

00365



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Haces para elementos de $PSL(2, R)$
y la función desplazamiento

Tesis

que para obtener el grado académico de

Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA

Rafael Martínez Vega

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Antonio Lascurain Orive.

MÉXICO, D.F.

Noviembre, 2005

m. 352165



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Quiero agradecer a mi familia el apoyo que me ha brindado para ir en búsqueda de las metas que me he puesto. Les agradezco también que aunque en repetidas ocasiones pudiera yo sonar o actuar poco acorde a ese sentir, siempre me han permitido hacer uso de mi libertad, y siempre me han ayudado a formarme como una persona en búsqueda de la realización de sus ideales. Este trabajo es tan sólo un peldaño más en el camino que he recorrido, recorro y he de seguir recorriendo. Gracias Mónica (mamá), Leonel y Leonardo.

Agradezco a toda la gente que he conocido y con quien he compartido muchas razones, ideas, pensamientos, ocasiones, circunstancias, sentimientos y colores. No podría mencionar a todos sin pensar que quizá me olvido de alguien, espero y sé que no se molestarán si no encuentran explícitamente su nombre aquí; le debo mucho a mucha gente. A todas esas personas les agradezco haberme permitido compartir instantes de sus vidas y de la mía.

Agradezco al Doctor Antonio Lascurain el haberme permitido retomar el camino de la geometría y la matemática pura. Le agradezco la confianza que me brindó y que aunque por momentos llegamos a tener algunas diferencias, siempre pude obtener algo de provecho para mi formación. Gracias Toño.

Quiero agradecerle a Mariana el tiempo que me permitió compartir con ella, el dejarme ser una parte de su vida por un tramo. Le agradezco las múltiples formas en las que me ha ayudado a crecer y lo sigue haciendo. Le deseo buena suerte en el camino que decida tomar, estoy seguro que siempre sabrá tomar el camino adecuado. Gracias Mariana.

Le agradezco a Ruth el dejarme sumergir un poco dentro de mi mismo para resolver todas las situaciones que una vida (tan singular como la de cualquier persona) como la mía lleva consigo. Me gusta saber que poco a poco comprendo como es que uno se puede alumbrar a sí mismo para analizarse. Gracias Ruth.

Le doy las gracias a Patricia V. por permitirme ver el mundo de formas distintas y casi siempre novedosas para mí. Siempre habremos de tener dos formas distintas de ver el mundo, sin embargo nunca hemos dejado de escucharnos y expresarnos. Me ha mostrado que hay muchas maneras de hacer ciencia y muchas más de compartir una realidad y una visión. Gracias Paty.

Por último, agradezco a la UNAM (DGEP) y a CONACYT las becas que me fueron otorgadas para dedicarme al programa de la Maestría.

INTRODUCCIÓN

En esta tesis se discuten algunos aspectos de los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ y sus conjugados en el grupo de transformaciones de Möbius complejas $PSL(2, \mathbb{C})$. La definición elemental de que una transformación sea parabólica, elíptica o hiperbólica en términos de la conjugación o la traza (aunque conlleva toda la información) es insuficiente para entender de manera más profunda la geometría de estas transformaciones. Ésta resulta más clara si se estudia a través de haces de geodésicas y su familia complementaria. El objetivo de este trabajo es abordar los fundamentos de este enfoque.

Para poder discutir los haces, se estudian primero en el Capítulo 2 las geodésicas. Se exhiben fórmulas de la distancia entre un punto y una geodésica, así como entre 2 geodésicas. (Teoremas 2.1.3 y 2.1.5, Proposición 2.3.2) Se trabaja tanto en el disco de Beltrami-Poincaré $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, como en el semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$.

Resulta importante también conocer como son las mediatrices entre geodésicas, lo que se describe en la sección 2.4. Este capítulo concluye con una discusión de las θ -transversales a 2 geodésicas disjuntas, es decir, otra geodésica que las corta a ambas en un ángulo θ . Se prueba que hay 4 de éstas (Proposición 2.5.1). También, utilizando resultados de trigonometría hiperbólica, de triángulos y cuadráteros, se exhiben fórmulas que relacionan las longitudes de las θ -transversales (Corolario 2.5.4, Proposiciones 2.5.6 y 2.5.7).

En el Capítulo 3, se describen los haces determinados por 2 geodésicas L y L' ; que resultan ser parabólicas, elípticas o hiperbólicas, de acuerdo a si L y L' son tangentes, se intersectan o son disjuntas, respectivamente. La familia complementaria al haz de geodésicas (denotados por \mathcal{C} y \mathcal{G} , respectivamente) consiste en horociclos, círculos e hiperciclos. Se prueba en los 3 casos varias propiedades interesantes. Entre ellas se prueba que 2 puntos z y w yacen en la misma curva en \mathcal{C} si y sólo si la mediatriz de $[z, w]$ es una geodésica en \mathcal{G} (Propiedad P6). La importancia y fuerza de esta propiedad se puede constatar en el Teorema 3.1.2 que exhibe como se comportan las mediatrices de cualquier triángulo hiperbólico. Otra propiedad interesante del haz de geodésicas determinado por L y L' es que cualquier geodésica en el haz está determinado por la ecuación

$$\frac{\sinh \rho(z, L)}{\sinh \rho(z, L')} = k, \quad k \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \cup \{0\}. \quad (1)$$

Curiosamente, se muestra en el caso hiperbólico que si se ignoran los senos hiperbólicos, el comportamiento geométrico cambia, ya que en un caso, para ciertos valores de k la ecuación de arriba define una geodésica, y para el otro (sin seno hiperbólico) 2 geodésicas.

Estas propiedades permiten posteriormente describir cualquier isometría g en $PSL(2, \mathbb{R})$ (o en $M(\Delta)$) como la composición de 2 reflexiones en geodésicas que son tangentes, si g es parabólica; se intersectan, si g es elíptica y son disjuntas, si g es hiperbólica (Teoremas 3.2.6, 3.2.10 y 3.2.12).

También se muestra que la longitud de traslación de una isometría hiperbólica está determinada por la traza de g (Teorema 3.2.13) y que cualquier transformación hiperbólica es la composición de 2 transformaciones elípticas de orden 2 (Teorema 3.2.14).

La tesis concluye con el resultado principal (Teorema 4.0.20) que describe exactamente cuánto mueve los puntos una isometría en $PSL(2, \mathbb{R})$ (o en $M(\Delta)$). Para estudiar el caso parabólico se requieren algunos resultados de invariabilidad del kernel de Poisson. Finalmente se muestra cómo ciertos subconjuntos del plano hiperbólico junto con algunos valores, determinan una transformación dada (junto con su inversa) (Proposición 4.0.22).

Contenido

1. Preliminares	3
2. Geodésicas	11
2.1. La distancia de un punto a una línea	11
2.2. El bisector perpendicular de un segmento de geodésica	18
2.3. La distancia entre geodésicas	22
2.4. La mediatriz de dos geodésicas	26
2.5. Transversales	30
3. Haces de geodésicas	39
3.1. Teoría de haces	39
3.1.1. Haz Parabólico	40
3.1.2. Haz Elíptico	44
3.1.3. Haz Hiperbólico	47
3.2. Isometrías	56
3.2.1. Isometrías Parabólicas	57
3.2.2. Isometrías Elípticas	62
3.2.3. Isometrías Hiperbólicas	65
4. La función desplazamiento	73

CAPÍTULO 1

Preliminares

Se comenzará con una exposición de definiciones y resultados con los que se trabajará; como las transformaciones de Möbius complejas, los modelos de la geometría hiperbólica bidimensional \mathbb{H}^2 y Δ , así como unos resultados más avanzados de trigonometría hiperbólica. Se empezará con las transformaciones de Möbius complejas.

Las transformaciones de Möbius complejas son las transformaciones de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Este tipo de transformaciones están definidas sobre todo $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Para tener esto, basta con ver cómo se define $T(z)$ en los casos excepcionales en los que se involucra el punto $\{\infty\}$.

Se definen entonces este tipo de transformaciones de la siguiente manera

1. Si $c = 0$, $T(\infty) = \infty$.
2. Si $c \neq 0$, $T(\infty) = a/c$ y $T(-d/c) = \infty$.

Cabe mencionar que por medio de la proyección estereográfica $\widehat{\mathbb{C}}$ se puede identificar con \mathbb{S}^2 , y se puede ver en [4] cap. 1 que las transformaciones de Möbius complejas son las únicas biyecciones meromorfas de $\widehat{\mathbb{C}}$ en sí mismo.

Usando el primer teorema de isomorfismo de grupos se pueden identificar las transformaciones de Möbius con los elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$. Donde $PSL(2, \mathbb{C})$ es el cociente de $SL(2, \mathbb{C})$ módulo $\{\pm Id\}$; $SL(2, \mathbb{C})$ es el grupo especial lineal de matrices de 2 por 2 con entradas complejas. La identificación

se puede hacer ya que la composición de las transformaciones de Möbius se corresponde con el producto de matrices (cf. [4] p. 9). Una propiedad fundamental de este tipo de transformaciones es que mandan círculos y rectas en círculos y rectas (cf. [5] p. 4), además dadas dos ternas de puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, siempre existe una transformación de este tipo que envía una en la otra. Por lo que claramente $PSL(2, \mathbb{C})$ actúa de manera transitiva sobre el conjunto de círculos y rectas en $\widehat{\mathbb{C}}$. Ahora, una forma de clasificar este tipo de transformaciones es en función del número de puntos fijos que tienen.

Definición 1 Sea T de Möbius tal que fija exactamente un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces a T se le llama parabólica.

Definición 2 Sea T de Möbius tal que fija exactamente 2 puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ y es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a $S(z) = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces:

1. Si $|\alpha| = 1$, T es elíptica.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, T es hiperbólica.
3. Si $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin \mathbb{R}^+$, T es loxodrómica.

Nótese que esta clasificación genera clases de equivalencia en $PSL(2, \mathbb{R})$, es decir transformaciones conjugadas a parabólicas sólo pueden ser parabólicas y lo mismo pasa para las otras en general. Esto se sigue de propiedades de conjugación y del multiplicador (α). (cf. [4] pp. 37-40, o [6] pp. 5-7) Otra manera de clasificar las transformaciones de Möbius es a partir de su traza. Ésta se define de la siguiente manera.

Definición 3 Dada $T \in PSL(2, \mathbb{C})$,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

se define la traza de T como $\pm \frac{a + d}{\sqrt{ad - bc}}$.

El siguiente resultado describe la forma en que se clasifican las transformaciones de Möbius en función de la traza.

Teorema 1.0.1 *Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, $T \neq Id$ y χ la traza de T . Entonces*

- (i) *T es parabólica si y sólo si $\chi = \pm 2$;*
- (ii) *T es elíptica si y sólo si $\chi \in (-2, 2)$;*
- (iii) *T es hiperbólica si y sólo si $\chi \in (2, \infty) \cup (-\infty, -2)$;*
- (iv) *T es loxodrómica si y sólo si $\chi \notin \mathbb{R}$.*

Una demostración de esto se puede ver en [4] p. 40.

A continuación se describirán las transformaciones de Möbius que preservan a cada uno de los mencionados modelos. Se comenzará mencionando las que preservan

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}, \quad (1.1)$$

éstas son las definidas por $SL(2, \mathbb{R})$, es decir $PSL(2, \mathbb{R})$. (cf. [4] p. 32)

Otro modelo importante de la geometría hiperbólica bidimensional es el disco de Poincaré, $\Delta = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$. Para estudiar este modelo se considera la transformación de Cayley, $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$ dada por

$$\varphi(z) = \frac{z - i}{z + i}. \quad (1.2)$$

Es fácil probar que $\varphi(\mathbb{H}^2) = \Delta$. Entonces, para estudiar las transformaciones de Möbius que preservan a Δ , basta con conjugar por medio de φ a las que preservan \mathbb{H}^2 , es decir las de $PSL(2, \mathbb{R})$. Usando esta función se puede probar el siguiente resultado, cuya prueba se puede encontrar en [5] p. 9.

Teorema 1.0.2 *Las transformaciones de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$ que preservan Δ , que se denotarán por $M(\Delta)$, son de la forma*

$$S(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1, \quad a, c \in \mathbb{C}.$$

Ahora, se describirán las métricas que se definen en ambos modelos; pero primero se discutirá la forma en que estas se definen a partir de densidades. Se necesitan primero unas definiciones.

Definición 4 *Dado A un abierto en \mathbb{R}^n y f una función diferenciable de A en \mathbb{R}^n , se dice que f es conforme en $x_0 \in A$, si $Df(x_0)$ es el producto de una matriz ortogonal por la matriz kId , $k \in \mathbb{R}^+$. Al número k se le llama el factor de conformalidad que se denotará por $\mu_f(x_0)$.*

Definición 5 Una densidad en una región $A \subset \mathbb{R}^n$ es una función continua $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Dada una densidad λ en una región A y $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ una curva de clase C^1 , se define la λ -longitud de γ como

$$\int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Se extiende esta definición de manera natural a las curvas de clase C^1 por tramos. Se denotará por $l_\lambda(\gamma)$ a esta λ -longitud.

Definición 6 Sea λ una densidad en una región A , si $x_1, x_2 \in A$, se define la λ -distancia de x_1 a x_2 como

$$\inf_{\gamma} l_\lambda(\gamma),$$

donde el ínfimo se toma sobre las curvas C^1 por tramos que unen x_1 con x_2 . Se denotará esta distancia por

$$\rho_\lambda(x_1, x_2).$$

Esta densidad induce una métrica en A (cf. [3] p. 7). En el caso de \mathbb{H}^2 , un primer modelo del plano hiperbólico, la densidad con la que se define la métrica está dada por

$$\lambda(z) = \frac{1}{\operatorname{Im} z}. \quad (1.3)$$

No es difícil probar que la distancia hiperbólica entre i y ki , $k > 1$ en \mathbb{H}^2 está dada por

$$\rho(i, ki) = \log(k), \quad (1.4)$$

pues el segmento del eje imaginario que los une es la curva que minimiza la distancia. También se puede probar que si $z = ik_1$ y $w = ik_2$ con $0 < k_1 < k_2$, entonces

$$\rho(z, w) = \log(k_2) - \log(k_1).$$

(cf. [3] p. 130)

Como se ve en [4] p. 47, el grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa como grupo de isometrías en \mathbb{H}^2 con la métrica hiperbólica. Ahora, $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente

sobre circunferencias ortogonales al eje real, al igual que sobre las rectas paralelas al eje imaginario. Más aún, este grupo actúa transitivamente en la familia de todas las circunferencias y rectas ortogonales al eje real ya que la transformación

$$z \mapsto \frac{z-1}{z+1}, \quad (1.5)$$

envía el círculo unitario al eje imaginario, y en efecto se encuentra en $PSL(2, \mathbb{R})$. Con estos dos resultados, no es difícil observar que las curvas que minimizan la distancia, o geodésicas, en \mathbb{H}^2 son los círculos o rectas ortogonales al eje real. Se denotará por $[z, w]$ al segmento de geodésica que une a z con w .

A continuación se enuncia una fórmula de la distancia entre dos puntos z y $w \in \mathbb{H}^2$ que se utilizará más adelante

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}. \quad (1.6)$$

Ahora, si se tienen dos regiones A y B en \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow B$ una biyección conforme tal que la región A cuenta con una métrica definida por una densidad λ , entonces a la región B se le puede proveer una densidad σ de tal forma que la f sea una isometría. Esto se logra definiendo

$$\sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu_f(x)}. \quad (1.7)$$

Una prueba de esto se puede ver en [3] p. 7.

El resultado anterior es bastante útil, pues por medio de la transformación de Cayley se puede ver que \mathbb{H}^2 y Δ son modelos isométricos. De hecho al aplicar lo anterior, no es difícil ver que la densidad con la que se debe definir la métrica en Δ está dada por

$$\sigma(w) = \frac{2}{1-|w|^2}.$$

Una demostración de esto se puede ver en [4] p. 59.

Es conveniente discutir el grupo completo de isometrías del espacio hiperbólico. Primero será necesario definir las reflexiones en círculos y rectas. Dado $u \in \mathbb{C}$ se denotará por u^* a $u/|u|^2$; con esta notación es fácil dar una definición para la reflexión en un círculo $|z-a| = r$.

Definición 7 Se define la reflexión (o inversión) en $|z - a| = r$ como

$$\varphi(z) = \begin{cases} a + r^2(z - a)^*, & \text{si } z \in \mathbb{C}, z \neq a, \\ \infty, & \text{si } z = a, \\ a, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Por medio del producto escalar usual de \mathbb{R}^2 , e identificando \mathbb{C} con éste, es fácil observar que los puntos de una recta están determinados por la siguiente expresión

$$R(a, t) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z \cdot a = t, a \in \mathbb{R}^2 - \{0\}, t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

Con esta notación se define la reflexión en $R(a, t)$ como sigue

Definición 8 Se define la reflexión (o inversión) en $R(a, t)$ como la función $\varphi : \widehat{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^2$, dada por

$$\varphi(z) = \begin{cases} z - 2(z \cdot a - t)a, & \text{si } z \in \mathbb{R}^2, \\ \infty, & \text{si } z = \infty, \end{cases}$$

donde $|a| = 1$.

Usando la proyección estereográfica se le puede dar una métrica a $\widehat{\mathbb{C}}$, llamada cordal tal que es equivalente a la euclidiana en \mathbb{C} y cumple que dada una sucesión $z_n \in \mathbb{C}$, $|z_n| \rightarrow \infty$ si y sólo si $d_c(z_n, \infty) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, donde $d_c(z, w)$ denota la distancia cordal (cf [3] p.22). Con estas definiciones se puede definir el grupo general de Möbius.

Definición 9 El grupo general de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^2$, denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}}^2)$, consiste en todas las funciones que son una composición finita de reflexiones en círculos o rectas.

Ahora, el subgrupo $M(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ consiste en las transformaciones que son composición de un número par de reflexiones. Este subgrupo resulta ser el de las transformaciones que preservan la orientación. Y como se puede ver en [4] p. 70, $M(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$. También es necesario introducir dos conceptos que se usarán más adelante.

Definición 10 Un horociclo basado en un punto $\alpha \in \widehat{\mathbb{R}}$ es un círculo en $\overline{\mathbb{H}^2}$, tangente en α a la recta real, si α es finito, y es cualquier recta en $\overline{\mathbb{H}^2}$ paralela a la recta real (y distinta de ésta), si $\alpha = \infty$.

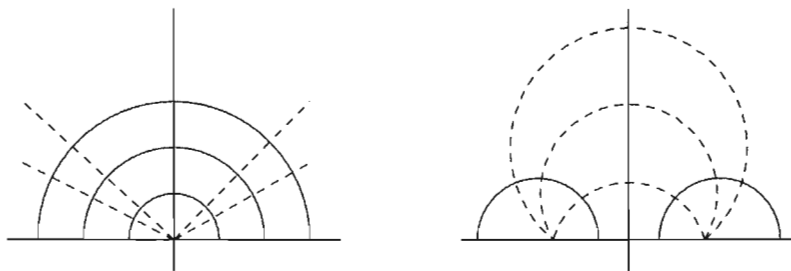


Figura 1.1: Hiperciclos

Definición 11 *Un hiperciclo por α, β puntos distintos en $\widehat{\mathbb{R}}$ es la intersección de cualquier círculo o recta por α y β con \mathbb{H}^2 .*

Estas definiciones se extienden de manera natural a Δ , pues no es difícil probar el siguiente lema.

Lema 1.0.3 *Sean T y φ transformaciones de Möbius, entonces T fija a un punto w en $\widehat{\mathbb{C}}$ (o preserva un subconjunto $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$) si y sólo si $S = \varphi T \varphi^{-1}$ fija $\varphi(w)$ (o preserva $\varphi(A)$).*

CAPÍTULO 2

Geodésicas

2.1. La distancia de un punto a una línea

Definición 12 *Dados $z \in \mathbb{H}^2$ y L una geodésica, se define la distancia de z a L como sigue*

$$\rho(z, L) = \inf \{ \rho(z, w) \mid w \in L \}.$$

Proposición 2.1.1 *Dados $z \in \mathbb{H}^2$ y L una geodésica, entonces existe una única geodésica L_1 que pasa por z y es ortogonal a L . Además,*

$$\rho(z, L) = \rho(z, w),$$

donde $w = L \cap L_1$.

DEMOSTRACIÓN. Por la transitividad de las transformaciones de Möbius de $PSL(2, \mathbb{R})$ sobre geodésicas, sin pérdida de generalidad se puede suponer que L es el eje imaginario positivo. Sea $L_1 = \{ \zeta \in \mathbb{H}^2 \mid |\zeta| = |z| \}$. Claramente L_1 es la única geodésica ortogonal al eje imaginario que pasa por z , pues para ser ortogonal a L el centro de la semicircunferencia que determina a tal geodésica debe tener parte real 0, obligando a que el centro sea el origen. De otra manera no se obtiene que la curva corte ortogonalmente al eje real.

Ahora sólo resta probar que $\rho(z, L) = \rho(z, i|z|)$. Para esto se usa el hecho de que los puntos en L son de la forma $w = it, t > 0$. Usando la fórmula de

la distancia hiperbólica (1.6) para $z = x + iy$ y $w = it$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \cosh \rho(z, it) &= 1 + \frac{|x + iy - it|^2}{2yt} \\
 &= \frac{2yt + x^2 + (y - t)^2}{2yt} \\
 &= \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2yt} \\
 &= \frac{|z|^2 + t^2}{2yt} \\
 &= \frac{|z|}{2y} \left(\frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|} \right) \\
 &\geq \frac{|z|}{y}.
 \end{aligned}$$

Esto último debido a que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Finalmente, la igualdad se alcanza si y sólo si $t = |z|$.

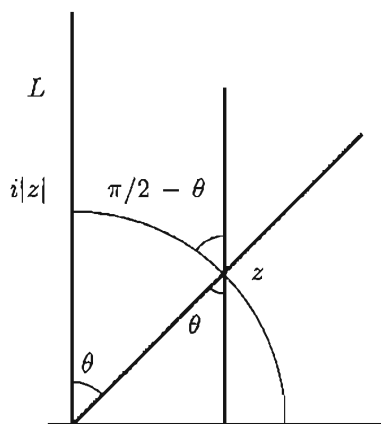


Figura 2.1: $\cosh \rho(z, L) = \frac{1}{\cos \theta}$

Corolario 2.1.2 Tomando θ como en la Figura 2.1, se tiene entonces que

$$\cosh \rho(z, L) = \frac{1}{\cos \theta}.$$

Nótese que no se trata del ángulo de paralelismo sino del ángulo complementario. También se puede observar que a partir del corolario y la igualdad $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$, se tiene que

$$\sinh \rho(z, L) = \tan \theta. \quad (2.1)$$

También, se puede obtener una fórmula de la distancia de un punto a una geodésica L , cuando L es el semicírculo euclidiano

$$L = \{w \in \mathbb{H}^2 \mid |w| = r\}.$$

Teorema 2.1.3 Si $z \in \mathbb{H}^2$ y $L_r = \{w \in \mathbb{H}^2 \mid |w| = r\}$, entonces

$$\sinh \rho(z, L_r) = \left| \frac{|z|^2 - r^2}{2yr} \right|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea θ el ángulo formado por L_r y el hiperciclo que pasa por $r, -r$ y z , que se denotará por L_1 . Existen 2 casos a considerar. Véase la Figura 2.2.

Caso 1. $|z| < r$.

Se calculan las coordenadas del centro de L_1 , que será denotado por z_0 . Como $d(z_0, -r) = d(z_0, r)$, claramente se tiene que $\operatorname{Re} z_0 = 0$, i.e. $z_0 = it$. Se traza la recta que pasa por r y es ortogonal a la tangente de L_1 en r . Un segmento de esta recta es un radio de L_1 . Se toma la intersección de dicha recta con el eje imaginario. Como la tangente a L_r en r es paralela al eje imaginario, entonces se tiene que el ángulo determinado por $0, r$ y z_0 es precisamente θ . De aquí se tiene que

$$\tan \theta = \frac{-\operatorname{Im} z_0}{r}, \quad \text{es decir} \quad -\operatorname{Im} z_0 = r \tan \theta,$$

por lo que

$$z_0 = -ir \tan \theta.$$

Caso 2. $|z| > r$.

Sean L_1 y z_0 igual que antes, en este caso $\operatorname{Im} z_0 > 0$.

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{Im} z_0}{r}, \quad \text{es decir} \quad \operatorname{Im} z_0 = r \tan \theta,$$

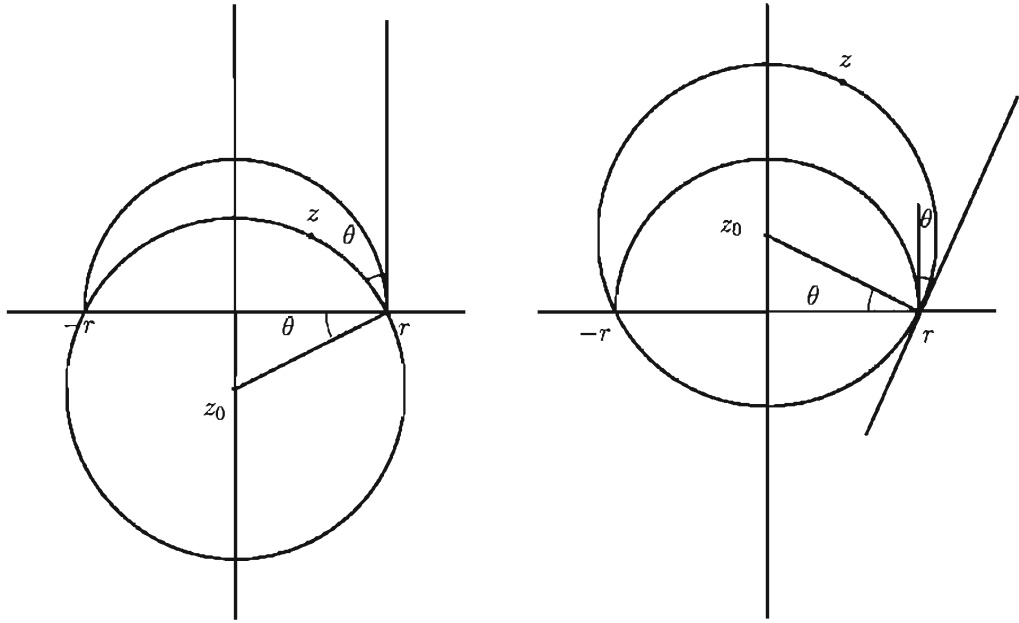


Figura 2.2: Casos $|z| < r$ y $|z| > r$.

Por lo que

$$z_0 = ir \tan \theta.$$

Ahora, en ambos casos se tiene que $\cos \theta = r/r_1$, donde r_1 es el radio de L_1 . Por lo tanto,

$$r_1 = \frac{r}{\cos \theta}.$$

En el primer caso, L_1 tiene la ecuación

$$|z + ir \tan \theta|^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \theta}, \quad (2.2)$$

y en el segundo

$$|z - ir \tan \theta|^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \theta}. \quad (2.3)$$

Al desarrollar la ecuación de L_1 en el caso 1 se obtiene

$$|x + iy + ir \tan \theta|^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \theta} = r^2(1 + \tan^2 \theta)$$

esto es

$$x^2 + (y + r \tan \theta)^2 = r^2 + r^2 \tan^2 \theta,$$

por lo que

$$|z|^2 + 2yr \tan \theta = r^2$$

y

$$\tan \theta = \frac{r^2 - |z|^2}{2yr}.$$

Análogamente, en el caso 2 se obtiene

$$\tan \theta = \frac{|z|^2 - r^2}{2yr}.$$

Finalmente, de (2.1) se sigue el resultado. \square

Se quiere obtener ahora una fórmula para la distancia entre un punto en el disco de Poincaré y algunas geodésicas. Se comenzará estudiando el caso en el que la geodésica es $L = [-1, 1]$. De (1.7) se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.4 *Si $f \in M(\Delta)$, entonces*

$$\sigma(f(z)) = \frac{\sigma(z)}{\mu_f(z)}, \quad (2.4)$$

donde $\sigma(z)$ es la densidad con la que se define la métrica en Δ .

DEMOSTRACIÓN. Se recuerda que $\sigma(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$. Ahora, si $f \in M(\Delta)$, entonces f es de la forma

$$f(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}},$$

de donde se obtiene que $\mu_f(z) = \frac{1}{|cz + \bar{a}|^2}$. Ahora, se calcula $\sigma(f(z))$,

$$\sigma(f(z)) = \frac{2}{1 - |f(z)|^2} = \frac{2|cz + \bar{a}|^2}{|cz + \bar{a}|^2 - |az + \bar{c}|^2} = \frac{2|cz + \bar{a}|^2}{1 - |z|^2}$$

de donde

$$\frac{\sigma(z)}{\sigma(f(z))} = \frac{1}{|cz + \bar{a}|^2} = \mu_f(z).$$

\square

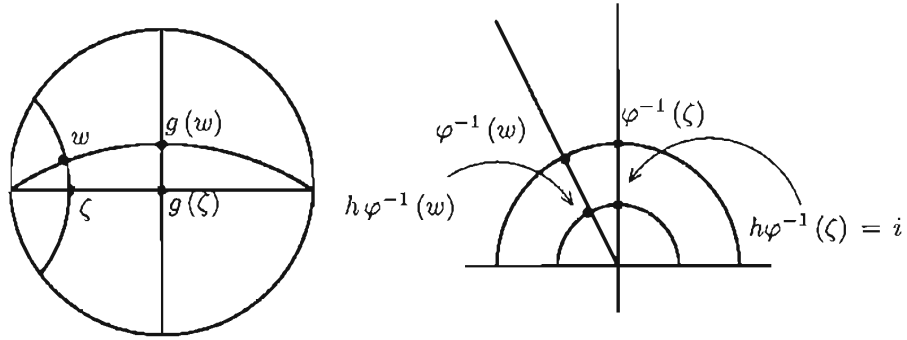


Figura 2.3: $g = \varphi h\varphi^{-1}$

Se calcula ahora una fórmula para la distancia entre un punto $w \in \Delta$ y la geodésica $L = [-1, 1]$. Se considerará primero el caso en el que $\text{Im } w > 0$. Se usará la transformación de Cayley

$$\varphi: \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta, \quad \varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Sea L_1 la geodésica ortogonal a L que pasa por w . Es fácil ver que al ser L_1 ortogonal a L , L_1 tiene la forma $[e^{i\theta}, e^{-i\theta}]$. Claramente φ transforma al eje imaginario positivo en L , por lo que

$$\varphi^{-1}(\zeta) = it, \quad t > 0, \text{ donde } \zeta = L \cap L_1.$$

De la conformalidad de φ^{-1} se tiene que

$$\varphi^{-1}(L_1) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = t\}.$$

Luego se aplica la homotecia $h(z) = z/t$; nótese que $h \in PSL(2, \mathbb{R})$. Finalmente se aplica φ , y se define

$$g = \varphi h\varphi^{-1}. \quad (2.5)$$

Por construcción g preserva L y fija los puntos reales -1 y 1 . También $g(L_1) = [-i, i]$, por lo que $g(w) = ki$, $k \in (-1, 1)$, $k \neq 0$. Como la función de Cayley transforma el semiplano superior derecho en el semidisco inferior ($\varphi(1) = -i$) y una homotecia preserva los cuadrantes, se sigue que g preserva el semidisco superior, esto es, $g \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Nótese que $g \in M(\Delta)$ al ser conjugada a una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$. Es decir, $g \in M(\Delta) \cap PSL(2, \mathbb{R})$. Como $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, se tiene entonces que

$$\lambda(g(z)) = \frac{\lambda(z)}{\mu_g(z)}, \quad (2.6)$$

(cf. [4] p. 46)

se sigue de la Proposición 2.1.4 que

$$\sigma(g(z)) = \frac{\sigma(z)}{\mu_g(z)}. \quad (2.7)$$

Juntando estas relaciones se tiene que si $z \in \mathbb{H}^2$

$$\frac{\sigma(z)}{\lambda(z)} = \frac{\sigma(g(z))}{\lambda(g(z))},$$

por lo que

$$\frac{Im z}{1 - |z|^2} = \frac{Im g(z)}{1 - |g(z)|^2}.$$

En particular

$$\frac{Im w}{1 - |w|^2} = \frac{Im g(w)}{1 - |g(w)|^2} = \frac{k}{1 - k^2}. \quad (2.8)$$

Al ser g una isometría: $\rho(w, L) = \rho(w, \zeta) = \rho(ki, 0) = \log \left(\frac{1 + |k|}{1 - |k|} \right)$.

Finalmente, aplicando \sinh y (2.8) es fácil ver que

$$\sinh \rho(w, L) = \frac{\left(\frac{1 + |k|}{1 - |k|} \right) - \left(\frac{1 - |k|}{1 + |k|} \right)}{2} = \frac{2|k|}{1 - k^2} = \frac{2|Im w|}{1 - |w|^2}.$$

Se ha probado el siguiente resultado

Teorema 2.1.5 *Si L es el diámetro $[-1, 1]$ y $w \in \Delta$, entonces*

$$\sinh \rho(w, L) = \frac{2|Im w|}{1 - |w|^2}.$$

Para el caso $w \in \Delta$, $Im w < 0$, el resultado se sigue debido a que $z \rightarrow \bar{z}$ es una isometría de Δ . A continuación se enuncia el resultado respectivo en el caso en el que la geodésica L tiene la forma $[-e^{i\theta}, e^{i\theta}]$.

Corolario 2.1.6 *Si $L = [-e^{i\theta}, e^{i\theta}]$, entonces*

$$\sinh \rho(z, L) = \frac{2|Im e^{-i\theta} z|}{1 - |z|^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea φ la rotación $z \rightarrow e^{-i\theta} z$, claramente

$$\varphi(L) = [-1, 1].$$

Entonces se puede aplicar el resultado anterior con $\varphi(z)$ y $\varphi(L)$ pues φ es una isometría de Δ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sinh \rho(z, L) &= \sinh \rho(\varphi(z), \varphi(L)) \\ &= \frac{2|Im \varphi(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2} \\ &= \frac{2|Im e^{-i\theta} z|}{1 - |z|^2} \end{aligned}$$

□

2.2. El bisector perpendicular de un segmento de geodésica

En esta sección se definirá y darán fórmulas explícitas para el bisector perpendicular de un segmento de geodésica en ambos modelos, \mathbb{H}^2 y Δ .

Definición 13 *Dados z_1 y $z_2 \in \mathbb{H}^2$ distintos, se define el bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$ como la geodésica ortogonal a $[z_1, z_2]$ que pasa por el punto medio.*

Proposición 2.2.1 *El bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$ está dado por el conjunto*

$$L_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, z_1) = \rho(z, z_2)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad se puede suponer $z_1 = i$ y $z_2 = r^2i$, con $r > 1$. Se denota por L_1 al bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$; sea $w = ri$, como

$$\rho(w, z_1) = \rho(ri, i) = \log(r) = \log\left(\frac{r^2}{r}\right) = \rho(ri, r^2i) = \rho(w, z_2),$$

se sigue que w es el punto medio de $[z_1, z_2]$ y $L_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = r\}$. Finalmente, dado $z = x + iy$, se tiene que

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, z_1) &= \cosh \rho(z, z_2) \\ \Leftrightarrow \frac{|z - z_1|^2}{2y} &= \frac{|z - z_2|^2}{2yr^2} \\ \Leftrightarrow r^2|x + iy - i|^2 &= |x + iy - ir^2|^2 \\ \Leftrightarrow r^2(|z|^2 + 1) &= |z|^2 + r^4 \\ \Leftrightarrow |z|^2(r^2 - 1) &= r^2(r^2 - 1) \\ \Leftrightarrow |z| &= r \end{aligned}$$

□

A continuación se describen algunos bisectores perpendiculares en Δ en términos del círculo isométrico. Dada $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que $g(\infty) \neq \infty$, el círculo isométrico de g consiste en $\{z \in \mathbb{C} \mid |g'(z)| = 1\}$, es decir el conjunto de puntos donde el factor de conformalidad es 1.

Proposición 2.2.2 *Dada $g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$, $g \in M(\Delta)$, $g(0) \neq 0$, entonces z está en el bisector perpendicular de $[0, g(0)]$ si y sólo si*

$$|\bar{a}z - \bar{c}|^2 = |z|^2.$$

Más aún, el bisector perpendicular de $[0, g(0)]$ es la intersección del círculo isométrico de g^{-1} con Δ .

DEMOSTRACIÓN. Sean L_g el bisector perpendicular de $[0, g(0)]$ y $z \in L_g$, entonces

$$\begin{aligned} \rho(z, 0) &= \rho(z, g(0)) \\ \Leftrightarrow \frac{|z|^2}{(1 - |z|^2)} &= \frac{|z - g(0)|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |g(0)|^2)} \\ \Leftrightarrow |z|^2 &= |\bar{a}|^2 \left| z - \frac{\bar{c}}{a} \right|^2 \\ \Leftrightarrow |z|^2 &= |\bar{a}z - \bar{c}|^2. \end{aligned}$$

Lo cual prueba la primera parte de la proposición. Se observa también que

$$|\bar{a}z - \bar{c}|^2 - |cz - a|^2 = |z|^2(|a|^2 - |c|^2) + (|c|^2 - |a|^2) = |z|^2 - 1.$$

Por lo que, en particular, se tiene que el bisector perpendicular de $[0, g(0)]$ está dado por $|cz - a|^2 = 1$. Para terminar

$$g^{-1}(z) = \frac{\bar{a}z - \bar{c}}{-cz + a},$$

por lo que

$$(g^{-1})'(z) = \frac{1}{(-cz + a)^2}$$

y

$$|(g^{-1})'(z)| = 1 \Leftrightarrow |cz - a|^2 = 1.$$

□

Proposición 2.2.3 *Dados $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{H}^2$, $j = 1, 2$, entonces el bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$ es*

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid y_1|z - z_2|^2 = y_2|z - z_1|^2\}.$$

DEMOSTRACIÓN. $z = x + iy$ está en el bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$ si y sólo si

$$\begin{aligned} \rho(z, z_1) &= \rho(z, z_2) \\ \Leftrightarrow \frac{|z - z_1|^2}{2yy_1} &= \frac{|z - z_2|^2}{2yy_2} \\ \Leftrightarrow y_1|z - z_2|^2 &= y_2|z - z_1|^2 \end{aligned}$$

□

Se probará ahora que si K es un compacto en \mathbb{R}^2 y $z_1 \in \mathbb{H}^2$ fijo, entonces si $|z_2|$ es suficientemente grande, el bisector perpendicular a $[z_1, z_2]$ no intersecta a K . Esto se obtiene de la siguiente manera.

Sean $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $\{z_1\} \cup K \subset D(0, R/2) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R/2\}$ y L_{z_2} el bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$. Si $z \in K$, entonces

$$\frac{|z - z_1|^2}{y_1} < \frac{R^2}{y_1}.$$

Por lo que usando la Proposición 2.2.3 basta con probar que si z_2 es suficientemente grande, entonces

$$\frac{|z - z_2|^2}{y_2} \geq \frac{R^2}{y_1},$$

lo que implicaría que $z \notin L_{z_2}$.

Para esto, si $|z_2| > \frac{R^2}{y_1} + 2R$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{y_1} < |z_2| - 2R < \frac{|z_2|^2 - 2|z_2|R + R^2}{|z_2|} = \frac{(|z_2| - R)^2}{|z_2|} \\ &\leq \frac{(|z_2| - |z|)^2}{|z_2|} \leq \frac{|z - z_2|^2}{y_2}, \end{aligned}$$

por lo que se tiene lo que se quería probar.

Proposición 2.2.4 *Si L_1 y L_2 son geodésicas disjuntas, entonces existe una única geodésica ortogonal a ambas.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad $L_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re} z = 0\}$ y $L_2 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z - a| = r\}$, $a > r > 0$. Entonces, una geodésica es ortogonal a L_1 si el centro de la circunferencia que la determina es 0, i.e. $|z| = t$ para alguna $t > 0$. Para que una geodésica sea ortogonal a L_2 , el radio de la circunferencia debe satisfacer que

$$r^2 + t^2 = a^2$$

Es claro que sólo existe una única $t > 0$, tal que $r^2 + t^2 = a^2$. Por lo tanto la geodésica ortogonal a L_1 y L_2 es $|z| = t$, $t = \sqrt{a^2 - r^2}$. \square

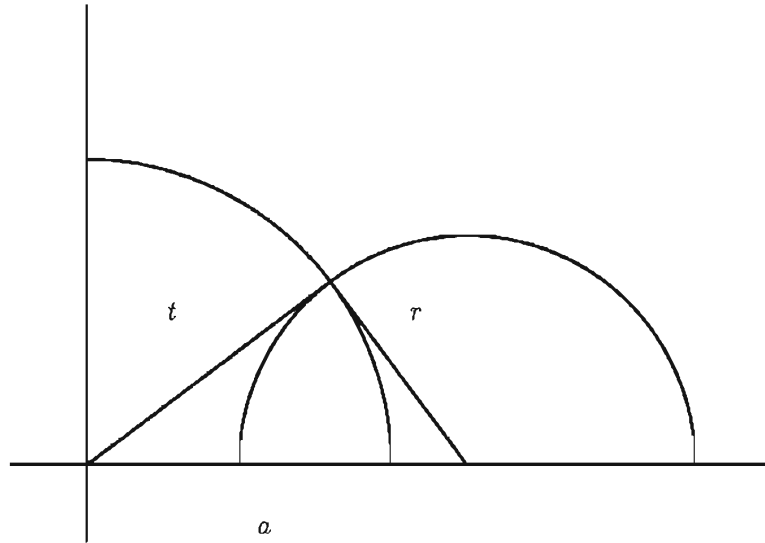


Figura 2.4: Ortogonal común.

Es fácil observar que el único caso en que existe una ortogonal común es cuando L_1 y L_2 son disjuntas. Por ejemplo si L_1 y L_2 son paralelas, sin pérdida de generalidad L_1 y L_2 son rectas verticales, y es claro que no hay ortogonal común. También si L_1 y L_2 se interesectan, sin pérdida de generalidad L_1 y L_2 son diámetros en Δ , en cuyo caso no es posible que haya una geodésica ortogonal a ambas.

2.3. La distancia entre geodésicas

Se define ahora la distancia entre geodésicas. Se usará la fórmula del Teorema 2.1.3.

Definición 14 Dadas L_1 y L_2 dos geodésicas, se define la distancia de L_1 a L_2 como sigue

$$\rho(L_1, L_2) = \inf \{ \rho(z, w) \mid z \in L_1, w \in L_2 \}.$$

Obsérvese que en el caso en que las geodésicas no son disjuntas, la distancia entre ellas claramente es 0. Se trabajará en general el caso en el que son disjuntas.

Proposición 2.3.1 *Dadas L_1 y L_2 geodésicas disjuntas, la distancia entre ellas $\rho(L_1, L_2)$ se alcanza sobre su ortogonal común.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, L_1 es $|z| = r$ y L_2 es $|z| = R$, con $r \neq R$. Dados $z \in L_1$ y $w \in L_2$, usando el Teorema 2.1.3, se tiene que

$$\begin{aligned} \sinh \rho(z, w) &\geq \sinh \rho(z, L_2) \\ &= \left| \frac{|z|^2 - R^2}{2yR} \right| = \left| \frac{r^2 - R^2}{2yR} \right| \\ &\geq \left| \frac{R^2 - r^2}{2Rr} \right| \\ &= \sinh \rho(ir, iR), \end{aligned}$$

ya que, por ejemplo, si $r < R$, entonces

$$\sinh(\log R/r) = \frac{R^2 - r^2}{2Rr}.$$

□

Otra manera de definir $\rho(L_1, L_2)$, es a partir de la razón cruzada determinada por sus pies. Antes de ver esto es necesario definir la razón cruzada de cuatro puntos distintos.

Definición 15 *Dados cuatro puntos distintos en $\widehat{\mathbb{C}}$, z_1, z_2, z_3 y z_4 , se define y se denota su razón cruzada como sigue*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)}.$$

En el caso de que $z_j = \infty$ se omiten los términos en los que aparece z_j .

Proposición 2.3.2 *Sean $L_1 = [z_1, z_2]$ y $L_2 = [w_1, w_2]$ con pies en el círculo al infinito, tales que éstos aparecen en el orden z_1, w_1, w_2, z_2 ; entonces*

$$[z_1, w_1, w_2, z_2] \cdot \tanh^2 \left(\frac{1}{2} \rho(L_1, L_2) \right) = 1.$$

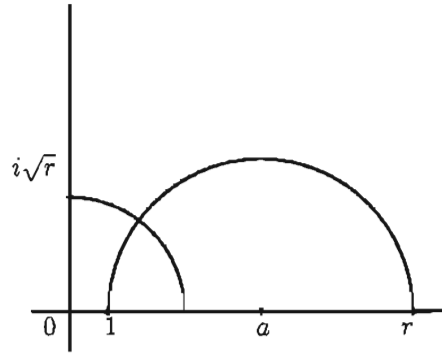


Figura 2.5: $[z_1, w_1, w_2, z_2] = [0, 1, r, \infty]$

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto, se comienza probando la igualdad para el caso: $z_1 = 0$, $w_1 = 1$ y $z_2 = \infty$. Posteriormente el resultado se seguirá en general del hecho de que las transformaciones de Möbius actúan transitivamente sobre geodésicas y preservan la razón cruzada. (cf. [3] p. 32) En este caso se tiene que L_1 es el eje imaginario y L_2 es la geodésica determinada por la circunferencia con centro en $a > 1$ y con $w_2 = r$ tal como se ve en la Figura 2.5. Entonces se tiene que

$$[z_1, w_1, w_2, z_2] = [0, 1, r, \infty] = \frac{(-r)}{(-1)} = r.$$

Por lo tanto, basta con probar que

$$\tanh^2 \left(\frac{1}{2} \rho(L_1, L_2) \right) = \frac{1}{r}.$$

Se calcula primero la ecuación de L_2 . Es fácil ver que $a = \frac{r+1}{2}$, y por ende el radio de la circunferencia que determina a L_2 es $r_1 = a - 1 = \frac{r-1}{2}$; esto es L_2 está dada por

$$\left(x - \left(\frac{r+1}{2} \right) \right)^2 + y^2 = \left(\frac{r-1}{2} \right)^2. \quad (2.9)$$

Ahora, la ortogonal común está dada por

$$|z|^2 = t^2 = a^2 - r^2 = \left(\frac{r+1}{2} \right)^2 - \left(\frac{r-1}{2} \right)^2 = r. \quad (2.10)$$

Se calculará entonces $\rho(L_1, L_2)$, para esto es necesario tener las coordenadas del punto de intersección de la ortogonal común con L_2 ; sea z_0 tal punto. Usando (2.9) y (2.10) se tiene que

$$2r = x(r + 1).$$

Usando (2.10) se resuelve para y ,

$$y^2 = r - x^2 = r - \frac{4r^2}{(r + 1)^2} = \frac{r(r - 1)^2}{(r + 1)^2}.$$

Por lo que se tiene que

$$z_0 = \left(\frac{2r}{r + 1}, \sqrt{r} \left(\frac{r - 1}{r + 1} \right) \right).$$

Además, las coordenadas de w , la intersección de L_1 con la ortogonal común, son $(0, \sqrt{r})$. De la Proposición 2.3.1 se sabe que $\rho(L_1, L_2) = \rho(w, z)$. Usando (1.6) se deriva fácilmente

$$\tanh \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) = \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|. \quad (2.11)$$

(cf. [3] p. 130)

Por lo cual

$$\begin{aligned} \tanh^2 \left(\frac{1}{2} \rho(w, z) \right) &= \left| \frac{\frac{2r}{r + 1} + i \left(\sqrt{r} \left(\frac{r - 1}{r + 1} \right) - \sqrt{r} \right)}{\frac{2r}{r + 1} + i \left(\sqrt{r} \left(\frac{r - 1}{r + 1} \right) + \sqrt{r} \right)} \right|^2 \\ &= \frac{4r(1 + r)}{4r^2(1 + r)} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. \square

Ahora se estudiará el caso en que las geodésicas se intersecten. Para esto se verá que el ángulo en el que se intersectan un par de geodésicas se puede expresar en términos de la razón cruzada de los pies de dichas geodésicas.

Proposición 2.3.3 Sean $z_1, w_1, z_2, w_2 \in \partial\Delta$ apareciendo en ese orden, L_1 y L_2 las geodésicas determinadas por z_1, z_2 y w_1, w_2 , respectivamente, entonces

$$[z_1, w_1, z_2, w_2] \cdot \text{sen}^2(\theta/2) = 1.$$

Donde $\theta \in (0, \pi)$ es el ángulo de intersección de L_1 con L_2 .

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad $L_1 = [-1, 1]$ y $L_2 = [e^{i\theta}, -e^{i\theta}]$, i.e. $z_1 = 1, z_2 = -1, w_1 = e^{i\theta}$ y $w_2 = -e^{i\theta}$.

Entonces, se tiene que

$$[z_1, w_1, z_2, w_2] = [1, e^{i\theta}, -1, -e^{i\theta}] = \frac{-4e^{i\theta}}{(1 - e^{i\theta})^2}.$$

Por lo tanto, basta con probar que

$$-4e^{i\theta} \cdot \text{sen}^2(\theta/2) = (1 - e^{i\theta})^2,$$

esto es

$$-4 \cos \theta \text{sen}^2(\theta/2) - 4i \text{sen} \theta \text{sen}^2(\theta/2) = 1 - 2 \cos \theta + \cos 2\theta + i(\text{sen} 2\theta - 2 \text{sen} \theta),$$

lo cual sucede si y sólo si

$$\begin{cases} -4 \cos \theta \text{sen}^2(\theta/2) = 1 - 2 \cos \theta + \cos 2\theta \\ -4 \text{sen} \theta \text{sen}^2(\theta/2) = \text{sen} 2\theta - 2 \text{sen} \theta. \end{cases}$$

Esto a su vez sucede si y sólo si

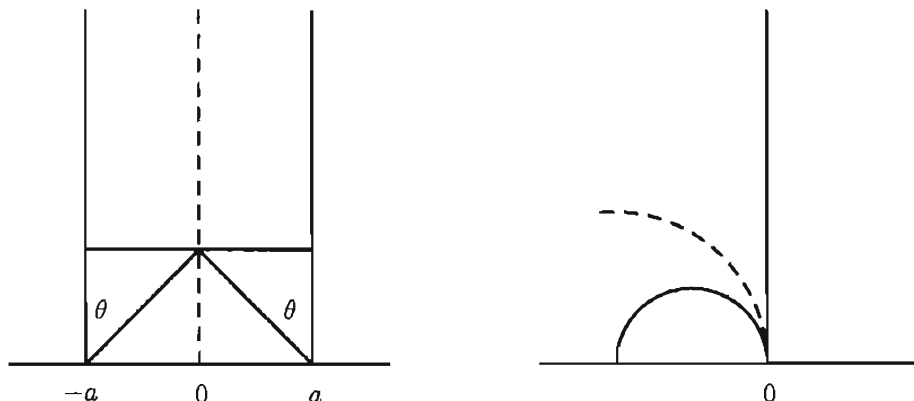
$$\begin{cases} 2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta = 1 - 2 \cos \theta + \cos 2\theta \\ 2 \text{sen} \theta \cos \theta - 2 \text{sen} \theta = -2 \text{sen} \theta + \text{sen} 2\theta, \end{cases}$$

lo cual evidentemente se cumple. □

2.4. La mediatriz de dos geodésicas

Definición 16 Dadas L_1 y L_2 dos geodésicas, se define la mediatriz de L_1 y L_2 como sigue

$$L = \{z \mid \rho(z, L_1) = \rho(z, L_2)\}.$$

Figura 2.6: L_1 y L_2 paralelas.

Se analizará y discutirá la forma de la mediatriz de 2 geodésicas en función de si éstas son paralelas, disjuntas, o si se interesectan.

1. L_1 y L_2 paralelas.

Sin pérdida de generalidad L_1 y L_2 son las geodésicas definidas por la ecuaciones: $x = a$ y $x = -a$, respectivamente. Si $z \in L$, entonces

$$\operatorname{senh}\rho(z, L_1) = \operatorname{senh}\rho(z, L_2).$$

Por lo tanto si $z = x + iy$, usando (2.1), donde θ es el ángulo descrito en la Figura 2.6, se tiene que $z \in L$ si y sólo si

$$\begin{aligned} \frac{|x - a|}{y} &= \frac{|x + a|}{y} \\ \Leftrightarrow |x - a| &= |x + a| \\ \Leftrightarrow x &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que la mediatriz de L_1 y L_2 es el eje imaginario.

2. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Sin pérdida de generalidad L_1 y L_2 son las geodésicas definidas por la ecuaciones: $|z| = 1$ y $|z| = r^2$, respectivamente.

Ahora, usando el Teorema 2.1.3, $z \in L$ si y sólo si

$$\left| \frac{|z|^2 - 1}{2y} \right| = \left| \frac{|z|^2 - r^4}{2yr^2} \right|$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow r^4(|z|^2 - 1)^2 &= (|z|^2 - r^4)^2 \\ \Leftrightarrow r^4|z|^4 + r^4 &= |z|^4 + r^8 \\ \Leftrightarrow |z|^4 &= \frac{r^4(r^4 - 1)}{r^4 - 1} \\ \Leftrightarrow |z| &= r. \end{aligned}$$

Por lo tanto la mediatriz de L_1 y L_2 es $|z| = r$.

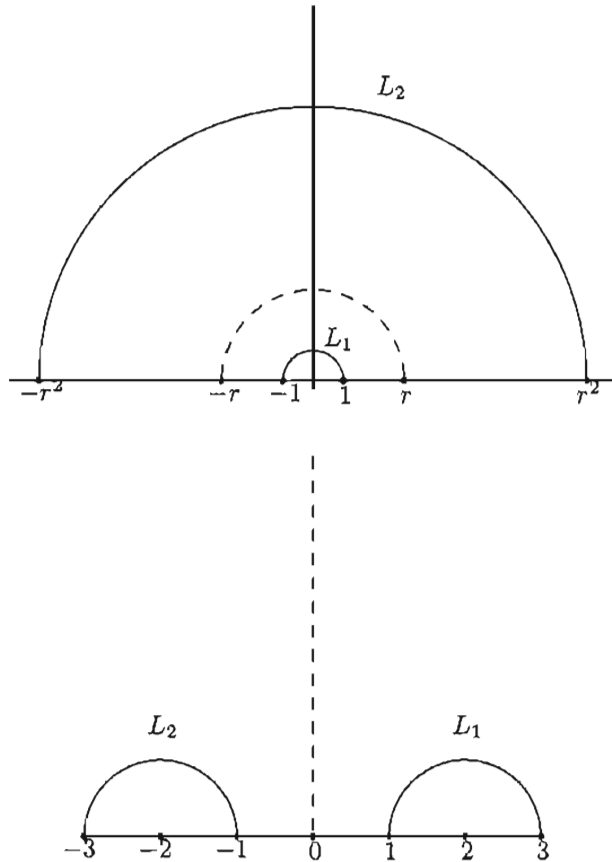


Figura 2.7: $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

3. $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

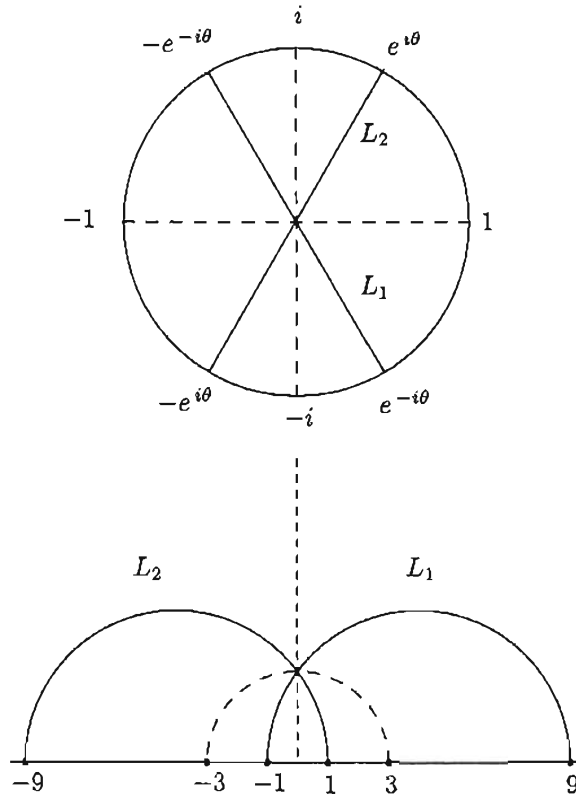


Figura 2.8: $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

En este caso se trabaja en Δ . Sin pérdida de generalidad $L_1 = [e^{-i\theta}, -e^{-i\theta}]$, $L_2 = [e^{i\theta}, -e^{i\theta}]$ con $0 < \theta \leq \pi/2$. Ahora, $z \in L$ si y sólo si

$$\rho(z, L_1) = \rho(z, L_2).$$

Entonces si $L_0 = [-1, 1]$ y $z \in L$ tiene

$$\rho(e^{i\theta}z, L_0) = \rho(z, L_1) = \rho(z, L_2) = \rho(e^{-i\theta}z, L_0)$$

pues $g(z) = e^{i\theta}z$ es una isometría de Δ . Por lo cual

$$z \in L \Leftrightarrow \rho(e^{i\theta}z, L_0) = \rho(e^{-i\theta}z, L_0)$$

Usando el Teorema 2.1.3 se tiene que

$$z \in L \Leftrightarrow |\operatorname{Im} e^{i\theta}z| = |\operatorname{Im} e^{-i\theta}z|.$$

Escribiendo $z = re^{it}$, esta igualdad se satisface si y sólo si

$$|\operatorname{sen}(t - \theta)| = |\operatorname{sen}(t + \theta)|$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(t - \theta) = \operatorname{sen}^2(t + \theta)$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ ó } t = \pi/2.$$

Por lo tanto $L = [-1, 1] \cup [-i, i]$.

2.5. Transversales

Definición 17 Dadas L_1 y L_2 geodésicas disjuntas y $\theta \in (0, \pi/2)$; a una geodésica L tal que intersecta tanto a L_1 como a L_2 en el ángulo θ se le llama una θ -transversal a L_1 y L_2 .

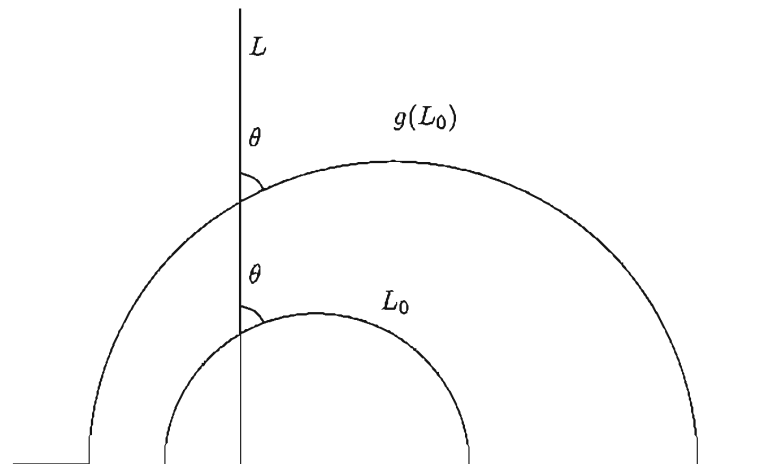


Figura 2.9: θ -transversal.

Un ejemplo sencillo de una θ -transversal se obtiene a partir de la conformalidad de las transformaciones de Möbius. Para ver esto, se toman L y L_0 como el eje imaginario positivo y una geodésica que intersecta al eje imaginario, respectivamente. Si se toma $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, $g(z) = kz$, $k \in \mathbb{R}$; entonces la conformalidad de g exhibe al eje imaginario como una θ -transversal entre cualesquiera dos elementos distintos de las imágenes de L_0 bajo la acción iterada de g .

Claramente, la ortogonal común a L_1 y L_2 es un caso extremo de una θ -transversal. A continuación se enuncia un resultado que exhibe la diferencia entre las θ -transversales y la ortogonal común.

Proposición 2.5.1 *Dadas L_1 y L_2 geodésicas disjuntas y $\theta \in (0, \pi/2)$, entonces existen exactamente cuatro θ -transversales a L_1 y L_2 .*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad se trabajará en Δ y también se pueden tomar $L_0 = [-1, 1]$ como la ortogonal común y $L^* = \{-i, i\}$ como su mediatriz. Por lo tanto L_1 y L_2 están dadas por

$$\begin{cases} L_1 = [e^{i\eta}, e^{-i\eta}] \\ L_2 = [-e^{-i\eta}, -e^{i\eta}], \end{cases}$$

para alguna $\eta \in (0, \pi/2)$.

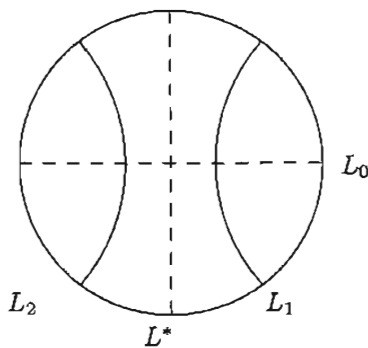


Figura 2.10: L_1 , L_2 , L_0 y L^* .

Sea M la colección de geodésicas en Δ que pasan por el origen, es decir los diámetros. Ahora, se considera a $\overline{M} \subset M$ la colección de diámetros de la forma $[e^{i\psi}, -e^{i\psi}]$ con $\psi \in (0, \eta)$. Claramente los elementos de \overline{M} son θ -transversales a L_1 y L_2 dada la simetría del modelo. Al recorrer los elementos

de \overline{M} en función de ψ de manera creciente, el ángulo de intersección de la θ -transversal con L_1 recorre el intervalo $(0, \pi/2)$ de forma decreciente. Por lo tanto, dado $\theta \in (0, \pi/2)$ existe un único elemento de \overline{M} que intersecta a L_1 y L_2 en el ángulo θ . A esta transversal se le denotará por $[e^{i\psi_0}, -e^{i\psi_0}]$.

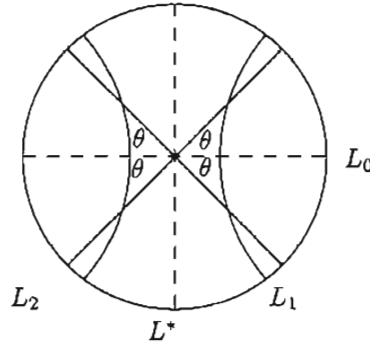


Figura 2.11: θ -transversales alternantes.

Ahora, al reflejar sobre cualquiera de los ejes se obtiene $[e^{-i\psi_0}, -e^{-i\psi_0}]$ que por simetría es otra θ -transversal. A este tipo de θ -transversales se les llama *alternantes*.

Sea N la colección de geodésicas en Δ que no pasan por 0. Se considera a $\overline{N} \subset N$ el subconjunto de geodésicas determinadas por circunferencias con centro en el eje imaginario positivo que intersectan a L_1 y L_2 . Igual que antes, es claro que los elementos de \overline{N} son θ -transversales.

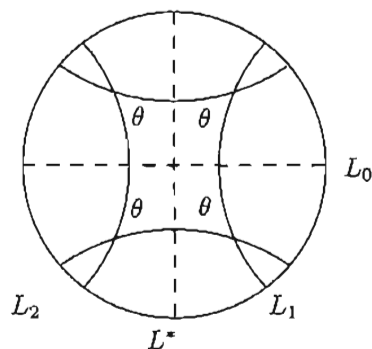
Al recorrer los elementos de \overline{N} en función de su centro de manera estrictamente creciente, *i.e.* $k \in (1, \infty)$, no es difícil deducir que L_0 es el caso de la circunferencia ideal. También se observa que los elementos de \overline{N} tienen la forma

$$[e^{i\psi}, -e^{-i\psi}].$$

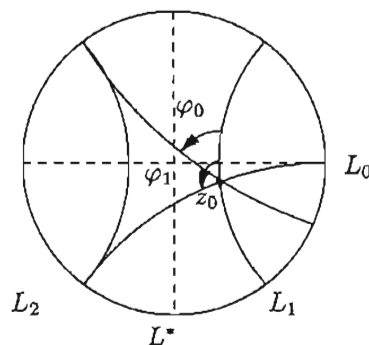
donde $\psi \in (0, \eta)$. Al recorrer dicho intervalo de manera estrictamente creciente, el ángulo θ de intersección del elemento en \overline{N} con L_1 y L_2 recorre el intervalo $(0, \pi/2)$ de manera estrictamente decreciente.

Por lo tanto, dado $\theta \in (0, \pi/2)$, entonces existe un único elemento de \overline{N} que corta a L_1 y L_2 en el ángulo θ . Es decir, existe una única geodésica en \overline{N} que es θ -transversal. Basta con reflejar sobre el eje real para obtener otra θ -transversal. Este tipo de θ -transversales se llaman *complementarias*.

Se tiene entonces que dadas L_1 y L_2 dos geodésicas disjuntas y $\theta \in (0, \pi/2)$, entonces existen 4 θ -transversales a L_1 y L_2 . Ahora sólo basta

Figura 2.12: θ -transversales complementarias.

con observar que ya se ha analizado de manera exhaustiva todos los casos posibles.

Figura 2.13: Geodésicas por z_0 .

Para esto se considera a todas las geodésicas que intersectan a L_2 y pasan por z_0 , un punto cualquiera de L_1 . Si se mide el ángulo que forma L_1 con éstas en el sentido positivo, estos ángulos crecen de un ángulo φ_0 a otro φ_1 , ver Figura 2.13. Ahora, uno de los ángulos de intersección de éstas geodésicas con L_2 decrece de π a 0. Por lo que existe exáctamente una geodésica que corta a L_1 y a L_2 en el mismo ángulo, no es difícil ver que ésta corresponde a una de las θ -transversales complementarias ya consideradas.

Este argumento se aplica también al tomar los ángulos complementarios de esta familia de geodésicas con L_1 (los cuales decrecen) y se toman los ángulos con L_2 ahora de manera creciente de 0 a π , obteniéndose de esta manera otra de las θ -transversales alternantes ya obtenidas. \square

Se estudia a continuación la relación métrica entre las θ -transversales alternantes y complementarias. Para esto se necesita un par de resultados de trigonometría hiperbólica, cuyas pruebas se pueden consultar en [3] p. 147 y p. 157, respectivamente; con más detalle en [7] y [2].

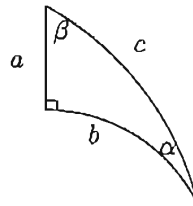


Figura 2.14: Triángulo hiperbólico rectángulo.

Proposición 2.5.2 *Dado un triángulo con ángulos α , β y $\pi/2$ como en la Figura 2.14, se tiene*

- (i) $\operatorname{senh} b = \operatorname{senh} c \operatorname{sen} \beta$,
- (ii) $\operatorname{tanh} b = \operatorname{senh} a \operatorname{tan} \beta$.

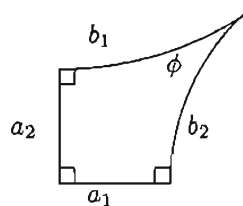
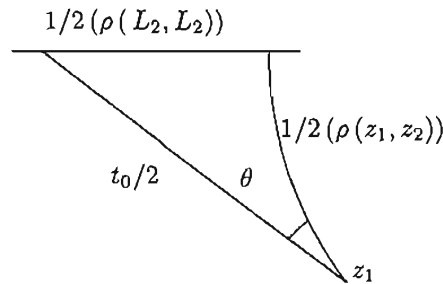


Figura 2.15: Cuadrilátero de Lambert.

Proposición 2.5.3 *Dado un cuadrilátero como en la Figura 2.15, se tiene*

- (i) $\operatorname{senh} a_1 \operatorname{senh} a_2 = \cos \phi$,
- (ii) $\operatorname{cosh} a_1 = \operatorname{cosh} b_1 \operatorname{sen} \phi$.

Usando estos resultados se siguen de manera directa los siguientes corolarios. En las Figuras 2.16 y 2.17 se toman z_1 y w_1 como la intersección de las θ -transversales alternantes y complementarias con L_1 , respectivamente.

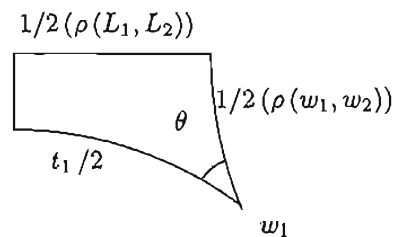
Figura 2.16: θ -transversal alternante

Corolario 2.5.4 Si t_0 es la longitud entre L_1 y L_2 de una θ -transversal alternante, entonces

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(L_1, L_2)\right) = \sinh\left(\frac{t_0}{2}\right) \operatorname{sen} \theta.$$

Corolario 2.5.5 Si t_1 es la longitud entre L_1 y L_2 de una θ -transversal complementaria, entonces

$$\cosh\left(\frac{1}{2}\rho(L_1, L_2)\right) = \cosh\left(\frac{t_1}{2}\right) \operatorname{sen} \theta.$$

Figura 2.17: θ -transversal complementaria

Proposición 2.5.6 Dadas L_1 y L_2 geodésicas disjuntas, $\theta \in (0, \pi/2)$, t_0 la longitud de las θ -transversales alternantes y t_1 la longitud de las θ -transversales complementarias, entonces $t_1 > t_0$.

DEMOSTRACIÓN. Usando los Corolarios 2.5.4 y 2.5.5 se tiene que

$$\begin{aligned} \cosh^2 \left(\frac{t_1}{2} \right) &= \frac{1 + \sinh^2 \left(\frac{1}{2} \rho(L_1, L_2) \right)}{\sen^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\sen^2 \theta} + \sinh^2 \left(\frac{t_0}{2} \right) \\ &= \cot^2 \theta + \cosh^2 \left(\frac{t_0}{2} \right). \end{aligned}$$

Por lo cual $t_1 > t_0$. □

Proposición 2.5.7 Sean z_1, z_2 los puntos de intersección de las θ -transversales alternantes con L_1 , y w_1, w_2 los puntos de intersección de las θ -transversales complementarias con L_1 , entonces

$$\rho(w_1, w_2) \geq \rho(z_1, z_2).$$

DEMOSTRACIÓN. De la Proposición 2.5.2 para las θ -transversales alternantes se tiene que

$$\tanh \left(\frac{1}{2} \rho(L_1, L_2) \right) = \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z_1, z_2) \right) \tan \theta.$$

Y tomando la θ' -transversal alternante que pasa por w_1 como en la Figura 2.18 se tiene que

$$\tanh \left(\frac{1}{2} \rho(L_1, L_2) \right) = \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(w_1, w_2) \right) \tan \theta'.$$

Usando estas dos igualdades se tiene que

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z_1, z_2) \right) \tan \theta = \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(w_1, w_2) \right) \tan \theta',$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$\frac{\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z_1, z_2) \right)}{\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(w_1, w_2) \right)} = \frac{\tan \theta'}{\tan \theta}.$$

Y esto último es menor o igual que uno, pues $\theta' < \theta$ como se ve en la Figura 2.18.

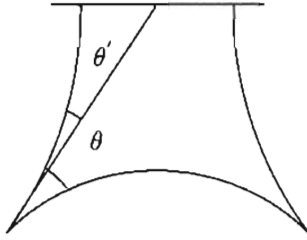


Figura 2.18: $\theta' < \theta$.

De aquí se sigue el resultado de manera directa.

□

CAPÍTULO 3

Haces de geodésicas

3.1. Teoría de haces

Gran parte de la discusión sobre temas más específicos de geometría hiperbólica, como el de grupos Fuchsianos se da en términos de haces (o lápices) de geodésicas. En esta sección se describirá lo que éstos son y se dará una lista de sus propiedades más importantes. Más adelante se hará una clasificación de éstos; también se verá que los círculos, horociclos e hiperciclos descritos al principio (ver Definiciones 10 y 11), son tan sólo variantes de la misma idea que define a los haces. La importancia de los haces radica en que la clasificación de éstos permite describir más profundamente las isometrías del plano hiperbólico, \mathbb{H}^2 o Δ .

Dadas dos geodésicas L y L' en el plano hiperbólico, se verá que éstas pertenecen a una familia de geodésicas (o haz) \mathcal{G} determinado por ellas. Más adelante se verá cómo son los tipos de haces en función de la forma en que L y L' se encuentran en el plano hiperbólico. Ahora, a cada haz le corresponde una familia \mathcal{C} de curvas (no necesariamente geodésicas), llamada la familia *complementaria* de \mathcal{G} . A continuación se enlistan las propiedades que éstas dos familias satisfacen.

P1- Todo punto del plano hiperbólico, salvo posiblemente uno, yace en exactamente una curva en \mathcal{C} .

P2- Todo punto del plano hiperbólico, salvo posiblemente uno, yace en exactamente una geodésica de \mathcal{G} .

P3- Toda geodésica en \mathcal{G} es ortogonal a todas las curvas en \mathcal{C} .

P4- Toda curva en \mathcal{C} permanece invariante bajo la reflexión sobre cualquier geodésica en \mathcal{G} .

P5- Cualesquiera dos curvas C_1 y C_2 en \mathcal{C} son equidistantes, *i.e.* dada $z_1 \in C_1$ existe $z_2 \in C_2$, tal que $\rho(z_1, z_2) = \rho(C_1, C_2)$, además $[z_1, z_2]$ está contenida en una geodésica de \mathcal{G} .

P6- Dos puntos z y w yacen en la misma curva en \mathcal{C} si y sólo si el bisector perpendicular de $[z, w]$ pertenece a \mathcal{G} .

P7- Dadas L y L' dos geodésicas, entonces \mathcal{G} , el haz determinado por ellas es precisamente el conjunto M de geodésicas de la forma

$$\left\{ z \mid \frac{\sinh \rho(z, L)}{\sinh \rho(z, L')} = k \right\}$$

con $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \cup \{0\}$ constante.

El haz determinado por L y L' se dirá que es

- (i) *parabólico* si L y L' son paralelas.
- (ii) *elíptico* si $L \cap L' \neq \emptyset$.
- (iii) *hiperbólico* si $L \cap L' = \emptyset$.

3.1.1. Haz Parabólico

Sean L y L' dos geodésicas paralelas con pie común w_0 . Se define \mathcal{G} como la familia de geodésicas por w_0 , y \mathcal{C} como la colección de horociclos tangentes al círculo al infinito en w_0 (ver Figura 3.1). Sin pérdida de generalidad se trabaja en \mathbb{H}^2 y se toma $w_0 = \infty$. Esto se puede hacer debido a que existe $T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ una isometría tal que manda a w_0 en ∞ ; basta con considerar

$$T(z) = \frac{-1}{z - w_0}.$$

En este caso \mathcal{G} es la familia de geodésicas paralelas al eje imaginario, es decir las rectas de la forma $\operatorname{Re} z = k$, $k \in \mathbb{R}$; y las curvas en \mathcal{C} son las rectas

de la forma $Im z = t$, $t \in \mathbb{R}^+$.

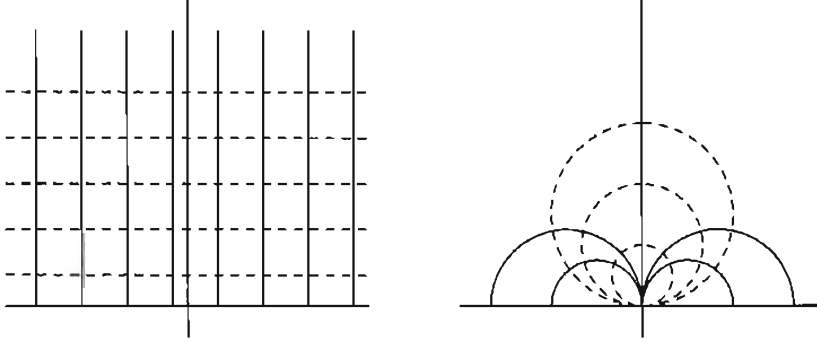


Figura 3.1: Haces parabólicos

En este caso, claramente \mathcal{G} y \mathcal{C} satisfacen P1, P2, P3 y P4 y también el caso general se sigue por conformalidad, biyectividad de las transformaciones de Möbius y el Lema 1.0.3. Para probar P5 se toman $Im z = t$ e $Im z = T$ en \mathcal{C} . Aplicando la fórmula de la distancia hiperbólica (1.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \cosh \rho(r + it, s + iT) &= 1 + \frac{(r - s)^2 + (t - T)^2}{2 Im(r + it) Im(s + iT)} \\ &\geq 1 + \frac{(t - T)^2}{2tT} \\ &= \cosh \rho(x + it, x + iT). \end{aligned}$$

Por lo que claramente el ínfimo se alcanza si $r = s$, es decir sobre la geodésica $Re z = r$ que pertenece a \mathcal{G} ; es decir, P5 se satisface si $w = \infty$, el caso general se sigue ya que $PSL(2, \mathbb{R})$ consiste en isometrías hiperbólicas de \mathbb{H}^2 .

Para probar P6, se toman $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$; y de la Proposición 2.2.3 se sabe que el bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$ está dado por

$$\frac{|z - z_1|^2}{y_1} = \frac{|z - z_2|^2}{y_2}. \quad (3.1)$$

Si $z_1, z_2 \in C_0$ una recta en \mathcal{C} , entonces $y_1 = y_2$, por lo que el bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$ está dado por

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

que son precisamente los puntos que equidistan euclidianamente de z_1 y z_2 ; explícitamente es la semirecta $Re z = \frac{x_1 + x_2}{2}$ que claramente está en \mathcal{G} .

Ahora, supóngase que la geodésica $Re z = k$, $k \in \mathbb{R}^+$ es el bisector perpendicular de un segmento de geodésica $[z_1, z_2]$, donde $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$. Desarrollando (3.1) no es difícil ver que el bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$ está dado por

$$(y_1 - y_2)|z|^2 - 2 Re(z\bar{z}_2y_1 - z\bar{z}_1y_2) = y_1|z_2|^2 - y_2|z_1|^2$$

lo cual representa a una geodésica de la forma $Re z = k$ si $y_1 = y_2$. Por lo tanto, en este caso en particular, se tiene que z_1 y z_2 yacen en la misma curva en \mathcal{C} . Por lo tanto, P6 también se satisface si $w = \infty$; el caso general se sigue por la conformalidad y el hecho de que $PSL(2, \mathbb{R})$ manda geodésicas en geodésicas.

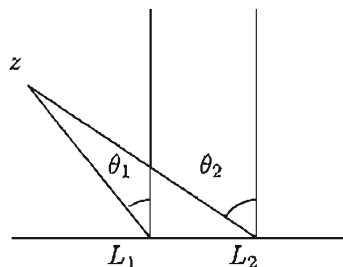


Figura 3.2: Propiedad P7 caso parabólico

Finalmente se demostrará que P7 también se satisface. Sean L y L' las geodésicas dadas por $Re z = a_1$ y $Re z = a_2$, respectivamente. Sin pérdida de generalidad $a_1 < a_2$. De (2.1) se sabe que

$$\sinh \rho(z, L) = \tan \theta_1 \text{ y } \sinh \rho(z, L') = \tan \theta_2,$$

donde θ_1 y θ_2 son como en la Figura 3.2. Por lo que si $z = x + iy$, se tiene que

$$\tan \theta_1 = \frac{|x - a_1|}{y} \text{ y } \tan \theta_2 = \frac{|x - a_2|}{y}.$$

Por lo que

$$\frac{\sinh \rho(z, L)}{\sinh \rho(z, L')} = \frac{|x - a_1|}{|x - a_2|}. \quad (3.2)$$

De aquí es claro que para una geodésica L en \mathcal{G} dada por $Re z = t$ se tiene que

$$\frac{\sinh \rho(z, L)}{\sinh \rho(z, L')} = \left| \frac{t - a_1}{t - a_2} \right| = k,$$

donde $k \in [0, \infty]$, por lo que las geodésicas en \mathcal{G} satisfacen la relación del conjunto descrito en P7.

Viceversa, ahora basta probar que dada $k \in [0, \infty]$, el conjunto

$$B_k = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid \frac{\sinh \rho(z, L)}{\sinh \rho(z, L')} = k \right\} \quad (3.3)$$

determina dos geodésicas en \mathcal{G} , salvo si $k = 0, \infty$; que claramente determinan a L y L' . Como ya se vió, el conjunto B_k está dado por

$$\left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid \left| \frac{x - a_1}{x - a_2} \right| = k \right\}$$

Por lo que se tiene que los puntos en \mathbb{H}^2 que satisfacen la relación anterior son

$$\{x \mid x - a_1 = k(x - a_2)\} \cup \{x \mid x - a_1 = -k(x - a_2)\}.$$

Al resolver para el primer caso se tiene

$$\begin{aligned} x - a_1 &= k(x - a_2) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a_1 - ka_2}{1 - k} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Y para el segundo se tiene

$$\begin{aligned} x - a_1 &= k(a_2 - x) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a_1 + ka_2}{1 + k} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo que existen exactamente dos geodésicas en \mathcal{G} por cada $k \in \mathbb{R}^+$, excepto en el caso $k = 1$ que se obtiene a la mediatriz de L y L' , que como se vió antes, es única. Por lo tanto P7 se satisface.

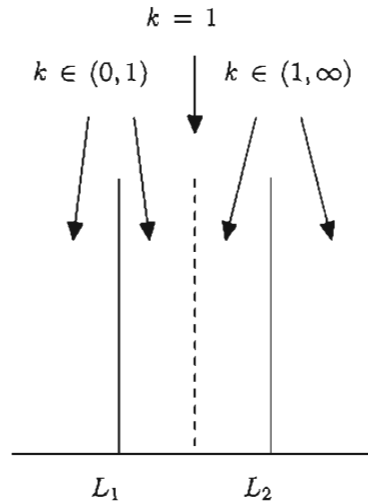


Figura 3.3: Propiedad P7 caso parabólico

3.1.2. Haz Elíptico

Sean L y L' dos geodésicas tales que $L \cap L' \neq \emptyset$, y sea w_0 su intersección. Sea \mathcal{G} la familia de todas las geodésicas que pasan por w_0 , y sea \mathcal{C} la familia de circunferencias hiperbólicas con centro en w_0 , es decir

$$C_r = \{z \mid \rho(z, w_0) = r\}.$$

Sin pérdida de generalidad se trabaja en Δ y se toma $w_0 = 0$; esto debido a que existe T transformación de Möbius tal que envía a la intersección de L con L' en i , y al componer esta con la transformación de Cayley se tiene lo deseado. En este caso \mathcal{G} es el conjunto de diámetros de Δ , y \mathcal{C} es la colección de circunferencias euclidianas centradas en $w = 0$. Al igual que en el caso parabólico P1, P2, P3 y P4 claramente se satisfacen; con $w = 0$ el punto excepcional descrito en P1 y P2.

A continuación se prueba P5; para esto será necesario enunciar una fórmula de la distancia en Δ , cuya demostración se puede consultar en [4] p. 77.

Teorema 3.1.1 Sean $z, w \in \Delta$, entonces

$$\sinh^2 \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}. \quad (3.4)$$

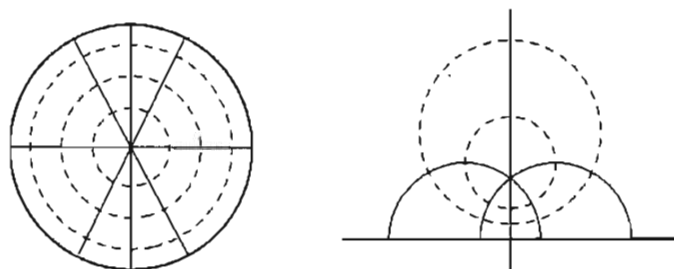


Figura 3.4: Haces elípticos

Aplicando esta última fórmula para $z_1 \in C_r$ y $z_2 \in C_t$ se tiene que

$$\sinh^2 \left(\frac{1}{2} \rho(z_1, z_2) \right) = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1 - r^2)(1 - t^2)}.$$

Por lo que $\sinh^2 \left(\frac{1}{2} \rho(z_1, z_2) \right)$ alcanza su mínimo donde $|z_1 - z_2|$ lo hace; y esto ocurre justamente cuando z_1 y z_2 yacen en el mismo diámetro de Δ , que es un elemento de \mathcal{G} . Por lo tanto P5 se satisface.

Ahora sean $z_1, z_2 \in C_r$ en \mathcal{C} , entonces

$$\rho(z_1, 0) = \rho(z_2, 0),$$

por lo que $w = 0$ yace en el bisector perpendicular. Pero, en Δ el hecho de que una geodésica pase por el origen determina que ésta es un diámetro. Por lo tanto el bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$ es un elemento de \mathcal{G} .

Sea L un diámetro de Δ tal que es el bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$. Los puntos de L satisfacen $\rho(z, z_1) = \rho(z, z_2)$; en particular el origen lo hace, es decir

$$\rho(0, z_1) = \rho(0, z_2),$$

lo cual implica que z_1 y z_2 yacen en C_r para alguna r . Lo cual termina la demostración de que \mathcal{G} y \mathcal{C} satisfacen P6.

Sólo resta probar que el conjunto determinado en P7 determina a la familia de diámetros de Δ . Sin pérdida de generalidad se pueden tomar $L = [-1, 1]$ (pues las rotaciones son isometrías de Δ) y $L' = [-e^{i\eta}, e^{i\eta}]$, $\eta \in [0, \pi)$. Dado $z \in \Delta$, $z = x + iy$; se sabe del Teorema 2.1.5 y del Corolario 2.1.6 que

$$\sinh \rho(z, L) = \frac{2|\operatorname{Im} z|}{1 - |z|^2}$$

y

$$\operatorname{senh} \rho(z, L') = \frac{2|\operatorname{Im} ze^{i\eta}|}{1 - |z|^2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\operatorname{senh} \rho(z, L)}{\operatorname{senh} \rho(z, L')} = \frac{|y|}{|y \cos \eta + x \operatorname{sen} \eta|}.$$

Nótese que para cualquier $z \in \Delta$, de la expresión anterior es claro que

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{senh} \rho(z, L)}{\operatorname{senh} \rho(z, L')} = \frac{|y|}{|y \cos \eta + x \operatorname{sen} \eta|} = k \in \mathbb{R}^+.$$

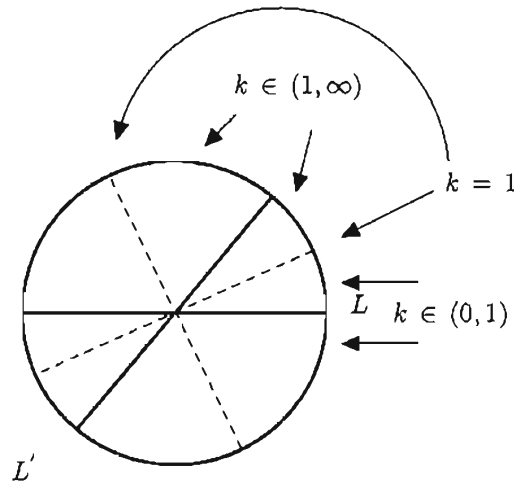


Figura 3.5: Propiedad P7 caso elíptico

Ahora, sea $k \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\frac{\operatorname{senh} \rho(z, L)}{\operatorname{senh} \rho(z, L')} = k \Rightarrow |y| = k |y \cos \eta + x \operatorname{sen} \eta|.$$

Al resolver esto para y se obtienen las siguientes ecuaciones

$$y = k(y \cos \eta + x \operatorname{sen} \eta)$$

y

$$y = -k(y \cos \eta + x \operatorname{sen} \eta),$$

que evidentemente representan a dos rectas por el origen. Es decir, los puntos que satisfacen la ecuación son dos diámetros de Δ . Por lo que se tiene que \mathcal{G} y \mathcal{C} satisfacen claramente P7.

En la Figura 3.5 se puede ver dónde se localizan los diámetros que resuelven el sistema de ecuaciones determinadas por el conjunto descrito en P7. Nótese que cuando $k = 0$ y $k = \infty$ entonces los diámetros correspondientes son L y L' , respectivamente. En el caso $k = 1$, claramente se trata de las mediatrices de L y L' . Por lo tanto, se ha demostrado que P7 también se satisface.

3.1.3. Haz Hiperbólico

Sean L y L' dos geodésicas en \mathbb{H}^2 disjuntas. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que su ortogonal común es el eje imaginario. En este caso, \mathcal{G} es la familia de geodésicas de la misma forma que L y L' , es decir geodésicas de la forma $|z| = t$, $t \in \mathbb{R}^+$, y \mathcal{C} es el conjunto de rayos por el origen dados por $\arg z = s$, $s \in (0, \pi)$. Al igual que en los otros dos casos anteriores P1, P2, P3 y P4 claramente se satisfacen para dichas \mathcal{G} y \mathcal{C} . A continuación se demuestra que también satisfacen P5.

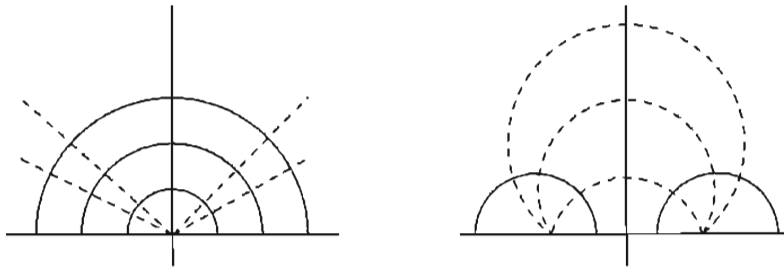


Figura 3.6: Haces hiperbólicos

Sean $C_1 = \{z \mid \arg z = \theta\}$ y $C_2 = \{z \mid \arg z = \phi\}$ hiperciclos en \mathcal{C} . No es difícil ver que la siguiente fórmula de la distancia entre dos puntos es equivalente a la dada en (1.6)

$$\sinh \left(\frac{1}{2} (\rho(z, w)) \right) = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{1/2}}. \quad (3.5)$$

Aplicando esta fórmula para $z_1 = te^{i\theta} \in C_1$ y $z_2 = re^{i\phi} \in C_2$, se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}^2 \left(\frac{1}{2} \rho(te^{i\theta}, re^{i\phi}) \right) &= \frac{|te^{i\theta} - re^{i\phi}|^2}{4(\operatorname{Im} te^{i\theta} \operatorname{Im} re^{i\phi})} \\
&= \frac{(te^{i\theta} - re^{i\phi})(te^{-i\theta} - re^{-i\phi})}{4rt \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi} \\
&= \frac{(t^2 + r^2 - 2rt \cos(\theta - \phi))}{4rt \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi} \\
&= \frac{1}{4 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi} \left(\frac{t}{r} + \frac{r}{t} - 2 \cos(\theta - \phi) \right) \\
&\geq \frac{2 - 2 \cos(\theta - \phi)}{4 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}.
\end{aligned}$$

Por lo que el mínimo se alcanza cuando $r = t$. Por lo tanto $|z_1| = |z_2|$, es decir P5, se satisface. Nótese que en el argumento se utiliza que las homotecias son isometrías hiperbólicas. Una prueba geométrica de P5 también se logra tomando círculos hiperbólicos centrados en z_1 variando el radio hasta que se obtenga el círculo tangente al rayo C_2 .

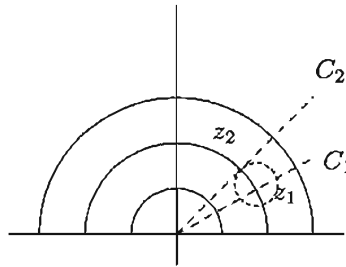


Figura 3.7: Prueba geométrica de P5.

Para ver que \mathcal{G} y \mathcal{C} también satisfacen P6 se toman $w_j = u_j + iv_j$, $j = 1, 2$, dos puntos en \mathbb{H}^2 . De la Proposición 2.2.3 se ve que el bisector perpendicular de $[w_1, w_2]$ está dado por

$$\frac{|z - w_1|^2}{v_1} = \frac{|z - w_2|^2}{v_2},$$

lo cual es equivalente a

$$v_2 (z - w_1)(\bar{z} - \bar{w}_1) = v_1 (z - w_2)(\bar{z} - \bar{w}_2),$$

que a su vez ocurre si y sólo si

$$v_2 (|z|^2 - 2 \operatorname{Re} z \bar{w}_1 + |w_1|^2) - v_1 (|z|^2 - 2 \operatorname{Re} z \bar{w}_2 + |w_2|^2) = 0.$$

Finalmente, sustituyendo $w_j = u_j + iv_j$ se tiene que

$$(v_2 - v_1)|z|^2 - 2x(u_1v_2 - u_2v_1) = v_1|w_2|^2 - v_2|w_1|^2 = k,$$

donde $z = x + iy$

Ahora, esta curva representa a una geodésica en \mathcal{G} si y sólo si

$$u_1v_2 = u_2v_1,$$

en cuyo caso se tiene que

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2},$$

lo cual indica que w_1 y w_2 yacen en el mismo rayo en \mathcal{C} . Por lo que dos puntos yacen en una curva de \mathcal{C} si y sólo si su bisector perpendicular está en \mathcal{G} , que es precisamente lo que se quería probar.

Finalmente, sólo resta probar que también se satisface P7. Esto se hace a continuación. Primero, sean L y L' las geodésicas que determinan a \mathcal{G} dadas por $|z| = R$ y $|z| = r$ (s.p.g. $R > r$), respectivamente; del Teorema 2.1.3 se tiene que

$$\operatorname{senh} \rho(z, L) = \left| \frac{|z|^2 - R^2}{2yR} \right| \text{ y } \operatorname{senh} \rho(z, L') = \left| \frac{|z|^2 - r^2}{2yr} \right|,$$

entonces si $|z| = s$, se tiene

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{senh} \rho(z, L)}{\operatorname{senh} \rho(z, L')} = \frac{r|s^2 - R^2|}{R|s^2 - r^2|} = k \in \mathbb{R}^+.$$

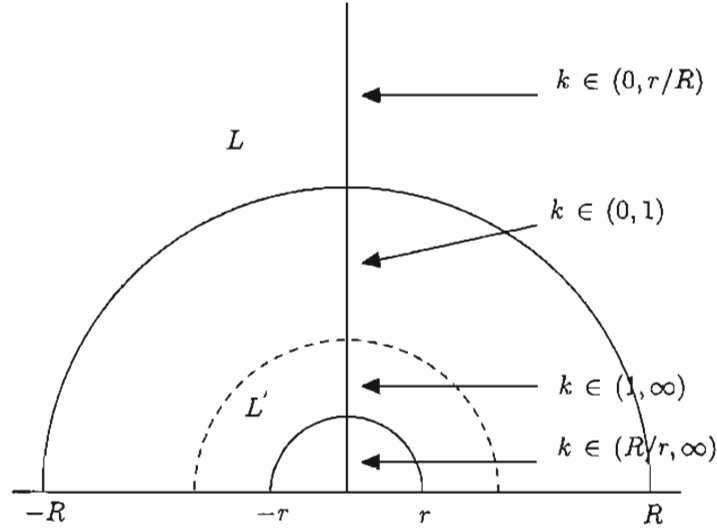


Figura 3.8: Propiedad P7 caso hiperbólico.

Nótese que al tomar elementos de \mathcal{G} , es decir geodésicas de la forma $|z| = m$ y al ser el eje imaginario la ortogonal común a todos los elementos de \mathcal{G} , entonces las distancias de las geodésicas M en \mathcal{G} a L y L' están dadas por

$$\rho(M, L) = \rho(im, iR) = \log(m/R) \text{ o } \log(R/m)$$

y

$$\rho(M, L') = \rho(im, ir) = \log(m/r) \text{ o } \log(r/m),$$

según donde se encuentre la geodésica M dada por $|z| = m$ en función de L y L' . En el caso en el que $m > R$, entonces es fácil calcular el siguiente límite tomando el cociente

$$\frac{\rho(im, iR)}{\rho(im, ir)} = \frac{\log(m/R)}{\log(m/r)} \rightarrow 1,$$

cuando $m \rightarrow \infty$. Análogamente si $m < r$, entonces se tiene que

$$\frac{\rho(im, iR)}{\rho(im, ir)} = \frac{\log(R/m)}{\log(r/m)} \rightarrow 1,$$

cuando $m \rightarrow 0$, por lo que para cada $k \in (0, \infty)$ existen dos geodésicas en \mathcal{G} tales que el cociente de las distancias de ellas a L y L' es k , excepto para

el caso $k = 1$, que como se vió en la sección de mediatrices, existe sólo una. Una de dicho par de geodésicas se encuentra en la región acotada por L y L' ; y la otra en su complemento. Sin embargo, ese no es el cociente descrito en la propiedad P7. Se verá a continuación que \mathcal{G} satisface dicha propiedad, aunque en este caso no es únicamente $k = 1$ el único valor para el que existe una única geodésica que satisface la relación descrita en P7.

Esto es porque las soluciones al sistema de ecuaciones definido por

$$\frac{\sinh \rho(z, L)}{\sinh \rho(z, L')} = \frac{R|s^2 - r^2|}{r|s^2 - R^2|} = k$$

tiene como soluciones a elementos de \mathcal{G} , o al conjunto vacío (depende de donde esté localizada la z). Por lo tanto, usando los mismos argumentos de la distancia vista arriba se tiene los siguientes tres casos, tomando $|z| = m$; cuando $m > R$, cuando $R \geq m \geq r$ y cuando $m < r$. Si $m > R$

$$\frac{\sinh \rho(z, L)}{\sinh \rho(z, L')} = \frac{\sinh(\log(m/R))}{\sinh(\log(m/r))} = \frac{\left(\frac{m}{R} - \frac{R}{m}\right)}{\left(\frac{m}{r} - \frac{r}{m}\right)} = \frac{r(m^2 - R^2)}{R(m^2 - r^2)}.$$

Tomando el límite cuando $m \rightarrow \infty$, se obtiene que el máximo valor que dicho cociente puede alcanzar es r/R . Si $R \geq m \geq r$, no es difícil ver que el cociente puede tomar todos los valores en $[0, \infty]$, por ejemplo se puede analizar el comportamiento alrededor de la mediatriz de L y L' . Por último, si $m < r$

$$\frac{\sinh \rho(z, L)}{\sinh \rho(z, L')} = \frac{\sinh(\log(R/m))}{\sinh(\log(r/m))} = \frac{r(R^2 - m^2)}{R(r^2 - m^2)}.$$

Y en este caso, al tomar el límite cuando $m \rightarrow 0$, se obtiene que el mínimo valor que el cociente puede alcanzar es R/r . En la Figura 3.8 se puede ver dónde se localizan las geodésicas correspondientes al valor de k . Es claro entonces que para $k \in (0, r/R) \cup (R/r, \infty)$ existen dos geodésicas que resuelven el sistema. Mientras que para $k \in (r/R, R/r)$ sólo existe una única geodésica que lo resuelve. Por lo tanto se tiene que P7 también se satisface. Es sorprendente el hecho de la forma en que la función \sinh restringe al conjunto descrito en P7, pues si se considerara sólo la distancia, el conjunto descrito en P7 sería como en los otros dos casos.

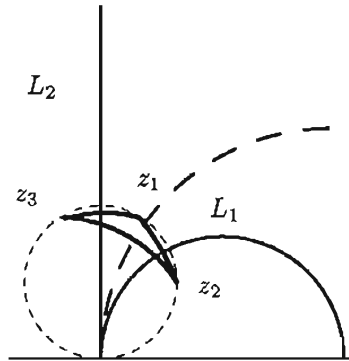


Figura 3.9: Bisectores perpendiculares de dos lados de T que son tangentes.

Obsérvese ahora que dado cualquier tipo de haz \mathcal{G} , entonces cualesquiera tres puntos del plano que se encuentren sobre una curva en \mathcal{C} no pueden ser colineales en el sentido hiperbólico, salvo en el caso de un haz hiperbólico donde el eje ortogonal común a L y L' es una geodésica. En el caso parabólico, tales puntos determinan un horociclo que claramente no puede ser una geodésica; en el caso elíptico los tres puntos yacen en un círculo totalmente contenido en el plano hiperbólico que tampoco puede ser una geodésica; y en el caso hiperbólico, las curvas en \mathcal{C} , salvo el eje mencionado, no son geodésicas pues no cortan al eje real ortogonalmente. Cualesquiera de los tres casos se puede ver en las Figuras 3.1, 3.4 y 3.6. Otro importante resultado relativo a haces es el siguiente.

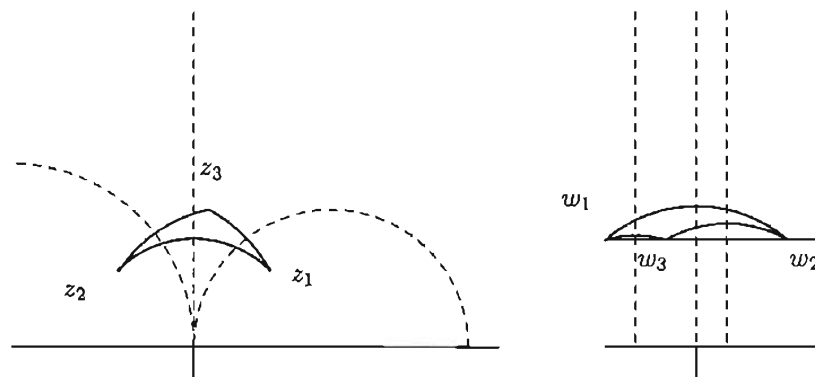


Figura 3.10: Bisectores perpendiculares que son tangentes.

Teorema 3.1.2 *Dado T un triángulo hiperbólico en el plano hiperbólico, entonces los bisectores perpendiculares de sus lados pertenecen a un haz.*

Antes de dar la demostración de este hecho, nótese que no siempre se cumple que los bisectores perpendiculares mencionados se intersectan (ver Figura 3.14). El tipo de haz dependerá de si dichos bisectores se intersectan, si son tangentes o si son disjuntos; lo cual determina el tipo de haz al que pertenecen.

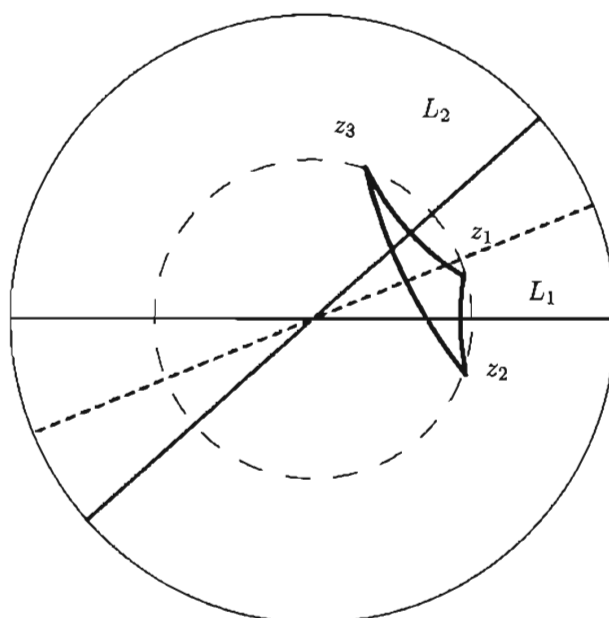


Figura 3.11: Bisectores perpendiculares de dos lados de T que se intersectan.

DEMOSTRACIÓN. Se comenzará con el caso en el que dos de los bisectores perpendiculares de los lados de T son tangentes. Sean L_1 y L_2 los bisectores perpendiculares de los lados $[z_1, z_2]$ y $[z_1, z_3]$, respectivamente. Al ser tangentes estas dos geodésicas, éstas generan un haz parabólico. Por la propiedad P6 de los haces, al ser L_1 bisector perpendicular de $[z_1, z_2]$, se tiene que z_1 y z_2 yacen en un horociclo en \mathcal{C} ; de la misma manera z_1 y z_3 también lo hacen. Ahora por la propiedad P1 de haces, se tiene que z_1, z_2 y z_3 yacen sobre el mismo horociclo en \mathcal{C} ; que a su vez, por la propiedad P6, se obtiene que los bisectores perpendiculares de los lados de T pertenecen al haz parabólico definido por L_1 y L_2 (ver Figuras 3.9 y 3.10).

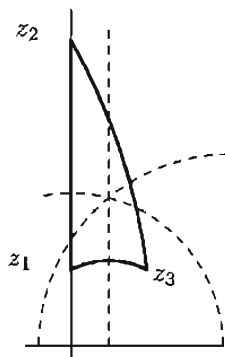


Figura 3.12: Bisectores perpendiculares que se intersectan en un punto en \mathbb{H}^2 .

Ahora, supóngase que dos de los bisectores perpendiculares de los lados de T se intersectan. Sin pérdida de generalidad, se trabaja en Δ . Sean L_1 y L_2 tal como en el caso anterior, es decir que son bisectores perpendiculares de dos de los lados de T . Como $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, éstas generan un haz elíptico. Con los mismos argumentos que en el caso anterior se sigue que los bisectores perpendiculares de los lados de T pertenecen a un haz elíptico (ver Figuras 3.11 y 3.12).

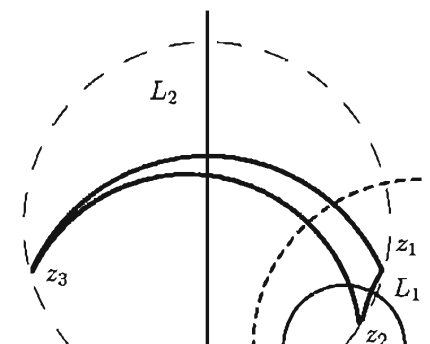


Figura 3.13: Bisectores perpendiculares de dos lados de T que son disjuntos.

Por último, supóngase que dos bisectores perpendiculares de los lados de T son disjuntos. La demostración es idéntica a las dos anteriores. En este caso, los bisectores perpendiculares pertenecen a un haz hiperbólico (ver Figuras 3.13 y 3.14).

□

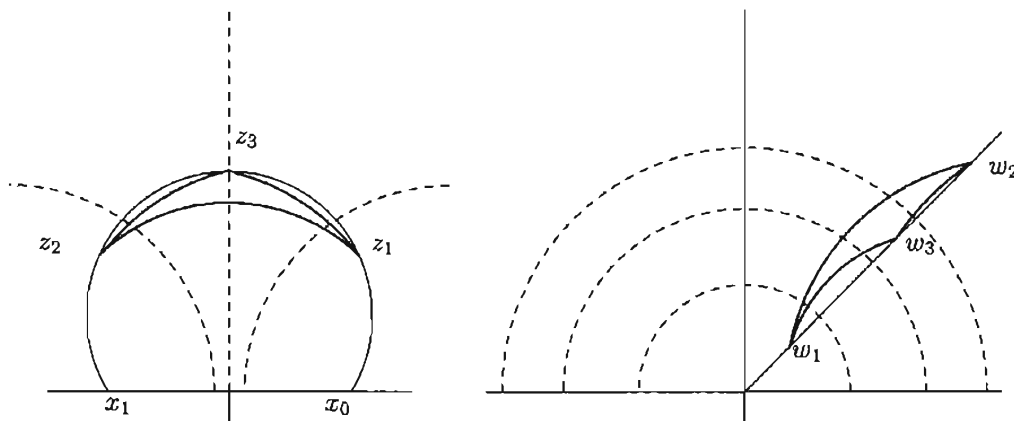


Figura 3.14: Bisectores perpendiculares disjuntos.

El Teorema 3.1.2 junto con la propiedad P6 de haces implican las siguientes observaciones interesantes sobre triángulos hiperbólicos y sus mediatrices.

Observación 1 Si z_1, z_2 y z_3 generan un círculo en \mathbb{H}^2 , entonces las mediatrices del triángulo hiperbólico generado por ellos se intersectan.

Observación 2 Si z_1, z_2 y z_3 generan un círculo tangente a \mathbb{R} en \mathbb{H}^2 , entonces las mediatrices del triángulo hiperbólico generado por ellos se intersectan en la recta al infinito.

Observación 3 Si z_1, z_2 y z_3 yacen en un círculo que no está totalmente contenido en la cerradura de \mathbb{H}^2 , entonces las mediatrices del triángulo hiperbólico generado por ellos son disjuntas.

Observación 4 Tres puntos que describen un triángulo hiperbólico no necesariamente están en un círculo euclidiano (ver Figuras 3.14 y 3.10).

3.2. Isometrías

En esta sección se discutirán las isometrías del plano hiperbólico. Como se vió en los Preliminares, la clasificación de éstas se puede hacer a partir de la localización de sus puntos fijos, o en función de la traza. El interés es ahora en caracterizarlas como composición de reflexiones en círculos y/o rectas. Antes de comenzar la discusión sobre esta caracterización, será necesario enunciar algunos resultados.

Teorema 3.2.1 $PSL(2, \mathbb{C}) = M(\widehat{\mathbb{R}^2})$.

Una demostración de este hecho se puede ver en [4] p. 70. A partir de este resultado se siguen algunos corolarios que se enuncian a continuación, y que son de gran utilidad para la descripción de las isometrías.

Corolario 3.2.2 *Sea φ una transformación del grupo general de Möbius $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ tal que fija puntualmente un círculo o una recta L , entonces φ es la reflexión sobre L o es la Identidad.*

DEMOSTRACIÓN. Se prueba en los cursos básicos de variable compleja que si una transformación de Möbius fija tres puntos, entonces dicha transformación es la Identidad. (cf. [1] p.25) Por lo que si $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$, φ es la Identidad. Si no pertenece a $PSL(2, \mathbb{C})$, entonces se toma $\sigma\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$, donde σ es la reflexión sobre L ; y usando el argumento anterior se tiene que $\sigma\varphi = Id$; por lo que $\varphi = \sigma$. □

Corolario 3.2.3 *Sean σ_1 y σ_2 las reflexiones sobre L_1 y L_2 , respectivamente, entonces σ_1 y σ_2 son conjugadas en $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$, en particular la transformación conjugante se puede tomar en $PSL(2, \mathbb{C})$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, tal que $T(L_1) = L_2$, entonces como $T^{-1}\sigma_2T$ fija puntualmente a L_1 , se sigue del corolario anterior que

$$T^{-1}\sigma_2T = \sigma_1.$$

□

Corolario 3.2.4 *Sea σ la reflexión sobre L un círculo o recta ortogonal al eje real, entonces la restricción de σ a \mathbb{H}^2 es una isometría hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, tal que T transforma a L en el eje imaginario, entonces si φ denota a la reflexión sobre el eje imaginario, de los corolarios anteriores se sigue que

$$\sigma = T^{-1} \varphi T,$$

por lo que σ es composición de isometrías que preservan \mathbb{H}^2 , que es lo que se quería probar. \square

Con los resultados expuestos se comenzará la discusión respecto a la descripción de las isometrías. En las siguientes secciones se probará que cualquier isometría en \mathbb{H}^2 (o Δ) es de la forma

$$\sigma_2 \sigma_1,$$

donde σ_j es la reflexión sobre un círculo o una recta L_j , $j = 1, 2$.

3.2.1. Isometrías Parabólicas

Se comenzará estudiando a las isometrías parabólicas. Como se vió en los Preliminares, una transformación de Möbius es parabólica si fija exactamente un punto (ver Definición 1); ahora se analizará más profundamente cómo son este tipo de transformaciones.

Proposición 3.2.5 *Si g es una transformación parabólica que actúa en \mathbb{H}^2 , entonces existe $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que*

$$h g h^{-1}(z) = z + t, t \in \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea z_0 el punto fijo de g ; si $z_0 = \infty$, g es una traslación. De otra manera, se toma $h \in PSL(2, \mathbb{R})$

$$h(z) = \frac{-1}{z - z_0}.$$

Usando el Lema 1.0.3 se tiene que $h g h^{-1}$ es una traslación. \square

Teorema 3.2.6 *Sea g una isometría, entonces g es parabólica si y sólo si es de la forma*

$$g = \sigma_2 \sigma_1,$$

donde σ_j es la reflexión sobre la geodésica L_j , y además L_1 y L_2 son paralelas.

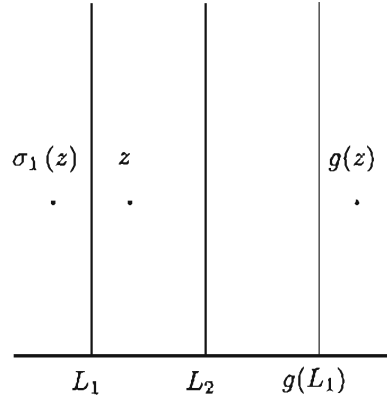


Figura 3.15: $g(z) = z + t$.

DEMOSTRACIÓN. Sea g parabólica; se comenzará analizando primero el caso $g(z) = z + t$, $t \in \mathbb{R}$. Claramente g se puede ver como la composición de las reflexiones sobre el eje imaginario (L_1) y la recta $\operatorname{Re} z = t/2$ (L_2). Evidentemente L_1 y L_2 son paralelas. Ahora, para el caso en general en el que h es parabólica con punto fijo z_0 ; se sabe por la Proposición 3.2.5 que existe $\varphi \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que

$$\varphi h \varphi^{-1}(z) = g(z),$$

donde g es como antes. Por lo tanto se tiene que

$$\varphi h \varphi^{-1}(z) = \sigma_2 \sigma_1(z),$$

donde σ_j es la reflexión sobre L_j , $j = 1, 2$, por lo que

$$h = \varphi^{-1} \sigma_2 \varphi \varphi^{-1} \sigma_1 \varphi(z).$$

En virtud del Corolario 3.2.2, $\varphi^{-1} \sigma_2 \varphi(z)$ y $\varphi^{-1} \sigma_1 \varphi(z)$ son las reflexiones sobre $\varphi(L_1)$ y $\varphi(L_2)$, respectivamente (que también son círculos o rectas). Por lo que se sigue el resultado para el caso general.

Ahora, si $g(z) = \sigma_2 \sigma_1(z)$, con σ_j la reflexión sobre L_j , $j = 1, 2$, con L_1 y L_2 geodésicas paralelas; entonces se toma $\varphi \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que envía el punto donde L_1 y L_2 son tangentes, z_0 en ∞ . De esta manera se obtiene

$$\varphi g \varphi^{-1}(z) = z + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $z_0 = \infty$ no es necesario conjugar. Por lo que claramente g es parabólica. \square

Ahora se analiza qué traslaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ son conjugadas entre sí (en $PSL(2, \mathbb{R})$).

Proposición 3.2.7 *Sea $g(z)$ en $PSL(2, \mathbb{R})$ parabólica, entonces g es conjugada en $PSL(2, \mathbb{R})$ a $z \rightarrow z + 1 \Leftrightarrow t > 0$, y g es conjugada en $PSL(2, \mathbb{R})$ a $z \rightarrow z - 1 \Leftrightarrow t < 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar esto se hará uso de las matrices en $SL(2, \mathbb{R})$ que representan a dos traslaciones g y h , dadas por $z \rightarrow z + t$ y $z \rightarrow z + k$, respectivamente. Si $z \rightarrow z + t$ es conjugada en $PSL(2, \mathbb{R})$ a $z \rightarrow z + k$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $ad - bc = 1$. Lo anterior ocurre si y sólo si

$$\begin{pmatrix} a & at + b \\ c & ct + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ck & b + dk \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Igualando las entradas se tiene que $c = 0$, y se sigue de la condición unimodular que $ad = 1$; por lo que a y d tienen el mismo signo. Como $at = dk$, entonces t y k deben tener también el mismo signo. Sólo resta probar que si $t > 0$, entonces g es conjugada a $z \rightarrow z + 1$. Para ver esto, también se hará uso de la representación matricial de las transformaciones. Esto se sigue ya que la siguiente igualdad se satisface

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{t} & b \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{t} & b \\ 0 & \sqrt{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que la ecuación es válida $\forall b \in \mathbb{R}$. Análogamente se obtiene que $z \rightarrow z + t$ es conjugada a $z \rightarrow z - 1$, si $t < 0$. \square

Dependiendo a cuál de estas dos traslaciones g es conjugada, se dirá que es positiva o negativa. Ahora se verán las condiciones que debe satisfacer g en términos de a, b, c y d para ser positiva. Sea z_0 el punto fijo de g , para obtener una traslación, la transformación que conjuga a g está dada por

$$\varphi(z) = \frac{-1}{z - z_0},$$

por lo que a nivel matricial se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -z_0 \end{pmatrix},$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$\begin{pmatrix} -c & -d \\ a - cz_0 & b - dz_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 - tz_0 \\ 1 & -z_0 \end{pmatrix},$$

por lo que $c = -t$, cuando $a + d = 2$. Para el caso en que $a + d = -2$ basta con cambiarle el signo a todas las entradas de la matriz que representa a g ; en cuyo caso se obtiene $c = t$. Por lo que se ha probado el siguiente resultado

Proposición 3.2.8 *Sea $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ parabólica, entonces g es positiva si y sólo si $\chi = 2$ y $c < 0$ (o si $\chi = -2$ y $c > 0$), donde χ denota la traza de una de las dos matrices asociadas a g .*

Observación 5 *g es negativa si y sólo si $\chi = 2$ y $c > 0$ (o si $\chi = -2$ y $c < 0$).*

Ahora, dada g una isometría parabólica en general, se tiene que el haz parabólico asociado a ella es el haz determinado por su punto fijo. Es decir, es el conjunto de geodésicas que tienen a dicho punto como uno de sus pies. En todos los casos cualquiera de las dos geodésicas L_1 o L_2 es un elemento arbitrario del haz y la restante queda determinada por la primera y g ; pues L_2 resulta ser la mediatriz de L_1 y $g(L_1)$ como se verá a continuación.

Se considera primero el caso $g(z) = z + t$; sin pérdida de generalidad, se pueden tomar L_1 como el eje imaginario. Si $g(L_1) = L$, y σ_1 es la reflexión sobre L_1 , claramente L está dada por $Re z = t$; y $Re z = t/2$ es la mediatriz de L_1 y $g(L_1)$. Nótese que ésta es la única geodésica que permite definir a la g como $\sigma_2 \sigma_1$, donde σ_2 es la reflexión sobre una geodésica paralela a L_1 . Por lo tanto, se tiene el resultado para $z \rightarrow z + t$.

En general, si g es parabólica con punto fijo z_0 , se toma L_1 como cualquier geodésica con z_0 como uno de sus pies y σ_1 la reflexión sobre L_1 . Luego se conjuga con φ una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ que envía a z_0 en ∞ . Se

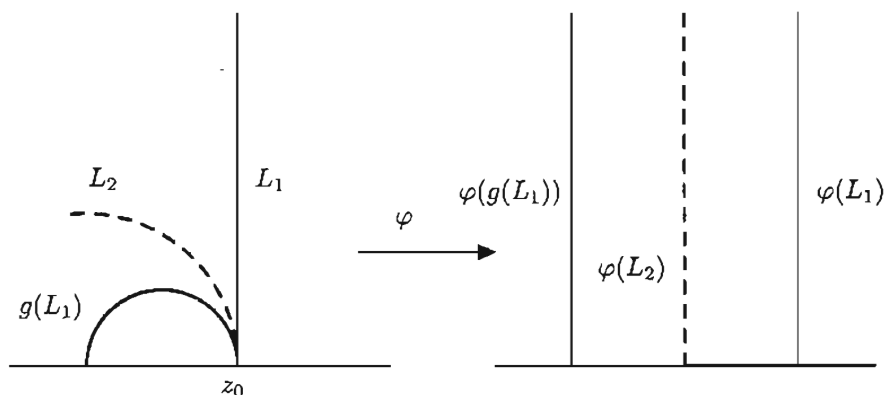


Figura 3.16: $h(z) = \varphi g \varphi^{-1}(z)$.

observa entonces que $\varphi(L_1)$ y $\varphi(g(L_1))$ son geodésicas paralelas con punto común ∞ , es decir se tiene el caso anterior.

Sea $h(z) = \varphi g \varphi^{-1}(z)$; esta transformación es una traslación y por el primer caso, si se toma $\varphi(L_2)$ como la mediatriz de $\varphi(L_1)$ y $h(\varphi(L_1)) = \varphi(g(L_1))$, se tiene

$$h = \overline{\sigma_2} \overline{\sigma_1},$$

donde $\overline{\sigma_j}$ es la reflexión sobre la geodésica $\varphi(L_j)$. Por lo que usando el corolario 3.2.2 se tiene que

$$\begin{aligned} g &= \varphi^{-1} h \varphi \\ &= \varphi^{-1} \overline{\sigma_2} \varphi \varphi^{-1} \overline{\sigma_1} \varphi \\ &= \varphi^{-1} \overline{\sigma_2} \varphi \sigma_1, \end{aligned}$$

donde $\varphi^{-1} \overline{\sigma_2} \varphi(z)$ es la reflexión sobre L_2 . Por lo que se tiene que

$$g = \sigma_2 \sigma_1,$$

donde σ_j es la reflexión sobre la geodésica L_j , y claramente L_1 y L_2 son geodésicas paralelas con punto común z_0 . Al igual que en el caso anterior L_2

es única.

Se prueba ahora, que dada una geodésica M que pasa por el punto fijo de una transformación parabólica g , entonces los puntos que se desplazan una menor distancia en cualquier geodésica ortogonal a M son precisamente aquellos que son la intersección de dichas geodésicas con M .

Proposición 3.2.9 *Si g es parabólica con punto fijo w y L es cualquier geodésica que tiene a w como uno de sus pies, entonces para cualquier $z \in \mathbb{H}^2$*

$$\rho(z, g(z)) \geq \rho(z', g(z')),$$

donde z' es el punto en L donde $[z, z']$ es ortogonal a L

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, se puede tomar $g(z) = z + 1$, pues $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa como grupo de isometrías conformes. En este caso, claramente $w = \infty$ es el punto fijo. Sean L el eje imaginario y $z \in \mathbb{H}^2$. Claramente, $z' = i|z|$; aplicando g se tiene

$$g(z') = i|z| + 1.$$

Se calculan $\cosh \rho(z, g(z))$ y $\cosh \rho(z', g(z'))$

$$\cosh \rho(z, g(z)) = 1 + \frac{1}{2y^2} \geq \cosh \rho(z', g(z')) = 1 + \frac{1}{2|z|^2}.$$

□

3.2.2. Isometrías Elípticas

En esta sección se estudiarán las isometrías elípticas; esto se hará en el modelo Δ . Los resultados aquí expuestos se seguirán en general en ambos modelos ya que $PSL(2, \mathbb{R})$ y la transformación de Cayley son isometrías conformes. Se recuerda que una transformación es elíptica si fija exactamente 2 puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ y es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a una transformación de la forma $z \rightarrow e^{i\theta}z$, $\theta \in (0, 2\pi)$.

Teorema 3.2.10 *Sea g una isometría, entonces g es elíptica si y sólo si g es de la forma*

$$g = \sigma_2 \sigma_1,$$

donde σ_j es la reflexión sobre la geodésica L_j , y además $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

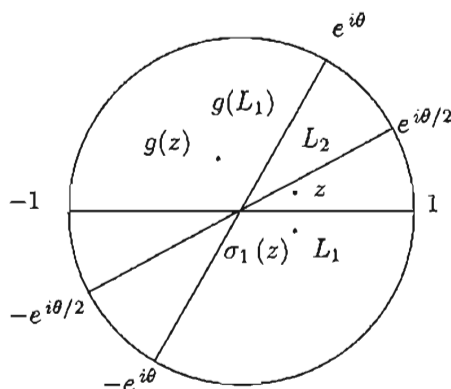


Figura 3.17: $g(z) = e^{i\theta} z$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g(z)$ una isometría elíptica con punto fijo $z_0 \in \mathbb{H}^2$. Sea h la isometría de Δ en sí mismo que resulta de conjugar a g con una transformación tal que envía a z_0 en i y luego con la transformación de Cayley. Es fácil checar entonces que h tiene la forma

$$h(z) = e^{i\theta} z, \text{ para alguna } \theta \in (0, 2\pi).$$

Se toma entonces a L_1 y L_2 como los diámetros $[-1, 1]$ y $[-e^{i\theta/2}, e^{i\theta/2}]$; la composición de las reflexiones sobre ellas es justamente h . Conjugando, como en el caso parabólico se sigue que $g = \sigma_2 \sigma_1$.

Ahora, si $g = \sigma_2 \sigma_1$, con σ_j la reflexión sobre L_j ; y $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Como $\{z_0\} = L_1 \cap L_2$ es un punto fijo de g en el plano hiperbólico, g es necesariamente elíptica. □

Nótese, además, que en la demostración de la proposición anterior L_1 y L_2 determinan un haz elíptico, pues $L_1 \cap L_2$ es justamente el origen. Al igual que en el caso parabólico L_2 es mediatriz de L_1 y $g(L_1)$; lo único que es necesario mencionar es que se elige dicha mediatriz como la que se encuentra entre ellas, recorriendo el ángulo en sentido positivo, comenzando en L_1 . En

general se puede elegir a L_1 de manera arbitraria, y L_2 queda totalmente determinada por g . Cabe mencionar que al igual que el caso anterior, dada g una isometría elíptica, el haz elíptico asociado a ella es el conformado por todas las geodésicas que pasan por su punto fijo.

Ahora, sea g una transformación elíptica, tal que fija a $z_0 \in \mathbb{H}^2$. Al ser g elíptica, se sabe que \bar{z}_0 es su otro punto fijo y, además, que es conjugada a una transformación h de la forma

$$h(z) = kz, \quad |k| = 1.$$

Una transformación conjugante está dada por $\varphi(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, es decir

$$h(z) = \varphi g \varphi^{-1}(z).$$

De aquí se tiene que

$$h \varphi(z) = \varphi g(z),$$

de donde se obtiene

$$k \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right) = \frac{g(z) - z_0}{g(z) - \bar{z}_0}, \quad k = e^{i\theta}$$

y

$$\frac{g(z) - z_0}{z - z_0} = e^{i\theta} \left(\frac{g(z) - \bar{z}_0}{z - \bar{z}_0} \right).$$

Por lo que al tomar el límite cuando $z \rightarrow z_0$, se tiene que

$$g'(z_0) = e^{i\theta},$$

ya que z_0 es el punto fijo de g .

Al ángulo θ se le llama el ángulo de rotación de g . Claramente, g está totalmente determinada por su punto fijo y su ángulo de rotación. Como la traza es invariante bajo conjugación en $GL(2, \mathbb{C})$, se tiene que

$$\text{traza}^2 G = 4 \cos^2 \theta/2,$$

donde G es la matriz asociada a g ; esto se sigue ya que la matriz asociada a $h(z)$ es

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 + i \operatorname{sen} \theta/2 & 0 \\ 0 & \cos \theta/2 - i \operatorname{sen} \theta/2 \end{pmatrix}.$$

Se ha probado entonces que

$$\Rightarrow \operatorname{traza}^2 G = 4 \cos^2 \theta/2,$$

donde θ es el ángulo de rotación de g .

Proposición 3.2.11 Sean g y h dos transformaciones elípticas con ángulos de rotación θ y ϕ respectivamente, entonces g y h son conjugadas si y sólo si $\theta = \phi$.

DEMOSTRACIÓN. Dadas g y h tales transformaciones elípticas; por medio de traslaciones y homotecias en $PSL(2, \mathbb{R})$ es fácil ver que existen transformaciones de Möbius tales que sus composiciones con g y h , respectivamente, son transformaciones elípticas con i como su punto fijo en \mathbb{H}^2 . Se denotarán éstas por g_1 y h_1 , respectivamente. Ahora, al conjugar estas últimas con la transformación de Cayley φ , se obtienen dos rotaciones

$$g_2 = \varphi g_1 \varphi^{-1} \text{ y } h_2 = \varphi h_1 \varphi^{-1},$$

Por la conformalidad de las transformaciones de Möbius y de la transformación de Cayley; g_2 y h_2 tienen ángulos de rotación θ y ϕ . Finalmente, como g_2 y h_2 conmutan, el resultado se obtiene de manera directa. Es decir g_2 y h_2 son conjugadas si y sólo si $\theta = \phi$. □

3.2.3. Isometrías Hiperbólicas

Por último se estudiarán las isometrías hiperbólicas, esto se hará en \mathbb{H}^2 . Al igual que en los casos anteriores, se estudiará un cierto tipo de transformación y el caso en general se seguirá del hecho de que $PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo de isometrías conformes.

Teorema 3.2.12 Sea g una isometría, entonces g es hiperbólica si y sólo si g es de la forma

$$g = \sigma_2 \sigma_1,$$

donde σ_j es la reflexión sobre la geodésica L_j , y además $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Sea g una isometría hiperbólica con puntos fijos x_0 y x_1 , $x_0 > x_1$. Se conjuga a g con la transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$

$$\phi(z) = \frac{z - x_0}{z - x_1}, \quad (3.6)$$

de donde se obtiene

$$h(z) = \phi g \phi^{-1}(z) = kz, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

A h se le puede ver como la composición de las reflexiones sobre las geodésicas L_1 y L_2 dadas por $|z| = 1$ y $|z| = \sqrt{k}$, pues estas reflexiones están dadas por

$$\sigma_1(z) = \frac{1}{\bar{z}} \quad \text{y} \quad \sigma_2(z) = \frac{k}{\bar{z}},$$

de donde claramente $h(z) = \sigma_2 \sigma_1(z) = kz$, y evidentemente $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. El caso en general se sigue por conjugación de manera análoga al caso parabólico. Por lo tanto se tiene que si g es hiperbólica, entonces se puede expresar como la composición de dos reflexiones sobre geodésicas disjuntas.

Ahora, sean L_1 y L_2 dos geodésicas disjuntas en \mathbb{H}^2 , y $g = \sigma_2 \sigma_1$; σ_j la reflexión sobre L_j . Se toma entonces $\varphi \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que envía a L_1 a la geodésica $|z| = 1$ y a L_2 a la geodésica $|z| = k$, $k > 0$. Esto siempre es posible, pues basta con tomar la transformación que envía la ortogonal común de L_1 y L_2 al eje imaginario positivo y luego, si es necesario, se aplica una homotecia.

Ahora se observa la composición de las reflexiones sobre L_1 y L_2 . Como en el caso parabólico, se obtiene que

$$h(z) = \varphi \sigma_2 \varphi^{-1} \varphi \sigma_1 \varphi^{-1}(z) = k^2 z,$$

por lo que se tiene que g es una transformación hiperbólica, pues es conjugada a una homotecia. □

Al igual que en los dos casos anteriores, el haz asociado a g es el determinado por las geodésicas con las que se define. En este caso, se define el eje de g como el eje de dicho haz; es decir, la única geodésica ortogonal a todas las geodésicas en el haz, y que termina en los puntos fijos de g ; se denotará dicho eje por A_g . Claramente, A_g es la única geodésica g -invariante. También, igual que en los casos anteriores se puede escoger una de las dos

geodésicas de manera arbitraria, y la restante queda determinada por la g (L_2 es la mediatriz de L_1 y $g(L_1)$).

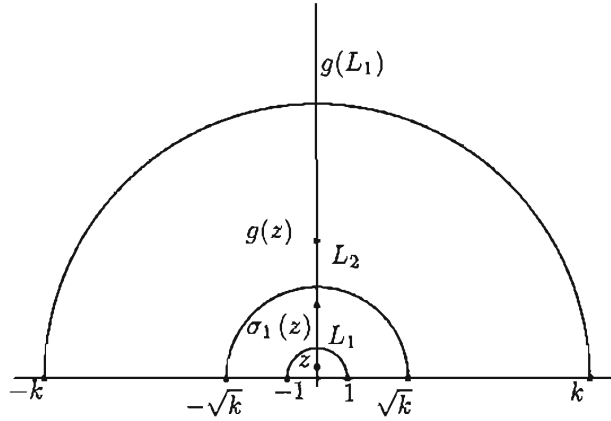


Figura 3.18: $g(z) = kz$.

Sea $g(z) = kz$, $k > 0$, como se vió arriba, g está determinada por las reflexiones sobre $|z| = 1$ y $|z| = \sqrt{k}$. Ahora, al aplicar la fórmula (3.5) para z y $g(z)$ se tiene

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) = \frac{|z - kz|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im}(kz))^{1/2}} = \frac{|z| |1 - k|}{2y \sqrt{k}}. \tag{3.7}$$

La expresión anterior alcanza su mínimo en el eje imaginario, que en este caso es el eje de g ; pues $|z| \geq y$, $\forall z \in \mathbb{H}^2$. Esto sucede también en el caso general pues si $g = \varphi^{-1} h \varphi$ con $\varphi(z) = w$ ($\varphi \in PSL(2, \mathbb{R})$), entonces se tiene

$$\begin{aligned} & \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(w, h(w)) \right) \\ &= \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(\varphi(z), h(\varphi(z))) \right) \\ &= \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, \varphi^{-1} h(\varphi(z))) \right) \\ &= \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right). \end{aligned}$$

Claramente, también se tiene que

$$\varphi(A_g) = A_h, \quad (3.8)$$

donde A_g denota al eje de g . Por lo que se ha probado que los puntos que se desplazan “menos” son aquellos que se encuentran en el eje de la transformación.

Ahora, para una isometría hiperbólica g en general se define la *longitud de traslación* T de g como

$$T = \inf \rho(z, g(z)),$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los puntos $z \in \mathbb{H}^2$. Claramente T es un valor estrictamente positivo, pues si g es conjugada en $PSL(2, \mathbb{R})$ a $h(z) = kz$, entonces por la observación anterior

$$\rho(z, g(z)) \geq \log k, \quad k \in \mathbb{R}^+, \forall z \in \mathbb{H}^2,$$

ya que $\rho(ti, kti) = \rho(i, ki) = \log k$, por lo que $T > 0$.

Obsérvese también que usando (3.7) se sigue que

$$\sinh \left(\frac{1}{2} T \right) = \frac{|1 - k|}{2\sqrt{k}}. \quad (3.9)$$

Más aún, la traza determina la longitud de traslación

Teorema 3.2.13 *Si g es una isometría hiperbólica con longitud de traslación T , entonces*

$$\cosh \left(\frac{1}{2} T \right) = \frac{|\text{traza}(g)|}{2}. \quad (3.10)$$

DEMOSTRACIÓN. De la expresión (3.9) se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned}
 \cosh^2 \left(\frac{1}{2} T \right) &= 1 + \sinh^2 \left(\frac{1}{2} T \right) \\
 &= 1 + \left(\frac{|1 - k|^2}{4k} \right) \\
 &= \frac{(1 + k)^2}{4k} \\
 &= \frac{\text{traza}^2(g)}{4}.
 \end{aligned}$$

Esto último debido a que la traza al cuadrado de la matriz asociada a g es igual a

$$(\sqrt{k} + 1/\sqrt{k})^2 = \frac{(1 + k)^2}{k}.$$

Por lo tanto

$$\cosh \left(\frac{1}{2} T \right) = \frac{|\text{traza}(g)|}{2}.$$

□

Ahora se verá otra manera de expresar las isometrías hiperbólicas; esta se logra a partir de involuciones, o isometrías elípticas de orden 2.

Observación 6 Si g es elíptica de orden 2 con punto fijo en el eje imaginario positivo, entonces

$$g(z) = \beta/z.$$

La observación anterior se sigue del hecho de que si

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

como $0 \mapsto \infty$ e $\infty \mapsto 0$, claramente se tiene que $a, d = 0$.

Observación 7 Si g es elíptica de orden 2 tal que fija it , entonces g es tal que

$$z \mapsto -t^2/z$$

Esta observación es clara pues se tiene

$$\beta/it = it.$$

Teorema 3.2.14 *Dada g una isometría, entonces g es hiperbólica si y sólo si se puede expresar de la siguiente forma*

$$g(z) = \varepsilon_2 \varepsilon_1,$$

donde ε_j , $j = 1, 2$ son transformaciones elípticas de orden 2 alrededor de puntos v_1, v_2 en el eje de g .

DEMOSTRACIÓN. Sea g una isometría hiperbólica; se comenzará con el caso $g(z) = kz$, $k \in \mathbb{R}^+$. Se toman $\varepsilon_1(z) = -1/z$ y $\varepsilon_2(z) = -k/z$, de donde es claro que $g = \varepsilon_2 \varepsilon_1(z)$. La idea geométrica es clara, pues ε_1 fija a i , y como ε_2 debe fijar el punto medio de $[i, ki]$, i.e. \sqrt{ki} , de las observaciones anteriores se sigue que en efecto ε_2 tiene esa forma.

Ahora el caso general, sea g una isometría hiperbólica y A_g su eje; sean v_1 y $g(v_1) \in A_g$. Al igual que antes, se puede suponer que x_0 y x_1 son los pies de A_g , y además que $x_0 > x_1$; usando la ϕ descrita en (3.6) se conjuga a g para obtener $h(z) = kz$, que es justamente el caso anterior.

Por lo que se tiene que

$$h(z) = \phi g \phi^{-1}(z) = \bar{\varepsilon}_2 \bar{\varepsilon}_1(z),$$

donde $\bar{\varepsilon}_j$, $j = 1, 2$ es una transformación elíptica de orden 2 alrededor de un punto $v_j \in A_h$. De lo anterior es claro que

$$g(z) = \phi^{-1} \bar{\varepsilon}_2 \phi \phi^{-1} \bar{\varepsilon}_1 \phi,$$

donde $\phi^{-1} \bar{\varepsilon}_j \phi$ es una transformación elíptica de orden 2 alrededor del punto $\phi^{-1}(v_j)$. Por lo que tomando

$$\varepsilon_j = \phi \bar{\varepsilon}_j \phi^{-1}, \quad j = 1, 2,$$

se tiene

$$g(z) = \varepsilon_2 \varepsilon_1,$$

que es justamente el resultado deseado.

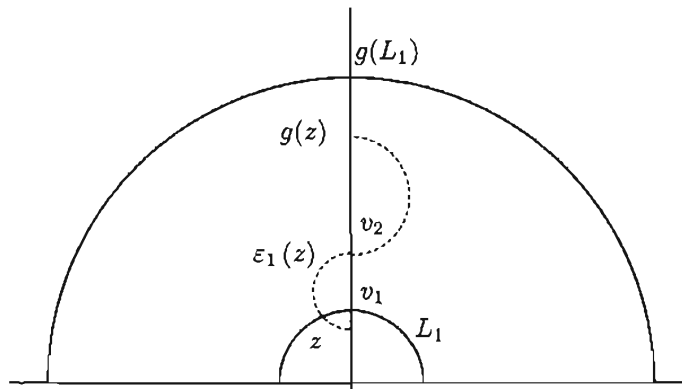


Figura 3.19: $g(z) = \varepsilon_2 \varepsilon_1(z)$.

Ahora, si $g = \varepsilon_2 \varepsilon_1$, con ε_j una transformación elíptica de orden 2 alrededor de un punto $v_j \in \mathbb{H}^2$, $j = 1, 2$; se observa a la geodésica $[v_1, v_2]$. Supóngase que a y b son los pies de dicha geodésica. Claramente $\varepsilon_j(a) = b$ y $\varepsilon_j(b) = a$, $j = 1, 2$. Por lo que

$$\varepsilon_2 \varepsilon_1(a) = a \text{ y } \varepsilon_2 \varepsilon_1(b) = b.$$

Es decir, $g(a) = a$ y $g(b) = b$, por lo que g es una isometría hiperbólica. Y además, es claro que la geodésica determinada por v_1 y v_2 es A_g ; el eje de g .

□

Observación 8 Si ε_1 es elíptica de orden 2, con punto fijo t_i ; entonces existe ε_2 elíptica de orden 2 con punto fijo en el eje imaginario positivo tal que $\varepsilon_2 \varepsilon_1(z) = kz$.

Esto es debido a que

$$\varepsilon_1(z) = \varepsilon_2(kz),$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$\frac{-t^2}{z} = \frac{m}{kz},$$

y esto a su vez es si y sólo si

$$m = -kt^2.$$

Observación 9 Si $g = \varepsilon_2 \varepsilon_1$, g hiperbólica con eje A_g , entonces el punto fijo v_2 de ε_2 es el punto medio de v_1 y $g(v_1)$ (donde v_1 es el punto fijo de ε_1).

Nótese que $T = 2\rho(v_1, v_2)$, pues v_2 es el punto medio de $[v_1, g(v_1)]$ que al yacer en el eje de g , se encuentran sobre una geodésica y por lo tanto es ahí donde se minimiza la distancia. Además, también se tiene

$$g(v_1) = \varepsilon_2 \varepsilon_1(v_1) = \varepsilon_2(v_1).$$

De esto último es claro que al iterar la g , los puntos del eje son recorridos en el mismo sentido en el que se recorren para ir de v_1 a v_2 ; por lo que el rayo de v_1 a v_2 debe terminar en el punto fijo de g que es el atractor.

CAPÍTULO 4

La función desplazamiento

En este último capítulo se discutirá la *función desplazamiento* de una isometría del plano hiperbólico. Esta permitirá estudiar y analizar el comportamiento de las isometrías.

Definición 18 Dada g una isometría del plano hiperbólico, se define su *función de desplazamiento* como la que a cada $z \in \mathbb{H}^2$ le asigna el valor

$$\rho(z, g(z)).$$

Este último valor evidentemente es el mismo que $\rho(z, g^{-1}(z))$, pues g es una isometría. La manera conveniente (como se verá en el Teorema 4.0.20) en la que se estudiará la función de desplazamiento será por medio de la función

$$z \mapsto \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right).$$

Con esta función se hace un análisis de las isometrías del plano hiperbólico con un enfoque geométrico de ellas. Para tener un análisis completo de esta función es necesario discutir primero el *kernel* de *Poisson*; esto se hace a continuación.

Se comenzará observando a la función $f_\zeta : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f_\zeta(z) = \frac{\zeta + z}{\zeta - z}, \quad z \in \Delta \text{ y } \zeta \in \partial\Delta.$$

Se checa fácilmente que $f_\zeta(-i) = -2ki \operatorname{Re} \zeta$, $f_\zeta(i) = 2mi \operatorname{Re} \zeta$, $f_\zeta(1) = -2ni \operatorname{Im} \zeta$, con $k, m, n \in \mathbb{R}^+$, $f_\zeta(\zeta) = \infty$ y $f_\zeta(0) = 1$; claramente la imagen de $\partial\Delta$ bajo f_ζ es el eje imaginario y la imagen de Δ es

$$f_\zeta(\Delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}. \quad (4.1)$$

Definición 19 *El kernel de Poisson en Δ se define como la función de $\Delta \times \partial\Delta$ a \mathbb{R} dada por*

$$P_{\Delta}(z, \zeta) = \operatorname{Re} [f_{\zeta}(z)] = \operatorname{Re} \left[\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right].$$

Un sencillo cálculo muestra que

$$P_{\Delta}(z, \zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2}. \quad (4.2)$$

Con ζ fijo, la imagen bajo f_{ζ}^{-1} de las rectas verticales en \mathbb{H}^2 son círculos tangentes a $\partial\Delta$ en ζ . Esto es debido a que f_{ζ} es una transformación de Möbius por lo que la imagen de círculos y/o rectas son círculos y/o rectas, y además se sabe que $f_{\zeta}(\zeta) = \infty$.

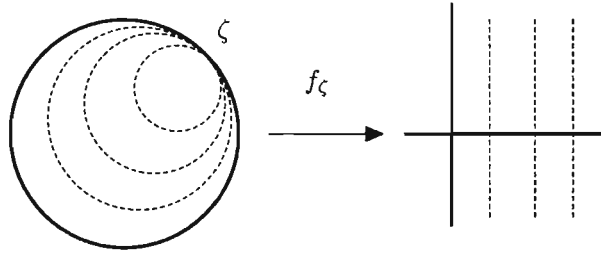


Figura 4.1: $f_{\zeta}(z) = \frac{\zeta + z}{\zeta - z}$.

Ahora, como se vió en los Preliminares (ver Teorema 1.0.2), la forma general de una transformación de Möbius que preserva Δ es

$$g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

De aquí se obtiene el siguiente lema

Lema 4.0.15 *Si g es una transformación de Möbius que preserva Δ , entonces se satisface la siguiente relación*

$$1 - |g(z)|^2 = |g'(z)|(1 - |z|^2).$$

DEMOSTRACIÓN. A partir de la forma general de una transformación de Möbius que preserva Δ , un cálculo sencillo muestra que

$$1 - |g(z)|^2 = (|cz + \bar{a}|^2 - |az + \bar{c}|^2)|g'(z)|,$$

lo cual es igual a

$$|g'(z)|(1 - |z|^2).$$

□

Lema 4.0.16 *Si g es una transformación de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$, entonces se satisface la siguiente relación para $z, \zeta \in \mathbb{C}$*

$$|g(z) - g(\zeta)|^2 = |z - \zeta|^2 |g'(z)| |g'(\zeta)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $g(z)$ una transformación de Möbius.

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} |g(z) - g(\zeta)|^2 &= \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \right|^2 \\ &= |(az + b)(c\zeta + d) - (a\zeta + b)(cz + d)|^2 |g'(z)| |g'(\zeta)| \\ &= |adz + bc\zeta - bcz - ad\zeta|^2 |g'(z)| |g'(\zeta)| \\ &= |z - \zeta|^2 |g'(z)| |g'(\zeta)|, \end{aligned}$$

que es justo lo que se quería probar.

□

Utilizando (4.2) y estos dos lemas se tiene que

$$1 - |z|^2 = \frac{1 - |g(z)|^2}{|g'(z)|}, \quad \text{y} \quad |z - \zeta|^2 = \frac{|g(z) - g(\zeta)|^2}{|g'(z)| |g'(\zeta)|}.$$

De donde claramente se obtiene la siguiente relación

$$P_{\Delta}(g(z), g(\zeta))|g'(\zeta)| = P_{\Delta}(z, \zeta). \quad (4.3)$$

Ahora, el kernel de Poisson para \mathbb{H}^2 con $\zeta \in \widehat{\mathbb{R}}$ se define como

$$P(z, \zeta) = \begin{cases} y, & \text{si } \zeta = \infty, \\ \frac{y}{|z - \zeta|^2}, & \text{si } \zeta \neq \infty. \end{cases} \quad (4.4)$$

Ahora se quiere ver la relación entre el kernel de Poisson en Δ y \mathbb{H}^2

Lema 4.0.17 Si $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ y $\zeta \in \mathbb{R}$, $\zeta \neq \infty$, entonces

$$P(z, \zeta) = P_{\Delta}(\varphi(z), \varphi(\zeta)) |\varphi'(\zeta)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Se calcula $P_{\Delta}(\varphi(z), \varphi(\zeta))$, con $z = x+iy$, utilizando (4.2)

$$\begin{aligned} P_{\Delta}(\varphi(z), \varphi(\zeta))|\varphi'(\zeta)| &= \left| \frac{1}{(\zeta+i)^2} \right| \left(\frac{1 - \left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2}{\left| \frac{z-i}{z+i} - \frac{\zeta-i}{\zeta+i} \right|^2} \right) \\ &= \left| \frac{1}{(\zeta+i)^2} \right| \left(\frac{\frac{|z+i|^2 - |z-i|^2}{|z+i|^2}}{\frac{|(z-i)(\zeta+i) - (z+i)(\zeta-i)|^2}{|z+i|^2|\zeta+i|^2}} \right) \\ &= \left| \frac{1}{(\zeta+i)^2} \right| \left(\frac{(|z+i|^2 - |z-i|^2)|\zeta+i|^2}{|(z-i)(\zeta+i) - (z+i)(\zeta-i)|^2} \right) \\ &= \frac{-2i(z-\bar{z})}{4|z-\zeta|^2} \\ &= \frac{y}{|z-\zeta|^2}. \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado es interesante, aunque no se utilizará

Proposición 4.0.18 Si $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ y $\zeta, g(\zeta) \neq \infty$, entonces

$$P(z, \zeta) = P(g(z), g(\zeta)) |g'(\zeta)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ con } ad - bc = 1.$$

Nótese que

$$\text{Im } g(z) = \frac{1}{2i} (g(z) - \overline{g(z)}) = \frac{1}{2i} \left(\frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{|cz + d|^2} \right) = \frac{y}{|cz + d|^2}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} |g(z) - g(\zeta)|^2 &= \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \right|^2 \\ &= \left| \frac{(az + b)(c\zeta + d) - (a\zeta + b)(cz + d)}{(cz + d)(c\zeta + d)} \right|^2 \\ &= \left| \frac{z - \zeta}{(cz + d)(c\zeta + d)} \right|^2. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} P(g(z), g(\zeta)) |g'(\zeta)| &= \frac{\text{Im } g(z)}{|g(z) - g(\zeta)|^2} \\ &= \frac{y}{|z - \zeta|^2} \\ &= P(z, \zeta). \end{aligned}$$

□

Por último se enuncia el siguiente resultado que relaciona las expresiones del kernel de Poisson de ambos modelos.

Lema 4.0.19 Si $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$, entonces

$$P_{\Delta}(z, 1) = P(\varphi^{-1}(z), \infty).$$

DEMOSTRACIÓN. Se comienza observando que φ^{-1} está dada por

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{i(z+1)}{-z+1}.$$

Ahora, se calculan ambos lados de la expresión; se comienza con el lado izquierdo, usando (4.2)

$$P_{\Delta}(z, 1) = \frac{1-|z|^2}{|z-1|^2}.$$

Ahora se calcula el lado derecho

$$\begin{aligned} P(\varphi^{-1}(z), \infty) &= \operatorname{Im}(\varphi^{-1}(z)) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{iz+i}{-z+1} - \frac{\overline{iz+i}}{-z+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2-2|z|^2}{|z-1|^2} \right) \\ &= \frac{1-|z|^2}{|z-1|^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P_{\Delta}(z, 1) = P(\varphi^{-1}(z), \infty). \quad (4.5)$$

□

Ahora se comenzará a analizar y discutir la función desplazamiento de g , en función del tipo de isometría del plano hiperbólico que ésta sea.

Teorema 4.0.20 *Sea g una isometría conforme del plano hiperbólico.*

(i) *Si g es hiperbólica con eje A y longitud de traslación T , entonces*

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) = \cosh \rho(z, A) \sinh \left(\frac{1}{2} T \right).$$

(ii) *Si g es elíptica con punto fijo $v \in \mathbb{H}^2$ y ángulo de rotación θ , entonces*

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) = \sinh \rho(z, v) |\sen \theta/2|.$$

(iii) *Si g es parabólica con punto fijo v , entonces*

$$P(z, v) \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) = k.$$

donde k es una constante, y $P(z, v)$ denota el kernel de Poisson.

DEMOSTRACIÓN. Se empezará probando (i), donde a su vez se comenzará demostrando la igualdad para $g(z) = kz$, $k > 1$; y entonces si $z = x + iy$ de (3.5) se tiene

$$\begin{aligned} \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) &= \frac{|z - kz|}{2y\sqrt{k}} \\ &= \frac{|z||1 - k|}{2y\sqrt{k}} \\ &= \frac{|z|}{2y} (\sqrt{k} - 1/\sqrt{k}). \end{aligned}$$

Ahora, del Teorema 3.2.13

$$\frac{(\sqrt{k} - 1/\sqrt{k})^2}{4} = \frac{(\sqrt{k} + 1/\sqrt{k})^2}{4} - 1 = \frac{|\text{traza}(g)|^2}{4} - 1 = \sinh^2 \left(\frac{1}{2} T \right).$$

Además como A es el eje imaginario, del Corolario 2.1.2 y la Figura 2.1 se tiene que

$$\cosh \rho(z, A) = \frac{|z|}{y}.$$

Por lo tanto se tiene

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) = \cosh \rho(z, A) \sinh \left(\frac{1}{2} T \right),$$

que es lo que se quería probar.

El caso general se prueba a continuación. Sea h una transformación hiperbólica con eje A_h y longitud de traslación T_h . Como se vió en la sección referente a isometrías hiperbólicas, si $h = \varphi g \varphi^{-1}$, donde $\varphi \in PSL(2, \mathbb{R})$ y $\varphi(z) = w$ se tiene

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(w, h(w)) \right) = \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right).$$

Sólo falta probar que

$$\cosh \rho(z, A_g) = \cosh \rho(w, A_h), \quad (4.6)$$

y

$$\sinh \left(\frac{1}{2} T_g \right) = \sinh \left(\frac{1}{2} T_h \right). \quad (4.7)$$

El caso de (4.6) es claro pues $\varphi(A_g) = A_h$ como se vió en (3.8), y φ es una isometría. La relación (4.7) se sigue de la forma en que se define T que es claramente invariante bajo conjugación con elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$. Por lo que se tiene el resultado para el caso general.

Igual que en el caso de (i), se comenzará probando (ii) para un caso particular y luego se verá el caso general. Sea $g(z) = e^{i\theta} z$ actuando en Δ . Como claramente

$$\rho(z, g(z)) = \rho(z, e^{i\theta} z) = \rho(z, e^{(2\pi-\theta)i} z) = \rho(z, g^{-1}(z)),$$

sin pérdida de generalidad se puede suponer $0 < \theta < \pi$. Se observa entonces al triángulo con vértices $0, z$ y $g(z)$. Claramente el ángulo en 0 es θ , pues es el ángulo de rotación de g . Este triángulo resulta tener el mismo ángulo en los otros dos vértices como se verá a continuación. Para esto, se observa que el bisector perpendicular del lado $[z, g(z)]$ pasa por 0 . Y, además, la reflexión sobre dicho bisector es una simetría del triángulo construido (ya

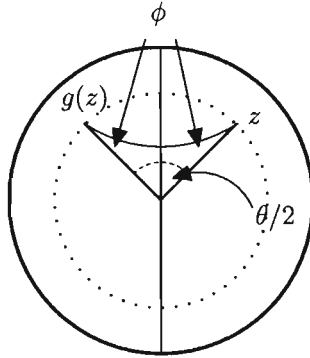


Figura 4.2: Triángulo con vértices $0, z, g(z)$.

que pasa por el punto medio de $[z, g(z)]$). Por lo que claramente el ángulo en z y en $g(z)$ son el mismo. Sean entonces θ y ϕ los ángulos de dicho triángulo (ϕ el ángulo en z y $g(z)$) (ver Figura 4.2).

Además se tiene también que el bisector perpendicular de $[z, g(z)]$ bisecta el ángulo θ . De esta manera se obtienen dos triángulos rectángulos con ángulos $\theta/2, \phi$ y $\pi/2$. Ahora, de la Proposición 2.5.2 y la Figura 2.14, se tiene

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) = \sinh \rho(z, 0) \operatorname{sen} \theta/2,$$

que es justo lo que se quería probar.

Sólo resta probar el caso general; sea $h(z)$ una transformación elíptica con punto fijo v_0 y ángulo de rotación ϕ . Igual que en (i), se probará que si h es conjugada a la g estudiada arriba, entonces

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(w, h(w)) \right) = \sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right), \quad (4.8)$$

donde $w = \psi(z)$, y $\psi(v) = v_0$; con ψ la transformación conjugante. También se probará que

$$\sinh \rho(z, v) = \sinh \rho(w, v_0), \quad (4.9)$$

y que

$$|\operatorname{sen} \theta/2| = |\operatorname{sen} \phi/2|. \quad (4.10)$$

La igualdad (4.8) se sigue del hecho de que la transformación ψ con la que se conjuga a h para obtener g , es composición de isometrías; la igualdad (4.9) se sigue del Lema 1.0.3, $\psi(v) = v_0$; pues debe mandar el punto fijo de g en el punto fijo de h . Y por último, (4.10) se sigue de la Proposición 3.2.11, pues al ser g y h conjugadas, $\theta = \phi$. Por lo tanto se tiene el resultado para el caso general.

Para la prueba de (iii), se consideran 4 casos; el primero es cuando $v = \infty$ es el punto fijo de g ; el segundo es cuando g actúa en Δ y su punto fijo es $v = 1$; el tercero es cuando g actúa en Δ y su punto fijo es $v \in \partial\Delta$, $v \neq 1$; y por último el caso en que su punto fijo es $v \in \mathbb{R}$, $v \neq \infty$.

Para el primer caso, se toma $g(z) = z + 1$ que actúa en \mathbb{H}^2 . Claramente $v = \infty$; entonces, de (4.4) y de (3.5) se tiene

$$P(z, v) \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) = y \left(\frac{1}{2y} \right) = \frac{1}{2}.$$

Para el segundo caso, sea h cualquier transformación parabólica que actúa en Δ con punto fijo $v = 1$. Entonces, utilizando la inversa de la función de Cayley, que denotamos por φ^{-1} , si $\varphi^{-1}(w) = z$, de (4.5) y los argumentos de conjugación usados en los casos anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} P_{\Delta}(\varphi(z), 1) \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(w, h(w)) \right) &= P(z, \infty) \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) \\ &= \text{constante,} \end{aligned}$$

donde claramente $g = \varphi^{-1} h \varphi$ es una traslación, lo cual prueba el resultado en este caso.

Como tercer caso se toma h_1 tal que actúa en Δ y fija a $v_0 \neq 1$, $v_0 \in \partial\Delta$; entonces se toma $\psi \in M(\Delta)$ tal que $\psi(1) = v_0$. Claramente se tiene entonces que $h_1 = \psi h \psi^{-1}$, para alguna $h \in M(\Delta)$ tal que su punto fijo es $v = 1$; por lo que de la relación (4.3) y los argumentos de conjugación, si $\psi^{-1}(z) = w$.

$$\begin{aligned}
& P_{\Delta}(z, v_0) \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(z, h_1(z)) \right) \\
&= P_{\Delta}(\psi^{-1}(z), 1) |(\psi^{-1})'(v_0)| \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(w, h(w)) \right) \\
&= P_{\Delta}(w, 1) |(\psi^{-1})'(v_0)| \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(w, h(w)) \right) \\
&= \text{constante.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene el resultado para este caso.

Como cuarto y último caso, si h actúa en \mathbb{H}^2 y tiene punto fijo $v \neq \infty$. Sea h_1 tal que $h = \varphi^{-1} h_1 \varphi$, donde φ es la función de Cayley. Entonces h_1 es una transformación parabólica con punto fijo $w \in \partial\Delta$, $w \neq 1$. Por lo que utilizando el Lema 4.0.17 y el caso anterior, si $\varphi(z) = w$ se tiene

$$\begin{aligned}
& P(z, v) \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(z, h(z)) \right) \\
&= P_{\Delta}(\varphi(z), \varphi(v)) |\varphi'(v)| \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(w, h_1(w)) \right) \\
&= P_{\Delta}(w, \varphi(v)) |\varphi'(v)| \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(w, h_1(w)) \right) \\
&= \text{constante,}
\end{aligned}$$

esto último debido a que h_1 fija a $\varphi(v)$.

□

A manera de conclusión se verá cómo es que la función desplazamiento se encuentra determinada y determina a la pareja $\{g, g^{-1}\}$. Esto se hará observando los siguientes resultados.

Proposición 4.0.21 *Dada g una isometría, sea $m = \inf \rho(z, g(z))$, $z \in \mathbb{H}^2$; entonces se tiene*

1. $m > 0$ si y sólo si g es hiperbólica.
2. Si $m = 0$, entonces
 - a) g es elíptica si se alcanza m .
 - b) g es parabólica si m no se alcanza.

DEMOSTRACIÓN. Se probará primero (2). Si $m = 0$ y es alcanzado, entonces $\exists z_0 \in \mathbb{H}^2$ tal que $g(z_0) = z_0$; por lo que claramente g es elíptica.

Si $m = 0$ y no se alcanza, entonces g no es elíptica y tampoco es hiperbólica en virtud del Teorema 4.0.20 (i). Por lo tanto g es parabólica.

Nótese que en el caso hiperbólico la longitud de traslación es siempre positiva, por lo que claramente se tiene $m > 0$ si y sólo si g es hiperbólica. \square

Una manera de constatar geoméricamente el resultado para el caso parabólico, es tomar $g(z) = z + t$, $t \in \mathbb{R}$. Si se toma el valor de $\rho(z, z + t)$ para puntos $z \in \mathbb{H}^2$ tales que su parte imaginaria tiende a ∞ , no es difícil ver que $\rho(z, z + t)$ tiende a 0 y permanece siempre estrictamente positivo.

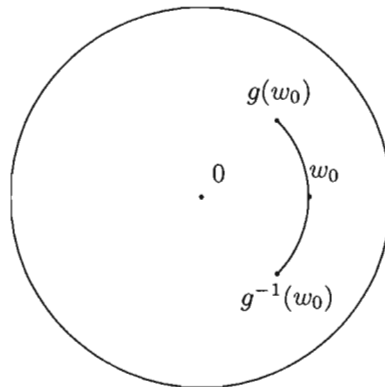


Figura 4.3: g elíptica.

Proposición 4.0.22 Sean g una isometría elíptica o hiperbólica, y $w_0 \in \mathbb{H}^2$ cualquier punto tal que $\rho(w_0, g(w_0)) > m$; donde $m = \inf \rho(z, g(z))$, $z \in \mathbb{H}^2$. Entonces, el conjunto $M = \{z \mid \rho(z, g(z)) = m\}$ y el valor $\rho(w_0, g(w_0))$ determinan a la pareja $\{g, g^{-1}\}$.

DEMOSTRACIÓN. Se comenzará con el caso $m = 0$; en este caso, por la Proposición 4.0.21 si el conjunto $M = \{z \mid \rho(z, g(z)) = m\} \neq \emptyset$, g es claramente elíptica. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $g(z) = e^{i\theta}z$, y que actúa en Δ . Ahora, el valor de $\rho(w_0, g(w_0))$ depende del ángulo de rotación de g ; de donde también es claro que es el mismo valor para g^{-1} (ver Figura 4.3).

Para el caso en que $m > 0$, por la Proposición 4.0.21, g es claramente hiperbólica. En este caso se puede suponer sin pérdida de generalidad, que el eje A_g es el eje imaginario (i.e. $g(z) = kz$). No es difícil observar que si w_0 no yace en el eje imaginario, entonces w_0 y $g(w_0)$ se encuentran en un hiperciclo; esto último se sigue del Corolario 2.1.2. El valor de $\rho(w_0, g(w_0)) = n$ determina el valor de k y k^{-1} (en virtud del Teorema 4.0.20); es decir determina a g y a g^{-1} que es lo que se quería probar (ver Figura 4.4).

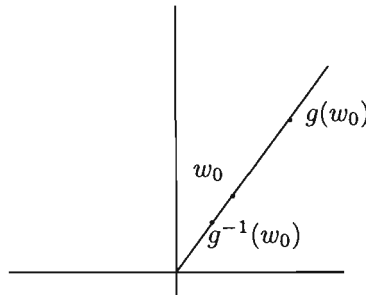


Figura 4.4: g hiperbólica.

□

Nótese que en el caso en que $m = 0$ y el conjunto $M = \emptyset$; entonces por la Proposición 4.0.21, g es una isometría parabólica. Ahora, se observa al conjunto

$$N = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, g(z)) = n\}.$$

Afirmación 1 *El conjunto N es un horociclo.*

Para ver esto, se conjuga a g con un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$, de tal manera que se obtenga $h = \varphi g \varphi^{-1}$ una traslación. Entonces, ahora se observa el conjunto de puntos tales que $\rho(w, h(w)) = n$, donde $\varphi(z) = w$. Ahora, por la fórmula de la distancia (1.6), se tiene que tal conjunto es una recta horizontal en \mathbb{H}^2 ; es decir, un horociclo. Por lo tanto, se tiene que N es un horociclo basado en v , el punto fijo de g .

Nótese que en este caso el valor de $\rho(w_0, g(w_0))$, con w_0 tal como en la Proposición 4.0.22, no determina a la g o g^{-1} . Para ver esto, supóngase que g fija al punto $v_0 \neq \infty$. Entonces por la Afirmación 1 el valor de $\rho(w_0, g(w_0))$ es un horociclo por w_0 basado en v_0 . Ahora si se toma un horociclo como en la figura 4.5, basado en $v_1 \neq v_0$ y que pasa por w_0 , no es difícil ver que este otro horociclo determina a una transformación parabólica $h \neq g$ tal que $\rho(w_0, g(w_0)) = \rho(w_0, h(w_0))$, y cuyo punto fijo no es v_0 , sino v_1 y por lo tanto no puede ser g ni g^{-1} .

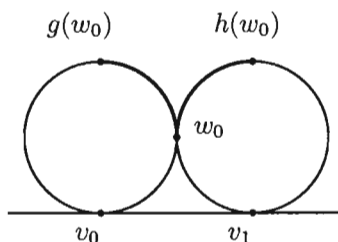


Figura 4.5: g y h parabólicas.

Ahora, la Proposición 4.0.22 aplica para g parabólica si se sustituye la hipótesis sobre el conjunto M por la de g parabólica con un punto fijo determinado. Esto es porque en este caso, el valor de $\rho(w_0, g(w_0))$ y el punto fijo determinarían un único horociclo, con lo que g y g^{-1} quedarían totalmente determinados. Nótese que este resultado aparece en [3] (cf. Ej. 7.38.1 p.176). Sin embargo las observaciones anteriores demuestran que la redacción del ejercicio es errónea, pues el resultado no es válido para el caso parabólico.

Observación 10 *Dada g una isometría, los puntos que se mueven lo mismo son horociclos para el caso en que g es parabólica; son círculos para el caso en que g es elíptica; y son hiperbiclos para el caso en que g es hiperbólica.*

Bibliografía

- [1] ANDERSON, JAMES W., *Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, 1999.
- [2] ÁVILA BAEZ, VICTOR M., *Producto Inversivo y Polígonos Hiperbólicos*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [3] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1983.
- [4] LASCURAIN ORIVE, A., *Una Introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [5] LEHNER, J., *A Short Course in Automorphic Functions*, Holt, Rinehart and Winston, 1966.
- [6] MASKIT, B., *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, 1987.
- [7] MOZO CRUZ, ALEJANDRO, *Trigonometría de Triángulos Hiperbólicos*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2001.