



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**“Estudio de la Transferencia de Calor en  
una placa vertical plana debido al efecto  
de la condensación de una película de  
vapor sobre una de sus caras”**

**T E S I S**  
Que para obtener el grado Académico de:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA**  
**(TERMOFLUIDOS)**

**P r e s e n t a:**  
**GUSTAVO BECERRA MUÑOZ**

**Director: Dr. Cesar Treviño Treviño**

**México, D.F.; octubre de 2005**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>1. ANTECEDENTES</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Nucleación sobre superficies sólidas . . . . .	9
1.3. Problemas conjugados de transferencia de calor . . . . .	13
1.4. Estudios basados en la Solución de Nusselt . . . . .	17
1.5. Aproximación de Nusselt . . . . .	18
1.6. Objetivos . . . . .	19
<b>2. ECUACIONES BÁSICAS</b>	<b>21</b>
2.1. Simplificación de ecuaciones . . . . .	21
2.2. Orden de Magnitud de las ecuaciones básicas . . . . .	22
2.3. Ecuaciones de capa límite . . . . .	25
2.4. Análisis Dimensional . . . . .	25
2.5. Análisis de Orden de Magnitud para el problema conjugado . . . . .	25
2.6. Variables de semejanza para el problema conjugado . . . . .	30
2.7. Adimensionalización de las ecuaciones básicas . . . . .	32
2.8. Ecuación para la conducción de calor en la placa . . . . .	33
2.9. Ecuación Adimensional para la placa vertical . . . . .	34
<b>3. TRANSFERENCIA DE CALOR ACOPLADA</b>	<b>37</b>
3.1. Solución Analítica . . . . .	37
3.2. Solución Asintótica para la pared térmicamente delgada . . . . .	37
3.3. Solución numérica . . . . .	41
<b>4. RESULTADOS</b>	<b>43</b>
<b>5. CONCLUSIONES</b>	<b>47</b>

<b>6. APÉNDICES</b>	<b>49</b>
6.1. Distribución de temperaturas en la placa . . . . .	49
6.2. Solución de las Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas . .	51
6.3. Solución numérica de la capa límite . . . . .	52
6.4. Aplicación del Método de Keller . . . . .	54
6.5. Método de Newton . . . . .	56

# Índice de figuras

1.1. Condensación en un avión supersónico . . . . .	8
1.2. Formación de nubes . . . . .	9
1.3. Formación de gotas . . . . .	9
1.4. Condensación de tipo película sobre una superficie sólida . . .	10
1.5. Gráficas del flujo de calor durante la condensación . . . . .	11
1.6. Modelo de Fatika y Katz . . . . .	12
1.7. Modelo de Eucken . . . . .	12
1.8. Modelo de Emmons . . . . .	13
1.9. Modelo de Jakob . . . . .	14
1.10. Superficie fragmentada por condensación de gotas, no por rup- tura de película . . . . .	15
1.11. Problema Físico . . . . .	20
2.1. Ejes Coordinados . . . . .	34
2.2. Condiciones de frontera adimensionales . . . . .	36
3.1. Región Interna . . . . .	39
3.2. Corrección al espesor . . . . .	41
4.1. Espesor-alfa . . . . .	44
4.2. Flujo de calor- alfa . . . . .	45
4.3. Temperatura-alfa . . . . .	46
6.1. Malla numérica . . . . .	53

SÍMBOLO	NOMENCLATURA DEFINICIÓN	ECUACIÓN
$Cc$	calor específico del fluido condensado	2.4
$g$	aceleración de la gravedad	2.2
$h$	espesor de la placa	2.41
$L$	longitud de la placa	2.5
$Ja$	Número de Jakob	2.34
$Re$	Número de Reynolds	
$Pr$	Número de Prandtl	2.32
$t$	tiempo	2.2
$T$	temperatura	2.4
$g_c$	función de corriente adimensional	2.58
$u$	velocidad longitudinal	2.2
$v$	velocidad transversal	2.3
$x$	coordenada longitudinal	2.2
$y$	coordenada transversal	2.3
$z$	coordenada transversal adimensional	2.69
<b>GRIEGOS</b>		
$\alpha$	Parámetro adimensional	2.44
$\varepsilon$	Parámetro adimensional	2.35
$\gamma$	Parámetro adimensional	2.45
$\delta$	espesor de la película de condensado	2.30
$\lambda$	conductividad térmica	2.4
$\mu$	viscosidad dinámica	2.2
$\nu$	viscosidad cinemática	2.6
$\rho$	densidad	2.2
$\Delta$	espesor normalizado de la película de condensado	2.56
$\eta$	coordenada transversal para la película de fluido	2.50
$\theta_c$	temperatura adimensional del fluido	2.52
$\theta_w$	temperatura adimensional de la placa	2.53
$\chi$	coordenada longitudinal adimensional	2.51
$\Delta$	operador usado al escribir las ecuaciones en diferencias finitas	
<b>SUBÍNDICES</b>		
0	Condición inicial	
$\infty$	Condición del ambiente lejos de la placa	
$c$	Fluido condensado	
$w$	La placa	

## Resumen

Problema: Estudiar mediante métodos matemáticos un modelo acoplado de transferencia de calor conducción-condensación.

Propósito: Observar los efectos en el espesor de una capa de fluido que se condensa, sobre la superficie de una placa plana vertical en la cual existe una conducción de calor bidimensional de calor.

Objetivos:

- Analizar el orden de magnitud en las Ecuaciones Básicas.
- Encontrar los grupos adimensionales que caracterizan el problema.
- Establecer el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas.
- Resolver el modelo matemático suponiendo que tiene solución analítica y/o solución numérica.
- Obtener el comportamiento de las variables espesor de condensado, flujo de calor y temperatura cuando los parámetros adimensionales cambian sus ordenes de magnitud.
- Analizar la transferencia de calor longitudinal en el borde de entrada de la placa, usando las técnicas de perturbación.

Alcance: Mostrar que los efectos de conducción bidimensional sobre el espesor de la película de condensado son diferentes de la Solución de Nusselt.

Métodos y materiales:

Métodos numéricos y Estación de Trabajo.

Síntesis de Resultados:

Si el parámetro de conducción  $\alpha$  toma valores grandes se tiene el régimen de pared térmicamente delgada.

Para valores pequeños de  $\alpha$  se tiene el régimen de pared térmicamente gruesa en el cual aparecen la conducción de calor y una distribución de temperatura longitudinales que modifican significativamente el espesor de la capa de fluido condensado.

Conclusiones:

- El régimen de pared térmicamente delgada es equivalente a la Solución Clásica de Nusselt.
- La transferencia de calor bidimensional en la placa modifica el espesor de la película de condensado.
- La conducción de calor longitudinal es significativa en el borde de entrada de la placa.

# Capítulo 1

## ANTECEDENTES

### 1.1. Introducción

#### Descripción del Proceso de Condensación

El proceso de condensación es el cambio de fase de un gas a la fase líquida y sucede frecuentemente en fenómenos naturales; como ejemplo puede mencionarse la formación de nubes que ocasionan la lluvia, la formación del rocío en las hojas de las plantas, la formación de hielo sobre los aviones supersónicos, etc. También se requiere para la realización de ciertos procesos industriales donde es necesario para la completa operación de ciclos térmicos, ejemplos de ello son: el ciclo Rankine, ciclo de refrigeración, etc. por lo cual es importante saber más acerca de su control.

El proceso de condensación se puede producir fundamentalmente por dos mecanismos. En el primero existe la llamada condensación homogénea que ocurre con la formación de pequeñas gotas aisladas que aparecen espontáneamente en un gas, simplemente por una disminución de la temperatura cercana al valor de la temperatura de saturación, se considera que en este caso, la tensión superficial propicia la formación de gotas sin que exista la aparente necesidad de núcleos. El segundo mecanismo, es la condensación heterogénea y consiste en la formación de una película de fluido condensado sobre una superficie sólida a una temperatura ligeramente menor a la de saturación, donde el vapor se condensa pasando inmediatamente a la fase líquida.

Cuando se tiene una placa plana vertical conductora de calor, con las condiciones térmicas que se muestran en la figura 1.11. Si la temperatura del lado izquierdo de la placa se mantiene constante y es menor que la temperatura de



Figura 1.1: Condensación en un avión supersónico

saturación del vapor que se encuentra del lado derecho de la placa, entonces ocurre la condensación del vapor de tipo película sobre dicha superficie y se establece un flujo de condensado que desciende hasta cubrir totalmente la superficie de la placa con una delgada capa de fluido en fase líquida la cual tiene un espesor que es función directamente del número de Nusselt. En ciertas condiciones, por ejemplo, la existencia de ciertas sustancias como aceite sobre la superficie, pueden provocar que la película de condensado se rompa por diferencias de tensión superficial, formándose pequeñas gotas. Esta situación es el proceso de condensación tipo gota. La presencia de la película de un fluido condensado actúa como una resistencia térmica al flujo de calor, desde el vapor hasta la superficie de condensación. La condensación tipo gota ofrece una resistencia térmica menor. Si el vapor contiene gases no condensables, estos se acumulan en la atmósfera de condensación, y contribuyen a aumentar la resistencia térmica al flujo de calor, ya que el vapor tiende a difundirse en los gases no condensables. Es debido a este efecto, que en el diseño de condensadores se debe considerar el hecho de que los vapores contengan gases no condensables.



Figura 1.2: Formación de nubes

## 1.2. Nucleación sobre superficies sólidas

La nucleación sobre una fase sólida procede de uno de dos casos:  
Crecimiento de Gotas (fig. 1.3)

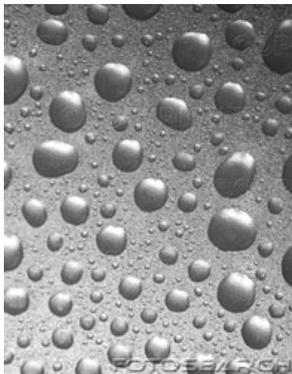


Figura 1.3: Formación de gotas

Condensación de tipo película (fig.1.4 )

La nucleación como tal hace que no exista la condensación de película estable, solamente una absorción continua o bien una emisión de moléculas. La condensación por gotas es clasificada como un fenómeno de nucleación, donde los sitios activos para la formación de gotas son puntos microscópicos, surcos y partículas sólidas. Una discusión de la condensación por gotas

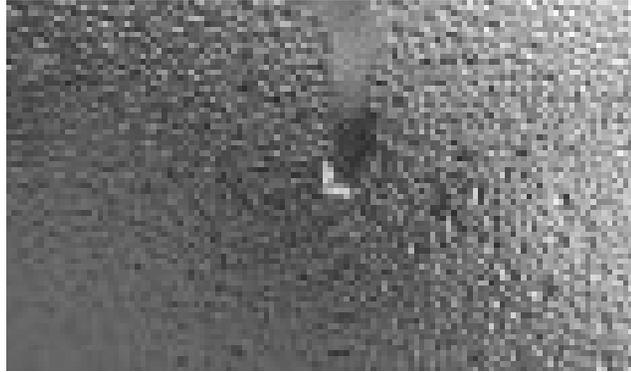


Figura 1.4: Condensación de tipo película sobre una superficie sólida

puede incluir otros aspectos relacionados con el fenómeno de nucleación; la población, distribución y medida de las gotas que tienen un papel promotor en la regulación de la población de las gotas y el mecanismo de pequeñas gotas que se remueven. Está bien establecido que las tasas de calor son más altas y además se elevan en el caso de la condensación por gotas, que con la condensación de película. La figura 1.5 muestra un ejemplo.

Un gran número de modelos del fenómeno de condensación por gotas han sido propuestos para describir y contabilizar la tasa de transferencia de calor. Ellos difieren esencialmente en la relativa importancia de la condensación directamente sobre las gotas o bien sobre los espacios entre gotas, a continuación se muestran algunos modelos gráficos y se describen.

### 1. Fatika y Katz

Este modelo considera que el crecimiento de la gota ocurre primeramente por condensación sobre ella, con el calor latente transportado a la superficie sólida por conducción a través de la gota. Una gráfica de flujo de calor bidimensional es usada para calcular la tasa de transferencia de calor. Suponiendo una gota de medida uniforme y cubriendo fragmentada y arbitrariamente a la superficie, es posible calcular un flujo de calor promedio. Debido a que la conductividad térmica del líquido es baja, la consecuencia es que el flujo de calor es pequeño también, excepto cerca de la intersección de la pared sólida y la orilla de la gota. Se ha sugerido que la tasa de transferencia de calor a través de la gota puede ser ampliada considerablemente, si toma lugar una

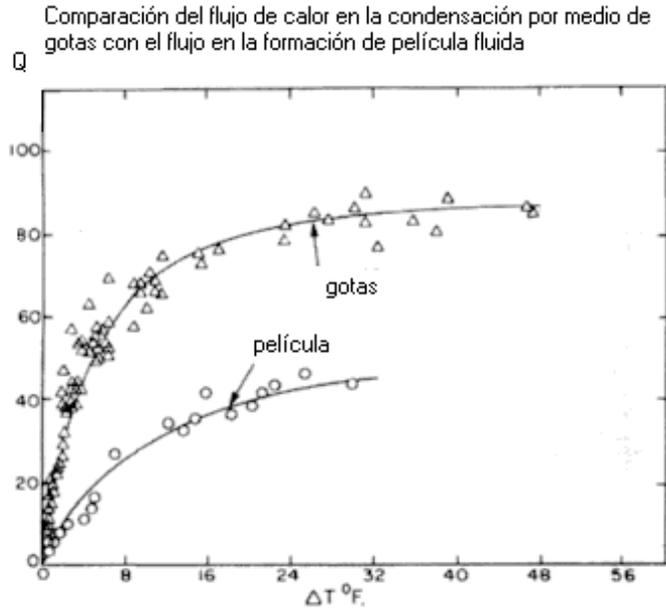


Figura 1.5: Gráficas del flujo de calor durante la condensación

débil circulación interna en las gotas debido a las variaciones en la tensión superficial, que ocurren cerca a la superficie de la placa. Una detallada solución con diferencias finitas de esta circulación en una gota hemisférica, indica que la contribución de la circulación al flujo de calor es insignificante.

## 2. Eucken

En adición directamente a la condensación sobre la gota fué propuesta una capa monomolecular formada entre las gotas. Adyacente a la gota, ésta capa es saturada, después de un tiempo no lejano será supersaturada. El gradiente de concentración en la capa de condensado combinado con la diferencia en el grado de saturación en la subcapa molecular, actúan como fuerzas de difusión sobre las moléculas impulsándolas hacia la gota.

Eucken también usó la teoría cinética de los gases para calcular la transferencia de calor por condensación de un vapor a la presión atmosférica, todas las moléculas recorren la superficie de enfriamiento inmediatamente conden-

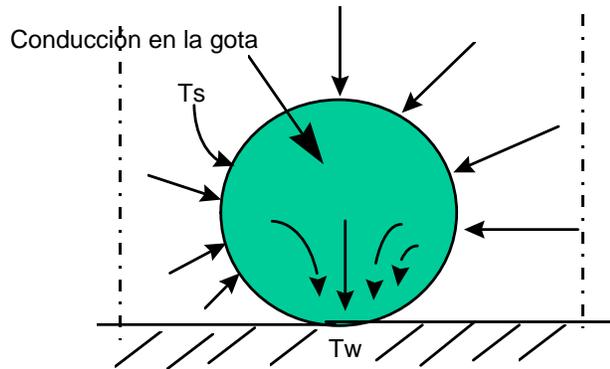


Figura 1.6: Modelo de Fatika y Katz

sadas. El resultado fue un flujo de calor 260 veces más grande que el máximo observado. De acuerdo con esto, cerca del 0.4% de las moléculas de vapor que recorren la superficie del sólido, son retenidas como líquido.

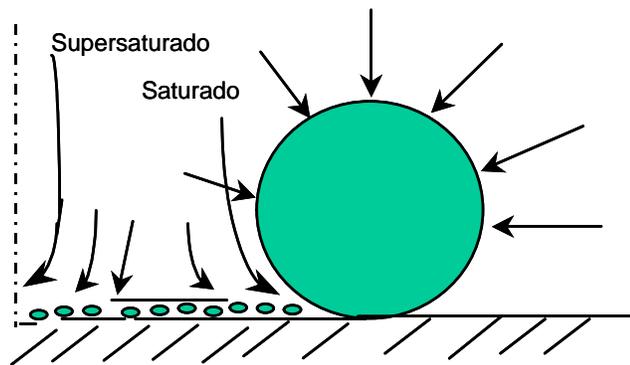


Figura 1.7: Modelo de Eucken

### 3. Emmons

Este mecanismo propone que aquellas moléculas del vapor que recorren la superficie libre del sólido son reevaporadas, pero en la superficie de la gota y más allá, son subenfriadas; entonces continúan por recondensación sobre las gotas. La superficie libre del sólido es cubierta por vapor supersaturado.

### 1.3. PROBLEMAS CONJUGADOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR<sup>13</sup>

Emmons también considera que la rápida condensación de una gota causa una reducción local en la presión que inicia un remolino local violento corriendo entre las gotas.

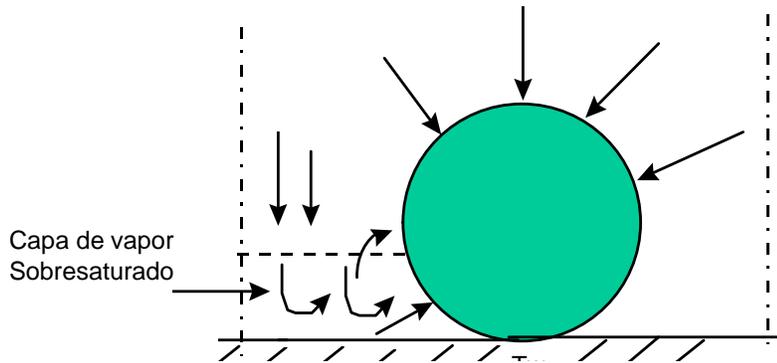


Figura 1.8: Modelo de Emmons

#### 4. Jakob

Jakob sugiere que la condensación por gotas resulta de la fractura de una delgada película de condensado, la cual cubre completamente la superficie del sólido hacia las gotas, luego la película tiene un crecimiento hasta algún espesor crítico, para que el proceso se repita por sí mismo. Existen observaciones microscópicas para sostener esta hipótesis. También se observó en las gotas suficientemente grandes para ser visibles (0.01 mm.) que crecen primeramente por cohesión con otras gotas. Luego la superficie libre de metal, es expuesta y se nota por una apariencia lustrosa. El lustre desaparece muy rápidamente, indicando que la condensación se está iniciando arriba nuevamente. Subsecuentes trabajos han indicado que el mecanismo de fractura de la película no existe.

### 1.3. Problemas conjugados de transferencia de calor

El análisis de fenómenos de transferencia de calor que involucran los efectos simultáneos de conducción, convección de calor y condensación, han

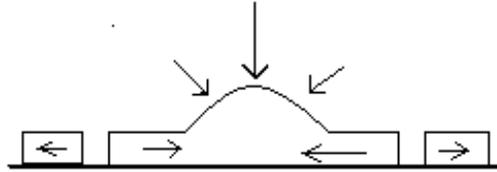


Figura 1.9: Modelo de Jakob

recibido considerable atención en los últimos años en la literatura técnica debido a su importancia y su aplicación en áreas tales como, intercambiadores de calor, condensadores, enfriamiento de componentes electrónicos, sistemas de acondicionamiento de aire en edificios y tratamientos térmicos, entre otros.

El fenómeno de la condensación laminar de una película sobre superficies verticales, tomando en cuenta condiciones no isotérmicas, ha sido analizado en el pasado por numerosos investigadores [1 – 6].

En particular Patankar y Sparrow[1] resolvieron el problema de condensación sobre una superficie extendida considerando la conducción de calor en una aleta acoplada con el proceso de condensación. La solución numérica de las ecuaciones que gobiernan el problema, confirman la influencia física de una superficie extendida no isotérmica sobre el proceso de condensado. Subsecuentemente, fue mostrado por Wilkins[2] que una solución analítica explícita es posible para la formulación de Patankar y Sparrow. Sarma y Chary[3] estudiaron el proceso de condensación sobre una aleta vertical de espesor variable. El acoplamiento de las ecuaciones que gobiernan el problema de la aleta vertical, la fase de condensado, el efecto de la geometría de la aleta sobre la transferencia de calor por condensación ha sido analizado y la influencia de esta interacción ha resultado muy importante. Brouwers[4] desarrolló un análisis de la condensación de un vapor saturado puro sobre un intercambiador de calor, incluyendo la interacción entre el líquido enfriador, el condensado y el vapor, con lo cual obtuvo en forma cerrada la solución de las ecuaciones que gobiernan el proceso, confirmando que esta interacción tiene que ser tomada en cuenta para obtener modelos más realistas de este

### 1.3. PROBLEMAS CONJUGADOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR 15



Figura 1.10: Superficie fragmentada por condensación de gotas, no por ruptura de película

tipo de procesos. Treviño y Méndez[5] estudiaron el proceso de condensación de un vapor en un problema de conducción conjugado y transitorio sobre uno de los lados de la placa vertical, causado por una relación de enfriamiento uniforme sobre la otra superficie de la placa incluyendo inercia térmica finita. Su resultado principal obtenido indica que la evolución del espesor de la capa de condensado es casi insensible a los efectos de la conducción de calor longitudinal a través de la placa en el caso de una placa térmicamente delgada. Recientemente, Méndez y Treviño[6] analizaron el proceso de condensación de una película de un vapor saturado en contacto con uno de los lados de la placa vertical, causado por un flujo forzado sobre el otro lado de la placa. Ellos mostraron que los efectos de conducción a través de la placa, modifican substancialmente la solución clásica de Nusselt[7]. En la presente tesis, consideramos el proceso de condensación de una película de vapor a una temperatura de saturación  $T_s$  sobre una superficie lateral de una placa vertical, causada por una temperatura uniforme  $T_0$  que se impone de tal manera que siempre se cumple que  $T_0 < T_s$  sobre la otra superficie lateral izquierda de la placa. Se consideran los efectos de la conducción de calor en ambas direcciones, esto es transversal y longitudinal. Este proceso de condensación puede ser caracterizado principalmente por dos parámetros adimensionales,  $\alpha$  y  $\varepsilon$ . El parámetro  $\alpha$  representa la competencia entre el calor global conducido transversalmente y longitudinalmente por toda la placa contra el flujo de calor llevado desde el exterior al interior de la placa desde la fase de condensado; mientras que  $\varepsilon$  es la relación de aspecto de la

placa (relación de esbeltez), el cual se supone muy pequeño comparado con la unidad. En este trabajo se desarrolla un análisis asintótico para grandes valores de  $\alpha/\varepsilon^2$  comparados con la unidad. A este caso se le denomina régimen de pared térmicamente delgada. También se analiza el problema cuando los valores de  $\alpha$  son de orden unidad y muy pequeños comparados con la unidad. A este último caso se le conoce como régimen de pared térmicamente gruesa.

Treviño y Méndez[15] estudiaron el mismo problema e identificaron los diferentes casos posibles. Ellos presentaron soluciones numéricas y asintóticas para todos los valores posibles de parámetro  $\alpha$ , el cual es la medida de la importancia de la conducción de calor longitudinal en la placa. Ellos encontraron que un número de Nusselt promedio o flujo de calor global adimensional máximo, es obtenido para valores de  $\alpha$  mucho mayores de la unidad pero todavía grandes, comparados con  $\varepsilon^2$ , donde  $\varepsilon$  corresponde a la relación de esbeltez.

Córdova y Treviño[16] analizaron el enfriamiento de una placa delgada vertical, provocado por un flujo convectivo libre, para lo cual usaron técnicas de perturbación de escala múltiple, ellos mostraron que debido a la conductividad térmica finita de la placa, aparece un gradiente de temperatura longitudinal, lo que impide obtener una solución de similaridad del flujo de capa límite libre. En este caso, justo en el límite de grandes números de Rayleigh, el problema matemático es elíptico más que parabólico. También estudiaron el caso de una placa térmica delgada, usando una versión simplificada de la ecuación de energía de la placa, donde las variaciones de temperatura en la dirección transversal son pequeñas comparadas con el valor de la temperatura por sí misma. Ellos encontraron del análisis asintótico que para grandes valores del parámetro  $\alpha$ , el tiempo de enfriamiento adimensional decrece tanto como el valor de  $\alpha$  decrece. Este es un resultado muy importante, el cual indica que la tasa de enfriamiento más alta puede ser alcanzada en una placa con conductividad térmica mas baja.

El objetivo de esta tesis es evaluar el efecto de la conducción bidimensional de calor en el enfriamiento de una placa vertical sobre una película de fluido condensado en una de las superficies de la propia placa. La formación de dicha película es inducida por el mismo proceso de enfriamiento de la placa, por lo que se trata de un proceso acoplado de transferencia de calor. Cabe mencionar que los efectos convectivos dentro la película de fluido condensado se pueden despreciar. Este problema puede ser resuelto por medio de las técnicas de perturbación singular para encontrar una solución analítica y también se puede encontrar solución mediante las técnicas numéricas,

y así comparar los resultados que se obtengan con las soluciones exactas o soluciones aproximadas que existen en la literatura acerca de este tipo de problemas.

## 1.4. Estudios basados en la Solución de Nusselt

Desde el trabajo de Nusselt (1916)[7] diversos estudios teóricos de película han recibido considerable atención en la literatura. La aproximación de Nusselt se basa en simplificar las ecuaciones de Navier Stokes a una sola dirección de movimiento vertical descendente, y considerar que el término asociado a las fuerzas de gravedad es del mismo orden de magnitud que el término de las fuerzas viscosas, los términos de aceleración temporal y convectiva se consideran de orden cero, la otra ecuación que se considera para obtener la solución es un balance de masa y energía en la interfaz de la película de condensado. La solución de Nusselt nos permite obtener el espesor de la capa de condensado de un vapor saturado en contacto con una superficie vertical a una temperatura uniforme menor que la de saturación del vapor, y se obtienen resultados muy parecidos a los experimentales, pero hay que resaltar que la solución de Nusselt no considera los efectos la conductividad térmica ni las dimensiones de la placa, largo y espesor que son el motivo de este trabajo. Bromley (1952), desarrolló un análisis simple mostrando que es posible considerar la capacidad calorífica como una corrección de primer orden para producir un número de Nusselt modificado. Rohsenow (1956) modificó el análisis de Nusselt introduciendo los términos convectivos en la ecuación de la energía. Sin embargo, su análisis no incluye las fuerzas inerciales, como lo hizo Bromley (1956) por un procedimiento alternativo. Sparrow y Gregg (1959), introdujeron el tratamiento de una capa límite y transformaciones de semejanza de las ecuaciones de balance. Mostraron numéricamente que los efectos inerciales sobre la película de condensado no son importantes si el número de Prandtl es más grande que 10 y son suficientemente pequeños aún para números de Prandtl de orden unidad. La importancia de tales resultados ha sido reconocida por Merte (1973). Después, Chen (1961) dió solución en forma integral de las ecuaciones de la capa límite por medio de métodos de perturbación, incluyendo el efecto retardador del esfuerzo cortante del vapor sobre la película de condensado. Una comparación de los resultados obtenidos

por Sparrow y Gregg (1959) con aquellos obtenidos por Chen (1961) muestra que la influencia del esfuerzo cortante sobre la superficie del condensado es despreciable en números de Prandtl altos. En este orden para tener una estimación más precisa de la influencia de este efecto, Koh (1961), incorporó el efecto del esfuerzo cortante de la intercara por el uso de soluciones simultáneas de las ecuaciones de la capa límite del vapor y el condensado y concluyó que el efecto del esfuerzo cortante es solo importante cuando la rapidez de condensado es suficientemente alta. Resultados similares fueron obtenidos por Rose (1988), el cual usando una aproximación similar confirmó la solución previa del problema de Chen y obtuvo una expresión aún mas precisa para el número de Nusselt. Más recientemente, Churchill (1986) desarrolló una solución aproximada para el modelo de Koh incluyendo en forma más general el efecto de la curvatura sobre la condensación en el interior y el exterior de tubos verticales. Este trabajo de aproximación analítica muestra las soluciones expandidas en forma cerrada. El estado del arte en el análisis de una película de condensado laminar sobre placas verticales y otros procesos de condensación pueden ser encontrados en Rose (1988) y en Tanasawa (1991).

## 1.5. Aproximación de Nusselt

La solución para vapores puros (sin gases no condensables) sobre la superficie de una placa plana y para el caso de un tubo, fue primeramente realizada por Nusselt[7]. Poco después se realizaron estudios experimentales y modificaciones a las restricciones del problema original de Nusselt estudiando la condensación de vapores puros y de vapores con gases no condensables. En este trabajo consideramos la condensación de un vapor sobre una superficie de placa plana vertical, donde la película de condensado se desliza debido a las fuerzas de gravedad. Sea  $x$  el eje coordenado medido hacia abajo desde el extremo superior de la placa, e  $y$  el eje coordenado normal a la superficie de la placa. En su análisis Nusselt hizo las siguientes suposiciones para simplificar el problema.

- La placa se mantiene siempre a una temperatura  $T_w$  menor que la temperatura de saturación del vapor que se encuentra formando una atmósfera en estancamiento.

- El vapor es estacionario y no ejerce ninguna fuerza de arrastre sobre el fluido condensado por efectos de esfuerzos cortantes.
- La película de fluido condensado está siempre en régimen laminar.
- Se pueden despreciar las aceleraciones dentro de la capa de condensado.
- Las propiedades del fluido se consideran constantes.
- La transferencia de calor a través de la capa de condensado se realiza por conducción pura y se supone la distribución de temperaturas como un perfil lineal.
- No se considera la presencia de los gases no condensables.

El análisis de Nusselt empieza tratando de determinar la distribución de velocidad  $u(y)$  a través de la capa de condensado, mediante el uso de las ecuación de cantidad de movimiento en dirección longitudinal y la ecuación que da la razón de condensado. Nusselt dedujo que el espesor de la capa de condensado en relación con la longitud de la placa era proporcional al número de Jakob elevado a la potencia de  $1/4$ .

## 1.6. Objetivos

Los objetivos principales del presente trabajo se enlistan a continuación:

1. Estudiar la transferencia de calor conjugada, que ocurre entre una placa plana vertical y una delgada película de fluido que se condensa sobre la superficie de una de sus caras, debida al enfriamiento en la cara contraria de la misma.
2. Efectuar el análisis de orden de magnitud en la Ecuaciones Básicas para encontrar los números, parámetros y variables adimensionales de los cuales depende el problema.
3. Establecer un modelo matemático basado en la simplificación y adimensionalización de las Ecuaciones Básicas que nos permita evaluar los efectos de la conducción bidimensional de calor en una placa, que están acoplados directamente con el espesor de la película de condensado ver la figura (1.11)

4. Resolver el modelo matemático para la placa suponiendo que tiene solución analítica y solución numérica acoplado con la ecuación para la película de condensado y las condiciones de frontera correspondientes.
5. Encontrar la dependencia del espesor de la capa de condensado, el flujo de calor y la distribución de temperaturas en dirección longitudinal de la placa con el parámetro adimensional de conducción alfa cuando este cambia su valor en diferentes ordenes de magnitud
6. Analizar los efectos de transferencia de calor en el borde de entrada de la placa, reescalando las variables adimensionales que intervienen en el problema y redefiniendo las condiciones de frontera para el problema interior.
7. Comparar los resultados analíticos y numéricos por medio de gráficas con la solución clásica de Nusselt y comentar las diferencias.

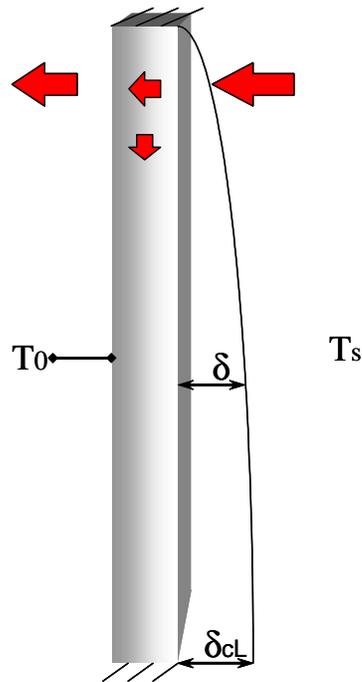


Figura 1.11: Problema Físico

# Capítulo 2

## ECUACIONES BÁSICAS

### 2.1. Simplificación de ecuaciones

Las ecuaciones fundamentales que modelan el problema conjugado de transferencia de calor entre la placa y el fluido condensado son:

- I) La ecuación de conservación masa (continuidad).
- II) El balance de cantidad de movimiento.
- III) La ecuación de la conservación de la energía en el condensado.
- IV) La ecuación de la energía en la placa.

En dichas ecuaciones se considera que el fluido está bajo la acción de la fuerza de gravedad. Debido al proceso de condensación, el vapor experimenta un cambio de fase al estado líquido. El incremento en la densidad del fluido es tan grande, que obliga a la película de fluido a descender sobre la superficie de la placa debido a la fuerza de gravedad. Los efectos viscosos son importantes en todo momento y es lo que limita la velocidad de descenso de la película. Se considera también que dadas las bajas velocidades del fenómeno, el término disipativo en la ecuación de la energía es despreciable. El fluido debe cumplir con las condiciones de no deslizamiento sobre la superficie de la placa, la condición de reposo para el vapor muy lejos de la placa y la continuidad de la temperatura y flujo de calor en la interfaz placa-fluido.

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones que gobiernan el proceso de transferencia de calor acoplada para un flujo bidimensional son:

Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Balance de cantidad de movimiento longitudinal:

$$\rho_c \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_c \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \rho_c g \quad (2.2)$$

Balance de cantidad de movimiento transversal:

$$\rho_c \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_c \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

Energía en el condensado:

$$\rho_c C_c \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda_c \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

De acuerdo con el modelo físico propuesto, las condiciones de frontera son:

En la superficie de la placa la ecuación(2.1):

$$u = v = T - T_w = 0$$

Muy lejos del sólido:

$$u = v = T - T_s = 0$$

Para obtener las ecuaciones bajo la aproximación de la capa límite, la simplificación de las mismas se lleva a cabo a partir del siguiente análisis de orden de magnitud.

## 2.2. Orden de Magnitud de las ecuaciones básicas

### Ecuaciones de continuidad y conservación de la cantidad de movimiento

Una simplificación de las ecuaciones fundamentales se lleva a cabo asumiendo las condiciones de capa límite[20], esto es que el espesor de la capa de condensado sea muy pequeña comparada con la longitud de la placa, por lo que  $\delta \ll L$ . De acuerdo con lo anterior e introduciendo los órdenes de magnitud de las diferentes variables,  $U$  para la velocidad longitudinal y  $V$

para la transversal, de las ecuaciones(2.1) a (2.3) simplifican la ecuación de continuidad a la siguiente orden de magnitud:

$$\frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta} \quad (2.5)$$

De las ecuaciones de cantidad de movimiento:

$$\frac{U}{t} + U\frac{U}{L} + V\frac{U}{\delta} \sim -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_c \left( \frac{U}{L^2} + \frac{U}{\delta^2} \right) - g \quad (2.6)$$

$$\frac{V}{t} + U\frac{V}{L} + V\frac{V}{\delta} \sim -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu_c \left( \frac{V}{L^2} + \frac{V}{\delta^2} \right) \quad (2.7)$$

Por lo tanto, el orden de magnitud de la velocidad característica en la dirección transversal, de la expresión(2.5) es:

$$V \sim U\frac{\delta}{L} \quad (2.8)$$

De acuerdo con las relaciones (2.5) y (2.6) y puesto que  $\delta \ll L$ , se concluye que los términos que representan las fuerzas de fricción, los términos que contienen la segunda derivada respecto a la coordenada longitudinal  $\partial^2/\partial x^2$ , se pueden despreciar.

$$\frac{U}{L^2} \ll \frac{U}{\delta^2} \text{ y } \frac{V}{L^2} \ll \frac{V}{\delta^2}$$

Dado lo anterior, los órdenes de magnitud de los términos de las relaciones (2.5) a (2.6) son,

$$\frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta} \quad (2.9)$$

$$\frac{U^2}{L}, \quad \frac{1}{\rho_c}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho_v g}{\rho_c}, \quad \nu_c \frac{U}{\delta^2}, \quad g \quad (2.10)$$

Dividiendo los órdenes de magnitud de la expresión (2.10) entre  $g$ , se obtiene,

$$\frac{U^2}{gL}, \quad -\frac{\rho_v}{\rho_c}, \quad \frac{\nu_c U}{\delta^2 g}, \quad 1. \quad (2.11)$$

Por otra parte, el orden de magnitud de los términos de la ecuación de balance de cantidad de movimiento transversal son:

$$\frac{U^2}{L} \frac{\delta}{L}, \quad -\frac{1}{\rho_c}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad g\frac{\delta}{L} \quad (2.12)$$

esto es:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \rho_c g \frac{\delta}{L}$$

Por lo tanto, los cambios de presión en la dirección transversal son muy pequeños, lo cual implica que la presión en cualquier punto  $x$  es prácticamente constante en la dirección  $y$ .

De las simplificaciones anteriores, las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento se reducen a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.13)$$

$$\rho_\infty \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho g \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

### Ecuación de Energía

La ecuación de la energía se resuelve bajo la consideración de que el espesor de la capa límite térmica  $\delta_t$  es muy pequeño comparado con la escala longitudinal  $\delta_t \ll L$ , por lo que la ecuación (2.4) se expresa como:

$$\rho_c C_c \left( U \frac{\Delta T}{L} + V \frac{\Delta T}{\delta_t} \right) \sim \lambda \left( \frac{\Delta T}{L^2} + \frac{\Delta T}{\delta_t^2} \right)$$

ó

$$\rho_c C_c \left( \frac{U}{L} \right) \sim \lambda \left( \frac{1}{L^2} + \frac{1}{\delta_t^2} \right) \quad (2.16)$$

con  $\Delta T = T_s - T_0$ . De la misma manera que en el análisis de orden de magnitud de las ecuaciones de cantidad de movimiento en los términos de la derecha de la relación (2.16),  $\Delta T/L^2 \ll \Delta T/\delta_t^2$ , de manera que la segunda derivada respecto a la coordenada longitudinal se puede despreciar, por ser mas pequeña que el otro término de segundo grado, con lo que la ecuación de energía se reduce a:

$$\rho C_c \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.17)$$

## 2.3. Ecuaciones de capa límite

Finalmente, después de las simplificaciones anteriores, las ecuaciones (2.1) a (2.4) se expresan como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{g(\rho_c - \rho_v)}{\rho_c} \quad (2.19)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda_c}{\rho_c C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2.20)$$

## 2.4. Análisis Dimensional

Para encontrar una solución analítica a la conducción de calor en la placa primero debemos establecer un modelo matemático que se obtiene al simplificar las ecuaciones básicas. Esto se logra cuando se establece el orden de magnitud de las variables principales que participan en el problema que, son la velocidad, el desplazamiento y los flujos de calor de la capa de fluido condensado. A partir de las ecuaciones de la capa límite para la película de condensado se pueden obtener las variables adimensionales adecuadas y formular un sistema de ecuaciones donde se puedan aplicar las técnicas de perturbación en las ecuaciones básicas del problema.

## 2.5. Análisis de Orden de Magnitud para el problema conjugado

### Orden de magnitud de la velocidad

A partir de las ecuaciones de la conservación de cantidad de movimiento para la película de fluido, sabemos que la presión no es una función de la coordenada  $y$  por lo tanto el gradiente de presiones es una función únicamente de la coordenada longitudinal de la placa.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{g(\rho_c - \rho_v)}{\rho_c} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad (2.22)$$

Usando la aproximación de Nusselt que consiste básicamente en considerar del mismo orden de magnitud a los términos viscosos y equilibrarlos con los términos debidos a la gravedad, los términos inerciales no son significativos y tendremos que la ecuación de cantidad de movimiento se puede escribir como sigue:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{g(\rho_c - \rho_v)}{\rho_c} \quad (2.23)$$

Por otra parte sabemos que la coordenada  $y$  es de orden  $\delta$  y que el valor de la densidad del vapor saturado es tres órdenes de magnitud menor que la densidad del fluido condensado, por lo tanto:

$$\nu_c \frac{U}{\delta^2} \sim g \quad (2.24)$$

de donde, finalmente se obtiene el orden de la velocidad de la película de fluido como:

$$U \sim \frac{g}{\nu_c} \delta^2 \quad (2.25)$$

### Orden de magnitud del espesor de la capa de fluido condensado

El espesor de la capa de fluido condensado es una variable muy importante ya que representa físicamente la posición geométrica a lo largo de toda la placa donde se localiza la frontera líquido-gas, además, su valor se relaciona directamente con la cantidad de flujo másico de condensado misma que se puede calcular con la ecuación general de conservación de masa.

$$m = \int_0^\delta \rho_c u_c dy \quad (2.26)$$

El orden de magnitud de  $m$  es por lo tanto:

$$m \sim \frac{\rho_c g}{\nu_c} \delta^3 \quad (2.27)$$

## 2.5. ANÁLISIS DE ORDEN DE MAGNITUD PARA EL PROBLEMA CONJUGADO 27

La relación de producción de fluido condensado a lo largo de la placa puede ser obtenida de efectuar un balance de la energía térmica en la frontera del vapor y el condensado de la forma:

$$\frac{dm}{dx} \sim \frac{\lambda_c(T_s - T_w)}{\delta h_{fg}} \quad (2.28)$$

Usando (2.27) y (2.28) obtenemos:

$$\frac{\rho_c g}{\nu_c L} \delta^3 \sim \frac{\lambda_c(T_s - T_w)}{\delta h_{fg}} \quad (2.29)$$

donde se puede obtener el orden de magnitud para el espesor de la capa de condensado como:

$$\delta^4 \sim \frac{4\nu_c \lambda_c (T_s - T_w) L}{\rho_c g h_{fg}} \quad (2.30)$$

De esta última relación podemos agrupar las variables para obtener los grupos adimensionales de los cuales depende el espesor de la capa de condensado, obteniendo:

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)^4 \sim \frac{\nu_c^2}{g_0 L^3} \left(\frac{\lambda_c}{\rho_c C_p \nu_c}\right) \left(\frac{4C_c(T_s - T_0)}{h_{fg}}\right) \left(\frac{(T_s - T_w)}{(T_s - T_0)}\right) \quad (2.31)$$

Esta relación la podemos escribir de la forma:

$$\delta^4 \sim \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{Pr}\right) \left(\frac{4C_c(T_s - T_0)}{h_{fg}}\right) \left(\frac{\Delta T_c}{\Delta T_\infty}\right) L^4 \quad (2.32)$$

donde,  $Pr$  es el número de Prandtl:

$$Pr = \frac{\rho_c C_c \nu_c}{\lambda_c} \quad (2.33)$$

$Ja$  es el número de Jakob:

$$Ja = \frac{4C_c(T_s - T_0)}{Pr h_{fg}} \quad (2.34)$$

y  $\gamma$  es el número de Galileo definido por:

$$\gamma = \frac{gL^3}{\nu_c^2} \quad (2.35)$$

las diferencias de temperaturas las escribiremos para mayor simplicidad como

$$\Delta T_c = (T_s - T_w) \quad (2.36)$$

$$\Delta T_\infty = (T_s - T_0) \quad (2.37)$$

$$\Delta T_w = (T_w - T_0). \quad (2.38)$$

Finalmente, el orden de magnitud del espesor de la capa de condensado resulta ser

$$\frac{\delta}{L} \sim \left( \frac{Ja}{\gamma} \right)^{1/4} \left( \frac{\Delta T_c}{\Delta T_\infty} \right)^{1/4}. \quad (2.39)$$

### Análisis del orden de magnitud de los flujos de calor

Si se acepta la aproximación de Nusselt como válida, en donde los términos convectivos son despreciables, se puede plantear el siguiente análisis. El flujo de calor por conducción en la placa se supone del mismo orden de magnitud que el flujo de calor que proviene de la condensación de la película de fluido y que se transfiere a través de esta también por conducción, aplicando la ley de Fourier tendremos lo siguiente:

$$\lambda_w \frac{\Delta T_w}{h} \sim \lambda_c \frac{\Delta T_c}{\delta_c} \quad (2.40)$$

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T_w} \sim \left( \frac{\lambda_w}{\lambda_c} \right) \left( \frac{\delta_c}{h} \right) \quad (2.41)$$

Sustituyendo el espesor de la ecuación (2.39) en la ecuación (2.41) tendremos la otra relación de temperaturas:

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T_w} \sim \left( \frac{\lambda_w}{\lambda_c} \right) \left( \frac{L}{h} \right) \left( \frac{Ja}{\gamma} \right)^{1/4} \left( \frac{\Delta T_c}{\Delta T_\infty} \right)^{1/4} \quad (2.42)$$

Al sustituir las ecuaciones (2.44) y (2.45) en la ecuación (2.41), obtendremos la siguiente relación entre las diferencias de temperaturas:

## 2.5. ANÁLISIS DE ORDEN DE MAGNITUD PARA EL PROBLEMA CONJUGADO 29

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T_w} \sim \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right) \left(\frac{\Delta T_c}{\Delta T_\infty}\right)^{1/4} \quad (2.43)$$

donde el parámetro  $\alpha$  que representa la competencia entre el flujo de calor que es conducido a través de la placa contra el flujo de calor que es conducido a través de la película de fluido:

$$\alpha = \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_c}\right) \left(\frac{h}{L}\right) \left(\frac{Ja}{\gamma}\right)^{1/4} \quad (2.44)$$

y  $\varepsilon$  resulta la relación de aspecto de la placa, que se define de la forma:

$$\varepsilon = \frac{h}{L} \quad (2.45)$$

Dividiendo la ecuación anterior entre la diferencia  $\Delta T_c$  y multiplicando a su vez por la diferencia  $\Delta T_\infty$ , obtenemos una relación entre las diferencias de temperaturas relacionadas por los parámetros adimensionales antes definidos:

$$\frac{\Delta T_\infty}{\Delta T_w} \sim \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right) \left(\frac{\Delta T_\infty}{\Delta T_c}\right)^{3/4} \quad (2.46)$$

y

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T_\infty} \sim \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right)^{4/3} \left(\frac{\Delta T_w}{\Delta T_\infty}\right)^{4/3} \quad (2.47)$$

$$\theta_c \sim \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right)^{4/3} \theta_w^{4/3} \quad (2.48)$$

Finalmente obtenemos que:

$$\frac{\Delta T_w}{\Delta T_\infty} + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right)^{4/3} \left(\frac{\Delta T_w}{\Delta T_\infty}\right)^{4/3} \sim 1 \quad (2.49)$$

De la relación anterior, podemos establecer el límite de  $\varepsilon^2/\alpha \ll 1$ , que corresponde al caso de la placa térmicamente delgada, la diferencia de temperatura en la dirección transversal en la placa es pequeña, por lo que:

$$\theta_w = \frac{\Delta T_w}{\Delta T_\infty} \sim \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \ll 1 \quad (2.50)$$

## 2.6. Variables de semejanza para el problema conjugado

Una vez efectuado el análisis de orden de magnitud, es necesario efectuar el análisis dimensional de las ecuaciones básicas, con la finalidad de establecer un modelo matemático introduciendo las variables adimensionales que se establecen a continuación. En la sección anterior se establece el orden de magnitud tanto para la velocidad como para el espesor de desplazamiento por lo que es posible definir el siguiente conjunto de variables adimensionales:

La coordenada adimensional en la dirección de  $y$  es:

$$\eta = \frac{y}{\delta_c} \quad (2.51)$$

La coordenada adimensional en la dirección de  $x$  es:

$$\chi = \frac{x}{L} \quad (2.52)$$

La temperatura adimensional para la película de fluido es la siguiente:

$$\theta_c = \frac{T_s - T_c}{T_s - T_0} \quad (2.53)$$

La temperatura adimensional para la placa sólida está dada por:

$$\theta_w = \frac{T_s - T_w}{T_s - T_0}. \quad (2.54)$$

El orden de magnitud de la velocidad de la película de fluido se puede obtener a partir de las ecuaciones (2.25) combinándola con la ecuación (2.39),  $U \sim \sqrt{gLJa}$ , para poder escribir una velocidad adimensional de la forma:

$$\bar{u} = \frac{u}{\sqrt{gLJa}} \quad (2.55)$$

Se debe cumplir con la ecuación de conservación de masa (2.1) y sabemos que el orden de magnitud de la componente de velocidad transversal  $v$  de la ecuación (2.5) es  $V \sim \sqrt{gLJa}(Ja/\gamma)^{1/4}$ , la velocidad transversal adimensional es por lo tanto:

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\gamma^{1/2}}v}{\sqrt{gLJa^{3/2}}} \quad (2.56)$$

## 2.6. VARIABLES DE SEMEJANZA PARA EL PROBLEMA CONJUGADO31

Se define un espesor normalizado  $\Delta$  para la película de fluido de la forma:

$$\Delta = \frac{\delta_c}{\delta_{cL}} \quad (2.57)$$

donde, la variable  $\delta_{cL}$  es el espesor local de la película de fluido en el borde de salida de la placa y se puede representar como:

$$\delta_{cL} = L \left( \frac{Ja}{\gamma} \right)^{1/4} \quad (2.58)$$

Se introduce a continuación la función de corriente adimensional  $g_c$ , de la forma:

$$\bar{u} = \Delta^2 \frac{\partial g_c}{\partial \eta_c} \quad (2.59)$$

$$\bar{v} = -\Delta \frac{\partial(\Delta^2 g_c)}{\partial \chi} \quad (2.60)$$

## 2.7. Adimensionalización de las ecuaciones básicas

Cuando llevamos las variables definidas en las relaciones anteriormente, a las ecuaciones que modelan el problema conjugado de transferencia de calor, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones adimensionales para la película de fluido:

$$\frac{\partial^3 g_c}{\partial \eta_c^3} + 1 = Ja\Delta^4 \left[ \frac{\partial g_c}{\partial \eta_c} \frac{\partial^2 g_c}{\partial \chi \partial \eta_c} - \frac{\partial g_c}{\partial \chi} \frac{\partial^2 g_c}{\partial \eta_c^2} + \frac{2}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\chi} \left[ \left( \frac{\partial g_c}{\partial \eta_c} \right)^2 - g_c \frac{\partial g_c}{\partial \eta_c} \right] \right] \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_c}{\partial \eta_c^2} = JaP_R\Delta^4 \left[ \frac{\partial g_c}{\partial \eta_c} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{\partial g_c}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta_c} - \frac{2}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\chi} \left[ g_c \frac{\partial g_c}{\partial \eta_c} \right] \right] \quad (2.62)$$

Las condiciones de frontera adimensionales para el sistema anterior son:

$$\theta - \theta_w = g_c = \frac{\partial g_c}{\partial \eta_c} = 0 \text{ en } \eta_c = 0 \quad (2.63)$$

La segunda condición es para cuando  $\eta = 1$  es de:

$$\theta = \frac{\partial^2 g_c}{\partial \eta_c^2} = 0 \text{ en } \eta_c = 1 \quad (2.64)$$

La condición para la velocidad en la frontera se obtiene del balance de energía en la interfaz. Como el espesor normalizado  $\Delta$  no es conocido, se necesita otra ecuación obtenida con el balance en la interfaz de líquido condensado y vapor, la cual proporciona la siguiente relación:

$$4\Delta \frac{d(\Delta^3 g_c(\chi, 1))}{d\chi} = - \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial \eta_c} \right)_{\eta_c=1} \quad (2.65)$$

## 2.8. Ecuación para la conducción de calor en la placa

La ecuación de conducción para la placa es la ecuación de Laplace en dos dimensiones y puede escribirse para el caso estacionario como sigue:

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.66)$$

con condiciones de frontera dadas por:

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial x} \right|_{x=0,L} = 0 \quad (2.67)$$

$$T_w(x, y = -h) = T_0 \quad (2.68)$$

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{y=0} = \lambda_c \left. \frac{\partial T_c}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.69)$$

donde  $\lambda_w$ ,  $\lambda_c$  son la conductividad térmica de la placa y del fluido condensado respectivamente.

## 2.9. Ecuación Adimensional para la placa vertical

La ecuación de Laplace dentro de la placa sólida es una ecuación dimensional, por lo que se hace necesario adimensionalizar dicha ecuación con los parámetros que ya se han definido y establecer también las condiciones de frontera adimensionales para esta ecuación. La solución del problema de transferencia de calor en la placa es más sencillo de resolver si se hace un cambio en la coordenada transversal introduciendo la coordenada adimensional  $z$  definida como:

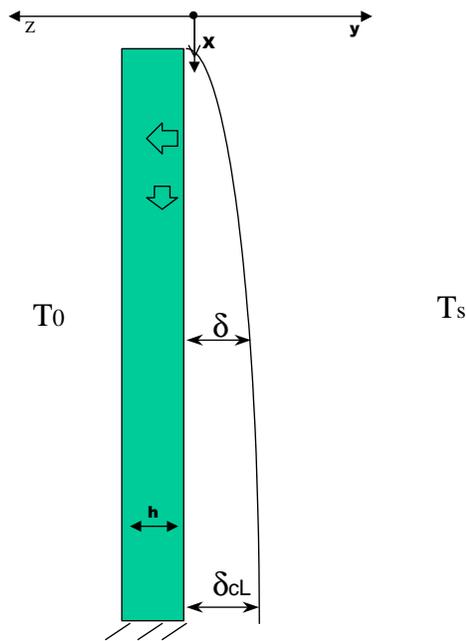


Figura 2.1: Ejes Coordinados

$$z = \frac{y + h}{h} \quad (2.70)$$

Finalmente, si sustituimos las ecuaciones (2.52) y (2.54), la ecuación de Laplace toma la forma adimensional siguiente:

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial z^2} = 0 \quad (2.71)$$

sometido a las siguientes condiciones de frontera adimensionales:

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right)_{\chi=0,1} = 0 \quad (2.72)$$

$$\left( \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \right)_{z=1} = -\frac{\varepsilon^2}{\alpha} \frac{\theta_w}{\Delta} \quad (2.73)$$

$$\theta_w(\chi, z = 0) = 1 \quad (2.74)$$

Para la película de condensado, la ecuación adimensional toma la forma:

$$\frac{d\Delta^4}{d\chi} = \theta_w(\chi, z = 1) \quad (2.75)$$

La figura (2.2) muestra las condiciones de frontera adimensionales para la placa.



$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$   
 $\theta = 1$   
 $\frac{\partial \theta}{\partial Z} = -\frac{\epsilon^2 \theta}{\alpha \Delta}$  ,  $\frac{d \Delta^4}{d X} = \theta$   
 $\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$

Figura 2.2: Condiciones de frontera adimensionales

## Capítulo 3

# TRANSFERENCIA DE CALOR ACOPLADA

En esta sección se analiza la transferencia de calor en la película de condensado acoplada con la conducción de calor en la placa, mediante un modelo matemático, 2.71 que tiene solución analítica y numérica.

### 3.1. Solución Analítica

Es posible la existencia de una solución analítica, para los dos regímenes correspondientes al de la pared térmicamente delgada y de pared térmicamente gruesa. En el caso de ambos regímenes, la solución límite es la solución clásica de Nusselt y corresponde a grandes valores del parámetro  $\alpha$ . Para valores finitos de  $\alpha$ , la conducción longitudinal de calor es importante y modifica ligeramente la solución de pared térmicamente gruesa. Este es el objetivo principal del trabajo.

### 3.2. Solución Asintótica para la pared térmicamente delgada

Para el régimen de pared térmicamente delgada, los cambios de la temperatura adimensional en dirección transversal en la pared son muy pequeños. Así la conducción de calor longitudinal es importante, pero los correspondientes gradientes de temperatura no pueden ser muy grandes, debido al hecho

que la condición de frontera en la superficie izquierda de la placa es uniforme. Por lo tanto en el límite asintótico de  $\alpha \rightarrow \infty$ , la temperatura adimensional en la pared es exactamente la unidad en toda la placa y empleamos  $\theta_w = 1$ , obteniendo la clásica solución de Nusselt para el espesor adimensional de la fase de condensado. En el caso de la placa térmicamente gruesa se obtiene la misma solución que para el caso de la pared térmicamente delgada, cuando el parámetro  $\alpha \rightarrow \infty$ . Sin embargo, para valores finitos de  $\alpha/\varepsilon^2$  la solución diverge como mostraremos a continuación.

Sin la inclusión de la conducción de calor longitudinal a través de la placa, las ecuaciones (2.70) a la (2.74), la solución para la distribución de la temperatura de la placa resulta ser:

$$\theta_w = 1 - (1 - \theta_r)z \quad (3.1)$$

$$\theta_r = \frac{\Delta}{\varepsilon^2/\alpha + \Delta} \quad (3.2)$$

y

$$\Delta^4 + \frac{4\varepsilon^2}{3\alpha}\Delta^3 = \chi \quad (3.3)$$

donde  $\theta_r$  representa la temperatura adimensional en la superficie derecha de la placa (ver su deducción en el apéndice 1). La solución asintótica en  $\chi = 1$  para grandes valores de  $\alpha/\varepsilon^2$  esta dada por:

$$\Delta(1) = 1 - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^2}{\alpha} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha}\right)^2 + \dots, \quad (3.4)$$

mientras que el número de Nusselt global será:

$$\overline{Nu} = \frac{\int_0^L q dx}{\lambda_c(T_s - T_0)} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\alpha}\right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\alpha}\right)^2 + \dots \quad (3.5)$$

Sin embargo, en el régimen de pared térmicamente delgada ( $\alpha/\varepsilon^2 \gg 1$ ), el término de conducción longitudinal puede ser retenido en una capa de orden  $\varepsilon$  en  $\chi$ . Las variables internas reducidas en esta capa pueden ser definidas como se muestra a continuación (Fig. 3.1). La nueva coordenada longitudinal para la capa interior quedará definida por la siguiente expresión:

$$\chi = \varepsilon\xi \quad (3.6)$$

### 3.2. SOLUCIÓN ASINTÓTICA PARA LA PARED TÉRMICAMENTE DELGADA 39

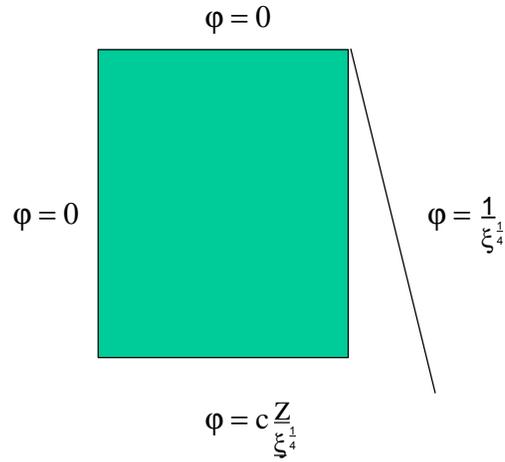


Figura 3.1: Región Interna

La nueva variable para la temperatura adimensional en la capa interior queda definida como sigue:

$$\theta_w = 1 - (\varepsilon^{7/4}/\alpha) \varphi \quad (3.7)$$

Por lo tanto, la nueva variable para el espesor normalizado de la película de fluido condensado está representado por:

$$\Delta = \varepsilon^{1/4} [\Delta_0 - (\varepsilon^{7/4}/\alpha)\Delta_1] \quad (3.8)$$

En esta última expresión, se representa la corrección de primer orden del espesor adimensional de condensado.

Una vez que se sustituyen las variables internas en las ecuaciones de la placa, el nuevo sistema de ecuaciones universales que se resolverán son:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.9)$$

junto con

$$\frac{d(\xi^{3/4}\Delta_1)}{d\xi} = \frac{\varphi}{4} \quad (3.10)$$

con las siguientes condiciones inicial y de frontera:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \Delta_1 = 0 \text{ en } \xi = 0, \text{ y } \varphi \rightarrow 0 \text{ cuando } \xi \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

$$\varphi = 0 \text{ en } z = 0 \text{ y } \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\xi^{1/4}} \text{ en } z = 1 \quad (3.12)$$

El número de Nusselt global en este límite toma la forma:

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3}\left[1 - \frac{3}{4}(\varepsilon^2/\alpha)\Delta_1(1)\right] + O(\varepsilon^2/\alpha)^2 \quad (3.13)$$

donde,

$$\Delta_1(1) = \frac{1}{4\xi^{3/4}} \int_0^{1/\varepsilon} \varphi d\xi \quad (3.14)$$

Usando la técnica de la transformada coseno de Fourier para las ecuaciones (3.9) a (3.12), la temperatura en  $z = 1$  resulta ser:

$$\varphi(\xi, z = 1) = \frac{2}{\pi}\Gamma(3/4)\cos(3\pi/8) \int_0^\infty \frac{\tanh(k)\cos(k\xi)}{k^{7/4}} dk \quad (3.15)$$

donde  $\Gamma(m)$  representa la función Gamma. Para grandes valores de  $\xi$ , la solución asintótica resulta dada por:

$$\varphi(\xi, z = 1) \sim \frac{1}{\xi^{1/4}} \text{ cuando } \xi \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

El valor de  $\Delta_1(\varepsilon)$  es una función relativamente suave de  $\varepsilon$  como muestra la figura 3.2. Para valores muy pequeños de  $\varepsilon$ , la solución tiende asintóticamente, a la obtenida para la aproximación de la pared térmicamente gruesa.

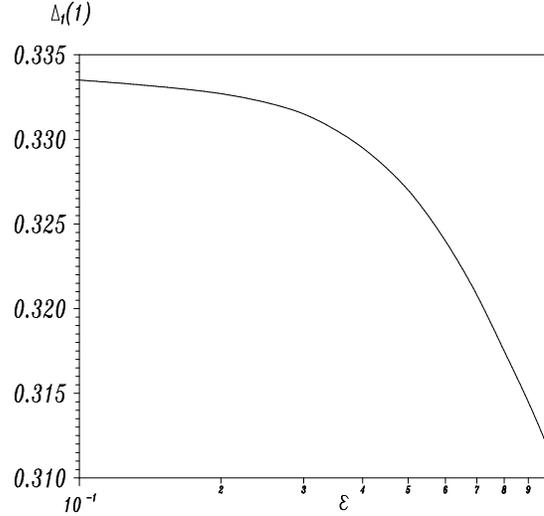


Figura 3.2: Corrección al espesor

### 3.3. Solución numérica

#### Solución numérica de la ecuación de la placa

En este capítulo se describe la solución numérica de las ecuaciones siguientes

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial z^2} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{d\Delta^4}{d\chi} = \theta_w(\chi, z = 1), \quad (3.18)$$

con las condiciones de frontera en los extremos superior e inferior:

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right)_{\chi=0,1} = 0 \quad (3.19)$$

en la superficie derecha donde se encuentra el fluido

$$\left( \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \right)_{z=1} = -\frac{\varepsilon^2}{\alpha} \frac{\theta_w}{\Delta} \quad (3.20)$$

y la condición en la superficie izquierda donde se impone la condición de temperatura constante:

$$\theta_w(\chi, z = 0) = 1 \quad (3.21)$$

El método numérico requiere que se genere un espacio discreto para poder establecer una malla numérica que cubra a la placa totalmente. El arreglo de la malla es tal, que su celda unitaria está formada por rectángulos de  $\Delta\chi$  y  $\Delta z$ . El número de puntos en la dirección de  $\chi$  es  $n$  y en la dirección de  $z$  es  $m$ , tales que se cumple que  $\Delta\chi = 1/(n - 1)$  y  $\Delta z = 1/(m - 1)$ . Para etiquetar a cada nodo en la malla utilizamos las variables enteras  $i$  y  $j$  en la dirección de  $\chi$  y en la dirección de  $z$  respectivamente. Los valores de estas variables son tales que  $i \in (1, n)$  y  $j \in (1, m)$ . Si es necesario incrementar el tiempo se usa la variable entera  $k$ .

Utilizando técnicas de diferencias finitas centradas o promediadas para el caso del espacio y diferencias simples en el caso del tiempo, el mapeo desde el espacio y tiempo continuos de la ecuación de la energía (3.17) a el espacio y tiempo discretos tiene la forma:

$$\frac{\theta_{w_{i+1,j}} - 2\theta_{w_{i,j}} + \theta_{w_{i-1,j}}}{\Delta\chi^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\theta_{w_{i,j+1}} - 2\theta_{w_{i,j}} + \theta_{w_{i,j-1}}}{\Delta z^2} = 0 \quad (3.22)$$

y es válida en los rangos:

$$i = \overline{2, n - 1} \text{ y } j = \overline{2, m - 1} \quad (3.23)$$

En este nuevo espacio las ecuaciones (3.19), (3.20) y (3.21) toman la forma siguiente, respectivamente:

$$\theta_{w_{1,j}} = \theta_{w_{2,j}} \text{ y } \theta_{w_{n-1,j}} = \theta_{w_{n,j}} \text{ para } j = 1, m \quad (3.24)$$

$$\frac{\theta_{w_{i,2}} - \theta_{w_{i,1}}}{\Delta z} = -\frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left( \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta\eta} \right)_i \text{ para } i = 2, n - 1 \quad (3.25)$$

$$\theta_{w_{i,j}} = 1 \quad (3.26)$$

# Capítulo 4

## RESULTADOS

Cuando tenemos el caso de una pared térmicamente delgada que ocurre para grandes valores del parámetro de conducción  $\alpha$  (Solución de Nusselt) el espesor de la película de fluido condensado alcanza su mayor valor debido a que depende de un exponente 4 por lo cual la tasa de condensado es máxima, mientras que la transferencia del calor hacia la placa es menor y solo existe el flujo de calor transversal.

En el caso de la pared térmicamente gruesa, se observa lo siguiente:

Para valores muy pequeños de  $\alpha$ , (caso analizado en este trabajo) se observa que el espesor de la capa de condensado, varía con un exponente cúbico o menor, por lo que la capa de líquido no alcanza el valor máximo que en la solución de Nusselt, debido a esto, la tasa de condensado resulta menor, entonces, si existe una menor resistencia térmica para flujo de calor hacia la placa, a través de la película de fluido condensado, debido a que ésta es más delgada, por tanto se puede afirmar que la conducción longitudinal de calor en la placa, favorece de manera general el proceso de condensación de tipo película de fluido.

Esto se muestra en las siguientes gráficas:

Por otra parte el flujo de calor transversal en la placa decrece para valores pequeños del parámetro ( $\alpha \leq 1$ ), por lo cual, se puede inferir que en este caso aparece un flujo de calor longitudinal, para valores grandes de  $\alpha$  se tiene que el total del flujo de calor es en dirección transversal a la placa, esto se muestra en la siguiente gráfica:

Finalmente se concluye que la distribución de la temperatura en la placa, cuando se tienen valores mayores que uno del parámetro  $\alpha$ , la temperatura en toda la placa es homogénea, donde esta condición es comparable con

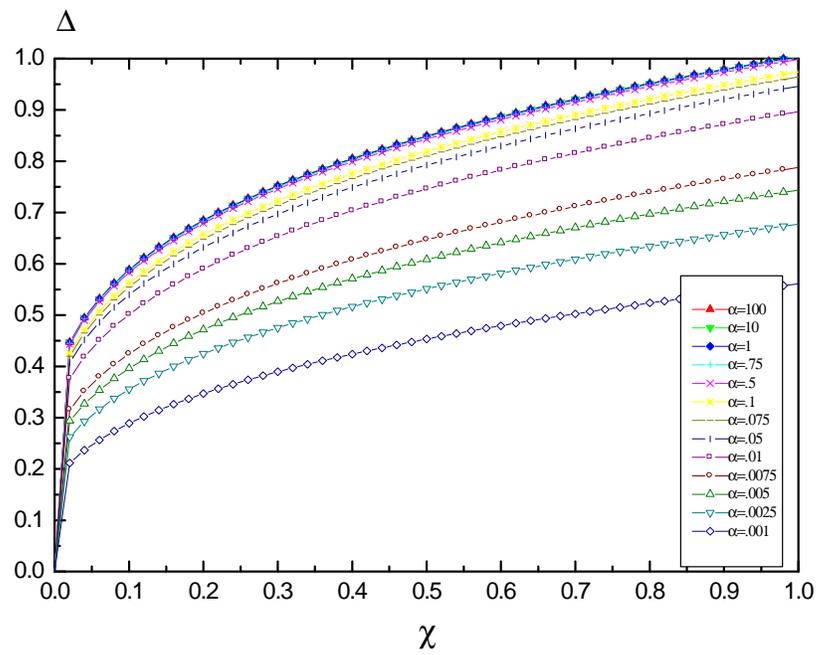


Figura 4.1: Espesor-alfa

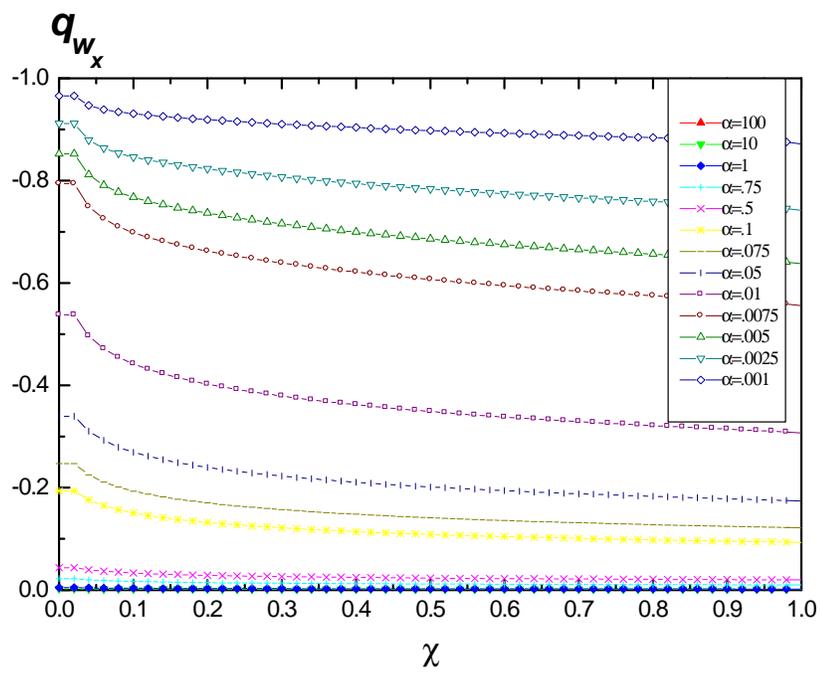


Figura 4.2: Flujo de calor- alfa

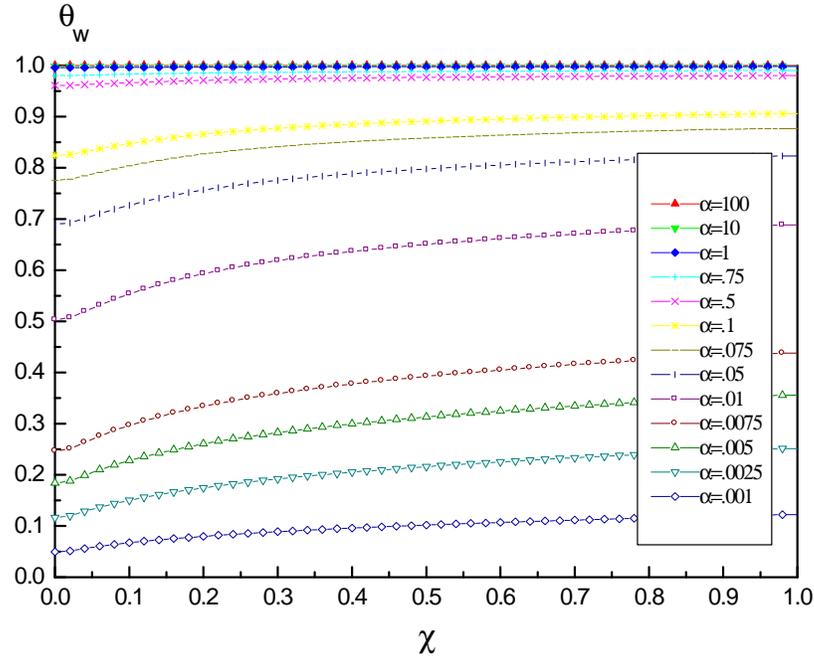


Figura 4.3: Temperatura-alfa

la solución clásica de Nusselt, mientras que para valores pequeños de alfa ( $\alpha \leq 1$ ) existe un perfil de temperaturas en el interior de la placa lo cual se muestra en la siguiente gráfica:

Por otra parte se puede comentar que si el espesor de la capa de condensado se reduce lo suficiente, los efectos de la tensión superficial se vuelven importantes, por lo que pueden provocar el rompimiento de la película, si esto sucediera, el mecanismo de condensación puede cambiar a la nucleación en una pared sólida, (formación de gotas) la cual es más eficiente, si lo que se requiere es incrementar la tasa de fluido condensado, sobre todo en equipos como los condensadores de las centrales termoeléctricas, pero los modelos analizados en este trabajo no serán válidos para el cálculo de las nuevas tasas de transferencia de calor, ni para determinar los nuevos perfiles de temperaturas, dentro de las gotas.

# Capítulo 5

## CONCLUSIONES

Con los resultados obtenidos para el problema estudiado se pueden concluir los siguientes puntos

1. El parámetro de conducción alfa define el tipo de régimen de pared de la placa que puede ser térmicamente delgada o térmicamente gruesa.
2. Cuando el parámetro alfa tiene valores grandes ( $\alpha \geq 1$ ) se tiene en la placa el régimen de pared térmicamente delgada que equivale a la solución clásica de Nusselt donde el espesor de la capa de condensado es una función de la coordenada longitudinal  $x$  elevada al exponente de  $1/4$ . Por otra parte se comprueba que en este caso el flujo de calor longitudinal no existe y la temperatura permanece constante en ambos lados de la placa.
3. Cuando el parámetro alfa toma valores pequeños ( $\alpha \leq 1$ ) la placa adquiere el régimen de pared térmicamente gruesa, en este caso el espesor de la capa de condensado sigue siendo función de la coordenada longitudinal pero nunca alcanza el valor máximo de la solución de Nusselt lo que ocasiona una capa de condensado mas delgada esto se observa en la gráfica de corrección al espesor que se calcula mediante el parámetro de perturbación
4. Adicionalmente en el régimen de pared térmicamente gruesa existe la conducción de calor bidimensional es decir transversal y longitudinal, así como también aparece una distribución de temperaturas a lo largo de la placa

5. Finalmente se puede concluir que la aparición del flujo de de calor longitudinal, si modifica el espesor de la capa de condensado que predice la solución de Nusselt clásica

# Capítulo 6

## APÉNDICES

### 6.1. Distribución de temperaturas en la placa

La ecuación de Laplace para la placa es:

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial z^2} = 0, \quad (6.1)$$

las condiciones cerca del borde adiabático serán:

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial x^2} = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial z^2} = 0 \quad (6.3)$$

integrando dos veces en dirección de  $z$

$$\theta_w = C_1 z + C_2$$

se pueden calcular las constantes de integración:

$$z = 0, \theta_w = 1, C_2 = 1 \quad (6.4)$$

$$\left( \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \right)_{z=1} = -\frac{\varepsilon^2}{\alpha \Delta} \theta_w = C_1 \quad (6.5)$$

el perfil de temperaturas será:

$$\theta_w = 1 - \frac{\varepsilon^2 \theta_w}{\alpha \Delta} z$$

despejando  $\theta_w$

$$\theta_w = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon^2 z}{\alpha \Delta}} \quad (6.6)$$

si  $z = 1$  y multiplicando el numerador y denominador por  $\Delta$

$$\theta_w = \frac{\Delta}{\Delta + \frac{\varepsilon^2}{\alpha}} = \theta_r$$

cuando  $z = 1$  tenemos la ecuación de evolución

$$\frac{d\Delta^4}{d\chi} = \theta_w \quad (6.7)$$

$$(\chi, z = 1), \quad (6.8)$$

$$d\Delta^4 = \theta_w d\chi \quad (6.9)$$

que podemos integrar para obtener:

$$\int d\Delta^4 = \int_0^\chi \theta_w d\chi \quad (6.10)$$

$$\Delta^4 = \theta_w \chi = \theta_r \chi \quad (6.11)$$

sustituyendo el valor de  $\theta_r$

$$\Delta^4 = \frac{\Delta}{\Delta + \frac{\varepsilon^2}{\alpha}} \chi \quad (6.12)$$

despejando el espesor normalizado

$$\Delta^4 \left( \Delta + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \right) = \chi \Delta \quad (6.13)$$

debido a que el valor del número de Nusselt no puede ser mayor de  $4/3$  la corrección para este valor será:

$$\Delta^4 + \frac{4}{3} \left( \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \right) \Delta^3 = \chi \quad (6.14)$$

## 6.2. Solución de las Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas

La solución de una ecuación diferencial parcial depende del grupo al que pertenece ya que existen tres tipos principales que son: Ecuaciones Parabólicas, Hiperbólicas y Elípticas. La ecuación de Laplace es una ecuación de este último tipo que se puede resolver dado que se conocen tres condiciones de frontera y una cuarta condición será la ecuación de acoplamiento, el valor de la temperatura en la superficie de la placa, una vez que se conoce la temperatura se puede calcular con la ecuación acoplada, el valor del espesor de la capa de fluido condensado que fluye sobre la pared.

Como la ecuación de Laplace es del tercer tipo, es decir, elíptica, se puede resolver por el método de diferencias finitas centradas como se describe a continuación:

$$\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial z^2} = 0 \quad (6.15)$$

sujeta a las condiciones de frontera:

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \right)_{\chi=0,1} = 0 \quad (6.16)$$

$$\left( \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \right)_{z=1} = -\frac{\varepsilon^2}{\alpha} \frac{\theta_w}{\Delta} \quad (6.17)$$

$$\theta_w(\chi, z = 0) = 1 \quad (6.18)$$

que se puede discretizar como sigue:

$$\frac{\theta_{w_{i+1,j}} - 2\theta_{w_{i,j}} + \theta_{w_{i-1,j}}}{\Delta \chi^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\theta_{w_{i,j+1}} - 2\theta_{w_{i,j}} + \theta_{w_{i,j-1}}}{\Delta z^2} = 0 \quad (6.19)$$

Esta ecuación en diferencias finitas toma la forma de un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$A\theta = B \quad (6.20)$$

y se puede resolver por los diferentes métodos iterativos que existen para este tipo de ecuaciones dependiendo de la aproximación que se requiera para encontrar los valores de las temperaturas, esto puede hacerse utilizando un

gran número de nodos lo cual retardará el tiempo de convergencia del programa pero el error de la solución será menor, todo depende del tiempo de cómputo y de la capacidad de la máquina disponibles. Aquí se ejemplifica con una matriz de diez por diez pero esto puede hacerse con muchos más nodos. A continuación se muestra la matriz que se genera al considerar un modelo de diez nodos, mismo que puede aplicarse para resolver el campo de temperaturas en la placa, y con esta solución calcular espesor de la capa de fluido condensado.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \\ \theta_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \\ B_{10} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

la distribución de los nodos sería como muestra la siguiente figura:

### 6.3. Solución numérica de la capa límite

En esta sección se analizan las diferencias finitas centradas, el método iterativo de Newton para resolver el sistema de ecuaciones no lineales (de la energía y la cantidad de movimiento), así como la ecuación de la placa sólida que es lineal. Debido a la naturaleza elíptica del problema, la ecuación de la fase fluida se resolvió inicialmente asumiendo una temperatura uniforme en la placa, con lo cual se obtuvo una primera aproximación para la distribución del flujo de calor en la frontera con la placa, para resolver la ecuación de energía del sólido, partiendo de estos resultados se obtuvo una nueva distribución de temperatura en la placa después de un pequeño intervalo de tiempo, entonces una vez más, la ecuación de la fase fluida fue resuelta y el procedimiento continuó de la misma manera durante todo el proceso de enfriamiento.

El programa principal está escrito en lenguaje FORTRAN, y consta de dos subrutinas una que resuelve la ecuación de la energía y la ecuación de

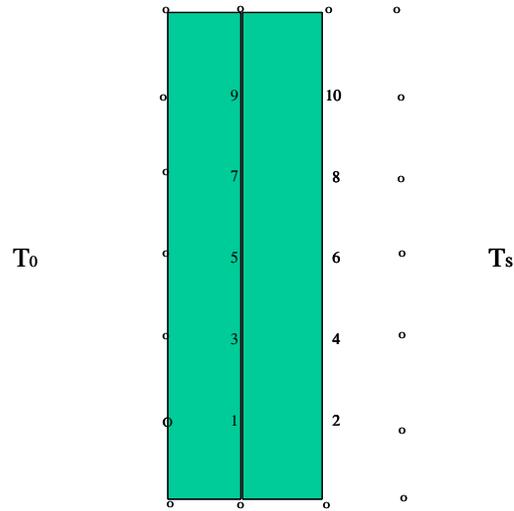


Figura 6.1: Malla numérica

cantidad de movimiento en el fluido y otra que resuelve la ecuación de la energía en la placa. La subrutina para el fluido tiene iteración interna debido a la no linealidad de estas ecuaciones esta subrutina utiliza como condición de frontera la temperatura  $T_0$  constante en la superficie izquierda de la placa y entrega como resultado la temperatura y el flujo de calor en la superficie derecha de la placa. La subrutina para la placa no contiene iteración y es en ésta donde puede incrementarse el tiempo. Esta subrutina utiliza como condición de frontera el flujo de calor en la interfaz calculado por la subrutina del fluido y en su salida se obtienen los perfiles de temperatura en la placa.

## 6.4. Aplicación del Método de Keller

El método de Keller se aplica en cuatro pasos a saber:

- 1.- Reducir las ecuaciones por resolver a un sistema de primer grado.
- 2.- Escribir la ecuaciones del sistema empleando diferencias finitas centrales.
- 3.- Linealizar las ecuaciones resultantes (si estas son no lineales por el método de Newton) y escribir el nuevo sistema en forma vectorial.
- 4.- Resolver el sistema lineal empleando el método de eliminación de bloque tridiagonal.

El sistema de ecuaciones (2.61) y (2.64) se expresa como un sistema de ecuaciones de primer orden de la siguiente manera:

$$u = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \quad (6.22)$$

$$v = \frac{\partial g_c}{\partial \eta} \quad (6.23)$$

$$w = \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (6.24)$$

$$\frac{d\Delta^4}{d\chi} = \theta_w \quad (6.25)$$

También las ecuaciones (2.61) y (2.62) para el fluido en las nuevas variables para reducir el orden de estas ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} + 1 = Ja\Delta^4 \left[ v \frac{\partial v}{\partial \chi} - w \frac{\partial g_c}{\partial \chi} + \frac{2}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\chi} v [v - g_c] \right] \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = JaP_R\Delta^4 \left[ v \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - u \frac{\partial g_c}{\partial \chi} - \frac{2}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\chi} [vg_c] \right] \quad (6.27)$$

Con condiciones de frontera:

$$\eta = 0, \quad g_c = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \theta = \theta_w \quad (6.28)$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \theta = 0 \quad (6.29)$$

El sistema de ecuaciones de primer orden anterior se puede escribir en diferencias finitas centradas como sigue:

$$\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_i^{j+1} = \Delta\eta \bar{w}_i^{j+1} \quad (6.30)$$

$$g_{ci+1}^{j+1} - g_{ci}^{j+1} = \Delta\eta \bar{v}_i^{j+1} \quad (6.31)$$

$$v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1} = \Delta\eta \bar{w}_i^{j+1} \quad (6.32)$$

$$\frac{w_{i+1}^{j+1} - w_i^{j+1}}{\Delta\eta} + \frac{w_{i+1}^j - w_i^j}{\Delta\eta} + 1 = \frac{Ja\Delta^4}{\Delta\chi} \left[ \begin{aligned} & (\bar{v}_i^j + \bar{v}_i^{j+1}) (\bar{v}_i^{j+1} - \bar{v}_i^j) - (\bar{w}_i^{j+1} + \bar{w}_i^j) (\bar{g}_{ci}^{j+1} - \bar{g}_{ci}^j) + \\ & \frac{2}{\Delta_i^j} (\Delta_i^{j+1} - \Delta_i^j) (\bar{v}_i^j + \bar{v}_i^{j+1}) [(\bar{v}_i^j + \bar{v}_i^{j+1}) - (\bar{g}_{ci}^{j+1} + \bar{g}_{ci}^j)] \end{aligned} \right] \quad (6.33)$$

$$\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{\Delta\eta} + \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta\eta} = \frac{JaP_R\Delta^4}{\Delta\chi} \left[ \begin{aligned} & (\bar{v}_i^j + \bar{v}_i^{j+1}) (\bar{\theta}_i^{j+1} - \bar{\theta}_i^j) - (\bar{u}_i^j + \bar{u}_i^{j+1}) (\bar{g}_{ci}^{j+1} - \bar{g}_{ci}^j) - \\ & \frac{2}{\Delta_i^j} (\Delta_i^{j+1} - \Delta_i^j) (\bar{v}_i^j + \bar{v}_i^{j+1}) (\bar{g}_{ci}^{j+1} + \bar{g}_{ci}^j) \end{aligned} \right] \quad (6.34)$$

## 6.5. Método de Newton

Para resolver el problema de la no linealidad de las ecuaciones de la capa límite se propone el método de Newton que es frecuentemente utilizado para resolver este tipo de ecuaciones, pero no es tan fácil de aplicar. La principal dificultad que presenta este método es en cuanto a su estabilidad, aunque los resultados son buenos en lo que a la convergencia se refiere.

El método consiste en suponer que se conoce una solución aproximada  $S_0^{j+1}$  para los términos del tipo  $a_i^{j+1}$ . Después se hace una sustitución en las ecuaciones en diferencias finitas del tipo  $S^{j+1} \rightarrow S_0^{j+1} + \delta S$ .

Se linealiza el sistema en las  $\delta S$ , es decir, los términos de orden  $\delta S^2$  se consideran muy pequeños y se eliminan.

Como resultado se obtiene un sistema de ecuaciones para resolver en los  $\delta S$ .

Finalmente la solución de este sistema de ecuaciones es utilizada para ser sumada como factor de corrección a la solución propuesta aproximada de los  $S_0^{j+1}$  obteniéndose nuevamente un sistema de ecuaciones para los  $\delta S$ .

El procedimiento se repite hasta que se cumple que los  $\delta S < \epsilon$  donde  $\epsilon$  representa el grado de convergencia al que se quiere llegar.

# Bibliografía

- [1] S.V.Patankar and Sparrow, Condensation on an extended surface, J. Heat Transfer 101,434 -440(1979).
- [2] J.E. Wilkins, Condesation on an extended surface,J. Heat Transfer 102 186-187 (1980)
- [3] P.K. Sarma, S.P. Chary and V Dharma Rao, Condesation on a vertical plate fin of variable thickness, Int.J.Heat Mass Transfer, 31 1941-1944 (1988).
- [4] H.J.H. Brouwers, Film condensation on non-isothermal vertical plates, Int.Heat Mass Transfer, 32 665-663 (1989).
- [5] C.Treviño. and F.Méndez, Transient conjugate condensation process on a vertical plate with finite thermal inertia, to appear in Int. Heat Mass Transfer.
- [6] Film condensation generated by a forced coolin fluid to appear in Journal of European Mechanics /Fluids.
- [7] W.nusselt,Z. Die,Oberflächenkondensation des wasserdampfes, Z.Ver.Dt. Ing.60 541-546, 569-575 (1916).
- [8] F.P.. Incropera and D.P. Dewwitt, Fundamentals of Heat and Mass Transfer 3rd edition p 589, Jhon Willey Sons,New York(1990).
- [9] H. Wetzler, Kennzahlen der Verfahrenstechnik, Huthig Verlag,Heidelberg (1985).
- [10] R. Anderson and A. Bejan, Natural Convection on Both Sides of a Vertical Wall Separating Fluids at Different Temperature, *Transactions of the ASME*, Vol. 102, pp. 630-635, (1980).

- [11] R. Anderson and A. Bejan, Heat transfer through a single and double vertical walls in natural, convection: theory and experiment, on Both Sides of a Vertical Wall Separating Fluids at Different Temperature, *Int. Journal Heat Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 1611-1620, (1981).
- [12] R. Viskanta and D.W. Lankford, Coupling of heat transfer between two natural convection systems separated by a vertical wall, *Int. Journal Heat Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 1171-1177, (1981).
- [13] S.W. Churchill and Ozoe, A correlation for laminar free convection from a vertical plate, *J. Heat Transfer*, Vol. 95, pp. 540-541, (1973).
- [14] M. Sakikibara, H. Amaya, S., Mori and A. Tanimoto, Conjugate heat transfer between two natural convections separated by a vertical plate, *Int. Journal Heat Mass Transfer*, Vol. 35, pp. 2289-2297, (1992).
- [15] C. Treviño, F. Méndez and F. J. Higuera, Heat transfer across a vertical wall separating two fluids at a different temperatures, *Int. Journal Heat Mass Transfer*, in press, (1995).
- [16] Córdova, J. and Treviño, C., Effects of longitudinal heat conduction of a vertical thin plate in natural convective cooling process, *Wärme-und Stoffübertragung*, Vol. 29, pp. 195-204, (1994).
- [17] Cebeci, T. and Bradshaw, P., *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, Springer, Berlin, (1984).
- [18] A Gary, *Numerical Methods in Fluid Dynamics: Initial and initial boundary-value problems*, Cambridge University Press, USA, (1985).
- [19] Kays, W. M. and Crawford, M. E., *Convective Heat Transfer*, Mc. Graw-Hill Book Company, New York, (1980).
- [20] Fundamental of mechanical of fluids Currie