



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**“El límite semiclásico y el fenómeno
de la galería de los susurros.
Teoría analítica y asintótica”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

PRESENTA:

JOSÉ FERNANDO BUSTAMANTE CASTAÑEDA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. GUSTAVO CRUZ PACHECO



**FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM**

2005



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia, propia y adoptada.

A los "jefes".

Agradecimientos

La villanía es perdonable, más no la ingratitud.

Por fin, los agradecimientos. La primera página, pero la última en ser escrita. El trabajo está hecho, y ya sólo queda dejar constancia de todo lo que debo a tanta gente.

Hace algunos años ya, no voy a decir cuántos, que mi vida dio un cambio. Un cambio para el que no todos estaban preparados, mucho menos yo. Este cambio me llevaría a “alejarme un poco de los estándares que a bien nos impone esta sociedad”, a pesar de ello siempre conté con el apoyo incondicional de mi familia. Es a ellos a quienes les debo *todo* y a los cuales citaré en estricto orden alfabético, hacerlo de otro modo me sería imposible. Amelia, Arturo, Chucho, Edith, Edmundo, Eloy, Fany, Grecia, Hortensia, Imelda, Lolis, Meche, Norma, Payita, Quique, Teresa, Víctor J., Víctor S., y Vidal.

Durante estos años son muchas las personas e instituciones que han participado en este trabajo y a quienes quiero expresar mi gratitud por el apoyo y la confianza que me han prestado de forma desinteresada.

En primer lugar a los “jefes”: la Dra. María del Carmen Jorge y Jorge y el Dr. Gustavo Cruz Pacheco por haber confiado en mí cuándo ni siquiera yo lo hacía. Ellos me han dado no sólo lecciones en el aula, muy buenas por cierto, sino también lecciones de vida. Esas lecciones que algún día espero me hagan una “mejor” persona y buen profesional.

A mis sinodales Jorge, Lourdes y Mirna por sus acertadas correcciones a este trabajo. Fueron ellos los que aceptaron la misión de corregir esta tesis. A ellos gracias.

Al Dr. Minzoni por sus comentarios acerca de este trabajo.

Al departamento de matemáticas y mecánica del IIMAS, el único lugar donde me siento a gusto.

A Ana Guzmán y Jaime López, por su apoyo en los tiempos difíciles. Gracias Ana. Gracias Jaime.

A Andrea Aburto por darme la oportunidad de iniciarme en eso de las ayudantías.

A mis profesores desde el preescolar hasta la licenciatura. Citados, como siempre, en estricto orden alfabético: Adelaida, Aguilera, Andrea, Beatriz, Edith, Fernando, Guille, Lupe, Mireya, Oli, Olivier, Patricio, Pedro Vega, Rosalina, Telesforo, Tereso y muchos más.

A mis amigos y algo más, sin ellos la vida sería poco feliz: Abraham, Beto, Dulce, Eduardo, Eli, Elihú, Eliut, Enrique, Ericka, Héctor, Jael, Juan Pablo, Laura, Miriam, Rafa, Ramiro, Raúl, Rebeca y Vero. Espero no olvidar a nadie.

Por último pero no menos importante a Juanita por su eterna comprensión y amabilidad infinita. Gracias Juanita.

Índice general

Introducción	VII
1. El fenómeno de la galería de los susurros	1
1.1. La ecuación de onda	1
1.2. La ecuación de onda reducida	4
1.3. La ecuación de onda reducida en un dominio circular. Separación de variables	5
1.3.1. Galería de susurros en el círculo usando funciones de Bessel	6
1.4. La ecuación de onda reducida en un dominio elíptico. Separación de variables	12
1.5. El límite semiclásico	14
1.5.1. Cuantización de Bohr-Sommerfeld	15
2. Cuantización de Einstein-Brillouin-Keller y ecuación de Helmholtz	21
2.1. Cuantización de Einstein-Brillouin-Keller o EBK	21
2.1.1. Generalizaciones	26
2.2. La aproximación de onda corta	26
2.2.1. La ecuación eiconal	31
2.2.2. La ecuación de transporte	32
3. Caso circular	37
3.1. Ecuación de Helmholtz en un dominio circular: modos de galería de susurros usando la cuantización EBK	37
3.2. Comparación con los resultados de la sección 1.3.1	43
4. Caso elíptico	45
4.1. Ecuación de Helmholtz en un dominio elíptico: modos de galería de susurros	45
4.1.1. Aproximación de excentricidad pequeña	53
4.2. Modos “ortogonales” a los de galería de susurros	56

Conclusiones	67
A. Cáusticas	69
B. Algunas propiedades de las integrales elípticas	71
Bibliografía	77

Introducción

En una galería grande de sección transversal circular colocamos tres personas en las posiciones P_i , $i = 1, 2, 3$; donde las posiciones P_1 y P_3 se encuentran muy cerca de la frontera, mientras que P_2 se encuentra alejada de ella, como se muestra en la Figura 1. La persona en P_1 puede hablar de tal forma que la persona en P_3 la escuche sin que quien está en P_2 sea capaz de escuchar. Este fenómeno conocido como el fenómeno de la galería de los susurros fue observado por primera vez en la catedral de San Pablo en Inglaterra.

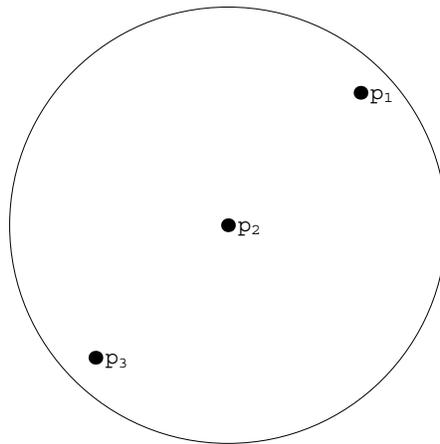


Figura 1: *Las personas en P_1 y P_3 se encuentran cerca de la frontera, mientras que la persona en P_2 se encuentra alejada de la misma.*

Durante los años de 1910 a 1915 Lord Rayleigh en una serie de artículos, [15] y [16], explicó cuantitativamente¹ el fenómeno acústico de la galería de los susurros a través de las funciones de Bessel de orden grande y su forma asintótica. Las observaciones de Lord Rayleigh concluyeron que éste fenómeno es independiente de la forma del techo del domo y sólo depende de la sección transversal de este, es decir, el mismo fenómeno ocurre en un cuarto de forma cilíndrica que en uno de forma semiesférica.

¹Una versión cualitativa anterior a los artículos citado aparece en [17].

El fenómeno de galería de susurros en el caso de la catedral de San Pablo se reduce a la solución de la ecuación de onda en un dominio circular con condiciones de frontera adecuadas y con la condición de que la longitud de onda del sonido sea mucho menor que las dimensiones típicas del dominio. Es decir, estamos ante un problema de valores iniciales y condiciones de frontera en el límite de onda corta (o frecuencia alta). El método de separación de variables aplicado a la ecuación de onda en un dominio circular nos lleva a considerar las funciones de Bessel de orden grande en el límite $m \approx ka$, donde m es el orden de la función de Bessel, k es el número de onda y a el radio del dominio circular. El comportamiento de las funciones de Bessel de orden grande explica en forma muy sencilla el fenómeno en cuestión ya que al ser exponencialmente pequeñas entre cero y un límite determinado, menor que el radio del dominio, y el tener oscilaciones densas a partir de este límite explica por qué es posible la audición cerca de la frontera y no lejos de ella.

La pregunta que surge inmediatamente es si este fenómeno sólo se da en un dominio circular o también se presenta en algún otro dominio convexo. La respuesta en general no se conoce. El fenómeno se ha estudiado en dominios de forma particular. En el presente trabajo tomamos como ejemplo una elipse aunque los métodos que usamos se pueden usar en dominios más generales. Este es el tema central de esta tesis: analizar el comportamiento de las funciones propias para el problema de valores propios asociado con la ecuación de onda en un dominio elíptico a través de la asintótica de onda corta, sin la suposición adicional de que ésta sea separable en algún sistema de coordenadas. El por qué la separación de variables no es viable en el caso del dominio elíptico se explica a continuación.

A diferencia del caso circular donde la forma asintótica para las funciones de Bessel de orden grande tiene una expresión sencilla en términos de funciones trigonométricas en el caso elíptico no existe tal expresión, a pesar de que la ecuación de onda es separable en coordenadas elípticas. La complejidad surge del hecho de que la separación de variables nos lleva a considerar la ecuación de Mathieu la cual, a diferencia de la ecuación de Bessel cuyos coeficientes son funciones racionales y ha sido ampliamente estudiada, la ecuación de Mathieu tiene coeficientes periódicos. Es por esto que buscar una expresión asintótica para las soluciones de la ecuación de Mathieu se vuelve muy complicado y el método de fase estacionaria, utilizado para las funciones de Bessel, no puede ser aplicado. Una forma de rodear el problema es considerar la solución de la ecuación de onda reducida o ecuación de Helmholtz a través del método de la óptica geométrica, es decir, considerar soluciones de la ecuación de Helmholtz en la aproximación de onda corta. Dicha aproximación puede ser utilizada independientemente de que el método de separación de variables sea aplicable o no. Es justo la aproximación de onda corta la que nos proveerá de una expresión asintótica para los valores propios de la ecuación de Mathieu.

Consideremos un problema que a primera vista parece muy diferente del anterior, la teoría cuántica de Bohr-Sommerfeld. Esta teoría describe el movimiento de un sistema mediante la mecánica clásica pero con ciertas constantes de movimiento restringidas a ser múltiplos enteros de alguna cantidad. Estas restricciones eran llamadas condiciones de cuantización y los números enteros números cuánticos. En muchos casos para mejorar las coincidencias

entre las condiciones de cuantización y las observaciones experimentales se utilizaban números semienteros adicionados a los números cuánticos. Sin embargo no existía un principio teórico que dictara cuándo un número entero, uno semientero o algún otro número (generalmente $\frac{1}{4}$) debería ser usado para hacer coincidir las reglas de cuantización con el experimento. En este sentido las reglas de cuantización de mayor impacto fueron las dadas por Sommerfeld en 1916, las cuales fueron una generalización de las dadas por Bohr en 1913.

Las condiciones de Sommerfeld exigían que para todo estado estacionario de un sistema con un número finito f de grados de libertad, en el que cada momento canónico p_i fuera función periódica sólo de la respectiva coordenada canónica q_i , se había de verificar

$$\oint p_i dq_i = n_i h, \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (1)$$

donde n_i es un número entero no negativo y la integración se extiende a lo largo de un período de q_i .

Históricamente el problema de decidir entre números enteros, semienteros, etc., fue superado por la invención de la mecánica cuántica, la cual reemplazó a la teoría de Bohr-Sommerfeld. Sin embargo la búsqueda de un procedimiento para elegir entre dos tipos de números cuánticos es de vital importancia al buscar soluciones aproximadas a problemas cuánticos en el límite semiclásico, es decir, en el límite en el que la constante de Planck tiende a cero. Este problema fue abordado en el caso no separable por J.B. Keller en 1958, [8], dando como resultado lo que hoy se conoce como “condiciones de cuantización de Bohr-Sommerfeld corregidas para sistemas no separables” o “condiciones de cuantización de Einstein-Brillouin-Keller (EBK)”. Keller a diferencia de sus predecesores prescindió, entre otras cosas, de la suposición de que la ecuación podría ser separada en algún sistema de coordenadas y usó el hecho de que se trataba de un problema donde la longitud de onda era mucho menor que las dimensiones típicas del problema. Observó que cuantizando simultáneamente la amplitud y la fase las reglas de cuantización están dadas por la topología del espacio fase. Es esta aproximación la que da las condiciones de cuantización correctas en el límite semiclásico sin la suposición de que la ecuación de Schrödinger sea separable.

Ambos problemas, el fenómeno de la galería de los susurros y el de las condiciones de cuantización semiclásicas, se resumen en encontrar una solución aproximada de una ecuación diferencial parcial en el límite de onda corta. A dicha solución se le pedirá que sea una función univaluada. Es esta condición de univalencia la que proveerá, ya sea, las condiciones de cuantización en el caso de un problema cuántico o los modos de vibración en el caso de la galería de los susurros. Es decir, en ambos casos, buscamos analizar el comportamiento asintótico de las funciones propias en el límite de onda corta.

Capítulo 1

El fenómeno de la galería de los susurros

El presente capítulo tiene por finalidad describir la parte central del problema que nos interesa: el comportamiento de las funciones propias que describen el fenómeno de la galería de los susurros y el límite semiclásico. En la primera sección discutiremos el fenómeno de la galería de los susurros y deduciremos la ecuación de onda. Se resolverá dicha ecuación a través del método de separación de variables en los casos de un dominio circular y uno elíptico. Para el dominio circular se obtendrán las expresiones asintóticas de las funciones propias que explican el fenómeno, mientras que para el dominio elíptico se verá que las técnicas utilizadas para el caso circular no pueden ser aplicadas. En la segunda sección trataremos con el límite semiclásico de la mecánica cuántica y las condiciones de cuantización de Bohr-Sommerfeld y cómo este límite se relaciona con el fenómeno de la galería de los susurros a través de la aproximación de onda carta.

1.1. La ecuación de onda

Procederemos ahora a dar una explicación cuantitativa del fenómeno de la galería de los susurros a través de la solución de la ecuación de onda. Para esto primero deduciremos la ecuación de onda acústica para un medio homogéneo e isotrópico.

La propagación de ondas sonoras en cualquier gas es el resultado de la acción combinada de esencialmente tres factores:

- (1) El gas se mueve en escalas pequeñas que hacen variar la densidad.
- (2) La variación de la densidad provoca variaciones de la presión.
- (3) Las variaciones de la presión generan movimientos en el gas y volvemos al punto uno.

Empecemos con el punto tres relacionando la variación de la densidad provocada por las variaciones de la presión. Si ρ denota la densidad y \mathbf{v} la velocidad del fluido, ambas son

funciones de la posición y el tiempo, entonces el momento para el fluido es $\rho \mathbf{v}$. Despreciando las fuerzas externas y los términos de orden mayor a uno, de la conservación del momento obtenemos

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p,$$

donde p es la presión del gas. Esta ecuación nos dice que el gas tiende a acelerarse debido a los gradientes de presión. Si suponemos que las variaciones de la densidad y la presión son pequeñas, entonces podemos escribir $\rho = \rho_0 + \rho'$ con $\rho_0 \gg \rho'$. Omitiendo la prima en ρ' la conservación del momento, a primer orden, toma la forma

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (1.1)$$

Ahora para relacionar las variaciones en la presión provocadas por la variación de la densidad suponemos que el proceso de expansión y compresión que la onda hace sobre el gas es efectuado en forma adiabática, así la presión es función sólo de la densidad. Es decir

$$p = p(\rho). \quad (1.2)$$

Por último de la conservación de la masa en un pequeño elemento de volumen tenemos que la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

ha de satisfacerse. Nuevamente, en el caso de pequeñas variaciones de la densidad la ecuación anterior a primer orden toma la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.3)$$

Usando (1.2) podemos escribir ∇p como

$$\nabla p = c^2 \nabla \rho, \quad (1.4)$$

donde $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$ es la velocidad de propagación de la onda. Sustituyendo (1.4) en (1.1) obtenemos

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c^2 \nabla \rho = 0. \quad (1.5)$$

La ecuación anterior puede ser escrita en la forma

$$\nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c^2 \nabla \rho \right) = \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) + c^2 \nabla^2 \rho = 0. \quad (1.6)$$

Tomando la derivada parcial de (1.3) respecto a t y extrayendo de ésta $\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ para sustituirla en (1.6) obtenemos

$$\frac{\partial^2 \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \rho(\mathbf{x}, t). \quad (1.7)$$

La misma ecuación es válida para p , esto debido a que ∇p , y por tanto $\nabla^2 p$ y $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ son iguales a las correspondientes expresiones en ρ si esta última cantidad es multiplicada por c^2 (ver 1.4). Así

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p(\mathbf{x}, t). \quad (1.8)$$

La ecuación (1.8) es la ecuación diferencial parcial, la cual es válida independientemente del número de variables espaciales, que modela la propagación de ondas en un gas en la aproximación de pequeños desplazamientos. Observamos de ella que involucra segundas derivadas en el tiempo por lo que para integrarla deberán darse dos condiciones iniciales. Además deberán ser especificadas las condiciones de frontera adecuadas a fin de tener un problema bien planteado. También observamos que c tiene dimensiones de velocidad y corresponde a la velocidad de propagación de las ondas.

Resumiendo, nuestro problema a resolver en dos dimensiones espaciales es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación de onda en algún dominio } D: \quad & \nabla^2 p(x, y, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial t^2}, \\ \text{Posición inicial:} \quad & p(x, y, 0) = f(x, y), \quad (1.9) \\ \text{Velocidad inicial:} \quad & \left. \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y), \end{aligned}$$

y condiciones de frontera adecuadas. En nuestro caso consideraremos sólo dos tipos de condiciones de frontera: las tipo Dirichlet

$$\rho(x, y, t) = 0 \quad \text{con } (x, y) \in \partial D, \quad (1.10)$$

que serían aplicables para la ecuación de onda para la densidad ya que la densidad en la frontera está fija, y las tipo Neumann

$$\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{con } (x, y) \in \partial D, \quad (1.11)$$

donde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ denota la derivada normal y ∂D la frontera del dominio D . Esta condición de frontera es la apropiada para la ecuación de onda para la presión ya que ésta se encuentra libre en la frontera.

Cabe mencionar que la ecuación de onda (1.9) no sólo modela la propagación del sonido en un medio compresible, sino que aparece también en el contexto del electromagnetismo (propagación de ondas electromagnéticas), elasticidad (membrana vibrante), etc.

Es necesario decir que en este trabajo no estamos interesados en resolver el problema de valores iniciales relacionado con (1.9), sino en las funciones propias que se originan de (1.9) y modelan adecuadamente el fenómeno de la galería de los susurros.

Volviendo al problema de la galería de los susurros, cuando una persona habla cerca de la pared se produce un forzamiento en la ecuación (1.9), si esto pasa habrá una tendencia a que se produzcan ondas de la misma frecuencia que el forzamiento. Recordando que hemos supuesto que la galería es muy grande en comparación con la longitud de onda del sonido esperamos que el efecto del forzamiento sea producir oscilaciones muy densas en la dirección angular, así las ondas de presión producidas se compondrán de una superposición de términos cuya longitud de onda, λ , sea corta, o lo que es lo mismo, que la frecuencia sea alta. Estas condiciones corresponden a la aproximación de onda corta, la cual será detallada en la sección 2.2.

1.2. La ecuación de onda reducida

En vista de que en la ecuación (1.9) sólo aparecen segundas derivadas en t entonces podemos suponer que la dependencia temporal será armónica, es decir, podemos proponer una solución a (1.9) de la forma

$$z(x, y, t) = e^{\pm i\omega t} u(x, y), \quad (1.12)$$

con lo que la ecuación (1.9) se reduce a

$$\nabla^2 u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (1.13)$$

donde $k = \frac{\omega}{v}$ es el número de onda. La ecuación (1.13) es comúnmente llamada ecuación de Helmholtz o ecuación de onda reducida. Así la propagación de ondas, en este caso, se reduce a encontrar soluciones del problema de valores propios relacionado con la ecuación (1.13) y condiciones de frontera del tipo (1.10) o (1.11). Por problema de valores propios entendemos el buscar funciones $u(x, t)$ distintas de cero que satisfacen (1.13) con las correspondientes condiciones de frontera. Adicionalmente pediremos a estas soluciones que modelen correctamente el fenómeno de la galería de los susurros. A las funciones $u(x, t)$ que satisfacen las condiciones antes descritas se les suele denominar funciones propias de galería de susurros. Este tipo de funciones propias es el tema central de este trabajo.

La ecuación (1.13) involucra el parámetro k , el número de onda, el cual se define como $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, por lo que en la aproximación de onda corta estamos interesados en encontrar soluciones de (1.13) en el límite en que k es muy grande. Buscar estas soluciones es referido en la literatura como solución asintótica. En particular consideraremos el método de rayos o mecánica semiclásica para hallar una solución asintótica de la ecuación de Helmholtz. El método de rayos es una de las formas de generalizar el método WKB de las ecuaciones diferenciales ordinarias a ecuaciones diferenciales parciales.

La complejidad de resolver (1.13) con las condiciones de frontera (1.10) o (1.11) está totalmente ligada con la geometría del dominio D , siendo el caso más sencillo de resolver el de un dominio circular; este caso está totalmente resuelto incluso en algunos libros de texto, sin embargo trataremos este problema en el Capítulo 3 a fin de motivar la solución del problema para dominios un tanto más complejos, en particular consideraremos el caso de un dominio elíptico.

1.3. La ecuación de onda reducida en un dominio circular. Separación de variables

Procederemos ahora a aplicar el método de separación de variables a la ecuación de onda reducida (1.13) en un dominio circular de radio a con condiciones de frontera (1.10) o (1.11). Para esto recordamos que el Laplaciano ∇^2 en coordenadas polares (r, θ) está dado por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (1.14)$$

Así al proponer una solución de la forma $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ a la ecuación (1.13) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\Theta''(\theta) + \nu\Theta(\theta) = 0, \quad (1.15)$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (k^2 r^2 - \nu) R = 0, \quad (1.16)$$

donde ν es la constante de separación y las primas indican derivadas totales respecto al argumento. La ecuación (1.16) es la ecuación diferencial de Bessel de orden ν .

A fin de tener soluciones físicamente aceptables la función $\Theta(\theta)$, solución de la ecuación (1.15), deberá ser 2π -periódica. Esto impone que la constante de separación sea $\nu = m^2$, con m un entero no negativo. Por tanto la solución de la ecuación (1.15) está dada por

$$\Theta_m(\theta) = A \cos(m\theta) + B \sin(m\theta), \quad (1.17)$$

con A y B constantes.

Con esta elección de ν la ecuación diferencial de Bessel ahora es de orden m , un entero. Las soluciones de la ecuación de Bessel de orden entero están dadas por $J_m(kr)$ y $Y_m(kr)$, las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente. Entonces la solución de (1.16) está dada por

$$R_m(r) = C J_m(kr) + D Y_m(kr). \quad (1.18)$$

Ya que tenemos las soluciones de la ecuación (1.16) queda por imponer las condiciones de frontera, una de las cuales será tener soluciones regulares en el interior del círculo. En vista de que las funciones $Y_m(kr)$ son singulares en $r = 0$ el coeficiente D en (1.18) debe ser idénticamente nulo y así la parte radial consistirá sólo de funciones de Bessel de primera

especie. En lo sucesivo nos referiremos a las funciones de Bessel de primera especie sólo como funciones de Bessel.

Las condiciones de frontera (1.10) o (1.11) se traducen, al separar variables, en imponer $R_m(a) = 0$ o $R'_m(a) = 0$. De esto obtenemos

$$J_m(ka) = 0 \quad \text{o} \quad J'_m(ka) = 0. \quad (1.19)$$

Esta última ecuación determina el valor propio k en términos de los ceros de la función de Bessel de orden m o de los ceros de la derivada de la función de Bessel. Sabemos, en ambos casos, que los ceros de estas funciones son un conjunto infinito numerable los cuales denotaremos por β_{mn} como el n -ésimo cero de la función de orden m . Con esto el valor propio k queda determinado por

$$k_{mn} = \frac{\beta_{mn}}{a} \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (1.20)$$

Observamos que para cada m y n fijos existirá un término de la forma

$$[A_{mn} \cos(m\theta) + B_{mn} \sin(m\theta)] J_m(k_{mn}r), \quad (1.21)$$

que es solución de la ecuación (1.13) con condiciones de frontera (1.10) o (1.11). A cada uno de estos términos se les llama solución fundamental.

Para continuar nuestro análisis del fenómeno de la galería de los susurros basta analizar una de las soluciones fundamentales, es más basta considerar sólo la parte radial de una de estas soluciones fundamentales. Esto se debe a que la parte angular es sólo un factor senoidal cuya amplitud estará dada por la parte radial. Es decir, debemos analizar el comportamiento de las funciones de Bessel en el límite de onda corta, $m \gg 1$ y $ka \gg 1$. La condición $m \gg 1$ nos lleva a considerar sólo funciones de Bessel de orden grande, las cuales son exponencialmente pequeñas para $0 < r < \frac{am}{\beta_{mn}}$ y oscilatorias para $\frac{am}{\beta_{mn}} < r < a$. Este comportamiento de las funciones de Bessel de orden grande será deducido explícitamente en la siguiente sección. A partir de este comportamiento de las funciones de Bessel se explica cuantitativamente el fenómeno de la galería de los susurros. Expliquemos en más detalle este aspecto. Para un rayo $\theta = \text{constante}$ y un tiempo fijo, el perfil de la onda a partir del centro ($r = 0$) de la galería se verá como en la Figura 1.1, salvo un factor constante. Cuando el tiempo transcurre lo único que ocurre es que el perfil sube y baja debido al factor senoidal en el tiempo. Observamos que el factor radial (la amplitud) $J_m(k_{mn}r)$ es muy pequeño al principio y después oscila densamente. Debido a que nuestros oídos perciben el promedio temporal de la presión y no la presión instantánea entonces en los lugares donde $J_m(k_{mn}r)$ sea grande la audición será buena y viceversa. Esto explica por qué se escucha bien cerca de la frontera y mal lejos de ella.

1.3.1. Galería de susurros en el círculo usando funciones de Bessel

Analizaremos ahora el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel de orden grande ($m \gg 1$) a través del método de fase estacionaria y descenso rápido (ver por ejemplo [21]).

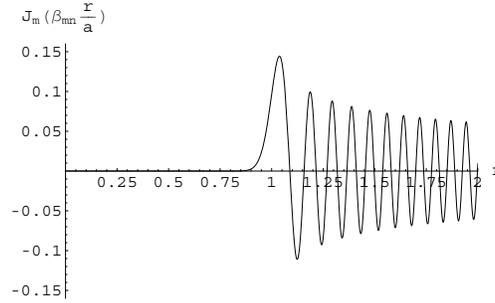


Figura 1.1: Comportamiento típico de una función de Bessel de orden grande, $m \gg 1$, y $k_{mn} \gg \frac{1}{a}$.

Esta sección se encuentra basada en [7].

Una primera estimación del comportamiento de las funciones de Bessel se obtiene al poner la ecuación de Bessel en la forma normal de Liouville, esto haciendo $f(r) = \sqrt{r}R(r)$

$$f'' + \left(k^2 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right) f = 0. \quad (1.22)$$

Si en la ecuación anterior tomamos el límite $k^2 \gg \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2}$ o lo que es lo mismo $\frac{\sqrt{m^2 - \frac{1}{4}}}{r} \ll r$ la ecuación tiene la forma aproximada $f'' + k^2 f \approx 0$, por lo que la solución de (1.22) en este caso límite tiene la forma

$$f(r) \approx A \cos kr + B \sin kr \quad \Rightarrow \quad R(r) \approx A \frac{\cos kr}{\sqrt{r}} + B \frac{\sin kr}{\sqrt{r}},$$

es decir la solución es oscilatoria. Por otro lado si consideramos el límite opuesto $k^2 \ll \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2}$ o $\frac{\sqrt{m^2 - \frac{1}{4}}}{r} \gg r$, la ecuación (1.22) es aproximada por $f'' - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} f = 0$ y las soluciones, al proponer una solución del tipo r^m , están dadas por

$$f(r) \approx Ar^{\frac{1}{2}+m} + Br^{\frac{1}{2}-m} \quad \Rightarrow \quad R(r) \approx Ar^m + Br^{-m},$$

en vista de que requerimos soluciones regulares en $r = 0$ el coeficiente de r^{-m} deberá ser cero, por lo que $f(r) \approx Ar^m$.

Esta primera vista a las soluciones aproximadas de la ecuación de Bessel exhiben ya el comportamiento que explica el fenómeno de la galería de los susurros, esto es, son “pequeñas” en la región en que $k^2 \ll \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2}$ dado que $m \gg 1$ y oscilatorias en $k^2 \gg \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2}$, y debido a que $m \gg 1$ las oscilaciones son densas. Sin embargo esta aproximación aún es muy burda por lo que será necesario refinarla, esto viene a continuación.

A fin de poder refinar el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel $J_{mn}(k_{mn}r)$ consideremos la siguiente representación integral de dichas funciones, reemplazando k_{mn} por k ,

$$J_m(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\phi(\theta)} d\theta, \quad (1.23)$$

con $\phi(\theta) = \eta \sin \theta - \theta$ y $\eta = \frac{kr}{m}$. La función $\phi(\theta)$ es comúnmente llamada fase. De la anterior representación de las funciones de Bessel observamos que como m y k son grandes el integrando tiene oscilaciones muy densas haciendo que el valor de la integral decrezca, sin embargo en la vecindad de los puntos críticos de $\phi(\theta)$ el integrando deja de oscilar haciendo que la integral crezca. Con base en esto la mayor contribución a la integral vendrá de la vecindad de los puntos críticos de $\phi(\theta)$, por lo que tomando en cuenta sólo estas contribuciones podemos evaluar aproximadamente la integral.

A esta forma de evaluar aproximadamente integrales se le conoce como método de fase estacionaria y a los puntos críticos de $\phi(\theta)$ como puntos de fase estacionaria.

Los puntos de fase estacionaria están dados por

$$\cos \theta = \frac{1}{\eta}. \quad (1.24)$$

Las soluciones de la ecuación anterior dependen del valor η , hay dos soluciones reales en el intervalo $[0, 2\pi]$ si $\eta > 1$, una solución real si $\eta = 1$ y dos soluciones complejas si $\eta < 1$.

Analicemos primero el caso $\eta > 1$. Denotando por θ_1 y θ_2 las soluciones de (1.24) la fase puede ser desarrollada en serie de Taylor alrededor de los puntos θ_i , $i = 1, 2$, es decir,

$$\phi(\theta) \approx \eta \sin \theta_i - \theta_i - \frac{1}{2} \eta \sin \theta_i (\theta - \theta_i)^2. \quad (1.25)$$

Cuando usamos (1.25) en (1.23) la integral puede ser separada en dos integrales cada una tomando en cuenta sólo la contribución de un punto de fase estacionaria, adicionalmente el intervalo de integración en cada una de estas integrales puede ser extendido de $(0, 2\pi)$ a $(-\infty, \infty)$, esto debido a que la contribución de los puntos lejanos a los de fase estacionaria contribuyen poco a la integral. Con esto, observando que $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, obtenemos

$$\begin{aligned} J_m(kr) &\approx \frac{1}{2\pi} e^{im\phi(\theta_1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{m\eta}{2} \sin \theta_1 (\theta - \theta_1)^2} d\theta + \frac{1}{2\pi} e^{im\phi(\theta_2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{m\eta}{2} \sin \theta_2 (\theta - \theta_2)^2} d\theta \\ &\approx \frac{1}{2\pi} e^{im\phi(\theta_1)} \sqrt{\frac{\pi}{i\frac{m\eta}{2} \sin \theta_1}} + \frac{1}{2\pi} e^{im\phi(2\pi - \theta_1)} \sqrt{\frac{\pi}{i\frac{m\eta}{2} \sin(2\pi - \theta_1)}} \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{m\eta \sin \theta_1}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{i}} e^{im\phi(\theta_1)} + \sqrt{\frac{-1}{i}} e^{im[-\phi(\theta_1) - 2\pi]} \right\} \\ &\approx \sqrt{\frac{2}{m\pi\eta \sin \theta_1}} \left\{ \frac{e^{i[m\phi(\theta_1) - \frac{\pi}{4}]} + e^{-i[m\phi(\theta_1) - \frac{\pi}{4}]} }{2} \right\}. \end{aligned}$$

Así la forma asintótica de las funciones de Bessel para $m \gg 1$ y $r > \frac{am}{\beta_{mn}}$ es, usando la definición de $\eta = \frac{kr}{m}$,

$$J_m(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr \sin \theta_1}} \cos\left(kr \sin \theta_1 - m\theta_1 - \frac{\pi}{4}\right). \quad (1.26)$$

Antes de proseguir analicemos qué significa la condición de $\eta > 1$ en el contexto de la galería de los susurros. Usando la notación introducida en (1.20) vemos que

$$\eta = \frac{am}{\beta_{mn}},$$

de lo cual se sigue

$$r > \frac{am}{\beta_{mn}}. \quad (1.27)$$

Con esto observamos que las funciones de Bessel tendrán oscilaciones densas, dado que m y k son grandes en (1.26), para r 's que satisfagan la desigualdad (1.27). Una primera parte del fenómeno de la galería de los susurros queda explicada por este comportamiento, la parte del por qué podemos escuchar en una región. Para determinar con mayor precisión la frontera entre el comportamiento oscilatorio y “pequeño” de las funciones de Bessel es necesario seguir con el análisis de los casos $\eta < 1$ y $\eta = 1$. Podemos ya intuir que esta frontera estará dada por $\eta = 1$.

Consideremos ahora el caso $\eta < 1$ con la restricción adicional de que η sea sólo ligeramente menor que uno, esto es, $\eta = 1 - \epsilon$ con $0 < \epsilon \ll 1$. Los puntos críticos de la fase, determinados de (1.24), serán complejos y por tanto el método de fase estacionaria deberá ser reemplazado por el descenso rápido y los puntos críticos serán ahora puntos silla.

En este caso utilizaremos la siguiente representación de las funciones de Bessel

$$J_m(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im(\theta - \eta \sin \theta)} d\theta, \quad (1.28)$$

que difiere de (1.23) en el intervalo de integración y en el signo de la fase, pero con los mismo puntos críticos dados por (1.24).

Antes de continuar describiremos brevemente el método de descenso rápido. En vista de que la fase ahora es compleja entonces el integrando estará compuesto de una parte que oscila densamente (la parte imaginaria) y otra que varía exponencialmente (la parte real). Entonces para construir una expresión asintótica de las funciones de Bessel debemos tomar en cuenta sólo la mayor contribución de la parte real sujeta a que ésta decaiga suficientemente rápido y la parte imaginaria sea constante. Esto se logrará convirtiendo la integral en (1.28) en una integral de contorno en el plano complejo. Sobre dicho contorno se deberá satisfacer, en al menos una parte de él, que la parte real decaiga lo más rápido posible, la parte imaginaria sea constante y el contorno pase por los puntos silla. Esto será posible debido a las propiedades de los puntos silla.

Ahora para hallar las raíces de (1.24) escribimos las posibles soluciones de la ecuación como $\theta_0 = x_0 + iy_0$, de lo cual se sigue que

$$x_0 = 0 \quad y \quad \cosh y_0 = \frac{1}{\eta}. \quad (1.29)$$

Como η es sólo ligeramente menor que uno entonces $y_0 \approx 0$, con lo que podemos desarrollar $\cosh y_0$ es serie de Taylor alrededor de 0 a segundo orden y de ahí despejar y_0 . Esto es,

$$y_0 = \pm \sqrt{\frac{2(1-\eta)}{\eta}} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \pm i \sqrt{\frac{2(1-\eta)}{\eta}}. \quad (1.30)$$

Ahora debemos elegir un contorno de integración que satisfaga las restricciones antes mencionadas. Para esto descomponemos $-im\phi(\theta)$ en parte real e imaginaria y las aproximamos por su serie de Taylor a segundo orden, recordando que $\theta = x + iy$ obtenemos

$$-im\phi(\theta) \approx my \left[-(1-\eta) + (y^2 - 3x^2) \frac{\eta}{6} \right] + imx \left[1 - \eta + (x^2 - 3y^2) \frac{x\eta}{6} \right]. \quad (1.31)$$

Al sustituir los puntos silla (1.30) vemos que la parte imaginaria es cero, por lo que el contorno ha de satisfacer que la parte imaginaria de (1.31) sea nula, esto es

$$\Im \{-im\phi(\theta)\} \approx xm \left[1 - \eta + (x^2 - 3y^2) \frac{x\eta}{6} \right] = 0.$$

De la ecuación anterior surgen dos opciones:

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{2(1-\eta)}{\eta}} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{3} + y_0^2},$$

donde el signo corresponderá a la elección de un punto silla. Por tanto tenemos que escoger entre dos puntos silla y dos caminos por cada punto:

$$\begin{cases} \text{Punto silla: } \theta_0 = i \sqrt{\frac{2(1-\eta)}{\eta}}, \\ \text{Trayectoria: } y = 0 \quad \text{ó} \quad y = \sqrt{\frac{x^2}{3} + y_0^2}, \\ \text{Punto silla: } \theta_0 = -i \sqrt{\frac{2(1-\eta)}{\eta}}, \\ \text{Trayectoria: } y = 0 \quad \text{ó} \quad y = -\sqrt{\frac{x^2}{3} + y_0^2}, \end{cases}$$

Para escoger el punto silla y camino indicado, debemos estudiar el comportamiento de $\Re [im\phi(\theta)]$ en cada una de las distintas posibilidades. Haciendo esto vemos que eligiendo

$$\begin{cases} \text{Punto silla: } \theta_0 = i \sqrt{\frac{2(1-\eta)}{\eta}}, \\ \text{Trayectoria: } y = \sqrt{\frac{x^2}{3} + y_0^2}, \end{cases} \quad (1.32)$$

la parte real de (1.31), aproximada a segundo orden en serie de Taylor, toma la forma

$$\Re\{-im\phi(\theta)\} \approx -m\left(\frac{1-\eta}{6\theta_0} + \frac{5\theta_0\eta}{12}\right)x^2 + m\left(\eta - 1 + \frac{\theta_0^2\eta}{6}\right)\theta_0, \quad (1.33)$$

En la ecuación (1.33) el coeficiente de x^2 es negativo, por tanto $\Re\{e^{-im\phi(\theta)}\}$ decae lo más rápido posible. Así (1.32) es el punto silla deseado y su trayectoria de máximo descenso correspondiente. Es fácil ver que cualquier otra elección de punto silla y trayectoria no satisface las condiciones deseadas.

Para obtener finalmente la aproximación deseada convertimos la integral en (1.28) en una integral de contorno en el plano complejo a través de una trayectoria cerrada, C , formada por el intervalo $[-\pi, \pi]$ sobre la recta real, una parte de la trayectoria de máximo descenso y dos líneas verticales uniendo las curvas anteriores (ver Figura 1.2).

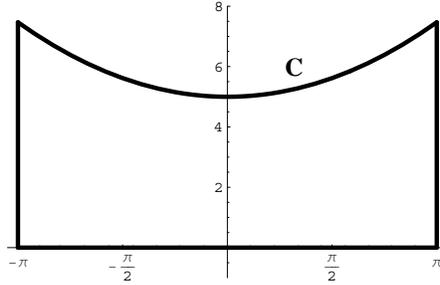


Figura 1.2: Contorno C de integración.

En vista de la analiticidad del integrando sobre y en el interior de C el valor de esta integral será cero. Es fácil ver que las integrales sobre los elementos verticales de C se anulan mutuamente, por lo que (1.28) puede ser aproximada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im(\theta - \eta \operatorname{sen} \theta)} d\theta &\approx \int_{-\epsilon + i\theta_0}^{\epsilon + i\theta_0} e^{-im[\phi(\theta_0) + \phi''(\theta_0)(\theta + \theta_0)^2]} d\theta \\ &\approx e^{-im\phi(\theta_0)} \int_{-\epsilon + i\theta_0}^{\epsilon + i\theta_0} e^{-im[\phi''(\theta_0)(\theta + \theta_0)^2]} d\theta \\ &\approx e^{-m(y_0 - \eta \operatorname{senh} y_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\eta}{2} \operatorname{senh} y_0 x^2} dx. \end{aligned}$$

Efectuando la última integral en la expresión anterior obtenemos que las funciones de Bessel pueden ser aproximadas por

$$J_m(kr) \approx \frac{e^{kr \operatorname{senh} y_0 - my_0}}{\sqrt{2\pi kr \operatorname{senh} y_0}}. \quad (1.34)$$

De la anterior expresión observamos que las funciones de Bessel son exponencialmente pequeñas en la región donde se satisface que η es ligeramente menor que 1, esto debido a que $m \gg 1$. Este comportamiento explica el por qué no es posible escuchar lejos de la frontera de la galería. Así mismo observamos que la restricción de que η sea ligeramente menor que 1 nos lleva a considerar sólo el caso en $m \approx kr$, es decir, para que se dé el fenómeno de galería de susurros se ha de cumplir que $m \gg 1$ y $m \approx kr$.

Así, el comportamiento oscilatorio y exponencialmente pequeño queda delimitado por el caso $\eta = 1$, es decir, las funciones de Bessel son exponencialmente pequeñas en la región $0 \leq r < \frac{am}{\beta_{mn}}$ y oscilatorio en $\frac{am}{\beta_{mn}} < r \leq a$. Es justo este tipo de comportamiento el tema central de esta tesis, buscar una expresión asintótica para los valores propios de la ecuación de onda reducida para un dominio elíptico en el límite $m \gg 1$ y $k \gg 1$ de tal forma que se satisfaga $m \approx kr$.

1.4. La ecuación de onda reducida en un dominio elíptico. Separación de variables

Consideremos ahora aplicar el método de separación de variables a la ecuación (1.13) y condiciones de frontera (1.10) o (1.11) en el interior de un dominio acotado por una elipse con focos sobre el eje x en $x = \pm \frac{c}{2}$. Para esto cabe recordar que la relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas elípticas (μ, θ) está dada por

$$x = \frac{c}{2} \cosh \mu \cos \theta, \quad y = \frac{c}{2} \sinh \mu \sin \theta, \quad \mu \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (1.35)$$

con lo cual vemos que las curvas $\mu = \text{constante}$ y $\theta = \text{constante}$ son elipses e hipérbolas cofocales, respectivamente (ver Figura 1.3). En este sistema de coordenadas la elipse frontera será representada por $\mu = R_0$.

Observamos que la familia de elipses está caracterizada por los siguientes parámetros

$$\varepsilon = \frac{1}{\cosh \mu}, \quad a = \frac{c}{2} \cosh \mu, \quad b = \frac{c}{2} \sinh \mu, \quad (1.36)$$

donde ε , a y b denotan la excentricidad, semieje menor y semieje mayor de la elipse, respectivamente.

El laplaciano en estas coordenadas está dado por

$$\nabla^2 = \frac{8}{c^2 (\cosh 2\mu + \cos 2\theta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right). \quad (1.37)$$

Entonces proponiendo una solución de la forma $u(\mu, \theta) = f(\mu)g(\theta)$ y usando (1.37) en (1.13) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$g''(\theta) + (a + 2q \cos 2\theta) g(\theta) = 0, \quad (1.38)$$

$$f''(\mu) - (a - 2q \cosh 2\mu) f(\mu) = 0, \quad (1.39)$$

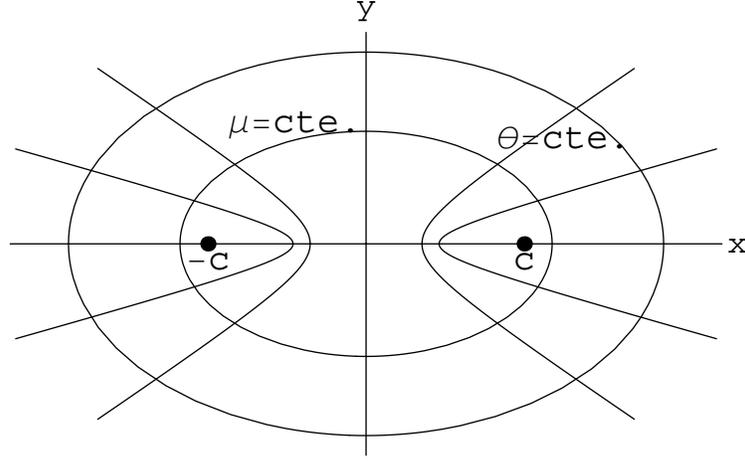


Figura 1.3: *Coordenadas elípticas. Las curvas $\mu = cte.$ representan elipses cofocales y la curvas $\theta = cte.$ hipérbolas cofocales.*

donde a es la constante de separación y $q = \frac{k^2 c^2}{16}$. La ecuación (1.38) es conocida como la ecuación de Mathieu y (1.39) como la ecuación modificada de Mathieu, la cual se puede obtener de (1.38) haciendo la sustitución formal $\theta = i\mu$.

Al igual que en el caso circular debemos imponer que la solución de la ecuación en θ (1.38) sea periódica. De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes periódicos sabemos que las soluciones de (1.38) serán periódicas sólo para determinados valores característicos de a , ver por ejemplo [20]. Estos valores característicos forman un conjunto infinito numerable, los que denotaremos por $a_m, m = 1, 2, \dots$ ordenados en forma ascendente.

Antes de proseguir consideremos la transición del problema en la elipse al problema en el círculo. El caso circular corresponde a una elipse de excentricidad cero, de (1.36) vemos que esto corresponde a tomar el límite $\mu \rightarrow \infty$ con lo que $\varepsilon \rightarrow 0, b \rightarrow a, c \rightarrow 0$ y $q \rightarrow 0$. Usando estos hechos podemos simplificar las ecuaciones (1.38) y (1.39). Empezamos por la más fácil, (1.38). Si en esta ecuación hacemos $q = 0$ recuperamos (1.15) con a reemplazada por ν , por lo que en este límite $a_m \rightarrow m^2$ con $m = 0, 1, 2, \dots$.

Ahora tomemos el límite $\mu \rightarrow \infty$ en la ecuación (1.39). Primero observamos que

$$2q \cosh 2\mu = 2q \left(\frac{e^{2\mu} + e^{-2\mu}}{2} \right) \rightarrow qe^{2\mu},$$

con lo que (1.39), sustituyendo a por m^2 , toma la forma

$$f''(\mu) - (m^2 - qe^{2\mu}) f(\mu) = 0. \tag{1.40}$$

Ahora definimos la coordenada r de las coordenadas polares como $r = \frac{c}{4}e^\mu$ y usando la definición de q y la regla de la cadena en la ecuación anterior obtenemos justo la ecuación de

Bessel (1.16) con ν reemplazada por m^2 . De esto también vemos que a fin de buscar funciones de galería de susurros para el dominio elíptico hemos de considerar la aproximación de onda corta en el caso en que $a_m \gg 1$ y $q \gg 1$ satisfaciendo que $a_m \approx q$, es decir, buscamos una solución asintótica de (1.38) en el límite en que ambos parámetros, a_m y q , son grandes y $a_m \approx q$. Precisando un poco más al respecto, cuando permitimos que el parámetro q en (1.38) varíe, el valor característico para a se verá modificado, entonces si graficamos en un plano (a, q) obtenemos una gráfica como la mostrada en la Figura 1.4 de la cual observamos que cuando $q = 0$ los valores característicos son m^2 , con m un entero no negativo. El caso en que $0 < q \ll 1$ ha sido estudiado por un gran número de personas, incluso en la actualidad aparece ya como un ejemplo en los libros de teoría de perturbaciones, por ejemplo en [11], o con algunos refinamientos en [3]. La contraparte para el caso en que $a \ll 1$ ha sido mucho menos estudiada, ver por ejemplo [6], y hasta donde conocemos el caso que nos interesa $a \gg 1$, $q \gg 1$ y $a \approx q$ no es reportado en la literatura. Este caso será desarrollado en el Capítulo 4.

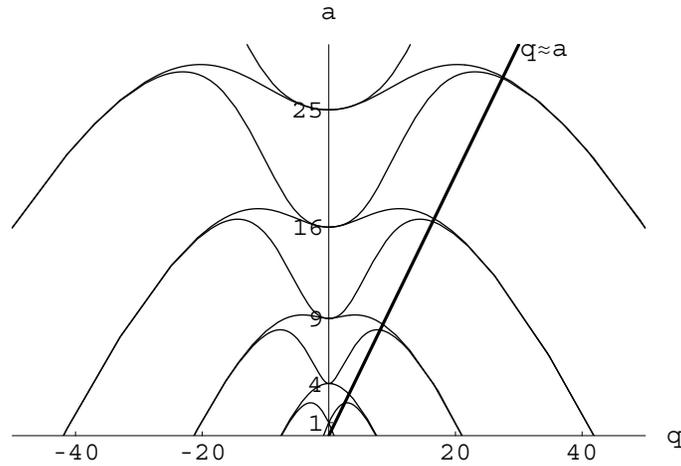


Figura 1.4: Valor característico a como función de q . El comportamiento asintótico de interés en este trabajo es el de q y $a \gg 1$ cuando $q \approx a$.

1.5. El límite semiclásico

El límite semiclásico o mecánica semiclásica son un conjunto de técnicas que usa la mecánica clásica para resolver problemas cuánticos. En ésta se reemplaza la ecuación de Schrödinger, una ecuación diferencial parcial en n variables independientes un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones de Hamilton de la mecánica clásica. La mecánica semiclásica se inició como la “teoría cuántica de Bohr-Sommerfeld”, la cual describe el movimiento de un sistema mediante la mecánica clásica pero con ciertas constantes de movimiento restringidas a ser múltiplos enteros de alguna cantidad. Estas restricciones eran llamadas condiciones de cuantización y los números enteros números cuánticos. En muchos casos para mejorar las

coincidencias entre las condiciones de cuantización y las observaciones experimentales se utilizaban números semienteros adicionados a los números cuánticos. Sin embargo no existía un principio teórico que dictara cuándo un número entero, uno semientero o algún otro (generalmente $\frac{1}{4}$) debería ser usado para hacer coincidir las reglas de cuantización con el experimento. En este sentido las reglas de cuantización de mayor generalidad fueron las dadas por Sommerfeld en 1916, las cuales fueron una generalización de las dadas por Bohr en 1913. En la próxima sección se detallará la mecánica semiclásica de Bohr-Sommerfeld. Dicha sección está basada en [10].

1.5.1. Cuantización de Bohr-Sommerfeld

En la mecánica clásica, el movimiento de una partícula es gobernada por la ecuación de Newton

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -\nabla V[\mathbf{x}(t)], \quad (1.41)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es el vector de posición al tiempo t de una partícula de masa m moviéndose bajo la influencia de una fuerza $-\nabla V(\mathbf{x})$. La función $V(\mathbf{x})$ es la energía potencial de la partícula en el punto \mathbf{x} . Cuando (1.41) es multiplicada por $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ e integrada respecto a t resulta la ecuación de la energía

$$\frac{1}{2}m \left[\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right]^2 + V[\mathbf{x}(t)] = E. \quad (1.42)$$

Aquí E es la energía total de la partícula y $\frac{1}{2}m \left[\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right]^2$ es la energía cinética. La energía E puede tomar cualquier valor mayor o igual que el mínimo valor de $V(\mathbf{x})$.

En el caso de un oscilador armónico “clásico” éste puede tomar cualquier valor de energía E mayor o igual a cero, sin embargo en 1900 Max Planck propuso que para un oscilador armónico que representa el grado de libertad de un campo de radiación la energía de éste sólo puede tomar los valores

$$E_n = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.43)$$

donde $h = 6.54 \times 10^{-27} \text{ erg sec}$ es la hoy llamada constante de Planck y ν es la frecuencia del oscilador. A este oscilador se le suele llamar oscilador cuántico o cuantizado. Haciendo esta suposición Planck dedujo la ley de radiación de cuerpo negro correcta. En 1907 Einstein usó la propuesta de Planck para explicar el comportamiento del calor específico de sólidos a bajas temperaturas, el cual representó como una colección de osciladores armónicos cuantizados.

En 1913 Bohr hizo una suposición similar acerca del átomo de hidrógeno y usó el modelo planetario de Rutherford. En éste, el átomo consiste de un protón con un electrón moviéndose alrededor a él. La energía potencial es la energía electrostática $V(r) = \frac{-e^2}{r}$, donde r es la distancia del protón al electrón, $-e$ es la carga del electrón y $+e$ la carga del protón. Una

solución de (1.41) para el movimiento del electrón es un círculo con el protón en su centro. En coordenadas polares la solución es $r = \text{constante}$ y $\theta = \omega t$, donde la velocidad angular ω es una constante. Sustituyendo $x(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ en (1.41) y (1.42) tenemos

$$mr\omega^2 = \frac{e^2}{r^2}, \quad (1.44)$$

$$E = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - \frac{e^2}{r}, \quad (1.45)$$

la ecuación (1.44) relaciona ω con r y por tanto E puede ser expresado en términos de ω ó r .

Bohr asumió que el momento angular del electrón, $mr^2\omega$, multiplicado por 2π debe ser un múltiplo entero de h :

$$2\pi mr^2\omega = nh, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (1.46)$$

Esta condición, del tipo de (1.43), es la condición de cuantización. De (1.44) y (1.45) se sigue que E sólo puede tomar los valores

$$E = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (1.47)$$

Bohr también asumió que el electrón puede saltar de un estado de energía E_n a uno de menor energía E_m emitiendo un cuanto de luz de frecuencia ν , donde

$$h\nu = E_n - E_m = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m < n. \quad (1.48)$$

Las frecuencias predichas por (1.48) coinciden con las observadas experimentalmente.

El “éxito” de la teoría de Bohr estimuló la búsqueda de condiciones de cuantización aplicables a átomo más complicados y a moléculas. Estos sistemas involucran más de un grado de libertad, por lo que la solución involucra la mecánica clásica (Hamiltoniana) de tales sistemas.

Para un sistema de f grados de libertad empleamos f coordenadas q_i , $i = 1, 2, \dots, f$. Correspondiente a cada q_i hay un momento p_i . La energía total de un sistema, consiste de la energía cinética más la energía potencial, ésta es expresada como una función $H(q, p)$, con $q = (q_1, \dots, q_f)$ y $p = (p_1, \dots, p_f)$. Esta función es llamada el Hamiltoniano del sistema.

En términos de H , las ecuaciones de movimiento de Hamilton son

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, f. \quad (1.49)$$

De (1.49) se sigue que el Hamiltoniano es una constante de movimiento

$$H [q(t), p(t)] = E. \quad (1.50)$$

Un sistema mecánico se dice integrable si hay f nuevas coordenadas θ_i , llamadas variables de ángulo, y f nuevos momentos J_i llamados variables de acción, con las siguientes propiedades:

- (a) $q = q(\theta, J)$ y $p = p(\theta, J)$ son periódicas en θ_i , $i = 1, \dots, f$, con periodo 1.
- (b) $H[q(\theta, J), p(\theta, J)] = \mathcal{H}(J)$.
- (c) Las ecuaciones de Hamilton para θ_i y J_i son

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i}, \quad \frac{dJ_i(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, f. \quad (1.51)$$

De la segunda ecuación (1.51) y (b) se sigue que $\frac{dJ_i}{dt} = 0$, entonces

$$J_i = \text{constante}, \quad i = 1, \dots, f. \quad (1.52)$$

Entonces $\frac{\partial \mathcal{H}(J)}{\partial J_i}$, la cual es una función de J , es constante también. Escribiremos esto como $\omega_i(J) = \frac{\partial \mathcal{H}(J)}{\partial J_i}$. Resolviendo la primera ecuación de (1.51) tenemos

$$\theta_i(t) = \omega_i(J)t + \theta(0), \quad i = 1, \dots, f. \quad (1.53)$$

Con esto las ecuaciones han sido integradas, lo cual explica por qué tales sistemas son llamados integrables.

Usando (1.53) en (a) obtenemos q y p como funciones de t

$$q = q[\omega(J)t + \theta(0), J], \quad p = p[\omega(J)t + \theta(0), J]. \quad (1.54)$$

De (a), q y p son periódicas en cada θ_i con periodo 1, entonces son múltiplemente periódicas o cuasi periódicas en t con frecuencias $\omega_1, \dots, \omega_f$. La trayectoria (1.54) está sobre una superficie f -dimensional $J = \text{constante}$ en el espacio fase de $2f$ dimensiones. En vista de su periodicidad en θ , esta superficie es topológicamente un toro f -dimensional. Entonces todas las trayectorias que inician sobre este toro permanecen en él, este es llamado un toro invariante. El toro correspondiente a todos los posibles valores de J cubren el espacio fase.

Para sistemas integrables, Sommerfeld y Wilson propusieron las condiciones de cuantización

$$J_i = n_i h, \quad i = 1, \dots, f, \quad (1.55)$$

donde n_i son enteros no negativos llamados números cuánticos. Usando estos valores de J_i en el Hamiltoniano $\mathcal{H}(J)$, obtenemos los posibles valores de la energía

$$E_{n_1 n_2 \dots n_f} = \mathcal{H}(n_1 h, n_2 h, \dots, n_f h). \quad (1.56)$$

Este resultado va acompañado de la afirmación de que un sistema puede saltar de un nivel de energía $E_{n_1 n_2 \dots n_f}$ a otro menor $E_{m_1 m_2 \dots m_f}$ emitiendo radiación de frecuencia ν dada por

$$h\nu = E_{n_1 n_2 \dots n_f} - E_{m_1 m_2 \dots m_f}. \quad (1.57)$$

La mecánica clásica más las condiciones de cuantización (1.55) y la frecuencia de radiación dada por (1.57) constituyen la teoría cuántica de Bohr-Sommerfeld. Esta ha sido de gran utilidad pero tiene varios defectos, algunos de estos son:

- (a) Sólo es aplicable a sistemas integrables.
- (b) Algunas veces da resultados incorrectos, es decir, resultados en desacuerdo con las observaciones experimentales, generalmente asociado con números cuánticos semienteros.
- (c) No se puede obtener la intensidad de la radiación.
- (d) Es conceptualmente insatisfactoria debido a que contradice las leyes de la electrodinámica.

La teoría nunca fue corregida para remover todos estos defectos, salvo que la intensidad de radiación fue calculada usando una regla adicional: el principio de correspondencia. Históricamente la teoría de Bohr-Sommerfeld fue relegada por la invención de la mecánica cuántica, la cual carece de los defectos de la teoría de Bohr-Sommerfeld.

Para estados estacionarios, es decir para estados de energía constante E la mecánica cuántica está basada en la ecuación estacionaria de Schrödinger

$$H(q, p)\psi(q) = E\psi(q), \quad (1.58)$$

donde H es el Hamiltoniano de la mecánica clásica, en el cual $p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}$ y $\psi(q)$ es una nueva función llamada función de onda del sistema. Como H es un operador autoadjunto entonces el espectro es real. Cuando H es cuadrática en p , (1.58) es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden en n variables independientes q_i .

La ecuación (1.58) es un problema de valores propios, por lo que el valor propio E sólo puede tomar valores discretos siempre que se verifique $\int |\psi(q)|^2 dq$ sea acotada. Entonces $\psi(q)$ puede ser normalizada de tal forma que $\int |\psi(q)|^2 dq = 1$. En este caso $|\psi(q)|^2$ es interpretada como la densidad de probabilidad de que el sistema esté en q y la función propia $\psi(q)$ es llamada la amplitud de probabilidad. En este caso diremos que se trata de un estado ligado. Cuando $\psi(q)$ no es normalizable, E es el espectro continuo de H y $\psi(q)$ representa un estado de dispersión.

Se puede resolver (1.58) exactamente sólo para sistemas muy simples, fue por esto que Wentzel, Kramers y Brillouin independientemente desarrollaron un método para aproximar la solución de la ecuación de Schrödinger, ahora llamado método WKB. Este produce una aproximación la cual es asintótica a la solución exacta conforme un múltiplo adimensional de la constante de Planck se aproxima a cero.

Ambos Wentzel y Kramers consideraron sistemas para los cuales la ecuación de Schrödinger podía ser separada en un conjunto desacoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para las funciones $\psi_i(q_i)$ dependientes de una sola variable. Para cada ψ_i usaron una solución aproximada de la forma

$$\psi_i(q_i) \approx A_i(q_i)e^{\frac{i}{\hbar}S(q_i)}. \quad (1.59)$$

Cuando (1.59) se sustituye en las ecuaciones diferenciales ordinarias para ψ_i se producen ecuaciones para S_i y A_i . De la ecuación para S_i , y las fórmulas de conexión en los puntos de retorno, Kramers derivó una versión modificada de las condiciones de cuantización (1.55). Estas condiciones de cuantización contienen los números cuánticos enteros o semienteros dependiendo del potencial, pero falla al predecir números cuánticos que son cuartos de entero.

Brillouin no impuso la restricción de que (1.58) fuera separable y usó una solución aproximada $\psi(q)$ de la forma

$$\psi(q) \approx e^{\frac{i}{\hbar}S(q)}. \quad (1.60)$$

Entonces consideró la posibilidad de que $S(q)$ fuese una función multivaluada de las coordenadas q , pero con $\psi(q)$ una función univaluada, así concluyó que la diferencia $\Delta S(q)$ entre dos valores de $S(q)$ debe ser un múltiplo entero de h :

$$\Delta S(q) = nh. \quad (1.61)$$

Brillouin hizo notar que si $S(q)$ es separada como una suma de términos, $S_1(q_1) + \dots + S_f(q_f)$, dependientes de un sola variable, (1.61) coincide con las condiciones de cuantización de Bohr-Sommerfeld (1.55). La propuesta de Brillouin no requiere que la ecuación de Schrödinger sea separable, pero no es capaz de predecir números cuánticos semienteros.

Con el desarrollo del método WKB la mecánica semiclásica obtuvo una base teórica en el sentido de que ésta provea una solución aproximada de problemas cuánticos. Sin embargo hasta este punto la mecánica semiclásica aún falla al no producir números cuánticos que son cuartos de entero o para sistemas no separables en la versión del método de Wentzel y Kramers y falla en la predicción de números semienteros en la versión de Brillouin. En el Capítulo 2 veremos cómo estos problemas son resueltos.

Capítulo 2

Cuantización de Einstein-Brillouin-Keller y ecuación de Helmholtz

En la primera sección de este capítulo desarrollaremos la versión invariante de las condiciones de cuantización descritas en la sección 1.5.1 y en la segunda consideraremos el caso particular de la ecuación de Schrödinger para una partícula atrapada, es decir la ecuación de Helmholtz. Esto se llevará a cabo mediante la aproximación de onda corta.

2.1. Cuantización de Einstein-Brillouin-Keller o EBK

Como vimos en la sección 1.5.1 la mecánica semiclásica aún adolece de varios problemas. Por otro lado tenemos que la ecuación de Schrödinger puede ser formulada en coordenadas no separables o incluso en el caso de que sea separable se pueden producir ecuaciones diferenciales ordinarias difíciles de resolver. Adicionalmente tenemos que las condiciones de cuantización de la mecánica semiclásica no siempre son correctas. Con base en esto es deseable obtener condiciones de cuantización que sean independientes del sistema de coordenadas.

Una forma de obtener tales condiciones de cuantización invariantes fue dada por J.B. Keller en 1958 [8], la cual describimos a continuación. El método de Keller se basa en escribir la función de onda $\psi(q)$, para \hbar pequeña, en términos de ondas de la forma

$$\psi(q) \approx A(q)e^{\frac{i}{\hbar}S(q)}, \quad (2.1)$$

donde $S(q)$ es una función multivaluada, como en la propuesta de Brillouin (1.60), pero adicionalmente permitiremos que $A(q)$ sea multivaluada. Entonces la condición de univalencia de $\psi(q)$, esto es $e^{\frac{i}{\hbar}S'(q)+\ln A'(q)} = e^{\frac{i}{\hbar}S(q)+\ln A(q)}$, requiere que la diferencia entre dos valores $S(q)$, denotada por $\Delta S(q) = S'(q) - S(q)$, esté dada por

$$\Delta S(q) = \left[n + \frac{i}{2\pi} \Delta \log A(q) \right] h, \quad (2.2)$$

con n un entero y donde $\Delta \log A(q)$ denota la diferencia entre dos valores de $\log A(q)$. Cuando $A(q)$ es univaluada (2.2) produce números cuánticos enteros. Sin embargo cuando dos valores de $A(q)$ difieren sólo en el signo, entonces $\Delta \log A(q) = -i\pi$ y (2.2) toma la forma

$$\Delta S(q) = \left(n + \frac{1}{2} \right) h. \quad (2.3)$$

En este caso (2.2) da una condición de cuantización con número semientero. En otros casos dará otros números cuánticos, por ejemplo cuartos de entero. Por tanto (2.2) predice las condiciones de cuantización con los números cuánticos correctos.

A fin de usar (2.2) debemos mostrar cómo encontrar $S(q)$ y $A(q)$, y cómo (2.2) se convierte en número finito de condiciones de cuantización. Para lograr esto último escribiremos la forma asintótica de $\psi(q)$ para \hbar pequeña como una suma de ondas¹

$$\psi(q) \approx \sum_{k=1}^N A_k(q) e^{\frac{i}{\hbar} S_k(q)}. \quad (2.4)$$

La necesidad de emplear una suma en (2.4) en lugar de un sólo término, es mostrada por la solución $\psi(q)$ para casos simples, en particular para el oscilador armónico con un grado de libertad (ver por ejemplo [19]). El número N de términos depende del potencial y será determinado en el proceso de construir la solución aproximada. Además la representación (2.4) será usualmente válida sólo en un subdominio D del q -espacio por determinar.

Consideremos $S_k(q)$ y $A_k(q)$ como las diferentes ramas de dos funciones multivaluadas $S(q)$ y $A(q)$. Cada rama es definida como una copia del dominio D . Estas copias son pegadas unas con otras por sus fronteras de tal forma que $\nabla S(q)$ sea continua. Este requerimiento determinará cómo pegar las copias del dominio D . Si las hojas j y k son pegadas por todos los puntos de sus fronteras donde $\nabla S_j = \nabla S_k$, sobre el espacio resultante ∇S será univaluada y $\nabla \log A(q)$ también. Este espacio es llamado espacio de cubrimiento para ∇S .

En este espacio $\Delta S(q)$ y $\Delta \log A(q)$ pueden ser escritas como integrales de línea a lo largo de alguna curva cerrada empezando en q y terminando en q :

$$\Delta S(q) = \oint \nabla S \cdot d\sigma, \quad \Delta \log A(q) = \oint \nabla \log A \cdot d\sigma, \quad (2.5)$$

con esto (2.2) se puede expresar como

$$\oint \nabla S \cdot d\sigma = \left[n + \frac{i}{2\pi} \oint \nabla \log A \cdot d\sigma \right] h. \quad (2.6)$$

Esta condición debe de satisfacerse para cualquier curva cerrada en el espacio de cubrimiento, con un apropiado número entero n para cada curva. Aunque esto es un número infinito de condiciones sólo un número finito de éstas son independientes.

¹Aquí el término onda es usado para indicar términos de la forma (2.1), donde $A(q)$ es la amplitud y $S(q)$ la fase.

Primero notamos que las integrales de línea en (2.6) son integrales de un gradiente, por lo que para dos curvas en el espacio de cubrimiento que pueden ser deformadas una en otra dichas integrales tienen el mismo valor. Para cualquier espacio de cubrimiento hay una base de curvas independientes que no pueden ser deformadas unas en otras. Cualquier otra curva que no pertenezca a esta base puede ser construida como una combinación lineal de curvas base. Por tanto (2.6) será satisfecha para cualquier curva en el espacio de cubrimiento si ésta se satisface para cada curva base, con el apropiado número entero n_j . Estas curvas forman una base para el grupo fundamental del espacio de cubrimiento, su número es el orden de este grupo. Así el número de condiciones de cuantización es el orden del grupo fundamental, denotado por M , el cual es finito.

Hasta el momento tenemos las condiciones de cuantización y cuántas de estas hay, sin embargo queda aún por decir quiénes son las funciones de fase $S_k(q)$ y las amplitudes $A_k(q)$, $k = 1, 2, \dots, M$. Para esto vemos que (2.1) satisface la ecuación de Schrödinger (1.58), asintóticamente, sólo si cada onda la satisface. Por tanto basta considerar un término típico tal como (2.1). Cuando sustituimos (2.1) en la ecuación de Schrödinger (1.58) obtenemos

$$H(q, p) A(q, p) e^{\frac{i}{\hbar} S(q, p)} = E A(q, p) e^{\frac{i}{\hbar} S(q, p)} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{i}{\hbar} S(q, p)} H(q, p) e^{\frac{i}{\hbar} S(q, p)} = E.$$

En la expresión anterior $e^{-\frac{i}{\hbar} S(q, p)}$ es una transformación unitaria que deja invariante a las q 's y sólo actúa sobre los momentos p 's, esto es

$$e^{-\frac{i}{\hbar} S(q, p)} p e^{\frac{i}{\hbar} S(q, p)} = p + \frac{\partial S}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{i}{\hbar} S(q, p)} H(q, p) e^{\frac{i}{\hbar} S(q, p)} = H\left(q, p + \frac{\partial S}{\partial q}\right),$$

así la ecuación de Schrödinger, bajo la propuesta de solución (2.1), toma la forma

$$H\left(q, p + \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E. \quad (2.7)$$

Si en la ecuación anterior despreciamos los términos que involucren potencias mayores a \hbar^0 tenemos

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E, \quad (2.8)$$

donde hemos despreciado p debido a que es proporcional a \hbar . La ecuación (2.8) es la ecuación de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica para la función de fase $S(q)$.

Queda por determinar una ecuación para la amplitud $A(q, p)$ la cual vendrá dada de tomar en cuenta los términos proporcionales a \hbar^1 y despreciar los correspondientes en \hbar^2 en la ecuación (2.7). A diferencia de los términos en \hbar^0 un cálculo directo de los términos en \hbar^1 es sumamente complicado debido a que hemos considerado un Hamiltoniano general, por tanto seguiremos otro camino. Para esto consideremos el paréntesis de Poisson de f y H ,

$\left[f, H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) \right]$, donde f es una función real arbitraria de las q 's y el paréntesis de Poisson de la mecánica clásica es definido por

$$[u, v] = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right\}, \quad (2.9)$$

donde N es el número de grados de libertad. Este paréntesis de Poisson es válido en el caso cuántico cuando u es independiente de las p 's y v es lineal en las p 's.

En vista de que $\hbar \ll 1$ entonces $H(q, p)$ puede ser desarrollado en potencias de las p 's. El término a orden cero en las p 's no contribuye al paréntesis de Poisson y despreciamos los términos a órdenes mayores a uno. Por tanto $\left[f, H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) \right]$ puede ser evaluado usando (2.9). Con esto obtenemos

$$\left[f, H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) \right] = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \right\},$$

de la cual se sigue, al calcular el valor esperado de $A \left[f, H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) \right] A$,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} [v_i(q) A^2(q)] = 0 \quad \text{o} \quad \nabla \cdot [\mathbf{v}(q) A^2(q)] = 0. \quad (2.10)$$

En la ecuación anterior hemos introducido v_i definida por $v_i(q) = \frac{\partial H \left(q, \frac{\partial S}{\partial q} \right)}{\partial p_i}$ y $\mathbf{v}(q) = (v_1, \dots, v_N)$. De la primera de las ecuaciones de Hamilton (1.49), v_i es justamente la velocidad $\frac{dq_i}{dt}$. Por tanto (2.10) es la ecuación de Liouville de la mecánica estadística clásica, expresando la conservación de la "densidad de probabilidad" $A^2(q)$. Esta ecuación es una forma especial de la ecuación de Liouville debido a que la densidad de probabilidad es independiente de p .

La ecuación (2.8) es una ecuación diferencial parcial de primer orden que puede ser resuelta por el método de características. Sus características son justo las ecuaciones de Hamilton (1.49), y sus soluciones son las trayectorias clásicas $q(t)$, $p(t)$. En términos de éstas la solución $S(q)$ está dada por

$$S(q) = S(q_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^N p_i(t') \frac{dq_i(t')}{dt'} dt'. \quad (2.11)$$

La integral es a lo largo de la trayectoria que empieza en q_0 al tiempo $t = 0$ y pasa a través de $q = q(t)$ al tiempo t . El valor inicial de S en q_0 es $S(q_0)$.

Para resolver (2.10) consideremos un tubo angosto de trayectorias encerrando la trayectoria que va de q_0 a q . Entonces integramos (2.10) en el interior de este tubo y convertimos la integral de volumen en una integral de superficie por medio del teorema de Gauss. Entonces la velocidad $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$ en cualquier punto es paralela a la trayectoria que pasa por ese punto luego \mathbf{v} no tiene componente normal sobre las caras laterales del tubo y la única contribución a la

integral de superficie vendrá de los extremos del tubo en q_0 y q , los cuales son normales a \mathbf{v} . Así obtenemos

$$A^2(q) |v(q)| d\Sigma(q) - A^2(q_0) |v(q_0)| d\Sigma(q_0) = 0, \quad (2.12)$$

donde $d\Sigma(q)$ y $d\Sigma(q_0)$ denotan la sección transversal de área normal al tubo de trayectorias en q y q_0 , respectivamente. Al resolver (2.12) para $A(q)$ obtenemos

$$A(q) = \left[\frac{|v(q_0)| d\Sigma(q_0)}{|v(q)| d\Sigma(q)} \right]^{\frac{1}{2}} A(q_0). \quad (2.13)$$

De la ecuación anterior vemos que $A(q) \rightarrow \infty$ en los puntos q donde $|v(q)| d\Sigma(q) = 0$. Diremos que la trayectoria toca una cáustica en cualquiera de tales puntos, y llamaremos al lugar geométrico de tales puntos para una familia de trayectorias una superficie cáustica o simplemente cáustica de esta familia. En particular una cáustica sobre la cual $d\sigma = 0$ es una envolvente de la familia, entonces ∇S es multivaluada cerca de la cáustica. De esta manera tales cáusticas forman parte de la frontera del dominio D donde dos hojas deben ser pegadas. Una cáustica sobre la cual $|v| = 0$ es también generalmente parte de la frontera, esto debido a que generalmente cada p_i se anula sobre esta o cambia de signo en ésta.

La ecuación (2.13) no es válida sobre las cáusticas y debe ser reemplazada por una expansión local viable sobre y cerca de ella. Es así como las cáusticas son el análogo multidimensional para ecuaciones diferenciales parciales de los puntos de retorno en la teoría WKB de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Al igual que en los puntos de retorno, hay fórmulas de conexión que relacionan el valor de ψ sobre las ramas que se encuentran sobre la cáustica. Estas fórmulas muestran que la fase de A cambia por $-\frac{\pi}{2}$ a lo largo de una trayectoria que toca la cáustica en un punto regular. Este hecho es también conocido de la óptica y se dará un argumento heurístico en la sección siguiente. Entonces podemos expresar el cambio en $\log A$ en torno a una curva cerrada en términos del número m de veces que la curva toca la cáustica en la dirección de incremento de S . Este es justo el número de veces que se cruza de una rama a otra. De esto tenemos

$$\frac{i}{2\pi} \Delta \log A = \frac{i}{2\pi} \oint \nabla \log A \cdot d\sigma = \left(\frac{i}{2\pi} \right) \left(-\frac{i\pi}{2} \right) m = \frac{m}{4}. \quad (2.14)$$

Ahora podemos usar este resultado, junto con (2.11), para escribir la condición de cuantización (2.6) como

$$\oint \sum_{i=1}^M p_i dq_i = \left(n + \frac{m}{4} \right) h. \quad (2.15)$$

Obtenemos así, una condición de cuantización por cada curva base, con un entero arbitrario n . El entero m , sin embargo, es determinado por la curva base en la manera antes descrita.

La condición de cuantización (2.15) es conocida como condición de cuantización de Einstein-Brillouin-Keller o simplemente cuantización EBK².

Para sistemas en los cuales la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable, y el movimiento es periódico en cada q_i , el espacio de cubrimiento para ∇S es un toro M -dimensional. Entonces hay M curvas base, a lo largo de las cuales justamente un par de coordenadas q_i y p_i varía. Para tales sistemas (2.15) toma la forma

$$\oint p_i dq_i = \left(n_i + \frac{m_i}{4} \right), \quad i = 1, \dots, M. \quad (2.16)$$

El lado izquierdo de (2.16) es justo la acción J_i asociada con la coordenada q_i , entonces (2.16) puede ser escrita como

$$J_i = \left(n_i + \frac{m_i}{4} \right), \quad i = 1, \dots, M. \quad (2.17)$$

Esta es la condición de cuantización de Bohr-Sommerfeld corregida para sistemas separables. La condición (2.15) puede ser escrita en la forma (2.17) debido a que el lado izquierdo de (2.15) es la acción asociada con la curva base.

2.1.1. Generalizaciones

El entero m en (2.15), o m_i en (2.16), es un índice asociado con una clase de trayectorias equivalentes en el espacio de cubrimiento. Este fue posteriormente derivado independientemente por Máslov [14] en 1965, quien considero curvas sobre la variedad Lagrangiana $H(q, p) = E$ en el espacio fase de $2N$ dimensiones. Por lo que este índice suele ser llamado índice de Máslov o índice de Keller-Máslov-Arnold debido a que Arnold [1] mostró su relación con el índice de Morse de una variedad Lagrangiana.

Por otro lado en la sección anterior se consideró a H como el operador Hamiltoniano del sistema. Sin embargo, éste puede ser reemplazado por cualquier otro operador, por ejemplo el bilaplaciano ∇^4 , para el que busquemos soluciones asintóticas en la aproximación de onda corta.

2.2. La aproximación de onda corta

Como mencionamos en la sección anterior estamos interesados en buscar soluciones asintóticas, $k \gg 1$, de la ecuación de Helmholtz dada en (1.13) del Capítulo 1 y condiciones de frontera tipo Dirichlet (1.10) o tipo Neumann (1.11). Deduciremos expresiones asintóticas tanto para los valores propios como para las funciones propias de la ecuación de Helmholtz en un dominio D .

La función $u(\mathbf{x})$ se escribe como en la ecuación (2.4) con $\frac{1}{\hbar}$ reemplazada por k

²El nombre Einstein aparece debido a que si en (2.15) omitimos el entero m se produce una regla de cuantización dada por Einstein en 1917.

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N A_j(\mathbf{x}) e^{ikS_j(\mathbf{x})}, \quad (2.18)$$

donde las funciones S_j y A_j son funciones de la posición \mathbf{x} , y N es un entero. Cada término en la suma de (2.18) es llamado onda, donde S_j es la fase y A_j es la amplitud.

Sustituyendo (2.18) en (1.13) y agrupando en potencias de k obtenemos

$$\sum_{j=1}^N \left\{ k^2 e^{ikS_j} A_j \left[1 - (\nabla S_j)^2 \right] + ik \left[2\nabla S_j \cdot \nabla A_j + A_j \nabla^2 S_j \right] + e^{ikS_j} \nabla^2 A_j \right\} = 0,$$

ahora igualando a cero los coeficientes de k^2 y k y despreciando el coeficiente de k^0 tenemos las siguientes ecuaciones

$$|\nabla S_j|^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.19)$$

$$2\nabla S_j \cdot \nabla A_j + A_j \nabla^2 S_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.20)$$

La ecuación (2.19) es la ecuación eiconal de la óptica geométrica, una para cada función de fase S_j , $j = 1, 2, \dots, N$, y se resuelve por el método de características donde las características corresponden a los rayos de la óptica geométrica, en esta caso líneas rectas. Los rayos son las trayectoria ortogonales a los frentes de onda dados por $S = \text{constante}$. La solución de la ecuación eiconal viene dada por

$$S_j(t_j) = S_{0j} + t_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.21)$$

donde S_0 es el valor de S en el punto desde el cual t es medido.

La ecuación (2.20) es una ecuación de transporte cuya solución viene dada por

$$A_j(t_j) = A_{0j} \left[\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + t_j)(\rho_2 + t_j)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.22)$$

aquí A_{0j} es el valor de A en el punto $t_j = 0$; ρ_1 y ρ_2 son los radios principales de curvatura del frente de onda $t_j = 0$. La ecuación (2.20) puede ser interpretada como una ley de conservación de rayos en el interior de un tubo delgado de rayos.

La solución tanto de la ecuación eiconal (2.19) como de la ecuación de transporte (2.20) serán detalladas en las proximas secciones.

Finalmente imponemos la condición de frontera (1.11) a la ecuación (2.18). Sustituyendo (2.18) en (1.11) e igualando el coeficiente de k^2 a cero y despreciando el de k obtenemos

$$\sum_{j=1}^N A_j e^{ikS_j} \frac{\partial S_j}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en } \partial D. \quad (2.23)$$

Supondremos que para cada punto en la frontera los términos en (2.23), para los cuales $\frac{\partial S_j}{\partial \nu} \neq 0$, se anulan por pares. Con esto queremos decir que por cada término que no se anula, digamos el j -ésimo, existe otro, digamos el j' -ésimo, tal que

$$A_j e^{ikS_j} \frac{\partial S_j}{\partial \nu} + A'_j e^{ikS_{j'}} \frac{\partial S_{j'}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en } \partial D. \quad (2.24)$$

Esta última ecuación corresponde a la suposición de que por cada onda que incide en la frontera se produce otra onda reflejada. Las ondas para las cuales $\frac{\partial S_j}{\partial \nu} = 0$ se propagan paralelas a la frontera y no producen ondas reflejadas. Si (2.24) ha de cumplirse para algún rango de valores de k entonces podemos suponer

$$S_j = S_{j'} \quad \text{en } \partial D, \quad (2.25)$$

de esto y de la ecuación eiconal se sigue que $\left(\frac{\partial S_j}{\partial \nu}\right)^2 = \left(\frac{\partial S_{j'}}{\partial \nu}\right)^2$ en ∂D . Por tanto

$$\frac{\partial S_j}{\partial \nu} = \pm \frac{\partial S_{j'}}{\partial \nu} \quad \text{en } \partial D, \quad (2.26)$$

Si en (2.26) tomamos el signo (+) entonces se sigue que $S_j = S_{j'}$, no sólo en la frontera sino en todo el dominio D . También se sigue de (2.24) que $A_j = -A_{j'}$ en ∂D . Este hecho y (2.22) muestran que $A_j = -A_{j'}$ en todo D . Entonces la suma de dos términos $A_j e^{ikS_j}$ y $A_{j'} e^{ikS_{j'}}$ es idénticamente cero en todo D . Tal par de soluciones triviales serán omitidas. Por tanto en la expresión anterior tomamos el signo (-) con lo que la condición de frontera (2.24) toma la forma

$$e^{ikS_j} \left(\frac{\partial S_j}{\partial \nu}\right) (A_j - A_{j'}) = 0 \quad \text{en } \partial D.$$

Por lo tanto

$$A_j = A_{j'} \quad \text{en } \partial D, \quad (2.27)$$

y

$$\frac{\partial S_j}{\partial \nu} = -\frac{\partial S_{j'}}{\partial \nu} \quad \text{en } \partial D. \quad (2.28)$$

Las ecuaciones (2.25) y (2.28) implican la ley de reflexión de la óptica geométrica y (2.27) implica que la amplitud de la onda reflejada en la frontera es igual a la de la onda incidente.

En forma análoga podemos tomar la condición de frontera (1.10) la cual produce las ecuaciones (2.25) y (2.28), pero con (2.27) reemplazada por

$$A_j = -A_{j'} \quad \text{en } \partial D. \quad (2.29)$$

La amplitud A_j , $j = 1, 2, \dots, N$, dada por (2.22) tiene puntos singulares en $t = -\rho_1$ y $t = -\rho_2$ en cada rayo. Estos puntos son los centros de curvatura del frente de onda correspondiente

a $t = 0$. El lugar geométrico de estos puntos es la cáustica. Esta generalmente consiste de dos hojas, correspondientes a cada centro de curvatura sobre cada rayo. Los puntos en los cuales las dos hojas se tocan son llamados puntos focales. Por lo tanto los anteriores resultados no son válidos en la cáustica.

Supondremos que cada onda que converge a la cáustica produce otra onda que diverge de ella. Los rayos de la onda divergente son asumidos como continuación de los rayos de la onda convergente y la fase a lo largo de estos rayos son asumidas como continuación de la fase de los rayos convergentes. Estas dos suposiciones pueden ser descritas estableciendo que la fase $S_{j'}$ de los rayos divergentes es igual a la fase S_j de los rayos convergentes. Se sabe que en un punto regular de la cáustica, es decir un punto no focal, la amplitud $A_{j'}$ de la onda divergente es igual a la amplitud A_j de la onda convergente multiplicada por $e^{-i\frac{\pi}{2}}$. En un punto focal el factor es $e^{-i\pi}$. Estos hechos son todos indicados por (2.22).

De las anteriores suposiciones vemos que siguiendo un rayo de cualquier onda en la dirección en que t se incrementa llegamos, ya sea a la cáustica o la frontera, en cualquier caso el rayo continúa como rayo de otra onda; de esta manera se encuentra una sucesión de ondas. En vista de que en la sucesión hay un número finito de ondas (por suposición N) entonces éstas deben repetirse, por tanto un rayo ortogonal a un frente de onda dado deberá, después de sucesivas reflexiones en la frontera, ser ortogonal a ese mismo frente de onda (Figura 2.1). Pero el valor de S_j se incrementa continuamente conforme el rayo viaja en la dirección en que t se incrementa, por tanto el segundo punto de intercepción del frente de onda y el rayo, el valor de S_j , es mayor que su valor inicial por un factor proporcional a la longitud del rayo entre las intercepciones. Sin embargo S_j es constante sobre el frente de onda, así S_j debe ser una función multivaluada y por tanto A_j también.

A fin de que la solución (2.18) sea univaluada debemos requerir que cada onda lo sea. Si A'_j y S'_j denotan valores distintos de A_j y S_j , respectivamente, entonces para que cada onda sea univaluada se debe satisfacer $A'_j e^{ikS'_j} = A_j e^{ikS_j}$; denotando por δS_j la diferencia entre dos valores de S_j y $\delta \log A_j$ la diferencia entre dos valores de $\log A_j$ la condición de univalencia se puede escribir como

$$k\delta S_j = 2\pi m_j + i\delta \log A_j \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.30)$$

donde m_j es un número entero. δS_j puede ser representada como una integral de línea a lo largo de alguna curva cerrada en el espacio de cubrimiento, es decir

$$\delta S_j = \oint \nabla S_j \cdot d\sigma \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

así (2.30) toma la forma

$$k \oint \nabla S_j \cdot d\sigma_j = 2\pi m_j + i\delta \log A_j \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) se satisface para cualquier curva en el espacio de cubrimiento si ésta se satisface para cada curva base del grupo fundamental del espacio de cubrimiento, esto se

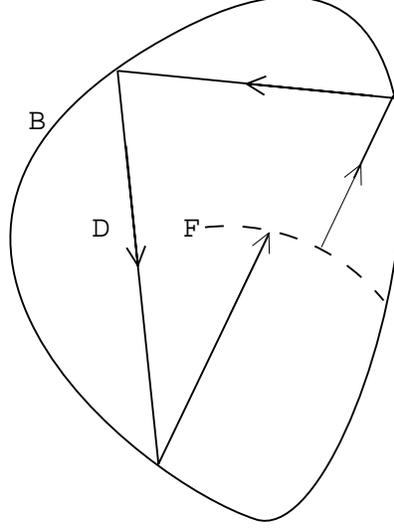


Figura 2.1: Un rayo ortogonal a un frente de onda particular, F , vuelve a ser ortogonal a éste después de reflexiones sucesivas en la frontera B del dominio D .

debe a que toda curva es una combinación lineal de curvas bases con coeficientes enteros. Adicionalmente observamos que la fase de A es retardada por $\frac{\pi}{2}$ cada vez que la curva toca la cáustica, por lo que $\log A_j$ cambia por $-i\frac{\pi}{2}$. Esto se puede ver de (2.22) al hacer una continuación analítica para $t_j < -\rho_1$, por ejemplo, lo cual multiplica la amplitud por i . Este mismo argumento se puede usar para los puntos focales y para más dimensiones. Un argumento de tipo más físico se puede hacer usando fase estacionaria, ver por ejemplo [18] sección 45. Si n_j denota el número de veces que la curva toca la cáustica, para el valor apropiado de j , y si el cambio en $\log A_j$ sólo está asociado a puntos regulares de la cáustica entonces (2.31) se escribe como

$$k \oint \nabla S_j \cdot d\sigma_j = 2\pi \left(m_j + \frac{n_j}{4} \right) \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.32)$$

Para la condición de frontera (1.10) vemos de (2.29) que la amplitud A_j cambia de fase por $-\pi$ cada vez que la curva toca la frontera con lo que $\log A_j$ cambia por $-i\pi$, por lo tanto, si b_j denota el número de veces que la curva toca la frontera, (2.31) toma la forma

$$k \oint \nabla S_j \cdot d\sigma_j = 2\pi \left(m_j + \frac{n_j}{4} + \frac{b_j}{2} \right) \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.33)$$

Las condiciones de univalencia (2.32) y (2.33) son condiciones de cuantización para el problema de valores propios (1.13) y (1.10) o (1.11). Dichas condiciones de cuantización fueron deducidas sin la suposición de que la ecuación de Helmholtz y sus condiciones de contorno sean

separables o no en algún sistema de coordenadas e incluso sin hacer referencia a la forma particular del dominio, así, (2.18) puede ser utilizada para algún otro operador independientemente de que éste sea separable o no o de la forma del dominio.

Hasta el momento hemos determinado el comportamiento asintótico de las funciones propias de la ecuación de Helmholtz, el cual está dado por la suma de N términos de la forma $A_j e^{ikS_j}$ con A_j y S_j dados por (2.21) y (2.22), respectivamente. También hemos hallado el comportamiento asintótico del valor propio k dado por la ecuación (2.32) cuando la condición de frontera es (1.11) o por (2.33) en el caso de (1.10). Las ecuaciones (2.32) o (2.33) forman un conjunto de N ecuaciones las cuales deberán ser resueltas para N parámetros por determinar, de los cuales uno es el valor propio k . Vemos ahora la necesidad de determinar el valor de N , para esto debemos hallar en el dominio D un conjunto de N congruencias normales³ de rayos las cuales son cerradas bajo reflexión. Con cerradas bajo reflexión no queremos decir que los rayos forman una curva cerrada, sino que cada congruencia de rayos produce otra congruencia del conjunto al reflejarse en la frontera o tocar la cáustica. Ahora, debemos considerar el espacio de cubrimiento asociado con este conjunto de N congruencias de rayos y determinar el número de curvas cerradas independientes, es decir, el número de curvas en el grupo fundamental. Si hay q curvas independientes en el grupo fundamental entonces debemos embedir el conjunto de N congruencias de rayos en una familia $q - 1$ paramétrica de N congruencias, cada una de las cuales es también cerrada bajo reflexión. Finalmente, debemos imponer las q condiciones (2.32) o (2.33) a partir de las cuales podemos encontrar k y los $q - 1$ parámetros. En esta forma el valor propio k puede ser hallado.

Una vez obtenido k , queda por hallar las funciones de fase y las amplitudes y con esto obtenemos las funciones propias. Para determinar las funciones de fase usamos (2.21) y asignamos un valor arbitrario a S_{0j} en algún frente de onda. Para obtener las amplitudes debemos hallar una función A_{0j} definida en algún frente de onda tal que cuando el valor de A_j es calculado usando (2.22) y (2.27) o (2.29), éste regrese al valor A_{0j} (salvo por un factor de fase) después de viajar por un rayo que regresa al frente de onda original.

En algunos casos determinar la función de fase en la forma descrita anteriormente es poco práctico, como veremos en el Capítulo 4, por lo que se requiere de un método alternativo para determinarlas no usando rayos. Esto será posible considerando una familia $q - 1$ paramétrica de funciones de fase. Estas funciones de fase deben satisfacer la ecuación eiconal (2.19) y las condiciones (2.25) y (2.28) en la frontera ∂D , y la base del grupo fundamental del espacio de cubrimiento de ∇S_j debe contener q curvas. Entonces las q condiciones (2.32) o (2.33) determinan el valor propio k y los $q - 1$ parámetros. Las amplitudes se determinan como antes.

2.2.1. La ecuación eiconal

La ecuación eiconal (2.19) puede ser resulta por el método general de características para ecuaciones diferenciales parciales de primer orden no lineales [4], sin embargo, a fin de no

³Una congruencia normal de rayos es una familia de rayos ortogonales a cualquier superficie dada.

introducir complicaciones innecesarias y dada la forma particular de la ecuación, ésta puede ser resuelta en una forma alternativa sugerida por Keller en [9]. Omitiendo el subíndice j en (2.19) y definiendo el vector de posición como $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, la ecuación eiconal en dos dimensiones toma la forma

$$|\nabla S(\mathbf{x})|^2 = 1. \quad (2.34)$$

Las superficies de fase constante, $S(\mathbf{x}) = \text{constante}$, son los llamados frentes de onda y sus correspondientes curvas ortogonales son los rayos de la óptica geométrica (en la teoría general los rayos corresponden a las curvas características). Estos rayos pueden ser usados para construir una solución de la ecuación (2.34). Observamos primero que por tratarse de un medio homogéneo la velocidad de propagación $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1, v_2)$ será constante, por tanto los rayos serán líneas rectas. La ecuación de los rayos puede ser escrita en términos de un parámetro t en la forma

$$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t)) = \mathbf{v}t + \mathbf{x}_0. \quad (2.35)$$

La condición de ortogonalidad entre los frentes de onda y los rayos establece que la derivada $\mathbf{X}(t)$ respecto de t sea proporcional al gradiente de la fase ∇S , de lo que obtenemos

$$\mathbf{v} = \lambda \nabla S, \quad (2.36)$$

donde λ es el factor de proporcionalidad. Ahora si calculamos la derivada direccional a lo largo del rayo obtenemos

$$\frac{dS(\mathbf{x}(t))}{dt} = \nabla S \cdot \mathbf{v} = \lambda, \quad (2.37)$$

donde hemos hecho uso de (2.36) y (2.34) para reducir la expresión. La ecuación (2.37) es una ecuación diferencial ordinaria fácilmente integrable, es decir,

$$S(t) = S_0 + \int^t \lambda d\tau = S_0 + \lambda t, \quad (2.38)$$

donde hemos escrito $S(\mathbf{x}(t))$ como $S(t)$ y $S(\mathbf{x}(t_0))$ como S_0 . Si elegimos $\lambda = 1$ entonces t es la longitud de arco medida a lo largo del rayo. Con esta elección de λ , (2.38) coincide con (2.21).

2.2.2. La ecuación de transporte

Ahora procedemos a resolver la ecuación de transporte (2.20). Nuevamente omitiendo el subíndice j tenemos

$$2\nabla S \cdot \nabla A + A\nabla^2 S = 0. \quad (2.39)$$

Si multiplicamos por A la ecuación (2.39) obtenemos

$$\nabla \cdot (A^2 \nabla S) = 0. \quad (2.40)$$

De esta última ecuación vemos que $A^2 \nabla S$ tiene divergencia nula y por tanto su flujo en un tubo de rayos se conserva. Aplicaremos este resultado a un tubo de rayos. Entonces, dado un rayo, consideramos una región R del espacio acotada por un tubo de rayos que contiene al rayo dado y los frentes de onda $w(t_0)$ y $w(t)$ en los puntos t_0 y t del rayo dado (ver Figura 2.2). Entonces ∇S es paralelo a las paredes del tubo y normal a los frentes de onda.

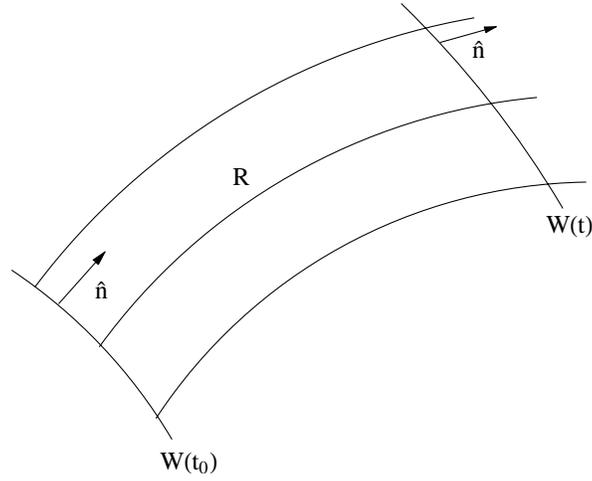


Figura 2.2: Región R acotada por un tubo de rayos y los frentes de onda t_0 y t .

Ahora integramos (2.40) sobre la región R usando el teorema de la divergencia de Gauss, de lo que obtenemos

$$0 = \int_R \nabla \cdot (A^2 \nabla S) dx = \int_{w(t)} A^2 \nabla S \cdot \hat{n}(t) da(t) - \int_{w(t_0)} A^2 \nabla S \cdot \hat{n}(t_0) da(t_0),$$

donde \hat{n} es la normal unitaria al frente de onda y da es el elemento de área sobre el frente de onda. De (2.34) vemos que $\nabla S \cdot \hat{n} = 1$. Por tanto contrayendo el tubo de rayos al rayo mismo la ecuación anterior toma la forma

$$A^2(t) da(t) = A^2(t_0) da(t_0). \quad (2.41)$$

Para reescribir (2.41) en una forma más conveniente elegimos un punto arbitrario t_1 sobre el rayo y definimos

$$\xi(t) = \frac{da(t)}{da(t_1)}. \quad (2.42)$$

La cantidad $\xi(t)$ es llamada razón de expansión del tubo, esta mide la expansión de sección transversal del tubo de rayos. Esta es justo el jacobiano del mapeo hecho por los rayos de $w(t_1)$ a $w(t)$. De (2.41) y (2.42) obtenemos ahora la solución de (2.39) en la forma

$$A(t) = A(t_0) \left[\frac{\xi(t_0)}{\xi(t)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.43)$$

De la ecuación anterior vemos que $A(t)$ varía inversamente como la raíz cuadrada de ξ , esto es, cuando ξ disminuye A se incrementa. Por tanto la convergencia de rayos tiende a incrementar A .

A fin de simplificar (2.43) consideremos algunos conceptos de la geometría diferencial. Si P_1 es un punto regular de una superficie S y \hat{n} es el vector normal unitario a S en P_1 , cualquier plano a través de P_1 el cual es paralelo a \hat{n} corta a S en una curva, esta curva será llamada sección normal. Entonces consideremos la curvatura κ y el radio de curvatura $\rho = \frac{1}{\kappa}$ de la sección normal en el punto P_1 ; κ depende de la dirección del plano. Se puede mostrar [5] que existen dos direcciones ortogonales, las direcciones principales en P_1 , para las cuales κ tiene su valor máximo y mínimo. Estos valores son llamados las curvaturas principales de S en P_1 y las denotamos por κ_1 y κ_2 . Entonces el producto

$$g = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}, \quad (2.44)$$

es llamada curvatura Gaussiana de la superficie S en P_1 .

Consideremos ahora tomar S como el frente de onda $w(t_1)$, y consideremos P_1 como el punto de intercepción del rayo R de interés y la superficie $w(t_1)$. Entonces consideramos el plano a través de R el cual corta a $w(t_1)$ en la sección normal cuyo radio de curvatura es ρ_1 , ver Figura 2.3. El rayo R intercepta al frente de onda paralelo $w(t)$ en el punto P . Sin pérdida de generalidad podemos medir t desde el frente de onda $w(t_1)$. Entonces $t_1 = 0$ y la distancia desde P_1 a P es t . Dado que los frentes de onda son paralelos, el plano de la Figura 2.3 corta a $q(t)$ en una sección normal con radio de curvatura $\rho_1 + t$. El plano a través de R ortogonal al plano de la Figura 2.3 corta a $w(t)$ en una sección normal con radio de curvatura $\rho_2 + t$. Entonces $\rho_1 + t$ y $\rho_2 + t$ son los radios principales de curvatura de $w(t)$ en P .

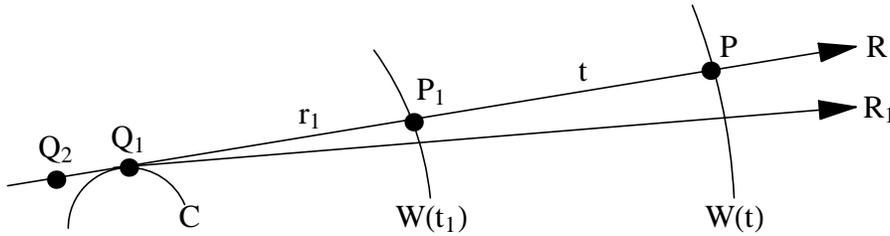


Figura 2.3: Radios de curvatura principal en los frentes de onda $w(t_1)$ y $w(t)$.

Consideremos a Q_1 como el centro de curvatura correspondiente a ρ_1 . En el punto Q_1 el rayo R y el rayo vecino R_1 se interceptan. Precisando, Q_1 es un punto sobre la envolvente de la familia de rayos. Hay un punto similar para Q_2 correspondiente al otro radio principal de curvatura ρ_2 , y los puntos Q_1 y Q_2 viven sobre la envolvente de la familia de rayos. Esta envolvente es una superficie C , llamada cáustica, y los rayos son tangentes a ésta. Algunas veces la cáustica se degenera a una curva o a un punto. En este último caso el punto es llamado foco. La familia de rayos, cada uno normal a $w(t_1)$, y todos los frentes de onda son llamadas una congruencia normal de rayos.

Por último sea $d\theta_1$ el ángulo entre dos rayos R y R_1 . Este ángulo subtiende arcos sobre $w(t_1)$ y $w(t)$ cuyas longitudes son $\rho_1 d\theta_1$ y $(\rho_1 + t)d\theta_1$, respectivamente. Similarmente podemos tomar un rayo R_2 en el plano normal al plano de la Figura 2.3 el cual hace un ángulo $d\theta_2$ con R . Este último ángulo subtiende arcos sobre $w(t_1)$ y $w(t)$ de longitudes $\rho_2 d\theta_2$ y $(\rho_2 + t)d\theta_2$, respectivamente. Se sigue ahora que la razón de expansión (2.42) está dada por

$$\xi(t) = \frac{da(t)}{da(t_1)} = \frac{(\rho_1 + t)d\theta_1 \cdot (\rho_2 + t)d\theta_2}{\rho_1 d\theta_1 \rho_2 d\theta_2} = \frac{(\rho_1 + t)(\rho_2 + t)}{\rho_1 \rho_2} = \frac{g(0)}{g(t)}, \quad (2.45)$$

donde $g(t)$ es la curvatura Gaussiana, (2.44), de $w(t)$ en P .

La ecuación (2.45) permite escribir la amplitud A , (2.43), en la forma

$$A(t) = A(t_0) \left[\frac{(\rho_1 + t_0)(\rho_2 + t_0)}{(\rho_1 + t)(\rho_2 + t)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.46)$$

Aquí ρ_1 y ρ_2 son los radios principales de curvatura del frente de onda en $t = 0$. La ecuación (2.46) es justamente (2.22) cuando elegimos $t_0 = 0$.

Capítulo 3

Caso circular

En este capítulo buscaremos soluciones asintóticas, $k \gg 1$, de la ecuación de Helmholtz para un dominio circular de radio a y condiciones de frontera tipo Dirichlet o tipo Neumann a través de la aproximación de onda corta descrita en la sección 2.2. Deduciremos expresiones asintóticas tanto para los valores propios como las funciones propias del operador de Helmholtz en este dominio. Compararemos las expresiones asintóticas producidas por la aproximación de onda corta con las obtenidas en la sección 1.3.1.

3.1. Ecuación de Helmholtz en un dominio circular: modos de galería de susurros usando la cuantización EBK

Recordemos primero cuál es problema a resolver. Deseamos encontrar modos de galería de susurros a

$$\nabla^2 u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0 \quad \text{en } D, \quad (3.1)$$

con D una circunferencia de radio a y condiciones de frontera

$$u(x, y) = 0 \quad \text{con } (x, y) \in \partial D, \quad (3.2)$$

ó

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{con } (x, y) \in \partial D. \quad (3.3)$$

Ahora consideremos la Figura 3.1.a), vemos que para cualquier rayo cuya órbita no sea periódica y los sucesivos rayos generados por reflexión en la frontera se encuentran delimitados por dos circunferencias concéntricas de radio a_0 y a , $0 < a_0 < a$, siendo todos los rayos tangentes a la circunferencia de radio a_0 , esta circunferencia es la cáustica. También observamos que estos rayos divergen de la cáustica o convergen a ella, ver Figuras 3.1.b) y 3.1.c), dando así dos congruencias normales de rayos uniparamétricas donde el parámetro es el radio del cáustica, a_0 . Obtenemos así que el valor de N , el número de congruencias normales de rayos, es dos y el espacio de cubrimiento será un toro bidimensional, por lo que el número de curvas homologicamente independientes es dos.

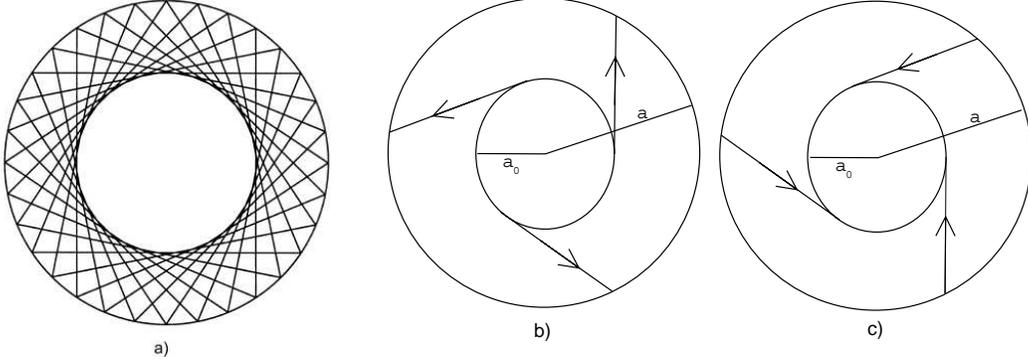


Figura 3.1: a) Un rayo en el interior de un dominio circular y los sucesivos rayos producidos por reflexión en la frontera son todos tangentes a la circunferencia concéntrica de radio a_0 . La distancia entre la cáustica y la frontera ha sido exagerada sólo para propósitos visuales, en realidad la cáustica está muy cerca de la frontera. b) Congruencia normal de rayos que se alejan de la cáustica en dirección hacia la frontera. c) Congruencia normal de rayos que convergen a la cáustica provenientes de la frontera.

Con lo anterior en mente las ecuaciones (2.32) son ahora

$$k \oint \nabla S_j \cdot d\boldsymbol{\sigma}_j = 2\pi \left(m_j + \frac{n_j}{4} \right), \quad j = 1, 2, \quad (3.4)$$

y las ecuaciones (2.33) son

$$k \oint \nabla S_j \cdot d\boldsymbol{\sigma}_j = 2\pi \left(m_j + \frac{n_j}{4} + \frac{b_j}{2} \right), \quad j = 1, 2, \quad (3.5)$$

recordando que m_j es un número entero, n_j es el número de veces que la curva toca la cáustica y b_j el número de veces que la curva toca la frontera. Y la solución aproximada estará dada por

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^2 A_j(\mathbf{x}) e^{ikS_j(\mathbf{x})}. \quad (3.6)$$

Debemos imponer la condición (3.4) a dos curvas cerradas homologicamente independiente del espacio de cubrimiento. Como primera curva elegimos el círculo de radio a_0 , ver Figura 3.2.a), en la cual el vector unitario ∇S_1 es tangente a la cáustica y por tanto la integral de línea en (3.4) es justamente la longitud de curva del círculo de radio a_0 , además en vista de que esta curva no toca la cáustica entonces $n_1 = 0$. Así (3.4), con m_1 reemplazado por m produce

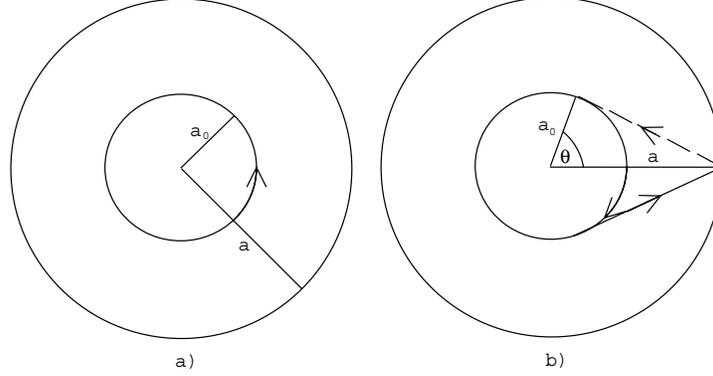


Figura 3.2: *Curvas cerradas en el espacio de cubrimiento asociadas a las dos congruencias normales de rayos de las Figuras 3.1.b) y 3.1.c). a) La primera curva cerrada es la cáustica. b) La curva cerrada consiste de dos rayos, uno que parte de la cáustica y viaja hacia la frontera sobre una de las ramas del espacio de cubrimiento y otro, producido de la reflexión, de la frontera a la cáustica sobre la otra rama del espacio de cubrimiento y la curva se cierra con el arco circular de la cáustica entre los puntos de tangencia de los rayos con la cáustica. Los puntos de tangencia están dados por $\theta = \pm \arccos\left(\frac{a_0}{a}\right)$.*

$$k2\pi a_0 = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Como segunda curva elegimos la mostrada en la Figura 3.2.b). Cada uno de los rayos tiene longitud $(a^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}}$ y el arco circular tiene longitud $2a_0 \arccos\left(\frac{a_0}{a}\right)$. En vista de que esta curva toca la frontera una vez entonces $n_2 = 1$. Con base en esto y reemplazando m_2 por n (3.4) queda como

$$2k \left[(a^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}} - a_0 \arccos\left(\frac{a_0}{a}\right) \right] = 2\pi \left(n + \frac{1}{4} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Despejando a_0 de (3.7) y sustituyéndola en (3.8) tenemos

$$ka \left[1 - \left(\frac{m}{ka} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - m \arccos\left(\frac{m}{ka}\right) = \pi \left(n + \frac{1}{4} \right), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

La ecuación anterior determina el valor propio k para condiciones de frontera (3.3). Esta ecuación será resuelta posteriormente en forma explícita para algunos casos límite.

En el caso de la condición de frontera (3.2) usamos la relación (3.5) con las mismas curvas cerradas que en el caso de (3.3). La primera curva, la cáustica, no toca la frontera por lo que $b_1 = 0$ y como tampoco toca la cáustica $n_1 = 0$ y así (3.2) produce (3.7), con m_1 reemplazado

por m . La segunda curva cerrada toca la frontera una vez por lo que $b_2 = 1$ y $n_2 = 0$, dado que la curva no toca la cáustica. En este caso (3.5), después de sustituir $a_0 = \frac{m}{k}$, produce la ecuación para el valor propio k

$$\left[(ka)^2 - m^2 \right]^{\frac{1}{2}} - m \arccos \left(\frac{m}{ka} \right) = \pi \left(n + \frac{3}{4} \right), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Hasta el momento hemos determinado asintóticamente los valores propios del operador de Helmholtz para las condiciones de frontera tipo Neumann y Dirichlet, sin embargo quedan por determinar las funciones propias correspondientes. Para esto hallaremos expresiones explícitas para las funciones de fase S_j y las amplitudes A_j , $j = 1, 2$; las cuales serán determinadas a partir de

$$S_j(t_j) = S_{0j} + t_j, \quad j = 1, 2, \quad (3.11)$$

y

$$A_j(t_j) = A_{0j} \left[\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + t_j)(\rho_2 + t_j)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, \quad (3.12)$$

respectivamente. La longitud de curva medida sobre el rayo es t_j y ρ_1 y ρ_2 son los radios principales de curvatura del frente de onda $t_j = 0$.

La función S_1 es la longitud de arco medida sobre el rayo que pasa por el punto (r, θ) , $r > a_0$, y es tangente a la cáustica, medida desde el punto (r, θ) hasta el punto de tangencia; así, de la Figura 3.3.a) vemos que esta distancia es $t_1 = (r^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}}$ y S_{01} es el valor de S en el punto donde el rayo que pasa por (r, θ) toca la cáustica, es decir, $S_{01} = a_0 \left[\theta - \arccos \left(\frac{a_0}{r} \right) \right]$. S_1 toma la forma

$$S_1(r, \theta) = S_{01} + t_1 = a_0 \left[\theta - \arccos \left(\frac{a_0}{r} \right) \right] + (r^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.13)$$

donde la dependencia en t_1 de S_1 en (3.11) sea cambiado por (r, θ) .

Para determinar la función S_2 vemos de la Figura 3.3.b) que t_2 es la longitud de curva medida sobre el rayo desde el punto (r, θ) a la frontera y de la frontera a la cáustica, esto es, $t_2 = 2(a^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}} - (r^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}}$ y S_{02} es nuevamente el valor de S en el punto de tangencia sobre la cáustica, esto es, $S_{02} = a_0 \left[\theta - 2 \arccos \left(\frac{a_0}{a} \right) + \arccos \left(\frac{a_0}{r} \right) \right]$. S_2 queda expresada por

$$S_2(r, \theta) = S_{02} + t_2 = a_0 \left[\theta + \arccos \left(\frac{a_0}{r} \right) - 2 \arccos \left(\frac{a_0}{a} \right) \right] + 2(a^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}} - (r^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}}.$$

De (3.8) obtenemos $a_0 \arccos \left(\frac{a_0}{a} \right) = -\frac{\pi}{k} \left(n + \frac{1}{4} \right) + (a^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}}$, la cual usamos en la expresión anterior para obtener

$$S_2(r, \theta) = a_0 \left[\theta + \arccos \left(\frac{a_0}{r} \right) \right] - (r^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\pi}{k} \left(n + \frac{1}{4} \right). \quad (3.14)$$

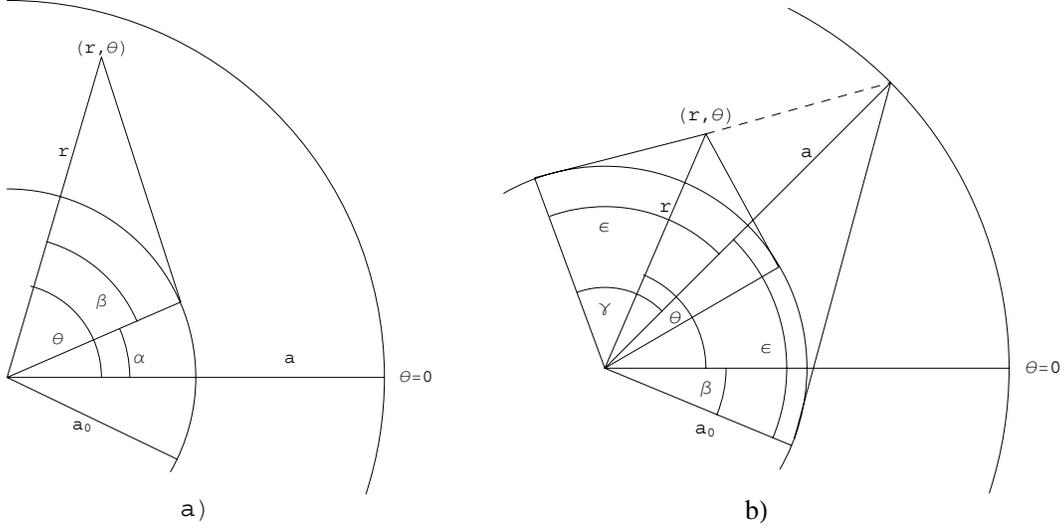


Figura 3.3: Para cada punto (r, θ) , $r > a_0$, hay dos posibles trayectorias sobre los rayos, una para cada función de fase S_j , $j = 1, 2$. a) Primer trayectoria para llegar a (r, θ) . El punto de tangencia sobre la cáustica, (a_0, α) , está dado por $\alpha = \theta - \beta$. b) Segunda trayectoria para llegar a (r, θ) . El punto de tangencia sobre la cáustica, (a_0, β) , está dado por $\beta = \theta + \gamma - 2\epsilon$.

Para la condición de frontera (3.2) la expresión para S_1 no cambia, pero para S_2 , en forma análoga a lo hecho para (3.10), tenemos

$$S_2(r, \theta) = a_0 \left[\theta + \arccos \left(\frac{a_0}{r} \right) \right] - (r^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\pi}{k} \left(n + \frac{3}{4} \right). \quad (3.15)$$

Una vez determinadas las funciones de fase quedan por determinar las amplitudes $A_j(r, \theta)$, $j = 1, 2$. De (3.12) observamos que para el caso bidimensional $\rho_2 \rightarrow \infty$, entonces tomando el límite tenemos

$$A_j = A_{0j} \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + t_j} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2.$$

En la expresión anterior vemos que conforme nos acercamos a la cáustica ρ_1 se aproxima a cero y A_{0j} tiende a infinito, sin embargo el producto $A_{0j}\sqrt{\rho_1}$ tiene un valor finito; denotando este valor por A'_0 tenemos que

$$A_j = \frac{A'_{0j}}{\sqrt{t_j}}, \quad j = 1, 2. \quad (3.16)$$

Así, para un rayo que diverge de la cáustica la amplitud es

$$A_1(r, \theta) = \frac{A'_0}{(r^2 - a_0^2)^{\frac{1}{4}}}, \quad (3.17)$$

y para un rayo que converge a la cáustica

$$A_2(r, \theta) = \frac{A'_0}{(r^2 - a_0^2)^{\frac{1}{4}}}, \quad (3.18)$$

en la expresión anterior se hizo explícita la condición $A_1 = A_2$ en ∂D deducida de (2.27).

Ahora que se han hallado k , S_1, S_2, A_1 y A_2 y haciendo $\xi = -m \arccos\left(\frac{m}{kr}\right) + \left[(kr)^2 - m^2\right]^{\frac{1}{2}}$ las sustituimos en (3.6) y usamos (3.7) para reducir ka_0 a m , obtenemos

$$u(\mathbf{x}) = \frac{A'_0 k^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}}{\left[(kr)^2 - m^2\right]^{\frac{1}{4}}} \left[e^{i(\xi - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\xi - \frac{\pi}{4})} \right] e^{im\theta},$$

si en la expresión anterior tomamos $A'_0 = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{k}}$ las funciones propias para la condición de frontera (3.3) toman la forma

$$u_m(r, \theta) = \frac{\cos \left\{ \left[(kr)^2 - m^2 \right]^{\frac{1}{2}} - m \arccos\left(\frac{m}{kr}\right) - \frac{\pi}{4} \right\}}{\left[(kr)^2 - m^2 \right]^{\frac{1}{4}}} e^{im\theta}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

En el caso de la condición de frontera (3.2) encontramos que $A_1 = -A_2$ en ∂D por lo que $u(r, \theta) = A_1 (e^{ikS_1} - e^{ikS_2})$, sin embargo el factor adicional $e^{i\pi}$ en e^{ikS_2} , el cual se sigue del último término de (3.15), cancela el signo menos de $-A_2$ por lo tanto para esta condición de frontera se obtiene el mismo resultado (3.19).

La expresión (3.19) determina el comportamiento asintótico de las funciones propias para ambas condiciones de frontera (3.2) y (3.3) en la región $r > a_0 = \frac{m}{k}$.

Para continuar con nuestro análisis debemos ahora considerar la región interior a la cáustica, esto es la región en que $r < a_0$. De la ecuación (3.13) vemos que cuando $r < a_0$ los términos $\arccos\left(\frac{a_0}{r}\right)$ y $(r^2 - a_0^2)^{\frac{1}{2}}$ serán complejos y pueden ser reemplazados por $i \operatorname{arcosh}\left(\frac{a_0}{r}\right)$ y $i(a_0^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$, respectivamente. De lo anterior tenemos que las funciones de fase pueden ser elegidas como

$$S(r, \theta) = a_0\theta \mp i \left[a_0 \operatorname{arcosh}\left(\frac{a_0}{r}\right) - (a_0^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.20)$$

La correspondiente expresión para la amplitud A puede ser obtenida de (3.17). Esto es

$$A(r, \theta) = \frac{A'_0 e^{+i\frac{\pi}{4}}}{(a_0^2 - r^2)^{\frac{1}{4}}}. \quad (3.21)$$

La elección de la rama del radical en (3.21) se basa en las consideraciones hechas en la discusión que sigue a (2.29). Ahora observamos que las ondas para las cuales aplica el signo superior en la ecuación (3.20) decrecen conforme se incrementa la distancia a la cáustica, mientras que las ondas para las cuales el signo inferior aplica divergen. Por tanto asumimos que el término que se incrementa debe ser omitido. Así al sustituir las funciones de fase y las amplitudes en (3.6) obtenemos para las funciones propias

$$u_m(r, \theta) = \frac{e^{[m^2 - (kr)^2]^{\frac{1}{2}} - m \operatorname{arc} \cosh\left(\frac{m}{kr}\right)} e^{im\theta}}{2 \left[m^2 - (kr)^2 \right]^{\frac{1}{4}}}. \quad (3.22)$$

La expresión (3.22) determina el comportamiento asintótico de las funciones propias para ambas condiciones de frontera (3.2) y (3.3) en la región $r < a_0 = \frac{m}{k}$.

3.2. Comparación con los resultados de la sección 1.3.1

Ya que hemos determinado, asintóticamente, tanto los valores propios como las funciones propias nos queda por verificar que éstas describen efectivamente el fenómeno de la galería de los susurros, es decir, debemos verificar que (3.19) tiene el comportamiento descrito en la sección 1.3.1 en el límite apropiado.

Consideremos primero el caso en que $kr \gg m$, el cual corresponde a $\eta > 1$ en la sección 1.3.1 en el Capítulo 1. Para este caso (3.9) y (3.10), desarrollando en series de Taylor a primer orden alrededor de $\frac{m}{kr} \ll 1$, producen

$$ka = \pi \left(n + \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \right) \quad \text{cuando } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ en } \partial D, \quad (3.23)$$

$$ka = \pi \left(n + \frac{m}{2} + \frac{3}{4} \right) \quad \text{cuando } u = 0 \text{ en } \partial D, \quad (3.24)$$

y la parte radial de las funciones propias (3.19) toma la forma

$$R(r) \approx \frac{\cos\left(kr - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{kr}}, \quad (3.25)$$

la cual coincide, salvo el factor $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, con (1.26) cuando elegimos $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$. Con esto tenemos que las funciones propias aproximadas mediante el límite de onda corta oscilarán densamente entre la cáustica y la frontera.

Por otro lado de la ecuación (1.29) y de la definición de η en la sección 1.3.1 tenemos que $\operatorname{arc} \cosh\left(\frac{m}{kr}\right) = y_0$ y $\sinh y_0 = \left[\frac{m^2}{(kr)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$ por lo que la parte radial de (3.22) es

$$R(r) = \frac{e^{kr \sinh y_0 - my_0}}{2\sqrt{kr \sinh y_0}}, \quad (3.26)$$

la cual coincide con (1.26), salvo el factor $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Por tanto la solución al problema (3.1) con condiciones de frontera (3.2) o (3.3) difiere de cero apreciablemente sólo en la región anular entre la frontera y la cáustica. Nótese que en este caso la aproximación de onda corta produce la expresión exacta para la parte angular, es decir, el factor $e^{im\theta}$ es justo la solución exacta (1.17) de (1.15).

Para analizar qué sucede sobre de la cáustica consideramos el límite $m \approx kr$ e introducimos el parámetro $0 < \epsilon \ll 1$ definido mediante

$$\frac{m}{ka} = 1 - \epsilon, \quad (3.27)$$

con lo cual estaremos sobre la cáustica cuando tomemos el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

Ahora tomemos el límite $m \approx kr$ en la función propia (3.19). Para esto expresamos $\left[(kr)^2 - m^2\right]^{\frac{1}{2}} - m \arccos\left(\frac{m}{kr}\right) - \frac{\pi}{4}$ y $\left[(kr)^2 - m^2\right]^{\frac{1}{4}}$ en términos de ϵ usando (3.27) y desarrollamos las expresiones resultantes en serie de Taylor a primer orden alrededor a $\epsilon = 0$. Haciendo esto las funciones propias toman la forma

$$u_m(r, \theta) = \frac{\cos\left(kr\sqrt{2\epsilon} - m\sqrt{2\epsilon} - \frac{\pi}{4}\right)}{(2\epsilon)^{\frac{1}{4}} \sqrt{kr}} e^{im\theta}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

La ecuación (3.28) diverge a $+\infty$ en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ (ver Figura 3.4). Por lo que corroboramos lo dicho en la sección 2.2, de que nuestros resultados no son válidos en la cáustica. Una forma de regularizar nuestros resultados sería tomar en cuenta las contribuciones de orden mayor en los desarrollos en serie de Taylor, sin embargo en este trabajo no será hecho debido a que nos interesa aplicar la aproximación de onda corta a dominios más generales y no el problema de regularizar las soluciones en la cáustica.

La Figura 3.4 muestra el comportamiento exponencialmente pequeño antes de la cáustica y oscilatorio entre la cáustica y la frontera. Sobre la cáustica se tiene una singularidad.

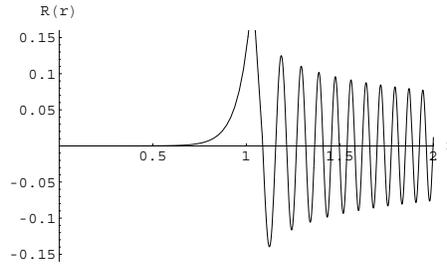


Figura 3.4: Comportamiento asintótico de las funciones de Bessel a través de la aproximación de onda corta. La aproximación es singular en la cáustica.

Capítulo 4

Caso elíptico

En este capítulo usaremos la cuantización de EBK para obtener expresiones asintóticas para los valores propios y las funciones propias de la ecuación de Helmholtz en un dominio elíptico. Procederemos en forma similar a lo hecho en el capítulo anterior para el caso circular.

4.1. Ecuación de Helmholtz en un dominio elíptico: modos de galería de susurros

En el Capítulo 1 introdujimos las coordenadas elípticas

$$x = \frac{c}{2} \cosh \mu \cos \theta, \quad y = \frac{c}{2} \sinh \mu \sin \theta, \quad \mu \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (4.1)$$

de las cuales tenemos que las curvas $\mu = \text{constante}$ y $\theta = \text{constante}$ son elipses e hipérbolas cofocales, respectivamente (ver Figura 4.1). Nótese que la coordenada θ es el ángulo agudo de la asíntota de la hipérbola correspondiente con el eje x . En este sistema de coordenadas la elipse frontera será representada por $\mu = R_0$, por lo que μ tomará valores en el intervalo $[0, R_0]$ para representar puntos interiores a la elipse $\mu = R_0$.

La familia de elipses está caracterizada por los parámetros

$$\varepsilon = \frac{1}{\cosh \mu}, \quad a = \frac{c}{2} \cosh \mu, \quad b = \frac{c}{2} \sinh \mu, \quad (4.2)$$

donde ε , a y b denotan la excentricidad, semieje menor y semieje mayor de la elipse, respectivamente.

En estas coordenadas deseamos encontrar modos de galería de susurros para la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 u(\mu, \theta) + k^2 u(\mu, \theta) = 0, \quad 0 \leq \mu < R_0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (4.3)$$

con condición de frontera tipo Neumann

$$\left. \frac{\partial u(\mu, \theta)}{\partial \mu} \right|_{\mu=R_0} = 0, \quad (4.4)$$

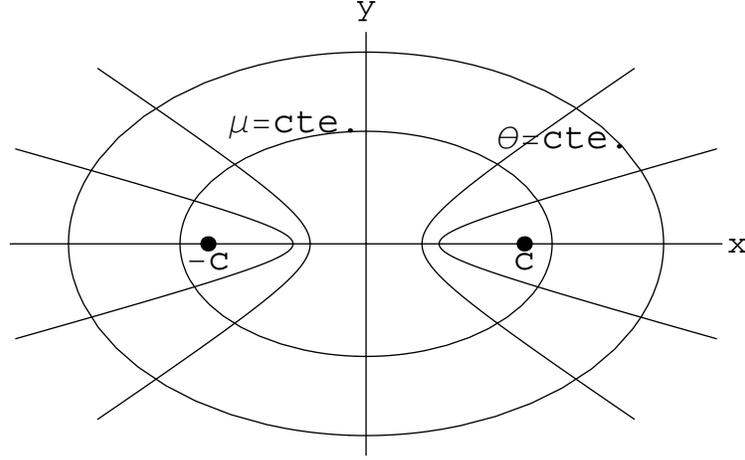


Figura 4.1: *Coordenadas elípticas. Las curvas $\mu = \text{cte.}$ representan elipses cofocales y las curvas $\theta = \text{cte.}$ hipérbolas cofocales.*

o condición tipo Dirichlet

$$u(\mu, \theta)|_{\mu=R_0} = 0. \quad (4.5)$$

A fin de aplicar la cuantización de EBK, descrita en el Capítulo 2, debemos determinar el número de congruencias normales de rayos en un dominio elíptico. Para esto vemos de la Figura 4.2.a) que para cualquier rayo, todos los rayos que resultan de la reflexión en la frontera se encuentran delimitados por dos elipses cofocales $\mu = \mu_0$ y $\mu = R_0$, $0 < \mu_0 < R_0$, siendo todos los rayos tangentes a la elipse $\mu = \mu_0$, esta elipse es la cáustica. Esto sugiere, al igual que en el caso circular, que consideremos las dos congruencias normales de rayos mostradas en las Figuras 4.2.b) y 4.2.c).

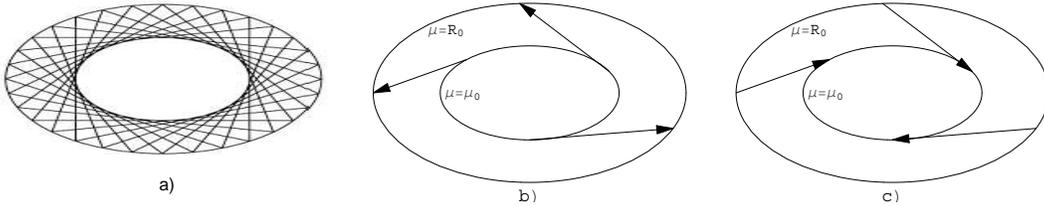


Figura 4.2: *a) Un rayo en el interior de un dominio elíptico y los rayos sucesivos producidos por reflexión en la frontera son todos tangentes a una elipse $\mu = \mu_0$ cofocal a la elipse frontera. b) Congruencia formada de rayos tangentes a la cáustica, dirigidos hacia la frontera. c) Congruencia formada de rayos tangentes a la cáustica, dirigidos hacia la cáustica. Ambas congruencias de rayos se encuentran delimitadas por la cáustica $\mu = \mu_0$ y la frontera $\mu = R_0$.*

En vista de la existencia de dos congruencias normales de rayos las N condiciones (2.32)

o (2.33) del Capítulo 2 son ahora dos y el espacio de cubrimiento es un toro bidimensional, por lo que habrá que imponer a dos curvas homológicamente independientes las condiciones de cuantización:

$$k \oint \nabla S_j \cdot d\sigma_j = 2\pi \left(m_j + \frac{n_j}{4} \right), \quad j = 1, 2, \quad (4.6)$$

en el caso de condición de frontera tipo Neumann (4.4), o para las de tipo Dirichlet (4.5) la cuantización

$$k \oint \nabla S_j \cdot d\sigma_j = 2\pi \left(m_j + \frac{n_j}{4} + \frac{b_j}{2} \right), \quad j = 1, 2. \quad (4.7)$$

En ambas ecuaciones (4.6) y (4.7), m_j es un número entero, n_j es el número de veces que la curva toca la cáustica y b_j el número de veces que la curva toca la frontera.

Las ecuaciones (4.6) o (4.7) determinan el valor propio k y el parámetro μ_0 para las correspondientes condiciones de frontera. Estos resultados son idénticos a los obtenidos para el caso circular. Lo anterior se debe a que el espacio de cubrimiento en ambos casos es un toro bidimensional.

Procedemos ahora a determinar la forma asintótica del valor propio k y el parámetro μ_0 , para esto debemos imponer la condición (4.6) o (4.7) a dos curvas cerradas homológicamente independientes del espacio de cubrimiento. Como primera curva elegimos, al igual que en el caso circular, la cáustica $\mu = \mu_0$ (ver Figura 4.3.a). La integral de línea en (4.6) es la longitud de curva de la cáustica, es decir, el perímetro de la elipse $\mu = \mu_0$. Como esta curva no toca la cáustica ni la frontera entonces $n_1 = 0$ y $b_1 = 0$ en (4.6) o (4.7), por tanto ambas condiciones llevan a la misma ecuación; esta ecuación es, reemplazando m_1 por m ,

$$2kc \cosh(\mu_0) E\left(\frac{\pi}{2}, \operatorname{sech} \mu_0\right) = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.8)$$

donde $E(\frac{\pi}{2}, \kappa)$ es la integral elíptica completa de segunda especie.

En general la integral elíptica de segunda especie se define mediante

$$E(x, \kappa) = \int_0^x \sqrt{1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 t} dt. \quad (4.9)$$

En este caso x es una variable real en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $0 \leq \kappa = \operatorname{sech} \mu_0 \leq 1$ es el módulo elíptico, el cual resulta ser la excentricidad de la elipse (ver (4.2)). La integral elíptica completa $E(\frac{\pi}{2}, \operatorname{sech} \mu_0)$ se obtiene haciendo $x = \frac{\pi}{2}$ en (4.9).

Como segunda curva elegimos la curva de la Figura 4.3.b). Esta curva consiste de dos rayos tangentes a la cáustica que parten del punto $(R_0, 0)$ en la elipse frontera y se cierra con el arco elíptico comprendido entre los puntos de tangencia. Para calcular los puntos de tangencia sobre la cáustica consideramos todas las rectas tangentes a la cáustica en el punto (μ_0, θ_0) sobre la cáustica, en coordenadas cartesianas (x, y) estas rectas son

$$y = \frac{c}{2} \sin \theta_0 \sinh \mu_0 - \left(x - \frac{c}{2} \cos \theta_0 \cosh \mu_0 \right) \cot \theta_0 \tanh \mu_0.$$

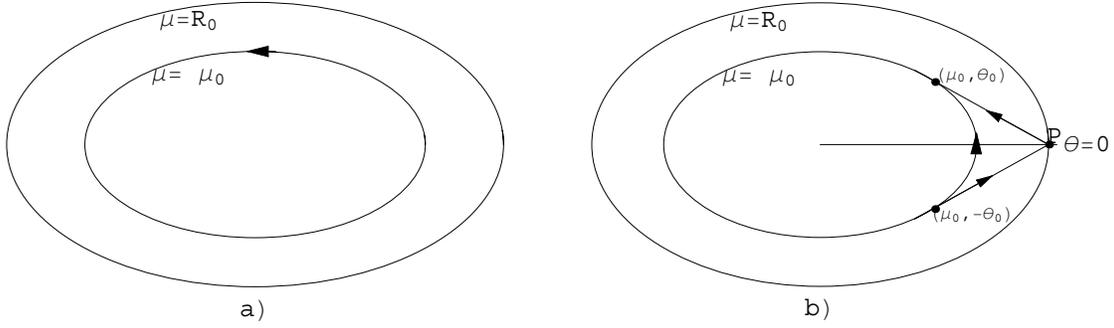


Figura 4.3: *Curvas cerradas linealmente independientes en el espacio de cubrimiento asociadas a las dos congruencias de rayos de la Figura 4.2. a) La cáustica $\mu = \mu_0$. b) Esta curva consiste de un rayo desde la cáustica a la frontera sobre una de las hojas del espacio de cubrimiento seguida de un rayo, producido por reflexión, de la frontera a la cáustica sobre la otra hoja del espacio de cubrimiento y se cierra con el arco elíptico de la cáustica entre los puntos de tangencia de los rayos con la cáustica.*

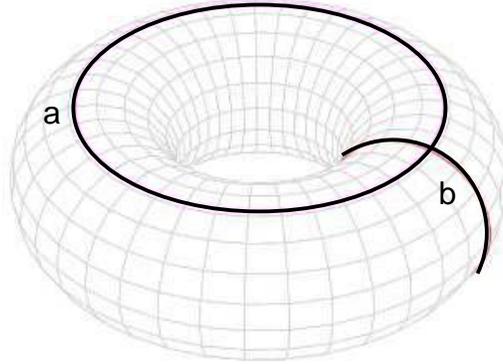


Figura 4.4: *Curvas homológicamente independientes en el espacio de cubrimiento. La curva etiquetada con **a** corresponde a la curva mostrada en la Figura 4.3.a) y la etiquetada con **b** a la mostrada en la Figura 4.3.b).*

Imponemos sobre la ecuación anterior que pase por el punto $P = (\frac{c}{2} \cosh R_0, 0)$ en la elipse frontera. Haciendo esto obtenemos una ecuación para θ_0 cuya solución es

$$\theta_0 = \pm \arccos \left(\frac{\cosh \mu_0}{\cosh R_0} \right). \quad (4.10)$$

Por tanto los puntos de tangencia sobre la cáustica son $(\mu_0, \theta_0) = \left(\mu_0, \pm \arccos \left(\frac{\cosh \mu_0}{\cosh R_0} \right) \right)$. Con base en lo anterior podemos calcular la longitud de la curva mostrada en la Figura

4.3.b) y sustituirla en (4.6), en esta ecuación $n_2 = 1$ ya que la curva toca la cáustica una vez y reemplazando a m_2 por n obtenemos

$$2k \left[\frac{c}{2} \sinh R_0 (1 - \cosh^2 \mu_0 \operatorname{sech}^2 R_0)^{\frac{1}{2}} \right] - \quad (4.11)$$

$$-2k \left\{ \frac{c}{2} \cosh \mu_0 \left[E \left(\frac{\pi}{2}, \operatorname{sech} \mu_0 \right) - E \left(\arcsen \left(\frac{\cosh \mu_0}{\cosh R_0} \right), \operatorname{sech} \mu_0 \right) \right] \right\} = 2\pi \left(n + \frac{1}{4} \right).$$

En (4.11) el término entre corchetes del primer renglón corresponde a la longitud de cada rayo desde el punto en la frontera $(R_0, 0)$ al punto de tangencia (μ_0, θ_0) y el término entre llaves del segundo renglón es la longitud del arco elíptico entre los puntos $(\mu_0, 0)$ y (μ_0, θ_0) .

En el caso de la condición de frontera (4.5) la condición (4.7) produce la ecuación (4.11) con el término $\frac{1}{4}$ del lado derecho de la igualdad reemplazado por $\frac{3}{4}$, esto debido a que la curva toca la frontera una vez por lo que $b_2 = 1$.

Las ecuaciones (4.8) y (4.11) determinan el valor propio k y el correspondiente parámetro μ_0 para cada par de valores de m y n . Podemos usar (4.8) para simplificar (4.11), sin embargo, a diferencia del caso circular donde despejamos a_0 de (3.7), el parámetro que caracteriza la cáustica, en esta ocasión no se podrá despejar μ_0 de (4.8) para obtener una ecuación para k , pero lo que sí podemos hacer para simplificar la expresión (4.11) es tomar de (4.8) $ck \cosh \mu_0 = \frac{\pi m}{E(\frac{\pi}{2}, \operatorname{sech} \mu_0)}$, con lo que (4.11) nos da la siguiente ecuación para μ_0

$$\frac{\sinh R_0 (\operatorname{sech}^2 \mu_0 - \operatorname{sech}^2 R_0)^{\frac{1}{2}} + E \left(\arcsen \left(\frac{\cosh \mu_0}{\cosh R_0} \right), \operatorname{sech} \mu_0 \right)}{E \left(\frac{\pi}{2}, \operatorname{sech} \mu_0 \right)} = 1 + \frac{2 \left(n + \frac{1}{4} \right)}{m}. \quad (4.12)$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior decrece conforme μ_0 varía en el intervalo $(0, R_0)$ tomando su valor más alto, $\sinh R_0 (1 - \operatorname{sech}^2 R_0)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{sech} R_0$, en $\mu_0 = 0$ y el más bajo, 1, en $\mu_0 = R_0$; por lo tanto (4.12) tendrá solución sólo si el lado derecho está comprendido entre estos dos valores extremos. Esta restricción sobre (4.12) hace que m y n deban satisfacer la siguiente desigualdad

$$0 \leq n \leq \frac{m}{2} \left[\frac{\sinh^2 R_0}{\cosh R_0} + \operatorname{sech} R_0 - 1 \right] - \frac{1}{4}. \quad (4.13)$$

Cuando se satisface (4.13), la ecuación (4.12) puede ser resuelta para μ_0 y entonces k puede ser hallado de (4.8).

Ya que obtuvimos las expresiones asintóticas para los valores propios queda por determinar la forma asintótica de las funciones propias, éstas están dadas por (2.18), en el Capítulo 2, con $N = 2$, esto es

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^2 A_j(\mathbf{x}) e^{ikS_j(\mathbf{x})}, \quad (4.14)$$

donde las funciones de fase S_j se determinan a partir de (2.21), que en este caso son

$$S_j(t_j) = S_{0j} + t_j, \quad j = 1, 2, \quad (4.15)$$

y las amplitudes A_j son

$$A_j = \frac{A'_{0j}}{\sqrt{t_j}}, \quad j = 1, 2, \quad (4.16)$$

donde t_j , $j = 1, 2$, es la longitud de curva medida sobre el rayo. La ecuación (4.16) se obtiene de (2.22) al tomar el límite $\rho_2 \rightarrow \infty$, análogo a lo que se hizo para obtener la ecuación (3.16) del Capítulo 3.

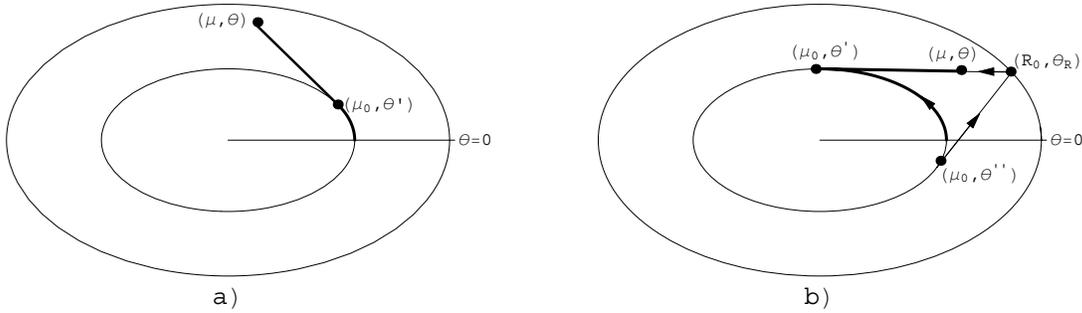


Figura 4.5: a) Rayo que pasa por el punto (μ, θ) y es tangente a la cáustica en (μ_0, θ') . b) Rayos tangentes a la cáustica en los puntos (μ_0, θ') y (μ_0, θ'') y tocan la frontera en el punto (R_0, θ_R) .

Pasemos ahora a determinar la forma “explícita” de las funciones propias aproximadas, esto lo haremos en forma análoga al caso circular. Por tanto consideramos un punto (μ, θ) fuera de la cáustica ($\mu > \mu_0$) y el rayo que pasa por él y es tangente a la cáustica en el punto (μ_0, θ') (ver Figura 4.5.a). Entonces la longitud t del rayo desde el punto (μ, θ) hasta el punto de tangencia (μ_0, θ') está dado por

$$t = \frac{c}{2} \left[(\cosh \mu \cos \theta - \cosh \mu_0 \cos \theta')^2 + (\sinh \mu \sin \theta - \sinh \mu_0 \sin \theta')^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.17)$$

El valor inicial de la función de fase S_{01} corresponde a la longitud de curva medida sobre la cáustica desde un punto inicial hasta el punto de tangencia, por tanto la ecuación (4.15) produce para la función de fase $S_1 = S_{01} + t_1$, con $t_1 = t$, del rayo saliente de la cáustica

$$S_1(\mu, \theta) = \frac{c}{2} \int_0^{\theta'} (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta + \frac{c}{2} \left[(\cosh \mu \cos \theta - \cosh \mu_0 \cos \theta')^2 + (\sinh \mu \sin \theta - \sinh \mu_0 \sin \theta')^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.18)$$

donde la integral corresponde a la longitud de curva medida sobre la cáustica desde un punto inicial ($\theta = 0$) hasta el punto de tangencia.

Usando el teorema de adición para integrales elípticas (ver Apéndice B), la longitud del rayo (4.17) se escribe en la forma

$$t = \frac{c}{2} \left[\int_{\mu_0}^{\mu} (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}} d\mu \pm \int_{\theta'}^{\theta} (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \right], \quad (4.19)$$

donde el signo superior aplica si $\theta > \theta'$ y el signo inferior si $\theta < \theta'$. Para el rayo considerado se tiene $\theta > \theta'$ (ver Figura 4.5.a)) con lo que (4.18) queda expresada como

$$S_1(\mu, \theta) = \frac{c}{2} \left[\int_{\mu_0}^{\mu} (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}} d\mu + \int_0^{\theta} (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \right]. \quad (4.20)$$

A diferencia del caso circular en el caso elíptico el punto de tangencia no tiene una expresión explícita sencilla, por lo que es preferible usar la representación integral de $S_1(\mu, \theta)$ dada por (4.20) la cual no depende explícitamente del punto de tangencia.

Para construir la segunda función de fase, S_2 , recordamos que está asociada con la longitud del rayo que parte del punto (μ, θ) , toca la frontera y es reflejado hacia la cáustica pasando tangente a ésta en el punto (μ_0, θ'') (ver Figura 4.5.b)). Sin embargo determinar S_2 de esta forma produce expresiones complicadas debido a que depende tanto del punto de tangencia del rayo con la cáustica como del punto sobre la frontera donde el rayo es reflejado. Para salvar este problema haremos uso de un resultado de la geometría elemental: la longitud de la curva cerrada usada para deducir la ecuación (4.11) es independiente del punto sobre la frontera. En vista de esto tenemos que la función de fase $S_2(\mu, \theta)$ es

$$\begin{aligned} S_2(\mu, \theta) &= S_{02} - t \\ &= \frac{c}{2} \left[- \int_{\mu_0}^{\mu} (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}} d\mu + \int_0^{\theta} (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde t toma la forma apropiada para $\theta < \theta'$ de (4.19).

Para determinar las amplitudes $A_1(\mu, \theta)$ y $A_2(\mu, \theta)$ sabemos de (4.16) que son proporcionales a $t^{-\frac{1}{2}}$. Usando la expresión (4.17) para t es posible mostrar que (ver Apéndice B)

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{c^2}{4} (\sinh \mu_0 \cosh \mu_0)^{-2} (\cosh^2 \mu_0 \sin^2 \theta' + \sinh^2 \mu_0 \cos^2 \theta') \\ &\quad \times (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0) (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Para un rayo particular el término $(\sinh \mu_0 \cosh \mu_0)^{-2} (\cosh^2 \mu_0 \sin^2 \theta' + \sinh^2 \mu_0 \cos^2 \theta')$ en (4.22) es constante, por lo que las amplitudes se escriben en la forma

$$A_1(\mu, \theta) = B_1(\theta') (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{4}} (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{-\frac{1}{4}}, \quad (4.23)$$

$$A_2(\mu, \theta) = B_2(\theta'') (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{4}} (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.24)$$

En las ecuaciones (4.23) y (4.24) θ' y θ'' denotan los puntos de tangencia con la cáustica de rayo saliente y el rayo entrante que pasan por el punto (μ, θ) (ver Figura 4.5.b)). Dado que los rayos salientes son continuación de los rayos entrantes se sigue de la discusión que sigue a (2.29) en el Capítulo 2 que $B_1(\theta') = e^{-i\frac{\pi}{2}} B_2(\theta')$. Además para puntos sobre la frontera (2.27) muestra que $B_2(\theta'') = B_1(\theta')$, estas dos expresiones se combinan para dar $B_2(\theta'') = e^{-i\frac{\pi}{2}} B_2(\theta')$ y por tanto

$$|B_2(\theta')| = |B_2(\theta'')|. \quad (4.25)$$

El valor absoluto en (4.25) es necesario debido a que en la condición de univalencia el cambio de fase en las amplitudes debe tomarse en cuenta. Los argumentos θ'' y θ' en (4.25) están relacionados por la condición de que ambos θ' y θ'' denoten los puntos de tangencia con la cáustica de los rayos que tocan la frontera en el punto común (R_0, θ_R) , ver Figura 4.5.b). La solución más sencilla de (4.25) es que B_2 sea una constante. Por tanto elegimos

$$B_2(\theta') = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad (4.26)$$

de donde obtenemos $B_1(\theta') = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ y $B_2(\theta'') = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ por lo que las funciones de amplitud toman la forma

$$A_1(\mu, \theta) = A_2(\mu, \theta) = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{4}} (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.27)$$

Ya que hemos calculado las funciones de fase y las amplitudes podemos sustituirlas en (4.14). Haciendo esto obtenemos que las funciones propias para $\mu > \mu_0$ están dadas por

$$\begin{aligned} u(\mu, \theta) &= (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{4}} (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{-\frac{1}{4}} \\ &\times \exp \left[\frac{ikc}{2} \int_0^\theta (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \right] \\ &\times \cos \left[\frac{kc}{2} \int_{\mu_0}^\mu (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}} d\mu - \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

En el caso de la condición de frontera (3.2) se produce el mismo resultado (4.28) por el mismo argumento que sigue a (3.19) en el Capítulo 3.

Consideramos ahora el caso en que $\mu < \mu_0$, es decir, (μ, θ) está en el interior de la cáustica. En este caso el término $(\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}}$ en (4.20) y (4.21) deberá ser reemplazado por $i(\cosh^2 \mu_0 - \cosh^2 \mu)^{\frac{1}{2}}$, mientras que el término $(\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{4}}$ en (4.27) por $e^{i\frac{\pi}{4}} (\cosh^2 \mu_0 - \cosh^2 \mu)^{\frac{1}{4}}$. Usando esto y reteniendo sólo los términos que no divergen (como

se hizo en el caso circular para la ecuación (3.22)) las funciones propias en el interior de la cáustica están dadas por

$$\begin{aligned}
 u(\mu, \theta) &= \frac{1}{2} (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{4}} (\cosh^2 \mu_0 - \cosh^2 \mu)^{-\frac{1}{4}} \\
 &\times \exp \left[\frac{ikc}{2} \int_0^\theta (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \right] \\
 &\times \exp \left[-\frac{kc}{2} \int_{\mu_0}^\mu (\cosh^2 \mu_0 - \cosh^2 \mu)^{\frac{1}{2}} d\mu \right]. \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

De esta última expresión vemos que la solución a la ecuación de Helmholtz será exponencialmente pequeña en el interior de la cáustica y de (4.28) que oscilará densamente en la región comprendida entre la cáustica y la frontera. Por tanto las funciones propias para el dominio elíptico exhiben un comportamiento de galería de susurros.

4.1.1. Aproximación de excentricidad pequeña

Consideramos ahora el caso en que la excentricidad de la elipse frontera, $\text{sech } R_0$, y la excentricidad de la cáustica, $\text{sech } \mu_0$, son pequeñas. En este caso las ecuaciones (4.8) y (4.11) pueden resolverse explícitamente. Para esto vemos que cuando $\kappa = \text{sech } \mu_0 \ll 1$ el integrando de (4.9) puede desarrollarse en serie de Taylor entorno a $\kappa = 0$ e integrada término a término, así el valor aproximado de (4.9) a primer orden es

$$E(x, \kappa) \approx x + \frac{1}{8} (-2x + \text{sen}(2x)) \kappa^2. \tag{4.30}$$

Empezamos por resolver la ecuación (4.8) usando (4.30) para aproximar la integral elíptica que aparece en dicha ecuación, de esto obtenemos

$$\frac{kc}{2} \cosh \mu_0 \approx m \left(1 - \frac{\text{sech}^2 \mu_0}{4} \right)^{-1} \approx m \left(1 + \frac{\text{sech}^2 \mu_0}{4} \right),$$

por tanto ahora tenemos la siguiente ecuación para $\cosh \mu_0$

$$\frac{kc}{2} \cosh \mu_0 = m \left(1 + \frac{\text{sech}^2 \mu_0}{4} \right),$$

la cual podemos reescribir como

$$\cosh^3 \mu_0 - \frac{2m}{kc} \cosh^2 \mu_0 - \frac{m}{2kc} = 0. \tag{4.31}$$

En vista de que $\text{sech } \mu_0 \ll 1$, $\cosh \mu_0 \gg 1$ y que k es grande, podemos despreciar $\frac{m}{2kc}$ en la ecuación anterior, así su solución aproximada es

$$\cosh \mu_0 \approx \frac{2m}{kc}.$$

Ahora usamos esta solución aproximada para obtener una nueva aproximación de la solución de (4.31). Escribimos $\cosh \mu_0 = \frac{2m}{kc} + \delta$, donde δ es un término de corrección, y la sustituimos en (4.31) obteniendo la siguiente ecuación para δ

$$\delta^3 + \frac{4m}{kc} \delta^2 + \left(\frac{2m}{kc} \right)^2 \delta - \frac{m}{2kc} = 0. \quad (4.32)$$

Para resolver (4.32) despreciamos los términos en δ^3 y δ^2 , con lo cual obtenemos que

$$\delta \approx \frac{kc}{8m},$$

por tanto la solución aproximada de (4.31) es

$$\cosh \mu_0 \approx \frac{2m}{kc} + \delta = \frac{2m}{kc} + \frac{kc}{8m},$$

por último reescribiremos esta solución en una forma más conveniente para usos posteriores

$$\frac{kc}{2} \cosh \mu_0 \approx m \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{kc}{2m} \right)^2 \right]. \quad (4.33)$$

La ecuación (4.33) es el “análogo elíptico”, en el límite de excentricidad pequeña, de la ecuación (3.7) del Capítulo 3. De la ecuación (4.33) podríamos despejar μ_0 , como se hizo para a_0 en la ecuación (3.7), sin embargo es de mayor utilidad dejar μ_0 en la forma en la que aparece en dicha ecuación.

Ya que determinamos μ_0 en este caso, podemos utilizarlo en la ecuación (4.11) para hallar el valor propio k . Para esto primero consideramos la forma que toma la ecuación (4.11) en el límite de excentricidad pequeña al aproximar las integrales elípticas que aparecen en dicha ecuación usando (4.30) y a fin de simplificar las expresiones resultantes usaremos el hecho de que $c \cosh R_0 = 2a$, donde a es el eje mayor de la elipse frontera. Haciendo lo anterior (4.11) nos lleva a la siguiente ecuación para k

$$\begin{aligned} 2ka [1 - \operatorname{sech}^2 R_0]^{\frac{1}{2}} & \left[1 - \left(\frac{m}{ka} \right)^2 - \frac{\operatorname{sech}^2 R_0}{2} - \frac{c^4 k^2}{256a^2 m^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{c^2 k^2}{8m} \operatorname{arc} \cos \left(\frac{c^2 k}{16am} + \frac{m}{ka} \right) - \\ & - 2m \operatorname{arc} \cos \left(\frac{c^2 k}{16am} + \frac{m}{ka} \right) + \frac{ck}{4 \left(\frac{ck}{8m} + \frac{2m}{ck} \right)} \operatorname{arc} \cos \left(\frac{c^2 k}{16am} + \frac{m}{ka} \right) + \\ & + \frac{ka}{2} \left[1 - \frac{c^2}{4a^2} \left(\frac{ck}{8m} + \frac{2m}{ck} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech}^2 R_0 = 2\pi \left(n + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Desarrollando en serie de Taylor a segundo orden el primer radical del primer renglón de la ecuación anterior, reteniendo sólo términos proporcionales a c^2 en el segundo radical y notando que $\frac{c^2 k}{16am} \ll \frac{m}{ka}$ obtenemos

$$ka \left\{ \left[1 - \frac{\operatorname{sech}^2 R_0}{2} + \dots \right] \left[1 - \left(\frac{m}{ka} \right)^2 - \frac{\operatorname{sech}^2 R_0}{2} + \dots \right]^{\frac{1}{2}} - \right. \quad (4.34)$$

$$\left. - \frac{m}{ka} \arccos \left(\frac{m}{ka} \right) + \frac{\operatorname{sech}^2 R_0}{4} \left[1 - \left(\frac{m}{ka} \right)^2 + \dots \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = \pi \left(n + \frac{1}{4} \right).$$

Para resolver la ecuación (4.34) vemos que en la aproximación de excentricidad pequeña $1 - \left(\frac{m}{ka} \right)^2 \gg \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 R_0$ por lo que la ecuación toma la forma

$$ka \left\{ \left[1 - \left(\frac{m}{ka} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{m}{ka} \arccos \left(\frac{m}{ka} \right) + \frac{\operatorname{sech}^2 R_0}{4} \left[1 - \left(\frac{m}{ka} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = \pi \left(n + \frac{1}{4} \right),$$

o lo que es lo mismo

$$ka \left[1 - \left(\frac{m}{ka} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\operatorname{sech}^2 R_0}{4} \right] - m \arccos \left(\frac{m}{ka} \right) = \pi \left(n + \frac{1}{4} \right). \quad (4.35)$$

La ecuación (4.35) coincide con (3.9), la ecuación para los valores propios del caso circular, si la excentricidad $\operatorname{sech}^2 R_0$ es cero. Recordando que (4.35) es válida para elipses de pequeña excentricidad y previendo que $\operatorname{sech}^2 R_0 \ll \left(\frac{m}{ka} \right)^2$ y que $\operatorname{sech}^2 R_0 \ll 1 - \left(\frac{m}{ka} \right)^2$ esperamos que los valores propios en este caso difieran de los del caso circular por pequeñas correcciones debidas a la excentricidad.

Si $m \ll ka$ la ecuación (4.35) puede ser resuelta simplemente despreciando al término $\frac{m}{ka}$ al compararlo con 1

$$ka = \frac{\pi \left(n + \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \right)}{1 + \frac{\operatorname{sech}^2 R_0}{4}}.$$

Desarrollando en serie de Taylor a segundo orden respecto a $\operatorname{sech}^2 R_0$ la ecuación anterior queda expresada por

$$ka = \pi \left(n + \frac{m}{2} + \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{\operatorname{sech}^2 R_0}{2} \right). \quad (4.36)$$

Observamos de la ecuación anterior que el valor propio k para el caso de la elipse de excentricidad pequeña corresponde al valor propio del caso circular más un término de corrección proporcional a la excentricidad.

Los valores propios dados por (4.36) determinan los modos de galería de susurros en el caso de una elipse de excentricidad pequeña.

4.2. Modos “ortogonales” a los de galería de susurros

En la sección 4.1 consideramos un rayo que no cruza la línea interfocal¹ entonces los sucesivos rayos producidos por reflexión en la frontera resultaban tangentes a una elipse cofocal a la elipse frontera. Sin embargo, si el rayo inicial cruza la línea interfocal observamos que los rayos producidos por reflexión en la frontera serán ahora tangentes a una hipérbola cofocal a la elipse frontera (ver Figura 4.6), es decir, la cáustica es una hipérbola cofocal a la elipse frontera.

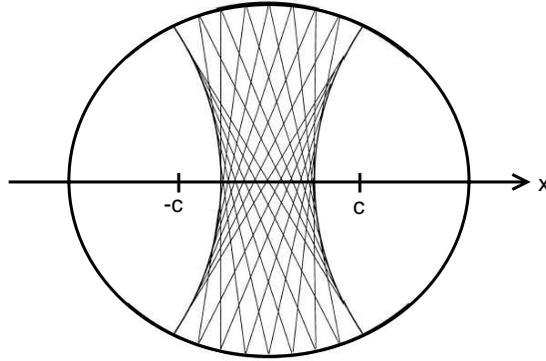


Figura 4.6: Cáustica hiperbólica de un rayo inicial que cruza la línea interfocal.

Todos los rayos estarán acotados por la elipse frontera $\mu = R_0$ y por la hipérbola $\theta = \theta_0$, donde θ_0 es un parámetro a determinar. Note que la cáustica está formada por las cuatro curvas $\theta = \theta_0$, $\theta = \pi - \theta_0$, $\theta = \pi + \theta_0$ y $\theta = 2\pi - \theta_0$. Por tanto podemos obtener nuevas congruencias normales de rayos y funciones propias adicionales a las consideradas en la sección 4.1. Las congruencias normales de rayos estarán dadas por las tangentes a la hipérbola $\theta = \theta_0$ (ver Figura 4.7). Estudiaremos los modos normales de la ecuación de Helmholtz correspondientes a estas congruencias de rayos a través de la cuantización EBK. Note que estos modos son los “ortogonales” a los de galería de susurros.

Para estudiar estos modos “ortogonales” deberemos construir las funciones de fase S_j y las amplitudes A_j . Sin embargo determinar las funciones de fase en la misma forma que en la sección 4.1 resulta complicado debido a que para calcular la longitud de arco del rayo hay que considerar todas las posibles reflexiones del rayo en la frontera, por tanto determinaremos las funciones propias por el método alternativo descrito en la sección 2.2 del Capítulo 2. Para esto debemos obtener una familia de funciones de fase, dependientes de algún número de parámetros por determinar, que satisfagan la ecuación eiconal (2.19).

En coordenadas elípticas el operador ∇ está dado por

¹Como línea interfocal consideraremos la línea recta que une los focos de las coordenadas elípticas, es decir, el intervalo sobre el eje x de $-c$ a c .

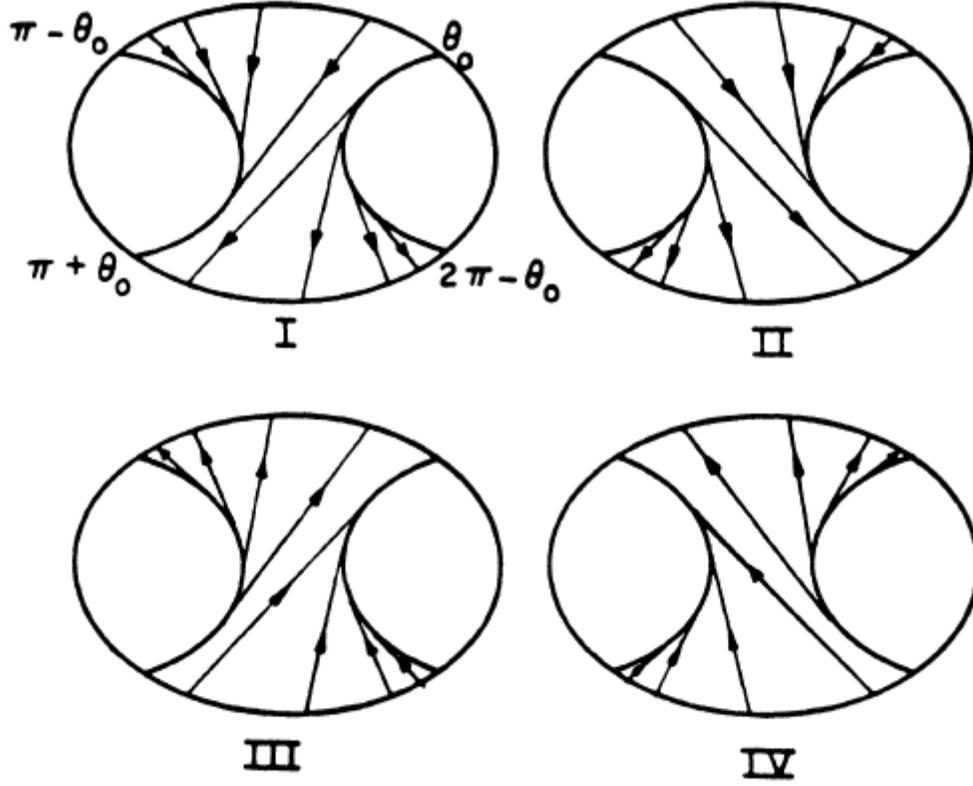


Figura 4.7: *Congruencias normales de rayos de un cáustica hiperbólica. La cáustica está formada por las cuatro curvas $\theta = \theta_0$, $\theta = \pi - \theta_0$, $\theta = \pi + \theta_0$ y $\theta = 2\pi - \theta_0$.*

$$\nabla = \frac{2}{c\sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \theta}} \left(\hat{e}_\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

donde \hat{e}_μ y \hat{e}_θ son los vectores canónicos de las coordenadas elípticas. Así, la ecuación (2.19) toma la forma, omitiendo el subíndice j ,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \mu} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{c^2}{4} (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta), \quad (4.37)$$

esta ecuación puede resolverse por separación de variables proponiendo una solución de la forma

$$S(\mu, \theta) = U(\mu) + T(\theta). \quad (4.38)$$

Cuando usamos esta propuesta en (4.37) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para $U(\mu)$ y $T(\theta)$

$$(U'(\mu))^2 + \alpha^2 - \frac{c^2}{4} \cosh^2 \mu = 0, \quad (4.39)$$

$$(T'(\theta))^2 - \alpha^2 + \frac{c^2}{4} \cos^2 \theta = 0, \quad (4.40)$$

donde α^2 es la constante de separación. Suponemos que $\alpha^2 < \frac{c^2}{4}$ y definimos a θ_0 por

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{4} \cos^2 \theta_0. \quad (4.41)$$

Cuando usamos (4.41) en (4.39) e integramos dicha ecuación obtenemos

$$U(\mu) = \pm \frac{c}{2} \int_{\mu}^{R_0} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu}, \quad (4.42)$$

por tanto $U(\mu)$ representa la longitud de arco medida sobre la hipérbola $\theta = \theta_0$ desde el punto (μ, θ_0) hasta el punto (R_0, θ_0) en la frontera.

Para integrar (4.40) debemos considerar dos casos, usando (4.41), el primero en el que $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ ó $\pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$ con lo que $\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta \geq 0$ y el segundo cuando $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $\pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0$ ó $2\pi - \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi$ con lo cual $\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta \leq 0$. Considerando lo anterior $T(\theta)$ queda expresada por

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \pm \frac{c}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \tilde{\theta})^{\frac{1}{2}} d\tilde{\theta}, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0 \quad \text{ó} \quad \pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0, \quad (4.43) \\ &= \pm \frac{ic}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} (\cos^2 \tilde{\theta} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0, \quad \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0 \quad \text{ó} \quad 2\pi - \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{aligned}$$

entonces $T(\theta)$ representa la longitud de curva medida sobre una elipse.

Ya que hemos determinado las funciones $U(\mu)$ y $T(\theta)$ podemos construir la familia de funciones de fase requerida. Para esto consideramos primero un punto (μ, θ) en el interior de la cáustica. Entonces usando (4.42) y (4.43) en (4.38), con las varias elecciones de signo, tenemos cuatro funciones de fase S_i , $i = 1, \dots, 4$. En la región $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ estas son

$$S_1(\mu, \theta) = -S_3(\mu, \theta) = \frac{c}{2} \int_{\mu}^{R_0} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu} + \frac{c}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \tilde{\theta})^{\frac{1}{2}} d\tilde{\theta}, \quad (4.44)$$

$$S_2(\mu, \theta) = -S_4(\mu, \theta) = \frac{c}{2} \int_{\mu}^{R_0} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu} - \frac{c}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \tilde{\theta})^{\frac{1}{2}} d\tilde{\theta}. \quad (4.45)$$

Por tanto S_j representa la longitud de arco medida sobre la rama de la cáustica $\theta = \theta_0$ desde el punto (μ, θ_0) hasta el punto (R_0, θ_0) en la elipse frontera más la longitud de arco medida sobre la elipse que pasa por el punto (μ, θ) desde el punto (μ, θ) hasta el punto (μ, θ_0) ,

donde los diferentes signos corresponden a la dirección en la cual se recorran las curvas antes mencionadas. Las cuatro funciones de fase S_j pueden ser vistas como las cuatro ramas de una función multivaluada S .

En la región $\pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$ la rama de la cáustica a considerar es $\theta = 2\pi - \theta_0$ por lo que el intervalo de integración en la integral que define a $T(\theta)$ en (4.43) deberá ser $[\theta, 2\pi - \theta_0]$. Sabemos también que para construir el espacio de cubrimiento debemos pedir que ∇S sea continua en la cáustica y S sea continua en la frontera $\mu = R_0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$. Con base en lo anterior definimos las funciones de fase en la región $\pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$ mediante

$$S_1(\mu, \theta) = -S_3(\mu, \theta) = -\frac{c}{2} \int_{\mu}^{R_0} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu} \\ + 2\frac{c}{2} \int_0^{R_0} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu} + \frac{c}{2} \int_{\theta}^{2\pi - \theta_0} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \tilde{\theta})^{\frac{1}{2}} d\tilde{\theta}, \quad (4.46)$$

$$S_2(\mu, \theta) = -S_4(\mu, \theta) = -\frac{c}{2} \int_{\mu}^{R_0} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu} \\ + 2\frac{c}{2} \int_0^{R_0} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu} - \frac{c}{2} \int_{\theta}^{2\pi - \theta_0} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \tilde{\theta})^{\frac{1}{2}} d\tilde{\theta}. \quad (4.47)$$

el término $2\frac{c}{2} \int_0^{R_0} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu}$ se introduce a fin de que se verifique la condición de continuidad de S en los puntos de la frontera $\mu = R_0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$.

Por tanto las funciones de fase en la región $\pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$ son continuación de las funciones de fase en la región $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$.

Consideremos ahora cuatro réplicas de la región $0 \leq \mu \leq R_0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ y $\pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$ (ver Figura 4.7) y definamos una función S la cual es igual a S_i en la réplica i . Entonces pegamos las fronteras de estas réplicas de tal forma que ∇S es continua en la cáustica y S es continua en la frontera de $\mu = R_0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$. Así, la réplica uno es pegada con la dos y la tres con la cuatro en $\theta = \theta_0, \pi - \theta_0, \pi + \theta_0$ y $2\pi - \theta_0$; es decir, estamos pegando las ramas de la hipérbola $\theta = \theta_0$ y $\theta = 2\pi - \theta_0$ de la réplica uno (ver Figura 4.7.I)) con las ramas de la hipérbola $\theta = \pi - \theta_0$ y $\theta = \pi + \theta_0$ de la réplica dos (ver Figura 4.7.II)) y pegamos las ramas $\theta = \pi - \theta_0$ y $\theta = \pi + \theta_0$ de la réplica uno con las ramas $\theta = \theta_0$ y $\theta = 2\pi - \theta_0$ de la réplica dos. Con esto hemos formado un cilindro sin “tapas” con las réplicas uno y dos. En forma análoga de las réplicas tres y cuatro obtenemos otro cilindro sin “tapas”. En $\mu = R_0$ la réplica uno es pegada con la cuatro y la dos con la tres, es decir, estamos pegando los cilindros antes mencionados por los “filos” de sus “tapas”. Entonces la superficie resultante, sobre la cual ∇S es univaluada, es un toro bidimensional, así, el espacio de cubrimiento es un toro bidimensional (ver Figuras 4.8 a 4.12). Por tanto la familia de funciones de fase es una familia uniparamétrica, esto recordando que el número de parámetros es $q - 1$ con q el número de curvas independientes en el espacio de cubrimiento. El parámetro es θ_0 y caracteriza la cáustica, por lo que $0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

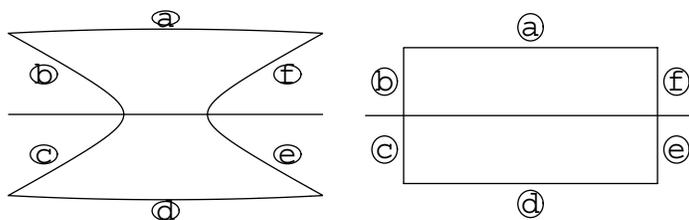


Figura 4.8: Para construir el espacio de cubrimiento correspondiente a la cáustica hiperbólica cada una de las réplicas de la región $0 \leq \mu \leq R_0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ y $\pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$ (figura del lado izquierdo) es identificada con un rectángulo (figura del lado derecho).

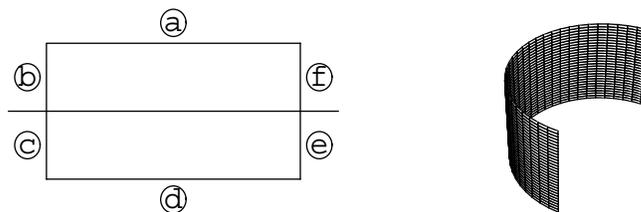


Figura 4.9: Cada uno de los rectángulos de la Figura 4.8 es deformado a un semicilindro.

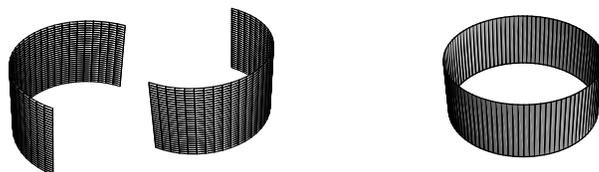


Figura 4.10: Los semicilindros de la Figura 4.9 son pegados dos a dos por sus fronteras laterales (“filos”) convirtiéndose, así las cuatro réplicas de la Figura 4.7 en dos cilindros sin “tapa”. Pegamos estos dos cilindros por sus “tapas”, con lo cual obtenemos un sólo cilindro.

En vista de que hay dos curvas cerradas linealmente independientes a las cuales aplicar las condiciones (4.6) o (4.7), podremos determinar el valor propio k y el parámetro θ_0 . Como primera curva elegimos una con $\mu = cte.$ y sobre la cual θ se incrementa de θ_0 a $\pi - \theta_0$ sobre la hoja uno y decrezca de $\pi - \theta_0$ a θ_0 sobre la hoja dos. Esta curva toca las cáusticas $\theta = \theta_0$ y $\theta = \pi - \theta_0$ por tanto en (4.6) $n_1 = 2$. Por otro lado la integral de línea en (4.6) toma la forma

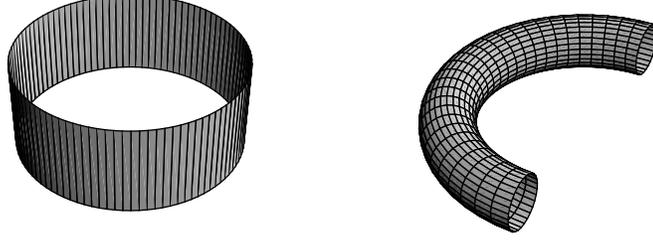


Figura 4.11: Deformamos el cilindro contruido en la Figura 4.10 para pegar sus extremos abiertos, con esto obtenemos un toro bidimensional.

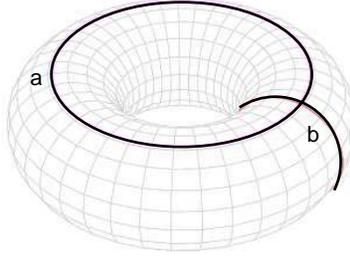


Figura 4.12: Espacio de cubrimiento para las congruencias normales de rayos de la cáustica hiperbólica. Las curvas etiquetadas con **a** y **b** corresponden a la primera y segunda curvas cerradas homológicamente independientes usadas en las ecuaciones (4.48) y (4.49), respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \oint \nabla S \cdot d\sigma &= \int \nabla S_1 \cdot d\sigma + \int \nabla S_2 \cdot d\sigma \\
 &= S_1(\mu, \pi - \theta_0) - S_1(\mu, \theta_0) + S_2(\mu, \theta_0) - S_2(\mu, \pi - \theta_0) \\
 &= 2\frac{c}{2} \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\
 &= 4\frac{c}{2} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta,
 \end{aligned}$$

por tanto de la ecuación (4.6) tenemos, reemplazando m_1 por m ,

$$4\frac{kc}{2} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = 2\pi \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.48)$$

Como segunda curva tomamos una sobre la cual θ es constante y μ decrece de R_0 a 0 para después crecer de 0 a R_0 a lo largo de $2\pi - \theta$, esto sobre la hoja uno. La curva se cierra sobre

la hoja cuatro siguiendo el mismo camino pero en la dirección contraria. Esta segunda curva no toca ninguna cáustica por tanto $n_2 = 0$ en (4.6). Calculando la integral de línea en (4.6) en forma análoga a como se hizo para (4.48) obtenemos, con m_2 reemplazada por n ,

$$4 \frac{kc}{2} \int_0^{R_0} (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\mu = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.49)$$

Las ecuaciones (4.48) y (4.49) determinan el valor propio k y el parámetro μ_0 para cada par de enteros m y n .

Las integrales en (4.48) y (4.49) pueden ser expresadas en términos de la integral elíptica $B(\phi, \kappa)$ definida mediante

$$B(\phi, \kappa) = \int_0^\phi \frac{\cos^2 t}{(1 - \kappa^2 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{E(\phi, \kappa) - (1 - \kappa^2) F(\phi, \kappa)}{\kappa^2}. \quad (4.50)$$

Usando la definición anterior las ecuaciones (4.48) y (4.49) toman la forma

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \cos^2 \theta_0 B\left(\frac{\pi}{2}, \cos \theta_0\right), \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{R_0} (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\mu &= \sinh R_0 (1 - \cos^2 \theta_0 \operatorname{sech}^2 R_0)^{\frac{1}{2}} \\ &- \cos^2 \theta_0 \left[B\left(\frac{\pi}{2}, \cos \theta_0\right) - B(\operatorname{arc} \operatorname{sen}(\operatorname{sech} R_0), \cos \theta_0) \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Usando (4.51) y (4.52), (4.48) y (4.49) toman la forma

$$2kc \cos^2 \theta_0 B\left(\frac{\pi}{2}, \cos \theta_0\right) = 2\pi \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.53)$$

y

$$\begin{aligned} 2kc \left\{ \sinh R_0 (1 - \cos^2 \theta_0 \operatorname{sech}^2 R_0)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - \cos^2 \theta_0 \left[B\left(\frac{\pi}{2}, \cos \theta_0\right) - B(\operatorname{arc} \operatorname{sen}(\operatorname{sech} R_0), \cos \theta_0) \right] \right\} = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.54)$$

Despejando $2kc$ de (4.53) y usando esto en (4.54) para simplificarla obtenemos la siguiente ecuación para θ_0

$$\frac{\sec \theta_0 \sinh R_0 (\sec^2 \theta_0 - \operatorname{sech}^2 R_0)^{\frac{1}{2}} + B[\operatorname{arc} \operatorname{sen}(\operatorname{sech} R_0), \cos \theta_0]}{B\left(\frac{\pi}{2}, \cos \theta_0\right)} = 1 + \frac{n}{m + \frac{1}{2}}. \quad (4.55)$$

Conforme θ_0 se incrementa de 0 a $\frac{\pi}{2}$, el lado izquierdo de (4.55) se incrementa monótonamente desde su valor mínimo, $\cosh R_0$ en $\theta_0 = 0$, hasta $+\infty$ en $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Por tanto (4.55) tiene solución para θ_0 sólo cuando el lado derecho excede el mínimo del lado izquierdo. Esto ocurre sólo cuando m y n satisfacen

$$n \geq \left(m + \frac{1}{2}\right) (\cosh R_0 - 1). \quad (4.56)$$

Cuando (4.56) se satisface, (4.55) puede ser resuelta para θ_0 y entonces k puede ser determinado de (4.53).

Ya que hemos determinado la forma asintótica del valor propio k , el parámetro μ_0 y las funciones de fase S_i , $i = 1, \dots, 4$, queda por determinar las amplitudes A_i , $i = 1, \dots, 4$. Para esto usaremos la ecuación de transporte (2.20) del Capítulo 2, esta es

$$2\nabla S \cdot \nabla A + A\nabla^2 S = 0. \quad (4.57)$$

Cuando se sustituye cualquiera de las cuatro funciones de fase dadas por (4.44) y (4.45) en (4.57), obtenemos las siguientes ecuaciones para A_i

$$2(\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial A_j}{\partial \theta} + 2(\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial A_j}{\partial \mu} + A_j \left[(\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta + (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{2}} \sinh \mu \cosh \mu \right] = 0, \quad (4.58)$$

para $j = 1, 3$; y

$$-2(\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial A_j}{\partial \theta} + 2(\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial A_j}{\partial \mu} + A_j \left[-(\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta + (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{2}} \sinh \mu \cosh \mu \right] = 0, \quad (4.59)$$

para $j = 2, 4$. Las ecuaciones (4.58) y (4.59) difieren sólo por un signo, por lo que pueden resolverse en forma simultánea por separación de variables haciendo $A_j(\mu, \theta) = C_j(\theta) D_j(\mu)$. Tomando a β como la constante de separación, las ecuaciones separadas son

$$2\frac{C'_j}{C_j} + \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-1} = (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} \beta, \quad (4.60)$$

$$2\frac{D'_j}{D_j} + \sinh \mu \cosh \mu (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-1} = \mp (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{2}} \beta, \quad (4.61)$$

donde el signo $(-)$ aplica para A_2 y A_4 y el signo $(+)$ para A_1 y A_3 . Las soluciones de (4.60) y (4.61) son, con c_j y d_j constantes de integración,

$$C_j(\theta) = c'_j (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\frac{\beta}{2} \int^\theta (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \right], \quad (4.62)$$

$$D_j(\mu) = d'_j (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\pm \frac{\beta}{2} \int^\mu (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{2}} d\mu \right], \quad (4.63)$$

donde el signo $(-)$ aplica para A_2 y A_4 y el signo $(+)$ para A_1 y A_3 . Denotando por $A'_j = c'_j d'_j$ las cuatro amplitudes A_i quedan expresadas por

$$A_j(\mu, \theta) = A'_j (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{4}} (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{4}} \\ \times \exp \left[\pm \frac{\beta}{2} \int^\mu (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{2}} d\mu \right] \exp \left[\frac{\beta}{2} \int^\theta (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\mu \right]. \quad (4.64)$$

donde el signo $(+)$ aplica para A_1 y A_3 y el signo $(-)$ aplica para A_2 y A_4 . Así las cuatro amplitudes $A_j(\mu, \theta)$ difieren entre ellas sólo por el factor constante A'_j . Ahora de (2.27) del Capítulo 2 ($A_j = A_{j'}$ en ∂D) tenemos que $A'_1 = A'_4$ y $A'_2 = A'_3$ y de la relación de las amplitudes en la cáustica $|A'_1| = |A'_2| = |A'_3| = |A'_4|$. Por simplicidad tomaremos $|A'_i| = \frac{1}{4}$.

Por último queda hallar la constante de separación β , para esto haremos uso de la conservación del flujo. En este caso la conservación requiere que el flujo total transportado por las ondas salientes a través de cualquier curva $\mu = cte.$ debe ser independiente de μ :

$$\oint A_i^2(\mu, \theta) \nabla S_i \cdot \hat{n} d\sigma = \text{constante}, \quad (4.65)$$

donde \hat{n} es la normal unitaria a la curva $\mu = cte.$ y $d\sigma$ es el elemento de longitud de arco a lo largo de esta curva. Cuando usamos (4.64) para A_i y (4.44) para S_i en (4.65) obtenemos

$$-\frac{c}{2} (d'_i)^2 \exp \left[\pm \beta \int^\mu (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{2}} d\tilde{\mu} \right] \int_0^{2\pi} c_i^2(\theta) d\theta = \text{constante}. \quad (4.66)$$

A fin de satisfacer (4.66) $\beta = 0$. Por tanto de (4.64) tenemos

$$A_i(\mu, \theta) = A'_i (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{4}} (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.67)$$

Debemos ahora determinar las fases A'_i , recordando cómo fueron pegadas las cuatro réplicas de la región $0 \leq \mu \leq R_0$, $\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$ y $\pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0$. De esto tenemos que $A'_2 = A'_3$, $A'_1 = A'_4$, $A'_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}} A'_2$ y $A'_4 = e^{-i\frac{\pi}{2}} A'_3$. Si ahora elegimos $A'_2 = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4}}$ tenemos

$$A'_1 = A'_4 = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad A'_2 = A'_3 = \frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.68)$$

Combinando todos nuestros resultados podemos ahora hallar $u(\mu, \theta)$ usando (4.14), con S_i dadas por (4.44) y (4.45) y A_i por (4.67) y (4.68). Por tanto en el interior de la cáustica $u(\mu, \theta)$ está dada por

$$\begin{aligned}
u(\mu, \theta) &= (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{4}} (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{4}} \\
&\times \cos \left[\frac{kC}{2} \int_{\mu}^{R_0} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu} \right] \\
&\times \cos \left[\frac{kC}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \tilde{\theta})^{\frac{1}{2}} d\tilde{\theta} - \frac{\pi}{4} \right].
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Usando (4.49) podemos reescribir (4.69) como

$$\begin{aligned}
u(\mu, \theta) &= (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta)^{-\frac{1}{4}} (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{4}} \\
&\times \cos \left[\frac{kC}{2} \int_0^{\mu} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu} - \frac{n\pi}{2} \right] \\
&\times \cos \left[\frac{kC}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \tilde{\theta})^{\frac{1}{2}} d\tilde{\theta} - \frac{\pi}{4} \right].
\end{aligned} \tag{4.70}$$

La expresión anterior es válida para el interior de la cáustica de la cual observamos que oscilara densamente cuando k sea grande.

Para el exterior de la cáustica, esto es cuando θ está en el intervalo $0 < \theta < \theta_0$, $\pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0$ y $2\pi - \theta_0 < \theta < 2\pi$, podemos construir $u(\mu, \theta)$ en forma similar a como fue construida (3.22) o (4.29). Procediendo de esta forma tenemos que en esta región

$$\begin{aligned}
u(\mu, \theta) &= \frac{1}{2} (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{4}} (\cosh^2 \mu - \cos^2 \theta_0)^{-\frac{1}{4}} \\
&\times \cos \left[\frac{kC}{2} \int_0^{\mu} (\cosh^2 \tilde{\mu} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\mu} - \frac{n\pi}{2} \right] \\
&\times \exp \left[-\frac{kC}{2} \int_{\theta}^{\theta_0} (\cos^2 \tilde{\theta} - \cos^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} d\tilde{\theta} \right].
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Por tanto en el exterior de la cáustica $u(\mu, \theta)$ será exponencialmente pequeño cuando k sea grande.

Reuniendo los comportamientos de $u(\mu, \theta)$ en el interior y exterior de la cáustica observamos un comportamiento “complementario” al de la cáustica elíptica, esto es oscila densamente en el interior de la cáustica y es exponencialmente pequeño en el exterior de esta.

Con esto hemos determinado por completo las funciones propias del dominio elíptico. Exploramos como caso particular el límite en el que $\theta_0 \approx \frac{\pi}{2}$. En este caso haciendo uso de las expansiones de las integrales elípticas (4.51) y (4.52) las ecuaciones (4.48) y (4.49) pueden ser simplificadas a

$$kc \left(\cos^2 \theta_0 + \frac{1}{8} \cos^4 \theta_0 \right) = 4 \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad (4.72)$$

$$kc \left\{ \sinh R_0 - \cos^2 \theta_0 \left[\arctan (e^{R_0}) - \frac{\pi}{4} \right] \right\} = n\pi. \quad (4.73)$$

Estas ecuaciones producen para el valor propio k y el parámetro θ_0

$$kc = \frac{n\pi}{\sinh R_0} + \frac{4m+2}{\sinh R_0} \left[\arctan (e^{R_0}) - \frac{\pi}{4} \right], \quad (4.74)$$

$$\cos^2 \theta_0 = \frac{4m+2}{n\pi} \sinh R_0. \quad (4.75)$$

Estos resultados son válidos sólo si n y m son tales que el lado derecho de (4.75) es pequeño. La ecuación (4.74) puede ser reescrita en términos de $b = \frac{c}{2} \sinh R_0$, el semieje menor de la elipse frontera, en la forma

$$k(2b) = n\pi + (4m+2) \left[\arctan \left(e^{R_0} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (4.76)$$

Si sólo el primer término del lado derecho en (4.76) es retenido, esta ecuación requiere que la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ deba ser igual a $\frac{4b}{n}$. Por tanto un número entero de medias longitudes de onda debe entrar en el eje menor. Este es un comportamiento esperado para una onda la cual rebota sucesivamente entre dos paredes separadas una distancia $2b$. Este es el caso en el que los rayos están confinados en una estrecha banda entorno al eje menor de la elipse frontera. Precizando estos modos sean exponencialmente pequeños en la región $0 < \theta < \theta_0$, $\pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0$ y $2\pi - \theta_0 < \theta < 2\pi$ y oscilatorios densamente en $\theta_0 < \theta < \pi + \theta_0$ y $\pi + \theta_0 < \theta < 2\pi - \theta_0$. A los modos que están confinados en una estrecha banda se le suele denominar *modos "bouncing ball"* y constituyen el complemento a los modos de galería de susurros.

Conclusiones

En este trabajo se muestra cómo problemas de análisis asintótico llevan a problemas de geometría y topología de variedades. Se usa como pretexto el fenómeno de la Galería de Susurros el cual es en esencia un problema de valores propios para la ecuación de Helmholtz. En realidad, que la asintótica lleve a este tipo de problemas, no debe ser una sorpresa ya que históricamente, primero Lord Kelvin desarrolla el método de fase estacionaria y posteriormente Poincaré lo usa en sus clases de 1891-1892 para explicar el brinco de magnitud $\frac{\pi}{2}$ en la fase cuando el rayo toca una cáustica, este fenómeno había sido observado por Gouy en 1890. Posteriormente, este método es usado por Bohr, Sommerfeld, Einstein, etc. para explicar la cuantización del átomo antes de la teoría cuántica. Finalmente, Keller y un poco después Máslov en los 50's del siglo pasado descubren (aunque probablemente ya lo sabía Sommerfeld) que la cuantización está dada por integrales sobre el grupo de homología de la variedad formada por los rayos de la aproximación de óptica geométrica. El método aquí presentado es mucho más general pero se prefirió mostrar en detalle los cálculos en un problema particular y dejar las generalizaciones como un ejercicio.

En el Capítulo 1 se describió el fenómeno de galería de susurros y cómo éste es modelado por la ecuación de onda homogénea en un gas, en forma simplificada, ya que no se consideran fuentes en él. En este mismo capítulo se resolvió la ecuación de onda por el método de separación de variables, primero separando la parte temporal, con lo que obtuvimos la ecuación de Helmholtz. Reduciendo así el estudio del fenómeno al estudio de la ecuación de Helmholtz, es decir, al estudio de las funciones propias de la ecuación de onda reducida.

A pesar de que se trata de un modelo simple, su solución por separación de variables y posterior uso del límite de onda corta, explica cuantitativamente el fenómeno en el caso de un dominio circular, esto debido a que la función de Bessel tiene una representación sencilla en forma integral lo cual permite usar el método de fase estacionaria clásico para estudiar el comportamiento en ambos lados de la cáustica. Para dominios más complejos, como el caso de una elipse, la separación de variables, si es viable, lleva a considerar ecuaciones diferenciales ordinarias más complejas y cuyo comportamiento asintótico no ha sido tan estudiado como el de las funciones de Bessel y de las cuales no es fácil dar un a representación integral sencilla como en el caso circular. Más aún para dominios convexos generales no se puede aplicar separación de variables. Es por esto que el Capítulo 2 se introduce la cuantización de EBK para investigar el caso del dominio elíptico.

En el Capítulo 3 se utiliza la cuantización de EBK para el dominio circular, recuperando los resultados ya conocidos del fenómeno, es decir, que la solución asintótica de la ecuación de onda es exponencialmente pequeña en la región interior a la cáustica y densamente oscilatoria entre la cáustica y la frontera. La congruencia entre los resultados obtenidos por EBK con los obtenidos en la sección 1.3.1 del Capítulo 1, salvo en las regiones cercanas a la cáustica, nos da una verificación parcial del método y nos indica cómo proceder en otras geometrías. En la cáustica la cuantización de EBK produce una singularidad en las funciones propias. Este comportamiento en la cáustica es típico de los métodos de onda corta a primer orden y es fácil hacer la regularización en términos de la función de Airy, esto muestra la continuación analítica de una rama a la otra cuando se cruza o se toca la cáustica, ver por ejemplo el Apéndice 11 de [2] ó [14].

Finalmente en el Capítulo 4 utilizamos la cuantización de EBK para estudiar este fenómeno en un dominio elíptico. Obtuvimos la expresión asintótica de los valores propios y funciones propias de la ecuación de Helmholtz que exhiben un comportamiento de galería de susurros, es decir, son exponencialmente pequeñas en el interior de la cáustica y densamente oscilatorias entre la cáustica y la frontera. Los valores propios quedan expresados como cuantizaciones de integrales sobre la base de homología de la variedad construida por las congruencias de rayos. Esta variedad es conocida como “Variedad Lagrangiana”. Es interesante observar que la cuantización, es decir, los valores propios estén dados en términos de la topología de esta Variedad Lagrangiana. Como complemento, en este capítulo también se hace el caso de la cáustica hiperbólica cofocal a la elipse frontera. A diferencia del caso con la cáustica elíptica, este caso ilustra cómo se construye la Variedad Lagrangiana en un caso un poco más complicado que el circular. En este caso se obtiene que las funciones propias son oscilatorias entre las dos ramas de la hipérbola y exponencialmente pequeñas en el complemento. Estos modos normales son conocidos como “de rebote” (bouncing ball modes).

Se eligió un dominio elíptico debido a que, de la geometría elemental se sabe que la cáustica de éste es una elipse o una hipérbola cofocal a la elipse frontera y los cálculos pueden ser hechos en forma cerrada en términos de integrales elípticas. Sin embargo las condiciones (3.4) y (3.5) del Capítulo 3 ó (4.6) y (4.7) del Capítulo 4 son válidas para cualquier dominio bidimensional convexo, condicionadas solamente a la existencia de una cáustica cerrada. La existencia de una cáustica cerrada para un dominio convexo es un problema abierto, para el cual existen sólo resultados parciales o heurísticos, ver por ejemplo [13].

Apéndice A

Cáusticas

La envolvente de una familia de curvas dependientes de un parámetro es una curva tangente a todas las curvas de la familia. La ecuación de esta envolvente se obtiene de eliminando el parámetro que caracteriza a la familia entre la ecuación de esta y su derivada parcial respecto al parámetro. Precisando, supongamos que tenemos una familia de curvas caracterizada por el parámetro x_0 dada en la forma

$$G(x, y, x_0) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Entonces la envolvente de la familia se obtiene al resolver para x y y , en términos del parámetro x_0 , la ecuación anterior y

$$\frac{\partial}{\partial x_0} G(x, y, x_0) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Con esto obtenemos una representación paramétrica de la envolvente.

Ahora la cáustica de una curva dada C es la envolvente de los rayos emitidos desde un punto “fuente” S después de reflejarse (cáustica de reflexión: catacáustica) o retractarse (cáustica de refracción: diacáustica) en C . Nosotros sólo estamos interesados en la cáustica de reflexión y nos referiremos a ella simplemente como cáustica.

Para fijar ideas consideremos la parábola $y = x^2$ y hallemos la envolvente de sus rectas normales. La familia de rectas normales a la parábola está dada por

$$G(x, y, x_0) = \frac{x_0 - x}{2x_0} + x_0^2 - y = 0, \quad (\text{A.3})$$

y la correspondiente ecuación (A.2) es

$$\frac{x}{2x_0^2} + 2x_0 = 0, \quad (\text{A.4})$$

despejando x de (A.4) y sustituyéndola en (A.3) obtenemos la siguiente representación paramétrica de la envolvente de las normales a la parábola

$$(x, y) = \left(-4x_0^3, \frac{1}{2} + x_0^2 \right). \quad (\text{A.5})$$

Eliminando el parámetro de las ecuaciones (A.5) obtenemos que la envolvente está dada por

$$y = \frac{1}{2} + \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}}. \quad (\text{A.6})$$

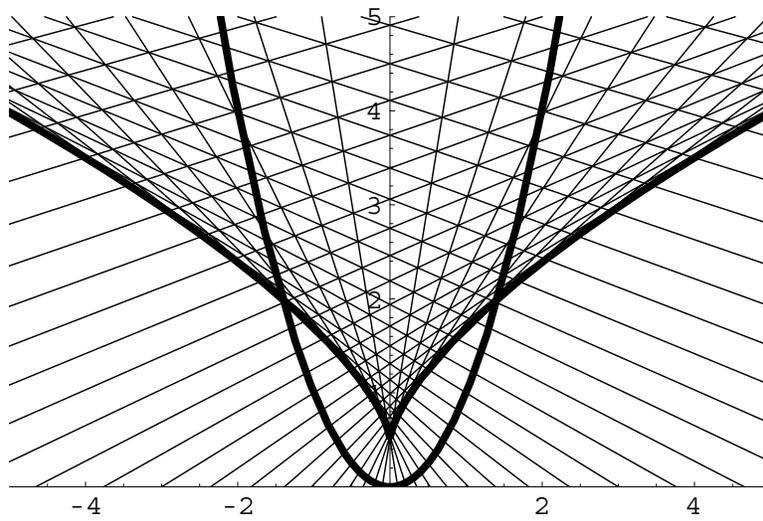


Figura A.1: a) Rectas normales a la parábola $y = x^2$. La parábola y la cáustica son dibujadas en línea gruesa.

Apéndice B

Algunas propiedades de las integrales elípticas

Relación entre las ecuaciones (4.17) y (4.22)

Antes de introducir las integrales elípticas empezaremos por mostrar la relación entre (4.17) y (4.22) del Capítulo 4. Para esto es suficiente probar la identidad

$$\begin{aligned} & \frac{\cosh^2 \mu_0 \operatorname{sen}^2 \theta' + \operatorname{senh}^2 \mu_0 \cos^2 \theta'}{(\cosh \mu \cos \theta - \cosh \mu_0 \cos \theta')^2 + (\operatorname{senh} \mu \operatorname{sen} \theta - \operatorname{senh} \mu_0 \operatorname{sen} \theta')^2} = \\ & = \frac{\operatorname{senh}^2 \mu_0 \cosh^2 \mu_0}{(\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta) (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Para probar (B.1) recordamos que el punto (μ_0, θ') es el punto de tangencia sobre la cáustica del rayo que pasa por (μ, θ) (ver Figura B.1). Por tanto podemos establecer una relación funcional entre μ_0, θ', μ y θ . Para esto procedemos como sigue

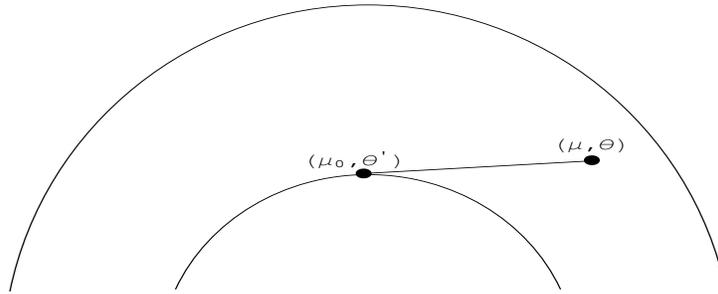


Figura B.1: Rayo tangente a la cáustica en el punto (μ_0, θ') y pasa por el punto (μ, θ) .

La familia de tangentes a la cáustica en el punto (μ_0, θ') es, en coordenadas cartesianas (x, y) ,

$$y = \frac{c}{2} \operatorname{sen} \theta' \operatorname{senh} \mu_0 - \left(x - \frac{c}{2} \cos \theta' \cosh \mu_0 \right) \cot \theta' \tanh \mu_0, \quad (\text{B.2})$$

ahora imponiendo sobre la ecuación anterior que pase por el punto

$$(\mu, \theta) = \left(\frac{c}{2} \cosh \mu \cos \theta, \frac{c}{2} \operatorname{senh} \mu \operatorname{sen} \theta \right) = (x, y), \quad (\text{B.3})$$

sustituyendo (B.3) en (B.2) y simplificando las expresiones tenemos

$$\cos \theta \cos \theta' \cosh \mu \operatorname{senh} \mu_0 + \cosh \mu_0 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \operatorname{senh} \mu = \cosh \mu_0 \operatorname{senh} \mu_0. \quad (\text{B.4})$$

Desarrollando los cuadrados en el denominador del lado izquierdo de (B.1) y usando (B.4) para eliminar el término $\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \operatorname{senh} \mu \operatorname{senh} \mu_0$, el denominador de (B.1) puede ser escrito como

$$\cos^2 \theta + \cos^2 \theta' + \cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0 - 2 \cos \theta \cos \theta' \cosh \mu \operatorname{sech} \mu_0,$$

expresando el numerador del lado izquierdo de (B.1) en términos de cosenos hiperbólicos y cosenos trigonométricos, podemos escribir el lado izquierdo de (B.1) como

$$\frac{\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta'}{\cos^2 \theta + \cos^2 \theta' + \cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0 - 2 \cos \theta \cos \theta' \cosh \mu \operatorname{sech} \mu_0}. \quad (\text{B.5})$$

Transponiendo el primer término de (B.4) al lado derecho y elevando al cuadrado encontramos

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{sech} \mu_0 \cosh \mu \cos \theta \cos \theta' &= (\operatorname{senh} \mu_0 \cosh \mu_0)^{-2} (\operatorname{senh}^2 \mu \cosh^2 \mu_0 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta' - \\ &\quad - \cosh^2 \mu \operatorname{senh}^2 \mu_0 \cos^2 \theta \cos^2 \theta' - \operatorname{senh}^2 \mu_0 \cosh^2 \mu_0). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Cuando (B.6) se sustituye en el denominador de (B.5), después de algunas manipulaciones, éste puede ser escrito como

$$(\operatorname{senh} \mu_0 \cosh \mu_0)^{-2} (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta') (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0) (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta). \quad (\text{B.7})$$

Finalmente usando (B.7) en (B.5) obtenemos el lado derecho de (B.1).

Integrales elípticas

En el Capítulo 4 se usaron algunas propiedades de las integrales elípticas, las cuales procedemos a deducir. Empezamos definiendo las integrales elípticas de primera y segunda especie por

$$F(\phi, \kappa) = \int_0^\phi \frac{1}{(1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 t)^{\frac{1}{2}}} dt, \quad (\text{B.8})$$

y

$$E(\phi, \kappa) = \int_0^\phi (1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 t)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (\text{B.9})$$

La integral $E(\phi, \kappa)$ satisface el siguiente teorema de adición (ver por ejemplo [12]). Dados Φ , Ψ y χ estos están relacionados por medio de las ecuaciones

$$(1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 \Phi \operatorname{sen}^2 \Psi) \operatorname{sen} \chi = \operatorname{sen} \Phi \cos \Psi (1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 \Psi)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{sen} \Psi \cos \Phi (1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 \Phi)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.10})$$

y

$$(1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 \Phi \operatorname{sen}^2 \Psi) \cos \chi = \cos \Phi \cos \Psi - \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} \Psi (1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 \Phi)^{\frac{1}{2}} (1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 \Psi)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.11})$$

Entonces $E(\phi, \kappa)$ satisface

$$E(\chi, \kappa) \equiv E(\Phi, \kappa) + E(\Psi, \kappa) - \kappa^2 \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} \Psi \operatorname{sen} \chi. \quad (\text{B.12})$$

En (B.12) el signo \equiv significa que el lado derecho y el lado izquierdo difieren por una combinación lineal constante de los periodos de la integral E . Las ecuaciones (B.10) y (B.11) se siguen de (4.10), por cálculos simples.

En función de (B.8) y (B.9) podemos definir la integral elíptica $B(\phi, \kappa)$ por

$$B(\phi, \kappa) = \int_0^\phi \frac{\cos^2 t}{(1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 t)^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{E(\phi, \kappa) - (1 - \kappa^2) F(\phi, \kappa)}{\kappa^2}. \quad (\text{B.13})$$

Una vez establecidas las definiciones anteriores y el teorema de adición (B.12) procedemos a demostrar (4.19), para esto primero probaremos la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \int_{\mu_0}^{R_0} (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}} d\mu + \int_0^{\theta_0} (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \\ = \tanh R_0 (\cosh^2 R_0 - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

El lado izquierdo de (B.14) puede ser escrito como

$$\operatorname{senh} \mu_0 [E(iR_0, \kappa) - E(i\mu_0, \kappa) + E(\theta_0, \kappa)], \quad (\text{B.15})$$

con

$$\kappa = \frac{i}{\sinh \mu_0}. \quad (\text{B.16})$$

Cuándo aplicamos B.12 con $\Psi = \theta_0$, $\Phi = i\mu_0$ y $\chi = iR_0$ a (B.15) ésta se convierte en

$$\sin \theta_0 \sinh R_0. \quad (\text{B.17})$$

Con la misma elección de antes para Ψ , Φ y χ las ecuaciones (B.10) y (B.11) producen

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 \sinh R_0 &= \cos \theta_0 \sinh \mu_0 (1 + \operatorname{csch}^2 \mu_0 \sinh^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}}, \\ \cos \theta_0 \sinh R_0 &= \cos \theta_0 \cosh \mu_0. \end{aligned}$$

Manipulando estas dos últimas ecuaciones obtenemos

$$\sin \theta_0 \sinh R_0 = \tanh R_0 (\cosh^2 R_0 - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.18})$$

con lo que (B.14) se verifica. Adicionalmente combinando (B.15) y (B.18) obtenemos

$$\operatorname{E}(iR_0, \kappa) - \operatorname{E}(i\mu_0, \kappa) + \operatorname{E}(\theta_0, \kappa) = \tanh R_0 (\sinh \mu_0)^{-1} (\cosh^2 R_0 - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.19})$$

Una vez establecido lo anterior procedemos a probar (4.19), esto es

$$\begin{aligned} &\int_{\mu_0}^{\mu} (\cosh^2 \mu - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}} d\mu + \int_{\theta'}^{\theta} (\cosh^2 \mu_0 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \\ &= \left[(\cosh \mu \cos \theta - \cosh \mu_0 \cos \theta')^2 + (\sinh \mu \sin \theta - \sinh \mu_0 \sin \theta')^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Para probar (B.20) introducimos μ^* definida por¹

$$\theta' = \pi - \arccos \left(\frac{\cosh \mu_0}{\cosh \mu^*} \right). \quad (\text{B.21})$$

Partimos la primera integral de (B.20) en dos integrales: una de μ_0 a μ^* y otra de μ^* a μ . Similarmente, la segunda integral la partimos en una que va de θ' a 0 más otra que va de 0 a θ . En términos de integrales elípticas, en forma similar a lo hecho en (B.15) y con κ dado por (B.16), la ecuación (B.20) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} &\operatorname{E} \left[\arccos \left(\frac{\cosh \mu_0}{\cosh \mu^*} \right), \kappa \right] - \operatorname{E}(i\mu^*, \kappa) + \operatorname{E}(i\mu_0, \kappa) + \\ &\quad + \operatorname{E}(\theta - \pi, \kappa) - \operatorname{E}(i\mu, \kappa) + \operatorname{E}(i\mu^*, \kappa) = \\ &= \operatorname{csch} \mu_0 \left[(\cosh \mu \cos \theta - \cosh \mu_0 \cos \theta')^2 + (\sinh \mu \sin \theta - \sinh \mu_0 \sin \theta')^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

¹Supondremos que $\frac{\pi}{2} < \theta' < \pi$. Para otros rangos de θ' argumentos similares pueden ser aplicados.

Comparando los primeros tres términos de (B.22) con (B.19) vemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\arccos \left(\frac{\cosh \mu_0}{\cosh \mu^*} \right), \kappa \right] - \mathbb{E}(i\mu^*, \kappa) + \mathbb{E}(i\mu_0, \kappa) = \\ & = \tanh \mu^* \operatorname{csch} \mu_0 \left[\cosh^2 \mu^* - \cosh^2 \mu_0 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Aplicando el teorema de adición (B.12) a los términos restantes en (B.22) encontramos

$$\mathbb{E}(\theta - \pi, \kappa) - \mathbb{E}(i\mu, \kappa) + \mathbb{E}(i\mu^*, \kappa) = -\operatorname{csch}^2 \mu_0 \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} \mu^* \operatorname{senh} \mu. \quad (\text{B.24})$$

Las ecuaciones (B.10) y (B.11) se satisfacen para $\Phi = \theta - \pi$, $\Psi = i\mu^*$, y $\chi = i\mu$.

Para probar (B.22) vemos de (B.21) que los puntos (μ_0, θ') , (μ, θ) y (μ^*, π) son colineales. Expresando el hecho de que la distancia entre (μ_0, θ') y (μ, θ) es igual a la distancia entre (μ_0, θ') y (μ^*, π) menos la distancia entre (μ, θ) y (μ^*, π) , por tanto encontramos que el lado derecho de (B.22) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} & \operatorname{csch} \mu_0 \left[(\cosh \mu^* + \cosh \mu_0 \cos \theta')^2 + \operatorname{senh}^2 \mu_0 \operatorname{sen}^2 \theta' \right]^{\frac{1}{2}} - \\ & - \operatorname{csch} \mu_0 \left[(\cosh \mu^* + \cosh \mu \cos \theta)^2 + \operatorname{senh}^2 \mu \operatorname{sen}^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Usando (B.21) en la primera línea de (B.25), vemos que esta primera línea concuerda con (B.23). Para mostrar la concordancia de la segunda línea de (B.25) con (B.24) primero sustituimos el valor de $\cos \theta'$ y $\operatorname{sen} \theta'$ en términos de μ^* en (B.4), de lo cual obtenemos

$$\cosh \mu^* + \cosh \mu \cos \theta = -\operatorname{csch} \mu_0 \operatorname{senh} \mu \operatorname{sen} \theta (\cosh^2 \mu^* - \cosh^2 \mu_0)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.26})$$

Cuando (B.26) se sustituye en la segunda línea de (B.25) la concordancia con (B.24) se sigue inmediatamente. Esto completa la verificación de (B.20).

Bibliografía

- [1] ARNOLD, V.I.: «On a characteristic class entering into conditions of quantization». *Functional Analysis and its applications*, 1967, **1**, pp. 1–13.
- [2] ARNOLD, V.I. y WEINSTEIN, A.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volumen 60 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer. Verlag, 2ª edición, 1989.
- [3] AVRON, J. y SIMON, B.: «The asymptotics of the gap in the Mathieu equation». *Annals of Physics*, 1981, **134**, pp. 76–84.
- [4] COURANT, R. y HILBERT, D.: *Methods of Mathematical Physics: Volume II*. Wiley Classics Edition. New York etc.: John Wiley & Sons/Interscience Publishers. xxii, 830 p, 1989.
- [5] DO CARMO, M. P.: *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Universidad Textos, 1990.
- [6] FRENKEL, D. y PORTUGAL, R.: «Algebraic methods to compute Mathieu functions». *Journal of Physics A: Math. Gen.*, 2001, **34(17)**, pp. 3541–3551.
- [7] JORGE, M.C.; MINZONI, A. y OTROS: *Notas del curso de FETI*. IIMAS-FENOMECC, UNAM, 2003. Disponible en: <http://www.fenomec.unam.mx/>.
- [8] KELLER, J.B.: «Corrected Bohr-Sommerfeld quantum conditions for nonseparable systems». *Annals of Physics*, 1958, **4**, pp. 180–188.
- [9] —: «Geometrical theory of diffraction». *Journal of the Optical Society of America*, 1962, **52(2)**, pp. 116–130.
- [10] —: «Semiclassical Mechanics». *SIAM J. Review*, 1985, **27(4)**, pp. 485–504.
- [11] KEVORKIAN, J. K. y COLE, J.D.: *Multiple scale and singular perturbation methods*. Número 114 en *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1996.
- [12] LAWDEN, D. F.: *Elliptic functions and applications*, volumen 80 de *Applied mathematical sciences*. Springer, 1989.

-
- [13] LAZUTKIN, V.F.: «The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain». *Mathematics of the USSR Izvestija*, 1973, **7**, pp. 185–214.
- [14] MÁSLOV, V.P.: *Theorie des perturbations et methodes asymptotiques*. Dounod, 1972.
- [15] RAYLEIGH, LORD: «The problem of the whispering gallery». *Philosophical Magazine*, 1910, **XX**, pp. 1001–1004. También publicado en "Scientific Papers". Vol. V p. 617.
- [16] —: «Further applications of Bessel's functions of high orden to the whispering gallery and allied problems». *Philosophical Magazine*, 1914, **XXVII**, pp. 100–109. También publicado en "Scientific Papers". Vol. V p. 211.
- [17] —: *The theory of sound*, volumen 2. Dover, 2ª edición, 1945. La edición original fue escrita en 1878.
- [18] SOMMERFELD, A.: *Optics*, volumen IV de *Lectures on Theoretical Physics*. Academic Press, 1954.
- [19] TABOR, M.: *Chaos and integrability in nonlinear dynamics. An introduction*. Wiley Interscience Publications, 1989.
- [20] VERHULST, F: *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Springer, 2ª edición, 1996.
- [21] WONG, R.: *Asymptotic approximations of integrals*, volumen 34 de *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, 2001.