



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"DINAMICA DE UN GAS DE BOSONES ULTRAFRIO CONFINADO EN UN POTENCIAL UNIDIMENSIONAL SIMETRICO"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A
EMMANUEL MORLET GUEVARA



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DIRECTORA DE TESIS: DRA. ROSARIO PAREDES GUTIERREZ

2005

M 351316



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Emmanuel Morlet Guevara

FECHA: 29 / Nov / 2005

FIRMA: [Firma manuscrita]

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Dinámica de un gas de bosones ultrafrío confinado en un potencial unidimensional simétrico".

realizado por Morlet Guevara Emmanuel

con número de cuenta 098526048 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dra. Rosario Paredes Gutiérrez

Rosario Paredes / Cr.

Propietario Dra. Marcela Regina Beltrán Sánchez

M. Beltrán

Propietario Dra. Rocío Jauregui Renaud

Rocio Jauregui Renaud

Suplente Dr. Iván Santamaría Holek

Santamaría

Suplente Dr. Genaro Toledo Sánchez

Genaro Toledo

Consejo Departamental de Física

Alicia Zarzosa Pérez
M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Gases atómicos ultrafríos	3
1.2. Redes Ópticas y Juntas Josephson	6
2. Estados estacionarios de un potencial unidimensional de tres pozos	12
2.1. Solución a la ecuación de Schrödinger	13
2.2. Estados localizados	17
3. Hamiltoniano Efectivo	20
3.1. Hamiltoniano de un gas de Bose ultrafrío sin interacción	21
3.2. Hamiltoniano de un gas de Bose ultrafrío con interacciones	23
4. Discusión y Conclusiones	26
4. Bibliografía	29

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad hay mucho interés en el estudio de las llamadas redes ópticas, que se forman cuando un gas atómico ultrafrío se confina en un potencial óptico formado por la interferencia de dos o más láseres. Como resultado de la interferencia entre los láseres se forma un patrón espacial periódico compuesto por pozos de potencial con profundidad y ancho bien definidos. Este patrón compuesto por una cantidad de pozos que van desde unas decenas hasta cientos de ellos es el potencial efectivo en el cual se moverán los átomos del gas ultrafrío.

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento de un gas de bosones ultrafrío con interacciones, que se encuentra confinado en un potencial unidimensional compuesto de tres pozos . Es decir, se estudiará un sistema que es un caso particular de estas redes ópticas.

En la sección 1.1 se presenta una descripción breve de las técnicas de enfriamiento más utilizadas en las dos últimas décadas para producir los gases atómicos ultrafreos. Posteriormente en la la sección 1.2 se describe cómo se produce el confinamiento de estos gases atómicos es la redes ópticas y la analogía que éstas tienen con las juntas Josephson en superconductividad.

Utilizando el hecho que en un gas de bosones a muy bajas temperaturas la mayoría de las partículas se encuentran en los estados asociados a las energías más bajas, en el capítulo 2 nos concentraremos en encontrar en forma numérica las funciones de onda estacionarias de los tres estados ligados más bajos del potencial de tres pozos. Estas funciones estacionarias se utilizarán

como base para construir las funciones de onda localizadas en cada uno de los pozos.

A partir de la solución estacionaria a la ecuación de Schrödinger para una partícula confinada en un potencial formado por tres pozos, se trabajará en el formalismo de segunda cuantización, para derivar el Hamiltoniano efectivo que describe la dinámica del gas de bosones ultrafrío confinado en este potencial. El procedimiento para derivar este Hamiltoniano se describe en el capítulo 3.

Los resultados obtenidos en el capítulo 2 se usarán como hipótesis para validar el Hamiltoniano efectivo que describe la dinámica de este sistema en estudio. Estos resultados son que las funciones de onda corresponden a niveles de energía igualmente espaciados y que los traslapes de las funciones de onda localizadas se pueden despreciar. Con estas hipótesis se mostrará que el Hamiltoniano efectivo que describe al sistema está compuesto de un término de tunelaje entre pozos adyacentes y un término de interacción entre partículas en el mismo pozo.

1.1. Gases atómicos ultrafríos

Un gas atómico ultrafrío es un sistema compuesto de una cantidad macroscópica de átomos que aun estando a temperaturas muy bajas, cercanas al cero absoluto, se encuentran en su fase vapor. Estos gases se componen típicamente de 10^7 átomos y ocupan un espacio de alrededor de 1mm^3 . El comportamiento de estos gases depende completamente del tipo de átomos que lo componen. Existen dos tipos de átomos en la naturaleza, fermiones y bosones, la diferencia entre estos átomos depende del número total de protones, neutrones y electrones que posee el átomo; si la suma de estas partículas es impar, el átomo es un fermión, y si la suma es par, el átomo es un bosón. La característica esencial de estas partículas es que en el caso de los fermiones, dos partículas idénticas no pueden ocupar el mismo estado, es decir, los números cuánticos que caracterizan estas partículas siempre tomarán valores diferentes. Esta característica es conocida como el Principio de Exclusión de Pauli. Por el contrario, la propiedad más importante de los bosones es que dos o más partículas idénticas pueden ocupar el mismo estado y además las funciones de onda de estas partículas son totalmente simétricas. Si los átomos que componen el

gas ultrafrío son bosones, entonces, al llegar a una cierta temperatura crítica (T_c), el gas sufre un fenómeno conocido como Condensación de Bose-Einstein. En este condensado, un porcentaje significativo de los átomos se van al estado base, es decir el estado de mas baja energía, y se dice que todos estos átomos se han condensado. En tanto que si los átomos que conforman el gas son fermiones, y la temperatura del gas es lo suficientemente baja, los átomos se colocan cada uno en la escala energética de menor a mayor valor para formar un gas degenerado de Fermi. Debemos hacer énfasis en que un gas de Bose tiene una energía mucho menor que un gas degenerado de Fermi, como consecuencia del hecho de que en el gas de Bose la mayoría de las partículas pueden tener la misma energía, la cual en el caso de los gases atómicos ultrafríos es muy baja. En este trabajo se estudia la dinámica de un gas de bosones ultrafrío por lo que nos olvidaremos de los gases compuestos por fermiones.

Uno de los aspectos más importantes en la producción de un gas atómico ultrafrío, es la habilidad de enfriar una porción de átomos sin perder ninguna partícula. De esta forma se vuelve posible incrementar la densidad del espacio fase de los átomos. Desde el principio del enfriamiento por láser y confinamiento era claro que podría ser útil para conseguir un nuevo estado de la materia, *El Condensado de Bose Einstein* (BEC). Este estado fue predicho por Einstein con la ayuda de algunas ideas originales de Bose en los 1920's, pero esta predicción no había sido comprobada por el hecho de que requiere de una alta densidad de átomos, cerca de $n\lambda_T^3 \cong 2,612$ [2] ($\lambda_T = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$), a muy bajas temperaturas. Comprimir los átomos conduce al aumento de la densidad, pero al mismo tiempo incrementa la temperatura, de esta forma su espacio fase permanece constante. La expansión adiabática del volumen de los átomos lleva a una caída de la temperatura, pero también conduce a una reducción de la densidad. sin embargo, usando las técnicas de enfriamiento por láser la temperatura de los átomos puede ser reducida sin perder ninguna partícula y así incrementar la densidad del espacio fase [1].

El enfriamiento de átomos por medio de láser se sugirió inicialmente en la decada de los 1970's como una forma de mejorar la espectroscopía láser. Desde entonces ha sido muy útil para bajar la temperatura en los gases atómicos. Este método se basa en el intercambio de energía entre los fotones y los átomos neutros del gas.

En 1975, Tehodor Hansch y Arthur Schawlow propusieron el método de enfriamiento Doppler de átomos neutros con láser [1, 3, 21]. En 1984 las posibilidades de confinamiento tridimensional de átomos neutros mediante láseres y los efectos de radiación sobre el movimiento de los átomos eran objeto de discusión. Al año siguiente, Steven Chu y su grupo en los laboratorios Bell, demostraron la posibilidad de confinar átomos tridimensionalmente, utilizando seis láseres en un arreglo de tres pares mutuamente perpendiculares[4]. En la región de intersección de los láseres, la radiación enfría y confina los átomos formando lo que se denomina "Optical Molasses" o melaza óptica. Las temperaturas medidas en una melaza de átomos de Sodio (40 mK), resultaron inferiores a la mínima temperatura obtenible por el enfriamiento Doppler estimada en 240 mK [7].

La idea de usar luz láser para enfriar y atrapar átomos viene del concepto de momento en los fotones, el intercambio de momento entre la radiación del láser y los átomos en un proceso de absorción puede ser usado para aplicar una fuerza a los átomos. Ya que la absorción depende de la diferencia entre la frecuencia de la radiación del láser y la frecuencia de absorción de los átomos, el proceso de absorción se realiza controlando la frecuencia del láser pues debido al efecto Doppler, un átomo que lleva una dirección opuesta a la del fotón percibirá un corrimiento en la frecuencia. Solo los átomos con velocidad tal que absorban un fotón reducirán su energía al emitir un fotón de mayor energía, de esta forma se tendrá que ir modulando la frecuencia del láser hasta llegar a la temperatura deseada. De hecho la dependencia de la velocidad del proceso permite a los experimentales enfriar átomos a temperaturas extremadamente bajas(240mK). Este es el concepto esencial en el cual se ha basado el campo de enfriamiento por láser durante los últimos 20 años.

Aunque el enfriamiento por láser es una técnica muy eficaz para reducir la temperatura de los átomos, los gases no llegan a la temperatura crítica (T_c) necesaria para generar un condensado de Bose-Einstein, es decir el incremento en la densidad del espacio fase por enfriamiento láser había alcanzado su límite, si la densidad de la muestra es muy grande, la luz dispersada por un átomo es reabsorbida por otros, causando una repulsión entre ellos, por lo que el enfriamiento por láser por si solo no es la ruta mas eficaz para alcanzar el condensado. Así que los

experimentales recurren a otra técnica de enfriamiento llamada enfriamiento por evaporación , esta técnica fué aplicada por primera vez para enfriar átomos en 1988 [9]. Este enfriamiento por evaporación se basa en quitar del gas los átomos más energéticos para que solo queden los de menor energía y lleguen a un estado de equilibrio a una temperatura mucho menor. Este proceso se lleva a cabo lentamente para que los átomos del gas puedan llegar a una velocidad promedio debido al choque entre ellos. Esto es posible debido a que los átomos del gas son muy sensibles a la interacción con campos magnéticos, por lo que se crean trampas magnéticas controladas. Una forma de pensar en el enfriamiento por evaporación es considerando el enfriamiento de una taza de café. Debido a que las moléculas más energéticas se evaporan del café y dejan la taza, los átomos restantes obtienen una menor temperatura y son enfriados. Más aun, solo requiere la evaporación de una pequeña fracción del café para enfriarlo por una considerable cantidad. Aunque el método requiere la pérdida de algunos de los átomos en la trampa, los que permanecen en ella tienen una energía promedio más baja y también ocupan un menor volumen cerca del fondo de la trampa, y por lo tanto aumenta su densidad. Ya que la temperatura y el volumen son reducidas, la densidad del espacio fase incrementa [10, 1].

Gracias al avance en las técnicas de manipulación de estos gases, actualmente ha hecho posible la realización de las redes ópticas que se explicarán a continuación en la sección 1.2

1.2. Redes Ópticas y Juntas Josephson

Para poder confinar un gas en un potencial óptico es necesario llevar las partículas del gas a temperaturas cercanas al cero absoluto, es por ello que en la producción de las llamadas redes ópticas se utilizan gases atómicos a muy bajas temperaturas sin embargo un fenómeno de mayor interés en el confinamiento de gases en potenciales ópticos, son los condensados de Bose-Einstein [11, 12].

Las energías de las partículas de los gases atómicos ultrafríos se vuelven tan pequeñas, que los átomos pueden ser atrapados en potenciales ópticos, con dimensiones comparables a la longitud de onda de la luz. Este confinamiento de átomos en potenciales tan pequeños con una

periodicidad dada por el campo de la luz, son las llamadas *redes ópticas*.

Una red óptica es esencialmente un cristal artificial de luz (un patrón periódico que se forma por la interferencia de dos o mas rayos de luz láser). La red óptica mas simple consiste de las regiones de rayas oscuras y brillosas que es formada cuando dos rayos láser con la misma longitud de onda dirigidos en direcciones opuestas se encuentran y forman un patrón de interferencia. Esta red óptica tiene un período que es igual a la mitad de la longitud de onda del láser (de 830 a 850 nm) [1, 5]. Dependiendo del arreglo de los láseres, también es posible formar una estructura espacial en 2 y 3 dimensiones perfectamente periódica. Sin embargo es mas difícil usar estos patrones de interferencia para atrapar átomos.

El estudio de los gases atómicos ultrafríos y las redes ópticas ha abierto un nuevo campo de investigación en la comunidad científica, con ésto los investigadores pretenden llegar al punto en el que sea posible controlar una sustancia artificial en casi todos los aspectos de su estructura periódica y las interacciones entre sus átomos. Esta sustancia nos permitiría explorar un extenso rango de fenómenos fundamentales como la superfluidéz y el régimen de confinamiento que son extremadamente difíciles (o imposibles) de estudiar en materia común. Experimentalmente se pretende controlar la dinámica de uno de estos gases atómicos utilizando solamente dos parámetros: la estructura periódica de la red y las interacciones entre los átomos.

La habilidad de confinar gases atómicos ultrafríos en redes ópticas ya esta teniendo un gran impacto en campos tan diversos tanto en física de materia condensada como en procesamiento de información cuántica[4, 6].

Una red óptica es capaz de atrapar un átomo porque los campos eléctricos de los láseres inducen un momento dipolar eléctrico en el átomo. La interacción entre este momento dipolar, el cual oscila, y el campo eléctrico modifica la energía del átomo. Si la frecuencia del láser es menor que una frecuencia de transición electrónica específica de un átomo, los átomos son atraídos hacia las regiones de mayor intensidad del láser. Sin embargo, si la frecuencia del láser es mayor que la frecuencia de transición, los átomos son empujados fuera del máximo. De cualquier forma los átomos pueden ser atrapados en las regiones oscuras o brillantes de la red óptica, y la intensidad del potencial óptico que confina a los átomos puede ser incrementada

aumentando la potencia del láser.

Mientras que algunos físicos experimentaban con redes ópticas, otros exploraban lo que sucedía cuando átomos en trampas magnéticas eran enfriados tan cerca del cero absoluto que la estadística cuántica se volvía importante. El estudio de gases atómicos ha sido una de las áreas más interesantes de investigación en la física desde que el primer condensado de Bose-Einstein fue creado en 1995, y permanece así hasta este día [4]. Durante los pasados tres años grupos experimentales en Europa y Estados Unidos han aprendido a transferir un gas atómico desde una trampa magnética a una red óptica, y esto los ha llevado a una nueva generación de experimentos [13].

En un condensado de Bose-Einstein, las ondas de Broglie de los átomos individuales se comportan de la misma forma de tal forma que todas las partículas pueden ser descritas por una sola función de onda. Similar a la radiación por láser, los condensados muestran un alto grado de coherencia de fase. Esto significa que si se sabe la fase de la función de onda en un punto en el espacio y el tiempo, se puede predecir como será en otros puntos y tiempos. Coherencia de fase es crucial para observar patrones de interferencia.

Para transferir un condensado de Bose de una trampa magnética a una red óptica, el condensado es iluminado por los seis rayos láser necesarios para formar una red en $3D$ y la intensidad del láser es incrementada al valor requerido por un periodo de 100ms [4, 14]. Este proceso de "carga" es controlado por computadora para asegurar una reproductividad entre experimentos diferentes, pero es difícil probar que el condensado ha sido en efecto transferido porque el espacio común entre sitios de la red es muy pequeño (cerca de 430 nm) para que los átomos sean proyectados en una imagen directamente. Sin embargo, un patrón periódico puede mostrar pulsos de efectos de interferencia cuando es iluminado con ondas coherentes, y se puede usar esta aproximación para comprobar que el condensado ha sido realmente transferido. También se puede apagar el potencial de la red y usar el patrón de difracción para ver como se expanden y traslapan los átomos en diferentes lugares de la red. Como las funciones de onda son coherentes en fase, se crea un patrón de interferencia mientras se traslapan.

Este reporte esta basado en una red óptica unidimensional, la cual como se dijo anterior-

mente se crea haciendo interferir dos rayos láser. Se puede garantizar la unidimensionalidad del arreglo, si el haz de luz del láser se hace lo suficientemente fino, y debido a la baja energía de las partículas, éstas se mantienen atrapadas en el potencial formado por los láseres sin tener la posibilidad de moverse por ejes diferentes al eje formado por la interferencia de los láseres.

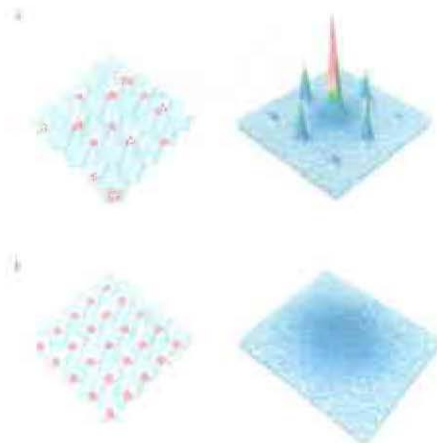


Figura 1.1: (a) En el estado de superfluido de un condensado de Bose-Einstein los átomos pueden ser descritos como una función de onda macroscópica, cuando este condensado es liberado del potencial periódico, un patrón de interferencia múltiple de onda-partícula es formado debido a la coherencia de fase entre las funciones de onda de los átomos en diferentes sitios de la red. En este caso la fase del campo onda-partícula macroscópica está bien definida. Sin embargo el número de átomos en cada sitio de la red fluctúa. (b) En el límite de un estado de aislante de Mott cada sitio de la red es llenado con un número fijo de átomos, pero la fase del campo onda-partícula permanece incierta. Como resultado, no hay patrón de interferencia de onda-partícula que se pueda ver cuando los gases atómicos se liberan del potencial.

Una *Junta Josephson* es la interfase entre dos materiales superconductores separados por una barrera no superconductora. Puede fluir una corriente libremente a través de los superconductores, pero la barrera se opone a que la corriente fluya libremente entre ellos. Sin embargo, la supercorriente puede tunear a través de la barrera, dependiendo de la fase cuántica de los superconductores. La cantidad de supercorriente que puede tunear a través de la barrera está restringida por el tamaño y sustancia de la barrera. El máximo valor que la supercorriente puede llegar a obtener es llamado la corriente crítica de la *Junta Josephson* y es un importante

parámetro fenomenológico de la junta.

Las Juntas Josephson tienen dos propiedades eléctricas básicas. La primera es que las juntas tienen reactancia inductiva. Esto quiere decir que, similarmente a los inductores, la diferencia de voltaje sobre una junta está relacionada con la razón de tiempo del cambio de la corriente. La segunda es que un voltaje constante sobre una junta producirá una corriente oscilante a través de la barrera, y viceversa. Así las, Juntas Josephson convierten un voltaje de corriente directa a una corriente alterna.

Durante muchas décadas la comunidad de físicos ha estudiado las propiedades de sistemas físicos altamente interactuantes. A pesar de su gran progreso, experimental y teórico, todavía permanecen muchos conceptos por entender. Una de las rutas a seguir para el progreso en esta dirección es la creación de estructuras artificiales con parámetros ajustables que puedan reproducir las propiedades de sistemas cuánticos altamente interactuantes.

Experimentos realizados en la década de los 80's en superconductores granulares habían sugerido una transición metal-aislante a bajas temperaturas que depende del valor de la conductancia en estado normal de la red. B. Mühlischlegel, quién había estado investigando las propiedades de arreglos de juntas Josephson, se dio cuenta de la potencial importancia de sus resultados y promovió el estudio más a fondo en esta dirección. Después, cuando era posible fabricar arreglos de juntas Josephson, se reveló un gran número de fenómenos. Entre los descubrimientos más notables, se encontró una transición de fase cuántica a temperaturas cercanas al cero, entre fase superconductora y fase aislante. Este fenómeno es consecuencia de una dualidad entre cargas y vórtices.

El estudio de arreglos de juntas Josephson encontró una extensión a mediados de la década de los 90's en una nueva e inesperada dirección: el área de gases atómicos ultrafríos. Como se vio anteriormente, al cargar partículas de bosones en una red óptica se observa un fenómeno de transición de fase entre un superfluido y un aislante a temperaturas cercanas al cero. Por una parte la transiciones de fase superconductor-aislante observada en las juntas Josephson y superfluido-aislante observada en las redes ópticas tienen el mismo origen. Estos fenómenos son causados por el tunelaje de partículas, y por la gran cantidad de interacciones. Por otra parte

a pesar de la gran analogía, los dos sistemas permiten la investigación de diferentes observables físicas. Los bosones cargados en los arreglos Josephson son estudiados por conceptos de medida de transporte. En las redes ópticas se tienen bosones neutros. La principal causa de su estudio es por experimentos de expansión y dispersión de luz.

Como se menciona al principio en este trabajo se estudiará un gas de bosones ultrafrío confinado en un potencial compuesto de tres pozos. En particular se derivará el Hamiltoniano efectivo que describe este sistema. Para ello se harán dos suposiciones. La primera es que el gas está lo suficientemente diluido para tomar en cuenta solo la interacción entre pares de átomos despreciando la interacción de tres o más partículas. La segunda es que solo los estados de mas baja energía participan en la dinámica de este sistema.

Capítulo 2

Estados estacionarios de un potencial unidimensional de tres pozos

En este capítulo se considera la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m sujeta a un potencial unidimensional compuesto de tres pozos. Este potencial es una simplificación de una red óptica real como las que se describieron en el capítulo anterior, una de tales redes consta de un número de pozos que varía entre 10 y 100 [8]. El objetivo principal de este capítulo es obtener las funciones de onda y las energías de los tres estados ligados mas bajos para el potencial de tres pozos.

En la primera sección se obtienen las funciones de onda estacionarias para dicho potencial $\{\phi_k(x), k = 0, 1, 2\}$ utilizando el método de "split operator"[17] que se describirá más adelante. En la segunda parte se construyen las funciones de onda localizadas $\{\psi_i(x), i = 1, 2, 3\}$ en cada pozo utilizando la matriz de rotación de Wigner la cual nos permitirá obtener las funciones de onda localizadas en términos de las funciones de onda estacionarias.

2.1. Solución a la ecuación de Schrödinger

En esta sección encontraremos la solución a la ecuación de Schrödinger ec.(2.1) para un potencial unidimensional simétrico con respecto al origen, formado por tres pozos. En particular se obtendrán las energías y las funciones de onda asociadas a los tres estados ligados más bajos de una partícula en dicho potencial.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \phi(x) = E\phi(x), \quad (2.1)$$

donde

$$V(x) = V_0 e^{-\left(\frac{x-x_0}{\sigma_1}\right)^2} + V_1 e^{-\left(\frac{x}{\sigma_2}\right)^2} + V_2 e^{-\left(\frac{x+x_0}{\sigma_1}\right)^2} + V_3 x^{10}, \quad (2.2)$$

donde $V_0 = V_2 = -11.5$, $V_1 = -9.14$, $V_3 = 0.001$, $\sigma_1 = 0.65$, $\sigma_2 = 0.90$, $x_0 = 2.0$. en la ecuación (2.1) \hbar es la constante de Planck y m es la masa de un átomo usado en un condensado.

A partir de la ec.(2.2) vemos que la amplitud de los pozos izquierdo y derecho es menor que la del pozo del centro. Más adelante explicaremos porque se eligieron estos parámetros. El término x^{10} se introdujo para crear unas paredes infinitas a los extremos y así el sistema este totalmente sometido a los tres pozos.

Dado que no es posible encontrar una solución analítica para la ec.(2.1) utilizaremos el método del "split operator", que es un método computacional para determinar las energías y las eigenfunciones de la ecuación de Schrödinger. Este método se basa esencialmente en las propiedades espectrales de soluciones a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \hat{H} \Psi(x, t). \quad (2.3)$$

El método requiere del cálculo de una función de correlación $\mathcal{F}_1(t)$, dada por $\mathcal{F}_1(t) = \langle \Psi(x, 0) | \Psi(x, t) \rangle$ donde $\Psi(x, t)$ es la evolución temporal del estado al tiempo $t = 0$, es decir

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \Psi(x, 0). \quad (2.4)$$

La solución $\Psi(x, t)$ puede ser generada con mucha precisión con la ayuda del método de "split operator"[18]. El método requiere proponer a la función de onda en el tiempo $t = 0$, $\Psi(x, 0)$ como una función arbitraria sin paridad definida. La transformada de Fourier de $\mathcal{F}_1(t) = \sum_n |a_n|^2 e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$ es $\tilde{\mathcal{F}}_1(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n |a_n|^2 \delta(E - E_n)$, donde E_n son los eigenvalores estacionarios asociados a los estados $\{\phi_k(x), k = 0, 1, 2\}$. Una vez que los eigenvalores son conocidos, las eigenfunciones correspondientes pueden ser generadas evaluando numéricamente las integrales

$$\psi(x, E_n) = \int_0^T \psi(x, t) e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} dt, \quad (2.5)$$

donde T es el tiempo utilizado para los cálculos. Una característica interesante de este método es que permite generar el espectro de eigenvalores gráficamente y los niveles de energía son identificados visualmente.

Este método es aplicable a cualquier problema de eigenvalores lineal sin importar el número de dimensiones.

En la figura 2.1 se ilustra el potencial dado por la ecuación (2.2) así como los tres niveles de energía más bajos. Los programas que calculan la correlación $\mathcal{F}_1(t)$ y su transformada de Fourier $\mathcal{F}_1(E)$, así como las eigenfunciones se encuentran en un CD al final de este trabajo.

Los tres niveles de energía para este potencial son

- $\epsilon_1 = 3.533$,
- $\epsilon_2 = 3.704$,
- $\epsilon_3 = 3.881$,

notemos que estos niveles de energía están igualmente espaciados es decir $\epsilon_2 - \epsilon_1 \simeq \epsilon_1 - \epsilon_0 \simeq 0,17$. Esto se debe a que hemos ajustado las profundidades de los pozos izquierdo y derecho para lograr esta condición. En el siguiente capítulo se justificará el hecho de que el espaciamiento en los niveles de energía deban satisfacer esta condición. El cuarto nivel de energía no se consideró debido a que era mayor que el máximo de las paredes que separan los pozos del

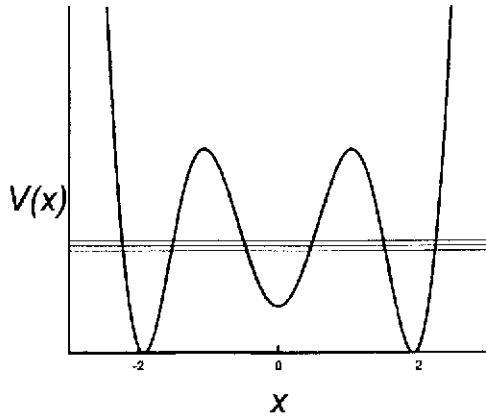


Figura 2.1: En la figura se observan los niveles de energía asociados a los tres estados ligados más bajos del potencial $V(x)$ introducido en la Ec.(2.2).

potencial, éste cuarto nivel tiene un valor de $\epsilon_4 = 8.9987$ y el máximo del potencial es de 7.043136 por lo que este nivel de energía ya no es de nuestro interés.

Es importante resaltar que los niveles de energía dependen de los parámetros que definen el potencial $V(x)$, y pueden ser modificados ajustando la profundidad y el ancho de cada pozo. En particular si los tres pozos tienen la misma profundidad, el espaciamiento entre ϵ_2 y ϵ_1 es aproximadamente el doble del espaciamiento entre ϵ_0 y ϵ_1 .

Las funciones asociadas a los niveles ϵ_0 , ϵ_1 y ϵ_2 son $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ respectivamente. En la figura 2.2 se muestran estas eigenfunciones.

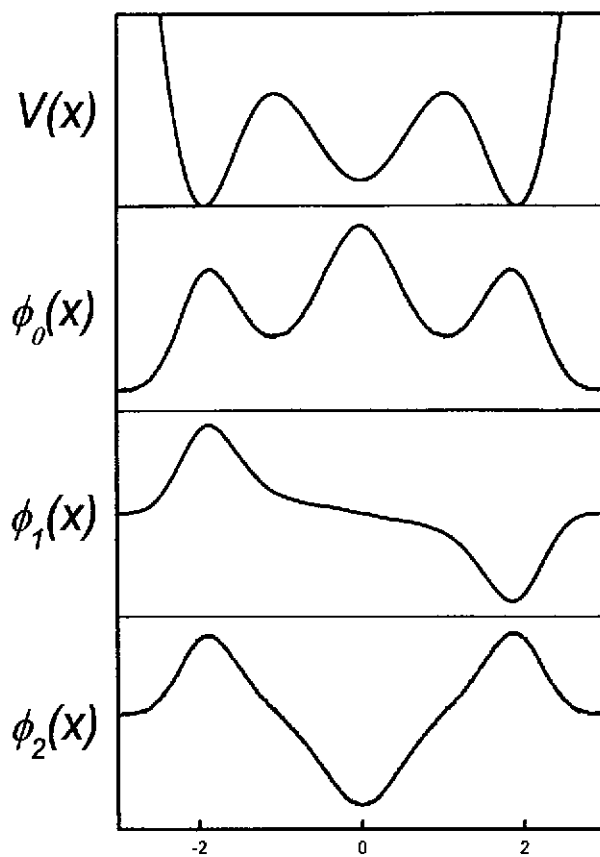


Figura 2.2: Funciones de onda estacionarias en unidades arbitrarias de una partícula en un potencial unidimensional compuesto de tres pozos simétricos con respecto al origen, ver Ecs. (2.8)–(2.10)

Como se ve en la gráfica de la figura 2.2, el primer estado estacionario es una función par sin nodos, el segundo estado es una función impar con un nodo y el tercero es una función par con dos nodos como se esperaba debido a la simetría del potencial.

2.2. Estados localizados

Una vez que se obtuvieron las funciones de onda estacionarias en un potencial simétrico de tres pozos, se procederá a encontrar las funciones de onda localizadas mediante la rotación

$$\psi_i = \sum_{k=0}^{n-1} D_{i,k+1}^j \phi_k, \quad (2.6)$$

Esta rotación es únicamente posible si los estados involucrados están igualmente separados lo cual nuestro sistema si lo cumple. Los coeficientes de transformación $D_{i,k+1}^j$ están dados por la matriz de rotación de Wigner [19] que es una generalización de la transformación que se realiza usualmente en el Hamiltoniano de un sistema de dos niveles.

$$D_{i,k+1}^j(\alpha, \beta, \gamma) = \langle j, k+1 | e^{-i\alpha J_x} e^{i\beta J_y} e^{-i\gamma J_x} | j, i \rangle, \quad (2.7)$$

con $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$ y $\gamma = \pi/2$. En esta transformación podemos identificar la componente del momento angular $j = n$ como el número de pozos de nuestro potencial. El conjunto de estados $k = 0, \dots, n-1$ que en este caso $n = 3$ se asocia al triplete de estados estacionarios de los tres pozos $\phi_k(x) = \langle x | k \rangle$. El conjunto $i = 1, \dots, n$ esta asociado al conjunto de estados $|i\rangle$ cuyas funciones de onda asociadas $\psi_i(x) = \langle x | i \rangle$ son funciones de onda localizadas en cada pozo.

La transformación de las funciones de onda localizadas en términos de las funciones de onda estacionarias es la siguiente.

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}\phi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1(x) + \frac{1}{2}\phi_2(x) \quad (2.8)$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_0(x) - \phi_2(x)) \quad (2.9)$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{2}\phi_0(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1(x) + \frac{1}{2}\phi_2(x) \quad (2.10)$$

A partir de la ecuación (2.8) observamos que $\psi_1(x)$ es la amplitud de probabilidad de encontrar a la partícula localizada en el pozo izquierdo. De forma análoga $\psi_2(x)$ y $\psi_3(x)$ son las amplitudes de probabilidad de encontrar a la partícula localizada en los pozos central y derecho respectivamente. Sabemos que las funciones de onda estacionarias $\phi_k(x)$ están normalizadas por lo que las funciones de onda localizadas $\psi_i(x)$ también lo están.

En la figura 2.3 se encuentran las funciones de onda localizadas en cada pozo. A partir de estas funciones de onda encontramos que los traslapes satisfacen la siguiente condición

$$\int \psi_i(x)\psi_j(x)dx \approx \delta_{ij}. \quad (2.11)$$

Visualmente se puede apreciar en la figura 2.3 que la condición expresada por la ecuación (2.11) se cumple. Los valores del cálculo obtenido para la integral (2.11) son menores que el 6%.

Los resultados obtenidos en este capítulo serán utilizados en el siguiente para validar el Hamiltoniano efectivo que describe el sistema en estudio. Específicamente se utilizarán como hipótesis el hecho que para el potencial dado por la ec. (2.2) los niveles de energía están igualmente espaciados y que el traslape entre las funciones de onda de los estados localizados es ≈ 0 . Es decir que los traslapes entre las funciones de onda localizadas se pueden despreciar.

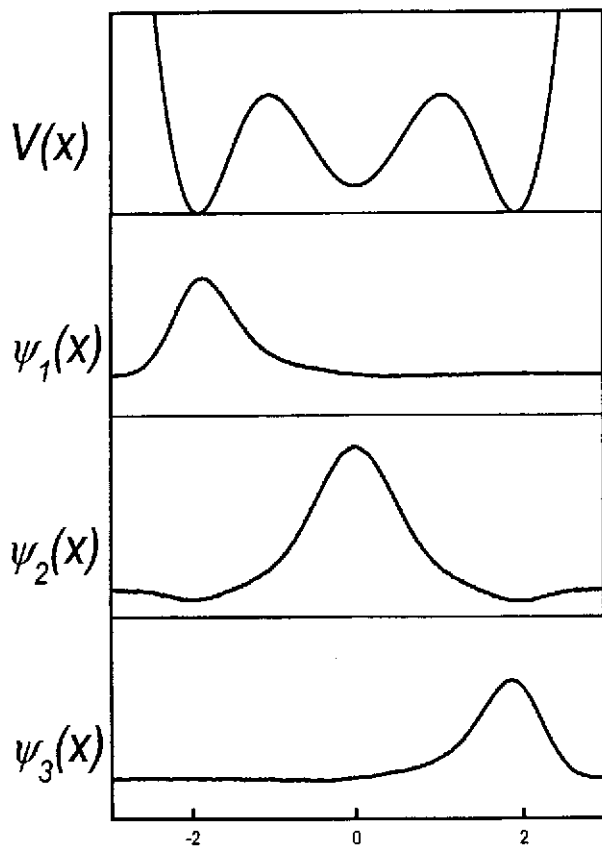


Figura 2.3: Funciones de onda de una partícula localizadas en cada pozo de un potencial unidimensional formado por tres pozos simétricos con respecto al origen

Capítulo 3

Hamiltoniano Efectivo

En este capítulo se derivará el Hamiltoniano efectivo que describe la dinámica de un gas de bosones ultrafrío con interacción, que se encuentra confinado en un potencial de tres pozos. Trabajando en el formalismo de segunda cuantización se mostrará que a partir del Hamiltoniano más general de un sistema de N partículas, es posible, utilizando algunas hipótesis y aproximaciones, derivar el Hamiltoniano efectivo que modela nuestro sistema.

En la primera parte se derivará el hamiltoniano que describe al sistema cuando este se encuentra libre de interacciones entre partículas. Al final de esta sección obtendremos el Hamiltoniano en términos de los operadores de creación y aniquilación para el potencial de triple pozo. Para este desarrollo se usará la hipótesis de igual espaciamiento entre los tres primeros niveles de energía usada en el capítulo 2.

En la segunda sección se considerará el término del Hamiltoniano que contiene las interacciones entre pares de partículas. Para este desarrollo se usan los resultados del capítulo 2, donde los traslapes entre las funciones de onda localizadas son aproximadamente cero. Al final del capítulo tendremos el Hamiltoniano de un sistema de N partículas en un potencial formado por tres pozos con un término que representa el tunelaje entre pozos adyacentes y otro término que representa la interacción entre partículas en el mismo pozo.

3.1. Hamiltoniano de un gas de Bose ultrafrío sin interacción

En esta sección se derivará el Hamiltoniano efectivo de un gas de bosones ultrafrío. Comenzaremos con el Hamiltoniano mas general de N partículas

$$\hat{H} = \int dx \Psi^\dagger(x)(T + V_{ext}(x))\Psi(x) + \frac{1}{2} \int dx dx' \Psi^\dagger(x)\Psi^\dagger(x')W(x, x')\Psi(x')\Psi(x), \quad (3.1)$$

donde $V_{ext}(x)$ es el potencial de la ecuación (2.2), $W(x, x')$ es el potencial de interacción entre pares de partículas y

$$\hat{\Psi}^\dagger(x) = \sum_k \phi_k^*(x)b_k^\dagger \quad y \quad \hat{\Psi}(x) = \sum_k \phi_k(x)b_k, \quad (3.2)$$

son los operadores de campo escritos en términos de los operadores de creación y aniquilación $\{b_k, b_k^\dagger\}$ de bosones que satisfacen las reglas de conmutación $[b_k, b_l^\dagger] = \delta_{k,l}$. Los coeficientes $\phi_k(x)$ pueden ser cualquier conjunto completo de funciones de onda de una partícula [20].

Sustituyendo las ecuaciones (3.2) en (3.1) el Hamiltoniano se puede escribir de la siguiente forma

$$\hat{H} = \sum_{kl} \langle k|T + V_{ext}|l\rangle b_k^\dagger b_l + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij|W(x, x')|kl\rangle b_i^\dagger b_j^\dagger b_k b_l. \quad (3.3)$$

Por el momento consideremos únicamente el Hamiltoniano en ausencia de interacción entre partículas

$$H_0 = \sum_{k,l} \langle k|(T + V)|l\rangle b_k^\dagger b_l. \quad (3.4)$$

Utilizaremos como conjunto completo de funciones de onda de una partícula $\phi_k(x)$ a los estados estacionarios de una partícula en el potencial de tres pozos descrito por la ecuación (2.2). Debido a que el gas de Bosones que estamos considerando se encuentra a muy bajas

temperaturas, podemos suponer, que casi todas las partículas ocupan los tres estados más bajos, por lo tanto las eigenfunciones y las energías encontradas en el capítulo 2 serán suficientes para el cálculo del Hamiltoniano efectivo del sistema. Se puede demostrar que el espectro de energías de los estados ligados para un potencial de tres pozos se descompone en triadas de niveles, de tal forma que la separación entre niveles en cada triada es mucho menor que la separación entre triadas [21, 22]. Por lo tanto la ecuación (3.4) se transforma en

$$H_0 = \epsilon_0 b_0^\dagger b_0 + \epsilon_1 b_1^\dagger b_1 + \epsilon_2 b_2^\dagger b_2, \quad (3.5)$$

donde ϵ_k es la energía del estado estacionario $\phi_k(x)$. En el capítulo anterior vimos que para el potencial $V(x)$ (2.2), $\epsilon_k - \epsilon_{k-1} = \Delta$, donde $\Delta = 0.17$. Así la ecuación (3.5) es el Hamiltoniano de nuestro sistema cuando este se encuentra libre de interacción entre partículas, representado en términos de los operadores de creación y aniquilación $\{b_k, b_k^\dagger\}$ y de los estados estacionarios $\phi_k(x)$.

En la sección 2.2 encontramos las funciones de onda localizadas en cada pozo, ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10), por medio de la matriz de rotación de Wigner (2.6) con los coeficientes dados por (2.7). De forma análoga se pueden encontrar los operadores de creación y aniquilación $\{a_i^\dagger, a_i\}$ de las funciones de onda que describen los estados localizados en términos de $\{b_k, b_k^\dagger\}$, de tal forma que la regla de transformación es

$$a_1^\dagger = \frac{1}{2} b_0^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} b_1^\dagger + \frac{1}{2} b_2^\dagger, \quad (3.6)$$

$$a_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_0^\dagger - b_2^\dagger), \quad (3.7)$$

$$a_3^\dagger = \frac{1}{2} b_0^\dagger - \frac{1}{\sqrt{2}} b_1^\dagger + \frac{1}{2} b_2^\dagger. \quad (3.8)$$

Expresando los operadores $\{b_k, b_k^\dagger\}$ en términos de los operadores $\{a_i, a_i^\dagger\}$, el Hamiltoniano H_0 resulta ser

$$H_0 = \epsilon \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3 \right) - \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2 \right), \quad (3.9)$$

donde $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2$ y $\Delta = \epsilon_k - \epsilon_{k-1}$.

El primer término es la suma de los operadores de número que indican la cantidad de partículas que hay en cada pozo, y como este es un sistema cerrado, la suma $\sum_{i=1}^3 a_i^\dagger a_i = N$, donde N es el número total de partículas en el gas, que es considerado constante. Por lo tanto en el Hamiltoniano H_0 se puede omitir este término. El segundo término describe el tunelaje entre los pozos izquierdo y central, y entre los pozos central y derecho. Esto solo puede suceder con un potencial como el nuestro que genera energías de los tres primeros estados ligados igualmente espaciados, de otro modo obtendríamos términos de tunelaje entre los pozos izquierdo y derecho. Así el Hamiltoniano que describe al sistema sin interacciones es

$$H_0 = -\frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2 \right) \quad (3.10)$$

Después de obtener el Hamiltoniano de un gas de bosones en un potencial formado por tres pozos sin interacciones entre partículas ec.(3.10), completaremos nuestro cálculo en la siguiente sección considerando la parte del Hamiltoniano que incluye las interacciones entre partículas.

3.2. Hamiltoniano de un gas de Bose ultrafrío con interacciones

En esta sección continuamos el cálculo del Hamiltoniano efectivo de un gas de Bose ultrafrío. Ahora desarrollaremos la parte que describe la interacción entre partículas. Para esto suponemos que el gas está tan diluido, que las interacciones que involucran a más de dos partículas pueden ser despreciadas. Así el Hamiltoniano que describe únicamente las interacciones entre partículas es

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij | W(x, x') | kl \rangle b_i^\dagger b_j^\dagger b_k b_l. \quad (3.11)$$

Supondremos que la interacción entre pares de partículas puede ser modelada por un potencial de contacto efectivo

$$W(x, x') = \frac{4\pi\hbar^2\alpha}{m}\delta(x - x'), \quad (3.12)$$

donde α es la longitud de dispersión [21]. Este potencial es válido en la aproximación de bajas energías. Por lo que nuestro hamiltoniano se puede escribir ahora de la siguiente forma

$$H_1 = \frac{1}{2}g \sum_{ijkl=0}^2 \langle ij|\delta(x-x')|kl\rangle b_i^\dagger b_j^\dagger b_l b_k, \quad (3.13)$$

ó

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}g \sum_{i,j,k,l=0}^2 \int \int dx dx' \phi_i^\dagger(x) \phi_j^\dagger(x') \delta(x-x') \phi_k(x) \phi_l(x') b_i^\dagger b_j^\dagger b_k b_l \\ &= \frac{1}{2}g \sum_{i,j,k,l=0}^2 \int dx \phi_i(x) \phi_j(x) \phi_k(x) \phi_l(x) b_i^\dagger b_j^\dagger b_k b_l, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde

$$g = \frac{4\pi\hbar^2\alpha}{m}.$$

Las funciones de onda obtenidas son reales por lo que definimos los coeficientes

$$w_{ijkl} = \frac{g}{2} \int \phi_i(x) \phi_j(x) \phi_k(x) \phi_l(x) dx. \quad (3.15)$$

Entonces la ecuación (3.14) queda

$$H_1 = \sum_{ijkl=0}^2 w_{ijkl} b_i^\dagger b_j^\dagger b_k b_l \quad (3.16)$$

La ecuación (3.14) es el Hamiltoniano de interacción entre partículas en un potencial de tres pozos escrito en términos de los operadores de creación y aniquilación $\{b_k, b_k^\dagger\}$ de los estados estacionarios $\phi_k(x)$. Estos estados estacionarios, como se vió en la sección 2.1, están representados por tres funciones de onda donde $\phi_0(x)$ es una función par sin nodos, $\phi_1(x)$ es una función impar con un nodo y $\phi_2(x)$ es una función par con 2 nodos. De esta forma algunos

coeficientes w_{ijkl} se hacen cero debido a la paridad de las funciones, con esto se reduce una gran parte de los términos en la ecuación (3.16).

Sustituyamos ahora en la ecuación (3.16) la transformación lineal de los operadores de creación y aniquilación $\{b_k^\dagger, b_k\}$ y las funciones de onda estacionarias $\phi_k(x)$ en términos de los operadores de creación y aniquilación $\{a_i^\dagger, a_i\}$ y las amplitudes $\psi_i(x)$ que describen los estados localizados de una partícula de las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9).

El Hamiltoniano H_1 finalmente es

$$H_1 = U \left(a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 + a_2^\dagger a_2^\dagger a_2 a_2 + a_3^\dagger a_3^\dagger a_3 a_3 \right), \quad (3.17)$$

donde

$$U = g \int \psi_i^\dagger(x) \psi_i(x) dx \text{ con } i=1,2,3 \quad (3.18)$$

Podemos observar a partir de la ecuación (3.17), que H_1 representa la interacción entre partículas del mismo pozo, esto solo es posible si las funciones de onda de los estados localizados son de tal forma que los traslapes entre ellas son $\int \psi_i(x) \psi_j(x) dx \approx \delta_{ij}$ como lo probamos en el capítulo 2 con el potencial sugerido ya que de otro modo obtendríamos términos de interacción entre partículas desde pozos diferentes.

Finalmente el Hamiltoniano efectivo de un gas de bosones ultrafrío confinado en un potencial unidimensional simétrico formado por tres pozos es

$$H = H_0 + H_1 = -\frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2 \right) + U \left(a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 a_1 + a_2^\dagger a_2^\dagger a_2 a_2 + a_3^\dagger a_3^\dagger a_3 a_3 \right) \quad (3.19)$$

El hecho de que este Hamiltoniano sólo contenga interacciones entre pares de partículas que se encuentran en el mismo pozo es una consecuencia de que los traslapes en las funciones de onda localizadas adyacentes pueda ser despreciado.

Capítulo 4

Discusión y Conclusiones

En este trabajo se estudió un gas de Bosones ultrafríos con interacción confinado en un potencial unidimensional simétrico compuesto de tres pozos. En particular se derivó el Hamiltoniano efectivo (3.19) que describe la dinámica de este sistema a partir del Hamiltoniano mas general de N partículas en segunda cuantización. En este Hamiltoniano encontramos términos que describen el tunelaje entre pozos adyacentes únicamente, de tal forma que una partícula no puede tunelear desde el pozo izquierdo hasta el pozo derecho. Este Hamiltoniano describe la interacción entre pares de partículas que están en el mismo pozo.

Este Hamiltoniano solo es válido si los niveles de energía asociados a los primeros tres estados (que en este caso hemos supuesto que son los únicos estados ocupados por las partículas), están igualmente espaciados y el traslape entre las funciones de onda localizadas de una partícula en cada pozo pueden considerarse despreciables. Si estas dos condiciones no se satisfacen, uno puede encontrar términos de tunelaje entre pozos no adyacentes (es decir tunelaje entre los pozos 1 y 3) e interacciones entre partículas en diferentes pozos.

La evolución temporal del sistema que estudiamos esta descrita por la ecuación de Schrödinger (2.3) para el Hamiltoniano efectivo descrito en el párrafo anterior. A partir de este Hamiltoniano podemos concluir que esta dinámica estará gobernada por los coeficientes Δ y U , es decir el coeficiente de acoplamiento del tunelaje de partículas entre pozos adyacentes, y el coeficiente

que modela las interacciones entre pares de partículas. Experimentalmente se pueden controlar los parámetros Δ y U para modificar el transporte de las partículas en una red óptica. Existen dos casos extremos, uno en el que la interacción $U \gg \Delta$. Si este es el caso, el término de tunelaje se puede despreciar y el sistema evolucionará dependiendo exclusivamente de la interacción entre las partículas en cada pozo. Por otro lado si $\Delta \gg U$ las interacciones participarán minoritariamente. Sin embargo este término no puede ser despreciado pues son las interacciones las que conducen al sistema a alcanzar su estado estacionario. Los dos comportamientos extremos son el superfluido y el aislante de Mott [24]. El primero corresponde a una interacción tal que $U \ll \Delta$ y las partículas fluyen libremente a través de la red. El segundo se refiere a un estado en el cual los átomos están localizados en los sitios de la red con un número de átomos definido en cada pozo.

La física esencial que describe la dinámica de una red óptica en una dimensión esta contenida formalmente al estudiar el estado base de un sistema de muchos cuerpos confinado en un potencial unidimensional de dos pozos [23, 25]. Debido a que las redes ópticas están formadas, en general, por un número mayor de pozos, es necesario el tratamiento cuántico del sistema con $n > 2$. Debido a esto, este trabajo es el primero en llevar a cabo dicho estudio abriendo la posibilidad de extender el conocimiento de dichas redes a un nivel más profundo.

El estudio de sistemas compuestos de tres pozos como el que hemos presentado se ha tratado anteriormente en el esquema de campo medio [26]. Este tratamiento conduce a tres ecuaciones acopladas no lineales para el número de partículas en cada pozo como función del tiempo. Las suposiciones necesarias para obtener estas ecuaciones, en particular los coeficientes de acoplamiento entre pozos adyacentes, son obtenidas en forma natural en el enfoque cuántico que se expone en esta tesis.

Como se mencionó en la introducción, las redes ópticas reales están compuestas por un número de pozos que van desde una decena hasta cien aproximadamente. El estudio del sistema de tres pozos se puede generalizar para un número arbitrario de pozos. El Hamiltoniano efectivo tendrá también una suma de términos de tunelaje entre pozos adyacentes y una suma de términos de interacción de partículas en el mismo pozo. La validez de este Hamiltoniano

se justifica por el hecho de que siempre es posible ajustar los parámetros del potencial para conseguir igual espaciamento entre niveles de energía, y que los traslapes de las funciones de onda localizadas en cada pozo pueden ser despreciadas.

Bibliografía

- [1] M. Weidemüller and C. Zimmermann, *Interactions in Ultracold Gases: From Atoms to Molecules*, (WILEY-VCH GmbH & Co.) (2003).
- [2] K. Huang, *Statistical Mechanics*. Wiley, New York (1963).
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics.*, Wiley, New York (1977).
- [4] I. Bloch, *Quantum Gases in Optical Lattices*, *Physics World*, 17, 25-29 (2004).
- [5] I. Bloch, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **38** S629 (2005).
- [6] A. Kay, J. K. Pachos, *arXiv:quant-ph/0406073 v3* (2004).
- [7] C. Savage *Introduction to Light Forces, Atomo Cooling, and Atom Trapping.* *arXiv:atom-ph/9510004* (1995).
- [8] G. Pupillo, A. M. Rey, G. Brennen, C. J. Williams, C. W. Clark, *Journal of Modern Optics* **51**, 2395 (2004).
- [9] N. Masuhara, J.M. Doyle, J.C. Sandberg, D.Kleppner, T.J. Greytak, H.F. Hess, and G.P. Kochanski. *Evaporative Cooling of spin-Polarized Atomic Hydrogen.* *Phys. Rev. Lett* **61**. 935 (1988).
- [10] H.F. Hess. *Evaporative Cooling of Magnetically Trapped and Compressed spin-Polarized Hydrogen.* *Phys. Rev. B* **34**, 3476 (1986).

- [11] Cataliotti, et al, Science **293**, 843 (2001).
- [12] Anderson, B.P. and Kasevich, M.A., Science **282**, 1686 (1998).
- [13] J.R. Guest, J-H. Choi, E.Hansis, A.P. Povilus and G.Raihlhel, Phys. Rev. Lett, **94**, 073003 (2005).
- [14] L.Guidoni, C.Triche, P.Verkerk and G.Grynberg Phys. Rev. Lett. **79** 3363 (1997).
- [15] S.Rolston 1998 Optical Lattices, Physics World, October pp 27-32.
- [16] William D. Phillips, Reviews of Modern Physics, Vol. 70, No. 3, July 1998.
- [17] M. D. Feit, J. A. Fleck, JR., and A. Steiger, Journal of Computational Physics **47**, 412-433 (1982).
- [18] J. A. Fleck. JR., J. R. Morris, and M. D. Feit, Appl. Phys. **10** (1976), 129.
- [19] M.E. Rose, Elementary Theory of Angular Momentum; (John Wiley and Sons) (1957).
- [20] Fetter, A.L. and Walecka, J.D., Quantum Theory of Many-Particle Systems, (MacGraw-Hill, Inc.) (1971).
- [21] Landau, L. and Lifshitz, L., Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory, (London: Pergamon Press) (1958).
- [22] Gasiorowicz, S., Quantum Physics, (John Wiley and Sons, Inc.) (1974).
- [23] J. Javanainen, Phys. Rev. A **60**, 4902-4909 (1999).
- [24] M. Greiner, O. Mandel, T. Rom, A. Altmeyer, A. Widera, T. W. Hänsch and I. Bloch, Physica B: Condensed Matter Vol. 329-333, part 1, (2003).
- [25] J. Javanainen and M. Ivanov, Phys. Rev. A **60**, 2351 (1999).
- [26] S. Zhang, F. Wang, Phys. Lett A **279** (2001).