UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROCESOS DE LÉVY Y LA DESCOMPOSICIÓN DE LÉVY-ITO

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
A C T U A R I O
P R E S E N T A
FRANCISCO JAVIER DELGADO VENCES

DIRECTOR DE TESIS: DR. MOGENS BLADT PETERSEN

2005

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Procesos de Lévy y la descomposición de Lévy-Ito

realizado por **Delgado Vences Francisco Javier**

con número de cuenta **09957193-1**, quien cubrió los créditos de la carrera de: **Actuaría**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	**Dr. Mogens Bladt Petersen**	Mogs Bladt
Propietario	**Dr. Pablo Padilla Longoria**	Pablo Padilla L.
Propietario	**Dr. Alberto Contreras Cristán**	
Suplente	**Dr. Luis Antonio Rincón Solís**	
Suplente	**Dra. Ana Meda Guardiola**	AnaMeda

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

A Arelly.

. . .

amar es combatir, si dos se besan
el mundo cambia, encarnan los deseos,
el pensamiento encarna, brotan las alas
en las espaldas del esclavo, el mundo
es real y tangible, el vino es vino,
el pan vuelve a saber, el agua es agua,
amar es combatir, es abrir puertas,
dejar de ser fantasma con un número
a perpetua cadena condenado
por un amo sin rostro;
el mundo cambia
si dos se miran y se reconocen,

. . .

OCTAVIO PAZ, *Piedra de sol.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director de tesis Dr. Mogens por su gran paciencia para conmigo, por dedicarme tanto tiempo en la preparación de este trabajo y por su apoyo en todas las dudas generadas a lo largo de este.

Agradezco a mis sinodales por sus valiosos comentarios, Ana, Luis, Pablo y Alberto, a este último también le debo el haberme presentado a mi director de tesis y el haberme ayudado en esos momentos en los cuales no tenia la menor idea de que hacer con mi tesis, gracias.

Gracias a José Luis por su decidida y generosa ayuda.

A todos mis amigos, que me apoyaron, que me ayudaron, que me alentaron en esos momentos difíciles, gracias por todo, gracias muy en especial a Silvia, por su incondicional apoyo.

A mi familia, por haberme ayudado a llegar hasta aquí, a mis padres, por haberme entendido, a mis hermanos por haberme ayudado cuando los necesite, Margarita, Esther, Angélica, Jorge, Malena.

En especial quiero agradecer a Mi hermana Alejandra y a su esposo Andrés, ya que fueron parte fundamental de este logro, muchas gracias.

Índice general

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROCESOS DE LÉVY Y LA DESCOMPOSICIÓN DE LÉVY-ITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

FRANCISCO JAVIER DELGADO VENCES

DIRECTOR DE TESIS: DR. MOGENS BLADT PETERSEN

2005

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Procesos de Lévy y la descomposición de Lévy-Ito

realizado por **Delgado Vences Francisco Javier**

con número de cuenta **09957193-1**, quien cubrió los créditos de la carrera de: **Actuaría**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	**Dr. Mogens Bladt Petersen**	
Propietario	**Dr. Pablo Padilla Longoria**	
Propietario	**Dr. Alberto Contreras Cristán**	
Suplente	**Dr. Luis Antonio Rincón Solís**	
Suplente	**Dra. Ana Meda Guardiola**	

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

A Arelly.

. . .

amar es combatir, si dos se besan
el mundo cambia, encarnan los deseos,
el pensamiento encarna, brotan las alas
en las espaldas del esclavo, el mundo
es real y tangible, el vino es vino,
el pan vuelve a saber, el agua es agua,
amar es combatir, es abrir puertas,
dejar de ser fantasma con un número
a perpetua cadena condenado
por un amo sin rostro;
el mundo cambia
si dos se miran y se reconocen,

. . .

OCTAVIO PAZ, *Piedra de sol.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director de tesis Dr. Mogens por su gran paciencia para conmigo, por dedicarme tanto tiempo en la preparación de este trabajo y por su apoyo en todas las dudas generadas a lo largo de este.

Agradezco a mis sinodales por sus valiosos comentarios, Ana, Luis, Pablo y Alberto, a este último también le debo el haberme presentado a mi director de tesis y el haberme ayudado en esos momentos en los cuales no tenia la menor idea de que hacer con mi tesis, gracias.

Gracias a José Luis por su decidida y generosa ayuda.

A todos mis amigos, que me apoyaron, que me ayudaron, que me alentaron en esos momentos difíciles, gracias por todo, gracias muy en especial a Silvia, por su incondicional apoyo.

A mi familia, por haberme ayudado a llegar hasta aquí, a mis padres, por haberme entendido, a mis hermanos por haberme ayudado cuando los necesite, Margarita, Esther, Angélica, Jorge, Malena.

En especial quiero agradecer a Mi hermana Alejandra y a su esposo Andrés, ya que fueron parte fundamental de este logro, muchas gracias.

Índice general

Introducción

En la actualidad, los procesos estocásticos son una herramienta muy utilizada, tanto en matemáticas como en otras disciplinas como son ingeniería, telecomunicaciones, medio ambiente, genética, estadística, biología, economía y finanzas. Asimismo, dentro de las matemáticas existe una conexión entre los procesos estocásticos y áreas tales como ecuaciones en derivadas parciales, semigrupos de operadores y la teoría del potencial, por mencionar algunas.

Los procesos de Lévy son, esencialmente, procesos estocásticos con incrementos independientes y estacionarios en el tiempo. Su importancia radica en que son la generalización de las caminatas aleatorias, además de ser objetos matemáticos que tienen propiedades muy importantes, razón por la cual son un buen fundamento para estudiar los procesos estocásticos en general.

En este trabajo se presentan los procesos de Lévy de la manera más general posible y se presentarán siguiendo muy de cerca los libros de Applebaum [1] y Sato [31]. Si bien la bibliografía es escasa, se tiene que con estos dos libros se cubre de una manera detallada las propiedades más generales de estos procesos.

El propósito de este trabajo es desarrollar la estructura de los Procesos de Lévy, y presentar una prueba del importante teorema de la descomposición de Lévy-Itô. Este teorema resulta importante pues con su uso se puede concretar una integral estocástica con respecto a procesos de Lévy, que de manera directa no seria tan claro precisarla.

La estructura básica de estos procesos fue entendida en la década de 1930-1940, y mucho de esto se le debe al probabilista francés Paul Lévy, al matemático ruso A. N. Khintchine y a K. Itô en Japón. En los últimos 10 aos los procesos de Lévy han tenido un resurgimiento importante, impulsados por las diferentes aplicaciones, en particular las ralacionadas con el área de finanzas, en el cálculo del precio de las opciones.

Los procesos de Lévy incluyen varios de los procesos más importantes como casos particulares, esto se discute en el capítulo 1, donde además se presenta la representación de Lévy-Khintchine referente a las distribuciones infinitamente divisibles y se da una parte de la prueba en este capítulo y se completa la prueba hasta el capítulo 3, como caso particular se ven los subordinadores y se terminará definiendo un semigrupo en convolución de medidas de probabilidad, de donde se podría obtener su generador infinitesimal, pero aquí no lo haremos. Para los resultados que no se prueban en este capítulo se da una referencia para su consulta.

En el capítulo 2 se introducen conceptos relacionados a procesos de Lévy, pero que pueden ser definidos para procesos más generales, como son el concepto de martingala, tiempos de paro y modificación de procesos, además se introducirá el concepto de medida aleatoria Poisson e integración de Poisson, la finalidad de esto es tener las herramientas necesarias para probar en el siguiente capítulo el teorema de la descomposición de Lévy-Itô, en este capítulo se prueba la mayor parte de los resultados.

EL teorema de la descomposición de Lévy-Itô se aborda en el último capitulo, siguiendo muy de cerca la presentación que realiza Applebaum, aunque aquí se presentan las pruebas de una manera m
as detallada y corrigiendo algún error. Se inicia con una serie de resultados previos, que se utilizarán como lemas en la prueba del teorema principal y finalizando con la prueba de la primera parte del teorema de la representación de Lévy-Khintchine. En este capítulo se realizan todas las pruebas de los resultados presentados.

Al inicio del trabajo se tiene un resumen de la notación más usada, esperando con eso que la lectura resulte mas cómoda.

En la parte final se tienen las conclusiones del trabajo, así como la bibliografía usada en este trabajo, y que sin duda podría servir para profundizar en los temas abordados, sin que esto signifique que sea completa o que sea la totalidad de la bibliografía existente de los temas discutidos aquí.

■

Notación

$\blacksquare$	Final de una prueba.
inf. div.	Infinitamente divisible
$B_b(s)$	El espacio de todas las funciones Borel medibles acotadas de $S \rightarrow I\!R$ con $S \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ localmente compacto con la topología usual
$\mu_1 * \mu_2$	Convolución de las medidas de probabilidad μ_1 y μ_2
$\stackrel{\mathcal{D}}{=}$	Equivalencia en distribución
$\mathcal{M}_1(I\!R^d)$	Conjunto de todas las medidas borelianas sobre $I\!R^d$
φ_X	La función característica de X
$X \sim \pi(c)$	X sigue una distribución Poisson
$X \sim \pi(c, \mu_Z)$	X sigue una distribución Poisson Compuesta con parámetros c en la Poisson y Z en la N
$\hat{B}_1(0)$	Bola abierta de radio 1 alrededor del 0
$(\, , \,)$	Producto interno
$\mathbf{sgn}(u)$	El signo de u
$S_d(1)$	El conjunto $\{x \in I\!R^d : \lvert x\rvert = 1\}$
$\lvert u \rvert$	Norma del vector u
$X \sim S\alpha S$	X es **v.a. Estable** simétrica con índice α
$B(t)$	Movimiento Browniano Estándar
$C_b(I\!R^d)$	Funciones continuas acotadas de $I\!R^d$ a $I\!R$
$\mathcal{M}$	Espacio lineal de las clases de equivalencias de Martingalas L^2.

c.s.	Casi seguramente.
$\wedge$	Mínimo de un conjunto.
$\vee$	Máximo de un conjunto.
$\chi_A(t)$	Función característica, 1 si $t \in A$, A un conjunto y cero en otro caso.
$\mathbb{1}_A(x)$	Función Indicadora, 1 si $x \in A$, A un conjunto y cero en otro caso.
varP(g)	La variación de g una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ sobre la partición P.
Var(X)	La varianza de la variable aleatoria X
V(g)	$\sup_P \mathrm{varP(g)}$
$X(t-)$	$\lim_{s \uparrow t} X(s)$
$\Delta X(t)$	$X(t) - X(t-)$
$L^2 - \lim_{n\to\infty} X(n) = X$	Convergencia en L^2, *i.e.* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\lvert X(n) - X\rvert^2) = 0$

Capítulo 1

Procesos de Lévy

En este capítulo se definirán los Procesos de Lévy, se verá el concepto de variables aleatorias infinitamente divisibles, el teorema de Lévy-Khintchine, algunos ejemplos de los Procesos de Lévy, y como caso particular los subordinadores, además veremos que los procesos de Lévy se pueden tratar como semigrupos en convolución de medidas de probabilidad.

1.1. Distribuciones Infinitamente Divisibles

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espacio de Probabilidad y $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ Un espacio medible. Un **Proceso Estocástico** con valores en $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ es una familia $X = (X_t)_{t \in I\!R}$ de funciones medibles $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{B})$.

Cuando no se indique el espacio de estados $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$, eso significa que estamos tomando el caso $(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = (I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$, donde $\mathcal{B}(I\!R^d))$ es la σ-algebrá de Borel.

Dos procesos estocásticos $X = (X_t, t \geq 0)$ y $Y = (Y_t, t \geq 0)$ son independientes si para toda $m, n \in I\!N$ y $0 \leq t_j < \infty$ con $j = 1, 2, \ldots, n$ y $0 \leq s_j < \infty$ con $j = 1, 2, \ldots, n$, las σ-álgebras $\sigma(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ y $\sigma(Y(s_1), Y(s_2), \ldots, Y(s_m))$ son independientes.

Similarmente, un proceso estocástico $(X_t, t \geq 0)$ y una sub σ-álgebra $\mathcal{G}$ son independientes si $\mathcal{G}$ y la σ-álgebra $\sigma(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ son independientes para toda $n \in I\!N$ y $0 \leq t_j < \infty, j = 1, 2, \ldots, n$ con $t_j \neq t_k$ para toda $j \neq k$.

La distribución finito-dimensional de un proceso estocástico X es la colección de medidas de probabilidad $(p_{t_1,t_2,\ldots,t_n}, 0 \leq t_j < \infty, j = 1,2,\ldots,n, t_j \neq t_k, j \neq k, \quad n \in I\!N)$ definidas sobre $I\!R^{dn}$ para cada $n \in I\!N$ por :

$$p_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\mathcal{H}) = \mathcal{P}\left[(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)) \in \mathcal{H}.\right]$$

para cada $\mathcal{H} \in \mathcal{B}(I\!R^{dn})$

Sea $\mathcal{M}_1(I\!R^d)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad Borelianas sobre $\mathcal{B}(I\!R^d)$ definimos la convolución de dos medidas de probabilidad como :

$$(\mu_1 * \mu_2)(A) = \int_{\boldsymbol{R}^d} \mu_1(A - x)\mu_2(\mathrm{d}x).$$

Para cada $\mu_i \in \mathcal{M}_1(I\!R^d), i = 1,2$ y $A \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ donde $A - x = \{y - x, y \in A\}$.

Las siguientes proposiciones pueden ser de utilidad.

Proposición 1.1.1 *La convolución $\mu_1 * \mu_2$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(I\!R^d)$, para toda $\mu_1\mu_2 \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$.*

Prueba.- Sea $(A_n, n \in I\!N) \subset \mathcal{B}(I\!R^d)$, entonces para cada $x \in I\!R^d$, los miembros de la sucesión $(A_n - x, n \in I\!N)$ son tambien disjuntos y entonces

$$\begin{aligned}
(\mu_1 * \mu_2)\left(\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}\right) &= \int_{\boldsymbol{R}^d} \mu_1\left[\left(\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} A_n\right) - x\right]\mu_2(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^d} \mu_1\left[\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} (A_n - x)\right]\mu_2(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^d} \sum_{n\in\boldsymbol{N}} \mu_1(A_n - x)\mu_2(\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

y por el teorema de la convergencia dominada

$$\begin{aligned}
(\mu_1 * \mu_2)\left(\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}\right) &= \sum_{n\in\boldsymbol{N}} \int_{\boldsymbol{R}^d} \mu_1(A_n - x)\mu_2(\mathrm{d}x) \\
&= \sum_{n\in\boldsymbol{N}} (\mu_1 * \mu_2)(A_n)
\end{aligned}$$

Entonces $(\mu_1 * \mu_2)$ es una medida, sólo falta ver que es una medida de probabilidad, pero esto se sigue del hecho que la función de $I\!R^d$ a $I\!R^d$ dada por la traslación $y \to y - 1$ es una bijección, asi $I\!R^d = I\!R^d - x$, de esta manera se tiene que

$$\int_{I\!R^d} \mu_1(A - x)\mu_2(\mathrm{d}x) = \int_{I\!R^d} \mu_1(x)\mu_2(\mathrm{d}x) = 1$$

■

Denotaremos como $B_b(I\!R^d)$ al conjunto de funciones Borel medibles acotadas de $I\!R^d$ a $I\!R$, entonces se tienen los siguientes resultados, y su prueba puede consultarse en Applebaum [1], página 21.

Proposición 1.1.2 *Si $f \in B_b(I\!R^d)$, entonces para toda $\mu_i \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$, $i = 1, 2, 3$:*

1. $\int_{I\!R^d} f(y)(\mu_1 * \mu_2)(\mathrm{d}y) = \int_{I\!R^d} \int_{I\!R^d} f(x + y)\mu_1(\mathrm{d}y)\mu_2(\mathrm{d}x)$.
2. $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$
3. $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_3 * (\mu_2 * \mu_3)$.

Como corolario de la anterior proposición se tiene:

Corolario 1.1.1 *Sea X_1 y X_2 v.a.i. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ con distribución conjunta p y marginales μ_1 y μ_2, entonces para cada $f \in B_b(I\!R^d)$,*

$$I\!E\left[f(X_1 + X_2)\right] = \int_{I\!R^d} f(z)(\mu_1 * \mu_2)(\mathrm{d}z).$$

Por el corolario anterior se puede ver que:

$$I\!P[(X_1 + X_2) \in A] = I\!E[\chi_A(X_1 + X_2)] = (\mu_1 * \mu_2)(A).$$

La proposición 1.1.2 nos dice, además, que $\mathcal{M}_1(I\!R^d)$ es un *semigrupo Abeliano* bajo $*$, donde la identidad está dada por la función *delta de Dirac* δ_0, donde δ_x está dada por :

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \text{A}; \\ 0 & si \quad x \notin \text{A}. \end{cases}$$

Para todo Boreliano A, así $\delta_0 * \mu = \mu * \delta_0 = \mu$ para toda $\mu \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$.

Ahora definamos $\mu^{*n} = \mu * \mu * \ldots * \mu * \mu$ (n veces) y diremos que μ tiene una raíz n-ésima, en términos de la convolución, si existe $\mu^{1/n} \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$ tal que :

$$(\mu^{1/n})^{*n} = \mu.$$

Introduzcamos el concepto de variable aleatoria infinitamente divisible y algunas propiedades de este tipo de distribuciones y se verá más adelante que los procesos de Lévy están relacionados con este tipo de distribuciones.

Definición 1.1.1 *Sea X una variable aleatoria que toma valores en $I\!R^d$ con función de densidad μ_x. Diremos que X es infinitamente divisible,(lo denotaremos como* **inf. div.** *) si para toda $n \in I\!N$, existe una sucesión de v.a.i.i.d. $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ tal que :*

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y_1^{(n)} + Y_2^{(n)} +, ..., + Y_n^{(n)}. \tag{1.1}$$

donde $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ significa que tienen la misma distribución.

Sea $\phi_X(u) = I\!E(e^{i(u,X)})$ la función característica de la variable aleatoria X con $u \in I\!R^d$. De manera más general se tiene que si $\mu \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$ entonces $\phi_\mu(u) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(u,y)} \mu(\mathrm{d}y)$.

La siguiente proposición ayuda a determinar si una distribución es **inf. div.** , con la ayuda de la función característica y de la raíz n-ésima (en términos de la convolución).

Proposición 1.1.3 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *X es infinitamente divisible.*

2. *μ_X tiene una raíz n-ésima en términos de la convolución que además es idénticamente distribuida para cada $n \in I\!N$.*

3. *ϕ_X tiene una raíz n-ésima que es la función característica de una determinada variable aleatoria para cada $n \in I\!N$.*

La prueba de esta proposición se puede consultar en Applebaum [1], pág 23.

Enunciemos un resultado cuya prueba se deriva del resultado dado por Sato [31], pág. 33, Lema 7.6.

Proposición 1.1.4 *Si X es* **inf. div.** *entonces $\phi_X(\lambda) \neq 0$ para toda λ y existe una única función continua $\psi(\lambda) : I\!R^d \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\phi_X(\lambda) = \exp\{\psi(\lambda)\}$ con $\psi(0) = 0$.*

A la función ψ se le llama *exponente característico* ya que si dos v.a. tienen el mismo exponente entonces tienen la misma distribución, esto porque el resultado anterior nos asegura la existencia y unicidad del exponente característico.

1.2. Ejemplos de Distribuciones Infinitamente Divisibles

Ejemplo 1.2.1 Variables Aleatorias Gaussianas. Sea $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ un vector aleatorio. Decimos que X es Gaussiana o Normal, si $\exists\ M \in I\!R^d$ y una matriz estrictamente positiva definida $\mathcal{A}_{dXd}$ tal que X tiene como función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{det(\mathcal{A})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x - M, \mathcal{A}^{-1}(x - M)\right)\right\}.$$

para toda $x \in I\!R^d$.

Decimos que $X \sim N(M, \mathcal{A})$ donde el vector M es el vector de $I\!E(X)$ y $\mathcal{A}$ es la matriz de varianzas y covarianzas, es decir, $\mathcal{A} = I\!E[(X-M)(X-M)^T]$.

Mediante algunos cálculos se puede obtener la función característica de X.

$$\phi_X(u) = \exp\left[i(M,u) - \left(\frac{1}{2}\right)(u, \mathcal{A}u)\right]$$

de donde se obtiene,

$$[\phi_X(u)]^{1/n} = \exp\left[i\left(\frac{M}{n}, u\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(u, \frac{\mathcal{A}u}{n}\right)\right].$$

Así, X es **inf. div.** con $Y_j^{(n)} \sim N(\frac{1}{n}M, (1/n)\mathcal{A}) \quad \forall 1 \leq j \leq n$.

Ejemplo 1.2.2 Variables Aleatorias Poisson.

Sea X una v.a. que toma valores en $I\!N \cup \{0\}$, X es Poisson si existe $c > 0$ tal que

$$I\!P(X = n) = \frac{c^n}{n!}e^{-c}.$$

Diremos entonces que $X \sim \pi(c)$ y sabemos que $I\!E(X) = Var(X) = c$ por lo que al calcular la función característica se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_X(u) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{iux}\frac{e^{-c}c^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(ce^{iu})^x e^{-c}}{x!} \\
&= e^{-c}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(ce^{iu})^x}{x!} \\
&= e^{-c}\exp\left(ce^{iu}\right) \\
&= \exp\left[c(e^{iu}-1)\right].
\end{aligned}$$

de donde se tiene que X es **inf. div.** con $Y_j^{(n)} \sim \pi(c/n) \quad \forall 1 \leq j \leq n, n \in I\!N$.

Ejemplo 1.2.3 Variables Aleatorias Poisson Compuestas.

Supongamos que $\{Z(n), n \in I\!N\}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. que toma valores en $I\!R^d$ con la misma distribución μ_Z para cada n y sea $N \sim \pi(c)$ independiente de $Z(n)$. Se define la *variable aleatoria Poisson Compuesta* como $X = Z(1) + Z(2) + \cdots + Z(N)$.

Se puede probar que para $u \in I\!R^d$ se tiene que,

$$\phi_X(u) = \exp\left\{\int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1] c \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\}.$$

Así, al buscar las variables aleatorias Y_j, se tiene

$$\begin{aligned}
\phi_X(u) &= \exp\left\{\int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1] c \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\} \\
&= \exp\left\{n \int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1] \frac{c}{n} \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\} \\
&= \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1] \frac{c}{n} \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{\int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1] \frac{c}{n} \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \phi_{Y_j^{(n)}}
\end{aligned}$$

con

$$\phi_{Y_j^{(n)}} = \exp\left\{\int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1] \frac{c}{n} \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\}.$$

De donde se concluye, que si X es Poisson Compuesto ($X \sim \pi(c, \mu_Z)$) entonces, haciendo $Y_j^{(n)} \sim \pi(c/n, \mu_Z)$ $\forall 1 \leq j \leq n$, se verifica que X es infinitamente divisible.

Algunas veces encontramos ejemplos de la siguiente forma :

Sea $X = X_1 + X_2$ donde X_1 y X_2 son independientes y $X_1 \sim N(m, A)$ y $X_2 \sim \pi(c, \mu_z)$, entonces para cada $u \in I\!R^d$ la función característica es de la forma:

$$\phi_X(u) = \exp\left[i(m,u) - \left(\frac{1}{2}\right)(u, Au) + \int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1] c\mu_Z(\mathrm{d}y)\right]. \qquad (1.2)$$

se puede verificar que es **inf. div.** haciendo en la parte de la gaussiana como en el ejemplo 1.2.1 y en la parte de Poisson Compuesto como en el ejemplo 1.2.3.

1.3. El Teorema de Lévy-Khintchine.

Sea ν una *medida de Borel* definida en $I\!R^d - \{0\} = \{x \in I\!R^d, x \neq 0\}$. Diremos que ν es una *medida de Lévy* si :

$$\int_{I\!R^d - \{0\}} (|y|^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}y) < \infty.$$

como $|y|^2 \wedge \epsilon \leq |y|^2 \wedge 1$ siempre que $0 < \epsilon \leq 1$, entonces se puede verificar que $\nu[(-\epsilon, \epsilon)^c] < \infty$ para toda $\epsilon > 0$

Nota. Se puede ampliar la definición de medida de Lévy a $I\!R^d$ adoptando la condición adicional $\nu(0) = 0$.

Enunciemos el teorema de representación de *Lévy-Khintchine* que determina la forma general de las funciones características que provienen de variables aleatorias **inf. div.**

Antes necesitamos el *teorema de Continuidad de Lévy*, y la prueba puede consultarse en Jacod and Protter [21].

Teorema 1.3.1 Continuidad de Lévy *Si $\{\phi_n, n \in I\!N\}$ es una sucesión de funciones características y $\exists$ una función $\Psi : I\!R^d \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que, para toda $u \in I\!R^d$, $\phi_n(u) \longrightarrow \Psi(u)$ cuando $n \to \infty$ y Ψ es continua en 0 entonces Ψ es la función característica de una distribución.*

Teorema 1.3.2 Lévy-Khintchine. *Una medida $\mu \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$ es* **inf. div.** *si existe un vector $b \in I\!R^d$, una matriz positiva definida simétrica A_{dxd} y una medida de Lévy ν sobre $I\!R^d - \{0\}$ tal que para todo $u \in I\!R^d$,*

$$\phi_\mu(u) = \exp\left[i(b,u) - \frac{1}{2}(u, Au) + \int_{I\!R^d - \{0\}} \left[e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_{\hat{B}}(y)\right]\nu(\mathrm{d}y)\right]. \tag{1.3}$$

donde $\hat{B} = \hat{B}_1(0)$ es la bola abierta de radio 1 alrededor de $0 \in I\!R^d$.

Por otro lado, toda función de la forma anterior es la función característica de una medida de probabilidad **inf. div.** *sobre $I\!R^d$.*

Prueba.- La prueba de este importante resultado se hará en dos partes, por el momento sólo se prueba la segunda parte. En el tercer capítulo de este trabajo se probará la primera parte.

Primero mostraremos que el lado derecho de (1.3) es una función característica, para esto definamos $\{\alpha(n), n \in I\!N\}$ una sucesión en $I\!R$ tal que es monótona decreciente a $0 \in I\!R$ y además define, para toda $u \in I\!R^d, n \in I\!N$ a:

$$\begin{aligned} \phi_{\mu_n}(u) &= exp\left[i\left(b - \int_{\{0<|y|\leq\alpha(n)\}^c\cap\hat{B}} y\nu(\mathrm{d}y), u\right)\right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{2}(u, Au) + \int_{0<|y|\leq\alpha(n)^c} [e^{i(u,y)} - 1]\nu(\mathrm{d}y)\right]. \end{aligned}$$

Entonces para cada α_n se tiene la convolución de una distribución normal con una distribución Poisson compuesta, independientes entre sí, así como en (1.2) y entonces es la función característica de una medida de probabilidad μ_n y se tiene entonces que :

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(u) = \phi_\mu(u)$$

el hecho que ϕ_μ represente la convolución de una distribución normal con una poisson compuesta se sigue del *teorema de continuidad de Lévy*, esto si podemos probar que ϕ_μ es continua en $u = 0$. Para ver la continuidad, tenemos que para cada $u \in I\!R^d$ se tiene,

$$\begin{aligned}\psi_\mu(u) &= \int_{I\!R^d-\{0\}} \left[e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_{\hat{B}}(y)\right] \nu(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{\hat{B}-\{0\}} \left[e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\right] \nu(\mathrm{d}y) + \int_{\hat{B}^c} \left[e^{i(u,y)} - 1\right] \nu(\mathrm{d}y) \qquad (1.3.1)\end{aligned}$$

y usando el hecho de que :

$$e^{iu} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!} + \frac{\theta|u|^n}{n!}.$$

se cumple para toda $u \in I\!R$, $n \in I\!N$ y alguna $\theta \in \mathbb{C}$ con $|\theta| < 1$.
Esto se puede consultar en Sato [31] pág. 40 lema 8.6

Tomando $n = 2$ se tiene que, $e^{iu} = 1 + iu + (\theta/2)|u|^2$, de donde se obtiene que:

$$|e^{iu} - 1 - iu| = |(\theta/2)u|^2 \leq (1/2)|u|^2$$

esto usando el *Teorema de Taylor* y el hecho de que la norma de θ está acotada por 1, y al aplicarlo a la primera integral de (1.3.1) puesto que el producto interno (u, y) esta en $I\!R$, se tiene,

$$|\psi_\mu(u)| \leq (1/2) \int_{\hat{B}-\{0\}} |(u,y)|^2 \nu(\mathrm{d}y) + \int_{\hat{B}^c} |e^{i(u,y)} - 1| \nu(\mathrm{d}y).$$

Ahora utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|\psi_\mu(u)| \leq (|u|^2/2) \int_{\hat{B}-\{0\}} |y|^2 \nu(\mathrm{d}y) + \int_{\hat{B}^c} |e^{i(u,y)} - 1| \nu(\mathrm{d}y).$$

Por último, usando las propiedades de la medida de Lévy y el teorema de la *Convergencia Dominada* se tiene que el lado derecho tiende a 0 si u tiende a 0.

Así, ϕ_μ es continua en 0 y por tanto es una función característica, y es fácil verificar que μ es **inf. div.** .

■

Nota 1.3.1 A los miembros (b, A, ν) se les suele llamar las *Características* de la v.a. **inf.div.** X. Como ejemplos tenemos :

- Caso Gaussiano: $b = I\!\!E(X)$, A es la Matriz de Covarianzas, $\nu = 0$
- Caso Poisson: $b = 0, A = 0, \nu = c\delta_1$.
- Caso Poisson-compuesto: $b = 0, A = 0, \nu = c\mu$ donde $c > 0$ y μ es una medida de probabilidad sobre $I\!\!R^d$.

Nota 1.3.2 En la prueba del Teorema de Lévy-Khintchine, se escribió a la función característica como:

$$\phi_\mu(u) = e^{\eta(u)}.$$

con η una función tal que $\eta : I\!\!R^d \longrightarrow \mathbb{C}$. Llamaremos a η el **exponente de Lévy** y recordemos que también se le llama el exponente característico.

1.4. Variables Aleatorias Estables

Consideremos el problema del Límite Central en dimensión $d = 1$. Para esto definamos $\{Y_n, n \in I\!\!N\}$ una sucesión de variables aleatorias y construyamos la sucesión $\{S_n, n \in I\!\!N\}$ de sumas parciales reescaladas,

$$S_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n - b_n}{\sigma_n}.$$

donde $\{b_n, n \in I\!\!N\}$ es una sucesión arbitraria de números reales y $\{\sigma_n, n \in I\!\!N\}$ una sucesión de números positivos. Nos interesará el caso en que exista una v.a. X para la cual

$$\lim_{n\to\infty} I\!\!P(S_n \le x) = I\!\!P(X \le x). \tag{1.4}$$

para toda $x \in I\!\!R$, i.e. , $\{S_n, n \in I\!\!N\}$ converge en distribución a X. Si cada $b_n = nm$ y $\sigma_n = 0sqrtn\sigma$ para $m \in I\!\!R$ fijo y $\sigma > 0$, entonces por el teorema del Límite Central de De-Moivre-Laplace se tiene que $X \sim N(m, \sigma^2)$.

Más generalmente, una v.a. se dice que es **estable** si tiene un límite como en (1.4). Otra manera de definirlo es: *Una v.a. es* **estable** *si existen dos sucesiones de números reales* $\{c_n, n \in I\!N\}$ *y* $\{d_n, n \in I\!N\}$ *con cada* $c_n > 0$ *tal que*

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \stackrel{D}{=} c_n X + d_n. \tag{1.5}$$

donde $X_1, X_2, ..., X_n$ *son copias independientes de* X, *y decimos que* X *es* **Estrictamente Estable** *si cada* $d_n = 0$.

Para ver la equivalencia entre las dos definiciones hagamos $Y_j = X_j, b_n = d_n$ y $\sigma_n = c_n$ y se puede probar que c_n en (1.5) sólo puede ser de la forma $\sigma n^{\frac{1}{\alpha}}$ con $0 \leq \alpha \leq 2$. El parámetro α juega un papel preponderante en la teoría de las Variables Aleatorias Estables y se le suele llamar **Índice de Estabilidad**.

Expresando (1.5) en términos de las funciones características obtenemos que

$$[\phi_X(u)]^n = \exp[iud_n]\phi_X(c_n u).$$

para cada $u \in I\!R$.

Esto, ya que de (1.5) se deduce que todas las variables aleatorias estables son **inf. div.** , probaremos ahora esta afirmación.

Sea ϕ la función característica de una v.a. estable X y sean $X_1, X_2, ..., X_n$ las copias idénticas de esta v.a.. rescribiendo (1.5) en términos de sus funciones características tenemos.

$$[\phi_X(u)]^n = \phi_X(c_n u)\exp(iud_n).$$

O de forma alternativa,

$$\phi_X(u) = \left[\phi_X\left(\frac{u}{c_n}\right)\right]^n \exp[-iu\frac{d_n}{c_n}].$$

reemplazando u con u/c_n y haciendo

$$\phi_n(u) = \phi_X(c_n u)\exp\left[iu\frac{d_n}{nc_n}\right] \qquad \text{y } \phi(u) = [\phi_n(u)]^n.$$

se obtiene que ϕ es **inf. div.** .

La forma general de la tercia generadora, o las características de acuerdo a la Nota (1.3.1), de las **v.a. Estables** esta dada por el teorema siguiente:

Proposición 1.4.1 *Si X es* **v. a. Estable** *real, entonces su tercia característica tiene alguna de las siguientes formas :*

1. *Cuando $\alpha = 2, \nu = 0$, Entonces $N(b, A)$;*

2. *Cuando $\alpha \neq 2, A = 0$ y*

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}}\chi_{(0,\infty)}(x)\mathrm{d}x + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}}\chi_{(-\infty,0)}(x)\mathrm{d}x$$

Donde $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ y $c_1 + c_1 \geq 0$.

La prueba se puede encontrar en Sato [31] p. 80.

Una cuidadosa transformación de las integrales en el teorema 1.3.1 nos deja una forma mucho más conveniente de la función característica.

Teorema 1.4.1 *Una v.a. real X es estable si y sólo si existen $\sigma > 0, -1 \leq \beta \leq 1$ y $\mu \in I\!R$ tales que para toda $u \in I\!R$*

1. *Cuando $\alpha = 2$*

$$\phi_X(u) = \exp\left(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right).$$

2. *Cuando $\alpha \neq 1, 2$*

$$\phi_X(u) = \exp\left(i\mu u - \sigma^\alpha | u |^\alpha [1 - i\beta \mathrm{sgn}(u)\tan(\pi\alpha/2)]\right).$$

3. *Cuando $\alpha = 1$*

$$\phi_X(u) = \exp\left(i\mu u - \sigma | u | [1 + i\beta\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(u)\log(| u |)]\right).$$

De aquí se puede mostrar que $I\!E(X^2) < \infty$ si y sólo si $\alpha = 2$ (i.e. X es gaussiana) y que $I\!E(|X|) < \infty$ si y sólo si $1 < \alpha \leq 2$.

Todas las **v. a. Estables** con densidad f_X pueden ser clasificadas en tres grupos cerrados: (para mayor detalle consultar Feller [16] capítulo 17, sección 6).

La Distribución Normal , $\alpha = 2$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

La Distribución Cauchy , $\alpha = 1$, $\beta = 0$

$$f_X(x) = \frac{\sigma}{\pi[(x-\mu)^2 + \sigma^2]}$$

La Distribución de Lévy , $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$

$$\mathrm{f}_X(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} e^{[-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}]}.$$

para $x > \mu$

Nota 1.4.1 *Si se tiene una* **v.a. Estable** *simétrica entonces por el teorema 1.9, página 165 de Gut [20], la simetría nos dice que la parte imaginaria no existe y del teorema* **1.4.1** *se obtiene que:*

$$\phi_X(u) = e^{(-\rho^\alpha |u|^\alpha)}$$

para toda $0 < \alpha \leq 2$. *Donde* $\rho = \sigma$ *para* $0 < \alpha < 2$ *y* $\rho = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ *cuando* $\alpha = 2$, *esto lo denotaremos como* $X \sim S\alpha S$.

Para obtener la generalización del teorema 1.4.1 a $I\!R^d$ es de manera directa al sustituir $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ y cada d_n por vectores así la forma de la *caracterización* de la proposición **1.4.1** se extiende directamenté, con el caso particular en que $\alpha \neq 2$, en el que la medida de Lévy resulta:

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{c}{|x|^{d+\alpha}}\mathrm{d}x \qquad \textit{donde} \quad c > 0.$$

Por lo que la extensión resulta:

Teorema 1.4.2 *Una variable aleatoria X que toma valores en $I\!R^d$ es estable si y sólo si para toda $u \in I\!R^d$ existe un vector $m \in I\!R^d$ y*

1. *Existe una matriz positiva definida simétrica $A_{d\times d}$ tal que si $\alpha \neq 2$,*

$$\phi_X(u) = \exp\left[i(m,u) - \frac{1}{2}(u, Au)\right].$$

2. *Existe una medida finita ρ sobre $S_d(1)$ tal que cuando $\alpha \neq 1, 2$,*

$$\phi_X(u) = \exp\left\{i(m,u) - \int_{S_d(1)} |(u,s)|^\alpha \left[1 - i\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\mathrm{sgn}(u,s)\right]\rho(\mathrm{d}s)\right\}.$$

3. *Existe una medida finita ρ sobre $S_d(1)$ tal que cuando $\alpha = 1$,*

$$\phi_X(u) = \exp\left\{i(m,u) - \int_{S_d(1)} |(u,s)| \left[1 + i\frac{2}{\pi}\mathrm{sgn}(u,s)\log|(u,s)|\right]\rho(\mathrm{d}s)\right\}.$$

donde $S_d(1) = \{x \in I\!R^d : |x| = 1\}$

Note que, para $0 < \alpha < 2$, X es simétrica si y sólo si,

$$\phi_X(u) = \exp\left(-\int_{s_d(1)} |(u,s)|^\alpha \rho(\mathrm{d}x)\right).$$

para cada $u \in I\!R^d$ y X es invariante bajo rotaciones rígidas para $0 < \alpha \leq 2$ si y sólo si la versión para $I\!R^d$ de la ecuación, de la **Nota 1.4.1**, se conserva.

Nota 1.4.2 *El símbolo $S_d(1)$ denota al conjunto $\{x \in I\!R^d : |x| = 1\}$, y notemos que este conjunto tiene dimensión $d-1$.*

1.5. Procesos de Lévy

Sea $X = (X_t, t \geq 0)$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$. Decimos que X tiene incrementos independientes si para cada $n \in I\!N$ y $0 \leq t_1 <$

$t_2 <, \ldots, < t_{n+1} < \infty$ las variables aleatorias $(X(t_{j+1}) - X(t_j), 1 \leq j \leq n)$ son independientes y tiene incrementos estacionarios si cada $X(t_{j+1}) - X(t_j) \stackrel{\mathcal{D}}{=} X(t_{j+1} - t_j) - X(0)$.

Definición 1.5.1 *X es un* **Proceso de Lévy** *si:*

1. *$X(0) = 0$ c.s.*
2. *X tiene incrementos independientes y estacionarios.*
3. *X es estocásticamente continua, i.e., para toda $a > 0$ y toda $s \geq 0$,*

$$\lim_{t \to s} I\!P(|X(t) - X(s)| > a) = 0.$$

Se puede ver que bajo la presencia de (1) y (2), la condición (3) es equivalente a la condición,

$$\lim_{t \downarrow 0} I\!P(|X(t)| > a) = 0 \qquad \textit{para toda } a > 0.$$

Abordaremos ahora la relación entre las distribuciones **inf. div.** y los Procesos de Lévy mediante una proposición:

Teorema 1.5.1 *Si $X(t)$ es un Proceso de Lévy, entonces $X(t)$ es* **inf. div.** *para cada $t \geq 0$.*

Prueba.- X es **inf. div.** ya que dado $t \geq 0$ y para cada $n \in I\!N$ podemos escribir,

$$X(t) = X_{\frac{t}{n}} + \left(X_{\frac{2t}{n}} - X_{\frac{t}{n}}\right) + \ldots + \left(X_t - X_{\frac{(n-1)t}{n}}\right) = \sum_{j=1}^{n} Y_j.$$

con $Y_j = X_{\frac{jt}{n}} - X_{\frac{(j-1)t}{n}} \stackrel{D}{=} X_{\frac{t}{n}}$.

Y como $X(t)$ es un Proceso de Lévy, entonces los miembros de la familia de v.a. $Y(j)$ son i.i.d.. Así, dado $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir a $X(t)$ como una suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, por lo tanto $X(t)$ es **inf. div.** .

■

Una propiedad importante del **Exponente de Lévy** asociado a los Procesos de Lévy es que $\eta(t, u) = t\eta(1, u)$ para cada $t \geq 0, u \in \mathbb{R}^d$, para probar esto, mostremos primero el siguiente Lema:

Lema 1.5.1 *Si $X(t)$ es estocásticamente continua, entonces la función $t \to \phi_{X(t)}(u)$ es continua para cada $u \in \mathbb{R}^d$.*

Prueba.- Primero veamos que si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ y f es integrable entonces podemos escribir

$$\int_{X \in B} f(X(\omega))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_B f(x)p_X(\mathrm{d}x).$$

Asi, como $e^{i(u, X(s)(\omega))}$ es integrable, entonces se tiene que podemos usar el teorema de cambio de variable.

Para cada $s, t \geq 0$ con $s \neq t$ definamos $X(s, t) = X(t) - X(s)$. Y con $u \in \mathbb{R}^d$ fijo se sigue que la aplicación $y \to e^{i(u,y)}$ es continua en el origen, pues dado cualquier $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que,

$$\sup_{0 \leq |y| \leq \delta_1} | e^{i(u,y)} - 1 | < \frac{\epsilon}{2}.$$

Y por la continuidad estocástica, podemos encontrar $\delta_2 > 0$ tal que cuando $0 < |t - s| < \delta_2$ y $\mathbb{P}(| X(s, t) | > \delta_1) < \frac{\epsilon}{4}$ entonces para todo $0 < |t - s| < \delta_2$ obtenemos :

$$|\phi_{X(t)}(u) - \phi_{X(s)}(u)| = | \int_\Omega e^{i(u, X(s)(\omega))}[e^{i(u, X(s,t)(\omega))} - 1]\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \mid e^{i(u,X(s)(w))}[e^{i(u,y)} - 1]p_{X(s,t)}(\mathrm{d}y) \mid$$

y como

$$\mid e^{i(u,y)} \mid = 1.$$

Definiendo $\beta_{\delta_1}(0)$ como la bola de radio δ_1 alrededor del $0 \in \mathbb{R}^d$ entonces

$$\begin{aligned}
|\phi_{X(t)}(u) - \phi_{X(s)}(u)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |e^{i(u,y)} - 1| p_{X(s,t)}(\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\beta_{\delta_1}(0)} |e^{i(u,y)} - 1| p_{X(s,t)}(\mathrm{d}y) \\
&+ \int_{\beta_{\delta_1}(0)^c} |e^{i(u,y)} - 1| p_{X(s,t)}(\mathrm{d}y) \\
&\leq \sup_{0<|y|\leq\delta_1} |e^{i(u,y)} - 1| + 2\mathbb{P}(|X(s,t)| > \delta_1) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

y así la prueba se completa.

■

Así, tenemos el siguiente teorema que encierra la propiedad enunciada arriba.

Teorema 1.5.2 *Si X es un Proceso de Lévy entonces,*

$$\phi_{X(t)}(u) = e^{t\eta(u)}.$$

para cada $u \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$, donde η es el ***Exponente de Lévy*** *de $X(1)$.*

Prueba.- Si que X es un Proceso de Lévy entonces para cada $u \in I\!R^d$ y $t \geq 0$ Definamos $\phi_u(t) = \phi_{X(t)}(u)$ entonces por la propiedad (2) de la **definicíñ 1.5.1** se tiene que para $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\phi_u(t+s) &= I\!E(e^{i(u,X(t+s))}) \\
&= I\!E(e^{i(u,X(t+s)-X(s))}e^{i(u,X(s))}) \\
&= I\!E(e^{i(u,X(t+s)-X(s))})I\!E(e^{i(u,X(s))}) \\
&= \phi_u(t)\phi_u(s). \qquad (1.5.2)
\end{aligned}$$

Ahora, por las propiedades (1) y (3) de la definición 1.5.1 y por el lema 1.5.1 se tiene que $\phi_u(0) = 1$ y entonces la aplicación $t \to \phi_u(t)$ es continua. Y la única solución a 1.5.2 y $\phi_u(0) = 1$ está dada por $\phi_u(t) = e^{t\alpha(u)}$, donde $\alpha : I\!R^d \to \mathbb{C}$, (véase para mayor detalle Bingham [6] pág 4-6).

Ahora por el lema 1.5.1 se tiene que $X(1)$ es **inf. div.**, de donde se obtiene que α es un **Exponente de Lévy** y se obtiene así el resultado.

$\blacksquare$

Se puede mostrar que la suma de dos Procesos de Lévy ind. es a su vez un Proceso de Lévy.

Ahora, formulamos la formula de Lévy-Khintchine para un Proceso de Lévy $X = (X(t), t \geq 0)$:

$$\begin{aligned}
I\!E(e^{i(u,X(t))}) &= \exp\left(t\left[i(b,u) - \frac{1}{2}(u,Au)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \int_{I\!R^d-\{0\}}[e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_{\hat{B}}(y)]\nu(\mathrm{d}y)\right]\right). \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Para cada $t \geq 0$, $u \in I\!R^d$, donde (b, A, ν) son las características de $X(1)$.

Los dos primeros términos del lado derecho de (1.6), corresponden a la parte continua o Browniana del proceso y el último término a la parte de los saltos del proceso. Además, si los saltos son acotados se puede probar que X tiene todos los momentos hasta orden n con $n = 1, 2, \ldots$, la prueba la presentaremos en el capítulo 3.

A continuacíon se dará un resultado de convergencia para sucesiones de procesos de Lévy, y la prueba puede consultarse en Applebaum [1], pág 42.

Teorema 1.5.3 *Si $X = (X(t), t \geq 0)$ es un proceso estocástico y existe una sucesión de procesos de Lévy $\{X_n(t), t \geq 0\}$ tal que $X_n(t)$ converge en probabilidad a $X(t)$ para cada $t \geq 0$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{t\to 0} I\!P(|X_n(t) - X(t)| > a) = 0$$

para toda $a > 0$, entonces X es un proceso de Lévy.

1.6. Ejemplos de Procesos de Lévy

1.6.1. Movimiento Browniano y Procesos Gaussianos

Daremos a continuación un esbozo del Movimiento Browniano, quizás el proceso de Lévy más estudiado en el siglo pasado y que es por lo tanto, del que se tiene más conocimiento y del que existe más literatura.

Un Movimiento Browniano Estándar en $I\!R^d$ es un proceso de Lévy $B = B(t)$ para el cual

1. $B(t) \sim N(0, tI)$ para cada $t \geq 0$

2. B tiene trayectorias continuas.

De la definición se deduce inmediatamente que si B es un Movimiento Browniano estándar entonces la función característica está dada por

$$\phi_{B(t)}(u) = \exp\left(\frac{1}{2}t|u|^2\right).$$

para cada $u \in I\!R^d, t \geq 0$.

Denotaremos al i-ésimo componente de $B(t)$, como el proceso $B_i = \{B_i(t), t \geq 0\}$ y se puede ver que cada B_i es un Movimiento Browniano, y que son independientes dos a dos.

La construcción del Movimiento Browniano se puede encontrar en Karatzas and Shreve [22] págs. 47-59, además de otros autores como Paley y Wiener [26] .

Recordemos algunas propiedades importantes del M.B. que se pueden encontrar en Sato [31], Karatzas and Shreve [22], Roger and Williams [29], Knight [24] y Tudor [30], entre otros.

- Las trayectorias de $B(t)$ tiene variación infinita sobre cada intervalo compacto y como consecuencia c.s. las trayectorias en ningún punto son derivables, ver Tudor [30] pág. 216-217.

- Para toda sucesión $\{t_n, n \in I\!N\}$ en $I\!R^+$ con $t_n \uparrow \infty$

$$\liminf_{n\to\infty} B(t_n) = -\infty \text{ c.s.}$$

$$\limsup_{n\to\infty} B(t_n) = \infty \text{ c.s.}$$

- La ley del logaritmo iterado.

$$I\!P\left(\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B(t)}{\left[2t\log\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = 1\right) = 1.$$

  algunas formas alternativas de este resultado se encuentran en Tudor [30] pág. 225.

  Se puede profundizar en las propiedades del M.B. consultando Yor [33].

1.6.2. Procesos de Poisson

El proceso Poisson con intensidad $\lambda > 0$ es un proceso de Lévy $(N(t), t \geq 0)$ que toma valores en $I\!N \cup \{0\}$ con cada $N(t) \sim \pi(\lambda t)$, cuya función de probabilidad está dada por

$$I\!P\left(N(t) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

para cada n=0,1,2,.... El proceso de Poisson es ampliamente usado en diversas aplicaciones y se puede consultar lo referente a la teoría de este proceso en Kingman [23].

Definamos, $(T_n, n \in I\!N \cup \{0\})$ como

$$T_n = \inf\{t \geq 0; N(t) = n\}$$

y $T_0 = 0$, las T_n son variables aleatorias no-negativas, usualmente llamadas tiempos de arribo y Kingman en [23] muestra que se distribuyen Gamma.

Mas aún, los tiempos entre arribos $T_n - T_{n-1}$ para cada $n \in I\!N$ son i.i.d. con distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$, esto se puede encontrar en Grimmett and Stirzaker [19] sección 6.8.

Las trayectorias de N son no decrecientes, tiene saltos de tamaño 1, es continua por pedazos y además en los intervalos donde es continua es constante, y por último, $\lim_{t\to\infty} N(t) = +\infty$.

Introduzcamos el Proceso de Poisson compensado, $\tilde{N} = (\tilde{N}(t), t \geq 0)$ donde $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$, así obtenemos, $I\!E\left(\tilde{N}(t)\right) = 0$ y además $I\!E\left(\tilde{N}^2(t)\right) = \lambda t$ para cada $t \geq 0$.

1.6.3. Proceso Poisson Compuesto

Sea $(Z(n), n \in I\!N)$ una sucesión de v.a.i.i.d. que toma valores en $I\!R^d$ con distribución común μ_Z y sea N un proceso Poisson con intensidad λ que es independiente de todas las $Z(n)$, así, el proceso Poisson Compuesto se define como:

$$Y(t) = Z(1) + Z(2) + \cdots + Z\left(N(t)\right) \tag{1.7}$$

para cada $t \geq 0$, entonces escribimos $Y(t) \sim \pi(\lambda t, \mu_Z)$.

Enunciemos una proposición,

Proposición 1.6.1 *El proceso Poisson Compuesto Y es un Proceso de Lévy.*

Prueba.- La condición (1) de la definición 1.5.1 es trivial pues como $N(0) = 0$ c.s., entonces $Y(0) = 0$ c.s..

Probemos la segunda condición, primero probemos que los incrementos son independientes, para esto tomemos $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ y como las variables aleatorias $Z(1), Z(2), \ldots, Z(N(t))$ son mutuamente independientes e independientes a su vez del proceso poisson $N(t)$, el cual tiene incrementos independientes, entonces las variables aleatorias

$$
\begin{aligned}
&\{Z(1), \ldots, Z(N(t_0)), N(t_0)\} \\
&\{Z(N(t_0)+1), \ldots, Z(N(t_1)), N(t_1) - N(t_0)\} \\
&\vdots \\
&\{Z(N(t_{n-1})+1), \ldots, Z(t_n), N(t_n) - N(t_{n-1})\}.
\end{aligned}
$$

son independientes, de donde se sigue que los incrementos

$$
\begin{aligned}
Y(t_0) - Y(0) &= Z(1) + \cdots + Z(N(t_0)) \\
Y(t_1) - Y(t_0) &= Z(N(t_0)+1) + \cdots + Z(N(t_1)) \\
&\vdots \\
Y(t_n) - Y(t_{n-1}) &= Z(N(t_{n-1})) + \cdots + Z(N(t_n)).
\end{aligned}
$$

del proceso Poisson Compuesto son independientes.

Ahora para mostrar que los incrementos son estacionarios, hagamos $t > 0$ y $h > 0$. Entonces $N(t+h) - N(t)$ tiene la misma distribución que $N(h)$, esto por ser $N(h)$ proceso de Lévy, y de esto se sigue que $Z(1), \ldots, Z(N(h))$ tiene la misma distribución que $Z(N(t) + 1), \ldots, Z(N(t+h))$, entonces

$$Y(t+h) - Y(t) = Z(N(t)+1) + \cdots + Z(N(t+h))$$

tiene la misma distribución que

$$Y(h) = Z(1) + \cdots + Z(N(h))$$

Y así, se tiene que Y(t) tiene incrementos independientes y estacionarios.

para mostrar la condición (3) hagamos lo siguiente: sea $a > 0$ y calculemos $I\!P(|Y(t)| > a)$ esto, condicionando y usando la independencia de las $\{Z(k)\}$ con $N(t)$, y entonces obtenemos

$$I\!P(|Y(t)| > a) = \sum_{n=0}^{\infty} I\!P(|Z(1) + \cdots + Z(n)| > a) I\!P(N(t) = n).$$

Y como

$$\lim_{t \downarrow 0} I\!P(N(t) = n) = 0.$$

para toda $n \in I\!N$ se sigue que

$$\lim_{t \downarrow 0} I\!P(|Y(t)| > a) = 0.$$

Así, Y(t) es un proceso de Lévy.

■

De la sección de **inf. div.** se tiene que Y tiene **Exponente de Lévy**

$$\eta_Y(u) = \left[\int_{\mathbf{R}^d} (e^{i\langle u,y\rangle} - 1) \lambda_{\mu_Z}(\mathrm{d}y) \right]$$

Así, como en el caso del proceso Poisson, se tiene que las trayectorias de Y son continuas por pedazos, mas aun en los intervalos donde es continua es constante, teniendo saltos ya sean positivos o negativos.

Este tipo de procesos tiene importantes aplicaciones en los modelos del riesgo de seguros, veamos un ejemplo típico, para esto, consideremos el siguiente modelo para la evaluación del capital de una compañia de seguros. Definamos para $t \geq 0$, la variable aleatoria

$$X(t) = X_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k.$$

con $\{Z_k\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. positivas.

Ahora, el proceso $\{X(t)\}$ modela el capital de la aseguradora, donde el capital inicial X_0 es real positivo, la constante $c > 0$ es la tasa de pagos de las primas de los seguros que la aseguradora recibe y se supone, además, que el numero de reclamos sigue una distribución poisson $N(t)$ y el pago de cada reclamación se distribuye como Z_k. Aquí se supone que $Z_k > 0$ para toda k.

A partir de este modelo, se hace importante conocer la probabilidad de ruina, esto es, de que la variable aleatoria $X(t) < 0$ para alguna t, que en términos de probabilidad es

$$I\!P(\exists t \geq 0 : X(t) < 0).$$

En general, no es posible calcular explícitamente esta probabilidad, salvo en el caso particular en que las Z_k se distribuyen exponenciales, que es el único caso en se puede calcular de manera exacta.

Para un estudio más profundo véase el libro de Embrechts, Kluppelberg y Mikosch [13], tambien puede consultarse el libro de Asmussen [2].

También se usa este modelo para modelar teoría de colas, como conmutadores, filas de bancos, etc., y en general se usa la misma expresión descrita arriba, salvo que en este caso la constante $c < 0$ y en lugar de restar la ultima expresión esta se suma, así

$$X(t) = X_0 + ct + \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k.$$

Y aquí la probabilidad de ruina es vista como la probabilidad de vaciar el conmutador o que no haya nadie en espera.

Claramente un proceso Poisson Compuesto es Poisson si $d = 1$ y cada $Z(n) = 1$ c.s., de esta manera, $\mu_Z = \delta_1$.

Proposición 1.6.2 *Si $(N_1(t), t \geq 0)$ y $(N_2(t), t \geq 0)$ son dos procesos Poisson independientes definidos en el mismo espacio muestral, con tiempos de arribo $(T_n^{(j)}, n \in I\!N)$ para cada $j = 1, 2$ respectivamente, entonces*

$$I\!P\left(T_m^{(1)} = T_n^{(2)} \text{ para alguna } m, n \in I\!N\right) = 0.$$

Prueba.- Sea $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ para cada $t \geq 0$, entonces como la suma de dos procesos de Lévy ind. es a su vez un proceso de Lévy y mediante un calculo directo de la función característica de N se obtiene que es otra vez un proceso de Poisson. De donde, para cada $t \geq 0$, podemos escribir $N(t) = Z(1) + \cdots + Z(N(t))$ donde $(Z(n), n \in I\!N)$ son i.i.d. con cada $Z(n) = 1$ c.s..

Ahora, sean $m, n \in I\!N$ tal que $T_m^{(1)} = T_n^{(2)}$ c.s., y si estos son los primeros tiempos de ocurrencia de estos eventos , se sigue entonces que $Z(m+n-1) = 2$ c.s. , lo cual es una contradicción, de donde se obtiene el resultado.

$\blacksquare$

1.6.4. Procesos Lévy Estables.

Un proceso Lévy estable es un proceso de Lévy X tal que cada $X(t)$ es una variable aleatoria estable **v. a. Estables** . Por lo tanto, el **Exponente de Lévy** está dado por el **teorema 1.4.2.**, el caso de interés particular es cuando X es invariante bajo rotaciones rígidas, que implica que el **Exponente de Lévy** este dado mediante

$$\eta(u) = -\sigma^{\alpha} \mid u \mid^{\alpha}$$

donde $0 < \alpha \leq 2$ es el índice de estabilidad y $\sigma > 0$

Una razón por la que los procesos de Lévy estables son importantes en las aplicaciónes es que ellos tienen la propiedad de auto-similaridad. En general, un proceso estocástico $Y = (Y(t), t \geq 0)$ es auto-similar con índice $H > 0$ de Hurst si los dos procesos $(Y(at), t \geq 0)$ y $(a^H Y(t), t \geq 0)$ tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales para toda $a \geq 0$.

Al examinar la función característica de los procesos de Lévy estables que son invariantes bajo rotaciones rígidas, es fácil verificar, que son auto-similares con índice de Hurst $H = \frac{1}{\alpha}$, y como caso particular, el Movimiento Browniano es auto-similar con índice $H = 1/2$.

Se puede profundizar en las propiedades de los procesos auto-similares en Embrechts and Maejima [14], ellos muestran que un proceso de Lévy X es auto-similar si y sólo si cada $X(t)$ es estrictamente estable.

1.7. Subordinadores

Un Subordinador es un proceso de Lévy de dimensión uno que es no decreciente con probabilidad 1, también se puede pensar a tales procesos como un modelo aleatorio de evolución del tiempo. Si $T = (T(t), t \geq 0)$ es un subordinador entonces :

$$T(t) \geq 0 \text{ c.s. para cada } t > 0.$$

y

$$T(t_1) \leq T(t_2) \text{ c.s. con } t_1 \leq t_2.$$

Ahora, cuando $X(t) \sim N(0, At)$ se tiene que $I\!P(X(t) \geq 0) = I\!P(X(t) \leq 0) = 1/2$ de donde es claro que este tipo de procesos no puede ser un subordinador, más aún, la forma del **Exponente de Lévy** de los subordinadores queda expresada en el siguiente resultado

Teorema 1.7.1 *Si T es un subordinador, entonces su **Exponente de Lévy** tiene la forma*

$$\eta(u) = ibu + \int_0^\infty [\exp(iuy) - 1]\lambda(\mathrm{d}y) \tag{1.8}$$

donde $b \geq 0$ y la medida de Lévy satisface la condición adicional

$$\lambda(-\infty, 0) = 0 \ y \ \int_0^\infty (y \wedge 1)\lambda(\mathrm{d}y) < \infty.$$

*Inversamente, toda aplicación de $I\!R^d \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forma 1.8 es el **Exponente de Lévy** de un subordinador.*

La prueba puede consultarse en Bertoin [4] teorema 1.2 y en Rogers and Williams [29] pág. 78-79. Llamaremos a (b, λ) el *par Característico* del subordinador T.

Se puede mostrar que la condición adicional de la medida de Lévy de los subordinadores es equivalente a

$$\int_0^\infty \frac{y}{1+y}\lambda(\mathrm{d}y) < \infty.$$

Además, para $t \geq 0$ la aplicación $u \longrightarrow \mathbb{E}(e^{iuT(t)})$ es analítica sobre la región $\{iu, u > 0\}$ entonces al hacer la transformada de Laplace de la distribución obtenemos :

$$\mathbb{E}(e^{-uT(t)}) = \exp\left(-t\psi(u)\right).$$

donde

$$\psi(u) = -\eta(iu) = bu + \int_0^{\infty}(1 - e^{-uy})\lambda(\mathrm{d}y). \tag{1.9}$$

para $u > 0$. A la función ψ usualmente se la llama el *exponente de Laplace* del subordinador.

Veamos algunos ejemplos de subordinadores.

Ejemplo 1.7.1 Proceso Poisson. Los procesos de Poisson son claramente subordinadores. en el caso del proceso Poisson Ccompuesto este será subordinador si las $Z(n)$ de la expresión 1.7 son no negativas.

Ejemplo 1.7.2 Subordinadores $\alpha-$Estables. Primero mostremos un resultado para poder probar que este tipo de procesos son subordinadores, esta identidad es:

$$u^{\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{(1 - e^{-ux})}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x.$$

para $u \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$.
Para probar esto, sigamos el procedimiento que Sato utiliza en [31] pág. 46 en el ejemplo 8.1, en donde una integral de dimensión uno la

convierte en una integral doble, así pues se tiene

$$\int_0^\infty (1-e^{-ux})x^{-1-\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_0^x ue^{-uy}\mathrm{d}y\right) x^{-1-\alpha}\mathrm{d}x$$

Y por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty x^{-1-\alpha}\mathrm{d}x\right) ue^{-uy}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{x=y}^{\infty} ue^{-uy}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{0-y^{-\alpha}}{-\alpha}\right] ue^{-uy}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \frac{y^{-\alpha}}{\alpha} ue^{-uy}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

haciendo $x = uy$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{u}{\alpha}\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{u}\right)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{u} \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-x}\frac{x^{-\alpha}}{u^{-\alpha}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{u^\alpha}{\alpha}\int_0^\infty e^{-x}x^{-\alpha}\mathrm{d}x \\
&= \frac{u^\alpha}{\alpha}\Gamma(1-\alpha).
\end{aligned}$$

De donde se obtiene que

$$u^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{(1-e^{-ux})}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

para $u \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$

Ahora, por la expresión (1.9) y por el Teorema **1.7.1** y por la Proposición **1.4.1** se tiene que para $0 < \alpha < 1$ existe un subordinador α-estable T con exponente de Laplace

$$\psi(u) = u^\alpha.$$

con características $(0, \lambda)$ donde

$$\lambda(\mathrm{d}x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}}.$$

Ejemplo 1.7.3 **El Subordinador de Lévy.** El subordinador $\frac{1}{2}$-estable tiene una distribución dada por la distribución de Lévy, con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = t^2/2$ de tal manera que

$$f_{T(t)}(s) = \left(\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\right) s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t^2}{4s}}$$

para $s \geq 0$. El Subordinador de Lévy tiene una interpretación como un tiempo de paro para un Movimiento Browniano estándar de dimensión uno $(B(t), t \geq 0)$ más aun, se puede probar que

$$T(t) = \text{ínf}\left\{s > 0; B(s) = \frac{t}{\sqrt{2}}\right\}. \tag{1.11}$$

Esto lo probaremos en el capítulo 2, usando propiedades de martingalas.

Ejemplo 1.7.4 **Subordinadores Gaussianos inversos.** En el ejemplo anterior teníamos que el subordinador de Lévy podía verse como el tiempo de paro de un Movimiento Browniano estándar en una dimensión, ahora, si generalizamos el ejemplo anterior al sustituir el Movimiento Browniano por el proceso gaussiano $C = (C(t), t \geq 0)$ donde cada $C(t) = B(t) + \gamma t$ con $\gamma \in I\!R$, así, el subordinador gaussiano inverso se define mediante

$$T(t) = \text{ínf}\{s > 0; C(s) = \delta t\}.$$

donde $\delta > 0$.

Probaremos en el segundo capítulo, mediante propiedades de martingalas, que para cada $t, u > 0$

$$I\!E(e^{-uT(t)}) = \exp\left[-t\gamma(\sqrt{2u + \gamma^2} - \gamma)\right]. \tag{1.12}$$

Ejemplo 1.7.5 Subordinadores Gamma. Sea $(T(t), t \geq 0)$ un proceso Gamma con parámetros $a, b > 0$, tal que cada $T(t)$ tiene densidad

$$f_{T(t)}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx}.$$

para $x \geq 0$; entonces se encuentra fácilmente que para $u \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-ux} f_{T(t)}(x)\mathrm{d}x &= \int_0^\infty e^{-ux}\frac{b^{at}}{\Gamma(at)}x^{at-1}e^{-bx}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{b^{at}}{\Gamma(at)}x^{at-1}e^{-(u+b)x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{b^{at}}{(u+b)^{at}}\int_0^\infty \frac{(u+b)^{at}}{\Gamma(at)}x^{at-1}e^{-(u+b)x}\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{b}{u+b}\right)^{at} \\
&= \left(\frac{u+b}{b}\right)^{-at} \\
&= \exp\left[-ta\log(1+\frac{u}{b})\right].
\end{aligned}$$

y tambíen se puede ver que como

$$-\int_0^\infty e^{-\nu x}x^{-1}\mathrm{d}x = \log\nu.$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1-e^{-ux})ax^{-1}e^{-bx}\mathrm{d}x &= \int_0^\infty ax^{-1}e^{-bx}\mathrm{d}x - \int_0^\infty ax^{-1}e^{-(u+b)x}\mathrm{d}x \\
&= a\int_0^\infty x^{-1}e^{-bx}\mathrm{d}x - a\int_0^\infty x^{-1}e^{-(u+b)x}\mathrm{d}x \\
&= -a\log(b) + a\log(u+b) \\
&= a\log\left(1+\frac{u}{b}\right).
\end{aligned}$$

Así, al combinar los resultados se obtiene que

$$\begin{aligned}
I\!E\left(e^{-ux}\right) &= \exp\left[-ta\log(1+\frac{u}{b})\right] \\
&= \exp\left[-t\int_0^\infty (1-e^{-ux})ax^{-1}e^{-bx}\mathrm{d}x\right].
\end{aligned}$$

De aquí, se desprenden varias cosas, primero que $(T(t), t \geq 0)$ es un subordinador donde el par característico esta dado por $b = 0$ y $\lambda(\mathrm{d}x) = ax^{-1}e^{-bx}$ y con exponente de Laplace $\psi(u) = a\log(1 + u/b)$, además, veremos más adelante que ψ es la función de Bernstein asociada.

Diremos que una función $f \in C^\infty((0,\infty))$ con $f \geq 0$ es *completamente monótona* si $(-1)f^{(n)} \geq 0$ para toda $n \in I\!N$ y que es una *función de Bernstein* si $(-1)f^{(n)} \leq 0$ para toda $n \in I\!N$.
Así, tenemos el siguiente resultado

Proposición 1.7.1 *1. f es una función de Bernstein si y sólo si la función $x \to \exp(-tf(x))$ es completamente monótona para toda $t \geq 0$*

2. f es una función de Bernstein si y sólo si tiene su representación de la forma

$$f(x) = a + bx + \int_0^\infty (1 - e^{-yx})\lambda(\mathrm{d}x).$$

para cada $x > 0$ donde $a, b \geq 0$ y $\int_0^\infty (y \wedge 1)\lambda(\mathrm{d}y) < \infty$

3. g es completamente monótona si y sólo si existe una medida μ en $[0,\infty)$ para la cual

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xy}\mu(\mathrm{d}y).$$

La prueba de este resultado se puede encontrar en Berg and Forst [3] pág. 61-72.

Cuando se tiene el caso en que $a = 0$, al comparar el inciso 2 de la proposición anterior con la ecuación (1.9), se tiene que existe una correspondencia uno-a-uno entre las funciones de Bernstein para las cuales $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y los exponentes de Laplace de los Subordinadores. También se tiene que las transformaciones de Laplace de las distribuciones de los Subordinadores son siempre funciones completamente monótonas, y una subclase de todas las posibles medidas μ que describe la proposición en el inciso 3, están dadas por todas las posibles distribuciones $p_{T(t)}$ asociadas a los subordinadores.

Sea f una función de Bernstein con $a > 0$ y sea T un Subordinador con exponente de Laplace $\psi(u) = f(u) - a$ para cada $u \geq 0$ y sea S una v.a. exponencial con parámetro a independiente de T, tal que S tiene densidad $g_S(x) = ae^{-ax}$ para cada $x \geq 0$.

Ahora definamos el proceso $T_S = (T_S(t), t \geq 0)$, el cual toma valores en $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ y llamémosle el *Subordinador muerto*, mediante

$$T_S(t) = \begin{cases} T(t) & \text{para} \quad 0 \leq t < S, \\ \infty & \text{para} \quad t \geq S \end{cases}.$$

Así, se tiene la siguiente proposición

Proposición 1.7.2 *Existe una correspondencia uno-a-uno entre los Subordinadores muertos T_S y y las funciones de Bernstein f, dada por*

$$\mathbb{E}(e^{-uT_S(t)}) = e^{-tf(u)}.$$

para cada $t, u \geq 0$.

Prueba.- Por la independencia de T con S se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-uT_S(t)}) &= \mathbb{E}(e^{-uT_S(t)}\chi_{[0,S)}(t)) + \mathbb{E}(e^{-uT_S(t)}\chi_{[S,\infty)}(t)) \\ &= \mathbb{E}(e^{-uT(t)})\mathbb{P}(t < S) \\ &= e^{-t\psi(u)}e^{-at} \\ &= e^{-t(\psi(u)+a)} \\ &= e^{-tf(u)}. \end{aligned}$$

■

Se ha usado el hecho de que $\mathbb{P}(t < S) = e^{-at}$ y la convención de que $e^{-\infty} = 0$.

Una de las más importantes aplicaciones de los subordinadores es el *cambio de tiempo*, este se define como sigue, sea X un proceso de Lévy arbitrario y sea T un subordinador definido en el mismo espacio muestral que X y pidamos que X y T sean independientes, definamos ahora un nuevo proceso $Z = (Z(t), t \geq 0)$ mediante,

$$Z(t) = X(T(t)).$$

para cada $t \geq 0$, tal que para $\omega \in \Omega$ se tenga $Z(t)(\omega) = X(T(t)(\omega))(\omega)$.

El proceso $Z(t)$ definido asi es un proceso de Lévy, para verlo, necesitamos antes el teorema de Kac, que se deja sin demostración y que puede consultarse en Bretagnolle, Chatterji and Meyer [9] pág. 175.

Teorema 1.7.2 (**Kac.**) *Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independiente si y sólo si*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{n}(u_j, X_j)\right]\right) = \phi_{X_1}(u_1)\cdots\phi_{X_n}(u_n)$$

para toda $u_1, \ldots, u_n$ y donde ϕ_{X_j} es la función característica de la variable aleatoria X_j para toda j.

Entonces se tiene el siguiente teorema

Teorema 1.7.3 *$Z(t)$ es un Proceso de Lévy*

Prueba.- Probaremos que $Z(t)$ cumple con la definicion (1.5.1).
$Z(0) = 0$ es trivial, así que establezcamos primero los incrementos estacionarios
Sea $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ y denotaremos como p_{t_1,t_2} como la distribución conjunta de $T(t_1)$ y $T(t_2)$. Entonces por la independencia de X con T y el hecho de que X tiene incrementos estacionarios por ser proceso de Lévy, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z(t_2) - Z(t_1) \in A) &= \mathbb{P}(X(T(t_2)) - X(T(t_1)) \in A) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X(s_2) - X(s_1) \in A) p_{t_1,t_2}(ds_1, ds_2) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X(s_2 - s_1) \in A) p_{t_1,t_2}(ds_1, ds_2) \\
&= \mathbb{P}\left(X(T(t_2) - T(t_1)) \in A\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X(T(t_2 - t_1)) \in A\right) \\
&= \mathbb{P}(Z(t_2 - t_1) \in A).
\end{aligned}$$

Así, $Z(t)$ tiene incrementos estacionarios.
Para ver los incrementos independientes, sea $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \infty$ y denotemos p_{t_1,t_2,t_3} como la distribución conjunta de $T(t_1), T(t_2), T(t_3)$. Para cualquier $y \in \mathbb{R}^d$ definamos $h_y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ mediante

$$h_y(s) = \mathbb{E}\left(e^{i(y, X(s))}\right).$$

y para cualesquiera $y_1, y_2 \in I\!R^d$ también definamos a la función f_{y_1,y_2} : $I\!R^+ \times I\!R^+ \times I\!R^+ \to \mathbb{C}$ como

$$\begin{aligned} f_{y_1,y_2}(u_1,u_2,u_3) &= I\!E\left(\exp\left[i(y_1, X(u_2) - X(u_1))\right]\right) \\ &\quad \times I\!E\left(\exp\left[i(y_2, X(u_3) - X(u_2))\right]\right). \end{aligned}$$

donde $0 \leq u_1 < u_2 < u_3 < \infty$. ahora condicionando y usando el hecho de que X es independiente de T y que X tiene incrementos independientes, se obtiene

$$\begin{aligned} &I\!E\left(\exp\left[i\{(y_1, Z(t_2) - Z(t_1)) + (y_2, Z(t_3) - Z(t_2))\}\right]\right) \\ &= I\!E\left[f_{y_1,y_2}(T(t_1), T(t_2), T(t_3))\right]. \end{aligned}$$

Ahora, como X tiene incrementos independientes obtenemos

$$f_{y_1,y_2}(u_1,u_2,u_3) = h_{y_1}(u_2 - u_1)h_{y_2}(u_3 - u_2).$$

para cada $0 \leq u_1 < u_2 < u_3 < \infty$, por lo que nos queda, usando los incrementos independientes de T,

$$\begin{aligned} &I\!E\left(\exp\left[i\{(y_1, Z(t_2) - Z(t_1)) + (y_2, Z(t_3) - Z(t_2))\}\right]\right) \\ &= I\!E\left(h_{y_1}(T_2 - T_1)h_{y_2}(T_3 - T_2)\right) \\ &= I\!E\left(h_{y_1}(T_2 - T_1)\right) I\!E\left(h_{y_2}(T_3 - T_2)\right) \\ &= I\!E\left(\exp\left[i(y_1, Z(t_2 - t_1))\right]\right) I\!E\left(\exp\left[i(y_1, Z(t_3 - t_2))\right]\right). \end{aligned}$$

y por el teorema de Kac se tiene que $Z(t_2) - Z(t_1)$ es independiente de $Z(t_3) - Z(t_2)$ y así se tiene que $Z(t)$ tiene incrementos independientes y el inciso (2) de la definición se cumple.

Para probar la continuidad estocástica, como X y T son continuas estocásticamente entonces para cualquier $a \in I\!R^d$ y dado $\epsilon > 0$ entonces podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < h < \delta \Longrightarrow I\!P(|X(h)| > a) < \epsilon/2$ y también podemos encontrar $\delta' > 0$ tal que si $0 < h < \delta' \Longrightarrow I\!P(| T(h) |> \delta) < \epsilon/2$.

Así, para $t \geq 0$ y toda $0 \leq h < \text{mín}\{\delta, \delta'\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
I\!P(|\, Z(h)\,| > a) &= I\!P(|\, X(T(h))\,| > a) \\
&= \int_0^\infty P(|\, X(u)\,| > a) p_{T(h)}(\mathrm{d}u) \\
&= \int_{[0,\delta)} P(|\, X(u)\,| > a) p_{T(h)}(\mathrm{d}u) \\
&\quad + \int_{[\delta,\infty)} P(|\, X(u)\,| > a) p_{T(h)}(\mathrm{d}u) \\
&\leq \sup_{0\leq u<\delta} P(|\, X(u)\,| > a) + I\!P(T(h) \geq \delta) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

■

El **Exponente de Lévy** del proceso subordinado $Z(t)$ queda determinada por la siguiente proposición

Proposición 1.7.3

$$\eta_Z = -\psi_T \circ (-\eta_X).$$

Prueba.- Para cada $u \in I\!R^d$ y $t \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
I\!E(\exp[i\eta_{Z(t)}(u)]) &= I\!E(\exp[i(u, X(T(t)))]) \\
&= \int_0^\infty I\!E(\exp[i(u, X(s))]) p_{T(t)}(\mathrm{d}s) \\
&= \int_0^\infty \exp[-s(-\eta_X(u))] p_{T(t)}(\mathrm{d}s) \\
&= I\!E(\exp[-\eta_X(u)T(t)]) \\
&= e^{-t\psi_T(-\eta_X(u))}.
\end{aligned}$$

■

1.8. Semigrupos en Convolución de Medidas de Probabilidad

En esta sección veremos una importante caracterización de los procesos de Lévy. Sea $(p_t, t \geq 0)$ una familia de medidas de probabilidad en $I\!R^d$ y diremos que es *débilmente convergente* a δ_0 si

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{I\!R^d} f(y) p_t(\mathrm{d}y) = f(0).$$

para toda $f \in C_b(I\!R^d)$, donde $C_b(I\!R^d)$ denota al conjunto de todas las funciones continuas acotadas de $I\!R^d$ a $I\!R$.

Así, se tiene la siguiente proposición

Proposición 1.8.1 *Si X es un proceso estocástico donde $X(t)$ tiene distribución p_t para cada $t \geq 0$ y $X(0) = 0$ c.s. entonces $(p_t, t \geq 0)$ es débilmente convergente a δ_0 si y sólo si X es estocásticamente continua en $t = 0$*

Prueba.-

$(\Longleftarrow$

Suponiendo que X es estocásticamente continua en $t = 0$ y supongamos que $f \in C_b(I\!R^d)$ con $f \neq 0$; entonces dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{x \in B_\delta(0)} \mid f(x) - f(0) \mid \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

y existe $\delta' > 0$ tal que $0 < t < \delta' \Longrightarrow I\!P(|X(t)|) > \epsilon/(4M)$ donde $M = \sup_{x \in I\!R^d} |f(x)|$. Para esta t se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{I\!R^d} [f(x) - f(0)] p_t(\mathrm{d}x) \right| &\leq \int_{I\!R^d} |f(x) - f(0)| \, p_t(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{B_\delta(0)} |f(x) - f(0)| \, p_t(\mathrm{d}x) \\
&\quad + \int_{[B_\delta(0)]^c} |f(x) - f(0)| \, p_t(\mathrm{d}x) \\
&\leq \sup_{x \in B_\delta(0)} |f(x) - f(0)| \\
&\quad + 2M I\!P(X(t) \in [B_\delta(0)]^c) \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

así, queda demostrado que el

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)p_t(\mathrm{d}y) = f(0).$$

y por lo tanto $(p_t, t \geq 0)$ es débilmente convergente.
$(\Longrightarrow$
Suponiendo que $(p_t, t \geq 0)$ es débilmente convergente a δ_0. Sea $r > 0$ fijo y $\epsilon > 0$. Sea $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ con soporte en $B_r(0)$, tal que $0 \leq f \leq 1$ y $f(0) > 1 - (\epsilon/2)$. Ahora, por ser débilmente convergente podemos encontrar $t_0 > 0$ tal que

$$0 \leq t < t_0 \Longrightarrow \left|\int_{\mathbb{R}^d}[f(x) - f(0)]p_t(\mathrm{d}y)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

entonces encontramos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mid X(t)\mid > r) &= 1 - \mathbb{P}(\mid X(t)\mid \leq r)\\
&\leq 1 - \int_{B_r(0)} f(y)p_t(\mathrm{d}y) = 1 - \int_{\mathbb{R}^d} f(y)p_t(\mathrm{d}y)\\
&= 1 - f(0) + \int_{B_r(0)}[f(0) - f(y)]p_t(\mathrm{d}y\\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

entonces X es estocásticamente continua en $t = 0$ y la proposición queda demostrada

■

Una familia de medidas de probabilidad $(p_t, t \geq 0)$ se dice que forma un *semigrupo en convolución* si

$$p_{s+t} = p_s * p_t \qquad \text{para toda} \qquad s, t \geq 0.$$

y se dice que es débilmente continuo si la familia es débilmente convergente.
Si además, la norma de p_t es menor o igual que uno, i.e., $\mid p_t \mid \leq 1$ se dice que es un semigrupo con contracción.

De manera trivial se puede probar que si $X(t)$ es un proceso de Lévy con distribución p_t entonces $(p_t, t \geq 0)$ es un semigrupo en convolución débilmente continuo, esto a partir de la proposición anterior y de la definición de proceso de Lévy.

Capítulo 2

Martingalas y Medidas Aleatorias

En este capitulo se introduce el importante concepto de Martingala y se estudia el tipo de martingala que los procesos de Lévy inducen, además de los resultados más importantes obtenidos con esta definición, también se dedica una parte al estudio de las medidas aleatorias, en particular, la medida aleatoria de Poisson y la integración de Poisson, esto con la finalidad de tratar en el siguiente capítulo la descomposición de Lévy-Itô.

2.1. Modificación de un proceso de Lévy

Sean los dos procesos de Lévy $(X(t), t \geq 0)$ y $(Y(t), t \geq 0)$ definidos en el mismo espacio de probabilidad. Diremos que Y es una *modificación* de X si para cada $t \geq 0$ se tiene que $\mathbb{P}(X(t) \neq Y(t)) = 0$, esto significa que tienen la misma distribución finito-dimensional.

Nota 2.1.1 *La definición anterior se puede hacer también como: Y es modificación de X si $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1$ para cada $t \geq 0$.*

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1.1 *Si X es un proceso de Lévy y Y es una modificación de X entonces Y es un proceso de Lévy con las mismas características de X.*

Para la prueba puede consultarse Applebaum [1], pág. 63.

Es posible dar otra definición que relaciona dos procesos de Lévy mediante la siguiente definición, dos Procesos de Lévy definidos en el mismo espacio de probabilidad son *indistinguibles* si el conjunto $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ es de medida cero o esta contenido en un conjunto de medida cero, en este caso la medida es una medida de probabilidad.

Además, si X y Y son modificaciones entonces existe un conjunto nulo N_t, tal que, si $\omega \notin N_t$, entonces $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ y el conjunto nulo N_t depende sólo de t. Ahora si X y Y son indistinguibles, entonces existe un sólo conjunto nulo N tal que si $\omega \notin N$, entonces $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo t, en otras palabras, las aplicaciones $t \to X_t(\omega)$ y $t \to Y_t(\omega)$ son las mismas para toda $\omega \notin N$, donde $I\!P(N) = 0$, además el conjunto N esta en $\mathcal{F}_t$ (donde $\mathcal{F}_t$ es una filtración la cual se definirá más adelante) para toda t, donde $\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos $I\!P$-nulos de $\mathcal{F}$.

Resulta obvio que si X y Y son indistinguibles, entonces uno es modificación del otro, la reciproca de esta afirmación es falsa.

2.2. Filtraciones y Procesos Adaptados

Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de un conjunto dado Ω. Diremos que una familia de sub-σ-álgebras $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ de $\mathcal{F}$ es una *Filtración* si

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \qquad \textit{cuando} \qquad s \leq t.$$

A $\mathcal{F}_t$ la interpretamos como todos los sucesos, hasta el tiempo t, sobre los cuales podemos decir si han ocurrido o no. Así, es obvio que con el transcurso del tiempo sabemos más, lo que se ve reflejado en la hipótesis de que la familia sea no decreciente.

A un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ que tiene una filtración se le llama *espacio de probabilidad filtrado*. También definimos $\mathcal{F}_\infty = \vee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$.

donde $a \vee b$ es el máximo de a, b. Además si se tiene una familia de σ-álgebras $(\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ tal que $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ para cada $t \geq 0$ a $\mathcal{G}_t$ se le llama *subfiltración* de $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

Definamos entonces un proceso adaptado.

Definición 2.2.1 .

- *Decimos que un proceso estocástico* $X = (X(t), t \geq 0)$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es* **adaptado** *a la filtración* $\mathcal{F}_t$ *(o* $\mathcal{F}_t$*-adaptado) si*

$$X(t) \text{ es } \mathcal{F}_t\text{-medible para cada } t \geq 0.$$

- *La filtración* $(\mathcal{F}_t^X, t \geq 0)$ *definida por*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X(s) : 0 \leq s \leq t\}$$

es la **filtración natural** *de* X *(también llamada la filtración generada por* X*).*

Entonces, por todo lo anterior, es claro que si X es un proceso adaptado entonces se verifica que

$$\mathbb{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_s) = X(s) \qquad \text{c.s. .}$$

Esto se desprende de que $\mathcal{F}_t$ contiene toda la información que nos permite describir el comportamiento de X hasta el tiempo t.

También se puede verificar que si X y Y son dos procesos $\mathcal{F}$-adaptados y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces por la medibilidad de X y Y se tiene que los siguientes son también procesos adaptados.

- $\alpha X + \beta Y = (\alpha X(t) + \beta Y(t), t \geq 0)$.
- $XY = (X(t)Y(t), t \geq 0)$.
- $f(X) = (f(X(t)), t \geq 0)$ donde F es una función Borel medible en $\mathbb{R}^d$.
- $\lim_{n\to\infty} X_n = (\lim_{n\to\infty} X_n(t), t \geq 0)$ donde $(X_n, n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de procesos adaptados que converge puntualmente c.s. para cada $t \geq 0$.

Si $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ es una filtración sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ podemos definir lo siguiente

- $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$.
- Si $\mathcal{F}$ es completa vamos a denotar con $\mathcal{F}_t^*$ a la σ-álgebra más chica que contiene a $\mathcal{F}_t$ y a todos los elementos de $\mathcal{F}$ de medida (o probabilidad) cero.

Si además, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ entonces decimos que la filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ es *continua por la derecha*

Entonces podemos dar la siguiente definición

Definición 2.2.2 *Decimos que una filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ en un espacio de probabilidad completo satisface las* **condiciones usuales** *si :*

(a) *Es continua por la derecha, i.e., $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$.*

(b) *$\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos de medida (o probabilidad) cero, i.e., $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^*$.*

De manera equivalente, se puede decir que la filtración satisface las condiciones usuales si

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t^* \text{ para cada } t \geq 0.$$

Las condiciones usuales son útiles ya que bajo estas condiciones se tendrá que cada martingala tiene una modificación con trayectorias continuas por la derecha con límites por la izquierda, (o càdlàg en francés), este tipo de funciones las veremos en la siguiente sección.

Si se tiene una filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ se puede aumentar un poco, para que cumpla las hipótesis usuales, generalmente este aumento es insignificante, y nos va a permitir, además, que si existe una martingala (o supermartingala o submartingala) continua por la derecha se conserva si pasamos a la filtración aumentada, esto es, se sigue teniendo una martingala (o supermartingala o submartingala), estos conceptos los veremos más adelante.

El aumento de la filtración se muestra en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1 *Sea* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *una filtración en un espacio de probabilidad completo. Entonces la filtración* $(\mathcal{F}^*_{t+}, t \geq 0)$ *satisface las condiciones usuales. Además se tiene que*

$$(\mathcal{F}_{t+})^* = (\mathcal{F}^*_t)_+.$$

La prueba puede consultarse en Bojdecki [7], pág 7. Notemos que "el completar" la filtración y "el tomar el +" (o la continuidad por la derecha) conmutan, lo cual nos dice que no importa que le hagamos primero a la filtración siempre podemos hacerla más grande para poder cumplir con las condiciones usuales, sin que esto afecte de manera significativa.

A $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}^*_{t+}$ le llamaremos la *filtración aumentada*, y si X es un proceso estocástico a $\mathcal{G}^X_t = \mathcal{F}^{X*}_{t+}$ le llamaremos la *filtración natural aumentada.*

2.2.1. Funciones Càdlàg

Sea $I = [a, b]$ un intervalo en $I\!R^+$, la aplicación $f : I \longmapsto I\!R^d$ se dice que es càdlàg, (del francés *continue* àdroit, et limité àgauche) si para toda $t \in (a, b]$ se tiene que f tiene límites por la izquierda en t y f es continua por la derecha, i.e.

- para toda sucesión $(t_n, n \in I\!N)$ en I con cada $t_n < t$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(t_n)$ existe.
- para toda sucesión $(t_n, n \in I\!N)$ en I con cada $t_n \geq t$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t)$.

Claramente toda función continua es càdlàg, sin embargo, existe una amplia gama de otros ejemplos más interesantes, veamos uno muy particular, sea $d = 1$ y tomemos la función indicadora $f(t) = \chi_{[a,b)}(t)$ donde $a < b$. Si f es una función càdlàg denotemos los límites por la izquierda en cada punto $t \in (a, b]$ como $f(t-) = \lim_{s\uparrow t} f(s)$, además denotaremos $f(t-) = f(t)$ si y sólo si f es continua en t. Definamos la *función salto en* t como

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t-).$$

El siguiente resultado es de gran importancia para el cálculo estocástico, pues si se tiene una martingala càdlàg, entonces los puntos de discontinuidad que tiene la martingala es a lo más numerable.

Teorema 2.2.1 *Si f es una función càdlàg y si definimos el conjunto $S = \{t, \Delta f(t) \neq 0\}$, entonces S es a lo más numerable.*

Prueba.- Definamos para $k > 0$

$$S_k = \{t, |\Delta f(t)| > k\}.$$

Supongamos que S_k tiene al menos un punto de acumulación x y elijamos una sucesión $(x_n, n \in I\!N)$ en S_k que converge a x. Sin perdida de generalidad, supongamos que la convergencia es por el lado izquierdo y que la sucesión es no decreciente, esto ya que de cualquier sucesión podemos dar una subsucesión con estas características.

Ahora, para toda $n \in I\!N$ se tiene que $x_n \in S_k$, y como f tiene un límite por la izquierda de x_n se sigue que dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que para toda y, con $y < x_n$ que satisface $x_n - y > \delta$, entonces $f(x_n-) - f(y) = \epsilon_0(y)$ donde $|\epsilon_0(y)|| < \epsilon$.

Fijando $n_0 \in I\!N$ tal que para toda $m > n > n_0, x_m - x_n < \epsilon$, entonces

$$f(x_n) - f(x_m) = f(x_n) - f(x_n-) + f(x_n-) - f(x_m) = k_0 + \epsilon_0(m),$$

donde $\mid k_0 \mid > k$.

Así, es claro que $(f(x_n), n \in I\!N)$ no puede ser de Cauchy, de donde se sigue que f no tiene un límite por la izquierda en x. Por lo que S_k no tiene puntos de acumulación y se tiene entonces que es a lo más numerable.

Y como podemos escribir a S como

$$S = \bigcup_{n \in I\!N} S_{\frac{1}{n}}.$$

Se tiene entonces que S es a lo más numerable.

■

2.3. Martingalas

Sea X un proceso adaptado definido en un espacio de probabilidad filtrado que también satisface el hecho de que $\mathbb{E}(|X(t)|) < \infty$ para toda $t \geq 0$.

Decimos que X es *martingala* si para toda $0 \leq s < t < \infty$ se tiene que

$$\mathbb{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = X(s) \qquad \text{c.s.} \, . \tag{2.1}$$

Nota 2.3.1 *Si X es una martingala entonces la aplicación $t \to \mathbb{E}(X(t))$ es constante.*

La siguiente proposición nos dice como se inducen martingalas usando procesos de Lévy.

Proposición 2.3.1 *Si X es un proceso de Lévy con **Exponente de Lévy** η, entonces para cada $u \in \mathbb{R}^d$, $M_u = (M_u(t), t \geq 0)$ es una martingala compleja con respecto a $(\mathcal{F}_t^X, t \geq 0)$, donde cada*

$$M_u(t) = \exp\left[i(u, X(t)) - t\eta(u)\right].$$

Prueba.- Tenemos que para cada $t \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|M_u(t)|] &= \mathbb{E}[|e^{i(u,X(t))}e^{-t\eta(u)}|] \\
&= \mathbb{E}[| \, e^{i(u,X(t))} \, |]e^{-t\eta(u)} \\
&= \mathbb{E}(1)e^{-t\eta(u)} = e^{-t\eta(u)} < \infty
\end{aligned}$$

ahora para cada $0 \leq s \leq t$, escribamos de manera distinta la definición de $M_u(t)$

$$\begin{aligned}
M_u(t) &= \exp\left[i(u, X(t)) - t\eta(u)\right] \\
&= \exp\left[i(u, X(s)) + i(u, X(t)) - i(u, X(s)) - t\eta(u)\right] \\
&= \exp\left[i(u, X(s)) + i(u, X(t) - X(s)) - t\eta(u)\right] \\
&= \exp\left[i(u, X(s) - s\eta(u)) + i(u, X(t) - X(s) - t\eta(u) + s\eta(u))\right] \\
&= \exp\left[i(u, X(s)) - s\eta(u)\right] \exp\left[i(u, X(t) - X(s)) - (t-s)\eta(u)\right] \\
&= M_u(s) \exp\left[i(u, X(t) - X(s)) - (t-s)\eta(u)\right]
\end{aligned}$$

entonces por el inciso **(2)** de la definición 1.5.1 de Proceso de Lévy y por el teorema 1.5.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_u(t) \mid \mathcal{F}_s^X) &= M_u(s)\mathbb{E}\left(\exp\left[i(u, X(t-s))\right]\right)\exp\left[-(t-s)\eta(u)\right] \\ &= M_u(s)\exp\left[(t-s)\eta(u)\right]\exp\left[-(t-s)\eta(u)\right] \\ &= M_u(s). \end{aligned}$$

Así, se tiene que $(M_u(t), t \geq 0)$ es una martingala compleja.

■

Algunos ejemplos de martingalas son:

1. $C(t) = \sigma B(t)$ donde $B(t)$ es un M.B. estándar y σ es una matriz de $r \times d$.
2. $\mid C(t) \mid^2 - tr(A)t$ donde $A = \sigma^T\sigma$.
3. $\exp\left[(u, C(t)) - \frac{1}{2}(u, Au)\right]$ donde $u \in \mathbb{R}^d$.
4. $\tilde{\mathrm{N}}(\mathrm{t})$ donde $\tilde{\mathrm{N}}$ es el proceso de Poisson compensado con intensidad λ de la subsección **1.6.2**.
5. $\tilde{N}^2(t) - \lambda t$.
6. $(\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_t), t \geq 0)$ donde Y es cualquier variable aleatoria en un espacio de probabilidad filtrado para el cual $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$.

Cuando se tienen martingalas de la forma (6) se les llama *cerradas o regulares.* A las martingalas que tiene media cero se les llama *centradas.* También se dice que son *continuas* si sus trayectorias son continuas.

Una martingala $(M(t), t \geq 0)$ es L^2 *o cuadrado integrable* (resp. *acotada en media cuadrática*) si :

$$\mathbb{E}\left[|M(t)|^2\right] < \infty \qquad \text{para toda} \quad t \geq 0.$$

(Resp.

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}\left[|M(t)|^2\right] < \infty).$$

Demos una extensión del concepto de Martingala.
Un proceso adaptado X para el cual se tiene que $\mathbb{E}\left[|X(t)|\right] < \infty$ para

toda $t \geq 0$, se dice que es una *submartingala* si para toda $0 \leq s < t < \infty$ y $1 \leq i \leq d$

$$\mathbb{E}(X_i(t)|\mathcal{F}_s) \geq X_i(s) \qquad \text{c.s.}$$

y decimos que es *supermartingala* si para toda $0 \leq s < t < \infty$ y $1 \leq i \leq d$

$$\mathbb{E}(X_i(t)|\mathcal{F}_s) \leq X_i(s) \qquad \text{c.s.}.$$

Existe una generalización más fuerte del concepto de martingala, que es una clase de procesos llamados *Cuasimartingalas* que contiene a martingalas, supermartingalas y submartingalas, que además es una clase cerrada, para su estudio puede consultarse Tomasz Bojdecki [7] y también a Michel Métivier [25].

Una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es *convexa* si para cada $x, y \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \theta \leq 1$ se tiene que

$$\varphi(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta\varphi(x) + (1-\theta)\varphi(y).$$

Se tiene la siguiente desigualdad

Proposición 2.3.2 Desigualdad de Jensen. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y X una v.a. $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}\left[|X(t)|\right] < \infty$ y que $\mathbb{E}\left[|f(X(t))|\right] < \infty$ entonces*

$$f\left(\mathbb{E}\left[X(t)|\mathcal{K}\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[f(X(t))|\mathcal{K}\right].$$

Donde $\mathcal{K}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$.
En particular, si $f(x) = |x|^p$ para alguna $p \geq 1$, se obtiene la desigualdad

$$|\mathbb{E}\left[X(t)|\mathcal{K}\right]|^p \leq \mathbb{E}\left[|X(t)|^p|\mathcal{K}\right].$$

Una prueba de esta proposición se puede encontrar en Shiryaev [32] pág. 192. Usando el resultado anterior podemos probar la siguiente proposición,

Proposición 2.3.3 *Sea $(X(t), t \geq 0)$ una submartingala de un espacio de probabilidad filtrado a $\mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación convexa no decreciente de tal manera que $\mathbb{E}\left[|f(X(t))|\right] < \infty$ para cada $t \geq 0$. entonces el proceso $(f[X(t)], t \geq 0)$ es una submartingala.*

En particular, el proceso $(|X(t)|^p, t \geq 0)$, para $p \geq 1$ es submartingala.

Prueba.- Sea $s < t$, es claro que $f(X(t))$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $t \geq 0$. por hipótesis se tiene que

$$X(s) \leq I\!E[X(t)|\mathcal{F}_s]$$

y como f es no decreciente se tiene entonces

$$f[X(s)] \leq f[I\!E(X(t)|\mathcal{F}_s)]$$

y usando la desigualdad de Jensen se tiene

$$f[X(s)] \leq f[I\!E(X(t)|\mathcal{F}_s)] \leq Es[f(X(t))|\mathcal{F}_s].$$

De donde se tiene que $(f[X(t)], t \geq 0)$ es una submartingala.

■

Tenemos ahora la desigualdad para submartingalas de Doob,

Teorema 2.3.1 - Desigualdad de Doob. *Si $(X(t), t \geq 0)$ es una submartingala positiva entonces para toda $p \geq 1$ se tiene*

$$I\!E\left(\sup_{0\leq s\leq t}[X(s)]^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p I\!E([X(t)]^p).$$

Para la prueba en el caso discreto puede consultarse Roger and Williams [29] pág. 143 y para el caso continuo Dellacherie y Meyer [11] dan una prueba en la pág. 18, otra prueba puede encontrarse en Revuz y Yor [28], sección 2.1.

También notemos que si $X = (X(t), t \geq 0)$ es una martingala que toma valores en $I\!R^d$, entonces el componente i-ésimo $(X_i^2(t), t \geq 0)$ es una submartingala en los reales para cada $1 \leq i \leq d$ y entonces por la desigualdad de Doob, se tiene que para cada $t \geq 0$

$$\begin{aligned} I\!E\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X(s)|^2\right) &\leq \sum_{i=1}^{d} I\!E\left(\sup_{0\leq s\leq t}X_i^2(s)\right) \leq \sum_{i=1}^{d} q^2 I\!E(X_i^2(t)) \\ &= q^2 I\!E(|X(t)|^2) \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Si bien la siguiente propiedad ya la habíamos establecido, no con la formalidad de un resultado, así pues se tiene el siguiente teorema

Teorema 2.3.2 *Sea $M = (M(t), t \geq 0)$ una submartingala entonces*

1. *Para todo subconjunto denso numerable D de $\mathbb{R}^+$, los siguientes límites por la izquierda y por la derecha existen y son finitos c.s. para cada $t \geq 0$*

$$M(t-) = \lim_{s \in D, s \uparrow t} M(s)$$
$$M(t+) = \lim_{s \in D, s \downarrow t} M(s).$$

2. *Si la filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ satisface las condiciones usuales y si la aplicación $t \to \mathbb{E}(M(t))$ es continua por la izquierda, entonces M tiene una modificación que es* càdlàg.

La prueba de este resultado se puede encontrar en Delacherrie and Meyer [11] pág. 76-76. y en Revuz and Yor [28] pág. 63-65.

El siguiente resultado asegura la existencia de una modificación de un proceso de Lévy que además es càdlàg, para probarlo necesitamos antes un lema.

Lema 2.3.1 *Sea $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales tal que e^{iux_n} converge cuando $n \to \infty$ para todo $u \in \mathbb{R}$ entonces x_n converge a un límite finito.*

Prueba.- Para probar este lema utilizaremos el criterio de Cauchy : x_n converge si para toda sucesiones crecientes de números reales n_k y m_k el límite $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - x_{m_k}) = 0$.

Para esto definamos U una v.a. con distribución uniforme sobre $[0, 1]$. Ahora para todo $t \in \mathbb{R}$ por hipótesis se tiene que con probabilidad 1 $\exp(itUx_{n_k})$ y $\exp(itUx_{m_k})$ convergen al mismo límite. por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} e^{itU(x_{n_k} - x_{m_k})} = 1 \qquad \text{c.s.}$$

por lo tanto al tomar la esperanza, se obtiene que las características convergen,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{e^{it(x_{n_k} - x_{m_k})U}\} = 1$$

para toda $t \in \mathbb{R}$, de donde se tiene que $(x_{n_k} - x_{m_k})U$ converge a 0 en L^1 entonces converge a 0 en probabilidad , por lo que el $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} - x_{m_k} = 0$ como se quería, así x_n converge a un límite finito.

■

Teorema 2.3.3 *Cada Proceso de Lévy tiene una modificación* càdlàg *que es a su vez un proceso de Lévy.*

Prueba.- Sea X un proceso de Lévy adaptado con su filtración natural aumentada. Ahora, para cada $u \in \mathbb{R}^d$ y recordemos la definición M_u de la proposición 2.3.1, sea D un subconjunto denso y contable de $\mathbb{R}^+$, y del teorema 2.3.2 inciso (1), se tiene que para cada $t \geq 0$ los límites $M_u(t-)$ y $M_u(t+)$ existen sobre D c.s.,

Definamos ahora para cada $u \in \mathbb{R}^d$ a Θ_u un subconjunto de Ω para el cual estos límites no existen, y definamos también a $\Theta = \cup_{u \in \mathbb{Q}^d} \Theta_u$ el cual es también un conjunto de $\mathbb{P}$-medida cero.

De esta manera, para $\omega \in \Theta^c$ fijo y para cada $t \geq 0$ definamos $(s_n, n \in \mathbb{N})$ una sucesión sobre D creciente a t. Y sean $x^1(t)(\omega)$ y $x^2(t)(\omega)$ dos puntos de acumulación del conjunto $\{X(s_n)(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ que corresponden a los límites de las subsucesiones $(s_{n_i}, n_i \in \mathbb{N})$ y $(s_{n_j}, n_j \in \mathbb{N})$ respectivamente. y se deduce de la existencia de $M(t-)$ que el límite $\lim_{s_n \uparrow t} \exp[i(u, X(s_n)(\omega))]$ existe y por el lema 2.3.1 entonces $x^1(t)(\omega)$ y $x^2(t)(\omega)$ son finitos.

Ahora eligiendo $u \in \mathbb{Q}^d$ tal que $(u, x_t^1(\omega) - x_t^2(\omega)) \neq 2n\pi$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. y por la continuidad se tiene que

$$\lim_{s_{n_i} \uparrow t} e^{i(u, X(s_{n_i})(\omega))} = e^{i(u, x_t^1(\omega))} \qquad \text{y} \qquad \lim_{s_{n_j} \uparrow t} e^{i(u, X(s_{n_j})(\omega))} = e^{i(u, x_t^2(\omega))}$$

y entonces se obtiene una contradicción pues X tiene un único límite por la derecha sobre D, para cada $t \geq 0$ en Θ^c.

Un argumento parecido se puede utilizar para los límites por la izquierda en Θ^c. De donde se puede ver que el proceso Y es càdlàg, donde se define Y para $t \geq 0$ como

$$Y(t)(\omega) = \begin{cases} \lim_{s \in D, s \downarrow t} X(s)(\omega), & \text{si} \quad \omega \in \Theta^c, \\ 0 \quad , & \text{si} \quad \omega \in \Theta. \end{cases}$$

Ahora para poder ver que Y es modificación de X se tiene que para cada $t \geq 0$ y por el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$I\!E(e^{i(u,Y(t)-X(t))}) = \lim_{s \in D, s \downarrow t} I\!E(e^{i(u,X(s)-X(t))}) = 1$$

esto por las propiedades de un proceso de Lévy y por el lema 1.5.1 de la página 17.

Se obtiene entonces que

$$I\!P(\{\omega, Y(t)(\omega) = X(t)(\omega)\}) = 1$$

por lo que usando la proposición 2.1.1 de la página 39 se concluye que Y es un proceso de Lévy.

Así hemos mostrado una modificación de un proceso de Lévy que además es càdlàg y proceso de Lévy a su vez.

■

El resultado siguiente es un caso particular de la Prop. 2.2.1 aunque aquí sólo se hace para la continuidad por la derecha.

Proposición 2.3.4 *Si X es un proceso de Lévy con trayectorias* càdlàg *entonces su filtración natural aumentada es continua por la derecha.*

Prueba.- Por conveniencia escribamos $\mathcal{G}^X = \mathcal{G}$ y para probar el resultado basta probar que $\mathcal{G}_t = \bigcap_{n \in I\!N} \mathcal{G}_{t+\frac{1}{n}}$ para cada $t \geq 0$, entonces el límite cuando $\omega \downarrow t$ de $\mathcal{G}_\omega$ se puede sustituir por el límite cuando $n \to \infty$. Ahora, para $t, s_1, \ldots, s_m \geq 0$ fijos y $u_1, \ldots, u_m \in I\!R^d$ establezcamos primero el siguiente hecho

$$I\!E\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{m}(u_j, X(s_j))\right] \mid \mathcal{G}_t\right) = I\!E\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{m}(u_j, X(s_j))\right] \mid \mathcal{G}_{t+}\right) \tag{2.2}$$

ahora se tiene que la ecuación (2.2) se cumple de manera obvia si $\text{máx}_{1 \leq j \leq m} s_j \leq t$ y probaremos entonces el resultado para $\text{mín}_{1 \leq j \leq m} s_j > t$ con lo que se cubren todos los casos posibles, para hacer esto recordemos la definición de $M_u(t)$ de la proposición (2.3.1), así

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\exp\{i[(u_1, X(s_1)) + (u_2, X(s_2))]\} \mid \mathcal{G}_{t+}\right)\\
&= \lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i[(u_1, X(s_1)) + (u_2, X(s_2))]\} \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{s_2\eta(u_2) + i(u_1, X(s_1)) + i(u_2, X(s_2)) - s_2\eta(u_2)\} \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{s_2\eta(u_2) + i(u_1, X(s_1))\}\exp\{i(u_2, X(s_2)) - s_2\eta(u_2)\} \mid \mathcal{G}_\omega\right.\\
&= \lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{s_2\eta(u_2)\}\exp\{i(u_1, X(s_1))\}M_{u_2}(s_2) \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \exp\{s_2\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1, X(s_1))\}M_{u_2}(s_2) \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \exp\{i(u_1, X(s_1))\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1, X(s_1))\}\mathbb{E}[M_{u_2}(s_2) \mid \mathcal{G}_\omega] \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \exp\{s_2\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1, X(s_1))\}M_{u_2}(s_1) \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \exp\{s_2\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1, X(s_1))\}M_{u_2}(\omega)\right.\\
&\qquad \left.\exp\{i(u_2, X(s_1) - X(\omega)) - (s_1 - \omega)\eta(u_2)\} \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \exp\{s_2\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1 + u_2, X(s_1))\}M_{u_2}(\omega)\right.\\
&\qquad \left.\exp\{-i(u_2, X(\omega)) - s_1\eta(u_2) + \omega\eta(u_2)\} \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \exp\{s_2\eta(u_2) - s_1\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} M_{u_2}(\omega)\exp\{-i(u_2, X(\omega)) + \omega\eta(u_2)\}\\
&\qquad \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1 + u_2, X(s_1))\} \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \exp\{(s_2 - s_1)\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1 + u_2, X(s_1))\} \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \exp\{(s_2 - s_1)\eta(u_2) + s_1\eta(u_1 + u_2)\}\\
&\qquad \lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1 + u_2, X(s_1)) - s_1\eta(u_1 + u_2)\} \mid \mathcal{G}_\omega\right)\\
&= \exp\{(s_2 - s_1)\eta(u_2) + s_1\eta(u_1 + u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}(M_{u_1+u_2}(s_1) \mid \mathcal{G}_\omega)\\
&= \exp\{(s_2 - s_1)\eta(u_2) + s_1\eta(u_1 + u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} M_{u_1+u_2}(\omega)\\
&= \lim_{\omega\downarrow t} \exp[i(u_1 + u_2, X(\omega))]\\
&\qquad \exp\left[(s_2 - s_1)\eta(u_2) + (s_1 - \omega)\eta(u_1 + u_2)\right] \quad \text{por ser } X \text{ càdlàg } \Longrightarrow\\
&= \exp[i(u_1 + u_2, X(t))]\exp\left[(s_2 - s_1)\eta(u_2) + (s_1 - t)\eta(u_1 + u_2)\right]\\
&= \mathbb{E}(\exp\{i[(u_1, X(s_1)) + (u_2, X(s_2))]\} \mid \mathcal{G}_t).
\end{aligned}
$$

Ahora, definamos $X^{(m)} = (X(s_1), \ldots, X(s_m))$ y como existe una correspondencia uno a uno entre las funciones características y las medidas de probabilidad se obtiene que

$$\mathbb{P}(X^{(m)} \mid \mathcal{G}_{t+}) = \mathbb{P}(X^{(m)} \mid \mathcal{G}_t) \quad \text{c.s.}$$

y entonces para toda $g : \mathbb{R}^{dm} \to \mathbb{R}$ tal que que

$$\mathbb{E}(|g(X(s_1), \ldots, X(s_m))|) < \infty.$$

Se tiene que

$$\mathbb{E}\left(g(X(s_1), \ldots, X(s_m))|\mathcal{G}_{t+}\right) = \mathbb{E}\left(g(X(s_1), \ldots, X(s_m))|\mathcal{G}_t\right)$$

En particular, al hacer variar a t, m y $s_1, \ldots, s_m$ podemos deducir

$$\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}_{t+}) = \mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}_t)$$

para todo $A \in \mathcal{G}_\infty$. Ahora suponiendo que $A \in \mathcal{G}_{t+}$, y así finalmente se tiene que

$$\chi_A = \mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}_{t+}) = \mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(\chi_A \mid \mathcal{G}_t) \quad \text{c.s.}$$

por lo tanto, como $\mathcal{G}_t$ es una filtración aumentada, de donde se deduce que $\mathcal{G}_{t+} \subseteq \mathcal{G}_t$ y así se obtiene el resultado.

■

Otra propiedad que se tiene con las condiciones usuales es el hecho de que $X(t) - X(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ para todo s, t tal que $0 \leq s < t < \infty$.

Decimos que $\|\cdot\|$ es una seminorma si para toda $x_1, x_2 \in X$ con X un espacio lineal (real o complejo) la función $\|\cdot\|$ es tal que

- $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ con α un escalar.

Un hecho importante es que si denotamos como $\mathcal{M}$ al espacio lineal de las clases de equivalencia de las L^2-martingalas (o cuadrado integrables) $\mathcal{F}_t$ adaptadas y definimos ademas una seminorma $(\|\cdot\|_t, t \geq 0)$ mediante

$$\|M\|_t = \mathbb{E}(|M(t)|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces se tiene que $\mathcal{M}$ es un espacio localmente convexo con la topología inducida por esta seminorma. llamamos a $\mathcal{M}$ un espacio de martingalas, y se puede probar que $\mathcal{M}$ es un espacio completo.

2.4. Tiempos de Paro

Definimos un *Tiempo de paro* como una variable aleatoria $T : \Omega \to [0, \infty]$ para la cual el evento $(T \leq t) \in \mathcal{F}_t$ para cada $t \geq 0$.

Un ejemplo interesante de tiempo de paro es la primera visita (o entrada) del proceso X en el conjunto A como la función $T_A : \Omega \to \overline{I\!R}^+$ definida por

$$T_A = \inf \{t \geq 0 : X(t) \in A\}$$

y usando la convención adicional $\inf \{\emptyset\} = \infty$ se tiene entonces que T_A esta bien definido.

Así, si se tiene un proceso adaptado X y un tiempo de paro T con respecto a la misma filtración entonces la variable aleatoria $X(T)$ se define mediante

$$X(T)(\omega) = X(T(\omega))(\omega)$$

con la convención adicional $X(\infty)(\omega) = \lim_{t\to\infty} X(t)(\omega)$ si el límite existe con probabilidad 1 y $X(\infty)(\omega) = 0$ en otro caso.

Además, para cada tiempo de paro S podemos asociar las σ-álgebras $\mathcal{F}_S$ y $\mathcal{F}_{S+}$ definidas por

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \bigcap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}$$

y

$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \bigcap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}$$

algunas de las propiedades más importantes de los tiempos de paro están incluidas en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1

- *Si S, T son tiempos de paro, entonces $S \vee T$ y $S \wedge T$ son tiempos de paro.*
- *Si S, T son tiempos de paro y $A \in \mathcal{F}_S$ entonces $A \bigcap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T \bigcap \mathcal{F}_S$. En particular si $S < T$ entonces $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*
- *Si $\{S_n\}_{n\geq 1}$ son tiempos de paro entonces $\sup_{n>1} S_n$ es tiempo de paro y también $\inf_{n\geq 1} S_n$ es $\mathcal{F}_{t+}$-tiempo de paro.*
- *Si S es tiempo de paro y T es una función $\mathcal{F}_S$-medible tal que $T \geq S$ entonces T es tiempo de paro. En particular la suma de dos tiempos de paro es también un tiempo de paro.*

- *Si S es tiempo de paro entonces existe una sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ de tiempos de paro con valores en $D_n = \{\frac{k}{2^n}; k = 0, 1, \ldots, \infty\}$ (es decir, S_n son tiempos de paro discretos) tal que $S_n \to S$.*
- *Si S, T son tiempos de paro entonces $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \bigcap \mathcal{F}_T$.*
- *Si S es tiempo de paro y $A \in \mathcal{F}_S$ entonces la función $S_A : \Omega \to \bar{I\!R}^+$ definida por*

$$S_A(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & \text{si} \quad \omega \in A, \\ \infty & \text{si} \quad \omega \in A^c \end{cases}$$

es un tiempo de paro.

Para la prueba puede consultarse Tudor [30] pág. 16. Ahora notemos que el ultimo inciso de la proposición anterior nos remite a la definición de *subordinador muerto* definido en la página 33 con lo que se tiene que el tiempo de paro definido de esta manera es un proceso de Lévy de dimensión 1.

El siguiente teorema nos da las hipótesis necesarias para que se pueda extender la relación (2.1) de la página 45 a tiempos de paro.

Teorema 2.4.1 Desigualdad de Doob para tiempos de paro. *Si X es una martingala càdlàg y S, Tson tiempos de paro finitos tal que $S \leq T$ c.s. entonces $X(S)$ y $X(T)$ son integrables con*

$$I\!E(X(T)|\mathcal{F}_S) = X(S) \quad \text{c.s.}.$$

la prueba de este teorema se puede encontrar en Revuz y Yor [28], sección 2.3. Una forma alternativa de este teorema, en la que se incluye la parte de submartingalas y supermartingalas lo da Tudor [30] en la pág. 53., además de un teorema para tiempos no finitos que presenta en la pág. 56.

El siguiente teorema nos dice que los tiempos de paro pueden ser vistos como procesos de Lévy.

Teorema 2.4.2 *Sea $B = (B(t), t \geq 0)$ un Movimiento Browniano estándar de dimensión 1, y definamos para cada $t \geq 0$*

$$T(t) = \text{ínf}\left\{ s > 0; B(s) = \frac{t}{\sqrt{2}} \right\}$$

entonces $T = (T(t), t \geq 0)$ es el subordinador de Lévy.

Prueba.- Claramente $T(t)$ es un tiempo de paro, ahora como para cada $\theta \in I\!R$ el proceso definido por $M_\theta(t) = \exp[(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t]$ es una martingala continua con respecto a la filtración natural aumentada para el Movimiento Browniano. Y usando el teorema 2.4.1 se tiene que si $t \geq 0, n \in I\!N, \theta \geq 0$ entonces

$$1 = I\!E(\exp[\theta B(T(t) \wedge n) - \frac{1}{2}\theta^2(T(t) \wedge n)]).$$

Ahora, para cada $n \in I\!N, t \geq 0$ definamos $A_{n,t} = \{\omega \in \Omega; T(\omega) \leq n\}$, entonces

$$\begin{aligned} &I\!E(\exp[(T(t) \wedge n) - \frac{1}{2}\theta^2(T(t) \wedge n)]) \\ &\quad = I\!E\left(\exp\{\theta B(T(t) \wedge n) - \frac{1}{2}\theta^2 T(t)\}\chi_{A_{n,t}}\right) \\ &\quad + \exp(-\frac{1}{2}\theta^2 n) I\!E(\exp[\theta B(n)]\chi_{A^c_{n,t}}). \end{aligned}$$

Pero, como para cada $\omega \in \Omega$, $T(t)(\omega) > n \Longrightarrow B(n) > \frac{t}{\sqrt{2}}$ entonces

$$\begin{aligned} &\exp(-\frac{1}{2}\theta^2 n) I\!E(e^{\theta B(n)}\chi_{A^c_{n,t}}) \\ &\quad < \exp\left[-\frac{1}{2}\theta^2 n + (\frac{t\theta}{\sqrt{2}})\right] \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

En el último paso se ha usado el teorema de la convergencia monótona, así obtenemos

$$1 = I\!E\left(\exp[\theta B(T(t)) - \frac{1}{2}\theta^2 T(t)]\right) = \exp(\frac{\theta t}{\sqrt{2}}) I\!E\left(\exp[-\frac{1}{2}\theta^2 T(t)]\right).$$

De donde al sustituir $\theta = \sqrt{2u}$ se obtiene

$$I\!E(\exp[-uT(t)]) = \exp(-t\sqrt{u}).$$

Entonces T es el subordinador de Lévy.

■

Al siguiente resultado se le conoce como la propiedad fuerte de Markov, y aunque hay versiones particulares para el Movimiento Browniano y para el proceso de poisson, en este caso esta enunciado para procesos de Lévy, que es más general.

Teorema 2.4.3 *Si X es un proceso de Lévy y T es un tiempo de paro finito c.s., entonces sobre $(T < \infty)$ se define el proceso*

$$X_T(t) = X(T + t) - X(T)$$

y se tiene entonces que

1. *X_T es un proceso de Lévy que es, además, independiente de $\mathcal{F}_T$.*
2. *para cada $t \geq 0$, $X_T(t)$ tiene la misma distribución que $X(t)$.*
3. *X_T es* càdlàg y es un proceso $\mathcal{F}_{T+t}$-adaptado.

la prueba de este resultado se puede consultar en Protter [27], pág. 23. además de una forma alternativa que Tudor [30] presenta en la página 424.

ahora recordando la definición del proceso salto definido en la subsección 2.2.1

$$\Delta X(t) = X(t) - X(t-)$$

para $t \geq 0$ y donde $X(t-)$ denota el límite por la izquierda en t.

El siguiente resultado lo ocuparemos más adelante,

Teorema 2.4.4 *Si N es un proceso de Lévy que es no decreciente c.s. y es tal que el proceso $\Delta N(t)$ toma valores en el conjunto $\{0, 1\}$ entonces N es un proceso poisson.*

Prueba.- Definamos una sucesión de tiempos de paro recursivamente mediante $T_0 = 0$ y $T_n = \text{ínf}\,\{t > T_{n-1}; (N(t) - N(T_{n-1})) \neq 0\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Y del teorema 2.4.3 se sigue que la sucesión $(T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}, \ldots)$ es i.i.d. esto por ser T un subordinador de Lévy de donde se tiene que T es un proceso de Lévy.

Ahora, por la propiedad (2) de los procesos de Lévy se tiene que para cada $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > s + t) &= \mathbb{P}\left(N(s) = 0, N(s + t) - N(s) = 0\right) \\ &= \mathbb{P}(T_1 > s)\mathbb{P}(T_1 > t). \end{aligned}$$

Ahora del hecho que N es no decreciente c.s. se sigue que la función $t \to I\!P(T_1 > t)$ es no decreciente y por la propiedad (3) de la definición de proceso de Lévy se tiene que la función $t \to I\!P(T_1 > t)$ es continua en $t = 0$. de esta manera, la solución a la ecuación descrita arriba es continua en todos lados, y usando la propiedad descrita en Bignham, Goldie and Teugels [6], págs. 4-6, se tiene que existe $\lambda > 0$ tal que $I\!P(T_1 > t) = e^{-\lambda t}$ para cada $t \geq 0$. Entonces T_1 tiene una distribución exponencial con parámetro λ y

$$I\!P(N(t) = 0) = I\!P(T_1 > t) = e^{-\lambda t}$$

para cada $t \geq 0$.

Ahora, supongamos que lo anterior es nuestra primera hipótesis de inducción y asumiendo que

$$I\!P(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

se cumple, entonces

$$\begin{aligned} I\!P(N(t) = n+1) &= I\!P(T_{n+2} > t, T_{n+1} \leq t) \\ &= I\!P(T_{n+2} > t) - I\!P(T_{n+1} > t) \end{aligned}$$

pero como

$$T_{n+1} = T_1 + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_{n+1} - T_n)$$

es la suma de $n+1$ variables aleatorias exponenciales i.i.d., entonces se tiene una distribución Gamma con densidad

$$f_{T_{n+1}}(s) = e^{-\lambda s}\frac{\lambda^{n+1}s^n}{n!} \quad \text{para cada } s > 0$$

y como se tiene que si una v.a. X tiene distribución Gamma con parámetros $n \in I\!N$ y $\lambda > 0$ tal que la función de densidad esta dada por

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$$

para cada $x > 0$ entonces X tiene una raíz n-esima, en términos de la convolución, dada por la distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$ y función de densidad

$$f_X^{1/n}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

de donde se sigue el resultado.

■

2.5. Medidas Aleatorias Poisson

Sea $(S, \mathcal{A})$ un espacio medible y $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espacio de probabilidad. Una medida aleatoria M sobre $(S, \mathcal{A})$ es una colección de variables aleatorias $(M(B), B \in \mathcal{A})$ tal que

1. $M(\emptyset) = 0$.
2. Dada una sucesión $(A_n, n \in I\!N)$ de conjuntos disjuntos dos a dos en $\mathcal{A}$ se tiene que
$$M\left(\bigcup_{n\in I\!N} A_n\right) = \sum_{n\in I\!N} M(A_n) \quad \text{c.s..}$$
3. Para cada familia disjunta $(B_1, \ldots, B_n)$ en $\mathcal{A}$, las variables aleatorias $M(B_1), \ldots, M(B_n)$ son independientes.

Y diremos que una medida aleatoria es una medida de Poisson si cada $M(B)$ se distribuye poisson siempre que $M(B) < \infty$. Es de interés particular, cuando se obtiene una medida σ-finita λ sobre $(S, \mathcal{A})$ mediante la utilización de la esperanza $\lambda(A) = I\!E(M(A))$ para toda $A \in \mathcal{A}$. El inverso de lo anterior se muestra en el siguiente teorema, antes necesitamos un resultado previo.

Teorema 2.5.1 *Sea $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, I\!P_n)$ una colección de espacios de probabilidad para $n = 1, 2, \ldots$, y sea $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots$, y sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra generada por la colección de conjuntos*

$$C = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_k \in A_k \quad para\ k = 1, \ldots, n\} \tag{2.3}$$

sobre toda n y toda $A_k \in \mathcal{F}_k$ para $k = 1, \ldots, n$. entonces existe una única medida de probabilidad $I\!P$ sobre $\mathcal{F}$ tal que

$$I\!P(C) = I\!P_1(A_1) \cdots I\!P_n(A_n)$$

para cada C de la expresión (2.3)

Este teorema es un caso especial del teorema de extensión de Kolmogorov y la prueba se puede encontrar en Shiryaev [32], pág. 167, asi se tiene el teorema siguiente

Teorema 2.5.2 *Dada una medida σ-finita λ sobre un espacio medible $(S, \mathcal{A})$, Existe una medida aleatoria Poisson M sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $\lambda(A) = \mathbb{E}(M(A))$ para toda $A \in \mathcal{A}$.*

Prueba.- Para probar este resultado primero supongamos que $\lambda(\Omega) < \infty$, y si se tiene el caso en que $\lambda = 0$ escogiendo $M(A)$ idénticamente cero se tiene probado el teorema, para la prueba cuando $\lambda(\Omega) = \infty$ consultese Sato [31] pág. 122.

Supongamos que $\lambda(A) > 0$. Ahora, en algún espacio de probabilidad $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)$, utilizando el lema anterior, podemos construir una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre Ω, $\{Z_n : n = 1, 2, \ldots\}$ con distribución $\lambda(A)^{-1}\lambda$ y una variable aleatoria Poisson Y con media $\lambda(A)$ tal que Y es independiente de las $\{Z_n\}$. Definamos $M(A) = 0$ si $Y = 0$, y

$$M(A) = \sum_{j=1}^{Y} \mathbb{1}_A(Z_j)$$

si $Y \geq 1$. Entonces claramente $M(A)$ satisface (3) de la definición de medida aleatoria. Sea $k \geq 2$. Sea $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$ disjuntos tal que $\bigcup_{j=1}^{k} A_j = \Omega$ y haciendo $n_1 + \cdots + n_k = n$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[M(A_1) = n_1, \ldots, M(A_k) = n_k] = \\
&\quad = \mathbb{P}\left[M(A_1) = n_1, \ldots, M(A_k) = n_k | M(\Omega) = n\right] \mathbb{P}[M(\Omega) = n] \\
&\quad = \mathbb{P}\left[\sum_{j=1}^{Y} \mathbb{1}_{A_1}(Z_j) = n_1, \ldots, \sum_{j=1}^{Y} \mathbb{1}_{A_k}(Z_j) = n_k\right] \mathbb{P}[Y = n].
\end{aligned}$$

De donde tenemos una distribución multinomial y una Poisson. entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[M(A_1) = n_1, \ldots, M(A_k) = n_k] = \\
&\quad = \frac{n!}{(n_1!) \cdots (n_k!)} \left(\frac{\lambda(A_1)}{\lambda(\Omega)}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{\lambda(A_k)}{\lambda(\Omega)}\right)^{n_k} e^{\lambda(\Omega)} \frac{\lambda(\Omega)^n}{n!} \\
&\quad = \prod_{j=1}^{k} e^{-\lambda(A_j)} \frac{\lambda(A_j)^{n_j}}{n_j!}.
\end{aligned}$$

Encontrando la distribución marginal de n_j se tiene

$$I\!P\left[M(A_j) = n_j\right] = e^{\lambda(A_j)} \frac{\lambda(A_j)^{n_j}}{n_j!}.$$

Así, se puede ver que se satisfacen las propiedades (1) (2) y (3) de la definición de medidas aleatorias.

■

Tenemos un resultado que se refiere a los saltos de los procesos de Lévy.

Teorema 2.5.3 *Si X es un proceso de Lévy, entonces, para t fijo se tiene que $\Delta X(t) = 0$ c.s.*

Prueba.- Sea $(t(n), n \in I\!N)$ una sucesión en $I\!R^+$ con $t(n) \uparrow t$ cuando $n \to \infty$, entonces como X tiene trayectorias càdlàg se tiene que $\lim_{n\to\infty} X(t(n)) = X(t-)$ y por la propiedad (3) de los procesos de Lévy la sucesión $(X(t(n)), n \in I\!N)$ converge en probabilidad a $X(t)$ de donde se sigue que tiene una subsucesion que converge c.s. a $X(t)$ y por la unicidad de los límites se tiene el resultado.

■

Unos de los problemas principales de trabajar con procesos de Lévy es que puede presentarse el hecho que

$$\sum_{0 \le s \le t} |\Delta X(s)| = \infty \qquad \text{c.s.}$$

y una de las maneras en que se busca superar esta dificultad es usando la condición que siempre tenemos o buscamos tener

$$\sum_{0 \le s \le t} |\Delta X(s)|^2 < \infty \qquad \text{c.s.}.$$

Definamos, para $0 \le t < \infty$ y $A \in \mathcal{B}(I\!R^d - \{0\})$

$$N(t, A) = \sharp\{0 \le s \le t; \Delta X(s) \in A\} = \sum_{0 \le s \le t} \chi_A(\Delta X(s))$$

y notemos que para cada $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0$ la función $A \to N(t, A)(\omega)$ es una medida de conteo sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\}$ y se tiene entonces que

$$\mathbb{E}(N(t, A)) = \int N(t, A)(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

es una medida de Borel sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\}$. escribiremos $\mu(\cdot) = \mathbb{E}(N(1, \cdot))$ y la llamaremos *medida de intensidad* asociada a X y diremos, además, que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$ es *acotada por abajo* si $0 \notin \bar{A}$.

Mostremos el siguiente lema que nos permite probar un teorema importante más adelante.

Lema 2.5.1 *Si A es acotado por abajo entonces $N(t, A) < \infty$ c.s. para toda $t \geq 0$.*

Prueba.- Para probar este resultado definamos una sucesión de tiempos de paro $(T_n^A, n \in \mathbb{N})$ por

$$T_1^A = \inf \{t > 0, \Delta X(t) \in A\}$$

y para $n > 1$ mediante

$$T_n^A = \inf \{t > T_{n-1}^A, \Delta X(t) \in A\}.$$

Así, como X es càdlàg, se tiene que $T_1^A > 0$ c.s. y el $\lim_{n \to \infty} T_n^A = \infty$. de hecho, si ninguno de los dos no son los casos entonces el conjunto de los puntos en que salta el proceso en A puede tener un punto de acumulación y esto no es posible por ser X càdlàg, esto se vio en la prueba del teorema 2.2.1, entonces, obtenemos que para cada $t \geq 0$

$$N(t, A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{\{T_n^A \leq t\}} < \infty \quad \text{c.s.}$$

■

Enunciemos el siguiente teorema.

Teorema 2.5.4 *Si $N(t, A) = \sum_{0 \leq s \leq t} \chi_A(\Delta X(s))$ y*

1. *Si A es acotado por abajo, entonces $(N(t, A), t \geq 0)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\mu(A)$.*

2. *Si* $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}(I\!R^d - \{0\})$ *son disjuntos, entonces las variables* $N(t, A_1) \ldots, N(t, A_m)$ *son independientes.*

Para la prueba consultese Applebaum [1], pág. 88.

Ahora supongamos que $S = I\!R^+ \times U$, donde U es un espacio medible con una σ-álgebra $\mathcal{C}$ y $A = \mathcal{B}(I\!R^+) \otimes \mathcal{C}$. Sea $p = (p(t), t \geq 0)$ un proceso adaptado que toma valores en U tal que M es una medida aleatoria poisson sobre S, donde $M([0,t) \times A) = \{0 \leq s < t; p(s) \in A\}$ para cada $t \geq 0$ y $A \in \mathcal{C}$. Y en este caso tenemos que p es un proceso Poisson puntual y M es su medida aleatoria Poisson asociada.

Sea U un espacio topológico y tomemos $\mathcal{C}$ como su σ-álgebra de Borel, y sea como M una medida aleatoria sobre $S = I\!R^+ \times U$. Ahora, para cada $A \in \mathcal{C}$ definamos el proceso $M_A = (M_A(t), t \geq 0)$ mediante $M_A(t) = M([0,t) \times A)$. Entonces diremos que M es una *Medida martingala* si existe $V \in \mathcal{C}$ tal que M_A es una martingala cuando $A \bigcap V = \emptyset$. llamaremos a V el conjunto *Forbidden* asociado.

Esto ultimo se aplica a los procesos de Lévy de la manera siguiente. Sea $U = I\!R^d - \{0\}$ y sea $\mathcal{C}$ su σ-álgebra de Borel. Si X es un proceso de Lévy, entonces ΔX es un proceso de Poisson y N es su medida aleatoria de Poisson asociada. Ahora, para cada $t \geq 0$ y A un conjunto acotado por abajo. definimos la *medida aleatoria poisson compensada* por

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - t\mu(A)$$

entonces $(\tilde{N}(t, A), t \geq 0)$ es una martingala y entonces $\tilde{N}$ se extiende a medida martingala con conjunto Forbidden $\{0\}$.

2.5.1. Integración de Poisson

Sea f una función Borel medible de $I\!R^d$ a $I\!R^d$ y sea A acotado por abajo entonces para cada $t > 0$ y $\omega \in \Omega$ podemos definir la *integral de Poisson* de f como una suma finita aleatoria

$$\int_A f(x) N(t, \mathrm{d}x)(\omega) = \sum_{x \in A} f(x) N(t, \{x\})(\omega).$$

Aquí se tiene que

$$N(t, \mathrm{d}x) = \sum_{0\leq s\leq t} \chi_{\{x\}}(\Delta X(s)).$$

Por lo cual, esta parte sólo puede tomar los valores 0 o 1.

Observemos, además, que cada $\int_A f(x)N(t,\mathrm{d}x)(\omega)$ es una variable aleatoria en $\mathbb{R}^d$ y genera un proceso estocástico al hacer variar t.

Ahora, como $N(t,\{x\}) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta X(u) = x$ para al menos alguna u tal que $0 \leq u \leq t$, entonces se tiene que

$$\int_A f(x)N(t,\mathrm{d}x) = \sum_{0\leq u\leq t} f(\Delta X(u))\chi_A(\Delta X(u)). \tag{2.4}$$

Y si $(T_n, n \in \mathbb{N})$ son los tiempos de arribo para el proceso Poisson $(N(t,A), t \geq 0)$, entonces otra manera de representar la integral de Poisson se sigue inmediatamente de (2.4)

$$\int_A f(x)N(t,\mathrm{d}x) = \sum_{n\in \mathbb{N}} f(\Delta X(T_n^A \wedge t))\chi_{[o,T]}(T_n^A). \tag{2.5}$$

De ahora en adelante, escribiremos μ_A para denotar la restricción al conjunto A de la medida μ.

Teorema 2.5.5 *Sea A acotado por abajo y sea f una función medible de A a $\mathbb{R}^d$, definimos entonces la función*

$$Y(t) = \int_A f(x)N(t,\mathrm{d}x). \tag{2.6}$$

Entonces se tiene

1. *Y tiene una distribución Poisson Compuesto tal que para cada $u \in \mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{E}\Big(\exp[i(u,Y)]\Big) = \exp\left[\int_A (e^{i(u,x)} - 1)(\mu \circ f^{-1})(\mathrm{d}x)\right].$$

2. *Si $f \in L^1(A, \mu_A)$ entonces*

$$\mathbb{E}[Y] = \int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

3. Si $f \in L^2(A, \mu_A)$ entonces

$$\mathrm{Var}\,(\mathrm{Y}) = \int_{\mathrm{A}} |\mathrm{f(x)}|^2 \mu(\mathrm{dx}).$$

Prueba.-
(1) primero veamos que $Y(t)$ en (2.6) es finita, esto, por la razón que N es finita por el resultado (2.5.1). Para $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{Z}^d$ definamos como C_p^n el conjunto de puntos $z = (z_1, \ldots, z_d) \in I\!R^d$ tal que $2^{-n}(p_j - 1) < z_j \leq 2^{-n} p_j$ para $j = 1, \ldots, d$. Entonces $\{C_p^n, p \in \mathbb{Z}^d\}$ cubre a $I\!R^d$. ahora elijamos un punto z_p^n en cada C_p^n y definamos la función $f_n(x)$ de A a $I\!R^d$ mediante

$$f_n(x) = z_p^n$$

para $x \in f^{-1}(C_p^n)$, donde $f^{-1}(C_p^n)$ es la imagen inversa de C_p^n, es decir

$$f^{-1}(C_p^n) = \{x \in A; f(x) \in C_p^n\}$$

entonces al calcular la norma $f(x) - f_n(x)$ se tiene que

$$|f(x) - f_n(x)| \;\; = \;\; |z - z_p^n|$$

donde $z = f(x) \in f^{-1}(C_p^n)$ de donde

$$|f(x) - f_n(x)| \;\; = \;\; \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (z_j - z_{p,j}^n)^2}$$

pero para cada j se tiene que

$$|z_j - z_{p,j}^n| \;\; \leq \;\; 2^{-n} p_j - 2^{-n}(p_j - 1) = 2^{-n} \qquad \text{asi}$$

$$|f(x) - f_n(x)| \;\; \leq \;\; \sqrt{\sum_{j=1}^{d} 2^{-2n}} = 2^{-n} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} 1}.$$

Asi se tiene que $|f(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n} d^{1/2}$. Sea

$$Y_n(t) = \int_A f_n(x) N(t, \mathrm{d}x)$$

de donde se tiene que

$$|Y_n(t) - Y(t)| \leq 2^{-n} d^{1/2} N(t, A) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

de donde se tiene que

$$Y_n(t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} z_p^n N(t, f^{-1}(C_p^n)).$$

Por lo tanto, $Y_n(t)$ es una variable aleatoria en A y se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
I\!E[e^{i(u,Y_n)}] &= \prod_{p\in\mathbb{Z}^d} I\!E\left[\exp\left\{i(u, z_p^n N(t, f^{-1}(C_p^n)))\right\}\right] \\
&= \prod_{p\in\mathbb{Z}^d} \exp\left[(e^{i(u,z_p^n)} - 1)\mu(f^{-1}(C_p^n))\right] \\
&= \exp\left[\int_A (e^{i(u,f_n(x))} - 1)\mu(\mathrm{d}x)\right].
\end{aligned}$$

Esto por la definición de medidas aleatorias Poisson. entonces, por el teorema de continuidad de Lévy, se tiene que Y es una variable aleatoria sobre A que satisface (1), la cual muestra que la distribución de Y es Poisson Compuesto.

(2), (3) Definamos como $u_{(j)}, f_{(j)}(x)$ y $Y_{(j)}$ la j-esima coordenada de $u, f(x)$ y Y respectivamente. y de las hipótesis de que $\int_A |f(x)|\mu(\mathrm{d}x) < \infty$ y $\int_A |f(x)|^2\mu(\mathrm{d}x) < \infty$ se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial u_{(j)}} \int_A (e^{i(u,f_n(x))} - 1)\mu(\mathrm{d}x) &= \int_A f_{(j)}(x) e^{i(u,f(x))}\mu(\mathrm{d}x), \\
\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial u_{(j)}}\right)^2 \int_A (e^{i(u,f_n(x))} - 1)\mu(\mathrm{d}x) &= \int_A \left[f_{(j)}(x)\right]^2 e^{i(u,f(x))}\mu(\mathrm{d}x),
\end{aligned}$$

para j=1,...,d. diferenciando $I\!E[e^{i(u,Y)}]$ de (1) dos veces y haciendo $u = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
I\!E[Y_{(j)}] &= \int_A f_{(j)}(x)\mu(\mathrm{d}x), \\
I\!E[Y_{(j)}^2] &= \left(\int_A f_{(j)}(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)^2 + \int_A f_{(j)}^2(x)\mu(\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

así, se tiene que

$$\begin{aligned}
I\!E[Y_{(j)}^2] - \left(\int_A f_{(j)}(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)^2 &= \int_A f_{(j)}^2(x)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \mathrm{Var}[\mathrm{Y}_{(j)}(\mathrm{t})].
\end{aligned}$$

Y usando el teorema : *Sea* μ *una distribución en* $I\!R^d$ *y* $\hat{\mu}$ *su función característica, entonces*

1. *Si* $n \in I\!N$ *y* μ *es tal que* $\int |\mu|^n \mu(\mathrm{d}x) < \infty$, *entonces* $\hat{\mu}(z)$ *es una función de clase* C^n *y para cualquier conjunto de enteros no negativos* $n_1, \ldots, n_d$ *tales que* $n_1 + \cdots + n_d \leq n$,

$$\int x_1^{n_1} \ldots x_d^{n_d} \mu(\mathrm{d}x) = \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{n_1} \cdots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z_d} \right)^{n_d} \hat{\mu}(z) \right]_{z=0}$$

2. *Si* n *un entero positivo par y si* $\hat{\mu}(z)$ *es de clase* C^n *en una vecindad del origen, entonces* μ *tiene todos los momentos absolutos finitos hasta de orden* n.

se tiene que el teorema se completa.

■

Del teorema anterior se ve que la integral de Poisson puede que no tenga media finita si $f \notin L^1(A, \mu)$. Consideremos ahora la sucesión de variables aleatoria asociada a la *Magnitud del salto* $(Y_f^A(n), n \in I\!N)$ donde cada

$$Y_f^A(n) = \int_A f(x) N(T_n^A, \mathrm{d}x) - \int_A f(x) N(T_{n-1}^A, \mathrm{d}x) \tag{2.7}$$

de donde usando la ecuación (2.5) y (2.7) se tiene que

$$Y_f^A(n) = f(\Delta(X(T_n^A)))$$

para cada $n \in I\!N$. Asi se tiene el siguiente teorema

Teorema 2.5.6 *1.* $(Y_f^A(n), n \in I\!N)$ *son variables aleatoria ind. e idénticamente distribuidas con distribución dada por*

$$I\!P(Y_f^A(n) \in B) = \frac{\mu(A \bigcap f^{-1}(B))}{\mu(A)} \tag{2.8}$$

para cada $B \in \mathcal{B}(I\!R^d)$.

2. $(\int_A f(x) N(t, \mathrm{d}x), t \geq 0)$ *es un proceso Poisson Compuesto.*

Prueba.- **(1)** Primero determinemos (2.8) usando el teorema 2.5.5 y la ecuación (2.7) y el hecho de que $(T_n^A - T_{n-1}^A, n \in I\!N)$ son variables aleatorias ind. e idénticamente distribuidas exponencialmente con la misma media $1/\mu(A)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
I\!P(Y_f^A(n) \in B) &= I\!E\left(\chi_B(Y_f^A(n))\right) \\
&= I\!E\left[I\!E_{T_n^A - T_{n-1}^A}(\chi_B(Y_f^A(n)))\right] \\
&= \int_0^\infty s \int_A \chi_B(f(x))\mu(\mathrm{d}x) p_{T_n^A - T_{n-1}^A}(\mathrm{d}s) \\
&= \frac{\mu(A \bigcap f^{-1}(B))}{\mu(A)}.
\end{aligned}$$

Entonces las variables aleatorias son idénticamente distribuidas. para la independencia, hagamos lo siguiente, para todo conjunto finito de números naturales $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ y $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m} \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ tengamos

$$\begin{aligned}
&I\!P(Y_f^A(i_1) \in B_{i_1}, Y_f^A(i_2) \in B_{i_2}, \ldots, Y_f^A(i_m) \in B_{i_m}) \\
&= I\!E\left[I\!E_{T_1^A, T_2^A - T_1^A, \ldots, T_n^A - T_{n-1}^A - T_n^A} \prod_{j=1}^m \chi_{B_{i_j}}\left(Y_f^A(i_j)\right)\right] \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \prod_{j=1}^m \int_A \chi_{B_{i_j}}(f(x))\mu(\mathrm{d}x) \\
&\quad \times p_{T_{i_1}^A}(\mathrm{d}s_{i_1}) p_{T_{i_2}^A - T_{i_1}^A}(\mathrm{d}s_{i_2}) \cdots p_{T_{i_m}^A - T_{i_{m-1}}^A}(\mathrm{d}s_{i_m}) \\
&= I\!P(Y_f^A(i_1) \in B_{i_1}) I\!P(Y_f^A(i_2) \in B_{i_2}) \cdots I\!P(Y_f^A(i_m) \in B_{i_m})
\end{aligned}$$

esto por (2.8), así, se tiene que las variables aleatorias son independientes.

(2) Para probarlo primero notemos que $(Y_f^A(n), n \in)$ y el proceso Poisson $(N(t), t \geq 0)$ son independientes, esto se sigue de una extensión del siguiente argumento, para cada $m \in I\!N, n \in I\!N \bigcup\{0\}, t \geq 0, B \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
I\!P\left(Y_f^A(m) \in B | N(t, A) = n\right) &= I\!P\left(Y_f^A(m) \in B | T_n^A \leq t, T_{n+1}^A > 1\right) \\
&= I\!P\left(Y_f^A(m) \in B\right)
\end{aligned}$$

Esto mediante un cálculo similar al realizado en la prueba de (1). Ahora, para cada $t \geq 0$ se tiene

$$\int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x) = Y_f^A(1) + Y_f^A(1) + \cdots + Y_f^A(N(t, A))$$

y como los sumandos son ind. e idénticamente distribuidos se tiene que $\int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x)$ es un proceso Poisson Compuesto.

∎

Ahora, asi como se pudo establecer un proceso Poisson compensado, podemos definir la *integral de Poisson compensada*, esto para cada $f \in L^1(A, \mu_A)$, y $t \geq 0$ definida como

$$\int_A f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x) = \int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x) - \int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

se tiene entonces que la integral definida de esta manera es una martingala.

Dos hechos importantes se obtienen del teorema 2.6 al aplicarlo a la integral de poisson compensada,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left[i\left(u, \int f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x)\right)\right]\right)$$
$$= \exp\left\{\int_A \left[e^{i(u,x)} - 1 - i(u, x)\right] \mu_f(\mathrm{d}x)\right\} \qquad (2.9)$$

para cada $u \in \mathbb{R}^d$ y si ademas se tiene que $f \in L^2(A, \mu_A)$, entonces

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_A f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x)\right|^2\right) = \int_A |f(x)|^2\mu(\mathrm{d}x). \qquad (2.10)$$

Por ultimo veremos los *procesos de variación finita*, que es una clase de funciones muy usada. Definamos $P = \{a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ y definamos su encaje como $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} |t_{i+1} - t_i|$. entonces podemos definir la *variación* $\mathrm{varP(g)}$ de una función càdlàd $g : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ sobre la partición P mediante

$$\mathrm{varP(g)} = \sum_{i=1}^{n} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|$$

y si se tiene que $\mathrm{V(g)} = \sup_{\mathrm{P}} \mathrm{varP(g)} < \infty$, entonces diremos que la función g tiene *variaci"on finita sobre* $[a, b]$. y diremos simplemente que tiene *variación finita* si g esta definida sobre todo $I\!R$ (o en su caso $I\!R^+$) y tiene variación finita sobre cada intervalo compacto.

Es trivial ver que si g es no decreciente entonces es de variación finita, e inversamente si g es de variación finita entonces podemos escribirla como la diferencia de dos funciones no decrecientes, con sólo escribir

$$g = \frac{\mathrm{V(g)(t) + g(t)}}{2} - \frac{\mathrm{V(g)(t) - g(t)}}{2}$$

donde $\mathrm{V(g)(t)}$ es la variación de g sobre $[a, t]$.

Este tipo de funciones son importantes en la teoría de integración, puesto que se conoce que si g es de variacion finita y es càd, entonces existe una única medida de Radon μ_g sobre $\mathcal{B}(R^+)$ (es decir, finita sobre compactos) tal que $\mu_g([0, t]) = f(t)$ para toda $t \geq 0$.

A μ_g se le llama la *medida canónica generada por* g. además a la variación total de g le corresponde la variación de la medida μ_g (esto en notación es $|dg|$) y si g es no decreciente, entonces $\mu_g \geq 0$

Así, si $f : I\!R^+ \to I\!R$ es de variación finita y càd, y tomando $f : I\!R^+ \to I\!R$ una función localmente integrable con respecto a μ_g, denotamos por

$$\int_0^t f(s) \mathrm{d}g(s)$$

a la integral de Lebesgue $\int_{[0,t]} f(s) \mathrm{d}\mu_g(s)$ de f con respecto a la medida μ_g. La integral $\int_0^t f(s)\mathrm{d}g(s)$ se llama la *integral de Lebesgue-Stieljes*.

Un proceso estocástico $(x(t), t \geq 0)$ es de *variación finita* si las trayectorias $(X(t)(\omega), t \geq 0)$ son de variación finita para casi todo $\omega \in \Omega$.

El ejemplo más importante para nuestro trabajo es el de las *integrales de Poisson*. Sea N una medida aleatoria Poisson, con medida de intensidad μ, que cuenta los saltos de un proceso de Lévy X y si $f : I\!R^d \to I\!R^d$ es Borel medible. para A acotado por abajo, definamos $Y = (Y(t), t \geq 0)$ mediante

$$Y(t) = \int_A f(x) N(t, \mathrm{d}x)$$

entonces $Y(t)$ es de variación finita sobre $[0, t]$ para cada $t \geq 0$.

Más aun, una condición necesaria y suficiente para que un proceso de Lévy tenga variación finita es que no exista la parte browniana en la formula de Lévy- Khinchine y ademas que $\int_{|x|<1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < \infty$, esto se puede consultar en Bretagnolle [8] y en Protter [27].

Capítulo 3

El Teorema de Lévy-Itô

En este capitulo se prueba el teorema de la descomposición de Lévy-Itô, que es el hecho de que cualquier proceso de Lévy se puede escribir como la suma de un Movimiento Browniano y de un proceso Poisson Compuesto con el tamaño de salto menor a uno y mayor a uno. Esto, lo abordaremos siguiendo de cerca la presentación que realiza Applebaum [1].

3.1. Resultados Preliminares

Primero probaremos una serie de resultados previos, para después enunciar y probar el teorema principal, en la siguiente sección.

Primero necesitamos recordar la desigualdad de Doob para martingalas, *Si* $(X(t), t \geq 0)$ *es una submartingala positiva entonces para toda* $p \geq 1$ *se tiene*

$$I\!E\left(\sup_{0 \leq s \leq t} [X(s)]^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p I\!E([X(t)]^p).$$

Diremos que M es martingala en $I\!R^d$ si para todo $1 \leq k \leq d$ se tiene que su k-esima entrada $M^{(k)}$ es martingala, además definiremos la función salto mediante

$$\Delta M(t) = M(t) - M(t-).$$

Además, diremos que si A es el conjunto de los puntos de discontinuidad de la martingala M (es decir, los puntos en que se tiene que $\Delta M(t) \neq 0$), es obvio entonces que si $A^{(k)}$ es el conjunto de la discontinuidad de la entrada k-esima de la martingala M entonces podríamos escribir al conjunto A como

$$A = \bigcup_{k=1}^{d} A^{(k)}.$$

Proposición 3.1.1 *Sea $M_j, j = 1, 2$ dos martingalas* càdlàg *centradas y supongamos que para alguna j se tiene que $M_j \in L^2$ y que para $k \neq j$ y $t \geq 0$ se tiene que $\mathbb{E}[|\mathrm{V(M_k(t))}|^2] < \infty$, entonces*

$$\mathbb{E}\left[(M_1(t), M_2(t))\right] = \mathbb{E}\left(\sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta M_1(s), \Delta M_2(s))\right) \tag{3.1}$$

donde $\Delta(M_j(t)) = M_j(t) - M_j(t-)$ con $M_j(t-) = \lim_{s \uparrow t} M_j(s)$.

Prueba.- Sin perdida de generalidad, supongamos que M_1 es L^2 y que M_2 tiene variación cuadrado integrable. definamos ahora una partición del intervalo $[0, t]$ mediante $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t\}$, y por la propiedad de las martingalas se tiene que al calcular el lado derecho de la expresión (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(M_1(t), M_2(t)) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[(M_1(t_{i+1}) - M_1(t_i), M_2(t_{j+1}) - M_2(t_j))\right] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[(M_1(t_{i+1}) - M_1(t_i), M_2(t_{i+1}) - M_2(t_i))\right].
\end{aligned}$$

Ahora, tomemos una sucesión de particiones del intervalo $[0, t]$, $(P_n, n \in \mathbb{N})$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \max_{0 \leq i(n) \leq m(n)-1} \left|t_{i(n)+1} - t_{i(n)}\right| = 0.$$

Aquí, puede ser desafortunada la notación, esto porque $\{t_{i(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de puntos sobre el intervalo $[0, t]$ para cada i y para cada $n \in I\!N$, donde la i es la dada por la primera partición P y la n esta dada por la sucesión de particiones.

Volviendo a la demostración, afirmamos que con probabilidad 1 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} \left(M_1(t_{i(n)+1}) - M_1(t_{i(n)}), M_2(t_{i(n)+1}) - M_2(t_{i(n)})\right) \quad (3.2)$$
$$= \sum_{0\leq s\leq t} \left(\Delta M_1(s), \Delta M_2(s)\right).$$

Probemos esta última afirmación. Fijemos $\omega \in \Omega$ y asumamos, sin perdida de generalidad, que $(M_1(t)(\omega), t \geq o)$ y $(M_2(t)(\omega), t \geq o)$ tienen los mismos puntos de discontinuidad y llamémosle $A = (t_n, n \in I\!N)$. Notemos que esto no debe causar ningún problema, pues si las martingalas no tienen los mismos puntos de discontinuidad, sólo con tomar la unión de los dos conjuntos de puntos donde son discontinuos A_1, A_2 seria nuestro conjunto A y esto lo puedo hacer por el teorema 2.2.1 de la página 44 que me garantiza que los conjuntos A_1, A_2 son a lo más numerables, aunque claro que como se quiere calcular los saltos de las martingalas, al final sólo va a quedar (no la unión sino) $A_1 \bigcap A_2$, esto porque si tenemos un punto t_0 en el que es discontinuo sólo para alguna de las dos martingalas, en ese punto se tiene que para la otra martingala la función salto se anula, así, se tendría $(\Delta M_1(t_0), \Delta M_2(t_0)) = 0$.

Ahora, consideremos el conjunto A^c, tomando una sucesión de particiones $(P_n, n \in I\!N)$ de $[0, t]$ tales que, para cada, $n \in I\!N$, se tiene que

$$A \bigcap (t_{j(n)}, t_{j(n)+1}) = \emptyset$$

para toda $0 \leq j(n) \leq m(n)-1$, de donde se tiene que

$$\sum_{j=0}^{m(n)-1} \left|\left(M_1(t_{j(n)+1}) - M_1(t_{j(n)}), M_2(t_{j(n)+1}) - M_2(t_{j(n)})\right)\right|$$

por la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*

$$\leq \sum_{j=0}^{m(n)-1} \left|M_1(t_{j(n)+1}) - M_1(t_{j(n)})\right| \left|M_2(t_{j(n)+1}) - M_2(t_{j(n)})\right|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m(n)-1} \left\{\max_{0\leq j(n)\leq m(n)-1} \left|M_1(t_{j(n)+1}) - M_1(t_{j(n)})\right|\right\} \left|M_2(t_{j(n)+1}) - M_2(t_{j(n)})\right|$$

$$= \max_{0\leq j(n)\leq m(n)-1} \left|M_1(t_{j(n)+1}) - M_1(t_{j(n)})\right| \sum_{j=0}^{m(n)-1} \left|M_2(t_{j(n)+1}) - M_2(t_{j(n)})\right|$$

$$\leq \max_{0\leq j(n)\leq m(n)-1} \left|M_1(t_{j(n)+1}) - M_1(t_{j(n)})\right| \mathrm{varP_n(M_2)}$$

$$\to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Así, sólo queda verificar que en A se tiene la afirmación, para esto fijemos $\epsilon > 0$ y elijamos $\delta = (\delta_n, n \in I\!N)$ tal que

$$\begin{aligned} \max\{|M_1(t_n) - &M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n)|, \\ &|M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n)|\} < \frac{\epsilon}{K2^n} \end{aligned}$$

donde

$$K = 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_1(s)| + 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_2(s)|.$$

Ahora consideremos

$$\begin{aligned} S(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \{&(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) \\ &- (\Delta M_1(t_n), \Delta M_2(t_n))\} \end{aligned}$$

y entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
&|S(\delta)| \\
\leq\ & \sum_{n=1}^{\infty} |(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) \\
&- (\Delta M_1(t_n), \Delta M_2(t_n))| \\
=\ & \sum_{n=1}^{\infty} |(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) \\
&- (\Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) + (\Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) \\
&- (\Delta M_1(t_n), \Delta M_2(t_n))| \\
=\ & \sum_{n=1}^{\infty} |(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) \\
&+ (\Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n))| \\
\leq\ & \sum_{n=1}^{\infty} |(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n))| \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} |(\Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n))|
\end{aligned}$$

y usando la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*

$$\begin{aligned}
\leq\ & \sum_{n=1}^{\infty} |M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n)|\,|M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)| \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta M_1(t_n)|\,|M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n)|
\end{aligned}$$

y como $\quad \Delta(M_j(t)) = M_j(t) - M_j(t-)$

$$\begin{aligned}
=\ & \sum_{n=1}^{\infty} |M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n)|\,|M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)| \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} |M_1(t_n) - M_1(t_n-)|\,|M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n)|
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
&|M_j(t_n) - M_j(t_n - \delta_n)| \leq |M_j(t_n)| + |M_j(t_n - \delta_n)| \\
&\quad \leq \sup_{0\leq s\leq t} |M_j(s)| + \sup_{0\leq s\leq t} |M_j(s)| = 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_j(s)|
\end{aligned}$$

para $j = 1, 2$. entonces se tiene que

$$|S(\delta)| \leq 2 \left(\sup_{0\leq s\leq t} |M_1(s)| + \sup_{0\leq s\leq t} |M_2(s)| \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K2^n} < \epsilon.$$

Y se establece la afirmación, ahora para obtener el resultado sólo basta probar la convergencia de la integral de la suma de la expresión (3.2), para ver esto, notemos que como se tiene además que para cada $n \in I\!N$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} [M_1(t_{i(n)+1}) - M_1(t_{i(n)})][M_2(t_{i(n)+1}) - M_2(t_{i(n)})]\right| \\
&\leq \sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} \left|M_1(t_{i(n)+1}) - M_1(t_{i(n)})\right| \left|M_2(t_{i(n)+1}) - M_2(t_{i(n)})\right| \\
&\leq \sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} 2 \sup_{0\leq s\leq t} \{|M_1(s)|\} \left|M_2(t_{i(n)+1}) - M_2(t_{i(n)})\right| \\
&= 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_1(s)| \sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} \left|M_2(t_{i(n)+1}) - M_2(t_{i(n)})\right| \\
&= 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_1(s)| \,\mathrm{varP_n}(\mathrm{M_2(t)}) \\
&\leq 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_1(s)| \mathrm{V}(\mathrm{M_2(t)}).
\end{aligned}$$

En el ultimo paso se ha usado la definición de $\mathrm{V(M(t))}$ para M_2, así, como $\mathrm{V(M_2(t))} = \sup_{\mathrm{P}} \mathrm{varP_n(M_2(t))}$, entonces se tiene que $\mathrm{V(M_2(t))} \geq \mathrm{varP_n(M_2(t))}$ para toda partición P_n.

Ahora, se sabe que

$$(|M_1(s)| - \mathrm{V(M_2(t))})^2 \geq 0$$

para toda $s \in [0, t]$, entonces desarrollando obtenemos

$$|M_1(s)|^2 - 2|M_1(s)|\mathrm{V(M_2(t))} + [\mathrm{V(M_2(t))}]^2 \geq 0$$

de donde

$$|M_1(s)|^2 + [\mathrm{V(M_2(t))}]^2 \geq 2|M_1(s)|\mathrm{V(M_2(t))}$$

y como $|M_1(s)| \geq 0$ y $\mathrm{V(M_2(t))} \geq 0$ entonces

$$|M_1(s)|^2 + [\mathrm{V(M_2(t))}]^2 \geq 2|M_1(s)|\mathrm{V(M_2(t))} \geq |\mathrm{M_1(s)}|\mathrm{V(M_2(t))}$$

y tomando el supremo sobre s se tiene

$$\sup_{0\le s\le t}\left\{|M_1(s)|^2+[\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))]^2\right\}\ge \sup_{0\le s\le t}|M_1(s)|\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))$$

y al tomar la esperanza nos queda

$$I\!\!E\left(\sup_{0\le s\le t}|M_1(s)|^2\right)+I\!\!E\left([\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))]^2\right)\ge I\!\!E\left(\sup_{0\le s\le t}|M_1(s)|\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))\right).$$

Y usando la desigualdad de Doob para martingalas obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned}I\!\!E\left(\sup_{0\le s\le t}|M_1(s)|\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))\right)\ &\le I\!\!E\left(\sup_{0\le s\le t}|M_1(s)|^2\right)+I\!\!E\left(|\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))|^2\right)\\ &\le 4I\!\!E(|M_1(t)|^2)+I\!\!E\left(|\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))|^2\right)<\infty.\end{aligned}$$

Finalmente al usar el teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$I\!\!E\left[(M_1(t),M_2(t))\right]=I\!\!E\left[\sum_{0\le s\le t}(\Delta M_1(s),\Delta M_2(s))\right].$$

■

Corolario 3.1.1 *Sea $N=(N(t),t\ge 0)$ un proceso poisson con tiempos de llegada $(T_n,n\in I\!\!N)$ y sea M una martingala L^2 càdlàg centrada, entonces para cada $t\ge 0$ se tiene*

$$I\!\!E(M(t)N(t))=I\!\!E\left(\sum_{n\in \boldsymbol{N}}\Delta M(T_n)\chi_{\{T_n\le t\}}\right).$$

Prueba.- Usando la proposición se tiene que

$$I\!\!E(M(t)N(t))=I\!\!E\left(\sum_{0\le s\le t}\Delta M(s)\Delta N(s)\right)$$

Pero como el proceso Poisson tiene tiempos de llegada T_n, entonces lo podemos rescribir como

$$=I\!\!E\left(\sum_{n\in \boldsymbol{N}}\Delta M(T_n)\Delta N(T_n)\chi_{\{T_n\le t\}}\right)$$

pero como $N(T_n) = 1$ para todo $n \in I\!N$ se tiene entonces

$$= I\!E\left(\sum_{n\in I\!N} \Delta M(T_n)\chi_{\{T_n\leq t\}}\right).$$

■

Ahora, si A es acotado por abajo y supongamos que $f \in L^2(A,\mu_A)$ y para cada $t \geq 0$ definamos

$$M_1(t) = \int_A f(x)\tilde{N}(t,\mathrm{d}x)$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{V(M_1(t))} &= \sup_P \mathrm{varP(M_1(t))} \\
&= \sup_P \mathrm{varP}\left(\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)N(t,dx)} - \int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)}\mu\mathrm{(dx)}\right) \\
&\leq \sup_P \mathrm{varP}\left(\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)N(t,dx)}\right) + \sup_{\mathrm{P}} \mathrm{varP}\left(\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)}\mu\mathrm{(dx)}\right) \\
&= \mathrm{V}\left(\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)N(t,dx)}\right) + \mathrm{V}\left(\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)}\mu\mathrm{(dx)}\right) \\
&\leq \int_A |f(x)|N(t,\mathrm{d}x) + \int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

Entonces como $f \in L^2(A,\mu_A)$ se tiene que $I\!E[\int_A |f(x)|N(t,\mathrm{d}x)] < \infty$ así

$$\begin{aligned}
I\!E[|\mathrm{V(M_1(t))}|^2] \leq & \left[\int_A |f(x)|N(t,\mathrm{d}x)\right]^2 \\
& +2\int_A |f(x)|N(t,\mathrm{d}x)\int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x) \\
& +\left[\int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x)\right]^2 \\
< & \ \infty.
\end{aligned}$$

Vamos a ver que si se tiene una familia de borelianos en $I\!R^d - \{0\}$, entonces la familia de integrales definida

$$Y_k(t) = \int_{A_k} f(x)N(t, \mathrm{d}x)$$

para cada $A_k \in \mathcal{B}(I\!R^d - \{0\})$ y $k = 1, \ldots, m$, tal que $A_k \cap A_j = \emptyset$, es independiente.

Primero veamos un teorema que vamos a necesitar para probar lo anterior,

Teorema 3.1.1 *Supongamos que para cada $j = 1, \ldots, k$ se tiene que $X_{j,n} \to X_j$ cuando $n \to \infty$ con probabilidad 1. Y si la familia $\{X_{j,n} : j = 1, \ldots, k\}$ es independiente para cada n, entonces la familia $\{X_j : j = 1, \ldots, k\}$ es independiente*

La prueba de este resultado se puede consultar en Billingsley [5]. Así, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1.2 *Sean $A_1, \ldots, A_m$ acotados por abajo y sea f una función medible de A_k a $I\!R^d$ para toda $k = 1, \ldots, m$, definimos entonces las funciones*

$$Y_k(t) = \int_{A_k} f(x)N(t, \mathrm{d}x) \tag{3.3}$$

para $k = 1, \ldots, m$, entonces $Y_1(t), \ldots, Y_m(t)$ son independientes.

Prueba.- Primero ya habíamos visto que $Y_k(t)$ es finita, esto, por la razón que N es finita por el resultado (2.5.1). Para $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{Z}^d$ definamos como C_p^n el conjunto de puntos $z = (z_1, \ldots, z_d) \in I\!R^d$ tal que $2^{-n}(p_j - 1) < z_j \leq 2^{-n}p_j$ para $j = 1, \ldots, d$. Entonces $\{C_p^n, p \in \mathbb{Z}^d\}$ cubre a $I\!R^d$. ahora elijamos un punto z_p^n en cada C_p^n y definamos la función $f_n(x)$ de A_k a $I\!R^d$, para todo $k = 1, \ldots, m$ mediante

$$f_n(x) = z_p^n$$

para $x \in f^{-1}(C_p^n)$, así se tiene que $|f(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n}d^{1/2}$. Sea

$$Y_{n,k}(t) = \int_{A_k} f_n(x)N(t, \mathrm{d}x)$$

de donde se tiene que para toda $k = 1, \dots, m$.

$$Y_{n,k}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} z_p^n N(t, A_k \cap C_p^n)$$

y como $N(t, A_k \bigcap C_p^n)$ son independientes para toda $1 \leq k \leq m$ y $p \in \mathbb{Z}^d$ por el teorema 2.5.4, entonces se tiene que $Y_{n,1}(t), \dots, Y_{n,m}(t)$ son independientes.

Y además, para k fijo se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} Y_{n,k}(t) = Y_k(t)$$

y por el teorema anterior se tiene entonces que $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$ son independientes.

■

Diremos que el proceso de Lévy tiene *saltos acotados* si existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{0 \leq t < \infty} |\Delta X(t)| < C.$$

De esta manera si tenemos que un proceso de Lévy tiene saltos acotados entonces tiene todos los momentos finitos, esto se muestra en el siguiente resultado

Antes, recordemos la desigualdad de Chebyshev-Markov

"Si X es una variable aleatoria entonces se tiene que

$$\mathbb{P}(|X - \alpha\mu| \geq C) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - \alpha\mu|^n)}{C^n}$$

donde $C > 0, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$"

Teorema 3.1.3 *Si X es un proceso de Lévy con saltos acotados entonces se tiene que $\mathbb{E}(|X(t)|^m) < \infty$ para toda $m \in \mathbb{N}$*

Prueba.- Sea $C > 0$ y definamos una sucesión de tiempos de paro $(T_n, n \in I\!N)$ mediante

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{ínf}\{t \geq 0, |X(t)| > C\} \\ &\text{y para } n > 1 \\ T_n &= \text{ínf}\{t > T_{n-1}, |X(t) - X(T_{n-1})| > C\}. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que $|\Delta X(T_n)| \leq C$ y además que $T_{n+1} - T_n = \text{ínf}\{t \geq 0; |X(t + T_n) - X(T_n)| > C\}$ para toda $n \in I\!N$.

Afirmamos que para toda $n \in I\!N$ se tiene que

$$\sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_n)| \leq 2nC \tag{3.4}$$

esto, lo probaremos por inducción sobre las T_n, para $n = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_1)| &= |X(T_1)| \\ &= |X(T_1) - X(T_1-) + X(T_1-)| \\ &\leq |\Delta X(T_1)| + |X(T_1-)| \\ &\leq 2C. \end{aligned}$$

Supongamos que la ecuación (3.4) se cumple para $n > 1$. fijando $\omega \in \Omega$ y consideremos el lado izquierdo de la ecuación donde reemplazamos a n por $n + 1$, así, se tiene $\sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_{n+1})|$. Ahora, el supremo de $|X(s \wedge T_{n+1})|$ es alcanzado sobre el intervalo $[0, T_n(\omega))$ o sobre $[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)]$. En el primer caso, se tiene que en particular

$$\sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_{n+1})| \leq 2nC \leq 2(n+1)C.$$

En el segundo caso se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq s<\infty} |X(s\wedge T_{n+1})(\omega)| \\
&= \sup_{T_n(\omega)\leq s\leq T_{n+1}(\omega)} |X(s)(\omega)| \\
&= \sup_{T_n(\omega)\leq s\leq T_{n+1}(\omega)} |X(s)(\omega) - X(T_n)(\omega) + X(T_n)(\omega)| \\
&\leq \sup_{T_n(\omega)\leq s\leq T_{n+1}(\omega)} |X(s)(\omega) - X(T_n)(\omega)| + |X(T_n)(\omega)| \\
&\leq |X(T_{n+1})(\omega) - X(T_n)(\omega)| + 2nC \\
&= |X(T_{n+1})(\omega) - X(T_{n+1}-)(\omega) + X(T_{n+1}-)(\omega) - X(T_n)(\omega)| + 2nC \\
&\leq |X(T_{n+1})(\omega) - X(T_{n+1}-)(\omega)| + |X(T_{n+1}-)(\omega) - X(T_n)(\omega)| + 2nC \\
&\leq C + C + 2nC \\
&= 2(n+1)C.
\end{aligned}$$

Ahora, para toda $n\geq 2$ se tiene que las variables aleatorias $T_n - T_{n-1}$ son independientes de $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$ y tienen la misma distribución que T_1, esto usando el teorema 2.4.3, conocido como la propiedad fuerte de Markov. Ahora, al usar el teorema 2.4.1 de manera repetida se tiene que

$$\mathbb{E}(e^{-T_n}) = \mathbb{E}(e^{-T_1}e^{-(T_2-T_1)}\cdots e^{-(T_n-T_{n-1})}) = [\mathbb{E}(e^{-T_1})]^n = a^n \quad (3.5)$$

para alguna a tal que $0<a<1$.

Y al usar la desigualdad de Chebyshev-Markov y las expresiones (3.4) y (3.5), se tiene que para toda $n\in\mathbb{N}$ y $t\geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X(t)|\geq 2nC) &\leq \mathbb{P}(T_n<t) \\
&= \mathbb{P}(-T_n > -t) \\
&= \mathbb{P}(e^{-T_n} > e^{-t}) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}[e^{-T_n}]}{e^{-t}} \\
&= e^t a^n.
\end{aligned}$$

Así, se ha establecido el hecho que

$$\mathbb{P}(|X(t)|\geq 2nC) \leq e^t a^n. \quad (3.6)$$

Y al calcular $\mathbb{E}(|X(t)|^m)$ se tiene que

$$\int_{|x|\geq 2nC} |x|^m \mathbb{P}_{X(t)}(\mathrm{d}x) = \sum_{r=n}^{\infty} \int_{2rC\leq|x|\leq 2(r+1)C} |x|^m \mathbb{P}_{X(t)}(\mathrm{d}x)$$

pero como $|x| \leq 2(r+1)C$ entonces $|x|^m \leq [2(r+1)C]^m$ y así

$$\leq \sum_{r=n}^{\infty}[2(r+1)C]^m \int_{2rC\leq|x|\leq 2(r+1)C} \mathbb{P}_{X(t)}(\mathrm{d}x)$$

y además por (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{r=n}^{\infty}[2(r+1)C]^m e^t a^r 2C \\ &= [2C]^{m+1} e^t \sum_{r=n}^{\infty}(r+1)^m a^r \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Y como se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene entonces que X tiene todos los momentos finitos.

■

Ahora, consideremos el proceso Poisson Compuesto

$$\left(\int_{|x|>a} xN(t, \mathrm{d}x), t \geq 0\right)$$

el cual nos va a permitir definir un proceso estocástico $Y_a = (Y_a(t), t \geq 0)$ como

$$Y_a(t) = X(t) - \int_{|x|\geq a} xN(t, \mathrm{d}x).$$

Aquí se tiene que al proceso de Lévy X se le están quitando los saltos de tamaño mayores o iguales a a. Ahora, el proceso Y_a se puede rescribir de la siguiente manera, si $(T_n, n \in \mathbb{N})$ son los tiempos de llegada para el proceso poisson $(N(t, B_a(0)^c), t \geq 0)$ (con $B_a(0)$ como la bola de radio a alrededor del 0), entonces podemos escribir a Y_a de manera recursiva como

$$Y_a(t) = \begin{cases} X(t), & \text{para } 0 \leq t < T_1 \ ; \\ X(T_1-), & \text{para } t = T_1 \ ; \\ X(t) - X(T_1) + X(T_1-), & \text{para } T_1 < t < T_2 \ ; \\ Y_a(T_2-), & \text{para } t = T_2 \ . \end{cases}$$

Así, se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.1.4 *Y_a es un proceso de Lévy.*

Prueba.- Tenemos que verificar que se cumplen las 3 condiciones de la definición 1.5.1, de la página 16. Pero se tiene que **(1)** es inmediato, pues $Y_a(0) = X(0) = 0$ c.s., para probar **(2)** si A es acotado por abajo entonces se tiene que para cada $0 \leq s < t < \infty$ y $n \in I\!N$ $N(t,A) - N(s,A) = n$ si y sólo si existen $s < t_1, \cdots < t_n \leq t$ tales que

$$\Delta X(t_j) \in A \quad 1 \leq j \leq n.$$

Mas aun, $\Delta X(u) \in A$ si y sólo si existe $a \in A$ para la cual, dada toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < u - w < \delta \Longrightarrow |X(w) - X(u) - a| < \epsilon.$$

Así, de las dos expresiones anteriores se tiene que $(N(t,A) - N(s,A) = n) \in \sigma\{X(v) - X(u); s \leq u < v \leq t\}$.

Además, como

$$\begin{aligned} Y_a(t) - Y_a(s) &= X(t) - \int_{|x|\geq a} xN(t,\mathrm{d}x) - X(s) - \int_{|x|\geq a} xN(s,\mathrm{d}x) \\ &= X(t) - X(s) + \int_{|x|\geq a} x\left[N(t,\mathrm{d}x) - N(s,\mathrm{d}x)\right] \end{aligned}$$

y como claramente $\{|x| \geq a\}$ es acotado por abajo, se tiene que $Y_a(t) - Y_a(s)$ es $\mathcal{F}_{s,t}$-medible, donde $\mathcal{F}_{s,t} = \sigma\{X(u) - X(v); s \leq v \leq u < t\}$. Por tanto, se tiene que Y_a tiene incrementos independientes y estacionarios.

Para probar **(3)**, al usar el hecho que para cada $b > 0$ y $t \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} I\!P\left(|Y_a(t)| > b\right) &\leq I\!P\left(|X(t)| > \frac{b}{2}\right) + I\!P\left(\left|\int_{|X|\geq a} xN(t,\mathrm{d}x)\right| > \frac{b}{2}\right) \\ &= 0 \text{ si } t \downarrow 0. \end{aligned}$$

■

Ahora definamos el proceso de Lévy $\hat{Y}_a = (\hat{Y}_a(t), t \geq 0)$ por

$$\hat{Y}_a(t) = Y_a(t) - \mathbb{E}[Y_a(t)]$$

y este proceso, es una martingala L^2 càdlàg y centrada .

Tomemos ahora $a = 1$ y rescribamos los procesos $Y_1, \hat{Y}_1$ sólo como $Y, \hat{Y}$. Además, usemos $M(t, A) = \int_A xN(t, \mathrm{d}x)$ para $t \geq 0$ y A acotado por abajo.

Recordemos la definición que se había dado del espacio lineal $\mathcal{M}$ que era las clases de equivalencia de las martingalas L^2 $\mathcal{F}_t$-adaptadas, ahora si definimos un producto interior en este espacio de la siguiente manera

$$\langle f, g \rangle = \mathbb{E}\left[\int_A f(x)g(x)\mu(\mathrm{d}x)\right] \tag{3.7}$$

Para $f, g \in \mathcal{M}$ y A acotado por abajo.

Definiremos ahora al espacio $\mathcal{M}_A$ para A acotado por abajo por

$$\mathcal{M}_A = \left\{\int_A f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x), f \in L^2(A, \mu_A)\right\}$$

Se puede mostrar que $\mathcal{M}_A$ es un subespacio cerrado del espacio martingala $\mathcal{M}$, pero aquí no lo haremos.

Para probar el siguiente teorema necesitaremos antes el siguiente lema.

Lema 3.1.1 *Sea A acotado por abajo y M una martingala centrada L^2 que además es continua en los tiempos de arribo de $(N(t, A), t \geq 0)$ entonces M es ortogonal a cada proceso M^* en $\mathcal{M}_A$.*

Prueba.- Tenemos que probar que $\langle M(t), M(t)^* \rangle = 0$, para esto notemos que como $M(t)$ es continua en los tiempos de arribo de $N(t, A)$ entonces se tiene que $\Delta M(T_n) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, ahora sea $M(t)^*$ cualquier martingala de M_A, y usando la definición del producto interno dado en la expresión (3.7), y recordando la definición de esperanza con-dicional dada por Dudley [12], pág. 336 se tiene que

$$\begin{aligned}\langle M(t), M(t)^*\rangle &= I\!\!E\left[\int_A M(t)M(t)^*\mu(\mathrm{d}x)\right]\\ &= I\!\!E\left[\mu(A)I\!\!E\left(M(t)M(t)^*|A\right)\right]\\ &= \mu(A)I\!\!E\left[I\!\!E\left(M(t)M(t)^*|A\right)\right]\\ &= \mu(A)I\!\!E\left[(M(t)M(t)^*)\right]\end{aligned}$$

y por la proposición 3.1.1 se tiene que

$$\langle M(t), M(t)^*\rangle = \mu(A)I\!\!E\left[\sum_{0\le s\le t}\Delta M(s)\Delta M^*(s)\right].$$

Pero como $\Delta M(T_n) = 0$ para todo $(T_n, n \in I\!\!N)$ tiempo de llegada y como además, $M(t)^*$ sólo toma valores diferentes de cero en $(T_n, n \in I\!\!N)$ se tiene entonces que

$$\langle M(t), M(t)^*\rangle = 0.$$

■

Enunciaremos enseguida el teorema de Kac, que se deja sin demostración y que puede consultarse en Bretagnolle, Chatterji and Meyer [9] pág. 175.

Teorema 3.1.5 Kac. *Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independiente si y sólo si*

$$I\!\!E\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{n}(u_j, X_j)\right]\right) = \phi_{X_1}(u_1)\cdots\phi_{X_n}(u_n)$$

para toda $u_1, \ldots, u_n$ y donde ϕ_{X_j} es la función característica de la variable aleatoria X_j para toda j.

Así, tenemos el teorema siguiente que es de vital importancia para la prueba de la descomposición de Lévy-itô.

Teorema 3.1.6 *Para cada $t \geq 0$*

$$\hat{Y}(t) = Y_c(t) + Y_d(t)$$

donde Y_c y Y_d son procesos de Lévy independientes, y Y_c tiene trayectorias continuas y

$$Y_d(t) = \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t, \mathrm{d}x).$$

Prueba.- Tomemos una sucesión $(\epsilon_n, n \in I\!N)$ que decrece a 0 monótonamente, y con $\epsilon_1 = 1$. Para cada $m \in I\!N$ definamos

$$B_m = \{x \in I\!R^d, \epsilon_{m+1} \leq |x| < \epsilon_m\}$$

y para cada $n \in I\!N$ definamos

$$A_n = \cup_{m=1}^{n} B_m.$$

Afirmamos que la sucesión $(M(\cdot, A_n), n \in I\!N)$ converge en el espacio martingala a Y_d. Para probar esto, primero veamos que para cada $t \geq 0$ las martingalas $M(t, B_m)$ son mutuamente ortogonales, esto si podemos usar la proposición 3.1.1, de donde se tiene que

$$\begin{aligned} I\!E[|M(t, A_n)|^2] &= I\!E\left[|M\left(t, \cup_{m=1}^{n} B_m\right)|^2\right] \\ &= I\!E\left[|M\left(t, B_1\right)|^2 + \cdots + |M\left(t, B_n\right)|^2\right] \\ &\quad +2\sum_{m=1}^{n}\sum_{i>m} I\!E[(M(t, B_m), M(t, B_i))] \end{aligned}$$

y por la proposición 3.1.1 cada término de la segunda suma es 0 entonces

$$\begin{aligned} I\!E[|M(t, A_n)|^2] &= I\!E\left[|M\left(t, B_1\right)|^2\right] + \cdots + I\!E\left[|M\left(t, B_n\right)|^2\right] \\ &= \sum_{m=1}^{n} I\!E\left[|M\left(t, B_m\right)|^2\right]. \end{aligned}$$

Sea $Z_{A_n}(t) = \hat{Y}(t) - M(t, A_n)$, entonces Z es un proceso de Lévy, así, si η_z es el **Exponente de Lévy** de $Z(t)$ y si $u \in I\!R^d$ entonces

$$M_u(t) = \exp[i(u, Z_{A_n}(t)) - t\eta_Z(u, A_n)] - 1$$

es una martingala, esto por el teorema 2.3.1 y si $\eta_{M(A_n)}$ es el **Exponente de Lévy** de $M(t, A_n)$ definimos otra martingala usando el proceso de Lévy $M(t, A_n)$ y aplicando de nuevo el teorema 2.3.1 mediante

$$M_1(t, A_n) = \exp[i(u, M(t, A_n)) - t\eta_{M(A_n)}] - 1.$$

Así, se tiene que las martingalas $M_u(t)$ y $M_1(t, A_n)$ son independientes, para probar esta afirmación usando el teorema del valor medio se tiene que para cada $t \geq 0$ existe una variable aleatoria compleja $\rho(t)$ con la condición $0 \leq |\rho(t)| \leq 1$ tal que

$$M_1(t, A_n) = \rho(t)[i(u, M(t, A_n)) - t\eta_{M(A_n)}].$$

Asi, $M_1(t, A_n)$ tiene variación cuadrado integrable, esto para poder usar la proposición 3.1.1, ahora para $0 \leq s \leq t < \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} I\!E[M_u(t)M_1(s, A_n)] &= I\!E[M_u(s)M_1(s, A_n)] \\ &\quad + I\!E[\{M_u(t) - M_u(s)\}M_1(s, A_n)]. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Además, como el conjunto en donde $M_u(s)$ y $M_1(s, A_n)$ tienen saltos al mismo tiempo es el vacío, esto porque al proceso $Z(t)$ se le están quitando los saltos de tamaño contenidos en A_n mientras que el proceso $M_1(s, A_n)$ sólo tiene saltos en A_n, se tiene entonces que

$$I\!E[M_u(s)M_1(s, A_n)] = 0.$$

Ahora, para el segundo término de (3.8) condicionemos con respecto a $\mathcal{F}_s$ y por ser $M_u(t)$ martingala obtenemos

$$\begin{aligned} I\!E[\{M_u(t) - M_u(s)\}M_1(s, A_n)|\mathcal{F}_s] &= M_1(s, A_n)I\!E[(M_u(t) - M_u(s))|\mathcal{F}_s] \\ &= M_1(s, A_n)\left(I\!E[M_u(t)|\mathcal{F}_s] - M_u(s)\right) \\ &= M_1(s, A_n)\left(M_u(s) - M_u(s)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Y volviendo a (3.8) se tiene entonces que

$$I\!E[M_u(t)M_1(s, A_n)] = 0.$$

De donde al desarrollar obtenemos

$$\begin{aligned} I\!E[M_u(t)M_1(s, A_n)] &= I\!E\left[(e^{i(u, Z_{A_n}(t)) - t\eta_Z} - 1)(e^{i(u, M(s, A_n)) - s\eta_{M(A_n)}} - 1)\right] \\ &= I\!E\left[e^{i(u, Z_{A_n}(t)) - t\eta_Z}e^{i(u, M(s, A_n)) - s\eta_{M(A_n)}}\right] \\ &\quad - I\!E\left[e^{i(u, Z_{A_n}(t)) - t\eta_Z}\right] - I\!E\left[e^{i(u, M(s, A_n)) - s\eta_{M(A_n)}}\right] + \\ &= e^{-t\eta_Z}e^{-s\eta_{M(A_n)}}I\!E\left[e^{i(u, Z_{A_n}(t))}e^{i(u, M(s, A_n))}\right] \\ &\quad - e^{t\eta_Z - t\eta_Z} - e^{s\eta_{M(A_n)} - s\eta_{M(A_n)}} + 1 \\ &= e^{-t\eta_Z}e^{-s\eta_{M(A_n)}}I\!E\left[e^{i(u, Z_{A_n}(t))}e^{i(u, M(s, A_n))}\right] - 1 = 0. \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned}
I\!E\left[e^{i(u,Z_{A_n}(t))}e^{i(u,M(s,A_n))}\right] &= e^{t\eta_Z}e^{s\eta_{M(A_n)}} \\
&= I\!E[e^{i(u,Z_{A_n}(t))}]I\!E[e^{i(u,M(s,A_n))}].
\end{aligned}$$

Por tanto, los procesos Z y $M(t,A_n)$ son independientes por el teorema de Kac, y además ortogonales por el lema anterior, así, escribamos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})) &= \mathrm{Var}\left([\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})-\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})]+\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right) \\
&= \mathrm{Var}\left(\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})-\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right)+\mathrm{Var}\left(\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right) \\
&\quad -2\mathrm{Cov}\left(\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})-\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n}),\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right) \\
&= \mathrm{Var}\left(\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})-\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right)+\mathrm{Var}\left(\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right).
\end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$I\!E(M(t,A_n)^2)=\mathrm{Var}\left(\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right)\leq \mathrm{Var}(\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})). \tag{3.9}$$

Entonces se tiene que por la expresión (3.9) para $t\geq 0$ la sucesión $(I\!E|M(t,A_n)|^2, n\in I\!N)$ es creciente y acotada por arriba por $I\!E(\hat{Y}(t)^2)<\infty$ y por lo tanto convergente , aun más, para $n_1\leq n_2$ con $n_1,n_2\in I\!N$ se tiene

$$\begin{aligned}
I\!E([M(t,A_{n_2})-M(t,A_{n_1})]^2) &= I\!E\left(M(t,A_{n_2})^2-2M(t,A_{n_2})M(t,A_{n_1})\right. \\
&\quad \left.+M(t,A_{n_1})^2\right) \\
&= I\!E\left(M(t,A_{n_2})\right)^2 \\
&\quad -2I\!E\left(M(t,A_{n_2})M(t,A_{n_1})\right) \\
&\quad +I\!E\left(M(t,A_{n_1})^2\right) \\
&= I\!E\left(M(t,A_{n_2})\right)^2-I\!E\left(M(t,A_{n_1})^2\right).
\end{aligned}$$

Y por lo tanto se deduce que

$$Y_d(t)=\int_{|x|<1}x\tilde{N}(t,\mathrm{d}x)=L^2-\lim_{n\to\infty}M(t,A_n).$$

De donde se tiene que Y_d está en el espacio martingala. Entonces al usar el teorema 1.5.3 de la página 20, se tiene entonces que Y_d es un proceso de Lévy, esto usando la desigualdad de Chebyshev para $b > 0$

$$\lim_{t\downarrow 0} I\!P\left(|Y_d(t) - M(t, A_n)| > b\right) = 0$$

para toda $n \in I\!N$.

Ahora, veamos que como $\hat{Y}$ es proceso de Lévy y también lo es Y_d y como la suma de dos procesos de Lévy es a su vez un proceso de Lévy entonces

$$\lim_{n\to\infty} \hat{Y} - M(t, A_n) = \hat{Y} - Y_d = Y_c$$

es un proceso de Lévy en el espacio martingala $\mathcal{M}$, entonces

$$Y_c(t) - L^2 - \lim_{n\to\infty} [\hat{Y}(t) - M(t, A_n)].$$

Sólo falta ver que Y_c tiene trayectorias continuas, para esto se tiene que si $Y_c(t) = 0$ c.s. para toda $t \geq 0$ habremos terminado, pues salvo un conjunto de medida cero, se tendría que Y_c es una constante, supongamos que este no es el caso, y procederemos a probarlo por contradicción. Sea $N \subseteq \Omega$ el conjunto sobre el cual las trayectorias de Y_c son discontinuas. si $I\!P(N) = 0$, podemos reemplazar Y_c por una modificación que tenga trayectorias continuas, entonces supongamos que $I\!P(N) > 0$. Entonces existen $b > 0$ y un tiempo de paro tal que $I\!P(|\Delta X(T)| > b) > 0$. y sea $A = \{x \in I\!R^d : |x| > b\}$, entonces por la proposición 3.1.1 se tiene que para cada $t \geq 0$ y $f \in L^2(A, \mu_A)$

$$\begin{aligned} 0 &\neq I\!E\left(Y_c(t), \int_{|x|>b} f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} I\!E\left([\hat{Y}(t) - M(t, A_n)], \int_{|x|>b} f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x)\right) = 0. \end{aligned}$$

Esto porque el proceso $\hat{Y}(t) - M(t, A_n)$ no tiene saltos. Por tanto, el proceso Y_c tiene trayectorias continuas.

■

Nota 3.1.1 Este teorema también se puede probar de una manera distinta utilizando herramientas de los espacios de Hilbert, esto ya que como $\mathcal{M}$ es un espacio completo, y para que sea espacio de Hilbert sólo faltaría completar la seminorma definida en la sección **2.3**, es decir, convertirla en norma y como se puede probar que para cada A acotado por abajo el conjunto $\mathcal{M}_A$ es un subespacio cerrado del espacio martingala $\mathcal{M}$ y por el lema 3.1.1 entonces se puede definir $\mathcal{M}_A^{\perp}$ y usando el teorema 3.9.4 pág. 123 del libro de Debnath L., Mikusinski P.[10] que garantiza que:
Si S es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces cada elemento de $x \in H$ tiene única descomposición en la forma $x = y + z$ donde $y \in S$ y $z \in S^{\perp}$,
se tendría la prueba del teorema, ahora para completar la norma es necesario dar la definición de procesos Predecibles, pero es algo que aquí no haremos.

Renombrando a μ como la medida de intensidad de la medida aleatoria poisson N y del teorema anterior se tienen los siguientes corolarios

Corolario 3.1.2 *μ es una medida de Lévy.*

Prueba.- Sólo tenemos que probar que $\mu((-1,1)^c) < \infty$, y veamos que

$$\begin{aligned}\int_{|x|<1} |x|^2 \mu(\mathrm{d}x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |x|^2 \mu(\mathrm{d}x) \\ &= \lim_{n\to\infty} I\!E(|M(t, A_n)|^2) \\ &= I\!E(|Y_d|^2) < \infty.\end{aligned}$$

■

Corolario 3.1.3 *Para cada $t \geq 0$, $u \in I\!R^d$*

$$I\!E(e^{i(u,Y_d(t))}) = \exp\left\{\int_{|x|<1} \left[e^{i(u,x)} - 1 - i(u,x)\right] \mu(\mathrm{d}x)\right\}.$$

Prueba.- Retomando la expresión (2.9) de la página 69, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{i(u,Y_d(t))}] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{i\left(u,\int_{A_n} x\tilde{N}(t,\mathrm{d}x)\right)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\int_{A_n} \left[e^{i(u,x)} - 1 - i(u,x)\right] \mu(\mathrm{d}x)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_{|x|<1} \left[e^{i(u,x)} - 1 - i(u,x)\right] \mu(\mathrm{d}x)\right\}.
\end{aligned}$$

■

Ahora, se probará que el proceso $Y_c(t)$ es un Movimiento browniano, lo cual nos dejará en la posición de probar el teorema de la descomposición de Lévy-Itô.

Teorema 3.1.7 *Y_c es un Movimiento Browniano.*

Prueba.- Probaremos que para toda $u \in \mathbb{R}^d$ y $t \geq 0$ se tiene que

$$\mathbb{E}[e^{i(u,Y_c(t))}] = e^{-t(u,Au)/2}, \tag{3.10}$$

donde A es una matriz $d \times d$ simétrica positiva definida.
Por conveniencia tomemos $d = 1$. Y como por definición Y_c no tiene saltos, entonces por el teorema 3.1.3 tiene todos los momentos finitos, y así Y_c es un proceso de Lévy centrado y se puede tener que

$$\phi_t(u) = \mathbb{E}(e^{iuY_c(t)}) = e^{t\eta(u)}, \tag{3.11}$$

donde $\eta \in C^\infty(\mathbb{C})$ y además $\eta'(0) = 0$. Ahora al diferenciar para cada $t \geq 0$ y $m \geq 2$ se tiene

$$\mathbb{E}(Y_c(t)^m) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{m-1} t^{m-1} \tag{3.12}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$.
Ahora definamos una partición sobre el intervalo $[0,t]$, de la manera siguiente: sea $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ y para el propósito de esta prueba denotemos como $\Delta Y_c(t_j) = Y_c(t_{j+1}) - Y_c(t_j)$ para cada

$0 \leq j \leq n-1$. Ahora, se tiene que escribiendo lo siguiente como una serie telescópica obtenemos que

$$
\begin{aligned}
I\!\!E(e^{iuY_c(t)} - 1) &= I\!\!E\left(\sum_{j=0}^{n-1}(e^{iuY_c(t_{j+1})} - e^{iuY_c(t_j)})\right) \\
&= I\!\!E\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)}(e^{iu(Y_c(t_{j+1})-Y_c(t_j))} - 1)\right) \\
&= I\!\!E\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)}(e^{iu(\Delta Y_c(t_j))} - 1)\right) \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

y por el teorema de Taylor sobre el término $e^{iu\Delta Y_c(t_j)}$ se tiene que para $n = 2$,

$$
\begin{aligned}
e^{iu\Delta Y_c(t_j)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu\Delta Y_c(t_j))^k}{k!} \\
&\quad + \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^{u\Delta Y_c(t_j)} (u\Delta Y_c(t_j) - v)^{n-1} e^{iv} \mathrm{d}v \\
&= 1 + \frac{iu\Delta Y_c(t_j)}{1!} \\
&\quad - \int_0^{u\Delta Y_c(t_j)} (u\Delta Y_c(t_j) - v) e^{iv} \mathrm{d}v \\
&= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) \\
&\quad - \int_0^{u\Delta Y_c(t_j)} [u\Delta Y_c(t_j) - v] e^{iv} \mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Y por el teorema del valor medio para integrales se tiene que

$$
\begin{aligned}
e^{iu\Delta Y_c(t_j)} &= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) \\
&\quad -[u\Delta Y_c(t_j) - 0](u\Delta Y_c(t_j) - \varphi_j)e^{i\varphi_j},
\end{aligned}
$$

donde $0 \leq \varphi_j \leq u\Delta Y_c(t_j)$.

Pero esto lo podemos rescribir como

$$\begin{aligned}
e^{iu\Delta Y_c(t_j)} &= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) \\
&\quad -[u\Delta Y_c(t_j)][u\Delta Y_c(t_j) - \zeta_j u\Delta Y_c(t_j)]e^{i\zeta_j u\Delta Y_c(t_j)}
\end{aligned}$$

Donde $0 \leq \zeta_j \leq 1$

$$= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) - [u\Delta Y_c(t_j)]^2(1-\zeta_j)e^{i\zeta_j u\Delta Y_c(t_j)}$$

,0cmPero lo podemos rescribir para $0 \leq \theta_j \leq 1$ como

$$= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) - [u\Delta Y_c(t_j)]^2 e^{i\theta_j u\Delta Y_c(t_j)}$$

sumando y restando el siguiente término

$$\begin{aligned}
&= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) - \frac{u^2}{2}[\Delta Y_c(t_j)]^2 \\
&\quad + \frac{u^2}{2}[\Delta Y_c(t_j)]^2 - u^2[\Delta Y_c(t_j)]^2 e^{i\theta_j u\Delta Y_c(t_j)}.
\end{aligned}$$

Volviendo a (3.13) se tiene que

$$\begin{aligned}
I\!E(e^{iuY_c(t)} - 1) &= I\!E\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)}(e^{iu\Delta Y_c(t_j)} - 1)\right) \\
&= I\!E\left(iu\sum_{j=0}^{n-1}\Delta Y_c(t_j)e^{iuY_c(t_j)}\right) \\
&\quad - I\!E\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u^2}{2}e^{iuY_c(t_j)}(\Delta Y_c(t_j))^2\right) \\
&\quad + I\!E\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u^2}{2}[\Delta Y_c(t_j)]^2 e^{iuY_c(t_j)}\right) \\
&\quad - I\!E\left(u^2\sum_{j=0}^{n-1}[\Delta Y_c(t_j)]^2 e^{iuY_c(t_j)}e^{iu\theta_j\Delta Y_c(t_j)}\right).
\end{aligned}$$

Juntando los dos últimos términos, se tiene que

$$I\!E(e^{iuY_c(t)} - 1) = I\!E(I_1) + I\!E(I_2) + I\!E(I_3) \tag{3.14}$$

donde

$$I_1(t) = iu\sum_{j=0}^{n-1}\Delta Y_c(t_j)e^{iuY_c(t_j)},$$

$$I_2(t) = -\frac{u^2}{2}\sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY(t_j)}[\Delta Y_c(t_j)]^2,$$

$$I_3(t) = -\frac{u^2}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[\Delta Y_c(t_j)]^2\left(2e^{iu[Y_c(_j)+\theta_j\Delta Y_c(t_j)]} - e^{iuY_c(t_j)}\right).$$

Ahora por los incrementos independientes de Y_c se tiene que

$$\mathbb{E}(I_1(t)) = iu\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}(e^{iuY_c(t_j)})\mathbb{E}(\Delta Y_c(t_j)) = 0$$

Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I_2(t)) &= -\frac{u^2}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}(e^{iuY_c(t_j)})\mathbb{E}[\Delta Y_c(t_j)]^2\\ &= -\frac{au^2}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\phi_{t_j}(u)(t_{j+1}-t_j).\end{aligned} \tag{3.15}$$

La expresión (3.15) se ha obtenido al usar las expresiones (3.11) y (3.12).

Para tratar $I_3(t)$ definamos el evento para $\alpha > 0$

$$B_\alpha = \max_{\{0\le j\le n-1\}}\ \sup_{\{t_j\le u,v\le t_{j+1}\}}|Y_c(v) - Y_c(u)| \le \alpha.$$

Así, podemos escribir

$$\mathbb{E}(I_3(t)) = \mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha}) + \mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha^c}).$$

Y al usar la desigualdad $|e^{iy} - 1| \le 2$ que se cumple para toda $y \in \mathbb{R}$ se tiene que el segundo término de la expresión anterior viene a estar acotado por

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha^c})| &\le 2u^2\sum_{j=0}^{n-1}\int_{B_\alpha^c}[\Delta Y_c(t_j)(\omega)]^2 d\mathbb{P}(\omega)\\ &\le 2u^2(\mathbb{P}(B_\alpha^c))^{\frac{1}{2}}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\Delta Y_c(t_j)^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\le 2u^2(\mathbb{P}(B_\alpha^c))^{\frac{1}{2}}O(t^2+t^3)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Esto se obtiene al usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la expresión (3.12).

Y el cálculo sobre B_α usando una vez más la expresión (3.12), nos deja

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha})| &\leq |u|^3 \int_{B_\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta Y_c(t_j)|^3(\omega) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \alpha a t |u|^3. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Introduzcamos ahora una sucesión de particiones $(\mathcal{P}^n, n \in \mathbb{N})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ donde $\delta_n = \max_{1<j^{(n)}\leq m^{(n)}} |t_{j^{(n)}+1} - t_{j^{(n)}}|$ y escribamos para cada $n \in \mathbb{N}$ el correspondiente $I_k(t)$ como $I_k^{(n)}(t)$ para $j = 1, 2, 3$, y también denotemos como B_α como $B_\alpha^{(n)}$.

Ahora, por la continuidad de las trayectorias de Y_c se tiene que

$$\begin{aligned} \max_{1\leq j\leq m^{(n)}} \sup_{t_{j^{(n)}} \leq u,v \leq t_{j^{(n)}+1}} |Y_c(v) - Y_c(u)| &\leq \sup_{0\leq u,v\leq t, |u-v|\leq\delta_n} |Y_c(v) - Y_c(u)| \\ &\to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Y por el teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((B_\alpha^{(n)})^c) = 0.$$

Y recordando que

$$\mathbb{E}(I_3(t)) = \mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha}) + \mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha^c})$$

se tiene entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(I_3^{(n)}(t)) \leq \frac{\alpha a t |u|^3}{2}$$

pero como α se puede hacer arbitrariamente pequeño entonces se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(I_3^{(n)}(t)) = 0. \tag{3.17}$$

Ahora, volviendo a la expresión (3.15), y tomando $I_2^{(n)}$ por el correspondiente I_2, y tomando límite cuando $n \to \infty$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(I_2^{(n)}(t)) &= -\frac{au^2}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{t_j^{(n)}}(u)(t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}) \\ &= -\frac{au^2}{2} \int_0^t \phi_s(u) \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Y volviendo a la expresión (3.14) se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\phi_t(u) - 1 &= I\!\!E[e^{iuY_c(t)}] \\
&= I\!\!E[I_1] + I\!\!E[I_2] + I\!\!E[I_3] \\
&= -\frac{au^2}{2}\int_0^t \phi_s(u)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

por lo que se tiene que

$$\phi_t(u) - 1 = -\frac{au^2}{2}\int_0^t \phi_s(u)\mathrm{d}s$$

y al derivar con respecto a t y utilizando el teorema fundamental del cálculo se obtiene una ecuación diferencial en t y al resolver obtenemos.

$$\begin{aligned}
\phi_t'(u) &= -\frac{au^2}{2}\phi_t(u) \\
\frac{\phi_t'(u)}{\phi_t(u)} &= -\frac{au^2}{2}
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\phi_s'(u)}{\phi_s(u)}\mathrm{d}s &= -\frac{atu^2}{2} \\
\ln[\phi_s(u)]_{s=0}^t &= -\frac{atu^2}{2}
\end{aligned}$$

Pero $\phi_0(u) = e^{0\eta(u)} = 1$ entonces

$$\begin{aligned}
\ln[\phi_t(u)] - \ln[\phi_0(u)] &= -\frac{atu^2}{2} \\
\phi_t(u) &= e^{-\frac{1}{2}atu^2}.
\end{aligned}$$

De donde $Y_c(t)$ es un Movimiento Browniano.

■

3.2. Teorema de la Descomposición de Lévy-Itô

Ahora se enunciará y se probará el teorema principal de este capítulo, el cual nos dice que si se tiene un proceso de Lévy entonces se tiene que se puede escribir como una parte continua, que es un Movimiento Browniano, y una parte que tiene saltos acotados y una con saltos no acotados, que es un proceso de Poisson Compuesto.

Asimismo, al final de esta sección se probará la primera parte del teorema de la representación de Lévy-Khintchine, esto último utilizando la descomposición de Lévy-Itô.

Teorema 3.2.1 (La descomposición de Lévy-Itô) *Si X es un proceso de Lévy entonces existe $b \in \mathbb{R}^d$, un Movimiento Browniano B_A con matriz de covarianza A y una medida aleatoria Poisson independiente N sobre $R^+ \times (\mathbb{R}^d - \{0\})$ tal que para cada $t \geq 0$*

$$X(t) = bt + B_A(t) + \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t, \mathrm{d}x) + \int_{|x|\geq 1} xN(t, \mathrm{d}x). \qquad (3.19)$$

Prueba.- Usando los teoremas 3.1.6 y 3.1.7 haciendo

$$b = \mathbb{E}\left(X(1) - \int_{|x|>1} xN(1, \mathrm{d}x)\right).$$

Y los procesos $B_A(t)$ y N son independientes al usar el corolario 3.1.1 y el argumento de la página 90 en la prueba del teorema 3.1.6.

■

Ahora se probará el teorema de la representación de Lévy-Khintchine del capítulo 1, lo haremos en forma de corolario del teorema anterior.

Corolario 3.2.1 (La Representación de Lévy-Khintchine) *Si X es un proceso de Lévy entonces para cada $u \in \mathbb{R}^d$ y $t \geq 0$ se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{i(u,X(t))}) &= \exp\left(t\left\{i(b,u) - \frac{1}{2}(u, Au)\right.\right.\\ &\quad \left.\left. + \int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} [e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_B(y)]\mu(\mathrm{d}y)\right\}\right).\end{aligned}$$

Prueba.- Usando la descomposición de Lévy-Itô y por la independencia se tiene que

$$\mathbb{E}(e^{i(u,X(t))}) = \mathbb{E}(e^{i(u,Y_c(t))})\mathbb{E}(e^{i(u,Y_d(t))})\mathbb{E}\left(e^{i\left(u,\int_{|x|\geq 1} xN(t,\mathrm{d}x)\right)}\right)$$

y por la expresión (3.10) de la prueba del teorema 3.1.7 y el corolario 3.1.3 y al usar el teorema 2.5.5 de la página 64 se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{i(u,X(t))}) = \exp\Bigg(t\Bigg\{&i(b,u) - \frac{1}{2}(u,Au)\\ &+ \int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} [e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_B(y)]\mu(\mathrm{d}y)\Bigg\}\Bigg).\end{aligned}$$

■

Conclusiones

Los procesos de Lévy pueden ser vistos como un buen fundamento para estudiar los procesos estocásticos, pues al obtenerse de ellos casos particulares tan notables como el Proceso Poisson, el Movimiento Browniano, los subordinadores, las variables aleatorias estables, se tiene que, estudiando los procesos de Lévy, se tendría una idea muy general de todos estos procesos y sólo se estudiarían sus características muy particulares.

Además, las definiciones del capitulo 2, que son tan importantes en los procesos estocásticos, estarían por lo tanto dadas para los procesos mencionados arriba. Por lo tanto, sólo bastaría precisarlas una sola vez para obtener la teoría general relacionada a estos procesos.

Si bien, un curso de procesos de Lévy esta un poco más allá de un curso de licenciatura, sí seria posible tratar varias de sus propiedades, quizás sin demostración, pero sí enfatizando las definiciones y conceptos.

La descomposición de Lévy-Itô es el resultado más complicado de probar, esto porque se utiliza mucho análisis en descomponer a un proceso de Lévy en tres procesos que son un Movimiento Browniano estándar, un proceso Poisson Compuesto por saltos acotados -que aquí nuestra cota es uno- y otro proceso Poisson Compuesto con saltos no acotados.

Ahora bien este resultado esta implícito en el trabajo de Lévy *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien* de 1954, pero fue K. Ito el que lo estableció de manera rigurosa.

■

Bibliografía

[1] Applebaum D. B. (2004) *Levy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[2] Asmussen S. (2000) *Ruin Probabilities.* Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability.

[3] Berg C., Forst G., (1975) *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups,* Springer-Verlag.

[4] Bertoin J. (1996) *Lévy Processes.* Cambridge Tracts in Mathematics.

[5] Billingsley, P. (1986) *Probability and Measure.* 2nd. Ed., Wiley, New York.

[6] Bingham, N.H.,Goldie, C.M., Teugels, J.L. (1987) *Regular Variation.* Cambridge University Press., Cambridge.

[7] Bojdecki T. (1995) *Teoria General de Procesos e Integracion Estocastica* Sociedad Matematica Mexicana.

[8] Bretagnolle J.L., Chatterji S.D. and Meyer P.A. (1973) *Ecole d'Été de Probabilités: Processus Stochastiques* Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag.

[9] Breiman L. (1968) *Probability* Adison-Wesley.

[10] Debnath L., Mikusinski P. (1999) *Introduction to Hilbert Spaces with applications,* Academic Press.

[11] Dellacherie, C. y Meyer, P.A. (1982) *Probabilities and Potential B. Theory of martingales,* North Holland, Amsterdam.

[12] Dudley R.M. (2002) *Real analysis and probability* Cambridge University Press.

[13] Embrechts P., Kluppelberg C. and Mikosch T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-verlag.

[14] Embrechts P. and Maejima M. (2002) *Selfsimilar Processes.* Princenton University Press.

[15] Feller W. (1966) *Introduccion to Probability theory and Applications, vol I.* John Wiley and Sons.

[16] Feller W. (1968) *Introduccion to Probability theory and Applications, vol II.* John Wiley and Sons.

[17] Grandell J.(1997) *Mixed Poisson Processes.*, Monographs on Statistics and Probability 77, Chapman and Hall.

[18] Grigoriu M. (2002) *Stochastic Calculus, Aplications in Science and Engineering.* Birkhauser.

[19] Grimmett G.R. and Stirzaker D.R. (2001) *Probability and Random Processes, third edition.* Clarendon Press .

[20] Gut Allan (2005) *Probability: A Graduate Course.* Springer Texts in Statistics.

[21] Jacod J. and Protter P. (2003) *Probability Essentials*, 2nd. Edition, Springer-Verlag, Berlin.

[22] Karatzas I. and Shreve E. S. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* 2nd. ed., Springer, New York.

[23] Kingman J. (1993) *Poisson Processes.* Oxford Univeristy Press.

[24] Knight, F.B.. (1981) *Essentials of Brownian Motion and Diffusion.* American Mathematical Society.

[25] Métivier M. (1982) *Semimartingales, a Course on Stochastic Processes.* de Gruyter Studies in Mathematics 2.

[26] Paley , Wiener P. (1934) *Fourier Transforms in the Complex Domain.* American Mathematical Society.

[27] Protter P. (1990) *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer-Verlag, New york.

[28] Revuz, D. y Yor, M. (1994) *Continuos Martingales and Brownian Motion*, 2nd ed., Springer berlin.

[29] Rogers, Williams (2000). *Diffusions, Markov Processes and Martingales, vol 1, Foundations.* Cambridge University Press .

[30] Tudor C. (2002) *Procesos Estocásticos, tercera edición.* Sociedad Matematica Mexicana.

[31] Sato Ken-Iti. (1999) *Levy Processes and infinitely divisible distributions.*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[32] Shiryaev A.N. (1995) *Probability 2nd. Edition.* Springer.

[33] Yor M. (1992) *Some Aspects of Brownian Motion vol I y II.* Birkhauser.

Introducción

En la actualidad, los procesos estocásticos son una herramienta muy utilizada, tanto en matemáticas como en otras disciplinas como son ingeniería, telecomunicaciones, medio ambiente, genética, estadística, biología, economía y finanzas. Asimismo, dentro de las matemáticas existe una conexión entre los procesos estocásticos y áreas tales como ecuaciones en derivadas parciales, semigrupos de operadores y la teoría del potencial, por mencionar algunas.

Los procesos de Lévy son, esencialmente, procesos estocásticos con incrementos independientes y estacionarios en el tiempo. Su importancia radica en que son la generalización de las caminatas aleatorias, además de ser objetos matemáticos que tienen propiedades muy importantes, razón por la cual son un buen fundamento para estudiar los procesos estocásticos en general.

En este trabajo se presentan los procesos de Lévy de la manera más general posible y se presentarán siguiendo muy de cerca los libros de Applebaum [1] y Sato [31]. Si bien la bibliografía es escasa, se tiene que con estos dos libros se cubre de una manera detallada las propiedades más generales de estos procesos.

El propósito de este trabajo es desarrollar la estructura de los Procesos de Lévy, y presentar una prueba del importante teorema de la descomposición de Lévy-Itô. Este teorema resulta importante pues con su uso se puede concretar una integral estocástica con respecto a procesos de Lévy, que de manera directa no seria tan claro precisarla.

La estructura básica de estos procesos fue entendida en la década de 1930-1940, y mucho de esto se le debe al probabilista francés Paul Lévy, al matemático ruso A. N. Khintchine y a K. Itô en Japón. En los últimos 10 aos los procesos de Lévy han tenido un resurgimiento importante, impulsados por las diferentes aplicaciones, en particular las ralacionadas con el área de finanzas, en el cálculo del precio de las opciones.

Los procesos de Lévy incluyen varios de los procesos más importantes como casos particulares, esto se discute en el capítulo 1, donde además se presenta la representación de Lévy-Khintchine referente a las distribuciones infinitamente divisibles y se da una parte de la prueba en este capítulo y se completa la prueba hasta el capítulo 3, como caso particular se ven los subordinadores y se terminará definiendo un semigrupo en convolución de medidas de probabilidad, de donde se podría obtener su generador infinitesimal, pero aquí no lo haremos. Para los resultados que no se prueban en este capítulo se da una referencia para su consulta.

En el capítulo 2 se introducen conceptos relacionados a procesos de Lévy, pero que pueden ser definidos para procesos más generales, como son el concepto de martingala, tiempos de paro y modificación de procesos, además se introducirá el concepto de medida aleatoria Poisson e integración de Poisson, la finalidad de esto es tener las herramientas necesarias para probar en el siguiente capítulo el teorema de la descomposición de Lévy-Itô, en este capítulo se prueba la mayor parte de los resultados.

EL teorema de la descomposición de Lévy-Itô se aborda en el último capitulo, siguiendo muy de cerca la presentación que realiza Applebaum, aunque aquí se presentan las pruebas de una manera m
as detallada y corrigiendo algún error. Se inicia con una serie de resultados previos, que se utilizarán como lemas en la prueba del teorema principal y finalizando con la prueba de la primera parte del teorema de la representación de Lévy-Khintchine. En este capítulo se realizan todas las pruebas de los resultados presentados.

Al inicio del trabajo se tiene un resumen de la notación más usada, esperando con eso que la lectura resulte mas cómoda.

En la parte final se tienen las conclusiones del trabajo, así como la bibliografía usada en este trabajo, y que sin duda podría servir para profundizar en los temas abordados, sin que esto signifique que sea completa o que sea la totalidad de la bibliografía existente de los temas discutidos aquí.

■

Notación

$\blacksquare$	Final de una prueba.
inf. div.	Infinitamente divisible
$B_b(s)$	El espacio de todas las funciones Borel medibles acotadas de $S \to I\!R$ con $S \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ localmente compacto con la topología usual
$\mu_1 * \mu_2$	Convolución de las medidas de probabilidad μ_1 y μ_2
$\stackrel{\mathcal{D}}{=}$	Equivalencia en distribución
$\mathcal{M}_1(I\!R^d)$	Conjunto de todas las medidas borelianas sobre $I\!R^d$
φ_X	La función característica de X
$X \sim \pi(c)$	X sigue una distribución Poisson
$X \sim \pi(c, \mu_Z)$	X sigue una distribución Poisson Compuesta con parámetros c en la Poisson y Z en la N
$\hat{B}_1(0)$	Bola abierta de radio 1 alrededor del 0
$(\ , \ )$	Producto interno
$\mathbf{sgn}(u)$	El signo de u
$S_d(1)$	El conjunto $\{x \in I\!R^d : \|x\| = 1\}$
$\| u \|$	Norma del vector u
$X \sim S\alpha S$	X es **v.a. Estable** simétrica con índice α
$B(t)$	Movimiento Browniano Estándar
$C_b(I\!R^d)$	Funciones continuas acotadas de $I\!R^d$ a $I\!R$
$\mathcal{M}$	Espacio lineal de las clases de equivalencias de Martingalas L^2.

c.s.	Casi seguramente.
$\wedge$	Mínimo de un conjunto.
$\vee$	Máximo de un conjunto.
$\chi_A(t)$	Función característica, 1 si $t \in A$, A un conjunto y cero en otro caso.
$\mathbb{1}_A(x)$	Función Indicadora, 1 si $x \in A$, A un conjunto y cero en otro caso.
varP(g)	La variación de g una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ sobre la partición P.
Var(X)	La varianza de la variable aleatoria X
V(g)	$\sup_P \mathrm{varP(g)}$
$X(t-)$	$\lim_{s \uparrow t} X(s)$
$\Delta X(t)$	$X(t) - X(t-)$
$L^2 - \lim_{n\to\infty} X(n) = X$	Convergencia en L^2, *i.e.* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\lvert X(n) - X\rvert^2) = 0$

Capítulo 1

Procesos de Lévy

En este capítulo se definirán los Procesos de Lévy, se verá el concepto de variables aleatorias infinitamente divisibles, el teorema de Lévy-Khintchine, algunos ejemplos de los Procesos de Lévy, y como caso particular los subordinadores, además veremos que los procesos de Lévy se pueden tratar como semigrupos en convolución de medidas de probabilidad.

1.1. Distribuciones Infinitamente Divisibles

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espacio de Probabilidad y $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ Un espacio medible. Un **Proceso Estocástico** con valores en $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ es una familia $X = (X_t)_{t \in I\!R}$ de funciones medibles $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{B})$.

Cuando no se indique el espacio de estados $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$, eso significa que estamos tomando el caso $(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = (I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$, donde $\mathcal{B}(I\!R^d))$ es la σ-algebrá de Borel.

Dos procesos estocásticos $X = (X_t, t \geq 0)$ y $Y = (Y_t, t \geq 0)$ son independientes si para toda $m, n \in I\!N$ y $0 \leq t_j < \infty$ con $j = 1, 2, \ldots, n$ y $0 \leq s_j < \infty$ con $j = 1, 2, \ldots, n$, las σ-álgebras $\sigma(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ y $\sigma(Y(s_1), Y(s_2), \ldots, Y(s_m))$ son independientes.

Similarmente, un proceso estocástico $(X_t, t \geq 0)$ y una sub σ-álgebra $\mathcal{G}$ son independientes si $\mathcal{G}$ y la σ-álgebra $\sigma(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ son independientes para toda $n \in I\!N$ y $0 \leq t_j < \infty, j = 1, 2, \ldots, n$ con $t_j \neq t_k$ para toda $j \neq k$.

La distribución finito-dimensional de un proceso estocástico X es la colección de medidas de probabilidad $(p_{t_1,t_2,\ldots,t_n}, 0 \leq t_j < \infty, j = 1, 2, \ldots, n, t_j \neq t_k, j \neq k, \quad n \in I\!N)$ definidas sobre $I\!R^{dn}$ para cada $n \in I\!N$ por :

$$p_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(\mathcal{H}) = \mathcal{P}\left[(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)) \in \mathcal{H}.\right]$$

para cada $\mathcal{H} \in \mathcal{B}(I\!R^{dn})$

Sea $\mathcal{M}_1(I\!R^d)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad Borelianas sobre $\mathcal{B}(I\!R^d)$ definimos la convolución de dos medidas de probabilidad como :

$$(\mu_1 * \mu_2)(A) = \int_{\boldsymbol{R}^d} \mu_1(A - x)\mu_2(\mathrm{d}x).$$

Para cada $\mu_i \in \mathcal{M}_1(I\!R^d), i = 1, 2$ y $A \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ donde $A - x = \{y - x, y \in A\}$.

Las siguientes proposiciones pueden ser de utilidad.

Proposición 1.1.1 *La convolución $\mu_1 * \mu_2$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(I\!R^d)$, para toda $\mu_1\mu_2 \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$.*

Prueba.- Sea $(A_n, n \in I\!N) \subset \mathcal{B}(I\!R^d)$, entonces para cada $x \in I\!R^d$, los miembros de la sucesión $(A_n - x, n \in I\!N)$ son tambien disjuntos y entonces

$$\begin{aligned}
(\mu_1 * \mu_2)\left(\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}\right) &= \int_{\boldsymbol{R}^d} \mu_1\left[\left(\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} A_n\right) - x\right]\mu_2(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^d} \mu_1\left[\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} (A_n - x)\right]\mu_2(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^d} \sum_{n\in\boldsymbol{N}} \mu_1(A_n - x)\mu_2(\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

y por el teorema de la convergencia dominada

$$\begin{aligned}
(\mu_1 * \mu_2)\left(\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}\right) &= \sum_{n\in\boldsymbol{N}} \int_{\boldsymbol{R}^d} \mu_1(A_n - x)\mu_2(\mathrm{d}x) \\
&= \sum_{n\in\boldsymbol{N}} (\mu_1 * \mu_2)(A_n)
\end{aligned}$$

Entonces $(\mu_1 * \mu_2)$ es una medida, sólo falta ver que es una medida de probabilidad, pero esto se sigue del hecho que la función de $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}^d$ dada por la traslación $y \to y - 1$ es una bijección, asi $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d - x$, de esta manera se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu_1(A - x)\mu_2(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_1(x)\mu_2(\mathrm{d}x) = 1$$

■

Denotaremos como $B_b(\mathbb{R}^d)$ al conjunto de funciones Borel medibles acotadas de $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}$, entonces se tienen los siguientes resultados, y su prueba puede consultarse en Applebaum [1], página 21.

Proposición 1.1.2 *Si $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$, entonces para toda $\mu_i \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, 2, 3$:*

1. $\int_{\mathbb{R}^d} f(y)(\mu_1 * \mu_2)(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x + y)\mu_1(\mathrm{d}y)\mu_2(\mathrm{d}x)$.
2. $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$
3. $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_3 * (\mu_2 * \mu_3)$.

Como corolario de la anterior proposición se tiene:

Corolario 1.1.1 *Sea X_1 y X_2 v.a.i. definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con distribución conjunta p y marginales μ_1 y μ_2, entonces para cada $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$,*

$$\mathbb{E}\left[f(X_1 + X_2)\right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)(\mu_1 * \mu_2)(\mathrm{d}z).$$

Por el corolario anterior se puede ver que:

$$\mathbb{P}[(X_1 + X_2) \in A] = \mathbb{E}[\chi_A(X_1 + X_2)] = (\mu_1 * \mu_2)(A).$$

La proposición 1.1.2 nos dice, además, que $\mathcal{M}_1(I\!R^d)$ es un *semigrupo Abeliano* bajo $*$, donde la identidad está dada por la función *delta de Dirac* δ_0, donde δ_x está dada por :

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \text{A}; \\ 0 & si \quad x \notin \text{A}. \end{cases}$$

Para todo Boreliano A, así $\delta_0 * \mu = \mu * \delta_0 = \mu$ para toda $\mu \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$.

Ahora definamos $\mu^{*n} = \mu * \mu * \ldots * \mu * \mu$ (n veces) y diremos que μ tiene una raíz n-ésima, en términos de la convolución, si existe $\mu^{1/n} \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$ tal que :

$$(\mu^{1/n})^{*n} = \mu.$$

Introduzcamos el concepto de variable aleatoria infinitamente divisible y algunas propiedades de este tipo de distribuciones y se verá más adelante que los procesos de Lévy están relacionados con este tipo de distribuciones.

Definición 1.1.1 *Sea X una variable aleatoria que toma valores en $I\!R^d$ con función de densidad μ_x. Diremos que X es infinitamente divisible,(lo denotaremos como* **inf. div.** *) si para toda $n \in I\!N$, existe una sucesión de v.a.i.i.d. $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ tal que :*

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y_1^{(n)} + Y_2^{(n)} +, ..., +Y_n^{(n)}. \tag{1.1}$$

donde $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ significa que tienen la misma distribución.

Sea $\phi_X(u) = I\!E(e^{i(u,X)})$ la función característica de la variable aleatoria X con $u \in I\!R^d$. De manera más general se tiene que si $\mu \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$ entonces $\phi_\mu(u) = \int_{\boldsymbol{R}^d} e^{i(u,y)}\mu(\mathrm{d}y)$.

La siguiente proposición ayuda a determinar si una distribución es **inf. div.** , con la ayuda de la función característica y de la raíz n-ésima (en términos de la convolución).

Proposición 1.1.3 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *X es infinitamente divisible.*

2. *μ_X tiene una raíz n-ésima en términos de la convolución que además es idénticamente distribuida para cada $n \in I\!N$.*

3. *ϕ_X tiene una raíz n-ésima que es la función característica de una determinada variable aleatoria para cada $n \in I\!N$.*

La prueba de esta proposición se puede consultar en Applebaum [1], pág 23.

Enunciemos un resultado cuya prueba se deriva del resultado dado por Sato [31], pág. 33, Lema 7.6.

Proposición 1.1.4 *Si X es* **inf. div.** *entonces $\phi_X(\lambda) \neq 0$ para toda λ y existe una única función continua $\psi(\lambda) : I\!R^d \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\phi_X(\lambda) = \exp\{\psi(\lambda)\}$ con $\psi(0) = 0$.*

A la función ψ se le llama *exponente característico* ya que si dos v.a. tienen el mismo exponente entonces tienen la misma distribución, esto porque el resultado anterior nos asegura la existencia y unicidad del exponente característico.

1.2. Ejemplos de Distribuciones Infinitamente Divisibles

Ejemplo 1.2.1 Variables Aleatorias Gaussianas. Sea $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ un vector aleatorio. Decimos que X es Gaussiana o Normal, si $\exists\ M \in I\!R^d$ y una matriz estrictamente positiva definida $\mathcal{A}_{dXd}$ tal que X tiene como función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{det(\mathcal{A})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x - M, \mathcal{A}^{-1}(x - M)\right)\right\}.$$

para toda $x \in I\!R^d$.

Decimos que $X \sim N(M, \mathcal{A})$ donde el vector M es el vector de $I\!E(X)$ y $\mathcal{A}$ es la matriz de varianzas y covarianzas, es decir, $\mathcal{A} = I\!E[(X-M)(X-M)^T]$.

Mediante algunos cálculos se puede obtener la función característica de X.

$$\phi_X(u) = \exp\left[i(M,u) - \left(\frac{1}{2}\right)(u, \mathcal{A}u)\right]$$

de donde se obtiene,

$$[\phi_X(u)]^{1/n} = \exp\left[i\left(\frac{M}{n}, u\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(u, \frac{\mathcal{A}u}{n}\right)\right].$$

Así, X es **inf. div.** con $Y_j^{(n)} \sim N(\frac{1}{n}M, (1/n)\mathcal{A}) \quad \forall 1 \leq j \leq n$.

Ejemplo 1.2.2 Variables Aleatorias Poisson.

Sea X una v.a. que toma valores en $I\!N \cup \{0\}$, X es Poisson si existe $c > 0$ tal que

$$I\!P(X = n) = \frac{c^n}{n!}e^{-c}.$$

Diremos entonces que $X \sim \pi(c)$ y sabemos que $I\!E(X) = Var(X) = c$ por lo que al calcular la función característica se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_X(u) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{iux}\frac{e^{-c}c^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(ce^{iu})^x e^{-c}}{x!} \\
&= e^{-c}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(ce^{iu})^x}{x!} \\
&= e^{-c}\exp\left(ce^{iu}\right) \\
&= \exp\left[c(e^{iu}-1)\right].
\end{aligned}$$

de donde se tiene que X es **inf. div.** con $Y_j^{(n)} \sim \pi(c/n) \quad \forall 1 \leq j \leq n, n \in I\!N$.

Ejemplo 1.2.3 Variables Aleatorias Poisson Compuestas.

Supongamos que $\{Z(n), n \in I\!N\}$ es una sucesión de v.a.i.i.d. que toma valores en $I\!R^d$ con la misma distribución μ_Z para cada n y sea $N \sim \pi(c)$ independiente de $Z(n)$. Se define la *variable aleatoria Poisson Compuesta* como $X = Z(1) + Z(2) + \cdots + Z(N)$.

Se puede probar que para $u \in I\!R^d$ se tiene que,

$$\phi_X(u) = \exp\left\{\int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1]c \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\}.$$

Así, al buscar las variables aleatorias Y_j, se tiene

$$\begin{aligned}
\phi_X(u) &= \exp\left\{\int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1]c \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\} \\
&= \exp\left\{n\int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1]\frac{c}{n} \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\} \\
&= \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1]\frac{c}{n} \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{n}\exp\left\{\int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1]\frac{c}{n} \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{n}\phi_{Y_j^{(n)}}
\end{aligned}$$

con

$$\phi_{Y_j^{(n)}} = \exp\left\{\int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1]\frac{c}{n} \quad \mu_Z(\mathrm{d}y)\right\}.$$

De donde se concluye, que si X es Poisson Compuesto ($X \sim \pi(c, \mu_Z)$) entonces, haciendo $Y_j^{(n)} \sim \pi(c/n, \mu_Z)$ $\forall 1 \leq j \leq n$, se verifica que X es infinitamente divisible.

Algunas veces encontramos ejemplos de la siguiente forma :

Sea $X = X_1 + X_2$ donde X_1 y X_2 son independientes y $X_1 \sim N(m, A)$ y $X_2 \sim \pi(c, \mu_z)$, entonces para cada $u \in I\!R^d$ la función característica es de la forma:

$$\phi_X(u) = \exp\left[i(m,u) - \left(\frac{1}{2}\right)(u, Au) + \int_{I\!R^d} [e^{i(u,y)} - 1]c\mu_Z(\mathrm{d}y)\right]. \qquad (1.2)$$

se puede verificar que es **inf. div.** haciendo en la parte de la gaussiana como en el ejemplo 1.2.1 y en la parte de Poisson Compuesto como en el ejemplo 1.2.3.

1.3. El Teorema de Lévy-Khintchine.

Sea ν una *medida de Borel* definida en $I\!R^d - \{0\} = \{x \in I\!R^d, x \neq 0\}$. Diremos que ν es una *medida de Lévy* si :

$$\int_{I\!R^d - \{0\}} (|y|^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}y) < \infty.$$

como $|y|^2 \wedge \epsilon \leq |y|^2 \wedge 1$ siempre que $0 < \epsilon \leq 1$, entonces se puede verificar que $\nu[(-\epsilon, \epsilon)^c] < \infty$ para toda $\epsilon > 0$

Nota. Se puede ampliar la definición de medida de Lévy a $I\!R^d$ adoptando la condición adicional $\nu(0) = 0$.

Enunciemos el teorema de representación de *Lévy-Khintchine* que determina la forma general de las funciones características que provienen de variables aleatorias **inf. div.**

Antes necesitamos el *teorema de Continuidad de Lévy*, y la prueba puede consultarse en Jacod and Protter [21].

Teorema 1.3.1 Continuidad de Lévy *Si $\{\phi_n, n \in I\!N\}$ es una sucesión de funciones características y $\exists$ una función $\Psi : I\!R^d \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que, para toda $u \in I\!R^d$, $\phi_n(u) \longrightarrow \Psi(u)$ cuando $n \to \infty$ y Ψ es continua en 0 entonces Ψ es la función característica de una distribución.*

Teorema 1.3.2 Lévy-Khintchine. *Una medida $\mu \in \mathcal{M}_1(I\!R^d)$ es* **inf. div.** *si existe un vector $b \in I\!R^d$, una matriz positiva definida simétrica A_{dxd} y una medida de Lévy ν sobre $I\!R^d - \{0\}$ tal que para todo $u \in I\!R^d$,*

$$\phi_\mu(u) = \exp\left[i(b,u) - \frac{1}{2}(u,Au) + \int_{I\!R^d-\{0\}} \left[e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_{\hat{B}}(y)\right]\nu(\mathrm{d}y)\right]. \tag{1.3}$$

donde $\hat{B} = \hat{B}_1(0)$ es la bola abierta de radio 1 alrededor de $0 \in I\!R^d$.

Por otro lado, toda función de la forma anterior es la función característica de una medida de probabilidad **inf. div.** *sobre $I\!R^d$.*

Prueba.- La prueba de este importante resultado se hará en dos partes, por el momento sólo se prueba la segunda parte. En el tercer capítulo de este trabajo se probará la primera parte.

Primero mostraremos que el lado derecho de (1.3) es una función característica, para esto definamos $\{\alpha(n), n \in I\!N\}$ una sucesión en $I\!R$ tal que es monótona decreciente a $0 \in I\!R$ y además define, para toda $u \in I\!R^d, n \in I\!N$ a:

$$\begin{aligned}\phi_{\mu_n}(u) &= exp\left[i\left(b - \int_{\{0<|y|\le\alpha(n)\}^c\cap\hat{B}} y\nu(\mathrm{d}y), u\right)\right.\\ &\left.\quad -\frac{1}{2}(u,Au) + \int_{0<|y|\le\alpha(n)^c} [e^{i(u,y)} - 1]\nu(\mathrm{d}y)\right].\end{aligned}$$

Entonces para cada α_n se tiene la convolución de una distribución normal con una distribución Poisson compuesta, independientes entre sí, así como en (1.2) y entonces es la función característica de una medida de probabilidad μ_n y se tiene entonces que :

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(u) = \phi_\mu(u)$$

el hecho que ϕ_μ represente la convolución de una distribución normal con una poisson compuesta se sigue del *teorema de continuidad de Lévy*, esto si podemos probar que ϕ_μ es continua en $u = 0$. Para ver la continuidad, tenemos que para cada $u \in I\!R^d$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\psi_\mu(u) &= \int_{I\!R^d-\{0\}} \left[e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_{\hat{B}}(y)\right] \nu(\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\hat{B}-\{0\}} \left[e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\right] \nu(\mathrm{d}y) + \int_{\hat{B}^c} \left[e^{i(u,y)} - 1\right] \nu(\mathrm{d}y) \qquad (1.3.1)
\end{aligned}$$

y usando el hecho de que :

$$e^{iu} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!} + \frac{\theta|u|^n}{n!}.$$

se cumple para toda $u \in I\!R$, $n \in I\!N$ y alguna $\theta \in \mathbb{C}$ con $|\theta| < 1$.
Esto se puede consultar en Sato [31] pág. 40 lema 8.6

Tomando $n = 2$ se tiene que, $e^{iu} = 1 + iu + (\theta/2)|u|^2$, de donde se obtiene que:

$$|e^{iu} - 1 - iu| = |(\theta/2)u|^2 \leq (1/2)|u|^2$$

esto usando el *Teorema de Taylor* y el hecho de que la norma de θ está acotada por 1, y al aplicarlo a la primera integral de (1.3.1) puesto que el producto interno (u, y) esta en $I\!R$, se tiene,

$$|\psi_\mu(u)| \leq (1/2) \int_{\hat{B}-\{0\}} |(u,y)|^2 \nu(\mathrm{d}y) + \int_{\hat{B}^c} |e^{i(u,y)} - 1| \nu(\mathrm{d}y).$$

Ahora utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|\psi_\mu(u)| \leq (|u|^2/2) \int_{\hat{B}-\{0\}} |y|^2 \nu(\mathrm{d}y) + \int_{\hat{B}^c} |e^{i(u,y)} - 1| \nu(\mathrm{d}y).$$

Por último, usando las propiedades de la medida de Lévy y el teorema de la *Convergencia Dominada* se tiene que el lado derecho tiende a 0 si u tiende a 0.

Así, ϕ_μ es continua en 0 y por tanto es una función característica, y es fácil verificar que μ es **inf. div.** .

∎

Nota 1.3.1 A los miembros (b, A, ν) se les suele llamar las *Características* de la v.a. **inf.div.** X. Como ejemplos tenemos :

- Caso Gaussiano: $b = I\!E(X)$, A es la Matriz de Covarianzas, $\nu = 0$
- Caso Poisson: $b = 0, A = 0, \nu = c\delta_1$.
- Caso Poisson-compuesto: $b = 0, A = 0, \nu = c\mu$ donde $c > 0$ y μ es una medida de probabilidad sobre $I\!R^d$.

Nota 1.3.2 En la prueba del Teorema de Lévy-Khintchine, se escribió a la función característica como:

$$\phi_\mu(u) = e^{\eta(u)}.$$

con η una función tal que $\eta : I\!R^d \longrightarrow \mathbb{C}$. Llamaremos a η el **exponente de Lévy** y recordemos que también se le llama el exponente característico.

1.4. Variables Aleatorias Estables

Consideremos el problema del Límite Central en dimensión $d = 1$. Para esto definamos $\{Y_n, n \in I\!N\}$ una sucesión de variables aleatorias y construyamos la sucesión $\{S_n, n \in I\!N\}$ de sumas parciales reescaladas,

$$S_n = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n - b_n}{\sigma_n}.$$

donde $\{b_n, n \in I\!N\}$ es una sucesión arbitraria de números reales y $\{\sigma_n, n \in I\!N\}$ una sucesión de números positivos. Nos interesará el caso en que exista una v.a. X para la cual

$$\lim_{n\to\infty} I\!P(S_n \leq x) = I\!P(X \leq x). \tag{1.4}$$

para toda $x \in I\!R$, i.e. , $\{S_n, n \in I\!N\}$ converge en distribución a X. Si cada $b_n = nm$ y $\sigma_n = 0sqrtn\sigma$ para $m \in I\!R$ fijo y $\sigma > 0$, entonces por el teorema del Límite Central de De-Moivre-Laplace se tiene que $X \sim N(m, \sigma^2)$.

Más generalmente, una v.a. se dice que es **estable** si tiene un límite como en (1.4). Otra manera de definirlo es: *Una v.a. es* **estable** *si existen dos sucesiones de números reales* $\{c_n, n \in I\!N\}$ *y* $\{d_n, n \in I\!N\}$ *con cada* $c_n > 0$ *tal que*

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \stackrel{D}{=} c_n X + d_n. \tag{1.5}$$

donde $X_1, X_2, ..., X_n$ *son copias independientes de* X, *y decimos que* X *es* **Estrictamente Estable** *si cada* $d_n = 0$.

Para ver la equivalencia entre las dos definiciones hagamos $Y_j = X_j, b_n = d_n$ y $\sigma_n = c_n$ y se puede probar que c_n en (1.5) sólo puede ser de la forma $\sigma n^{\frac{1}{\alpha}}$ con $0 \leq \alpha \leq 2$. El parámetro α juega un papel preponderante en la teoría de las Variables Aleatorias Estables y se le suele llamar **Índice de Estabilidad**.

Expresando (1.5) en términos de las funciones características obtenemos que

$$[\phi_X(u)]^n = \exp{[iud_n]}\phi_X(c_n u).$$

para cada $u \in I\!R$.

Esto, ya que de (1.5) se deduce que todas las variables aleatorias estables son **inf. div.** , probaremos ahora esta afirmación.

Sea ϕ la función característica de una v.a. estable X y sean $X_1, X_2, ..., X_n$ las copias idénticas de esta v.a.. rescribiendo (1.5) en términos de sus funciones características tenemos.

$$[\phi_X(u)]^n = \phi_X(c_n u) \exp{(iud_n)}.$$

O de forma alternativa,

$$\phi_X(u) = \left[\phi_X\left(\frac{u}{c_n}\right)\right]^n \exp{[-iu\frac{d_n}{c_n}]}.$$

reemplazando u con u/c_n y haciendo

$$\phi_n(u) = \phi_X(c_n u) \exp\left[iu\frac{d_n}{nc_n}\right] \qquad \text{y } \phi(u) = [\phi_n(u)]^n.$$

se obtiene que ϕ es **inf. div.** .

La forma general de la tercia generadora, o las características de acuerdo a la Nota (1.3.1), de las **v.a. Estables** esta dada por el teorema siguiente:

Proposición 1.4.1 *Si X es* **v. a. Estable** *real, entonces su tercia característica tiene alguna de las siguientes formas :*

1. *Cuando $\alpha = 2, \nu = 0$, Entonces $N(b, A)$;*
2. *Cuando $\alpha \neq 2, A = 0$ y*

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}}\chi_{(0,\infty)}(x)\mathrm{d}x + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}}\chi_{(-\infty,0)}(x)\mathrm{d}x$$

Donde $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ y $c_1 + c_1 \geq 0$.

La prueba se puede encontrar en Sato [31] p. 80.

Una cuidadosa transformación de las integrales en el teorema 1.3.1 nos deja una forma mucho más conveniente de la función característica.

Teorema 1.4.1 *Una v.a. real X es estable si y sólo si existen $\sigma > 0, -1 \leq \beta \leq 1$ y $\mu \in I\!R$ tales que para toda $u \in I\!R$*

1. *Cuando $\alpha = 2$*
$$\phi_X(u) = \exp\left(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right).$$
2. *Cuando $\alpha \neq 1, 2$*
$$\phi_X(u) = \exp\left(i\mu u - \sigma^\alpha | u |^\alpha [1 - i\beta \mathrm{sgn}(u) \tan(\pi\alpha/2)]\right).$$
3. *Cuando $\alpha = 1$*
$$\phi_X(u) = \exp\left(i\mu u - \sigma | u | [1 + i\beta\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(u) \log(| u |)]\right).$$

De aquí se puede mostrar que $I\!E(X^2) < \infty$ si y sólo si $\alpha = 2$ (i.e. X es gaussiana) y que $I\!E(|X|) < \infty$ si y sólo si $1 < \alpha \leq 2$.

Todas las **v. a. Estables** con densidad f_X pueden ser clasificadas en tres grupos cerrados: (para mayor detalle consultar Feller [16] capítulo 17, sección 6).

La Distribución Normal , $\alpha = 2$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

La Distribución Cauchy , $\alpha = 1$, $\beta = 0$

$$f_X(x) = \frac{\sigma}{\pi[(x-\mu)^2 + \sigma^2]}$$

La Distribución de Lévy , $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$

$$f_X(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} e^{[-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}]}.$$

para $x > \mu$

Nota 1.4.1 *Si se tiene una* **v.a. Estable** *simétrica entonces por el teorema 1.9, página 165 de Gut [20], la simetría nos dice que la parte imaginaria no existe y del teorema* **1.4.1** *se obtiene que:*

$$\phi_X(u) = e^{(-\rho^\alpha |u|^\alpha)}$$

para toda $0 < \alpha \leq 2$. Donde $\rho = \sigma$ para $0 < \alpha < 2$ y $\rho = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ cuando $\alpha = 2$, esto lo denotaremos como $X \sim S\alpha S$.

Para obtener la generalización del teorema 1.4.1 a $I\!R^d$ es de manera directa al sustituir $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ y cada d_n por vectores así la forma de la *caracterización* de la proposición **1.4.1** se extiende directamenté, con el caso particular en que $\alpha \neq 2$, en el que la medida de Lévy resulta:

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{c}{|x|^{d+\alpha}} \mathrm{d}x \qquad \textit{donde} \quad c > 0.$$

Por lo que la extensión resulta:

Teorema 1.4.2 *Una variable aleatoria X que toma valores en $I\!R^d$ es estable si y sólo si para toda $u \in I\!R^d$ existe un vector $m \in I\!R^d$ y*

1. *Existe una matriz positiva definida simétrica $A_{d\times d}$ tal que si $\alpha \neq 2$,*

$$\phi_X(u) = \exp\left[i(m,u) - \frac{1}{2}(u, Au)\right].$$

2. *Existe una medida finita ρ sobre $S_d(1)$ tal que cuando $\alpha \neq 1, 2$,*

$$\phi_X(u) = \exp\left\{i(m,u) - \int_{S_d(1)} |(u,s)|^\alpha \left[1 - i\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\mathrm{sgn}(u,s)\right]\rho(\mathrm{d}s)\right\}.$$

3. *Existe una medida finita ρ sobre $S_d(1)$ tal que cuando $\alpha = 1$,*

$$\phi_X(u) = \exp\left\{i(m,u) - \int_{S_d(1)} |(u,s)| \left[1 + i\frac{2}{\pi}\mathrm{sgn}(u,s)\log|(u,s)|\right]\rho(\mathrm{d}s)\right\}.$$

donde $S_d(1) = \{x \in I\!R^d : |x| = 1\}$

Note que, para $0 < \alpha < 2$, X es simétrica si y sólo si,

$$\phi_X(u) = \exp\left(-\int_{s_d(1)} |(u,s)|^\alpha \rho(\mathrm{d}x)\right).$$

para cada $u \in I\!R^d$ y X es invariante bajo rotaciones rígidas para $0 < \alpha \leq 2$ si y sólo si la versión para $I\!R^d$ de la ecuación, de la **Nota 1.4.1**, se conserva.

Nota 1.4.2 *El símbolo $S_d(1)$ denota al conjunto $\{x \in I\!R^d : |x| = 1\}$, y notemos que este conjunto tiene dimensión $d-1$.*

1.5. Procesos de Lévy

Sea $X = (X_t, t \geq 0)$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$. Decimos que X tiene incrementos independientes si para cada $n \in I\!N$ y $0 \leq t_1 <$

$t_2 <, \ldots, < t_{n+1} < \infty$ las variables aleatorias $(X(t_{j+1}) - X(t_j), 1 \le j \le n)$ son independientes y tiene incrementos estacionarios si cada $X(t_{j+1}) - X(t_j) \stackrel{\mathcal{D}}{=} X(t_{j+1} - t_j) - X(0)$.

Definición 1.5.1 *X es un* **Proceso de Lévy** *si:*

1. *$X(0) = 0 \quad c.s.$*
2. *X tiene incrementos independientes y estacionarios.*
3. *X es estocásticamente continua, i.e., para toda $a > 0$ y toda $s \ge 0$,*

$$\lim_{t \to s} \mathbb{P}(|X(t) - X(s)| > a) = 0.$$

Se puede ver que bajo la presencia de (1) y (2), la condición (3) es equivalente a la condición,

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbb{P}(|X(t)| > a) = 0 \qquad \textit{para toda } a > 0.$$

Abordaremos ahora la relación entre las distribuciones **inf. div.** y los Procesos de Lévy mediante una proposición:

Teorema 1.5.1 *Si $X(t)$ es un Proceso de Lévy, entonces $X(t)$ es* **inf. div.** *para cada $t \ge 0$.*

Prueba.- X es **inf. div.** ya que dado $t \ge 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir,

$$X(t) = X_{\frac{t}{n}} + \left(X_{\frac{2t}{n}} - X_{\frac{t}{n}}\right) + \ldots + \left(X_t - X_{\frac{(n-1)t}{n}}\right) = \sum_{j=1}^{n} Y_j.$$

con $Y_j = X_{\frac{jt}{n}} - X_{\frac{(j-1)t}{n}} \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_{\frac{t}{n}}$.

Y como $X(t)$ es un Proceso de Lévy, entonces los miembros de la familia de v.a. $Y(j)$ son i.i.d.. Así, dado $n \in I\!N$ podemos escribir a $X(t)$ como una suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, por lo tanto $X(t)$ es **inf. div.** .

∎

Una propiedad importante del **Exponente de Lévy** asociado a los Procesos de Lévy es que $\eta(t,u) = t\eta(1,u)$ para cada $t \geq 0, u \in I\!R^d$, para probar esto, mostremos primero el siguiente Lema:

Lema 1.5.1 *Si $X(t)$ es estocásticamente continua, entonces la función $t \to \phi_{X(t)}(u)$ es continua para cada $u \in I\!R^d$.*

Prueba.- Primero veamos que si $B \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ y f es integrable entonces podemos escribir

$$\int_{X \in B} f(X(\omega)) I\!P(\mathrm{d}\omega) = \int_B f(x) p_X(\mathrm{d}x).$$

Asi, como $e^{i(u, X(s)(\omega))}$ es integrable, entonces se tiene que podemos usar el teorema de cambio de variable.

Para cada $s, t \geq 0$ con $s \neq t$ definamos $X(s,t) = X(t) - X(s)$. Y con $u \in I\!R^d$ fijo se sigue que la aplicación $y \to e^{i(u,y)}$ es continua en el origen, pues dado cualquier $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta_1 > 0$ tal que,

$$\sup_{0 \leq |y| \leq \delta_1} | e^{i(u,y)} - 1 | < \frac{\epsilon}{2}.$$

Y por la continuidad estocástica, podemos encontrar $\delta_2 > 0$ tal que cuando $0 < |t - s| < \delta_2$ y $I\!P(| X(s,t) | > \delta_1) < \frac{\epsilon}{4}$ entonces para todo $0 < |t - s| < \delta_2$ obtenemos :

$$|\phi_{X(t)}(u) - \phi_{X(s)}(u)| = | \int_\Omega e^{i(u, X(s)(\omega))} [e^{i(u, X(s,t)(\omega))} - 1] I\!P(\mathrm{d}\omega)|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} | e^{i(u,X(s)(w))}[e^{i(u,y)} - 1]p_{X(s,t)}(\mathrm{d}y) |$$

y como

$$| e^{i(u,y)} |= 1.$$

Definiendo $\beta_{\delta_1}(0)$ como la bola de radio δ_1 alrededor del $0 \in \mathbb{R}^d$ entonces

$$\begin{aligned}
|\phi_{X(t)}(u) - \phi_{X(s)}(u)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |e^{i(u,y)} - 1|p_{X(s,t)}(\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\beta_{\delta_1}(0)} |e^{i(u,y)} - 1|p_{X(s,t)}(\mathrm{d}y) \\
&+ \int_{\beta_{\delta_1}(0)^c} |e^{i(u,y)} - 1|p_{X(s,t)}(\mathrm{d}y) \\
&\leq \sup_{0<|y|\leq\delta_1} |e^{i(u,y)} - 1| + 2\mathbb{P}(|X(s,t)| > \delta_1) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

y así la prueba se completa.

■

Así, tenemos el siguiente teorema que encierra la propiedad enunciada arriba.

Teorema 1.5.2 *Si X es un Proceso de Lévy entonces,*

$$\phi_{X(t)}(u) = e^{t\eta(u)}.$$

para cada $u \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$, donde η es el ***Exponente de Lévy*** *de $X(1)$.*

Prueba.- Si que X es un Proceso de Lévy entonces para cada $u \in I\!R^d$ y $t \geq 0$ Definamos $\phi_u(t) = \phi_{X(t)}(u)$ entonces por la propiedad (2) de la **definiciń 1.5.1** se tiene que para $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\phi_u(t+s) &= I\!E(e^{i(u,X(t+s))}) \\
&= I\!E(e^{i(u,X(t+s)-X(s))}e^{i(u,X(s))}) \\
&= I\!E(e^{i(u,X(t+s)-X(s))})I\!E(e^{i(u,X(s))}) \\
&= \phi_u(t)\phi_u(s). \qquad (1.5.2)
\end{aligned}$$

Ahora, por las propiedades (1) y (3) de la definición 1.5.1 y por el lema 1.5.1 se tiene que $\phi_u(0) = 1$ y entonces la aplicación $t \to \phi_u(t)$ es continua. Y la única solución a 1.5.2 y $\phi_u(0) = 1$ está dada por $\phi_u(t) = e^{t\alpha(u)}$, donde $\alpha : I\!R^d \to \mathbb{C}$, (véase para mayor detalle Bingham [6] pág 4-6).

Ahora por el lema 1.5.1 se tiene que $X(1)$ es **inf. div.**, de donde se obtiene que α es un **Exponente de Lévy** y se obtiene así el resultado.

■

Se puede mostrar que la suma de dos Procesos de Lévy ind. es a su vez un Proceso de Lévy.

Ahora, formulamos la formula de Lévy-Khintchine para un Proceso de Lévy $X = (X(t), t \geq 0)$:

$$\begin{aligned}
I\!E(e^{i(u,X(t))}) &= \exp\left(t\left[i(b,u) - \frac{1}{2}(u,Au)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \int_{I\!R^d-\{0\}} [e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_{\beta}(y)]\nu(\mathrm{d}y)\right]\right). \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Para cada $t \geq 0$, $u \in I\!R^d$, donde (b, A, ν) son las características de $X(1)$.

Los dos primeros términos del lado derecho de (1.6), corresponden a la parte continua o Browniana del proceso y el último término a la parte de los saltos del proceso. Además, si los saltos son acotados se puede probar que X tiene todos los momentos hasta orden n con $n = 1, 2, \ldots$, la prueba la presentaremos en el capítulo 3.

A continuacíon se dará un resultado de convergencia para sucesiones de procesos de Lévy, y la prueba puede consultarse en Applebaum [1], pág 42.

Teorema 1.5.3 *Si $X = (X(t), t \geq 0)$ es un proceso estocástico y existe una sucesión de procesos de Lévy $\{X_n(t), t \geq 0\}$ tal que $X_n(t)$ converge en probabilidad a $X(t)$ para cada $t \geq 0$ y*

$$\lim_{n \to \infty} \limsup_{t \to 0} I\!P(|X_n(t) - X(t)| > a) = 0$$

para toda $a > 0$, entonces X es un proceso de Lévy.

1.6. Ejemplos de Procesos de Lévy

1.6.1. Movimiento Browniano y Procesos Gaussianos

Daremos a continuación un esbozo del Movimiento Browniano, quizás el proceso de Lévy más estudiado en el siglo pasado y que es por lo tanto, del que se tiene más conocimiento y del que existe más literatura.

Un Movimiento Browniano Estándar en $I\!R^d$ es un proceso de Lévy $B = B(t)$ para el cual

1. $B(t) \sim N(0, tI)$ para cada $t \geq 0$

2. B tiene trayectorias continuas.

De la definición se deduce inmediatamente que si B es un Movimiento Browniano estándar entonces la función característica está dada por

$$\phi_{B(t)}(u) = \exp\left(\frac{1}{2}t|u|^2\right).$$

para cada $u \in I\!R^d, t \geq 0$.

Denotaremos al i-ésimo componente de $B(t)$, como el proceso $B_i = \{B_i(t), t \geq 0\}$ y se puede ver que cada B_i es un Movimiento Browniano, y que son independientes dos a dos.

La construcción del Movimiento Browniano se puede encontrar en Karatzas and Shreve [22] págs. 47-59, además de otros autores como Paley y Wiener [26] .

Recordemos algunas propiedades importantes del M.B. que se pueden encontrar en Sato [31], Karatzas and Shreve [22], Roger and Williams [29], Knight [24] y Tudor [30], entre otros.

- Las trayectorias de $B(t)$ tiene variación infinita sobre cada intervalo compacto y como consecuencia c.s. las trayectorias en ningún punto son derivables, ver Tudor [30] pág. 216-217.
- Para toda sucesión $\{t_n, n \in I\!N\}$ en $I\!R^+$ con $t_n \uparrow \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \inf B(t_n) = -\infty \text{ c.s.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup B(t_n) = \infty \text{ c.s.}$$

- La ley del logaritmo iterado.

$$I\!P\left(\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B(t)}{\left[2t\log\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = 1\right) = 1.$$

algunas formas alternativas de este resultado se encuentran en Tudor [30] pág. 225.

Se puede profundizar en las propiedades del M.B. consultando Yor [33].

1.6.2. Procesos de Poisson

El proceso Poisson con intensidad $\lambda > 0$ es un proceso de Lévy $(N(t), t \geq 0)$ que toma valores en $I\!N \cup \{0\}$ con cada $N(t) \sim \pi(\lambda t)$, cuya función de probabilidad está dada por

$$I\!P\left(N(t) = n\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

para cada n=0,1,2,.... El proceso de Poisson es ampliamente usado en diversas aplicaciones y se puede consultar lo referente a la teoría de este proceso en Kingman [23].

Definamos, $(T_n, n \in I\!N \cup \{0\})$ como

$$T_n = \inf\{t \geq 0; N(t) = n\}$$

y $T_0 = 0$, las T_n son variables aleatorias no-negativas, usualmente llamadas tiempos de arribo y Kingman en [23] muestra que se distribuyen Gamma.

Mas aún, los tiempos entre arribos $T_n - T_{n-1}$ para cada $n \in I\!N$ son i.i.d. con distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$, esto se puede encontrar en Grimmett and Stirzaker [19] sección 6.8.

Las trayectorias de N son no decrecientes, tiene saltos de tamaño 1, es continua por pedazos y además en los intervalos donde es continua es constante, y por último, $\lim_{t\to\infty} N(t) = +\infty$.

Introduzcamos el Proceso de Poisson compensado, $\tilde{N} = (\tilde{N}(t), t \geq 0)$ donde $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$, así obtenemos, $I\!E\left(\tilde{N}(t)\right) = 0$ y además $I\!E\left(\tilde{N}^2(t)\right) = \lambda t$ para cada $t \geq 0$.

1.6.3. Proceso Poisson Compuesto

Sea $(Z(n), n \in I\!N)$ una sucesión de v.a.i.i.d. que toma valores en $I\!R^d$ con distribución común μ_Z y sea N un proceso Poisson con intensidad λ que es independiente de todas las $Z(n)$, así, el proceso Poisson Compuesto se define como:

$$Y(t) = Z(1) + Z(2) + \cdots + Z\left(N(t)\right) \tag{1.7}$$

para cada $t \geq 0$, entonces escribimos $Y(t) \sim \pi(\lambda t, \mu_Z)$.

Enunciemos una proposición,

Proposición 1.6.1 *El proceso Poisson Compuesto Y es un Proceso de Lévy.*

Prueba.- La condición (1) de la definición 1.5.1 es trivial pues como $N(0) = 0$ c.s., entonces $Y(0) = 0$ c.s..

Probemos la segunda condición, primero probemos que los incrementos son independientes, para esto tomemos $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ y como las variables aleatorias $Z(1), Z(2), \ldots, Z(N(t))$ son mutuamente independientes e independientes a su vez del proceso poisson $N(t)$, el cual tiene incrementos independientes, entonces las variables aleatorias

$$
\begin{aligned}
&\{Z(1), \ldots, Z(N(t_0)), N(t_0)\} \\
&\{Z(N(t_0)+1), \ldots, Z(N(t_1)), N(t_1) - N(t_0)\} \\
&\vdots \\
&\{Z(N(t_{n-1})+1), \ldots, Z(t_n), N(t_n) - N(t_{n-1})\}.
\end{aligned}
$$

son independientes, de donde se sigue que los incrementos

$$
\begin{aligned}
Y(t_0) - Y(0) &= Z(1) + \cdots + Z(N(t_0)) \\
Y(t_1) - Y(t_0) &= Z(N(t_0)+1) + \cdots + Z(N(t_1)) \\
&\vdots \\
Y(t_n) - Y(t_{n-1}) &= Z(N(t_{n-1})) + \cdots + Z(N(t_n)).
\end{aligned}
$$

del proceso Poisson Compuesto son independientes.

Ahora para mostrar que los incrementos son estacionarios, hagamos $t > 0$ y $h > 0$. Entonces $N(t+h) - N(t)$ tiene la misma distribución que $N(h)$, esto por ser $N(h)$ proceso de Lévy, y de esto se sigue que $Z(1), \ldots, Z(N(h))$ tiene la misma distribución que $Z(N(t) + 1), \ldots, Z(N(t+h))$, entonces

$$Y(t+h) - Y(t) = Z(N(t)+1) + \cdots + Z(N(t+h))$$

tiene la misma distribución que

$$Y(h) = Z(1) + \cdots + Z(N(h))$$

Y así, se tiene que Y(t) tiene incrementos independientes y estacionarios.

para mostrar la condición (3) hagamos lo siguiente: sea $a > 0$ y calculemos $I\!P(|Y(t)| > a)$ esto, condicionando y usando la independencia de las $\{Z(k)\}$ con $N(t)$, y entonces obtenemos

$$I\!P(|Y(t)| > a) = \sum_{n=0}^{\infty} I\!P(|Z(1) + \cdots + Z(n)| > a) I\!P(N(t) = n).$$

Y como

$$\lim_{t \downarrow 0} I\!P(N(t) = n) = 0.$$

para toda $n \in I\!N$ se sigue que

$$\lim_{t \downarrow 0} I\!P(|Y(t)| > a) = 0.$$

Así, Y(t) es un proceso de Lévy.

■

De la sección de **inf. div.** se tiene que Y tiene **Exponente de Lévy**

$$\eta_Y(u) = \left[\int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(u,y)} - 1) \lambda_{\mu_Z}(\mathrm{d}y) \right]$$

Así, como en el caso del proceso Poisson, se tiene que las trayectorias de Y son continuas por pedazos, mas aun en los intervalos donde es continua es constante, teniendo saltos ya sean positivos o negativos.

Este tipo de procesos tiene importantes aplicaciones en los modelos del riesgo de seguros, veamos un ejemplo típico, para esto, consideremos el siguiente modelo para la evaluación del capital de una compañía de seguros. Definamos para $t \geq 0$, la variable aleatoria

$$X(t) = X_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k.$$

con $\{Z_k\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. positivas.

Ahora, el proceso $\{X(t)\}$ modela el capital de la aseguradora, donde el capital inicial X_0 es real positivo, la constante $c > 0$ es la tasa de pagos de las primas de los seguros que la aseguradora recibe y se supone, además, que el numero de reclamos sigue una distribución poisson $N(t)$ y el pago de cada reclamación se distribuye como Z_k. Aquí se supone que $Z_k > 0$ para toda k.

A partir de este modelo, se hace importante conocer la probabilidad de ruina, esto es, de que la variable aleatoria $X(t) < 0$ para alguna t, que en términos de probabilidad es

$$I\!P(\exists t \geq 0 : X(t) < 0).$$

En general, no es posible calcular explícitamente esta probabilidad, salvo en el caso particular en que las Z_k se distribuyen exponenciales, que es el único caso en se puede calcular de manera exacta.

Para un estudio más profundo véase el libro de Embrechts, Kluppelberg y Mikosch [13], tambien puede consultarse el libro de Asmussen [2].

También se usa este modelo para modelar teoría de colas, como conmutadores, filas de bancos, etc., y en general se usa la misma expresión descrita arriba, salvo que en este caso la constante $c < 0$ y en lugar de restar la ultima expresión esta se suma, así

$$X(t) = X_0 + ct + \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k.$$

Y aquí la probabilidad de ruina es vista como la probabilidad de vaciar el conmutador o que no haya nadie en espera.

Claramente un proceso Poisson Compuesto es Poisson si $d = 1$ y cada $Z(n) = 1$ c.s., de esta manera, $\mu_Z = \delta_1$.

Proposición 1.6.2 *Si $(N_1(t), t \geq 0)$ y $(N_2(t), t \geq 0)$ son dos procesos Poisson independientes definidos en el mismo espacio muestral, con tiempos de arribo $(T_n^{(j)}, n \in I\!N)$ para cada $j = 1, 2$ respectivamente, entonces*

$$I\!P\left(T_m^{(1)} = T_n^{(2)} \text{ para alguna } m, n \in I\!N\right) = 0.$$

Prueba.- Sea $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ para cada $t \geq 0$, entonces como la suma de dos procesos de Lévy ind. es a su vez un proceso de Lévy y mediante un calculo directo de la función característica de N se obtiene que es otra vez un proceso de Poisson. De donde, para cada $t \geq 0$, podemos escribir $N(t) = Z(1) + \cdots + Z(N(t))$ donde $(Z(n), n \in I\!N)$ son i.i.d. con cada $Z(n) = 1$ c.s..

Ahora, sean $m, n \in I\!N$ tal que $T_m^{(1)} = T_n^{(2)}$ c.s., y si estos son los primeros tiempos de ocurrencia de estos eventos , se sigue entonces que $Z(m+n-1) = 2$ c.s. , lo cual es una contradicción, de donde se obtiene el resultado.

■

1.6.4. Procesos Lévy Estables.

Un proceso Lévy estable es un proceso de Lévy X tal que cada $X(t)$ es una variable aleatoria estable **v. a. Estables** . Por lo tanto, el **Exponente de Lévy** está dado por el **teorema 1.4.2.**, el caso de interés particular es cuando X es invariante bajo rotaciones rígidas, que implica que el **Exponente de Lévy** este dado mediante

$$\eta(u) = -\sigma^\alpha \mid u \mid^\alpha$$

donde $0 < \alpha \leq 2$ es el índice de estabilidad y $\sigma > 0$

Una razón por la que los procesos de Lévy estables son importantes en las aplicaciónes es que ellos tienen la propiedad de auto-similaridad. En general, un proceso estocástico $Y = (Y(t), t \geq 0)$ es auto-similar con índice $H > 0$ de Hurst si los dos procesos $(Y(at), t \geq 0)$ y $(a^H Y(t), t \geq 0)$ tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales para toda $a \geq 0$.

Al examinar la función característica de los procesos de Lévy estables que son invariantes bajo rotaciones rígidas, es fácil verificar, que son auto-similares con índice de Hurst $H = \frac{1}{\alpha}$, y como caso particular, el Movimiento Browniano es auto-similar con índice $H = 1/2$.

Se puede profundizar en las propiedades de los procesos auto-similares en Embrechts and Maejima [14], ellos muestran que un proceso de Lévy X es auto-similar si y sólo si cada $X(t)$ es estrictamente estable.

1.7. Subordinadores

Un Subordinador es un proceso de Lévy de dimensión uno que es no decreciente con probabilidad 1, también se puede pensar a tales procesos como un modelo aleatorio de evolución del tiempo. Si $T = (T(t), t \geq 0)$ es un subordinador entonces :

$$T(t) \geq 0 \text{ c.s. para cada } t > 0.$$

y

$$T(t_1) \leq T(t_2) \text{ c.s. con } t_1 \leq t_2.$$

Ahora, cuando $X(t) \sim N(0, At)$ se tiene que $I\!P(X(t) \geq 0) = I\!P(X(t) \leq 0) = 1/2$ de donde es claro que este tipo de procesos no puede ser un subordinador, más aún, la forma del **Exponente de Lévy** de los subordinadores queda expresada en el siguiente resultado

Teorema 1.7.1 *Si T es un subordinador, entonces su* ***Exponente de Lévy*** *tiene la forma*

$$\eta(u) = ibu + \int_0^\infty [\exp(iuy) - 1]\lambda(\mathrm{d}y) \tag{1.8}$$

donde $b \geq 0$ y la medida de Lévy satisface la condición adicional

$$\lambda(-\infty, 0) = 0 \ \ y \ \int_0^\infty (y \wedge 1)\lambda(\mathrm{d}y) < \infty.$$

Inversamente, toda aplicación de $I\!R^d \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forma 1.8 es el ***Exponente de Lévy*** *de un subordinador.*

La prueba puede consultarse en Bertoin [4] teorema 1.2 y en Rogers and Williams [29] pág. 78-79. Llamaremos a (b, λ) el *par Característico* del subordinador T.
Se puede mostrar que la condición adicional de la medida de Lévy de los subordinadores es equivalente a

$$\int_0^\infty \frac{y}{1+y}\lambda(\mathrm{d}y) < \infty.$$

Además, para $t \geq 0$ la aplicación $u \longrightarrow \mathbb{E}(e^{iuT(t)})$ es analítica sobre la región $\{iu, u > 0\}$ entonces al hacer la transformada de Laplace de la distribución obtenemos :

$$\mathbb{E}(e^{-uT(t)}) = \exp\left(-t\psi(u)\right).$$

donde

$$\psi(u) = -\eta(iu) = bu + \int_0^\infty (1 - e^{-uy})\lambda(\mathrm{d}y). \tag{1.9}$$

para $u > 0$. A la función ψ usualmente se la llama el *exponente de Laplace* del subordinador.

Veamos algunos ejemplos de subordinadores.

Ejemplo 1.7.1 Proceso Poisson. Los procesos de Poisson son claramente subordinadores. en el caso del proceso Poisson Ccompuesto este será subordinador si las $Z(n)$ de la expresión 1.7 son no negativas.

Ejemplo 1.7.2 Subordinadores $\alpha-$Estables. Primero mostremos un resultado para poder probar que este tipo de procesos son subordinadores, esta identidad es:

$$u^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-ux})}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x.$$

para $u \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$.
Para probar esto, sigamos el procedimiento que Sato utiliza en [31] pág. 46 en el ejemplo 8.1, en donde una integral de dimensión uno la

convierte en una integral doble, así pues se tiene

$$\int_0^\infty (1-e^{-ux})x^{-1-\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_0^x ue^{-uy}\mathrm{d}y\right) x^{-1-\alpha}\mathrm{d}x$$

Y por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty x^{-1-\alpha}\mathrm{d}x\right) ue^{-uy}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{x=y}^{\infty} ue^{-uy}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{0-y^{-\alpha}}{-\alpha}\right] ue^{-uy}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \frac{y^{-\alpha}}{\alpha} ue^{-uy}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

haciendo $x = uy$ se obtiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{u}{\alpha}\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{u}\right)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{u} \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-x}\frac{x^{-\alpha}}{u^{-\alpha}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{u^\alpha}{\alpha}\int_0^\infty e^{-x}x^{-\alpha}\mathrm{d}x \\
&= \frac{u^\alpha}{\alpha}\Gamma(1-\alpha).
\end{aligned}$$

De donde se obtiene que

$$u^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{(1-e^{-ux})}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

para $u \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$

Ahora, por la expresión (1.9) y por el Teorema **1.7.1** y por la Proposición **1.4.1** se tiene que para $0 < \alpha < 1$ existe un subordinador α-estable T con exponente de Laplace

$$\psi(u) = u^\alpha.$$

con características $(0, \lambda)$ donde

$$\lambda(\mathrm{d}x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}}.$$

Ejemplo 1.7.3 **El Subordinador de Lévy.** El subordinador $\frac{1}{2}$-estable tiene una distribución dada por la distribución de Lévy, con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = t^2/2$ de tal manera que

$$f_{T(t)}(s) = \left(\frac{t}{2\sqrt{\pi}}\right) s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t^2}{4s}}$$

para $s \geq 0$. El Subordinador de Lévy tiene una interpretación como un tiempo de paro para un Movimiento Browniano estándar de dimensión uno $(B(t), t \geq 0)$ más aun, se puede probar que

$$T(t) = \text{ínf}\left\{s > 0; B(s) = \frac{t}{\sqrt{2}}\right\}. \tag{1.11}$$

Esto lo probaremos en el capítulo 2, usando propiedades de martingalas.

Ejemplo 1.7.4 **Subordinadores Gaussianos inversos.** En el ejemplo anterior teníamos que el subordinador de Lévy podía verse como el tiempo de paro de un Movimiento Browniano estándar en una dimensión, ahora, si generalizamos el ejemplo anterior al sustituir el Movimiento Browniano por el proceso gaussiano $C = (C(t), t \geq 0)$ donde cada $C(t) = B(t) + \gamma t$ con $\gamma \in I\!R$, así, el subordinador gaussiano inverso se define mediante

$$T(t) = \text{ínf}\,\{s > 0; C(s) = \delta t\}.$$

donde $\delta > 0$.

Probaremos en el segundo capítulo, mediante propiedades de martingalas, que para cada $t, u > 0$

$$I\!E(e^{-uT(t)}) = \exp\left[-t\gamma(\sqrt{2u + \gamma^2} - \gamma)\right]. \tag{1.12}$$

Ejemplo 1.7.5 Subordinadores Gamma. Sea $(T(t), t \geq 0)$ un proceso Gamma con parámetros $a, b > 0$, tal que cada $T(t)$ tiene densidad

$$f_{T(t)}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx}.$$

para $x \geq 0$; entonces se encuentra fácilmente que para $u \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-ux} f_{T(t)}(x)\mathrm{d}x &= \int_0^\infty e^{-ux} \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-(u+b)x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{b^{at}}{(u+b)^{at}} \int_0^\infty \frac{(u+b)^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-(u+b)x}\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{b}{u+b}\right)^{at} \\
&= \left(\frac{u+b}{b}\right)^{-at} \\
&= \exp\left[-ta\log(1+\frac{u}{b})\right].
\end{aligned}$$

y tambíen se puede ver que como

$$-\int_0^\infty e^{-\nu x} x^{-1}\mathrm{d}x = \log \nu.$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1-e^{-ux}) a x^{-1} e^{-bx}\mathrm{d}x &= \int_0^\infty a x^{-1} e^{-bx}\mathrm{d}x - \int_0^\infty a x^{-1} e^{-(u+b)x}\mathrm{d}x \\
&= a\int_0^\infty x^{-1} e^{-bx}\mathrm{d}x - a\int_0^\infty x^{-1} e^{-(u+b)x}\mathrm{d}x \\
&= -a\log(b) + a\log(u+b) \\
&= a\log\left(1+\frac{u}{b}\right).
\end{aligned}$$

Así, al combinar los resultados se obtiene que

$$\begin{aligned}
I\!\!E\left(e^{-ux}\right) &= \exp\left[-ta\log(1+\frac{u}{b})\right] \\
&= \exp\left[-t\int_0^\infty (1-e^{-ux}) a x^{-1} e^{-bx}\mathrm{d}x\right].
\end{aligned}$$

De aquí, se desprenden varias cosas, primero que $(T(t), t \geq 0)$ es un subordinador donde el par característico esta dado por $b = 0$ y $\lambda(\mathrm{d}x) = ax^{-1}e^{-bx}$ y con exponente de Laplace $\psi(u) = a\log(1 + u/b)$, además, veremos más adelante que ψ es la función de Bernstein asociada.

Diremos que una función $f \in C^{\infty}((0,\infty))$ con $f \geq 0$ es *completamente monótona* si $(-1)f^{(n)} \geq 0$ para toda $n \in I\!N$ y que es una *función de Bernstein* si $(-1)f^{(n)} \leq 0$ para toda $n \in I\!N$.
Así, tenemos el siguiente resultado

Proposición 1.7.1 *1. f es una función de Bernstein si y sólo si la función $x \to \exp(-tf(x))$ es completamente monótona para toda $t \geq 0$*

2. f es una función de Bernstein si y sólo si tiene su representación de la forma

$$f(x) = a + bx + \int_0^{\infty} (1 - e^{-yx})\lambda(\mathrm{d}x).$$

para cada $x > 0$ donde $a, b \geq 0$ y $\int_0^{\infty} (y \wedge 1)\lambda(\mathrm{d}y) < \infty$

3. g es completamente monótona si y sólo si existe una medida μ en $[0,\infty)$ para la cual

$$g(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy}\mu(\mathrm{d}y).$$

La prueba de este resultado se puede encontrar en Berg and Forst [3] pág. 61-72.

Cuando se tiene el caso en que $a = 0$, al comparar el inciso 2 de la proposición anterior con la ecuación (1.9), se tiene que existe una correspondencia uno-a-uno entre las funciones de Bernstein para las cuales $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y los exponentes de Laplace de los Subordinadores. También se tiene que las transformaciones de Laplace de las distribuciones de los Subordinadores son siempre funciones completamente monótonas, y una subclase de todas las posibles medidas μ que describe la proposición en el inciso 3, están dadas por todas las posibles distribuciones $p_{T(t)}$ asociadas a los subordinadores.

Sea f una función de Bernstein con $a > 0$ y sea T un Subordinador con exponente de Laplace $\psi(u) = f(u) - a$ para cada $u \geq 0$ y sea S una v.a. exponencial con parámetro a independiente de T, tal que S tiene densidad $g_S(x) = ae^{-ax}$ para cada $x \geq 0$.

Ahora definamos el proceso $T_S = (T_S(t), t \geq 0)$, el cual toma valores en $I\!R^+ \cup \{\infty\}$ y llamémosle el *Subordinador muerto*, mediante

$$T_S(t) = \begin{cases} T(t) & \text{para} \quad 0 \leq t < S, \\ \infty & \text{para} \quad t \geq S \end{cases}.$$

Así, se tiene la siguiente proposición

Proposición 1.7.2 *Existe una correspondencia uno-a-uno entre los Subordinadores muertos T_S y y las funciones de Bernstein f, dada por*

$$I\!E(e^{-uT_S(t)}) = e^{-tf(u)},$$

para cada $t, u \geq 0$.

Prueba.- Por la independencia de T con S se tiene que

$$\begin{aligned} I\!E(e^{-uT_S(t)}) &= I\!E(e^{-uT_S(t)}\chi_{[0,S)}(t)) + I\!E(e^{-uT_S(t)}\chi_{[S,\infty)}(t)) \\ &= I\!E(e^{-uT(t)})I\!P(t < S) \\ &= e^{-t\psi(u)}e^{-at} \\ &= e^{-t(\psi(u)+a)} \\ &= e^{-tf(u)}. \end{aligned}$$

■

Se ha usado el hecho de que $I\!P(t < S) = e^{-at}$ y la convención de que $e^{-\infty} = 0$.

Una de las más importantes aplicaciones de los subordinadores es el *cambio de tiempo*, este se define como sigue, sea X un proceso de Lévy arbitrario y sea T un subordinador definido en el mismo espacio muestral que X y pidamos que X y T sean independientes, definamos ahora un nuevo proceso $Z = (Z(t), t \geq 0)$ mediante,

$$Z(t) = X(T(t)).$$

para cada $t \geq 0$, tal que para $\omega \in \Omega$ se tenga $Z(t)(\omega) = X(T(t)(\omega))(\omega)$.

El proceso $Z(t)$ definido asi es un proceso de Lévy, para verlo, necesitamos antes el teorema de Kac, que se deja sin demostración y que puede consultarse en Bretagnolle, Chatterji and Meyer [9] pág. 175.

Teorema 1.7.2 *(***Kac.** *) Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independiente si y sólo si*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{n}(u_j, X_j)\right]\right) = \phi_{X_1}(u_1)\cdots\phi_{X_n}(u_n)$$

para toda $u_1, \ldots, u_n$ y donde ϕ_{X_j} es la función característica de la variable aleatoria X_j para toda j.

Entonces se tiene el siguiente teorema

Teorema 1.7.3 *$Z(t)$ es un Proceso de Lévy*

Prueba.- Probaremos que $Z(t)$ cumple con la definicion (1.5.1).
$Z(0) = 0$ es trivial, así que establezcamos primero los incrementos estacionarios
Sea $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ y denotaremos como p_{t_1,t_2} como la distribución conjunta de $T(t_1)$ y $T(t_2)$. Entonces por la independencia de X con T y el hecho de que X tiene incrementos estacionarios por ser proceso de Lévy, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z(t_2) - Z(t_1) \in A) &= \mathbb{P}(X(T(t_2)) - X(T(t_1)) \in A) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X(s_2) - X(s_1) \in A) p_{t_1,t_2}(ds_1, ds_2) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X(s_2 - s_1) \in A) p_{t_1,t_2}(ds_1, ds_2) \\
&= \mathbb{P}\left(X(T(t_2) - T(t_1)) \in A\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X(T(t_2 - t_1)) \in A\right) \\
&= \mathbb{P}(Z(t_2 - t_1) \in A).
\end{aligned}$$

Así, $Z(t)$ tiene incrementos estacionarios.
Para ver los incrementos independientes, sea $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \infty$ y denotemos p_{t_1,t_2,t_3} como la distribución conjunta de $T(t_1), T(t_2), T(t_3)$.
Para cualquier $y \in \mathbb{R}^d$ definamos $h_y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ mediante

$$h_y(s) = \mathbb{E}\left(e^{i(y, X(s))}\right).$$

y para cualesquiera $y_1, y_2 \in I\!R^d$ también definamos a la función f_{y_1,y_2} : $I\!R^+ \times I\!R^+ \times I\!R^+ \to \mathbb{C}$ como

$$\begin{aligned} f_{y_1,y_2}(u_1,u_2,u_3) &= I\!E\left(\exp\left[i(y_1, X(u_2) - X(u_1))\right]\right) \\ &\quad \times I\!E\left(\exp\left[i(y_2, X(u_3) - X(u_2))\right]\right). \end{aligned}$$

donde $0 \leq u_1 < u_2 < u_3 < \infty$. ahora condicionando y usando el hecho de que X es independiente de T y que X tiene incrementos independientes, se obtiene

$$\begin{aligned} &I\!E\left(\exp\left[i\{(y_1, Z(t_2) - Z(t_1)) + (y_2, Z(t_3) - Z(t_2))\}\right]\right) \\ &= I\!E\left[f_{y_1,y_2}(T(t_1), T(t_2), T(t_3))\right]. \end{aligned}$$

Ahora, como X tiene incrementos independientes obtenemos

$$f_{y_1,y_2}(u_1,u_2,u_3) = h_{y_1}(u_2 - u_1)h_{y_2}(u_3 - u_2).$$

para cada $0 \leq u_1 < u_2 < u_3 < \infty$, por lo que nos queda, usando los incrementos independientes de T,

$$\begin{aligned} &I\!E\left(\exp\left[i\{(y_1, Z(t_2) - Z(t_1)) + (y_2, Z(t_3) - Z(t_2))\}\right]\right) \\ &= I\!E\left(h_{y_1}(T_2 - T_1)h_{y_2}(T_3 - T_2)\right) \\ &= I\!E\left(h_{y_1}(T_2 - T_1)\right) I\!E\left(h_{y_2}(T_3 - T_2)\right) \\ &= I\!E\left(\exp\left[i(y_1, Z(t_2 - t_1))\right]\right) I\!E\left(\exp\left[i(y_1, Z(t_3 - t_2))\right]\right). \end{aligned}$$

y por el teorema de Kac se tiene que $Z(t_2) - Z(t_1)$ es independiente de $Z(t_3) - Z(t_2)$ y así se tiene que $Z(t)$ tiene incrementos independientes y el inciso (2) de la definición se cumple.

Para probar la continuidad estocástica, como X y T son continuas estocásticamente entonces para cualquier $a \in I\!R^d$ y dado $\epsilon > 0$ entonces podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < h < \delta \Longrightarrow I\!P(|X(h)| > a) < \epsilon/2$ y también podemos encontrar $\delta' > 0$ tal que si $0 < h < \delta' \Longrightarrow I\!P(| T(h) |> \delta) < \epsilon/2$.

Así, para $t \geq 0$ y toda $0 \leq h < \text{mín}\{\delta, \delta'\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
I\!P(|\, Z(h) \,|> a) &= I\!P(|\, X(T(h)) \,|> a) \\
&= \int_0^\infty P(|\, X(u) \,|> a) p_{T(h)}(\mathrm{d}u) \\
&= \int_{[0,\delta)} P(|\, X(u) \,|> a) p_{T(h)}(\mathrm{d}u) \\
&\quad + \int_{[\delta,\infty)} P(|\, X(u) \,|> a) p_{T(h)}(\mathrm{d}u) \\
&\leq \sup_{0 \leq u < \delta} P(|\, X(u) \,|> a) + I\!P(T(h) \geq \delta) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

■

El **Exponente de Lévy** del proceso subordinado $Z(t)$ queda determinada por la siguiente proposición

Proposición 1.7.3

$$\eta_Z = -\psi_T \circ (-\eta_X).$$

Prueba.- Para cada $u \in I\!R^d$ y $t \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
I\!E(\exp[i\eta_{Z(t)}(u)]) &= I\!E(\exp[i(u, X(T(t)))] \\
&= \int_0^\infty I\!E(\exp[i(u, X(s))]) p_{T(t)}(\mathrm{d}s) \\
&= \int_0^\infty \exp[-s(-\eta_X(u))] p_{T(t)}(\mathrm{d}s) \\
&= I\!E(\exp[-\eta_X(u) T(t)]) \\
&= e^{-t\psi_T(-\eta_X(u))}.
\end{aligned}$$

■

1.8. Semigrupos en Convolución de Medidas de Probabilidad

En esta sección veremos una importante caracterización de los procesos de Lévy. Sea $(p_t, t \geq 0)$ una familia de medidas de probabilidad en $I\!R^d$ y diremos que es *débilmente convergente* a δ_0 si

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{I\!R^d} f(y) p_t(\mathrm{d}y) = f(0).$$

para toda $f \in C_b(I\!R^d)$, donde $C_b(I\!R^d)$ denota al conjunto de todas las funciones continuas acotadas de $I\!R^d$ a $I\!R$.

Así, se tiene la siguiente proposición

Proposición 1.8.1 *Si X es un proceso estocástico donde $X(t)$ tiene distribución p_t para cada $t \geq 0$ y $X(0) = 0$ c.s. entonces $(p_t, t \geq 0)$ es débilmente convergente a δ_0 si y sólo si X es estocásticamente continua en $t = 0$*

Prueba.-
$(\Longleftarrow$
Suponiendo que X es estocásticamente continua en $t = 0$ y supongamos que $f \in C_b(I\!R^d)$ con $f \neq 0$; entonces dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{x \in B_\delta(0)} \mid f(x) - f(0) \mid \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

y existe $\delta' > 0$ tal que $0 < t < \delta' \Longrightarrow I\!P(|X(t)|) > \epsilon/(4M)$ donde $M = \sup_{x \in I\!R^d} |f(x)|$. Para esta t se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{I\!R^d} [f(x) - f(0)] p_t(\mathrm{d}x) \right| &\leq \int_{I\!R^d} |f(x) - f(0)| \, p_t(\mathrm{d}x) \\
&= \int_{B_\delta(0)} |f(x) - f(0)| \, p_t(\mathrm{d}x) \\
&\quad + \int_{[B_\delta(0)]^c} |f(x) - f(0)| \, p_t(\mathrm{d}x) \\
&\leq \sup_{x \in B_\delta(0)} |f(x) - f(0)| \\
&\quad + 2M I\!P(X(t) \in [B_\delta(0)]^c) \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

así, queda demostrado que el

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)p_t(\mathrm{d}y) = f(0).$$

y por lo tanto $(p_t, t \geq 0)$ es débilmente convergente.
$(\Longrightarrow$
Suponiendo que $(p_t, t \geq 0)$ es débilmente convergente a δ_0. Sea $r > 0$ fijo y $\epsilon > 0$. Sea $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ con soporte en $B_r(0)$, tal que $0 \leq f \leq 1$ y $f(0) > 1 - (\epsilon/2)$. Ahora, por ser débilmente convergente podemos encontrar $t_0 > 0$ tal que

$$0 \leq t < t_0 \Longrightarrow \left|\int_{\mathbb{R}^d}[f(x) - f(0)]p_t(\mathrm{d}y)\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

entonces encontramos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mid X(t) \mid > r) &= 1 - \mathbb{P}(\mid X(t) \mid \leq r) \\
&\leq 1 - \int_{B_r(0)} f(y)p_t(\mathrm{d}y) = 1 - \int_{\mathbb{R}^d} f(y)p_t(\mathrm{d}y) \\
&= 1 - f(0) + \int_{B_r(0)} [f(0) - f(y)]p_t(\mathrm{d}y \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

entonces X es estocásticamente continua en $t = 0$ y la proposición queda demostrada

■

Una familia de medidas de probabilidad $(p_t, t \geq 0)$ se dice que forma un *semigrupo en convolución* si

$$p_{s+t} = p_s * p_t \qquad \text{para toda} \qquad s, t \geq 0.$$

y se dice que es débilmente continuo si la familia es débilmente convergente.
Si además, la norma de p_t es menor o igual que uno, i.e., $\mid p_t \mid \leq 1$ se dice que es un semigrupo con contracción.

De manera trivial se puede probar que si $X(t)$ es un proceso de Lévy con distribución p_t entonces $(p_t, t \geq 0)$ es un semigrupo en convolución débilmente continuo, esto a partir de la proposición anterior y de la definición de proceso de Lévy.

Capítulo 2

Martingalas y Medidas Aleatorias

En este capitulo se introduce el importante concepto de Martingala y se estudia el tipo de martingala que los procesos de Lévy inducen, además de los resultados más importantes obtenidos con esta definición, también se dedica una parte al estudio de las medidas aleatorias, en particular, la medida aleatoria de Poisson y la integración de Poisson, esto con la finalidad de tratar en el siguiente capítulo la descomposición de Lévy-Itô.

2.1. Modificación de un proceso de Lévy

Sean los dos procesos de Lévy $(X(t), t \geq 0)$ y $(Y(t), t \geq 0)$ definidos en el mismo espacio de probabilidad. Diremos que Y es una *modificación* de X si para cada $t \geq 0$ se tiene que $\mathbb{P}(X(t) \neq Y(t)) = 0$, esto significa que tienen la misma distribución finito-dimensional.

Nota 2.1.1 *La definición anterior se puede hacer también como: Y es modificación de X si $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)) = 1$ para cada $t \geq 0$.*

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1.1 *Si X es un proceso de Lévy y Y es una modificación de X entonces Y es un proceso de Lévy con las mismas características de X.*

Para la prueba puede consultarse Applebaum [1], pág. 63.

Es posible dar otra definición que relaciona dos procesos de Lévy mediante la siguiente definición, dos Procesos de Lévy definidos en el mismo espacio de probabilidad son *indistinguibles* si el conjunto $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ es de medida cero o esta contenido en un conjunto de medida cero, en este caso la medida es una medida de probabilidad.

Además, si X y Y son modificaciones entonces existe un conjunto nulo N_t, tal que, si $\omega \notin N_t$, entonces $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ y el conjunto nulo N_t depende sólo de t. Ahora si X y Y son indistinguibles, entonces existe un sólo conjunto nulo N tal que si $\omega \notin N$, entonces $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo t, en otras palabras, las aplicaciones $t \to X_t(\omega)$ y $t \to Y_t(\omega)$ son las mismas para toda $\omega \notin N$, donde $I\!P(N) = 0$, además el conjunto N esta en $\mathcal{F}_t$ (donde $\mathcal{F}_t$ es una filtración la cual se definirá más adelante) para toda t, donde $\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos $I\!P$-nulos de $\mathcal{F}$.

Resulta obvio que si X y Y son indistinguibles, entonces uno es modificación del otro, la reciproca de esta afirmación es falsa.

2.2. Filtraciones y Procesos Adaptados

Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de un conjunto dado Ω. Diremos que una familia de sub-σ-álgebras $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ de $\mathcal{F}$ es una *Filtración* si

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \qquad \textit{cuando} \qquad s \leq t.$$

A $\mathcal{F}_t$ la interpretamos como todos los sucesos, hasta el tiempo t, sobre los cuales podemos decir si han ocurrido o no. Así, es obvio que con el transcurso del tiempo sabemos más, lo que se ve reflejado en la hipótesis de que la familia sea no decreciente.

A un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ que tiene una filtración se le llama *espacio de probabilidad filtrado*. También definimos $\mathcal{F}_\infty = \vee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$.

donde $a \vee b$ es el máximo de a, b. Además si se tiene una familia de σ-álgebras $(\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ tal que $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ para cada $t \geq 0$ a $\mathcal{G}_t$ se le llama *subfiltración* de $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

Definamos entonces un proceso adaptado.

Definición 2.2.1 .

- *Decimos que un proceso estocástico* $X = (X(t), t \geq 0)$ *definido en* $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ *es* **adaptado** *a la filtración* $\mathcal{F}_t$ *(o* $\mathcal{F}_t$*-adaptado) si*

$$X(t) \text{ es } \mathcal{F}_t\text{-medible para cada } t \geq 0.$$

- *La filtración* $(\mathcal{F}_t^X, t \geq 0)$ *definida por*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X(s) : 0 \leq s \leq t\}$$

es la **filtración natural** *de* X *(también llamada la filtración generada por* X*).*

Entonces, por todo lo anterior, es claro que si X es un proceso adaptado entonces se verifica que

$$I\!E(X(s) \mid \mathcal{F}_s) = X(s) \qquad \text{c.s. .}$$

Esto se desprende de que $\mathcal{F}_t$ contiene toda la información que nos permite describir el comportamiento de X hasta el tiempo t.

También se puede verificar que si X y Y son dos procesos $\mathcal{F}$-adaptados y $\alpha, \beta \in I\!R$ entonces por la medibilidad de X y Y se tiene que los siguientes son también procesos adaptados.

- $\alpha X + \beta Y = (\alpha X(t) + \beta Y(t), t \geq 0)$.
- $XY = (X(t)Y(t), t \geq 0)$.
- $f(X) = (f(X(t)), t \geq 0)$ donde F es una función Borel medible en $I\!R^d$.
- $\lim_{n\to\infty} X_n = (\lim_{n\to\infty} X_n(t), t \geq 0)$ donde $(X_n, n \in I\!N)$ es una sucesión de procesos adaptados que converge puntualmente c.s. para cada $t \geq 0$.

Si $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ es una filtración sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ podemos definir lo siguiente

- $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$.
- Si $\mathcal{F}$ es completa vamos a denotar con $\mathcal{F}_t^*$ a la σ-álgebra más chica que contiene a $\mathcal{F}_t$ y a todos los elementos de $\mathcal{F}$ de medida (o probabilidad) cero.

Si ademaś, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ entonces decimos que la filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ es *continua por la derecha*

Entonces podemos dar la siguiente definición

Definición 2.2.2 *Decimos que una filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ en un espacio de probabilidad completo satisface las* **condiciones usuales** *si :*

(a) *Es continua por la derecha, i.e., $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$.*

(b) *$\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos de medida (o probabilidad) cero, i.e., $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^*$.*

De manera equivalente, se puede decir que la filtración satisface las condiciones usuales si

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t^* \text{ para cada } t \geq 0.$$

Las condiciones usuales son útiles ya que bajo estas condiciones se tendrá que cada martingala tiene una modificación con trayectorias continuas por la derecha con límites por la izquierda, (o càdlàg en francés), este tipo de funciones las veremos en la siguiente sección.

Si se tiene una filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ se puede aumentar un poco, para que cumpla las hipótesis usuales, generalmente este aumento es insignificante, y nos va a permitir, además, que si existe una martingala (o supermartingala o submartingala) continua por la derecha se conserva si pasamos a la filtración aumentada, esto es, se sigue teniendo una martingala (o supermartingala o submartingala), estos conceptos los veremos más adelante.

El aumento de la filtración se muestra en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1 *Sea $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ una filtración en un espacio de probabilidad completo. Entonces la filtración $(\mathcal{F}^*_{t+}, t \geq 0)$ satisface las condiciones usuales. Además se tiene que*

$$(\mathcal{F}_{t+})^* = (\mathcal{F}^*_t)_+.$$

La prueba puede consultarse en Bojdecki [7], pág 7. Notemos que "el completar" la filtración y "el tomar el +" (o la continuidad por la derecha) conmutan, lo cual nos dice que no importa que le hagamos primero a la filtración siempre podemos hacerla más grande para poder cumplir con las condiciones usuales, sin que esto afecte de manera significativa.

A $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}^*_{t+}$ le llamaremos la *filtración aumentada*, y si X es un proceso estocástico a $\mathcal{G}^X_t = \mathcal{F}^{X*}_{t+}$ le llamaremos la *filtración natural aumentada.*

2.2.1. Funciones Càdlàg

Sea $I = [a, b]$ un intervalo en $I\!R^+$, la aplicación $f : I \longmapsto I\!R^d$ se dice que es càdlàg, (del francés *continue* àdroit, et limité àgauche) si para toda $t \in (a, b]$ se tiene que f tiene límites por la izquierda en t y f es continua por la derecha, i.e.

- para toda sucesión $(t_n, n \in I\!N)$ en I con cada $t_n < t$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(t_n)$ existe.
- para toda sucesión $(t_n, n \in I\!N)$ en I con cada $t_n \geq t$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t)$.

Claramente toda función continua es càdlàg, sin embargo, existe una amplia gama de otros ejemplos más interesantes, veamos uno muy particular, sea $d = 1$ y tomemos la función indicadora $f(t) = \chi_{[a,b)}(t)$ donde $a < b$. Si f es una función càdlàg denotemos los límites por la izquierda en cada punto $t \in (a, b]$ como $f(t-) = \lim_{s\uparrow t} f(s)$, además denotaremos $f(t-) = f(t)$ si y sólo si f es continua en t. Definamos la *función salto en t* como

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t-).$$

El siguiente resultado es de gran importancia para el cálculo estocástico, pues si se tiene una martingala càdlàg, entonces los puntos de discontinuidad que tiene la martingala es a lo más numerable.

Teorema 2.2.1 *Si f es una función càdlàg y si definimos el conjunto $S = \{t, \Delta f(t) \neq 0\}$, entonces S es a lo más numerable.*

Prueba.- Definamos para $k > 0$

$$S_k = \{t, |\Delta f(t)| > k\}.$$

Supongamos que S_k tiene al menos un punto de acumulación x y elijamos una sucesión $(x_n, n \in I\!N)$ en S_k que converge a x. Sin perdida de generalidad, supongamos que la convergencia es por el lado izquierdo y que la sucesión es no decreciente, esto ya que de cualquier sucesión podemos dar una subsucesión con estas características.

Ahora, para toda $n \in I\!N$ se tiene que $x_n \in S_k$, y como f tiene un límite por la izquierda de x_n se sigue que dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que para toda y, con $y < x_n$ que satisface $x_n - y > \delta$, entonces $f(x_n-) - f(y) = \epsilon_0(y)$ donde $|\epsilon_0(y)|| < \epsilon$.

Fijando $n_0 \in I\!N$ tal que para toda $m > n > n_0, x_m - x_n < \epsilon$, entonces

$$f(x_n) - f(x_m) = f(x_n) - f(x_n-) + f(x_n-) - f(x_m) = k_0 + \epsilon_0(m),$$

donde $\mid k_0 \mid > k$.

Así, es claro que $(f(x_n), n \in I\!N)$ no puede ser de Cauchy, de donde se sigue que f no tiene un límite por la izquierda en x. Por lo que S_k no tiene puntos de acumulación y se tiene entonces que es a lo más numerable.

Y como podemos escribir a S como

$$S = \bigcup_{n \in I\!N} S_{\frac{1}{n}}.$$

Se tiene entonces que S es a lo más numerable.

■

2.3. Martingalas

Sea X un proceso adaptado definido en un espacio de probabilidad filtrado que también satisface el hecho de que $\mathbb{E}(|X(t)|) < \infty$ para toda $t \geq 0$.

Decimos que X es *martingala* si para toda $0 \leq s < t < \infty$ se tiene que

$$\mathbb{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = X(s) \qquad \text{c.s. .} \tag{2.1}$$

Nota 2.3.1 *Si X es una martingala entonces la aplicación $t \to \mathbb{E}(X(t))$ es constante.*

La siguiente proposición nos dice como se inducen martingalas usando procesos de Lévy.

Proposición 2.3.1 *Si X es un proceso de Lévy con **Exponente de Lévy** η, entonces para cada $u \in \mathbb{R}^d$, $M_u = (M_u(t), t \geq 0)$ es una martingala compleja con respecto a $(\mathcal{F}_t^X, t \geq 0)$, donde cada*

$$M_u(t) = \exp\left[i(u, X(t)) - t\eta(u)\right].$$

Prueba.- Tenemos que para cada $t \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|M_u(t)|] &= \mathbb{E}[|e^{i(u,X(t))}e^{-t\eta(u)}|] \\
&= \mathbb{E}[|\ e^{i(u,X(t))}\ |]e^{-t\eta(u)} \\
&= \mathbb{E}(1)e^{-t\eta(u)} = e^{-t\eta(u)} < \infty
\end{aligned}$$

ahora para cada $0 \leq s \leq t$, escribamos de manera distinta la definición de $M_u(t)$

$$\begin{aligned}
M_u(t) &= \exp\left[i(u, X(t)) - t\eta(u)\right] \\
&= \exp\left[i(u, X(s)) + i(u, X(t)) - i(u, X(s)) - t\eta(u)\right] \\
&= \exp\left[i(u, X(s)) + i(u, X(t) - X(s)) - t\eta(u)\right] \\
&= \exp\left[i(u, X(s) - s\eta(u)) + i(u, X(t) - X(s) - t\eta(u) + s\eta(u))\right] \\
&= \exp\left[i(u, X(s)) - s\eta(u)\right] \exp\left[i(u, X(t) - X(s)) - (t-s)\eta(u)\right] \\
&= M_u(s) \exp\left[i(u, X(t) - X(s)) - (t-s)\eta(u)\right]
\end{aligned}$$

entonces por el inciso **(2)** de la definición 1.5.1 de Proceso de Lévy y por el teorema 1.5.2 se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_u(t) \mid \mathcal{F}_s^X) &= M_u(s)\mathbb{E}\left(\exp\left[i(u, X(t-s))\right]\right)\exp\left[-(t-s)\eta(u)\right] \\
&= M_u(s)\exp\left[(t-s)\eta(u)\right]\exp\left[-(t-s)\eta(u)\right] \\
&= M_u(s).
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $(M_u(t), t \geq 0)$ es una martingala compleja.

■

Algunos ejemplos de martingalas son:

1. $C(t) = \sigma B(t)$ donde $B(t)$ es un M.B. estándar y σ es una matriz de $r \times d$.
2. $\mid C(t) \mid^2 - tr(A)t$ donde $A = \sigma^T\sigma$.
3. $\exp\left[(u, C(t)) - \frac{1}{2}(u, Au)\right]$ donde $u \in \mathbb{R}^d$.
4. $\tilde{\mathrm{N}}(\mathrm{t})$ donde $\tilde{\mathrm{N}}$ es el proceso de Poisson compensado con intensidad λ de la subsección **1.6.2**.
5. $\tilde{N}^2(t) - \lambda t$.
6. $(\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_t), t \geq 0)$ donde Y es cualquier variable aleatoria en un espacio de probabilidad filtrado para el cual $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$.

Cuando se tienen martingalas de la forma (6) se les llama *cerradas o regulares*. A las martingalas que tiene media cero se les llama *centradas*. También se dice que son *continuas* si sus trayectorias son continuas.

Una martingala $(M(t), t \geq 0)$ es L^2 *o cuadrado integrable* (resp. *acotada en media cuadrática*) si :

$$\mathbb{E}\left[|M(t)|^2\right] < \infty \qquad \text{para toda} \quad t \geq 0.$$

(Resp.

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[|M(t)|^2\right] < \infty).$$

Demos una extensión del concepto de Martingala.
Un proceso adaptado X para el cual se tiene que $\mathbb{E}\left[|X(t)|\right] < \infty$ para

toda $t \geq 0$, se dice que es una *submartingala* si para toda $0 \leq s < t < \infty$ y $1 \leq i \leq d$

$$\mathbb{E}(X_i(t)|\mathcal{F}_s) \geq X_i(s) \qquad \text{c.s.}$$

y decimos que es *supermartingala* si para toda $0 \leq s < t < \infty$ y $1 \leq i \leq d$

$$\mathbb{E}(X_i(t)|\mathcal{F}_s) \leq X_i(s) \qquad \text{c.s.}.$$

Existe una generalización más fuerte del concepto de martingala, que es una clase de procesos llamados *Cuasimartingalas* que contiene a martingalas, supermartingalas y submartingalas, que además es una clase cerrada, para su estudio puede consultarse Tomasz Bojdecki [7] y también a Michel Métivier [25].

Una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es *convexa* si para cada $x, y \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \theta \leq 1$ se tiene que

$$\varphi(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta\varphi(x) + (1-\theta)\varphi(y).$$

Se tiene la siguiente desigualdad

Proposición 2.3.2 Desigualdad de Jensen. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y X una v.a. $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}\left[|X(t)|\right] < \infty$ y que $\mathbb{E}\left[|f(X(t))|\right] < \infty$ entonces*

$$f\left(\mathbb{E}\left[X(t)|\mathcal{K}\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[f(X(t))|\mathcal{K}\right].$$

Donde $\mathcal{K}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$.
En particular, si $f(x) = |x|^p$ para alguna $p \geq 1$, se obtiene la desigualdad

$$|\mathbb{E}\left[X(t)|\mathcal{K}\right]|^p \leq \mathbb{E}\left[|X(t)|^p|\mathcal{K}\right].$$

Una prueba de esta proposición se puede encontrar en Shiryaev [32] pág. 192. Usando el resultado anterior podemos probar la siguiente proposición,

Proposición 2.3.3 *Sea $(X(t), t \geq 0)$ una submartingala de un espacio de probabilidad filtrado a $\mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación convexa no decreciente de tal manera que $\mathbb{E}\left[|f(X(t))|\right] < \infty$ para cada $t \geq 0$. entonces el proceso $(f[X(t)], t \geq 0)$ es una submartingala.*

En particular, el proceso $(|X(t)|^p, t \geq 0)$, para $p \geq 1$ es submartingala.

Prueba.- Sea $s < t$, es claro que $f(X(t))$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $t \geq 0$. por hipótesis se tiene que

$$X(s) \leq I\!E[X(t)|\mathcal{F}_s]$$

y como f es no decreciente se tiene entonces

$$f[X(s)] \leq f[I\!E(X(t)|\mathcal{F}_s)]$$

y usando la desigualdad de Jensen se tiene

$$f[X(s)] \leq f[I\!E(X(t)|\mathcal{F}_s)] \leq Es[f(X(t))|\mathcal{F}_s].$$

De donde se tiene que $(f[X(t)], t \geq 0)$ es una submartingala.

■

Tenemos ahora la desigualdad para submartingalas de Doob,

Teorema 2.3.1 - Desigualdad de Doob. *Si* $(X(t), t \geq 0)$ *es una submartingala positiva entonces para toda* $p \geq 1$ *se tiene*

$$I\!E\left(\sup_{0\leq s\leq t}[X(s)]^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p I\!E([X(t)]^p).$$

Para la prueba en el caso discreto puede consultarse Roger and Williams [29] pág. 143 y para el caso continuo Dellacherie y Meyer [11] dan una prueba en la pág. 18, otra prueba puede encontrarse en Revuz y Yor [28], sección 2.1.

También notemos que si $X = (X(t), t \geq 0)$ es una martingala que toma valores en $I\!R^d$, entonces el componente i-ésimo $(X_i^2(t), t \geq 0)$ es una submartingala en los reales para cada $1 \leq i \leq d$ y entonces por la desigualdad de Doob, se tiene que para cada $t \geq 0$

$$\begin{aligned} I\!E\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X(s)|^2\right) &\leq \sum_{i=1}^d I\!E\left(\sup_{0\leq s\leq t}X_i^2(s)\right) \leq \sum_{i=1}^d q^2 I\!E(X_i^2(t)) \\ &= q^2 I\!E(|X(t)|^2) \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Si bien la siguiente propiedad ya la habíamos establecido, no con la formalidad de un resultado, así pues se tiene el siguiente teorema

Teorema 2.3.2 *Sea $M = (M(t), t \geq 0)$ una submartingala entonces*

1. *Para todo subconjunto denso numerable D de $\mathbb{R}^+$, los siguientes límites por la izquierda y por la derecha existen y son finitos c.s. para cada $t \geq 0$*

$$M(t-) = \lim_{s \in D, s \uparrow t} M(s)$$
$$M(t+) = \lim_{s \in D, s \downarrow t} M(s).$$

2. *Si la filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ satisface las condiciones usuales y si la aplicación $t \to \mathbb{E}(M(t))$ es continua por la izquierda, entonces M tiene una modificación que es* càdlàg.

La prueba de este resultado se puede encontrar en Delacherrie and Meyer [11] pág. 76-76. y en Revuz and Yor [28] pág. 63-65.

El siguiente resultado asegura la existencia de una modificación de un proceso de Lévy que además es càdlàg, para probarlo necesitamos antes un lema.

Lema 2.3.1 *Sea $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales tal que e^{iux_n} converge cuando $n \to \infty$ para todo $u \in \mathbb{R}$ entonces x_n converge a un límite finito.*

Prueba.- Para probar este lema utilizaremos el criterio de Cauchy : x_n converge si para toda sucesiones crecientes de números reales n_k y m_k el límite $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - x_{m_k}) = 0$.

Para esto definamos U una v.a. con distribución uniforme sobre $[0, 1]$. Ahora para todo $t \in \mathbb{R}$ por hipótesis se tiene que con probabilidad 1 $\exp(itUx_{n_k})$ y $\exp(itUx_{m_k})$ convergen al mismo límite. por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} e^{itU(x_{n_k} - x_{m_k})} = 1 \qquad \text{c.s.}$$

por lo tanto al tomar la esperanza, se obtiene que las características convergen,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\{e^{it(x_{n_k} - x_{m_k})U}\} = 1$$

para toda $t \in I\!R$, de donde se tiene que $(x_{n_k} - x_{m_k})U$ converge a 0 en L^1 entonces converge a 0 en probabilidad , por lo que el $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} - x_{m_k} = 0$ como se quería, así x_n converge a un límite finito.

■

Teorema 2.3.3 *Cada Proceso de Lévy tiene una modificación* càdlàg *que es a su vez un proceso de Lévy.*

Prueba.- Sea X un proceso de Lévy adaptado con su filtración natural aumentada. Ahora, para cada $u \in I\!R^d$ y recordemos la definición M_u de la proposición 2.3.1, sea D un subconjunto denso y contable de $I\!R^+$, y del teorema 2.3.2 inciso (1), se tiene que para cada $t \geq 0$ los límites $M_u(t-)$ y $M_u(t+)$ existen sobre D c.s.,

Definamos ahora para cada $u \in I\!R^d$ a Θ_u un subconjunto de Ω para el cual estos límites no existen, y definamos también a $\Theta = \cup_{u \in \mathbb{Q}^d} \Theta_u$ el cual es también un conjunto de $I\!P$-medida cero.

De esta manera, para $\omega \in \Theta^c$ fijo y para cada $t \geq 0$ definamos $(s_n, n \in I\!N)$ una sucesión sobre D creciente a t. Y sean $x^1(t)(\omega)$ y $x^2(t)(\omega)$ dos puntos de acumulación del conjunto $\{X(s_n)(\omega), n \in I\!N\}$ que corresponden a los límites de las subsucesiones $(s_{n_i}, n_i \in I\!N)$ y $(s_{n_j}, n_j \in I\!N)$ respectivamente. y se deduce de la existencia de $M(t-)$ que el límite $\lim_{s_n \uparrow t} \exp[i(u, X(s_n)(\omega))]$ existe y por el lema 2.3.1 entonces $x^1(t)(\omega)$ y $x^2(t)(\omega)$ son finitos.

Ahora eligiendo $u \in \mathbb{Q}^d$ tal que $(u, x_t^1(\omega) - x_t^2(\omega)) \neq 2n\pi$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. y por la continuidad se tiene que

$$\lim_{s_{n_i} \uparrow t} e^{i(u, X(s_{n_i})(\omega))} = e^{i(u, x_t^1(\omega))} \qquad \text{y} \qquad \lim_{s_{n_j} \uparrow t} e^{i(u, X(s_{n_j})(\omega))} = e^{i(u, x_t^2(\omega))}$$

y entonces se obtiene una contradicción pues X tiene un único límite por la derecha sobre D, para cada $t \geq 0$ en Θ^c.

Un argumento parecido se puede utilizar para los límites por la izquierda en Θ^c. De donde se puede ver que el proceso Y es càdlàg, donde se define Y para $t \geq 0$ como

$$Y(t)(\omega) = \begin{cases} \lim_{s \in D, s \downarrow t} X(s)(\omega), & \text{si} \quad \omega \in \Theta^c, \\ 0 \quad , & \text{si} \quad \omega \in \Theta. \end{cases}$$

Ahora para poder ver que Y es modificación de X se tiene que para cada $t \geq 0$ y por el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\mathbb{E}(e^{i(u,Y(t)-X(t))}) = \lim_{s\in D, s\downarrow t} \mathbb{E}(e^{i(u,X(s)-X(t))}) = 1$$

esto por las propiedades de un proceso de Lévy y por el lema 1.5.1 de la página 17.

Se obtiene entonces que

$$\mathbb{P}(\{\omega, Y(t)(\omega) = X(t)(\omega)\}) = 1$$

por lo que usando la proposición 2.1.1 de la página 39 se concluye que Y es un proceso de Lévy.

Así hemos mostrado una modificación de un proceso de Lévy que además es càdlàg y proceso de Lévy a su vez.

■

El resultado siguiente es un caso particular de la Prop. 2.2.1 aunque aquí sólo se hace para la continuidad por la derecha.

Proposición 2.3.4 *Si X es un proceso de Lévy con trayectorias* càdlàg *entonces su filtración natural aumentada es continua por la derecha.*

Prueba.- Por conveniencia escribamos $\mathcal{G}^X = \mathcal{G}$ y para probar el resultado basta probar que $\mathcal{G}_t = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_{t+\frac{1}{n}}$ para cada $t \geq 0$, entonces el límite cuando $\omega \downarrow t$ de $\mathcal{G}_\omega$ se puede sustituir por el límite cuando $n \to \infty$. Ahora, para $t, s_1, \ldots, s_m \geq 0$ fijos y $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^d$ establezcamos primero el siguiente hecho

$$\mathbb{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{m}(u_j, X(s_j))\right] \mid \mathcal{G}_t\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{m}(u_j, X(s_j))\right] \mid \mathcal{G}_{t+}\right) \tag{2.2}$$

ahora se tiene que la ecuación (2.2) se cumple de manera obvia si $\max_{1\leq j\leq m} s_j \leq t$ y probaremos entonces el resultado para $\min_{1\leq j\leq m} s_j > t$ con lo que se cubren todos los casos posibles, para hacer esto recordemos la definición de $M_u(t)$ de la proposición (2.3.1), así

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\exp\{i[(u_1, X(s_1)) + (u_2, X(s_2))]\} \mid \mathcal{G}_{t+}\right) \\
&= \lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i[(u_1, X(s_1)) + (u_2, X(s_2))]\} \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{s_2\eta(u_2) + i(u_1, X(s_1)) + i(u_2, X(s_2)) - s_2\eta(u_2)\} \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{s_2\eta(u_2) + i(u_1, X(s_1))\}\exp\{i(u_2, X(s_2)) - s_2\eta(u_2)\} \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{s_2\eta(u_2)\}\exp\{i(u_1, X(s_1))\}M_{u_2}(s_2) \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \exp\{s_2\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1, X(s_1))\}M_{u_2}(s_2) \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \exp\{i(u_1, X(s_1))\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1, X(s_1))\}\mathbb{E}[M_{u_2}(s_2) \mid \mathcal{G}_\omega] \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \exp\{s_2\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1, X(s_1))\}M_{u_2}(s_1) \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \exp\{s_2\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1, X(s_1))\}M_{u_2}(\omega)\right. \\
&\qquad \left.\exp\{i(u_2, X(s_1) - X(\omega)) - (s_1 - \omega)\eta(u_2)\} \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \exp\{s_2\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1 + u_2, X(s_1))\}M_{u_2}(\omega)\right. \\
&\qquad \left.\exp\{-i(u_2, X(\omega)) - s_1\eta(u_2) + \omega\eta(u_2)\} \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \exp\{s_2\eta(u_2) - s_1\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} M_{u_2}(\omega)\exp\{-i(u_2, X(\omega)) + \omega\eta(u_2)\} \\
&\qquad \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1 + u_2, X(s_1))\} \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \exp\{(s_2 - s_1)\eta(u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1 + u_2, X(s_1))\} \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \exp\{(s_2 - s_1)\eta(u_2) + s_1\eta(u_1 + u_2)\} \\
&\qquad \lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}\left(\exp\{i(u_1 + u_2, X(s_1)) - s_1\eta(u_1 + u_2)\} \mid \mathcal{G}_\omega\right) \\
&= \exp\{(s_2 - s_1)\eta(u_2) + s_1\eta(u_1 + u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} \mathbb{E}(M_{u_1+u_2}(s_1) \mid \mathcal{G}_\omega) \\
&= \exp\{(s_2 - s_1)\eta(u_2) + s_1\eta(u_1 + u_2)\}\lim_{\omega\downarrow t} M_{u_1+u_2}(\omega) \\
&= \lim_{\omega\downarrow t} \exp[i(u_1 + u_2, X(\omega))] \\
&\qquad \exp[(s_2 - s_1)\eta(u_2) + (s_1 - \omega)\eta(u_1 + u_2)] \quad \text{por ser } X \text{ càdlàg} \implies \\
&= \exp[i(u_1 + u_2, X(t))]\exp[(s_2 - s_1)\eta(u_2) + (s_1 - t)\eta(u_1 + u_2)] \\
&= \mathbb{E}(\exp\{i[(u_1, X(s_1)) + (u_2, X(s_2))]\} \mid \mathcal{G}_t).
\end{aligned}
$$

Ahora, definamos $X^{(m)} = (X(s_1), \ldots, X(s_m))$ y como existe una correspondencia uno a uno entre las funciones características y las medidas de probabilidad se obtiene que

$$\mathbb{P}(X^{(m)} \mid \mathcal{G}_{t+}) = \mathbb{P}(X^{(m)} \mid \mathcal{G}_t) \quad \text{c.s.}$$

y entonces para toda $g : \mathbb{R}^{dm} \to \mathbb{R}$ tal que que

$$\mathbb{E}(|g(X(s_1), \ldots, X(s_m))|) < \infty.$$

Se tiene que

$$\mathbb{E}\left(g(X(s_1), \ldots, X(s_m))|\mathcal{G}_{t+}\right) = \mathbb{E}\left(g(X(s_1), \ldots, X(s_m))|\mathcal{G}_t\right)$$

En particular, al hacer variar a t, m y $s_1, \ldots, s_m$ podemos deducir

$$\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}_{t+}) = \mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}_t)$$

para todo $A \in \mathcal{G}_\infty$. Ahora suponiendo que $A \in \mathcal{G}_{t+}$, y así finalmente se tiene que

$$\chi_A = \mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}_{t+}) = \mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(\chi_A \mid \mathcal{G}_t) \quad \text{c.s.}$$

por lo tanto, como $\mathcal{G}_t$ es una filtración aumentada, de donde se deduce que $\mathcal{G}_{t+} \subseteq \mathcal{G}_t$ y así se obtiene el resultado.

■

Otra propiedad que se tiene con las condiciones usuales es el hecho de que $X(t) - X(s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ para todo s, t tal que $0 \leq s < t < \infty$.

Decimos que $\|\cdot\|$ es una seminorma si para toda $x_1, x_2 \in X$ con X un espacio lineal (real o complejo) la función $\|\cdot\|$ es tal que

- $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ con α un escalar.

Un hecho importante es que si denotamos como $\mathcal{M}$ al espacio lineal de las clases de equivalencia de las L^2-martingalas (o cuadrado integrables) $\mathcal{F}_t$ adaptadas y definimos ademas una seminorma $(\|\cdot\|_t, t \geq 0)$ mediante

$$\|M\|_t = \mathbb{E}(|M(t)|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces se tiene que $\mathcal{M}$ es un espacio localmente convexo con la topología inducida por esta seminorma. llamamos a $\mathcal{M}$ un espacio de martingalas, y se puede probar que $\mathcal{M}$ es un espacio completo.

2.4. Tiempos de Paro

Definimos un *Tiempo de paro* como una variable aleatoria $T : \Omega \to [0, \infty]$ para la cual el evento $(T \leq t) \in \mathcal{F}_t$ para cada $t \geq 0$.

Un ejemplo interesante de tiempo de paro es la primera visita (o entrada) del proceso X en el conjunto A como la función $T_A : \Omega \to \overline{I\!R}^+$ definida por

$$T_A = \text{ínf}\,\{t \geq 0 : X(t) \in A\}$$

y usando la convención adicional ínf $\{\emptyset\} = \infty$ se tiene entonces que T_A esta bien definido.

Así, si se tiene un proceso adaptado X y un tiempo de paro T con respecto a la misma filtración entonces la variable aleatoria $X(T)$ se define mediante

$$X(T)(\omega) = X(T(\omega))(\omega)$$

con la convención adicional $X(\infty)(\omega) = \text{lím}_{t\to\infty} X(t)(\omega)$ si el límite existe con probabilidad 1 y $X(\infty)(\omega) = 0$ en otro caso.

Además, para cada tiempo de paro S podemos asociar las σ-álgebras $\mathcal{F}_S$ y $\mathcal{F}_{S+}$ definidas por

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \bigcap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}$$

y

$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \bigcap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}$$

algunas de las propiedades más importantes de los tiempos de paro están incluidas en la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1
- *Si S, T son tiempos de paro, entonces $S \vee T$ y $S \wedge T$ son tiempos de paro.*
- *Si S, T son tiempos de paro y $A \in \mathcal{F}_S$ entonces $A \bigcap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T \bigcap \mathcal{F}_S$. En particular si $S < T$ entonces $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*
- *Si $\{S_n\}_{n\geq 1}$ son tiempos de paro entonces $\sup_{n>1} S_n$ es tiempo de paro y también $\text{ínf}_{n\geq 1} S_n$ es $\mathcal{F}_{t+}$-tiempo de paro.*
- *Si S es tiempo de paro y T es una función $\mathcal{F}_S$-medible tal que $T \geq S$ entonces T es tiempo de paro. En particular la suma de dos tiempos de paro es también un tiempo de paro.*

- *Si S es tiempo de paro entonces existe una sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ de tiempos de paro con valores en $D_n = \{\frac{k}{2^n}; k = 0, 1, \ldots, \infty\}$ (es decir, S_n son tiempos de paro discretos) tal que $S_n \to S$.*
- *Si S, T son tiempos de paro entonces $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \bigcap \mathcal{F}_T$.*
- *Si S es tiempo de paro y $A \in \mathcal{F}_S$ entonces la función $S_A : \Omega \to \bar{I\!R}^+$ definida por*

$$S_A(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & \text{si} \quad \omega \in A, \\ \infty & \text{si} \quad \omega \in A^c \end{cases}$$

es un tiempo de paro.

Para la prueba puede consultarse Tudor [30] pág. 16. Ahora notemos que el ultimo inciso de la proposición anterior nos remite a la definición de *subordinador muerto* definido en la página 33 con lo que se tiene que el tiempo de paro definido de esta manera es un proceso de Lévy de dimensión 1.

El siguiente teorema nos da las hipótesis necesarias para que se pueda extender la relación (2.1) de la página 45 a tiempos de paro.

Teorema 2.4.1 Desigualdad de Doob para tiempos de paro. *Si X es una martingala càdlàg y S, Tson tiempos de paro finitos tal que $S \leq T$ c.s. entonces $X(S)$ y $X(T)$ son integrables con*

$$I\!E(X(T)|\mathcal{F}_S) = X(S) \quad \text{c.s.}.$$

la prueba de este teorema se puede encontrar en Revuz y Yor [28], sección 2.3. Una forma alternativa de este teorema, en la que se incluye la parte de submartingalas y supermartingalas lo da Tudor [30] en la pág. 53., además de un teorema para tiempos no finitos que presenta en la pág. 56.

El siguiente teorema nos dice que los tiempos de paro pueden ser vistos como procesos de Lévy.

Teorema 2.4.2 *Sea $B = (B(t), t \geq 0)$ un Movimiento Browniano estándar de dimensión 1, y definamos para cada $t \geq 0$*

$$T(t) = \text{ínf}\left\{s > 0; B(s) = \frac{t}{\sqrt{2}}\right\}$$

entonces $T = (T(t), t \geq 0)$ es el subordinador de Lévy.

Prueba.- Claramente $T(t)$ es un tiempo de paro, ahora como para cada $\theta \in \mathbb{R}$ el proceso definido por $M_\theta(t) = \exp[(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t]$ es una martingala continua con respecto a la filtración natural aumentada para el Movimiento Browniano. Y usando el teorema 2.4.1 se tiene que si $t \geq 0, n \in \mathbb{N}, \theta \geq 0$ entonces

$$1 = \mathbb{E}(\exp[\theta B(T(t) \wedge n) - \frac{1}{2}\theta^2(T(t) \wedge n)]).$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}, t \geq 0$ definamos $A_{n,t} = \{\omega \in \Omega; T(\omega) \leq n\}$, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\exp[(T(t) \wedge n) - \frac{1}{2}\theta^2(T(t) \wedge n)])\\
&\quad = \mathbb{E}\left(\exp\{\theta B(T(t) \wedge n) - \frac{1}{2}\theta^2 T(t)\}\chi_{A_{n,t}}\right)\\
&\quad + \exp(-\frac{1}{2}\theta^2 n)\mathbb{E}(\exp[\theta B(n)]\chi_{A^c_{n,t}}).
\end{aligned}$$

Pero, como para cada $\omega \in \Omega$, $T(t)(\omega) > n \Longrightarrow B(n) > \frac{t}{\sqrt{2}}$ entonces

$$\begin{aligned}
&\exp(-\frac{1}{2}\theta^2 n)\mathbb{E}(e^{\theta B(n)}\chi_{A^c_{n,t}})\\
&\quad < \exp\left[-\frac{1}{2}\theta^2 n + (\frac{t\theta}{\sqrt{2}})\right] \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

En el último paso se ha usado el teorema de la convergencia monótona, así obtenemos

$$1 = \mathbb{E}\left(\exp[\theta B(T(t)) - \frac{1}{2}\theta^2 T(t)]\right) = \exp(\frac{\theta t}{\sqrt{2}})\mathbb{E}\left(\exp[-\frac{1}{2}\theta^2 T(t)]\right).$$

De donde al sustituir $\theta = \sqrt{2u}$ se obtiene

$$\mathbb{E}(\exp[-uT(t)]) = \exp(-t\sqrt{u}).$$

Entonces T es el subordinador de Lévy.

■

Al siguiente resultado se le conoce como la propiedad fuerte de Markov, y aunque hay versiones particulares para el Movimiento Browniano y para el proceso de poisson, en este caso esta enunciado para procesos de Lévy, que es más general.

Teorema 2.4.3 *Si X es un proceso de Lévy y T es un tiempo de paro finito c.s., entonces sobre $(T < \infty)$ se define el proceso*

$$X_T(t) = X(T+t) - X(T)$$

y se tiene entonces que

1. *X_T es un proceso de Lévy que es, además, independiente de $\mathcal{F}_T$.*
2. *para cada $t \geq 0$, $X_T(t)$ tiene la misma distribución que $X(t)$.*
3. *X_T es* càdlàg y es un proceso $\mathcal{F}_{T+t}$-adaptado.

la prueba de este resultado se puede consultar en Protter [27], pág. 23. además de una forma alternativa que Tudor [30] presenta en la página 424.

ahora recordando la definición del proceso salto definido en la subsección 2.2.1

$$\Delta X(t) = X(t) - X(t-)$$

para $t \geq 0$ y donde $X(t-)$ denota el límite por la izquierda en t.

El siguiente resultado lo ocuparemos más adelante,

Teorema 2.4.4 *Si N es un proceso de Lévy que es no decreciente c.s. y es tal que el proceso $\Delta N(t)$ toma valores en el conjunto $\{0,1\}$ entonces N es un proceso poisson.*

Prueba.- Definamos una sucesión de tiempos de paro recursivamente mediante $T_0 = 0$ y $T_n = \text{ínf}\,\{t > T_{n-1}; (N(t) - N(T_{n-1})) \neq 0\}$ para cada $n \in I\!N$. Y del teorema 2.4.3 se sigue que la sucesión $(T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}, \ldots)$ es i.i.d. esto por ser T un subordinador de Lévy de donde se tiene que T es un proceso de Lévy.

Ahora, por la propiedad (2) de los procesos de Lévy se tiene que para cada $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} I\!P(T_1 > s+t) &= I\!P\left(N(s) = 0, N(s+t) - N(s) = 0\right) \\ &= I\!P(T_1 > s) I\!P(T_1 > t). \end{aligned}$$

Ahora del hecho que N es no decreciente c.s. se sigue que la función $t \to I\!P(T_1 > t)$ es no decreciente y por la propiedad (3) de la definición de proceso de Lévy se tiene que la función $t \to I\!P(T_1 > t)$ es continua en $t = 0$. de esta manera, la solución a la ecuación descrita arriba es continua en todos lados, y usando la propiedad descrita en Bignbam, Goldie and Teugels [6], págs. 4-6, se tiene que existe $\lambda > 0$ tal que $I\!P(T_1 > t) = e^{-\lambda t}$ para cada $t \geq 0$. Entonces T_1 tiene una distribución exponencial con parámetro λ y

$$I\!P(N(t) = 0) = I\!P(T_1 > t) = e^{-\lambda t}$$

para cada $t \geq 0$.

Ahora, supongamos que lo anterior es nuestra primera hipótesis de inducción y asumiendo que

$$I\!P(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

se cumple, entonces

$$\begin{aligned} I\!P(N(t) = n+1) &= I\!P(T_{n+2} > t, T_{n+1} \leq t) \\ &= I\!P(T_{n+2} > t) - I\!P(T_{n+1} > t) \end{aligned}$$

pero como

$$T_{n+1} = T_1 + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_{n+1} - T_n)$$

es la suma de $n+1$ variables aleatorias exponenciales i.i.d., entonces se tiene una distribución Gamma con densidad

$$f_{T_{n+1}}(s) = e^{-\lambda s}\frac{\lambda^{n+1}s^n}{n!} \quad \text{para cada } s > 0$$

y como se tiene que si una v.a. X tiene distribución Gamma con parámetros $n \in I\!N$ y $\lambda > 0$ tal que la función de densidad esta dada por

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$$

para cada $x > 0$ entonces X tiene una raíz n-esima, en términos de la convolución, dada por la distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$ y función de densidad

$$f_X^{1/n}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

de donde se sigue el resultado.

■

2.5. Medidas Aleatorias Poisson

Sea $(S, \mathcal{A})$ un espacio medible y $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espacio de probabilidad. Una medida aleatoria M sobre $(S, \mathcal{A})$ es una colección de variables aleatorias $(M(B), B \in \mathcal{A})$ tal que

1. $M(\emptyset) = 0$.
2. Dada una sucesión $(A_n, n \in I\!N)$ de conjuntos disjuntos dos a dos en $\mathcal{A}$ se tiene que
$$M\left(\bigcup_{n\in I\!N} A_n\right) = \sum_{n\in I\!N} M(A_n) \quad \text{c.s..}$$
3. Para cada familia disjunta $(B_1, \ldots, B_n)$ en $\mathcal{A}$, las variables aleatorias $M(B_1), \ldots, M(B_n)$ son independientes.

Y diremos que una medida aleatoria es una medida de Poisson si cada $M(B)$ se distribuye poisson siempre que $M(B) < \infty$. Es de interés particular, cuando se obtiene una medida σ-finita λ sobre $(S, \mathcal{A})$ mediante la utilización de la esperanza $\lambda(A) = I\!E(M(A))$ para toda $A \in \mathcal{A}$. El inverso de lo anterior se muestra en el siguiente teorema, antes necesitamos un resultado previo.

Teorema 2.5.1 *Sea $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, I\!P_n)$ una colección de espacios de probabilidad para $n = 1, 2, \ldots$, y sea $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots$, y sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra generada por la colección de conjuntos*

$$C = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_k \in A_k \quad para\ k = 1, \ldots, n\} \tag{2.3}$$

sobre toda n y toda $A_k \in \mathcal{F}_k$ para $k = 1, \ldots, n$. entonces existe una única medida de probabilidad $I\!P$ sobre $\mathcal{F}$ tal que

$$I\!P(C) = I\!P_1(A_1) \cdots I\!P_n(A_n)$$

para cada C de la expresión (2.3)

Este teorema es un caso especial del teorema de extensión de Kolmogorov y la prueba se puede encontrar en Shiryaev [32], pág. 167, asi se tiene el teorema siguiente

Teorema 2.5.2 *Dada una medida σ-finita λ sobre un espacio medible $(S, \mathcal{A})$, Existe una medida aleatoria Poisson M sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $\lambda(A) = \mathbb{E}(M(A))$ para toda $A \in \mathcal{A}$.*

Prueba.- Para probar este resultado primero supongamos que $\lambda(\Omega) < \infty$, y si se tiene el caso en que $\lambda = 0$ escogiendo $M(A)$ idénticamente cero se tiene probado el teorema, para la prueba cuando $\lambda(\Omega) = \infty$ consultese Sato [31] pág. 122.

Supongamos que $\lambda(A) > 0$. Ahora, en algún espacio de probabilidad $(\Omega_0, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}_0)$, utilizando el lema anterior, podemos construir una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sobre Ω, $\{Z_n : n = 1, 2, \ldots\}$ con distribución $\lambda(A)^{-1}\lambda$ y una variable aleatoria Poisson Y con media $\lambda(A)$ tal que Y es independiente de las $\{Z_n\}$. Definamos $M(A) = 0$ si $Y = 0$, y

$$M(A) = \sum_{j=1}^{Y} \mathbb{1}_A(Z_j)$$

si $Y \geq 1$. Entonces claramente $M(A)$ satisface (3) de la definición de medida aleatoria. Sea $k \geq 2$. Sea $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$ disjuntos tal que $\bigcup_{j=1}^{k} A_j = \Omega$ y haciendo $n_1 + \cdots + n_k = n$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[M(A_1) = n_1, \ldots, M(A_k) = n_k] = \\
&\quad = \mathbb{P}\left[M(A_1) = n_1, \ldots, M(A_k) = n_k | M(\Omega) = n\right] \mathbb{P}[M(\Omega) = n] \\
&\quad = \mathbb{P}\left[\sum_{j=1}^{Y} \mathbb{1}_{A_1}(Z_j) = n_1, \ldots, \sum_{j=1}^{Y} \mathbb{1}_{A_k}(Z_j) = n_k\right] \mathbb{P}[Y = n].
\end{aligned}$$

De donde tenemos una distribución multinomial y una Poisson. entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[M(A_1) = n_1, \ldots, M(A_k) = n_k] = \\
&\quad = \frac{n!}{(n_1!) \cdots (n_k!)} \left(\frac{\lambda(A_1)}{\lambda(\Omega)}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{\lambda(A_k)}{\lambda(\Omega)}\right)^{n_k} e^{\lambda(\Omega)} \frac{\lambda(\Omega)^n}{n!} \\
&\quad = \prod_{j=1}^{k} e^{-\lambda(A_j)} \frac{\lambda(A_j)^{n_j}}{n_j!}.
\end{aligned}$$

Encontrando la distribución marginal de n_j se tiene

$$\mathbb{P}\left[M(A_j) = n_j\right] = e^{\lambda(A_j)}\frac{\lambda(A_j)^{n_j}}{n_j!}.$$

Así, se puede ver que se satisfacen las propiedades (1) (2) y (3) de la definición de medidas aleatorias.

■

Tenemos un resultado que se refiere a los saltos de los procesos de Lévy.

Teorema 2.5.3 *Si X es un proceso de Lévy, entonces, para t fijo se tiene que $\Delta X(t) = 0$ c.s.*

Prueba.- Sea $(t(n), n \in \mathbb{N})$ una sucesión en $\mathbb{R}^+$ con $t(n) \uparrow t$ cuando $n \to \infty$, entonces como X tiene trayectorias càdlàg se tiene que $\lim_{n\to\infty} X(t(n)) = X(t-)$ y por la propiedad (3) de los procesos de Lévy la sucesión $(X(t(n))), n \in \mathbb{N})$ converge en probabilidad a $X(t)$ de donde se sigue que tiene una subsucesion que converge c.s. a $X(t)$ y por la unicidad de los límites se tiene el resultado.

■

Unos de los problemas principales de trabajar con procesos de Lévy es que puede presentarse el hecho que

$$\sum_{0\leq s\leq t} |\Delta X(s)| = \infty \qquad \text{c.s.}$$

y una de las maneras en que se busca superar esta dificultad es usando la condición que siempre tenemos o buscamos tener

$$\sum_{0\leq s\leq t} |\Delta X(s)|^2 < \infty \qquad \text{c.s.}.$$

Definamos, para $0 \leq t < \infty$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$

$$N(t, A) = \sharp\{0 \leq s \leq t; \Delta X(s) \in A\} = \sum_{0\leq s\leq t} \chi_A(\Delta X(s))$$

y notemos que para cada $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0$ la función $A \to N(t, A)(\omega)$ es una medida de conteo sobre $\mathcal{B}(I\!R^d - \{0\}$ y se tiene entonces que

$$I\!E(N(t,A)) = \int N(t,A)(\omega) \mathrm{d}I\!P(\omega)$$

es una medida de Borel sobre $\mathcal{B}(I\!R^d - \{0\}$. escribiremos $\mu(\cdot) = I\!E(N(1, \cdot))$ y la llamaremos *medida de intensidad* asociada a X y diremos, además, que $A \in \mathcal{B}(I\!R^d - \{0\})$ es *acotada por abajo* si $0 \notin \bar{A}$.

Mostremos el siguiente lema que nos permite probar un teorema importante más adelante.

Lema 2.5.1 *Si A es acotado por abajo entonces $N(t, A) < \infty$ c.s. para toda $t \geq 0$.*

Prueba.- Para probar este resultado definamos una sucesión de tiempos de paro $(T_n^A, n \in I\!N)$ por

$$T_1^A = \text{ínf}\,\{t > 0, \Delta X(t) \in A\}$$

y para $n > 1$ mediante

$$T_n^A = \text{ínf}\,\{t > T_{n-1}^A, \Delta X(t) \in A\}.$$

Así, como X es càdlàg, se tiene que $T_1^A > 0$ c.s. y el $\text{lím}_{n\to\infty} T_n^A = \infty$. de hecho, si ninguno de los dos no son los casos entonces el conjunto de los puntos en que salta el proceso en A puede tener un punto de acumulación y esto no es posible por ser X càdlàg, esto se vio en la prueba del teorema 2.2.1, entonces, obtenemos que para cada $t \geq 0$

$$N(t,A) = \sum_{n \in I\!N} \chi_{\{T_n^A \leq t\}} < \infty \quad \text{c.s.}$$

$\blacksquare$

Enunciemos el siguiente teorema.

Teorema 2.5.4 *Si $N(t, A) = \sum_{0 \leq s \leq t} \chi_A(\Delta X(s))$ y*

1. *Si A es acotado por abajo, entonces $(N(t, A), t \geq 0)$ es un proceso de Poisson con intensidad $\mu(A)$.*

2. *Si* $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$ *son disjuntos, entonces las variables* $N(t, A_1) \ldots, N(t, A_m)$ *son independientes.*

Para la prueba consultese Applebaum [1], pág. 88.

Ahora supongamos que $S = \mathbb{R}^+ \times U$, donde U es un espacio medible con una σ-álgebra $\mathcal{C}$ y $A = \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{C}$. Sea $p = (p(t), t \geq 0)$ un proceso adaptado que toma valores en U tal que M es una medida aleatoria poisson sobre S, donde $M([0,t) \times A) = \{0 \leq s < t; p(s) \in A\}$ para cada $t \geq 0$ y $A \in \mathcal{C}$. Y en este caso tenemos que p es un proceso Poisson puntual y M es su medida aleatoria Poisson asociada.

Sea U un espacio topológico y tomemos $\mathcal{C}$ como su σ-álgebra de Borel, y sea como M una medida aleatoria sobre $S = \mathbb{R}^+ \times U$. Ahora, para cada $A \in \mathcal{C}$ definamos el proceso $M_A = (M_A(t), t \geq 0)$ mediante $M_A(t) = M([0,t) \times A)$. Entonces diremos que M es una *Medida martingala* si existe $V \in \mathcal{C}$ tal que M_A es una martingala cuando $A \bigcap V = \emptyset$. llamaremos a V el conjunto *Forbidden* asociado.

Esto ultimo se aplica a los procesos de Lévy de la manera siguiente. Sea $U = \mathbb{R}^d - \{0\}$ y sea $\mathcal{C}$ su σ-álgebra de Borel. Si X es un proceso de Lévy, entonces ΔX es un proceso de Poisson y N es su medida aleatoria de Poisson asociada. Ahora, para cada $t \geq 0$ y A un conjunto acotado por abajo. definimos la *medida aleatoria poisson compensada* por

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - t\mu(A)$$

entonces $(\tilde{N}(t, A), t \geq 0)$ es una martingala y entonces $\tilde{N}$ se extiende a medida martingala con conjunto Forbidden $\{0\}$.

2.5.1. Integración de Poisson

Sea f una función Borel medible de $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}^d$ y sea A acotado por abajo entonces para cada $t > 0$ y $\omega \in \Omega$ podemos definir la *integral de Poisson* de f como una suma finita aleatoria

$$\int_A f(x) N(t, dx)(\omega) = \sum_{x \in A} f(x) N(t, \{x\})(\omega).$$

Aquí se tiene que

$$N(t, \mathrm{d}x) = \sum_{0 \le s \le t} \chi_{\{x\}}(\Delta X(s)).$$

Por lo cual, esta parte sólo puede tomar los valores 0 o 1.

Observemos, además, que cada $\int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x)(\omega)$ es una variable aleatoria en $I\!R^d$ y genera un proceso estocástico al hacer variar t.

Ahora, como $N(t, \{x\}) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta X(u) = x$ para al menos alguna u tal que $0 \le u \le t$, entonces se tiene que

$$\int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x) = \sum_{0 \le u \le t} f(\Delta X(u))\chi_A(\Delta X(u)). \qquad (2.4)$$

Y si $(T_n, n \in I\!N)$ son los tiempos de arribo para el proceso Poisson $(N(t, A), t \ge 0)$. entonces otra manera de representar la integral de Poisson se sigue inmediatamente de (2.4)

$$\int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x) = \sum_{n \in N} f(\Delta X(T_n^A \wedge t))\chi_{[o,T]}(T_n^A). \qquad (2.5)$$

De ahora en adelante, escribiremos μ_A para denotar la restricción al conjunto A de la medida μ.

Teorema 2.5.5 *Sea A acotado por abajo y sea f una función medible de A a $I\!R^d$, definimos entonces la función*

$$Y(t) = \int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x). \qquad (2.6)$$

Entonces se tiene

1. *Y tiene una distribución Poisson Compuesto tal que para cada $u \in I\!R^d$*

$$I\!E\left(\exp\left[i(u, Y)\right]\right) = \exp\left[\int_A (e^{i(u,x)} - 1)(\mu \circ f^{-1})(\mathrm{d}x)\right].$$

2. *Si $f \in L^1(A, \mu_A)$ entonces*

$$I\!E[Y] = \int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

3. *Si* $f \in L^2(A, \mu_A)$ *entonces*

$$\mathrm{Var\,(Y)} = \int_{\mathrm{A}} |\mathrm{f(x)}|^2 \mu(\mathrm{dx}).$$

Prueba.-
(1) primero veamos que $Y(t)$ en (2.6) es finita, esto, por la razón que N es finita por el resultado (2.5.1). Para $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{Z}^d$ definamos como C_p^n el conjunto de puntos $z = (z_1, \ldots, z_d) \in I\!R^d$ tal que $2^{-n}(p_j - 1) < z_j \leq 2^{-n} p_j$ para $j = 1, \ldots, d$. Entonces $\{C_p^n, p \in \mathbb{Z}^d\}$ cubre a $I\!R^d$. ahora elijamos un punto z_p^n en cada C_p^n y definamos la función $f_n(x)$ de A a $I\!R^d$ mediante

$$f_n(x) = z_p^n$$

para $x \in f^{-1}(C_p^n)$, donde $f^{-1}(C_p^n)$ es la imagen inversa de C_p^n, es decir

$$f^{-1}(C_p^n) = \{x \in A; f(x) \in C_p^n\}$$

entonces al calcular la norma $f(x) - f_n(x)$ se tiene que

$$|f(x) - f_n(x)| \ = \ |z - z_p^n|$$

donde $z = f(x) \in f^{-1}(C_p^n)$ de donde

$$|f(x) - f_n(x)| \ = \ \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (z_j - z_{p,j}^n)^2}$$

pero para cada j se tiene que

$$|z_j - z_{p,j}^n| \ \leq \ 2^{-n} p_j - 2^{-n}(p_j - 1) = 2^{-n} \qquad \text{asi}$$

$$|f(x) - f_n(x)| \ \leq \ \sqrt{\sum_{j=1}^{d} 2^{-2n}} = 2^{-n} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} 1}.$$

Asi se tiene que $|f(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n} d^{1/2}$. Sea

$$Y_n(t) = \int_A f_n(x) N(t, \mathrm{d}x)$$

de donde se tiene que

$$|Y_n(t) - Y(t)| \leq 2^{-n} d^{1/2} N(t, A) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

de donde se tiene que

$$Y_n(t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} z_p^n N(t, f^{-1}(C_p^n)).$$

Por lo tanto, $Y_n(t)$ es una variable aleatoria en A y se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
I\!E[e^{i(u,Y_n)}] &= \prod_{p\in\mathbb{Z}^d} I\!E\left[\exp\left\{i(u, z_p^n N(t, f^{-1}(C_p^n)))\right\}\right] \\
&= \prod_{p\in\mathbb{Z}^d} \exp\left[(e^{i(u,z_p^n)} - 1)\mu(f^{-1}(C_p^n))\right] \\
&= \exp\left[\int_A (\epsilon^{i(u,f_n(x))} - 1)\mu(\mathrm{d}x)\right].
\end{aligned}$$

Esto por la definición de medidas aleatorias Poisson. entonces, por el teorema de continuidad de Lévy, se tiene que Y es una variable aleatoria sobre A que satisface (1), la cual muestra que la distribución de Y es Poisson Compuesto.

(2), (3) Definamos como $u_{(j)}, f_{(j)}(x)$ y $Y_{(j)}$ la j-esima coordenada de $u, f(x)$ y Y respectivamente. y de las hipótesis de que $\int_A |f(x)|\mu(\mathrm{d}x) < \infty$ y $\int_A |f(x)|^2\mu(\mathrm{d}x) < \infty$ se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial u_{(j)}}\int_A (e^{i(u,f_n(x))} - 1)\mu(\mathrm{d}x) &= \int_A f_{(j)}(x) e^{i(u,f(x))}\mu(\mathrm{d}x), \\
\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial u_{(j)}}\right)^2 \int_A (e^{i(u,f_n(x))} - 1)\mu(\mathrm{d}x) &= \int_A \left[f_{(j)}(x)\right]^2 e^{i(u,f(x))}\mu(\mathrm{d}x),
\end{aligned}$$

para j=1,. . . ,d. diferenciando $I\!E[e^{i(u,Y)}]$ de (1) dos veces y haciendo $u = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
I\!E[Y_{(j)}] &= \int_A f_{(j)}(x)\mu(\mathrm{d}x), \\
I\!E[Y_{(j)}^2] &= \left(\int_A f_{(j)}(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)^2 + \int_A f_{(j)}^2(x)\mu(\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

así, se tiene que

$$\begin{aligned}
I\!E[Y_{(j)}^2] - \left(\int_A f_{(j)}(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)^2 &= \int_A f_{(j)}^2(x)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \mathrm{Var}[\mathrm{Y}_{(j)}(\mathrm{t})].
\end{aligned}$$

Y usando el teorema : *Sea μ una distribución en $I\!R^d$ y $\hat{\mu}$ su función característica, entonces*

1. *Si $n \in I\!N$ y μ es tal que $\int |\mu|^n \mu(\mathrm{d}x) < \infty$, entonces $\hat{\mu}(z)$ es una función de clase C^n y para cualquier conjunto de enteros no negativos $n_1, \ldots, n_d$ tales que $n_1 + \cdots + n_d \leq n$,*

$$\int x_1^{n_1} \ldots x_d^{n_d} \mu(\mathrm{d}x) = \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{1} \right)^{n_1} \ldots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z_d} \right)^{n_d} \hat{\mu}(z) \right]_{z=0}$$

2. *Si n un entero positivo par y si $\hat{\mu}(z)$ es de clase C^n en una vecindad del origen, entonces μ tiene todos los momentos absolutos finitos hasta de orden n.*

se tiene que el teorema se completa.

■

Del teorema anterior se ve que la integral de Poisson puede que no tenga media finita si $f \notin L^1(A, \mu)$. Consideremos ahora la sucesión de variables aleatoria asociada a la *Magnitud del salto* $(Y_f^A(n), n \in I\!N)$ donde cada

$$Y_f^A(n) = \int_A f(x) N(T_n^A, \mathrm{d}x) - \int_A f(x) N(T_{n-1}^A, \mathrm{d}x) \tag{2.7}$$

de donde usando la ecuación (2.5) y (2.7) se tiene que

$$Y_f^A(n) = f(\Delta(X(T_n^A)))$$

para cada $n \in I\!N$. Asi se tiene el siguiente teorema

Teorema 2.5.6 1. *$(Y_f^A(n), n \in I\!N)$ son variables aleatoria ind. e idénticamente distribuidas con distribución dada por*

$$I\!P(Y_f^A(n) \in B) = \frac{\mu(A \bigcap f^{-1}(B))}{\mu(A)} \tag{2.8}$$

para cada $B \in \mathcal{B}(I\!R^d)$.

2. *$(\int_A f(x) N(t, \mathrm{d}x), t \geq 0)$ es un proceso Poisson Compuesto.*

Prueba.- **(1)** Primero determinemos (2.8) usando el teorema 2.5.5 y la ecuación (2.7) y el hecho de que $(T_n^A - T_{n-1}^A, n \in I\!N)$ son variables aleatorias ind. e idénticamente distribuidas exponencialmente con la misma media $1/\mu(A)$ obtenemos

$$\begin{aligned} I\!P(Y_f^A(n) \in B) &= I\!E\left(\chi_B(Y_f^A(n))\right) \\ &= I\!E\left[I\!E_{T_n^A - T_{n-1}^A}(\chi_B(Y_f^A(n)))\right] \\ &= \int_0^\infty s \int_A \chi_B(f(x))\mu(\mathrm{d}x) p_{T_n^A - T_{n-1}^A}(\mathrm{d}s) \\ &= \frac{\mu(A \bigcap f^{-1}(B))}{\mu(A)}. \end{aligned}$$

Entonces las variables aleatorias son idénticamente distribuidas. para la independencia, hagamos lo siguiente, para todo conjunto finito de números naturales $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ y $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m} \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ tengamos

$$\begin{aligned} &I\!P(Y_f^A(i_1) \in B_{i_1}, Y_f^A(i_2) \in B_{i_2}, \ldots, Y_f^A(i_m) \in B_{i_m}) \\ &= I\!E\left[I\!E_{T_1^A, T_2^A - T_1^A, \ldots, T_n^A - T_{n-1}^A - T_n^A} \prod_{j=1}^m \chi_{B_{i_j}}\left(Y_f^A(i_j)\right)\right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \prod_{j=1}^m \int_A \chi_{B_{i_j}}(f(x))\mu(\mathrm{d}x) \\ &\quad \times p_{T_{i_1}^A}(\mathrm{d}s_{i_1}) p_{T_{i_2}^A - T_{i_1}^A}(\mathrm{d}s_{i_2}) \cdots p_{T_{i_m}^A - T_{i_{m-1}}^A}(\mathrm{d}s_{i_m}) \\ &= I\!P(Y_f^A(i_1) \in B_{i_1}) I\!P(Y_f^A(i_2) \in B_{i_2}) \cdots I\!P(Y_f^A(i_m) \in B_{i_m}) \end{aligned}$$

esto por (2.8), así, se tiene que las variables aleatorias son independientes.

(2) Para probarlo primero notemos que $(Y_f^A(n), n \in)$ y el proceso Poisson $(N(t), t \geq 0)$ son independientes, esto se sigue de una extensión del siguiente argumento, para cada $m \in I\!N, n \in I\!N \bigcup \{0\}, t \geq 0, B \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ se tiene que

$$\begin{aligned} I\!P\left(Y_f^A(m) \in B | N(t, A) = n\right) &= I\!P\left(Y_f^A(m) \in B | T_n^A \leq t, T_{n+1}^A > 1\right) \\ &= I\!P\left(Y_f^A(m) \in B\right) \end{aligned}$$

Esto mediante un cálculo similar al realizado en la prueba de (1). Ahora, para cada $t \geq 0$ se tiene

$$\int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x) = Y_f^A(1) + Y_f^A(1) + \cdots + Y_f^A(N(t, A))$$

y como los sumandos son ind. e idénticamente distribuidos se tiene que $\int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x)$ es un proceso Poisson Compuesto.

■

Ahora, asi como se pudo establecer un proceso Poisson compensado, podemos definir la *integral de Poisson compensada*, esto para cada $f \in L^1(A, \mu_A)$, y $t \geq 0$ definida como

$$\int_A f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x) = \int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x) - \int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

se tiene entonces que la integral definida de esta manera es una martingala.

Dos hechos importantes se obtienen del teorema 2.6 al aplicarlo a la integral de poisson compensada,

$$\begin{aligned} I\!E\left(\exp\left[i\left(u, \int f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x) \right) \right] \right) \\ = \exp\left\{ \int_A \left[e^{i(u,x)} - 1 - i(u, x) \right] \mu_f(\mathrm{d}x) \right\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

para cada $u \in I\!R^d$ y si ademas se tiene que $f \in L^2(A, \mu_A)$, entonces

$$I\!E\left(\left| \int_A f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x) \right|^2 \right) = \int_A |f(x)|^2 \mu(\mathrm{d}x). \tag{2.10}$$

Por ultimo veremos los *procesos de variación finita*, que es una clase de funciones muy usada. Definamos $P = \{a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ en $I\!R$ y definamos su encaje como $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} |t_{i+1} - t_i|$. entonces podemos definir la *variación* varP(g) de una función càdlàd $g : [a, b] \to I\!R^d$ sobre la partición P mediante

$$\mathrm{varP(g)} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} |\mathrm{g}(\mathrm{t}_{\mathrm{i}+1}) - \mathrm{g}(\mathrm{t}_{\mathrm{i}})|$$

y si se tiene que $\mathrm{V(g)} = \mathrm{sup_P\, varP(g)} < \infty$, entonces diremos que la función g tiene *variaci"on finita sobre* $[a, b]$. y diremos simplemente que tiene *variación finita* si g esta definida sobre todo $I\!R$ (o en su caso $I\!R^+$) y tiene variación finita sobre cada intervalo compacto.

Es trivial ver que si g es no decreciente entonces es de variación finita, e inversamente si g es de variación finita entonces podemos escribirla como la diferencia de dos funciones no decrecientes, con sólo escribir

$$g = \frac{\mathrm{V(g)(t) + g(t)}}{2} - \frac{\mathrm{V(g)(t) - g(t)}}{2}$$

donde $\mathrm{V(g)(t)}$ es la variación de g sobre $[a, t]$.

Este tipo de funciones son importantes en la teoría de integración, puesto que se conoce que si g es de variacion finita y es càd, entonces existe una única medida de Radon μ_g sobre $\mathcal{B}(R^+)$ (es decir, finita sobre compactos) tal que $\mu_g([0, t]) = f(t)$ para toda $t \geq 0$.

A μ_g se le llama la *medida canónica generada por* g. además a la variación total de g le corresponde la variación de la medida μ_g (esto en notación es $|dg|$) y si g es no decreciente, entonces $\mu_g \geq 0$

Así, si $f : I\!R^+ \to I\!R$ es de variación finita y càd, y tomando $f : I\!R^+ \to I\!R$ una función localmente integrable con respecto a μ_g, denotamos por

$$\int_0^t f(s)\mathrm{d}g(s)$$

a la integral de Lebesgue $\int_{[0,t]} f(s)\mathrm{d}\mu_g(s)$ de f con respecto a la medida μ_g. La integral $\int_0^t f(s)\mathrm{d}g(s)$ se llama la *integral de Lebesgue-Stieljes.*

Un proceso estocástico $(x(t), t \geq 0)$ es de *variación finita* si las trayectorias $(X(t)(\omega), t \geq 0)$ son de variación finita para casi todo $\omega \in \Omega$.

El ejemplo más importante para nuestro trabajo es el de las *integrales de Poisson*. Sea N una medida aleatoria Poisson, con medida de intensidad μ, que cuenta los saltos de un proceso de Lévy X y si $f : I\!R^d \to I\!R^d$ es Borel medible. para A acotado por abajo, definamos $Y = (Y(t), t \geq 0)$ mediante

$$Y(t) = \int_A f(x)N(t, \mathrm{d}x)$$

entonces $Y(t)$ es de variación finita sobre $[0, t]$ para cada $t \geq 0$.

Más aun, una condición necesaria y suficiente para que un proceso de Lévy tenga variación finita es que no exista la parte browniana en la formula de Lévy- Khinchine y ademas que $\int_{|x|<1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < \infty$, esto se puede consultar en Bretagnolle [8] y en Protter [27].

Capítulo 3

El Teorema de Lévy-Itô

En este capitulo se prueba el teorema de la descomposición de Lévy-Itô, que es el hecho de que cualquier proceso de Lévy se puede escribir como la suma de un Movimiento Browniano y de un proceso Poisson Compuesto con el tamaño de salto menor a uno y mayor a uno. Esto, lo abordaremos siguiendo de cerca la presentación que realiza Applebaum [1].

3.1. Resultados Preliminares

Primero probaremos una serie de resultados previos, para después enunciar y probar el teorema principal, en la siguiente sección.

Primero necesitamos recordar la desigualdad de Doob para martingalas, *Si* $(X(t), t \geq 0)$ *es una submartingala positiva entonces para toda* $p \geq 1$ *se tiene*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} [X(s)]^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}([X(t)]^p).$$

Diremos que M es martingala en $\mathbb{R}^d$ si para todo $1 \leq k \leq d$ se tiene que su k-esima entrada $M^{(k)}$ es martingala, además definiremos la función salto mediante

$$\Delta M(t) = M(t) - M(t-).$$

Además, diremos que si A es el conjunto de los puntos de discontinuidad de la martingala M (es decir, los puntos en que se tiene que $\Delta M(t) \neq 0$), es obvio entonces que si $A^{(k)}$ es el conjunto de la discontinuidad de la entrada k-esima de la martingala M entonces podríamos escribir al conjunto A como

$$A = \bigcup_{k=1}^{d} A^{(k)}.$$

Proposición 3.1.1 *Sea $M_j, j = 1, 2$ dos martingalas* càdlàg *centradas y supongamos que para alguna j se tiene que $M_j \in L^2$ y que para $k \neq j$ y $t \geq 0$ se tiene que $\mathbb{E}[|\mathrm{V}(\mathrm{M_k}(\mathrm{t}))|^2] < \infty$, entonces*

$$\mathbb{E}\left[(M_1(t), M_2(t))\right] = \mathbb{E}\left(\sum_{0\leq s\leq t} (\Delta M_1(s), \Delta M_2(s))\right) \tag{3.1}$$

donde $\Delta(M_j(t)) = M_j(t) - M_j(t-)$ con $M_j(t-) = \lim_{s\uparrow t} M_j(s)$.

Prueba.- Sin perdida de generalidad, supongamos que M_1 es L^2 y que M_2 tiene variación cuadrado integrable. definamos ahora una partición del intervalo $[0, t]$ mediante $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t\}$, y por la propiedad de las martingalas se tiene que al calcular el lado derecho de la expresión (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(M_1(t), M_2(t)) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[(M_1(t_{i+1}) - M_1(t_i), M_2(t_{j+1}) - M_2(t_j))\right] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[(M_1(t_{i+1}) - M_1(t_i), M_2(t_{i+1}) - M_2(t_i))\right].
\end{aligned}$$

Ahora, tomemos una sucesión de particiones del intervalo $[0, t]$, $(P_n, n \in \mathbb{N})$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq i(n)\leq m(n)-1} \left|t_{i(n)+1} - t_{i(n)}\right| = 0.$$

Aquí, puede ser desafortunada la notación, esto porque $\{t_{i(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de puntos sobre el intervalo $[0, t]$ para cada i y para cada $n \in I\!N$, donde la i es la dada por la primera partición P y la n esta dada por la sucesión de particiones.

Volviendo a la demostración, afirmamos que con probabilidad 1 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} \left(M_1(t_{i(n)+1}) - M_1(t_{i(n)}), M_2(t_{i(n)+1}) - M_2(t_{i(n)})\right) \quad (3.2)$$
$$= \sum_{0\leq s\leq t} \left(\Delta M_1(s), \Delta M_2(s)\right).$$

Probemos esta última afirmación. Fijemos $\omega \in \Omega$ y asumamos, sin perdida de generalidad, que $(M_1(t)(\omega), t \geq o)$ y $(M_2(t)(\omega), t \geq o)$ tienen los mismos puntos de discontinuidad y llamémosle $A = (t_n, n \in I\!N)$. Notemos que esto no debe causar ningún problema, pues si las martingalas no tienen los mismos puntos de discontinuidad, sólo con tomar la unión de los dos conjuntos de puntos donde son discontinuos A_1, A_2 seria nuestro conjunto A y esto lo puedo hacer por el teorema 2.2.1 de la página 44 que me garantiza que los conjuntos A_1, A_2 son a lo más numerables, aunque claro que como se quiere calcular los saltos de las martingalas, al final sólo va a quedar (no la unión sino) $A_1 \bigcap A_2$, esto porque si tenemos un punto t_0 en el que es discontinuo sólo para alguna de las dos martingalas, en ese punto se tiene que para la otra martingala la función salto se anula, así, se tendría $(\Delta M_1(t_0), \Delta M_2(t_0)) = 0$.

Ahora, consideremos el conjunto A^c, tomando una sucesión de particiones $(P_n, n \in I\!N)$ de $[0, t]$ tales que, para cada, $n \in I\!N$, se tiene que

$$A \bigcap (t_{j(n)}, t_{j(n)+1}) = \emptyset$$

para toda $0 \leq j(n) \leq m(n) - 1$, de donde se tiene que

$$\sum_{j=0}^{m(n)-1} \left|\left(M_1(t_{j(n)+1}) - M_1(t_{j(n)}), M_2(t_{j(n)+1}) - M_2(t_{j(n)})\right)\right|$$

por la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*

$$\leq \sum_{j=0}^{m(n)-1} \left|M_1(t_{j(n)+1}) - M_1(t_{j(n)})\right| \left|M_2(t_{j(n)+1}) - M_2(t_{j(n)})\right|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m(n)-1} \left\{\max_{0\leq j(n)\leq m(n)-1} \left|M_1(t_{j(n)+1}) - M_1(t_{j(n)})\right|\right\} \left|M_2(t_{j(n)+1}) - M_2(t_{j(\cdot}\right.$$

$$= \max_{0\leq j(n)\leq m(n)-1} \left|M_1(t_{j(n)+1}) - M_1(t_{j(n)})\right| \sum_{j=0}^{m(n)-1} \left|M_2(t_{j(n)+1}) - M_2(t_{j(n)})\right|$$

$$\leq \max_{0\leq j(n)\leq m(n)-1} \left|M_1(t_{j(n)+1}) - M_1(t_{j(n)})\right| \mathrm{varP_n(M_2)}$$

$$\to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Así, sólo queda verificar que en A se tiene la afirmación, para esto fijemos $\epsilon > 0$ y elijamos $\delta = (\delta_n, n \in I\!N)$ tal que

$$\begin{aligned}\max\{|M_1(t_n)-&M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n)|,\\ &|M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n)|\} < \frac{\epsilon}{K2^n}\end{aligned}$$

donde

$$K = 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_1(s)| + 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_2(s)|.$$

Ahora consideremos

$$\begin{aligned}S(\delta) =\sum_{n=1}^{\infty} \{&(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n))\\ &- (\Delta M_1(t_n), \Delta M_2(t_n))\}\end{aligned}$$

y entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
&|S(\delta)| \\
\le\ & \sum_{n=1}^{\infty} |(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) \\
& - (\Delta M_1(t_n), \Delta M_2(t_n))| \\
=\ & \sum_{n=1}^{\infty} |(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) \\
& - (\Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) + (\Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) \\
& - (\Delta M_1(t_n), \Delta M_2(t_n))| \\
=\ & \sum_{n=1}^{\infty} |(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) \\
& + (\Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n))| \\
\le\ & \sum_{n=1}^{\infty} |(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n))| \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} |(\Delta M_1(t_n), M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n))|
\end{aligned}$$

y usando la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*

$$\begin{aligned}
\le\ & \sum_{n=1}^{\infty} |M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n)|\,|M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)| \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta M_1(t_n)|\,|M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n)|
\end{aligned}$$

y como $\quad \Delta(M_j(t)) = M_j(t) - M_j(t-)$

$$\begin{aligned}
=\ & \sum_{n=1}^{\infty} |M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n)|\,|M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)| \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} |M_1(t_n) - M_1(t_n -)|\,|M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n)|
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
&|M_j(t_n) - M_j(t_n - \delta_n)| \le |M_j(t_n)| + |M_j(t_n - \delta_n)| \\
&\quad \le \sup_{0\le s\le t} |M_j(s)| + \sup_{0\le s\le t} |M_j(s)| = 2 \sup_{0\le s\le t} |M_j(s)|
\end{aligned}$$

para $j = 1, 2$. entonces se tiene que

$$|S(\delta)| \le 2\left(\sup_{0\le s\le t} |M_1(s)| + \sup_{0\le s\le t} |M_2(s)|\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K2^n} < \epsilon.$$

Y se establece la afirmación, ahora para obtener el resultado sólo basta probar la convergencia de la integral de la suma de la expresión (3.2), para ver esto, notemos que como se tiene además que para cada $n \in I\!N$

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} [M_1(t_{i(n)+1}) - M_1(t_{i(n)})][M_2(t_{i(n)+1}) - M_2(t_{i(n)})]\right| \\
&\leq \sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} \left|M_1(t_{i(n)+1}) - M_1(t_{i(n)})\right| \left|M_2(t_{i(n)+1}) - M_2(t_{i(n)})\right| \\
&\leq \sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} 2 \sup_{0\leq s\leq t} \{|M_1(s)|\} \left|M_2(t_{i(n)+1}) - M_2(t_{i(n)})\right| \\
&= 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_1(s)| \sum_{i(n)=0}^{m(n)-1} \left|M_2(t_{i(n)+1}) - M_2(t_{i(n)})\right| \\
&= 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_1(s)| \, \mathrm{varP_n(M_2(t))} \\
&\leq 2 \sup_{0\leq s\leq t} |M_1(s)| \mathrm{V(M_2(t))}.
\end{aligned}
$$

En el ultimo paso se ha usado la definición de $\mathrm{V(M(t))}$ para M_2, así, como $\mathrm{V(M_2(t))} = \sup_{\mathrm{P}} \mathrm{varP_n(M_2(t))}$, entonces se tiene que $\mathrm{V(M_2(t))} \geq \mathrm{varP_n(M_2(t))}$ para toda partición P_n.

Ahora, se sabe que

$$(|M_1(s)| - \mathrm{V(M_2(t))})^2 \geq 0$$

para toda $s \in [0, t]$, entonces desarrollando obtenemos

$$|M_1(s)|^2 - 2|M_1(s)|\mathrm{V(M_2(t))} + [\mathrm{V(M_2(t))}]^2 \geq 0$$

de donde

$$|M_1(s)|^2 + [\mathrm{V(M_2(t))}]^2 \geq 2|M_1(s)|\mathrm{V(M_2(t))}$$

y como $|M_1(s)| \geq 0$ y $\mathrm{V(M_2(t))} \geq 0$ entonces

$$|M_1(s)|^2 + [\mathrm{V(M_2(t))}]^2 \geq 2|M_1(s)|\mathrm{V(M_2(t))} \geq |\mathrm{M_1(s)}|\mathrm{V(M_2(t))}$$

y tomando el supremo sobre s se tiene

$$\sup_{0\leq s\leq t}\left\{|M_1(s)|^2+[\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))]^2\right\}\geq \sup_{0\leq s\leq t}|M_1(s)|\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))$$

y al tomar la esperanza nos queda

$$I\!\!E\left(\sup_{0\leq s\leq t}|M_1(s)|^2\right)+I\!\!E\left([\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))]^2\right)\geq I\!\!E\left(\sup_{0\leq s\leq t}|M_1(s)|\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))\right).$$

Y usando la desigualdad de Doob para martingalas obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} I\!\!E\left(\sup_{0\leq s\leq t}|M_1(s)|\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))\right) &\leq I\!\!E\left(\sup_{0\leq s\leq t}|M_1(s)|^2\right)+I\!\!E\left(|\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))|^2\right)\\ &\leq 4I\!\!E(|M_1(t)|^2)+I\!\!E\left(|\mathrm{V}(\mathrm{M}_2(\mathrm{t}))|^2\right)<\infty. \end{aligned}$$

Finalmente al usar el teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$I\!\!E\left[(M_1(t),M_2(t))\right]=I\!\!E\left[\sum_{0\leq s\leq t}(\Delta M_1(s),\Delta M_2(s))\right].$$

■

Corolario 3.1.1 *Sea* $N=(N(t),t\geq 0)$ *un proceso poisson con tiempos de llegada* $(T_n,n\in I\!\!N)$ *y sea* M *una martingala* L^2 *càdlàg centrada, entonces para cada* $t\geq 0$ *se tiene*

$$I\!\!E(M(t)N(t))=I\!\!E\left(\sum_{n\in \boldsymbol{N}}\Delta M(T_n)\chi_{\{T_n\leq t\}}\right).$$

Prueba.- Usando la proposición se tiene que

$$I\!\!E(M(t)N(t))=I\!\!E\left(\sum_{0\leq s\leq t}\Delta M(s)\Delta N(s)\right)$$

Pero como el proceso Poisson tiene tiempos de llegada T_n, entonces lo podemos rescribir como

$$=I\!\!E\left(\sum_{n\in \boldsymbol{N}}\Delta M(T_n)\Delta N(T_n)\chi_{\{T_n\leq t\}}\right)$$

pero como $N(T_n) = 1$ para todo $n \in I\!N$ se tiene entonces

$$= I\!E\left(\sum_{n\in I\!N} \Delta M(T_n)\chi_{\{T_n\leq t\}}\right).$$

■

Ahora, si A es acotado por abajo y supongamos que $f \in L^2(A, \mu_A)$ y para cada $t \geq 0$ definamos

$$M_1(t) = \int_A f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x)$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{V(M_1(t))} &= \sup_P \mathrm{varP(M_1(t))} \\
&= \sup_P \mathrm{varP}\left(\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)N(t,dx)} - \int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)}\mu(\mathrm{dx})\right) \\
&\leq \sup_P \mathrm{varP}\left(\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)N(t,dx)}\right) + \sup_{\mathrm{P}} \mathrm{varP}\left(\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)}\mu(\mathrm{dx})\right) \\
&= \mathrm{V}\left(\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)N(t,dx)}\right) + \mathrm{V}\left(\int_{\mathrm{A}} \mathrm{f(x)}\mu(\mathrm{dx})\right) \\
&\leq \int_A |f(x)|N(t, \mathrm{d}x) + \int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

Entonces como $f \in L^2(A, \mu_A)$ se tiene que $I\!E[\int_A |f(x)|N(t, \mathrm{d}x)] < \infty$ así

$$\begin{aligned}
I\!E[|\mathrm{V(M_1(t))}|^2] &\leq \left[\int_A |f(x)|N(t, \mathrm{d}x)\right]^2 \\
&\quad +2\int_A |f(x)|N(t, \mathrm{d}x)\int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x) \\
&\quad +\left[\int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x)\right]^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Vamos a ver que si se tiene una familia de borelianos en $I\!R^d - \{0\}$, entonces la familia de integrales definida

$$Y_k(t) = \int_{A_k} f(x)N(t, \mathrm{d}x)$$

para cada $A_k \in \mathcal{B}(I\!R^d - \{0\})$ y $k = 1, \ldots, m$, tal que $A_k \cap A_j = \emptyset$, es independiente.

Primero veamos un teorema que vamos a necesitar para probar lo anterior,

Teorema 3.1.1 *Supongamos que para cada $j = 1, \ldots, k$ se tiene que $X_{j,n} \to X_j$ cuando $n \to \infty$ con probabilidad 1. Y si la familia $\{X_{j,n} : j = 1, \ldots, k\}$ es independiente para cada n, entonces la familia $\{X_j : j = 1, \ldots, k\}$ es independiente*

La prueba de este resultado se puede consultar en Billingsley [5]. Así, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1.2 *Sean $A_1, \ldots, A_m$ acotados por abajo y sea f una función medible de A_k a $I\!R^d$ para toda $k = 1, \ldots, m$, definimos entonces las funciones*

$$Y_k(t) = \int_{A_k} f(x)N(t, \mathrm{d}x) \tag{3.3}$$

para $k = 1, \ldots, m$, entonces $Y_1(t), \ldots, Y_m(t)$ son independientes.

Prueba.- Primero ya habíamos visto que $Y_k(t)$ es finita, esto, por la razón que N es finita por el resultado (2.5.1). Para $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{Z}^d$ definamos como C_p^n el conjunto de puntos $z = (z_1, \ldots, z_d) \in I\!R^d$ tal que $2^{-n}(p_j - 1) < z_j \leq 2^{-n}p_j$ para $j = 1, \ldots, d$. Entonces $\{C_p^n, p \in \mathbb{Z}^d\}$ cubre a $I\!R^d$. ahora elijamos un punto z_p^n en cada C_p^n y definamos la función $f_n(x)$ de A_k a $I\!R^d$, para todo $k = 1, \ldots, m$ mediante

$$f_n(x) = z_p^n$$

para $x \in f^{-1}(C_p^n)$, así se tiene que $|f(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n}d^{1/2}$. Sea

$$Y_{n,k}(t) = \int_{A_k} f_n(x)N(t, \mathrm{d}x)$$

de donde se tiene que para toda $k = 1, \ldots, m$.

$$Y_{n,k}(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} z_p^n N(t, A_k \cap C_p^n)$$

y como $N(t, A_k \bigcap C_p^n)$ son independientes para toda $1 \leq k \leq m$ y $p \in \mathbb{Z}^d$ por el teorema 2.5.4, entonces se tiene que $Y_{n,1}(t), \ldots, Y_{n,m}(t)$ son independientes.

Y además, para k fijo se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} Y_{n,k}(t) = Y_k(t)$$

y por el teorema anterior se tiene entonces que $Y_1(t), \ldots, Y_m(t)$ son independientes.

■

Diremos que el proceso de Lévy tiene *saltos acotados* si existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{0 \leq t < \infty} |\Delta X(t)| < C.$$

De esta manera si tenemos que un proceso de Lévy tiene saltos acotados entonces tiene todos los momentos finitos, esto se muestra en el siguiente resultado

Antes, recordemos la desigualdad de Chebyshev-Markov

"Si X es una variable aleatoria entonces se tiene que

$$\mathbb{P}(|X - \alpha\mu| \geq C) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - \alpha\mu|^n)}{C^n}$$

donde $C > 0, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$"

Teorema 3.1.3 *Si X es un proceso de Lévy con saltos acotados entonces se tiene que $\mathbb{E}(|X(t)|^m) < \infty$ para toda $m \in \mathbb{N}$*

Prueba.- Sea $C > 0$ y definamos una sucesión de tiempos de paro $(T_n, n \in I\!N)$ mediante

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf\{t \geq 0, |X(t)| > C\} \\ &\text{y para } n > 1 \\ T_n &= \inf\{t > T_{n-1}, |X(t) - X(T_{n-1})| > C\}. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que $|\Delta X(T_n)| \leq C$ y además que $T_{n+1} - T_n = \inf\{t \geq 0; |X(t + T_n) - X(T_n)| > C\}$ para toda $n \in I\!N$.

Afirmamos que para toda $n \in I\!N$ se tiene que

$$\sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_n)| \leq 2nC \tag{3.4}$$

esto, lo probaremos por inducción sobre las T_n, para $n = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_1)| &= |X(T_1)| \\ &= |X(T_1) - X(T_1-) + X(T_1-)| \\ &\leq |\Delta X(T_1)| + |X(T_1-)| \\ &\leq 2C. \end{aligned}$$

Supongamos que la ecuación (3.4) se cumple para $n > 1$. fijando $\omega \in \Omega$ y consideremos el lado izquierdo de la ecuación donde reemplazamos a n por $n+1$, así, se tiene $\sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_{n+1})|$. Ahora, el supremo de $|X(s \wedge T_{n+1})|$ es alcanzado sobre el intervalo $[0, T_n(\omega))$ o sobre $[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)]$. En el primer caso, se tiene que en particular

$$\sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_{n+1})| \leq 2nC \leq 2(n+1)C.$$

En el segundo caso se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le s<\infty} |X(s\wedge T_{n+1})(\omega)| \\
&= \sup_{T_n(\omega)\le s\le T_{n+1}(\omega)} |X(s)(\omega)| \\
&= \sup_{T_n(\omega)\le s\le T_{n+1}(\omega)} |X(s)(\omega) - X(T_n)(\omega) + X(T_n)(\omega)| \\
&\le \sup_{T_n(\omega)\le s\le T_{n+1}(\omega)} |X(s)(\omega) - X(T_n)(\omega)| + |X(T_n)(\omega)| \\
&\le |X(T_{n+1})(\omega) - X(T_n)(\omega)| + 2nC \\
&= |X(T_{n+1})(\omega) - X(T_{n+1}-)(\omega) + X(T_{n+1}-)(\omega) - X(T_n)(\omega)| + 2nC \\
&\le |X(T_{n+1})(\omega) - X(T_{n+1}-)(\omega)| + |X(T_{n+1}-)(\omega) - X(T_n)(\omega)| + 2nC \\
&\le C + C + 2nC \\
&= 2(n+1)C.
\end{aligned}$$

Ahora, para toda $n \ge 2$ se tiene que las variables aleatorias $T_n - T_{n-1}$ son independientes de $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$ y tienen la misma distribución que T_1, esto usando el teorema 2.4.3, conocido como la propiedad fuerte de Markov. Ahora, al usar el teorema 2.4.1 de manera repetida se tiene que

$$I\!E(e^{-T_n}) = I\!E(e^{-T_1}e^{-(T_2-T_1)}\cdots e^{-(T_n-T_{n-1})}) = [I\!E(e^{-T_1})]^n = a^n \quad (3.5)$$

para alguna a tal que $0 < a < 1$.

Y al usar la desigualdad de Chebyshev-Markov y las expresiones (3.4) y (3.5), se tiene que para toda $n \in I\!N$ y $t \ge 0$

$$\begin{aligned}
I\!P(|X(t)| \ge 2nC) &\le I\!P(T_n < t) \\
&= I\!P(-T_n > -t) \\
&= I\!P(e^{-T_n} > e^{-t}) \\
&\le \frac{I\!E[e^{-T_n}]}{e^{-t}} \\
&= e^t a^n.
\end{aligned}$$

Así, se ha establecido el hecho que

$$I\!P(|X(t)| \ge 2nC) \le e^t a^n. \quad (3.6)$$

Y al calcular $\mathbb{E}(|X(t)|^m)$ se tiene que

$$\int_{|x|\geq 2nC} |x|^m \mathbb{P}_{X(t)}(\mathrm{d}x) = \sum_{r=n}^{\infty} \int_{2rC\leq|x|\leq 2(r+1)C} |x|^m \mathbb{P}_{X(t)}(\mathrm{d}x)$$

pero como $|x| \leq 2(r+1)C$ entonces $|x|^m \leq [2(r+1)C]^m$ y así

$$\leq \sum_{r=n}^{\infty} [2(r+1)C]^m \int_{2rC\leq|x|\leq 2(r+1)C} \mathbb{P}_{X(t)}(\mathrm{d}x)$$

y además por (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{r=n}^{\infty} [2(r+1)C]^m e^t a^r 2C \\ &= [2C]^{m+1} e^t \sum_{r=n}^{\infty} (r+1)^m a^r \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Y como se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene entonces que X tiene todos los momentos finitos.

■

Ahora, consideremos el proceso Poisson Compuesto

$$\left(\int_{|x|>a} xN(t, \mathrm{d}x), t \geq 0 \right)$$

el cual nos va a permitir definir un proceso estocástico $Y_a = (Y_a(t), t \geq 0)$ como

$$Y_a(t) = X(t) - \int_{|x|\geq a} xN(t, \mathrm{d}x).$$

Aquí se tiene que al proceso de Lévy X se le están quitando los saltos de tamaño mayores o iguales a a. Ahora, el proceso Y_a se puede rescribir de la siguiente manera, si $(T_n, n \in \mathbb{N})$ son los tiempos de llegada para el proceso poisson $(N(t, B_a(0)^c), t \geq 0)$ (con $B_a(0)$ como la bola de radio a alrededor del 0), entonces podemos escribir a Y_a de manera recursiva como

$$Y_a(t) = \begin{cases} X(t), & \text{para } 0 \leq t < T_1 \ ; \\ X(T_1-), & \text{para } t = T_1 \ ; \\ X(t) - X(T_1) + X(T_1-), & \text{para } T_1 < t < T_2 \ ; \\ Y_a(T_2-), & \text{para } t = T_2 \ . \end{cases}$$

Así, se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.1.4 *Y_a es un proceso de Lévy.*

Prueba.- Tenemos que verificar que se cumplen las 3 condiciones de la definición 1.5.1, de la página 16. Pero se tiene que **(1)** es inmediato, pues $Y_a(0) = X(0) = 0$ c.s., para probar **(2)** si A es acotado por abajo entonces se tiene que para cada $0 \leq s < t < \infty$ y $n \in I\!N$ $N(t, A) - N(s, A) = n$ si y sólo si existen $s < t_1, \cdots < t_n \leq t$ tales que

$$\Delta X(t_j) \in A \quad 1 \leq j \leq n.$$

Mas aun, $\Delta X(u) \in A$ si y sólo si existe $a \in A$ para la cual, dada toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < u - w < \delta \Longrightarrow |X(w) - X(u) - a| < \epsilon.$$

Así, de las dos expresiones anteriores se tiene que $(N(t, A) - N(s, A) = n) \in \sigma\{X(v) - X(u); s \leq u < v \leq t\}$.

Además, como

$$\begin{aligned} Y_a(t) - Y_a(s) &= X(t) - \int_{|x|\geq a} xN(t, \mathrm{d}x) - X(s) - \int_{|x|\geq a} xN(s, \mathrm{d}x) \\ &= X(t) - X(s) + \int_{|x|\geq a} x\left[N(t, \mathrm{d}x) - N(s, \mathrm{d}x)\right] \end{aligned}$$

y como claramente $\{|x| \geq a\}$ es acotado por abajo, se tiene que $Y_a(t) - Y_a(s)$ es $\mathcal{F}_{s,t}$-medible, donde $\mathcal{F}_{s,t} = \sigma\{X(u) - X(v); s \leq v \leq u < t\}$. Por tanto, se tiene que Y_a tiene incrementos independientes y estacionarios.

Para probar **(3)**, al usar el hecho que para cada $b > 0$ y $t \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} I\!P\left(|Y_a(t)| > b\right) \;\leq\; & I\!P\left(|X(t)| > \frac{b}{2}\right) + I\!P\left(\left|\int_{|X|\geq a} xN(t, \mathrm{d}x)\right| > \frac{b}{2}\right) \\ & = 0 \text{ si } t \downarrow 0. \end{aligned}$$

■

Ahora definamos el proceso de Lévy $\hat{Y}_a = (\hat{Y}_a(t), t \geq 0)$ por

$$\hat{Y}_a(t) = Y_a(t) - I\!E[Y_a(t)]$$

y este proceso, es una martingala L^2 càdlàg y centrada .

Tomemos ahora $a = 1$ y rescribamos los procesos $Y_1, \hat{Y}_1$ sólo como $Y, \hat{Y}$. Además, usemos $M(t, A) = \int_A xN(t, \mathrm{d}x)$ para $t \geq 0$ y A acotado por abajo.

Recordemos la definición que se había dado del espacio lineal $\mathcal{M}$ que era las clases de equivalencia de las martingalas L^2 $\mathcal{F}_t$-adaptadas, ahora si definimos un producto interior en este espacio de la siguiente manera

$$\langle f, g \rangle = I\!E\left[\int_A f(x)g(x)\mu(\mathrm{d}x)\right] \tag{3.7}$$

Para $f, g \in \mathcal{M}$ y A acotado por abajo.

Definiremos ahora al espacio $\mathcal{M}_A$ para A acotado por abajo por

$$\mathcal{M}_A = \left\{\int_A f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x), f \in L^2(A, \mu_A)\right\}$$

Se puede mostrar que $\mathcal{M}_A$ es un subespacio cerrado del espacio martingala $\mathcal{M}$, pero aquí no lo haremos.

Para probar el siguiente teorema necesitaremos antes el siguiente lema.

Lema 3.1.1 *Sea A acotado por abajo y M una martingala centrada L^2 que además es continua en los tiempos de arribo de $(N(t, A), t \geq 0)$ entonces M es ortogonal a cada proceso M^* en $\mathcal{M}_A$.*

Prueba.- Tenemos que probar que $\langle M(t), M(t)^* \rangle = 0$, para esto notemos que como $M(t)$ es continua en los tiempos de arribo de $N(t, A)$ entonces se tiene que $\Delta M(T_n) = 0$ para toda $n \in I\!N$, ahora sea $M(t)^*$ cualquier martingala de M_A, y usando la definición del producto interno dado en la expresión (3.7), y recordando la definición de esperanza con-dicional dada por Dudley [12], pág. 336 se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle M(t), M(t)^*\rangle &= \mathbb{E}\left[\int_A M(t)M(t)^*\mu(\mathrm{d}x)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mu(A)\mathbb{E}\left(M(t)M(t)^*|A\right)\right] \\
&= \mu(A)\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(M(t)M(t)^*|A\right)\right] \\
&= \mu(A)\mathbb{E}\left[(M(t)M(t)^*)\right]
\end{aligned}$$

y por la proposición 3.1.1 se tiene que

$$\langle M(t), M(t)^*\rangle = \mu(A)\mathbb{E}\left[\sum_{0\le s\le t}\Delta M(s)\Delta M^*(s)\right].$$

Pero como $\Delta M(T_n) = 0$ para todo $(T_n, n \in \mathbb{N})$ tiempo de llegada y como además, $M(t)^*$ sólo toma valores diferentes de cero en $(T_n, n \in \mathbb{N})$ se tiene entonces que

$$\langle M(t), M(t)^*\rangle = 0.$$

■

Enunciaremos enseguida el teorema de Kac, que se deja sin demostración y que puede consultarse en Bretagnolle, Chatterji and Meyer [9] pág. 175.

Teorema 3.1.5 Kac. *Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independiente si y sólo si*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left[i\sum_{j=1}^{n}(u_j, X_j)\right]\right) = \phi_{X_1}(u_1)\cdots\phi_{X_n}(u_n)$$

para toda $u_1, \ldots, u_n$ y donde ϕ_{X_j} es la función característica de la variable aleatoria X_j para toda j.

Así, tenemos el teorema siguiente que es de vital importancia para la prueba de la descomposición de Lévy-itô.

Teorema 3.1.6 *Para cada $t \geq 0$*

$$\hat{Y}(t) = Y_c(t) + Y_d(t)$$

donde Y_c y Y_d son procesos de Lévy independientes, y Y_c tiene trayectorias continuas y

$$Y_d(t) = \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t, \mathrm{d}x).$$

Prueba.- Tomemos una sucesión $(\epsilon_n, n \in I\!N)$ que decrece a 0 monótonamente, y con $\epsilon_1 = 1$. Para cada $m \in I\!N$ definamos

$$B_m = \{x \in I\!R^d, \epsilon_{m+1} \leq |x| < \epsilon_m\}$$

y para cada $n \in I\!N$ definamos

$$A_n = \cup_{m=1}^n B_m.$$

Afirmamos que la sucesión $(M(\cdot, A_n), n \in I\!N)$ converge en el espacio martingala a Y_d. Para probar esto, primero veamos que para cada $t \geq 0$ las martingalas $M(t, B_m)$ son mutuamente ortogonales, esto si podemos usar la proposición 3.1.1, de donde se tiene que

$$\begin{aligned} I\!E[|M(t, A_n)|^2] &= I\!E\left[|M\left(t, \cup_{m=1}^n B_m\right)|^2\right] \\ &= I\!E\left[|M\left(t, B_1\right)|^2 + \cdots + |M\left(t, B_n\right)|^2\right] \\ &\quad +2\sum_{m=1}^{n}\sum_{i>m} I\!E[(M(t, B_m), M(t, B_i))] \end{aligned}$$

y por la proposición 3.1.1 cada término de la segunda suma es 0 entonces

$$\begin{aligned} I\!E[|M(t, A_n)|^2] &= I\!E\left[|M\left(t, B_1\right)|^2\right] + \cdots + I\!E\left[|M\left(t, B_n\right)|^2\right] \\ &= \sum_{m=1}^{n} I\!E\left[|M\left(t, B_m\right)|^2\right]. \end{aligned}$$

Sea $Z_{A_n}(t) = \hat{Y}(t) - M(t, A_n)$, entonces Z es un proceso de Lévy, así, si η_z es el **Exponente de Lévy** de $Z(t)$ y si $u \in I\!R^d$ entonces

$$M_u(t) = \exp[i(u, Z_{A_n}(t)) - t\eta_Z(u, A_n)] - 1$$

es una martingala, esto por el teorema 2.3.1 y si $\eta_{M(A_n)}$ es el **Exponente de Lévy** de $M(t, A_n)$ definimos otra martingala usando el proceso de Lévy $M(t, A_n)$ y aplicando de nuevo el teorema 2.3.1 mediante

$$M_1(t, A_n) = \exp[i(u, M(t, A_n)) - t\eta_{M(A_n)}] - 1.$$

Así, se tiene que las martingalas $M_u(t)$ y $M_1(t, A_n)$ son independientes, para probar esta afirmación usando el teorema del valor medio se tiene que para cada $t \geq 0$ existe una variable aleatoria compleja $\rho(t)$ con la condición $0 \leq |\rho(t)| \leq 1$ tal que

$$M_1(t, A_n) = \rho(t)[i(u, M(t, A_n)) - t\eta_{M(A_n)}].$$

Asi, $M_1(t, A_n)$ tiene variación cuadrado integrable, esto para poder usar la proposición 3.1.1, ahora para $0 \leq s \leq t < \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} I\!E[M_u(t)M_1(s, A_n)] &= I\!E[M_u(s)M_1(s, A_n)] \\ &\quad + I\!E[\{M_u(t) - M_u(s)\}M_1(s, A_n)]. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Además, como el conjunto en donde $M_u(s)$ y $M_1(s, A_n)$ tienen saltos al mismo tiempo es el vacío, esto porque al proceso $Z(t)$ se le están quitando los saltos de tamaño contenidos en A_n mientras que el proceso $M_1(s, A_n)$ sólo tiene saltos en A_n, se tiene entonces que

$$I\!E[M_u(s)M_1(s, A_n)] = 0.$$

Ahora, para el segundo término de (3.8) condicionemos con respecto a $\mathcal{F}_s$ y por ser $M_u(t)$ martingala obtenemos

$$\begin{aligned} I\!E[\{M_u(t) - M_u(s)\}M_1(s, A_n)|\mathcal{F}_s] &= M_1(s, A_n)I\!E[(M_u(t) - M_u(s))|\mathcal{F}_s] \\ &= M_1(s, A_n)\left(I\!E[M_u(t)|\mathcal{F}_s] - M_u(s)\right) \\ &= M_1(s, A_n)\left(M_u(s) - M_u(s)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Y volviendo a (3.8) se tiene entonces que

$$I\!E[M_u(t)M_1(s, A_n)] = 0.$$

De donde al desarrollar obtenemos

$$\begin{aligned} I\!E[M_u(t)M_1(s, A_n)] &= I\!E\left[(e^{i(u, Z_{A_n}(t)) - t\eta_Z} - 1)(e^{i(u, M(s, A_n)) - s\eta_{M(A_n)}} - 1)\right] \\ &= I\!E\left[e^{i(u, Z_{A_n}(t)) - t\eta_Z} e^{i(u, M(s, A_n)) - s\eta_{M(A_n)}}\right] \\ &\quad - I\!E\left[e^{i(u, Z_{A_n}(t)) - t\eta_Z}\right] - I\!E\left[e^{i(u, M(s, A_n)) - s\eta_{M(A_n)}}\right] + \\ &= e^{-t\eta_Z} e^{-s\eta_{M(A_n)}} I\!E\left[e^{i(u, Z_{A_n}(t))} e^{i(u, M(s, A_n))}\right] \\ &\quad - e^{t\eta_Z - t\eta_Z} - e^{s\eta_{M(A_n)} - s\eta_{M(A_n)}} + 1 \\ &= e^{-t\eta_Z} e^{-s\eta_{M(A_n)}} I\!E\left[e^{i(u, Z_{A_n}(t))} e^{i(u, M(s, A_n))}\right] - 1 = 0. \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{i(u,Z_{A_n}(t))}e^{i(u,M(s,A_n))}\right] &= e^{t\eta_Z}e^{s\eta_{M(A_n)}} \\ &= \mathbb{E}[e^{i(u,Z_{A_n}(t))}]\mathbb{E}[e^{i(u,M(s,A_n))}].\end{aligned}$$

Por tanto, los procesos Z y $M(t,A_n)$ son independientes por el teorema de Kac, y además ortogonales por el lema anterior, así, escribamos

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})) &= \mathrm{Var}\left([\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t}) - \mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})] + \mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right) \\ &= \mathrm{Var}\left(\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t}) - \mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right) + \mathrm{Var}\left(\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right) \\ &\quad -2\mathrm{Cov}\left(\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t}) - \mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n}), \mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right) \\ &= \mathrm{Var}\left(\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t}) - \mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right) + \mathrm{Var}\left(\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right).\end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$\mathbb{E}(M(t,A_n)^2) = \mathrm{Var}\left(\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{A_n})\right) \leq \mathrm{Var}(\hat{\mathrm{Y}}(\mathrm{t})). \tag{3.9}$$

Entonces se tiene que por la expresión (3.9) para $t \geq 0$ la sucesión $(\mathbb{E}|M(t,A_n)|^2, n \in \mathbb{N})$ es creciente y acotada por arriba por $\mathbb{E}(\hat{Y}(t)^2) < \infty$ y por lo tanto convergente , aun más, para $n_1 \leq n_2$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}([M(t,A_{n_2}) - M(t,A_{n_1})]^2) &= \mathbb{E}\left(M(t,A_{n_2})^2 - 2M(t,A_{n_2})M(t,A_{n_1})\right. \\ &\quad \left.+M(t,A_{n_1})^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(M(t,A_{n_2})\right)^2 \\ &\quad -2\mathbb{E}\left(M(t,A_{n_2})M(t,A_{n_1})\right) \\ &\quad +\mathbb{E}\left(M(t,A_{n_1})^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(M(t,A_{n_2})\right)^2 - \mathbb{E}\left(M(t,A_{n_1})^2\right).\end{aligned}$$

Y por lo tanto se deduce que

$$Y_d(t) = \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t,\mathrm{d}x) = L^2 - \lim_{n\to\infty} M(t,A_n).$$

De donde se tiene que Y_d está en el espacio martingala. Entonces al usar el teorema 1.5.3 de la página 20, se tiene entonces que Y_d es un proceso de Lévy, esto usando la desigualdad de Chebyshev para $b > 0$

$$\lim_{t \downarrow 0} I\!P\left(|Y_d(t) - M(t, A_n)| > b\right) = 0$$

para toda $n \in I\!N$.

Ahora, veamos que como $\hat{Y}$ es proceso de Lévy y también lo es Y_d y como la suma de dos procesos de Lévy es a su vez un proceso de Lévy entonces

$$\lim_{n \to \infty} \hat{Y} - M(t, A_n) = \hat{Y} - Y_d = Y_c$$

es un proceso de Lévy en el espacio martingala $\mathcal{M}$, entonces

$$Y_c(t) - L^2 - \lim_{n \to \infty} [\hat{Y}(t) - M(t, A_n)].$$

Sólo falta ver que Y_c tiene trayectorias continuas, para esto se tiene que si $Y_c(t) = 0$ c.s. para toda $t \geq 0$ habremos terminado, pues salvo un conjunto de medida cero, se tendría que Y_c es una constante, supongamos que este no es el caso, y procederemos a probarlo por contradicción. Sea $N \subseteq \Omega$ el conjunto sobre el cual las trayectorias de Y_c son discontinuas. si $I\!P(N) = 0$, podemos reemplazar Y_c por una modificación que tenga trayectorias continuas, entonces supongamos que $I\!P(N) > 0$. Entonces existen $b > 0$ y un tiempo de paro tal que $I\!P(|\Delta X(T)| > b) > 0$. y sea $A = \{x \in I\!R^d : |x| > b\}$, entonces por la proposición 3.1.1 se tiene que para cada $t \geq 0$ y $f \in L^2(A, \mu_A)$

$$\begin{aligned} 0 &\neq I\!E\left(Y_c(t), \int_{|x|>b} f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x)\right) \\ &= \lim_{n \to \infty} I\!E\left([\hat{Y}(t) - M(t, A_n)], \int_{|x|>b} f(x)\tilde{N}(t, \mathrm{d}x)\right) = 0. \end{aligned}$$

Esto porque el proceso $\hat{Y}(t) - M(t, A_n)$ no tiene saltos. Por tanto, el proceso Y_c tiene trayectorias continuas.

■

Nota 3.1.1 Este teorema también se puede probar de una manera distinta utilizando herramientas de los espacios de Hilbert, esto ya que como $\mathcal{M}$ es un espacio completo, y para que sea espacio de Hilbert sólo faltaría completar la seminorma definida en la sección **2.3**, es decir, convertirla en norma y como se puede probar que para cada A acotado por abajo el conjunto $\mathcal{M}_A$ es un subespacio cerrado del espacio martingala $\mathcal{M}$ y por el lema 3.1.1 entonces se puede definir $\mathcal{M}_A^{\perp}$ y usando el teorema 3.9.4 pág. 123 del libro de Debnath L., Mikusinski P.[10] que garantiza que:
Si S es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces cada elemento de $x \in H$ tiene única descomposición en la forma $x = y + z$ donde $y \in S$ y $z \in S^{\perp}$,
se tendría la prueba del teorema, ahora para completar la norma es necesario dar la definición de procesos Predecibles, pero es algo que aquí no haremos.

Renombrando a μ como la medida de intensidad de la medida aleatoria poisson N y del teorema anterior se tienen los siguientes corolarios

Corolario 3.1.2 *μ es una medida de Lévy.*

Prueba.- Sólo tenemos que probar que $\mu((-1,1)^c) < \infty$, y veamos que

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<1} |x|^2 \mu(\mathrm{d}x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |x|^2 \mu(\mathrm{d}x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|M(t, A_n)|^2) \\
&= \mathbb{E}(|Y_d|^2) < \infty.
\end{aligned}$$

■

Corolario 3.1.3 *Para cada $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{E}(e^{i(u, Y_d(t))}) = \exp\left\{ \int_{|x|<1} \left[e^{i(u,x)} - 1 - i(u,x) \right] \mu(\mathrm{d}x) \right\}.$$

Prueba.- Retomando la expresión (2.9) de la página 69, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{i(u,Y_d(t))}] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{i\left(u,\int_{A_n} x\tilde{N}(t,\mathrm{d}x)\right)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\int_{A_n} \left[e^{i(u,x)} - 1 - i(u,x)\right] \mu(\mathrm{d}x)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_{|x|<1} \left[e^{i(u,x)} - 1 - i(u,x)\right] \mu(\mathrm{d}x)\right\}.
\end{aligned}$$

■

Ahora, se probará que el proceso $Y_c(t)$ es un Movimiento browniano, lo cual nos dejará en la posición de probar el teorema de la descomposición de Lévy-Itô.

Teorema 3.1.7 *Y_c es un Movimiento Browniano.*

Prueba.- Probaremos que para toda $u \in \mathbb{R}^d$ y $t \geq 0$ se tiene que

$$\mathbb{E}[e^{i(u,Y_c(t))}] = e^{-t(u,Au)/2}, \tag{3.10}$$

donde A es una matriz $d \times d$ simétrica positiva definida.
Por conveniencia tomemos $d = 1$. Y como por definición Y_c no tiene saltos, entonces por el teorema 3.1.3 tiene todos los momentos finitos, y así Y_c es un proceso de Lévy centrado y se puede tener que

$$\phi_t(u) = \mathbb{E}(e^{iuY_c(t)}) = e^{t\eta(u)}, \tag{3.11}$$

donde $\eta \in C^\infty(\mathbb{C})$ y además $\eta'(0) = 0$. Ahora al diferenciar para cada $t \geq 0$ y $m \geq 2$ se tiene

$$\mathbb{E}(Y_c(t)^m) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{m-1} t^{m-1} \tag{3.12}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$.
Ahora definamos una partición sobre el intervalo $[0, t]$, de la manera siguiente: sea $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ y para el propósito de esta prueba denotemos como $\Delta Y_c(t_j) = Y_c(t_{j+1}) - Y_c(t_j)$ para cada

$0 \leq j \leq n-1$. Ahora, se tiene que escribiendo lo siguiente como una serie telescópica obtenemos que

$$\begin{aligned}
I\!E(e^{iuY_c(t)} - 1) &= I\!E\left(\sum_{j=0}^{n-1}(e^{iuY_c(t_{j+1})} - e^{iuY_c(t_j)})\right) \\
&= I\!E\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)}(e^{iu(Y_c(t_{j+1})-Y_c(t_j))} - 1)\right) \\
&= I\!E\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)}(e^{iu(\Delta Y_c(t_j))} - 1)\right) \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

y por el teorema de Taylor sobre el término $e^{iu\Delta Y_c(t_j)}$ se tiene que para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
e^{iu\Delta Y_c(t_j)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu\Delta Y_c(t_j))^k}{k!} \\
&\quad + \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^{u\Delta Y_c(t_j)} (u\Delta Y_c(t_j) - v)^{n-1} e^{iv} \mathrm{d}v \\
&= 1 + \frac{iu\Delta Y_c(t_j)}{1!} \\
&\quad - \int_0^{u\Delta Y_c(t_j)} (u\Delta Y_c(t_j) - v) e^{iv} \mathrm{d}v \\
&= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) \\
&\quad - \int_0^{u\Delta Y_c(t_j)} [u\Delta Y_c(t_j) - v] e^{iv} \mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Y por el teorema del valor medio para integrales se tiene que

$$\begin{aligned}
e^{iu\Delta Y_c(t_j)} &= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) \\
&\quad -[u\Delta Y_c(t_j) - 0](u\Delta Y_c(t_j) - \varphi_j)e^{i\varphi_j},
\end{aligned}$$

donde $0 \leq \varphi_j \leq u\Delta Y_c(t_j)$.

Pero esto lo podemos rescribir como

$$\begin{aligned}
e^{iu\Delta Y_c(t_j)} &= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) \\
&\quad -[u\Delta Y_c(t_j)][u\Delta Y_c(t_j) - \zeta_j u\Delta Y_c(t_j)]e^{i\zeta_j u\Delta Y_c(t_j)}
\end{aligned}$$

Donde $0 \leq \zeta_j \leq 1$

$$= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) - [u\Delta Y_c(t_j)]^2(1-\zeta_j)e^{i\zeta_j u\Delta Y_c(t_j)}$$

,0*cm*Pero lo podemos rescribir para $0 \leq \theta_j \leq 1$ como

$$= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) - [u\Delta Y_c(t_j)]^2 e^{i\theta_j u\Delta Y_c(t_j)}$$

sumando y restando el siguiente término

$$\begin{aligned}
&= 1 + iu\Delta Y_c(t_j) - \frac{u^2}{2}[\Delta Y_c(t_j)]^2 \\
&\quad +\frac{u^2}{2}[\Delta Y_c(t_j)]^2 - u^2[\Delta Y_c(t_j)]^2 e^{i\theta_j u\Delta Y_c(t_j)}.
\end{aligned}$$

Volviendo a (3.13) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{iuY_c(t)} - 1) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)}(e^{iu\Delta Y_c(t_j)} - 1)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(iu\sum_{j=0}^{n-1}\Delta Y_c(t_j)e^{iuY_c(t_j)}\right) \\
&\quad -\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u^2}{2}e^{iuY_c(t_j)}(\Delta Y_c(t_j))^2\right) \\
&\quad +\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{u^2}{2}[\Delta Y_c(t_j)]^2 e^{iuY_c(t_j)}\right) \\
&\quad -\mathbb{E}\left(u^2\sum_{j=0}^{n-1}[\Delta Y_c(t_j)]^2 e^{iuY_c(t_j)}e^{iu\theta_j\Delta Y_c(t_j)}\right).
\end{aligned}$$

Juntando los dos últimos términos, se tiene que

$$\mathbb{E}(e^{iuY_c(t)} - 1) = \mathbb{E}(I_1) + \mathbb{E}(I_2) + \mathbb{E}(I_3) \tag{3.14}$$

donde

$$I_1(t) = iu\sum_{j=0}^{n-1}\Delta Y_c(t_j)e^{iuY_c(t_j)},$$

$$I_2(t) = -\frac{u^2}{2}\sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY(t_j)}[\Delta Y_c(t_j)]^2,$$

$$I_3(t) = -\frac{u^2}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[\Delta Y_c(t_j)]^2 \left(2e^{iu[Y_c(t_j)+\theta_j \Delta Y_c(t_j)]} - e^{iuY_c(t_j)}\right).$$

Ahora por los incrementos independientes de Y_c se tiene que

$$\mathbb{E}(I_1(t)) = iu\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}(e^{iuY_c(t_j)})\mathbb{E}(\Delta Y_c(t_j)) = 0$$

Y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I_2(t)) &= -\frac{u^2}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}(e^{iuY_c(t_j)})\mathbb{E}[\Delta Y_c(t_j)]^2 \\ &= -\frac{au^2}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\phi_{t_j}(u)(t_{j+1}-t_j). \qquad (3.15)\end{aligned}$$

La expresión (3.15) se ha obtenido al usar las expresiones (3.11) y (3.12).

Para tratar $I_3(t)$ definamos el evento para $\alpha > 0$

$$B_\alpha = \max_{\{0\le j\le n-1\}}\ \sup_{\{t_j\le u,v\le t_{j+1}\}} |Y_c(v) - Y_c(u)| \le \alpha.$$

Así, podemos escribir

$$\mathbb{E}(I_3(t)) = \mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha}) + \mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha^c}).$$

Y al usar la desigualdad $|e^{iy}-1| \le 2$ que se cumple para toda $y \in \mathbb{R}$ se tiene que el segundo término de la expresión anterior viene a estar acotado por

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha^c})| &\le 2u^2\sum_{j=0}^{n-1}\int_{B_\alpha^c}[\Delta Y_c(t_j)(\omega)]^2 \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\ &\le 2u^2(\mathbb{P}(B_\alpha^c))^{\frac{1}{2}}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\Delta Y_c(t_j)^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le 2u^2(\mathbb{P}(B_\alpha^c))^{\frac{1}{2}}O(t^2+t^3)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Esto se obtiene al usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la expresión (3.12).

Y el cálculo sobre B_α usando una vez más la expresión (3.12), nos deja

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha})| &\leq |u|^3 \int_{B_\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta Y_c(t_j)|^3(\omega) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \alpha a t |u|^3. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Introduzcamos ahora una sucesión de particiones $(\mathcal{P}^n, n \in \mathbb{N})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ donde $\delta_n = \max_{1<j^{(n)}\leq m^{(n)}} |t_{j^{(n)}+1} - t_{j^{(n)}}|$ y escribamos para cada $n \in \mathbb{N}$ el correspondiente $I_k(t)$ como $I_k^{(n)}(t)$ para $j = 1, 2, 3$, y también denotemos como B_α como $B_\alpha^{(n)}$.

Ahora, por la continuidad de las trayectorias de Y_c se tiene que

$$\begin{aligned} \max_{1\leq j\leq m^{(n)}} \sup_{t_{j^{(n)}}\leq u,v\leq t_{j^{(n)}+1}} |Y_c(v) - Y_c(u)| &\leq \sup_{0\leq u,v\leq t, |u-v|\leq\delta_n} |Y_c(v) - Y_c(u)| \\ &\to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Y por el teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((B_\alpha^{(n)})^c) = 0.$$

Y recordando que

$$\mathbb{E}(I_3(t)) = \mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha}) + \mathbb{E}(I_3(t)\chi_{B_\alpha^c})$$

se tiene entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(I_3^{(n)}(t)) \leq \frac{\alpha a t |u|^3}{2}$$

pero como α se puede hacer arbitrariamente pequeño entonces se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(I_3^{(n)}(t)) = 0. \tag{3.17}$$

Ahora, volviendo a la expresión (3.15), y tomando $I_2^{(n)}$ por el correspondiente I_2, y tomando límite cuando $n \to \infty$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(I_2^{(n)}(t)) &= -\frac{au^2}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{t_j^{(n)}}(u)(t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}) \\ &= -\frac{au^2}{2} \int_0^t \phi_s(u) \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Y volviendo a la expresión (3.14) se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\phi_t(u)-1 &= \mathbb{E}[e^{iuY_c(t)}]\\ &= \mathbb{E}[I_1]+\mathbb{E}[I_2]+\mathbb{E}[I_3]\\ &= -\frac{au^2}{2}\int_0^t \phi_s(u)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

por lo que se tiene que

$$\phi_t(u)-1=-\frac{au^2}{2}\int_0^t \phi_s(u)\mathrm{d}s$$

y al derivar con respecto a t y utilizando el teorema fundamental del cálculo se obtiene una ecuación diferencial en t y al resolver obtenemos.

$$\begin{aligned}\phi_t'(u) &= -\frac{au^2}{2}\phi_t(u)\\ \frac{\phi_t'(u)}{\phi_t(u)} &= -\frac{au^2}{2}\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\phi_s'(u)}{\phi_s(u)}\mathrm{d}s &= -\frac{atu^2}{2}\\ \ln[\phi_s(u)]_{s=0}^t &= -\frac{atu^2}{2}\end{aligned}$$

Pero $\phi_0(u)=e^{0\eta(u)}=1$ entonces

$$\begin{aligned}\ln[\phi_t(u)]-\ln[\phi_0(u)] &= -\frac{atu^2}{2}\\ \phi_t(u) &= e^{-\frac{1}{2}atu^2}.\end{aligned}$$

De donde $Y_c(t)$ es un Movimiento Browniano.

■

3.2. Teorema de la Descomposición de Lévy-Itô

Ahora se enunciará y se probará el teorema principal de este capítulo, el cual nos dice que si se tiene un proceso de Lévy entonces se tiene que se puede escribir como una parte continua, que es un Movimiento Browniano, y una parte que tiene saltos acotados y una con saltos no acotados, que es un proceso de Poisson Compuesto.

Asimismo, al final de esta sección se probará la primera parte del teorema de la representación de Lévy-Khintchine, esto último utilizando la descomposición de Lévy-Itô.

Teorema 3.2.1 (La descomposición de Lévy-Itô) *Si X es un proceso de Lévy entonces existe $b \in I\!R^d$, un Movimiento Browniano B_A con matriz de covarianza A y una medida aleatoria Poisson independiente N sobre $R^+ \times (I\!R^d - \{0\})$ tal que para cada $t \geq 0$*

$$X(t) = bt + B_A(t) + \int_{|x|<1} x\tilde{N}(t, \mathrm{d}x) + \int_{|x|\geq 1} xN(t, \mathrm{d}x). \qquad (3.19)$$

Prueba.- Usando los teoremas 3.1.6 y 3.1.7 haciendo

$$b = I\!E\left(X(1) - \int_{|x|>1} xN(1, \mathrm{d}x)\right).$$

Y los procesos $B_A(t)$ y N son independientes al usar el corolario 3.1.1 y el argumento de la página 90 en la prueba del teorema 3.1.6.

$\blacksquare$

Ahora se probará el teorema de la representación de Lévy-Khintchine del capítulo 1, lo haremos en forma de corolario del teorema anterior.

Corolario 3.2.1 (La Representación de Lévy-Khintchine) *Si X es un proceso de Lévy entonces para cada $u \in I\!R^d$ y $t \geq 0$ se tiene que*

$$\begin{aligned} I\!E(e^{i(u,X(t))}) &= \exp\left(t\left\{i(b,u) - \frac{1}{2}(u, Au)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \int_{I\!R^d-\{0\}} [e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_B(y)]\mu(\mathrm{d}y)\right\}\right). \end{aligned}$$

Prueba.- Usando la descomposición de Lévy-Itô y por la independencia se tiene que

$$\mathbb{E}(e^{i(u,X(t))}) = \mathbb{E}(e^{i(u,Y_c(t))})\mathbb{E}(e^{i(u,Y_d(t))})\mathbb{E}\left(e^{i\left(u,\int_{|x|\geq 1} xN(t,\mathrm{d}x)\right)}\right)$$

y por la expresión (3.10) de la prueba del teorema 3.1.7 y el corolario 3.1.3 y al usar el teorema 2.5.5 de la página 64 se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{i(u,X(t))}) = \exp\Bigg(t\Bigg\{i(b,u) - \frac{1}{2}(u,Au) \\ + \int_{\mathbb{R}^d-\{0\}}[e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)\chi_B(y)]\mu(\mathrm{d}y)\Bigg\}\Bigg).\end{aligned}$$

■

Conclusiones

Los procesos de Lévy pueden ser vistos como un buen fundamento para estudiar los procesos estocásticos, pues al obtenerse de ellos casos particulares tan notables como el Proceso Poisson, el Movimiento Browniano, los subordinadores, las variables aleatorias estables, se tiene que, estudiando los procesos de Lévy, se tendría una idea muy general de todos estos procesos y sólo se estudiarían sus características muy particulares.

Además, las definiciones del capitulo 2, que son tan importantes en los procesos estocásticos, estarían por lo tanto dadas para los procesos mencionados arriba. Por lo tanto, sólo bastaría precisarlas una sola vez para obtener la teoría general relacionada a estos procesos.

Si bien, un curso de procesos de Lévy esta un poco más allá de un curso de licenciatura, sí seria posible tratar varias de sus propiedades, quizás sin demostración, pero sí enfatizando las definiciones y conceptos.

La descomposición de Lévy-Itô es el resultado más complicado de probar, esto porque se utiliza mucho análisis en descomponer a un proceso de Lévy en tres procesos que son un Movimiento Browniano estándar, un proceso Poisson Compuesto por saltos acotados -que aquí nuestra cota es uno- y otro proceso Poisson Compuesto con saltos no acotados.

Ahora bien este resultado esta implícito en el trabajo de Lévy *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien* de 1954, pero fue K. Ito el que lo estableció de manera rigurosa.

■

Bibliografía

[1] Applebaum D. B. (2004) *Levy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[2] Asmussen S. (2000) *Ruin Probabilities.* Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability.

[3] Berg C., Forst G., (1975) *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups,* Springer-Verlag.

[4] Bertoin J. (1996) *Lévy Processes.* Cambridge Tracts in Mathematics.

[5] Billingsley, P. (1986) *Probability and Measure.* 2nd. Ed., Wiley, New York.

[6] Bingham, N.H.,Goldie, C.M., Teugels, J.L. (1987) *Regular Variation.* Cambridge University Press., Cambridge.

[7] Bojdecki T. (1995) *Teoria General de Procesos e Integracion Estocastica* Sociedad Matematica Mexicana.

[8] Bretagnolle J.L., Chatterji S.D. and Meyer P.A. (1973) *Ecole d'Été de Probabilités: Processus Stochastiques* Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag.

[9] Breiman L. (1968) *Probability* Adison-Wesley.

[10] Debnath L., Mikusinski P. (1999) *Introduction to Hilbert Spaces with applications,* Academic Press.

[11] Dellacherie, C. y Meyer, P.A. (1982) *Probabilities and Potential B. Theory of martingales,* North Holland, Amsterdam.

[12] Dudley R.M. (2002) *Real analysis and probability* Cambridge University Press.

[13] Embrechts P., Kluppelberg C. and Mikosch T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-verlag.

[14] Embrechts P. and Maejima M. (2002) *Selfsimilar Processes.* Princenton University Press.

[15] Feller W. (1966) *Introduccion to Probability theory and Applications, vol I.* John Wiley and Sons.

[16] Feller W. (1968) *Introduccion to Probability theory and Applications, vol II.* John Wiley and Sons.

[17] Grandell J.(1997) *Mixed Poisson Processes.*, Monographs on Statistics and Probability 77, Chapman and Hall.

[18] Grigoriu M. (2002) *Stochastic Calculus, Aplications in Science and Engineering.* Birkhauser.

[19] Grimmett G.R. and Stirzaker D.R. (2001) *Probability and Random Processes, third edition.* Clarendon Press .

[20] Gut Allan (2005) *Probability: A Graduate Course.* Springer Texts in Statistics.

[21] Jacod J. and Protter P. (2003) *Probability Essentials*, 2nd. Edition, Springer-Verlag, Berlin.

[22] Karatzas I. and Shreve E. S. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* 2nd. ed., Springer, New York.

[23] Kingman J. (1993) *Poisson Processes.* Oxford Univeristy Press.

[24] Knight, F.B.. (1981) *Essentials of Brownian Motion and Diffusion.* American Mathematical Society.

[25] Métivier M. (1982) *Semimartingales, a Course on Stochastic Processes.* de Gruyter Studies in Mathematics 2.

[26] Paley , Wiener P. (1934) *Fourier Transforms in the Complex Domain.* American Mathematical Society.

[27] Protter P. (1990) *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer-Verlag, New york.

[28] Revuz, D. y Yor, M. (1994) *Continuos Martingales and Brownian Motion*, 2nd ed., Springer berlin.

[29] Rogers, Williams (2000). *Diffusions, Markov Processes and Martingales, vol 1, Foundations.* Cambridge University Press .

[30] Tudor C. (2002) *Procesos Estocásticos, tercera edición.* Sociedad Matematica Mexicana.

[31] Sato Ken-Iti. (1999) *Levy Processes and infinitely divisible distributions.*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[32] Shiryaev A.N. (1995) *Probability 2nd. Edition.* Springer.

[33] Yor M. (1992) *Some Aspects of Brownian Motion vol I y II.* Birkhauser.