UNIVERSIDAD LATINA, S .C.

ESCUELA DE ECONOMÍA.

CAMPUS SUR.

“INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA EL ANÁLISIS DE LA DINÁMICA ECONÓMICA ACTUAL”.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

L I C E N C I A D A E N ECONOMÍA.

P R E S E N T A:

MARÍA DE JESÚS RAMOS ESCAMILLA.

MÉXICO, D. F. 2006

INDICE PAG

INTRODUCCIÓN.

En esta tesis desarrolle diversos modelos para analizar los diferentes escenarios en que se mueven los bienes en una economía nacional e internacional dentro de la dinámica económica , considerando en todo momento las tres variables que explican el comportamiento de la economía y sus agentes en términos lógicos: el trabajo , el tiempo y el espacio. Quiero resaltar la importancia del análisis en R^3 para la dinámica económica .Para demostrarlo científicamente he recurrido a la ciencia mas exacta :las matemáticas. Utilizo los sistemas en R^3, dando así un sentido instrumentista a mis teoremas pues es así como la dinámica económica se ajusta a las tres dimensiones. Demostrando , pues que resulta cada vez más difícil augurar el futuro científico de la economía y el uso de las matemáticas como su lenguaje simbólico, pues cualquier imaginación quedará por debajo de la próxima realidad.

En el Capitulo I " La Dinámica Económica" : Marco los parámetros de las dimensiones (trabajo, tiempo, espacio) , en diferentes escenarios productivos de la actividad económica dentro de las tres dimensiones (trabajo, tiempo, espacio), manifestando en su totalidad que los fenómenos económicos son causa de un efecto en la producción.

En el Capitulo II "Los Bienes y Los Precios" : Reivindico la acción de los bienes y los precios en consideración con las dimensiones económicas (trabajo, tiempo, espacio) e identifico los factores de la producción que alteran el crecimiento pleno de la economía , demostrando la importancia de la programación lineal ,en modelos cíclicos de la economía.

En el Capitulo III "Optimización De La Economía Con Una Tecnología Expansiva" : Resalto la importancia de la expansión y el desarrollo de la tecnología , identifico los efectos de las no linealidades y restricciones respecto a las funciones objetivo .

En General esta tesis busca introducir al lector al análisis de la dinámica económica una visión en el espacio tridimensional. Reivindicando que la trama constitutiva de la fase actual del desarrollo capitalista es un enorme nudo de contradicciones estratégicas , ya que la toma de decisiones es una necesidad del mundo actual, por tanto se deben educar las destrezas necesarias para que esta labor sea bien realizada. A cada momento, debemos decidir que hacer, cómo actuar, qué decir; la educación no debe estar ajena a esta realidad, debemos entregar las herramientas para que los estudiosos de la economía sean capaces de organizar, tomar posesión de criterios objetivos propios de nosotros los científicos sociales y saber aplicar la información que obtienen, luego de ser seleccionada, dentro de sus parámetros axiológicos y de ahí tomar la decisión respectiva. Sin embargo no basta enunciar el análisis de la dinámica económica sino desarrollarlo, mostrar sus mecanismos y hacer una descripción formal y matemática de la misma, de ahí que muestro sus principales relaciones y cualidades en un espacio tridimensional , jugando ambos roles el de la oferta y demanda.

CAPÍTULO I. LA DINÁMICA ECONÓMICA .

Para hablar de dinámica, hay que referirse al espacio y al tiempo en el cual se realizan los hechos económicos. Es necesario, considerar un evento económico solo, y una serie de eventos. El evento aislado representa de manera abstracta una operación en la cual el individuo trata de satisfacer una necesidad, ya sea que actué individualmente o en representación de un grupo.

Cuando hacemos una abstracción del evento económico y lo situamos en el tiempo, hablamos de hechos económicos antes y después de un tiempo t_0.

Así, idealizando hablamos de una experiencia económica y de una sucesión de eventos económicos. La dinámica económica, surge cuando percibimos los hechos sucesivamente y decimos que existen cambios, es decir un evento económico ***A*** , da efecto a un nuevo evento económico ***B*** , diferente de ***A***, pero con origen en el mismo, así tenemos los nuevos eventos económicos ***B***, ***C*** , ***D*** ,... Posteriores al efecto económico de ***A*** .

Este ensamble de todas las continuaciones de fenómenos económicos en el espacio, es lo que llamamos dinámica económica. En esta forma ,no hablamos de economía dinámica en concreto, sino abstracto refiriéndonos a un hecho económico en el tiempo t_0 , y en el espacio.

También hablamos de un evento económico, cuando este hecho económico puede ser un conjunto de eventos o bien es un agente que representa a un grupo, sin sustraernos de nuestro espacio y tiempo de referencia. Los eventos pueden ser asociados en tal forma, que están ensamblados de manera única y se puede decir que los efectos económicos varían continuamente una serie de puntos sucesivos (una línea) .

“Para hablar de dinámica económica, es necesario hablar de movimiento” [1] y de cómo se realiza este en tres dimensiones caracterizando una línea recta.

A cada punto asociamos tres coordenadas ,x_1,x_2,x_3,variaron de tal forma, que las diferencias de las coordenadas al fin del intervalo serán Δx_1, Δx_2, Δx_3.

Por tanto para cualquier orientación en el intervalo tenemos que la distancia d al cuadrado es :

$$d^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \qquad \text{1.0}$$

1 Evans G. Honkapoja . “Economic dynamics”.Vol.65. Santa Fé de Bogotá 1998 (p.23).

Es un sistema de coordenadas cartesianas. Este fenómeno económico se puede efectuar porque podemos considerar la economía total como un continuo, ya que en cualquier instante el tiempo, se esta efectuando una transacción económica.

La cantidad a que llamamos distancia ,puede ser únicamente determinada para alguna longitud de un intervalo, digamos de longitud igual a ***1***, entonces otros intervalos y sus propiedades pueden ser determinados multiplicando por $\boldsymbol{\alpha}$ o por $\boldsymbol{-\alpha}$. Si hacemos los eventos económicos $\boldsymbol{x_t}$, linealmente dependientes de un parámetro $\boldsymbol{\lambda}$ tenemos:

$$X_t = a_t + \lambda b t \quad \ldots\ldots 1.1$$

Y obtenemos una línea recta con todas sus propiedades.

De la misma forma, podemos representar los eventos económicos, no como una línea recta, que es una idealización de lo que sucede en la economía, sino por medio de diferentes curvas y sus respectivas graficas.

Así tenemos que:

$$E = f(x_1, x_2, x_3) \quad \ldots\ldots 1.2$$

Donde ***E*** = Economía, y

$f(x_1, x_2, x_3)$ .Es una función que puede tener diferentes formas analíticas y geométricas correspondientes.

Es necesario definir a grafica de un conjunto ***U*** de tres dimensiones en un intervalo ***[a .b]***.

$$\text{Sea } f : U \subset R^n \rightarrow R \quad \ldots\ldots 1.3$$

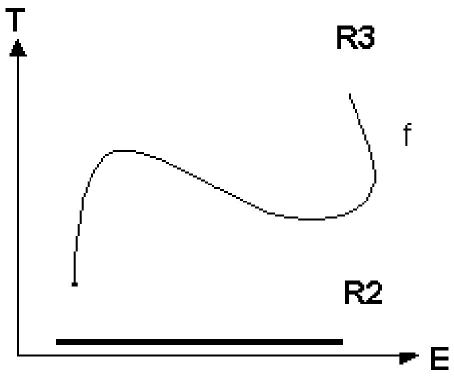
Definimos la grafica de ***f***, como el subconjunto de R^{N+1} que consta de los puntos:

$$[\,(x_1, x_2, x_3)\,,\ f(x_1, x_2, x_3)\,] \ \varepsilon\ U \text{ en } [\,a.\ b\,] \quad \ldots\ldots 1.4$$

Para el caso de ***n =1*** la grafica es una curva, mientras que para ***n =2*** es una superficie.

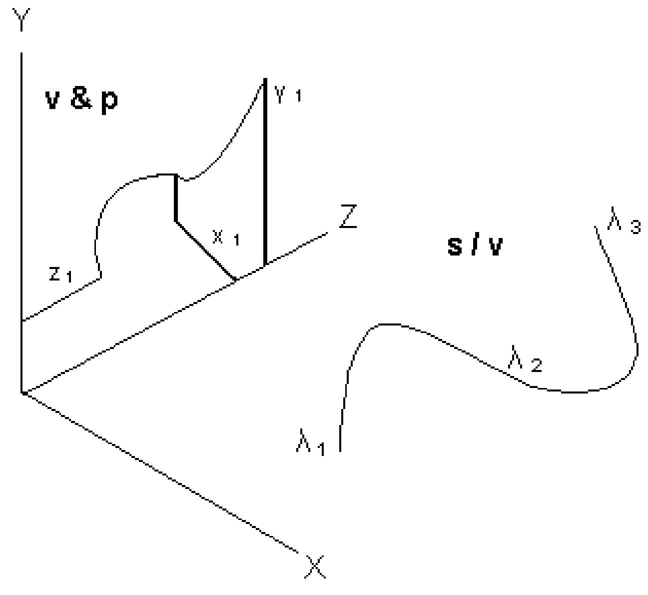
El caso de dos variables ***x***, ***y*** tenemos:

Figura A :



Así la dinámica la podemos considerar, como el estudio matemático económico de los eventos sucesivos continuos en tres dimensiones.

Figura B :



La grafica anterior muestra una curva descrita por medio de sus coordenadas cartesianas y la misma curva descrita por medio de un parámetro ***λ***.

Para finalizar con la dinámica económica, conviene considerar a la economía como una masa económica sujeta a las leyes de la dinámica.

De las cuales dos de Isaac Newton son aplicables:

I. “Cada cuerpo continua en su estado de reposos o en movimiento uniforme en línea recta, hasta que no se ve impulsado por fuerzas extrañas a cambiar cierto estado de reposo.

II. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motora que se le imprime y tiene lugar en la dirección de la línea recta en la que dicha fuerza actúa”. [2]

La primera ley de acuerdo a la dinámica económica, nos indica que la economía total, conservará su inercia o tendencia en tanto que no haya fenómenos o hechos económicos que modifiquen su estado (por ejemplo, la intervención del estado en la economía, huelga, etcétera).

La segunda ley introduce el concepto de masa económica, el movimiento y la idea de fuerza.

Para entender su significado, conviene observar que se usa el término movimiento en el sentido de cantidad de movimiento, esto es, interviene también el concepto de velocidad de ejecución del ciclo económico.

Así la economía se encuentra en una trayectoria inercial o se ve impulsado al movimiento por alguna fuerza exógena que es afectada por la velocidad de ejecución del ciclo económico.

2 Arrow, Kennet J. y Kurz, M. “Public investment, the rate of return and optimal fiscal policy”. The Johns Hopkins Press. Baltimore, 1970.(p.65).

I.1. Análisis del PNB en R^3.

Desde el surgimiento de la teoría económica, los estudiosos de la economía han querido que la realidad se ajuste a sus teorías, pero es en la forma contraria como se debe de proceder.

El error más grave sin embargo, es considerar que únicamente el trabajo añade valor a los objetos, este pensamiento ha persistido durante siglos y aún hoy se, considera válido. Sin embargo, dado que los seres humanos comprendemos tres dimensiones, es necesario analizar la economía espacialmente en sus tres dimensiones, así tenemos que el valor y utilidad de los objetos se encuentran determinados por tres dimensiones y no sólo una como se ha considerado a la fecha.

Estas tres dimensiones son: El espacio, el tiempo y el trabajo.

Para refutar la idea de que sólo el trabajo añade valor considere lo siguiente: No existe trabajo, asimismo, si hay objetos que tienen un valor intrínseco como son las zonas no habitadas. Es así como la economía, sus agentes y sus productos deben ser considerados tridimensionalmente, y no considerando una sola dimensión, para esto es necesario recurrir al análisis vectorial.

Ahora bien, con este concepto de la economía en tres dimensiones, podemos pasar a su expresión matemática descriptiva.

Sea la economía una función de tres variables de $R^3 \rightarrow R$., así tenemos que si consideramos el producto nacional bruto como una función de las variables ***x, y, z***, la forma más conveniente de representación es por medio de la ecuación.

$PNB = x^2 + y^2 + z^2$ 1.1.0

El campo económico (como se define posteriormente), se encuentra determinado por las tres variables (tiempo, espacio, trabajo), dándonos la función:

$F: R^3 \rightarrow R = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = PNB \}$ 1.1.1

Así tenemos que un uso más intensivo de alguno de los tres elementos que forman la teoría del valor, incrementa el producto nacional bruto.

Suponga que:

$x^2 + y^2 + z^2 = PNB$ 1.1.2

Así, pues: si $x = 2$ depende del escalar ***4*** el ***PNB***
si $x = 3$ depende del escalar ***9*** el ***PNB***

Si una de las dimensiones presenta un decremento (no es positiva) la masa económica se deforma creando un paraboloide de revolución que depende de la variable que decreció hasta que se vuelve positiva. Dado que el ***PNB*** es constante en un instante fijo (ceteris parabus) sin perturbaciones en el ciclo económico, se puede expresar como:

$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - PNB = 0}$ 1.1.3

Si una variable se anula, dependemos entonces de las dos variables restantes quedando:

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = PNB}$ 1.1.4

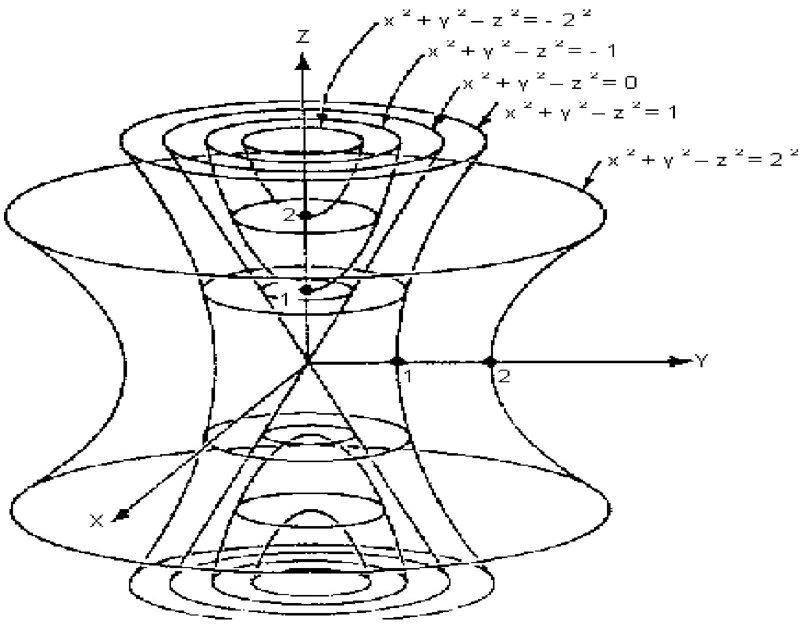
Que es el caso para dos dimensiones.

También puede ser que una variable se convierta en negativa dependiendo la función de dos variables positivas y una negativa, quedando :

$\boldsymbol{x^2 + y^2 - z^2 = PNB}$ 1.1.5

En este caso la gráfica ya no será la de una esfera en el espacio tridimensional, sino que dependerá de la magnitud y el signo de la variable negativa, pudiendo ser de la forma:

Figura C:



Donde : $\boldsymbol{x^2+y^2-z^2 = -2^2}$ (Parábola hacia abajo de 1° Grado - Negativa).
Existe decrecimiento económico.

$x^2+y^2-z^2 = -1$ (Parábola hacia debajo de 2° Grado - Negativa).
Existe decrecimiento económico.

$x^2+y^2-z^2 = -0$ (Parábola central – Neutra).
No hay crecimiento económico.

$x^2+y^2-z^2 = 1$ (Parábola hacia arriba de 1° Grado – Positiva).
Existe crecimiento económico.

$x^2+y^2-z^2 = 2^2$ (Parábola hacia arriba de 2° Grado – Positiva).
Existe crecimiento económico.

Siendo que volverá a tomar su forma esférica, una vez que la variable se convierta en positiva.

La aceleración o desaceleración del crecimiento económico, depende de cada una de las tres variables, así como de su signo, si las tres son positivas, tenemos la realización de una masa económica (economía en su conjunto) como una esfera sólida en el espacio. Para hacer una descripción de la economía en el espacio tridimensional, como el volumen de un sólido, es necesario introducir ciertos conceptos como el de un punto, una curva y una superficie en el espacio tridimensional.

Se analizará el espacio euclideo en tres dimensiones, caracterizando un punto genérico ***P*** en el espacio y un vector posición ***PNB*** que parte del origen y cuyo extremo es ***P***.

Si fijamos tres vectores ortonormales (que contienen origen, dirección y/o proyección) es decir son unitarios ***i, j, k*** un punto está caracterizando por las tres componentes de ***PNB*** en las tres direcciones, es decir

$PNB = x_i + y_j + zk$ 1.1.6

A partir de la caracterización de un punto ***P***, pasamos a la caracterización de una curva ***C***. Se obtiene una curva, cuando se dispone que las coordenadas de un punto varíen continuamente como función de un solo parámetro ***λ***.

$PNB(\lambda) = [x(\lambda), (y(\lambda), (z(\lambda)]$, $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ 1.1.7

Para describir una superficie ***S*** situada en el espacio tridimensional, debemos hacer que el vector de posición ***PNB***, dependa de dos parámetros ***λ*** y ***μ*** así tenemos:

$S: PNB (\lambda , \mu) = [x(\lambda, \mu), y(\lambda, \mu), z(\lambda, \mu)]$

$\lambda_1 \leq \lambda > \lambda_2$ $\mu_1 \leq \mu > \mu_2$ 1.1.8

Ahora bien, un sólido ***V*** en el espacio tridimensional se define por:

$$V: PNB(\lambda, \mu, v) = [x(\lambda, \mu, v)\ ,\ (y(\lambda, \mu, v),\ (z(\lambda, \mu, v)]$$

$$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2,\ \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2,\ V_1 \leq V \leq V_2. \quad \text{..........} 1.1.9$$

Así la economía se encuentra en tres dimensiones, dependiendo de tres parámetros. Las dimensiones son el tiempo, el espacio y el trabajo, y los parámetros dependen cada uno de ellos de dos instantes diferentes de la economía. Los tres conjuntos de superficies paramétricas, se combinan para originar una red espacial dentro de ***V***.

Cada economía tiene una superficie cerrada que la limita y estas superficies en el caso tridimensional de la teoría de valor son:

$$S: \begin{cases} PNB(\lambda_1, \mu, v) & \\ & \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2,\ V_1 \leq V. \\ PNB(\lambda_2, \mu, v) & \\ PNB(\lambda, \mu_1, v) & \\ & u_1 \leq u \leq u_2,\ \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2. \\ PNB(\lambda, \mu_2, v) & \\ PNB(\lambda, \mu, v_1) & \\ & \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2,\ \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2 \\ PNB(\lambda, \mu, v_2) & \end{cases}$$

..........1.1.10

Estas seis superficies económicas se ensamblan correctamente para formar la superficie ***S*** que limita a la economía como un todo simbolizada por ***V***.

También podemos obtener las primeras y segundas derivadas de las componentes de ***PNB*** respecto a los parámetros, con lo que tenemos:

$$\frac{\partial PNB}{\partial \lambda},\ \frac{\partial PNB}{\partial \mu},\ \frac{\partial PNB}{\partial V}$$

y

$$\frac{\partial^2 PNB}{\partial \lambda^2},\ \frac{\partial^2 PNB}{\partial \mu^2},\ \frac{\partial^2 PNB}{\partial V^2}$$

..........1.1.11

Nosotros simbolizaremos:

$$\text{debe ser} \quad \frac{\partial\, \mathbf{PNB}}{\partial\, \lambda} = b_\lambda´$$

$$\text{debe ser} \quad \frac{\partial\, \mathbf{PNB}}{\partial \mu} = b_\mu´$$

$$\text{debe ser} \quad \frac{\partial\, \mathbf{PNB}}{\partial V} = b_V´$$

....1.1.12

La cuestión de la masa total de la economía en un tiempo determinado se puede calcular si se tiene la densidad en el tiempo ***t***, que viene dado por una función ***t = t(PNB)*** definida cuando ***PNB***, varía a lo largo del tiempo.

La definición de densidad ha de ser tal que $t\ d\ T = t\ b_\lambda\ d^{\lambda}$ sea la masa de la economía en el tiempo ***t***.

Por lo tanto:

$$M = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} + b_\lambda\, d_\lambda$$

....1.1.13

El cálculo del volumen de la economía es algo más sencillo ya que se trata de un cuerpo sólido en el espacio de tres dimensiones. Su volumen sólo se puede calcular si se da la superficie cerrada que lo limita.

Así el volumen de la economía dependerá de los tres parámetros:

$$V: PNB(\lambda, \mu, v)$$

$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \quad \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2 \quad V_1 \leq V \leq V_2$ 1.1.14

Podemos tomar la esfera cuya función es $x^2 + y^2 + z^2 = PNB$ o bien el paralelepípedo infinitesimal, cuyos vectores son los ocho puntos:

$$PNB\ (\lambda, \mu, v), PNB(\lambda + d\,\lambda,\ \mu, v), PNB(\lambda, \mu + \ d_{\mu}, v)$$

$$PNB\ (\lambda, \mu, v+dv), PNB(\lambda,\ \mu + d\mu, v+dv), PNB(\lambda + \mu,\ v+d_v)$$

$$PNB\ (\lambda + d\,\lambda, \mu + d\,\mu, v), PNB(\lambda + d\,\lambda, \mu + d\mu, v+dv)$$

....................1.1.15

Su volumen se obtiene por el triple producto:

$$\left[\frac{\partial PNB}{\partial \lambda} d\lambda,\ \frac{\partial PNB}{\partial \mu} d\mu\ ,\ \frac{\partial PNB}{\partial V} dV\right] =$$

$$(\ b_{\lambda}\ , b_{\mu}\ ,\ b_{V}\ )\ d\ \lambda\ d\ \mu\ dv. \quad \text{..1.1.16}$$

Si el producto triple es positivo, es precisamente el volumen de la economía. Para asegurarse que el producto triple no es negativo en ningún punto, hay que tener cuidado de tomar los bienes ***λ ,μ,v,*** en orden correcto.

Sin embargo:

$$\frac{\partial PNB}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial PNB}{\partial \mu},$$

$$\frac{\partial PNB}{\partial V}$$

$$\text{..1.1.17}$$

Es el determinante formado por los tres vectores llamado Jacobiano. Es conocido que el Jacobiano no se puede anular, si ***(λ, μ, v)*** , son parámetros correctos. Podemos así suponer que tendremos un triple producto positivo en todo momento.

Entonces el volumen de la economía ***(∂ λ+∂μ+∂V)*** es:

$$V= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{v_1}^{v_2} (\ b_{\lambda}\ , b_{\mu}\ ,\ b_{V}\ )\ d\ \lambda\ d\ \mu\ dv.$$

$$V= \int_{v}^{\lambda_1} dv \quad \text{..1.1.18}$$

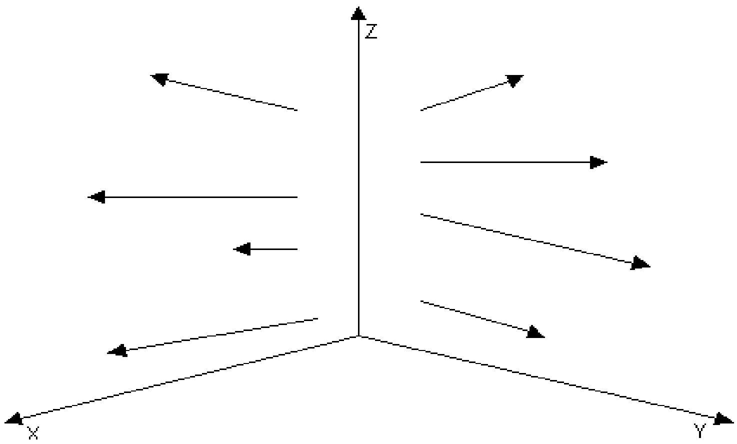
O en forma explicita:

$$V = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{v_1}^{v_2} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial x}{\partial \mu}, \frac{\partial x}{\partial V} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial V} \\ \\ \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \mu}, \frac{\partial z}{\partial V} \end{pmatrix} d\lambda \, d\mu \, dv$$

....................................1.1.19

Como lo muestra la figura siguiente:

Figura D:

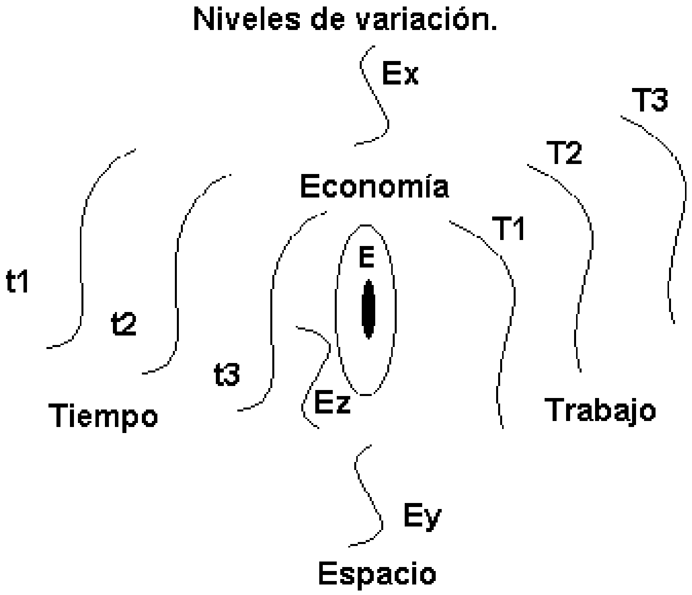


Representación de la atracción de los Bienes ***(λ, μ, v)*** en un campo vectorial .

Otra forma de representar un campo vectorial es por medio de la línea de nivel. Podríamos de esta forma dibujar perspectivas cuya utilidad real nos da una imagen de la función. Así tomamos fija una coordenada y las otras dos representarán la función y la altura como si fuera un contorno de una montaña a una altura fija sobre el nivel del mar.

El mapa que indica las curvas de nivel es capaz de transmitir toda la información necesaria.

Figura E:



Así, un campo económico es una función de la economía ***E*** que tiene como dominio los agentes económicos y su actuación y como rango los números reales que representan la terna: tiempo, espacio, trabajo. Las velocidades de variación de cada agente económico o de un grupo de ellos, se pueden determinar en un campo económico.

El campo económico describe algún aspecto de una situación en la que se necesita dar a cada agente económico que forma parte del ***PNB***, una cantidad real, una dirección y un sentido. Desde el punto de vista matemático, el campo económico ***(E)*** se puede representar por sus tres componentes. En algún sistema de referencia cartesiano, cada una de esas componentes.

Es una función de las tres coordenadas cartesianas:

$F(E) = F_1(E)_j + F_2(E)_j + F_3(E)_k$...1.1.20

o más explícitamente: $F(E) = [\, f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z) \,]$ 1.1.21

Dado un movimiento de alguno de los agentes económicos (oferentes o demandantes).

Es de suma utilidad la variación punto a punto de la dirección del campo, esto se logra mediante las líneas de campo. Elegido un punto cualquiera, se parte de él en la dirección del vector económico que corresponde al punto, se toma un pequeño incremento y parte del nuevo punto se continúa a lo largo de la dirección del vector económico, etcétera. Así es como se resuelve el problema numéricamente.

Si tenemos una representación paramétrica de la economía ***E*** ; se puede efectuar el proceso anterior analíticamente de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{d\lambda} = F(\lambda) f_1[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)]$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = F(\lambda) f_2[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)]$$

$$\frac{dz}{d\lambda} = F(\lambda) f_3[x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)]$$

..........................1.1.22

Aunque es difícil de resolver analíticamente, se puede asegurar que cualquier campo económico, posee un conjunto de líneas de campo. Para poder hacer la interpretación cuantitativa de la economía, es necesario introducir ciertos conceptos como el de gradiente, rotacional y divergencia. No nos debe sorprender que la interpretación de estos asuntos sea una herramienta muy poderosa en la economía teórica.

Ahora surge la pregunta:

¿Para qué nos sirve el estudio de campos económicos? .

Fundamentalmente para estudiar las relaciones entre los agentes económicos y sus propiedades, es decir, podemos analizar a un agente económico, o dos o más agentes, o bien el comportamiento de la economía en su conjunto.

¿Qué sucede con dos o más economías nacionales y con la economía mundial?.

Como ejemplo vamos ahora a hacer de una economía hipotética tomando el ***PNB*** igual a ***(1)*** uno.

Tenemos:

$$\int_W f(x,y,z)dv$$

$$\int_a^b \int_{Q_2}^{Q_1} \int_{Y_2}^{Y_1} f(x,y,z)dz \; dy \; dx =$$

$$\int_D \left[\int_{Y_2(x,y)}^{Y_1(x,y)} f(x,y,z)dz \; dy \; dx \right.$$

$a \le x \le b, \Phi_2(x) \le y \le \Phi_1(x)$,y, $Y_2(x,y) \le z$ 1.1.23

Si $f(x,y,z)=1$ para toda $(x,y,z)\ \varepsilon\ w$ entonces tenemos:

$\int_w f(x,y,z)dv = \int_w 1\ dv$= volumen w 1.1.24

Por lo tanto, volumen w=

$$\int_a^b \int_{Q_2(x)}^{Q_1(x)} \int_{Y_2(x,y)}^{Y_1(x,y)} dz\ dy\ dx =$$

....1.1.25

Como:

$$\int_a^b \int_{Q_2(x)}^{Q_1(x)} \left[Y_1(x,y)-Y_2(x,y) \right] dy\ dx$$

....1.1.26

Si tenemos:

$$-1, \leq x \leq 1$$

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

.................................1.1.27

Evaluemos integral triple usando una integral iterada equivalente:

$$\int_w dv = \int_{-1}^{1} \int_{-(1-x^2)}^{(1-x^2)} \int_{-(1-x^2-y^2)}^{(1-x^2-y^2)} dz\ dy\ dx$$

....1.1.28

Manteniendo x y x fijas e integramos respecto a z tenemos:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-(1-x^2)}^{(1-x^2)} \left[z \Big|_{-(1-x^2-y^2)^{1/2}}^{(1-x^2-y^2)^{1/2}} \right] dy\ dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[\int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} (1-x^2-y^2)^{1/2}\ dy \right] dx$$

....1.1.29

Ahora bien, como ***x*** es fija en la ***dy*** integración, esta integral puede expresarse:

$$\int_{-a}^{a} (a^2-y^2)^{1/2}\, dy$$

....1.1.30

donde $a = (1-x^2)^{1/2}$

Esta integral, representa el área de una región semicircular de radio ***a***, de tal modo que aplicando el sistema de referencia cartesiana, queda:

$$\lim_{\partial \to 0} \frac{1}{\partial} [\Phi(x+\partial t_1, y+\partial t_2, z+\partial t_3) - \Phi(x,y,z)]$$

$$= t_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, t_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}, t_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

....1.1.31

Aplicando el operador nabla tenemos:

$$= + \downarrow \Phi$$

Donde

$$\downarrow \Phi = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\}$$

....1.1.32

De aquí podemos formalizar el concepto de gradiente para luego hacer una descripción precisa.

$$\text{grad}\ \Phi \equiv \downarrow \Phi = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\}$$

....1.1.33

Así el gradiente es precisamente la matriz de la derivada de ***Φ*** escrita como un vector.

La fórmula conserva su validez cualquiera que sea la parametrización, tomándose como función para :

$PNB = x^2+y^2+z^2$..1.1.34

Cuando ya podemos calcular el volumen de la economía, pasamos al estudio de sus propiedades. Es decir, tenemos la masa económica y analizamos las relaciones fundamentales de sus componentes, junto con su comportamiento. Para este fin es necesario hacer la definición de lo que es un campo económico y sus propiedades.

El estudio del campo económico, comenzará con la definición de lo que es un campo vectorial en sus tres dimensiones y de las principales propiedades del campo económico vectorial.

Definición: “Un campo vectorial en $\boldsymbol{R^N}$ es una función **F:ECR$^{\mathbf{N}}$ → R$^{\mathbf{N}}$** que asocia a cada punto de ***(x, y, z)*** de ***E*** un vector ***F(x)***.” [3]

El uso de los vectores en el análisis de la dinámica económica es relevante , ya que por ejemplo ; Suponiendo que el jefe de compras de una fabrica debe ordenar cantidades diferentes de acero , aluminio y papel. Él puede mantener el control de las cantidades a ordenar mediante el siguiente vector :

Acero = 10 , Aluminio = 20 y Papel = 30 ⍊ ***V = (10 [x] ,20 [y] , 30[z])***.

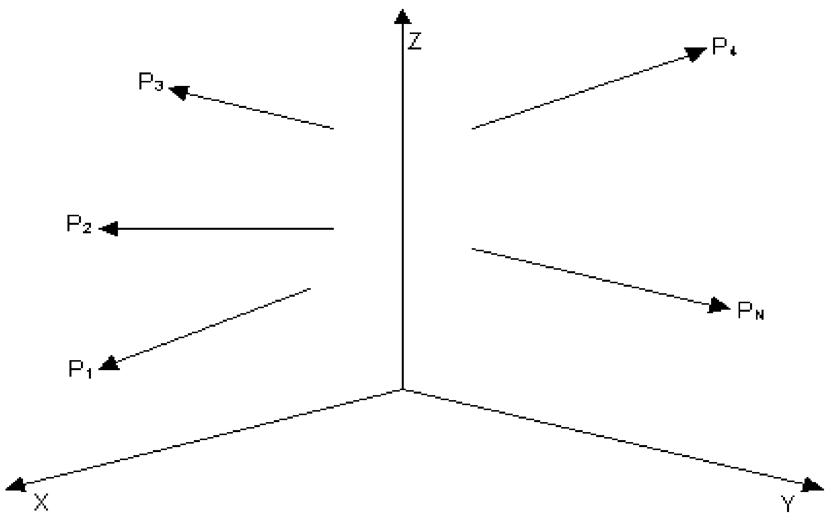
Se puede dibujar ***F*** por medio de flechas que indican los vectores existentes en el campo, iniciando en el punto que se toma como referencia con diferente dirección, magnitud y sentido.

Un campo vectorial ***F*** asocia un vector (flecha) a cada terna ***(x,y,z)*** de su dominio.

El gradiante de un campo económico, si existe, apunta en la dirección a lo largo de la cual ***Φ*** esta creciendo mas rápidamente.

El gradiente ↓***Φ*** de una función ***f:*** $\boldsymbol{R^3} \rightarrow \boldsymbol{R}$ es un campo económico vectorial en $\boldsymbol{R^3}$; así tenemos en cada punto $\boldsymbol{P_i}$ ***i = 1, 2, . . . , n*** que el gradiente ↓***Φ*** $\boldsymbol{(P_i)}$ es para cada punto un vector que sale de ***p***.

Figura F:



3 Karl Enrich Marx , Federic Engels .”Text auf der methode der Wissensschaft economic”.Beogral.1870. (p.84).

Considere la integral de flujo (de un campo vectorial económico) saliente de una superficie ***S***. Sea ***V*** el volumen del espacio económico limitado por ***S***, entonces asociamos a cada punto del ***PNB***, una cantidad escalar como se observa en la figura F .

En donde $X = P_1/P_2/P_3$
$Z = 0$
$Y = P_N/P$

Por tanto la divergencia del campo económico vectorial ***G*** en este punto está definida por el límite:

$$DIV\ G = Lim\ \ 1/v \int_s Gds \qquad \ldots\ldots 1.1.35$$

Donde se supone que ***V*** se contrae en la superficie ***PNB***. Por otra parte, para un campo que no es solenoidal (uniforme , homogéneo en la trayectoria del flujo económico) , si en un punto del ***PNB*** no se anula la divergencia de ***G***, se debe producir en este punto un flujo económico neto (entrante o saliente). Esto nos da la idea de la divergencia (positiva o negativa). Vamos antes a obtener una expresión explícita de la divergencia de la función ***G***, en coordenadas cartesianas.

Considere que el volumen ***V*** es un quasi-cubo de modo que la superficie ***S*** consta de seis sub-superficies:

$$S = \begin{cases} G(\lambda_1, \mu, v) & \\ & \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2,\ V_1 \leq V \leq V_2. \\ G(\lambda_2, \mu, v) & \\ G(\lambda, \mu_1, v) & \\ & V_1 \leq V \leq V_2,\ \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2. \\ G(\lambda, \mu_2, v) & \\ G(\lambda, \mu, v_1) & \\ & \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2,\ \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2 \\ G(\lambda, \mu, v_2) & \end{cases} \qquad \ldots\ldots 1.1.36$$

Así escribimos la integral:

$$\lim_{V \to 0} 1/v \int_s Gds$$

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{1}^{v_2} G(\lambda_2, \mu, v) \,.\, (b\mu \times bv)\, d\mu dv$$

$$- \int_{\mu_2}^{\mu_1} \int_{v_2}^{v_2} G(\lambda_1, \mu, v) \,.\, (b\mu \times bv) \, d\mu dv$$

$$+ \int_{v_1}^{v_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G(\lambda, \mu_2, v) \,.\, (bv \times b\lambda) \, dv d\mu$$

$$- \int_{v_1}^{v_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G(\lambda, \mu_1, v) \,.\, (bv \times b\lambda) \, dv d\lambda$$

$$+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} G(\lambda, \mu, v_2) \,.\, (b\lambda \times b\mu) \, d\lambda d\mu$$

$$- \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} G(\lambda, \mu, v_1) \,.\, (b\lambda \times b\mu) \, d\lambda d\mu$$

$$\int_s j \,.\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 1.1.37$$

Será la cantidad total de producto saliente de ***V*** en un instante. Así el volumen y el flujo saliente se encuentran relacionados por:

$$-d/dt \quad \int_v d \;\partial V = \int_s j \,.\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 1.1.38$$

Lo que podemos expresar diciendo que si la cantidad de productos que hay en ***V*** disminuye, debe haber un flujo neto saliente de ***S***. Por lo que ***S*** y ***V*** se toman fijos en el espacio, de tal forma que los límites de integración, son constantes en el tiempo. En términos de divergencia tenemos:

$$-\partial d/\partial t \quad dV = \int_v \; div\, j \; dV. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 1.1.39$$

Si la economía es estacionaria y no tiene perturbaciones en su ciclo económico, tenemos:

$$\partial d/\partial t \; + div\, j = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 1.1.40$$

Sin embargo, en la economía se produce una situación peculiar, existe el consumo de los productos que se puede considerar como un manantial continuo y difuso, que no puede excluirse del volumen. Así la variación de la cantidad de! producto que hay en ***V*** está explicado por el consumo.

Esto se expresa mediante:

$-d/dt \int_v ddv = \int_s j \cdot dS - \int_v q \, dV.$ 1.1.41
Donde q es el consumo neto final.

Si ***q (PNB)*** es positiva, existe en el volumen una pérdida neta de producto y se generaliza poniendo:

$\partial d/\partial t + \downarrow \cdot j = q$ 1.1.42

La cantidad ***q*** puede ser un escalar conocido, puede ser proporcional a ***PNB*** o puede ser una función compleja en todos los casos el valor de $\partial d/\partial t + \downarrow \cdot j$, se debe considerar como una medida de la no conservación del producto de la economía. Un campo económico importante en la economía es el campo de velocidades del producto nacional bruto ***V(PNB)***, uno de los conceptos más importantes que se comprenden con este concepto es el comportamiento de los agentes económicos en movimiento. Para describir el comportamiento de un solo agente económico se usa el vector de posición dependiente del tiempo ***PNB(t)***, entonces la velocidad de variación es ***d (PN B) / dt***.

Cuando se estudia la economía en su conjunto, ***v(t, PNB),*** se define en un punto genérico del espacio que en el transcurso del tiempo esto es, condicionado por la ejecución económica de muchos agentes, se considera un campo económico ***Φ(G PNB),*** en dos instantes consecutivos en los cuales los agentes son los mismo si esos instantes están separados por el pequeño intervalo ***Δt.*** , los valores que queremos comparar para el consumo serán aproximadamente:

$$\Phi \; [t + \Delta t, PNB + v(PNB) \; \Delta t]$$

$Y \quad \Phi \; [t, PNB]$ 1.1.43

Después de un corto período de tiempo, la posición económica que originalmente estaba en ***PNB***, será: ***PNB + v (PNB) Δt***.

En donde $PNB = (\lambda, \mu, v)$

$V = v(\lambda, \mu, v)$ 1.1.44

Los tres espacios económicos considerados quedando:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{v_1}^{v_2} \{ [\partial \Phi / \partial t + (v.\downarrow) \Phi] + \Phi \downarrow v \} (b\lambda, b\mu, bv) \, d\lambda d\mu dv$$

..........1.1.45

Aplicando la derivada conectiva tenemos:

$$= \int_{v(t)} (D\Phi / Dt + \Phi \text{ div } v)dV \quad \text{.......1.1.46}$$

o bien diferenciando:

$$d/dt = \int_{v(t)} \Phi dV = \int_{v(t)} [\partial\Phi / \partial t + \text{div } (\Phi v)]dV \quad \text{.......1.1.47}$$

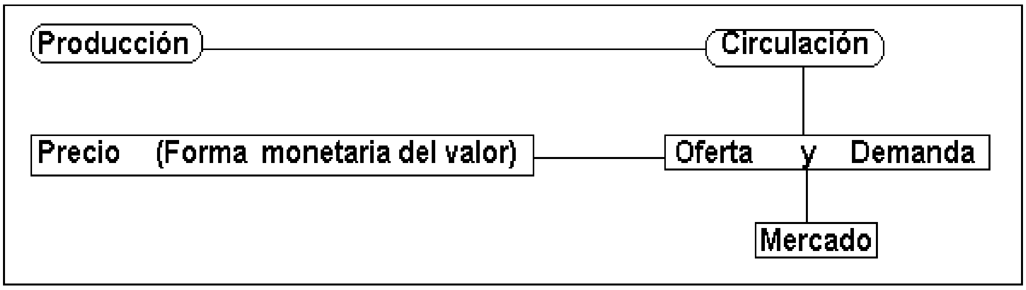
Lo que nos indica que la variación de la integral de volumen se determina por la variación de la función en ***V*** y su divergencia a través de la superficie ***S***. En términos no matemáticos se dice que el volumen de la actuación económica de todos los agentes es dependiente de las ***3*** variables económicas que crean valor (trabajo, espacio, tiempo) y de una función que indica la forma que asume, al variar en el tiempo a una velocidad de ejecución determinada; existe además de la integral de volumen, la integral de la divergencia (entrada, salida o consumo de productos) de la función multiplicada por la velocidad de ejecución en el mismo dominio de integración.

CAPÍTULO II. LOS BIENES Y LOS PRECIOS.

El concepto dual de bienes y precios y el significado de estos dos términos es algo diferente de lo que entiende la gente comúnmente, por lo cual se necesita precisar. La economía es considerada como un instante dado llamado el instante presente.

“Un bien es caracterizado por sus propiedades físicas, por la fecha en la cual esta disponible y el lugar en el cual esta disponible.” [4]

Veamos pues el siguiente esquema de formación del precio:



“El precio de un bien es el monto que tiene que ser pagado ahora por la disponibilidad futura de una cantidad de un bien.” [5]

Aquí no se considera la teoría del dinero, y se asume que la economía trabaja sin la ayuda de un bien que sirva como medio de intercambio. Así, el papel de los precios es como sigue: Con cada bien es asociado un número real, su precio.

Digamos que un agente económico acepta la entrega de una cantidad determinada de un bien. El producto de la cantidad y el precio es un número real. Este número, será llamado el monto pagado por el agente. Para ligar los concepto precedentes de precio con la noción usual de un monto de dinero pagado cundo y donde el bien es disponible, uno debe de introducir el concepto e precio en un fecha determinada, en un lugar especifico.

Así uno obtiene comparación de los precios en el mismo lugar en diferentes fechas los intereses y las tasas de descuento y por comparar precios en la misma

---

4 Chain, Nassir Sapag, Chain, Reinaldo (1988), "Preparación y evaluación de proyectos", Mc Graw Hill, Santa Fé de Bogotá, 1995.(p.582).

5 Funtowics Silvio Jerome. “La ciencia económica postnormal”. Barcelona,2002.(p.58).

fecha pero en diferentes lugares las tasas de intercambio. El intervalo de tiempo sobre el cual la actividad económica se realiza, es dividido dentro de un numero infinito de intervalos elementales pueden ser numerados en orden cronológico, el origen común puede ser diferente (momento, hora, día, semana, mes, año). Simultáneamente, la región de espacio sobre la cual la actividad económica se realiza, es dividida en un número finito de regiones elementales compactas; estas regiones elementales que pueden ser arbitrariamente numeradas son elegidas tan pequeñas que pueden ser indistinguibles desde el punto de vista del análisis.

Una región elemental será llamada la localidad. El concepto del bien será introducido por medio de ejemplos.

El mas simple de todos es el de un bien económico como el trigo, sin embargo hay muchas clases de trigos y uno tiene bienes bien definidos para lo cual uno debe describir completamente el bien del cual uno esta hablando. Aun mas, el trigo disponible ahora y el disponible dentro de una semana juegan el rol económico enteramente diferente para un molino que lo usara.

Por eso un bien en una fecha determinada no es el mismo bien en una fecha posterior, ya que son objetos económicos diferentes y la especificación de la fecha en la cual estará disponible es esencial.

Finalmente, el trigo disponible es un país ***X*** y el trigo disponible en un país ***Y***, juegan un papel económico completamente diferente por lo que son objetos económicos diferentes.

En nuestro caso, un bien es por lo tanto definido por la especificación de todas sus características físicas, de la fecha de su disponibilidad y el lugar en el cual se encuentran disponibles, si alguno de estos factores cambia, tenemos un bien diferente. La cantidad de una clase especifica de un bien es expresada por un numero que puede satisfactoriamente ser asumido de ser cualquier numero real no negativo. Lo que es disponible a un agente económico es llamado un recurso para el, y lo que es puesto a disposición por un agente económico es un producto.

Para algunos agentes económicos, los recursos serán representados por números reales no negativos para los productos.

“Los bienes se clasifican según su uso y en unidades individuales o clases (trigo, hierro ,cemento, petróleo, agua, gas, etcétera).” [6]

La tierra como bien requiere de una especial atención ,sus condiciones están descritas por la naturaleza del suelo, del subsuelo, de la riqueza forestal, de las

6 Baumol, William J. y Quandt, Richard E. “Investment and discount rates under capital rationing: a programming approach”. The Economic Journal, Vol. LXXV, junio 1995.(p.15,19,27).

construcciones sobre de ella, etcétera. Una cantidad de tierra con condiciones especificas de localidad en un fecha es expresada por un número real de hectáreas. Un servicio puede considerarse como un tipo de bien con características especiales. El primer ejemplo de un servicio de un servicio económico, es el trabajo humano.

Se describe por la misma tarea ejecutada, cuando uno adiciona la fecha y el lugar en el cual se prestada el servicio, uno ha definido el servicio como un bien. La cantidad de un tipo específico de trabajo es expresado por el tiempo de trabajo.

Definición formal de un bien: "Un bien o servicio es un objeto que esta completamente especificado físicamente, temporalmente y espacialmente y que tiene un significado económico." [7]

Se asume que existe solo un número finito de bienes distinguibles, estos son indicados por un índice que va de ***1*** a ***k***, también e asume que la cantidad de cualquiera de ellos puede ser un numero real.

Si uno estudia los cambios en la fecha de disponibilidad, uno obtiene la teoría del ahorro, la inversión y el capital e interés. El espacio $\boldsymbol{R^K}$ será llamado el espacio de los bienes. Para cualquier agente económico, un plan completo de acción o una actividad es una especificación para cada bien de la cantidad disponible y su uso. Lo anterior incluye los recursos y los productos. Una acción a es un punto de $\boldsymbol{R^K}$.

Con cada bien, digamos el h-ésimo, esta asociando un numero real, su precio.

Este precio puede ser interpretado como el monto pagado ahora por un agente económico para cada unidad del h-ésimo bien que tendrá disponible. El termino general de precio, cubre una gran variedad de términos de uso corriente: los precios, salarios, intereses, rentas, cuotas, cargas, etcétera).

Considere como ejemplo de un bien el trigo rojo disponible dentro de un año en New York (LAB). Su precio es el monto al cual el comprador debe pagar ahora en orden de tener una tonelada de esta clase de trigo entregado en el lugar y la fecha convenida. Al contrato de venta concurre un bien o servicio definido para ser entregado en una fecha y lugar específicos. El precio a ser pagado, es especificado ahora pero se entiende que ese precio será pagado en la fecha, lugar y localidad especificados.

El precio $\boldsymbol{P_n}$ de un bien puede ser positivo (bien escaso) nulo (bien libre) o negativo (un bien nocivo).

El hecho de que el precio de un bien sea positivo, nulo o negativo, no es una propiedad intrínseca de este bien, depende más bien de la tecnología, los gustos,

7 Cabre . "Física aplicada a los mecanismos" . México , D.F. Editorial.Libris . 1998 .(p.56).

los recursos, etcétera, de la economía. El sistema de precios de una economía es a k-ésima.

$$\boldsymbol{P = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots, p_k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.0$$

Que suele ser representado por un punto de $\boldsymbol{R^K}$.

El valor de una acción a relativa al sistema de precios p es:

$$\sum_{n=1}^{K} \boldsymbol{P_n \; a_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.1$$

O sea el producto interno

$$\boldsymbol{p \,.\, a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.2$$

De una manera formal: El número ***k*** de bienes es un entero positivo dado. Una acción de un agente económico es un punto de $\boldsymbol{R^K}$ el espacio de bienes. Un sistema de precios es un punto de $\boldsymbol{R^K}$***.***

El valor de una acción relativa a un sistema de precios es el producto interno

$$\boldsymbol{p.\, a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.3$$

Una vez definida la economía ***s*** su conjunto veamos ahora la función de oferta estudiando su núcleo básico: la producción.

“Una economía consiste de un numero determinado de agentes siendo el papel de cada uno de ellos elegir un plan completo de acción, esto es, decidir sobre las cantidades de sus recursos y/o de la producción de sus bienes.” [8]

Por esto un agente económico esta caracterizado por las limitaciones en sus elecciones y por su criterio de elección. Una clase completa de agentes económicos es la de los productores. El plan de producción de un productor esta restringido a pertenecer a un conjunto dado que contiene sus limitaciones y conocimiento tecnológico. En este conjunto de producción un plan es escogido para precios dados, de tal forma que se busca maximizar su beneficio, el que es entendido como la suma de todo lo que se recibe menos la suma de todo lo que se gasta. Una vez decidido el plan se sugiere un programa de trabajo para hacer mas preciso el plan de producción.

En el estudio de la producción, cuando uno se abstrae de formas legales de organización (S.A., C.V., etcétera) y tipos de actividad (agricultura, minería,

8 Gordon, M. J : “The payoff period and the rate of profit”. Journal of Business, vol. XXVIII, octubre 1995.(p.56).

construcción, etcétera) uno obtiene el concepto de productor, esto es, un agente económico cuyo rol, es escoger un plan de producción.

Se asume que existe un número entero positivo de productores y que cada uno de ellos es indicado por un índice. Para un productor digamos el j-ésimo, un plan de producción (para el futuro) es una especificación de las cantidades de todos sus recursos y de todos sus posibles productos. Los productos son representados por números positivos. Específicamente por un punto $\boldsymbol{Y_j}$ de $\boldsymbol{R^K}$ el espacio de bienes.

Una producción dada $\boldsymbol{y_j}$ puede ser técnicamente posible o imposible para el j-ésimo productor es llamado el conjunto de producción. El punto $\boldsymbol{Y}$ es también llamado la oferta del j-ésimo productor. Una producción $\boldsymbol{y_j}$ es clasificada como posible para el j-ésimo productor sobre la base de su conocimiento presente cerca de su presente y futura tecnología.

La suposición de certeza implica que al productor ahora que combinaciones le convienen de insumos y productos para una posible producción futura. Dada una producción $\boldsymbol{y_j}$ para cada productor la suma:

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{Y_j} \qquad \text{...2.4}$$

Es llamada la producción toral o bien la oferta total.

Las transferencias de bienes de productores a productores , porque choca con el planteamiento de la Matriz Insumo - Producto. Las coordenadas positivas y representan producciones de todos los productores no transferidos al sector de la producción. El conjunto:

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{Y_j} \qquad \text{...2.5}$$

Es llamado la producción total así $\boldsymbol{yj \ \varepsilon \ Y_j}$ para todo $\boldsymbol{j = 1,2,....n}$ es equivalente a $\boldsymbol{Y \ \varepsilon \ Y}$.

Este ultimo conjunto describe las posibilidades de producción de la economía total esto es, en general, esta contenido en un subespacio de $\boldsymbol{R^K}$. Resumiendo tenemos: El numero $\boldsymbol{n}$ productores es un entero positivo dado. Cada productor esta indicado por un índice $\boldsymbol{j=1,2,....n}$.

El j-ésimo productor elige un punto, su producción u oferta $\boldsymbol{y_j}$, es un subconjunto de $\boldsymbol{R^k}$ dado, no vacío.

Dada una producción $\boldsymbol{y_j}$ para cada productor:

$$Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

....2.6

Es llamado conjunto de producción total.

A lo largo del trabajo se hacen un grupo de suposiciones sobre los conjuntos y_j de producción y que a continuación se resumen una a una.

a) Y_j es cerrada. Esto es, sea Y_j^q una secuencia de producciones si todos los puntos de la secuencia son posibles para el j-ésimo productor y si $Y_j^q \to Y_j^0$ entonces Y_j es posible para el j-ésimo productor.

b) $^{0\ \varepsilon Y}j$ (posibilidad de inacción) esto es, el j-ésimo productor tiene la posibilidad de no hacer nada.

c) $Y^{\cap}\Omega c\{0\}$ (imposibilidad de producción libre) esto es, una producción total posible, cuyos insumos, son todos nulos, tiene todos sus productos nulos.

d) $Y^{\cap}(-y)c\{0\}$ (irreversibilidad) esto es, si la producción total y cuyos insumos y productos no son todos nulos, entonces la producción $(-Y)$no es posible.

"El proceso productivo no puede ser reversible desde que la producción consume el tiempo. "[9]

e) $(y_j^1 + y_j^2)\ \varepsilon\ Y_j$ (aditividad).Esto es, si ^{si} y_j^1 y y_j^2 son producciones posibles para el j-ésimo productor también lo es la suma.

f)Y_j es convexo, esto es, si y_j^1 , y_j^2 son producciones posibles para el j-ésimo productor también es posible su ponderación para

$T\ \ Y_j^1 + (1+T)\ Y_j^2 \quad 0 \leq T \leq 1.$ 2.7

g)Y_j es un cono con vértice 0 (retornos constantes de escala) esto es, si y_j es una producción posible para el j-ésimo productor, también lo es $T\ y_j$ donde T es cualquier numero no negativo.

Analicemos ahora las variaciones en los precios.

Sea p un primer precio en el sistema de precios y y_j una producción optima correspondiente para el e-ésimo productor. Si p' es un segundo precio, entonces denote el cambio de precios.

9 Dennis G. Zill . "Calculo con geometría analítica ". México , D.F. Grupo Editorial Iberoamericana . 2000.(p.89).

$p' - p = \Delta p$ 2.8

Y el cambio correspondiente de producción.

$y_j' - y_j = \Delta y$ 2.9

Por definición
$p' y_j' \leq p\, y_j$ 2.10

Por lo que :
$p\, \Delta y_j \leq 0$ 2.11

En forma similar :
$p' \Delta y_j \geq 0$ 2.12

Sustrayendo la primera ecuación de la segunda tenemos:

$\Delta ph.\ \Delta y_j \geq 0$ 2.13

Esto es, si el precio de un bien se incrementa, todos los demás precios permaneciendo constantes, un productor incrementa o deja sin cambio su producción de este bien.

"Un insumo es simplemente cualquier cosa que la empresa compra para usar en su producción u otros procesos. " [10]

El estudio formal de la producción clasifica la variable de decisión de la empresa en dos categorías: insumos y productos.

"Un producto es cualquier bien que la empresa produce o procesa para la venta" [11]

El termino procesamiento puede denotar un acto, transporte o almacenamiento y no necesariamente implica una actividad de manufacturado.

Las decisiones sobre los insumos y productor no pueden ser tomadas independientemente.
Existen soluciones tecnológicas que restringen las opciones posibles a la dirección de la empresa y que le dicen por ejemplo que uno puede producir ***Q*** unidades de

---

10 Hansen, Alvin H : "A guide to Marx & Kalecky". Nueva York, Mac Graw Hill, 1993. (p.85,96).

11 Harberger, Arnold C. " Sobre las tasas de descuento en el análisis de beneficio-costo". World Bank, Economic Development Institute, Washington,2003.(p.23).

producto ***q*** con un combinación que involucre menos de ***I*** unidades de recurso ***i, j*** unidades de recurso ***j***, etcétera.

Esta información tecnológica es sumarizada en la función de producción.

Q = g (I,J,K,...,). …………………………………………………………..…..2.14

La cual establece que ***Q*** es el monto máximo de producto ***q*** que la empresa puede producir si usa exactamente ***I*** unidades de insumo ***i*** , ***J*** unidades de insumo ***j*** etcétera. La existencia de una función de producción así presupone la existencia de optimalidad en la producción. Esta puede ser tomada habiendo examinado los cambios alternativos en ***I*** , ***J, K,*** etcétera, pueden ser utilizados para la producción del producto q en los diferentes procesos tecnológicos disponibles . De estos cálculos de optimalidad podemos asumir que la empresa a decidido que Q es la máxima producción posible con el conjunto de insumos dados. Una suposición económica muy utilizada en las empresas es la ley de los rendimientos decrecientes que significa un disminución en la productividad marginal . A medida que mas de un insumo ***X*** es utilizado, todos los demás insumos tomados constantes, eventualmente un punto será alcanzado donde las cantidades adicionales de insumo ***X*** nos llevaran a contribuciones marginales menores al producto total.

Sin embargo en la práctica el problema más bien se enfoca a encontrar que pasa a la producción cuando todos los insumos se incrementaron en la misma proporción, presentándose ***3*** casos:

1) Rendimientos decrecientes a escala.
2) Rendimientos crecientes a escala.
3) Rendimientos constantes a escala.

La última posibilidad es llamado el caso de una función de producción lineal homogénea y tiene propiedades matemáticas que lo hacen muy usual para propósitos de análisis. La programación lineal, envuelve la suposición implícita de que la función de la producción es lineal homogénea. Debe ser enfatizado que antes de hacer el análisis de la producción mediante la programación lineal, que el empresario o quien funge como tal debe elegir una línea de producción ,esto es, cuales bienes deben ser producidos y en que cantidades.

Primero definiremos la representación diagramatica y luego mediante un ejemplo analizaremos la función de producción lineal homogénea.

En la programación lineal , lo ejes son usados para medir cantidades de productos. Mas generalmente podemos decir que cualquier punto representa una combinación de productos que es una solución potencial al problema.

Los insumos hacen su aparición en la forma de las líneas de restricción que nos muestran la extensión hasta lo cual los recursos limitados nos permiten ir. Ahora es apropiado trasladar el problema de programación lineal a un diagrama diferente en el cual las cantidades son medidas en los ejes y producción especificada. Nos ayudaremos con las curvas de indiferencias.

Esto es con el fin de hacer congruente la programación lineal con la teoría económica.

Veamos un ejemplo ilustrativo: Una compañía procesadora tiene entre otras operaciones el entintado. Esta limitada en su producción por la capacidad de sus tintas para entintar y por el monto de obra calificado que tiene disponible par su proceso de producción. La empresa esta nombrado cuatro variantes de su proceso básico:

El proceso ***1*** involucra la inspección de defectos de una muestra de cada lote.

El proceso ***2*** involucra también la inspección.

El proceso ***3***, examina una muestra como es el caso del proceso ***1*** pero es inspeccionada una cantidad menor.

Finalmente el proceso ***4*** inspecciona todos los elementos uno por uno.

Sea la Q_1 la cantidad a ser producida en el proceso ***1*** Q_2 por el proceso ***2*** etcétera.

Suponga que tenemos los suficientes datos para especificar nuestro problema como:

Maximice los beneficios:

$0.9Q_1+0.75Q_2+1.0Q_3+1.1Q_4$ 2.15

Sujeto a las restricciones:

$$2Q_1+1.5Q_2+3.5Q_3+7Q_4 \leq 4000$$

$$0.4Q_1+.45Q_2+0.35Q_3+0.3Q_4 \leq 600$$

$$Q_1 \geq 0;\ Q_2 \geq 0;\ Q_3 \geq 0; Q_4 \geq 0$$

............................2.16

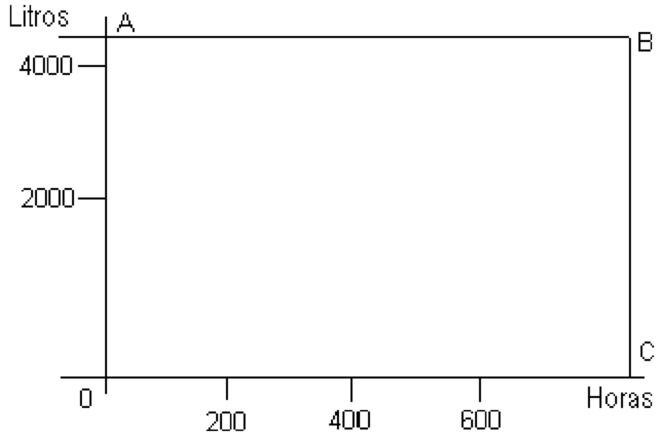
Aquí ***4000*** galones hora por semana es la capacidad disponible de los tanques y ***600*** horas hombre por semana es el monto de mano de obra que la compañía puede usar par su producción.

El primer coeficiente ***0.9*** en nuestra función de beneficio, representa la recuperación por pie tratada por medio del proceso número ***1***, la misma interpretación para los otros procesos.

El primer número ***2*** en la restricción de arriba indica el número de hora galón que absorberá el proceso del número ***1***. Lo mismo para los demás. Nosotros podemos ahora dibujar la región factible, la que muestra la figura de abajo en la que se muestra el rectángulo ***OABC*** acotado por los segmentos ***OA*** y ***OC*** de los dos ejes, la línea horizontal ***AB*** representa ***600*** horas de trabajo y la línea vertical ***CB*** representa ***4000*** litros de capacidad .

Desde que el máximo es de ***600*** horas y de ***4000*** litros por hora ,solo la región sombreada representa las combinaciones factibles de insumo.

Figura G :



Ahora debemos representar geométricamente un proceso. Para nuestro propósito un proceso de producción requiere involucrar proporciones fijas de insumos.

Por ejemplo ,en nuestro modelo ilustrativo el proceso ilustrativo número ***1***,envuelve el uso de ***2*** hora –galón de la capacidad del tanque y de ***0.4*** horas de mano de obra calificada por metro de producción. Esto significa que ***10*** metros cuadrados de piel requerirán de ***20*** galones , no importa cual grande sea la producción siempre es lineal y siempre empleara en el caso del proceso ***1*** del ejemplo: ***2 / 0.4=5*** unidades de tiempo de tina por una mano de obra.

Este radio constante de cantidades de insumo es de hecho una propiedad que podemos usar al definir gráficamente un proceso de producción. Así dados los procesos ***A*** y ***B*** si el proceso ***A*** involucra ***6*** horas de tiempo de tina por una mano de obra, mientras que el proceso ***B*** involucra ***4*** horas de tiempo de tina por una mano de obra, entonces los procesos ***A*** y ***B*** son diferentes.

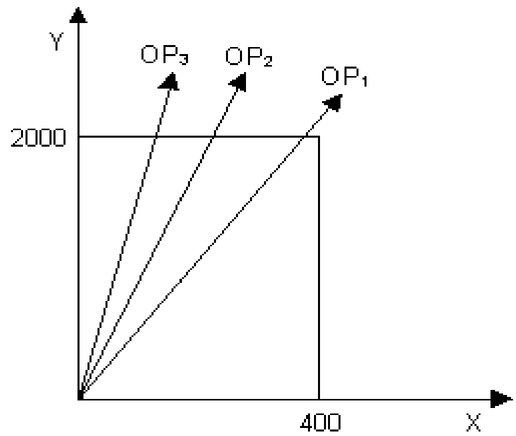
Con la ayuda de esta definición, podemos representar un proceso diagramáticamente. Nuestra grafica mostrara solo los insumos y se muestra mediante líneas ***OPI*** representa el proceso ***1***. Cada punto ***OP1*** representa una producción que puede ser producida por medio del proceso ***1*** si los recursos son disponibles. Una línea que pasa por el origen y que se proyecta en el espacio factible es propiamente llamada un rayo y no una recta. Lo mismo sucede con los procesos p_2 y p_3, etcétera, y con sus rayos.

La teoría clásica de producción considera la construcción de rectas de indiferencia de producción o isocuantas .En este modelo y con fines de asociar la programación lineal y la teoría económica deduciremos las rectas de indiferencia de producción y de beneficio (iso-beneficio).

Por el momento concentraremos nuestra atención en los procesos ***1*** y ***3***.

En esta figura siguiente vemos el punto D_1 representa ***4000*** unidades del proceso ***1*** mientras que D_3 representa también ***4000*** unidades del proceso ***3***. Así, la curva de indiferencia de producción que envuelve la producción de ***1000*** metros cuadrados de piel, debe pasar sobre estos dos puntos, de esta forma podemos proyectar las curvas de indiferencia de producción en los rayos por los procesos ***1,2***, etcétera.

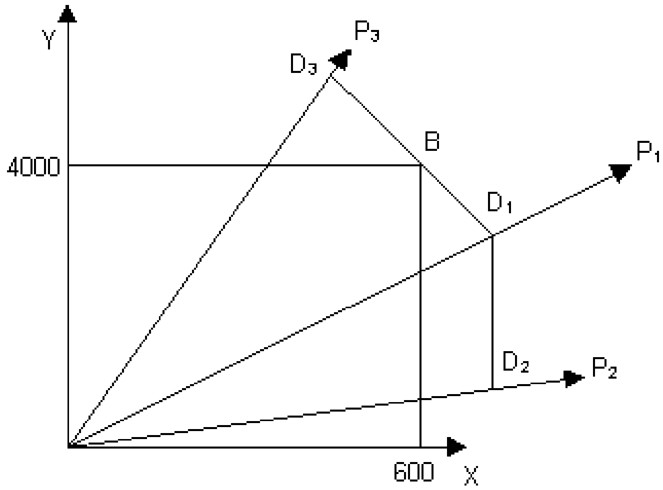
Figura H :



De forma similar el caso de las curvas iso-producto se construyen las curvas rectas de iso-beneficio como la producción es lineal y homogénea, tenemos beneficios constantes de escala. La característica de curvas de iso-beneficio es que tiene la misma pendiente de las de iso- producto. Ya hemos obtenido una descripción grafica de la región factible y de las posibilidades de beneficio(iso-beneficio-curvas).

Ahora es una simple operación combinar ambos superponiendo las graficas y encontrar la solución optima.

Figura I :



Desde que entre dos rayos de procesos los segmentos de las curvas tienen la misma pendiente, nosotros podemos construir todas las curvas de indiferencia que queramos, en particular $\boldsymbol{D_3,D_1,D_2}$ que toca el punto extremo en el cual la solución óptima y factible o sea el punto ***B***.

No solo puede usarse el modelo grafico, si no también el simples u otro, pero lo importante de este ejemplo es que une la teoría económica de la producción y la teoría de la programación lineal justificando ambas. Existe una segunda clase de agentes económicos: Los consumidores, como el caso de un productor, el papel de un consumidor es el de escoger el plan de consumo completo y se encuentra caracterizado por las limitaciones en su elección y por su criterio de elección.

Aquí las limitantes son de dos clases:

- El plan de consumo debe de satisfacer unas restricciones a priori.

- Los precios dados y el presupuesto del consumidor determinan que el plan de consumo no exceda su riqueza.

Un consumidor es típicamente un individuo pero puede ser un grupo con un propósito común. Su papel es elegir un plan de consumo hecho ahora para un futuro determinado, esto es, una especificación de las cantidades que consumirá.

Se supone que hay un número entero-positivo dado $\boldsymbol{\mu}$ de consumidores, y cada uno de ellos es indicado por un índice $\boldsymbol{p = l, 2, \ldots, \mu}$. El consumo está representado por números positivos y se puede representar por un punto $\boldsymbol{x_j}$ ***de*** $\boldsymbol{R^x}$.

El espacio de bienes.

Un consumo dado x_i puede ser posible o imposible para el i-ésimo consumidor.

El conjunto x_i de todos los consumos posibles para el i-ésimo consumidor es llamado su conjunto de consumo.

El punto x_i es también llamado la demanda del i-ésimo consumidor.

El número ***1..1*** de consumidores es un entero positivo dado.

Cada consumidor es indicado por un índice ***p =l, 2, . . . , µ***.

El i-ésimo consumidor elige un punto, su consumo o su demanda x_i, en un subconjunto dado no vacío de R^k. Dado un consumo x_i para cada consumidor :

$$X = \sum_{p=1}^{\mu} X_j \qquad \ldots\ldots\ldots 2.17$$

Es llamado el consumo total.

Suposiciones sobre el conjunto de consumo.

a)X_j es cerrado, esto es, sea x_i^q una secuencia infinita de consumos si todos los consumos x_i^q son posibles para el i-ésimo consumidor y si $x_i^q \rightarrow x_i^0$,entonces x_i^0 es posible para i–ésimo consumidor.

b)X_i tiene cota inferior. Es claro que el consumo tiene como cota inferior a cero.

c)X_i es conectando, esto significa en un lenguaje impreciso e intuitivo que x_i esta hecho de una sola pieza.

d)X_j es convexo, esto es si X_i^1 , X_i^2 son consumos posibles para el i-ésimo consumidor, también lo es su promedio ponderado.

$$T\ (x_j^1) + (1-t)\, x_j^2 \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad \ldots\ldots\ldots 2.18$$

Dados dos consumos X_i^1 , X_i^2 en x_j, una y solo una de las tres siguientes alternativas se lleva a cabo para el i-ésimo consumidor:

a) X_i^1 es preferida a X_i^2

b) X_i^1 es indiferente a X_i^2

c) X_i^2, es preferida a X_p^1

La relación binaria de indiferencia anterior también es reflexiva y transitiva.

La clase en la cual varios puntos son indiferentes entre si, es la clase de indiferencia pudiéndose formar con ella puntos o líneas o curvas de indiferencia. También puede existir un preordenamiento de preferencia para el i-ésimo consumidor en el cual presenta sus gustos o preferencias en relación a varios artículos de consumo. Existe una suposición de insaciabilidad que a continuación se menciona:

No existe consumo de satisfacción para el i-ésimo consumidor.

Dado un precio ***p***, y un consumo ***xi*** , el gasto del i-ésimo consumidor es ***pxi***.

El gasto ***pxi*** deber ser claramente al menos igual a la riqueza del i-ésimo consumidor un numero real ***ri***. Este concepto de riqueza corresponde a la noción de la corriente del valor presente de los objetos de consumo. La m-tupla ***r*** es llamada la distribución de la riqueza y especifica la riqueza de cada consumidor y puede ser representado por un punto ***r*** de R^{μ}. Dado un precio ***p***, y su riqueza del consumidor ***ri***, el i-ésimo consumidor escoge su riqueza en el conjunto de consumo ***xi*** de tal forma que su gasto ***pxi*** satisface la restricción de su riqueza.

$pxi \leq ri$ 2.19

El punto ***r=(ri)*** de R^m es llamado la distribución de riqueza y el punto ***(pr) de*** $R^{2+\mu}$ es llamado el par precio-riqueza. El primer paso para determinar una recta de demanda es construir una línea de presupuesto o bienes de iso-gasto.

Dado el ingreso de un consumidor, suponga que sólo tiene que elegir entre dos bienes ***x*** e **y** suponga los precios de esos bienes fijos; dados los precios y su presupuesto determine la cantidad máxima de un bien que se puede adquirir sin consumir.

Determine en forma sencilla la cantidad máxima del otro bien sin consumir nada del primero, tenemos así dos puntos ***(x, 0) (0, y)***.

A partir de aquí todos los puntos que nos mostrarán indiferencia en el consumo de los productos usando como máximo el presupuesto real o riqueza del consumidor.

Determine todos los puntos de los que:

$$x \approx y \qquad \begin{matrix} x \leq r \\ y \leq r \end{matrix} \qquad \text{...2.20}$$

Básicamente son dos teorías juntas las que dan origen en este punto a la recta de demanda: La teoría de la utilidad marginal y la de la indiferencia.

"La satisfacción que alguien recibe de consumir bienes es llamada su utilidad, se puede distinguir entre la utilidad total que proporciona el consumo de un bien y la utilidad marginal de consumir un poco más o menos de ese bien." [12]

El consumidor generalmente decide en la elección de dos bienes no sobre la utilidad total que le proporciona el bien sino sobre las utilidades marginales. A medida que aumenta el consumo de un bien siendo los demás consumos constantes, la utilidad marginal disminuye (pendiente negativa).

Suponga ahora que si el consumidor trata de maximizar su utilidad y que sólo tiene los dos bienes mencionados, con los dos bienes, el consumidor puede encontrar las curvas que representan la utilidad marginal igual de los dos productores de esta forma construye las curvas de iso-beneficios. Ahora bien, dado que el consumidor desea maximizar su utilidad que recibe, gastará el máximo que puede, pero de tal forma que el gasto entre los dos bienes le proporcionen la máxima utilidad, esto sucede en el punto en el cual se tocan la recta del presupuesto de los dos bienes y la curva de iso-beneficio, este punto es el que maximiza el beneficio sujeto al presupuesto y representa un punto x_i de la demanda del consumidor.

Ahora bien, como ya hemos visto que la utilidad marginal decrece al aumentar el consumo, podemos representar los puntos que se generan con diferentes presupuestos y con diferentes utilidades marginales. Suponga que el punto que maximiza la utilidad se genera para muchos presupuestos y para muchas curvas de iso-beneficio, la resultante será una gráfica que nos muestra la demanda de los diferentes bienes a los diferentes precios que se encuentran en el mercado.

Como corolario podemos establecer:

La respuesta de la demanda a un cambio en el precio, depende de la utilidad marginal sobre un rango relevante de precios y utilidades entre bienes y no depende sobre la utilidad total que proporcionan dichos bienes.

---

12 Modigliani, F. y Miller, M. "The cost of capital, corporation finance and the theory of investment ". American Economic Review, 1998. (p.85).

“La teoría del capital tiene como objeto de estudio: la compra y uso de planta durable, equipo e instalaciones relacionadas con la producción y distribución de bienes y servicios. “ [13]

Trata de determinar el punto más rentable en el tiempo para adquirir capital, y también cuándo debe de usarse antes de que se reemplacé así como cuándo y cuánto invertir en su mantenimiento y reparación. La teoría del capital primero surgió como un apéndice de la teoría de los precios y la distribución, en el curso de la determinación de las tasas de interés y sus funciones.

“En la historia de la teoría del valor se puede observar claramente que los precios de los bienes no podrían ser explicados simplemente por la mano de obra necesaria para producirlos.” [14]

Una de las principales dificultades, es que si un bien ***A*** toma dos horas para ser producido y se puede emplear de inmediato otro bien ***B***, también emplea dos horas de labor pero requiere algún tiempo antes de su uso. Por lo que los dos bienes se venderán a diferentes precios. Un productor que desea producir el bien ***B*** sabe que no sólo tiene que pagar los salarios de las dos horas empleadas sino que tiene que guardar dinero en efectivo por un período de tiempo. El costo de guardar el dinero inmovilizado, es lo que determina las tasas de interés. De esta forma si algún bien requiere de un período mayor para su gestación es muy probable que su precio sea mayor. De este ejemplo podemos sacar dos conclusiones:

a) El paso del tiempo puede ser un requisito para la producción.

b) El tiempo cuesta dinero, o sea, es otro insumo que tiene su precio.

El término capital, no se refiere a las cantidades de dinero o su uso en la compra de acciones o valores; más bien significa fábricas, maquinarias, materiales, inventarios etcétera.

Capital es en suma cualquier insumo o valor previamente producido que sirve a un agente económico para su consumo o producción.

La inversión se refiere a la producción o adquisición de cualquier activo de capital.

Si una empresa tiene un capital de $\boldsymbol{x}$ e invierte a una tasa de $\boldsymbol{\Delta}$ por año, al final del año tendrá $\boldsymbol{x + \Delta}$.

---

13 Novosolov. “Несоответствие капитализма”. Edit.Moscu.,Rusia 1992.(p.56).

14 Solanet, Manuel A.” Evaluación económica de proyectos de inversión”. Editorial SAE (Sociedad Argentina de Estudios), Buenos Aires, 1995.(p.23).

Si designamos la inversión y el capital en el año ***t*** por ***It*** y ***Ct*** debemos tener:

$I_t = C_t - C_{t-1}$ ………………………………………………………………….2.21

El tiempo es una materia crucial para la inversión y el capital.

"Una característica física de una máquina o de cualquier otro activo es su durabilidad, o sea, el hecho de que servirá durante un período de tiempo que puede ser establecido categóricamente como cualquier objeto cuya producción se extiende en el tiempo y debe emplear capital como insumo, además los objetos en proceso de producción son parte del inventario y por lo tanto forma capital." [15]

Concluimos que cualquier objeto cuya producción toma tiempo debe de usar capital en su producción, así, el capital como un insumo involucra el uso del tiempo, todo esto significa que el monto de capital empleado en un proceso de producción, no puede ser medido por un simple número, digamos su valor pecuniario sino que debe de especificar una medida de tiempo asociada con este valor. La medida del capital, por lo tanto, involucra cuando menos dos variables: cantidad y tiempo. Esto requiere que hay dos caminos básicos en los cuales el capital puede ser incrementado, o sea, podemos usar una cantidad mayor o menor de capital o podemos usar procesos que involucran más o menos tiempo. Uno de los tópicos más importantes en lo que se refiere al capital es su expansión o acumulación.

Si iniciamos en el tiempo t_0, es necesario que después del proceso productivo tengamos t_1 un capital igual o mayor que el que tenemos , o sea:

C_0 capital tiempo t_0

C_1 capital tiempo t_1

$C_0 \leq C_1$ 2.22

Para poder satisfacer esta necesidad es necesario considerar la velocidad de ejecución del ciclo económico, por lo que pensando en una economía nacional o bien mundial seria necesariamente aplicable la siguiente formula:

$C_1 = C_0 v^n$ 2.23

Donde C_1 es el nuevo capital generado que puede ser menor, igual o mayor al del ciclo anterior, C_0 es el capital inicial, y es la velocidad de ejecución del ciclo económico y n es la tasa a la cual disminuye o crece el capital. Siendo $n \geq 0$.

15 Hansen, Alvin H." A guide to Marx & Kalecky " . Nueva York, Mac Graw Hill, 1993. (p.104).

Esta misma formula es posible aplicarla al Producto Nacional Bruto de un país con lo que el Producto Nacional Bruto en el tiempo t_1 seria:

$PNBT1 = (PN\ B\ t_0)\ v^n$ ……………………………………………………...2.24

PNB = Producto Nacional Bruto.

v= Velocidad de ejecución del ciclo económico.

N (n≥0)= Tasa de disminución o crecimiento de la economía.

"El análisis neoclásico fija la atención del estudio del capital en la oferta y demanda de recursos de capital en relación a la cantidad de recursos de capital y la tasa de interés, aquí los ahorros son considerados la fuente real de recursos a ser usados en la formación de capital. " [16]

Sin embargo, lo más importante en este análisis es el fenómeno psicológico de tiempo de preferencia o tasa de descuento.

Esto significa que los bienes a ser consumidos ahora tienen mayor valor que los que sirven a consumir en el futuro y la gente puede esperar un consumo futuro a cambio de un interés presente. Más explícitamente, se dice que el consumo en una fecha particular está sujeto a disminuir su utilidad marginal, de tal forma que el consumidor pospone el consumo siempre que la utilidad marginal sea mayor que la tasa de interés; si son iguales se encuentra su equilibrio. En otras palabras, el equilibrio requiere que la tasa de interés sea igual a la utilidad marginal del consumo pospuesto.

Es característico del capital que para su integración y mantenimiento se gasten montos que se recuperan en fechas posteriores.

Suponga por ejemplo, que una inversión de ***$100*** nos da un ingreso de ***$20*** al término de un año y de ***$25*** al término de ***2*** años, de tal forma que debemos comparar el valor del dinero en diferentes puntos de tiempo. Un peso ahora, un peso al final de un año y un peso dentro de dos años son diferentes. Entre más pronto recibimos nuestro dinero, obtenemos una máxima utilidad, dado que podemos poner a trabajar el dinero, generando recursos. Veamos ahora cuánto más o cuánto menos recibiremos en relación al tiempo.

Suponga que ***P*** pesos son invertidos a una tasa de interés ***i*** compuesta anualmente.

---

16 Stiglitz, Joseph E. "Algunas observaciones adicionales sobre el análisis de costos y beneficios en la evaluación de proyectos" . BID, Departamento de Desarrollo Económico y social, Washington, D. C., setiembre 1984.(p.85).

Entonces al final del año nos dará ***ip*** pesos en interés el cual se debe adicionar a la recuperación del capital ***P*** lo que nos da:

$P + iP = P(1+i)$ ……………………………………………………………………2.25

Sea la suma inicial p_0 los pesos en la fecha inicial o año 0.

Sea p_1 la suma final al termino del año (cuyo significado es pesos a recibir al final del año ***1***)

De acuerdo a la formula anterior tenemos:

$P_1=P_0(1+p)$ ………………………………………………………………..……..2.26

Esto es p_0 se convertirán en p_1 pesos recibidos al final del año ***1***. Despejando a p_0 tenemos:

$P_0=\frac{1}{(1+p)}p_1$ ....……………………………………………………………........2.27

Sea $D = \frac{1}{(1+p)}$ la tasa de descuento.

Así, $D\,p_1$ es llamado el valor presente descontando de p_1 pesos para recibir dentro de un año.

¿Cuál es el valor presente P_0^* de algún monto de pesos recibir en dos años en el futuro?.

En un año :$P_0^*=P_1^*=(1+i)P_0^*$ 2.28

En dos años:

$(1+p)P^*_1=(1+i)(1+i)p^*_0$
$=(1+i)^2p^*_0$

o bien $p^*_0=\frac{1}{(1+i)}^2 p_2$ 2.29

Simultáneamente el valor presente descontado de p_n pesos para recibir en n años es:

$p_0^n = = \frac{1}{(1+i)}^n\ p_n$ ……………………...…2.30

Es útil analizar el significado del proceso de descuento que ha sido descrito y que lleva a la tasa de descuento y la tasa de interés.

La tasa de descuento $\frac{1}{(1+p)}$ o bien e^{-rt} en el caso continuo ha sido asociada directamente a la tasa de interés.

Estrictamente hablando :" la tasa de descuento es una medida de lo que pedimos por recibir nuestro dinero después, en un lugar de percibirlo ahora, suponiendo a un mercado perfecto. " [17]

Aun cuando el mercado no sea perfecto la tasa de descuento muestra el costo de oportunidad de poseer las recepciones de dinero. El concepto de tasa de interés debería de ser mas ampliado para cubrir todos los costos en que se incurre con el paso del tiempo.

El análisis de los modelos de insumo-producto se avoca a los fenómenos de equilibrio general de la producción. Estos modelos sólo analizan la producción, y la teoría de la demanda no interviene directamente en los modelos. El problema es esencialmente tecnológico; la investigación viene a determinar que puede ser producido, y la cantidad de cada producto intermedio que debe ser usado en el proceso de producción, dadas las cantidades de recursos disponibles y el estado de la tecnología.

El modelo pone énfasis en el fenómeno de equilibrio general y busca observar la interdependencia de los planes de producción y actividades de las industrias que constituyen la economía. El problema básico a resolver por el modelo, es entonces, qué es lo que puede ser producido para el consumo final y qué cantidad de la producción será usada en el curso de las actividades productivas.

Sea un conjunto ***n*** de insumos igual al conjunto ***n*** de productos. Defina los coeficientes de producción por α_{ij} y reúnalos en una matriz cuadrada ***A*** de orden ***nxn***, la cual por ser resultante de los sectores productivos que intervienen en la economía es semi positiva e irreducible.

Sea **y** el vector de productos producidos por el sistema.

Sea **x** el vector de insumos del sistema.

El modelo insumo-producto está dado por la resolución del sistema.

$$y = Ax \qquad x \geq O \qquad \text{...} 2.31$$

17 Arrow, Kennet J. y Kurz, M. "Public investment, the rate of return and optimal fiscal policy" . The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1970.(p.85).

El modelo tiene las siguientes características:

a) Es lineal y tiene coeficientes fijos de producción (los coeficientes no cambian en un tiempo ***T***).

b) Considera varios procesos de producción o actividades y cada proceso o actividad da origen a un solo producto.

c) Para producir una cantidad determinada de un producto específico se requiere de la participación de al menos algún insumo.

d) Debido a que los coeficientes de producción son fijos, no existe sustitución entre los factores de la producción.

Dentro del modelo, los insumos serán menores o iguales que ¡os productos, la que se puede representar matemáticamente como: $x \leq y$. La interpretación económica de que las variables sean mayores o iguales a cero, resultan del hecho de que la producción es irreversible.

“El modelo de insumo-producto, es un caso particular de los modelos lineales simples de producción.” [18]

18 Karl Enrich Marx. “Miseri di le filosofie “.Editorial.Allta.Paris.1942.(p.25).

II.1.Modelo de Producción Lineal.

Sean n bienes b_1 y $b_2, \ldots, b_n$ y m actividades productivas $p_1, p_2, \ldots, P_{m-1}$.

Sea la matriz $A = (^{\alpha}ij)$ donde $^{\alpha}\ ij$ es el monto del bien j consumido o producido por la actividad Pi.

El conjunto de bienes y actividades que se comportan como una producción lineal homogénea constituye el modelo lineal de producción. Existen dos suposiciones básicas respecto al modelo de insumo producto:

Suposición I. Cada actividad ***Pi*** produce sólo un bien.

Lo anterior quiere decir que no existe la producción conjunta.

Suposición II. Cada bien b_j es producido por una y solo una actividad P_j.

Esto significa que existe el mismo número de bienes que de actividades. Lo anterior produce una matriz cuadrada de orden ***nxn***. Interpretemos ahora los elementos $^{\alpha}\ ij$ de la matriz ***A***.

Sea $^{\alpha}\ ij$ el monto del bien j que es necesario consumir en orden de producir una unidad del bien b_j. Ya que el consumo de insumos es siempre positivo, se puede denominar a la matriz ***A*** como la matriz de consumo del modelo. La i-ésima fila a_i de ***A***, da los insumos.

Definición .Un modelo lineal simple, con matriz de consumo ***A*** será llamado productivo , si existe un vector no negativo $\bar{x}$ tal que $x > XA$,nosotros diremos en este caso que la matriz ***A*** es productiva.

Análisis de la solución al modelo:

$\bar{x} - Ax \geq 0$ 2.1.0

Dado que en todos los casos cuando x = 0 la solución es trivial, analizaremos los casos en que:

$x>0$ 2.1.1

Suponga que asociamos una variable ***A*** con fin de encontrar las raíces características tenemos que:

$x(I-A) = 0$ ………………………………………………………………………....2.1.2

Así:

$x(\lambda I\text{-}A) = 0$ 2.1.3

a) En el caso de que $\lambda = 1$ tenemos la solución única que satisface la estricta igualdad.

b) En el caso de que $\lambda = 0$ el sistema no tiene solución.

c) Suponga que $0 \leq \lambda < 1$, existen muchas soluciones factibles, tantas como valores diferentes tome λ y satisfaga el sistema.

d) Suponga que $\lambda = I$ el sistema tiene solución única, pero económicamente es imposible.

e) Sea M un número real positivo arbitrario.

Sea :

$\lambda > M$ $\qquad\qquad$ $0 \leq \lambda < 1$ 2.1.4

Tiene muchas soluciones, tantas como valores diferentes toma λ y satisface el sistema.

f) Sea M un número real positivo arbitrario.

Sea:

$\lambda < M$ $\qquad\qquad$ $0 \leq \lambda < 1$ 2.1.5

El sistema matemáticamente tiene solución pero se producen coeficientes $^{\alpha}ij$ negativos lo que no tiene sentido económico y se puede decir que económicamente el sistema no tiene solución.

g) Sea $\lambda > 1$. El sistema tiene solución sólo para: $\lambda > M$.

h) Sea $\lambda < 0$. El sistema tiene solución sólo para $A > \lambda$

$\overline{x}_1 \lambda_1 - MA x_1 = 0$ 2.1.6

Solución si:

$\lambda < 0$

$A > \lambda$

$A \neq \lambda$

$$\text{...2.1.7}$$

Teorema. Si la matriz ***A*** definida anteriormente es productiva, entonces para cualquier $y \geq 0$ la ecuación:

$$x(I - A) = y \quad \text{..2.1.8}$$

Tiene solución única no negativa. Terminemos el análisis matemático del modelo de insumo-producto con la siguiente definición:

Definición. Si la matriz ***A*** definida anteriormente es semipositiva, nosotros llamamos a la actividad ρ_j productiva si existe un vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ tal que:

$$\bar{x} \geq x A,$$

y

$$\bar{x}_j > \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \quad \text{..2.1.9}$$

El correspondiente bien b_j es llamado producible. Las actividades remanentes y bienes serán llamados no-producibles respectivamente. Existen dos tipos de modelos insumo-producto: Los modelos cerrados y los modelos abiertos.

Los modelos cerrados se caracterizan por:

a) El conjunto de bienes que aparece por lo menos una vez y como factores del sistema, es igual al que figura como producto.

b) Sólo existe como fuente la producción.

c) La producción es corriente (no de capital).

d) Los productos se usan una sola vez como factores.

Los modelos abiertos violan alguna de las restricciones impuestas en los modelos cerrados.

II.2. Modelo Abierto de Leontief.

Considere el modelo abierto Leontief, el cual es un modelo factor-producto de una economía de producción de $\boldsymbol{n}$ productos que también son factores, dentro del sector de producción. El problema fundamental, consiste en determinar si con el uso del modelo, se puede demostrar la factibilidad de que la economía ofrezca una cantidad arbitraria de productos netos, mayor o igual a una cantidad específica $\boldsymbol{C}$. Los productos netos ofrecidos reciben el nombre de demanda final o combinación de bienes. Sea $\boldsymbol{x}$ el vector del producto físico. Para producir los productos necesarios del sector de producción, se necesita $\boldsymbol{Ax}$ que es el vector de necesidades de factores. El vector de productos netos está representado por:

$$\boldsymbol{x - Ax}$$

$$\boldsymbol{x(I\text{-}A)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.2.0$$

El cual nos muestra las cantidades disponibles para ser utilizadas del mismo sector de producción. Si denotamos a $\boldsymbol{C}$ como un vector columna positivo consistente, el problema consiste en determinar si existe una $\boldsymbol{x}$ tal que:

$$\boldsymbol{X(I\text{-}A) = C} \qquad \boldsymbol{x \geq 0}$$

$$\boldsymbol{C \geq 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.2.1$$

Si $\boldsymbol{(I\text{-}A)}$ es no singular (como se puede demostrar al señalar que la matriz $\boldsymbol{A}$ es semipositiva e irreductible). Se puede despejar a $\boldsymbol{x}$. Suponga que $\boldsymbol{(I\text{-}A)}$ es no singular **y** $\boldsymbol{x \geq 0}$, entonces el modelo es factible. Es necesario ahora considerar los efectos en el modelo del factor adicional.

Sea $\boldsymbol{a_{ij}}$ la cantidad necesaria del factor para producir un unidad de producto en la i-ésima industria. Sea ***ao*** un vector de la matriz $\boldsymbol{A}$. El modelo abierto de Leontief debe además de satisfacer la condición de que :

$$\boldsymbol{a_0\, x \leq \xi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.2.2$$

Donde $\boldsymbol{\xi}$, es la cota superior o limitante del factor.

Suponga factible la anterior condición; Debemos ahora de considerar si la demanda final puede satisfacerse en alguna proporción deseada. La condición para producir alguna proporción deseada está dada por $\boldsymbol{C}$ y por $\boldsymbol{A}$, pues nos limitan la frontera de producción. Existen algunas consideraciones de este modelo:

a) Si con todas las industrias produciendo, se puede satisfacer alguna demanda final, no nula, se pueden satisfacer las demandas finales en varias proporciones.

O sea.

$\boldsymbol{X(I\text{-}A)\ x \geq 0} \qquad\qquad \boldsymbol{x > 0}$ ……………………………………….………..2.2.3

b) Si existe algún conjunto de precios positivos, para los cuales todas las industrias puede cubrir el costo de sus factores industriales y al menos una puede superar dicho costo.

$\boldsymbol{P\ A \leq \overline{p}} \qquad\qquad \boldsymbol{p \geq 0}$ ……………………………………………………….2.2.4

Así pues se pueden satisfacer las demandas en varias proporciones deseadas.

II.3. Modelo De Intercambio Simple.

Considere una economía en la cual hay n productores $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y n bienes, $B_1, B_2, \ldots, B_n$, donde el productor produce sólo el bien B_p, nosotros estamos considerando un período fijo de tiempo, digamos un año y por conveniencia escogemos nuestras unidades de tal forma que cada productor produzca exactamente una unidad de producto B_i por año.

Ahora, en adición a producir el bien B_i el productor p_i también, consumirá determinados montos de uno o más de los otros bienes.

Específicamente sea $^{\alpha}{}_{ij}$ el monto B_j consumido por P_j en un año donde:

$$^{\alpha}{}_{ij} \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.3.0$$

Nosotros también asumimos en nuestro modelo que es cerrado, lo cual simplemente significa que no hay flujo de bienes de o hacia fuera y por lo tanto para cada bien la producción total iguala al consumo dando la ecuación.

$$\sum_{i=1}^{n} {}^{\alpha}{}_{ij} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.3.1$$

Puede parecer que estamos haciendo una fuerte suposición al decir que produce y consume el total. Lo anterior será cierto si acordamos que P_i produce y se consume b_i teniendo un remanente $^{\alpha}{}_{ij}$ que se utiliza al final. La matriz $A = (^{\alpha}{}_{ij})$ formada por los coeficientes α_{ij} será llamada la matriz de intercambio del modelo.

Ahora suponga que el precio de una unidad de b_i es Π_i.

Entonces el ingreso anual de P_i también será Π_i desde que P_i produce y vende (incluyéndose así mismo) exactamente una unidad de B_i por año. El gasto anual de p_i está obviamente dado por la expresión:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \Pi_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.3.2$$

Diremos que los precios $P = (\Pi_1, \Pi_2 \ldots, \Pi_n)$ nos conducen al equilibrio .

II.4. Modelo Lineal Simple De Intercambio Comercial.

Considere n países $C_1, \ldots, C_n$´ los cuales hacen intercambio comercial entre sí y asuma que existe una unidad monetaria simple, digamos el peso. Suponga que todos los precios son dados de antemano y permanecen constantes. El ingreso n_j al país c_j se asume que viene enteramente de la venta de sus propios bienes, internamente o de otros países. Nosotros podemos hacer ahora una suposición de linealidad: la fracción de los c_j ´$_s$ de ingreso n_j que será gastado en importaciones de c_j es un número fijo a^{α} ij: que no dependen de n_j. Esta suposición de linealidad sólo se da en los modelos estáticos y en los agregados económicos. Desde que los números $^{\alpha}$ ij son definidos como fracciones del ingreso n_j se sigue por definición que $^{\alpha}$ $ij \geq 0$ *Y :*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 1 \qquad \ldots\ldots 2.4.0$$

Y por lo tanto la matriz $A = (\alpha_{ij})$ es una matriz de intercambio. Nosotros deseamos determinar el ingreso de cada país c_j el coeficiente a_{ij} es la propensión al gasto en el sector i a partir de un ingreso en el sector j. La matriz formada, es la matriz de propensiones. No existe problema de comparatividad. El ingreso de un sector se deriva del gasto en dicho sector a partir de otros gastos y de fuentes no especificadas. Un análisis a través del tiempo nos muestra en forma clara el comportamiento del ingreso y el gasto.

Si partimos de una situación inicial y, estudiamos el efecto de un incremento autónomo en los ingresos de los sectores que representaremos por y_0. El incremento da lugar a una primera corriente de gasto y con ello nuevos ingresos que están dados por y_I en forma matemática tenemos:

$$y_1 = A\, y_0 \qquad \ldots\ldots 2.4.1$$

Estos ingresos inducen a su vez nuevos gastos en el siguiente período dado por:

$$y_2 = Ay_1 = A^2 y_0 \qquad \ldots\ldots 2.4.2$$

Continuando el proceso hasta convertirse en algo similar a un escalar.

Si se mantienen los incrementos originales autónomos del ingreso, el ingreso total será y_n y estará dado por : $y_n^{\,n \to \infty} = y_1 + \ldots\ldots + y_n = (I + A + A^2 + \ldots)y_0$ …………2.4.3

la serie matricial $(I + A + A^2 + \ldots)$ …………2.4.4

Converge hacia $(I\text{-}A)^{-1}$ si todas las raíces características tienen modulo menor que la unidad y el modelo es factible (matriz irreducible).

Por lo tanto, la serie matricial converge si ningún sector gasta por encima de sus ingresos. De acuerdo con lo anterior adquiere gran relevancia la matriz de propensiones que es la que estimulará en qué forma se computará el ingreso y el gasto. Este mismo modelo se puede aplicar al caso internacional y a los ingresos y gastos originados por importaciones y exportaciones. Veamos este modelo:

Suponga que las actividades funcionan a niveles determinados de actividad definidos como ***y*** (de orden ***m***).

De acuerdo con lo anterior el producto neto del bien ***i*** será $\sum_J A_{ij} Y_j$ con por lo menos un A_{ij} igual a la unidad y uno positivo. El vector del producto neto del sistema es A_y. Dada una combinación de bienes ***C*** tenemos:

$$Ay = c \qquad y \geq 0 \qquad \text{2.4.5}$$

Como hay ***n*** ecuaciones y ***m (> n)*** variables ***yj***, existen muchas soluciones.

Seleccione una función objetivo con el fin de utilizarla y obtener el óptimo del factor primario escaso.

Sea A_{0j} el coeficiente de factor escaso para la actividad ***j*** ; Sea A_0 el vector de coeficientes de factores escasos directos (de la función objetivo); Sea ***C*** la cantidad mínima de factor escaso.

El problema consiste en:

$$Min \quad A_{0y}$$

Sujeto a:

$$Ay = c \qquad y \geq 0 \qquad \text{2.4.6}$$

De acuerdo a la programación lineal si la solución factible existe es básica, es decir tendrá a lo más n elementos no nulos de ***y***. Suponga que el sistema tiene solución factible básica, por lo que deben de producirse todos los bienes en alguna cantidad. Debido a que cada actividad da lugar a un solo bien, la relación óptima contendrá exactamente ***n*** actividades que tendrán valor positivo, produciendo cada una de las actividades los n bienes.

La matriz básica es de orden ***n x n*** la cual denotaremos A_B. La base A_B es tan sólo una matriz tecnológica insumo-producto ordinaria.

Suponga que la combinación de bienes cambia de ***C*** a ***C´.*** La programación lineal, nos dice que si una base es óptima para el sistema ***Ay = C*** también lo será para ***Ay = C´*** sí y sólo si el problema tiene una solución factible básica.

Ahora bien, si se produce una combinación de bienes con la base $\boldsymbol{A_B}$ y el sistema tiene solución básica factible, también puede producirse otra combinación con la misma base. De acuerdo con lo anterior si se produce una nueva combinación la solución básica del sistema igual a ***(y)*** será menor o igual a ***y**** la nueva solución básica y la base de la matriz de coeficientes serán los mismos.

Lo que en definitiva se propone el modelo, es ilustrar la naturaleza de la interrelación que existe entre los diversos sectores de la economía y es mediante el comportamiento de la matriz de coeficientes, como se observan y cuantifican los posibles cambios en la demanda de bienes y factores. En general, el examen de las perspectivas del mercado para cualquier producto, sólo puede realizarse de una manera adecuada mediante un modelo que permite relacionar el producto con los demás bienes o sectores. El cuadro de coeficientes proporciona una base adecuada para una cuantificación y ésta estimación estaría apoyada en un método que toma en cuenta la complejidad, de las relaciones existentes entre los diferentes sectores.

“En la mayor parte de las economías el método de insumo-producto constituye en esencia un complemento de las cuentas nacionales” [19] , teniendo interés tanto en el examen del resultado final de la actividad económica como en las relaciones entre los distintos sectores productivos. En vista de que se pueden realizar varias combinaciones, surge la inquietud de si se pueden sustituir dichos procesos o existe una solución óptima en el problema.

Koopmans y Samuelson demostraron en “ el teorema de sustitución que sólo se usa una actividad para producir cada tipo de bien, cualesquiera que sean los cambios “. [20]

19 Modigliani, F. y Miller, M.” The cost of capital, corporation finance and the theory of investment”. American Economic Review, 1998. (p.14).

20 Funtowics Silvio Jerome. “La ciencia económica postnormal”. Barcelona,2002.(p.95).

II.5. Modelo Ingreso Gasto.

Considere el modelo de ingreso-gasto que representa los ingresos ***Yj*** en el sector ***j*** que dan lugar a un gasto a_{ij} Y_j en bienes del sector ***i*** medido en términos monetarios. Las matrices correspondientes $A = (\alpha_{ij})$ Y $B = (b_{ij})$ son llamadas las matrices de insumos y producción respectivamente. Un vector de intensidad ***x***, es un vector semipositivo y los vectores correspondientes de insumo y producción están dados por ***xA*** y ***xB***. El modelo que ahora estamos considerando es cerrado.

Esto significa que no existe un flujo de bienes de o hacia el modelo.

Todos los bienes consumidos en el modelo deben haber sido previamente producidos por éste y la única cosa que puede uno hacer con la producción del modelo es alimentarlo en forma retroactiva como un insumo en una etapa posterior. Tenemos de esta forma un mecanismo que se autosostiene cuya única función es perpetuarse de alguna manera. Un modelo como éste es en algún sentido una aproximación a la economía total en la cual el trabajo produce bienes de consumo yesos bienes son consumidos por consumidores, inducidos a proporciona (más trabajo de tal forma que tenemos una situación cíclica.

Es claro que para que el modelo funcione de la manera descrita debe de ser posible escoger un vector ***x*** tal que cada bien que es consumido es también producido una condición para asegurar esto es:

Suposición I.Para todo j $b_j \geq 0$ ……………………………………………...…2.5.0

Esto simplemente dice que cada bien es producto de alguna actividad.

Suposición II.Para toda i $a_i \geq 0$ ………………………………………………...2.5.1

Esto dice que cada actividad debe tener al mes ,un bien como insumo.

Asuma que el valor de las exportaciones de ***Ci*** a c_j es igual a

$n_j^{\alpha}{}_{ij}$ …………………………………………………………………………..…..2.5.2

El ingreso total u_i de c_i satisface la ecuación:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} n_j{}^{\alpha i}{}_j$$

……………………….………2.5.3

Que se debe de satisfacer para todos los países.

En lenguajes de vectores; el ingreso no negativo se puede expresar como un vector $\boldsymbol{y = (n_1, . . . , n_n)}$ el cual debe de satisfacer:

$\boldsymbol{A_y = y}$ ……………………………………………………………………...……2.5.4

El problema matemático es idéntico aun cuando la interpretación económica es diferente.

Consideremos ahora el modelo de expansión de Von Newmann cuya producción varía con el tiempo y considere la posibilidad de una expansión firme. Considere un modelo, lineal envolviendo ***n*** bienes, $\boldsymbol{B_1, B_2, ..., B_n}$, y ***n*** actividades, $\boldsymbol{P_1, P_2, . . . , P_n}$´ deseamos ahora distinguir entre bienes producidos y consumidos en una actividad dada. Denote $^{\alpha}{}_{ij}$ por el monto de $\boldsymbol{B_j}$ consumido en $\boldsymbol{p_i}$ y por $\boldsymbol{b_{ij}}$ el monto de $\boldsymbol{p_j}$ producido por $\boldsymbol{p_j}$. La actividad $\boldsymbol{P_i}$ está representada por dos vectores no negativos.

Cada punto eficiente del conjunto de producción puede alcanzarse mediante el empleo de como máximo ***n*** actividades distintas y a cada una de ellos le corresponden precios sombra positivos. Los ejemplos ilustran de una forma más clara cómo se usan los modelos lineales de optimización en economía por lo que se verán tres ejemplos considerados como clásicos: (modelos de producción, y modelos de consumo) con lo que tendríamos el conjunto de la economía de tres modelos.

CAPÍTULO III. OPTIMIZACIÓN DE LA ECONOMÍA CON UNA TECNOLOGÍA EXPANSIVA.

El modelo tecnológico de expansión para las matrices ***(A,B)*** resuelven el problema de encontrar un m-vector semipositivo $\boldsymbol{x}$ y un número a tal que:

α es un máximo , sujeto a :

$x B \geq \alpha x A$ 3.0

Si el máximo valor de ***a*** existe es llamado la tasa tecnológica de expansión del modelo y está denotada por α_0 . El vector correspondiente x_0 es llamado el vector de óptima intensidad.

Teorema. Para los modelos que satisfacen las suposiciones I y II α_0 existe y es positivo.

Prueba. Para cada número positivo α considere el problema de encontrar una solución semipositiva x a la desigualdad.

$x(B - \alpha A) \geq 0$ 3.1

Ahora, para α suficientemente pequeña la desigualdad tiene una solución. Si X es positivo de la suposición I tenemos que $x B$ es positivo, por lo tanto $xB \geq \alpha xA$ para algún número positivo α . Por otro lado para α muy grande la desigualdad no tiene solución. Podemos escoger α tan grande que la suma de las coordenadas en cada fila de $(B - \alpha xA)$ es negativa.

Esto es:

$(B - \alpha xA) < 0$ 3.2

Donde v es el vector unitario en R^n y dado que $x \geq 0$

$x(B - \alpha A) < 0$ 3.3

no tiene solución ***C.Q.D.***

Este modelo no estudia los bienes como tales sino sus características o preferencias en relación a ellas. En su versión más sencilla, supone que cada bien posee unas características que se consideran medibles en proporciones fijas y las características se encuentran en los bienes en forma proporcional. Además de lo anterior, las características asociadas con una combinación lineal de bienes se supone que son una combinación lineal de los bienes individuales. De esta forma se asocia con cada bien un vector de características b_j (para el bien j tal que b_{ij} sea la cantidad de la i-ésima característica que posee cada unidad del bien j.

El vector $\boldsymbol{b_j}$ tiene todas las propiedades analíticas de un vector de actividad.
Si reunimos todos los vectores $\boldsymbol{b_j}$ en una matriz ***B*** que llamamos matriz tecnológica del consumo, obtenemos la matriz básica del modelo. Suponga que tenemos ***r*** características distintas y ***n*** bienes distintos. La matriz ***B*** será entonces de orden ***r x n***. La relación entre ***r*** y ***n*** puede ser cualquiera pero se supone que generalmente ***r < n*** . Sea ***z*** el vector de características y ***x*** el de bienes. Tenemos así el modelo:

$$Z = Bx \quad \ldots\ldots\ldots 3.4$$

En este modelo, suponemos que las características vienen asociadas de un modo esencialmente positivo con los bienes, de forma que ***B*** es semipositiva.

Si la matriz tecnológica de consumo es cuadrada y puede pasarse a formar diagonal, tenemos que la teoría de consumo es un caso especial en el cual cada bien viene asociado con una sola característica y es la única de dicho bien. En la situación típica del consumidor ante la elección, puede considerarse que actúa maximizando una función de utilidad bajo restricciones de presupuesto. En el modelo, para precios dados ***p***, renta ***k***, y tecnología del consumo ***B*** se describe la conducta maximizadora del consumidor como la resolución del conjunto de programas.

$$\max \ \mu (z) \quad \ldots\ldots\ldots 3.5$$

Sujeto a:

$$Z = Bx \qquad P\,x \leq k \qquad x \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots 3.6$$

Se puede sustituir ***Z*** en ***µ (Z)*** y tendremos el conjunto de programas

$$\max \ \mu (Bx)$$

sujeto a

$$px \leq k$$

$$x \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots 3.7$$

Como " la función de utilidad es particular para cada consumidor, tenemos un conjunto de programas. " [21]

Lo que nos interesa ahora es utilizar el análisis de actividades, para investigar el conjunto de vectores de características alcanzables a partir de una restricción

---

21 Peter Vokuhl. "La programación lineal ".México . D.F. Editorial.Remest. 1994.(p.125).

determinada. Como todos los consumidores se enfrentan a los mismos precios, el conjunto de características alcanzables.

z = {Z / Z .= Bx, Px ≤ k, x ≥0} ………………………………………………….…3.8

Es un conjunto convexo cerrado y acotado que será el mismo para todos los consumidores sólo que vendrá afectado en cada caso por un multiplicador escalar, ***k*** que representa a la renta. Como se ha supuesto en el modelo que ***B*** es semipositiva y ***x*** es no negativa, ***z*** se encuentra el cuadrante positivo. Suponiendo que ***dμ / d*** z_i***. > 0*** para todos los individuos y todas las características, ningún consumidor elegirá una ***z ε Z*** si existe otra ***z' ε Z*** tal que ***z' ≥ z*** tenemos así la idea del consumo eficiente. Puede considerarse que la elección del consumidor consta de dos fases:

1.- La elección de eficiencia que es la misma para todos los consumidores.

2. -La elección personal que será aquella en la que cada individuo elija entre los puntos del subconjunto eficiente aquel que personalmente prefiera.

En términos económicos, “ la programación no lineal puede ser escrita como el análisis de problemas de maximización restringida en los cuales la disminución o incremento no lineales de escala pueden estar presentes “ . [22]

Por ejemplo, al doblar todos los insumos, una empresa puede encontrar que incrementa sus beneficios en un porcentaje menor al ***100%.***

Esto puede ocurrir debido a que por alguna razón la producción física no se realiza al mismo tiempo, o porque se incrementa la dificultad de vender producción adicional, de tal manera que los costos de venta nos llevarían a disminuciones en la eficiencia y los precios caen.

En un programa no lineal, las expresiones algebraicas que ocurren en la función objetivo, o en las restricciones, o en ambas, envuelven términos no-lineales como x^3, 5^X, ***cos x***, e^X, etcétera.

En lugar de representar la relación de beneficio por una expresión lineal simple tal como ***5x + 3y + 7z***, podemos usar la notación funcional general:

El ahorro total ***= f(x, y, z).*** 3.9

Esta notación establece simplemente que el ahorro o la variable que se emplee es dependiente de las tres producciones.

Notaciones similares son usadas para las restricciones, de tal forma que la programación no lineal puede ser escrita en las tres partes esenciales.

22 Luis Leithol . “Matemáticas previas al calculo”. México . D.F. Editorial.Harla.1999.(p.87).

Función objetivo:

$$\max f(x, y, z).$$

Sujeto a restricciones:

$$g_i(x,y,z) \leq C_1$$

$$g_2(x,y,z) \leq C_2$$

,,,,,,,,,,,,,,,,

$$g_m(x,y,z) \leq C_m$$

....3.10

Requerimientos de no negatividad:

$$x \geq 0\ ,\ Y \geq 0\ ,\ z \geq 0$$

.....................................3.11

Para mostrar cómo un problema no lineal puede ser interpretado en un problema económico considere el caso donde los beneficios ***Px y Py*** de ***x*** y ***Y*** son fijos digamos ***Px = 5 y Py = 3***. Suponga sin embargo, que debido a la resistencia del consumidor a incrementar sus ventas, los beneficios unitarios de ***z , Pz*** caen continuamente tanto como más de este bien es ofrecido en venta de acuerdo con una relación lineal simple.

$P_z = 200 - 0.005\,z$ 3.12

Que establece que cada vez que otras cien unidades son ofrecidas en venta, el precio cae cinco centavos.

Sustituyendo esta expresión por P_z dentro de la función objetivo tenemos:

Beneficio total $= P\,x(X) + P_y\,(Y) + P_z\,(Z)$

$$=5_x \quad + 3_y \quad +(200 - 0.005_z)z$$
$$=5_x \quad + 3_y \quad + 200 - 0.005\,z^2$$

....3.13

Note que esta expresión contiene a z^2, de tal forma que ya no es lineal aun cuando la función original era lineal.

Es conveniente conservar los efectos de las no linealidades en la gráfica de un problema de programación en dos etapas separadas:

- Los efectos de las no linealidades en las restricciones.

- Los efectos de las no linealidades en la función objetivo.

Examinaremos primero las restricciones; suponga que $\boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 1}$, la programación lineal divide el espacio en dos renglones: factible y no factible.

La frontera entre los puntos de región factible y aquellos que representan la producción que no satisface la desigualdad, está dada por el requerimiento de que la igualdad se da en la restricción, $\boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 1}$. Esto es:

$\boldsymbol{y = (1-x^2)^{1/2}}$ 3.14

Cualquier punto en las gráficas de esta ecuación representa una combinación de ***x*** e ***y.***

Las desigualdades no lineales, trazan una región factible tal como lo hacen las desigualdades lineales. Sin embargo, cuando las restricciones son no lineales, las fronteras de la región factible se convertirán en curvas. La gráfica de una función objetiva no lineal, no es una recta como en el caso lineal. Al contrario, las funciones de beneficio pueden ser curvas, colinas o valles de irregular forma.

Las curvas de iso-beneficio de funciones de beneficio no lineales, usualmente no son líneas rectas paralelas, al contrario del caso lineal, la dirección de movimientos rentables puede cambiar.

"Existen dos tipos de gráficas de las funciones no lineales: convexas y no convexas. " [23]

Las regiones convexas y compactas no tienen hoyos o hendeduras, más precisamente, una región es definida convexa si la línea recta conectando cualquiera de sus puntos descansa internamente dentro de la región. La distinción entre convexidad y no convexidad de la región factible es importante para la programación. La no convexidad puede hacer más difícil para nosotros el encontrar el punto óptimo.

Suponga que tenemos una línea de iso-beneficio que se mueve dentro de la región factible, si el valor que tenemos con desplazamiento de la línea es el mayor, tenemos la relación óptima, en caso contrario la curva puede tocar la recta de iso-beneficio en dos puntos factibles uno de los cuales puede ser óptimo dependiendo de la forma de la gráfica de la región factible.

---

23 V.Solodoynikok,.V.Bogosloski. "La experiencia histórica no capitalista".Editorial.Moscu.Moscu 1982.(p.144).

El resultado anterior no es válido para regiones no-convexas, los cuales nos pueden conducir a un punto no óptimo por lo cual se establece como condición necesaria la convexidad, para asegurar el establecimiento del óptimo.
Lo mismo que sucede para dos dimensiones sucede para más de dos dimensiones siendo necesario en el caso de las funciones no-lineales asegurar la convexidad en una función no lineal.

En el caso de la no linealidad no hay correspondencia entre bases y puntos extremos, la selección óptima se alcanza de dos formas:

1) Intersección entre función objetivo y región factible opuestas (convexo-cóncavo).
2) Intersección entre función objetivo y región factible similar (cóncavo - cóncavo, convexo-convexo).

Lo anterior se da hasta donde lo dispongan las restricciones disponibles. En ambos casos si existe solución factible básica, única, es óptima. Puede darse el caso de que no se intersecten la función objetivo y la región factible no existiendo solución óptima. Un problema de máximos o mínimos que envuelve sólo restricciones de igualdad es posible de tratarlo en dos técnicas: el cálculo clásico, o puede ser aproximado por el método de los multiplicadores de Lagrange.

Este método utiliza un problema langragiano artificial que es relacionado al problema original y las soluciones son idénticas. En su forma básica el problema envuelve los siguientes pasos:

1) Tome cada una de las restricciones y traslade todos los términos en una sola orilla de la ecuación.

i. e. $\quad x + y = 5$

como

$$x + y - 5 = 0 \qquad \text{.......................................3.15}$$

2) Multiplique cada una de las restricciones por una variable cuyo valor es no especificado siendo esta variable el multiplicador de Lagrange

i.e. $\quad \lambda (x + y - 5) = 0 \qquad \text{............................3.16}$

3) Sume juntas todas las restricciones (cada una de ellas) multiplicada por su propio multiplicador de Lagrange) y entonces adicione esta suma a la función objetivo.

Esta suma es llamada la expresión lagrangiana.

Esto es, si el problema es maximizar $\boldsymbol{x^2 + 3xy + z}$ sujeto a:

$$x + y = 5$$

$$xz = 10 \qquad \text{..........} 3.17$$

La expresión lagrangiana es:

$$x^2 + 3xy + z + \lambda_1 (x + y - 5) + \lambda_2 (xz - 10) \qquad \text{..........} 3.18$$

Donde λ_1, λ_2 son dos multiplicadores de Lagrange diferentes.

Nosotros podemos ahora establecer el teorema central de la teoría de los multiplicadores de Lagrange que asevera que, en una amplia clase de problemas, cualesquiera valores de x, y, z que maximizan el valor de la función objetivo sujeta a las restricciones establecidas también maximiza la expresión lagrangiana (no restringida) y viceversa. O sea que podemos resolver el problema original de maximización restringido o podemos resolver un problema totalmente diferente de maximizar el valor de la expresión lagrangiana que no envolverá restricciones.

Ambos procedimientos automáticamente resuelven ambos problemas. El problema lagrangiano en términos generales es más fácil.

"El efecto sustitución de la teoría neoclásica de la demanda analiza la conducta del consumidor ante la variación del precio de un bien dentro del marco de un mercado competitivo. " [24]

Una forma de análisis fue hecha por Hicks-Siutsky y otra es la que aquí se presenta por medio de las propiedades de conjuntos convexos.

Suponga que la función de utilidad tiene la siguiente propiedad de convexidad estricta.

El conjunto $S = \{ x \mid \mu(x) \geq \mu 0 \}$, es estrictamente convexo.

Donde $\mu(x)$ es la función de utilidad y μ^0 es un nivel de utilidad dado.

Esta restricción no exige que las derivadas sean continuas. Suponga que el consumidor toma los precios p^* como un dato y escoje la combinación de bienes x^* que le proporciona un nivel de utilidad.

24 Karl Enrich Marx. "Das capital". Volumen I.Editerial.Progrs Moscu,1867.(p.852).

$\mu (x^*) = \mu^0$ 3.19

Cuando los precios cambian y pasan a ser p^{**} ajustamos la renta del consumidor de tal modo que el nuevo conjunto de bienes elegidos x^{**} produzca el mismo nivel de utilidad original μ^0.

El criterio de elección es que x^* y x^{**} minimizan p^*x y $p^{**}x$ respectivamente para todo $x \varepsilon S$.

Sea $M^* = p^*x$ y $M^{**} = p^{**}x$ 3.20

Sea el hiperplano H definido por $p^* x = M^*$. Dicho hiperplano divide el espacio de los bienes en dos semiespacios:

$$H^+ = \{x \mid p^*x \geq M^*\}$$

$$H^- = \{x \mid p^*x < M^*\}$$

…….............................….3.21

Ahora bien, ningún punto de S puede pertenecer al interior de H^-, ya que de existir un punto tal podremos encontrar algún $m < M^*$ de manera que hubiese un punto de S en el conjunto $\{x \mid p^*x < m\}$ en contra de la hipótesis de minimización a través de M^*. Por lo tanto, los únicos puntos de S que están en H^- que pertenecen a H^+ en su totalidad.

Como $x^{**} \varepsilon S$, $x^{**} \varepsilon H^+$ y, ó bien $x^{**} = x^*$, ó x^{**} pertenece al interior de H^+.

Por lo anterior tenemos que: $x^{**} < x^*$

o bien

$p^* x^{**} > M^* = p^* x^*$ ……………………………………………………………..3.22

Podemos razonar del mismo modo para el hiperplano

$H' = \{x \mid p^{**}x = M^{**}\}$ ………………………………………………………………3.23

Con lo que S pertenece al semiespacio positivo.

Tenemos así que:

$x^{**} = x^*$ 3.24

O bien

$p^{**}x^* > M^{**} = p^{**} x^{**}$ ……………………………………………………….……3.25

Ahora bien, un conjunto estrictamente convexo puede tener más de un hiperplano a través de un punto, por lo que no hay razón suficiente para excluir el caso en que $\boldsymbol{x^{**} = x^*}$.
Suponga que sólo se da este caso cuando $\boldsymbol{H = H'}$. (lo cual es posible si los precios cambian proporcionalmente) hipótesis menos restrictiva que suponer que todas las derivadas primeras existen y son continuas.

Podemos escribir nuestras dos desigualdades como:

$$P^{**} x^{**} - P^{**} x^* < 0$$

$$-P^* x^{**} + P^* x^* < 0 \qquad \text{……………………………3.26}$$

Sumándolas obtenemos el teorema de sustitución generalizado.

$$(p^{**} - p^*)\,(x^{**} - x^*) < 0 \qquad \text{……………………………3.27}$$

Si sólo cambia el precio del j-iésimo bien, tenemos el efecto sustitución ordinario para cambios en el propio precio.

$\Delta p_j^* \,.\, \Delta x_j^* < 0$ 3.28

"La teoría generalizada de la producción se puede analizar a través de la teoría de conjuntos pudiendo establecerse más localmente y a un mayor nivel de generalidad. " [25]

Otros resultados más fuertes como las condiciones para que las superficies de transformación sean estrictamente convexas bajo rendimientos de escala constantes, resultan más difíciles de obtener mediante estos procedimientos. Suponga que cada bien es susceptible de actuar como uno y como otro (sustitutos). Sea ***y*** un vector n-dimensional de bienes en que y^i es positivo si es un producto y negativo si es un factor. Un vector arbitrario ***Y*** puede ser posible o imposible bajo las condiciones técnicas existentes. Es posible si se puede producir los productos, en las cantidades indicadas en ***Y*** a partir de las cantidades de factores señalados por ese mismo vector. El conjunto ***Y*** de todas las y posibles es el conjunto de producción. Una ***Y*** posible y ***εY*** recibe el nombre de producción u oferta. El conjunto de producción contiene todas las combinaciones de factores y productos que son posibles técnicamente.

Una producción ***Y*** es análoga a una actividad en el caso lineal con las siguientes diferencias:

a) No se supone que ***ky*** sea necesariamente posible aunque lo sea ***Y***.

25 Novosolov. "Несоответствие капитализма". Edit.Moscu.,Rusia 1992.(p.265).

b) No suponemos que $\boldsymbol{yj + y^k}$ debe ser necesariamente posible aunque tanto $\boldsymbol{yj}$ como $\boldsymbol{y^k}$ lo sean.
Los módulos no lineales, satisfacen las siguientes propiedades:

1) $\boldsymbol{y \cap \Omega = 0}$ (no es posible obtener productos sin utilizar factores).

2) $\boldsymbol{Y \cap (-y) = 0}$ (irreversibilidad).

3) $\boldsymbol{Y' \varepsilon Y,\ y\ \varepsilon Y}$, es factible $\boldsymbol{y \leq y'}$ (es posible derrochar producción) .

4) Si no hay interacción entre los procesos productivos:

$\mathbf{y^i + y^j\ \varepsilon\ Y\ \ si\ y^i + yj\ \varepsilon\ Y}$ 3.29

Los rendimientos de escala, pueden diferenciarse para el caso general del siguiente modo:

El conjunto de producción $\boldsymbol{Y}$ presenta rendimiento de escala decrecientes, constantes o crecientes. De acuerdo a lo anterior, si el conjunto de producción es aditivo y presenta rendimiento de escala constante o decreciente es convexo.

Un ejemplo puede ser la función de producción Cobb-Douglas: $\boldsymbol{x = cLa\ k^{1-a}}$ que se puede expresar:

$$\boldsymbol{y = \{y_1, y_2, y_3 \mid y_1 \leq c\,(-y_2)^a(-y_3)^{1-a},\ y_1, -y_2, -y_3 \geq 0\}} \quad ....3.40$$

donde $\boldsymbol{y_1 = x,\ y_2 -L,\ y_3 = -k}$ y el conjunto $\boldsymbol{Y}$ el satisface las propiedades anteriores.

Para hablar de modelos de crecimiento óptimo en economía, es necesario definir el concepto de optimalidad en economía.

Dados dos estados posibles de una economía, el segundo es considerado al menos deseado como el primero, si cada consumidor y productor desean su consumo y producción en el segundo estado al menos igualo mayor que en el primero. El óptimo es definido como un estado posible tal que, dentro de las limitaciones impuestas al consumo y a la producción y con los recursos totales de la economía, uno satisface las preferencias en el segundo estado mejor que en el primero.

Considere la economía $\boldsymbol{E = \{ (xp), (yj)\}}$ dados dos estados $\boldsymbol{E_1\ \{(x_1)\ (Y_1)\ \},\ E_2\ \{(x_2)\ (Y_2)\ \}}$,el segundo se dice que al menos es mejor que el primero si $\boldsymbol{\{(x_1)\ (Y_1)\ \} \leq \{(x_2)\ (Y_2)\ \}}$ lo mismo sucede para el conjunto de la economía, la interpretación económica es que cada consumidor y productor desean su consumo y producción en el segundo estado, mejor o igual que en el primero. En cualquier economía las elecciones deben hacerse entre provisiones para el presente (consumo), y provisiones para el futuro (acumulación de capital).

Mientras más se consume menos se acumula y más pequeña será la producción en el futuro, así, la elección debe de ser hecha entre alternativas de consumo.

En un extremo, está la política que nos dice que se consuma más ahora, en otro extremo la política de acumular más en el futuro. Las elecciones hechas en el tiempo entre el consumo y la acumulación de capital implican un conjunto de caminos alternativos para el consumo, la inversión y la producción; caminos a lo largo de los cuales la economía crecerá.

Muchos caminos de crecimiento son posibles y para elegir uno de ellos debemos comparar el valor presente, contra el valor futuro.

Una vez que este juicio ha sido hecho, nos encontramos con el problema de seleccionar un camino de crecimiento óptimo, esto es el problema central de esta parte: el crecimiento económico óptimo. Uno de los conceptos fundamentales es el de equilibrio y está relacionado directamente con el de la economía, podemos definir una economía por ***m*** consumidores caracterizados por el conjunto de consumos y sus preferencias, ***n*** productores, caracterizados por el conjunto de producción y los recursos limitados disponibles.

Un estado de la economía es una especificación de la acción de cada agente y se dice que se puede realizar si la acción de cada agente es posible por él y si sus ***(m + n)*** acciones son compatibles con los recursos totales. El conjunto de los estados posibles es muy importante, aquí se estudia un caso especial de economías, aquella donde los consumidores poseen sus propios recursos y tienen influencia sobre los productores. Dado un sistema de precios, cada productor maximiza su beneficio, el cual es distribuido entre los accionistas. Las riquezas posteriores, así, están determinadas y el consumidor satisface sus preferencias bajo las restricciones de riqueza. Como un resultado de este proceso cada agente elige una acción.

Estas ***(m + n)*** acciones no son necesariamente compatibles con los recursos totales, la notación de equilibrio está relacionada con todos los anteriores conceptos. Los recursos de una economía son cantidades dadas a priori de bienes que son disponibles a los agentes económicos. De acuerdo a la anterior convención, los recursos totales están representados por un punto ***r*** de $\boldsymbol{R^k}$ el espacio de bienes, estos recursos incluyen el capital de la economía en el presente instante junto con los bienes y trabajo disponibles o sea:

Los recursos totales son un punto dado de $\boldsymbol{R^k}$.

De acuerdo con lo visto en oferta y demanda podemos ahora tener una definición de economía, necesaria para la noción de equilibrio.

Economía: La economía consiste de:

Para cada consumidor, el conjunto de consumo x_i y sus preferencias. Para cada productor el conjunto de producción y_j. Los recursos totales. Un estado de la economía.

E es una especificación de la acción de cada agente esto es, para cada consumidor una especificación de su consumo y para cada productor una especificación de su producción en el espacio de bienes. Así, un estado de la economía es una ***(m + n)*** tupla $(x_i),(Y_j)$ de puntos de R^k puede ser representada por un punto de R^k ***(m+n),*** finalmente tenemos:

Una economía ***E*** está definida por: Para cada $i = (1,2,\ldots,n)$ existe un subconjunto no vacío x_j de R^k ordenado por preferencias. Para cada $j = (1, 2, \ldots, m)$ existe un subconjunto no vacío Y_j de R^k. Así, un estado de la economía es una ***(m + n)*** tupla de puntos de R^k. Una vez definida la economía pasaremos al estado de otros conceptos necesarios para la definición de estabilidad.

Dado un estado $\{ (x_i), (y_j)\}$ de ***E***, el punto ***x-y*** es llamado la demanda neta. Así ***x-y*** describe el resultado neto de los agentes de la economía juntos. Dado un estado $\{ (x_i), (y_j)\}$ de ***E***, el punto ***x-y=r*** es denotado ***Z*** y constituye el exceso de demanda, en todos los aspectos económicos sobre los recursos totales. Un estado ***E*** de la economía se dice que se encuentra estable si su exceso de demanda es cero ***(0)*** :

Lo anterior puede ser expresado en términos matemáticos como: $x - y = z$ 3.41

Lo que quiere decir que la demanda neta de todos los agentes iguala a los recursos. Ahora enfocaremos el estudio a las economías privadas donde los consumidores son propietarios de los recursos y del control de los productores así, el i-ésimo consumidor recibe el valor de sus recursos ***ri*** y las cuotas $\Theta_{il}, \ldots, \Theta_{in}$, del beneficio de ***i*** al n productos. El punto r_i especifica las cantidades dadas a priori de los bienes que le son disponibles. El número Θ_{ij} es interpretado como la fracción del capital de i-ésimo productor que le pertenece. Una descripción completa de una economía privada es:

Para cada consumidor, su conjunto de consumo x_i ordenados por preferencia, sus recursos r_i y su participación Θ_{ij} junto con sus productores y su producción. Defina ahora ***Π (p)*** de la siguiente forma: Sean $\{y_i, y_j, y_n\}$ puntos del conjunto de producción dado el precio p.

Seleccione max $pyj = \Pi$

...........................3.42

En otras palabras y maximiza el beneficio total si y solo si pyj maximiza el beneficio en el conjunto de producción o sea que:

$$\boldsymbol{\Pi (p) = max\ py} \qquad \text{…....……3.43}$$

Considere ahora una economía privada $\hat{E}$ donde el precio de sistema es ***p***, y el j-ésimo productor trata de maximizar su beneficio en y_j.

Suponga que Y_j lo hace, así el beneficio $\Pi_j = pyj$ es distribuido entre los accionistas. De esta forma la riqueza del i-ésimo consumidor es:

$$r_i = P_{ri} + \sum_{j=1}^{n} \Theta_{ij}\ \Pi_j\ (P) \qquad \text{..3.44}$$

El consumidor trata de satisfacer sus preferencias en x_i sujeto a las restricciones de riqueza; suponga que x_i satisface las preferencias sujeto a las restricciones. Si las acciones x_i, y_j satisfacen la igualdad de estabilidad ***x-y=r.*** La economía se encuentra estable.

Así, una economía privada economía privada $\hat{E} = \{(x_i),(y_j),(r_p),(\Theta_{ij})\}$, se encuentra estable si:

Para todo **i**

a) x_i es cerrado, convexo y tiene una cota inferior.

b) No existe saciedad de consumo.

c) Existe x_i tal que $x_i^{\,o} << r_i$

Para todo ***j***

a) $0\ \varepsilon\ y_j$

b) ***Y*** es cerrado y convexo.

c) La producción es irreversible.

d) No hay posibilidad de producción libre.

Analicemos ahora el modelo lineal de expansión de Von Newman, respecto a la noción de estabilidad en la economía. El modelo describe una economía caracterizada por funciones de producción lineales en los cuales las producciones sirven sólo como materia prima para producciones futuras.

El consumo puede ser interpretado como el proceso por el cual los bienes finales son usados como insumo en la producción del trabajo. Este consumo se convierte en un fenómeno tecnológico y desaparecen las relaciones de demanda del modelo.

"La función de producción es descrita como un conjunto de procesos cada uno de los cuales, es de proporciones fijas. " [26]

Para estar seguros de que la economía se encuentra completamente integrada y no es descomponible en subsectores, Von Newman asume también que cada bien es o un insumo o un producto en cada proceso, esto es, se asume que cada proceso produce o consume los bienes. Suponga ahora que esta economía se está expandiendo a una tasa igual a $\boldsymbol{\alpha}$. Los productos manufacturados del proceso de producción formados juntos, exceden la producción del período precedente.

Suponga ahora que la oferta de insumos no es limitada de tal forma que el modelo de expansión tampoco está limitado. Entonces se pregunta si existe una tasa constante de equilibrio, de crecimiento de la economía que nos lleve a no tener beneficios como los indica la competencia perfecta y que satisfaga los requerimientos tecnológicos no mayores que los insumos.

Así la estabilidad es definida como una tasa constante proporcional de crecimiento de todas las producciones, insumos e intensidades de los procesos, que satisfacen las condiciones tecnológicas y de beneficio.

Sea α la tasa de expansión de estabilidad del artículo con menor crecimiento de la economía, esto es, la producción de cada artículo con menor crecimiento de la economía, así, la producción de cada artículo crece a una tasa mayor o igual a $\boldsymbol{\alpha}$ por año.

Sea la tasa de interés monetario $\boldsymbol{\beta}$ por año, así, la condición de no beneficio, puede ser soportada como sigue:

"El dinero producido por los insumos de cualquier proceso, más la tasa de interés que cuesta el dinero por un período debe de ser mayor o igual al valor de los productos de ese proceso. " [27]

Simultáneamente la condición tecnológica puede ser formulada como sigue:

---

26 Harberger, Arnold C." Project evaluation". Collected papers, The Macmillan Press Ltd., Londres y Basingstoke, 1972.(p.23).

27 Herbert Gross . "Matemáticas Vectoriales ". México . D.F. Editorial. Anaya.1991.(p.63).

La suma de los insumos corrientes de cualquier artículo en todos los procesos (incrementada en $\boldsymbol{\alpha}$) debe de ser mayor o igual a la producción de ese artículo en el período precedente.

Así Von Newmann obtiene los siguientes resultados:

1. Existe una única tasa de crecimiento estable.

2. Esta tasa de crecimiento estable igualará la tasa de interés de tal forma que la tasa de incremento de la producción cubrirá suficientemente el costo de inversión en los insumos.

3. Pueden existir algunos procesos cuyo empleo implique una pérdida financiera y estos procesos no serán usados.

O sea que los procesos usados actualmente operando nos lleven a beneficios de “cero”.

4. Algunas producciones crecen a una tasa mayor que a o sea que existirá algún excedente de ese producto que es requerido como insumo para el siguiente período de crecimiento estable de la economía ya que el bien que tiene excedente será un bien libre con utilidad marginal igual a cero y por lo tanto su precio será cero.

5. No existe una tasa sostenible de crecimiento mayor que la tasa, o sea, si existiera una tasa $\boldsymbol{\alpha}$ mayor de crecimiento entonces $\boldsymbol{\alpha}$ no sería consistente con la estabilidad.

Von Newman, entiende la estabilidad, como un crecimiento balanceado en el cual todas las intensidades de proceso permanecen en la misma producción, y sólo se ven multiplicadas por una constante común $\boldsymbol{\alpha}$ cada unidad de tiempo.

Analizaremos desde otro punto de vista la estabilidad; se observa que un cambio en el precio total de todos los bienes no afecta el comportamiento de la economía, sin embargo, el cambio de uno o varios de ellos genera una fuerza que afecta el precio total y el equilibrio.

Sea una función de utilidad $\boldsymbol{\mu(x)}$, sujeta a precios estables para ofertas fijas.

Suponga que:

$$\max\ \mu_1(x_1)+\mu_2(x_2)+...+...\mu_n(x_n)$$

$$\begin{aligned} s.a.\quad & p_{11} + p_{12}x_2+...+...p_{ln}x_n=b_1 \\ & p_{12} + p_{22}x_2+...+...p_2x_n=b_2 \\ & p_{nl} + p_{n2}x_2+...+...p_{mn}x_n=b_m \end{aligned} \qquad \text{...} 3.45$$

Ahora cambie un solo precio sin cambiar la función objetivo.

$$\max\ \mu_1(x_1)=\mu_2(x_2)+...+...\mu_n(x_n)$$

$$\begin{aligned} s.a\quad & 2\,p_{11}x_1 + p_{12}x_2+...+...p_{ln}x_n=b_1 \\ & p_{21} + p_{22}x_2+...+...p_{2n}x_n=b_2 \\ & p_{nm}x_1 + p_{m2}x_2+...+...p_{mn}x_n=b_m \end{aligned} \qquad \text{...} 3.46$$

III.1. Teorema De Crecimiento y Equilibrio Económico.

Los principales problemas económicos nacionales y mundiales son el crecimiento y el equilibrio. El problema fundamental hasta la fecha es que se ha considerado que sólo el trabajo es el único que añade valor a las cosas.

Sin embargo, un bien o servicio obtiene valor de tres dimensiones diferentes:

a) El trabajo.
b) El tiempo.
c) El espacio

Variaciones del valor para cada dimensión:

-Con respecto al incremento del valor del trabajo, se encuentran muchos ejemplos cotidianos.

-El caso del tiempo, se puede ejemplificar con los productos agrícolas que requieren de tiempo para poder incrementar su valor, por ejemplo las maderas preciosas, en las que los árboles que crecen en las selvas, requieren sólo de tiempo para incrementar su valor.

-El caso del espacio es algo diferente.

Un producto en un país africano tiene un va lar diferente, al mismo producto en un país americano, por ejemplo el maíz o el trigo.

También se tiene el caso del volumen espacial que ocupan los productos en una misma localidad.

Todos los modelos que hablan de crecimiento y equilibrio tienen como premisa fundamental la minimización de costos y la maximización de beneficios, pero esto no es cierto ni es el fundamento.

Para lograr el crecimiento económico con equilibrio y por lo tanto una economía sin ciclos es necesario hacer las siguientes consideraciones:

1) Considere como frontera superior a una economía mundial o nacional utilitarista.

2) Considere como frontera inferior a los individuos como entes económicos, que tienen una actuación racional económica.

3) Considere el conjunto de agentes económicos de una economía nacional o del mundo dividido en dos grandes grupos: a) Oferentes y b) Demandantes.

4) Considere que los agentes interactúan entre sí cambiando a veces su rol.

Sea $\boldsymbol{A_j}$ el conjunto de los productores u ofertantes.

Sea $\boldsymbol{B_i}$ el conjunto de los consumidores o demandantes.

El trabajo incrementa el valor de los bienes o servicios de oferentes y demandantes. El tiempo incrementa el valor de los oferentes y decrementar el valor de los consumidores o demandantes. El espacio incrementa el valor de todos los agentes.

III.2. Teorema De Producción Eficiente y Equilibrio.

Sea una economía dividida en oferentes y demandantes, sean tres dimensiones que agregan o disminuyen valor a los bienes y servicios; si los oferentes se encuentran representados por el conjunto $\boldsymbol{A_i}$ y los demandantes por el conjunto $\boldsymbol{B_j}$, una economía se encuentra en equilibrio si:

$\boldsymbol{a > b}$ produce un incremento en el valor.
$\boldsymbol{b > a}$ produce un decremento en el valor.
$\boldsymbol{a \approx b}$ no produce cambios.

y se minimizan los incrementos y decrementos.

Demostración:

Suponga que $\boldsymbol{a \neq b}$ tenemos que se produce un decremento en el valor.

Suponga que $\boldsymbol{b \neq a}$ tenemos que se produce un incremento en el valor.

Suponga que no se minimizan los incrementos y los decrementos, entonces se toma el $\boldsymbol{LIM} \sum_j \sum_i \boldsymbol{a_j\, b_i}$ cuando $\boldsymbol{i} \rightarrow \infty$ y cuando $\boldsymbol{j} \rightarrow \infty$ y se produce desequilibrio entre los $\boldsymbol{A_i}$ y los $\boldsymbol{B_j}$.

Corolario. La economía mundial se encuentra limitada por:

$$\sum_j \sum_I \boldsymbol{A_j\, B_i} \quad \text{………………………………………………………………………3.2.0}$$

Así la producción es eficiente si:

1. El valor de todo el producto en el tiempo $\boldsymbol{t_i}$, es mayor que el valor de todo el producto en el tiempo $\boldsymbol{t_0}$.

$$\boldsymbol{V_0 < V_1} \qquad \text{para } \boldsymbol{t_i > t_0} \quad \text{……………………………………………………………………3.2.1}$$

2. La utilidad de todos los bienes es mayor o igual en el tiempo $\boldsymbol{t_i}$ que la utilidad en el tiempo $\boldsymbol{t_0}$.

$$\boldsymbol{\mu_0 < \mu_1} \qquad \text{para } \boldsymbol{t_i > t_0}. \quad \text{……………………………………………………………………3.2.2}$$

III.3. Teorema de Sustitución.

En un modelo de insumo-producto con un solo factor primario escaso, el conjunto de actividades óptimo para producir una combinación de bienes, es óptimo en la producción de cualquier otra combinación entendiendo por óptimo que minimize el uso del factor escaso.

Los modelos lineales conciernen con la determinación de resoluciones óptimas a los problemas. Esto nos sirve para analizar la actuación racional económica.

Algunas de las más factibles aplicaciones de la programación lineal, están involucradas con la economía en general y con la consecución de objetivos relevantes.

Es claro que el elemento común a todos los modelos lineales de optimización es que todos ellos requieren de la investigación de los mejores valores de las variables. Para el economista teórico, los requerimientos de no negatividad son importantes ya que la teoría económica en general y la marginalista en especial no son capaces de contabilizar cantidades negativas. Sin embargo, aun cuando no se puede hacer un análisis económico con cantidades negativas, existen en el campo de las decisiones económicas algunos razonamientos que pueden ser hechos con la ayuda de los cálculos que indiquen la no negatividad.

"Los modelos lineales son un método matemático para el análisis y cómputo de decisiones óptimas que nos señalan las limitaciones impuestas por las restricciones; en la mayor parte de los casos el método de cómputo es un procedimiento iterativo. " [28]

La respuesta a un modelo de programación lineal generalmente no es directa.

Cuando el problema es lineal, y por lo tanto el modelo, existen algunos métodos que no llevan a una respuesta precisa después de un determinado número de pasos. Dos ejemplos son el método simplex y el método de juegos ficticios. Los modelos lineales de optimización en economía difieren de los modelos factor-producto, los cuales conservan un solo estado o actividad para producir cada producto y la existencia de un solo producto por actividad. Cuando existen actividades alternativas en la producción de un producto se puede realizar la sustitución dentro del proceso productivo, también cuando se obtienen varios productos de una sola actividad aparece la producción conjunta.

"La teoría neoclásica se ocupa casi exclusivamente de la sustitubilidad entre los factores primarios y casi no dice nada respecto a los factores complementarios." [29]

28 Hansen, Alvin H." A guide to Marx & Kalecky ". Nueva York, Mac Graw Hill, 1993. (p.56).

29 Modigliani, F. y Miller, M." The cost of capital, corporation finance and the theory of investment". American Economic Review, 2001.(p.182).

Los modelos lineales tratan de tender un puente entre las teorías mencionadas:

En este caso existe un número finito de actividades productivas básicas, caracterizadas por coeficientes fijos que nos indican los factores necesarios. Las actividades en los modelos lineales tienen las siguientes características:

- Son lineales en el sentido de que los aumentos o disminuciones se afectan en forma lineal.

- Suponen que no hay interacciones entre las actividades (son independientes) de modo que el funcionamiento de uno de ellos no se ve afectado por los demás.

Dentro del modelo factor-producto, cada actividad viene asociada biunívocamente, con el producto de algún bien. En los modelos lineales generales no hay posibilidad de identificar las actividades con los bienes, de tal forma que se puede tomar arbitrariamente, la forma de designar las actividades y los niveles de cada actividad.

Si el sistema contiene un total de n bienes, se puede asociar vectores de orden n con cada actividad. El vector de producto será b, el cual es un vector no negativo cuyos componentes son positivos si el bien es producto de dicha actividad y nulos en otro caso. El vector de factores a es no negativo con a_{ij} positiva si i es factor y nula si no lo es. Suponga que existen n actividades y reunimos todos los vectores de producto en una matriz B de orden $n \times m$, llamada matriz de productos y a su vez reunimos todos los vectores de factor en una matriz de factores A de orden $n \times m$.

La matriz $(B-A)$ es la matriz tecnológica y tiene como componente en el lugar ij a, b_{ij} si el bien i es producto de la actividad, a, a_{ij} si el bien i es factor de la actividad j, y cero cuando el bien no es factor ni producto de dicha actividad.

Suponga que varias actividades funcionan a niveles señalados por un vector y de orden n. Los productos del sistema vinculado por el vector x será:

$$x = (B-A)y \qquad \text{..........} 3.3.0$$

El vector y es positivo, aunque el vector x puede tener cualquier signo:

a) Si $x_i > 0$ la resultante es un producto final del sistema para los niveles de actividad y.

b) Si $x_i = 0$ la resultante es un bien intermedio del sistema para los niveles de actividad y.

c) Si $x_i < 0$ la resultante es un factor primario dentro del sistema para los niveles de actividad y.

Es útil hacer algunas observaciones referentes al conjunto de producción factible.El conjunto de producción factible está formado por todos los vectores de producto neto que puede producirse a partir de la tecnología existente, el cual a veces es llamado conjunto productible. Como las actividades pueden funcionar a diferentes niveles no negativos, el conjunto de producción ***X*** puede definirse formalmente como:

$x = \{x \mid x = (B-A)\ y,\ y \geq O\}$ 3.3.1

El conjunto de producción tiene las siguientes propiedades: es un conjunto convexo cerrado y es también poliedro convexo además de lo anterior, se tiene que:

- No puede reproducirse una cantidad positiva de un bien sin un factor de por lo menos otro bien.

- Los procesos de producción son irreversibles.

- Siempre puede producirse con derroche de modo que si $x \varepsilon X$ y $x' \leq x$, $x \varepsilon X$.

Algunas ideas relacionadas con el conjunto de producción son las de producción eficiente, eficiencia y actividades eficientes para lo cual damos la siguiente definición:

Un vector de producto es eficiente si y sólo si no existe ningún otro vector que pueda producir una cantidad mayor de alguno de los productos finales. Note que no se excluye la posibilidad de que tanto los insumos como la producción de algún bien puede ser cero.

CONCLUSIONES.

En este trabajo de investigación , que presento como tesis, estoy convencida de que se trata de un intento conseguido, pero debe ser el lector quien juzgue si él también está de acuerdo con estas conclusiones o no. Puesto que el análisis de la dinámica económica en R^3 me permitió considerar los diferentes escenarios de todos los bienes que hay dentro de una economía (ojo: no se dice: muchos, o casi todos, sino todos, absolutamente todos, tiene que consistir en una propiedad que esté presente en todos los bienes y que reúna además otros dos rasgos:

1)Ser cuantificable.

2)Ser ajeno al valor de uso de los bienes , ser independiente y no parte de éste, ya que los valores de uso distinguen a los distintos tipos de bienes entre sí y reúnen a los distintos especimenes de cada tipo en el interior de esa categoría.

La dinámica económica represento en su totalidad que los fenómenos económicos son causa de un efecto en la producción refiriéndose a las tres variables que ayudan a su comprensión (trabajo ,espacio y tiempo).

Respeto al análisis de los bienes y los precios se identificaron los factores de la producción que alteran el crecimiento pleno de la economía, demostrando la importancia de la programación lineal ,en modelos cíclicos de la economía.

Y finalmente resalte la importancia de la expansión y el desarrollo de la tecnología para la optimización de la economía ya nacional y/o internacional ante este nuevo proceso de la globalización.

En general comprobé que las variables (tiempo, trabajo y espacio) son una importante herramienta para una mejor comprensión de la dinámica económica actual.

BIBLIOGRAFÍA.

- Arrow, Kennet J.” Discounting and public investment criteria”. Western Resources Conference, Julio 1995.

- Cabre . “Física aplicada a los mecanismos” . México , D.F. Editorial.Libris . 1998 .

- Chain, Nassir Sapag, Chain, Reinaldo , "Preparación y evaluación de proyectos", Mc Graw Hill, Santa Fé de Bogotá, 1999.

- De Pablo, Juan Carlos y Canavese, Alfredo J.” Dos métodos iterativos de cálculo de la tasa de rendimiento”. Administración de Empresas, vol. 7-a, Buenos Aires, abril 1996.

- Dennis G. Zill . “Calculo con geometría analítica “. México , D.F. Grupo Editorial Iberoamericana . 2000.

- Harberger, Arnold C.” Sobre las tasas de descuento en el análisis de beneficio-costo”. World Bank, Economic Development Institute, Washington,2003.

- Herbert Gross . “Matemáticas Vectoriales “. México . D.F. Editorial. Anaya.1991.

- Kantorovich.”La asignación optima de los recursos”. Editorial .Moscu.Moscu 1995.

- Karl Enrich Marx. “Das kapital”. Volumen I.Editerial.Progrs .Moscu,1867.

- Karl Enrich Marx. “Das capital”. Volumen III.Editerial.Progrs .Moscu,1867.

- Levín, Pablo . “Estructura temporal del capital en la configuración del espacio económico”. Seminario de Planificación, CFI/ILPES, Buenos Aires.2003.

- Levín, Pablo, Bezchisky, Gabriel y Alvarez, Marisa. "Simulador de impacto ganancial. Un nuevo instrumento para el gobierno de la empresa".Editorial. Investigación y Desarrollo (I+D), Programa de CyT para el Desarrollo, Secretaría de CyT de la Nación, Año 1, No 1. 2002.

- Levín, Pablo.”Modelo de rotación del capital. Diagnóstico de subsistemas económicos”. Reimpresión. Boletín Geográfico VIII, Universidad Nacional del Comahue, Río Negro.2001.

- Luis Leithol . “Matemáticas previas al calculo”. México . D.F. Editorial.Harla.1999.

- Marglin, Stephen A.” The social rate of discount an the optimal rate of investment”. Quaterly Journal of Economics, Harvard University Press, Cambridge, Mass., febrero 2005.

- Modigliani, F. y Miller, M.” The cost of capital, corporation finance and the theory of investment”. American Economic Review, 2001.

- Novosolov. “Несоответствие капитализма”. Edit.Moscu.,Rusia 1992.

- Peter Vokuhl. “La programación lineal “.México . D.F. Editorial.Remest. 1994.

- Suárez Suárez, A. “Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa”. Ediciones Pirámide, Madrid, 1998.