UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

HIPERESPACIOS DE DENDRITAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:
M. C. DAVID HERRERA CARRASCO

DIRECTOR DE TESIS:
DOCTORA ISABEL PUGA ESPINOSA

MÉXICO, D.F. NOVIEMBRE, 2005

Dedico este trabajo:

A mi esposa L. Carolina:
Por el día en que llegaste a mi vida, Carola querida me puse a brindar….Que bonito amor.

A mis hijos: Víctor Hugo, Zazil Carolina e Ixell paulina (*por enseñarme a soñar y a volar junto a ellos*).

A la familia que me vio nacer y por la que estoy aquí.

A mi Mamá (Doña Villita):
Por su nobleza y su gran cariño que tiene para todos.

A mi Papá (Descanse en paz), el Colacho,…*cadáver muerto pero no rendido.*

A mis hermanos: Carmela, Irma, Hilda y Javier (*tenemos recuerdos… que serán nuestros para siempre*). También, claro está, a mis sobrinos (*mis primeros pequeños*).

Agradecimientos

A mi directora de tesis: Isabel Puga Espinosa por su esfuerzo, su pasión por las matemáticas, su apoyo y por su paciencia.

A los profesores: Raúl Escobedo Conde, Sergio Macías Álvarez, Sergey Antonyan Apetnakovitch, vladimir tkachuk, Richard Wilson y Gerardo Acosta, que revisaron este trabajo y propusieron correcciones que lo mejoraron (con creces).

A Fernando Velásquez Castillo y Fernando Macías Romero: compañeros de aventuras y de viajes (*...di que vengo de allá de un mundo raro*).

A mis amigos (los J. A.): Juan Angoa, Jaime Arroyo, Celestino soriano, Raúl Linares, Agustín Contreras, Manuel Ibarra y Armando Martínez (*a mis amigos les adeudo mi ternura...*).

A mis amigos del básquet (*¡que tardes* ¡).

A los compañeros de la academia de Matemáticas, los cuales me permitieron poder aprender y regresar.

A mis amigos del fútbol (*¡con su fabuloso tercer tiempo* ¡).

A los bohemios (*son tantos que espero sepan que están en mis recuerdos*).

A los seminarios de los martes, en el Instituto de Matemáticas de la UNAM. En los cuales conocí a personajes apasionados por las Matemáticas y muy creativos: Janus Charatonik (Descanse en paz), Alejandro Illanes, Sergio Macías, Sam B. Nadler, Bode, Hagopian, Hector Méndez, Víctor Neumann (Descanse en paz), etc. También a mis compañeros alumnos de dicho seminario. Fue en estos seminarios donde aprendí a conocer la Teoría de los Continuos.

A mis tutores: Alejandro Illanes Mejía (*gracias por esas asesorías tan eficaces*) y Héctor Sánchez Morgado (*un gran amigo de tantas correrías*).

Al Prof. Ángel Tamariz Mascarúa (*por su ayuda desinteresada*).

A la BUAP y muy particularmente a la Facultad de Ciencias físico Matemáticas.

A la Facultad de Ciencias y al Posgrado de la UNAM.
Al Instituto de Matemáticas de la UNAM y a su Biblioteca (¡*como ayuda tener una biblioteca como ésta* ¡).

Al CONACYT y a la Sociedad Matemática Mexicana.

Como puedo pagar........ Gracias...

... por este viaje mágico y misterioso y por dejarme escribir unos

Versos....de este mundo.

Amé desde hace tiempo tu cuerpo de nácar soleado
Hasta te creo dueña del universo.
Te traeré de las montañas flores alegres, copihues,
avellanas oscuras, y cestas silvestres de besos.
Quiero hacer contigo
lo que la primavera hace con los cerezos

Pablo Neruda

Índice general

Introducción

El trabajo que presentamos pertenece a la rama de la Topología conocida como Teoría de los Continuos. Dicha teoría trata del estudio de las propiedades topológicas de espacios que son métricos, compactos, conexos y no vacíos. De hecho, a estos espacios se les llama continuos. Trabajamos, en particular, con familias de subconjuntos especiales de un continuo X, llamadas hiperespacios de X.

Consideraremos los hiperespacios:

$$2^X = \{A \subset X \colon A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$

$$C(X) = \left\{A \in 2^X \colon A \text{ es conexo}\right\},$$

y para $n \geq 1$

$$C_n(X) = \left\{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\right\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Notemos que $C_1(X) = C(X)$. Todos los hiperespacios anteriores los consideramos con la métrica de Hausdorff que introducimos en la Definición 1.12.

Es conocido que si dos continuos X y Y son homeomorfos, entonces sus hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ también son homeomorfos. El recíproco de la afirmación anterior no es cierto. Si, por ejemplo, $I = [0,1]$ y $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\| = 1\}$, entonces $C(I)$ y $C(S^1)$ son homeomorfos al disco unitario $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\| \leq 1\}$. Así pues, del hecho de que los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$ sean homeomorfos no tiene porqué deducirse que los continuos X y Y son homeomorfos. Existen situaciones en las que sí se deduce que X y Y son homeomorfos y éstas son precisamente las que nos interesan en este trabajo. Al respecto en 1978, S. B. Nadler, Jr. introdujo en [45, Definición 0.61] la siguiente definición: diremos que una familia Γ de continuos está *C-determinada* siempre que para cualesquiera dos elementos X y Y de Γ tales que $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, se tiene que X es homeomorfo a Y.

En su tesis Doctoral, G. Acosta introdujo la definición de hiperespacio unico $C(X)$ [2]: decimos que un continuo X tiene *hiperespacio único* $C(X)$ (respectivamente $C_n(X)$, $F_n(X)$, 2^X) si para cada continuo Y, del hecho de que los hiperespacios $C(X)$ (respectivamente $C_n(X)$, $F_n(X)$, 2^X) y $C(Y)$ (respectivamente $C_n(Y)$, $F_n(Y)$, 2^Y) sean homeomorfos se deduce que los continuos X y Y son homeomorfos.

Una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples. Esto es, que no contiene subcontinuos homeomorfos a la circunferencia unitaria S^1.

En este trabajo resolvemos el problema del hiperespacio único $C(X)$ cuando X es una dendrita. Además obtenemos resultados sobre hiperespacio único en el caso de los hiperespacios $C_n(X)$, para cualquier $n > 2$.

Diremos que una familia Γde continuos está *C-determinada* (respectivamente *C_n-determinada*) siempre que para cualesquiera dos elementos X, $Y \in \Gamma$ tales que $C(X)$ (respectivamente $C_n(X)$) es homeomorfo a $C(Y)$ (respectivamente$C_n(Y)$) se tiene que X es homeomorfo a Y.

Denotemos por $\mathfrak{D}$ a la familia de las dendritas no homeomorfas al arco $[0,1]$ y cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado (véase su definición, en la sección 2.7). Los principales resultados del presente trabajo son los siguientes:

1) Los elementos de $\mathfrak{D}$ tienen hiperespacio único $C(X)$.
2) Las dendritas que no están en $\mathfrak{D}$ no tienen hiperespacio único $C(X)$. Por tanto, una dendrita X tiene hiperespacio único $C(X)$ si y sólo si $X \in \mathfrak{D}$.
3) La familia $\mathfrak{D}$ está C_n-determinada, para cada $n \in \mathbb{N} - \{2\}$. Esto es, si $X, Y \in \mathfrak{D}$ y $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, para cualquier $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ entonces X es homeomorfo a Y.
4) Los elementos de la familia $\mathfrak{D}$ tienen hiperespacio único $C_n(X)$, con respecto a dendritas, para cada $n \in \mathbb{N} - \{2\}$. Esto es si $X \in \mathfrak{D}$, Y es una dendrita, $n \in \mathbb{N} - \{2\}$ y los hiperespacios $C_n(X)$ y $C_n(Y)$ son homeomorfos, entonces los continuos X y Y también son homeomorfos.

El trabajo está organizado en cinco capítulos. En el Capítulo 1 damos las notaciones, definiciones, funciones y resultados de la Teoría de los Continuos e Hiperespacios que necesitamos para este trabajo. Indicamos las referencias de los resultados que se presentan para el lector interesado en sus demostraciones.

En el Capítulo 2 mencionamos resultados acerca de las dendritas que utilizaremos en este trabajo. En este capítulo se introducen las dendritas F_ω y W que caracterizan a las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado. Definimos la familia $\mathfrak{D}$ y demostramos una serie de propiedades que posee.

En el Capítulo 3 demostramos teoremas preliminares para los resultados principales y demostramos, en el Teorema 3.22, que cada elemento de $\mathfrak{D}$ tiene hiperespacio único.

En el Capítulo 4 probamos, en el Teorema 4.13, que los elementos de $\mathfrak{D}$ son las únicas dendritas con hiperespacio único $C(X)$. Al final del capítulo, en el Teorema 4.16, damos cuatro caracterizaciones de los elementos de la familia $\mathfrak{D}$.

En el Capítulo 5 se considera el problema de si los elementos de $\mathfrak{D}$ tienen hiperespacio único $C_n(X)$, para $n \geq 2$. Agradecemos al doctor A. Illanes por facilitarnos su artículo [30], el cual sirvió como base para obtener los resultados que se presentan. Sea I homeomorfo al arco $[0,1]$. Primero, en el Teorema 5.20, mostramos que la familia $\mathfrak{D} \cup \{I\}$ está C_n-determinada, para $n \geq 3$. Luego, en el Teorema 5.24, probamos que los elementos de $\mathfrak{D} \cup \{I\}$ tienen hiperespacio único $C_n(X)$, con respecto a las dendritas, para $n \geq 3$.

Terminamos este trabajo con una serie de preguntas abiertas que, a nuestro juicio, son interesantes.

Los problemas de hiperespacio único y familias C-determinadas y C_n-determinadas han dado lugar a una buena cantidad de artículos. Mencionamos los resultados más importantes.

1) La familia de todas las gráficas finitas que son diferentes del arco y la curva cerrada simple está C-determinada [18].
2) La familia de los continuos hereditariamente indescomponibles está C-determinada [45, Teorema 0.60].
3) La familia de los continuos indescomponibles tales que todos sus subcontinuos propios y con más de un punto son arcos, está C-determinada [38, Teorema 3].
4) La familia de los continuos encadenables no está C-determinada [28, Teorema 2].

5) La familia de los abanicos suaves está C-determinada [23, Corolario 3.3].

En 1978, S. B. Nadler, Jr. preguntó si la familia de los continuos tipo círculo está C-determinada. Se han dado respuestas parciales en [4] y en [6]. Sin embargo el problema sigue sin resolver.

Los siguientes continuos tienen hiperespacio único $C(X)$ [2]:

a) Gráficas finitas diferentes del arco y la curva cerrada simple.
b) Continuos hereditariamente indescomponibles.
c) Continuos indescomponibles tales que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos.
d) Cualquier compactación métrica del rayo $[0, \infty)$ con residuo no degenerado.
e) Compactaciones métricas de $(-\infty, \infty)$, diferentes del arco y con residuo disconexo.

También mencionamos, otros resultados relacionados con el problema del hiperespacio único:

f) Los continuos hereditariamente indescomponibles X tienen hiperespacio único 2^X [39, página 417].
g) Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único $C_n(X)$ para cualquier $n \geq 1$ [41, Teorema 6.1].
h) Las gráficas finitas X tienen hiperespacio único $C_2(X)$ [31, Teorema 4.1].
i) Las gráficas finitas X tienen hiperespacio único $C_n(X)$, para cualquier $n \geq 2$ [30, Teorema 3.8].
j) Las dendritas X cuyo conjunto de puntos ordinarios es abierto, tienen hiperespacio único $F_2(X)$ [29, Teoremas 1 y 8].
k) Las gráficas finitas X tienen hiperespacio único $F_n(X)$ para $n \geq 2$ [10].

Hiperespacios de dendritas

David Herrera Carrasco
Posgrado en Ciencias Matemáticas
Facultad de Ciencias.
Con la dirección de: Isabel Puga Espinosa

18 de noviembre de 2005

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. Conceptos Básicos

En este capítulo introduciremos una serie de conceptos y resultados que utilizaremos a lo largo de la tesis. Indicaremos en dónde se pueden ver las demostraciones de los resultados.

Veamos algunos símbolos y notaciones. Como de costumbre, el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...n, ...\}$ denotará los *números naturales o enteros positivos,* $\mathbb{Z}$ al de los *números enteros*, $\mathbb{Q}$ al de los *números racionales* y $\mathbb{R}$ al de los *números reales.* A su vez, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ denotará el conjunto de los *números irracionales.*

Dada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ denotará el *n-espacio Euclidiano* con la métrica Euclidiana. Utilizaremos $\|x - y\|$ para denotar la distancia entre los puntos x y y en $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$. La distancia entre los puntos x y y en $\mathbb{R}$, la denotaremos por $\mid x - y \mid$.

Si dos espacios topológicos X y Y son homeomorfos, escribiremos $X \approx Y$. En caso contrario escribiremos $X \not\approx Y$. Sean X un espacio topológico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $p \in X$. Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al elemento $p \in X$, escribiremos $\lim x_n = p$. La letra I denotará al intervalo unitario $[0, 1]$ con la topología usual. Dada $n \in \mathbb{N}$ una n-celda en X es un espacio homeomorfo al cubo $I \times I \times \cdots \times I = I^n$. El *cubo de Hilbert* es el producto numerable

$$I^{\infty} = \prod_{i=1}^{\infty} I_i,$$

en donde $I_i = I$, para cada $i \in \mathbb{N}$ con la topología producto. La *bola unitaria cerrada n-dimensional* es el conjunto

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}.$$

La *esfera unitaria n-dimensional* en $\mathbb{R}^{n+1}$ es el conjunto

$$S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|x\| = 1\right\}.$$

Una *n-esfera* es un espacio homeomorfo a S^n y una *curva cerrada simple* es un espacio homeomorfo a S^1.

Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $\mathrm{cl}(A)$ denotará *la cerradura* de A en X. Si $A \subset Y \subset X$, entonces $\mathrm{cl}_Y(A)$ denotará la cerradura de A en el subespacio Y de X. Es fácil ver que $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}(A) \cap Y$. En ocasiones a la cerradura de A en X la denotaremos también por $\overline{A}$. A *la frontera* de A en X la denotaremos por $\mathrm{Fr}(A)$. Si $A \subset Y \subset X$, escribiremos $\mathrm{Fr}_Y(A)$ para referirnos a la frontera de A en el subespacio Y. El *interior* de A en X se denotará por $\mathrm{int}(A)$ y además, $\mathrm{int}_Y(A)$ denotará el interior de A en el subespacio Y. Si $p \in X$, una *vecindad* de p es un subconjunto V de X tal que $p \in \mathrm{int}(V)$.

Para hacer ver que se ha concluido alguna demostración, escribiremos al término de la misma el símbolo $\square$.

Teorema 1.1 *Sean Z un espacio topológico, $U \subset T \subset Z$, donde U es un abierto en Z y T es un cerrado en Z. Entonces $\mathrm{Fr}_T(U) = \mathrm{Fr}_Z(U)$.*

Demostración. Como U es abierto en Z y $U \subset T$, U es abierto en T. Además $\mathrm{Fr}_T(U) = \mathrm{cl}_T(U) - \mathrm{int}_T(U) = \mathrm{cl}_T(U) - U = (\mathrm{cl}_Z(U) \cap T) - U$. Por ser T cerrado en Z, $(\mathrm{cl}_Z(U) \cap T) - U = \mathrm{cl}_Z(U) - U = \mathrm{Fr}_Z(U)$. Por consiguiente $\mathrm{Fr}_T(U) = \mathrm{Fr}_Z(U)$. $\square$

Definición 1.2 *Sea X un espacio métrico con métrica d. Si $a \in X$ y $\epsilon > 0$ entonces definimos la $\epsilon-$**bola abierta** de a (o **la bola abierta en X con centro en a y radio ϵ**) como el conjunto*

$$B(a, \epsilon) = \{x \in X \colon d(a, x) < \epsilon\}.$$

Cuando sea necesario distinguir que la bola está contenida en X, lo denotaremos por $B_X(a, \epsilon)$.

1.2. Dimensión

Conviene recordar el concepto de dimensión de un espacio métrico X que será utilizado con frecuencia a lo largo de este trabajo. Referimos al lector a [26, Definición III.1] y [47, Definición 1.1] para mayor información.

Definición 1.3 *Sea X un espacio métrico. Entonces*

1) $dim(X) = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$. También, si $dim(X) \leq -1$, entenderemos que $X = \emptyset$.

Ahora procederemos inductivamente:

2) Supongamos que está definido el símbolo $dim(Y) \leq n-1$ para un entero dado $n \geq 0$ y cualquier espacio métrico Y. Entonces, para el espacio X y un punto $p \in X$, definimos:

$$dim_p(X) \leq n$$

si y sólo si X tiene una base de vecindades abiertas de p cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual que $n-1$.

3) $dim(X) \leq n$ si y sólo si $dim_p(X) \leq n$ para todos los puntos p de X.

4) $dim(X) = n$ si y sólo si $dim(X) \leq n$ y $dim(X) \nleq n-1$.

5) $dim_p(X) = n$ si y sólo si $dim_p(X) \leq n$ y $dim_p(X) \nleq n-1$.

6) $dim(X) = \infty$ si y sólo si $dim(X) \nleq n$ para cada $n \geq -1$.

7) $dim_p(X) = \infty$ si y sólo si $dim_p(X) \nleq n$ para cada $n \geq -1$.

Teorema 1.4 *[26, Teorema III.1] Sean X un espacio métrico y Y un subespacio de X. Entonces $dim(Y) \leq dim(X)$.*

Teorema 1.5 *[47, Corolario 3.3] Sean X un espacio métrico, Y un subespacio de X y $p \in Y$. Entonces $dim_p(Y) \leq dim_p(X)$.*

Teorema 1.6 *[47, Lema 5.1]Sean X un espacio métrico, P y Q subconjuntos cerrados, disjuntos de X, y sea Z un subconjunto cerrado de X tal que $dim(Z) \leq 0$. Entonces existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que*

$$Z \subset U \cup V, \ P \subset U, \ Q \subset V, \ y \ cl(U) \cap cl(V) = \emptyset.$$

1.3. Los Hiperespacios de un Continuo X

Definición 1.7 *Un **continuo** es un espacio métrico, no degenerado, compacto y conexo. Un **subcontinuo** de un espacio topológico S es un subespacio no vacío, métrico compacto y conexo.*

Recordemos que un espacio es *no degenerado* si contiene más de un punto. La diferencia entre un continuo y un subcontinuo es que los subcontinuos pueden ser conjuntos degenerados, mientras que los continuos siempre poseen más de un punto.

1.3.1. El Hiperespacio 2^X

Los *hiperespacios* de un continuo X son espacios cuyos elementos son subconjuntos especiales de X.

Definición 1.8 *Dado un continuo X, el **hiperespacio** 2^X de X es definido por*

$$2^X = \{A \subset X\colon\ A \textit{ es cerrado y no vacío}\}.$$

A continuación mostraremos como dotar a 2^X de una estructura de espacio métrico, bajo la cual resulta ser un continuo. Mientras no se diga lo contrario, consideraremos que la letra X representa un continuo con métrica d.

Definición 1.9 *Sean $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Entonces definimos la **ϵ-nube** de A (o la **nube con centro en A y radio** ϵ) como el conjunto*

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X\colon \textit{ existe } a \in A \textit{ tal que } d(a,x) < \epsilon\}.$$

El siguiente teorema contiene las propiedades de las nubes que utilizaremos. Una demostración se puede ver en [2, Teorema 7].

Teorema 1.10 *Sean $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Entonces,*
1) $N(\epsilon, A) = \bigcup\limits_{a\in A} B(a,\epsilon)$;
2) $N(\epsilon, A)$ *es abierto en* X;
3) si $0 < \delta \leq \epsilon$ *y* $A \subset B$, *entonces* $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, B)$;
4) $\mathrm{cl}_X(N(\epsilon, A)) \subset N(2\epsilon, A)$;
5) $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$.

Demostraremos una propiedad adicional de las nubes. Recordemos que

$$d(A,B) = \text{ínf}\,\{d(a,b)\colon a \in A,\ b \in B\}$$

denota la distancia entre los subconjuntos A y B de X.

Teorema 1.11 *Sean $A \in 2^X$ y U un abierto en X tales que $A \subset U$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $A \subset N(\epsilon, A) \subset U$.*

Demostración. Como A es cerrado, $X - U$ es compacto y $A \subset U$, entonces $d(A, X - U) = \delta > 0$. Sea $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ y supongamos que $p \in N(\epsilon, A)$. De aquí $p \in B(a, \epsilon)$ para algún $a \in A$. Si $p \in X - U$, entonces $\delta = d(A, X - U) \leq d(p, a) < \epsilon = \frac{\delta}{2}$, lo cual es una contradicción. Por tanto $p \in U$. Luego $N(\epsilon, A) \subset U$. □

La siguiente función es una métrica en 2^X.

Definición 1.12 *Si A y $B \in 2^X$ definimos una función $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como sigue:*

$$H(A,B) = \inf\{\epsilon > 0\colon A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}.$$

En [45, Teorema 0.2] se muestra que $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ es una métrica para 2^X, a la que llamaremos *métrica de Hausdorff.*

La topología determinada por la métrica de Hausdorff, sobre 2^X, sólo depende de la topología de X. Esto significa que si d y e son dos métricas para X tales que $\tau_d = \tau_e$, entonces se tiene que $\tau_{H_d} = \tau_{H_e}$. Esto se prueba en [46, Corolario 4.6].

En [45, Teorema 0.8] se prueba que 2^X es compacto y, en [45, Teorema 1.9], que 2^X es conexo por trayectorias (independientemente de que X sea o no conexo por trayectorias). Como 2^X es un continuo, podemos hablar del hiperespacio de 2^X

$$2^{2^X} = \{\mathcal{A} \subset 2^X \colon \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

Análogamente, este espacio con la métrica de Hausdorff, que denotaremos por H_2, es un continuo.

Como H es una métrica para 2^X, los abiertos básicos de 2^X son las bolas abiertas de 2^X. En el Capítulo 5 utilizaremos una base alternativa para 2^X. Para definirla, supongamos que τ es la topología de X. Para cada $U \in \tau$ definimos los conjuntos:

$$\Gamma(U) = \{A \in 2^X : A \subset U\} \quad \text{y} \quad \Lambda(U) = \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Para $U_1, ..., U_n \in \tau$ y $n \in \mathbb{N}$, denotamos

$$\langle U_1, ..., U_n \rangle = \left\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\right\}.$$

Para la demostración de las siguientes afirmaciones, referimos al lector a [46, Lema 4.4]:

1) $\Gamma(U) = \langle U \rangle$ y $\Lambda(U) = \langle X, U \rangle$;
2) $\langle U_1, ..., U_n \rangle = \left[\Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)\right] \bigcap [\bigcap \Lambda(U_i)]$.

Sean
$\mathfrak{B} = \{\langle U_1, ..., U_n \rangle : U_i \in \tau \text{ para cada } i = 1, ..., n\}$;
$\mathfrak{C} = \{\Lambda(U) : U \in \tau\}$ (observese que $\Gamma(U) \subset \Lambda(U)$).

En [46, Teorema 4.5] se demuestra que $\mathfrak{B}$ es una base para la topología obtenida a partir de la métrica de Hausdorff para 2^X y que $\mathfrak{C}$ es una subbase. De esta manera, se pueden construir subconjuntos abiertos en 2^X a partir de subconjuntos abiertos de X; ya que $\Gamma(U) = \langle U \rangle$ y $\Lambda(U) = \langle X, U \rangle$ son abiertos en 2^X si $U \in \tau$.

Teorema 1.13 *Sean $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Entonces $H(A, B) < \epsilon$ si y sólo si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.*

Demostración. Supongamos que $H(A, B) < \epsilon$. Sea

$$D = \{\alpha \in (0, \infty) : A \subset N(\alpha, B) \text{ y } B \subset N(\alpha, A)\}.$$

Entonces $H(A, B) = \text{ínf} D$ y, por hipótesis, $\text{ínf} D < \epsilon$. De donde existe $\delta \in D$ tal que $H(A, B) \leq \delta < \epsilon$. Por lo cual $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Por el inciso 3) del Teorema 1.10, $N(\delta, B) \subset N(\epsilon, B)$ y $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$. Entonces $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.

Ahora supongamos que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Observemos que $N(\epsilon, B) = \bigcup\limits_{0<\delta<\epsilon} N(\delta, B)$. Por lo tanto $A \subset \bigcup\limits_{0<\delta<\epsilon} N(\delta, B)$ y, como A es compacto, existen números positivos $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m$, menores que ϵ, tales que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} N(\delta_i, B)$. Podemos suponer $\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_m$. Entonces, por el inciso 3) del Teorema 1.10, $A \subset N(\delta_m, B)$. De la misma manera se puede probar que existe $0 < \delta_s < \epsilon$, tal que $B \subset N(\delta_s, A)$. Sea $\delta = \max\{\delta_m, \delta_s\}$. En consecuencia $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$ y $\delta < \epsilon$. Por lo tanto $\delta \in D$. Así $H(A, B) \leq \delta < \epsilon$. □

1.3.2. El Hiperespacio $C(X)$

Ahora dado el continuo X, definimos el *hiperespacio de los subcontinuos* de X, de la siguiente manera:

Definición 1.14 *Si X es un continuo entonces:*

$$C(X) = \{A \in 2^X : \ A \textit{ es conexo}\}.$$

Observemos que $C(X)$ es no degenerado porque X es no degenerado. Además la restricción de la métrica de Hausdorff H a $C(X)$, hace de éste un espacio métrico. Al igual que en el caso de 2^X, la topología de $C(X)$ inducida por la métrica de Hausdorff, solamente depende de la topología de X.

En [45, Teorema 0.8], se prueba que $C(X)$ es compacto y en [45, Teorema 1.12], que $C(X)$ es conexo por trayectorias (también esto es independiente de la conexidad por trayectorias de X). Por lo tanto $C(X)$ es un continuo y entonces podemos hablar de sus hiperespacios

$$2^{C(X)} = \{\mathcal{A} \subset C(X) \colon \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

y

$$C^2(X) = C(C(X)) = \left\{\mathcal{A} \in 2^{C(X)} \colon \mathcal{A} \text{ es conexo}\right\},$$

ambos con la métrica de Hausdorff H_2 que indicamos anteriormente.

En el Capítulo 3 utilizaremos con frecuencia el siguiente resultado.

Teorema 1.15 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si $A \in C(X)$ y $\epsilon > 0$, entonces $A \in B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon)$ si y sólo si $A \subset B_X(p, \epsilon)$.*

Demostración. Supongamos que $A \in B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon)$. Entonces $H(A, \{p\}) < \epsilon$. Por el Teorema 1.13, $A \subset N(\epsilon, \{p\})$ y, por el Teorema 1.10, $N(\epsilon, \{p\}) = B_X(p, \epsilon)$. Luego $A \subset B_X(p, \epsilon)$. Ahora supongamos que $A \subset B_X(p, \epsilon)$. Se tiene, otra vez, que $B_X(p, \epsilon) = N(\epsilon, \{p\})$. De donde $A \subset N(\epsilon, \{p\})$. Además tenemos que $\{p\} \subset N(\epsilon, A)$, ya que $A \subset B_X(p, \epsilon)$. De esta manera, por el Teorema 1.13, $H(A, \{p\}) < \epsilon$, de donde $A \in B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon)$. □

Diremos que un espacio topológico X es *localmente conexo en un punto* $p \in X$, si para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $p \in V \subset U$. Diremos, además, que X es *localmente conexo*, si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

El siguiente es un resultado acerca de hiperespacios de continuos localmente conexos. Fue probado originalmente por L. Vietoris [54] y T. Wazewski [51]. Una demostración puede verse en [45, Teorema 1.92].

Teorema 1.16 *Las tres afirmaciones siguientes, son equivalentes:*
(a) X es un continuo localmente conexo;
(b) $C(X)$ es un continuo localmente conexo;
(c) 2^X es un continuo localmente conexo.

Observación 1.17 *En [33, Ejemplos 5.1 y 5.2] se prueba que los hiperespacios $C(I)$ y $C(S^1)$ son homeomorfos a la 2-celda I^2.*

1.3.3. El Hiperespacio $C(B, X)$

Otro de los hiperespacios con el que trabajaremos es el siguiente.

Definición 1.18 *Sea B un subcontinuo del continuo X. El hiperespacio de los continuos que contienen a B se denota por:*

$$C(B, X) = \{A \in C(X): \ B \subset A\}.$$

En particular denotamos $C(\{p\}, X)$ por $C(p, X)$, para cualquier elemento $p \in X$.

Observemos que si $B \in C(X) - \{X\}$, entonces $C(B, X)$ es no degenerado y la restricción de la métrica de Hausdorff H a $C(B, X)$, hace de éste un espacio métrico.

En [21, Teorema 10] C. Eberhart mostró una condición, bajo la cual, el hiperespacio $C(p, X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert I^∞.

Recordemos que una *gráfica finita* es un continuo que se puede expresar como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos, son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos. Recordemos también que el simbolo $X \approx Y$ significa que los espacios X y Y son homeomorfos.

Teorema 1.19 *Sean X un continuo y $p \in X$. Supongamos que X es localmente conexo en cada punto de un conjunto abierto que contiene a p. Entonces $C(p, X) \approx I^\infty$ si y sólo si p no está en el interior, relativo a X, de una gráfica finita en X.*

Según una observación de C. Eberhart, en [21, p. 222], el Teorema 1.19 puede reescribirse como se indica en el teorema siguiente. Para la demostración de éste teorema, recordemos que un continuo Y es *homogéneo* si para cada par de puntos p y q de Y, existe un homeomorfismo $f : Y \to Y$ tal que $f(p) = q$. Utilizaremos el hecho de que el cubo de Hilbert I^∞ es homogéneo ([50, Teorema 6.1.6]).

Teorema 1.20 *Sea X un continuo localmente conexo en cada punto de una vecindad de p. Entonces $C(p, X) \approx I^\infty$ si y sólo si $C(p, X)$ tiene dimensión infinita en $\{p\}$.*

Demostración. Supongamos que $C(p, X) \approx I^\infty$. Como I^∞ es homogéneo, $\dim_A(C(p, X)) = \infty$ para cada $A \in C(p, X)$. En particular $\dim_{\{p\}}(C(p, X)) = \infty$. Probemos el recíproco. Ahora $\dim_{\{p\}}(C(p, X)) = \infty$. Afirmamos que $p \notin \text{int}(T)$ para ninguna gráfica finita T en X. Supongamos lo contrario. Entonces $p \in \text{int}(G)$ para una gráfica finita G en X. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_X(p, \epsilon) \subset G$ y, por el Teorema 1.15, si $A \in B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon)$ entonces $A \subset B_X(p, \epsilon)$. Por lo tanto $B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon) \subset C(G)$.

Mostraremos ahora que $\dim_{\{p\}}(C(X)) < \infty$. Para esto tomemos un abierto $\mathcal{U}$ en $C(X)$ tal que $\{p\} \in \mathcal{U}$. Sea $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ tal que $B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1) \subset \mathcal{U}$. Entonces

$$B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1) \subset \mathcal{U} \cap B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon) \subset \mathcal{U} \cap C(G).$$

Observemos que $B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1) \subset C(G) \subset C(X)$, donde $B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1)$ es un abierto en $C(X)$ y $C(G)$ es un continuo (por tanto, un cerrado en $C(X)$). Por el Teorema 1.1, $\mathrm{Fr}_{C(X)}(B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1)) = \mathrm{Fr}_{C(G)}(B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1))$. De aquí

$$\dim(\mathrm{Fr}_{C(X)}(B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1))) = \dim(\mathrm{Fr}_{C(G)}(B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1))).$$

Como $\mathrm{Fr}_{C(G)}(B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1)) \subset C(G)$, por el Teorema 1.4, sucede que $\dim(\mathrm{Fr}_{C(G)}(B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1))) \leq \dim(C(G))$ y $\dim(C(G)) < \infty$ por el Teorema 1.43. Por tanto $\dim(\mathrm{Fr}_{C(X)}(B_{C(X)}(\{p\}, \epsilon_1))) < \infty$ (es menor que la dimensión de $C(G)$ y G es fijo). Como consecuencia de esto $\dim_{\{p\}}(C(X)) < \infty$. Por el Teorema 1.5, $\dim_{\{p\}}(C(p, X)) < \dim_{\{p\}}(C(X)) < \infty$, lo cual contradice la hipótesis. Así que, $p \notin \mathrm{int}(T)$ para ninguna gráfica finita T en X. Por el Teorema 1.19, $C(p, X) \approx I^{\infty}$. $\square$

1.3.4. Los Hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(X)$

Otros hiperespacios del continuo X que consideraremos en este trabajo, son los siguientes:

$$C_n(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\right\}$$

y

$$F_n(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\right\}.$$

Notemos que $F_1(X) = \{\{p\} : p \in X\}$. Es claro que $F_1(X)$ es un subconjunto no degenerado de 2^X y que la restricción de la métrica de Hausdorff H a $F_1(X)$, hace de éste un espacio métrico. Más aún tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.21 *Si X es un continuo, entonces $F_1(X)$ es isométrico a X.*

Demostración. La función $g : X \to F_1(X)$, definida por $g(x) = \{x\}$, es biyectiva, continua y cumple que $H(g(a), g(b)) = d(a, b)$. Por lo tanto $F_1(X)$ es isométrico a X. $\square$

Notemos que $C_1(X) = C(X)$.

1.4. Convergencia en Hiperespacios

Para un espacio topológico X, una sucesión en X se denota por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entendemos, por supuesto, que $x_n \in X$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $x \in X$, entonces escribiremos $\text{lím} x_n = x$.

Definición 1.22 *Sean (S, τ) un espacio topológico, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de S. Definimos el* ***límite inferior*** *y el* ***límite superior*** *de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como*

$$\begin{aligned} \text{lím inf} A_n &= \{x \in S\colon \textit{si } x \in U, \textit{ con } U \in \tau, \textit{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \textit{ para} \\ &\qquad \textit{todo natural } n \textit{ salvo un número finito}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{lím sup} A_n &= \{x \in S\colon \textit{si } x \in U, \textit{ con } U \in T, \textit{ entonces } U \cap A_n \neq \emptyset \textit{ para} \\ &\qquad \textit{un número infinito de naturales } n\}. \end{aligned}$$

Si $\text{lím inf} A_n = A = \text{lím sup} A_n$, en donde $A \subset S$, entonces decimos que A es el ***límite*** *de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y lo denotamos como $A = \text{lím} A_n$.*

En el siguiente resultado, probado en [45, Teorema 4.11], vemos que si una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en 2^X converge a A, en el sentido de la definición anterior, entonces $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A con respecto a la métrica de Hausdorff H.

Teorema 1.23 *Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Entonces $\text{lím} A_n = A$ si y sólo si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al elemento A de 2^X con respecto a la métrica de Hausdorff H.*

Teorema 1.24 *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X, donde X es un espacio métrico y compacto. Entonces:*
1) $\text{lím inf} A_n \subset \text{lím sup} A_n$;
2) $\text{lím inf} A_n$ y $\text{lím sup} A_n$ son subconjuntos cerrados de X;
3) $\text{lím sup} A_n \neq \emptyset$;
4) si los A_n son subconjuntos conexos de X, para toda n y $\text{lím inf} A_n \neq \emptyset$, entonces $\text{lím sup} A_n$ es conexo;
5) $\text{lím} A_n = A$ si y sólo si $\text{lím sup} A_n \subset A \subset \text{lím inf} A_n$.

Demostración Para 1), 2) y 3) véase [45, Observación 0.6]. De la definición de límite y de 1) obtenemos 5). Demostraremos 4). Supongamos que lím supA_n no es conexo. Entonces existen $A, B \in 2^X$ ajenos y tales que lím sup$A_n = A \cup B$. Por la normalidad de X existen subconjuntos abiertos y ajenos H y K de X tales que $A \subset H$ y $B \subset K$. Sea $x \in$ lím infA_n. Se infiere por 1) que $x \in A \cup B$, de donde $x \in H \cup K$. Supongamos que $x \in H$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap H \neq \emptyset$ para toda $n > N$. Sea $y \in B$. Notemos que $y \in$ lím supA_n y, además, $y \in K$. Por tanto existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $A_n \cap K \neq \emptyset$ para cada $n \in J$. Sea $J_1 = J \cap \{n \in \mathbb{N} : n > N\}$. Se implica que $A_n \cap H \neq \emptyset$ y $A_n \cap K \neq \emptyset$ para $n \in J_1$. Ahora bien si para $n \in J_1$ sucede que $A_n \subset H \cup K$, tendremos que $A_n = (A_n \cap H) \cup (A_n \cap K)$, de donde A_n no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A_n \not\subset H \cup K$ para cada $n \in J_1$. De aquí, dada $n \in J_1$, podemos tomar un punto $x_n \in A_n - (H \cup K)$. Como X es compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n \in J_1}$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ a un punto $p \in X$. Sea V un abierto en X tal que $p \in V$. En consecuencia existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_j} \in V$ para cada $j > k$. Dada $j > k$ tenemos que $x_{n_j} \in A_{n_j}$ y también $x_{n_j} \in V$. Por tanto $V \cap A_{n_j} \neq \emptyset$ para toda $j > k$. Equivalentemente $V \cap A_{n_j} \neq \emptyset$, para un número infinito de enteros n. Luego $p \in$ lím supA_n y entonces $p \in A \cup B \subset H \cup K$. De modo que p está en el abierto $H \cup K$. Como la sucesión $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a p, tenemos que $x_{n_j} \in H \cup K$ para casi toda j. Esto contradice la elección de x_{n_j} y muestra que lím supA_n es conexo. □

A continuación daremos una serie de resultados básicos con respecto a la convergencia de sucesiones de elementos de 2^X (para una demostración, véase por ejemplo [2, Teorema 20]).

Teorema 1.25 *Sean X un continuo y $A, B \in 2^X$. Supongamos que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones en 2^X tales que lím$A_n = A$ y lím$B_n = B$. Entonces*
1) si $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$;
2) si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$;
3) lím$(A_n \cup B_n) = A \cup B$.

De [46, Proposiciones 1.7 y 1.8], obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.26 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Si la sucesión está anidada, esto es, si $A_{n+1} \subset A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces lím$A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Si además $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subcontinuos, su* *límite* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, *es un continuo.*

1.5. Funciones Especiales

Ahora veamos algunas funciones que involucran a los hiperespacios de un continuo X. En concreto, nos referimos a las funciones de Whitney, la función unión, las funciones inducidas entre hiperespacios y los arcos ordenados. Como nuestro trabajo es en hiperespacios, necesitamos conocer las propiedades de estas funciones y son las que a continuación daremos.

1.5.1. Las Funciones de Whitney

En 1933 H. Whitney introdujo las funciones que hoy llamamos funciones de Whitney ([53]). En 1942 J. L. Kelley se dio cuenta de su importancia para la teoría de los hiperespacios.

Definición 1.27 *Sea $\mathcal{G}$ un subconjunto no vacío de 2^X. Una* ***función de Whitney*** *en $\mathcal{G}$ es una función continua $\mu : \mathcal{G} \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*
a) $\mu(A) = 0$ si y sólo si $A \in \mathcal{G} \cap F_1(X)$;
b) $\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A, B \in \mathcal{G}$ y $A \subsetneq B$.

Cuando hablemos de una función de Whitney para $C(X)$, estaremos refiriéndonos a una función continua de $C(X)$ en $[0, \infty)$ que satisface las condiciones $a)$ y $b)$.

En [45, Teoremas 0.50.1, 0.50.2 y 0.50.3] se dan las construcciones de tres funciones de Whitney para 2^X las cuales existen en todos los hiperespacios.

Definición 1.28 *Sea $\mathcal{G} \in \{2^X, C(X)\}$. Una* ***función de Whitney normalizada*** *para $\mathcal{G}$, es una función de Whitney μ en $\mathcal{G}$ tal que $\mu(X) = 1$ (y entonces $0 \leq \mu(A) \leq 1$ para cada $A \in \mathcal{G}$).*

Notemos que toda función de Whitney en $\mathcal{G}$ se puede normalizar. En efecto $\mu_1 = \frac{\mu}{\mu(X)}$ es una función de Whitney normalizada, para cualquier función de Whitney μ.

Teorema 1.29 *[45, Lema 1.28] Sea μ una función de Whitney para 2^X. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ tal que si $A, B \in 2^X$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$, entonces $H(A, B) < \epsilon$.*

En 1981 L. E. Ward, Jr. demostró el siguiente teorema de extensión de las funciones de Whitney para subconjuntos cerrados de 2^X. Su demostración puede verse, por ejemplo, en [33, Teorema 16.10].

Teorema 1.30 *Sea $\mathcal{G}$ un subconjunto cerrado y no vacío de 2^X. Entonces cada función de Whitney en $\mathcal{G}$ se puede extender a una función de Whitney en 2^X.*

1.5.2. La Función Unión

Definimos de forma natural una función continua de 2^{2^X} en 2^X, uniendo los elementos de un cerrado de 2^{2^X}, como veremos a continuación:

Sea $\mathcal{F} \in 2^{2^X}$ y definimos $\sigma(\mathcal{F}) = \bigcup \{A \colon A \in \mathcal{F}\}$. Entonces

1) $\sigma(\mathcal{F}) \in 2^X$;

2) $\sigma : 2^{2^X} \to 2^X$ es una función continua;

3) si $\mathcal{F}$ es conexo y $\mathcal{F} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\sigma(\mathcal{F}) \in C(X)$.

Las demostraciones de 1) y 2) se encuentran en [45, Lema 1.48], y el inciso 3) se puede ver en [45, Lema 1.49].

A la función continua σ, definida anteriormente, se le llama la *función unión en 2^X*. De acuerdo con la afirmación 3), si restringimos σ a $C^2(X)$, obtenemos una función continua de $C^2(X)$ a $C(X)$, llamada la *función unión en $C(X)$*. Es precisamente dicha función la que emplearemos en este trabajo.

1.5.3. La Función Inducida

Cualquier función continua entre dos continuos X y Y induce, de manera natural, una función continua entre los hiperespacios $C(X)$ y $C(Y)$, según se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.31 *[2, Teorema 29] Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Si para cada $A \in C(X)$ definimos $C(f)(A) = \{f(a)\colon a \in A\}$, entonces $C(f)(A) \in C(Y)$ y la función $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$, así definida, es continua.*

A la función $C(f)$ definida en el teorema anterior, se le conoce como la *función inducida por* f.

1.6. Arcos Ordenados

Así como las funciones de Whitney, una herramienta muy poderosa en los hiperespacios de un continuo X, es la existencia de arcos ordenados.

Definición 1.32 *Sea $\mathcal{T} \in \left\{2^X, C(X)\right\}$. Supongamos que A, $B \in \mathcal{T}$ y $A \subsetneq B$. Un* **arco ordenado** *de A a B en $\mathcal{T}$ es una función continua $\lambda : I \to \mathcal{T}$, tal que $\lambda(0) = A$, $\lambda(1) = B$ y $\lambda(s) \subsetneq \lambda(t)$ siempre que $s < t$, para $s, t \in I$.*

Algunas veces identificaremos a un arco ordenado con su imagen. Como la función λ de la Definición 1.32 es inyectiva, su imagen es un arco. De manera que a veces denotaremos por λ a la función y otras a su imagen.

En el siguiente teorema, se muestran condiciones necesarias y suficientes para que un subcontinuo de 2^X sea un arco ordenado. Véase una demostración en [45, Teorema 1.4].

Teorema 1.33 *Sea Λ un subcontinuo no degenerado de 2^X. Entonces Λ es un arco ordenado si y sólo si dados $A, B \in \Lambda$, sucede que $A \subset B$ o $B \subset A$.*

Mencionaremos algunos resultados para arcos ordenados. De los resultados de 14.2 hasta 14.6 en [33], se tiene una condición de existencia de arcos ordenados: supóngase que A y B son subcontinuos de X tales que $A \subset B$ y $A \neq B$. Entonces existe un arco ordenado contenido en $C(X)$ cuyos extremos son A y B. En [45, Teorema 1.8], se demuestra el siguiente resultado: para que exista un arco ordenado de un elemento $A \in 2^X$ a un elemento $B \in 2^X$, se requiere que $A \subseteq B$ y que cada componente de B intersecte a A. En [45, Lema 1.3] se prueba el siguiente resultado: sean $\mu : 2^X \to I$ una función de Whitney en 2^X y Λ un arco ordenado en 2^X. Entonces la restricción $\mu|_\Lambda$ es un homeomorfismo.

El siguiente teorema se demuestra aplicando el Teorema del Valor Intermedio.

Teorema 1.34 *Sean $\mu : 2^X \to I$ una función de Whitney en 2^X y Λ un arco ordenado en 2^X. Si $A \in \Lambda$ entonces, para cada $\mu(A) \leq s \leq 1$, existe $B \in \Lambda$ tal que $\mu(B) = s$.*

Terminamos la presente sección con el siguiente resultado.

Teorema 1.35 *Sean X un continuo y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subset B$. Entonces existe un arco ordenado de A a X que pasa por B.*

Demostración. Sean $\alpha_1 : I \to C(X)$ un arco ordenado que va de A a B y $\alpha_2 : I \to C(X)$ un arco ordenado que va de B a X. Definamos $\alpha : I \to C(X)$ como

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha_2(2t-1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces α es un arco ordenado que va de A en X, pasando por B. □

1.7. La Propiedad de Kelley

En [34] J. L. Kelley definió una propiedad que hoy se conoce como propiedad de Kelley.

Definición 1.36 *Un continuo X tiene la* ***propiedad de Kelley*** *si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualesquiera $a, b \in X$ con $d(a, b) < \delta$ y para todo $A \in C(a, X)$, existe $B \in C(b, X)$ tal que $H(A, B) < \epsilon$.*

En particular J.L Kelley demostó que si un continuo X tiene la propiedad de Kelley, entonce $C(X)$ es contraíble.

Supongamos ahora que X es un continuo y que $\mu : C(X) \to I$ es una función de Whitney en $C(X)$. Para cada $(A, s) \in C(X) \times I$ definimos:

$$L_\mu(A, s) = \begin{cases} \bigcup \{K \in C(X) \colon A \subset K \text{ y } \mu(K) = s\}, & \text{si } \mu(A) \leq s. \\ A, & \text{si } s \leq \mu(A). \end{cases}$$

La función L_μ fue estudiada por primera vez en [1] en donde se muestran las siguientes propiedades, cuyas pruebas pueden verse en [1, Teorema 3.10], [1, Corolario 3.4] y [1, Teorema 3.11]:

1) Para cada $(A,s) \in C(X) \times I$, $L_\mu(A,s) \in C(X)$. Por tanto L_μ es una función de $C(X) \times I$ en $C(X)$.
2) $L_\mu(A,0) = A$ y $L_\mu(A,1) = X$, para cada $A \in C(X)$.
3) Cuando X tiene la propiedad de Kelley, la función L_μ es continua.
4) Si $A \in C(X)$, entonces $L_\mu(A,t) \subset L_\mu(A,s)$ siempre que $t, s \in I$ y $t \leq s$.

1.8. Continuos Especiales

En esta sección, hablaremos de n-odos, n-celdas, árboles y gráficas finitas.

1.8.1. n-odos y n-celdas

Dos conceptos ligados entre los hiperespacios y el continuo que los define son los de n-odos y n-celdas. Como veremos más adelante, cuando un continuo X contiene un n-odo, en el hiperespacio $C(X)$ aparece una n-celda y recíprocamente.

Definición 1.37 *Sean X un continuo y n un número natural. Un* ***n-odo*** *en X es un elemento $B \in C(X)$ para el cual existe un subcontinuo A de B tal que $B - A$ tiene al menos n componentes (en este caso, al continuo A le llamaremos* ***corazón*** *de B). Decimos que un continuo X es* ***atriódico*** *si no contiene 3-odos.*

Es claro que si X contiene un n-odo, entonces contiene un m-odo, para cada $m \leq n$. Un ejemplo muy especial de n-odo es el llamado n-odo *simple.*

Definición 1.38 *Sean X un continuo y n un número natural. Diremos que X es un* ***n-odo simple*** *con vértice $p \in X$, si X es un n-odo tal que:*

1) el corazón de X es el conjunto $\{p\}$;
2) $X - \{p\}$ posee exactamente n componentes $C_1, C_2, ..., C_n$ tales que, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, el conjunto $C_i \cup \{p\}$ es un arco.

Un triodo simple o 3-odo simple es, por tanto, un continuo homeomorfo a la letra T, mientras que un 4-odo simple es un continuo homeomorfo a la letra X. Con respecto a la relación entre n-odos en X y n-celdas en $C(X)$, J. T. Rogers, Jr. demostró, en 1972, el siguiente resultado.

Teorema 1.39 *[49, Teorema 1] Si el continuo X contiene un n-odo, entonces $C(X)$ contiene una n-celda.*

La implicación inversa del teorema anterior, estuvo abierta durante varios años. En 1988 A. Illanes demostró que es verdadera:

Teorema 1.40 *[27, Teorema 1.9] Sea X un continuo. Si el hiperespacio $C(X)$ contiene una n-celda, entonces X contiene un n-odo.*

Con la finalidad de encontrar continuos con hiperespacio único, G. Acosta probó en [5] una versión local del Teorema 1.39. A saber, si un n-odo T se encuentra en una bola en $C(X)$, entonces la n-celda se puede construir de modo que contenga al n-odo y sus elementos esten cercanos al centro de la bola inicialmente tomada.

Teorema 1.41 *[5, Lema 8] Sean X un continuo y $K \in C(X)$. Si T es un n-odo en X tal que para alguna $\epsilon > 0$ sucede que $T \in B_{C(X)}(K, \frac{\epsilon}{2})$, entonces existe una n-celda Γ en $C(X)$ tal que $T \in \Gamma \subset B_{C(X)}(K, \epsilon)$.*

Terminamos la sección con el siguiente resultado que utilizaremos en los capítulos 3 y 5.

Teorema 1.42 *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$.*

a) Si V es una n-celda en X y U es un abierto en X tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $U \cap V$ contiene una n-celda.

b) Si $V \subset X$ es homeomorfo al cubo de Hilbert y U es un abierto en X tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $U \cap V$ contiene un espacio homeomorfo al cubo de Hilbert.

Demostración. Para probar a), sean $V \subset X$ una n-celda y U un abierto en X tales que $U \cap V \neq \emptyset$. Sabemos que $V \cap U$ es un abierto de V y que $V \approx I^n$. Entonces $V \cap U \approx L$, donde L es un abierto de I^n. Po tanto, existe un abierto básico $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ contenido en L. Notemos que U_i es abierto en I, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. De aquí que, dada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe un intervalo $[\alpha_i, \beta_i]$ contenido en U_i. Es claro que $\prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i]$ es una n-celda. Además

$$\prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i] \subset U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subset L.$$

Esto prueba que L contiene una n-celda y, como $V \cap U \approx L$, tenemos que $V \cap U$ contiene una n-celda.

Para probar b), supongamos que $V \approx I^{\infty}$ y que $V \subset X$. Supongamos, además, que U es un abierto en X tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Como $U \cap V$ es abierto en V y $V \approx I^{\infty}$, sucede que $U \cap V \approx L$, donde L es un abierto de I^{∞}. Consideremos un abierto básico W de I^{∞} tal que $W \subset L$. Entonces

$$W = V_{\alpha_1} \times V_{\alpha_2} \times \cdots \times V_{\alpha_s} \times \prod \{I_\beta \colon I_\beta \approx I \text{ y } \beta \neq \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\},$$

donde V_{α_i} es un abierto en $I_{\alpha_i} \approx I$, para cada $i = 1, 2, ..., s$. Como en la situación anterior, cada abierto V_{α_i}, contiene un intervalo $[\gamma_{\alpha_i}, \eta_{\alpha_i}]$. Sea

$$W_1 =$$
$$\left[\gamma_{\alpha_1}, \eta_{\alpha_1}\right] \times \left[\gamma_{\alpha_2}, \eta_{\alpha_2}\right] \times \cdots \times \left[\gamma_{\alpha_s}, \eta_{\alpha_s}\right] \times \prod \{I_\beta \colon I_\beta \approx I \text{ y } \beta \neq \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}.$$

Entonces $W_1 \subset W \subset L$ y $W_1 \approx I^{\infty}$. Por tanto, L contiene un espacio homeomorfo a un cubo de hilbert. Como $L \approx U \cap V$, concluimos que $U \cap V$ también contiene un espacio homeomorfo a un cubo de Hilbert. □

1.8.2. Gráficas Finitas y Árboles

Recordemos que una *gráfica finita* es un continuo que se puede escribir como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos, o bien son ajenos o se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos. Un *árbol* es una gráfica finita acíclica, es decir, una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

El siguiente resultado sobre continuos localmente conexos y gráficas finitas, lo utilizaremos en los capítulos 4 y 5. Ya lo utilizamos, incluso, en la prueba del Teorema 1.20.

Teorema 1.43 *[34, Teoremas 5.4 y 5.5] Supongamos que X es un continuo localmente conexo. Entonces $dim(C(X)) < \infty$ si y sólo si X es una gráfica finita.*

1.9. Conjuntos Mutuamente Separados

Recordemos que dos subconjuntos A y B de un espacio topológico X están *mutuamente separados* si $\mathrm{cl}_X(A) \cap B = \emptyset$ y $\mathrm{cl}_X(B) \cap A = \emptyset$. Si un conjunto C es la unión de dos conjuntos mutuamente separados A y B, escribiremos $C = A \mid B$.

Los siguientes resultados pertenecen a la Topología General y los enunciaremos sin demostración. Sus demostraciones se pueden consultar, por ejemplo, en [42, Lemas 1.4 y 1.6].

Teorema 1.44 *Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X tal que $X - Y = A \mid B$. Entonces*
1) cuando Y es cerrado en X los conjuntos $Y \cup A$ y $Y \cup B$ también son cerrados en X;
2) cuando Y es conexo en X los conjuntos $Y \cup A$ y $Y \cup B$ también son conexos en X;
3) si X y Y son continuos, entonces los conjuntos $Y \cup A$ y $Y \cup B$ también son continuos.

Teorema 1.45 *Sean Y un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$ Entonces Y tiene al menos n componentes si y sólo si Y posee n subconjuntos cerrados no vacíos y ajenos dos a dos $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ tales que $Y = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_n$.*

Con este teorema terminamos de dar la información general de hiperespacios y continuos que utilizaremos en este trabajo.

Capítulo 2

LAS DENDRITAS

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos las propiedades de las dendritas que utilizaremos más adelante. Enunciemos algunas de estas propiedades:

1) Las dendritas son suaves en todos sus puntos (Teorema 2.8).
2) Las dendritas no contienen continuos de convergencia y son hereditariamente localmente conexas. (Teorema 2.10).
3) Las dendritas son uniformemente localmente conexos (Lema 2.13).

Mostraremos, además, algunos ejemplos especiales de dendritas, como las que no tienen arcos libres, así como las que aparecen cuando el conjunto de sus puntos extremos no es cerrado (W y F_ω, véase las secciónes 2.3 y 2.7). También daremos los conceptos de orden en un punto, puntos extremos, puntos ordinarios, puntos de ramificación y puntos esenciales.

En la Sección 2.7, definiremos la familia de dendritas $\mathfrak{D}$ para la cual obtendremos los resultados más importantes de este trabajo.

2.2. Las Dendritas y los Dendroides

Comencemos primero con la definición de dendrita.

Definición 2.1 *Una **dendrita** es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.*

Denotaremos por $\mathfrak{L}$ a la clase de las dendritas. Esta clase está contenida en una clase más amplia de continuos, que se llaman dendroides.

Definición 2.2 *Un continuo X es* ***unicoherente****, si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$, resulta que la intersección $A \cap B$ es conexa. Diremos que X es* ***hereditariamente unicoherente*** *si todos sus subcontinuos son unicoherentes. Un* ***dendroide*** *es un continuo hereditariamente unicoherente y conexo por trayectorias.*

Notemos que la circunferencia S^1 no es unicoherente. Para esto tomemos $A = \{(x, y) \in S^1 : y \geq 0\}$ y $B = \{(x, y) \in S^1 : y \leq 0\}$. Entonces $S^1 = A \cup B$, A y $B \in C(S^1)$ y $A \cap B = \{(1, 0), (-1, 0)\}$ no es conexo. Como consecuencia de lo anterior, tenemos que las curvas cerradas simples no son unicoherentes. Por ejemplo S^1 no es unicoherente.

Veamos que efectivamente las dendritas son dendroides.

Teorema 2.3 *Un continuo X es una dendrita si y sólo si X es un dendroide localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que X es un dendroide localmente conexo. Por lo escrito en el párrafo anterior, X no contiene curvas cerradas simples. De aquí, X es una dendrita. El recíproco de lo anterior es cierto y una prueba se obtiene de la Proposición 10.9 y del Teorema 10.10 de [46]. $\square$

Todo dendroide X posee las siguientes dos propiedades, que son fáciles de probar:

1) para cada $x, y \in X$ existe un único arco, con extremos x y y, el cual denotaremos por $[x, y]$;
2) todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide.

Aclaremos que si X es un dendroide y $x, y \in X$, el arco $[x, y]$ denotará el arco con puntos extremos x y y. Esto es $[x, y] = [y, x]$, con esto queremos decir que el orden no importa. Además, a menos que se diga lo contrario, entenderemos que un arco es un conjunto no degenerado. También denotaremos $(x, y) = [x, y] - \{x, y\}$, $[x, y) = [x, y] - \{y\}$, $(x, y] = [x, y] - \{x\}$ y $[x, x] = \{x\}$.

En los dendroides se puede definir una relación de orden parcial como sigue:

Definición 2.4 *Sean X un dendroide y $p \in X$. Definimos una* ***relación con respecto a p****, denotada por $\leq_p$, como sigue:*

$$x \leq_p y \text{ si y sólo si } x \in [p, y] .$$

Si $x \leq_p y$ y $x \neq y$, entonces escribiremos $x <_p y$.

Teorema 2.5 *Si X es un dendroide y $p \in X$, entonces la relación con respecto a p, "$\leq_p$", es un orden parcial.*

Demostración. Sean $x, y, z \in X$.

1) $x \leq_p x$, porque $x \in [p, x]$, por lo tanto, la relación $\leq_p$ es reflexiva.

2) Supongamos que $x \leq_p y$ y que $y \leq_p x$. Entonces $x \in [p, y]$ y $y \in [p, x]$. Si $x \in [p, y]$ tenemos que, por el hecho de que en X los arcos son únicos, necesariamente $[p, x] \subset [p, y]$. Como además $y \in [p, x]$, también tenemos que $[p, y] \subset [p, x]$, por lo que $[p, x] = [p, y]$ y $x = y$. Por lo cual, la relación $\leq_p$ es antisimétrica.

3) Supongamos que $x \leq_p y$ y $y \leq_p z$. Entonces $x \in [p, y]$ y $y \in [p, z]$. Como $x \in [p, y] \subset [p, z]$, tenemos que $x \leq_p z$. Por lo tanto, la relación $\leq_p$ es transitiva. $\square$

Observación 2.6 *Notemos que si X es un dendroide, $p \in X$ y $x \leq_p y$ en X, entonces*

$$[x, y] = \{z \in X : x \leq_p z \leq_p y\} .$$

Definición 2.7 *Sean X un dendroide y $p \in X$. Diremos que X es* ***suave en*** *p si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $\lim x_n = x$, se tiene $\lim [p, x_n] = [p, x]$. Diremos que X es* ***suave*** *si es suave en algún $p \in X$.*

La definición de dendroide suave fue introducida por C. Eberhart y J. J. Charatonik en 1970, en [12]. S. Macías realizó un amplio estudio en este tema que se encuentra publicado en [37].

Existe un gran número de caracterizaciones y propiedades de las dendritas. Algunas de ellas se encuentran en [13]. A continuación mencionamos, una de ellas, en terminos de la definición anterior.

Teorema 2.8 *[36, Teorema 8] Sea X un dendroide. Entonces X es una dendrita si y sólo si X es suave en todos sus puntos.*

Otros conceptos relacionados con las dendritas, son los siguientes.

Definición 2.9 *Un subcontinuo no degenerado A de un continuo X es un* ***continuo de convergencia*** *de X, si existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$ y $A \cap A_n = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Un continuo X es* ***hereditariamente localmente conexo*** *si todo subcontinuo de X es localmente conexo.*

Teorema 2.10 *Las dendritas no contienen continuos de convergencia y son hereditariamente localmente conexas.*

Demostración. En [46, Teorema 10.4] se prueba que un continuo X es hereditariamente localmente conexo si y sólo si X no contiene continuos de convergencia. Ahora bien, la prueba de que las dendritas son hereditariamente localmente conexas se sigue del Teorema 10.2, el Ejercicio 5.30 y la aplicación del Teorema 10.4 de [46]. Esto está contenido en [46, Corolario 10.5]. $\square$

Corolario 2.11 *Todo subcontinuo de una dendrita es una dendrita.*

Demostración. Sean X una dendrita y A un subcontinuo de X. Como X es hereditariamente localmente conexo, resulta que A es localmente conexo. Si A contiene una curva cerrada simple, entonces X también. Por tanto A no contiene curvas cerradas simples. Esto prueba que A es una dendrita. $\square$

También tenemos, el siguiente concepto relacionado con las dendritas.

Definición 2.12 *Un espacio métrico (X, d) es* ***uniformemente localmente conexo*** *(lo denotaremos por ULC), si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces existe un subconjunto conexo R de X tal que $x, y \in R$ y $\text{diám}(R) < \epsilon$.*

Una consecuencia del lema siguiente, es que las dendritas son uniformemente localmente conexos.

Lema 2.13 *[46, 8.42, (b)] Un espacio métrico compacto (X, d) es localmente conexo si y sólo si (X, d) es uniformemente localmente conexo.*

Observación 2.14 *Sea X una dendrita. Como X es ULC, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x,y) < \delta$, entonces existe un subconjunto arcoconexo R de X tal que $x, y \in R$ y diám$(R) < \epsilon$. Sea $q \in B(p,\epsilon)$ con la propiedad de que $d(q,p) < \delta$ entonces, existe un arcoconexo S en X tal que $q, p \in S$ y diám$(S) < \epsilon$. Así que, el subconjunto S está contenido en la bola $B(p,\epsilon)$.*

Ahora probaremos un lema que será utilizado en el Capítulo 4.

Lema 2.15 *Sean X una dendrita y $t \in (a,b) \subseteq M \in C(X)$. Supongamos que $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X)$ que converge a M. Entonces, para alguna $N \in \mathbb{N}$, $t \in M_n$ si $n > N$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $t \notin M_n$ para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(a,\epsilon)$, $B(t,\epsilon)$ y $B(b,\epsilon)$ son ajenas dos a dos. Ya que X es ULC, existe $\delta > 0$ para $\frac{\epsilon}{2}$, la cual cumple las propiedades mencionadas en la Observación 2.14.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $H(M, M_n) < \text{mín}\{\epsilon, \delta\}$. Tomemos $a_1 \in M_n \cap B(a,\epsilon)$, $b_1 \in M_n \cap B(b,\epsilon)$ tales que $d(a_1,a) < \delta$ y $d(b_1,b) < \delta$. Por la Observación 2.14 existen dos subconjuntos arcoconexos S_1, S_2 en X tales que $a_1, a \in S_1$ con diám$(S_1) < \epsilon$, y $b_1, b \in S_2$ con diám$(S_2) < \epsilon$. Así que S_1, está contenido en la bola $B(a,\epsilon)$, y S_2 está contenido en la bola $B(b,\epsilon)$. Sea a_2, la primera vez que el arco $[a_1,a]$ intersecta al arco $[a,t]$ (o a su prolongación por el punto a, pero dentro de la bola $B(a,\epsilon)$). Llamemos b_2 a la primera vez que el arco $[b_1,b]$ intersecta al arco $[b,t]$ (o a su prolongación por el punto b, pero dentro de la bola $B(b,\epsilon)$). Como M_n es arcoconexo y $a_1, b_1 \in M_n$, entonces el arco $[a_1,a_2] \cup [a_2,t] \cup [t,b_2] \cup [b_2,b_1]$ está contenido en M_n, porque M_n es una dendrita y el arco que une a a_1 y b_1 es único. Así que $t \in M_n$, lo cual es una contradicción. Esto demuestra el teorema. $\square$

2.3. La Definición de Orden

En esta sección estudiaremos la noción de orden. Aunque dicha noción se puede presentar para puntos de un espacio topológico arbitrario (véase, por ejemplo, [35, página 274]), en este trabajo la utilizaremos únicamente para puntos de un dendroide o bien de una gráfica finita. En dicha situación, el orden en un punto es un número natural, el cardinal $\aleph_0$ o bien el ordinal ω.

Denotaremos $card(A)$ la cardinalidad del conjunto A. Además, denotaremos $\mathfrak{c} = card(\mathbb{R})$ y $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Definición 2.16 *Sea X un dendroide o bien una gráfica finita. Dado $p \in X$, el orden de X en p, denotado por $ord(p, X)$, queda determinado como sigue:*

1) *$ord(p, X) = n$ si $X - \{p\}$ tiene justo n componentes.*
2) *$ord(p, X) = \aleph_0$ si $X - \{p\}$ tiene una cantidad numerable de componentes cuyo diámetro no tiende a cero.*
3) *$ord(p, X) = \omega$ si $X - \{p\}$ tiene una cantidad numerable de componentes cuyo diámetro tiende a cero.*

En [52] se demuestra que la noción de orden que damos en la definición anterior es equivalente a la dada en [35, página 274]. Para 1) véase [52, (1.1), página 88], para 3) véase [52, (2.6), página 92] y para 2) véase [35, página 274].

Ahora damos las definiciones de punto extremo, punto ordinario y punto de ramificación en un dendroide o bien en una gráfica finita, las cuales utilizaremos con mucha frecuencia en este trabajo.

Definición 2.17 *Sean X un dendroide o una gráfica finita, y $p \in X$.*

a) *Si $ord(p, X) = 1$, diremos que p es un* ***punto extremo de*** *X.*
b) *Si el $ord(p, X) = 2$, diremos que p es un* ***punto ordinario*** *de X.*
c) *Si $ord(p, X) \geq 3$, diremos que p es un* ***punto de ramificación*** *de X.*

Dado un dendroide o una gráfica finita X, denotaremos por $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$ a los conjuntos de puntos extremos, puntos ordinarios y puntos de ramificación, respectivamente.

Por [46, Teorema 9.10], cualquier gráfica finita G satisface las dos condiciones siguientes:

1) $\mathrm{ord}(p, G) < \aleph_0$ para toda $p \in G$;
2) $\mathrm{ord}(p, G) \leq 2$ para todos excepto un número finito de elementos $p \in G$.

Por 2), el conjunto $R(G)$ es finito. Por 1) y la definición de gráfica finita, el conjunto $E(G)$ es finito. Todos los puntos restantes, tiene orden igual a 2 y así el conjunto $O(G)$ es denso en G.

Para ilustrar la noción de orden consideremos, en $\mathbb{R}^2$, los dos dendroides siguientes.

El primero no será localmente conexo y se define como sigue:

$$X = (\bigcup_{n=1}^{\infty} [q, a_n]) \cup [q, q_1]\,,$$

donde $q = (0,0)$, $q_1 = (1,0)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$, $[q, a_n]$ denota el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que une a q con a_n, y $[q, q_1]$ denota el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que une a q con q_1 (véase Figura 2.1). El dendroide X sólo tiene un punto de ramificación q y $\text{ord}(q, X) = \aleph_0$ (en este caso, $X - \{q\}$, tiene una cantidad numerable de componentes cuyo diámetro no tiende a cero).

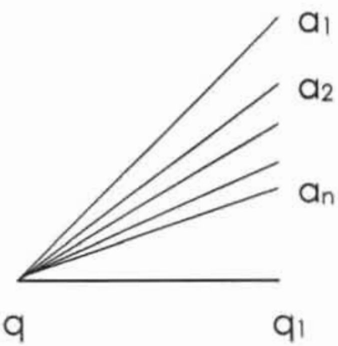

Figura 2.1

Los puntos a_n y el punto q_1 son los puntos extremos de X (observemos que el conjunto de puntos extremos de X es cerrado), q es el único punto de ramificación de X, los puntos restantes, son los puntos ordinarios de X.

Ahora consideremos el siguiente dendroide, el cual es localmente conexo (por lo tanto es un dendrita, véase Teorema 2.3):

$$F_\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} [p, a_n]\,, \tag{2.1}$$

donde $p = (0,0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ y $[p, a_n]$ denota el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que une a p con a_n (véase la Figura 2.2). La dendrita F_ω sólo tiene un punto de ramificación p y $\text{ord}(p, F_\omega) = \omega$ (en este caso, $F_\omega - \{p\}$, tiene una cantidad numerable de componentes cuyo diámetro tiende a cero).

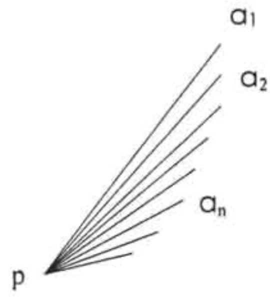

Figura 2.2

Los puntos a_n son los puntos extremos de F_ω (observemos que el conjunto de puntos extremos de F_ω no es cerrado), p es el único punto de ramificación de F_ω, los puntos restantes, son los puntos ordinarios de F_ω.

Aclaremos, que el inciso e) del Teorema 2.23 nos afirma, que ninguna dendrita contiene puntos de orden $\aleph_0$ ni $\mathfrak{c}$. En otras palabras: si X es una dendrita, entonces X contiene puntos de orden finito o de orden ω.

2.4. Puntos Esenciales de un Dendroide

En esta sección estudiaremos los puntos esenciales de un dendroide X, así como algunos resultados que involucran la dimensión de $C(X)$.

Definición 2.18 *Sean X un dendroide y $p \in X$. Decimos que*

1) p es ***I-esencial*** *si ord$(p, X) = \omega$, o bien ord$(p, X) = \aleph_0$.*
2) p es ***II-esencial*** *si existen un arco $[x, y]$ en X y una sucesión convergente $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [x, y]$ tal que $r_n \neq r_m$ si $n \neq m$ y lím$r_n = p$.*

En cualquiera de los casos anteriores, diremos que p es un punto ***esencial*** *de X.*

Al conjunto de puntos esenciales lo denotaremos por $S(X)$.

Teorema 2.19 *[43, Propiedades 1.2] Si X es un dendroide suave en un punto $p \in X$, entonces:*

1) $S(X) \neq \emptyset$ si y sólo si X no es un árbol;

2) si $[x,y]$ es un arco en X, entonces el conjunto $S(X) \cap [x,y]$ es cerrado en X;

3) si $p \in \mathrm{cl}_X(S(X))$, entonces $p \in S(X)$;

4) $p \in S(X)$ si y sólo si $p \notin \mathrm{int}_X(T)$ para ningún árbol contenido en X;

5) un elemento $A \in C(X)$ contiene un punto esencial de X si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$, la bola $B_{C(X)}(A, \epsilon)$ contiene un espacio homeomorfo a la n-celda I^n.

Teorema 2.20 *[48, Teorema 2.11] Supongamos que X es un dendroide suave en un punto p. Si $A \in C(p, X)$, entonces $A \cap S(X) \neq \emptyset$ si y sólo si, para cada $\epsilon > 0$, $dim(B_{C(X)}(A, \epsilon)) = \infty$.*

Utilizando este resultado y el inciso 5) del Teorema 2.19, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.21 *Supongamos que X es un dendroide suave en un punto $p \in X$. Si $A \in C(p, X)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) A contiene puntos esenciales;

2) para cada $\epsilon > 0$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$, $B_{C(X)}(A, \epsilon)$ contiene un espacio homeomorfo a I^n;

3) para cada $\epsilon > 0$, $dim(B_{C(X)}(A, \epsilon)) = \infty$.

Observemos que, si G es una gráfica finita contenida en una dendrita X, entonces G es un árbol, porque X no contiene curvas cerradas simples.

Combinando los teoremas 1.19, 2.8, 2.19 y 2.20 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.22 *Sean X una dendrita y $A \in C(X)$. Entonces A contiene un punto esencial si y sólo si $dim_A(C(X)) = \infty$.*

Demostración. Supongamos que $q \in A$ es un punto esencial. Por inciso 4) del Teorema 2.19, $q \notin \mathrm{int}(T)$ para ningún árbol T contenido en X. Luego, por la observación del parrafo anterior, $q \notin \mathrm{int}(G)$ para ningúna gráfica finita G contenida en X, y por el Teorema 1.19, $C(q, X) \approx I^\infty$. Como $A \in C(q, X)$ y I^∞ es homogéneo, $\dim_A(C(q, X)) = \infty$. Por el Teorema 1.5, $\dim_A(C(q, X)) \leq \dim_A(C(X))$, entonces $\dim_A(C(X)) = \infty$.

Ahora demostremos el recíproco. Supongamos que A no tiene puntos esenciales. Como $A \in C(X)$, A es una dendrita (por el Corolario 2.11). Por el Teorema 2.8, A es suave en todos sus puntos (y X también). Entonces por el Teorema 2.20, existe $\epsilon > 0$ tal que $\dim(B_{C(X)}(A, \epsilon)) < \infty$. Por tanto, para cualquier punto $R \in B_{C(X)}(A, \epsilon)$, tenemos que $\dim_R(C(X)) < \infty$. En particular, $\dim_A(C(X)) < \infty$. □

2.5. Los Conjuntos $E(X), O(X)$ y $R(X)$

Como se definió para dendroides (véase la Definición 2.17), dada una dendrita X y un punto p de X, distinguiremos ahora tres puntos especiales de X, según su orden. Denotaremos por $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$ a los conjuntos de puntos extremos, puntos ordinarios y puntos de ramificación de X, respectivamente. Es claro que, para cualquier dendrita X tenemos, que

$$X = O(X) \cup R(X) \cup E(X).$$

En el siguiente teorema escribimos una serie de resultados en torno a los puntos extremos, ordinarios y de ramificación de X. Recordemos que un conjunto G_δ de un espacio X es la intersección, a lo más numerable, de conjuntos abiertos de X. Un conjunto F_σ de un espacio X es la unión, a lo más numerable, de conjuntos cerrados de X.

Teorema 2.23 *Toda dendrita X satisface las siguientes, propiedades:*

a) *$dim(E(X)) = 0$ por lo que $E(X) \neq \emptyset$;*
b) *$E(X)$ es un conjunto G_δ en X;*
c) *$O(X)$ es denso en X;*
d) *$R(X)$ es a lo más numerable;*
e) *si $p \in X$, entonces $ord(p, X) \leq \omega$;*
f) *$E(X)$ es denso en X, si y sólo si $R(X)$ es denso en X;*
g) *si $p \in X$ y el número de componentes de $X - \{p\}$ es finito, entonces dicho número es igual al $ord(p, X)$.*

Demostración. La demostración de *a*) se encuentra en, [35, Teorema 2, página 292]. La demostración de *b*) se encuentra en, [35, Teorema 2, página 278]. La demostración de *c*) se encuentra en, [35, Teorema 8, página 302]. La demostración de *d*) se encuentra en, [35, Teorema 7, página 302].

La demostración de e) se encuentra en, [35, Teorema 4, página 301]. La demostración de g) se encuentra en, [35, Teorema 6, página 302]. La prueba de f) puede verse en [11, Teorema 2.4]. □

El inciso e) del Teorema anterior, nos afirma que ninguna dendrita contiene puntos de orden $\aleph_0$ o $\mathfrak{c}$. En otras palabras: Si X es una dendrita, entonces X contiene puntos de orden finito o de orden ω. Como veremos más adelante, las dendritas que consideraremos en los capítulos 3 y 5 no contienen puntos de orden ω.

2.6. Dendritas sin Arcos Libres

En esta sección veremos que existen dendritas no homeomorfas cuyos hiperespacios de subcontinuos son homeomorfos. Para definirlas necesitamos la siguiente noción.

Definición 2.24 *Un arco $[x,y]$ de una dendrita X es un* ***arco libre*** *en X, si el conjunto (x,y) es abierto en X.*

Supongamos ahora que L es un subconjunto de $\mathbb{N}-\{1,2\}$ o bien $L=\{\omega\}$. En [14, Teorema 6.2] se prueba que existe una dendrita D_L tal que

1) el $\mathrm{ord}(p,D_L)\in L$ para cada $p\in R(D_L)$;
2) para cada arco $[x,y]$ en D_L y cada $m\in L$, existe $p\in[x,y]$ tal que $\mathrm{ord}(p,D_L)=m$.

Si dos dendritas satisfacen las condiciones 1) y 2), para el mismo conjunto L, entonces son homeomorfas. Esto significa que, dado el conjunto L, la dendrita D_L asociada a L es única. En el caso en que $L=\{m\}$, para alguna $m\in\mathbb{N}\cup\{\omega\}-\{1,2\}$, entonces a la dendrita $D_{\{m\}}$ asociada a L, que denotaremos simplemente por D_m, la llamaremos *dendrita universal estándar de orden m*. De acuerdo a las condiciones 1) y 2) cada punto de ramificación de D_m es de orden m y, además, en cada arco es posible encontrar un punto de ramificación. Por tanto, el conjunto de puntos de ramificación que se encuentran en un arco de D_m, es denso en dicho arco. Como consecuencia de esto, la dendrita D_m no tiene arcos libres.

Una propiedad que utilizaremos de las dendritas D_m, es que su hiperespacio $C(D_m)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert I^∞. Esto es consecuencia del siguiente resultado de D. W. Curtis y R. M. Schori.

Teorema 2.25 *[16, Teorema 3.2 y Teorema 4.1] Si X es un continuo localmente conexo, entonces:*
1) 2^X es el cubo de Hilbert;
2) si X no contiene arcos libres, entonces $C(X) \approx I^\infty$;
3) $C(X) \times I^\infty \approx I^\infty$.

En [2, p. 21-23] se muestra como construir la dendrita D_3. Una aproximación a ella es la que se muestra en la Figura 2.3.

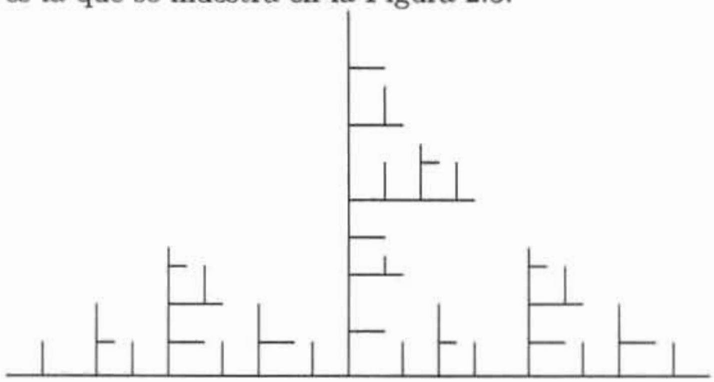

Figura 2.3

Ahora recordemos las definiciones de *$\mathcal{H}$-determinada y de hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$.*

Definición 2.26 *Supongamos que $\mathcal{H}(X)$ denota uno de los hiperespacios 2^X, $C(X)$, $F_n(X)$ o $C_n(X)$. Supongamos, además, que Γ es una familia de continuos diremos que;*

*1) Γ está $\mathcal{H}$-**determinada**, si para cualesquiera X y $Y \in \Gamma$ tales que $\mathcal{H}(X) \approx \mathcal{H}(Y)$ se tiene que $X \approx Y$.*
*2) X tiene **hiperespacio único** $\mathcal{H}(X)$ si es verdadera la siguiente implicación: si Y es un continuo y $\mathcal{H}(X) \approx \mathcal{H}(Y)$, entonces $X \approx Y$.*

El tópico de este trabajo se encuentra dentro del siguiente problema general.

Problema 2.27 *Encontrar condiciones que el continuo X debe satisfacer de manera que tenga hiperespacio único $C(X)$ o $C_n(X)$.*

Aunque ya lo mencionamos en la introducción, creemos que es necesario recordar algunos resultados referentes al tema de los continuos con hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$: generalizando resultados previos demostrados por R. Duda [18], S. B. Nadler, Jr. [45] y S. Macías [38], G. Acosta introdujo la noción de continuos con hiperespacio único $C(X)$ y probó que los siguientes continuos tienen hiperespacio único $C(X)$:

a) Gráficas finitas diferentes del arco y la curva cerrada simple [5].
b) Continuos hereditariamente indescomponibles [5].
c) Continuos indescomponibles tales que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos [6].
d) Compactaciones métricas del rayo $[0, \infty)$ con residuo no degenerado [3].
e) Compactaciones métricas de $(-\infty, \infty)$, diferentes del arco y con residuo disconexo [3].

También mencionamos, otros resultados relacionados con el problema del hiperespacio único:

f) Los continuos hereditariamente indescomponibles X tienen hiperespacio único 2^X [39, página 417].
g) Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio único $C_n(X)$ para cualquier $n \geq 1$ [41, Teorema 6.1].
h) Las gráficas finitas X tienen hiperespacio único $C_2(X)$ [31, Teorema 4.1].
i) Las gráficas finitas X tienen hiperespacio único $C_n(X)$, para cualquier $n \geq 2$ [30, Teorema 3.8].
j) Las dendritas X cuyo conjunto de puntos ordinarios es abierto, tienen hiperespacio único $F_2(X)$ [29, Teoremas 1 y 8].
k) Las gráficas finitas X tienen hiperespacio único $F_n(X)$ para $n \geq 2$ [10].

Retornando a las dendritas D_m, comentamos lo siguiente: Del inciso 2) del Teorema 2.25, tenemos que $C(D_m) \approx C(D_r)$, para cualesquiera $m, r \in \mathbb{N} \cup \{\omega\} - \{1, 2\}$. Si tomamos $m \neq r$, entonces por la unicidad de cada dendrita universal estándar, D_m y D_r son dendritas no homeomorfas cuyos hiperespacios de subcontinuos son homeomorfos. En terminos de la definición anterior esto significa que la familia $\mathfrak{L}$ de las dendritas no está C-determinada. Si queremos encontrar una familia de dendritas que esté C-determinada, debemos restringir la familia $\mathfrak{L}$ a una subfamilia $\mathfrak{D}$. Dicha subfamilia es la que empezaremos a estudiar a partir de la siguiente sección.

2.7. Dendritas cuyo Conjunto de Puntos Extremos es Cerrado

En una dendrita X nos conviene escribir el conjunto $E(X)$ como la unión de los conjuntos ajenos $E_1(X)$ y $E_2(X)$, en donde

$$E_2(X) = \{p \in X \colon p \text{ es un punto aislado de } E(X)\},$$

y $E_1(X) = E(X) - E_2(X)$. Naturalmente $E(X) = E_1(X) \cup E_2(X)$.

A partir de este momento la letra $\mathfrak{D}$ denotará la familia de dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado y con al menos un punto de ramificación. Así pues, si $\mathfrak{L}$ es la familia de las dendritas, entonces

$$\mathfrak{D} = \{X \in \mathfrak{L} \colon E(X) \text{ es cerrado y } X \not\approx I\}.$$

A la familia de dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado la denotaremos por $\mathfrak{D}^*$. Entonces

$$\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} \cup \{Y \in \mathfrak{L} \colon Y \approx I\}.$$

La familia $\mathfrak{D}^*$ fue estudiada y caracterizada en [9], utilizando dos dendritas especiales que definiremos a cotinuación: una de ellas es F_ω, la cual definimos en la Sección 2.3 (véase (2.1) y Figura 2.2).

La otra dendrita especial es la siguiente: para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $b_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $c = (-1, 0)$. Definimos

$$W = [c, b_1] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\} \right), \tag{2.2}$$

en donde $[c, b_1]$ es el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que une a c con b_1 y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n]$ es el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que une a_n con b_n (Figura 2.4). Denotamos por t el elemento $(0, 0)$ de W.

Notemos que el punto $p \in F_\omega$ es I-esencial (p es un punto de ramificación), mientras que el punto $t \in W$ es II-esencial (t es un punto ordinario de W). Consideraremos también a la dendrita $W_0 = W - [c, t)$ (t es un punto extremo de W_0). Notemos que el conjunto de puntos extremos de F_ω no es cerrado, lo mismo que el de W, pero el de W_0 sí es cerrado.

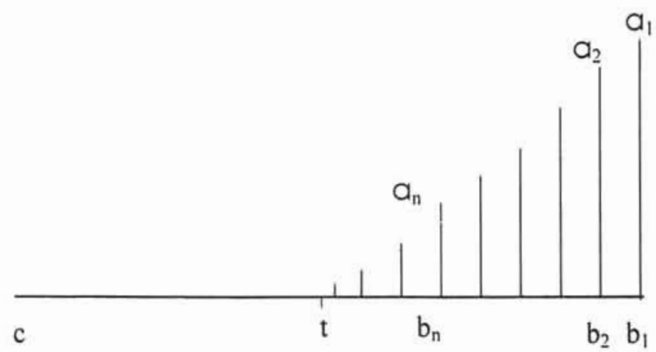

Figura 2.4

Teorema 2.28 *[9, Teorema 3.3] El conjunto de puntos extremos $E(X)$ de una dendrita X es cerrado si y sólo si X no contiene ningún subcontinuo homeomorfo a F_ω ni a W.*

En [9, Teorema 3.1 y Proposición 3.4] se prueban, respectivamente, los dos resultados siguientes.

Teorema 2.29 *Una dendrita X es un árbol si y sólo si X no contiene copias de F_ω ni de W_0.*

Teorema 2.30 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $R(X)$ tal que $r_n \neq r_m$ si $n \neq m$. Entonces $\lim r_n \in E(X)$.*

Supongamos que $X \in \mathfrak{D}$. Del Teorema 2.28 se sigue que el orden de cada punto de X es finito, pues X no contiene una copia de F_ω.

Teorema 2.31 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente en $E(X)$ tal que $e_n \neq e_m$ si $n \neq m$ y $\lim e_n = e \neq e_1$. Entonces existe una sucesión convergente $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [e, e_1]$ tal que $\lim r_n = e$. Además, X contiene una copia de W_0 cambiando t por e, a_n por e_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y b_n por r_n, para cada $n \geq 2$.*

Demostración. La prueba que presentamos se debe a G. Acosta. Notemos primero que $e \in E(X)$ ya que $E(X)$ es cerrado. Como $[e, e_1]$ y $[e, e_2]$ son arcos, $[e, e_1] \cap [e, e_2]$ también es un arco con e como uno de sus puntos extremos. Sea r_2 el otro punto extremo de $[e, e_1] \cap [e, e_2]$. Notemos que $r_2 \in R(X)$. Si $[e, r_2] \cap [e, e_n] = [e, r_2]$ para un número infinito de índices $n \geq 3$, entonces $[e, r_2] \subset [e, e_n]$ para dichos índices n. Luego, por la parte 1) del Teorema 1.25, $[e, r_2] \subset \text{lím } [e, e_n]$. Como X es suave en e y $\text{lím } e_n = e$, tenemos que $\text{lím } [e, e_n] = \{e\}$. Entonces $[e, r_2] \subset \{e\}$, lo cual es un absurdo. Esto demuestra que $[e, r_2] \cap [e, e_n] = [e, r_2]$ para un número finito de índices $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 3$. Supongamos, sin perder generalidad, que n_k es el mayor de ellos. Entonces $[e, r_2] \cap [e, e_n]$ es un subcontinuo propio de $[e, r_2]$, para cada $n > n_k$. En particular $[e, r_2] \cap [e, e_{n_{k+1}}]$ es un arco en donde e es uno de sus puntos extremos. Sea $r_{n_{k+1}}$ el otro punto extremo. Entonces $r_{n_{k+1}} \in (e, r_2)$ y $r_{n_{k+1}} \in R(X)$. Notemos que los arcos $[e_2, r_2]$ y $[e_{n_{k+1}}, r_{n_{k+1}}]$ son ajenos.

Con lo escrito en el párrafo anterior, hemos demostrado que existen un índice $n_{k+1} \geq 3$ y un punto de ramificación $r_{n_{k+1}}$ tal que $r_{n_{k+1}} <_e r_2$, de manera que los arcos $[e_2, r_2]$ y $[e_{n_{k+1}}, r_{n_{k+1}}]$ son ajenos. Mediante un reordenamiento de los índices que definen a la sucesión $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ podemos suponer, sin perder generalidad, que $n_{k+1} = 3$. De esta manera r_3 es un punto de ramificación tal que $r_3 \in (e, r_2)$ (por tanto, $r_3 <_e r_2$) y los arcos $[e_2, r_2]$ y $[e_3, r_3]$ son ajenos.

Continuando indefinidamente de esta manera, construimos una sucesión convergente $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [e, e_1]$ tal que $\text{lím } r_n = e$ (con $r_4 <_e r_3$, $r_3 <_e r_2$ y, en general, $r_n <_e r_{n-1}$ para $n \geq 3$).

La prueba de que $\text{lím } r_n = e$, es la siguiente. Aplicando el Teorema 2.8, tenemos que X es suave en e. Por tanto la sucesión de arcos $\{[e, e_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\{e\}$. Como consecuencia de esto, la sucesión de los diámetros de dichos arcos converge a cero. Esto implica que la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a e. Para terminar la prueba, basta notar que el continuo

$$[e, e_1] \cup \left(\bigcup \{[e_n, r_n] : n \geq 2\}\right)$$

es una copia de W_0, cambiando t por e, a_n por e_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y b_n por r_n para cada $n \geq 2$. □

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado, que relaciona los elementos de $E_1(X)$ con puntos II-esenciales de X.

Teorema 2.32 *Si $X \in \mathfrak{D}$, entonces*

$$E_1(X) = \{p \in X : p \text{ es un punto II-esencial}\}.$$

Demostración. Supongamos primero que p es II-esencial. Entonces existen un arco $[x, y]$ en X y una sucesión convergente $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [x, y]$ tal que $r_n \neq r_m$ si $n \neq m$ y $\lim r_n = p$. En [9, Proposición 3.4] se demuestra que, a partir de la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se puede construir una sucesión convergente $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $E(X)$ tal que $\lim e_n = p$. Como $X \in \mathfrak{D}$, $p \in E_1(X)$.

Ahora supongamos que $p \in E_1(X)$. Entonces existe una sucesión convergente $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $E(X)$ tal que $e_n \neq e_m$ si $n \neq m$ y $\lim e_n = p$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $e_1 \neq p$. Entonces, por el Teorema 2.31, existe una sucesión convergente $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [p, e_1]$ tal que $r_n \neq r_m$ si $n \neq m$ y $\lim r_n = p$. Entonces p es II-esencial. □

En el siguiente resultado, mostraremos que los subcontinuos de las dendritas X, que están en la familia $\mathfrak{D}$ y no tienen puntos en el conjunto $E_1(X)$, son árboles.

Teorema 2.33 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $A \in C(X)$ tales que $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Entonces A es un árbol.*

Demostración. Supongamos que A no es un árbol. Por el Teorema 2.29, y el hecho de que el orden de cada punto de X es finito, A contiene una copia de W_0. Sin pérdida de generalidad supongamos que esta copia es $W_0 = W - [c, t)$ (véase la definición de W, en la página 34). Es claro que $t \in A \cap E_1(X)$, contradiciendo la hipótesis. □

Si $X \in \mathfrak{D}$ es posible aproximar a X por árboles contenidos en X que no contienen puntos de $E_1(X)$.

Teorema 2.34 *Sea $X \in \mathfrak{D}$. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un árbol $G \in B_{C(X)}(X, \epsilon)$ tal que $G \cap E_1(X) = \emptyset$.*

Demostración. Por [24, Teorema 2] existe un árbol T contenido en X tal que $H(T, X) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $T \cap E_1(X) = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$. Entonces existen conjuntos conexos y ajenos dos a dos U_i, $i = 1, 2, ..., m$ conteniendo e_i respectivamente, los cuales son abiertos en T y cuyo diámetro es menor que $\frac{\epsilon}{2}$.

Más aún, podemos escoger U_i de tal manera que $U_i \cap R(T) = \emptyset$. Por lo tanto, cada U_i es un arco y $G = T - \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ es un árbol, el cual tiene las propiedades que se piden en el teorema. □

En el siguiente teorema presentamos otra caracterización de la familia $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} \cup \{Y \in \mathfrak{L} \colon Y \approx I\}$ (véase Teorema 2.28).

Teorema 2.35 *Sea X una dendrita. Entonces $X \in \mathfrak{D}^*$ si y sólo si, (*) para cada elemento A en $C(X)$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que lím $A_n = A$ y $dim_{A_n}(C(X)) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{D}^*$. Si $X \approx I$, la condición (*) es inmediata. Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $A \in C(X)$. Por Teorema 2.28, $A \in \mathfrak{D}$ y, por el Teorema 2.34, dada $\epsilon > 0$, existe un árbol $G \in B_{C(X)}(A, \epsilon)$ tal que $G \cap E_1(X) = \emptyset$. Por el Teorema 2.32, G no tiene puntos esenciales. Luego, por el Teorema 2.22, la dimensión del espacio $C(X)$ en el punto G es finita. De donde obtenemos la condición (*).

Inversamente, supongamos que $X \notin \mathfrak{D}$ o X que no es un arco. Entonces su conjunto de puntos extremos, $E(X)$, no es cerrado. Por lo cual por el Teorema 2.28, X contiene una copia de W o una copia de F_ω. Primero supongamos que X contiene una copia de W (véase la definición de W en la página 34). Sean $t = (0,0)$ el punto esencial de W, $b_1 = (1,0)$ y $c = (-1,0)$ como se definieron en la página 34. Sea $A = [c, b_1] \subset W$, tal que $t \in (c, b_1)$. Además, como se tiene la condición (*), existe una sucesión $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que lím $J_n = [c, b_1]$ y $\dim_{J_n}(C(X)) < \infty$. Por lo tanto, J_n no tiene puntos esenciales, de donde $t \notin J_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, por el Lema 2.15, para alguna $N \in \mathbb{N}$, $t \in J_n$ si $n > N$. Lo cual es una contradicción.

Ahora supongamos que X contiene una copia de F_ω (véase la definición de F_ω en la página 27). Sea $p = (0,0)$ el punto esencial de F_ω, como se definió en la página 27. Sea $A = [c, r] \subset F_\omega$, tal que $p \in (c, r)$. Usando los mismos argumentos como en el caso anterior (cuando $W \subset X$), llegamos a una contradicción. Así que, necesariamente $X \in \mathfrak{D}^*$. □

Recordemos la definición de Continuo Universal de una familia.

Definición 2.36 *Sean Δ una familia de continuos y $M \in \Delta$. Diremos que M es **universal en la familia** Δ, si todo elemento de la familia está* *encajado en M, es decir si para cada $X \in \Delta$ existe un homeomorfismo $h : X \to h(X) \subset M$.*

Por ejemplo el cubo de Hilbert es universal en la familia de continuos (es un continuo en el cual esta encajado cualquier otro continuo). Una prueba de esto puede verse en [32, Teorema 1.2]. En [46, Teorema 12.22] se prueba que la familia de continuos encadenables tiene un elemento universal.

Para la familia de las dendritas existe una dendrita universal (véase [46, Ejemplo 10.37]). También para la familia de las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado, se tiene una dendrita universal (véase Teorema 2.38) y es lo que demostraron D. Arévalo, W. J. Charatonik, P. Pellicer y L. Simón. El siguiente resultado es un corolario del Teorema 2.28.

Teorema 2.37 *[9, Teorema 3.2, p. 3] La propiedad de ser una dendrita con el conjunto de puntos extremos cerrado es hereditaria, es decir, cada subcontinuo de una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado, es una dendrita con el conjunto de puntos extremos cerrado.*

En [9, p. 7 y 8] se construye la dendrita G_ω, la cual tiene las siguientes propiedades:

a) $\mathrm{ord}(p, G_\omega)$ es finito para cada $p \in G_\omega$;
b) $E(G_\omega)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor;
c) para cada número natural n y para cada arco maximal α contenido en G_ω, existe un punto $q \in \alpha$ tal que $\mathrm{ord}(q, G_\omega) \geq n$.

Esta dendrita es universal para la familia $\mathfrak{D}^*$.

Teorema 2.38 *[9, Teorema 4.2] La dendrita G_ω es universal para la familia de todas las dendritas X cuyo conjunto de puntos extremo es cerrado.*

Capítulo 3

HIPERESPACIO ÚNICO

3.1. Introducción

A partir de este capítulo, nos centraremos en el siguiente problema: encontrar condiciones bajo las cuales un continuo X tiene hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$ en el sentido en que se dio en la Definición **??**.

El resultado principal de este capítulo es: si $X \in \mathfrak{D}$, entonces X tiene hiperespacio único (Teorema 3.22). Su demostración estará dividida en tres pasos. Primero demostraremos que la familia $\mathfrak{D}$ está C-determinada. (Teorema 3.13). Usando el resultado anterior probaremos que, para cada $X \in \mathfrak{D}$ y cada dendrita Y, la relación $C(X) \approx C(Y)$ implica que $X \approx Y$. Finalmente demostraremos el Teorema 3.22, a partir de los resultados anteriores.

3.2. La Familia $\mathfrak{D}$ Está C-determinada

En esta sección probaremos que la familia $\mathfrak{D}$ está C-determinada. Para esto necesitaremos hablar de la frontera como variedad de un 2-variedad con frontera.

Definición 3.1 *Sea n un número natural. Un espacio métrico separable Y es una n-**variedad**, si y sólo si cada punto de Y está contenido en una vecindad que es homeomorfa al n-espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ (véase [15, Definición 1.G.12]). Una n-**variedad con frontera** es un espacio métrico y separable $\mathcal{M}$, donde cada punto tiene una vecindad que es homeomorfa a I^n. El*

interior como variedad *de la n- variedad con frontera $\mathcal{M}$ (denotada por $vint(\mathcal{M})$), consiste de todos los puntos de $\mathcal{M}$ que tienen vecindades en $\mathcal{M}$, que son homeomorfas al n- espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$; la* ***frontera como variedad*** *de $\mathcal{M}$ (denotada por $\partial\mathcal{M}$) consiste de todos los puntos de $\mathcal{M}$ que no están en el interior como variedad de $\mathcal{M}$.*

Si $\mathcal{M}$ es una n-variedad con frontera y $h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es un homeomorfismo, entonces $h(\mathrm{vint}(\mathcal{M})) = \mathrm{vint}(\mathcal{M})$ y $h(\partial\mathcal{M}) = \partial\mathcal{M}$. En [47, Teorema 19.33] y [47, Teorema19.34], respectivamente, se tienen los siguientes resultados.

Lema 3.2 *Sea n un número natural.*

a) Si I^n es una n-celda en $\mathbb{R}^n$, entonces $\partial I^n = \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n}(I^n)$. Por tanto la frontera como variedad de cualquier n-celda es una $(n-1)$-esfera y el interior como variedad de cualquier n-celda es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.
b) Si V y W son n-celdas tales que $V \subset W$, entonces $V - \partial V$ es un abierto en W.

En particular, si $\mathcal{V}$ es una 2-celda y $h : I^2 \to \mathcal{V}$ es un homeomorfismo, entonces $h(\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^2}(I^2)) = \partial\mathcal{V}$ y $\partial\mathcal{V}$ es una 1-esfera. Por tanto

$$\partial\mathcal{V} = \left\{y \in \mathcal{V} \colon y = h(x) \text{ para alguna } x \in \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^2}(I^2)\right\}.$$

En ocasiones a $\partial\mathcal{V}$ le llamaremos el *contorno de* $\mathcal{V}$. Si necesitamos hablar del contorno de 2-celdas en espacios distintos, entonces usaremos subíndices para distinguirlas. Así $\partial_X(\mathcal{V})$ denotará el contorno de $\mathcal{V}$ en X.

Para un continuo X, consideremos el siguiente subconjunto de $C(X)$

$$\Omega(X) = \left\{ \begin{array}{r} A \in C(X) \colon \text{existe una una 2-celda } \mathcal{V} \text{ en } C(X) \text{ tal que} \\ A \in \mathrm{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_{C(X)}(\mathcal{V}) \end{array} \right\}.$$

En el siguiente resultado determinamos el contorno del hiperespacio de subcontinuos de un arco J, así como su conjunto $\mathrm{cl}_{C(J)}(\Omega(J))$.

Lema 3.3 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq a < b$ y $J = [a, b]$. Entonces*

a) $C(J)$, es una 2-celda tal que $\partial C(J) = C(a, J) \cup C(b, J) \cup F_1(J)$,
b) $\mathrm{cl}_{C(J)}(\Omega(J)) \approx S^1$.

Demostración. Como los hiperespacios de continuos homeomorfos son homeomorfos, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a = 0$ y $b = 2$. Sea L el triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vertices $a = (0,0)$, $b = (2,0)$ y $c = (1,2)$. Consideremos los segmentos de recta $P = [a,b]$, $Q = [a,c]$ y $R = [b,c]$. Dado $A = [e,d] \in C(J)$ podemos considerar $g(A) = \left(\frac{e+d}{2}, d-e\right)$. Es fácil ver que $g(A) \in L$. Esto define una función $g : C(J) \to L$ que es biyectiva y continua. Por tanto, g es un homeomorfismo. Esto prueba que $C(J)$ es una 2-celda. Ahora bien, por el inciso $a)$ del Lema 3.2, $\partial L = P \cup Q \cup R$ y como $g(C(a,J)) = Q$, $g(C(b,J)) = R$, $g(F_1(J)) = P$ y g es un homeomorfismo, resulta que

$$\partial C(J) = C(a,J)) \cup C(b,J) \cup F_1(J).$$

Esto termina la primera parte de la demostración. Para probar la segunda parte también suponemos, sin pérdida de generalidad, que $a = 0$ y $b = 2$. Mostraremos que $\mathrm{cl}_{C(J)}(\Omega(J)) = \partial C(J)$. Para ver esto utilizaremos el homeomorfismo $g : C(J) \to L$ que definimos en la primera parte. El conjunto $\Omega(J)$ está definido mediante propiedades topológicas. Como g es un homeomorfismo, entonces los elementos de $g(\Omega(J))$ también cumplen dichas propiedades topológicas. Afirmamos que $K \in g(\Omega(J))$ si y sólo si $K \in P \cup Q \cup R$. Si $K \in P \cup Q \cup R$, L es una 2-celda tal que $K \in \mathrm{int}_L(L) \cap \partial(L)$. Por la definición del conjunto $\Omega(g(L))$, tenemos que $K \in \Omega(g(L)) = g(\Omega(J))$. Ahora supongamos que $K \in L - (P \cup Q \cup R)$. Luego $K \in L - \partial L$. Sea $\mathcal{V}$ una 2-celda en L tal que $K \in \partial_L(\mathcal{V})$. Por tanto, para todo $\epsilon > 0$ $B_L(K,\epsilon) \cap (L - \mathcal{V}) \neq \emptyset$. De donde $B_L(K,\epsilon)$ no está contenida en $\mathcal{V}$. De aquí $K \notin \mathrm{int}_L(\mathcal{V})$. Esto demuestra que para cualquier 2-celda $\mathcal{V}$ en L ($\mathcal{V} \neq L$), con $K \notin P \cup Q \cup R$, no puede ocurrir que $K \in \mathrm{int}_L(\mathcal{V}) \cap \partial(\mathcal{V})$. Por tanto $K \notin g(\Omega(J))$. Esto prueba nuestra afirmación, $g(\Omega(J)) = P \cup Q \cup R$. De aquí $g(\mathrm{cl}_{C(J)}(\Omega(J))) = \mathrm{cl}_L(P \cup Q \cup R) = P \cup Q \cup R = \partial L$. Como $g(\partial C(J)) = \partial L$, y g es un homeomorfismo, entonces $\mathrm{cl}_{C(J)}(\Omega(J)) = \partial C(J)$. Se tienen los siguientes homeomorfismos, $\mathrm{cl}_{C(J)}(\Omega(J)) = \partial C(J) \approx \partial L$ y $\partial L \approx S^1$. De aquí $\mathrm{cl}_{C(J)}(\Omega(J)) \approx S^1$. Con esto terminamos la prueba de la segunda parte y, por tanto, la demostración del lema. $\square$

Como hemos visto en el lema anterior, el arco es un ejemplo de un continuo X para el cual $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \not\approx X$. En el siguiente ejemplo mostraremos que un triodo simple es un ejemplo de un continuo X para el cual $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx X$. Por simplicidad denotaremos $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ como $\mathrm{cl}(\Omega(X))$ (cuando no haya peligro de confución), pero cuando sea necesario distinguir, escribiremos $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$.

Ejemplo 3.4 *Para el triodo simple T, mostrado en la parte izquierda de la Figura 3.1, sucede que* $\mathrm{cl}_{C(T)}(\Omega(T)) \approx T$. *Para ver esto, notemos primero que $C(T)$ es homeomorfo al "cubo con alas" que se muestra en la parte derecha de la Figura 3.1. En dicha figura hay tres triángulos que se intersectan con el cubo en tres lados diferentes, segun se indica. Como demostraremos más adelante,* $\mathrm{cl}_{C(T)}(\Omega(T))$ *es la unión de los tres segmentos que en el dibujo de $C(T)$ aparecen resaltadas en líneas más gruesas. Dicha unión es un triodo simple. Por tanto* $\mathrm{cl}_{C(T)}(\Omega(T)) \approx T$.

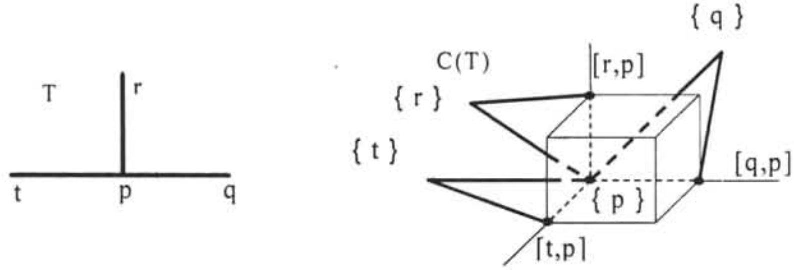

Figura 3.1

En el Teorema 3.11 mostraremos que $cl(\Omega(X)) \approx X$, para cada $X \in \mathfrak{D}$. Para ver esto necesitamos mencionar algunas propiedades de $\Omega(X)$ y sus elementos. Comenzaremos con el siguiente resultado.

Lema 3.5 *Sea X un continuo. Si $A \in \Omega(X)$, entonces $dim_A(C(X)) \leq 2$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Puesto que $A \in \Omega(X)$, existe una 2-celda $\mathcal{V}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathrm{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_{C(X)}(\mathcal{V})$. Sea $\mathcal{V}_1$ un abierto en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$. Entonces $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}_1$ es un abierto contenido en $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$. Como $\mathcal{V}$ es una 2-celda, existe un abierto $\mathcal{V}_2$ de $\mathcal{V}$, tal que $A \in \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_1$, y $\dim(\mathrm{Fr}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}_2)) \leq 1$. De aquí que existe un abierto $\mathcal{W}$ de $C(X)$ tal que $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Ya que $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$, tenemos que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{W}$ y $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Por tanto $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{W}$. El conjunto $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{W}$ es un abierto en $C(X)$. De donde $\mathcal{V}_2$ es un abierto de $C(X)$. En resumen, tenemos que $\mathcal{V}_2$ es abierto en $C(X)$, $\mathcal{V}$ es cerrado en $C(X)$ y $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$. Luego, por el Teorema 1.1, $\mathrm{Fr}_{C(X)}(\mathcal{V}_2) = \mathrm{Fr}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}_2)$. Pero sabemos que $\dim(\mathrm{Fr}_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}_2)) \leq 1$, de aquí que $\dim(\mathrm{Fr}_{C(X)}(\mathcal{V}_2)) \leq 1$. Como $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}$, por la Definición 1.3, concluimos que $\dim_A(C(X)) \leq 2$. $\square$

Ahora mostraremos que, para $X \in \mathfrak{D}$, los elementos de $\Omega(X)$ no contienen puntos de ramificación de X ni puntos II-esenciales.

Lema 3.6 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $A \in \Omega(X)$. Entonces $A \cap E_1(X) = \emptyset$ y $A \cap R(X) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $r \in A \cap E_1(X)$. Puesto que $r \in E_1(X)$, por el Teorema 2.32, se sigue que r es un punto II-esencial. Utilizando el Teorema 2.22 resulta que $\dim_A(C(X)) = \infty$. Pero, por el Lema 3.5, $\dim_A(C(X)) \leq 2$ lo cual es una contradicción. Esto muestra que $A \cap E_1(X) = \emptyset$.

Supongamos ahora que $A \cap R(X) \neq \emptyset$. Como $A \in \Omega(X)$, existe una 2-celda $\mathcal{V}$ en $C(X)$ tal que $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_{C(X)}(\mathcal{V})$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_{C(X)}(A, \epsilon) \subset \mathcal{V}$. Eligiendo un punto de ramificación $p \in A$ y usando el hecho de que el orden de p en X es finito, podemos construir un n-odo T, en X, con $n \geq 3$, con corazón $\{p\}$ y tal que $T \in B_{C(X)}(A, \frac{\epsilon}{2})$. Entonces por el Teorema 1.41, existe una n-celda Γ tal que $T \in \Gamma \subset B_{C(X)}(A, \epsilon) \subset \mathcal{V}$, lo cual es una contradicción. Por tanto $A \cap R(X) = \emptyset$. □

Dada $X \in \mathfrak{D}$, distinguiremos ahora dos tipos de arcos en X, los cuales utilizaremos con mucha frecuencia en este trabajo.

Definición 3.7 *Sea $X \in \mathfrak{D}$. Un arco $[p, q]$ es un **arco interno** de X si sus dos puntos extremos, y sólo ellos, son de ramificación. Esto es, $[p, q] \cap R(X) = \{p, q\}$. Diremos que $[p, q]$ es un **arco externo** de X si uno de sus puntos extremos es de ramificación, el otro es un punto extremo aislado de X y el resto son puntos ordinarios de X. Entonces $[p, q] \cap R(X) = \{p\}$ y $[p, q] \cap E_2(X) = \{q\}$ o bien $[p, q] \cap R(X) = \{q\}$ y $[p, q] \cap E_2(X) = \{p\}$.*

En la prueba del siguiente lema, que en realidad es un corolario del lema anterior, usaremos las nociones de arcos internos y externos de X, para caracterizar a los elementos de $\Omega(X)$.

Lema 3.8 *Sea $X \in \mathfrak{D}$. Entonces $A \in \Omega(X)$ si y sólo si A satisface una de las siguientes dos condiciones:*

a) $A = \{p\}$ en donde $p \in O(X) \cup E_2(X)$,
b) $A = [t, e] \subset X - R(X)$, en donde un punto extremo de A es un punto ordinario de X y el otro punto extremo de A, es un punto extremo aislado de X.

Demostración. Supongamos que $A \in \Omega(X)$. Por el Lema 3.6, $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Esto implica que $A \in F_1(X)$ o bien que A es un arco. Más aun, en el primer caso, si $A = \{p\}$ entonces $p \in X - (R(X) \cup E_1(X))$. Luego $p \in O(X) \cup E_2(X)$. Supongamos ahora que $A = [a, b]$ es un arco. Como A no tiene puntos de ramificación ni puntos II-esenciales. A está contenido en un arco $[p, q]$ que es interno o bien externo. Supongamos que $a <_p b <_p q$ (véase definición de $<_p$en la página 23). Como $A \in \Omega(X)$ existe una 2-celda $\mathcal{V}$ en $C(X)$ tal que $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_{C(X)}(\mathcal{V})$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subsetneq [p, q]$ y $0 < \epsilon < \delta$ tal que $B_{C(X)}(A, \epsilon) \subset \mathcal{V}$. Entonces $B_{C(X)}(A, \epsilon) \subsetneq C([p, q])$. Para ver esto tomemos un elemento $L \in B_{C(X)}(A, \epsilon)$. Entonces $L \subset N(\delta, A) \subsetneq [p, q]$, por lo que $L \in C([p, q]) - \{[p, q]\}$. Esto demuestra la contención $B_{C(X)}(A, \epsilon) \subsetneq C([p, q])$.

Tomemos un arco $J = [c, d] \in B_{C(X)}(A, \epsilon)$ tal que $a <_c b <_c d$. Procediendo como antes, es posible encontrar $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_{C(X)}(A, \epsilon_1) \subsetneq C(J)$. Como $\partial C(J) = C(c, J) \cup C(d, J) \cup F_1(J)$ (véase Lema 3.3) y, además, A y J no comparten puntos extremos, ϵ_1 puede escogerse de modo que $B_{C(X)}(A, \epsilon_1) \cap \partial C(J) = \emptyset$. Ahora bien, $C(J)$ es una 2-celda y $C(J) \subset \mathcal{V}$. Por el iciso b) del Lema 3.2, $C(J) - \partial C(J)$ es abierto en $\mathcal{V}$. Ya que $A \in C(J) - \partial C(J)$, sucede que A está en el interior como variedad de $\mathcal{V}$. Luego $A \notin \partial \mathcal{V}$, lo cual es una contradicción. Esto muestra que no puede suceder que $a <_p b <_a q$. Por consiguiente $[p, q]$ no es un arco interno. Entonces $[p, q]$ es un arco externo y tanto A como $[p, q]$ comparten un punto extremo.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $q \in E_2(X)$ y $p \in R(X)$. Como $A = [a, b]$ no tiene puntos de ramificación y comparte un punto extremo con $[p, q]$, podemos suponer que $b = q$. Entonces un punto extremo de A es ordinario y el otro es un punto extremo aislado de X, como se indica en b).
Esto termina la primera parte de la prueba.

Supongamos ahora que $A \in C(X)$ satisface a). Entonces $A = \{p\}$, en donde $p \in O(X) \cup E_2(X)$. Notemos que $\{p\} \subset [r, q]$, en donde $[r, q]$ es un arco interno o externo de X. En cualquier situación, $\mathcal{V} = C([r, q])$ es una 2-celda tal que $\{p\} \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial \mathcal{V}$, por lo que $A \in \Omega(X)$. Si $A \in C(X)$ satisface b), entonces $A = [t, e] \subset X - R(X)$ y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $t \in O(X)$ y $e \in E_2(X)$. Como $X \not\approx I$, existe un arco externo $J = [r, e]$ tal que $A \subset J$. Por la parte a) del Lema 3.3, $\partial C(J) = C(r, J) \cup C(e, J) \cup F_1(J)$. Es claro que $A \in C(e, J)$, así que $A \in \partial C(J)$.

Además $\mathcal{W} = C(J)$ es una 2-celda y $A \in \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{W})$. Luego $A \in \Omega(X)$. Esto termina la demostración del lema. $\square$

De aquí obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.9 *Sea $X \in \mathfrak{D}$. Si $A \in \Omega(X)$, entonces A está en un arco que es interno o bien externo en X.*

De acuerdo con el lema anterior

$$F_1(O(X) \cup E_2(X)) \subset \Omega(X).$$

De aquí que $\operatorname{cl}_{C(X)}(F_1(O(X) \cup E_2(X))) \subset \operatorname{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Ahora bien, como $F_1(O(X) \cup E_2(X)) \approx O(X) \cup E_2(X)$, y $O(X)$ es denso en X (véase el inciso 3) del Teorema 2.23), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cl}_{C(X)}(F_1(O(X) \cup E_2(X))) &= F_1(\operatorname{cl}_X(O(X) \cup E_2(X))) \\
&= F_1(\operatorname{cl}_X(O(X)) \cup \operatorname{cl}_X(E_2(X))) \\
&= F_1(X \cup \operatorname{cl}_X(E_2(X))) \\
&= F_1(X).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $F_1(X) \subset \operatorname{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Ahora mostraremos que $\operatorname{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ es un subconjunto de $C(X)$ "parecido a $F_1(X)$".

Teorema 3.10 *Dada $X \in \mathfrak{D}$, consideremos la familia $\mathfrak{M}$ de los arcos $[r, e]$ en X tales que $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$ o bien $e \in E_2(X)$ y $[r, e) \subset O(X)$. Entonces*

$$\operatorname{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) = F_1(X) \cup \mathfrak{M}.$$

Demostración. La estructura de esta prueba, se debe a G. Acosta. Probaremos primero que $\mathfrak{M} \subset \operatorname{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Sea $A = [r, e] \in \mathfrak{M}$. Supongamos primero que $e \in E_2(X)$ y $[r, e) \subset O(X)$. Entonces A tiene la forma *b*) del Lema 3.8, por lo que $A \in \Omega(X) \subset \operatorname{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Supongamos ahora que $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$. Entonces $A = \operatorname{lím}[r_n, e]$, en donde $[r_n, e]$ es un arco en X tal que $[r_n, e) \subset O(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que hemos probado, cada arco $[r_n, e]$ está en $\Omega(X)$. Luego A es un elemento de $\operatorname{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Esto prueba que $\mathfrak{M} \subset \operatorname{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$. Como $F_1(X)$ también está contenido en $\operatorname{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$, sucede que $\mathfrak{M} \cup F_1(X) \subset \operatorname{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$.

Ahora tomemos un elemento $A \in \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ y supongamos que $A \notin F_1(X)$. Por consiguiente, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\Omega(X)$ tal que $A = \text{lím}A_n$. Dado que $A \notin F_1(X)$, sin pérdida de generalidad, cada A_n es de la forma *b*) descrita en el Lema 3.8. Entonces dada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [t_n, e_n]$, donde $t_n \in O(X)$, $e_n \in E_2(X)$ y $A_n \cap R(X) = \emptyset$. Tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que existen $t, e \in X$ tales que $\text{lím}t_n = t$ y $\text{lím}e_n = e$. Entonces $e \in E(X)$ pues $E(X)$ es cerrado. Supongamos que $e_n \neq e_m$ si $n \neq m$. Sin perder generalidad podemos también suponer que $e \neq e_1$. Por el Teorema 2.31, existe una sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $R(X) \cap [e, e_1]$ tal que $\text{lím}r_n = e$ y X tiene una copia de W_0 cambiando t por e, a_n por e_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y b_n por r_n para cada $n \geq 2$. Concretamente, haciendo $r_1 = r_2$, el continuo

$$T = [e, e_1] \cup \left(\bigcup \{[r_n, e_n] : n \geq 2\}\right),$$

está contenido en X.

Ahora bien, dada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $A_n \cap R(X) = \emptyset$. Luego $t_n \in [r_n, e_n]$. Además, como $t_n \in [r_n, e_n] \subset [e, e_n]$, $\text{lím}e_n = e$ y $\text{lím}t_n = t$, sucede que $t = e$. Ahora bien, como $\text{lím}[r_n, e_n] = e$ y $A_n = [t_n, e_n] \subset [r_n, e_n]$, sucede que $\text{lím}[t_n, e_n] = e$. Como también $\text{lím}[t_n, e_n] = A$, tenemos que $A = \{e\}$, una contradicción. Esto demuestra que no puede suceder que $e_n \neq e_m$ si $n \neq m$. Por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $e_n = e_N$ para cada $n \geq N$. Luego $e_N = e$. Esto significa que $A_n = [t_n, e]$ para cada $n \geq N$. Podemos entonces suponer que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está anidada. Por tanto dicha sucesión es convergente y su límite es $\cap A_n$ (por el Teorema 1.26). Como consecuencia de esto A es un arco pues $A \notin F_1(X)$. Además e es un punto extremo de dicho arco y, si t es el otro punto extremo, entonces $A = [t, e]$ y $[t, e) \subset O(X)$ pues A_n no contiene puntos de ramificación. Esto prueba que $A \in \mathfrak{M}$ y, por tanto, $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \subset F_1(X) \cup \mathfrak{M}$. □

Con la información del Teorema 3.10, demostremos que si $X \in \mathfrak{D}$, entonces $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ es topológicamente igual a X.

Teorema 3.11 *Si* $X \in \mathfrak{D}$, *entonces* $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx X$.

Demostración. La estructura de esta demostración, también la sugirió G. Acosta. Definiremos primero una función continua $g : \Omega(X) \to X$ que, posteriormente, extenderemos a un homeomorfismo $\overline{g} : \text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \to X$.

Para definir a g, utilizaremos el hecho de que cada elemento de $\Omega(X)$ está contenido en un arco que es interno o bien externo en X (véase Corolario 3.9). Así pues, para $A \in \Omega(X)$, de acuerdo a lo demostrado en el Lema 3.8, suceden dos cosas:

i) si A está contenido en un arco interno $[p,q]$, entonces $A = \{k\}$ para algún $k \in (p,q)$;

ii) si A está contenido en un arco externo $[r,e]$, donde $r \in R(X)$ y $e \in E_2(X)$, entonces $A = \{t\}$ para algún $t \in (r,e]$ o bien $A = [t,e]$, para algún $t \in (r,e)$.

Consideremos ahora todos los arcos externos $[r,e]$ tales que $[r,e] \cap R(X) = \{r\}$ y $e \in E_2(X)$. Para cada uno de ellos fijemos un punto $s_e \in (r,e)$ y consideremos dos homeomorfismos $f_1^{s_e} : [r,e] \to [r,s_e]$ y $f_2^{s_e} : [r,e] \to [s_e,e]$ tales que $f_1^{s_e}(r) = r$, $f_1^{s_e}(e) = s_e$, $f_2^{s_e}(r) = e$ y $f_2^{s_e}(e) = s_e$.

Estamos ahora en condiciones para definir a $g : \Omega(X) \to X$. Dada $A \in \Omega(X)$, si A satisface i), entonces definimos

$$g(A) = g(\{k\}) = k.$$

Si A satisface ii), entonces consideramos el arco externo $[r,e]$ que contiene a A, así como a los homeomorfismos $f_1^{s_e}$ y $f_2^{s_e}$, correspondientes al punto s_e que fijamos en el arco $[r,e]$. Si $A = \{t\}$ para $t \in (r,e]$, definimos $g(A) = f_1^{s_e}(t)$. Si $A = [t,e]$ para $t \in (r,e)$, entonces definimos $g(A) = f_2^{s_e}(t)$. La función g está bien definida pues, dado $A \in \Omega(X)$, sucede que A está contenido en un único arco externo o bien en un único arco interno de X. Observemos, además, que si $A \in \Omega(X)$ entonces, por definición, $g(A) \in O(X)$.

Afirmamos que

1) la función g es continua.

Para ver esto, tomemos $A \in \Omega(X)$ y $\epsilon > 0$. Debemos dar una $\delta > 0$ tal que

$$g(B_{C(X)}(A,\delta) \cap \Omega(X)) \subset B_X(g(A),\epsilon) \tag{3.1}$$

Consideremos las tres situaciones para A que se desprenden de i) y ii). Si $A = \{k\}$ con $k \in (p,q)$ y $[p,q]$ es un arco interno de X, entonces $g(A) = \{k\}$. Si

$\delta > 0$ es tal que $\delta < \text{mín}\{d(k,p), d(k,q), \epsilon\}$, entonces $B_{C(X)}(A,\delta) \subset C([p,q])$. De aquí se infiere (3.1).

Supongamos ahora que $A = \{t\}$, donde $t \in (r,e]$ y $[r,e]$ es un arco externo como indicamos en ii). Entonces $g(A) = f_1^{s_e}(t)$. Como la función $f_1^{s_e}$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$f_1^{s_e}(B_X(t,\delta) \cap [r,e]) \subset B_X(f_1^{s_e}(t), \epsilon).$$

Además podemos elegir δ de modo que $B_X(t,\delta) \subset [r,e]$. Esto asegura que $B_{C(X)}(A,\delta) \cap \Omega(X) \subset F_1(X)$. Por consiguiente, por definición de las funciones g y $f_1^{s_e}$, la condición (3.1) se cumple.

Supongamos, por último, que $A = [t,e]$, donde $t \in (r,e)$ y $[r,e]$ es un arco externo como indicamos en ii). Entonces $g(A) = f_2^{s_e}(t)$. Como la función $f_2^{s_e}$ es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$f_2^{s_e}(B_X(t,\delta_1) \cap [r,e]) \subset B_X(f_2^{s_e}(t), \epsilon).$$

Tomemos ahora $\delta > 0$ tal que $\delta < \text{mín}\{d(t,e), d(t,r), \delta_1\}$. Entonces la condición (3.1) se cumple, pues los elementos de $B_{C(X)}(A,\delta) \cap \Omega(X)$ son los arcos de la forma $[m,e]$, con $m \in O(X)$ y $g([m,e]) = f_2^{s_e}(m)$.

De lo anterior concluimos que g es continua en A. Esto prueba 1). Afirmamos ahora que

2) la función g es inyectiva.

Para ver esto sean $A, D \in \Omega(X)$ tales que $g(A) = g(D)$. Si $A = \{k\}$, donde $k \in (p,q)$ y $[p,q]$ es un arco interno en X, entonces $g(A) = g(D) = k$. Esto significa que $g(D)$ es un elemento del arco interno $[p,q]$. Como g se define de manera que la imagen de cada elemento de $\Omega(X)$ es un punto del arco interno o externo que contiene a dicho elemento de $\Omega(X)$, necesariamente $D = \{k\} = A$.

Supongamos ahora que $A \subset [r,e]$, donde $[r,e]$ es un arco externo como indicamos en ii). Entonces $g(A) \in [r,e]$, por lo que $g(D) \in [r,e]$. Esto implica que también D está contenido en $[r,e]$. Consideremos las dos situaciones para A que se desprenden de ii). Supongamos primero que $A = \{t\}$, con $t \in (r,e]$. Entonces $g(A) = f_1^{s_e}(t) \in (r, s_e]$. Como D está contenido en $[r,e]$, entonces necesariamente $D = \{l\}$ donde $l \in (r, e]$ o bien $D = [b, e]$, donde $b \in (r, e)$. Si $D = [b, e]$, entonces $f_1^{s_e}(t) = g(A) = g(D) = f_2^{s_e}(t) \in (s_e, e)$, lo cual es una contradicción, pues $f_1^{s_e}(t) \in (r, s_e]$ y los arcos $(r, s_e]$ y (s_e, e) son ajenos. Entonces $D = \{l\}$, por lo que $f_1^{s_e}(l) = g(D) = g(A) = f_1^{s_e}(t)$. Como la función $f_1^{s_e}(t)$ es inyectiva, sucede que $l = t$. De aquí $D = A$.

Supongamos ahora que $A = [t, e]$, donde $t \in (r, e)$. Entonces $g(A) = f_2^{s_e}(t) \in (s_e, e)$. Como D está contenido en $[r, e]$, tenemos que $D = \{l\}$ para alguna $l \in (r, e]$ o bien $D = [b, e]$, para alguna $b \in (r, e)$. Si $D = \{l\}$, entonces $f_2^{s_e}(t) = g(A) = g(D) = f_2^{s_e}(l) \in (r, s_e]$, lo cual es una contradicción, pues $f_2^{s_e}(t) \in (s_e, e)$ y los arcos $(r, s_e]$ y (s_e, e) son ajenos. Entonces $D = [b, e]$, por lo que $f_2^{s_e}(b) = g(D) = g(A) = f_2^{s_e}(t)$. Como la función $f_2^{s_e}$ es inyectiva, sucede que $b = t$. De aquí $D = [t, e] = A$. Esto prueba 2).

La extensión $\overline{g} : \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \to X$ de g se define como sigue. Primero $\overline{g}$ se define de modo que $\overline{g}_{|\Omega(X)} = g$ y, si $\{t\} \in F_1(R(X) \cup E_1(X))$, entonces $\overline{g}(\{t\}) = t$. Falta entonces definir a $\overline{g}$ en los arcos externos $[r, e]$ con $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$. En dicha situación hacemos $\overline{g}([r, e]) = e$. Observemos que si $B \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$, entonces $\overline{g}(B) \notin O(X)$. Afirmamos que

3) la función $\overline{g}$ es inyectiva.

Para ver esto sean $A, B \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ tales que $A \neq B$. Queremos probar que $\overline{g}(A) \neq \overline{g}(B)$. Si $A, B \in \Omega(X)$, entonces $\overline{g}(A) \neq \overline{g}(B)$, pues g es inyectiva. Entonces $\overline{g}(A) \neq \overline{g}(B)$, pues $\overline{g}$ es una extensión de g. Si $A \in \Omega(X)$ y $B \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$, entonces $\overline{g}(A) = g(A) \neq g(B)$, pues $g(A) \in O(X)$ y $g(B) \notin O(X)$. La misma conclusión se obtiene si $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$ y $B \in \Omega(X)$.

De lo comentado en el párrafo anterior, podemos suponer que $A, B \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$. Notemos que $A \in F_1(R(X) \cup E_1(X))$ o bien A es un arco externo en X. Analicemos ambas situaciones. Supongamos primero que $A = \{t\} \in F_1(R(X) \cup E_1(X))$. Entonces $\overline{g}(A) = t$. Ahora bien, $B \in F_1(R(X) \cup E_1(X))$ o bien B es un arco externo en X. En el primer caso, haciendo $B = \{l\}$ sucede que $\overline{g}(A) \neq \overline{g}(B)$, pues $A \neq B$ y $\overline{g}(B) = l$. En el segundo caso, haciendo $B = [r, e]$ con $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$, tenemos que $\overline{g}(A) \neq \overline{g}(B)$, pues $\overline{g}(B) = e$.

Supongamos ahora que $A = [r_1, e_1]$ es un arco externo en X, donde $e_1 \in E_2(X)$ y $[r_1, e_1] \cap R(X) = \{r_1\}$. Entonces $\overline{g}(A) = e_1$. De nueva cuenta tenemos que $B = \{l\}$ para alguna $l \in R(X) \cup E_1(X)$ o bien $B = [r_2, e_2]$, donde $e_2 \in E_2(X)$ y $[r_2, e_2] \cap R(X) = \{r_2\}$. En el primer caso sucede que $\overline{g}(A) \neq \overline{g}(B)$, pues $\overline{g}(A) = e_1 \in E_2(X)$ y $\overline{g}(B) = l \in R(X) \cup E_1(X)$. En el segundo caso también tenemos que $\overline{g}(A) \neq \overline{g}(B)$, pues al ser A y B arcos externos y tener que $A \neq B$, sucede que $A \cap B = \emptyset$ o bien $A \cap B \in F_1(R(X))$. Esto termina la prueba de 3). Afirmamos ahora que:

4) la función $\overline{g}$ es suprayectiva.

Para probar 4), notemos primero que $X = O(X) \cup R(X) \cup E_1(X) \cup E_2(X)$. Por tanto, si $t \in R(X) \cup E_1(X)$ entonces $\{t\}$ es un elemento de $F_1(X) \subset \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ tal que $\overline{g}(\{t\}) = t$. Por tanto, solo tenemos que preocuparnos por la suprayectividad de $\overline{g}$ en $O(X) \cup E_2(X)$. Si $p \in O(X)$ entonces, de acuerdo con la parte i) del Lema 3.8, $A = \{p\}$ es un elemento de $\Omega(X) \subset \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ tal que $\overline{g}(A) = g(A) = p$. Si $e \in E_2(X)$, entonces e es el extremo de algún arco externo $[r, e]$ en X, donde $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$. Claramente $[r, e]$ es un elemento de $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ tal que $\overline{g}([r, e]) = e$. Esto prueba 4).

Afirmamos, por último, que

5) la función $\overline{g}$ es continua.

Ya demostramos que g es continua y, como $\overline{g}_{|\Omega(X)} = g$, basta demostrar que $\overline{g}$ es continua en $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$. Tomemos entonces un elemento $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) - \Omega(X)$, así como una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ tal que $\lim(A_n) = A$. Debemos mostrar que $\lim \overline{g}(A_n) = \overline{g}(A)$. Como hemos venido utilizando, sabemos que $A \in F_1(R(X) \cup E_1(X))$ o bien $A = [r, e]$ es un arco externo en X. Debemos, por tanto, analizar las tres situaciones que se desprenden del comentario anterior.

Supongamos primero que $A = \{r\}$, donde $r \in R(X)$. Como los límites de puntos de ramificación de X son puntos extremos de X (véase el Teorema 2.30), los límites de puntos extremos de X son puntos extremos de X (pues $X \in \mathfrak{D}$) y $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) = F_1(X) \cup \mathfrak{M}$ según el Teorema 3.10, sucede que $A_n \in F_1(O(X))$ para una infinidad de índices n. Entonces, sin perder generalidad, podemos suponer que $A_n \in F_1(O(X))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dada $n \in \mathbb{N}$, escribamos $A_n = \{o_n\}$. Notemos que $\lim o_n = r$. Más aún

- $\overline{g}(A_n) = o_n$, si o_n está en un arco interno en X;

- $\overline{g}(A_n) = f_1^{s_e}(o_n)$, si o_n está en el arco externo $[r,e]$, donde $e \in E_2(X)$ y $[r,e] \cap R(X) = \{r\}$.

Como el conjunto de los naturales es infinito, alguna de las dos condiciones anteriores se debe cumplir para una infinidad de índices n. Supongamos que, para una infinidad de índices n, sucede que o_n está en un arco interno en X. Entonces, para dichos índices:

$$\lim \overline{g}(A_n) = \lim o_n = r = \overline{g}(A).$$

Supongamos ahora que, para una infinidad de índices n, el punto o_n está en un arco externo de X. Como el orden de cada punto de X es finito y lím $o_n = r$, resulta que una infinidad de puntos ordinarios o_n se encuentran en el mismo arco externo $[r,e]$ de X. Entonces, aplicando la continuidad de $f_1^{s_e}$, sucede que

$$\lim \overline{g}(A_n) = \lim f_1^{s_e}(o_n) = f_1^{s_e}(r) = r = \overline{g}(A).$$

Esto muestra que $\overline{g}$ es continua en A, para el caso en que $A \in F_1(R(X))$.

Supongamos ahora que $A = \{m\}$, donde $m \in E_1(X)$. Tenemos entonces que

a) $\overline{g}(A_n) = o_n$, si $A_n = \{o_n\} \in F_1(O(X))$ y o_n está en un arco interno en X;
b) $\overline{g}(A_n) = r_n$, si $A_n = \{r_n\} \in F_1(R(X))$;
c) $\overline{g}(A_n) = e_n$, si $A_n = \{e_n\} \in F_1(E_1(X))$;
d) $\overline{g}(A_n) = f_1^{s_e}(t_n)$, si $A_n = \{t_n\} \in F_1(E_2(X) \cup O(X))$ y t_n está en el arco externo $[r_n, e_n]$ con $e_n \in E_2(X)$ y $[r_n, e_n] \cap R(X) = \{r_n\}$;
e) $\overline{g}(A_n) = f_1^{s_e}(t_n)$, si $A_n = [t_n, e_n]$ está contenido propiamente en el arco externo $[r_n, e_n]$ con $e_n \in E_2(X)$ y $[r_n, e_n] \cap R(X) = \{r_n\}$;
f) $\overline{g}(A_n) = e_n$, si $A_n = [r_n, e_n]$ es un arco externo con $e_n \in E_2(X)$ y $[r_n, e_n] \cap R(X) = \{r_n\}$.

Ahora bien, como el conjunto de los naturales es infinito, alguna de las seis condiciones anteriores se debe cumplir para una infinidad de índices n. Analicemos cada caso. Supongamos que la condición a) se cumple para una infinidad de índices n. Entonces, como lím $A_n = A$, para dichos índices tenemos que:

$$\lim \overline{g}(A_n) = \lim o_n = m = \overline{g}(A).$$

Supongamos ahora que la condición b) se cumple para una infinidad de índices n. Entonces

$$\text{lím}\overline{g}(A_n) = \text{lím } r_n = m = \overline{g}(A).$$

Si la condición c) se cumple para una infinidad de índices n, entonces

$$\text{lím}\overline{g}(A_n) = \text{lím } e_n = m = \overline{g}(A).$$

Supongamos ahora que la condición d) se cumple para una infinidad de índices n. Como el orden de cada punto de X es finito, sucede una de las siguientes dos condiciones:

(*) una infinidad de los arcos externos $[r_n, e_n]$ son ajenos dos a dos;
(**) existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $[r_n, e_n] = [r_n, e_x]$, para cada $n \geq x$.

En el caso (*), como X no contiene continuos de convergencia, sucede que lím $[r_n, e_n] \in F_1(X)$. Ahora bien, como $\{t_n\} \subset [r_n, e_n]$ y lím$\{t_n\} = \{m\}$, tenemos que lím $[r_n, e_n] = \{m\} = A$. Notemos también que $f_1^{s_e}(t_n) \in [r_n, e_n]$ para cada índice n. Luego

$$\text{lím } \overline{g}(A_n) = \text{lím } f_1^{s_e}(t_n) = m = \overline{g}(A).$$

En el caso (**) tenemos que $t_n \in [r_x, e_x]$, para cada $n \geq x$. Luego $m =$ lím $t_n \in [r_x, e_x]$, lo cual es una contradicción, pues $m \in E_1(X)$ y $[r_x, e_x]$ no intersecta a $E_1(X)$ por ser un arco externo en X. Esto termina el análisis del caso d).

Supongamos ahora que la condición e) se cumple para una infinidad de índices n. De nueva cuenta, como el orden de cada punto de X es finito, se cumple una de las condiciones (*) y (**). Como $f_2^{s_e}(t_n) \in [r_n, e_n]$, si se cumple la condición (*), entonces podemos proceder como en la prueba del caso anterior, para concluir que

$$\text{lím } \overline{g}(A_n) = \text{lím } f_2^{s_e}(t_n) = m = \overline{g}(A).$$

También, como en el caso anterior, la condición (**) no se puede dar, pues los arcos externos no tienen puntos de $E_1(X)$.

Supongamos, por último, que la condición f) se cumple para una infinidad de índices n. De nueva cuenta tenemos que analizar las situaciones (*) y (**).

La condición (**) no se puede dar, pues $\lim A_n = A \in F_1(X)$. Entonces se da la condición (*). Luego

$$\text{lím } \overline{g}(A_n) = \text{lím } e_n = m = \overline{g}(A).$$

Esto muestra que $\overline{g}$ es continua en A, para el caso en que $A \in F_1(E_1(X))$.

Supongamos ahora que A es un arco externo en X. Entonces $A = [r, e]$ con $e \in E_2(X)$ y $[r, e] \cap R(X) = \{r\}$. Como $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) = F_1(X) \cup \mathfrak{M}$, $F_1(X)$ es cerrado en $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ y $A \notin F_1(X)$, podemos suponer, sin perder generalidad, que $A_n \in \mathfrak{M}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, dada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto A_n tiene la forma $[t_n, e_n]$, donde $e_n \in E_2(X)$ y A_n está contenido en un arco externo $[r_n, e_n]$, donde $[r_n, e_n] \cap R(X) = \{r_n\}$. Como el orden de cada punto de X es finito, de nueva cuenta tenemos que se cumple alguna de las condiciones (*) y (**) enunciadas anteriormente. Además, como X no contiene continuos de convergencia, la condición (*) no se puede dar. Por tanto, se cumple (**) y esto implica, sin perder generalidad, que $A_n = [t_n, e]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, aplicando la continuidad de $f_2^{s_e}$, sucede que

$$\text{lím } \overline{g}(A_n) = \text{lím } f_2^{s_e}(t_n) = \text{lím } f_2^{s_e}(r) = e = \overline{g}(A).$$

Esto muestra que $\overline{g}$ es continua en A, para el caso en que A es un arco externo en A. Esto prueba 5).

Para finalizar la prueba, como $\overline{g}$ es una función continua, biyectiva, el conjunto $\text{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$ es compacto y X es un espacio T_2, sucede que $\overline{g}$ es un homeomorfismo. □

Veamos ahora que si $C(X) \approx C(Y)$, sucede que $\Omega(X) \approx \Omega(Y)$.

Lema 3.12 *Si X, Y son continuos tales que $C(X) \approx C(Y)$, entonces $\Omega(X) \approx \Omega(Y)$.*

Demostración. Sea $h : C(X) \to C(Y)$ un homeomorfismo. Si $A \in \Omega(X)$, entonces existe una 2-celda $\mathcal{W}$ en $C(X)$ tal que $A \in \text{int}_{C(X)}(\mathcal{W}) \cap \partial\mathcal{W}$. Entonces $\mathcal{V} = h(\mathcal{W})$ es una 2-celda en $C(Y)$ tal que $h(A) \in \text{int}_{C(Y)}(\mathcal{V}) \cap \partial\mathcal{V}$. Luego $h(A) \in \Omega(Y)$. Por tanto $h(\Omega(X)) \subset \Omega(Y)$. Como h^{-1} es un homeomorfismo, sucede que $\Omega(Y) \subset h(\Omega(X))$. Así $h(\Omega(X)) = \Omega(Y)$. Esto muestra que $\Omega(X) \approx \Omega(Y)$. □

Usando el Teorema 3.11 y el Lema 3.12 probemos que la familia $\mathfrak{D}$ está C-determinada.

Teorema 3.13 *Sean X y $Y \in \mathfrak{D}$. Si $C(X) \approx C(Y)$, entonces $X \approx Y$.*

Demostración. Supongamos que $C(X) \approx C(Y)$. Por el lema 3.12, $\Omega(X) \approx \Omega(Y)$. Por consiguiente $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx \mathrm{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y))$ y, por el Teorema 3.11, $X \approx Y$. □

Ejemplo 3.14 *Es importante, que en la hipótesis del Teorema 3.13 al menos uno de los continuos, esté en $\mathfrak{D}$. Si ninguno de los dos está en $\mathfrak{D}$, el teorema no es válido. Veamos un ejemplo: consideremos las dendritas D_3 y D_4 que se describieron en la Sección 2.4 y no se encuentran en $\mathfrak{D}$. En [14, Teorema 6.2] se prueba que la dendrita D_m es topológicamente única, por lo cual $D_3 \not\approx D_4$. Por otra parte ninguna de ellas tiene arcos libres, de donde se sigue, por el inciso 2) del Teorema 2.25, que $C(D_3) \approx C(D_4) \approx I^\infty$ (I^∞ es el cubo de Hilbert).*

Observación 3.15 *Veremos en el Teorema 3.22 que en efecto, sólo necesitamos que uno de los continuos esté en $\mathfrak{D}$. Más aún, veremos que si una dendrita X no es elemento de $\mathfrak{D}$ entonces es posible construir un continuo Y el cual no es homeomorfo a X y tal que $C(X) \approx C(Y)$.*

Observación 3.16 *Del trabajo de R. Duda (en [18]), se sigue que $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx X$ para toda gráfica finita de X diferente del arco. Como consecuencia de esto, una prueba similar a la del Teorema 3.13 hace ver que la familia de las gráficas finitas, diferentes del arco, está C-determinada. Más aún, en su Tesis Doctoral, [2, Teorema 67], G. Acosta demostró que las gráficas finitas X que no son arcos ni curvas cerradas simples, tienen hiperespacio único $C(X)$.*

En general, el homeomorfismo $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx X$ nos ayuda a determinar cuando una familia, de continuos, está C-determinada.

Teorema 3.17 *Sea Γ una familia de continuos. Si para cualquier $X \in \Gamma$ tenemos que $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx X$, entonces la familia Γ está C-determinada.*

Demostración. Sean X y $Y \in \Gamma$. Supongamos que $C(X) \approx C(Y)$. Entonces, por el Lema 3.12, $\Omega(X) \approx \Omega(Y)$. Se deduce que $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx \mathrm{cl}(\Omega(Y))$. Como por hipótesis $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx X$ y $\mathrm{cl}(\Omega(Y)) \approx Y$, se implica que $X \approx Y$. De donde la familia Γ está C-determinada. □

En particular, tenemos que la unión de familias de continuos cuyos elementos X cumplen que $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx X$, está C-determinada.

Por tanto, creemos que la siguiente pregunta es importante:

Pregunta: ¿Cuales familias de continuos tienen la propiedad de que todos sus elementos X, satisfacen que $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx X$?

3.3. Un Teorema Intermedio

En el siguiente resultado, demostramos que el Teorema 3.13 también es cierto aún cuando Y es cualquier dendrita.

Teorema 3.18 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y Y cualquier dendrita. Si $C(X) \approx C(Y)$, entonces $X \approx Y$.*

Demostración. Sea $h : C(X) \to C(Y)$ un homeomorfismo. Por el Teorema 3.13, basta probar que $Y \in \mathfrak{D}$. Supongamos que $Y \notin \mathfrak{D}$ y $Y \not\approx I$. Entonces, por el Teorema 2.35, existe $L \in C(Y)$ para el cual no se cumple la condición (*) (véase dicha condición en el Teorema 2.35). Tomemos $Z \in C(X)$ tal que $h(Z) = L$ y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ que converge a Z. Se implica que $\{h(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y que converge a $h(Z) = L$. Como L no cumple la condición (*) sucede que $\dim_{h(A_n)}C(Y) = \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\dim_{A_n}(C(X)) = \infty$ para dicho n. Luego, la condición (*) falla en $C(X)$ para Z. En consecuencia, por el Teorema 2.35, $X \notin \mathfrak{D}$. Como esto es una contradicción, sucede que $Y \in \mathfrak{D}$ o $Y \approx I$. Si $Y \approx I$ entonces, como $C(X) \approx C(Y)$ sucede que $X \approx I$ o bien $X \approx S^1$ ([2, Teorema 68]). Esto contradice el hecho de que $X \in \mathfrak{D}$. Luego $Y \in \mathfrak{D}$ y, por el Teorema 3.13, $X \approx Y$. □

3.4. Las Dendritas X de la Familia $\mathfrak{D}$ Tienen Hiperespacio Único $C(X)$

En esta sección, probaremos que los elementos X de la familia $\mathfrak{D}$, tienen hiperespacio único $C(X)$. Antes de la prueba mostraremos tres lemas. En el primero de ellos utilizaremos la noción de continuo homogéneo. Recordemos que un continuo Z es homogéneo si, para cada par de puntos $p, q \in Z$, existe un homeomorfismo $f : Z \to Z$ tal que $f(p) = q$. Utilizaremos también el hecho de que el cubo de Hilbert I^∞ es homogéneo ([50, Teorema 6.1.6]).

Lema 3.19 *Sean Y un continuo localmente conexo y $A \in C(Y)$ tal que $dim_A(C(Y)) < \infty$. Entonces $dim_{\{p\}}(C(Y)) < \infty$, para cada $p \in A$.*

Demostración. Supongamos que $p \in A$. Si $\dim_{\{p\}}(C(p,Y)) = \infty$, por el Teorema 1.20, $C(p,Y) \approx I^\infty$. Como la dimensión del cubo de Hilbert en cada punto es infinita (porque I^∞ es homogéneo) y $A \in C(p,Y)$ sucede que $\dim_A(C(p,Y)) = \infty$. Por el Teorema 1.5 se tiene que $\dim_A(C(Y)) = \infty$, lo cual contradice la hipótesis. En consecuencia $\dim_{\{p\}}(C(p,Y)) < \infty$, es decir $C(p,Y)$ no es el cubo de Hilbert. Aplicando el Teorema 1.19, se infiere que $p \in \mathrm{int}_Y(G)$, donde G es una gráfica finita en Y. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(p,\epsilon) \subset G$ y, por el Teorema 1.15, si $A \in B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon)$ se implica que $A \subset B_Y(p,\epsilon)$. Por lo tanto $B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon) \subset C(G)$.

Mostraremos ahora que $\dim_{\{p\}}(C(Y)) < \infty$. Para esto tomemos un abierto $\mathcal{U}$ en $C(Y)$ tal que $\{p\} \in \mathcal{U}$. Tomemos $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ tal que $B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1) \subset \mathcal{U}$. Entonces

$$B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1) \subset \mathcal{U} \cap B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon) \subset \mathcal{U} \cap C(G).$$

Observemos que $B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1) \subset C(G) \subset C(Y)$, que $B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1)$ es un abierto en $C(Y)$ y $C(G)$ es un continuo (por tanto, un cerrado en $C(Y)$). Entonces por el Teorema 1.1,

$$\mathrm{Fr}_{C(Y)}(B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1)) = \mathrm{Fr}_{C(G)}(B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1)).$$

De aquí

$$\dim(\mathrm{Fr}_{C(Y)}(B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1))) = \dim(\mathrm{Fr}_{C(G)}(B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1))).$$

Como $\mathrm{Fr}_{C(G)}(B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1)) \subset C(G)$, por el Teorema 1.4, sucede que - $\dim(\mathrm{Fr}_{C(G)}(B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1))) \leq \dim(C(G))$ y $\dim(C(G)) < \infty$ por el Teorema 1.43. Por tanto $\dim(\mathrm{Fr}_{C(Y)}(B_{C(Y)}(\{p\},\epsilon_1))) < \infty$. Como consecuencia de esto $\dim_{\{p\}}(C(Y)) < \infty$. □

Lema 3.20 *Sea Y un continuo localmente conexo. Si $b \in Y$ es tal que $dim_{\{b\}}(C(Y)) < \infty$, entonces $\{b\} \in \mathrm{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y))$.*

Demostración. Supongamos que b no está en el interior, relativo a Y, de una gráfica finita en Y. Entonces, por el Teorema 1.19, $C(b,Y) \approx I^{\infty}$. Por lo tanto $\dim_{\{b\}}(C(b,Y)) = \infty$ y, por el Teorema 1.5, $\dim_{\{b\}}(C(Y)) = \infty$. Esto contradice la hipótesis, $\dim_{\{b\}}(C(Y)) < \infty$, así que b está en el interior, relativo a Y, de una gráfica finita G en Y. Se infiere que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(b,\epsilon) \subset G$. Por el Teorema 1.15, $A \in B_{C(Y)}(\{b\},\epsilon)$ si y sólo si $A \subset B_Y(b,\epsilon)$. Luego $B_{C(Y)}(\{b\},\epsilon) \subset C(G)$. Así que $b \in G = O(G) \cup R(G) \cup E(G)$. Como G es una gráfica finita, existe un arco no degenerado $L = [c,b]$ en G tal que $[c,b) \subset O(G)$ y $L \subset B_Y(b,\epsilon)$. Tomemos una sucesión $\{o_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en (c,b) tal que $\lim o_n = b$. Notemos que $\{\{o_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(G) \subset C(Y)$ tal que $\lim \{o_n\} = \{b\}$ y $\{o_n\} \in B_{C(Y)}(\{b\},\epsilon)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además $o_n \in B_Y(b,\epsilon)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos ahora que $\{o_n\} \in \Omega(Y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ver esto, sea $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\mathcal{V} = C(L)$ es una 2-celda en $C(Y)$ tal que $\{o_n\} \in \partial\mathcal{V}$ (véase Lema 3.3). Mostraremos ahora que $\{o_n\} \in \mathrm{int}_{C(Y)}(\mathcal{V})$. Como $o_n \in B_Y(b,\epsilon) \cap (c,b)$, existe $\delta > 0$ tal que si $U = B_Y(o_n,\delta)$, entonces $U \subset B_Y(b,\epsilon)$, $c \notin U$ y $b \notin U$. Entonces $B_{C(Y)}(\{o_n\},\delta) \subset \mathcal{V}$. En efecto, si $K \in B_{C(Y)}(\{o_n\},\delta)$, sucede que

$$K \subset B_Y(o_n,\delta) \subset B_Y(b,\epsilon) \subset G.$$

Como G es una gráfica finita y $B_Y(o_n,\delta) \subset G$, tenemos que $B_Y(o_n,\delta) = B_G(o_n,\delta)$, así que $B_G(o_n,\delta)$ es un arco de la forma (p,q) con $p \in (c,o_n)$, $q \in (o_n,b)$ y $o_n \in (p,q)$. Luego $B_G(o_n,\delta) \subset L$. En vista de que $K \subset B_Y(o_n,\delta)$ sucede que $K \subset L$. Así $K \in C(L) = \mathcal{V}$. Esto muestra que $B_{C(Y)}(\{o_n\},\delta) \subset \mathcal{V}$ y, con ello, $\{o_n\} \in \mathrm{int}_{C(Y)}(\mathcal{V})$. En conclusión, $\{o_n\} \in \partial\mathcal{V} \cap \mathrm{int}_{C(Y)}(\mathcal{V})$. De aquí se sigue que $\{o_n\} \in \Omega(Y)$ y, como $\lim\{o_n\} = \{b\}$, concluimos que $\{b\} \in \mathrm{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y))$. □

Lema 3.21 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y Y un continuo tales que $C(X) \approx C(Y)$. Entonces $F_1(Y) \subset \mathrm{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y))$.*

Demostración. Notemos primero que Y es localmente conexo. Esto se sigue del Teorema 1.16. Supongamos ahora que $h : C(X) \to C(Y)$ es un homeomorfismo y sea $\{b\} \in F_1(Y)$. Entonces existe $A \in C(X)$ tal que $h(A) = \{b\}$. Por el Teorema 2.35, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $\lim A_n = A$ y $\dim_{A_n}(C(X)) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se infiere que $\lim h(A_n) = h(A) = \{b\}$ y $\dim_{h(A_n)}(C(Y)) < \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim h(A_n) = \{b\}$, existe una sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $b_n \in h(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$

y lím $b_n = b$. Ahora bien, dada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\dim_{h(A_n)}(C(Y)) < \infty$. Entonces, por el Lema 3.19, $\dim_{\{b_n\}}(C(Y)) < \infty$ y, por el Lema 3.20, $\{b_n\} \in \mathrm{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y))$. Luego $\{b\} \in \mathrm{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y))$. Esto prueba que $F_1(Y) \subset \mathrm{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y))$. $\square$

Finalmente, demostremos el teorema principal de este capítulo, el cual demuestra que los elementos, X, de la familia $\mathfrak{D}$, tienen hiperespacio único $C(X)$.

Teorema 3.22 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y Y un continuo. Si $C(X) \approx C(Y)$, entonces $X \approx Y$.*

Demostración. La dendrita X es un continuo localmente conexo. Como $C(X) \approx C(Y)$, por el Teorema 1.16, Y es localmente conexo. Para probar que Y es una dendrita, sólo necesitamos demostrar que Y no contiene curvas cerradas simples. Supongamos que Y contiene un espacio S el cual es homeomorfo a S^1 (la esfera 1-dimensional). Entonces, por el Lema 3.21, $F_1(S) \subset F_1(Y) \subset \mathrm{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y))$. Puesto que $C(X) \approx C(Y)$, por el Lema 3.12, tenemos que $\Omega(X) \approx \Omega(Y)$ y así $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx \mathrm{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y))$. Por el Teorema 3.11, $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx X$, por lo que, $F_1(S)$ es homeomorfo a un subconjunto de X. De aquí que X contiene una curva cerrada simple. Esto es una contradicción puesto que X es una dendrita. Por lo tanto Y no contiene curvas cerradas simples. De todo esto obtenemos que Y es una dendrita y la conclusión del teorema se sigue del Teorema 3.18. $\square$

Capítulo 4

DENDRITAS X QUE NO TIENEN HIPERESPACIO ÚNICO $C(X)$

4.1. Introducción

En este capítulo demostraremos que las únicas dendritas X que tienen hiperespacio único $C(X)$ son las que están en la familia $\mathfrak{D}$. Para esto utilizaremos una técnica que aparece en [23] y fue utilizada para mostrar que existen un continuo descomponible Y y un continuo indescomponible Z tales que $C(Y) \approx C(Z)$. La técnica en cuestión involucra la función L_μ que definimos en la Sección 1.7, la noción de Z-conjunto, la noción de retracto absoluto y los teoremas de la Homogeneidad de Anderson y de la suma de Handel, que presentaremos en la siguiente sección.

4.2. Z-conjuntos y Retractos Absolutos

Definición 4.1 *Un subconjunto A de un espacio X es un* ***retracto*** *de X si existe una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$, para cada $a \in A$. Un espacio métrico X es un* ***retracto absoluto*** *(abreviado* ***AR****) si cada vez que X sea homeomorfo a un subconjunto cerrado B de un espacio métrico Y, resulta que B es un retracto de Y.*

Sean (Y, ρ) un espacio métrico y compacto y $f, g : Y \to Y$. Consideraremos la métrica

$$D(f, g) = \sup \{\rho(f(x), g(x)) \colon x \in Y\}.$$

Con esta métrica $\text{lím} f_n = f$ si y sólo si f_n converge a f uniformemente. La función identidad en Y será denotada por Id_Y.

Definición 4.2 *Un subconjunto cerrado A de un espacio métrico X es un* ***Z-conjunto*** *en X, si Id_X se puede aproximar uniformemente por funciones $f : X \to X$ tales que $f(X) \cap A = \emptyset$. Una función $g : X \to X$ es una* ***Z-función,*** *si $g(X)$ es un Z-conjunto en X.*

En otras palabras, un subconjunto cerrado A de un espacio métrico X es un Z-conjunto en X, si para cada $\epsilon > 0$ existe una función $f_\epsilon : X \to X$ tal que $f_\epsilon(X) \cap A = \emptyset$ y $D(f_\epsilon, Id_X) < \epsilon$.

Teorema 4.3 *Sea A un Z-conjunto en X. Si B es un subconjunto cerrado de A entonces B es un Z-conjunto en X.*

Demostración. Como A es un cerrado en X, también B es un cerrado en X. Sea $\epsilon > 0$. Como A es un Z-conjunto en X, existe una función continua $f : X \to X$ tal que $D(f, Id_X) < \epsilon$ y $f(X) \cap A = \emptyset$, entonces $f(X) \cap B = \emptyset$ y $D(f, Id_X) < \epsilon$, así que B es un $Z-$conjunto en X. □

Utilizaremos los siguientes resultados.

Teorema 4.4 ***(De la Homogeneidad de Anderson)*** *[8, Teorema 7.1] Sea $h : A \to B$ un homeomorfismo entre Z-conjuntos contenidos en el cubo de Hilbert I^∞. Entonces h se puede extender a un homeomorfismo de I^∞ en I^∞.*

Teorema 4.5 ***(De la Suma de Handel)*** *[25, Teorema 1] Sean $A, B \subset I^\infty$, tales que $A \approx B \approx I^\infty \approx A \cap B$ y $A \cap B$ un Z-conjunto en A. Entonces $A \cup B \approx I^\infty$.*

4.3. Dendritas sin Hiperespacio Único

Esta sección tiene como finalidad demostrar que si una dendrita T tiene hiperespacio único $C(T)$, entonces $T \in \mathfrak{D}$.

Recordemos los conceptos de unión libre y de espacio cociente (véase, por ejemplo, [17, página 127]).

Notación 4.6 *La **unión libre** $X + Y$ de los espacios topológicos disjuntos Y, X es el conjunto $X \cup Y$ con la topología: $U \subset X + Y$ es abierto si y sólo si $U \cap X$ es abierto en X y $U \cap Y$ es abierto en Y. Sean $A \subset X$ un subconjunto cerrado, y $g : A \to Y$ una función continua. En $X + Y$, generamos una relación de equivalencia R por $a \sim g(a)$ (a es equivalente a $g(a)$) para cada $a \in A$. El **espacio cociente** $X + Y/R$ es el espacio "X ligado a Y por f", y escribiremos $X \cup_f Y$; a f le llamaremos la función de ligadura.*

Intuitivamente, identificamos cada elemento $a \in A$ con su imagen $f(a) \in Y$.

Para nuestro trabajo, identificaremos, sólo, dos puntos de dos continuos ajenos.

Notación 4.7 *Sean L y X continuos ajenos, $t_0 \in L$ y $x_0 \in X$. Sean $A = \{x_0\} \subset X$, y $f : \{x_0\} \to L$ la función continua definida por $f(x_0) = t_0$. En $X + L$, generamos una relación de equivalencia R por $x_0 \sim f(x_0) = t_0$. El espacio cociente $X + L/R$ es el espacio "X ligado a L por f", y escribiremos $X \cup_f L$. En éste caso, identificamos al punto $x_0 \in X$ con el punto $t_0 \in L$. Denotaremos por t al elemento $\{t_0, x_0\}$ en el espacio cociente $X \cup_f L$.*

Ejemplo 4.8 *Si $L = [0, 1]$, $X = S^1$, $t_0 = 1$ y $x_0 \in S^1$, entonces el espacio cociente $X \cup_f L$ es el espacio paleta.*

Observemos que si L y X son localmente conexos, entonces el espacio cociente $X \cup_f L$ es localmente conexo para cualesquiera $t_0 \in L$ y $x_0 \in X$.

Demostremos cuatro lemas que nos ayudarán en la demostración del teorema principal.

Lema 4.9 *Sea L un continuo y X un continuo localmente conexo y sin arcos libres. Sea $Y = X \cup_f L$, el espacio cociente, donde $t = \{t_0, x_0\} \in Y$, con $x_0 \in X$ y $t_0 \in L$. Si se satisfacen las siguientes propiedades:*

1) L es localmente conexo en cada punto de una vecindad relativa a L, de t;
2) t no está en el interior, relativo a L, de ninguna gráfica finita contenida en L.

Entonces $C(X) \cup C(t, Y) \approx I^\infty$ y $C(t, L) \approx I^\infty$.

Demostración. Por 1) y 2) se sigue, por el Teorema 1.19 que $C(t, L) \approx I^\infty$. Ahora probemos que $C(X) \cup C(t, Y) \approx I^\infty$. Como X es localmente conexo y no tiene arcos libres, por el inciso 2) del Teorema 2.25, $C(X) \approx I^\infty$. Notemos ahora que $C(X) \cap C(t, Y) = C(t, X)$. Además, como X es localmente conexo y sin arcos libres, entonces t no está en el interior, relativo a X, de ninguna gráfica finita contenida en X. Aplicando de nuevo el Teorema 1.19, sucede que $C(t, X) \approx I^\infty$. Por 1) y el hecho de que X es un continuo localmente conexo, tenemos que Y es localmente conexo en cada punto de una vecindad relativa a Y, de t. Por 2) y que t no está en el interior, relativo a X, de ninguna gráfica finita contenida en X, tenemos que, t no está en el interior, relativo a Y, de ninguna gráfica finita contenida en Y. Aplicando, una vez más, el Teorema 1.19, tenemos que $C(t, Y) \approx I^\infty$.

Ahora demostraremos que $C(t, X)$ es un Z-conjunto en $C(t, Y)$. Existe un arco ordenado, α, de $\{t\}$ a L. Tomemos una sucesión $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en el arco ordenado α, tal que $\lim C_n = \{t\}$. Entonces, dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n : C(t, Y) \to C(t, Y) - C(t, X)$ como $f_n(M) = M \cup C_n$. Luego, la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $Id_{C(t,Y)}$ y $f_n(C(t, Y)) \cap C(t, X) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $C(t, X)$ es un Z-conjunto en $C(t, Y)$. Por el Teorema de la Suma de Handel (Teorema 4.5), $C(X) \cup C(t, Y) \approx I^\infty$. □

Lema 4.10 *Sean X un continuo localmente conexo y sin arcos libres y L una dendrita. Supongamos que existe un arco $[u, v]$ en L tal que $t_0 \in (u, v)$. Sea $Y = X \cup_f L$ el espacio cociente, donde $x_0 \in X$ y $t = \{t_0, x_0\} \in Y$. Definimos*

$$\beta = \mathrm{Fr}_{C(L)}(C(t, L)) = C(t, L) \cap \mathrm{cl}_{C(L)}(C(L) - C(t, L)).$$

Entonces:

1) β es un Z-conjunto de $C(t, L)$;
2) β es un Z-conjunto de $C(X) \cup C(t, Y)$.

Demostración. Sea $A \in C(t, L)$. Tenemos la siguiente afirmación:

i) Si existe $[p, q] \subset A$ tal que $t \in (p, q)$, entonces $A \notin \beta$.

Si $A \in \beta$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $A_n \in C(L) - C(t, L)$ tal que $\lim A_n = A$. Por el Lema 2.15, para alguna $N \in \mathbb{N}$, $t \in A_n$ si $n > N$. Lo cual es una contradicción.

Como $\beta \subset C(t, L)$ y i) se cumple, si $A \in \beta$ entonces A tiene como un punto extremo a t o $A = \{t\}$. Reciprocamente, si $A = \{t\}$ o A tiene como un punto extremo a t, entonces $A \in \beta$. Si $A = \{t\}$, $A \in \beta$ (por definición de β). Ahora, supongamos que A tiene como un punto extremo a t. Sean $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $O(A)$ tal que $\lim t_n = t$ y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión, con $B_n = \mathrm{cl}(\text{componente}(A - t_n)$ que no tiene a $t)$. Observar que $\lim B_n = A$. Por tanto $A \in \beta$.

De aquí tenemos la siguiente condición:

$$A \in \beta \text{ si y sólo si } A = \{t\} \text{ o } A \text{ tiene como un punto extremo a } t. \tag{4.1}$$

Demostremos el primer inciso:

1) β es un Z-conjunto de $C(t, L)$.

Sean $r_n \in [v, t)$ y $c_n \in [u, t)$ tales que $\lim r_n = t$ y $\lim c_n = t$. Dado $n \in \mathbb{N}$. definimos $f_n : C(t, L) \to C(t, L) - \beta$ como $f(M) = M \cup [c_n, r_n]$. Es claro que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones que converge uniformemente a $Id_{C(t,L)}$ y $f_n(C(t, L)) \cap \beta = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para probar que esta intersección es vacía, utilicemos (4.1). Dado $n \in \mathbb{N}$ y $M \in C(t, L)$, tenemos que $f(M) = M \cup [c_n, r_n]$ es un un elemento que cumple que $t \in (c_n, r_n)$. Luego, por (4.1), $f(M) \notin \beta$. Esto demuestra 1).

Demostremos ahora el segundo inciso:

2) β es un Z-conjunto de $C(X) \cup C(t, Y)$.

Para demostrar esto, consideremos una función de Whitney $\mu : C(Y) \to I$. Definimos $L_\mu : C(Y) \times I \to C(Y)$ por:

$$L_\mu(A,s) = \begin{cases} \bigcup \{K \in C(Y) \colon A \subset K \text{ y } \mu(K) = s\}, & \text{si } \mu(A) \leq s, \\ A, & \text{si } s \leq \mu(A). \end{cases}$$

La función L_μ fué definida en la Sección 1.7 y comentamos que posee las siguiente propiedades:

i) $L_\mu(A,0) = A$, para cada $A \in C(Y)$.
ii) $L_\mu(A,t) \subset L_\mu(A,s)$, para cada $A \in C(Y)$ y $t \leq s$.
iii) Si el continuo Y tiene la propiedad de Kelley, la función L_μ es continua.

Por [45, Ejemplo 16.11], sabemos que todo continuo localmente conexo tiene la propiedad de Kelley. Como L es un continuo localmente conexo y X también, entonces $Y = X \cup_f L$ es un continuo localmente conexo, así que tiene la propiedad de Kelley. Luego L_μ es continua y, por tanto, es uniformemente continua.

Sea $\epsilon > 0$. Como L_μ es uniformemente continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $H(A,B) < \delta_1$ y $|s_1 - s_2| < \delta_1$, entonces $H(L_\mu(A,s_1), L_\mu(B,s_2)) < \frac{\epsilon}{2}$. Podemos elegir δ_1 de modo que:

$$\frac{\delta_1}{2} < \mu([u,t]) \qquad \text{y} \qquad \frac{\delta_1}{2} < \mu([v,t]). \tag{4.2}$$

Probaremos que:

ii) existe un δ_2 tal que para todo $K \in C(t,L)$ tal que $K \cap [u,t] = \{t\}$ o $K \cap [v,t] = \{t\}$, sucede que $\mu(K) + \frac{\delta_2}{2} \leq \mu(L)$.

Para demostrar esta afirmación, definimos el conjunto T_1 :

$$T_1 = \bigcup \{M \in C(t,L) : \text{tal que } M \cap [u,t] = \{t\}\}$$

Este espacio es un continuo. Es conexo, porque todos los elementos de T_1 tienen a t en común. Para ver que T_1 es un conjunto cerrado, demostremos que la familia $\{M \in C(t,L) : \text{tal que } M \cap [u,t] = \{t\}\}$ es cerrada. Sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(t,L)$ tal que $\text{lím}M_n = M$, entonces $\text{lím}(M_n \cap [u,t]) = M \cap [u,t] = \{t\}$. Por las propiedades de la función unión (véase la Sección 1.5.2), T_1 es cerrado. Como $T_1 \subsetneq T_1 \cup [u,t]$, elegimos $0 < \gamma_1$ tal que $\mu(T_1) + \frac{\gamma_1}{2} \leq \mu(T_1 \cup [u,t])$. Sea $K \in C(T_1)$. Entonces $\mu(K) + \frac{\gamma_1}{2} \leq \mu(T_1) + \frac{\gamma_1}{2} \leq \mu(T_1 \cup [u,t]) \leq \mu(L)$.

De manera análoga, definimos

$$T_2 = \bigcup \{M \in C(t,L) : \text{tal que } M \text{ no contiene a } [v,t)\}.$$

Existe un γ_2 tal que, si $K \in C(T_2)$, entonces $\mu(K) + \frac{\gamma_2}{2} \leq \mu(T_2) + \frac{\gamma_2}{2} \leq$ $\leq \mu(T_2 \cup [v,t]) \leq \mu(L)$. Sea $\delta_2 = mín\{\gamma_1, \gamma_2\}$, si $K \in C(t,L)$ tal que K no contiene a $[u,t)$ o K no contiene a $[v,t)$, entonces

$$\mu(K) + \frac{\delta_2}{2} \leq \mu(L). \tag{4.3}$$

Sea $\delta = mín\{\delta_1, \delta_2\}$. Por tanto δ cumple las condiciones (4.2) y (4.3).

Definimos $f_\epsilon : C(X) \cup C(t,Y) \to C(X) \cup C(t,Y)$ por,

$$f_\epsilon(A) = L_\mu(A, \mu(A) + \frac{\delta}{2}) \text{ para cada } A \in C(X) \cup C(t,Y).$$

Notemos que

$$A = L_\mu(A, \mu(A)) \subset L_\mu(A, \mu(A) + \frac{\delta}{2}) = f_\epsilon(A).$$

Es decir $A \subset f_\epsilon(A)$, para cada $A \in C(X) \cup C(t,Y)$. (4.4).

Por tanto $f_\epsilon(A) \in C(t,Y)$ si $A \in C(t,Y)$ y, si $A \in C(X)$, entonces $f_\epsilon(A) \subset X$ o bien $t \in f_\epsilon(A)$. En ambos casos $f_\epsilon(A) \in C(X) \cup C(t,Y)$.

Ahora veamos que f_ϵ es continua. Por la elección de δ,

$$H(A, f_\epsilon(A)) = H(L_\mu(A, \mu(A)), L_\mu(A, \mu(A) + \frac{\delta}{2})) < \frac{\epsilon}{2},$$

para cada $A \in C(X) \cup C(t,Y)$, es decir $D(Id_{C(X)\cup C(t,Y)}, f_\epsilon) < \epsilon$. Como L_μ

y μ son uniformemente continuas, entonces f_ϵ es continua.

Demostraremos que $f_\epsilon(C(X) \cup C(t, Y)) \cap \beta = \emptyset$. Sea $A \in C(X) \cup C(t, Y)$. Si $A \cap (X - L) \neq \emptyset$, obtenemos que $f_\epsilon(A) \cap (X - L) \neq \emptyset$ ya que $A \subset f_\epsilon(A)$ (por (4.4)). Por consiguiente $f_\epsilon(A) \notin C(t, L)$. Así $f_\epsilon(A) \notin \beta$. Si $A \cap (X - L) = \emptyset$, entonces $A \in C(t, L)$. Supongamos que A no tiene a t como un punto extremo y que $A \neq \{t\}$. En este caso, existe un arco $[l, m] \subset A$ tal que $t \in (l, m)$. Por tanto, $(l, m) \subseteq f_\epsilon(A)$. Esto implica, por (4.1), que $f_\epsilon(A) \notin \beta$. Queda el caso en que A tiene a t como un punto extremo o bien $A = \{t\}$. Al menos existen dos arcos distintos en L, que tienen como un punto extremo a t, éstos son $[v, t]$ y $[u, t]$. Sin perder generalidad, supongamos que $A \cap [u, t] = \{t\}$ (no puede intersectar a los dos arcos en puntos distintos que t, porque A tiene a t como un punto extremo o bien $A = \{t\}$). Tenemos dos posibilidades: $\mu(A) + \frac{\delta}{2} > \mu(A \cup [u, t])$ y $\mu(A) + \frac{\delta}{2} \leq \mu(A \cup [u, t])$. En el primer caso, por (4.2), $\mu(A) \neq 0$. Luego $A \neq \{t\}$, y por tanto $A \in C(t, L)$ tal que A no contiene a $[u, t)$.

Sea α un arco ordenado en $C(L)$ que va de A a L, pasando por $A \cup [u, t]$ (véase el Teorema 1.35).

Como $\mu(A) + \frac{\delta}{2} \leq \mu(L)$ (por (4.3) haciendo $K = A$), existe $K \in \alpha(I)$ tal que $\mu(K) = \mu(A) + \frac{\delta}{2} > \mu(A \cup [u, t])$. De aquí $A \cup [u, t] \subset K$. Además $K \subset L_\mu(A, \mu(A) + \frac{\delta}{2}) = f_\epsilon(A)$. Observemos que K contiene a dos arcos distintos, contenidos en L, que tienen a t como un punto extremo (al arco contenido en el continuo A y a $[u, t]$). En consecuencia, $f_\epsilon(A)$ contiene a dichos arcos. Luego t no es un punto extremo de $f_\epsilon(A)$. Por lo cual, por (4.1), $f_\epsilon(A) \notin \beta$.

Ahora supongamos que $\mu(A) + \frac{\delta}{2} \leq \mu(A \cup [u, t])$. Recordemos que $A \cap [u, t] = \{t\}$. Primero, observemos que $\mu(A) < \mu(A) + \frac{\delta}{2} \leq \mu(A \cup [u, t])$. Si $A \neq \{t\}$ se deduce que $[u, t] \subsetneq A \cup [u, t]$. Sea $K \in C(A, A \cup [u, t])$ tal que $\mu(K) = \mu(A) + \frac{\delta}{2}$. Por tanto $A \subsetneq K \subset L_\mu(A, \mu(A) + \frac{\delta}{2}) = f_\epsilon(A)$, es decir, $K \cap ([u, t] - \{t\}) \neq \emptyset$. En consecuencia K intersecta a dos arcos distintos, contenidos en L (al contenido en A y a $[u, t]$), y t no es un punto extremo de K. Luego t no es un punto extremo de $f_\epsilon(A)$. Se infiere que $f_\epsilon(A) \notin \beta$.

Por último, si $A = \{t\}$, entonces $\mu(A) = 0$. Sea $K_1 \in C(t, [t, v])$ tal que $\mu(K_1) = \frac{\delta}{4}$. Notemos que $K_1 \cap ([t, v) - \{t\}) \neq \emptyset$. Así que $[u, t] \subsetneq K_1 \cup [u, t]$. Se implica que $\mu(K_1) < \mu(A) + \frac{\delta}{2} \leq \mu(A \cup [u, t]) < \mu(K_1 \cup [u, t])$. Ahora sea $K \in C(K_1, K_1 \cup [u,t])$ tal que $\mu(K) = \mu(A) + \frac{\delta}{2}$, de donde $\{t\} = A \subsetneq K_1 \subsetneq K \subset f_\epsilon(A)$, $K \cap ([u,t] - \{t\}) \neq \emptyset$ y $K \cap ([t,v] - \{t\}) \neq \emptyset$. Entonces K intersecta a dos arcos distintos, contenidos en L, que tienen a t como un punto extremo. De donde, t no es un punto extremo de K. Como $K \subset f_\epsilon(A)$, se deduce que $f_\epsilon(A) \notin \beta$. Esto prueba que $f_\epsilon(C(X) \cup C(t,Y)) \cap \beta = \emptyset$. Por consiguiente β es un Z-conjunto en $C(X) \cup C(t,Y)$. Con esto probamos el inciso 2). □

Lema 4.11 *Sean Y un continuo y $L \in C(Y)$. Supongamos que:*

1) $C(Y) = C(L) \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$, donde $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son subespacios cerrados de $C(Y)$, $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \approx I^\infty$ y $\mathcal{K} \cap C(L) \approx I^\infty$.

2) El conjunto $\beta_1 = (\mathcal{K} \cap C(L)) \cap \mathrm{cl}_{C(L)}(C(L) - \mathcal{K} \cap C(L))$ es un Z-conjunto de $\mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ y de $C(L) \cap \mathcal{K}$.

3) $\mathrm{cl}_{C(L)}(C(L) - \mathcal{K} \cap C(L)) \cap \mathcal{H} \subset \beta_1$.

Entonces $C(Y) \approx C(L)$.

Demostración. Por el Teorema de la Homogeneidad de Anderson (Teorema 4.4), Id_{β_1} se puede extender a un homeomorfismo $h : \mathcal{H} \cup \mathcal{K} \to C(L) \cap \mathcal{K}$.

Sea

$$\mathcal{F} = \mathrm{cl}_{C(L)}(C(L) - \mathcal{K} \cap C(L)).$$

Por definición, $\beta_1 \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un cerrado en $C(L)$, por tanto es un cerrado en $C(Y)$. Por definición de β_1 y de $\mathcal{F}$, tenemos que:

$$\beta_1 = \mathcal{K} \cap C(L) \cap \mathcal{F}. \tag{4.5}$$

Definamos una función $g : C(Y) \to C(L)$ como sigue:

$$g(A) = \begin{cases} A, & \text{si } A \in \mathcal{F} \\ h(A), & \text{si } A \in \mathcal{H} \cup \mathcal{K}. \end{cases}$$

Primero demostremos que g está bien definida. Recordemos que $C(Y) = C(L) \cup \mathcal{H}\cup$K. Si $A \in \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$, entonces $h(A) \in C(L)$. Observemos que:

$$C(L) = (C(L) \cap \mathcal{K}) \cup (C(L) - \mathcal{K})$$

$$= (C(L) \cap \mathcal{K}) \cup \mathrm{cl}_{C(L)}(C(L) - \mathcal{K})$$

$$= (C(L) \cap \mathcal{K}) \cup \mathcal{F}.$$

Si $A \in C(L) \cap \mathcal{K}$, tenemos que $h(A) \in C(L)$. Ahora si $A \in \mathcal{F}$, $g(A) = A \in C(L)$. Como $\mathcal{F} \subset C(L)$, $\mathcal{F} \cap (\mathcal{H} \cup \mathrm{K}) \subset C(L)$. Por otro lado, por 3), $\mathcal{F} \cap \mathcal{H} \subset \beta_1$, y por (4.5), $\beta_1 = \mathcal{K} \cap C(L) \cap \mathcal{F}$. De aquí tenemos que

$$\mathcal{F} \cap (\mathcal{H} \cup \mathcal{K}) = (\mathcal{F} \cap \mathcal{H}) \cup (\mathcal{F} \cap \mathcal{K}),$$

$$(\mathcal{F} \cap \mathcal{H}) \cup (\mathcal{F} \cap \mathcal{K}) \subset (\beta_1 \cup (\mathcal{F} \cap \mathcal{K})) \cap C(L),$$

$$(\beta_1 \cup (\mathcal{F} \cap \mathcal{K})) \cap C(L) = (\beta_1 \cap C(L)) \cup ((\mathcal{F} \cap \mathcal{K}) \cap C(L)),$$

$$(\beta_1 \cap C(L)) \cup ((\mathcal{F} \cap \mathcal{K}) \cap C(L)) = \beta_1 \cup \beta_1 = \beta_1.$$

En conclusión, $\mathcal{F} \cap (\mathcal{H} \cup \mathcal{K}) \subset \beta_1$.Como h es la extensión de la identidad en β_1, g está bien definida.

Probaremos que g es un homeomorfismo.

i) g es continua ya que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ son cerrados, $g_{|\mathcal{F}}$ y $g_{|\mathcal{H}\cup\mathcal{K}} = h$ son continuas y como $\mathcal{F} \cap (\mathcal{H} \cup \mathcal{K}) = (\mathcal{F} \cap \mathcal{H}\ ) \cup (\mathcal{F} \cap \mathcal{K}) \subset \beta_1$, si $A \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{H} \cup \mathcal{K})$ entonces $h(A) = A = \mathrm{Id}_{\beta_1}$.

ii) g es suprayectiva. Recordemos que:

$$C(L) = (C(L) \cap \mathcal{K}) \cup \mathcal{F}.$$

Sea $B \in C(L)$.Si $B \in \mathcal{K}$, entonces $B = h(A)$ para alguna $A \in \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$, así que $g(A) = B$. Si $B \notin \mathcal{K}$, entonces $B \in \mathcal{F}$ y $g(B) = B$. De donde g es suprayectiva.

iii) g es inyectiva. Como la identidad en $\mathcal{F}$ y h son funciones inyectivas, es suficiente considerar lo siguiente: $g(A) = g(B)$, con $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{H} \bigcup \mathcal{K}$. En este caso $g(A) = A = g(B) = h(B)$. Esto demuestra que $A \in \mathrm{Im}(h) = C(L) \bigcap \mathcal{K}$, así que $A \in (C(L) \cap \mathcal{K}\ ) \cap \mathcal{F} = \beta_1$ (por (4.5)). De donde $\mathrm{Id}_{\beta_1}(A) = h(A) = g(A) = h(B)$. Como h es un homeomorfismo, se sigue que $A = B$.

Para finalizar la prueba, como g es continua, biyectiva, el conjunto $C(Y)$ es compacto y $C(L)$ es un espacio T_2, sucede que g es un homeomorfismo. Entonces $C(Y) \approx C(L)$. □

Lema 4.12 *Sean X un continuo localmente conexo y sin arcos libres y L una dendrita. Supongamos que existe un arco $[u,v]$ en L tal que $t_0 \in (u,v)$ es un punto esencial de L. Sea $Y = X \cup_f L$ el espacio cociente, donde $x_0 \in X$ y $t = \{t_0, x_0\} \in Y$. Entonces $C(Y) \approx C(L)$.*

Demostración. Notemos que $C(Y) = C(L) \cup C(X) \cup C(t,Y)$. Denotemos $\mathcal{H} = C(X)$ y $\mathcal{K} = C(t,Y)$. En este caso $\beta_1 = (\mathcal{K} \cap C(L)) \cap \mathrm{cl}_{C(L)}(C(L) - \mathcal{K} \cap C(L))$ coincide con el conjunto $C(t,L) \cap \mathrm{cl}_{C(L)}(C(L) - C(t,L)) = \mathrm{Fr}_{C(L)}(C(t,L))$, al cual llamamos β en el Lema 4.10. Por tanto en este caso $\beta_1 = \beta$. Para demostrar que $C(Y) \approx C(L)$, bastará demostrar los 3 incisos siguientes:

1) $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \approx I^\infty$, $C(L) \cap \mathcal{K} \approx I^\infty$ (Observemos que $C(L) \cap \mathcal{K} = C(t,L)$, por lo tanto $C(t,L) \approx I^\infty$).

2) El conjunto $\beta = \beta_1$ es un Z-conjunto de $\mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ y de $C(L) \cap \mathcal{K} = C(t,L)$, y

3) $cl_{C(L)}(C(L) - \mathcal{K} \cap C(L)\ ) \cap \mathcal{H} \subset \beta = \beta_1$,

y aplicar el Lema 4.11.

Para probar 1) verificaremos las hipótesis del Lema 4.9. El continuo L es una dendrita, por tanto es localmente conexo. El punto t, es un punto esencial de L, entonces t no está en el interior, relativo a L, de ninguna gráfica finita contenida en L. El continuo X es localmente conexo y no tiene arcos libres. Esto demuestra el inciso 1).

Como $\mathcal{H} = C(X)$ y $\mathcal{K} = C(t,Y)$, se infiere que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} = C(X) \cup C(t,Y)$ y $C(L) \cap \mathcal{K} = C(t,L)$. Por el Lema 4.10, $\beta = \mathrm{Fr}_{C(L)}(C(t,L)) = \beta_1$ es un Z-conjunto de $C(t,L) = C(L) \cap \mathcal{K}$ y, también es un Z-conjunto de $C(X) \cup C(t,Y) = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$. De aquí obtenemos el inciso 2).

El inciso 3) resulta directo: $cl_{C(L)}(C(L) - \mathcal{K} \cap C(L)) \cap \mathcal{H} = cl_{C(L)}(C(L) - C(t,L)) \cap C(X) = \{\{t\}\} \subset \beta$. Como se tienen las hipotesis del Lema 4.11, concluimos que $C(Y) \approx C(L)$. $\square$

Ahora, con estos resultados podemos demostrar el inverso del Teorema 3.22, el cual es el Teorema principal de este Capítulo.

Teorema 4.13 *Sea L una dendrita tal que $L \notin \mathfrak{D}$. Entonces existe un continuo localmente conexo Y tal que $L \not\approx Y$ y $C(L) \approx C(Y)$.*

Demostración. Si $L \approx I$, entonces $Y \approx S^1$ es un continuo localmente conexo tal que $L \not\approx Y$ y $C(L) \approx C(Y)$. Supongamos, por tanto, que $L \not\approx I$.

Debido a que $L \notin \mathfrak{D}$, L contiene o bien a W o bien a F_ω, como se definieron en las secciones 2.3 y 2.7, respectivamente. Sean t_0 el punto esencial de W (o el punto esencial de F_ω respectivamente) y, $X \approx \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y x_0 un punto de X. Como t_0 es el punto esencial de W (respectivamente de F_ω), existe $[u, v] \subset W \subset L$ tal que $t_0 \in (u, v)$ (respectivamente , existe $[u, v] \subset F_\omega \subset L$ tal que $t_0 \in (u, v)$). Observemos que t_0 es un punto esencial de L. Sea $Y = X \cup_f L$ el espacio cociente, donde $x_0 \in X$ y $t = \{t_0, x_0\} \in Y$.

Verifiquemos, que tenemos las hipotesis del Lema 4.12. En este caso X es un continuo localmente conexo sin arcos libres y L es una dendrita para la cual se cumple, que existe $[u, v] \subset W \subset L$ (o $[u, v] \subset F_\omega \subset L$) tal que $t_0 \in (u, v)$ es un punto esencial de L. Aplicando el Lema 4.12, concluimos que $C(Y) \approx C(L)$. □

Existen casos particulares en los cuales, dada la dendrita L, podemos encontrar otra dendrita Y que cumpla el Teorema 4.13.

Teorema 4.14 *Sea L una dendrita tal que $L \notin \mathfrak{D}$, L no es un arco y supongamos que para alguna $m \in \mathbb{N}$, L no tiene puntos de orden m. Entonces existe una dendrita Y tal que $L \not\approx Y$ y $C(L) \approx C(Y)$.*

Demostración. Como $L \notin \mathfrak{D}$, L contiene o bien a W o bien a F_ω como se definieron en las secciones 2.3 y 2.7, respectivamente. Denotemos por t_0 el punto esencial de W (respectivamente de F_ω). Sea D_m la dendrita, que se definió en el Capítulo 2 (Sección 2.6) y que tiene la propiedad de que todos sus puntos de ramificación tienen orden m y $x_0 \in D_m$. Sea $Y = D_m \cup_f L$. Entonces Y es una dendrita y no es homeomorfa a L. La demostración, de este teorema, es exactamente igual a la que dimos en el Teorema 4.13 (en este caso $X \approx D_m$). Así que $C(Y) \approx C(L)$. □

Observación 4.15 *El Teorema 4.14 también es cierto si, en lugar de unirle a la dendrita L, la dendrita D_m, le unimos cualquier dendrita D_k tal que L no tiene puntos de orden k. Esto quiere decir que existen dendritas $(D_k \cup_f L)$, no homeomorfas entre si, que tienen el mismo hiperespacio $C(L)$.*

La pregunta que tenemos ahora es:

Pregunta: ¿Para toda dendrita $L \notin \mathfrak{D}$, existe una dendrita Y tal que $L \not\approx Y$ y $C(L) \approx C(Y)$?

Con los teoremas 3.22, 4.13 y algunos teoremas del Capítulo 2, obtenemos varias equivalencias las cuales damos en el siguiente Teorema.

Teorema 4.16 *Sea X una dendrita tal que X no es un arco. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X tiene hiperespacio único $C(X)$;
b) X no contiene como subespacios a F_ω ni a W;
c) $X \in \mathfrak{D}$;
d) Para cada $Z \in C(X)$ existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a Z y $dim_{A_n}(C(X)) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
e) X es homeomorfo a un subespacio de G_ω (véase la definición de G_ω, en la Sección 2.6).

Demostración. En el Teorema 2.28, se tiene la equivalencia entre c) y b).
En el Teorema 3.22, se demuestra que dado c), se obtiene a). El recíproco de tal implicación, se obtiene del Teorema 4.13.
En el Teorema 2.35, se demuestra que c) y d) son equivalentes.
En el Teorema 2.38, se tiene que dado c), se obtienen e). El recíproco de tal implicación, se obtiene del Teorema 2.37. $\square$

Observación. Sabemos que $C([0,1]) \approx C(S^1)$ y que S^1 es el único continuo que cumple tal propiedad (vea [2, Teorema 68 y Teorema 69]). Tomando en cuenta esta observación, las afirmaciones b), d), y e) son equivalentes a c') $X \in \mathfrak{D}$ o $X \approx [0,1]$.

Capítulo 5

LA FAMILIA $\mathfrak{D}^*$ ESTÁ C_n-DETERMINADA; UNA GENERALIZACIÓN

5.1. Introducción

La finalidad de este capítulo es demostrar que si $X \in \mathfrak{D}^*$, Y es una dendrita y $C_n(X) \approx C_n(Y)$, para $n \geq 3$, entonces $X \approx Y$ (Teorema 5.24). Como paso intermedio demostraremos que si $X, Y \in \mathfrak{D}^*$ y $C_n(X) \approx C_n(Y)$, para $n \geq 3$, entonces $X \approx Y$. Para ver esto utilizamos una técnica, que aparece en [30], y fue utilizada para mostrar que las gráficas finitas G tienen hiperespacio único $C_n(G)$, para $n \geq 3$.

Recordemos que si X es una dendrita, entonces

$$X = O(X) \cup R(X) \cup E(X),$$

donde $O(X)$ es el conjunto de puntos ordinarios de X, $R(X)$ el de puntos de ramificación de X y $E(X)$ el de puntos extremos de X. Además $E(X) = E_1(X) \cup E_2(X)$, donde $E_2(X)$ es el conjunto de puntos aislados de $E(X)$ y $E_1(X) = E(X) - E_2(X)$.

También recordemos que

$$C_n(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n\text{-componentes}\right\},$$

$$\mathfrak{D} = \{X : X \text{ es una dendrita, } X \text{ no es un arco y } E(X) \text{ es cerrado}\}.$$

Dados los subconjuntos $U_1, U_2, ..., U_m$ de X, sea

$$\langle U_1, U_2, ..., U_m \rangle_n =$$

$$\{A \in C_n(X)\colon A \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para } i \in \{1, 2, ..., m\}\}.$$

Se sigue de [45, Teorema 0.11] que estos conjuntos forman una base de la topología de $C_n(X)$ (si los subconjuntos $U_1, U_2, ..., U_m$ son abiertos de X).

5.2. Resultados preliminares

Empezaremos viendo dos lemas que nos dicen cual es la dimensión de las vecindades del elemento A cuando $X \in \mathfrak{D}$, $A \in C_n(X)$ y A intersecta a $E_1(X)$ o bien a $R(X)$.

Lema 5.1 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $A \in C_n(X)$ para $n \in \mathbb{N}$. Si $A \cap E_1(X) \neq \emptyset$, entonces $dim(B_{C_n(X)}(A, \epsilon)) = \infty$, para cada $\epsilon > 0$.*

Demostración. Supongamos que $A \in C_n(X)$, para $n \in \mathbb{N}$, y que $A \cap E_1(X) \neq \emptyset$. Sean $A_1, A_2, ..., A_k$ las componentes de A. Supongamos que $A_1 \cap E_1(X) \neq \emptyset$ y $A_1 \neq X$.

Existen $D_2, ..., D_k$, subdendritas de X ajenas dos a dos y no degeneradas, tales que $A_j \subset \text{int}_X(D_j)$ y $A_1 \cap D_j = \emptyset$ para $j \in \{2, ..., k\}$. Sean $p \in A_1 \cap E_1(X)$, $Z \subset E(X)$ tal que $p \in Z$ y Z es un cerrado en $E(X)$ (por tanto es un cerrado en X). Por [47, Teorema 4.7], $\dim(E(X)) = 0$, así que $\dim(Z) = 0$. Por el Teorema 1.6 existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $Z \subset U \cup V$, $A_1 \subset U$, $D_2 \cup \cdots \cup D_k \subset V$, y $cl(U) \cap cl(V) = \emptyset$. Sin perder generalidad, podemos suponer que U es conexo. Así que $cl(U)$ es un continuo tal que $A_1 \subset U$ y $cl(U) \cap D_j = \emptyset$ para $j \in \{2, .., k\}$. Además sabemos que $p \in A_1 \cap E_1(X)$, como U es un abierto existe una sucesión $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos extremos de X, contenida en U, de donde $p \in E_1(cl(U))$. Denotemos a $cl(U)$ por D_1. Entonces existe una dendrita D_1 tales que, $A_1 \subset \text{int}_X(D_1)$, $D_1 \cap D_j = \emptyset$ para $j \in \{2, .., k\}$ y $p \in E_1(D_1)$. Por el Teorema 2.32, p es un punto esencial del continuo D_1. Por el inciso 5) del Teorema 2.19, si T es cualquier árbol contenido en D_1, entonces $p \notin \text{int}(T)$. De donde por el Teorema 1.19 $C(p, D_1) \approx I^\infty$.

La función $h : C(D_1) \times C(D_2) \times \cdots \times C(D_k) \to C_k(X) \subset C_n(X)$, definida por $h(Q_1, Q_2, ..., Q_k) = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_k$, es continua e inyectiva. Es inmediato que h es inyectiva. Para ver que es continua, tomemos una sucesión $\{Z_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ en $C(D_1) \times C(D_2) \times \cdots \times C(D_k)$ tal que $\text{lím} Z_s = Z$, donde $Z \in C(D_1) \times C(D_2) \times \cdots \times C(D_k)$. Cada Z_s lo escribimos en la forma $Z_s = \left(Z_1^{(s)}, Z_2^{(s)}, ..., Z_k^{(s)}\right)$. Entonces, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $\text{lím} Z_i^{(s)} = Z_i$. De aquí $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_k)$. Usando el Teorema 1.25, obtenemos que $\text{lím} h(Z_s) = \text{lím}(Z_1^{(s)} \bigcup Z_2^{(s)} \bigcup \cdots \bigcup Z_k^{(s)}) = \bigcup(\text{lím} Z_i^{(s)}) = \bigcup(Z_i) = h(Z_1, Z_2, ..., Z_k) = h(Z)$. Por tanto, h es continua. Tomemos el siguiente conjunto $C(p, D_1) \times \{A_2\} \times \cdots \times \{A_k\}$, el cual es homeomorfo a I^∞, y le aplicamos la función h, denotaremos a su imagen por $\mathcal{T}$. Es decir, $h(C(p, D_1) \times \{A_2\} \times \cdots \times \{A_k\}) = \mathcal{T} \subset C_k(X)$. Además tenemos que $h(A_1, A_2, ..., A_k) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = A \in \mathcal{T}$. De donde $\infty = \dim_A(\mathcal{T}) \leq \dim_A(C_k(X)) \leq \dim_A(C_n(X))$. Por lo tanto $\dim_A(C_n(X)) = \infty$. Además $A \in \mathcal{T} \cap B_{C_k(X)}(A, \epsilon)$, para cualquier $\epsilon > 0$. Puesto que $\mathcal{T} \approx I^\infty$, por el Teorema 1.42, el conjunto $\mathcal{T} \cap B_{C_k(X)}(A, \epsilon)$ contiene un cubo de Hilbert. Así que $\dim(B_{C_k(X)}(A, \epsilon)) = \infty$. Ya que $B_{C_k(X)}(A, \epsilon) \subset B_{C_n(X)}(A, \epsilon)$, sucede que $\dim(B_{C_n(X)}(A, \epsilon)) = \infty$. □

De la demostración de ésta proposición, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 5.2 *Sean $n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{D}$ y $A \in C_n(X)$. Si $A \cap E_1(X) \neq \emptyset$, entonces $\dim_A(C_n(X)) = \infty$.*

Lema 5.3 *Sean $X \in \mathfrak{D}$, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$. Si $A \cap R(X) \neq \emptyset$, entonces para cada vecindad $\mathcal{S}$ de A, $\dim(\mathcal{S}) \geq 2n + 1$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{S}$ es una vecindad de A en $C_n(X)$. Si $A \cap E_1(X) \neq \emptyset$, entonces, por el Lema 5.1 $\dim(\mathcal{S}) = \infty$.

Supongamos, ahora que $A \cap E_1(X) = \emptyset$ y $p \in R(X) \cap A$. Podemos construir n subcontinuos de X, disjuntos dos a dos, $A_1, A_2, ..., A_n$ (no necesariamente contenidos en A) tales que $A_0 = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ es cercano a A y de tal manera que $\mathcal{S}$ es una vecindad de A_0, y para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ $A_i \cap E_1(X) = \emptyset$ y $p \in R(X) \cap A_1$ (un ejemplo de como obtener A_0 a partir de A, puede verse en la Figura 5.1).

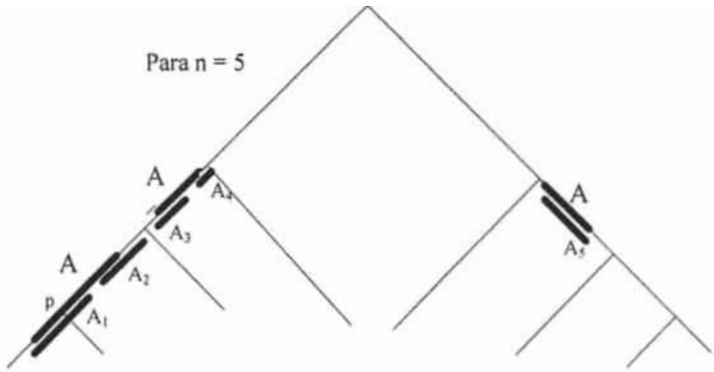

Figura 5.1

Para demostrar esto, sea $\epsilon > 0$ tal que $B_{C_n(X)}(A,\epsilon) \subset \mathcal{S}$. Sea $A_0 \in B_{C_n(X)}(A,\epsilon)$ tal que $A_0 = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, y para cada $i \in \{1,2,...,n\}$ $A_i \cap E_1(X) = \emptyset$ y $p \in R(X) \cap A_1$.

Por lo tanto existen n árboles, ajenos dos a dos, $D_1, D_2, ..., D_n$ de X tales que $A_i \subset \text{int}D_i$ para toda $i \in \{1,2...,n\}$. Sea $\mathcal{V} = \langle D_1, D_2, ..., D_n\rangle_n$. Entonces la función $h : C(D_1) \times C(D_2) \times \cdots \times C(D_n) \to \mathcal{V}$ definida por $h(Q_1, Q_2, ..., Q_n) = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_n$ es continua y biyectiva. Es inmediato que h es biyectiva. Para ver que es continua, tomemos una sucesión $\{Z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C(D_1) \times C(D_2) \times \cdots \times C(D_n)$ tal que $\text{lím}Z_k = Z$, donde $Z \in C(D_1) \times C(D_2) \times \cdots \times C(D_n)$. Cada Z_k lo escribimos en la forma $Z_k = \left(Z_1^{(k)}, Z_2^{(k)}, ..., Z_n^{(k)}\right)$. Entonces, para cada $i \in \{1,...,n\}$, $\text{lím}Z_i^{(k)} = Z_i$. De aquí $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$. Usando el Teorema 1.25, obtenemos que $\text{lím}h(Z_k) = \text{lím}(Z_1^{(k)} \bigcup Z_2^{(k)} \bigcup \cdots \bigcup Z_n^{(k)}) = \bigcup(\text{lím}Z_i^{(k)}) = \bigcup(Z_i) = h(Z_1, Z_2, ..., Z_n) = h(Z)$. Por tanto, h es continua. Concluimos que h es un homeomorfismo. Por [18, 5.2], para cada $i \in \{1,...,n\}$, existe una m_i-celda $\mathcal{G}_i$ $(m_i \geq 2)$, con $\mathcal{G}_i \subset C(D_i)$, tal que $A_i \in \mathcal{G}_i$. Como $p \in R(X) \cap A_1$, por [18, 5.2], $\mathcal{G}_1$ es una m_1-celda, con $m_1 \geq 3$. Así $h(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \cdots \times \mathcal{G}_n) = \mathcal{G}$ es una m-celda para algún $m \geq 2n+1$. Además $h(A_1, A_2, ..., A_n) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_0 \in \mathcal{G}$. Por lo tanto $A_0 \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G}$, entonces (como $A_0 \in B_{C_n(X)}(A,\epsilon)$) $A_0 \in B_{C_n(X)}(A,\epsilon) \cap \mathcal{G} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{G}$, para algún $\epsilon > 0$. De aquí, por el Teorema 1.42, $B_{C_n(X)}(A,\epsilon) \cap \mathcal{G}$ contiene una m-celda, para $m \geq 2n+1$. Así que $\mathcal{S}$ contiene una m-celda, para $m \geq 2n+1$. Por lo tanto $\dim(\mathcal{S}) \geq 2n+1$. □

De este resultado obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.4 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $C_n(X)$ no es homeomorfo a $C_n(I)$.*

Demostración. Por [41, Corolario 5.3] $\dim(C_n(I)) = 2n$. Sean $A \in C_n(X)$ tal que $A \cap R(X) \neq \emptyset$ y $\mathcal{S}$ una vecindad de A en $C_n(X)$. Por el Lema 5.3, $\dim(\mathcal{S}) \geq 2n+1$. Por lo tanto $C_n(X)$ no es homeomorfo a $C_n(I)$. □

Definición 5.5 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $n \geq 2$. Denotemos*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n(X) &= \{A \in C_n(X)\colon \textit{existe una vecindad de } A \textit{ en } C_n(X), \\ &\qquad \textit{la cual es una } 2n\textit{-celda}\}.\end{aligned}$$

Para $X \in \mathfrak{D}$ y $n \geq 2$, veamos algunas propiedades que cumplen los elementos del conjunto $\mathcal{L}_n(X)$.

Lema 5.6 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $n \geq 2$. Si $A \in \mathcal{L}_n(X)$, entonces $dim_A(C_n(X)) \leq 2n$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un abierto de A en $C_n(X)$. Como $A \in \mathcal{L}_n(X)$, existe una vecindad, $\mathcal{V}$ de A en $C_n(X)$, la cual es una $2n$-celda. De aquí que existe un abierto $\mathcal{S}$ de A en $C_n(X)$ contenido en $\mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}$ es un abierto en $C_n(X)$ contenido en $\mathcal{V}$, de donde tenemos $\dim(\mathrm{Fr}(\mathcal{S} \cap \mathcal{U})) \leq 2n-1$. Como además $\mathcal{S} \cap \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$, por la definición de dimensión (Definición 1.3), $\dim_A(C_n(X)) \leq 2n$. □

Corolario 5.7 *Si $A \in \mathcal{L}_n(X)$, entonces $A \cap E_1(X) = \emptyset$ y $A \cap R(X) = \emptyset$.*

Demostración. Esto es consecuencia de los lemas 5.1, 5.3 y 5.6. □

Lema 5.8 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $n \in \mathbb{N}$. Denotemos*

$$\mathcal{M}_n(X) = \{A \in C_n(X)\colon A \notin C_{n-1}(X),\ A \cap R(X) = \emptyset \text{ y } A \cap E_1(X) = \emptyset\}.$$

Entonces $\mathcal{M}_n(X) \subset \mathcal{L}_n(X)$.

Demostración. Nótese que si $A \in \mathcal{M}_n(X)$, entonces cada componente de A es un arco o un punto. Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ las diferentes componentes de A. Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe un arco J_i en X tal que $A_i \subset \mathrm{int}_X(J_i)$, $J_i \cap R(X) = \emptyset$ y $J_i \cap E_1(X) = \emptyset$. Los $J_1, J_2, ..., J_n$ son ajenos dos a dos. Como $A \in \langle \mathrm{int}_X J_1, \mathrm{int}_X J_2, ..., \mathrm{int}_X J_n \rangle_n$, entonces $\mathcal{V} = \langle J_1, J_2, ..., J_n \rangle_n$ es una vecindad de A en $C_n(X)$. De la misma manera que se demostró en el Lema 5.3, $\mathcal{V} = \langle J_1, J_2, ..., J_n \rangle_n \approx C(J_1) \times C(J_2) \times \cdots \times C(J_n)$. Como, $C(J_i)$ es una 2-celda, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (véase el Lema 3.3), entonces $\mathcal{V}$ es una $2n$-celda y $A \in \mathcal{V}$. Por lo tanto $A \in \mathcal{L}_n(X)$. □

Lema 5.9 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea*

$$\mathcal{P}_n = \{A \in C_n(X) \colon A \cap R(X) = \emptyset \text{ y } A \cap E_1(X) = \emptyset\}.$$

Entonces $dim(\mathcal{P}_n) \leq 2n$.

Demostración. Probaremos este lema por inducción. Primero supongamos que $n = 1$. Dado $A \in \mathcal{P}_1$, existe un arco J de X tal que $A \subset \operatorname{int}_X(J)$. Ahora $\langle \operatorname{int}_X(J) \rangle \subset \langle J \rangle = C(J)$, de donde $C(J)$ es una vecindad de A en $C(X)$. Como $C(J)$ es una 2-celda, entonces $\dim_A(C(X)) \leq 2$ (una demostración de tal afirmación, es semejante a la demostración que dimos en el Lema 5.6). Por lo tanto $\dim(\mathcal{P}_1) \leq 2$.

Ahora supongamos que $n \geq 2$ y que el lema es cierto para $n - 1$.
Nótese que:

$$\mathcal{P}_{n-1} = \{A \in C_{n-1}(X) : A \cap R(X) = \emptyset \text{ y } A \cap E_1(X) = \emptyset\} \subset \mathcal{P}_n \subset C_n(X),$$

y $\mathcal{P}_{n-1} = \mathcal{P}_n \cap C_{n-1}(X)$ es cerrado en $\mathcal{P}_n$. Por hipótesis inductiva $\dim(\mathcal{P}_{n-1}) \leq 2(n-1)$. Además tenemos que $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n-1} \cup \mathcal{M}_n(X)$ ($\mathcal{M}_n(X)$ definido en el Lema 5.8). Por el Lema 5.8, $\mathcal{M}_n(X) \subset \mathcal{L}_n(X)$, entonces (por el Lema 5.6) $\dim(\mathcal{M}_n(X)) \leq 2n$. Por el corolario 1, página 32 de [26], $\dim(\mathcal{P}_n) \leq 2n$. □

Veamos el concepto de separación.

Definición 5.10 *Sean X un continuo, A, B y $C \in 2^X$. Diremos que C separa A y B en X , si $X - C = P \cup R$ con $A \subset P$ y $B \subset R$ donde $\operatorname{cl}(P) \cap R = \operatorname{cl}(R) \cap P = \emptyset$ (véase sección 1.9).*
En particular, diremos que C separa a X, si $X - C$ es disconexo.
Para denotar que C separa A y B en X, escribiremos $X - C = P \mid R$ con $A \subset P$ y $B \subset R$.

Lema 5.11 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $n \geq 3$. Sea $A \in C_{n-1}(X) - C(X)$ tal que $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Entonces existe una vecindad $\mathcal{V}$ de A en $C_n(X)$ tal que cada vecindad cerrada $\mathcal{N}$ de A en $C_n(X)$ que satisface que $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}$, es separada por un conjunto cerrado $\mathcal{S}$ (en $C_n(X)$) tal que para cada $T \in \mathcal{S}$, $T \cap E_1(X) = \emptyset$, $\mathcal{S} \subset C_{n-1}(X)$ y $dim(\mathcal{S}) \leq 2(n-1)$.*

Demostración. Sean $A_1, A_2, ..., A_m$ las componentes de A, donde $2 \leq m < n$. Por lo tanto para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $A_i \cap R(X) = \emptyset$ y $A_i \cap E_1(X) = \emptyset$ (cada A_i es un arco o un conjunto con un punto). Sean $J_1, J_2, ..., J_m$ arcos ajenos dos a dos de X tales que, $A_i \subset \text{int}_X(J_i)$, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, y $(J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_m) \cap R(X) = \emptyset$ (esto implica que $(J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_m) \cap E_1(X) = \emptyset$). Sea $\mathcal{V} = \langle J_1, J_2, ..., J_m \rangle_n$, entonces $\mathcal{V}$ es una vecindad de A en $C_n(X)$. Por la definición de $\mathcal{V}$, para cada $T \in \mathcal{V}$, $T \cap E_1(X) = \emptyset$. Sea $\mathcal{N}$ una vecindad cerrada de A en $C_n(X)$ tal que $\mathcal{N} \subset \mathcal{V}$. Definimos:

$$\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{N} : M \cap J_1 \text{ tiene al menos dos componentes}\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{Q} = \{M \in \mathcal{N} : M \cap (J_2 \cup \cdots \cup J_m) \text{ tiene al menos } n-1 \text{ componentes}\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Q}$ son abiertos en $\mathcal{N}$. Demostremos que $\mathcal{R}$ es abierto en $\mathcal{N}$. la demostración de que $\mathcal{Q}$ es abierto en $\mathcal{N}$ es similar. Supongamos que $M \in \mathcal{R}$ y $M_1, M_2, ..., M_s$ son las componentes de M, donde al menos M_1 y M_2 están contenidos en J_1 y las componentes restantes están en $\cup J_i$. Sean $T_1, T_2, ..., T_s$ arcos ajenos dos a dos de X tales que, $M_k \subset \text{int}_X(T_k)$, para cada $k \in \{1, 2, ..., s\}$, además T_1 y T_2 están contenidos en J_1 y $\cup T_k \subset \cup J_i$. Sea $\mathcal{K} = \langle \text{int}T_1, \text{int}T_2, .., \text{int}T_s \rangle_n$, un abierto en $C_n(X)$, entonces $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}$ es un abierto en $\mathcal{N}$ que contiene a M y está contenido en $\mathcal{R}$.

Veamos que $\mathcal{R} \neq \emptyset$ y $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Si escogemos un punto $p \in J_1 - A_1$ tal que p es suficientemente cercano a A_1, entonces $A_1 \cup \{p\} \in \mathcal{N}$ y $(A_1 \cup \{p\}) \cap J_1$ tiene dos componentes, así $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Ahora escogemos diferentes puntos $q_{m+1}, ..., q_n$ en $J_2 - A_2$ tal que los puntos q_i están suficientemente cercanos a A_2, entonces $A \cup \{q_{m+1}, ..., q_n\} \in \mathcal{N}$ y $(A \cup \{q_{m+1}, ..., q_n\}) \cap (J_2 \cup \cdots \cup J_m)$ tiene al menos $n-1$ componentes (aquí es donde usamos que $n \geq 3$ puesto que $A \cup \{q_{m+1}, ..., q_n\}$ tiene al menos 3 componentes, es decir A_1, A_2 y $\{q_3\}$), así $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Notar que si $M \in \mathcal{R} \cap \mathcal{Q}$ entonces M contiene al menos $n+1$ componentes, lo cual es una contradicción, ya que $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} \subset C_n(X)$. Por lo cual hemos demostrado que $\mathcal{R} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$. En resumen, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Q}$ son subconjuntos no vacíos, abiertos y ajenos de $\mathcal{N}$. Sea $\mathcal{S} = \mathcal{N} - (\mathcal{R} \cup \mathcal{Q})$ (es cerrado en $\mathcal{N}$ y como $\mathcal{N}$ es cerrado, entonces $\mathcal{S}$ es cerrado en $C_n(X)$). Es decir, el conjunto $\mathcal{S}$ es,

$$\mathcal{S} = \mathcal{N} - (\mathcal{R} \cup \mathcal{Q}) =$$

$$= \{M \in \mathcal{N} : M \text{ tiene exactamente una componente en } J_1 \text{ y } M \cap (J_2 \cup \cdots \cup J_m) \text{ tiene a lo más } n-2 \text{ componentes}\}.$$

De aquí $\mathcal{S} = \mathcal{N} - (\mathcal{R} \cup \mathcal{Q}) \subset C_{n-1}(X)$. Observar que si $M \in \mathcal{S} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{V}$, entonces $M \cap R(X) = \emptyset$ y $M \cap E_1(X) = \emptyset$. Así que

$$\mathcal{S} \subset \{M \in C_{n-1}(X) : M \cap R(X) = \emptyset \text{ y } M \cap E_1(X) = \emptyset\}.$$

Por el Lema 5.9, $\dim(\mathcal{S}) \leq 2(n-1)$. Por la definición de $\mathcal{S}$, $\mathcal{N} - \mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \mathcal{Q}$, es decir $\mathcal{N}$ es separado por un subconjunto cerrado $\mathcal{S}$ (de $C_n(X)$) contenido en $C_{n-1}(X)$ tal que $\dim(\mathcal{S}) \leq 2(n-1)$. □

Para $X \in \mathfrak{D}$ y $n \geq 3$, demostremos que los elementos de $\mathcal{L}_n(X)$ son los que tienen, exactamente n componentes, no tienen puntos de ramificación y no intersectan a $E_1(X)$.

Lema 5.12 *Sea $X \in \mathfrak{D}$ y $n \geq 3$. Sea $\mathcal{M}_n(X)$ el conjunto definido en el Lema 5.8. Entonces $\mathcal{M}_n(X) = \mathcal{L}_n(X)$.*

Demostración. Por el Lema 5.8 sólo necesitamos demostrar que $\mathcal{L}_n(X) \subset \mathcal{M}_n(X)$. Tomemos $A \in \mathcal{L}_n(X)$, entonces existe una vecindad $\mathcal{U}$ de A en $C_n(X)$ tales que $\mathcal{U}$ es una $2n$-celda. Por el Corolario 5.7, $A \cap E_1(X) = \emptyset$ y $A \cap R(X) = \emptyset$. Necesitamos demostrar que $A \notin C_{n-1}(X)$. Supongamos lo contrario que $A \in C_{n-1}(X)$. Como $A \in \operatorname{int}_{C_n(X)}(\mathcal{U})$, existe $\delta > 0$ tal que $B_{C_n(X)}(A, \delta) \subset \mathcal{U}$, por lo tanto existe un elemento $A_0 \in C_{n-1}(X) - C(X)$ tal que $A_0 \in B_{C_n(X)}(A, \delta) \subset \operatorname{int}_{C_n(X)}(\mathcal{U})$, $A_0 \cap R(X) = \emptyset$ y $A_0 \cap E_1(X) = \emptyset$. Como $A_0 \in C_{n-1}(X) - C(X)$, por el Lema 5.11, existe una vecindad $\mathcal{V}$ de A_0 en $C_n(X)$, que cumple la condición mencionada en ese Lema. Por el Teorema 1.42, existe una vecindad cerrada $\mathcal{N}$ de A_0 en $C_n(X)$ tal que $\mathcal{N} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ y $\mathcal{N}$ es una $2n$-celda (recordar que $\mathcal{U}$ es una $2n$-celda). Por la elección de $\mathcal{V}$, la $2n$-celda $\mathcal{N}$ es separada por un subconjunto cerrado $\mathcal{S}$ de $\mathcal{N}$ tal que $\dim(\mathcal{S}) \leq 2(n-1)$. Esto contradice el siguiente resultado: La k-celda I^k no puede ser separada por un subconjunto de dimensión menor o igual a $k-2$ (La demostración de este resultado se puede ver en [26, Corolario 2, del Teorema IV.4]). Así que $A \notin C_{n-1}(X)$. En conclusión, tenemos que $A \in \mathcal{M}_n(X)$. Esto termina la prueba del Lema. □

Definición 5.13 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $A \in C(X)$ tales que $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Sea U un subconjunto abierto y conexo de X tal que $A \subset U$ y $U \cap R(X) = \emptyset$. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset U$. Sea $M \in B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, por lo tanto $M \subset N(\epsilon, A)$. Diremos que las componentes de $N(\epsilon, A) - M$ están **uniformemente distribuidas en** $N(\epsilon, A)$ si:*

i) las componentes de $N(\epsilon, A) - M$ tienen el mismo diámetro;

y

ii) las componentes de M tienen el mismo diámetro.

Observación 5.14 *En relación a la Definición 5.13, observemos lo siguiente: sea $M \in B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $N(\epsilon, A)$ es un intervalo abierto de longitud r, contenido en un intervalo cerrado, en $\mathbb{R}$. Supongamos que las componentes de $N(\epsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\epsilon, A)$. Sean $l =$ diámetro de cada componente de M, $\delta =$ diámetro de cada componente de $N(\varepsilon, A) - M$ (con $\delta < \frac{\epsilon}{3}$). Entonces la n-ada $(l, l, ..., l)$ satisface la siguiente ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (n+1)\delta = r$. Por tanto $l = \frac{r-(n+1)\delta}{n}$.*

Veamos que cualquier elemento, $L \in B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, tal que las componentes de $N(\epsilon, A) - L$ tienen el mismo diámetro igual a δ, con $\delta < \frac{\epsilon}{3n}$, puede unirse mediante un arco, a otro elemento, M, de $B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, tal que las componentes de $N(\epsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\epsilon, A)$.

Lema 5.15 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $A \in C(X)$ tales que $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Sea U un subconjunto abierto y conexo de X tal que $A \subset U$ y $U \cap R(X) = \emptyset$. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset U$. Sea $L \in B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Supongamos que las componentes de $N(\epsilon, A) - L$ tienen el mismo diámetro igual a δ, con $\delta < \frac{\epsilon}{3n}$. Entonces existe $M \in B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ tal que las componentes de $N(\epsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\epsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a δ. Además existe un arco α de L a M tal que $\alpha \subset B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$.*

Demostración. Sin perder generalidad, podemos suponer que $N(\epsilon, A)$ es un intervalo abierto de longitud r, contenido en un intervalo cerrado, en $\mathbb{R}$. Supongamos que las componentes de $N(\epsilon, A) - L$ tienen el mismo diámetro igual a δ. Sean $L_1, L_2, ..., L_n$ las componentes de L, $l_i = \text{diám}(L_i)$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $l = \frac{r-(n+1)\delta}{n}$ (como lo definimos en la observación 5.14). Tomamos dos puntos en $\mathbb{R}^n$, $p = (l, l, ..., l)$ y $q = (l_1, l_2, ..., l_n)$. Llamemos $\mathfrak{H}$ a la línea recta, en $\mathbb{R}^n$ que pasa por los puntos p y q, y $[q, p]$ al segmento de la línea recta $\mathfrak{H}$ que tiene por extremos a p y a q. Las coordenadas de cualquier punto de la línea recta $\mathfrak{H}$ satisfacen la ecuación, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (n+1)\delta = r$.

Definimos $\alpha : [q,p] \to B_{C_n(X)}(A,\epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X)) \subset C_n(X)$ de la siguiente manera: sea $(s_1, s_2, ..., s_n) \in [q,p]$, $\alpha(s_1, s_2, ..., s_n) = Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_n$, donde las componentes $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ están contenidas en $N(\epsilon, A)$ y $s_i = \text{diám}(Z_i)$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Las coordenadas del punto $(s_1, s_2, ..., s_n)$ satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (n+1)\delta = r$. Además, las componentes $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ de Z, las consideramos dentro de $N(\epsilon, A)$, en el orden que tienen los subíndices, de la siguiente manera: primero construimos, en $N(\epsilon, A)$, un intervalo abierto de longitud igual a δ, en seguida construimos un intervalo cerrado de longitud igual a s_1 (la componente Z_1). Pegado a este intervalo, construimos un intervalo abierto de longitud igual a δ, en seguida construimos otro intervalo cerrado de longitud igual a s_2 (la componente Z_2) y así sucesivamente. La unión de estos intervalos abiertos y cerrados es $N(\epsilon, A)$. Las componentes de Z y los conjuntos de $N(\epsilon, A) - Z$, los consideramos, dentro de $N(\epsilon, A)$, en el orden y sólo en ese orden, que tienen sus diámetros, en la siguiente suma (en este caso consideramos dicha suma, sin conmutar ningún elemento); $\delta + s_1 + \delta + s_2 + \delta + \cdots + \delta + s_n + \delta = r$. Observemos que existe una correspondencia única, entre las n componentes de Z, en$N(\epsilon, A)$, y las n coordenadas del punto $(s_1, s_2, ..., s_n)$ de $[q,p]$, las cuales satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (n+1)\delta = r$.

Sea $M \in B_{C_n(X)}(A,\epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ tal que sus componentes $M_1, M_2, ..., M_n$ tengan el mismo diámetro l (véase la Observación 5.14). También tenemos, que las componentes de $N(\epsilon, A) - M$ tienen el mismo diámetro igual a δ. Por tanto las componentes de $N(\epsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\epsilon, A)$. Por la definición de α, $\alpha(p) = M$ y $\alpha(q) = L$. Observemos que $\alpha([q,p])$ está contenido en $B_{C_n(X)}(A,\epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, y α es inyectiva.

Demostremos que α es continua. Tomemos una sucesión $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $[q,p]$ tal que $\lim t_k = t$, donde $t \in [q,p]$. Sea $\alpha(t) = T$. A cada t_k lo escribimos en la forma $t_k = \left(t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, ..., t_n^{(k)}\right)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\lim t_i^{(k)} = t_i$. De aquí $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$. Sean $T_i^{(k)}$ y T_i intervalos cerrados en $N(\epsilon, A)$, tales que $t_i^{(k)} = \text{diám}(T_i^{(k)})$ y $t_i = \text{diám}(T_i)$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $k \in \mathbb{N}$, respectivamente. Además $T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n = T$ y $T_k = T_1^{(k)} \cup T_2^{(k)} \cup \cdots \cup T_n^{(k)}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por la distribución de las componentes de T_k y de T en $N(\epsilon, A)$, y que $\lim t_i^{(k)} = t_i$ se tiene, que las sucesiónes formadas por los extremos de cada arco $T_i^{(k)}$ (para $k \in \mathbb{N}$), convergen a los extremos de cada arco T_i. Así que $\text{lím}T_i^{(k)} = T_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Usando el Teorema 1.25 e inducción matemática, obtenemos que: $\text{lím}\alpha(t_k)$ $=\text{lím}(T_1^{(k)} \cup T_2^{(k)} \cup \cdots \cup T_n^{(k)}) = \bigcup_{i=1}^{n} \text{lím}T_i^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{n} T_i =$ $\alpha(t_1, t_2, ..., t_n) = \alpha(t)$ (conservando el orden en la unión). Por tanto, α es continua. De donde $\alpha([q,p]) \approx [q,p]$. En conclusión tenemos, que $\alpha([q,p])$ es un arco contenido en $B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, cuyos extremos son $\alpha(p) = M$ y $\alpha(q) = L$. □

Ahora, veamos que cualquier elemento, M, de $B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ tal que las componentes de $N(\epsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\epsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a δ, con $\delta < \frac{\epsilon}{3n}$, puede unirse mediante un arco, a otro elemento, S, de $B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, tal que las componentes de $N(\epsilon, A) - S$ están uniformemente distribuidas en $N(\epsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a $\frac{\epsilon}{3n}$.

Lema 5.16 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $A \in C(X)$ tal que $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Sea U un subconjunto abierto y conexo de X tal que $A \subset U$ y $U \cap R(X) = \emptyset$. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset U$. Sea $M \in B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Supongamos que las componentes de $N(\epsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\epsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a δ, con $\delta < \frac{\epsilon}{3n}$. Entonces existe $S \in B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ con la propiedad de que las componentes de $N(\epsilon, A) - S$ están uniformemente distribuidas en $N(\epsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a $\frac{\epsilon}{3n}$. Además existe un arco σ de M a S tal que $\sigma \subset B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$.*

Demostración. Sin perder generalidad, podemos suponer que $N(\epsilon, A)$ es un intervalo abierto de longitud r, contenido en un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$. Supongamos que las componentes de $N(\epsilon, A) - M$ están uniformemente distribuidas en $N(\epsilon, A)$ y tienen el mismo diámetro igual a δ, con $\delta < \frac{\epsilon}{3n}$. Sea $M = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$, donde sus componentes $M_1, M_2, ..., M_n$, están contenidas en $N(\epsilon, A)$, y tienen el mismo diámetro $l = \frac{r-(n+1)\delta}{n}$. Ahora tomemos $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$, donde sus componentes $S_1, S_2, ..., S_n$, están contenidas en $N(\epsilon, A)$, y tienen el mismo diámetro $m = \frac{3nr-(n+1)\epsilon}{3n^2}$. Las coordenadas de los puntos en $\mathbb{R}^{n+1}$, $p = (l, l, ..., l, \delta)$ y $q = \left(m, m, ..., m, \frac{\epsilon}{3n}\right)$ satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (n+1)x_{n+1} = r$, en donde $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Llamemos $\mathfrak{H}$ a la línea recta, en $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasa por los puntos p y q, y $[q,p]$ al segmento de la línea recta $\mathfrak{H}$ que tiene por extremos a p y q. Definimos $\sigma : [q,p] \to C_n(X)$ de la siguiente manera, sea $(s, s, ..., s, l_1) \in [q,p]$,

$\sigma(s, s, ..., s, l_1) = Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_n$, donde Z tiene como componentes a $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, contenidas en $N(\epsilon, A)$, y tienen el mismo diámetro $s = \text{diám}(Z_i)$, para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, y $\delta \leq l_1 \leq \frac{\epsilon}{3n}$. Las coordenadas del punto $(s, s, ..., s, l_1)$ satisfacen la ecuación $x_1+x_2+\cdots+x_n+(n+1)x_{n+1} = r$. Además las componentes $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ de Z, las consideramos dentro de $N(\epsilon, A)$, en el orden que tienen los subíndices, de la siguiente manera: primero construimos, en $N(\epsilon, A)$ un intervalo abierto de longitud igual a l_1, enseguida construimos un intervalo cerrado de longitud igual a s (la componente Z_1). Pegado a este intervalo, construimos un intervalo abierto de longitud igual a l_1, en seguida construimos otro intervalo cerrado de longitud igual a s (la componente Z_2) y así sucesivamente. La unión de estos intervalos abiertos y cerrados es $N(\epsilon, A)$. Las componentes de Z y los conjuntos de $N(\epsilon, A) - Z$, los consideramos, dentro de $N(\epsilon, A)$, en el orden y sólo en ese orden, que tienen sus diámetros, en la siguiente suma (en este caso consideramos dicha suma, sin conmutar ningun elemento); $l_1 + s_1 + l_1 + s_2 + l_1 + \cdots + l_1 + s_n + l_1 = r$.

Por la definición de σ, $\sigma(p) = S$ y $\sigma(q) = M$. Observemos que, $\sigma([q, p])$ está contenido en $B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, y σ es inyectiva. La demostración de que σ es continua, es similar a la demostración que dimos en el Lema 5.15. Por tanto $\sigma([q, p]) \approx [q, p]$. En conclusión tenemos, que $\sigma([q, p])$ es un arco contenido en $B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, cuyos extremos son $\sigma(p) = S$ y $\sigma(q) = M$. □

La demostración del siguiente lema, es totalmente similar a las demostraciones de los Lemas 5.15 y 5.16. Por esta razón la omitimos.

Lema 5.17 *Sean $X \in \mathfrak{D}$ y $A \in C(X)$ tal que $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Sea U un subconjunto abierto y conexo de X tal que $A \subset U$ y $U \cap R(X) = \emptyset$. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset U$. Sea $K \in B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Entonces existe $L \in B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, tal que las componentes de $N(\epsilon, A) - L$ tienen el mismo diámetro igual a δ. Además existe un arco α de K a L tal que $\alpha \subset B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$.*

Definición 5.18 *Dada $X \in \mathfrak{D}$, definimos*

$$\Gamma_n(X) = \left\{ \begin{array}{l} A \in C_n(X) : A \notin \mathcal{L}_n(X) \text{ y } A \text{ tiene una base local } \beta \text{ de} \\ \text{abiertos de } C_n(X) \text{ tales que para cada } \mathfrak{U} \in \beta,\ \dim \mathfrak{U} \leq \\ 2n \text{ y } \mathfrak{U} \cap \mathcal{L}_n(X) \text{ es arcoconexo.} \end{array} \right\}.$$

Observemos que, los elementos de $\Gamma_n(X)$ están definidos mediante propiedades topológicas. Los lemas anteriores nos ayudarán a demostrar que los elementos de $\Gamma_n(X)$ son conexos, no tiene puntos de ramificación y no intersectan al conjunto $E_1(X)$.

Lema 5.19 *Sea $X \in \mathfrak{D}$ y $n \geq 3$. Entonces*

$$\Gamma_n(X) = \{A \in C_n(X) \colon A \textit{ es conexo, } A \cap R(X) = \emptyset \textit{ y } A \cap E_1(X) = \emptyset\}.$$

Demostración. Sea $A \in \Gamma_n(X)$. Por el Lema 5.3, $A \cap R(X) = \emptyset$ y por el Lema 5.1, $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Demostraremos que A es conexo. Supongamos lo contrario que $A \notin C(X)$. Como $A \in \Gamma_n(X)$, entonces $A \notin \mathcal{L}_n(X)$ y por el Lema 5.12, $A \notin \mathcal{M}_n(X)$, así que $A \in C_{n-1}(X) - C(X)$. Sea $\mathcal{V}$ una vecindad de A en $C_n(X)$ que cumple la propiedad mencionada en el Lema 5.11. Puesto que $A \in \Gamma_n(X)$ existe una vecindad abierta $\mathcal{N}$ de A en $C_n(X)$ tal que $\dim(\mathcal{N}) \leq 2n$, $\mathcal{N} \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo, cada elemento $T \in \mathcal{N}$ tiene la propiedad de que $T \cap R(X) = \emptyset$, $T \cap E_1(X) = \emptyset$ y podemos suponer que $\mathrm{cl}_{\,C_n(X)}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{V}$ (ya que $C_n(X)$ es regular). Por la elección de $\mathcal{V}$, $\mathrm{cl}_{\,C_n(X)}(\mathcal{N})$ puede ser separada por un conjunto cerrado $\mathcal{S}$ contenido en $C_{n-1}(X)$. Entonces existen subconjuntos abiertos, ajenos, no vacíos $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ de $\mathrm{cl}_{\,C_n(X)}(\mathcal{N})$ tales que $\mathrm{cl}_{\,C_n(X)}(\mathcal{N}) - \mathcal{S} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$. Entonces $\mathcal{H} \cap \mathcal{N}$ y $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}$ son subconjuntos abiertos, no vacíos de $C_n(X)$. Esto es porque, si $\mathcal{H} = \mathcal{U} \cap \mathrm{cl}_{\,C_n(X)}(\mathcal{N})$ (para $\mathcal{U}$ abierto en $C_n(X)$), entonces $\mathcal{H} \cap \mathcal{N} = \mathcal{U} \cap \mathrm{cl}_{\,C_n(X)}(\mathcal{N}) \cap \mathcal{N} = \mathcal{U} \cap \mathcal{N}$ (de la misma manera se demuestra que $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}$ es un subconjunto abierto de $C_n(X)$). Por [40, Teorema 3.3], $C_n(X) - C_{n-1}(X)$ es denso en $C_n(X)$. Entonces existen elementos $E \in \mathcal{H} \cap \mathcal{N} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$ y $F \in \mathcal{K} \cap \mathcal{N} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Entonces $E, F \in \mathcal{M}_n(X) \cap \mathcal{N} = \mathcal{L}_n(X) \cap \mathcal{N}$ (véase la definición de $\mathcal{M}_n(X)$ en el Lema 5.8), puesto que $\mathcal{L}_n(X) \cap \mathcal{N}$ es arco conexo, existe un subarco α en $\mathcal{L}_n(X) \cap \mathcal{N}$ que une E con F. Por la elección de $\mathcal{S}$, existe un, elemento $Z \in \alpha \cap \mathcal{S}$ (de lo contrario $\alpha \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$, lo cual es una contradicción porque α es conexo). Puesto que $Z \in \alpha \subset \mathcal{L}_n(X) = \mathcal{M}_n(X)$, $Z \notin C_{n-1}(X)$. Esto no es posible puesto que $Z \in \mathcal{S} \subset C_{n-1}(X)$. Esta contradicción demuestra que A es conexo.

Ahora demostremos la otra inclusión. Tomemos $A \in C_n(X)$ tal que A es conexo, $A \cap R(X) = \emptyset$ y $A \cap E_1(X) = \emptyset$. Puesto que $A \in C(X) \subset C_{n-1}(X)$, $A \notin \mathcal{M}_n(X) = \mathcal{L}_n(X)$. Ya que $A \cap R(X) = \emptyset$, $A \cap E_1(X) = \emptyset$ y A es conexo (A es un conjunto con un punto o es un arco), entonces existe un subconjunto U abierto y conexo de X (contenido en un arco de X) tales que $A \subset U$ y

$U \cap R(X) = \emptyset$. Por lo tanto $U \cap E_1(X) = \emptyset$. Ya que si $U \cap E_1(X) \neq \emptyset$, como $E_1(X) = \{p\colon p$ es un punto II-esencial$\}$ (véase el Teorema 2.32), tendríamos que $U \cap R(X) \neq \emptyset$, lo cual es falso. Sea

$$\mu = \{B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \subset C_n(X) \colon N(\epsilon, A) \subset U\}.$$

Por el Teorema 1.11, $\mu \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{G} = B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \in \mu$. Entonces $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}_n$. Para ver esto, sea $Z \in \mathcal{G}$, $Z \subset N(\in, A) \subset U$. De aquí que $Z \cap R(X) = \emptyset$ y $Z \cap E_1(X) = \emptyset$, por la definición de $\mathcal{P}_n$ en el Lema 5.9, $Z \in \mathcal{P}_n$. Por el Lema 5.9 $\dim(\mathcal{G}) \leq 2n$. Notar que $\mathcal{G} \cap \mathcal{L}_n(X) = \mathcal{G} \cap \mathcal{M}_n(X) = \mathcal{G} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, vamos a demostrar que tal intersección es arco-conexo.

Dado $K \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}_n(X) = \mathcal{G} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, por el Lema 5.17 existe un cerrado L en $\mathcal{G} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. con la propiedad de que cada componente de $N(\epsilon, A) - L$ tiene el mismo diámetro δ (con $\delta < \frac{\epsilon}{3n}$) y existe un arco α de K en L, tal que $\alpha \subset \mathcal{G} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Ahora en el siguiente paso, utilizamos el Lema 5.15. Podemos conectar L, con un arco γ contenido en $\mathcal{G} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, a un elemento M tal que cada componente de $N(\epsilon, A) - M$ tiene el mismo diámetro δ y están uniformemente distribuidos en $N(\epsilon, A)$. Finalmente (como en el Lema 5.16) M es conectado por un arco σ contenido en $\mathcal{G} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$, a un elemento S con la propiedad de que cada componente de $N(\epsilon, A) - S$, tiene el mismo diámetro igual a $\frac{\epsilon}{3n}$ y ellos están uniformemente distribuidos en $N(\epsilon, A)$. En conclusión K y S son conectados por un arco $\Psi : I \to C_n(X)$ donde,

$$\Psi(t) = \begin{cases} \alpha(3t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \gamma(3t - 1), & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \sigma(3t - 2), & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La función Ψ, es continua y su imagen está contenida en $\mathcal{G} \cap (C_n(X) - C_{n-1}(X))$. Si T es otro elemento de $\mathcal{G} \cap \mathcal{L}_n(X)$, de la misma manera T y S se conectan con un arco en $\mathcal{G} \cap \mathcal{L}_n(X)$, por lo tanto K y T se conectan con un arco en $\mathcal{G} \cap \mathcal{L}_n(X)$. De donde concluimos que $\mathcal{G} \cap \mathcal{L}_n(X)$ es arco conexo. Así que $A \in \Gamma_n(X)$. □

5.3. Teorema principal en $C_n(X)$

Ahora demostremos que la familia $\mathfrak{D}^*$ está C_n-determinada, para $n \in \mathbb{N} - \{2\}$.

Teorema 5.20 *Sean* $X, Y \in \mathfrak{D}^*$, $n \in \mathbb{N} - \{2\}$. *Si* $C_n(X) \approx C_n(Y)$, *entonces* $X \approx Y$.

Demostración. Sea $n = 1$, si $X, Y \in \mathfrak{D}$, el resultado, es consecuencia del Teorema 3.13. Si $X \approx I$ y Y es un continuo tal que $C(X) \approx C(Y)$, por [2, Teorema 68], Y es un arco o una curva cerrada simple. Ya que $Y \in \mathfrak{D}^*$, tenemos que $X \approx Y$.

Supongamos que $n \geq 3$. Si $X \approx I$, por [30], el arco I tiene hiperespacio único $C_n(I)$. Supongamos que X y $Y \in \mathfrak{D}$, podemos definir $\mathcal{L}_n(X) = \mathcal{M}_n(X)$, $\Gamma_n(X)$, $\mathcal{L}_n(Y) = \mathcal{M}_n(Y)$ y $\Gamma_n(Y)$ como lo hicimos en los Lemas anteriores.

Sea $h : C_n(X) \to C_n(Y)$ un homeomorfismo. Observar que $h(\mathcal{L}_n(X)) = \mathcal{L}_n(Y)$. Si $A \in \Gamma_n(X)$, $A \notin \mathcal{L}_n(X)$, entonces $h(A) \notin \mathcal{L}_n(Y)$. Ya que la dimensión y la arco-conexidad se conservan bajo homeomorfismos, por la definición de $\Gamma_n(X)$ y $\Gamma_n(Y)$, $h(A) \in \Gamma_n(Y)$. Puesto que h es un homeomorfismo, concluimos que $h(\Gamma_n(X)) = \Gamma_n(Y)$. Por el Lema 5.19

$$\Gamma_n(X) = \{A \in C_n(X) \colon A \text{ es conexo, } A \cap R(X) = \emptyset \text{ y } A \cap E_1(X) = \emptyset\}.$$

Observemos que $\Gamma_n(X) \subset C(X)$. Ahora definamos el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} \Omega_n(X) \;=\; & \{A \in \Gamma_n(X) \colon \text{existe una 2-celda } \mathcal{V} \text{ en } \Gamma_n(X) \text{ tal} \\ & \text{que } A \in \mathrm{int}_{C(X)}(\mathcal{V}) \cap \partial_{C(X)}(\mathcal{V})\}. \end{aligned}$$

(véase $\partial_{C(X)}(\mathcal{V})$ en la Definición 3.1). Para este conjunto tenemos que $\Omega_n(X) = \Omega(X)$ (el conjunto $\Omega(X)$ se definio despues del Lema 3.2). Por el Lema 3.8

$$\begin{aligned} &\Omega_n(X) = \Omega(X) = \{\{p\} \in C(X) \colon p \in X - (R(X) \cup E_1(X))\} \bigcup \\ &\bigcup \{\alpha \in C(X) \colon \alpha \text{ es un subarco de } X - R(X) \text{ el cual tiene como un punto extremo a un elemento de } E_2(X)\}. \end{aligned}$$

Notemos que $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega_n(X)) = \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) = \mathrm{cl}_{C_n(X)}(\Omega(X)) \cap C(X) = \mathrm{cl}_{C_n(X)}(\Omega(X))$, porque $C(X)$ es cerrado en $C_n(X)$ y $\Omega(X) \subset C(X)$. Como se demostró en el Teorema 3.11 $\mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X)) \approx X$. Ya que $\mathrm{cl}_{C_n(X)}(\Omega_n(X)) = \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega_n(X)) = \mathrm{cl}_{C(X)}(\Omega(X))$, tenemos que $\mathrm{cl}_{C_n(X)}(\Omega_n(X)) \approx X$. De manera similar $\mathrm{cl}_{C_n(Y)}(\Omega_n(Y)) = \mathrm{cl}_{C(Y)}(\Omega(Y)) \approx Y$. Supongamos que $A \in$

$\Omega_n(X) \subset \Gamma_n(X)$. Como $h(\Gamma_n(X)) = \Gamma_n(Y)$, se tiene que $h(A) \in \Gamma_n(Y)$ y así $h(A) \in \Omega_n(Y)$. Es decir $h(\Omega_n(X)) = \Omega_n(Y)$, entonces $h(\mathrm{cl}_{C_n(X)}(\Omega_n(X))) = \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(\Omega_n(Y))$. De aquí obtenemos los siguientes homeomorfismos:
$X \approx \mathrm{cl}_{C_n(X)}(\Omega_n(X)) \approx \mathrm{cl}_{C_n(Y)}(\Omega_n(Y)) \approx Y$. □

Ahora demostremos que el Teorema 5.20 también es válido cuando $X \in \mathfrak{D}$ y Y es cualquier dendrita. Para llegar a este teorema, demostremos antes algunos resultados.

En [48, Teorema 2.11] se demostró el siguiente resultado: sea X un dendroide suave en p, $A \in C(p, X)$, entonces A contiene un punto esencial, si y sólo si $\dim(B_{C_n(X)}(A, \epsilon)) = \infty$ para todo $\epsilon > 0$. En el teorema que sigue obtenemos un resultado similar para X en la familia $\mathfrak{D}$ y A en $C_n(X)$, con $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.21 *Sean $X \in \mathfrak{D}$, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$. Entonces $A \cap E_1(X) \neq \emptyset$ (A tienen puntos esenciales) si y sólo si, para toda $\epsilon > 0$, $dim(B_{C_n(X)}(A, \epsilon)) = \infty$.*

Demostración. Supongamos que $A \in C_n(X)$ y que $A \cap E_1(X) \neq \emptyset$, el teorema se sigue de la Proposición 5.1. Demostremos el recíproco: supongamos que $A \cap E_1(X) = \emptyset$ (A no tiene puntos esenciales). Por el Teorema 2.33, cada componente de A es un árbol. Entonces existe una gráfica finita $G \in C(X)$ tal que $A \subset \mathrm{int}_X(G)$ y $G \cap E_1(X) = \emptyset$. Por el Teorema 1.11, existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset \mathrm{int}_X(G)$. Se infiere que $B_{C_n(X)}(A, \epsilon) \subset C_n(G)$, ya que si $M \in B_{C_n(X)}(A, \epsilon)$, se implica que $H_{C_n(X)}(M, A) < \epsilon$, por lo cual $M \subset N(\epsilon, A) \subset \mathrm{int}_X(G) \subset G$ de donde $M \in C_n(G)$. De todo esto obtenemos que $B_{C_n(X)}(A, \epsilon) = B_{C_n(G)}(A, \epsilon)$ es un abierto de $C_n(X)$ que contiene a A y está contenido en $C_n(G)$. Además $C_n(G)$ es un cerrado en $C_n(X)$. Del Teorema 1.1, $\dim(B_{C_n(X)}(A, \epsilon)) = \dim(B_{C_n(G)}(A, \epsilon))$. Como $B_{C_n(G)}(A, \epsilon) \subset C_n(G)$, se tiene que $\dim(B_{C_n(G)}(A, \epsilon)) \leq \dim(C_n(G))$. Por [41, Teorema 5.1] $\dim(C_n(G)) < \infty$, entonces $\dim(B_{C_n(X)}(A, \epsilon)) < \infty$ (en particular $\dim_A(C_n(X)) < \infty$). □

Del Corolario 5.2 y de la demostración del Teorema 5.21, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.22 *Sean $X \in \mathfrak{D}$, $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C_n(X)$. Entonces $A \cap E_1(X) = \emptyset$ (A no tienen puntos esenciales) si y sólo si $dim_A(C_n(X)) < \infty$.*

Ahora damos una generalización del Teorema 2.35.

Teorema 5.23 *Sean X una dendrita y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $X \in \mathfrak{D}$ o $X \approx I$ si y sólo si para cualquier $Z \in C_n(X)$ existe una sucesión $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ en $C_n(X)$ que converge a Z y $dim_{A_s}(C_n(X)) < \infty$, para cada $s \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $X \in \mathfrak{D}$ o $X \approx I$. Para el caso en que $X \approx I$ la implicación es inmediata, porque por [41, Corolario 5.3], $\dim(C_n([0,1])) = 2n$. Supongamos que $X \in \mathfrak{D}$ y sea $Z \in C_n(X)$ tal que $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_k$, en donde $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ son lascomponentes de Z. Por el Teorema 2.35, para cada Z_i, con $1 \leq i \leq k$, existe una sucesión $\{A_s^i\}_{s\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$, la cual converge a Z_i y $\dim_{A_s^i}(C(X)) < \infty$, para cada $s \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por el Teorema 2.22 $A_s^i \cap E_1(X) = \emptyset$ (A no contiene puntos esenciales), para cada $s \in \mathbb{N}$. Sea $A_s = A_s^1 \cup A_s^2 \cup \cdots \cup A_s^k$, entonces $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C_n(X)$ que converge a Z y $A_s \cap E_1(X) = \emptyset$. Por el Corolario 5.22, $\dim_{A_s}(C_n(X)) < \infty$, para cada $s \in \mathbb{N}$. Ahora demostremos la implicación inversa. Supongamos que $X \notin \mathfrak{D}$ y $X \not\approx I$, se implica que X es una dendrita cuyo conjunto de puntos extremos, $E(X)$, no es cerrado. De donde por el Teorema 2.28, X contiene un subespacio, Y, el cual es homeomorfo a W o a F_ω (las definiciónes, de W y de F_ω, se dieron en las secciones 2.3 y 2.7, respectivamente). Primero, sin perder generalidad, supongamos que $Y = W \subset X$. Utilizaremos los siguientes puntos estratégicos de W; $c = (-1,0)$, $t = (0,0)$ y $b_1 = (1,0) \in \mathbb{R}^2$. Tomemos $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_n$ en donde $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ son subcontinuos disjuntos dos a dos, no vacíos y $Z_1 = [s,r] \subset [c, b_1]$. Para el subcontinuo Z_1, por el Lema 2.35, no existe ninguna sucesión $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que converge a Z_1 y $\dim_{T_j}(C(X)) < \infty$, para todo $j \in \mathbb{N}$. En consecuencia no existe ninguna sucesión $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ en $C_n(X)$ que converge a Z y $\dim_{A_s}(C_n(X)) < \infty$, para toda $s \in \mathbb{N}$. Si suponemos que $Y = F_\omega \subset X$, la demostración es similar. □

Finalmente, demostremos una generalización del Teorema 5.20.

Teorema 5.24 *Sean $X \in \mathfrak{D}^*$, Y una dendrita y $n \in \mathbb{N} - \{2\}$. Si $C_n(X) \approx C_n(Y)$ entonces $X \approx Y$.*

Demostración. Si $X \approx I$, por [30], el arco I tiene hiperespacio único $C_n(I)$, excepto cuando $n = 1$, ya que $C(I) \approx C(S^1)$. Luego el Teorema es valido, porque S^1 no es una dendrita. Para el caso $n = 1$, si $X \in \mathfrak{D}$ este teorema es, el Teorema 3.18. Supongamos que $n \geq 3$. Ahora sean $X \in$

$\mathfrak{D}$, $h : C_n(X) \to C_n(Y)$ un homeomorfismo y $Z \in C_n(Y)$, entonces existe $L \in C_n(X)$ tal que $h(L) = Z$. Por el Teorema 5.23, existe una sucesión $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ en $C_n(X)$ que converge a L y $\dim_{A_s}(C_n(X)) < \infty$, para cada $s \in \mathbb{N}$. Se deduce que $\{h(A_s)\}_{s\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C_n(Y)$ que converge a Z y $\dim_{h(A_s)}(C_n(Y)) < \infty$, para cada $s \in \mathbb{N}$. Por lo cual $Y \in \mathfrak{D}$ o $Y \approx I$, pero por el Corolario 5.4 $C_n(X) \not\approx C_n(I)$, de aquí obtenemos que $Y \in \mathfrak{D}$. Por consiguiente, del Teorema 5.20 concluimos que $X \approx Y$. □

Varios resultados acerca de las gráficas finitas, se pueden extender a "-ciertas familias" de dendritas. Veamos algunos ejemplos de esto: generalizando un resultado de R. Duda [18], G. Acosta, [5], demostró que las gráficas finitas G, distintas del arco, tienen hiperespacio único $C(G)$. En esta tesis demostramos (Capítulo 3, Teorema 3.22), que las dendritas X cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado y no es el arco, tienen hiperespacio único $C(X)$. A. Illanes demostró, en [30] el siguiente Teorema: sea X una gráfica finita y Y un continuo tal que $C_n(X)$ es homeomorfo a $C_n(Y)$, para $n \geq 3$, entonces X y Y son homeomorfos. En el capítulo 5, Teorema 5.24, demostramos el siguiente resultado: sean $X \in \mathfrak{D}$, Y una dendrita, $n \geq 3$ y $C_n(X) \approx C_n(Y)$ entonces $X \approx Y$. También, en este sentido, E. Castañeda y A. Illanes demostraron que las gráficas finitas tienen hiperespacio único $F_2(X)$ y A. Illanes demostró que las dendritas X cuyo conjunto de puntos ordinarios es abierto, tienen hiperespacio único $F_2(X)$ [29]. Por estos resultados considero interesante estudiar, que propiedades de la familia de las gráficas finitas, se puede extender a una cierta subfamilia de dendritas.

Ahora damos una lista de preguntas.

1) En el Teorema 3.19, demostramos el siguiente resultado: sean Y un continuo localmente conexo y $A \in C(Y)$ tal que $\dim_A(C(Y)) < \infty$. Entonces $\dim_{\{p\}}(C(Y)) < \infty$ para cada $p \in A$. ¿Es esto cierto aunque Y no sea localmente conexo? Es decir: sean Y un continuo, el cual no es localmente conexo, y $A \in C(Y)$. ¿Si $\dim_A C(Y) < \infty$, entonces $\dim_{\{p\}}(C(Y)) < \infty$ para cada $p \in A$?

2) En el Teorema 4.8 se probó el siguiente resultado: sea L una dendrita tal que $L \notin \mathfrak{D}$ L no es un arco y supongamos para algun $m \in \mathbb{N}$, que L no tiene puntos de orden m. Entonces existe una dendrita Y tal que $L \not\approx Y$ y $C(L) \approx C(Y)$. Si L es una dendrita tal que $L \notin \mathfrak{D}$ no es un arco y para cada $n \in \mathbb{N}$, L tiene puntos de orden n ¿existe una dendrita Y tal que $L \not\approx Y$ y $C(L) \approx C(Y)$?

3) En el Teorema 5.20 demostramos el siguiente resultado: sean X y Y $\in \mathfrak{D} \cup \{I\}$, $n \in \mathbb{N} - \{2\}$. Si $C_n(X) \approx C_n(Y)$, entonces $X \approx Y$. ¿Es cierto este resultado si $n = 2$?

4) ¿Es el Teorema 5.25 verdadero si $n = 2$?

5) ¿Tienen hiperespacio único $C_n(X)$ los elementos X de la familia $\mathfrak{D}$? Es decir: sean $X \in \mathfrak{D}$ y Y un continuo. ¿Si $C_n(X) \approx C_n(Y)$, entonces $X \approx Y$? ¿Es esto cierto para toda $n \in \mathbb{N}$?

6) ¿Tienen hiperespacio único $F_n(X)$ los elementos X de la familia $\mathfrak{D}$? Es decir: sean $X \in \mathfrak{D}$ y Y un continuo. ¿Si $F_n(X) \approx F_n(Y)$, entonces $X \approx Y$? ¿Es esto cierto para toda $n \in \mathbb{N}$?

Bibliografía

[1] G. Acosta, *Hiperespacios y la propiedad de Kelley*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Escuela de Matemáticas, Coahuila, México 1994.

[2] G. Acosta. *Continuos con hiperespacio único*, Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, U. N. A. M., México D. F. 1999.

[3] G. Acosta, *On compactifications of the real line and unique hyperspace*, Topology Proc. 25 (2000), 1-25.

[4] G. Acosta, J. J. Charatonik y A. Illanes, *Irreducible continua of type λ with almost unique hyperspace*, Rocky Mountain J. of Math. 31 (2001), 745-772.

[5] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace*, Lecture notes in pure and applied mathematics 230, 33-49, Marcel Dekker, Inc., 2002.

[6] G. Acosta, *Continua with almost unique hyperspace*, Topology Appl. 117 (2002), 175-189.

[7] G. Acosta, *On smooth fans and unique hyperspace*, Houston J. Math. 30 (2004), 99-115.

[8] R. D. Anderson, *Topological properties of the Hilbert cube and the infinite product of open intervals,* Trans. Amer. Math. Soc. 126 (1967), 200-216.

[9] D. Arévalo, W. J. Charatonik, P. Pellicer y L. Simón, *Dendrites with a closed set of end points*, Topology Appl. 115 (2001), 1-17.

[10] E. Castañeda y A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, manuscrito.

[11] J. J. Charatonik, *Monotone mappings of universal dendrites*, Topology Appl. 38 (1991), 163-187.

[12] J. J. Charatonik y C. Eberhart. *On smooth dendroids*, Fund. Math. 67 (1970) 297-322.

[13] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 22, Sociedad Matemática Mexicana (1998) 227-253.

[14] W. J. Charatonik y A. Dilks, *On self-homeomorphic spaces,* Topology Appl. 55 (1994), 215-238.

[15] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y. 1977.

[16] D. W. Curtis y R.M Schori, *2^X and C(X) are homeomorphic to the Hilbert cube*, Bull Amer. Math. Soc. 80 (1974), 927-931.

[17] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1978.

[18] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph*, I, Fund. Math. 62 (1968), 265-286.

[19] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph*, II, Fund. Math. 63 (1968), 225-255.

[20] R. Duda, *Correction to the paper " On the hyperspace of subcontinua of a finite graph I "*, Fund. Math. 69 (1970), 207-211.

[21] C. Eberhart, *Intervals of continua which are Hilbert cubes*, Proc. Amer. Math. Soc. 68 (1978), 220-224.

[22] C. Eberhart, *Continua with locally connected Whitney continua*, Houston J. Math. 4 (1978), 165-173.

[23] C. Eberhart y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of cones and fans,* Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), 279-288.

[24] J. B. Fugate, *Small retraction of smooth dendroids onto trees*, Fund. Math. 71 (1971), 255-262.

[25] M. Handel, *On certain sums of Hilbert cubes,* General Topology Appl. 9 (1978), 19-28.

[26] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton, 1948.

[27] A. Illanes, *Cells and cubes in hyperspaces*, Fund. Mat. 130 (1988), 57-65.

[28] A. Illanes, *Chainable continua are not C-determined*, Topology Appl. 98 (1999) 211-216.

[29] A. Illanes, *Dendrites with unique hyperspace $F_2(X)$*, J. P. Geometry and Topology 2(1)(2002), 75-96.

[30] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$*, Topology Proc. 27 (2003), 179-188.

[31] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique*, Glasnik Mat. 37 (57)(2002), 347-363.

[32] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos,* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 28, Sociedad Matemática Mexicana (2004).

[33] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y. 1999.

[34] J. L. Kelley, *Hyperspaces of continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22-36.

[35] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa 1968.

[36] L. Lum, *Weakly smooth dendroids*, Fund. Math. 83 (1974), 111-120.

[37] S. Macías, *La estructura de los dendroides suaves,* Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 10, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[38] S. Macías, *On C-determined continua*, Glasnik Mat., 32(52) (1997), 259-262.

[39] S. Macías, *Hereditarily indecomposable continua have unique hyperspace 2^X*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 5 (1999), 415-418.

[40] S. Macías, *On the hyperspace $C_n(X)$ of a continuum X*, Topology Appl. 109 (2001), 237-256.

[41] S. Macías, *On the hyperspace $C_n(X)$ of a continuum X*, II, Topology Proc. 25 (2000), 255-276.

[42] A. Mercado, *Propiedades topológicas de continuos*,Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo Coahuila, 1998.

[43] L. Montejano e I. Puga, *Shore points in dendroids and conical pointed hyperspace*, Topology Appl. 46 (1992), 41-54.

[44] S. B. Nadler, Jr., *Locating cones and Hilbert cubes in hyperspaces*, Fund. Math. 79 (1973), 233-250.

[45] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, in: Monographs and Textbooks in Pure and Appl. Math. Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[46] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An introduction*, Monographs and Texbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[47] S. B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 18, Sociedad Matemática Mexicana 2002.

[48] I. Puga, *Hiperespacios con punta de cono*, Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, U. N. A. M, México D. F. (1989).

[49] J. T. Rogers, Jr., *Dimension of hyperspaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972), 177-179.

[50] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology. Prerequisites and Introduction*, North-Holland, 1988.

[51] T. Wazewski, *Sur un continu singulier*, Fund. Math. 4 (1923), 214-235.

[52] G. T. Whyburn, *Analytic Topology,* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1942.

[53] H. Whitney, *Regular families of curves I*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 18 (1932), 255-278.

[54] L. Vietoris, *Kontinua Zweiter Ordnung*, Monatshefte für Mathematik und Physik 33 (1923), 49-62.

Índice