntos, las coordenadas radiales para determinar los coeficientes de amplificación transversal M y E el coeficiente de distorsión de acuerdo a la ecuación (2.23). Con el programa *Origin 6.1* se determinan los valores de los coeficientes conociendo las coordenadas radiales de los puntos en el plano objeto y en el plano imagen (Fig.4.6) resultando:

$$\begin{aligned}M &= .01164 \pm 2.7545 \times 10^{-11} \\E &= 1.29 \times 10^{-9} \pm 3.4625 \times 10^{-6}\end{aligned}\tag{4.1}$$

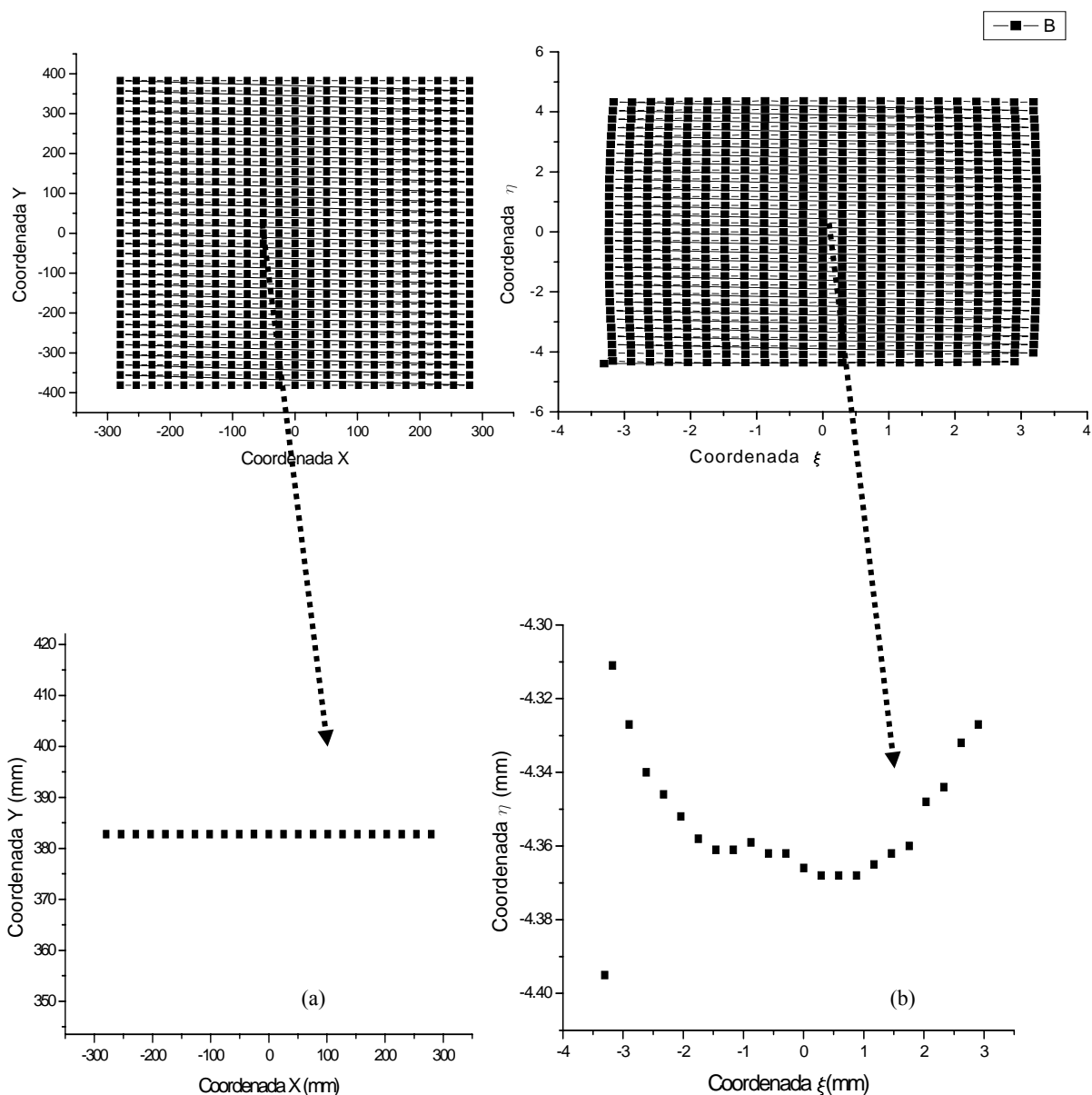


Fig.4.5 (a) Distribución de perforaciones en placa de aluminio y amplificación de un renglón de puntos (b) Imagen de la placa perforada con la cámara CCD y amplificación de un renglón de perforaciones.

Si se considera el punto más alejado, es decir, en uno de los extremos con coordenadas en el plano objeto de $(279.4, 382)$ a una distancia radial $r_o = 473.92\text{mm}$ se tiene, de acuerdo a la ecuación (2.23) en el plano imagen $r_i = 5.653\text{mm}$, cuyo valor antes de la corrección correspondía a $r_i = 5.353\text{mm}$. Para esta posición se tiene una diferencia entre el punto con distorsión y el corregido de 10 píxeles. Con esto las coordenadas en el plano imagen quedan corregidas y determinadas considerando la distorsión y la amplificación para realizar la medición.

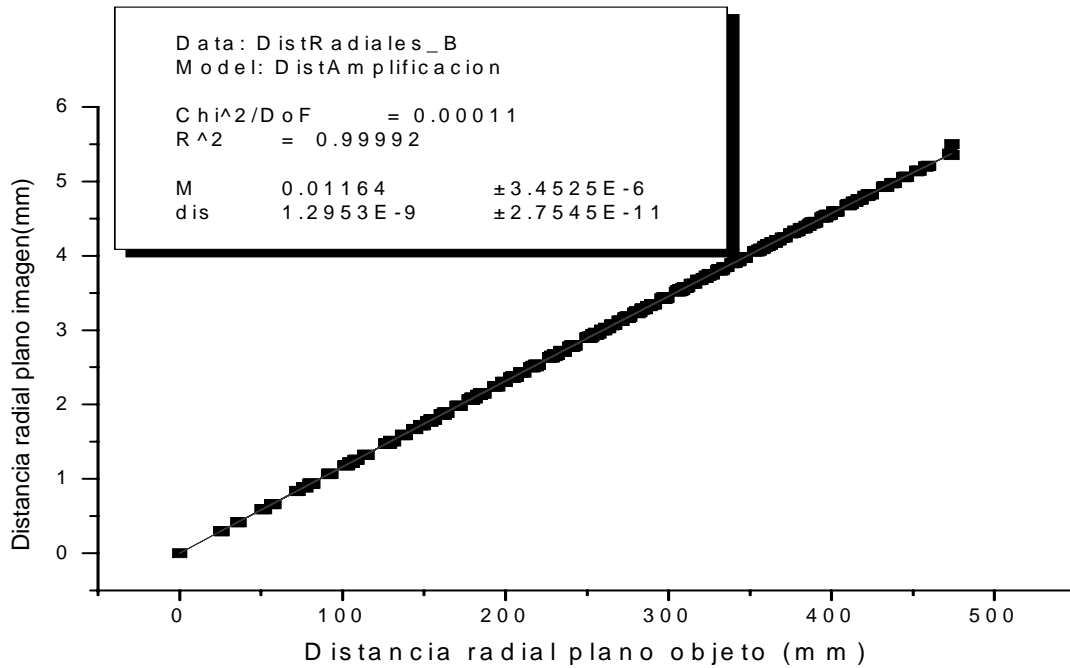


Fig. 4.6 Valores del coeficiente de amplificación M y coeficiente de distorsión E con el programa Origin 6.1.

Adicionalmente se realizó un análisis del cambio en el valor del coeficiente de distorsión considerando que los objetos a medir se colocan a diferentes alturas en la dirección Z . Para esto se considera que la lente de la cámara CCD realmente no es una lente delgada sino una lente gruesa resultando en un cambio en $E' = 1.14 \times 10^{-9}$ manteniéndose para este caso del mismo orden de magnitud que E (Ver apéndice H).

4.5 Medición de superficies.

El método se aplicó a un plano horizontal de 50cm^2 , a la parte cóncava de un espejo de fibra de carbono para el cual se realizó un análisis más detallado, unas aspas de ventilador y un rostro de yeso a escala real para mostrar las dificultades que se presentan para realizar la medición y mostrar lo factible del método para cualquier tipo de superficie.

El resultado tomando la distancia mínima entre rectas para del plano de referencia muestra la separación entre rectas corresponde a $2.5 \times 10^{-4}\text{mm}$ en promedio (Fig.4.7).

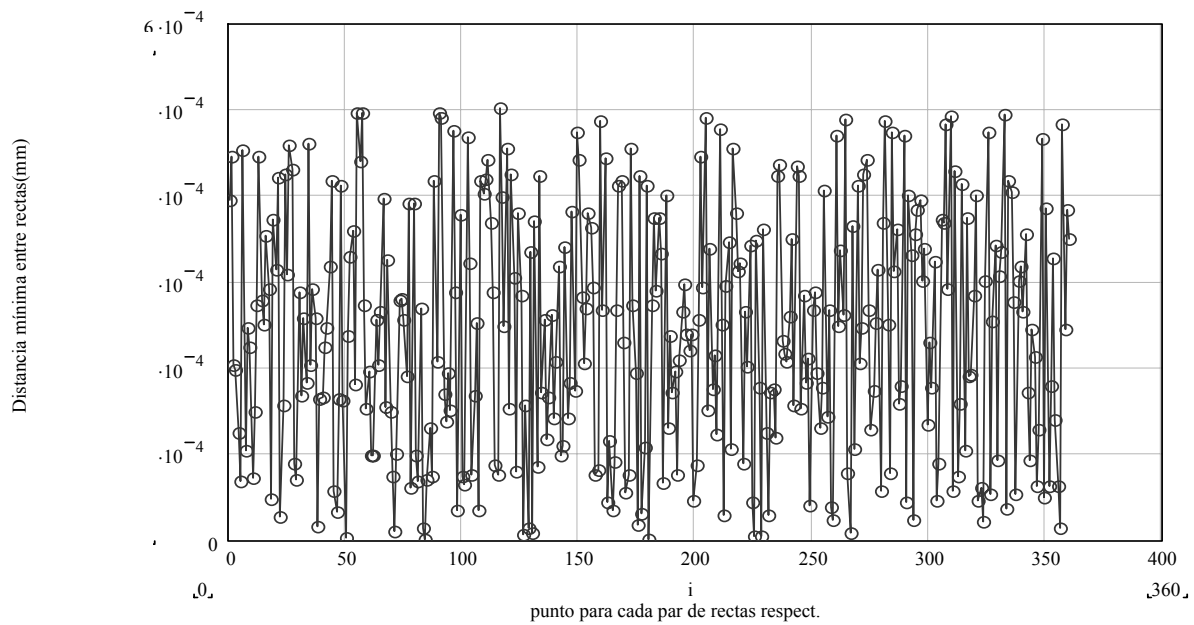


Fig.4.7 Grafica de la distancia mínima entre rectas respectivas para un plano horizontal incluyendo la corrección de distorsión.

Este plano que sirve como referencia se reconstruye como se indica en la fig.4.8(b) al parecer fielmente, sin embargo, al realizar una ampliación se observan deformaciones de aproximadamente $.25 \mu m$. Idealmente consideramos como un plano sin deformaciones pero realmente esta superficie (Fig.4.8(a)) no es completamente plana pero para el método, el registrar la magnitud de estas deformaciones indica que cumple con el objetivo para medición de superficies.

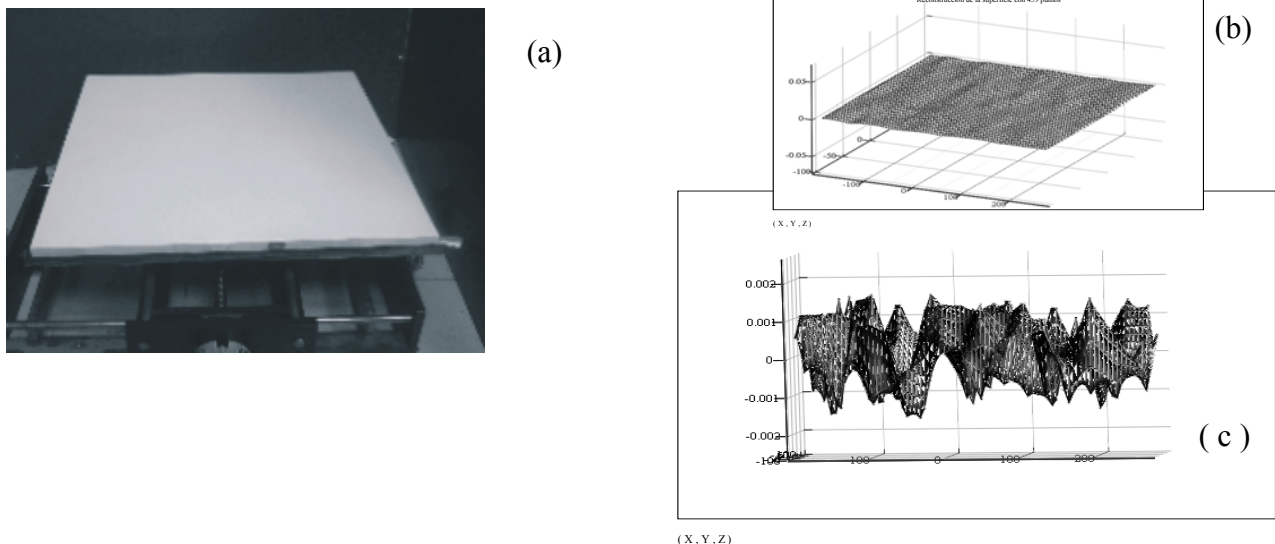


Fig.4.8 (a) objeto plano de referencia, (b) Reconstrucción del objeto y (c) ampliación para determinar resolución en las deformaciones que se logran detectar.

Para el espejo de fibra de carbono se procede en forma idéntica pero se realiza un análisis más detallado por el hecho de que el interés es medir superficies de este tipo pues los moldes para la construcción de espejos para el secundario del GTM (Gran Telescopio Milimétrico) son de este tipo pero de un diámetro de 2.6m.

Para este caso existe un incremento en el valor de la distancia mínima entre rectas con un valor promedio de de $250\mu m$ (Fig.4.9). No puedo decir con exactitud cual sea la causa de este cambio pero puede ser posible que se deba a que como cambia de dirección el reflejo de un punto proyectado cambia su intensidad por la posición de la CCD y por lo tanto el valor del centroide cambia con respecto a este punto cuando se proyecta en el plano de referencia, además se esta utilizando el modelo del “pinhole” y realmente se debe trabajar considerando que la lente de la CCD es en realidad una lente gruesa, mas no se podría argumentar en este momento.

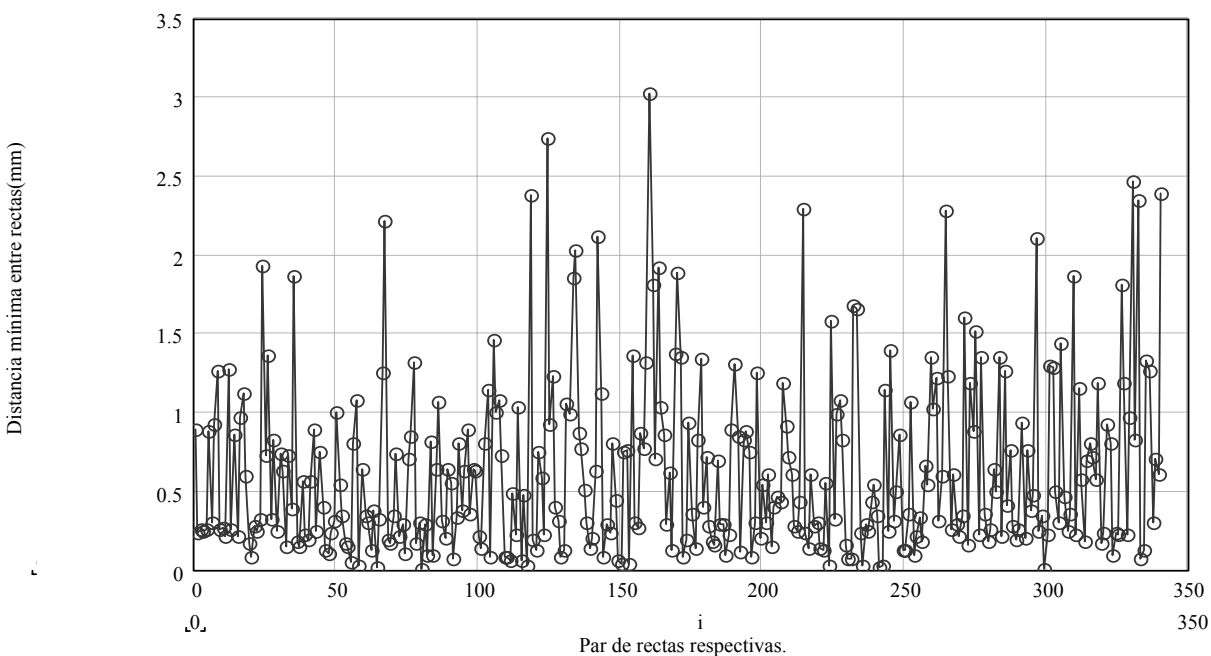


Fig.4.9 Grafica de la distancia mínima entre rectas respectivas para espejo de fibra de carbono incluyendo la corrección de distorsión.

Un aspecto importante que ocurrió durante la evaluación del espejo fue que a pesar de que las imágenes se tomaron en un lapso de menos de un minuto la cámara se movió de su posición angular con respecto al eje Z y al realizar la evaluación no se lograba la correspondencia por lo que se realizó un ajuste de las coordenadas de los puntos tomando la diferencias entre la posición de las coordenadas del plano de referencia y la posición de las coordenadas respectivas de los puntos proyectados sobre el espejo para después tomar el promedio de estas diferencias y determinadas condiciones para corregir las posiciones, esto se realizó con el programa Excel(Fig.4.10(a) y (b)).

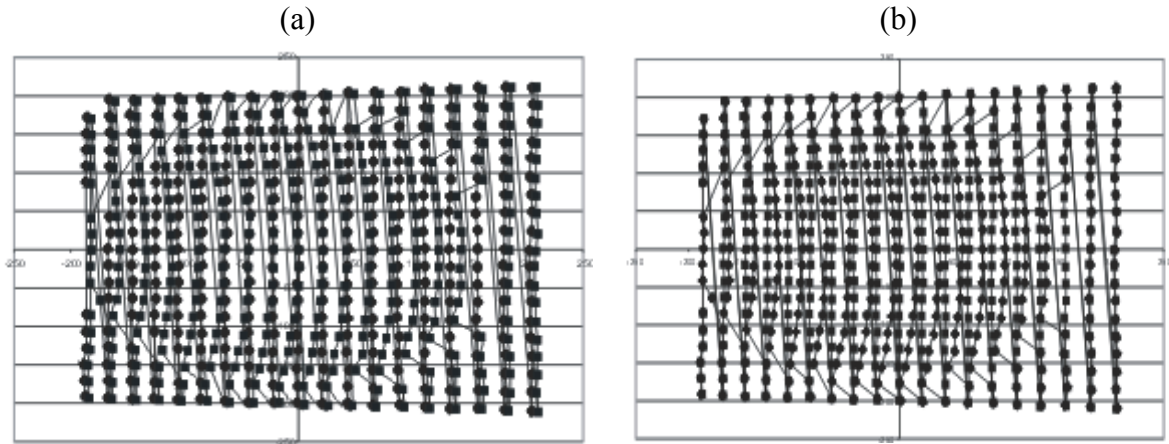


Fig.4.10 Puntos en el plano imagen cuando, por movimiento de la CCD estan: (a) desajustados y (b) ajustados.

En la fig.4.11(a) se muestra el espejo cóncavo de fibra de carbono cuya superficie es blanca ya que esto permitió que para los diferentes ordenes de difracción la reflexión fuera mayormente difusa y la cámara CCD tuviera un mejor registro de las imágenes de estos, en la Fig.4.11(b) se muestra la reconstrucción del espejo procesando la información con el programa *Math Cad* (Ver apéndice I).

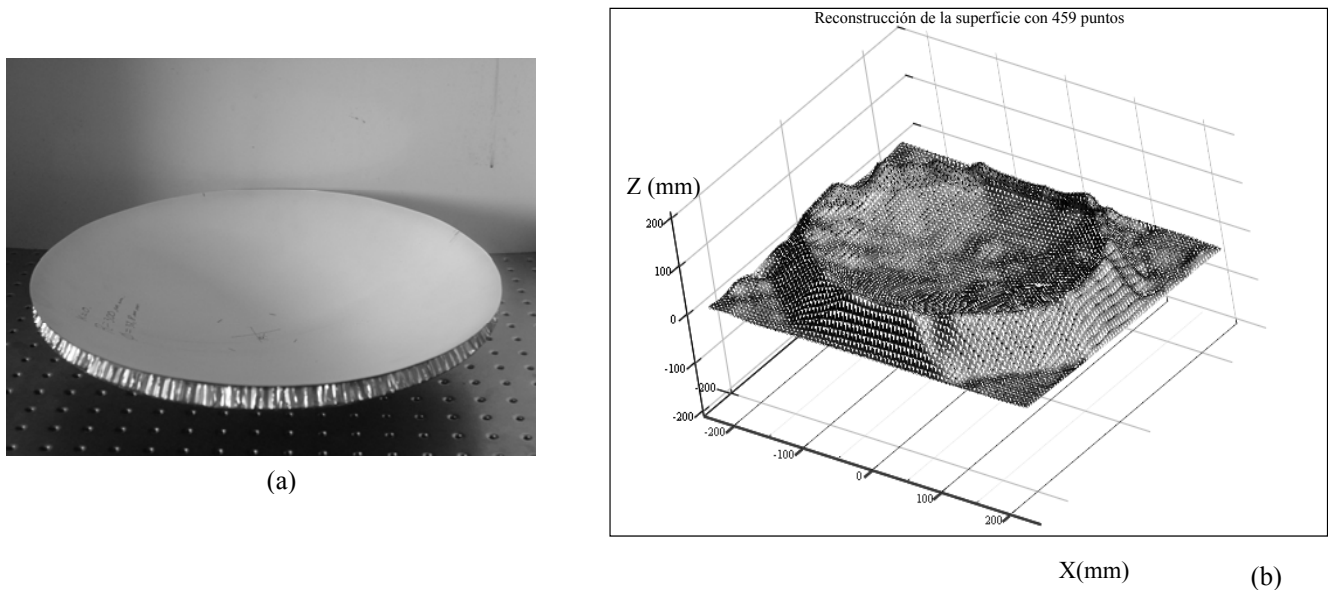


Fig.4.11 (a) Espejo de fibra de carbono de 388mm de diámetro. (b)Reconstrucción del espejo de fibra de carbono.

En la Fig. 4.12 se muestra también la reconstrucción del espejo (con el programa *Origin*), pero en esta proyectando las curvas de nivel en un plano horizontal para mostrar las deformaciones que presenta esta superficie, tal vez parezca exagerada la magnitud de las deformaciones pero esta vista de la grafica permite remarcar lo que se busca con el método de ver la forma de la superficie.

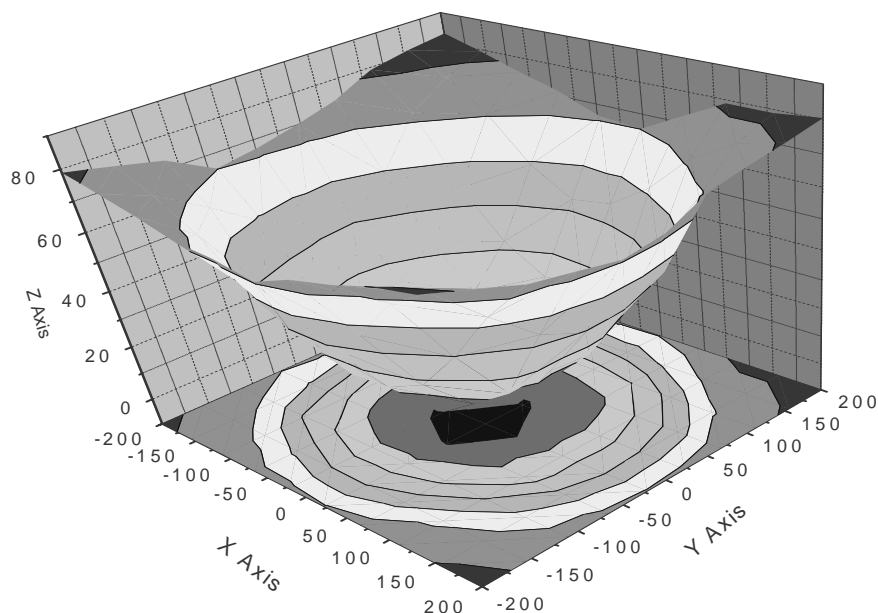


Fig.4.12 Reconstrucción del espejo de fibra de carbono de los datos obtenidos para la reconstrucción proyectando en un plano las curvas de nivel para evidenciar las deformaciones detectadas con el método propuesto.

Para intentar determinar la magnitud de estas deformaciones se realiza un ajuste de los datos de la reconstrucción con una esfera para este caso se ajusto a la mejor esfera obteniendo de radio de curvatura de 298mm . Para el ajuste realizado se encontró, tomando la diferencia mínima entre los datos experimentales y el ajuste un valor de $12.851\mu\text{m}$. Se puede ver en en la Fig.4.13 (b) como se suaviza el contorno de las curvas de nivel proyectadas en el plano horizontal, también suponía que las dos capas que forman el espejo de carbono eran paralelas, por lo que la posición experimental del espejo tiene coordenadas $X=0$, $Y=0$ y $Z=314$ en mm y comparando con lo que se obtiene con el ajuste estas coordenadas corresponden a $X=1.935\pm 1.329\text{mm}$, $Y=-5.026\pm 1.395\text{mm}$ y $Z=296.919\pm 0.556\text{mm}$.

En la Fig.4.13(c) se muestran la diferencia entre los puntos ajustados y los obtenidos experimentalmente en la reconstrucción de la superficie contenida en un intervalo entre -5mm y 5mm aproximadamente, muestran que las diferencias entre datos experimentales tienen un comportamiento aleatorio, por lo que es necesario realizar un estudio de los factores de ruido que determina este comportamiento.

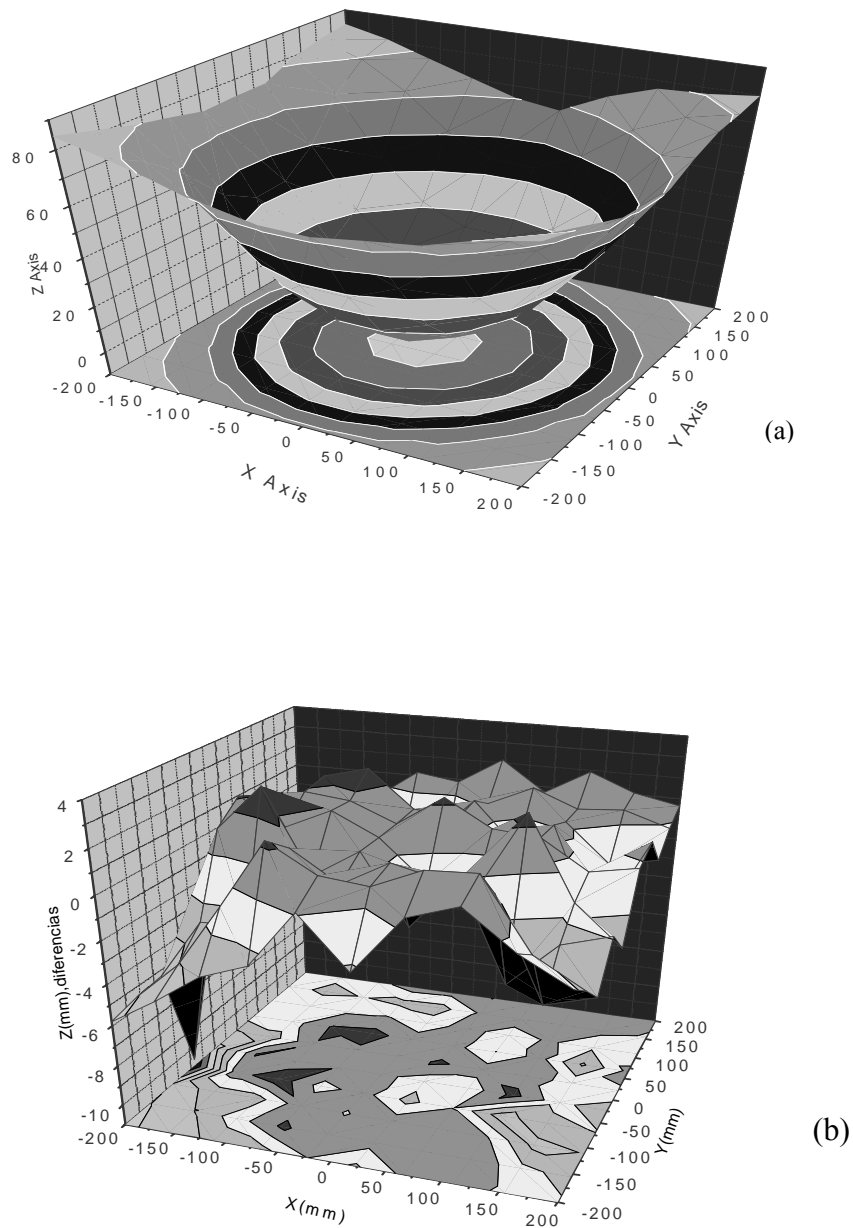


Fig.4.13 Ajuste a la mejor esfera con un radio de 300mm mostrando (a) Reconstrucción en tres dimensiones y proyectando las curvas de nivel en un plano horizontal y (b) Diferencia entre los puntos ajustados a una esfera y los obtenidos con el método de medición propuesto.

La diferencias en estas coordenadas, indican, entre otras cosas, que posiblemente el ajuste realizado no es el mejor, y pueden estar presentes los factores de cómo se realizó la calibración de la rejilla y estar trabajando con el modelo del “pinhole”. El ajuste se realizó a un esfera como primera aproximación, sin embargo, se midió experimentalmente el radio de curvatura con un esferómetro VIGOR GA-728 en varias regiones sobre la superficie y sobre un meridiano (Fig.4.14(a)).

En la Fig. 4.14(b) se muestra la variación en el valor de radios de curvatura lo que indica que la forma de la superficie realmente no corresponde a una esfera. Por lo anterior opté por trabajar en una región cerca del vértice (Fig.4.14(c)), de igual forma sobre una región de un meridiano, tomando un valor del radio de 301mm para realizar una comparación con el valor obtenido con el ajuste a la mejor esfera dando un error del 1%. La elección de este meridiano fue porque el valor del radio no variaba como los demás en los que se realizó la medición con el esferómetro, en los cuales el valor promedio del radio varía entre 301mm y 320mm. Además, midiendo la separación del entre estas en el borde se tiene un valor de 13.5mm y en el punto que se tomó como central existe una separación de 14.2mm lo que indica que la base del espejo no es de forma esférica, por esto las diferencias entre experimento y ajuste son mayores en los extremos (Fig.4.13).

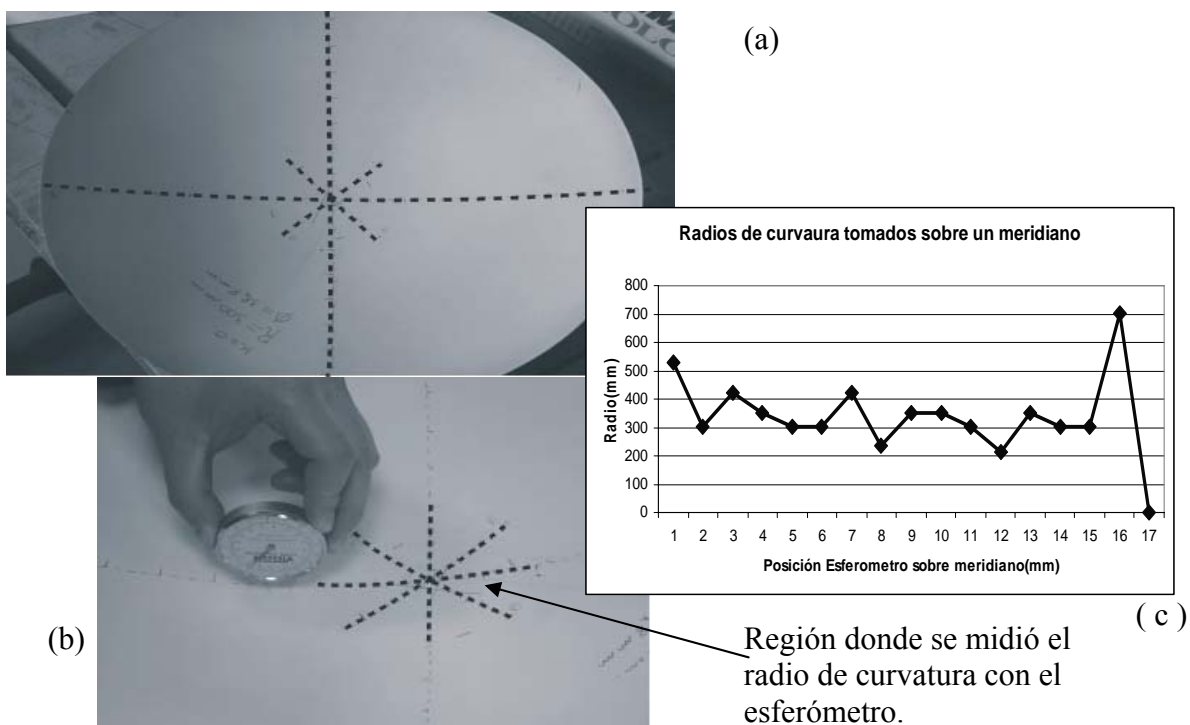


Fig.4.14 (a) Trazo de meridianos sobre la superficie cóncava, (b) Posición del esferómetro sobre un meridiano y (c) Valor del radio de curvatura para diferentes posiciones sobre una región de un meridiano sobre la superficie.

A pesar de que realmente la superficie cóncava (o base del espejo) no corresponde a una esfera, se obtiene información de la posición de ésta, la cual no es paralela al espejo de fibra de carbono ya que esta desplazada como se muestra en la Fig. 4.15.



Fig.4.15 Desplazamiento del espejo de fibra de carbono respecto a la base.

Finalmente, el utilizar como punto de referencia el orden cero de difracción para las dos longitudes de onda funciona adecuadamente porque se aplica a superficies cuya forma es suave. Para superficies cuya forma tiene cambios abruptos puede incluso perderse esta posición al no ser detectado por la cámara CCD.

La reconstrucción de las siguientes superficies se realizó para mostrar las dificultades que implica trabajar con superficies cuyas irregularidades sobre estas sean muy pronunciadas, es decir, que tengan cambios de forma cóncava a convexa en forma abrupta por ejemplo.

Para el análisis de la reconstrucción de unas aspas de ventilador Fig.4.16(a) primero la distancia entre el arreglo de rejillas de difracción se mantuvo a 1328mm y el muestreo para el objeto fue muy pobre, es decir pocos puntos se proyectaron sobre esta Fig.4.16(b), este muestreo puede mejorarse para esta caso, disminuyendo la distancia entre rejillas y objeto aprovechando la profundidad de foco que se tiene con este sistema de proyección de puntos.

En la fig. 4.16(c) la reconstrucción del objeto sólo muestra algunas características del objeto como algunos puntos elevados con respecto al plano de referencia por lo mencionado antes en cuanto al muestreo realizado. Otro aspecto es que la superficie estaba parcialmente pulida y esto propició que se tuvieran reflejos intensos que en la imagen constituye ruido dificultando la localización de los puntos proyectados sobre esta. Para puntos que caen en algún borde parte del haz puede reflejarse en el objeto y parte en el plano de referencia o definitivamente reflejarse en tal dirección que salga de la línea de visión de la CCD y no sea registrado como imagen, análogamente puede suceder en el interior del área de muestreo del objeto, es decir, existe un ocultamiento de puntos que no son útiles en la medición de la superficie.

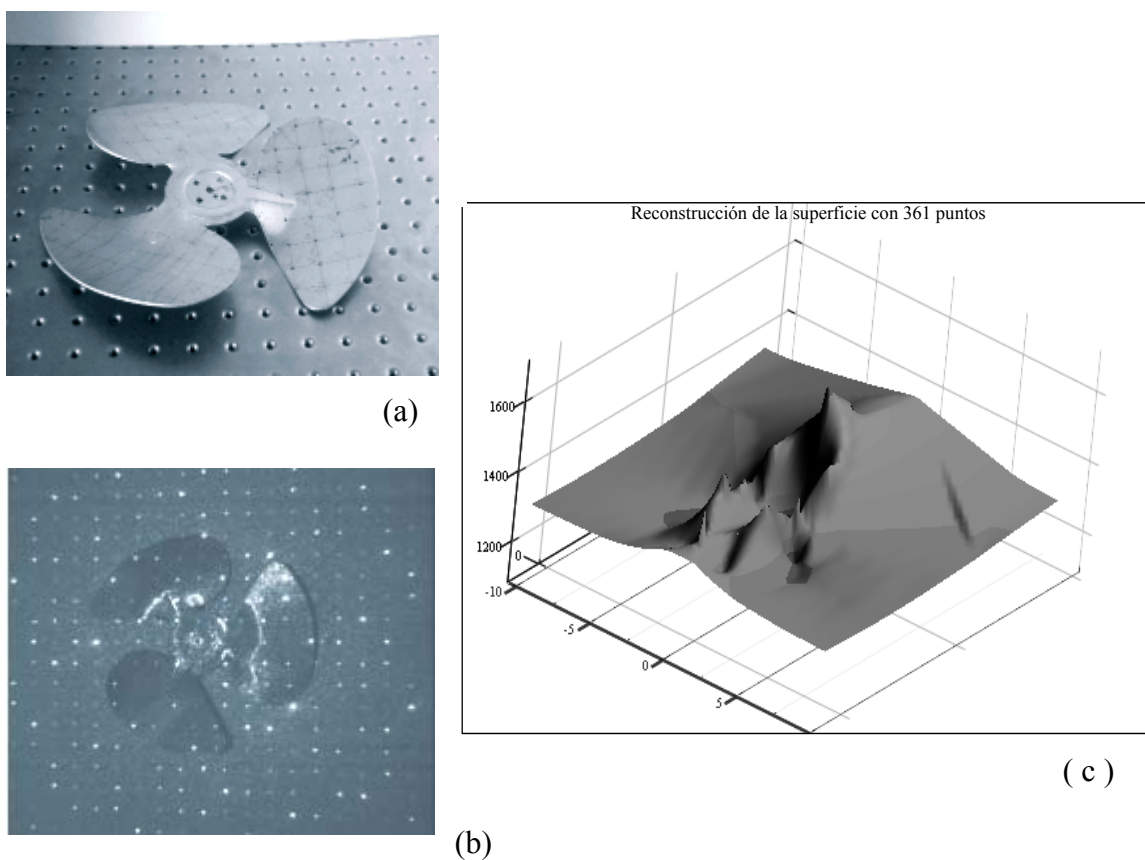


Fig.4.16 (a) Aspas como superficie a reconstruir, (b) Puntos proyectados sobre el objeto, (c) Reconstrucción del objeto.

Otra superficie cuyas deformaciones se distribuyen en forma irregular fue un rostro de yeso a escala real mostrando las mismas dificultades que para el caso de las aspas, sin embargo para ambos casos realizando la correspondencia entre puntos con respecto al orden cero de difracción para ambas longitudes de onda, se logra la reconstrucción de las superficies que en principio es una de los objetivos que se persiguen en este trabajo.

En la Fig. 4.17 se muestra la reconstrucción del rostro de yeso realizado con 168 puntos proyectados y puede verse que se tendría mayor detalle con un mayor número de puntos de muestreo con las respectivas complicaciones descritas antes.

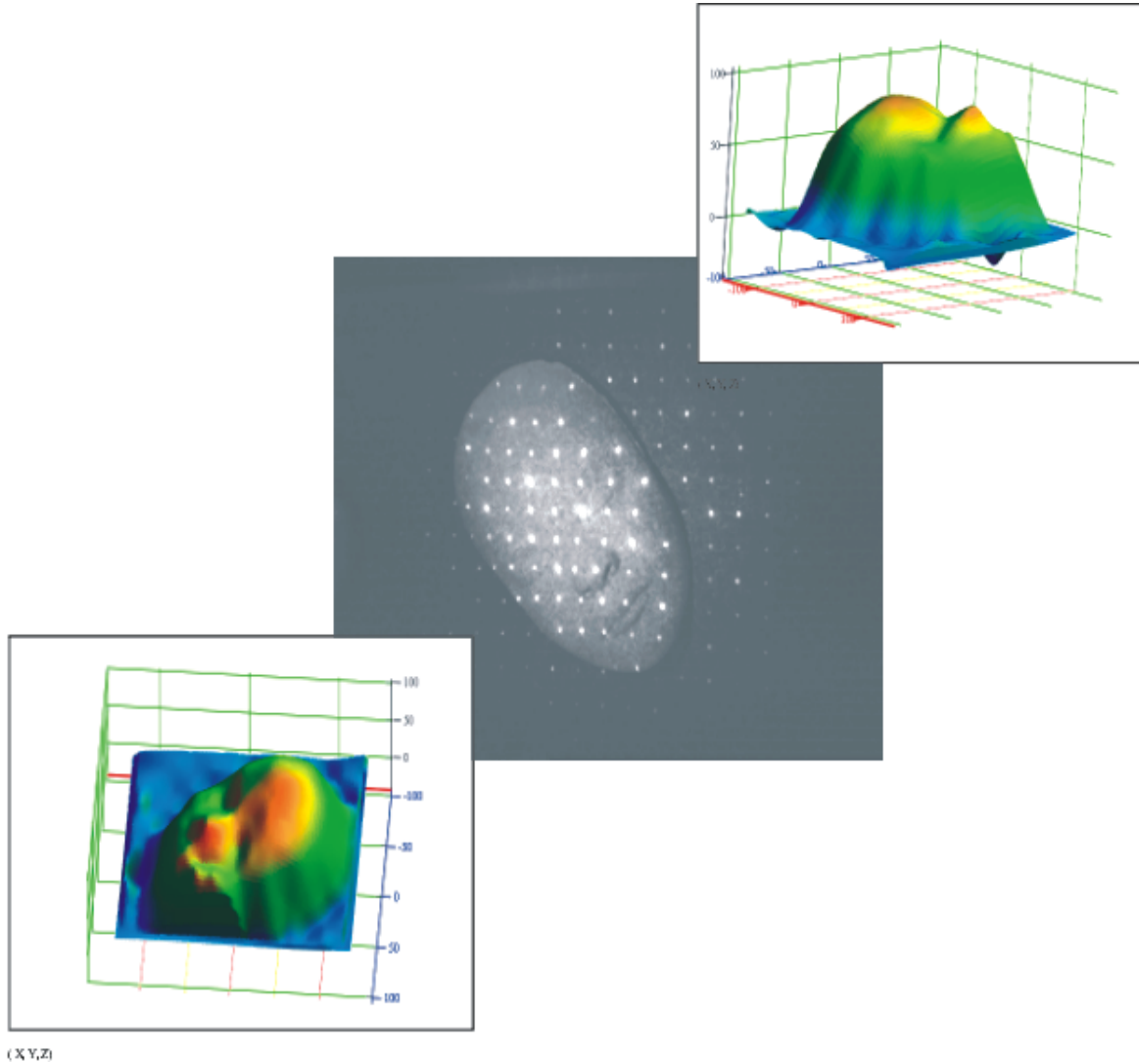


Fig. 4.17 Reconstrucción de un rostro de yeso a escala real con 168 puntos proyectados con un arreglo de dos rejillas de difracción rectangulares.

Conclusiones generales:

- 1.- Para el método de luz estructurada propuesto, el sistema de proyección se realizó con arreglo de tres rejillas de difracción rectangulares holográficas para incrementar el número de puntos proyectados sobre la superficie a medir y que para dos rejillas de difracción cruzadas se proyectaron 169 puntos y para un arreglo de tres rejillas se proyectaron 459 por lo tanto se logra un mayor muestreo.
- 2.- Se considera la distorsión que se genera por el patrón de difracción de los puntos proyectados tomando en cuenta términos de orden superior en las posiciones de los puntos del patrón de difracción.
- 3.- Se realizó una evaluación de la distorsión de la lente de la cámara CCD resultando en valor $E = 1.2953 \times 10^{-9}$ y $M = .01164$ que equivale a una corrección de 10 píxeles para una distancia radial de aproximadamente 100cm.
- 4.- La posición de las coordenadas de los puntos en el plano imagen se determina mediante el cálculo del centroide para cada una de estos.
- 5.- El cálculo de centroides se logra semiautomatizar para el caso en que se tiene cierta simetría en la posición de los puntos proyectados mediante umbralaje por ejemplo en la calibración del arreglo de rejillas de difracción.
- 6.- Tomando distancias mínimas se determina la posición de los puntos proyectados sobre la superficie, sin embargo, necesita considerarse el no trabajar con el modelo de “pinhole” y trabajar tomando la lente de la CCD como lente gruesa. Por esto se tienen separaciones entre rectas correspondientes de .002mm hasta .5mm después de proyectarse en la superficie. Si se trabaja directamente en la obtención de las rectas y la intersección entre las mismas puede suceder que no se tenga intersección entre estas y será información perdida para la medición.
- 7.- La correspondencia entre puntos objeto y puntos imagen se realizó con respecto al orden cero de difracción para dos longitudes de onda diferentes. Si se trabaja con imágenes a color y se consideran estos dos haces de luz que inciden en el arreglo de tres rejillas de difracción se duplica el muestreo de los puntos proyectados. El método de identificación del orden cero de difracción resulta adecuado en este trabajo pues se trabaja con una superficie suave y con esto no se pierde información de los puntos proyectados a acepción del borde del lado opuesto del espejo con respecto a la posición de la cámara.

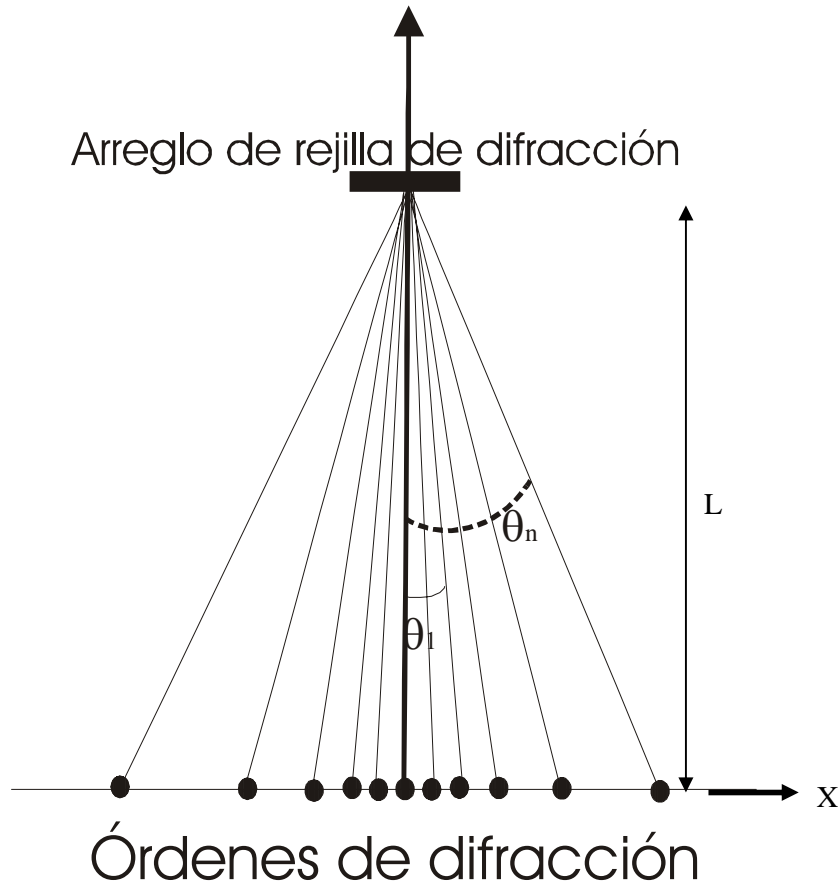
8.- Para la medición para un espejo cóncavo de fibra de carbono se realizó un ajuste a la mejor esfera de radio $r=298\text{mm}$ y comparando con $r = 301\text{mm}$ (Medido con un esferómetro sobre la parte central de un meridiano), se tiene un error del 1%. Tomando la diferencia mínima entre datos experimentales y ajuste se logra medir deformaciones de $\sim 13\mu\text{m}$.

9.- Para las aspas de ventilador y rostro de yeso se logra la reconstrucción de estos, presentando las siguientes dificultades: pérdida de puntos por la forma de la superficie por cambios abruptos en su forma y ocultamiento de puntos por la posición de la cámara CCD. Con estas últimas superficies se demuestra que es posible la reconstrucción de cualquier forma de superficie encontrando información tridimensional de objetos difusos o no especulares mediante coordenadas bidimensionales tanto en el plano objeto como en el plano imagen mediante este sistema de luz estructurada

10.- Los aspectos que se deben corregir experimentalmente son asegurar que el arreglo de rejillas de difracción deben colocarse de tal forma que no haya separación entre ellas pues si no es así existen puntos dobles para un mismo orden de difracción no teniendo la certeza de cual elegir para realizar la medición, si existiera una separación entre estas se tienen que colocar paralelamente una con respecto a la otra. Se requiere que se analice si el tomar distancia mínima entre rectas determina en forma objetiva la posición de los puntos proyectados, así también, la calibración de los puntos proyectados por la rejilla de difracción y finalmente no trabajar con el modelo de “pinhole” y considerar la lente de la cámara como lente gruesa.

11.- La medición se realizó a nivel laboratorio para un espejo de fibra de carbono de 388mm de diámetro y otras formas de superficie.

Apéndice A.
Distorsión del patrón en la rejilla de difracción.



Las posiciones de los diferentes órdenes de difracción esta dada por:

$$n\lambda = d\sin\theta$$

Para el caso de la posición de los primeros órdenes (figura) se puede hacer la aproximación para ángulos pequeños: $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ y con esto las posiciones, entonces para el caso bidimensional $m\lambda = d\frac{x}{L}$ y $n\lambda = d\frac{y}{L}$. Si elevamos al cuadrado estas expresiones y luego sumamos se llega a la relación de las posiciones radiales en aproximación paraxial:

$$r = L\frac{\lambda}{d}(m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}$$

Sin embargo para órdenes de difracción superiores para ángulos pequeños ya no es válida y se tiene que considerar que $\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}}$ y en forma análoga en la otra dirección

$\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{L^2 + y^2}}$. De igual forma elevamos al cuadrado y sumamos y realizando operaciones:

$$(m^2 + n^2) \frac{\lambda^2}{d^2} = \frac{(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y^2}{L^2}}{L^2 \left(1 + \frac{(x^2 + y^2)}{L^2} + \frac{x^2 y^2}{L^4}\right)}$$

Factorizando y reorganizando términos:

$$\left[(m^2 + n^2) \frac{\lambda^2}{d^2} \right] \left[L^2 + (x^2 + y^2) + \frac{x^2 y^2}{L^2} \right] = x^2 + y^2$$

Factorizando $x^2 + y^2$ se tiene:

$$\left[(m^2 + n^2) \frac{\lambda^2}{d^2} L^2 \right] \left[L^2 + \frac{x^2 y^2}{L^4} \right] - \frac{x^2 y^2}{L^2} = (x^2 + y^2) \left[1 - (m^2 + n^2) \frac{\lambda^2}{d^2} \right]$$

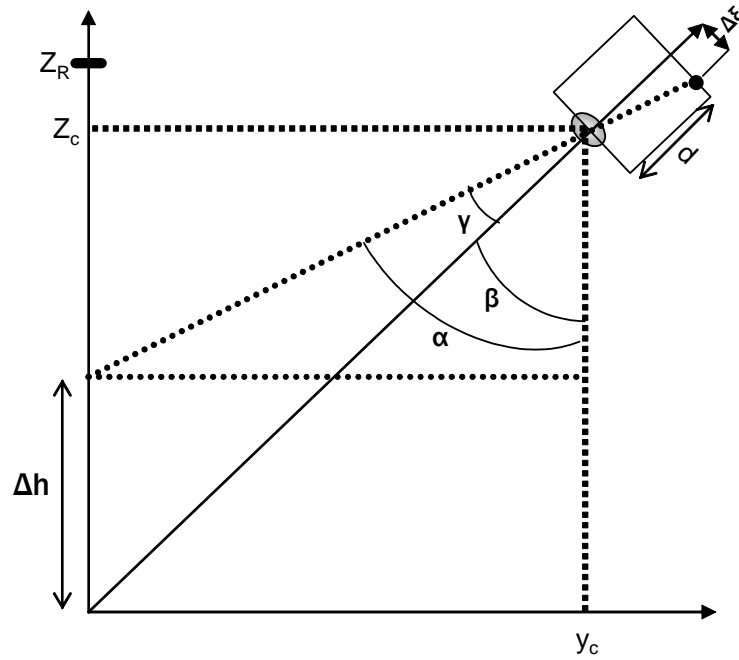
Los términos que contienen productos de xy son pequeños comparados con L por lo que pueden despreciarse por lo que finalmente:

$$r = \frac{\lambda}{d} L \left[\frac{m^2 + n^2}{1 - \left(\left(\frac{m\lambda}{d} \right)^2 + \left(\frac{n\lambda}{d} \right)^2 \right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Apéndice B

Análisis de sensibilidad.

Primero se toma un punto sobre el eje Z y se realiza el análisis de la sensibilidad del cambio de posición para este caso particular, es decir, de un punto que originalmente se proyecta sobre el origen) mientras que cuando se proyecta sobre una superficie, el punto cambia de posición Δh (e este caso sobre el eje Z). Nos interesa encontrar el valor $\Delta \xi$ asociado a este desplazamiento y conocer su comportamiento con la posición y_c de la cámara CCD.



De la figura:

$$\tan \beta = \frac{y_c}{z_c} \quad (1B)$$

$$\tan \alpha = \frac{y_c}{z_c - \Delta h} \quad (2B)$$

$$\tan \gamma = \frac{\Delta \xi}{d} \quad (3B)$$

También: $\alpha = \beta + \gamma$ por lo que sustituyendo en la ecuación (2A) y utilizando la identidad trigonométrica de la tangente de suma de ángulos:

$$\tan(\beta + \gamma) = \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma} \quad (4B)$$

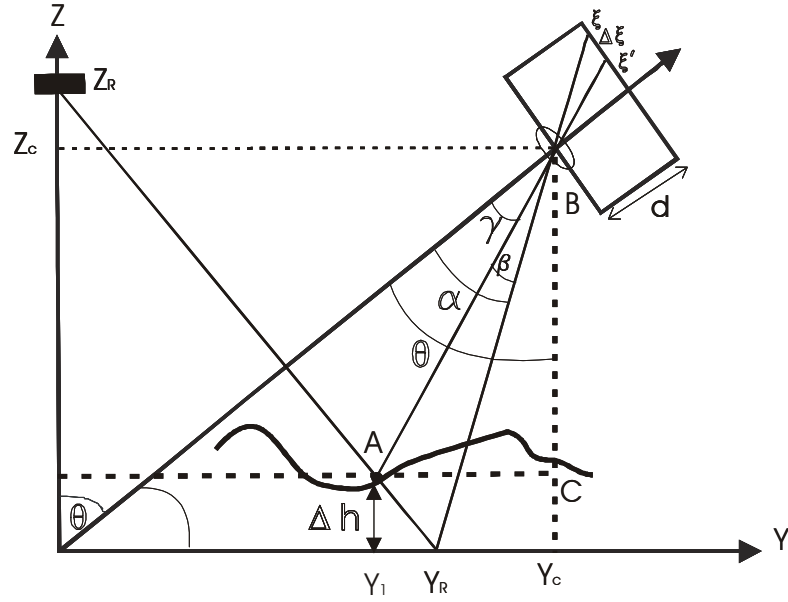
Sustituyendo en (1A) el resultado (4A) y simplifican

$$\frac{y_c}{z_c - \Delta h} = \frac{y_c d + \Delta \xi}{z_c d - y_c \Delta \xi} \quad (5B)$$

Reordenando y simplificando resulta:

$$\Delta x = \left[\frac{y_c \Delta h}{z_c^2 + y_c^2 - \Delta h y_c} \right] d \quad (6B)$$

Ahora tomando un punto cualquiera fuera del eje Z se tiene lo siguiente:



De la figura

$$\tan \theta = \frac{y_c}{z_c} \quad (7B)$$

$$\tan \alpha = \frac{\xi}{d} \quad (8B)$$

$$\tan \gamma = \frac{\xi'}{d} \quad (9B)$$

$$\Delta \xi = \xi - \xi' \quad (10B)$$

También

$$\beta = \alpha - \gamma \quad (11B)$$

Entonces

$$\tan \beta = \tan(\alpha - \gamma) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (12B)$$

Sustituyendo (7A) y (8A) en (11A):

$$\tan \beta = \frac{d\Delta\xi}{d^2 + \xi\xi''} \quad (13B)$$

De la figura B2 $S' = \theta - \alpha$, y del triángulo ABC se tiene:

$$\tan(\beta + S') = \frac{y_c - y_1}{z_c - \Delta h} \quad (14B)$$

Aplicando la identidad trigonométrica para la tangente de la suma de dos ángulos y simplificando:

$$\tan \beta = \frac{(1 + \tan \theta \tan \alpha)(y_c - y_1) - (z_c - \Delta h)(\tan \theta - \tan \alpha)}{(1 + \tan \theta \tan \alpha)(z_c - \Delta h) - (\tan \theta - \tan \alpha)(y_c - y_1)} \quad (15B)$$

Sustituyendo (6A) y (7A) en (14A) y simplificando:

$$\Delta\xi = \left[\frac{(z_c d + y_c)(y_c + y_1) - (z_c - \Delta h)(y_c d - \xi z_{c1})}{(z_c d + x_c \xi)(z_c - \Delta h) - (y_c d + \xi y_c)(y_c + y_1)} \left(\frac{d^2 + \xi \xi'}{d} \right) \right] \quad (16B)$$

Para que (15A) únicamente dependa de y_c , se tiene que expresar ξ y ξ' e términos de los parámetros del problema excluyendo $\Delta\xi$. De la figura B2:

$$\frac{\xi}{y_c} = \frac{\sqrt{\xi'^2 + d^2}}{\sqrt{y_c^2 + z_c^2}} \quad (17B)$$

Reordenando y elevando al cuadrado:

$$\xi = \frac{x_c d}{y_c} \quad (18B)$$

De la misma figura:

$$\frac{\xi}{y_c - y_1} = \frac{\xi'^2 + d^2}{\sqrt{(y_c - y_1)^2 + (z_c - \Delta h)^2}} \quad (19B)$$

Simplificando y elevando al cuadrado se tiene:

$$\xi = \left[\frac{d(y_c - y_1)^2}{(y_c - y_1)^2 + (z_c - \Delta h)^2 - y_c^2} \right]^{1/2} \quad (20B)$$

Con esto $\Delta\xi$ únicamente depende del desplazamiento de la cámara CCD en la dirección y_c .

Apéndice C:**Simulación de rotación un arreglo de dos rejillas de difracción.**

Aplicando la matriz de rotación a una primer rejilla de difracción y en forma análoga para una segunda rejilla tomando un arreglo de puntos de 7x7 para cada una de ellas, se esta considerando el caso de óptica clásica donde no existe distorsión en los puntos del patrón de difracción.

```

P(tg) :=
  a ← 2
  tr ← tg ·  $\frac{\pi}{180}$ 
  k ← 0
  for n ∈ -3..3
    for m ∈ -3..3
      for i ∈ -2..2
         $\begin{cases} XY_{k,0} \leftarrow (a \cdot i \cdot \cos(tr)) + n \cdot a \\ XY_{k,1} \leftarrow (-a \cdot i \cdot \sin(tr)) + m \cdot a \\ k \leftarrow k + 1 \end{cases}$ 
        Rotación para
        una primer rejilla
      for n ∈ -3..3
        for m ∈ -3..3
          for i ∈ -2..2
             $\begin{cases} XY_{k,0} \leftarrow (a \cdot i \cdot \sin(tr)) + n \cdot a \\ XY_{k,1} \leftarrow (a \cdot i \cdot \cos(tr)) + m \cdot a \\ k \leftarrow k + 1 \end{cases}$ 
            Rotación para una
            segunda rejilla
  XY

```

Apéndice D.**Calibración del arreglo de rejillas para obtener coordenadas de los puntos proyectados sobre el plano de referencia.**

De la ecuación normal a un plano:

$$(\bar{P} - P_0) \cdot \bar{N} = 0 \quad (1D)$$

Con $\bar{N} = (0,0,1)$ por ser un plano horizontal y con la ecuación vectorial de la recta:

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + t\bar{u} \quad (2D)$$

Sustituyendo (2C) en (1C) :

$$[(\bar{P}_1 + t\bar{u}) - \bar{P}_0] \cdot \bar{N} = 0 \quad \text{Se tiene} \quad [(\bar{P}_1 - \bar{P}_0 + t\bar{u})] \cdot \bar{N} = 0 \quad (3D)$$

Por la propiedad distributiva del producto escalar:

$(\bar{P} - \bar{P}_0) \cdot \bar{N} + t(\bar{u} \cdot \bar{N}) = 0$ Se tiene: $t(\bar{u} \cdot \bar{N}) = (\bar{P}_0 - \bar{P}) \cdot \bar{N}$ Si el plano y la recta no son paralelos implica $\bar{u} \cdot \bar{N} \neq 0$ por lo que en (3C):

$$t = \frac{(\bar{P}_0 - \bar{P}_1) \cdot \bar{N}}{\bar{u} \cdot \bar{N}} \quad (4D)$$

Sustituyendo (4B) en (2B) se tiene:

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \left[\frac{(\bar{P}_0 - \bar{P}_1) \cdot \bar{N}}{\bar{u} \cdot \bar{N}} \right] \bar{u} \quad (5D)$$

De la ecuación (5C) conociendo las coordenadas en el plano imagen \bar{N} el vector normal del plano y el vector de dirección de la recta \bar{u} se pueden determinar las coordenadas de los puntos proyectados sobre el plano de referencia.

Apéndice E.

Calibración de Arreglo de tres rejillas de difracción.

El programa lo que requiere son los datos de los puntos en el plano imagen y las coordenadas de la lente de la cámara para construir una recta e intersectandola con en plano horizontal (escena) donde se proyectan los diferentes ordenes de difracción respectivos. Con esto se determinan las posiciones de os diferentes ordenes de difracción sin requerir realizar una corrección por distorsión de acuerdo a la ecuación (5B).

C :=



C:\PruebaDatEspSinDist.txt

Archivo de datos de la imagen

i := 0..340 CCC := .01375·C

CC_{i,0} := (CCC)_{i,1} CC_{i,1} := (-CCC)_{i,0}

Ordenamiento de puntos

$$Z_c := 1299 \quad Y_c := 365 \quad X_c := 0 \quad T := \operatorname{atan}\left(\frac{Y_c}{Z_c}\right)$$

$$s_o := \sqrt{Z_c^2 + Y_c^2}$$

f := 16

$$s_i := \frac{f \cdot s_o}{s_o - f}$$

Parámetros de
medición

T = 0.274

s_i = 16.192

Calibración del arreglo de rejillas de difracción

P := for i ∈ 0..340

for j ∈ 0..1

d ← s_i

$$x_{i,0} \leftarrow CC_{i,0} + \left(\frac{d \cdot \cos(T) - CC_{i,1} \cdot \sin(T) + Z_c}{-d \cdot \cos(T) + CC_{i,1} \cdot \sin(T)} \right) \cdot (CC_{i,0})$$

$$y_{i,0} \leftarrow d \cdot \sin(T) + CC_{i,1} \cdot \cos(T) + Y_c + \left(\frac{d \cdot \cos(T) - CC_{i,1} \cdot \sin(T) + Z_c}{-d \cdot \cos(T) + CC_{i,1} \cdot \sin(T)} \right) \cdot (d \cdot \sin(T) + CC_{i,1} \cdot \cos(T))$$

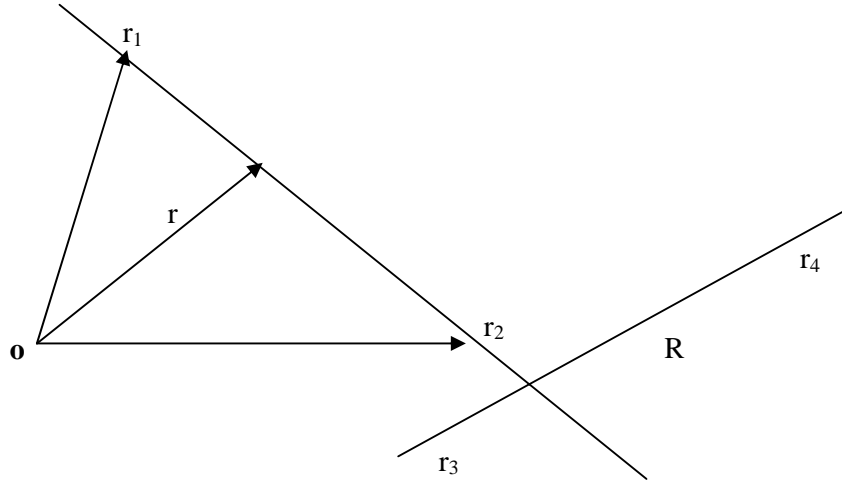
xy₀ ← xxy₁ ← y

xy

Determinación de las coordenadas de los puntos proyectados en el plano de referencia, de acuerdo a la ecuación (5B), conociendo las coordenadas en el plano imagen y las coordenadas del “pinhole” de la lente de la cámara CCD e intersectandolo con el plano horizontal donde se proyectan los ordenes de difracción y cuya normal apunto en la dirección z.

Apéndice F:

Ecuación de la recta trabajando con distancias mínimas



$$\bar{r} = \bar{r}_1 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \tag{1F}$$

Para una segunda recta

$$\bar{R} = \bar{r}_3 + s(\bar{r}_4 - \bar{r}_3) \tag{2F}$$

La distancia de \bar{r} a \bar{R} esta dada por

$$|\bar{r} - \bar{R}| = |\bar{r}_1 - \bar{r}_3 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) - s(\bar{r}_4 - \bar{r}_3)| \tag{3F}$$

Que desarrollando se tiene $A = d^2 = |\bar{r} - \bar{R}|^2 = At^2 + Bs^2 + 2ct + 2ds + 2Est + F$ (4F)

Donde

$$\begin{aligned} A &= |\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2 \\ B &= |\bar{r}_4 - \bar{r}_3|^2 \\ C &= (\bar{r}_1 - \bar{r}_3)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \\ D &= -(\bar{r}_1 - \bar{r}_3)(\bar{r}_4 - \bar{r}_3) \\ E &= -(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_4 - \bar{r}_3) \\ F &= (\bar{r}_1 - \bar{r}_3) \end{aligned} \tag{5F}$$

Se tiene un mínimo en $|\bar{r} - \bar{R}|^2 = A$ cuando $\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial A}{\partial t} = 0$ (6F)

Entonces

$$\frac{\partial d}{\partial s} = 2Bs + 2D + 2Et = 0 \tag{7F}$$

Ahora

$$Bs + Et = -D \Rightarrow s = \frac{-D - Et}{B} \quad (8F)$$

$$Es + At = -C \Rightarrow E\left(\frac{-D - Et}{B}\right) + At = -C$$

Por lo que resolviendo para t:

$$t\left(A - \frac{E^2}{B}\right) = -C + \frac{ED}{B} \quad (9F)$$

Resultando

$$t_{\min} = \frac{-CB + ED}{AB - E^2} \quad \text{si } AB \neq E^2 \quad (10F)$$

Para s_{\min}

$$s = \frac{-D}{B} - \frac{E}{B} \left(\frac{-CB + ED}{AB - E^2}\right) = \frac{-D}{B} - \left(\frac{-EC + \frac{E^2}{B}}{AB - E^2}\right) \quad (11F)$$

$$s_{\min} = \frac{-DA + EC}{AB - E^2}$$

Por lo que

$$\bar{r}_m = \bar{r}_1 + t_{\min}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \quad (12F)$$

$$\bar{R}_m = \bar{r}_3 + s_{\min}(\bar{r}_4 - \bar{r}_3)$$

Apéndice G.

Posición centroides:

M:=READBM(PlmPlacaPerforada.mjm" Archivo imagen

Condiciones para umbralizar

```
N:=
| u ← 133
| for i ∈ 0..cols(M) - 1
|   for j ∈ 0..rows(M) - 1
|     | Nj,i ← -255 if Mj,i ≥ u
|     | Nj,i ← 0 if Mj,i < u
|   N
```

Lineas Verticales para formar malla

```
Reja1=
| R ← M - M
| a ← 10
| ko ← 3
| for n ∈ 0..32
|   for m ∈ 0..rows(M) - 1
|     | k ← floor((cols(M) - 1) / 30 * n) + ko
|     | Rm,k+a ← 250 if (k ≥ 0) · (k + a ≤ 639)
|     | Rm,k-a ← 150 if (k - a ≥ 0) · (k ≤ 639)
|   R
```

Lineas horizontales para formar malla

```
Reja2=
| R ← M - M
| a ← 10
| ko ← 5
| for n ∈ 1..22
|   for m ∈ 0..cols(M) - 1
|     | k ← floor((rows(M) - 1) / 22.5 * n) + ko
|     | Rk-a,m ← 250 if (k ≥ a) · k ≤ 479
|     | Rk+a,m ← 100 if (k ≥ 0) · k ≤ 479 - a
|   R
```

Calculo de los centroides

```
Centros :=
| a ← 10
| b ← 0
| X ← [Y ← (T ← 0)]
| ko ← 3
| k1 ← 5
| for n ∈ 0..30
|   for m ∈ 0..22
|     | k ← floor((cols(M) - 1) / 30 * n) + ko
|     | L ← floor((rows(M) - 1) / 22.5 * m) + k1
|     | for i ∈ -a..a
|     |   for j ∈ -a..a
|     |     | s ← k + j
|     |     | t ← L + i
|     |     | if (t ≥ 0) · (t ≤ 479) · [(s ≥ 0) · (s ≤ 639)]
|     |     |   | T ← T + Nt,s
|     |     |   | X ← X + s · Nt,s
|     |     |   | Y ← Y + t · Nt,s
|     |     | XYb,0 ← ( X / T )
|     |     | XYb,1 ← ( Y / T )
|     |     | X ← [Y ← (T ← 0)]
|     |     | b ← b + 1
|   XY
```

El programa toma la maya cuadrada formada por las líneas verticales y horizontales con un tamaño específico para cada cuadro que forma la malla dependiendo del número de puntos imagen proyectados sobre la superficie horizontal. Para cada uno de estos cuadrados calcula el centroide.

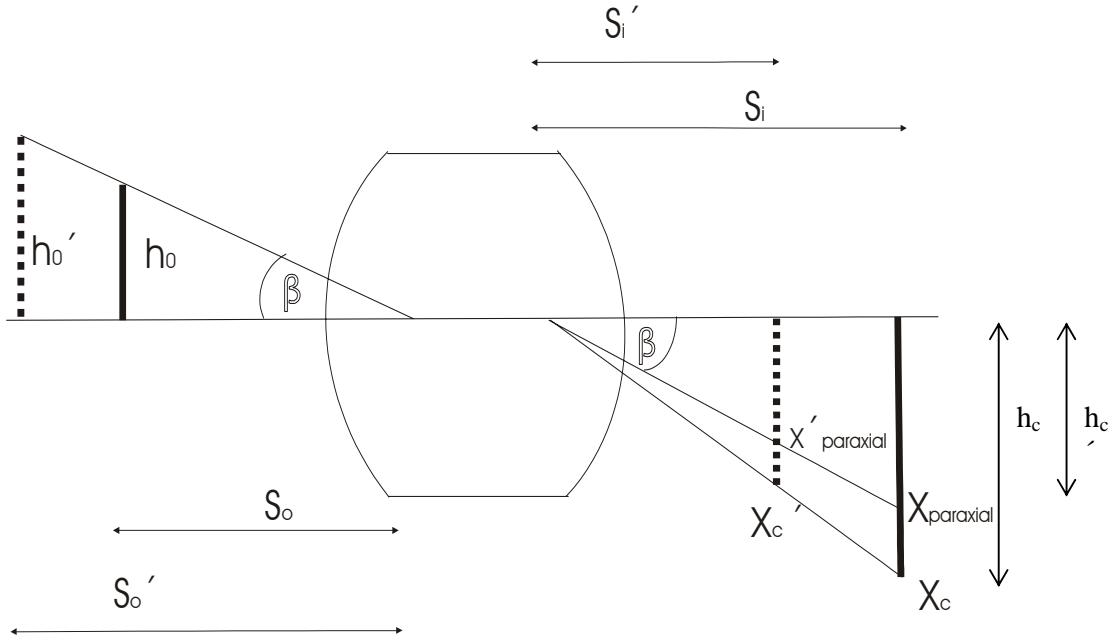
Tamaño de cada cuadrado de la malla en píxeles

Contribución de los elementos (píxeles) dentro de un rectángulo con su respectivo valor en tono de gris.

Valor del centroide con coordenadas *i,j*.

Apéndice H.

Evaluación de distorsión considerando lente gruesa y diferente posición de la cámara CCD en la dirección z:



De la ecuación de distorsión $h_{corregido} = h_{imagen} + Eh^3_{imagen}$ para una primera posición objeto S_o y su respectiva posición imagen S_i se tiene una posición paraxial con altura transversal $h_{imagenp}$ y una altura transversal corregida $h_{corregida}$.

En forma análoga para una segunda posición S_o' se tiene por la expresión de distorsión:

$$h'_{corregido} = h'_{imagen} + Eh^3_{imagen} \tag{1H}$$

En lo que sigue utilizamos c decorregido e i de imagen, de la figura se puede ver que:

$$\frac{h_i}{S_i} = \frac{h'_i}{S'_i} \Rightarrow h'_i = \frac{h_i S'_i}{S_i}$$

También por semejanza de triángulos:

$$h'_c = \frac{S'_i h_c}{S_i}$$

Por lo que sustituyendo en (G1):

$$h_c = h_i + E h_i^3 \left(\frac{S'_i}{S_i} \right)^2$$

Entonces:

$$E = E' \left(\frac{S'_i}{S_i} \right)^2 \tag{2H}$$

Para una segunda posición de un objeto con el mismo ángulo β el coeficiente de distorsión E'

varia por un factor $\left(\frac{S'_i}{S_i} \right)^2$.

Apéndice I.

Este programa determina las coordenadas de los puntos proyectados sobre la superficie a medir, con la correspondencia adecuada entre puntos objeto y sus respectivas imágenes calculando la distancia mínima entre rectas.

r2 :=

 C:\..\BDatosRef(459)OrdEval.txt

Archivo de datos de los puntos proyectados sobre el plano de referencia.

CC :=

 C:\..\BDatosEspejo(459)OrdEval.txt

Archivo de datos de las coord. puntos en el plano imagen.

Parametros de evaluación

i := 0..458

xo := 0

r1₀ := xo

xc := 0

r3₀ := xc

yo := 0

r1₁ := yo

yc := 350

r3₁ := yc

zo := 495

r1₂ := zo

zc := 1187

r3₂ := zc

$$so := \sqrt{xc^2 + yc^2 + zc^2}$$

$$si := \frac{F \cdot so}{so - F}$$

si = 25.515

so = 1.238 × 10³

si = 25.515

Conversión de coordenadas del plano imagen al sistema XYZ

r4 := $\left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..458 \\ \left| \begin{array}{l} xyz1_{i,0} \leftarrow C_{i,0} \\ xyz1_{i,1} \leftarrow C_{i,1} \cdot \cos(T) + si \cdot \sin(T) + yc \\ xyz1_{i,2} \leftarrow -(C_{i,1} \cdot \sin(T)) + si \cdot \cos(T) + zc \end{array} \right. \\ xyz1 \end{array} \right.$

Evaluación tomando distancia mínima entre rectas

```

XYZ :=
  R1 ← r1
  R3 ← r3
  for i ∈ 0..458
    for j ∈ 0..2
      R2j ← r2i,j
      R4j ← r4i,j
      A ← (R20 - R10)2 + (R21 - R11)2 + (R22 - R12)2
      B ← (R40 - R30)2 + (R41 - R31)2 + (R42 - R32)2
      C ← (R10 - R30)·(R20 - R10) + (R11 - R31)·(R21 - R11) + (R12 - R32)·(R22 - R12)
      D ← -[(R10 - R30)·(R40 - R30) + (R11 - R31)·(R41 - R31) + (R12 - R32)·(R42 - R32)]
      E ← -[(R20 - R10)·(R40 - R30) + (R21 - R11)·(R41 - R31) + (R22 - R12)·(R42 - R32)]
      F ← (R10 - R30)2 + (R11 - R31)2 + (R12 - R32)2
      XYZ = ■
      if (A·B - E2) ≠ 0
        tmin ←  $\frac{-C·B + E·D}{A·B - E^2}$ 
        smin ←  $\frac{-D·A + E·C}{A·B - E^2}$ 
        rm ← R1 + tmin·(R2 - R1)
        Rm ← R3 + smin·(R4 - R3)
        h1 ←  $\sqrt{(rm_0 - Rm_0)^2 + (rm_1 - Rm_1)^2 + (rm_2 - Rm_2)^2}$ 
        for j ∈ 0..2
          di,j ← rmj
          di,j+3 ← Rmj
        d1,6 ← h1
  d

```

Bibliografía:

- 1.- B. Wall
El Gran Telescopio Milimétrico (GTM)
<http://www.lmtgtm.org/overview/lmt/nodes.html>.
- 2.- D. Malacara, *Optical Shop Testing*, John Wiley & Sons, Inc., 697-700 (1992).
- 3.- Ref. (2),668-671.
- 4.- C. Gonzalez, P. Wintz, *Digital Image Processing*, Addison Wesley Publishing Company, 52-54(1984).
- 5.- O. Faugerus, *Three-Dimensional Computer Vision: A geometric Viewpoint*, MIT Press, Cambridge, (1993).
- 6.- E. Hecht, *Optica*, Addison Wesley 3a. edición, 450-485(2003).
- 7.- Ref. 4, 40-45.
- 8.- E. D. Nering, *Linear Álgebra and Matriz Throry*, John Wiley & Sons, Inc.; 201-202(1970).
- 9.- J. Batte, E. Mouadbib, J. Salvi, "Recent progress in coded structured light as a technique to solve the correspondence problems": A survey, *Pattern Recognition*, 31, 7, 967-968(1998).
- 10.- J.L Posdamer, M.D. Altschuler, "Surface measurement by space-encoded beam systems", *Computer Graphics and Image Processing*, 18, 1-17(1982).
- 11.- P.M.Griffin, L.S. Narasimhan, S.R.Yee, "Generation of uniquely encoded light patterns for range data acquisition", *Pattern Recognition*, 25, 609-616(1992).
- 12.- M. Maruyama , S. Abe, "Range sensing by projecting multiple slit with random cuts", *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 15, 647-651(1993).
- 13.- J. W. Goodmann, *Introduction to Fourier Optics*, MacGraw-Hill, 30-33(1968).
- 14.- M. V. Klein, *Optics*, McGraw Hill, 337-354(1986).
- 15.- Ghatak and Thayagarajan, *Contemporary Optics*, Plenum Press, 89-100(1978).
- 16.- B. Rossi, *Fundamentos de óptica*, Reverte, 215-230(1978).
- 17.- Ref.13, 43-47.
- 18.- Ref. 6, 463-466.

- 19.- M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics*, Interscience Publisher Inc., 299-307 (1967).
- 20.-A.E. Conrady, *Applied Optics & optical design, part two*, Dover publications,INC, New York,707-759(1960).
- 21.- J.E Harvey, D.Bogunovic, A. Krywonos, “Aberrations of diffracted wave fields: Distorsión”, *Applied Optics*, 42,7, 1167-1174(2003).
- 22.- M. Born, E. Wolf, *Principle of Optics*, Pergamon Pres, 207-232(1980).
- 23.- Ghatak and Thayagarajan, *Contemporary Optics*, Plenum Press, 31-48(1978).