UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ENCAJES EQUIVALENTES EN RETRACTOS ABSOLUTOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

RODRÍGUEZ MEDINA, LEONARDO

ASESOR: ANTONYAN, SERGEY

MÉXICO, D. F. 2005

Encajes equivariantes en retractos absolutos

Leonardo Rodríguez Medina

Director de Tesis: Sergey Antonyan

11 de mayo de 2005

Índice general

Introducción

El problema de extensión de funciones en topología es importante y aparece frecuentemente. En general éste es el siguiente.

> Dados dos espacios topológicos X y Y y una función continua $f : A \to Y$ donde A es un subespacio cerrado de X, encontrar una extensión continua de f a una vecindad (abierta) U de A.

Un caso de particular importancia observado por K. Borsuk es cuando $Y = A$ y $f = Id_A$. En este caso, si existe una extensión de f a una vecindad U de A, diremos que A es un retracto de vecindad de X; a la extensión $r : U \to A$ de f se le llama retracción. Si además $U = X$, A se dice simplemente retracto de X.

Un espacio Y en una clase débilmente hereditaria de espacios $\mathcal{K}$ es un retracto absoluto para dicha clase ($Y \in \mathrm{AR}(\mathcal{K})$), si cada vez que Y aparece como un subespacio cerrado de un espacio $X \in \mathcal{K}$, Y es retracto de X. En general, un espacio Y es un extensor absoluto para la clase $\mathcal{K}$ ($Y \in \mathrm{AE}(\mathcal{K})$) si cada función continua $f : A \to Y$, de un subespacio cerrado A de $X \in \mathcal{K}$, posee una extensión continua a todo X. Claramente, si $Y \in \mathcal{K}$ y Y es un extensor absoluto para la clase $\mathcal{K}$, entonces es un retracto absoluto para $\mathcal{K}$.

Resulta que para un número importante de clases de espacios (débilmente hereditarias), el concepto de retracto absoluto coincide con el de extensor absoluto, esto es, la proposición: $Y \in \mathrm{AR}(\mathcal{K})$ implica $Y \in \mathrm{AE}(\mathcal{K})$, también es cierta. Un método para probar esta proposición consiste en encajar al espacio Y en un extensor absoluto como un subespacio cerrado. En topología general existen varios teoremas de encaje que tienen como espacio ambiente precisamente a extensores absolutos.

En este trabajo revisaremos algunos de esos resultados agregando la hipótesis adicional de que los espacios cuenten con un grupo topológico de transformaciones (fijo). Obtendremos entonces, encajes que respeten la acción inducida por dicho grupo (equivariantes).

Recordemos que un grupo de transformaciones en un conjunto X, es un grupo G junto con un homomorfismo de grupos $\Theta : G \to S_X$, donde S_X es el grupo de permutaciones de X en sí mismo. Para el caso en que X es un espacio topológico, fijaremos nuestra atención en el subgrupo $\mathrm{Homeo}(X)$ de S_X compuesto de todos los autohomeomorfismos de X y nos restringiremos a homomorfismos $G \to \mathrm{Homeo}(X)$. Si G está provisto de una topología de modo tal que G sea un grupo topológico (multiplicación e inversión continuas), y dotamos a $\mathrm{Homeo}(X)$ de la topología compacto-abierta, podemos, en principio, considerar homomorfismos continuos. Sin embargo, cuando X no es compacto de Hausdorff, $\mathrm{Homeo}(X)$ no necesariamente resulta un grupo topológico con la topología compacto-abierta. No obstante, Θ es equivalente a una función (llamada acción) $\theta : G \times X \to X$, $(g, x) \to gx$ que satisface las condiciones

$$ex = x \quad \text{y} \quad g(hx) = (gh)x$$

para toda $x \in X$ y todos $g, h \in G$, donde $e \in G$ es el neutro. Pedimos entonces la continuidad de θ para referirnos al grupo topológico de transformaciones (G, X, θ). En este caso diremos que X es un G-espacio. A lo largo del trabajo, mantendremos al grupo G fijo.

Una función continua entre G-espacios que conmuta con la acción del grupo es llamada equivariante. Es posible entonces, considerar la noción equivariante de retractos y extensores para una clase $\mathcal{K}^G$ de G-espacios en $\mathcal{K}$.

Presentamos así las versiones equivariantes de famosos teoremas de encajes en G-extensores absolutos. Por ejemplo, el encaje isométrico de Kuratowski-Wojdyslawski y el de Tychonoff . Enunciamos también versiones equivariantes del Teorema de Extensión de J. Dugundji y otros teoremas equivariantes sobre extensores absolutos con la finalidad de mostrar la equivalencia entre G-extensores y G-retractos, tanto absolutos como de vecindad, para las clases de G-espacios métricos, compactos de Hausdorff, compactos métricos y p-paracompactos.

La fuente de los resultados principales de este trabajo es el artículo de S. Antonyan [5]. La estructura de la tesis es como sigue:

En el Capítulo 1 se presentan las definiciones de grupo topológico, grupo topológico de transformaciones y las nociones básicas de la Teoría de Retractos. También se discuten algunas propiedades de los espacios de Tychonoff y de los espacios p-paracompactos. Además, recordamos algunos hechos de topología general que se usan a lo largo del texto sin referencia explícita. Una revisión detallada de los grupos de transformaciones continuos se encuentra en los apuntes de S. de Neymet [13]. Una exposición de la Teoría de Retractos se encuentra por ejemplo, en la monografía de S-T. Hu [9].

El Capítulo 2 trata algunas propiedades de topología general relativas al campo de las acciones continuas, como las métricas, los límites inversos y separación de puntos en G-espacios. También se aborda el tema de acciones en espacios de funciones de G-espacios y subespacios importantes como las funciones G-uniformes. Esto último siguiendo el enfoque presentado por J. de Vries en [16].

En el Capítulo 3 se encuentran los encajes equivariantes anunciados para espacios metrizables (bajo una métrica invariante), espacios de Tychonoff y espacios p-paracompactos. En la primera sección se dan tres encajes isométricos. El primero de ellos es una versión equivariante del Teorema de Encaje de Kuratowski-Wojdyslawski (Teorema 1.4.8); los otros dos resultados tienen como espacios ambiente G-espacios lineales normados. Estos resultados requieren la existencia de una métrica invariante que se garantiza, por ejemplo, cuando el grupo actuante es compacto. El Teorema 3.2.1 en la segunda sección representa una versión equivariante del famoso Teorema de Encaje de Tychonoff (Teorema 1.3.6). En la prueba de este Teorema se usa el hecho (debido a L. S. Pontrjagin) de que podemos aproximar grupos compactos con grupos compactos de Lie y por tanto acotar el estudio de acciones de grupos compactos al de grupos compactos de Lie (Corolario 2.5.4). Observamos también que este teorema nos da una compactación equivariante del mismo peso para un espacio dado (Corolario 3.2.2). Finalmente, el encaje presentado para espacios p-paracompactos usa como espacio ambiente el producto de un espacio obtenido en la primera sección y uno de la segunda sección.

Para concretar los resultados, se enuncian en el Capítulo 4 versiones equivariantes del Teorema de Extensión de Dugundji (Teorema 1.4.9), obtenidas por Antonyan tanto para grupos compactos de Lie (en [4]), como para grupos compactos en general (en [1]). Éstos, junto con otros resultados debidos también a Antonyan, nos permiten finalmente mostrar la equivalencia de las nociones de retracto y extensor absolutos y equivariantes para las clases de espacios métricos, compactos Hausdorff, métricos compactos y p-paracompactos en la presencia de una acción de un grupo topológico compacto (Teorema 4.3.4).

Capítulo 1

Nociones preliminares

1.1. Grupos de transformaciones

1.1.1. Grupos topológicos

Conjugamos los conceptos fundamentales de grupo y espacio topológico de manera natural para dar lugar a los grupos topológicos.

Definición 1.1.1 *Sea G un conjunto con una operación binaria $\cdot$ y una familia de subconjuntos τ. Un* grupo topológico *es una terna $(G, \cdot, \tau)$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$(G, \cdot)$ es un grupo;*

2. *(G, τ) es un espacio topológico;*

3. *las operaciones de grupo $\alpha : G \times G \to G$ y $\beta : G \to G$, dadas por*

$$\alpha(g, h) = g \cdot h, \quad \beta(h) = h^{-1}$$

son continuas.

En adelante, al referirnos a un grupo topológico, obviaremos la notación $(G, \cdot, \tau)$ y sólo escribiremos G. Usaremos la letra e para referirnos al elemento neutro del grupo.

Si tenemos un grupo topológico G y definimos la función $\gamma : G \times G \to G$ por

$$\gamma(g, h) = gh^{-1} \tag{1.1}$$

resulta inmediato que γ es continua. Por otro lado, si G es un grupo con estructura topológica de modo tal que la función γ definida arriba resulta continua, y dado que $\gamma(e,h) = h^{-1}$ para toda $h \in G$, notamos que si identificamos a G con $\{e\} \times G$ tenemos que $\beta = \gamma|_{\{e\}\times G}$ es continua y además como $\gamma(g, \beta(h)) = gh$ para cualesquiera $g, h \in G$, la operación $\alpha = \gamma(\ ,\beta)$ es continua.

Observación 1.1.2 *La condición* 3 *de la definición 1.1.1 es equivalente a la condición:*

3'. la función $\gamma : G \times G \to G \quad \gamma(g,h) = gh^{-1}$ *es continua.*

Ejemplos

Algunos ejemplos conocidos e importantes de grupos topológicos son:

1. Cualquier grupo G provisto de la topología discreta.
2. Los grupos aditivos real y complejo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con la topología inducida por sus métricas usuales.
3. Los grupos multiplicativos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente.
4. El grupo de matrices no singulares sobre los reales $GL(n,\mathbb{R})$ dotado de la topología heredada de $M(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ o bien el grupo multiplicativo $GL(n,\mathbb{C})$ como subespacio de $M(n,\mathbb{C})$.
5. Subgrupos de $GL(n,\mathbb{R})$ y $GL(n,\mathbb{C})$ como:
   a) el grupo especial lineal $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) |\ \det(A) = 1\}$.
   b) el grupo ortogonal $O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) |\ AA^t = I_n\}$.
   c) el grupo especial ortogonal $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$.

   y los respectivos grupos para $GL(n,\mathbb{C})$:
   a) $SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) |\ \det(A) = 1\}$.
   b) $U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) |\ A(\bar{A})^t = I_n\}$.
   c) $SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$.
6. Un ejemplo interesante dentro de estos es $SU(1)$, en este caso $G(n,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ y $A(\bar{A})^t = \|A\|$. De modo que $SU(1) = \{x \in \mathbb{C} |\ \|x\| = 1\} = \mathbb{S}^1$.

1.1.2. Grupos topológicos de transformaciones

Definamos ahora los grupos de transformaciones de un espacio.

Definición 1.1.3 *Sea G un grupo y X un conjunto. Una* acción *(izquierda) de G en X es una función $G \times X \xrightarrow{\theta} X$ que satisface las condiciones:*

(i) $\theta(e, x) = x$ *para toda* $x \in X$

(ii) $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$ *para todos* $g, h \in G$ *y toda* $x \in X$

En este caso diremos que G actúa sobre X por la izquierda y X es un G-*conjunto* o *espacio fase*. Por comodidad, sustituiremos la expresión $\theta(g, x)$ por gx.

Dada una acción izquierda de G en X, es fácil ver que ésta define una acción derecha $X \times G \to G$, $(x, g) \to g^{-1}x$. Recíprocamente, toda acción derecha induce una acción izquierda. En adelante usaremos acciones por la izquierda simplemente llamándolas acciones.

Definición 1.1.4 *Un* grupo topológico de transformaciones *es una terna (G, X, θ) que consta de un grupo topológico G, un espacio topológico X y una acción continua $G \times X \xrightarrow{\theta} X$.*

*En este caso diremos que X es un G-*espacio *y obviaremos la acción θ.*

Si G es un grupo y X un G-conjunto, consideramos los siguientes conjuntos:

a) Para $H \subseteq G$ y $A \subseteq X$, $HA = \{ha \in X \mid h \in H,\ a \in A\}$. Si $A = \{x\}$ escribiremos $H(x)$ y si $H = G$, nos referimemos a $G(x)$ como la *órbita* de x en X. Si $H = \{h\}$, cambiaremos HA por hA.

b) Para $A \subset X$, $G_A = \{g \in G \mid gA = A\}$ se llama el *estabilizador* de A. Si $A = \{x\}$ escribiremos G_x en vez de $G_{\{x\}}$.

c) Para $H \leq G$ (H subgrupo de G), un subconjunto A de X se dice H-invariante si $HA = A$ o equivalentemente, si $a \in A$, $h \in H$ implica $ha \in A$. Si $H = G$, llamaremos a A *invariante.*

d) $x \in X$ se llama punto fijo si $G = G_x$, e.d. $gx = x\ \forall g \in G$.

Sucede que $G_x \leq G$ para toda $x \in X$ y si $A \subset X$ es invariante, $\theta|_{G\times A} : G \times A \to A$ es una acción.

Ejemplos

1. Cualquier grupo topológico actúa en sí mismo (continuamente) de varias formas. Mediante la multiplicación α (Definición 1.1.1) o mediante γ (ecuación (1.1)).

2. Cualquier grupo discreto G convierte a todo espacio X en un G-espacio con la *acción trivial*, *i.e.*, $gx = x$ para toda $g \in G$, $x \in X$.

3. Si X es un espacio topológico y $f \in \text{Homeo}(X)$ (homeomorfismos de X en sí mismo), entonces el grupo discreto $\mathbb{Z}$ actúa en X mediante la función $(n, x) \to f^n(x)$.

4. Sea G un grupo topológico y X un G-espacio. Entonces cualquier homomorfismo continuo $\phi : G' \to G$, de otro grupo topológico G', induce una acción continua en X: la composición $G' \times X \xrightarrow{\phi \times Id_X} G \times X \xrightarrow{\theta} X$ es continua y para cada $x \in X$, $g', h' \in G'$ se tiene

$$(e', x) \to \phi(e')x = ex = x, \quad \phi(g'h')x = (\phi(g')\phi(h'))x = \phi(g')(\phi(h')x).$$

5. Las rotaciones del plano forman un grupo de transformaciones continuas. Si $X = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{S}^1 \leq \mathbb{C}$ y gx es la multiplicación compleja, X es claramente un G-espacio. Representamos esta situación en la Figura 1.1.

Tomando en cuenta los ejemplos 3 y 5 listados arriba, podemos observar que los elementos del grupo “mueven” a cada punto del espacio fase y este movimiento es invertible. Si $g \in G$, la función $\theta_g : X \to X$, $\theta_g(x) = \theta(g, x)$ satiface, de acuerdo a la definición de acción,

1. $\theta_e(x) = x$, para toda $x \in X$

2. $(\theta_g\theta_h)(x) = g(hx) = (gh)x = \theta_{gh}(x)$, para cualesquiera $x \in X,\ g, h \in G$

es decir, $\theta_e = Id_X$ y $\theta_g\theta_h = \theta_{gh}$. Lo que implica $\theta_g\theta_{g^{-1}} = \theta_e = Id_X = \theta_{g^{-1}}\theta_g$, luego θ_g es biyectiva. En caso de tener un G-espacio en lugar de un G-conjunto, la función θ_g es continua al igual que $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$, de modo que θ_g es un elemento en $\text{Homeo}(X)$.

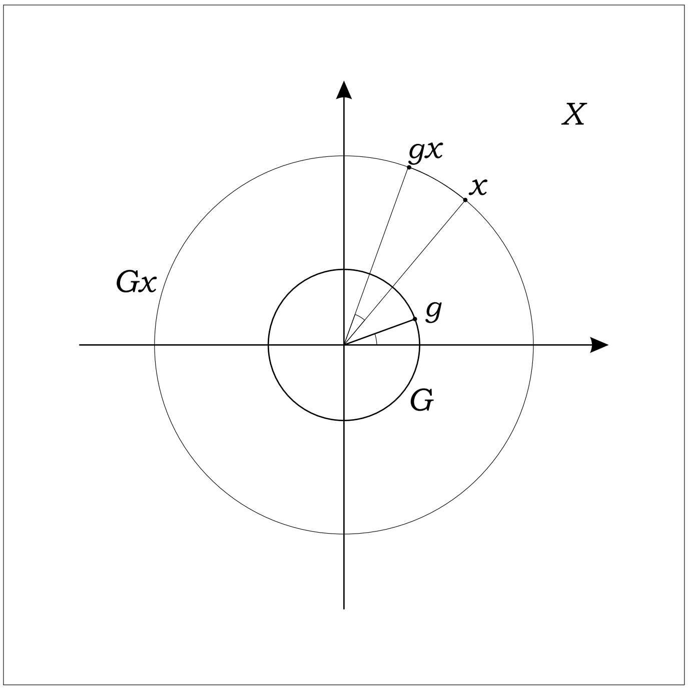

Figura 1.1: Grupo de transformaciones

Observación 1.1.5 *Dada una acción* $G \times X \xrightarrow{\theta} X$ *y un elemento* $g \in G$*, la asignación*

$$g \to \theta_g$$

es un homomorfismo de grupos entre G *y el grupo de permutaciones de* X*. En caso de tener una acción continua, el homomorfismo va de* G *a Homeo*(X)*.*

A dicha asignación la denotaremos $\Theta : G \to \text{Homeo}(X)$. En este sentido, (G, X, θ) es un grupo de transformaciones.

Funciones equivariantes

Una vez definidos los G-espacios, es natural preguntarnos por las funciones que preservan su estructura, *i.e.*, funciones que conmutan con la acción del grupo G.

Definición 1.1.6 *Sean G un grupo topológico y X, Y dos G-espacios. Una función continua $f : X \to Y$ se llama* equivariante *si $f(gx) = gf(x)$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$.*

En caso de que Y tenga la acción trivial de G, llamaremos a la función invariante.

Es claro que la función identidad $Id_X : X \to X$ para un G-espacio X es equivariante y que dadas dos funciones equivariantes $f : X \to Y, \quad h : Y \to Z$ entre G-espacios X, Y, Z, su composición $hf : X \to Z$ es también equivariante, de aquí se obtiene lo siguiente.

Observación 1.1.7 *Sea G un grupo topológico. Entonces la clase $\mathcal{TOP}^G$ de G-espacios forman, usando a las funciones equivariantes como morfismos, una subcategoría de $\mathcal{TOP}$ (los espacios topológicos y funciones continuas).*

Dado un grupo topológico G y un G-espacio X,

1. Si $A \subset X$ es invariante, habíamos visto que $\theta|_{G\times A} : G \times A \to A$ es una acción, por tanto, A es un G-espacio. Esta es la única acción que hace a la inclusión $A \hookrightarrow X$ un morfismo de G-espacios.

2. Para todo $x \in X$, tenemos $x = ex$. Por otro lado, si $y \in X$ es tal que $gx = hy \in (G(x) \cap G(y))$ para algunos $g, h \in G$, entonces $x = g^{-1}hy \in G(y)$ por lo que $G(x) \subseteq G(y)$, análogamente $G(y) \subseteq G(x)$; luego $G(x) = G(y)$. Así que dos órbitas en el espacio fase X o bien son ajenas o coinciden. Tenemos entonces que el conjunto de órbitas de X forma una partición de este. Denotaremos por X/G al conjunto $\{G(x) \mid x \in X\}$ de órbitas en X. Tenemos también la función canónica $p : X \to X/G$; así que podemos dotar a X/G de la *topología cociente* respecto a p, es decir, un subconjunto $A \subset X/G$ es abierto en esta topología si y sólo si $p^{-1}(A) \subset X$ es abierto. Al espacio obtenido así lo llamaremos *espacio de órbitas*. Claramente, la acción natural de G en $X/G, \quad (g, Gx) \to G(gx) = G(x)$ resulta trivial. En este caso, $p : X \to X/G$ es un morfismo invariante.

1.2. Herramientas de topología general

1.2.1. Isometrías

Denotaremos por $\mathbb{R}^+$ a los números reales no negativos.

Para un espacio métrico (X, d), si $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$, la bola abierta con centro en x_0 y radio ϵ será denotada por $O_d(x_0, \epsilon)$.

Definición 1.2.1 *Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ se llama* isometría *si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se satisface*

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Observación 1.2.2 *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Entonces cualquier isometría de X a Y es un encaje.*

Demostración Sea $f : X \to Y$ una isometría, entonces

1. f es continua: Sean $\epsilon > 0$ y $x_0 \in X$, entonces

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(O_\rho(f(x_0), \epsilon)) &\Leftrightarrow \rho(f(x_0), f(x)) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow d(x_0, x) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow x \in O_d(x_0, \epsilon) \end{aligned}$$

2. f es inyectiva: claramente si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $0 = \rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \therefore x_1 = x_2$.

3. Si $\varphi : f(X) \to X$ es la inversa de f, entonces

$$\begin{aligned} f(x) \in \varphi^{-1}(O_d(x_0, \epsilon)) &\Leftrightarrow d(x_0, \varphi(f(x))) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow d(x_0, x) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \rho(f(x_0), f(x)) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow f(x) \in O_\rho(f(x_0), \epsilon) \end{aligned}$$

Por tanto φ es continua.

□

1.2.2. Redes

Las redes generalizan la noción familiar de sucesiones. Para abordar la definición de red, es necesario primero tener presente la de conjunto dirigido:

Sea Λ un conjunto. Tomemos un preorden $\preceq$ en Λ, esto es, $\preceq$ es una relación binaria de Λ que satisface

(i) $\lambda \preceq \lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$

(ii) $\lambda_1 \preceq \lambda_2,\ \lambda_2 \preceq \lambda_3\ \Rightarrow \lambda_1 \preceq \lambda_3$ para todos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2 \in \Lambda$.

El par $(\Lambda, \preceq)$ se llama *conjunto dirigido* por $\preceq$ si

(iii) para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda \in \Lambda$ con $\lambda_1 \preceq \lambda$ y $\lambda_2 \preceq \lambda$.

Ejemplos

1. La relación $\leq$ de orden usual en $\mathbb{N}$ ó $\mathbb{R}$ resulta ser un orden lineal, por lo que tanto $(\mathbb{N}, \leq)$ como $(\mathbb{R}, \leq)$ son conjuntos dirigidos.

2. En un espacio topológico cualquier base local para un punto dado constituye un conjunto dirigido si definimos el preorden como: $U \preceq V$ si $V \subset U$.

Definición 1.2.3 *Sea X un espacio topológico y $\Lambda = (\Lambda, \preceq)$ un conjunto dirigido. Una* red *en X es una función $\phi : \Lambda \to X$. Al punto $\phi(\lambda) \in X$ se le denota por x_λ y a la red por su imagen $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ o simplemente $\{x_\lambda\}$.*

En el caso de que $\Lambda = \mathbb{N}$ (con el orden usual), las redes son precisamente las sucesiones $\{x_n\}$ de X.

Definición 1.2.4 *Sea $\{x_\lambda\}$ una red en X. Decimos que*

1. *$\{x_\lambda\}$ converge a $x \in X$ si para toda vecindad V de x, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$ siempre que $\lambda' \succeq \lambda$. Denotamos esto escribiendo $x_\lambda \to x$.*

2. *$\{x_\lambda\}$ tiene a $x \in X$ como punto de acumulación si para toda vecindad V de x y para toda $\lambda \in \Lambda$ existe $\lambda' \succeq \lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$.*

Como habiamos visto en el ejemplo 2 de conjuntos dirigidos, si $\mathcal{V}$ es una base local de vecindades de $x \in X$, $(\mathcal{V},\supseteq)$ es dirigido y toda red $\{x_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ con la propiedad de que $x_V \in V$ para cada $V \in \mathcal{V}$, obviamente converge a x.

Proposición 1.2.5 *Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si siempre que una red $\{x_\lambda\}$ en X converge a x_0, la red $\{f(x_\lambda)\}$ converge a $f(x_0) \in Y$.*

Ver por ejemplo, [6], Cap. X, Teo. 5.1

Cuando el espacio X satisface el primer axioma de numerabilidad, cada base de vecindades en un punto x_0 se puede sustituir por una base numerable decreciente $\{V_n\}$. Entonces, toda red convergente a x_0 contiene una sucesión de la forma $\{x_{V_n}\}$ con $x_{V_n} \in V_n$, que convergerá a x_0.

Observación 1.2.6 *Si en la Proposición 1.2.5 pedimos que X sea primero numerable, es condición suficiente para la continuidad de f en x_0, que dada una sucesión convergente a x_0, la sucesión de imágenes converja a $f(x_0)$.*

Otros resultados que usaremos a lo largo del trabajo son

Proposición 1.2.7 *Sea X un espacio topológico. Entonces*

1. *X es de Hausdoff si y sólo si toda red converge a lo más a un punto ([6], Cap. X, Teo. 3.1).*
2. *X es compacto si y sólo si toda red en X tiene un punto de acumulación ([6], Cap. XI, Teo. 1.3).*
3. *Si $A \subset X$, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una red en A convergente a x ([6], Cap. X, Teo. 4.1).*

Observación 1.2.8 *En un espacio numerablemente compacto, toda sucesión tiene un punto de acumulación.*

1.2.3. Espacios topológicos vectoriales

Definición 1.2.9 *Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial (real). Si V tiene estructura topológica de modo tal que $(V, +)$ es un grupo topológico y $(\mathbb{R}, V, \cdot)$ es un grupo topológico de transformaciones, diremos que V es un* espacio vectorial topológico.

En algunas ocasiones llamaremos a V *espacio topológico lineal.*

Si tenemos una norma definida en un espacio vectorial V, $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$, es inmediato que la función $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$, definida por

$$d(v,w) = \|v - w\| \tag{1.2}$$

determina una métrica para V y ésta a su vez una topología para V, resultando un espacio vectorial topológico. Denotaremos por $(V, \|\cdot\|)$ al espacio topológico lineal normado así obtenido.

Por ejemplo, el conjunto de funciones continuas y acotadas de un espacio topológico X en $\mathbb{R}$, denotado por $C^*(X)$, con la suma y la multiplicación por escalares definida punto por punto, es claramente un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$). Dada $f \in C^*(X)$, la definición $\|f\| = \sup\{|f(x)| \,|\, x \in X\}$ tiene sentido y es fácil ver que esta es una norma (llamada del supremo) para $C^*(X)$. A la métrica s inducida por esta norma la llamaremos *métrica supremo*, ésta es

$$s : C^*(X) \times C^*(X) \to \mathbb{R}^+, \quad s(f_1, f_2) = \sup_{x\in X}\{|f_1(x) - f_2(x)|\}.$$

Recordemos que un subconjuuto A de un espacio vectorial (real) V es convexo si para cualesquiera $v, w \in A$ y cada $t \in [0,1]$ se tiene que $tv + (1-t)w \in A$. Si V es un espacio lineal topológico, diremos que es *localmente convexo* si dada U vecindad de $0 \in V$, existe $U' \subseteq U$ vecindad convexa de 0. Es claro que un espacio lineal normado $(V, \|\cdot\|)$ es localmente convexo.

Definición 1.2.10 *Sea L un espacio vectorial y A un subconjunto de L. La* envoltura convexa *de A, denotada por $conv(A)$, es el conjunto convexo más pequeño que contiene a A.*

Para dar una descripción más precisa de $conv(A)$ definamos primero

$$conv_n(A) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid a_1, \ldots, a_n \in A,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1] \text{ y } \sum \lambda_i = 1 \Big\}$$

Proposición 1.2.11 *Sea L un espacio vectorial y A un subconjunto de L, entonces*

$$conv(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} conv_n(A)$$

En particular, si L es espacio topológico lineal y $A \subset L$ es compacto, $conv(A)$ también lo es.

Ver por ejemplo, [12], Cap. 1, Lema 1.2.2.

1.2.4. Sistemas inversos

Definición 1.2.12 *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $(\Lambda, \preceq)$ un conjunto dirigido. Un* sistema inverso $\underline{X}$ *en $\mathcal{C}$ es una familia de objetos y morfismos $\{X_\lambda,\ p_\lambda^{\lambda'},\ \Lambda\}$ indicados por Λ que satisface*

i) Si $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ y $\lambda \preceq \lambda'$ entonces $p_\lambda^{\lambda'} : X_{\lambda'} \to X_\lambda$

ii) Para toda $\lambda \in \Lambda$, $p_\lambda^\lambda = Id_{X_\lambda}$

iii) Para $\lambda,\ \lambda',\ \lambda'' \in \Lambda$ con $\lambda \preceq \lambda' \preceq \lambda''$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X_{\lambda''} \arrow[rr, "p_{\lambda'}^{\lambda''}"] \arrow[dr, "p_\lambda^{\lambda''}"'] & & X_{\lambda'} \arrow[dl, "p_\lambda^{\lambda'}"] \\ & X_\lambda & \end{tikzcd}$$

A las funciones $\{p_\lambda^{\lambda'} : X_{\lambda'} \to X_\lambda,\ \lambda \preceq \lambda'\}$ las llamamos enlaces.

Definición 1.2.13 *Sea $\underline{X} = \{X_\lambda, p_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$ un sistema inverso en una categoría $\mathcal{C}$. Un* límite inverso *para $\underline{X}$ es un objeto X en $\mathcal{C}$ junto con una familia $\{p_\lambda : X \to X_\lambda\}_\Lambda$ de morfismos tales que*

i) Para $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ con $\lambda \preceq \lambda'$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "p_{\lambda'}"'] \arrow[dr, "p_\lambda"] & \\ X_{\lambda'} \arrow[rr, "p_\lambda^{\lambda'}"] & & X_\lambda \end{tikzcd}$$

ii) Si Y es otro objeto en $\mathcal{C}$ y existe una familia de morfismos $\{g_\lambda : Y \to X_\lambda\}_\Lambda$ tales que $g_\lambda = p_\lambda^{\lambda'} g_{\lambda'}$ siempre que $\lambda \preceq \lambda'$, entonces existe un único morfismo $p : Y \to X$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "p"] \arrow[dr, "g_\lambda"'] & X \arrow[d, "p_\lambda"] \\ & X_\lambda \end{tikzcd}$$

conmuta.

Denotamos al límite inverso de un sistema inverso $\underline{X}$ por $\varprojlim \underline{X}$.

Proposición 1.2.14 *Dado un sistema inverso $\underline{X} = \{X_\lambda, p_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$ en la categoría $\mathcal{TOP}$, el límite (inverso) de este sistema existe y es*

$$\text{lím}\, \underline{X} = \{\{x_\lambda\}_\Lambda \in \prod_\Lambda X_\lambda \mid p_\lambda^{\lambda'}(x_{\lambda'}) = x_\lambda \ \textit{siempre que}\ \lambda \preceq \lambda'\}$$

junto con $\{p_\lambda = \pi_\lambda|_{\text{lím}\, \underline{X}}\}$, las proyecciones del producto $\prod X_\lambda$ restringidas a $\text{lím}\, \underline{X}$.

Ver por ejemplo, [11], Cap. 1, pág. 54-55.

1.2.5. Espacios de funciones

El espacio ambiente de varios de los encajes que presentaremos en el Capítulo 3 son espacios de funciones. Observamos que para un espacio X, $(C^*(X), s)$ es un espacio métrico (s la métrica inducida por la norma supremo). Consideremos ahora el caso general $C(X,Y) = \text{Mor}_{\mathcal{TOP}}(X,Y)$ donde Y es un espacio no necesariamente metrizable.

Definición 1.2.15 *Sean X, Y espacios topológicos. Sea $K \subset X$, $U \subset Y$ y $[K,U] = \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U\}$. La topología* compacto-abierta *para $C(X,Y)$ es la generada tomando como subbase al conjunto*

$$\{[K,U] \mid K \subset X \textit{ es compacto y } U \subset Y \textit{ es abierto}\}.$$

Denotamos a este espacio por $C_c(X,Y)$. Para $f \in C(X,Y)$ y $x \in X$, la evaluación $(f,x) \to f(x)$ será denotada por ev. Si $x \in X$ es fijo, $ev_x = ev|_{C(X,Y)\times\{x\}}$.

Proposición 1.2.16 *Sean X, Y espacios topológicos. Entonces*

a) Cualquier topología para $C(X,Y)$ que hace continua a la función ev es más fina que la topología compacto-abierta. ([13], Anexo B, Prop. 5)

b) Si X el localmente compacto entonces la evaluación $ev : C_c(X,Y) \times X \to Y$ es continua. ([6], Cap. XII, Teo. 2.4)

c) $ev : (C^*(X), s) \times X \to \mathbb{R}$ es continua. En particular, la topología compacto-abierta está contenida en la inducida por la métrica supremo. ([13], Anexo B, Prop. 6)

d) *Si X es compacto y Y es metrizable, digamos bajo d, entonces la métrica s para $C(X,Y)$ dada por*

$$s(f_1, f_2) = \sup_{x \in X}\{d(f_1(x), f_2(x))\}$$

hace que $C_c(X,Y) \cong (C(X,Y), s)$. ([13], Anexo B, Prop. 6)

Más adelante necesitaremos el Teorema de Arzela-Ascoli como criterio de compacidad para subespacios de $C_c(X,Y)$. Recordemos que si (Y,d) es un espacio métrico y X es uno topológico, una familia $F \subset C(X,Y)$ se dice *equicontinua* en $x_0 \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe U vecindad de x_0 tal que para toda $f \in F$, $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, para toda $x \in U$. F es equicontinua en X si lo es en todos sus puntos.

Teorema 1.2.17 (Arzela-Ascoli) *Sea X un espacio topológico y (Y,d) un espacio métrico. Si F es una familia de $C(X,Y)$ equicontinua en X y con $\overline{ev_x(F)} \subset Y$ compacto para toda $x \in X$, entonces $\overline{F} \subset C_c(X,Y)$ es compacto.*

Ver por ejemplo, [6], Cap. XII, Teo. 6.4.
Ahora veremos una especie de regreso de este teorema.

Lema 1.2.18 *Sean X un espacio topológico, (Y,d) un espacio métrico y F un subespacio del espacio $C_c(X,Y)$. Si F es compacto y la función evaluación es continua, entonces F es una familia equicontinua en X.*

Demostración Sean $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$.
Para cada $f \in F$, $ev(f, x_0) = f(x_0) \in O_d(f(x_0), \frac{\epsilon}{2})$. Como ev es continua, existen $O_f \subset C_c(X,Y)$, vecindad de f y $V'_f \subset X$, vecindad de x_0 (ambas dependen de f, pues x_0 es fija por ahora) tales que $g \in O_f$ y $x \in V'_f$ implican que

$$d(g(x), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.3}$$

Como $\{O_f \,|\, f \in F\}$ es una cubierta abierta del compacto F, podemos suponer que $\{O_{f_1}, O_{f_2}, \ldots, O_{f_n}\}$ cubre a F para ciertas $f_1, \ldots, f_n \in F$. Sea $V = \cap V'_{f_i}$ que es abierto en X y contiene a x_0. Veamos que V es la vecindad de equicontinuidad para x_0 que se pide en la definición.

Sea $f \in F$ y $x \in V$, entonces $f \in O_{f_j}$ para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $x \in V'_{f_j}$ así que por (1.3) tenemos $d(f(x), f_j(x_0)) < \frac{\epsilon}{2}$ y como $x_0 \in V'_{f_j}$ también es cierto que $d(f(x_0), f_j(x_0)) < \frac{\epsilon}{2}$ por lo tanto

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &< d(f(x), f_j(x_0)) + d(f_j(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto F es equicontinua en X.

□

1.3. Espacios de Tychonoff y espacios p-paracompactos

1.3.1. Separación de puntos

Discutimos a continuación la base del Teorema de Encaje de Tychonoff.

Definición 1.3.1 *Sean X un espacio topológico y $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Diremos que una familia de funciones continuas $\{f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ distingue o* separa puntos *si para cada par de puntos $x, y \in X$ distintos, existe una función f_λ tal que $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)$.*

La misma familia separa puntos de conjuntos cerrados *si para cada $A \subset X$ cerrado y cada $x \in X\backslash A$, existe una función f_λ tal que $f_\lambda(x) \notin \overline{f_\lambda(A)}$.*

La familia $\{f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, induce un único morfismo de espacios, llamado función *diagonal*, $\Delta : X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ de modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\Delta"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \prod Y_{\lambda'} \arrow[d, "\pi_\lambda"] \\ & Y_\lambda \end{tikzcd}$$

conmuta para toda $\lambda \in \Lambda$. Como $\Delta(x)_\lambda = \pi_\lambda(\Delta(x)) = f_\lambda(x)$, resulta claro que Δ es inyectiva si y sólo si la familia separa puntos de X. Cuando la familia $\{f_\lambda\}$ separa puntos de conjuntos cerrados, la diagonal Δ es abierta si la vemos como una función suprayectiva de X en $\Delta(X)$ ($\Delta(X) \subset \prod Y_\lambda$ con la topología relativa).

Lema 1.3.2 *Sea $F = \{f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_\Lambda$ una familia de funciones continuas de un espacio X a espacios Y_λ. Si F separa puntos de conjuntos cerrados de X, entonces la correstricción $\Delta|^{\Delta(X)} : X \to \Delta(X)$ de la diagonal Δ de F, es un morfismo abierto.*

Demostración Por comodidad denotaremos a $\Delta|^{\Delta(X)}$ simplemente por Δ. Sea $x_0 \in X$ y $U \subset X$ una vecindad (abierta) de x_0. Probaremos que existe un abierto subbásico del producto que contiene a $\Delta(x_0)$ cuya intersección con $\Delta(X)$ queda contenida en $\Delta(U)$.

Como $X\backslash U = \overline{X\backslash U}$ y $x_0 \in U$, de la hipótesis sobre F existe $f_{\lambda_0} \in F$ con $f_{\lambda_0}(x_0) \notin \overline{f_{\lambda_0}(X\backslash U)}$ *i.e.* $f_{\lambda_0}(x_0) \in Y_{\lambda_0}\backslash\overline{f_{\lambda_0}(X\backslash U)}$ que es abierto de Y_{λ_0}. Sea $V_{\lambda_0} = Y_{\lambda_0}\backslash\overline{f_{\lambda_0}(X\backslash U)}$, entonces $\langle V_{\lambda_0}\rangle = V_{\lambda_0} \times \prod_{\lambda\neq\lambda_0} Y_\lambda$ es un abierto subbásico de $\prod Y_\lambda$ y como $\Delta(x_0)_{\lambda_0} = f_{\lambda_0}(x_0) \in V_{\lambda_0}$, $\langle V_{\lambda_0}\rangle$ es vecindad de $\Delta(x_0)$ en $\prod Y_\lambda$. Ahora consideremos

$$\begin{aligned}
\Delta(X) \cap \langle V_{\lambda_0}\rangle &= \{\Delta(x) \mid x \in X,\ \Delta(x)_{\lambda_0} \in V_{\lambda_0}\} \\
&= \{\Delta(x) \mid x \in X,\ f_{\lambda_0}(x) \in Y_{\lambda_0}\backslash\overline{f_{\lambda_0}(X\backslash U)}\} \\
&\subseteq \{\Delta(x) \mid x \in X,\ f_{\lambda_0}(x) \in Y_{\lambda_0}\backslash f_{\lambda_0}(\overline{X\backslash U})\} \\
&\subseteq \{\Delta(x) \mid x \in X,\ x \in U\} = \Delta(U)
\end{aligned}$$

pues f_{λ_0} es continua si y sólo si $f_{\lambda_0}(\overline{A}) \subseteq \overline{f_{\lambda_0}(A)}$ (si y sólo si $Y_{\lambda_0}\backslash\overline{f_{\lambda_0}(A)} \subseteq Y_{\lambda_0}\backslash f_{\lambda_0}(\overline{A})$) para todo subconjunto A de X, en este caso para $A = X\backslash U$.

Por tanto $\Delta(x_0) \in \Delta(X)\cap\langle V_{\lambda_0}\rangle$ que es abierto en $\Delta(X)$ y $\Delta(X)\cap\langle V_{\lambda_0}\rangle \subseteq \Delta(U)$ e.d., $\Delta(U)$ es vecindad de $\Delta(x_0)$ como se afirma.

$\square$

Corolario 1.3.3 *Sean X un espacio topológico y $F = \{f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de funciones continuas a espacios Y_λ. Si F separa puntos y puntos de cerrados de X, entonces la diagonal Δ de F es un encaje de X en $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. En particular, si existe un encaje $f_\lambda \in F$ de X en Y_λ, la diagonal Δ es un encaje.*

Si tanto el espacio X como los factores Y_λ son T_1 (para toda λ), dos puntos x, y (distintos) de X hacen que $x \notin \{y\} = \overline{\{y\}}$ así que si la familia F separa puntos de cerrados debemos tener una $f_\lambda \in F$ con $f_\lambda(x) \notin \overline{f_\lambda(\{y\})} = \overline{\{f_\lambda(y)\}} = \{f_\lambda(y)\}$ por lo que F también distingue puntos. Este es el caso, por ejemplo, de los espacios de Tychonoff. Aquí consideramos la familia F de las funciones continuas de un espacio en el intervalo (compacto) $I = [0, 1]$. De este modo siempre podemos encajar a un espacio de Tychonoff en el cubo (compacto) I^F. Más aún, como cualquier cubo es compacto de Hausdorff entonces es normal y por lo tanto cualquier subespacio es de Tychonoff. De modo que tenemos la siguiente caracterización de estos espacios.

Teorema 1.3.4 (de Encaje de Tychonoff) *Un espacio topológico X es de Tychonoff si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de un cubo.*

Corolario 1.3.5 *Un espacio X es compacto de Hausdorff si y sólo si es homeomorfo a un subespacio cerrado de un cubo.*

Demostración Del Teorema de Tychonoff, cualquier cubo (producto de intervalos) es compacto. Si X es un espacio compacto Hausdorff, en particular es de Tychonoff, así que se encaja en un cubo y como este es de Hausdorff, el subespacio homeomorfo a X es compacto y por lo tanto cerrado. Por otro lado, si X es (salvo homeomorfismo) un subespacio cerrado de un cubo, entonces el cubo hereda a X la propiedad de ser Hausdorff y como es cerrado y el cubo compacto, X resulta también compacto.

Para el caso de un espacio de Tychonoff X, si τ es el peso de X, es posible considerar una subfamilia de F de cardinalidad τ que también separe puntos de cerrados y considerar a X dentro del cubo de Tychonoff I^τ ([7], Teo. 2.3.23). De este modo el Teorema 1.3.4 se refina en el

Teorema 1.3.6 *Un espacio topológico X de peso infinito $w(X) = \tau$ es de Tychonoff si y sólo si se puede encajar en el cubo de Tychonoff I^τ.*

Observemos que si τ y ν son dos números cardinales tales que que $\nu \leq \tau$ entonces $I^\nu \subseteq I^\tau$ (topológicamente), así que el Teorema 1.3.6 nos dice que I^τ es un *objeto universal* para la clase de los espacios de Tychonoff de peso menor o igual a τ, esto es

Teorema 1.3.7 *Sea τ un número cardinal infinito. Entonces todo espacio de Tychonoff X de peso $w(X) \leq \tau$ es homeomorfo a un subespacio del cubo de Tychonoff I^τ.*

En el caso más general de funciones continuas de X a espacios Y_λ, podremos también controlar el número de factores con el peso del espacio.

Lema 1.3.8 *Sean X un espacio de Tychonoff de peso infinito $w(X) = \tau$ y $F = \{f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de funciones continuas, donde cada Y_λ es un espacio de Tychonoff. Si la familia F separa puntos de conjuntos cerrados de X, entonces se puede escoger una subfamilia $K \subset F$ que separe puntos de conjuntos cerrados y de cardinalidad $|K| = \tau$.*

Demostración Sea β una base para la topología de X de cardinalidad $|\beta| = \tau$. Definamos el subconjunto $\delta \subset \beta \times \beta$ de pares (U_1, U_2) tales que $\overline{U_1} \subset U_2$ y existe $\lambda \in \Lambda$ para la que f_λ satisface

$$\overline{f_\lambda(\overline{U_1})} \cap \overline{f_\lambda(X \backslash U_2)} = \emptyset \tag{1.4}$$

Tenemos que $|\delta| = \tau$. Para ver esto observemos que en principio $|\delta| \leq |\beta \times \beta| = |\beta| = \tau$. Ahora, si $U_2 \in \beta$ y $x \in U_2$ entonces $x \notin X \backslash U_2$ así que existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $f_\lambda(x) \notin \overline{f_\lambda(X \backslash U_2)}$, *i.e.*, $Y_\lambda \backslash \overline{f_\lambda(X \backslash U_2)}$ es una vecindad de $f_\lambda(x)$ en Y_λ que es en particular regular, por lo que existe una vecindad V de $f_\lambda(x)$ tal que

$$\overline{V} \subset Y_\lambda \backslash \overline{f_\lambda(X \backslash U_2)}$$

y de la continuidad de f_λ hay una vecindad U' de x en X tal que $f_\lambda(U') \subset V$ y otra vecindad U_1, que podemos escoger en β, de x, tal que $\overline{U_1} \subset U'$. Juntando las contenciones tenemos

$$\overline{f_\lambda(\overline{U_1})} \subset \overline{f_\lambda(U')} \subset \overline{V} \subset Y_\lambda \backslash \overline{f_\lambda(X \backslash U_2)}$$

esto es, $(U_1, U_2) \in \delta$. Como $U_2 \in \beta$ fue arbritrario concluimos que $|\beta| \leq |\delta|$. Por tanto $|\delta| = \tau$.

Para cada par $(U_1, U_2) \in \delta$ escojamos un $f_\lambda \in F$ que satisfaga la ecuación (1.4) y denotemos por K al conjunto formado por estas funciones. Con esta definición $|K| \leq |\delta| = \tau$. Veamos que K también separa puntos de cerrados.

Sean $x \in X$ y $A \subset X$, un cerrado, con $x \in X \backslash A$. Como $X \backslash A$ es abierto y β una base para X, podemos escojer un básico $U_2 \in \beta$ con $x \in U_2 \subset X \backslash A$. Ahora, como F separa puntos de conjuntos cerrados en X, existe una función $f_\lambda : X \to Y_\lambda$ tal que

$$f_\lambda(x) \notin \overline{f_\lambda(X \backslash U_2)}$$

Sea $y = f_\lambda(x) \in Y_\lambda$ y $B = \overline{f_\lambda(X \backslash U_2)} \subset Y_\lambda$. Como Y_λ es de Tychonoff, existe un morfismo $g : Y_\lambda \to I$ tal que $g(y) = 0$ y $g(B) = 1$. Por la continuidad de g tenemos que

$$\overline{g^{-1}([0, \frac{1}{3}))} \subset g^{-1}([0, \frac{1}{3}]) \subset g^{-1}([0, \frac{1}{2}))$$

o en otras palabras, si $V_1 = g^{-1}([0, \frac{1}{3}))$, $V_2 = g^{-1}([0, \frac{1}{3}])$ y $V_3 = g^{-1}([0, \frac{1}{2}))$, entonces V_1 y V_3 son abiertos de Y_λ y

$$y \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_2 \subset V_3 \subset Y_\lambda \backslash B \tag{1.5}$$

Como f_λ es continua, $f_\lambda^{-1}(V_1) \subset X$ es vecindad de x y como X es de Tychonoff podemos escoger una vecindad básica $U_1 \in \beta$ con

$$x \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset f_\lambda^{-1}(V_1) \cap U_2$$

de modo que las contenciones en (1.5) implican que

$$f_\lambda(\overline{U_1}) \subset V_1$$

y entonces $\overline{f_\lambda(\overline{U_1})} \subset \overline{V_1} \subset V_3$ por lo que (1.5) implica que

$$\overline{f_\lambda(\overline{U_1})} \cap B = \emptyset$$

y concluimos que (U_1, U_2) está en δ.

Por tanto, para el par $(U_1, U_2) \in \delta$ tenemos una $f \in K$ que cumple

$$\overline{f(\overline{U_1})} \cap \overline{f(X \backslash U_2)} = \emptyset$$

y de aquí que $f(x) \notin \overline{f(A)}$ pues $f(A) \subset f(X \backslash U_2)$, *i.e*, K separa puntos de conjuntos cerrados en X.

$\square$

1.3.2. Funciones perfectas

Definición 1.3.9 *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ continua. Decimos que f es* propia *si es cerrada y para cada $y \in Y$, su fibra $f^{-1}(y)$ es compacta en X. Si además f es suprayectiva diremos que f es* perfecta.

La demostración de los siguientes resultados se puede ver en [6], Cap. XI, Sec. 5.

Teorema 1.3.10 *Sean X y Y espacios y $f : X \to Y$ perfecta. Entonces*

1. *Si X es de Hausdorff, entonces Y también es de Hausdorff.*
2. *Si X es metrizable, entonces Y también es metrizable.*
3. *Si Y es paracompacto, entonces X también es paracompacto.*
4. *Para cada $C \subset Y$ compacto, $f^{-1}(C)$ es compacto en X.*

Corolario 1.3.11 *La composición de funciones perfectas es perfecta.*

Demostración Sean X, Y, Z espacios y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones perfectas. Es claro que gf es cerrada y suprayectiva. Ahora, para $z \in Z$, $g^{-1}(z) \subset Y$ es compacto y por el inciso (4) del Teorema anterior $(gf)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$ es compacto en X.

Observación 1.3.12 *Sean X y T espacios con T compacto, entonces la proyección $\pi_1 : X \times T \to X$ es perfecta.*

Esto se sigue del hecho de que T compacto implica que π_1 es cerrada ([6], Cap. XI, Teo. 2.6) y de que la fibra $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times T$ es compacta para toda $x \in X$.

Definamos ahora a los espacios p-paracompactos.

Definición 1.3.13 *Un espacio topológico X es* p-paracompacto *si existe un espacio metrizable Z y una función perfecta $f : X \to Z$.*

Denotamos por $\mathcal{P}$ a la clase de los espacios p-paracompactos.

Es inmediato que todo espacio métrico es p-paracompacto. Más aún, si $f : X \to Z$ es una función perfecta con Z metrizable, entonces como Z es paracompacto, por el Teorema 1.3.10, X también es paracompacto. En particular $\mathcal{P}$ es una clase de espacios de Tychonoff.

Observación 1.3.14 *Sea X un espacio p-paracompacto y T un espacio compacto, entonces $X \times T$ es p-paracompacto.*

Demostración Si $f : X \to Z$ es una función perfecta a un espacio metrizable Z y $\pi_1 : X \times T \to X$ es la proyección coordenada, entonces T compacto implica que π_1 es perfecta y por el corolario anterior la composición $f\pi_1 : X \times T \to Z$ también es perfecta.

Enunciamos ahora un resultado debido a V. Filippov ([8]) que nos será de gran ayuda en las próximas secciones.

Afirmación 1 (Filippov) *La clase $\mathcal{P}$ de los espacios p-paracompactos es cerrada bajo funciones perfectas.*

1.3.3. k-espacios

Recordemos que un espacio topológico X es un *k-espacio* si X tiene la topología *débil* determinada por la familia de sus subespacios compactos *i.e.* $A \subset X$ es cerrado si y sólo si $A \cap C$ es cerrado en C para cada $C \subset X$ compacto.

Los siguientes resultados y sus demostraciones aparecen en [6], Cap. XI, Sec. 9.

Proposición 1.3.15 *Sea X un espacio topológico. Si X es primero numerable o localmente compacto, entonces X es un k-espacio. En particular, cualquier espacio métrico es un k-espacio.*

Teorema 1.3.16 *Un espacio topológico X es un k-espacio si y sólo si existe una identificación $Y \to X$ donde Y es un espacio topológico localmente compacto.*

En la sección anterior notamos que el producto $X \times T$ de un espacio p-paracompacto X y uno compacto T, es p-paracompacto; una situación similar se observa en el caso de k-espacios. Recordemos primero el Teorema de Whitehead.

Teorema 1.3.17 (Whitehead) *Sean X y Y espacios topológicos y $f : Y \to X$ una identificación. Si T es un espacio topológico localmente compacto, entonces*

$$f \times Id_Y : Y \times T \to X \times T$$

es una identificación.

La demostración de este importante teorema puede encontrarse, por ejemplo, en [6], Cap. XII, Teo.4.1.

Corolario 1.3.18 *Sea X un k-espacio y T un espacio compacto, entonces $X \times T$ es un k-espacio.*

Demostración Como X es un k-espacio, por la caracterización dada en el Teorema 1.3.16, existen un espacio localmente compacto Y y una identificación $f : Y \to X$, luego, como T es compacto, entonces $f \times Id_Y : Y \times T \to X \times T$ es identificación, pero $Y \times T$ es localmente compacto. Por tanto $X \times T$ es un k-espacio.

1.4. Teoría de Retractos

En este apartado presentamos las nociones básicas de la Teoría de Retractos y algunos resultados que trabajaremos en el caso equivariante.

1.4.1. Retractos absolutos

Sea X un espacio topológico y $Y \subseteq X$ un subespacio. Una *retracción* es una función continua $r : X \to Y$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] & Y \\ Y \arrow[u, hook] \arrow[ur, "Id_Y"'] & \end{tikzcd}$$

En este caso diremos que Y es un *retracto* de X. Observemos que si Z es cualquier conjunto tal que $Y \subseteq Z \subseteq X$ entonces $r|_Z : Z \to Y$ es una retracción, *i.e.*, si Y es un retracto de X entonces es retracto de cualquier subespacio de X que lo contenga.

Ejemplos de retractos son el mismo espacio X ($r = Id_X$) o bien cualquier punto $x \in X$ donde $r : X \to \{x\}$ es la única función posible.

Por otro lado, si el subespacio Y es retracto de alguna vecindad $U \subseteq X$ de Y entonces diremos que Y es *retracto de vecindad* de X. Obviamente si Y es retracto de X entonces es retracto de vecindad de X.

Por ejemplo, la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ como subespacio del disco $\mathbb{D}^n$, no es retracto de $\mathbb{D}^n$, sin embargo $\mathbb{S}^{n-1}$ es retracto de $U = \mathbb{D}^n \backslash \{0\}$ que es una vecindad de $\mathbb{S}^{n-1}$. Para ver esto basta tomar como $r : U \to \mathbb{S}^{n-1}$ a la proyección $r(x) = x/\|x\|$ que representamos en la Figura 1.2

Observación 1.4.1 *Todo retracto de un espacio de Hausdorff es cerrado. ([6], Cap. XV, Sec. 5)*

Recordemos que una clase $\mathcal{K}$ de espacios topológicos se dice *débilmente hereditaria* si es cerrada bajo homeomorfismos y subespacios cerrados. Por ejemplo, la clase de los espacios de Hausdorff, la de los espacios de Tychonoff, la clase $\mathcal{N}$ de los espacios normales, la clase $\mathcal{M}$ de los espacios metrizables o la clase $\mathcal{P}$ de espacios p-paracompactos son clases débilmente hereditarias. También podemos mencionar a los espacios Hausdorff y compactos $\mathcal{C}$ y como la intersección de dos clases débilmente hereditarias también lo es, de

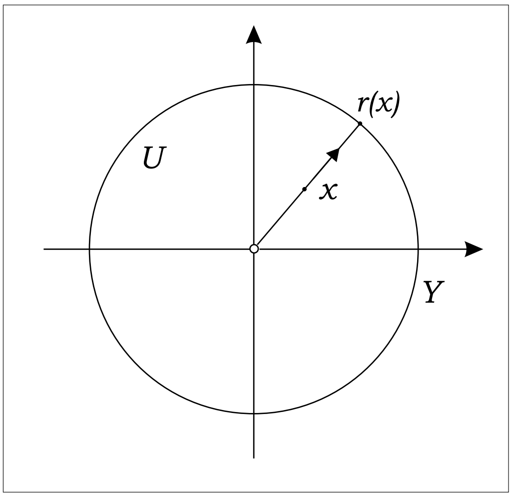

Figura 1.2: Retracto de vecindad

particular utilidad es considerar la clase $\mathcal{CM} = \mathcal{C} \cap \mathcal{M}$ de espacios métricos compactos.

Consideremos ahora a los espacios que son retractos de cualquier espacio que los contenga.

Definición 1.4.2 *Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios débilmente hereditaria. Un espacio $Y \in \mathcal{K}$ es un* retracto absoluto *para la clase $\mathcal{K}$ si siempre que Y aparezca (salvo homeomorfismo) como un subespacio cerrado de un espacio $X \in \mathcal{K}$ se tiene que Y es retracto de X. Análogamente, el espacio $Y \in \mathcal{K}$ es un* retracto absoluto de vecindad *para la clase $\mathcal{K}$ si cada vez que Y aparezca como un subespacio cerrado de un espacio $X \in \mathcal{K}$, entonces Y es un retracto de vecindad de X.*

En el primer caso escribiremos $Y \in AR(\mathcal{K})$ y en el segundo escribiremos $Y \in ANR(\mathcal{K})$.

Es claro que $\mathrm{AR}(\mathcal{K}) \subset \mathrm{ANR}(\mathcal{K})$ y si $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ son dos clases débilmente hereditarias tales que $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$, entonces $\mathrm{AR}(\mathcal{K}_2) \subset \mathrm{AR}(\mathcal{K}_1)$ y también $\mathrm{ANR}(\mathcal{K}_2) \subset \mathrm{ANR}(\mathcal{K}_1)$.

1.4.2. Extensores absolutos

En el apartado anterior consideramos una retracción como una extensión de $Id : Y \to Y$ para un subespacio (cerrado) Y de X. Podemos generalizar este hecho diciendo que un cerrado $A \subseteq X$ tiene la *propiedad de extensión en X respecto a un espacio Y* si cada función continua $f : A \to Y$ admite una extensión (continua) $F : X \to Y$, *i.e*, F hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] & Y \\ A \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

De manera similar, podemos considerar la extensión a una vecindad de A, e.d., A tiene la *propiedad de extensión de vecindad en X respecto a Y* si todo morfismo $f : A \to Y$ admite una extensión $F : U \to Y$ donde $U \subset X$ es una vecindad de A.

Consideremos el caso en que el espacio Y hace posible la propiedad de extensión respecto a Y para cualquier par (X, A), donde $A \subset X$ es un subespacio cerrado.

Definición 1.4.3 *Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios débilmente hereditaria. Un espacio Y es un* extensor absoluto *para la clase $\mathcal{K}$ si cada subespacio cerrado A de cualquier espacio $X \in \mathcal{K}$ tiene la propiedad de extensión en X respecto a Y. El espacio Y es un* extensor absoluto de vecindad *para la clase $\mathcal{K}$ si cada subespacio cerrado A de un espacio $X \in \mathcal{K}$ tiene la propiedad de extensión de vecindad en X respecto a Y.*
En el primer caso escribiremos $Y \in AE(\mathcal{K})$ y en el segundo escribimos $Y \in ANE(\mathcal{K})$.

Claramente cualquier AE($\mathcal{K}$) es ANE($\mathcal{K}$) y si $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$, donde $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ son clases débilmente hereditarias, entonces AE($\mathcal{K}_2$) $\subset$ AE($\mathcal{K}_1$) y ANE($\mathcal{K}_2$) $\subset$ ANE($\mathcal{K}_1$).

Por ejemplo, el famoso Teorema de Tietze-Urysohn afirma precisamente que el intervalo $I = [0, 1]$ es un extensor absoluto para la clase $\mathcal{N}$ de los espacios normales.

Enunciaremos algunas propiedades de los AE's y ANE's que nos resultan útiles, su demostración se puede consultar en [9], Cap.I, Sec. 4, 6.

Proposición 1.4.4 *Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios debilmente hereditaria. Entonces, para una familia de espacios $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se tiene*

1. *Si $Y_\lambda \in AE(\mathcal{K})$ para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \in AE(\mathcal{K})$*
2. *Si $Y_\lambda \in ANE(\mathcal{K})$ para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces para cada subconjunto finito $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ tenemos $Y_{\lambda_1} \times \ldots \times Y_{\lambda_n} \in ANE(\mathcal{K})$.*

Proposición 1.4.5 *Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios debilmente hereditaria. Si Y es un espacio $ANE(\mathcal{K})$, entonces cualquier subespacio abierto U de Y también es un $ANE(\mathcal{K})$.*

En vista de estos resultados es inmediato que $\mathbb{R} \cong (0,1) \subset I$ es un ANE($\mathcal{N}$) y por lo tanto, todo espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es ANE($\mathcal{N}$). También se tiene que todo cubo I^τ es un AE($\mathcal{N}$) para cualquier cardinal τ.

El siguiente teorema aparece en [11], Cap. I, pág. 38.

Teorema 1.4.6 *Si Y y T son espacios métricos donde T es compacto y Y es un ANE($\mathcal{M}$), entonces $C_c(T,Y) \in$ ANE($\mathcal{M}$).*

Otro resultado que utilizaremos al final del trabajo es el de Yu. T. Lisica que aparece en [10] y enunciamos como

Afirmación 2 (Lisica) *Si Y es un AE($\mathcal{M}$) entonces también es un AE($\mathcal{P}$).*

1.4.3. Relación entre retractos y extensores

Supongamos que $\mathcal{K}$ es una clase de espacios débilmente hereditaria y X es un objeto de $\mathcal{K}$. Si Y es un subespacio cerrado de X y tiene la propiedad de extensión o extensión de vecindad respecto a Y mismo, podemos en particular, extender el morfismo $Id_Y : Y \to Y$ a una función continua $r : X \to Y$ ó $r : U \to Y$ donde U es una vecindad de Y, respectivamente. En resumen, si $Y \in \mathcal{K}$ y $Y \in$ AE($\mathcal{K}$) ó $Y \in$ ANE($\mathcal{K}$), entonces $Y \in$ AR($\mathcal{K}$) ó $Y \in$ ANR($\mathcal{K}$), respectivamente.

Al considerar lo anterior, surgen de manera natural la preguntas: $Y \in$ AR($\mathcal{K}$) '?implicará que $Y \in$ AE($\mathcal{K}$)? y $Y \in$ ANR($\mathcal{K}$) ?implicará que $Y \in$ ANE($\mathcal{K}$)? Esto no siempre es así, por ejemplo, si $\mathcal{K}$ es la clase de los espacios de Tychonoff, entonces $I \in$ AR($\mathcal{K}$) y $I \notin$ AE($\mathcal{K}$) ([11], Cap. I, pág. 34-35). Sin embargo, para la clase $\mathcal{M}$ tenemos

Teorema 1.4.7 *Sea Y un espacio métrico. Entonces*

1. $Y \in AR\,(\mathcal{M}) \Leftrightarrow Y \in AE\,(\mathcal{M})$ *y* $Y \in \mathcal{M}$
2. $Y \in ANR\,(\mathcal{M}) \Leftrightarrow Y \in ANE\,(\mathcal{M})$ *y* $Y \in \mathcal{M}$

La demostración este teorema se basa en dos famosos teoremas, el de encaje de Kuratowski-Wojdyslawski y el de extensión de Dugundji:

Teorema 1.4.8 (Kuratowski-Wojdyslawski) *Para cada espacio métrico Y existe un espacio lineal normado (y completo) L y un encaje isométrico $h : Y \to L$ tal que $h(Y)$ es cerrado en su envoltura convexa.*

Teorema 1.4.9 (Dugundji) *Sean X un espacio métrico y A un subespacio cerrado de X. Sea L un espacio topológico vectorial localmente convexo. Entonces cada función continua $f : A \to L$ tiene una extensión (continua) $F : X \to L$ tal que $F(X)$ queda contenida en la envoltura convexa de $f(A)$.*

Este resultado se puede expresar desde la teoría de retractos como

Teorema 1.4.10 *Un subespacio convexo de un espacio topológico vectorial localmente convexo es un AE($\mathcal{M}$).*

En la Sección 3.1 daremos la versión equivariante del Teorema 1.4.8 junto con la prueba para el caso general. La del Teorema 1.4.9 se encuentra en [6], Cap. IX, Teo. 6.1.

Demostración del Teorema 1.4.7 Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subespacio cerrado. Sea $f : A \to Y$ continua.

1. Por el Teorema 1.4.8 podemos considerar (salvo homeomorfismo) a Y como un cerrado dentro de un subespacio K ,convexo en un espacio lineal normado L. Como $Y \in \mathrm{AR}(\mathcal{M})$ y K es métrico ($L \in \mathcal{M}$), existe una retracción $r : K \to Y$.
   Por otro lado, el Teorema 1.4.10 afirma que $K \in \mathrm{AE}(\mathcal{M})$, así que la composición $A \xrightarrow{f} Y \hookrightarrow K$ se extiende a $\widetilde{F} : X \to K$, de aquí que $F = r\widetilde{F} : X \to Y$ es claramente una extensión de f a X.

2. La demostración de $Y \in \mathrm{ANR}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathrm{ANE}(\mathcal{M})$ es similar, tomando la retracción $r : U \to Y$ de una vecindad U de Y en K y la extensión $\widetilde{F}$ como arriba. En este caso $\widetilde{F}(a) = f(a) \in Y \subseteq U$ para toda $a \in A$ por tanto $A \subset \widetilde{F}^{-1}(U)$ y $\widetilde{F}^{-1}(U)$ es una vecindad de A en X. La función $F : \widetilde{F}^{-1}(U) \to Y$ dada por $F(x) = r\widetilde{F}(x)$ es la extensión de f a la vecindad $\widetilde{F}^{-1}(U)$ de A.

□

La idea fundamental de este teorema fue considerar al retracto dentro de un extensor para dar una extensión al espacio ambiente y luego retraerla al espacio original.

Proposición 1.4.11 *Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios débilmente hereditaria. Sea Z un espacio y $Y \subseteq Z$ un subespacio cerrado. Entonces*

1. *Si Y es retracto de Z y $Z \in AE(\mathcal{K})$, entonces $Y \in AE(\mathcal{K})$*

2. *Si Y es retracto de vecindad de Z y $Z \in ANE(\mathcal{K})$, entonces $Y \in ANE(\mathcal{K})$*

Demostración

1. Sea $r : Z \to Y$ una retracción e $i : Y \hookrightarrow Z$ la inclusión. Sea X un espacio en la clase $\mathcal{K}$ y $A \subseteq X$ un cerrado. Consideremos una función $f : A \to Y$ continua y la extensión $\widetilde{F} : X \to Z$ que completa el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\widetilde{F}"] & Z \arrow[d, bend left, "r"] \\ A \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, hook, "i"] \end{tikzcd}$$

entonces $F = r\widetilde{F} : X \to Y$ es continua y para cada $a \in A$

$$F(a) = r\widetilde{F}(a) = rif(a) = Id_Y(f(a)) = f(a)$$

e.d., F extiende a f.

2. Supongamos ahora que $r : U \to Y$ es una retracción, donde $U \subset Z$ es una vecindad de Y. Como arriba, $i : Y \hookrightarrow U$ la inclusión. Sea $f : A \to Y$ continua de un subespacio cerrado A de cualquier objeto $X \in \mathcal{K}$ a Y. Tomemos $\widetilde{F} : V \to Z$ extensión continua de if a una vecindad V de A en X. Es claro que $\widetilde{F}^{-1}(U) \subset V$ es una vecindad de A en V. Como V es a su vez abierto en X, $\widetilde{F}^{-1}(U) \subset X$ es una vecindad de A en X. Finalmente, el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{F}^{-1}(U) \arrow[r, "\widetilde{F}|^{\widetilde{F}^{-1}(U)}"] & U \arrow[d, bend left, "r"] \\
A \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, hook, "i"]
\end{tikzcd}$$

nos proporciona $F : \widetilde{F}^{-1}(U) \to Y$ dada por $F(x) = r\widetilde{F}(x)$ que obviamente extiende (continuamente) a f.

□

Ahora es posible dar prueba alternas al Teorema 1.4.7 (y a otras clases de espacios) dando encajes en retractos absolutos. En nuestro caso, pediremos la condición adicional de preservar la acción de un grupo.

Capítulo 2

Algunos aspectos de los G-espacios

2.1. Propiedades generales

Productos

Sea G un grupo topológico y $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios. Supongamos que G actúa en cada espacio X_λ continuamente, entonces es posible definir una acción (continua), llamada diagonal, de G en el producto topológico $\prod X_\lambda$ de manera que las proyecciones $p_{\lambda'} : \prod X_\lambda \to X_{\lambda'}$ resulten equivariantes. Esto se hace definiendo

$$G \times \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \xrightarrow{\theta} \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \quad \theta(g, \{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) = \{gx_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

Observación 2.1.1 *$\prod_\lambda X_\lambda$ es un G-espacio (con acción diagonal).*

Si además cada X_λ es un espacio topológico vectorial y la acción de G es lineal, $\prod X_\lambda$ es un G-espacio lineal.

Demostración Claramente θ es acción.
Como $p_{\lambda'}\theta(g, \{x_\lambda\}) = p_{\lambda'}(\{gx_\lambda\}) = gx_{\lambda'}$, entonces, si $V_{\lambda'} \subset X_{\lambda'}$ es una vecindad de $gx_{\lambda'}$, basta escoger una vecindad $U \subset G$ de g y otra $W_{\lambda'} \subset X_{\lambda'}$ de $x_{\lambda'}$ tales que $UW_{\lambda'} \subset V_{\lambda'}$, de este modo $p_{\lambda'}\theta(U \times \langle W_{\lambda'}\rangle) \subset V_{\lambda'}$, luego $p_{\lambda'}\theta$ es continua para cada $\lambda' \in \Lambda$ y por lo tanto θ es continua.

Para la segundad afirmación observemos que las operaciones algebraicas en $\prod X_\lambda$ son coordenada a coordenada, por lo que la linealidad de la acción en cada factor garantiza que para $g \in G$, $\{x_\lambda\}, \{y_\lambda\} \in \prod X_\lambda$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(\{x_\lambda\} + \alpha\{y_\lambda\}) &= g\{x_\lambda + \alpha y_\lambda\} \\ &= \{g(x_\lambda + \alpha y_\lambda)\} \\ &= \{gx_\lambda + \alpha g y_\lambda\} \\ &= g\{x_\lambda\} + \alpha(g\{y_\lambda\}), \end{aligned}$$

i.e., θ_g es lineal para cada $g \in G$.

Cocientes

Sea (G, X, θ) un grupo de transformaciones. Supongamos que H es un subgrupo normal y cerrado de G, entonces podemos dotar al grupo G/H de la topología cociente respecto a la proyección natural $q : G \to G/H$. Al hacer esto, q resulta continua y abierta, al igual que la proyección orbital $p : X \to X/H$ (X como H-espacio mediante $H \hookrightarrow G$). Quisieramos definir una función $\alpha : G/H \times X/H \to X/H$ que sea acción (continua) y complete el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "q\times p"'] & X \arrow[d, "p"] \\ G/H \times X/H \arrow[r, "\alpha"] & X/H \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Proposición 2.1.2 *Sea G un grupo topológico, H un subgrupo normal y cerrado de G. Si X es un G-espacio (con acción θ), entonces la función*

$$\alpha : G/H \times X/H \to X/H, \quad \alpha(gH, H(x)) = H(gx)$$

es una acción continua de G/H en el espacio X/H.

Si N es otro subgrupo normal y cerrado de G y está contenido en H, entonces la función $f : X/N \to X/H$, $N(x) \to H(x)$ es suprayectiva, abierta, continua y si G actúa en X/N y en X/H mediante las proyecciones $G \to G/N$ y $G \to G/H$, respectivamente, entonces f es G-invariante.

Demostración Primero veamos que α está bien definida. Si $gH = g'H$ en G/H y $H(x) = H(x')$ en X/H entonces, $g' \in gH$ por lo que $g' = gh$ para alguna $h \in H$. Además, $H(x) = H(x')$ implica que $x' = h'x$ para alguna $h' \in H$ y por tanto

$$g'x' = (gh)(h'x) = ghh'x = (ghh'g^{-1})gx.$$

Como $hh' \in H$, $g \in G$ y H es normal, tenemos que $ghh'g^{-1} \in H$ y por lo tanto $H(g'x') = H(gx)$. Obviamente α manda a $(eH, H(x))$ en $H(x)$ para todo $x \in X$ y es asociativa pues θ lo es.

Para demostrar la continuidad de α observemos que el diagrama (2.1) nos da, para cada $U \subset X/H$ abierto,

$$\theta^{-1}(p^{-1}(U)) = (q \times p)^{-1}(\alpha^{-1}(U)) \Rightarrow \alpha^{-1}(U) = (q \times p)(\theta^{-1}(p^{-1}(U)))$$

como p es continua, $p^{-1}(U) \subset X$ es abierto y $\theta^{-1}(p^{-1}(U)) \subset G \times X$ también (θ continua); también sabemos que tanto q como p son abiretas así que $q \times p$ lo es y $\alpha^{-1}(U) \subset G \times X/H$ es abierto, e.d., α es continua.

Ahora, $f : X/N \to X/H$ está bien definida, pues si $N(x) = N(x')$ entonces $x' = hx$ para alguna $h \in N \subset H$. Por tanto $H(x) = H(x')$. Para la continuidad de f observemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X/N \arrow[rr, "f"] & & X/H \end{tikzcd}$$

conmuta (donde r es la proyección orbital). Así que

$$U \subset X/H \Rightarrow r^{-1}(f^{-1}(U)) = p^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) = r(p^{-1}(U))$$

Como X/N tiene la topología cociente respecto a r, r es continua y abierta, así que si elegimos U abierto, $p^{-1}(U)$ es abierto al igual que $f^{-1}(U)$ y f es continua. Del mismo diagrama concluimos que si $V \subset X/N$ es abierto, como r es suprayectiva, $V = r(r^{-1}(V))$ y $f(V) = f(r(r^{-1}(V))) = p(r^{-1}(V))$ que es abierto pues $r^{-1}(U)$ lo es y p es abierta.

Por último recordemos que las acciones de G sobre X/N y X/H están dadas por $g(N(x)) = \alpha(gN, N(x)) = N(gx)$ y $g(H(x)) = H(gx)$ respectivamente, así que para $g \in G$ y $x \in X$ tenemos

$$f(g(N(x))) = f(N(gx)) = H(gx) = g(H(x)) = g(f(N(x)))$$

Por tanto f es G-invariante.

□

Cuando G es compacto, la proyección orbital $\pi : X \to X/G$ (y el espacio X/G) tiene buenas propiedades en el sentido del siguiente

Lema 2.1.3 *Sea G un grupo topológico compacto y X un G-espacio de Hausdorff con acción $\theta : G \times X \to X$, entonces θ es cerrada.*

Demostración Sean $C \subset G \times X$ un cerrado y $y \in \overline{\theta(C)} \subset X$. Entonces existe una red $\{(g_\lambda, x_\lambda)\}$ en C cuya imagen $\{\theta(g_\lambda, x_\lambda)\} = \{g_\lambda x_\lambda\}$ converge a y. Usando la compacidad de G, la red $\{g_\lambda\}$ posee una subred convergente $\{g_{\alpha_\lambda}\}$ a algún $g \in G$. Tenemos entonces que $g_{\alpha_\lambda} \to g$ de donde $g_{\alpha_\lambda}^{-1} \to g^{-1}$ y $x_{\alpha_\lambda} = g_{\alpha_\lambda}^{-1}(g_{\alpha_\lambda} x_{\alpha_\lambda}) \to g^{-1}y$, por lo que la subred $\{(g_{\alpha_\lambda}, x_{\alpha_\lambda})\}$ converge al par $(g, g^{-1}y)$. Como C es cerrado y la red original estaba totalmente contenida en C se debe tener que el límite $(g, g^{-1}y) \in C$ de modo que $y = \theta(g, g^{-1}y) \in \theta(C)$, *i.e.*, $\theta(C) = \overline{\theta(C)}$ como se afirma.

□

Corolario 2.1.4 *Sea G un grupo topológico compacto. Si X es un G-espacio de Hausdorff con acción θ, entonces*

1. *La proyección $\pi : X \to X/G$ es perfecta.*

2. *El espacio X/G es de Hausdorff.*

3. *El espacio X es compacto si y sólo si el espacio X/G lo es.*

Prueba Para ver que π es cerrada, sea $A \subset X$ un cerrado. De la definición de topología cociente, $\pi(A) \subset X/G$ es cerrado si y sólo si $\pi^{-1}(\pi(A)) \subset X$ es cerrado, y esto último es cierto pues $\pi^{-1}(\pi(A)) = GA = \theta(G \times A)$ y $G \times A \subset G \times X$ es cerrado (aplicando el lema anterior). Ahora para probar que π es perfecta basta con observar que la fibra de cualquier punto $\pi(y) \in X/G$ es $\pi^{-1}(\pi(y)) = Gy = \theta(G \times \{y\})$, como $G \times \{y\} \subset G \times X$ es compacto y θ es continua, la fibra es compacta.

Supongamos que $x, y \in X$ y que $\pi(x), \pi(y)$ son dos puntos distintos en el espacio de órbitas X/G. Como $G(x)$ y $G(y)$ son dos conjuntos compactos y disjuntos en el espacio de Hausdorff X, estos pueden ser separados por vecindades disjuntas digamos $G(x) \subset U$, $G(y) \subset V$, en particular para el punto x, la vecindad U satisface $\overline{U} \cap Gy = \emptyset$, por lo que $\pi(y) \notin \pi(\overline{U})$, luego, π abierta (siempre) y cerrada (G compacto) implica que $\pi(U)$ y $X/G \setminus \pi(\overline{U})$ son dos vecindades disjuntas de $\pi(x)$ y $\pi(y)$, respectivamente, *i.e.*, X/G es Hausdorff.

Es claro que, como π es continua, X compacto implica que $\pi(X) = X/G$ es compacto. Por otro lado, si X/G es compacto, como π es perfecta (propia), entonces por el Teorema 1.3.10, $X = \pi^{-1}(X/G)$ es compacto.

$\square$

Observación 2.1.5 *Si en las hipótesis de la Proposición 2.1.2 añadimos las condiciones de H compacto y X Hausdorff, entonces f resulta perfecta.*

Demostración Como N es cerrado en G y $N \subset H$, entonces N también es compacto por tanto las proyecciones $p : X \to X/H$ y $r : X \to X/N$ son perfectas, luego $p = fr$ implica que f es perfecta.

Espacios lineales

Proposición 2.1.6 *Sean G un grupo y L un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Supongamos que G actúa en L linealmente y L a su vez tiene una base B invariante bajo la acción. Si todo elemento de B tiene estabilizador trivial en G, entonces cualquier otro elemento distinto de cero en L tiene estabilizador finito.*

Demostración Sea $x \in L \backslash \{0\}$. Como $B \subset L$ es base, existen $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ y vectores (distintos) $b_1, \ldots, b_n \in B$ tales que

$$x = t_1 b_1 + \ldots + t_n b_n. \tag{2.2}$$

Sea $g \in G_x$, apliquemos la acción al par (g, x), entonces

$$x = gx = g(t_1 b_1 + \ldots + t_n b_n) = t_1(gb_1) + \ldots + t_n(gb_n). \tag{2.3}$$

Ahora, como $gb_i \in B$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ (B invariante), x se expresa como dos combinaciones lineales (2.2) y (2.3) de elementos de B que es linealmente independiente, por lo que debemos tener una reordenamiento entre elementos de $\{b_1, \ldots, b_n\}$ y $\{gb_1, \ldots, gb_n\}$, e.d., para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ debemos tener una $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$gb_i = b_j$$

y esta j es única. De este modo, la asignación $i \to j$ es en realidad una permutación, a la que llamaremos $\sigma_g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Así, σ_g queda definida por la ecuación

$$gb_i = b_{\sigma_g(i)}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

Hemos establecido una función ϕ de G_x en el grupo de permutaciones de n elementos S_n, $g \to \sigma_g$. Como S_n es finito, para mostrar que G_x es finito bastará con demostrar que ϕ es inyectiva, para ello mostraremos que ϕ es incluso un monomorfismo de grupos.

Sean $g, h \in G_x$, entonces de (2.4) tenemos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} b_{\sigma_{gh}(i)} &= (gh)b_i \\ &= g(hb_i) \\ &= g(b_{\sigma_h(i)}) \\ &= b_{\sigma_g(\sigma_h(i))} = b_{\sigma_g \sigma_h(i)}. \end{aligned}$$

Por tanto $\sigma_{gh}(i) = \sigma_g \sigma_h(i)$, *i.e.*, $\phi(gh) = \sigma_{gh} = \sigma_g \sigma_h = \phi(g)\phi(h)$ por lo que ϕ es homomorfismo. Veamos que ϕ es mono; si $h \in \ker \phi$, entonces (2.4) se transforma en

$$hb_i = b_{\sigma_h(i)} = b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

y $h \in \bigcap G_{b_i} = \{e\}$ como esperábamos. Hemos construido un monomorfismo ϕ del grupo G_x en S_n que es finito.

$\square$

2.2. Métrica invariante

Dado un grupo topológico de transformaciones con un espacio fase metrizable, tiene sentido preguntarse cuándo las transformaciones inducidas por elementos del grupo actuante son simetrías. En este caso hablaremos de métricas invariantes. En algunos de los teoremas siguientes pedimos esta condición.

Definición 2.2.1 *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio metrizable. Una métrica compatible d para X se dice invariante si al considerar el producto $X \times X$ y a $\mathbb{R}^+$ como G-espacios (con acción diagonal y trivial respectivamente), la función continua $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ es equivariante, i.e.,*

$$d(gx, gy) = d(x, y) \quad \text{para cualesquiera } g \in G,\ x, y \in X$$

Proposición 2.2.2 *Sean G un grupo topológico y (X, ρ) un G-espacio métrico. Si el grupo G es numerablemente compacto, entonces existe una métrica para X invariante y compatible con la métrica ρ.*

Demostración Definamos la métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ por

$$d(x, y) = \sup_{g \in G}\{\rho(gx, gy)\}$$

que está bien definida pues G es numerablemente compacto y por lo tanto pseudocompacto.

Veremos que d es una métrica.

1. Para $x, y \in X$ tenemos

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \rho(gx, gy) = 0 \ \forall g \in G \\ &\Leftrightarrow gx = gy \ \forall g \in G \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2. $\rho(gx, gy) = \rho(gy, gx)$ $\forall g \in G, x \in X$ por tanto $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x, y \in X$.

3. Si $x, y, z \in X$ entonces

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gz)\} \\ &\leq \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gy)+\rho(gy,gz)\} \\ &\leq \sup_{g\in G}\{\rho(gx,gy)\}+\sup_{g\in G}\{\rho(gy,gz)\} = d(x,y)+d(y,z). \end{aligned}$$

Veamos que d es invariante bajo translaciones. Sean $h \in G$, $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} d(hx,hy) &= \sup_{g\in G}\{\rho(g(hx),g(hy))\} \\ &= \sup_{g\in G}\{\rho((gh)x,(gh)y)\} \\ &= \sup_{k\in G}\{\rho(kx,ky)\} = d(x,y) \end{aligned}$$

pues la translación por h es una biyección de G en sí mismo.

Sólo nos resta verificar que d y ρ son métricas equivalentes. Para ello basta mostrar que cualquier sucesión $\{x_n\}$ en X converge bajo ρ si y sólo si converge bajo d, e.d., $\rho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$ para algún $x \in X$.

De la definición de d es claro que $\rho(x, y) \leq d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in X$ por lo que dada una sucesión $\{x_n\}$ y un punto x en X con $d(x_n, x) \to 0$, se tiene que $\rho(x_n, x) \to 0$. Probemos ahora la otra implicación; supongamos lo contrario, *i.e.* existe una sucesión $\{x_n\} \subset X$ con $\rho(x_n, x) \to 0$ y $d(x_n, x) \not\to 0$. Podemos entonces tomar un $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{y_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tal que

$$d(y_{n_k}, x) \geq \epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

ahora bien, por la definición de d, tenemos una sucesión $\{g_n\} \subset G$ con

$$d(g_k y_{n_k}, g_k x) \geq \epsilon > \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Dado que G es numerablemente compacto, la sucesión $\{g_k\}$ tiene un punto de acumulación $g \in G$. La acción continua de G en X manda al par (x, g) en gx por lo que podemos tomar vecindades $V \subset G$ de g y $U \subset X$ de x tales que $VU \subset B_\rho(gx, \frac{\epsilon}{4})$, *i.e.*,

$$\rho(hy, gx) < \frac{\epsilon}{4}, \quad \forall h \in V \text{ y } \forall y \in U \tag{2.6}$$

Como $\{y_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, $\rho(y_{n_k}, x) \to 0$ tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_k} \in U$ para toda $k \geq N$. Por otro lado, como g es punto de acumulación para $\{g_k\}$, existe $k_0 \geq N$ tal que $g_{k_0} \in V$. Por (2.6) tenemos que

$$\rho(g_{k_0} y_{n_{k_0}}, gx) < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{y} \quad \rho(g_{k_0} x, gx) < \frac{\epsilon}{4},$$

por lo que $\rho(g_{k_0} y_{n_{k_0}}, g_{k_0} x) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$ lo que contradice la ecuación (2.5). Esto termina la prueba.

$\square$

2.3. Acciones en espacios de funciones

Supongamos que (G, X, θ) es un grupo topológico de transformaciones. Cada elemento $g \in G$ induce un homeomorfismo $\theta_g : X \to X$, así que si $f : X \to Y$ es cualquier función continua en un espacio topológico Y, podemos definir una nueva función gf como la composición $X \xrightarrow{\theta_g} X \xrightarrow{f} Y$ *i.e.*, $gf(x) = f(gx)$. En general esto no necesariamente define una acción de G en $C(X, Y)$ pues para verificar la asociatividad expresada en la Definición 1.1.3 debería darse la igualdad entre $g(hf)$ y $(gh)f$ para todos $g, h \in G$ y $f \in C(X, Y)$. Esto es, $[g(hf)](x) = (hf)(gx) = f(hgx)$ y $[(gh)f](x) = f(ghx)$ deberían coincidir para toda $x \in X$. Esto no es inmediato si por ejemplo, G no es abeliano (pensemos en $f = Id_G \in C(G, G)$ y $x = e$). Sin embargo, es posible definir una acción si en vez de considerar a θ_g tomamos $\theta_{g^{-1}}$.

El hecho de tener una acción en un espacio no garantiza su continuidad. En nuestro caso, la compacidad local del grupo es todo lo que necesitamos, alternativamente podemos pedir que el espacio X sea Hausdorff y localmente compacto.

Proposición 2.3.1 *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Sean X un G-espacio con acción θ y Y un espacio topológico. Si $f \in C(X, Y)$ y $g \in G$, $gf = f\theta_{g^{-1}}$ define una acción de G en $C(X, Y)$ y es continua si $C(X, Y)$ es provisto de la topología compacto-abierta ($C_c(X, Y)$).*

Prueba Veamos que $G \times C_c(X, Y) \xrightarrow{\alpha} C_c(X, Y)$ donde $(g, f) \to f\theta_{g^{-1}}$, *i.e.*,

$$gf : X \to Y, \quad (gf)(x) = f(g^{-1}x), \tag{2.7}$$

es una acción continua.

Es claro que $ef = f\theta_{e^{-1}} = fId_X = f$ para toda $f \in C(X, Y)$. Sean $g, h \in G$ y $f : X \to Y$ continua, entonces, para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned}
[g(hf)](x) &= (hf)(g^{-1}x) \\
&= f(h^{-1}(g^{-1}x)) \\
&= f((h^{-1}g^{-1})x) \\
&= f((gh)^{-1}x) = [(gh)f](x).
\end{aligned}$$

Por tanto $g(hf) = (gh)f$ y α es acción.

Para demostrar la continuidad de α escojamos un par arbritrario (g_0, f_0) en $G \times C_c(X,Y)$ y una vecindad $[K,U]$ de $g_0 f_0$ en $C_c(X,Y)$, *i.e.*, $K \subset X$ es compacto, $U \subset Y$ es abierto y $g_0 f_0(K) \subset U$. Veremos que $\alpha^{-1}(U)$ es una vecindad de (g_0, f_0).

Observemos que $g_0 f_0(K) \subset U$ si y sólo si para cada $k \in K$, $f_0(g_0^{-1}k) \in U$. Como f_0 es continua, entonces, para cada $k \in K$, existe $V' \subset X$, vecindad de $g_0^{-1}k$ tal que $f_0(V') \subset U$, además de la continuidad de θ y de la inversión en el grupo, existen vecindades $W \subset G$ y $V \subset X$ de g_0 y k, respectivamente, tales que $\theta(W^{-1} \times V) \subset V'$ (notemos que tanto V como W dependen de k pues g_0 es fijo). En resumen, para cada $k \in K$ existen vecindades W_k de g_0 y V_k de k tales que

$$f_0(g^{-1}x) \in U, \quad \forall g \in W_k,\ x \in V_k \tag{2.8}$$

Tenemos que $K \subset \{V_k \mid k \in K\}$, así que existen $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que $K \subset \cup_{i=1}^n V_{k_i}$. Para estos puntos k_i, W_{k_i} es una vecindad de g_0 por lo que $\cap_{i=1}^n W_{k_i}$ también lo es. Como G es localmente compacto, g_0 tiene una vecindad O tal que $\overline{O} \subset \cap_{i=1}^n W_{k_i}$ y $\overline{O} \subset G$ compacto, luego $(\overline{O})^{-1}$ es compacto y $L = \theta((\overline{O})^{-1} \times K) \subset X$ es compacto (θ es continua).
Ahora bien, sea $l \in L$, entonces $l = g^{-1}k$ para algunos $g \in \overline{O}$, $k \in K$ así que existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ para el cual $k \in V_{k_j}$ y como $g \in \overline{O} \subset \cap_{i=1}^n W_{k_i} \subset W_{k_j}$, se tiene, por (2.8), que $f_0(l) = f_0(g^{-1}k) \in U$, como l fue arbitrario, concluimos que $f_0(L) \subset U$, e.d., $f_0 \in [L,U]$. Ya tenemos vecindades O de g_0 y $[L,U]$ de f_0. Afirmamos que $O \times [L,U]$ es una vecindad de (g_0, f_0) contenida en $\alpha^{-1}([K,U])$.
Para $g \in O$, $f \in [L,U]$ y $k \in K$, tenemos $g^{-1}k \in L$ y

$$gf(k) = f(g^{-1}k) \in f(L) \subset U.$$

Por tanto $gf(K) \subset U$, *i.e.*, $\alpha(g,f) \in [K,U]$. Por tanto $O \times [L,U] \subset \alpha^{-1}([K,U])$. De modo que $\alpha^{-1}([K,U])$ es abierto.

$\square$

2.4. Funciones G-uniformes

Cuando queremos pasar resultados de topología general al caso equivariante, surge el problema de encontrar los objetos en $\mathcal{TOP}^G$ análogos a la línea real $\mathbb{R}$ o al intervalo (compacto) $I = [0, 1]$, así mismo, los análogos de $C(X)$ y $C^*(X)$. En [16], J. de Vries sugiere que $C_c(G)$ es un candidato para sustituir a $\mathbb{R}$ y por tanto, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G))$ es un sustituto para $C(X)$. También observa quién debe ser considerado como $C^*(X)$ en $\mathcal{TOP}^G$, se consideran entonces las funciones llamadas G-uniformes.

Notemos que cada elemento $x \in X$ induce un "movimiento" continuo $\theta^x : G \to X,\ g \to gx$. Dada una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ podemos definir $\varphi : X \to C(G)$ como $\varphi(x) = f\theta^x$.

Por otro lado, la composición $(g, h) \to (h, g) \xrightarrow{\gamma} hg^{-1}$ de $G \times G$ en G es una acción continua de G en sí mismo (Observación 1.1.2), de modo que la acción (2.7) de la proposición anterior se transforma en

$$(g\sigma)(h) = \sigma(hg), \quad \text{para cualesquiera } g, h \in G,\ \sigma \in C(G), \tag{2.9}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \varphi(gx)(h) &= f\theta^{gx}(h) \\ &= f(hgx) \\ &= f\theta^x(hg) \\ &= \varphi(x)(hg) = (g\varphi(x))(h), \end{aligned}$$

para cualesquiera $x \in X,\ f \in C(G),\ g, h \in G$ y por tanto $\varphi(gx) = g\varphi(x)$.

En resumen, cada $f \in C(X)$ induce una función $\varphi : X \to C(G)$ que es invariante bajo la acción de G.

Acabamos de observar que si G es localmente compacto, el espacio $C_c(G)$ es un G-espacio, por ejemplo, con la acción de la ecuación (2.9). Tiene entonces sentido considerar funciones de X a $C_c(G)$ no sólo invariantes sino continuas, *i.e.*, al conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G))$. Si $\varphi : X \to C_c(G)$ es un elemento de éste, para cada $x \in X$, $\varphi(x) : G \to \mathbb{R}$, por lo que podemos evaluar en e. Como $ev_e : C_c(G) \to \mathbb{R}$ es continua, tenemos que $ev_e\varphi : X \to \mathbb{R}$ es continua.

De esta manera definimos la función

$$\xi : \mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G)) \to C(X) \quad \xi(\varphi) = ev_e\varphi.$$

Recíprocamente, vimos que cada función continua $f : X \to \mathbb{R}$, induce, para toda $x \in X$, una función $f\theta^x : G \to \mathbb{R}$, también continua, así que tenemos una asignación $X \to C(G)$ y por tanto la correspondencia

$$\zeta : C(X) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G)), \quad \zeta(f)(x) = f\theta^x.$$

$\zeta(f)$ es en efecto equivariante como también observamos.

Observación 2.4.1 *Las funciones ξ y ζ arriba definidas son inversas.*

Demostración Sea $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G))$ y $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
\zeta(\xi(\varphi))(x) &= \xi(\varphi)\theta^x \\
&= (ev_e\varphi)\theta^x \\
&= ev_e(\varphi\theta^x) \\
&= \varphi\theta^x(e) \\
&= \varphi(ex) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

Por tanto $\zeta(\xi(\varphi)) = \varphi$. Por el otro lado, si $f \in C(X)$ y $x \in X$ entonces

$$\begin{aligned}
\xi(\zeta(f))(x) &= (ev_e\zeta(f))(x) \\
&= ev_e(\zeta(f)(x)) \\
&= ev_e(f\theta^x) \\
&= f\theta^x(e) = f(x).
\end{aligned}$$

Por tanto $\xi(\zeta(f)) = f$ y la observación queda demostrada.

Si dotamos a $\mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G)) \subset C_c(X, C_c(G))$ de la topología relativa y vemos también a $C(X)$ con la topología compacto-abierta, ζ es una función continua. Si resulta que el espacio $C_c(G)$ es localmente compacto entonces ξ también es continua (y los espacios homeomorfos).

Una vez establecida la correspondencia entre $\mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G))$ y $C(X)$ resulta necesario saber qué subconjunto de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G))$ juega el papel de $C^*(X) \subset C(X)$, las funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{R}$. Como en $\mathbb{R}$ los conjuntos acotados son aquellos cuya cerradura es compacta, generalizamos esto y definimos el conjunto $A = \{f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G)) \mid \overline{f(X)} \subset C_c(G)$ es compacto$\}$. Resulta que bajo ξ, A se convierte en el conjunto $B = \{g \in C(X) \mid g$ es acotada y $\{g\theta^x\}_{x\in X}$ es equicontinua en $G\}$.

Para probar esto tomemos un elemento $f \in A$, como $f(X) \subset \overline{f(X)}$ entonces $ev_e(f(X)) \subset ev_e(\overline{f(X)}) \subset \mathbb{R}$ es compacto ($\overline{f(X)} \subset C_c(G)$ es compacto y ev_e es continua), luego $ev_e(\overline{f(X)})$ es acotado y también $\xi(f) = ev_e(f(X))$. Además para $x \in X$, $\xi(f)\theta^x = \zeta(\xi(f))(x) = f(x)$ así que $\{\xi(f)\theta^x\}_{x\in X} = f(X)$; ahora, $\overline{f(X)} \subset C_c(G)$ es compacto y como G es localmente compacto, la evaluación $ev : C_c(G) \times G \to \mathbb{R}$ es continua y el Lema 1.2.18 asegura que $\overline{f(X)}$ es equicontinua y por lo tanto $f(X) \subset \overline{f(X)}$ también, luego $\xi(A) \subseteq B$.

Ahora elijamos $g \in B$, notemos que $\zeta(g) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G))$ tiene las siguientes propiedades

1) $\zeta(g)(X) = \{\zeta(g)(x)\}_{x\in X} = \{g\theta^x\}_{x\in X}$ es equicontinua en G.
2) Para cada $h \in G$, $\overline{\{g\theta^x(h)\}}_{x\in X} = \overline{\{g(hx)\}}_{x\in X} = \overline{\{g(y)\}}_{y\in X} = \overline{g(X)} \subset \mathbb{R}$ compacto pues g es acotada.

Así que por el Teorema de Arzela-Ascoli (1.2.17), $\overline{\zeta(g)(X)} \subset C_c(G)$ es compacto, *i.e.*, $\zeta(g) \in A$.
Hemos visto que $\zeta(B) \subseteq A$ luego $\xi(\zeta(B)) = B \subseteq \xi(A) \subseteq B$ y $\xi(A) = B$ (y $\zeta(B) = A$).

Consideremos entonces un elemento $f \in B$. Como la familia $\{f\theta^y\}_{y\in X}$ es equicontinua en G, en particular lo es en e, *i.e.*, para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad $U \subset G$ de e tal que para cada $x \in X$ $(f\theta^x \in \{f\theta^y\}_{y\in X})$ y cada $g \in U$ se cumple

$$|f\theta^x(g) - f\theta^x(e)| = |f(gx) - f(x)| < \epsilon. \tag{2.10}$$

Debido a la homogeneidad del grupo, la equicontinuidad en e es suficiente para garantizar la equicontinuidad en el resto del grupo, pues si $t \in G$ es cualquier otro elemento entonces $t \in Ut \subset G$ abierto y si $h \in Ut$, entonces $h = gt,\ g \in U$ y

$$\begin{aligned} |f\theta^x(h) - f\theta^x(t)| &= |f(hx) - f(tx)| \\ &= |f(gtx) - f(tx)| \\ &= |f\theta^{tx}(g) - f\theta^{tx}(e)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Como en la ecuación "clave" (2.10) no requerimos la continuidad de f, ni que sea acotada, podemos definir en general esta condición aún para G-conjuntos.

Definición 2.4.2 *Sea G un grupo topológico y X un G-conjunto con acción θ. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice G-uniforme si para cada $\epsilon > 0$ existe una vecindad $U \subset G$ de e tal que*

$$|f(gx) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X,\ g \in U.$$

Cuando X sea un espacio topológico y θ continua, llamaremos $C_\theta(X)$ al subconjunto de $C^*(X)$ que consta de funciones G-uniformes.

Notemos que en esta definición ya no requerimos la hipótesis de compacidad local en el grupo. Consideraremos a $C_\theta(X)$ como subespacio de $C^*(X)$ con la topología inducida por la métrica del supremo, que según lo enunciado en la Proposición 1.2.16 contiene a la topología compacto-abierta.

Más adelante volveremos a considerar el conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G))$ para un G-espacio X y un G localmente compacto y veremos que bajo ciertas condiciones es un conjunto suficientemente grande de funciones que nos permitirá hacer encajes.

Proposición 2.4.3 *Sea (G, X, θ) un grupo topológico de transformaciones, entonces $C_\theta(X)$ es un subespacio lineal y cerrado de $C^*(X)$.*

Demostración

1. Es claro que $\hat{0} : X \to \mathbb{R} \in C_\theta(X)$ (incluso cualquier constante).

2. Si $f_1, f_2 \in C_\theta(X)$ y $\epsilon > 0$, escojamos dos vecindades $V_i \subset G$ de e $(i = 1, 2)$ tales que

$$|f_i(gx) - f_i(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall g \in V_i,\ x \in X,$$

entonces para $g \in V_1 \cap V_2$ y $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} |(f_1 + f_2)(gx) - (f_1 + f_2)(x)| &\leq |f_1(gx) - f_1(x)| + |f_2(gx) - f_2(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto $f_1 + f_2 \in C_\theta(X)$.

3. Si $f \in C_\theta(X)$ y $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, sean $\epsilon > 0$ y $V \subset G$, vecindad de e, tales que

$$\begin{aligned}
|f(gx) - f(x)| &< \frac{\epsilon}{|\lambda|}, \quad \forall g \in V, x \in X \text{ entonces} \\
|(\lambda f)(gx) - (\lambda f)(x)| &= |\lambda(f(gx) - f(x))| \\
&= |\lambda|\ |f(gx) - f(x)| \\
&< |\lambda|\frac{\epsilon}{|\lambda|} = \epsilon
\end{aligned}$$

para cualesquiera $g \in V,\ x \in X$. Por tanto $\lambda f \in C_\theta(X)$.

Ya tenemos que $(C_\theta(X), +)$ es un subespacio vectorial de $(C^*(X), +)$. Ahora veamos que $C_\theta(X) \subset (C^*(X), \|\cdot\|)$ es cerrado.

Sea $\{f_n\} \subset C_\theta(X)$ una sucesión convergente a $f \in C^*(X)$. Mostraremos que $f \in C_\theta(X)$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N > 0$ tal que

$$\|f_n - f\| < \frac{\epsilon}{3}, \text{ si } n \geq N.$$

Sea $V \subset G$ una vecindad de e tal que

$$|f_N(gx) - f_N(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall g \in V,\ x \in X.$$

Entonces juntando estas dos desigualdades vemos que

$$\begin{aligned}
|f(gx) - f(x)| &\leq |f(gx) - f_N(gx)| + |f_N(gx) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

para toda $g \in V$ y toda $x \in X$, por tanto $f \in C_\theta(X)$.

$\square$

Proposición 2.4.4 *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio con acción θ. Entonces la función $\alpha : G \times C_\theta(X) \to C_\theta(X)$ dada por $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$ es continua, y restringida a la segunda coordenada es isométrica y lineal.*

Demostración Sabemos que α es una acción incluso si la definimos de G en $C(X,Y)$.

Veamos que $C_\theta(X)$ es invariante bajo α. Para esto tomemos $g \in G$ y $f \in C_\theta(X)$ y mostraremos que $gf \in C_\theta(X)$. Sea $\epsilon > 0$, escojamos $V \subset G$, vecindad de e, tal que

$$|f(hx) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall h \in V,\ x \in X. \tag{2.11}$$

Definamos $U = gVg^{-1} \subset G$, que es una vecindad de e, entonces para cada $t \in U$ y cada $y \in X$ tenemos $t = ghg^{-1}$ para alguna $h \in V$ y

$$\begin{aligned}
|(gf)(ty) - (gf)(y)| &= |f(g^{-1}(ty)) - f(g^{-1}y)| \\
&= |f((g^{-1}t)y) - f(g^{-1}y)| \\
&= |f((hg^{-1})y) - f(g^{-1}y)| \\
&= |f(h(g^{-1}y)) - f(g^{-1}y)| < \epsilon,
\end{aligned}$$

(aplicando (2.11)). De este modo $C_\theta(X)$ es un G-conjunto. La linealidad de α se sigue de

$$\begin{aligned}
[g(f_1 + \lambda f_2)](x) &= (f_1 + \lambda f_2)(g^{-1}x) \\
&= f_1(g^{-1}x) + \lambda f_2(g^{-1}x) \\
&= gf_1(x) + \lambda g f_2(x),
\end{aligned}$$

válido para cualesquiera $g \in G,\ \lambda \in \mathbb{R},\ x \in X$ y $f_i \in C(X)$. De modo que α_g es lineal para toda $g \in G$.

Probemos ahora que α_g es isometría para toda $g \in G$. En vista de que $\theta_{g^{-1}} : X \to X$ es una biyección para toda $g \in G$,

$$\begin{aligned}
\|gf_1 - gf_2\| &= \sup_{x \in X}\{|gf_1(x) - gf_2(x)|\} \\
&= \sup_{x \in X}\{|f_1(g^{-1}x) - f_2(g^{-1}x)|\} \\
&= \sup_{y \in X}\{|f_1(y) - f_2(y)|\} = \|f_1 - f_2\|.
\end{aligned}$$

Por último demostraremos la continuidad de α. Sean $\epsilon > 0$ y $(g_1, f_1) \in G \times C_\theta(X)$. Tomemos $V \subset G$, vecindad de e, tal que

$$|f_1(hx) - f_1(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall h \in V,\ x \in X,$$

entonces $U = g_1V^{-1}$ es una vecindad de g_1 y para cualesquiera $g \in U,\ f \in O_s(f_1, \frac{\epsilon}{2})$, tenemos que $g = g_1h^{-1}$ para alguna $h \in V$. Entonces para cada $x \in X$,

$$
\begin{aligned}
|g_1f_1(x) - gf(x)| &= |f_1(g_1^{-1}x) - f((g_1h^{-1})^{-1}x)| \\
&= |f_1(g_1^{-1}x) - f(h(g_1^{-1}x))| \\
&\leq |f_1(g_1^{-1}x) - f_1(h(g_1^{-1}x))| + |f_1(h(g_1^{-1}x)) - f(h(g_1^{-1}x))| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}
$$

así que $\|g_1f_1 - gf\| < \epsilon$, para cada $(g, f) \in U \times O_s(f_1, \frac{\epsilon}{2}) \subset G \times C_\theta(X)$, *i.e.*, $\alpha(U \times O_s(f_1, \frac{\epsilon}{2})) \subset O_s(g_1f_1, \epsilon)$ por lo que α es continua.

□

Corolario 2.4.5 *Sea G un grupo topológico y X un G-espacio con acción θ. Entonces $C_\theta(X)$ es un G-espacio lineal de Banach.*

Demostración Observemos que $(C^*(X), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, por lo que las dos proposiciones anteriores demuestran el enunciado.

2.5. Límite inverso de G-espacios

Sea $(\Lambda, \leq)$ un conjunto dirigido. Consideremos ahora la categoría de los grupos topológicos y homomorfismos continuos y en ella un sistema inverso $\{G_\lambda, p_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$. Siguiendo la descripción dada del límite inverso G, de este sistema, es fácil ver que G es un subgrupo topológico del grupo topológico ΠG_λ y que las proyecciones $p_\lambda : G \to G_\lambda$ son homomorfismos continuos ([15], pág. 340).

Para cada $\lambda \in \Lambda$ definamos $H_\lambda = p_\lambda^{-1}(e_\lambda)$, donde e_λ es el elemento neutro del grupo G_λ. Asumiendo que cada G_λ es un espacio T_1, $\{e_\lambda\} \subset G_\lambda$ es cerrado y $H = \ker p_\lambda$ es un subgrupo normal cerrado de G. Además, el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "p_{\lambda'}"'] \arrow[dr, "p_\lambda"] & \\ G_{\lambda'} \arrow[rr, "p_\lambda^{\lambda'}"] & & G_\lambda \end{tikzcd}$$

asegura que $H_{\lambda'} \leq H_\lambda$ siempre que $\lambda \leq \lambda'$.

Ahora supongamos que tenemos un G-espacio X. La inclusión $H_\lambda \hookrightarrow G$ induce una acción de H_λ en X para toda $\lambda \in \Lambda$. Podemos entonces formar el cociente X/H_λ al cual denotaremos por X_λ y por π_λ a la proyección canónica $X \to X_\lambda$.

De acuerdo a la Proposición 2.1.2, G/H_λ actúa en X/H_λ de manera natural y el homomorfismo canónico $G \to G/H_\lambda$ hace que X_λ sea un G-espacio. Siguiendo la establecido en la misma proposición y suponiendo que $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ son tales que $\lambda \leq \lambda'$ entonces $H_{\lambda'} \leq H_\lambda$ nos da una función de G-espacios

$$X_{\lambda'} \xrightarrow{\pi_\lambda^{\lambda'}} X_\lambda, \quad \pi_\lambda^{\lambda'}(H_{\lambda'}(x)) = H_\lambda(x)$$

y es inmediato que $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda$ con $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$ implican $\pi_\lambda^{\lambda''} = \pi_\lambda^{\lambda'} \pi_{\lambda'}^{\lambda''}$. De este modo obtenemos un sistema inverso $\{X_\lambda, \pi_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$ en la categoría $\mathcal{TOP}^G$.

Notemos ahora que las definiciones de π_λ y $\pi_\lambda^{\lambda'}$ hacen que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_{\lambda'}"'] \arrow[dr, "\pi_\lambda"] & \\ X_{\lambda'} \arrow[rr, "\pi_\lambda^{\lambda'}"] & & X_\lambda \end{tikzcd}$$

conmute siempre que $\lambda \leq \lambda'$. Esto nos lleva a pensar que X es el límite inverso para el sistema antes descrito. En efecto, cuando todos los subgrupos $H_\lambda \leq G$ son compactos, X es homeomorfo al subespacio del producto cartesiano $\prod X_\lambda$ que según vimos en la Proposición 1.2.14, actúa como límite para $\{X_\lambda, \pi_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$. Probaremos primero el

Lema 2.5.1 *Con las definiciones anteriores, si $H_\lambda \leq G$ es compacto para cada $\lambda \in \Lambda$, la familia de morfismos $\{\pi_\lambda : X \to X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ separa puntos de conjuntos cerrados de X.*

Demostración Sean $x \in X$ cualquier punto y $A \subset X$ un cerrado con $x \in X\backslash A$. Consideremos el movimiento inducido por x, $\theta^x : G \to X$. Ya que $X\backslash A$ es una vecindad para $x = \theta^x(e)$, la continuidad de θ^x nos garantiza la existencia de una vecindad (abierta) $U \subset G$ de e tal que

$$\theta^x(U) \subset X\backslash A \tag{2.12}$$

Como G es el límite inverso de $\{G_\lambda, p_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$, la familia $\{p_\lambda^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ donde $V_\lambda \subset G_\lambda$ es abierto, es una base para la topología de G ([7], Prop. 2.5.5). De este modo, podemos tomar una $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$e \in p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0}) \subset U, \tag{2.13}$$

para algún abierto $V_{\lambda_0} \subset G_{\lambda_0}$. Como $p_{\lambda_0} : G \to G_{\lambda_0}$ es un homomorfismo de grupos tenemos que $e_{\lambda_0} = p_{\lambda_0}(e) \in V_{\lambda_0}$ y (2.13) también implica que $H_{\lambda_0} = p_{\lambda_0}^{-1}(e_{\lambda_0}) \subset p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0}) \subset U$. Así que de (2.12) deducimos que $\theta^x(H_{\lambda_0}) \cap A = \emptyset$ pero $\theta^x(H_{\lambda_0}) = H_{\lambda_0}(x)$, así que $H_{\lambda_0}(x) \cap A = \emptyset$ por tanto $\pi_{\lambda_0}(x) \notin \pi_{\lambda_0}(A)$.

Por último, en virtud de que H_λ es compacto para cada $\lambda \in \Lambda$, el Corolario 2.1.4 afirma que $\pi_{\lambda_0} : X \to X_{\lambda_0}$ es perfecta, por lo que $\pi_{\lambda_0}(A) = \overline{\pi_{\lambda_0}(A)}$.

□

Teorema 2.5.2 *Siguiendo las definiciones anteriores, si $H_\lambda \leq G$ es compacto para cada $\lambda \in \Lambda$, X es G-equivalente al límite inverso del sistema $\{X_\lambda, \pi_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$.*

Demostración La familia de morfismos $\{\pi_\lambda : X \to X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ induce un único morfismo (diagonal) $\pi : X \to X_\lambda$, $x \to \pi(x)$ donde la λ-ésima coordenada de $\pi(x)$ es $\pi(x)_\lambda = \pi_\lambda(x)$. Como la familia $\{\pi_\lambda : X \to X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ separa puntos de conjuntos cerrados (Lema anterior) y cada X_λ es T_1 (Corolario 2.1.4), el morfismo π es un encaje (Corolario 1.3.3). Además, como $\pi_\lambda(gx) = g\pi_\lambda(x)$ para cualesquiera $g \in G$, $x \in X$ entonces $\pi(gx) = g\pi(x)$, *i.e.*, π es un encaje equivariante.

Verifiquemos ahora que $\pi(X) \cong X$ es el límite propuesto en la demostración de la Proposición 1.2.14, e.d., probemos que

$$\pi(X) = \{\{x_\lambda\}_\lambda \in \prod_\lambda X_\lambda \mid \pi_\lambda^{\lambda'}(x_{\lambda'}) = x_\lambda \text{ si } \lambda \leq \lambda'\}.$$

Tomemos $x \in X$, como habiamos notado en el diagrama anterior

$$\pi_\lambda = \pi_\lambda^{\lambda'}\pi_{\lambda'}, \tag{2.14}$$

si $\lambda \leq \lambda'$ así que $\pi_\lambda^{\lambda'}(\pi(x)_{\lambda'}) = \pi_\lambda^{\lambda'}(\pi_{\lambda'}(x)) = \pi_\lambda(x) = \pi(x)_\lambda$, de modo que $\pi(X)$ está contenido en el conjunto referido.

Ahora, sea $\{x_\lambda\} \in \prod X_\lambda$ tal que $\pi_\lambda^{\lambda'}(x_{\lambda'}) = x_\lambda$, si $\lambda \leq \lambda'$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos $C_\lambda = \pi_\lambda^{-1}(x_\lambda) \subset X$ que es compacto pues $H_\lambda \subset G$ lo es (Corolario 2.1.4). Supongamos que $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ satisfacen $\lambda \leq \lambda'$, entonces si $y \in C_{\lambda'}$ tenemos por (2.14) que

$$\pi_\lambda(y) = \pi_\lambda^{\lambda'}(\pi_{\lambda'}(y)) = \pi_\lambda^{\lambda'}(x_{\lambda'}) = x_\lambda$$

así que $C_{\lambda'} \subset C_\lambda$. Esto último muestra que la familia $\{C_\lambda\}_\Lambda$ de compactos de X está dirigida (por la inclusión) y por tanto satisface la propiedad de intersección finita, luego $\bigcap_\lambda C_\lambda \neq \emptyset$.

Tomando un punto $x \in \bigcap_\lambda C_\lambda$ tenemos que

$$\forall\lambda \in \Lambda,\ \ \pi_\lambda(x) = x_\lambda, \quad \text{i.e.,} \quad \{x_\lambda\} = \pi(x) \in \pi(X)$$

lo que termina la demostración.

$\square$

Observación 2.5.3 *En virtud de la Observación 2.1.5, tanto los enlaces $\pi_\lambda^{\lambda'}$ como las proyecciones π_λ son abiertos y perfectos.*

Al principio de esta sección consideramos a G como cierto límite inverso de un sistema inverso en la categoría de los grupos topológicos y homomorfismos continuos. De acuerdo al siguiente resultado de L. S. Pontrjagin ([15], Cap. 8, pág. 341), esto es posible siempre que el grupo G sea compacto.

Afirmación 3 (Pontrjagin) *Todo grupo topológico compacto G es el límite inverso de un sistema inverso $\{G_\lambda, p_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$ donde cada G_λ es un grupo topológico compacto de Lie y las proyecciones y enlaces son homomorfismos continuos.*

Corolario 2.5.4 *Sean G un grupo topológico compacto y X un G-espacio. Entonces existe un sistema inverso $\{X_\lambda, \pi_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$ en la categoria $\mathcal{TOP}^G$ para el cual X es el límite inverso y los G-morfismos de enlace y proyecciones son abiertos y perfectos.*

Además, cada X_λ es un G_λ-espacio donde G_λ es un grupo compacto de Lie y hay un homomorfismo continuo $p_\lambda : G \to G_\lambda$.

2.6. Separación equivariante de puntos

Gracias al resultado de Pontrjagin, el Corolario 2.5.4 nos permite ampliar la hipótesis del grupo actuante para considerarlo compacto de Lie y no sólo compacto. Usaremos esto para aplicar resultados previos con grupos compactos de Lie. En especial, para asegurar la versión equivariante del hecho de que la familia de morfismos de un espacio de Tychonoff al intervalo $[0, 1]$ separa puntos de cerrados.

Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Consideremos todos los posibles G-espacios euclidianos $\{\mathbb{R}^n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ y denotemos por $E(X)$ al conjunto de todos los G-morfismos acotados de X a estos espacios. Para demostrar el primer teorema de esta sección usaremos un resultado anterior de R. Palais ([14] Prop. 1.4.5) el cual enunciamos a continuación.

Afirmación 4 (Palais) *Sea G un grupo topológico compacto de Lie. Entonces para todo G-espacio de Tychonoff X, el conjunto $E(X)$ separa puntos de conjuntos cerrados de X.*

Lema 2.6.1 *Sea G un grupo topológico compacto. Si X es un G-espacio de Tychonoff con peso infinito $w(X) = \tau$, entonces existe una subfamilia K de $E(X)$ que separa puntos de conjuntos cerrados en X y de cardinalidad $|K| = \tau$.*

Demostración Las condiciones del enunciado son aplicables al Lema 1.3.8 por lo que basta probar que $E(X)$ separa puntos de cerrados en X.

De acuerdo a la discusión de la sección anterior, la Afirmación 3 nos permite suponer que G es el límite inverso de un sistema inverso $\{G_\lambda, p_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$ de grupos compactos de Lie G_λ. En las construcciones de esa sección vimos también que X es G-equivalente al límite inverso de un sistema inverso $\{X_\lambda, \pi_\lambda^{\lambda'}, \Lambda\}$ donde cada X_λ es un G_λ-espacio y por tanto un G-espacio mediante la proyección $p_\lambda : G \to G_\lambda$ (Teorema 2.5.2). Mostramos también que el conjunto de proyecciones $\{\pi_\lambda : X \to X_\lambda\}$ es una familia que separa puntos de cerrados en X (Lema 2.5.1).

Sean entonces $x \in X$ y A un cerrado de X con $x \in X \backslash A$, tenemos así una proyección $\pi_{\lambda_0} : X \to X_{\lambda_0}$ tal que

$$\pi_{\lambda_0}(x) \notin \overline{\pi_{\lambda_0}(A)}$$

El Corolario 2.5.4 afirma que π_{λ_0} es abierta y perfecta, en particular cerrada, por lo que $\overline{\pi_{\lambda_0}(A)} = \pi_{\lambda_0}(A)$ en X_{λ_0}. Como X_{λ_0} es un G_{λ_0}-espacio y G_{λ_0} es compacto de Lie, la Afirmación 4 nos permite suponer que hay un G_{λ_0}-morfismo acotado $\varphi : X_{\lambda_0} \to E$ a un G_{λ_0}-espacio euclidiano E para el cual

$$\varphi(\pi_{\lambda_0}(x)) \notin \overline{\varphi(\pi_{\lambda_0}(A))}$$

Como $p_{\lambda_0} : G \to G_{\lambda_0}$ es un homomorfismo continuo, G actúa en E (continuamente) mediante p_{λ_0}. Finalmente la composición $X \xrightarrow{\pi_{\lambda_0}} X_{\lambda_0} \xrightarrow{\varphi} E$ denotada por f es claramente acotada, continua y por las definiciones de acción de G_{λ_0} en X_{λ_0} y de G en G_{λ_0}, f es G-invariante. Por tanto $f \in E(X)$ y por la ecuación anterior $f(x) \notin \overline{f(A)}$ como se afirma.

□

Consideremos ahora el caso en que el grupo topológico G es localmente compacto. Sabemos que $C_c(G)$ es un G-espacio con acción

$$(g, f) \to gf : G \to \mathbb{R} \quad \text{donde } gf(x) = f(xg). \tag{2.15}$$

(Proposición 2.3.1). En la sección 2.4 discutimos por quien reemplazar el espacio $C(X)$ de un G-espacio X y luego usamos una biyección para encontrar las funciones G-uniformes. Veamos que sin dicha asociación aún es posible encontrar resutados análogos a los ya obtenidos. Llamemos $F(X)$ al conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^G}(X, C_c(G))$.

Lema 2.6.2 *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Si X es un G-espacio de Tychonoff, entonces el conjunto $F(X)$ contiene un subconjunto S de cardinalidad $|S| = w(X)$ que separa puntos de conjuntos cerrados de X.*

Demostración Por el Lema (1.3.8) basta probar que el mismo conjunto $F(X)$ separa puntos de conjuntos cerrados de X.

Sean $y \in X$ y $A \subset X$ un cerrado tales que $y \in X \backslash A$. Como X es de Tychonoff podemos escoger una función continua $\varphi : X \to I$ tal que $\varphi(y) = 0$ y $\varphi(A) = 1$.

Ahora, la composición $\hat{\varphi} : X \times G \to I \subset \mathbb{R}$ de las funciones

$$X \times G \longrightarrow G \times X \xrightarrow{\theta} X \xrightarrow{\varphi} I \subset \mathbb{R}$$

$$(x, g) \longrightarrow (g, x) \longrightarrow gx \longrightarrow \varphi(gx)$$

nos da una función continua ([6], Cap. XII, Teo. 3.1).

$$X \xrightarrow{f} I^G \subset C(G), \quad f(x)(g) = \hat{\varphi}(x, g) = \varphi(gx). \tag{2.16}$$

Además, si $h, g \in G$ y $x \in X$ de (2.15) y (2.16) tenemos

$$\begin{aligned} f(hx)(g) &= \varphi(g(hx)) \\ &= \varphi((gh)x) \\ &= f(x)(gh) = (hf)(g). \end{aligned}$$

Por tanto $f(hx) = hf(x)$ para toda $h \in G$ y f es equivariante, $f \in F(X)$.

Veamos que f separa a y de A. $ev_e : C_c(G) \to \mathbb{R}$ siempre es continua, así que

$$U = ev_e^{-1}(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$$

es abierto en $C_c(G)$ y $ev_e(f(y)) = f(y)(e) = f(ey) = f(y) = 0$ así que $f(y) \in U$. De igual forma $ev_e(f(a)) = f(a)(e) = \phi(a) = 1$, para toda $a \in A$ por lo que $U \cap A = \emptyset$ y siendo U vecindad de $f(y)$ concluimos que

$$f(y) \notin \overline{f(A)}$$

$\square$

Capítulo 3

Encajes equivariantes

3.1. Encajes equivariantes isométricos

Los encajes que presentamos en esta sección son versiones simétricas de encajes isométricos bien conocidos en el caso general. En el siguiente capítulo, veremos que los espacios ambiente de estos encajes son en efecto G-extensores absolutos para G-espacios métricos.

Comenzamos enunciando una versión equivariante del Teorema de Encaje de Kuratowski-Wojdyslawski (Teorema 1.4.8).

Teorema 3.1.1 *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio con un punto fijo. Si X admite una métrica invariante, entonces X se encaja isométrica y equivariantemente en $C_\theta(X)$ y su imagen resulta cerrada en su envoltura convexa.*

Demostración Sea $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ una métrica invariante y compatible con la topología de X y sea $a \in X$ un punto fijo bajo la acción, *i.e.*, $ga = a$ para toda $g \in G$. Definamos la función $\iota : X \to C_\theta(X)$ como $\iota(x) = f_x : X \to \mathbb{R}$, donde

$$f_x(y) = d(x, y) - d(a, y)$$

Como $f_x(y) \leq d(x, a)$ para toda $y \in X$ y d es continua, tenemos que $f_x \in C(X)$ para toda $x \in X$. Verifiquemos que f_x efectivamente está en $C_\theta(X)$.

Sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
|f_x(hy) - f_x(y)| &= |d(x, hy) - d(a, hy) - d(x, y) + d(a, y)| \\
&\leq |d(x, hy) - d(x, y)| + |d(a, y) - d(a, hy)| \\
&= |d(h^{-1}x, y) - d(x, y)| + |d(ha, hy) - d(a, hy)| \\
&\leq d(h^{-1}x, x) + 0 = d(x, hx), \quad \forall\, y \in X,\ h \in G,
\end{aligned}$$

y en vista de la continuidad de d y de la acción (y como $x = ex$), basta tomar vecindades $V \subset G$ y $W \subset X$ de e y x, respectivamente, tales que

$$V\{x\} \subset VW \subset O_d(x, \epsilon),$$

con lo que

$$|f_x(hy) - f_x(y)| \leq d(x, hx) < \epsilon, \quad \forall\, y \in X,\ h \in V,$$

de modo que $f_x \in C_\theta(X)$.

Es fácil ver que ι es isometría pues para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|f_{x_1} - f_{x_2}\| &= \sup_{y \in X}\{|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)|\} \\
&= \sup_{y \in X}\{|d(x_1, y) - d(x_2, y)|\} \\
&\leq \sup_{y \in X} |d(x_1, x_2)| = d(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

y por otro lado notemos que

$$\|f_{x_1} - f_{x_2}\| \geq |f_{x_1}(x_2) - f_{x_2}(x_2)| = d(x_1, x_2).$$

Por tanto ι es isometría y un encaje (Observación 1.2.2).

Para ver que $\iota(X)$ es cerrado en $conv(\iota(X))$ tomemos una sucesión $\{f_{x_n}\}$ en $\iota(X)$ convergente a $f \in conv(\iota(X))$. Tenemos entonces $f = \sum_{i=1}^m t_i f_{z_i}$ con $z_i \in X,\ t_i \geq 0$ y $\sum t_i = 1$, luego

$$\|f_{x_n} - \sum_{i=1}^m t_i f_{z_i}\| \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Dada $n > m$, como $\sum t_i = 1$ podemos suponer (reordenando) que $t_1 > 1/n$, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\|f_{x_n} - f\| &\geq |f_{x_n}(x_n) - f(x_n)| \\
&= |f(x_n) + d(a, x_n)| \\
&= \big|\sum_{i=1}^{m} t_i f_{z_i}(x_n) + \sum_{i=1}^{m} t_i d(a, x_n)\big| \\
&= \big|\sum_{i=1}^{m} t_i d(z_i, x_n)\big| \geq t_1 d(z_1, x_n).
\end{aligned}$$

Por tanto $d(z_1, x_n) \to 0$, si $n \to \infty$, *i.e.*, $x_n \to z_1$ por lo que $\iota(x_n) \to \iota(z_1)$ y como $C_\theta(X)$ es de Hausdorff debemos tener que $f = f_{z_1} \in \iota(X)$ como queríamos.

Resta ver que ι es equivariante. Para esto, sean $g \in G$ y $x \in X$ y observemos que, para cada $y \in X$,

$$\begin{aligned}
(gf_x)(y) &= f_x(g^{-1}y) \\
&= d(x, g^{-1}y) - d(a, g^{-1}y) \\
&= d(gx, y) - d(a, y) = f_{gx}(y),
\end{aligned}$$

es decir $gf_x = f_{gx}$ o bien $g\iota(x) = \iota(gx)$, por lo tanto ι es equivariante como afirmábamos.

□

Corolario 3.1.2 *Sea G un grupo topológico. Entonces para todo G-espacio métrico X que admite una métrica invariante existe un G-espacio lineal normado (y completo) y un encaje equivariante de X en él tal que la imagen de este encaje es cerrada en su envoltura convexa.*

Demostración Supongamos primero que X tiene un punto fijo, entonces basta observar que $C_\theta(X)$ es un espacio lineal normado (Corolario 2.4.5) y tomar el encaje del teorema anterior.
En caso de que X no tenga ningún punto fijo, añadiremos uno, esto es, tomemos la suma topológica $X' = X + \{\infty\}$ (donde ∞ es un punto ajeno a

X) y definamos la acción (claramente continua) $G \times X' \xrightarrow{\cdot} X'$ dada por:

$$g \cdot x = \begin{cases} gx, & \text{si } x \in X \\ \infty, & \text{si } x = \infty \end{cases}$$

Luego la composición $X \hookrightarrow X' \overset{\iota}{\hookrightarrow} C_\theta(X')$ es el encaje que necesitábamos.

Teorema 3.1.3 *Sea G un grupo topológico y X un G-espacio métrico. Si X admite una métrica invariante y acotada entonces existe un encaje isométrico y equivariante $j : X \to L$, donde L es un G-espacio lineal y normado, tal que la imagen $j(X)$ es cerrada topológicamente y también una base vectorial para L.*

Demostración Si $P(X)$ es el conjunto potencia de X, denotemos por Z al conjunto $\{z \in P(X) \mid z \text{ es finito}\}$ y definamos una función $G \times Z \to Z$ por $(g, z) \to gz = \{gp \mid p \in z\}$ que es claramente una acción de G en Z.

Podemos entonces considerar el G-espacio (de Banach) $(A(Z), \|\cdot\|)$ de todas la funciones acotadas y G-uniformes de Z a $\mathbb{R}$ y $\|\cdot\|$ la norma supremo. Sea s la norma supremo para $A(Z)$ y sea $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ una métrica invariante, acotada y compatible para X y definamos un primer encaje isométrico $j : X \to A(Z)$ con $j(x) = f_x : Z \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_x(z) = d(x, z) = \inf_{p \in z}\{d(x, p)\}.$$

Esto tiene sentido pues al ser d acotada f_x lo es y la G-uniformidad de f_x se sigue de la invarianza de d y del hecho de que para cualesquiera $z \in Z,\ h \in G,\ x \in X$

$$\begin{aligned} |f_x(hz) - f_x(z)| &= |d(x, hz) - d(x, z)| \\ &= |d(h^{-1}x, z) - d(x, z)| \\ &\leq d(h^{-1}x, x) = d(x, hx) \end{aligned}$$

así que en vista de la continuidad de la acción (dado que $x = ex$), es suficiente escoger una vecindad $V \subset G$ de e (y otra de x, $W \subset X$) tal que

$$V\{x\} \subset VW \subset O_d(x, \epsilon),$$

con lo que para cualesquiera $z \in Z,\ h \in V$,

$$|f_x(hz) - f_x(z)| \leq d(x, hx) < \epsilon,$$

de este modo concluimos que $f_x \in A(Z)$.

Para probar que j es una isometría tomemos $x_1, x_2 \in X$, entonces

$$\begin{aligned}\|f_{x_1} - f_{x_2}\| &= \sup_{z\in Z}\{|f_{x_1}(z) - f_{x_2}(z)|\} \\ &= \sup_{z\in Z}\{|d(x_1, z) - d(x_2, z)|\} \\ &\leq \sup_{z\in Z}\{d(x_1, x_2)\} = d(x_1, x_2).\end{aligned}$$

y para el caso particular en que $z = \{x_2\} \in Z$ tenemos

$$\|f_{x_1} - f_{x_2}\| \geq |f_{x_1}(z) - f_{x_2}(z)| = d(x_1, x_2),$$

así que $s(j(x_1), j(x_2)) = d(x_1, x_2)$.
Además, como

$$(gf_x)(z) = f_x(g^{-1}z) = d(x, g^{-1}z) = d(gx, z) = f_{gx}(z)$$

para cualesquiera $x \in X,\ g \in G$ y $z \in Z$, concluimos que $gf_x = f_{gx}$, *i.e.*, $gj(x) = j(gx)$ para cualesquiera $x \in X$ y $g \in G$ esto es, j es equivariante.

Notemos también que $j(X) \subset A(Z)$ es linealmente independiente. De lo contrario, existirían $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$, elementos de X y de $\mathbb{R}$, respectivamente tales que $f_{x_{n+1}} = a_1 f_{x_1} + a_2 f_{x_2} + \ldots + a_n f_{x_n}$, tomando $z = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tendríamos que

$$f_{x_{n+1}}(z) = a_1 f_{x_1}(z) + a_2 f_{x_2}(z) + \ldots + a_n f_{x_n}(z) = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

y entonces $x_{n+1} \in z$, lo cual es una contradicción (suponiendo que los elementos x_i son distintos entre sí). Ahora es inmediato que al definir L como el subespacio de $A(Z)$ generado por $j(X)$, $j(X)$ resulta base de L y el encaje anunciado en el teorema será la correstricción de j a su imagen $j|^L : X \to L$, que por comodidad seguiremos llamando j.

Sólo nos resta demostrar que $j(X)$ es cerrado en L: sea $\varphi \in L\backslash j(X)$, entonces φ es de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i f_{x_i}$ para algunas $n \in \mathbb{N},\ x_i \in X,\ a_i \in$

$\mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Como $\varphi \neq f_{x_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, podemos escojer un $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \|\varphi - f_{x_i}\| . \tag{3.1}$$

Afirmamos que $O_s(\varphi, \epsilon) \subseteq L \backslash j(X)$. Supongamos lo contrario, entonces existe $x \in X$ tal que $f_x \in O_s(\varphi, \epsilon)$ o sea

$$\|\varphi - f_x\| < \epsilon, \tag{3.2}$$

pero por (3.1) tenemos que

$$\|f_x - f_{x_i}\| \geq \|\varphi - f_{x_i}\| - \|\varphi - f_x\| \geq 2\epsilon - \epsilon = \epsilon, \quad \text{para cada } i \in \{1, \ldots, n\},$$

entonces debido a que j es una isometría tenemos que

$$d(x, x_i) \geq \epsilon \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.3}$$

Por otro lado sabemos que $\|\varphi - f_x\| \geq |\varphi(z) - f_x(z)|$ para toda $z \in Z$, aplicando esto a $z = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y usando (3.3) tenemos que

$$\|\varphi - f_x\| \geq |\varphi(z) - f_x(z)| = f_x(z) = d(x, z) \geq \epsilon$$

contradiciendo (3.2). Con esto termina la demostración.

□

Teorema 3.1.4 *Sean G un grupo topológico compacto y X un G-espacio metrizable. Entonces existe un espacio lineal normado L y un encaje isométrico y equivariante $l : X \to C(G, L)$ cuya imagen $l(X)$ es cerrada en $C(G, L)$.*

Demostración La acción que usaremos para ver a G como un G-espacio es $(g, x) \to xg^{-1}$ que claramente es continua y que transforma la acción (2.7) de la Proposición 2.3.1 para $C(G, L)$ en

$$(hf)(g) = f(gh), \quad \text{para cualesquiera } h, g \in G,\ f \in C(G, L). \tag{3.4}$$

Recordemos que como G es compacto $C(G, L) = C^*(G, L)$ y $C_c(G, L) \cong (C(G, L), \|\cdot\|)$ donde $\|\cdot\|$ es la norma supremo (Proposición 1.2.16).

Ahora bien, ya que G es compacto, la Proposición 2.2.2 nos permite aplicar el Teorema 3.1.3, luego, existe un espacio lineal normado L junto con un encaje isométrico $X \overset{\alpha}{\hookrightarrow} L$ tal que su imagen $\alpha(X)$ es cerrada en L. Usando esto, definamos la función $l : X \to C(G, L)$

$$l(x)(g) = \alpha(gx), \quad \text{para cualesquiera } x \in X,\ g \in G$$

y veamos que satisface lo afirmado.

Sean $x_1, x_2 \in X$, usando el hecho de que α es isometría y tomando una métrica invariante d compatible con la topología de X, tenemos que

$$\begin{aligned} \|l(x_1) - l(x_2)\| &= \sup_{g\in G}\{|l(x_1)(g) - l(x_2)(g)|\} \\ &= \sup_{g\in G}\{|\alpha(gx_1) - \alpha(gx_2)|\} \\ &= \sup_{g\in G}\{|d(x_1, x_2)|\} = d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Por tanto l es isometría.

Para ver que l es equivariante sean $g, h \in G$, y usando (3.4) obtenemos

$$\begin{aligned} (hl(x))(g) &= l(x)(gh) \\ &= \alpha(ghx) \\ &= (l(hx))(g), \end{aligned}$$

de modo que $hl(x) = l(hx)$, como pedimos.

Sólo falta ver que $l(X) \subset C(G, L)$ es cerrado. Como X y $C(G, L)$ son métricos, podemos probarlo usando sucesiones.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X y supongamos que la sucesión $\{l(x_n)\}$ converge a $f \in C(G, L)$, será suficiente mostrar que $f \in l(X)$. Notemos que

$$l(x_n) \to f \;\Rightarrow\; l(x_n)(e) \to f(e),$$

y como $l(x_n)(e) = \alpha(ex_n) = \alpha(x_n)$, si $y = f(e)$ entonces

$$\alpha(x_n) \to y, \quad \{\alpha(x_n)\} \subset \alpha(X),$$

y ya que $\alpha(X) = \overline{\alpha(X)}$, obtenemos que $y = \alpha(x)$ para alguna $x \in X$. Como α es una isometría deducimos que $x_n \to x$. La continuidad de l implica que $l(x_n) \to l(x)$. Por tanto, en un espacio de Hausdorff como L debemos tener que $f = l(x) \in l(X)$ y $l(X) \subset L$ es cerrado.

□

Si el grupo G solamente es localmente compacto, seguiremos teniendo al G-espacio $C_c(G, L)$ donde L se puede elegir con cualquier otro encaje $X \hookrightarrow L$. En este caso, l sigue siendo un encaje equivariante ([13], Teo. 6.2).

3.2. Encajes equivariantes de espacios de Tychonoff

Como discutimos en la sección 2.6, el resultado enunciado en el Lema 2.6.1 nos permitirá demostrar de manera natural la versión equivariante del Teorema de Encaje de Tychonoff. Por otro lado, la idea de considerar a $C(G)$ como el objeto en $\mathcal{TOP}^G$ que juega el papel de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{TOP}$ nos dará, en vista del Lema 2.6.2, la versión equivariante del Teorema 1.3.7 sobre objetos universales en la categoría $\mathcal{TOP}^G$.

Teorema 3.2.1 *Sea G un grupo topológico compacto. Entonces para cada G-espacio de Tychonoff X de peso infinito $w(X) = \tau$, existe una acción de G continua y lineal en $\mathbb{R}^\tau$ junto con un cubo $B_\tau \subset \mathbb{R}^\tau$ (de peso τ) invariante, en el cual X se encaja equivariantemente.*

Demostración Por el Lema 2.6.1, existe una familia K de G-morfismos acotados $f : X \to E_f$ donde E_f es un espacio euclidiano (algún $\mathbb{R}^n$), con cardinalidad $|K| = \tau$ que separa puntos de conjuntos cerrados de X.

Como cada $f \in K$ es acotada, $\overline{f(X)} \subset E_f$ es compacto y por lo tanto su envoltura convexa $B_f = conv(\overline{f(X)})$ también es compacta (Proposición 1.2.11). Claramente B_f es homeomorfo a un cubo de dimensión finita. Además G actúa linealmente en E_f para cada $f \in K$ por lo que de acuerdo a la descripción dada en la Proposición 1.2.11, B_f es invariante en E_f.

Ahora simplemente consideremos el producto $\prod\{E_f \mid f \in K\}$ el cual es topológica y linealmente equivalente a la potencia $\mathbb{R}^\tau$, de modo que identificaremos a ambos y definiremos $B_\tau = \prod\{B_F \mid f \in K\}$.

Es claro que $\mathbb{R}^\tau$ ($\prod E_f$) es un G-espacio lineal con acción diagonal y de este modo $B_\tau \subset \mathbb{R}^\tau$ es un conjunto invariante. Obviamente B_τ es compacto, convexo y homeomorfo al cubo I^τ como se afirma.

Sólo nos falta dar el encaje equivariante de X a B_τ, pero de acuerdo a nuestro argumento, este surge de forma natural tomando el morfismo diagonal inducido por la familia K, e.d.,

$$\Delta : X \to \prod_{f\in K} B_f \quad \text{con} \quad \Delta(x)_f = f(x),$$

que de acuerdo a la acción (diagonal) en B_τ y a la G-invariancia de las funciones f, es un morfismo de G-espacios.

En vista del Corolario 1.3.3, como X es de Tychonoff y K separa puntos de cerrados en X, Δ es un encaje y el teorema queda demostrado.

$\square$

Una vez que el espacio queda encajado, la cerradura de este en el espacio ambiente es una compactación. Como además la cerradura de un invariante es de nuevo invariante, tenemos así una G-compactación, *i.e.*,

Corolario 3.2.2 *Sea G un grupo topológico compacto. Entonces cada G-espacio de Tychonoff admite una compactación equivariante del mismo peso.*

Cosideremos ahora la existencia de G-objetos universales.

Teorema 3.2.3 *Sea τ un número cardinal infinito. Si G es un grupo topológico compacto de peso $w(G) \leq \tau$, entonces hay una acción lineal de G en la potencia topológica $\mathbb{R}^\tau$ y un cubo $B_\tau \subset \mathbb{R}^\tau$ (de peso τ) en donde cualquier G-espacio de Tychonoff de peso menor a τ se encaja equivariantemente.*

Demostración Consideremos el G-espacio $C_c(G)$ con acción $(g, f) \to gf$ tal que $gf(x) = f(xg)$ (Proposición 2.3.1). Oservemos que el peso de G y $C_c(G)$ coinciden pues $w(C(G)) = w(C_c(G, \mathbb{R})) \leq w(G)w(\mathbb{R})$ ([6] Cap. XII, Teo. 5.2) y $w(G) \leq w(C(G))$ siempre, asi que $w(G) = w(C(G))$.

Ahora, por el Teorema 3.2.1, la potencia $\mathbb{R}^{w(C(G))} = \mathbb{R}^{w(G)}$ es un G-espacio lineal y hay un cubo invariante $B_{w(G)} \subset \mathbb{R}^{w(G)}$ que hace posible encajar a $C(G)$ equivariantemente en $B_{w(G)}$ (G compacto implica que $C(G) \in \mathcal{M}$). Además, según la Observación 2.1.1, la acción diagonal de G en cualquier potencia de un G-espacio sigue siendo continua y lineal; en particular $(\mathbb{R}^{w(G)})^\tau$ es un G-espacio lineal. Pero $w(G) \leq \tau$ implica que $(\mathbb{R}^{w(G)})^\tau \cong \mathbb{R}^\tau$ topologica y linealmente, así que podemos identificar los dos espacios para nuestra comodidad.

Definamos $B_\tau = (B_{w(G)})^\tau \subset \mathbb{R}^\tau$ (según el comentario anterior) y veamos que B_τ satisface la propiedad establecida en el enunciado.

Sea X un G-espacio de Tychonoff con peso $w(X) \leq \tau$. De acuerdo al Lema 2.6.2, existe un subconjunto $S \subset F(X)$ que separa puntos de conjuntos cerrados en X y cuya cardinalidad es τ. Esto implica que el morfismo diagonal $\Delta : X \to \prod_{f \in S} C(G)_f = C(G)^\tau$ inducido por S es un encaje equivariante.

Ahora, $C(G)$ se encaja en $B_{w(G)}$ equivariantemente por lo cual $(C(G))^\tau$ se encaja en $(B_{w(G)})^\tau$ también equivariantemente (coordenada a coordenada). Luego la composición de encajes equivariantes

$$X \to (C(G))^\tau \to B_\tau$$

es el encaje equivariante de X en B_τ buscado.

$\square$

El problema de G-compactación, *i.e.*, encajes equivariantes en espacios compactos es muy interesante. En [3] Antonyan prueba que en el caso del Lema 2.6.2, si el grupo G es compacto, el subconjunto $F^*(X)$ de $F(X)$ de G-morfismos $X \to C(G)$ donde $\overline{f(X)} \subset C(G)$ es compacto también separa puntos de conjuntos cerrados en X. Como vimos en la Sección 2.4, estas funciones corresponden, bajo la asociación ξ de la Observación 2.4.1, a las funciones G-uniformes. En [17], De Vries demuestra que el G-espacio de Tychonoff X (con acción θ) admite una G-compactación si y sólo si $C_\theta(X)$ separa puntos de conjuntos cerrados en X. Esto es cierto si, por ejemplo, G es localmente compacto. Como consecuencia de esto De Vries presenta el siguiente resultado.

Afirmación 5 (De Vries) *Sea (G, X, θ) un grupo topológico de transformaciones. Entonces X se encaja equivariantemente en un G-espacio compacto (de Hausdorff) si y sólo si X admite una uniformidad tal que, al darle al grupo Homeo(X) la topología de convergencia uniforme, el homomorfismo*

$$\Theta : G \to Homeo(X), \quad g \to \theta_g$$

es continuo ([17] Coro. 3.10).

3.3. Encajes equivariantes de espacios p-paracompactos

Teorema 3.3.1 *Sea G un grupo topológico compacto. Si X es un G-espacio p-paracompacto de peso infinito $w(X) = \tau$, entonces hay una acción lineal de G en $\mathbb{R}^\tau$ junto con un cubo $B_\tau \subset \mathbb{R}^\tau$ de peso τ invariante y un espacio lineal normado L tales que X se encaja equivariantemente como un subespacio cerrado del G-espacio $B_\tau \times L$.*

Demostración Como G es compacto, el Corolario 2.1.4 garantiza que la proyección orbital $p : X \to X/G$ es perfecta. De acuerdo a la Afirmación 1, el espacio de órbitas X/G es también p-paracompacto. Esto significa que hay una función perfecta $f : X/G \to Z$ donde Z es un espacio métrico. La acción de G en X/G es trivial y podemos suponer lo mismo para la acción en Z, así que f es una función equivariante (invariante). De este modo la composición $X \xrightarrow{p} X/G \xrightarrow{f} Z$ a la que llamaremos q', es un morfismo perfecto e invariante de X a Z. Además en vista de que Z es métrico, Z se encaja isométricamente como un cerrado de un espacio lineal normado L (Teorema 3.1.3 con acciones triviales).

Componiendo q' con el encaje $Z \hookrightarrow L$ obtenemos un G-morfismo propio e invariante $q : X \to L$ (L es un G-espacio trivial).

Retomando lo establecido en el Teorema 3.2.1 (X es en particular de Tychonoff), tenemos un G-espacio lineal $\mathbb{R}^\tau$ y dentro de este un cubo $B_\tau \subset \mathbb{R}^\tau$ de peso τ invariante junto con un encaje equivariante $\varphi : X \to B_\tau$.

Con los dos morfismos anteriores definamos su diagonal

$$h : X \to B_\tau \times L, \quad h(x) = (\varphi(x), q(x))$$

y observemos que como φ es un encaje, h también lo es (Corolario 1.3.3). Es claro también que h es equivariante. Finalmente, como q es propia, h también lo es ([7], teo. 2.3.20), en particular h es cerrada.

□

Capítulo 4

Retractos absolutos equivariantes

4.1. G-extensores y G-retractos

Definiremos a continuación, de manera natural, las nociones de G-retracto absoluto (y de vecindad) y de G-extensor absoluto (y de vecindad) para clases de G-espacios.
Si G es un grupo topológico y $\mathcal{K}$ es una clase de espacios denotaremos por $\mathcal{K}^G$ a la subcategoría completa $\mathcal{TOP}^G \cap \mathcal{K}$, *i.e.*, espacios de $\mathcal{K}$ con una acción (continua) de G y funciones equivariantes.

Definición 4.1.1 *Sean $\mathcal{K}$ una clase de espacios débilmente hereditaria y G un grupo topológico. Un G-espacio $Y \in \mathcal{K}^G$ es un* G-retracto absoluto *para la clase $\mathcal{K}^G$ si cada vez que Y aparezca como un subespacio cerrado e invariante de un G-espacio $X \in \mathcal{K}^G$, Y es un G-retracto de X,* i.e., *existe una retracción equivariante de X a Y. Diremos que $Y \in \mathcal{K}^G$ es un* G-retracto absoluto de vecindad *para la clase $\mathcal{K}^G$ si cada vez que Y aparezca como un subespacio cerrado e invariante de un G-espacio $X \in \mathcal{K}^G$, Y es un G-retracto de una vecindad invariante U de Y en X,* i.e., *existe una retracción equivariante de U a Y.*

Estas nociones las abreviaremos como $Y \in G\text{-AR}(\mathcal{K})$ y $Y \in G\text{-ANR}(\mathcal{K})$, respectivamente.

Pasemos ahora al caso equivariante de los extensores.

Definición 4.1.2 *Sean $\mathcal{K}$ una clase de espacios débilmente hereditaria y G un grupo topológico. Un G-espacio Y es un G-*extensor absoluto *para la clase $\mathcal{K}^G$ si para cada subespacio A cerrado e invariante de un G-espacio X en $\mathcal{K}^G$ y cada morfismo de G-espacios $f : A \to Y$, f admite una extensión equivariante $F : X \to Y$. El G-espacio Y es un G-*extensor absoluto de vecindad *para la clase $\mathcal{K}^G$ si para cada G-espacio $X \in \mathcal{K}^G$ cada G-morfismo $f : A \to Y$ de un cerrado e invariante A de X, existe una vecindad invariante U de A en X y una G-extensión $F : U \to Y$ de f.*

Si Y es un G-extensor absoluto para la clase $\mathcal{K}^G$ escribiremos $Y \in G\text{-AE}(\mathcal{K})$ y si es G-extensor absoluto de vecindad para la misma clase escribiremos $Y \in G\text{-ANE}(\mathcal{K})$.

Con la definición de acción diagonal en un producto de G-espacios (Observación 2.1.1) es fácil demostrar el siguiente análogo de la Proposición 1.4.4.

Observación 4.1.3 *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{K}$ una clase de espacios débilmente hereditaria. Entonces el producto de una familia de G-$AE(\mathcal{K})$'s es de nuevo un G-$AE(\mathcal{K})$.*

Demostracioón Sean $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de G-extensores absolutos y $A \subseteq X$ un cerrado e invariante de un G-espacio X en $\mathcal{K}^G$. Sean $f : A \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ un G-morfismo y $\pi_{\lambda'} : \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \to Y_{\lambda'}$ la proyección λ'-ésima. Tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[dr, "F_{\lambda'}"] & \prod Y_\lambda \arrow[d, "\pi_{\lambda'}"] \\ A \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_{\lambda'} f"'] & Y_{\lambda'} \end{tikzcd}$$

que para cada $\lambda' \in \Lambda$ induce una extensión equivariante $F_{\lambda'}$ de $\pi_{\lambda'} f$. Luego, $\{F_\lambda\}$ induce una función $F : X \to \prod Y_\lambda$ que es equivariante pues

$$F(gx) = \{F_\lambda(gx)\}_\lambda = \{gF_\lambda(x)\}_\lambda = g\{F_\lambda(x)\} = gF(x),$$

y que hace que el triágulo superior derecho conmute para cada $\lambda' \in \Lambda$. Tenemos así que todo el cuadrado conmuta y por lo tanto para cada $a \in A$

$$\pi_{\lambda'} F(a) = F_{\lambda'}(a) = \pi_{\lambda'} f(a)$$

como $\lambda' \in \Lambda$ es arbritraria concluimos que $F(a) = f(a)$, *i.e.*, F es la extensión equivariante de f.

$\square$

La versión simétrica del cubo de Tychonoff es la siguiente.

Definición 4.1.4 *Sean G un grupo topológico y τ un número cardinal. Si G actua continua y linealmente en el espacio topológico vectorial $\mathbb{R}^\tau$, diremos que $B_\tau \subset \mathbb{R}^\tau$ es un G-cubo si*

i) B_τ *es compacto, convexo e invariante en* $\mathbb{R}^\tau$,

ii) B_τ *es homeomorfo al cubo* I^τ,

iii) $B_\tau \in G\text{-}AE(\mathcal{N})$.

Proposición 4.1.5 *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo normal y compacto de G. Sea $\mathcal{K}$ una clase de espacios débilmente hereditaria y cerrada bajo funciones perfectas. Si Y es un G/H-ANE $(\mathcal{K})$, entonces el G-espacio Y es un G-ANE $(\mathcal{K})$.*

Demostración Recordemos que el G/H-espacio Y puede ser visto como G-espacio mediante el homomorfismo canónico (y de identificación) $G \to G/H$. Sea X un G-espacio en la clase $\mathcal{K}$ y $A \subset X$ un cerrado invariante. Sea $f : A \to Y$ una función equivariante. Como A y Y son G-espacios, también son H-espacios y f es H-invariante, así que f induce una única función (continua) $\widetilde{f} : A/H \to Y/H$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ A/H \arrow[r, "\widetilde{f}"] & Y/H \end{tikzcd}$$

donde hemos designado por p y q a las proyecciones orbitales correspondientes.

Notemos que, como la acción de H sobre Y es la inducida por $H \hookrightarrow G$ y la de G está a su vez determinada por el homomorfismo $G \to G/H$, entonces la acción de H en Y está dada por la composición $H \hookrightarrow G \to G/H$ que es trivial para toda $h \in H$. Así que la acción de H en Y es trivial, *i.e.*, $Y/H \equiv Y$ y el diagrama anterior se reduce al diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ A/H \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, el espacio cociente A/H es un G/H-espacio (Proposición 2.1.2) y por tanto un G-espacio mediante el homomorfismo $G \to G/H$, *i.e.*, que tiene por acción $gH(a) = H(ga)$. Por otro lado, si vemos a A como el cociente $A/\{e\}$ y aplicamos la misma Proposición 2.1.2, tenemos que p es G-invariante. Del diagrama anterior obtenemos, para $g \in G$ y $H(a) \in A/H$,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(gH(a)) &= \widetilde{f}(H(ga)) \\ &= f(ga) \\ &= gf(a) = g\widetilde{f}(H(a)). \end{aligned}$$

Por tanto f es un G-morfismo y también un G/H-morfismo (pues G actúa en A/H y en Y mediante $G \to G/H$).

Usando la compacidad de H, el Corolario 2.1.4 implica que $P : X \to X/H$ es perfecta ($P|_A = p$). Como pedimos que la clase $\mathcal{K}$ sea cerrada bajo funciones perfectas, debemos tener que $X/H \in \mathcal{K}$. En resumen, $\widetilde{f} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{TOP}^{G/H}}(A/H, Y)$ y $A/H \subset X/H$ es un cerrado G/H-invariante de modo que $\widetilde{f}$ admite una G/H-extensión $\widetilde{F} : V \to Y$ donde $V \subset X/H$ es una vecindad invariante del subespacio A/H ($Y \in G/H$-ANE($\mathcal{K}$)). Ahora es claro que $U = p^{-1}(V)$ es una vecindad invariante de A y del diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "P"] & V \arrow[r, "\widetilde{F}"] & Y \\ A \arrow[u, hook] \arrow[r, "p"] \arrow[urr, bend right, "f"'] & A/H \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

vemos que $F = \widetilde{F}P : U \to Y$ es la extensión G-invariante de A a la vecindad (invariante) U. Esto concluye la prueba.

□

En la demostración de la Proposición anterior es posible considerar la extensión de $\widetilde{f}$ a todo el espacio X/H en lugar de una extensión a una vecindad invariante de A/H, esto es, suponiendo que Y sea un G/H-AE($\mathcal{K}$) y la vecindad de A resultaría el espacio X, resumimos esto en la

Observación 4.1.6 *Con las definiciones anteriores, si Y es un G/H-AE($\mathcal{K}$), entonces también es un G-AE($\mathcal{K}$).*

Corolario 4.1.7 *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo normal, cerrado y compacto de G. Sea $\mathcal{K}$ una de las clases $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{CM}$ y $\mathcal{P}$. Entonces si Y es un G/H-espacio se tiene que*

1. *Si $Y \in G/H$-AE($\mathcal{K}$), entonces $Y \in G$-AE($\mathcal{K}$).*

2. *Si $Y \in G/H$-ANE($\mathcal{K}$), entonces $Y \in G$-ANE($\mathcal{K}$).*

Demostración Del Teorema 1.3.10 usando (1) y (2) se tiene que $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{CM}$ son clases cerradas bajo morfismos perfectos. Por la Afirmación 1, $\mathcal{P}$ también es cerrada bajo funciones perfectas.

□

4.2. Algunos hechos sobre extensores equivariantes

El propósito de este apartado es enunciar versiones equivariantes de teoremas como los comentados en la sección 1.4, que resultan en extensores absolutos, para combinarlos con los encajes (equivariantes) obtenidos en el capítulo anterior. Estos resultados se encuentran en [4].

Empezamos con una versión equivariante del Teorema de Extensión de Dugundji (1.4.9).

Teorema 4.2.1 (Antonyan) *Sea G un grupo topológico compacto. Sea L un G-espacio lineal localmente convexo y V un subespacio convexo e invariante de L. Supongamos que una de las siguientes condiciones*

1. *V es completo respecto a la uniformidad natural del espacio topológico vectorial L,*
2. *L es de dimensión finita,*
3. *G es finito,*

es cierta. Entonces, para cualquier subespacio cerrado e invariante A de un G-espacio X, si un morfismo de G-espacios $f : A \to V$ admite una extensión a X, también admite una extensión equivariante de X a V.

Si el G-espacio X es metrizable, la Proposición 2.2.2 nos permite suponer que X tiene una métrica invariante, de modo que la versión equivariante del Teorema 1.4.10 se obtiene aplicando el mismo Teorema de Dugunji (1.4.9) y luego el anterior.

Corolario 4.2.2 *Sean G un grupo topológico compacto, L un G-espacio lineal localmente convexo y $V \subset L$ cerrado, convexo e invariante. Si V es completo respecto a la uniformidad natural de L, L es de dimensión finita o G es finito, entonces $V \in G\text{-}AE(\mathcal{M})$.*

Si un espacio métrico es extensor absoluto para espacios métricos y además es completo y separable, entonces también es un extensor absoluto para espacios normales ([9], Cap. II, 16.1). Así que del Teorema 4.2.1 también se obtiene la siguiente consecuencia.

Corolario 4.2.3 *Sean G un grupo topológico compacto. Sea L un G-espacio lineal de Banach y $V \subset L$ un subespacio cerrado, convexo, invariante y separable de L, entonces $V \in G$-$AE(\mathcal{N})$.*

Queremos ahora enunciar la versión equivariante del Teorema 1.4.6. Supongamos que un grupo topológico G actúa en dos espacios Y y T metrizables. Sabemos (Proposición 2.3.1) que si G es localmente compacto, entonces $C_c(T, Y)$ es un G-espacio con acción $(g, f) \to gf$ donde $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$. Por otro lado, en el Teorema 1.4.6 pedimos que T sea compacto para asegurar que la topología compacto-abierta coincida en $C(T, Y)$ con la inducida por la norma supremo descrita en la sección 1.2.3 ([13], Anexo B, Prop. 6). Por último, si G es numerablemente compacto, tendremos asegurada la existencia de métricas invariantes para Y y T. Con estas cosideraciones en mente, pediremos la compacidad de G al igual que la de T.
El resultado se basa en el teorema debido a Antonyan ([2]) que enunciamos a continuación.

Teorema 4.2.4 *Sean G un grupo topológico compacto y T un G-espacio. Sean $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ dos clases de espacios de Tychonoff tales que*

1. *Para cada $X \in \mathcal{K}_1$, $X \times T$ es un k-espacio.*
2. *Para cada $X \in \mathcal{K}_1^G$, el espacio de órbitas $(X \times T)/G$ pertenece a $\mathcal{K}_2$*

Si el espacio Y es un $ANE(\mathcal{K}_2)$, entonces el G-espacio $C(T, Y)$ es un $G-$-$ANE(\mathcal{K}_1)$. Si además Y es un $AE(\mathcal{K}_2)$, entonces $C(T, Y)$ es un G-$AE(\mathcal{K}_1)$.

Teorema 4.2.5 *Sean G un grupo topológico compacto y T un G-espacio compacto. Si Y es un $ANR(\mathcal{M})$ entonces el G-espacio $C(T, Y)$ es un G-$ANE(\mathcal{P})$. Si Y es además un $AR(\mathcal{M})$, entonces $C(T, Y)$ es un G-$AE(\mathcal{P})$.*

Demostración Nuestro objetivo es usar el Teorema 4.2.4 para las clases de espacios $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{P}$ que son en efecto clases de espacios de Tychonoff. Verifiquemos las condiciones de este teorema.
Para la condición (1), sea $X \in \mathcal{P}$ cualquier objeto, entonces existe una función perfecta $f : X \to Z$ a un espacio $Z \in \mathcal{M}$. Sabemos que cada espacio métrico es un k-espacio (Proposición 1.3.15) y que la preimagen perfecta de un k-espacio es de nuevo k-espacio ([7], Teo. 3.7.25) por tanto X es un k-espacio. Del Corolario 1.3.18, la compacidad de T implica que $X \times T$ es un

k-espacio y así se tiene la primera condición del teorema.
Para la condición (2), la Observación 1.3.14 nos garantiza que $X \times T$ es p-paracompacto. Si suponemos que X es un G-espacio entonces $X \times T$ también es un G-espacio y por el Corolario 2.1.4, la proyección orbital $X \times T \to (X \times T)/G$ es perfecta. De la Afirmación 1, tenemos que $(X \times T)/G$ está en $\mathcal{P}$.

Por último, debido a un resultado de Yu. T. Lisica ([10]) se tiene que $Y \in$ AR($\mathcal{M}$) implica que $Y \in$ AE($\mathcal{P}$) y $Y \in$ ANR($\mathcal{M}$) implica que $Y \in$ ANE($\mathcal{P}$), así que el enunciado se deduce del teorema anterior.

□

En el teorema anterior, la única propiedad requerida de T es la compacidad, así que como tambien pedimos la compacidad de G, podemos considerar el G-espacio (G, G, γ) donde $\gamma(g, h) = gh^{-1}$ es la misma de la ecuación 1.1.

Corolario 4.2.6 *Sea G un grupo topológico compacto. Si Y es un AE($\mathcal{M}$) o un ANE($\mathcal{M}$), entonces el G-espacio $C(G, Y)$ es un G-AE($\mathcal{P}$) o un G-ANE($\mathcal{P}$), respectivamente.*

Cuando Y es un extensor absoluto, la hipótesis sobre el grupo puede mejorarse a compacidad local como se observa en la siguiente proposición ([13] Teo. 6.6).

Proposición 4.2.7 *Sean G un grupo topológico localmente compacto y $\mathcal{K}$ una clase débilmente hereditaria. Si $Y \in$ AE($\mathcal{K}$), entonces $C_c(G, Y) \in G$-AE($\mathcal{K}$).*

4.3. Relación entre los retractos y extensores equivariantes absolutos

Nuestro objetivo final en este trabajo es dar la versión equivariante de las ideas presentadas en la sección 1.4.3. Mostraremos la equivalencia de las nociones de retractos y extensores equivariantes para las clases $\mathcal{C}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{CM}$ y $\mathcal{P}$. Para ello utilizaremos el mismo método de la prueba del Teorema 1.4.7 y la versión equivariante de la Proposición 1.4.11 junto con los encajes del Capítulo 3.

Proposición 4.3.1 *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{K}$ una clase de espacios débilmente hereditaria. Entonces, si Z es un G-espacio y $Y \subseteq Z$ es un cerrado invariante, se tiene que*

1. *Si Y es un G-retracto de Z y $Z \in G$-AE$(\mathcal{K})$, entonces $Y \in G$-AE$(\mathcal{K})$.*
2. *Si Y es un G-retracto de vecindad de Z y $Z \in G$-ANE$(\mathcal{K})$, entonces $Y \in G$-ANE$(\mathcal{K})$.*

Prueba De la prueba de la Proposición 1.4.11 podemos ahora pensar que las funciones son equivariantes al igual que las vecindades así que las extensiones construidas son también equivariantes.

Para el caso de los G-espacios metrizables, una vez obtenida la versión equivariante del encaje de Kuratowski-Wojdyslawski (Corolario 3.1.2) y enunciada la versión equivariante del resultado de Dugundji (Corolario 4.2.1), resulta natural proceder, en vista de la proposición anterior, como en el Teorema 1.4.7. Sin embargo, no es inmediato que $conv(X)$ sea cerrado en $C_\theta(X)$ o incluso completo, así que no podemos deducir que $conv(X)$ sea un G-AE$(\mathcal{M})$.
No obstante, $C_\theta(X)$ es un G-espacio lineal de Banach (Corolario 2.4.5) así que el Teorema 3.1.1 representa efectivamente un encaje equivariante en un G-extensor absoluto aunque X no es necesariamente cerrado en $C_\theta(X)$.

Otra versión equivariante del Teorema de Dugundji es la obtenida también por Antonyan en [4] .

Teorema 4.3.2 *Sea G un grupo topológico de Lie compacto. Sean L un G-espacio lineal localmente convexo y V un subespacio convexo e invariante de L, entonces V es un G-ANE($\mathcal{M}$).*

Más aún, si el G-espacio V tiene G-puntos fijos, V es un G-AE($\mathcal{M}$).

En vista de este resultado, si suponemos que el grupo es compacto de Lie, entonces la Proposición 2.2.2 nos garantizará la existencia de una métrica invariante admisible para el G-espacio X y podemos aplicar los Teoremas 3.1.1 y 3.1.3 en combinación con el Teorema 4.3.2. La hipótesis de este último teorema respecto a la estructura diferencial del grupo no es del todo imprecindible, de hecho, en [5] (Teo. 6), Antonyan observa lo siguiente.

Teorema 4.3.3 *Sea G un grupo topológico compacto y metrizable que no sea de Lie. Entonces existe un G-espacio lineal normado que no es G-ANE($\mathcal{M}$).*

Hemos visto que bajo ciertas condiciones, los Teoremas 3.1.3 y 3.1.1 representan encajes isométricos y equivariantes en retractos absolutos. El Teorema 3.1.4 ciertamente enuncia otro encaje en un G-extensor como veremos más adelante.

En la situación general, los espacios compactos Hausdorff pueden ser vistos, según notamos en el Corolario 1.3.5, como subespacios cerrados de un cubo I^τ para cierto cardinal τ. Como observamos en la Sección 1.4.3, I^τ siempre es un extensor absoluto para la clase $\mathcal{N}$. Pasando al caso equivariante, los Teoremas 3.2.1 y 3.2.3 muestran encajes en G-espacios homeomorfos a cubos de Tychonoff que, como veremos, son también espacios G-AE para la clase $\mathcal{N}^G$. En esta misma condición se encuentran los espacios p-paracompactos en el encaje presentado en el Teorema 3.3.1.

Teorema 4.3.4 *Sea G un grupo topológico compacto y $\mathcal{K}$ una de las clases $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{CM}$ y $\mathcal{P}$. Entonces para un G-espacio $X \in \mathcal{K}^G$ se tiene*

1. *$X \in G$-AR($\mathcal{K}$) si y sólo si $X \in G$-AE($\mathcal{K}$).*
2. *$X \in G$-ANR($\mathcal{K}$) si y sólo si $X \in G$-ANE($\mathcal{K}$).*

Demostración Es claro que un G-extensor absoluto y absoluto de vecindad para $\mathcal{K}$ es G-retracto absoluto y absoluto de vecindad para $\mathcal{K}$, respectivamente. Veamos la otra implicación.
Consideremos los siguientes casos:

i) Si $\mathcal{K} = \mathcal{M}$, como G es compacto, la Proposición 2.2.2 nos permite suponer que X admite una métrica invariante. Por el Teorema 3.1.4, X es G-homeomorfo a un subespacio cerrado e invariante del G-espacio $C(G, L)$, donde L es un espacio lineal normado Podemos entonces suponer que $X \subseteq C(G, L)$. Observemos que por el Teorema 1.4.10, L es un AE($\mathcal{M}$), luego, las hipótesis del Corolario 4.2.6 se satisfacen y concluimos que $C(G, L)$ es un G-AE($\mathcal{P}$) y como $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ tenemos que $C(G, L) \in G$-AE($\mathcal{M}$).

ii) Si $\mathcal{K}$ es una de las clases $\mathcal{C}$ ó $\mathcal{CM}$, entonces X es un G-espacio de Tychonoff y por el Teorema 3.2.1 X puede ser visto como un subespacio cerrado e invariante de un G-espacio B_τ donde $\tau = w(X)$. Sabemos, de la prueba de dicho teorema, que B_τ es un subespacio compacto y convexo de $\mathbb{R}^\tau$ y que es homeomorfo a I^τ. Aún más, en esa prueba, B_τ se construye como el producto de subespacios B_f de espacios euclidianos E_f que son compactos y convexos por tanto cada factor B_f de B_τ satisface las hipótesis del Corolario 4.2.3, por lo que cada B_f es un G-AE($\mathcal{N}$), luego, por la Observación 4.1.3, B_τ también es un G-AE($\mathcal{N}$). En resumen, podemos suponer que $X \subseteq B_\tau$ y $B_\tau \in G$-AE($\mathcal{N}$) $\subset$ G-AE($\mathcal{C}$) $\subset G$-AE($\mathcal{CM}$).

iii) Si $\mathcal{K} = \mathcal{P}$, el Teorema 3.3.1 nos proporciona una manera de ver a X como un subespacio cerrado e invariante del G-espacio $B_\tau \times L$ donde B_τ es el G-cubo del Teorema 3.2.1 que como acabamos de observar, es un G-AE($\mathcal{N}$) y L es un espacio topológico lineal normado. Por el Teorema 1.4.10, L es un AE($\mathcal{M}$) y por la Afirmación 2, L también es extensor para $\mathcal{P}$. Tenemos así que $L \in$ AE($\mathcal{P}$) pero como observamos en la Seccion 1.1.2, podemos ver a la categoría $\mathcal{TOP}$ como $\mathcal{TOP}^G$ usando la acción trivial. Así, las nociones de extensor y $\{e\}$-extensor coinciden, en particular $L \in \{e\}$-AE($\mathcal{P}$). Ahora bien, $\{e\} = G/G$ y G es un subgrupo compacto de G así que por el Corolario 4.1.7, $L \in G/G$-AE($\mathcal{P}$) implica que $L \in G$-AE($\mathcal{P}$). De este modo tenemos que, $X \subset B_\tau \times L$ y $B_\tau \in G$-AE($\mathcal{N}$) $\subset G$-AE($\mathcal{P}$), además $L \in G$-AE($\mathcal{P}$) implica que $B_\tau \times L \in G$-AE($\mathcal{P}$).

En cualquiera de los casos, es posible considerar a X (salvo homeomorfismo) como un subespacio cerrado e invariante de un G-espacio Z que resulta un G-extensor absoluto para la clase $\mathcal{K}$ respectiva. Aplicando la Proposición 4.3.1 terminamos la demostración.

$\square$

Bibliografía

[1] S. Antonyan. Retracts in the category of G-spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math.*, 28:613–618, 1980.

[2] S. Antonyan. Mapping spaces are equivariant absolute extensors. *Vestsnik Moskov*, 6:22–25, 1981.

[3] S. Antonyan. A new proof of the existence of compact G-extensions. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 22(4):761–772, 1981.

[4] S. Antonyan. Equivariant generalization of Dugundji's theorem. *Mat. Zametki*, 38:608–616, 1985.

[5] S. Antonyan. Equivariant embeddings into G-AR's. *Glasnik Mat.*, 22(42):503–533, 1987.

[6] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[7] R. Engelking. *General Topology.* Heldermann, Berlin, 1989.

[8] V. V. Filippov. Perfect images of paracompact plumed spaces. *Dulk. Akad. Nauk SSSR*, 176(3):533–535, 1967.

[9] S. T. Hu. *Theory of Retracts.* Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[10] Y. T. Lisica. Extension of continuous mappings and a factorization theorem. *Sibirs. Mat. Ž*, 14:128–139, 1973.

[11] S. Mardešić and J. Segal. *Shape theory. The inverse system approach.* North-Holland, Amsterdam, 1982.

[12] J. v. Mill. *Infinite Dimensional Topology.* Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1989.

[13] S. d. Neymet. Introducción a los grupos topológicos de transformaciones. Apuntes del curso “Grupos Topológicos de Transformaciones”. Facultad de Ciencias, UNAM, 1996.

[14] R. Palais. *The classification of G-spaces.* Number 36. Mem. Amer. Math. Soc., 1960.

[15] L. S. Pontrjagin. *Grupos Continuos.* Mir, Moscú, 3a edition, 1978.

[16] J. d. Vries. G-spaces: Compactifications and pseudocompactness. In Á. Császár, editor, *Topology Theory and Applications*, pages 655–666. North-Holland, Amsterdam, 1985. Proc. Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, 41. Eger, 1983.

[17] J. d. Vries. Compactifications of G-spaces Revisited. Report MAS-R0006, CWI, Amsterdam, 2000. http:// ftp.cwi.nl/ CWIreports/ MAS/ MAS-R0006.pdf.

Índice alfabético