



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

**MODELADO DE FUNCIONES  
DISTANCIA ASIMÉTRICAS Y NO  
UNIFORMES**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTORA EN INGENIERÍA**

(INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES)

P R E S E N T A :

**HÉERICA SÁNCHEZ LARIOS**



TUTOR: DR. SERVIO TULIO GUILLÉN  
BURGUETE

DICIEMBRE 2005



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos:

Agradezco a mi tutor, Dr. Servio T. Guillén Burguete, su orientación y aportación de ideas durante la realización de esta tesis, y al Dr. Raymundo Bautista Ramos sus valiosas críticas y sugerencias.

Agradezco ampliamente a los doctores Arturo Olvera Chávez, Luis Álvarez Icaza, Abel Camacho Galván, e Idalia Flores de la Mota sus observaciones y sugerencias, así como al Dr. Ricardo Aceves García, quién me inició en el tema de localización de servicios, de donde surgió el tema de mi investigación doctoral.

Por último, agradezco a la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP) y al CONACYT, su apoyo para la realización de mi investigación doctoral.

Índice	Página
Introducción	1
1. Antecedentes	5
2. Marco Teórico	11
3. Geodésicas de combinaciones de premétricas	41
4. Premétricas obtenidas de modelos de deslizamiento sobre superficies	43
5. Modelos de deslizamiento sobre superficies	48
6. Braquistócronas sobre el plano euclidiano bidimensional	51
7. Premétricas sobre el espacio $n$ -dimensional obtenidas de combinar $m$ premétricas	57
8. Contraejemplos	64
9. Conclusiones	68
10. Anexos	69
Referencias	88

# Introducción.

Proponemos un marco teórico para modelar funciones distancia sobre  $R^n$ , donde distancia es una medida de la dificultad para trasladar un objeto de un punto a otro. Nuestras funciones distancia se pueden referir a costo de transporte, longitud de la trayectoria recorrida, tiempo de recorrido, energía consumida, etc. Estas funciones distancia son útiles en muchos problemas de investigación de operaciones, en especial en los problemas de localización en  $R^n$ , los cuales consisten en ubicar óptimamente un conjunto dado de objetos, donde la función objetivo depende de las distancias entre estos objetos y de estos con ciertos puntos fijos. Para una revisión extensa de los problemas de localización continua ver Love, Morris, y Wesolowsky (1988).

La “distancia” entre cualquier par ordenado de puntos se pueden definir como la “longitud” del arco más corto que los conecta. Puesto que frecuentemente no es factible medir las distancias reales para todos los pares ordenados de puntos de una región dada, es conveniente el uso de funciones distancia.

Las funciones distancia involucradas en problemas del mundo real frecuentemente son asimétricas, no uniformes y no positivas definidas. Por ejemplo, las funciones distancia asimétricas y no uniformes ocurren en el modelado de las horas pico de tráfico, y en el movimiento de vehículos en el espacio urbano sobre superficies no horizontales. Las distancias negativas ocurren, por ejemplo, cuando un robot con sistema de recuperación de energía se traslada de un punto a otro y la energía requerida para ello es la distancia entre tales puntos, de modo que cuando el robot desciende hay una ganancia de energía.

A pesar de lo anterior, en la literatura revisada no aparece mencionado el problema de modelar funciones distancia que admitan asimetría, no uniformidad y distancias negativas. Esto puede deberse a la falta de un marco teórico suficientemente general.

La literatura actual sobre modelado de funciones distancia se ha enfocado exclusivamente al ajuste estadístico de parámetros de funciones del tipo de las normas  $L_p$  pesadas o combinaciones lineales positivas de estas.

Love y Morris (1979), Berens y Körling (1985), Brimberg y Love (1993), y Fernández et al (2002) obtienen funciones distancia a partir de las normas  $L_p$  pesadas. Ellos realizaron estudios empíricos en los que los mejores valores de ajuste de los parámetros de las normas pesadas  $L_p$  se obtuvieron a partir de conjuntos de datos para diferentes regiones urbanas y rurales.

Por otro lado, Ward y Wendell (1980) y Brimberg y Love (1992), obtuvieron funciones distancia a partir combinaciones lineales positivas de normas  $L_p$  pesadas. Ellos también aplican ciertos criterios de bondad de ajuste de parámetros de sus funciones distancia.

Las funciones distancia obtenidas, tanto de normas  $L_p$  pesadas como de combinaciones lineales positivas de éstas, conducen forzosamente a funciones distancia positivas definidas, simétricas y uniformes, es decir, la distancia entre dos puntos distintos es estrictamente positiva, la distancia de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  es igual a la distancia de  $\mathbf{b}$  a  $\mathbf{a}$ , y la distancia de un punto a otro es invariante frente a traslaciones, respectivamente. Las métricas  $L_p$ , excepto la métrica euclidiana son anisotrópicas (dependiente de la dirección).

Hodgson, Wong y Honsaker (1987), Drezner y Wesolowsky (1989), y Plastria (1992) obtienen funciones distancia asimétricas y las aplican a problemas de localización. En estos casos sus funciones distancia son uniformes y positivas definidas.

Por último, Sun y Reif (2003) consideran el problema de encontrar el camino de recorrido de mínima energía gastada por un robot por trasladarse desde un punto dado a otro punto; en su modelo consideran anisotropía, asimetría, y distancias negativas (energía ganada por el robot), pero no es de interés para ellos obtener una función distancia que proporcione la energía gastada por el robot por trasladarse entre cualquier par de puntos sobre una superficie dada.

Para relajar las condiciones de simetría, uniformidad y no negatividad, se tuvo que refundamentar el concepto de función distancia sobre un espacio vectorial (Capítulo 2), llegando a la conveniencia de definirla como una función binaria que cumple la propiedad de identidad (la distancia de un punto a sí mismo es cero). Esta sola condición es suficiente para que una función distancia  $d$  determine ciertas curvas dirigidas, si es que existen, llamadas geodésicas de la función  $d$ , o  $d$ -geodésicas. Estas curvas están formadas por arcos dirigidos, llamados arcos inducidos por la función  $d$ , o arcos  $d$ -inducidos, los cuales son los arcos que cumplen una condición, llamada por razones obvias igualdad del triángulo, o condición de conservación de la distancia  $d$ , que consiste en que para todo desplazamiento de un punto  $\mathbf{x}$  a un punto  $\mathbf{x}'$  sobre uno de estos arcos, con dirección a su punto final  $\mathbf{b}$ , la reducción en la  $d$ -distancia de  $\mathbf{x}$  al final del arco,  $d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}', \mathbf{b})$ , es igual al aumento en la  $d$ -distancia de cualquier punto  $\mathbf{x}''$  a  $\mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{x}''$  se encuentra entre el inicio del arco  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}$ ; es decir,  $d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') - d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}', \mathbf{b})$ , o lo que es lo mismo,  $d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ .

Los arcos  $d$ -inducidos se pueden definir, equivalentemente, como aquellos arcos dirigidos que cumplen la propiedad de aditividad: la  $d$ -distancia del inicio al final del arco es igual a la suma de las  $d$ -distancias entre puntos consecutivos, situados arbitrariamente a lo largo de tal arco, con la única condición de que el primero se sitúe en el punto inicial y el último en el punto final del arco (sección 2.2). Esta propiedad corresponde con la idea intuitiva de la medición de distancias, que en el espacio euclidiano corresponde a que la distancia entre dos puntos es la suma de las distancias entre puntos consecutivos a lo largo del segmento de recta que los une.

Una contribución de este trabajo es la noción propuesta de  $d$ -geodésica (sección 2.3) la cual no requiere el concepto de longitud de arco y por tanto tampoco de arco de mínima longitud, por que se basa en que los arcos cumplen la igualdad del triángulo, lo cual no requiere que la función distancia satisfaga la desigualdad del triángulo, que es la condición que implica que los arcos  $d$ -inducidos sean arcos de longitud mínima. Además, por ser una igualdad algebraica la que define a los arcos  $d$ -inducidos, y no una igualdad diferencial como la definición tradicional, es posible que por dos puntos dados pasen no una sino varias, o incluso una infinidad de arcos  $d$ -inducidos, como es el caso de las métricas  $L_1$  (sección 7.2).

La derivada direccional unilateral (Rockafellar, 1970, p213) en  $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  de una función distancia,  $d$ , respecto de su segundo argumento en la dirección  $\mathbf{v}$ , es un valor  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  que representa la tasa de cambio de la  $d$ -distancia del punto  $\mathbf{x}$  a un punto cercano a  $\mathbf{x}$  en la dirección  $\mathbf{v}$ . La correspondiente función  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  se denomina función lagrangiana de la función distancia  $d$  o función  $d$ -lagrangiana. Si la función lagrangiana de una función distancia  $d$  existe, está acotada y cumple ciertas condiciones de continuidad, entonces: a) los arcos  $d$ -inducidos forman un campo de direcciones tal que en cada punto y en cada dirección pasa un arco  $d$ -inducido (sección 2.5); b) existe una funcional<sup>1</sup> que asocia a cada arco dirigido suave por pedazos una longitud de arco, medida en términos de la función  $d$ , llamada  $d$ -longitud (sección 2.6).

---

<sup>1</sup> Una *funcional* es una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

Se prueba que si la función distancia  $d$  cumple la desigualdad del triángulo, llamada entonces *premétrica*, los arcos  $d$ -inducidos son ahora arcos de mínima  $d$ -longitud, y por tanto las  $d$ -geodésicas, como en la definición tradicional, están formadas por arcos de mínima  $d$ -longitud (sección 2.7). Esto lleva a un método para modelar funciones distancia que son premétricas, que pueden ser no uniformes, con valores negativos y no simétricas, en el que las  $d$ -longitudes pueden representar energía, tiempo, costo, etc., y no necesariamente distancias de recorrido. El método consiste en resolver un problema de cálculo de variaciones, en cuyo integrando se encuentra la función lagrangiana de la premétrica a determinar (sección 2.8). Estos problemas son en general difíciles de resolver analíticamente, pero en algunas situaciones se pueden usar métodos numéricos. La función lagrangiana, a diferencia de la premétrica, contiene información puramente local, que se refiere a la tasa de cambio o “eficiencia” del desplazamiento en cada punto para cada dirección del espacio. Por esto, la función lagrangiana resulta en principio más manejable para el modelado que la función distancia, en donde en esta última la información es de tipo global y por ello más difícil de sistematizar.

Se consideran diversos esquemas generales para modelar funciones distancia que parten de una función lagrangiana, algunos con interpretación física (Cap 4), como el de un objeto que se desliza sobre una superficie rugosa (sección 4.1), donde la función distancia representa la energía necesaria para que el objeto sea trasladado de un punto a otro. Este modelo se ajusta a través de los parámetros que definen la forma de la superficie sobre la que se desliza el cuerpo, y otros parámetros que corresponden a la “gravedad” y a la “fricción”, respectivamente. Como ejemplo ilustrativo se considera el deslizamiento de un objeto sobre un plano inclinado (sección 5.1), lo que da una premétrica uniforme pero no isótropa, que permite distancias negativas. Otro ejemplo es el deslizamiento de un objeto sobre una media esfera (sección 5.2), que da una premétrica no uniforme, no isotrópica y que puede ser no simétrica y con distancias negativas.

Se presenta una forma de modelar funciones distancia sin intervención del cálculo de variaciones, que se basa en combinaciones algebraicas de premétricas en  $R^1$ , que pueden ser asimétricas y no uniformes, teniéndose por un lado combinaciones lineales positivas y por otro lado combinaciones del tipo de Minkowski (Cap 7) de esas funciones distancia.

En el capítulo 8 se dan contraejemplos y conjeturas que ayudan a aclarar aspectos teóricos o que descartan afirmaciones que intuitivamente podrían considerarse correctas. El capítulo 9 se dedica a las conclusiones y trabajos futuros. En el Anexo 1 se da un compendio de fórmulas y el Anexo 2 se da un compendio de teoremas. En el Anexo 3 se demuestra que todo arco contiene un subarco simple con los mismos extremos, el cual permite afirmar que las geodésicas de una premétrica se pueden descomponer en dos familias de curvas simples, es decir, sin cruces, las que se cierran sobre sí mismas y las que extienden indefinidamente hasta el infinito.

# Resumen

Se propone un marco teórico para modelar funciones distancia en un espacio vectorial  $n$ -dimensional. Este trabajo se enfoca al modelado de funciones distancia tales que para cada par de puntos existe al menos una “ruta más corta” de recorrido que los conecta. Nuestra función distancia se puede referir a costo de transporte, distancia de recorrido, tiempo de recorrido, energía consumida, costo de transporte, etc. Se introducen dos nuevos conceptos: *arco inducido por una función distancia*, y *premétrica*. Un arco inducido por una función distancia es un arco dirigido tal que para cualquier triada ordenada de puntos del arco, la desigualdad del triángulo se cumple en su forma de igualdad. Una premétrica es una función distancia que satisface la desigualdad del triángulo y la propiedad de identidad. Una premétrica, a diferencia de las métricas, puede ser asimétrica y tomar valores negativos, y a diferencia de las métricas  $L_p$ , puede ser no uniforme. Se muestra que una premétrica se puede obtener resolviendo un problema de cálculo de variaciones, cuyo integrando es una función que depende de la posición y la dirección, llamada función lagrangiana de la premétrica. El valor de la funcional para un arco dado representa la longitud del arco, medida con respecto a esa premétrica. Se demuestra que las propiedades de una premétrica están determinadas por su función lagrangiana. Se proponen diversos modelos, algunos con interpretación física, como el de un objeto que se desliza sobre una superficie, donde la función distancia representa la energía necesaria para que el objeto sea trasladado de un punto a otro. Se demuestra que una combinación “tipo Minkowski” de funciones distancia que inducen arcos es también una función distancia, la cual no necesariamente induce arcos.



# 1. Antecedentes

## 1.1 Estado de arte

Las conclusiones de la búsqueda bibliográfica se resumen en lo siguiente: a) ningún artículo o libro se interesa en el problema del modelado de funciones distancia, todos aceptan a priori funciones distancia tradicionales, derivadas de normas  $l_p$ , o a lo más definidas por funciones *gauges* (que permiten asimetría pero requieren uniformidad); b) algunos artículos que tocan el tema de las funciones distancia hacen estimación estadística de parámetros que intervienen en una combinación lineal positiva de funciones distancia de forma conocida; en estos artículos no hacen ninguna relación de las funciones distancia ajustadas con los respectivos caminos mínimos; c) otros artículos se interesan en el problema de un robot que tienen que encontrar un camino de mínima energía o de mínimo costo que lo lleve de un punto dado a otro punto dado, sobre una superficie conocida con fricción anisotrópica y efectos de gravedad.

Una descripción resumida de cada uno de los artículos revisados se da enseguida.

**Zheng Sun; John Reif (2003)** On energy-minimizing paths on terrains for a mobile robot, *IEEE International Conference on Robotics & Automation*.

En esta publicación los autores abordan el problema de calcular caminos de mínima energía (caminos óptimos) para un robot móvil sobre un terreno cualquiera. Este trabajo se basa en el modelo introducido por Rowe (1997, 1990), quién define el costo de un camino como la pérdida de energía debida a la fricción y la gravedad. A este modelo. Zheng le incorpora anisotropía para poder tomar en cuenta direcciones transversales no permisibles, que podrían provocar volcaduras peligrosas o limitaciones de potencia. Este problema es una generalización del problema de caminos óptimos sobre terrenos “pesados”. Para calcular un camino aproximado hacen una discretización, colocando puntos sobre las fronteras de las caras del terreno e interconectando esos puntos por arcos con pesos apropiados. Con esto simplifican el problema original de caminos óptimos en un espacio continuo, transformándolo en un problema de camino mínimo en una red. La ventaja es que éste último problema se puede resolver por varios algoritmos existentes. El camino óptimo discreto encontrado se convierte entonces en una solución aproximada del problema original, formulado en un espacio continuo. En este artículo también consideran el caso de terrenos con gran inclinación, en los cuales un robot solamente se puede mover hacia abajo. Basándose en el planteamiento de Neil (1990), los autores definen el problema de caminos mínimos para robots de la siguiente forma: Sea  $r$  un lado del terreno con un gradiente  $\phi$  y  $\mu$  el coeficiente de fricción entre el robot móvil y la superficie de  $r$ . Definen  $\omega = \mu \cos \phi$  como el “peso” de  $r$ . Para un robot viajando sobre  $r$  con ángulo de inclinación  $\varphi$ , el costo de la energía se define por  $mg(\mu \cos \phi + \sin \varphi)l = mg(\omega + \sin \varphi)l$ , donde  $mg$  es el peso del robot, y  $l$  la distancia recorrida. El problema es encontrar un camino de mínima energía desde un punto fuente dado  $s$  hasta un punto destino dado  $t$ . El modelo supone que no hay aceleración durante todo el recorrido y no hay costo por la energía gastada por girar para cambiar de dirección. Ocurre otro caso especial cuando un robot está viajando hacia abajo con un ángulo de inclinación  $\varphi$  tal que  $\omega + \sin \varphi < 0$ . Esto causará que el robot gane energía y se acelere. Entonces el robot tiene que aplicar una fuerza de frenado  $-mg(\omega + \sin \varphi)$  para evitar la aceleración.

La idea principal es poder calcular el camino óptimo de recorrido de un robot, que es el camino de mínima energía.

Dado lo anterior, podemos observar que en esta publicación el objetivo de los autores es encontrar caminos de recorrido óptimos para ir desde un punto fuente  $s$  hasta un punto destino  $t$ . La anisotropía que consideraron en su modelo se obtiene discretizando las direcciones, formando zonas angulares, cada una con una característica determinada como se describió arriba. Este modelo se relaciona con el tema principal esta tesis, ya que consideran terrenos no uniformes ni isotrópicos; pero estos autores no obtienen una función distancia que proporcione la energía gastada entre cualquier par de puntos sobre una región continua.

**Fernández, J.; Fernández, P.; Pelegrín, B. (2002)** Estimating actual distances by norm functions: a comparison between the  $\ell_{k,p,\theta}$ -norm and the  $\ell_{b_1,b_2,\theta}$ -norm and a study about the selection of the data set, *Computers & Operations Research* 29, 609-623.

En este artículo se abordan principalmente dos aspectos. Primero se compara, a través de un estudio empírico, la distancia pesada tipo norma  $\ell_p$  dada por

$$\ell_{k,p}(a,b) = k \left[ \sum_{i=1}^2 |a_i - b_i|^p \right]^{1/p}, \quad k > 0, p \geq 1, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son dos puntos sobre el plano y}$$

$k, p$  son parámetros a determinar para una región dada, con la distancia  $\ell_{2q}$ , dada por

$$\ell_{2q}(a,b) = \left[ \sum_{i=1}^2 q_i (a_i - b_i)^2 \right]^{1/2}, \quad q_1, q_2 > 0, \text{ siendo ésta última una función con el mismo}$$

número de parámetros que la primera. Los resultados muestran que ninguna función distancia es mejor que la otra. Por el contrario, dependiendo de la región considerada, cualquiera de las dos normas puede ser significativamente mejor que la otra. El segundo interés de este artículo es investigar cómo la selección del conjunto de datos que representa la red de la región, afecta la capacidad de la función distancia en la estimación de distancias, y tratar de deducir cómo obtener un conjunto de datos conveniente que represente adecuadamente una región geográfica dada. Por medio de otro estudio empírico se muestra que la selección del conjunto de datos afecta de manera importante la precisión de las estimaciones de distancias. Para obtener un conjunto de datos conveniente es importante elegir un buen tamaño de muestra, y lo más importante, las ciudades deben ser elegidas tal que éstas estén distribuidas sobre toda la región y representen la densidad de las ciudades en la región. Otra vez nos enfrentamos a un caso donde las estimaciones de las distancias se hacen utilizando métricas que provienen de normas  $\ell_p$ , con las limitaciones consecuentes.

**Brimberg, J., Love, R. F., (1993)** General considerations on the use of the weighted  $L_p$  norm as an empirical distance measure, *Transportation Science*, Vol. 27, No. 4, 341-349.

En este trabajo se presenta un procedimiento general para ajustar normas  $\ell_p$  con el objeto de estimar distancias de recorrido en un sistema de distribución. Una contribución importante es que la búsqueda del valor del mejor ajuste del parámetro  $p$  se puede restringir al intervalo  $(0,2]$ , dado que los ejes de referencia de la función distancia están orientados para ajustar el sesgo direccional inherente a la red de transporte. Las ventajas de este método, y particularmente la importancia de alinear los ejes de referencia, se demuestran a través de un caso de estudio del sistema de carreteras en Ontario. Aunque en el artículo se consideran solamente normas pesadas  $\ell_p$ , los conceptos presentados son fácilmente aplicables a otras funciones distancia, tales como

las normas tipo bloque de Ward y Wendell. Cabe hacer notar que las funciones distancia obtenidas son simétricas y uniformes, propiedades que generalmente no se cumplen en problemas reales.

**Brimberg, J., Love, R. F., (1992)** A new distance function for modeling travel distances in a transportation network, *Transportation Science*, Vol. 26, No. 2, 129-137

Aquí se considera una nueva medida de distancia, llamada la norma pesada uno-dos, que es una combinación lineal positiva de normas  $\ell_p$ , es decir, que combina la norma rectangular ( $p=1$ ) pesada con la norma euclidiana ( $p=2$ ) pesada. También introducen una función de sesgo direccional para mostrar la proporcionalidad de esta medida de distancia con la norma euclidiana. Después formulan un modelo de regresión lineal simple para ajustar los parámetros de la función de distancia a un conjunto de datos. Como en los casos anteriores, las funciones distancia modeladas son simétricas y uniformes.

**Neil C. Rowe; Ron S. Ross (1990)** Optimal grid-free path planning across arbitrarily contoured terrain with anisotropic friction and gravity effects. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(5), 540-553. Oct. 1990.

Aquí se considera el problema de planear el camino óptimo para un robot en movimiento entre algún punto inicial y algún punto final, sobre un terreno con contornos arbitrarios, usando un simple modelo físico con fuerza de gravedad y fricción. Se considera que: (1) el agente recorriendo el camino es mucho más pequeño que las dimensiones del camino, y (2) la información sobre la inclinación del camino y la rugosidad de la superficie, se conoce. Tratan esto como un problema de dos dimensiones, ya que hacen los cálculos en la proyección horizontal, perpendicular a la dirección de la gravedad. Se supone que desean minimizar cualquiera de dos, el costo de la energía o, cuando la potencia es constante, el tiempo de recorrido. Se permite que en ciertas regiones del terreno, cuyas fronteras están definidas por polígonos, haya ciertas direcciones de recorrido que son no permisibles, a las cuales se les asocia un costo infinito. En este artículo interesa aplicar métodos de solución para problemas discretos. Por tanto hacen una discretización del espacio continuo de la superficie sobre la cual se desplazará el robot. Los autores estudian caminos de mínima energía para un robot, o vehículo de la armada, moviéndose a través de algún terreno montañoso en una dirección hacia adelante. Se supone que las principales fuerzas externas que actúan sobre el robot son la gravedad y la fricción, y que el robot no acelera durante el recorrido, las vueltas por cambiar de dirección causan una pérdida de energía insignificante. Entonces, cuando el robot está recorriendo el camino con una pendiente  $\theta$ , positivo si sube y negativo si baja en la dirección del gradiente, la suma de las dos fuerzas es  $mg(\mu \cos \theta + \sin \theta)$ , que de acuerdo con el modelo físico de un cuerpo sobre un plano inclinado,  $mg$  es el peso del robot y  $\mu$  el coeficiente de fricción, o una resistencia específica en contra del movimiento del robot. Esta función da el trabajo por unidad de distancia que debe gastar el robot para vencer la gravedad y la fricción. Así, el costo en energía por recorrer un camino es la integral de dicha función sobre el camino.

Los autores consideran anisotropía causada por la fricción y la forma de la superficie del terreno, incluyendo los obstáculos. El camino que el robot recorre cuando no va frenando es el de mínimo consumo de energía entre un punto de inicio y un punto destino; cuando va frenando el camino que el robot recorre es el de mínimo tiempo de

recorrido, bajo un consumo constante de potencia, suponiendo que la potencia del robot es suficiente para todas las inclinaciones de ascenso permisibles. Este modelo considera asimetría entre dos puntos dados, ya que la energía gastada entre los puntos  $a$  y  $b$  en una dirección ascendente no es igual a la energía gastada en la dirección descendente correspondiente. El objetivo de este trabajo es obtener el camino óptimo de recorrido únicamente entre un par de puntos dados, pero no modelar una función distancia que les pueda proporcionar la energía gastada por el robot entre cualquier par de puntos sobre una superficie dada.

**Drezner, Z.; Wesolowsky, G. O. (1989)** The Asymmetric Distance Location Problem, *Transportation Science* Vol. 23, No. 3, 201-207.

En este artículo se consideran algunos problemas de localización de servicios con distancias rectangulares y euclidianas en  $R^2$ . Aquí las distancias rectangulares en las cuatro direcciones principales (Norte, Sur, Este y Oeste) no son iguales, y las distancias euclidianas se expresan como funciones que dependen de la dirección de un punto candidato de localización  $(x, y)$  a un punto de demanda. De aquí que ellos les llaman distancias rectangulares y euclidianas asimétricas. El hecho de no considerar la no uniformidad en las funciones de distancia utilizadas en este artículo, hace que estos modelos no se puedan considerar aplicables a situaciones reales, donde aparte de la asimetría se debe considerar la no uniformidad en los recorridos.

**Berens, W. (1988)** The Suitability of the Weighted  $L_p$ -norm in Estimating Actual Road Distances, *European Journal of Operational Research* 34, 39-43.

La norma pesada  $\ell_p$ , sugerida para estimar distancias reales de carreteras, requiere tiempo y esfuerzo de cálculo porque es necesario estimar dos parámetros, mientras que para la norma euclidiana solamente se requiere estimar un parámetro, que es relativamente fácil de calcular. Para algunos países la norma pesada  $\ell_p$  ha dado estimados considerablemente mejores que la norma euclidiana, mientras que para otros las mejoras en precisión han sido despreciables. El artículo evalúa si se puede predecir la magnitud del mejoramiento en la precisión del estimado por usar la norma  $\ell_p$ , sobre la base de datos fáciles de obtener que caracterizan la red de carreteras de un área particular. Tal habilidad para predeterminedir esa precisión del estimado podría ayudar a los investigadores a decidir cuándo usar la norma costosa  $\ell_p$ . El autor concluye que tal relación no puede obtenerse y que la magnitud del mejoramiento en la precisión ofrecida por la norma  $\ell_p$  no puede ser predicha. La investigación considera doce países, en cada uno de los cuales se obtiene una red de carreteras seleccionando de 20 a 40 ciudades grandes.

**Hodgson, M. John; Wong, Richard T; Honsaker, John (1987)** The  $p$ -centroid problem on an inclined plane. *Operations Research*, vol. 35 no. 2. 221-233.

Se modela el problema de localización  $p$ -centroide sobre un plano inclinado. La función distancia corresponde a la energía necesaria para llevar un objeto desde un punto a otro, y se basa en consideraciones físicas sobre la fuerza de fricción y la fuerza de gravedad. Demuestra que el algoritmo de Weiszfeld converge y que por tanto es aplicable a este problema. Los autores suponen, sin demostrarlo ni hacerlo explícito, que la ruta más corta entre dos puntos sobre el plano inclinado son líneas rectas;

tampoco menciona que la distancia entre dos puntos puede ser negativa, lo cual está relacionado con el hecho de que la función distancia es asimétrica. Estas últimas características fueron de especial interés al inicio de la investigación doctoral.

**Berens, W., Körling, F. (1985)** Estimating Road Distances by Mathematical Functions, *European Journal of Operational Research* 21, 54-56

En este artículo se describe una aplicación del método desarrollado en Love y Morris (1987) para una región de Alemania. Los autores indican que, contrariamente a lo dicho en el artículo de Love y Morris, las funciones distancia son más significativas si contienen un solo parámetro (tal como la norma euclidiana) porque la ganancia en precisión disminuye muy rápidamente conforme aumenta el número de parámetros. Los autores llegaron a esta conclusión después de que probaron con uno, dos y tres parámetros, tal como lo señalan Love y Morris. Berens y Körling señalan que las funciones distancia ajustadas a partir de datos empíricos deben ajustarse a las regiones donde éstas serán usadas. Ellos indican que si el interés principal fuera la precisión, no hay una métrica general que proporcione la misma precisión en todo el mundo. Es importante hacer notar que a pesar de que el método propuesto por Love y Morris no dio resultados satisfactorios para la muestra de datos en Alemania, Berens y Körling no hacen explícitas las condiciones de simetría y uniformidad que debieran cumplir los datos para poder ser modelados con este método.

**Gatrell, Anthony (1983)** Distance and Space, Clarendon Press, Oxford.

El interés de este libro es señalar métodos esencialmente cualitativos para la representación geográfica de objetos, como población, industria, fuerza laboral, etc. En términos de “distancias” dentro de un “espacio”. Las distancias a las que se refiere son siempre simétricas, aunque no se cumple la propiedad de uniformidad. Es importante resaltar que el libro no menciona ni considera el concepto de función distancia, por lo que la argumentación en todo momento es más bien numérica. Así, considera lo que denomina “espacios económicos”, “espacios cognitivos”, “espacios sociales”, “espacios ecológicos”. Es posible que en un futuro este libro pudiera ser útil para generar ideas que deban tomarse en cuenta para modelar funciones distancia.

**Love, R. F.; Morris, J. G. (1979)** Mathematical Models of Road Travel Distances, *Management Sciences* 25, 130-139.

Este es uno de los primeros artículos que abordan el problema de estimar una función distancia a partir de datos empíricos. Para esto se consideran combinaciones positivas de métricas que provienen de normas  $\ell_p$  pesadas, dadas por

$$l_{k,p,s}(a,b) = k \left[ \sum_{i=1}^2 |a_i - b_i|^p \right]^{1/s}, \text{ donde los valores de los parámetros } k, p \text{ y } s \text{ se ajustan de}$$

modo que representen los datos de la muestra con el menor valor de error de estimación. Los autores de este artículo argumentan que, cuando consideran las normas  $\ell_p$  pesadas, el parámetro “peso” considera situaciones tales como cuestas, colinas, curvaturas y otras formas de “ruido” que pudiera haber en la red de transporte. En este artículo los autores hicieron un análisis de sensibilidad para determinar las combinaciones de métricas que con menos parámetros independientes expliquen mejor las distancias observadas. Los datos empíricos para sus estudios fueron tomados de regiones urbanas y rurales. Una limitante que encontramos es que las funciones distancia modeladas con esta clase de métricas son uniformes y simétricas. Esta restricción impide modelar distancias reales.

**Angel, S; Hyman G (1976)** Urban fields. A Geometry of movement for regional science, Pion Limited, Londres

Es uno de los pocos trabajos de investigación que consideran al espacio como continuo, sin que este sea necesariamente euclidiano. Debido al caótico crecimiento de las ciudades, el espacio urbano no puede verse como un espacio euclidiano uniforme, en que el recorrido más corto entre dos puntos es la línea recta. Este trabajo considera, desde una perspectiva geográfica, principalmente de interés urbano, diversos problemas que requieren una representación espacial continua. Aborda el problema de la determinación de geodésicas, para lo cual usa geometría diferencial y cálculo de variaciones. Los resultados los aplica para representar patrones de recorrido de transporte en ciudades inglesas. La principal limitación del trabajo es que sus modelos se restringen a áreas urbanas con simetría radial.

Los autores señalan la falta de un marco conceptual que de una estructura espacial y geográfica apropiada para el análisis de un numeroso e importante grupo de fenómenos urbanos. El incremento en la complejidad de los sistemas urbanos requiere que estos se describan en una geometría más compleja. Este libro investiga diferentes requerimientos de tal geometría y demuestra, con varios ejemplos, cómo estos requerimientos podrían cumplirse adecuadamente para describir un número importante de propiedades y procesos en áreas urbanas. Tal geometría permitiría consolidar muchos logros concernientes al estudio de la estructura espacial de las ciudades y a la integración espacial entre ellas. Además hace posible estudiar patrones generales en el espacio de los sistemas urbanos, incrementando así la utilidad de los estudios cuantitativos previos.

El autor hace notar que generalmente se hacen tres suposiciones en estudios geográficos, y señala que estas hipótesis no siempre son realistas. La primera es que el espacio geográfico bajo estudio es plano e ininterrumpido. A esta hipótesis se le denomina “la suposición del plano euclidiano”. La segunda es que hay parámetros importantes, como densidad de población, poder adquisitivo y fertilidad de la tierra, que están distribuidos uniformemente sobre el espacio geográfico. A esta hipótesis se le llama “la suposición de densidades uniformes”. La tercera es la suposición de que el movimiento puede suceder con igual facilidad en todos los puntos de la superficie en estudio sin tener en cuenta la dirección de recorrido. A esta hipótesis se le llama “la suposición de facilidad uniforme de transporte”.

Estas suposiciones son severamente criticadas en este libro, haciendo notar el autor la necesidad de un marco teórico que sirva para modelar situaciones reales donde no se cumplen estas hipótesis.

Cabe mencionar que las suposiciones en la teoría de localización (superficies planas, densidades uniformes, igual facilidad de transporte en todas las direcciones) son hipótesis hechas únicamente con el fin de permitir un “tratamiento euclidiano” del problema.

**Wardrop, J.G. (1969)** Minimum cost paths in urban areas, *Strassenbau und Strassenverkehrstechnik*, 86, 184-190.

Este artículo considera el problema de determinar los caminos de tiempo mínimo correspondientes a un campo de velocidades isótropo en el plano. Este trabajo se inspiró en la analogía directa entre las rutas de costo mínimo de transporte con las trayectorias que siguen los rayos de luz. La teoría se basa en la ley de Snell sobre la refracción de la luz, la cual explica el ángulo en que la luz cambia su dirección al pasar de un medio a otro, cuando la velocidad de propagación es distinta en ambos medios. El artículo se restringe a campos con simetría axial y lo aplica al tráfico urbano de ciudades circulares.

## 2. Marco teórico

### 2.1 Funciones distancia

Se definen las siguientes propiedades o condiciones que puede cumplir una función binaria. Una función binaria  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  cumple la propiedad PX, si para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^n$ , y para toda  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^n$ , donde  $S^n$  es la  $n$  esfera euclidiana,

$$S^n = \left\{ \mathbf{u} \in R^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 = 1 \right\} \subseteq R^n:$$

- |   |  |
|---|--|
| P1. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b})$  | (Desigualdad del triángulo)                          |
| P2. $d(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$   | (Identidad)  |
| P3. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$  | (No negatividad)                                     |
| P4. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$   | (Simetría)   |
| P5. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$   | (Definitoreidad)                                     |
| P6. $d(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$   | (Uniformidad)  |
| P7. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$  | (Antisimetría)                                       |
| P8. $d(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{v}\lambda) = d(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{u}\lambda)$ para toda $\lambda > 0$ pequeña | (Isotropía)  |
| P9. $d(\lambda\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ para toda $\lambda \in R$                         | (Homogénea positiva de grado uno en $\lambda > 0$ ). |

Salvo en el caso trivial  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv 0$ , P7 es incompatible con P3 y P4. La propiedad P6 de uniformidad de una función binaria significa que  $d$  es invariante bajo traslaciones, y se puede definir también de las siguientes dos formas equivalentes:

- $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{0}, \mathbf{b} - \mathbf{a})$  para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$ ;
- $d(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{c}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c})$  para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^n$ .

La propiedad P8 de isotropía de una función binaria significa que  $d$  es invariante bajo rotaciones sobre el primer argumento cuando el segundo argumento se encuentra próximo a este.

Toda función binaria  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  se puede expresar de manera única como la suma de su *componente simétrico*,  $d^+: R^n \times R^n \rightarrow R$ , más su *componente antisimétrico*,  $d^-: R^n \times R^n \rightarrow R$ ,

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d^+(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d^-(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n,$$

definidos respectivamente por

$$d^+(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{2}, \quad d^-(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{2} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n,$$

claramente  $d^+$  es una función binaria simétrica y  $d^-$  una función binaria antisimétrica.

Una *función distancia* es una función binaria  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  que cumple la propiedad de identidad (P1). Una *premétrica* en  $R^n$  es una función distancia que cumple la desigualdad del triángulo (P2). Una *métrica débil* es una premétrica no negativa (P3). Una *cuasimétrica* es una métrica débil que cumple definitoreidad (P5) o en otras palabras, es una premétrica estrictamente positiva ( $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ). Una

*pseudométrica* es una métrica débil simétrica (P4), y una *métrica* es una pseudométrica que cumple la propiedad de definitoreidad (P5). Ver tabla 1.

**Tabla 1. Clasificación de las funciones distancia**

Nombre	Desigualdad del triángulo e identidad (P1, P2)	No negatividad (P3)	Simetría (P4)	Definitoreidad P5
Premétrica	V			
Métrica débil	V	V		
Cuasimétrica	V	V		V
Pseudométrica	V	V	V	
Métrica	V	V	V	V

El siguiente teorema se demuestra directamente y permite construir nuevas funciones distancia a partir de combinaciones lineales positivas de funciones distancia:

*Teorema 2.1 (Cerradura de las propiedades PX bajo combinaciones lineales positivas).* Cada una de las propiedades P1 a P9 es cerrada bajo combinaciones lineales positivas: si  $d_1, \dots, d_m$  son  $m$  funciones binarias sobre  $R^n$  que cumplen la propiedad PX ( $X = 1, \dots, 9$ ) y  $k_1, \dots, k_m$ , son  $m$  números reales no negativos, entonces la función binaria sobre  $R^n$  definida por  $d = k_1d_1 + \dots + k_md_m$  cumple la misma propiedad PX.

Por tanto, toda combinación lineal positiva de funciones distancia, premétricas, métricas débiles, cuasimétricas, pseudométricas o métricas es a su vez una función distancia, una premétrica, una métrica débil, una pseudométrica o una métrica, respectivamente.

## 2.2 Arcos inducidos por una función distancia

Se consideran dos definiciones equivalentes de arco inducido por una función distancia, llamado también arco  $d$ -inducido. La primera expresa una ley de conservación de la  $d$ -distancia: para todo desplazamiento de un punto  $\mathbf{x}$  sobre un arco inducido, con dirección al punto de destino, el aumento en la  $d$ -distancia del inicio del arco a  $\mathbf{x}$ , es igual a la reducción en la  $d$ -distancia de  $\mathbf{x}$  al final del arco. La segunda expresa la idea intuitiva de que al medir distancias de un punto a otro, siguiendo un cierto arco que pasa por ellos, que en el espacio euclidiano son las líneas rectas, la distancia entre esos dos puntos se puede descomponer como una suma de distancias entre puntos intermedios consecutivos, situados arbitrariamente a lo largo de tal arco.

Una *sucesión de puntos en  $R^n$*  con inicio en el punto  $\mathbf{a} \in R^n$  y final en el punto  $\mathbf{b} \in R^n$  es una sucesión de la forma  $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b})$ , con  $k \geq 1$ . Los puntos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son los *puntos extremos de la sucesión*, denominados *inicio* y *final* de la sucesión, respectivamente, y  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  los *vértices* de la sucesión. El conjunto de todas las sucesiones en  $R^n$  de  $\mathbf{a} \in R^n$  a  $\mathbf{b} \in R^n$  se denota por  $P[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . A cada sucesión de puntos en  $R^n$ ,  $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b})$ , se le asocia un número real, llamado *longitud de la sucesión*, definido por:

$$\Lambda(P) = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \quad \text{para toda } P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}) \in P[\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$



Un camino en  $R^n$  de  $\mathbf{a} \in R^n$  a  $\mathbf{b} \in R^n$  es una función continua  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  de un intervalo cerrado en la recta real en  $R^n$ , tal que  $\mathbf{x}(a) = \mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}(b) = \mathbf{b}$ . Un arco (dirigido)  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq R^n$  de  $\mathbf{a} \in R^n$  a  $\mathbf{b} \in R^n$  es la imagen dirigida de un camino  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  de  $\mathbf{a} \in R^n$  a  $\mathbf{b} \in R^n$ , llamado *representación paramétrica* o *parametrización* del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ; los puntos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son los *extremos* del arco, denominados *inicio* y *final* del arco, respectivamente, y el resto son *puntos interiores* del arco. Una *curva* en  $R^n$  es la imagen de una función continua definida sobre un intervalo finito o *infinito* de  $R$ , cuya imagen se encuentra en  $R^n$ . Por tanto todo arco en  $R^n$  es una curva en  $R^n$ . Si  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  es una función biunívoca ( $s \neq t \Rightarrow \mathbf{x}(s) \neq \mathbf{x}(t)$ ), entonces se dice que el camino  $\mathbf{x}$  es un *camino simple* y que su correspondiente arco es un *arco simple*. Por tanto, un arco simple admite una parametrización uno a uno  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  o *parametrización inyectiva*. Un arco simple tal que  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  no tiene puntos extremos, está formado solamente por puntos interiores, y se denomina *arco simple cerrado*.

Dos puntos  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  de un arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cumplen la relación binaria  $\mathbf{y} < \mathbf{z}$ , que se lee “ $\mathbf{y}$  antes de  $\mathbf{z}$ ”, si y sólo si para una representación paramétrica  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  existen  $y, z \in [a, b]$  con  $y < z$  tales que  $\mathbf{x}(y) = \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}(z) = \mathbf{z}$ , y no existen  $y', z' \in [a, b]$  con  $z' < y'$  tales que  $\mathbf{x}(y') = \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}(z') = \mathbf{z}$ . Desde luego que si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco simple entonces  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ . Si  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  es un camino en  $R^n$  y  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  su respectivo arco, entonces cualquier restricción de  $\mathbf{x}$  a un subintervalo  $[a', b'] \subseteq [a, b]$  es un *subcamino* de  $\mathbf{x}$ , y su respectiva imagen dirigida  $C(\mathbf{x}(a'), \mathbf{x}(b'))$  es un *subarco* de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Una *partición de un arco*  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  en  $R^n$  es una sucesión ( $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}$ ) con  $k \geq 1$  y  $\mathbf{a} < \mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2 < \dots < \mathbf{x}_k < \mathbf{b}$  cuyos puntos extremos coinciden con los extremos del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y cuyos vértices son puntos interiores de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ;  $C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \subset C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $i = 0, \dots, k$ , son *subarcos de la partición*. Por tanto, si  $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b})$  es una partición del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , entonces para cada representación paramétrica de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ , existe una *partición del intervalo*  $[a, b]$ , dada por  $s_1, s_2, \dots, s_k \in (a, b)$ , donde  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1} = b$ ,  $k \geq 1$ ,  $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}(s_2) = \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}(s_k) = \mathbf{x}_k$ . El conjunto de todas las particiones del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se denota por  $P[C(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$ . La *longitud de una partición* de un arco es la longitud de la sucesión correspondiente.

Un arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  en  $R^n$  cumple la *forma simple de la igualdad del triángulo* para una función binaria  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  si

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.1)$$

para alguna representación paramétrica  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Un arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un *arco inducido* por  $d$  (o *arco  $d$ -inducido*) si cumple cualquier de las condiciones (a) o (b) del siguiente teorema, las cuales son equivalentes.

*Teorema 2.2 (Definiciones equivalentes de arco  $d$ -inducido).* Sea una función binaria  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ . Para todo arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  en  $R^n$  las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(a) *Igualdad del triángulo:*

$$d(\mathbf{x}(s), \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) \quad \forall s \in [a, b] \text{ y } \forall t \in [s, b] \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ ,  $\mathbf{x}(a) = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x}(b) = \mathbf{b}$ , es una representación paramétrica de

$C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ;

(b) Propiedad de *aditividad*: la longitud de toda partición  $P = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b})$ ,  $k \geq 1$ , de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es igual a la distancia del inicio al final del arco,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \quad \forall P = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b}) \in P[C(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \quad (2.3)$$

*Demostración.*

Sea  $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b})$  una partición del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  una representación paramétrica de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Entonces existen  $s_1, s_2, \dots, s_k \in (a, b)$ , tales que  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1} = b$ ,  $k \geq 1$  y  $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}(s_2) = \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}(s_k) = \mathbf{x}_k$ .

$\Rightarrow$ : Supóngase que  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cumple la igualdad del triángulo, (2.2). Entonces  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cumple la forma simple de la igualdad del triángulo, (2.1), que corresponde a la afirmación (2.3) para  $k = 1$  (primer paso de la demostración por inducción). Si (2.3) se cumple para toda partición del intervalo  $[a, b]$  de  $k$  puntos localizados arbitrariamente en el intervalo  $(a, b)$ ,  $s_1, s_2, \dots, s_k \in (a, b)$ , donde  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1} = b$ ,  $k \geq 1$ ,  $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}(s_2) = \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}(s_k) = \mathbf{x}_k$ , entonces (2.3) también se cumple si a esta sucesión se le adiciona un nuevo punto dentro del intervalo abierto  $(a, b)$ , digamos  $t \in (s_j, s_{j+1})$ ,  $0 \leq j \leq k$ , pues al despejar  $d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(s_{j+1}))$  de  $d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(s_{j+1})) + d(\mathbf{x}(s_{j+1}), \mathbf{b})$  y aplicar (2.2) dos veces resulta,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(s_{j+1})) &= d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}), \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}), \mathbf{b}) \\ &= d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(s_{j+1})) + d(\mathbf{x}(s_{j+1}), \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}), \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(s_{j+1})), \end{aligned}$$

y al sustituir  $d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(s_{j+1})) = d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(s_{j+1}))$  en (2.3) se obtiene lo que se quiere demostrar.

$\Leftarrow$ : Para las particiones  $a, s, t, b$ , y  $a, s, b$ , la igualdad (2.3) se escribe como  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{x}(s)) + d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b})$  y  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{x}(s)) + d(\mathbf{x}(s), \mathbf{b})$ , respectivamente, y al resolver estas dos ecuaciones se obtiene (2.2). Q.E.D.

El teorema anterior muestra dos definiciones equivalentes de arco  $d$ -inducido. La primera, a través de la igualdad del triángulo (2.2), expresa una ley de conservación de la  $d$ -distancia: para todo desplazamiento de un punto  $\mathbf{x}$  a un punto  $\mathbf{x}'$  sobre uno de estos arcos, con dirección a su punto final  $\mathbf{b}$ , la reducción en la  $d$ -distancia de  $\mathbf{x}$  al final del arco,  $d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}', \mathbf{b})$ , es igual al aumento en la  $d$ -distancia de cualquier punto  $\mathbf{x}''$  a  $\mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{x}''$  se encuentra entre el inicio del arco  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}$ , es decir,  $d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') - d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}', \mathbf{b})$ , o lo que es lo mismo,  $d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}'', \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ , que coincide con (2.2). La segunda definición de arco inducido, dada por la afirmación (b) del mismo teorema, expresa un principio conocido en la medición de distancias: la distancia de un punto  $\mathbf{a}$  a un punto  $\mathbf{b}$  es igual a la suma de las distancias entre puntos consecutivos, situados arbitrariamente a lo largo de un arco inducido; el valor de esta suma no depende de la representación paramétrica del arco.

*Corolario.* Sea una función binaria  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  y  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  un arco  $d$ -inducido. Entonces:

- (a) Todos los subarcos de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  son arcos  $d$ -inducidos;
- (b) Todos los puntos de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cumplen la propiedad de identidad  $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 0$  para todo  $\mathbf{c} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , y
- (c)  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cumple la forma simple de la igualdad del triángulo, ecuación (2.1).

*Demostración.*

(a): Si  $C'(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \subseteq C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un subarco del arco  $d$ -inducido  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , entonces por el teorema 2.2 todas las particiones del arco inducido  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cumplen (2.3), y en particular cualquier partición con la forma  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}' = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}', \mathbf{b})$ , es decir,

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{a}') + d(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + d(\mathbf{b}', \mathbf{b}),$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{a}') + \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) + d(\mathbf{b}', \mathbf{b}),$$

y por tanto  $d(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$  para cualquier partición  $(\mathbf{a}', \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b}')$ . Por tanto  $C'(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$  es un arco inducido.

(b) Al hacer  $t = s$  en la igualdad (2.2), resulta  $d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)) = 0$  para todo  $t$  en  $[a, b]$ .

(c) La igualdad (2.1) se obtiene de (2.2) haciendo  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{a}$ . Q.E.D.

Por el inciso (b) del corolario anterior, la propiedad de identidad (P1) es una condición necesaria para que una función binaria induzca arcos. Por tal motivo esta es la condición mínima para que una función binaria sea una función distancia. Una función distancia en general podrá inducir más de un arco entre dos puntos dados de  $R^n$ . El contraejemplo 8.1 muestra que si se cumple (2.1) entonces no necesariamente se cumple (2.2), y que una premétrica puede ser una métrica continua y no inducir arcos para al menos algunos pares de puntos.

### 2.3 $d$ -geodésicas

Se define curva  $d$ -geodésica, como una curva cuyos subarcos suficientemente pequeños son arcos  $d$ -inducidos. Por tanto, una curva  $d$ -geodésica es una curva tal que todas sus tercias de puntos suficientemente próximos cumplen la igualdad del triángulo, no necesariamente una ecuación diferencial, como es la definición tradicional de curva geodésica, por lo que al no requerir condiciones de diferenciabilidad, la definición propuesta permite que por dos puntos dados pase incluso una infinidad de curvas  $d$ -geodésicas, como es el caso de la métrica  $L_1$  (sección 7.2).

Un par ordenado de arcos  $C(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ ,  $C(\mathbf{c}, \mathbf{b})$  en  $R^n$  es *concatenable* si el final del primer arco coincide con el inicio del segundo, en cuyo caso la *concatenación* de estos dos arcos es la unión de ambos, se denota por  $C(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \oplus C(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ , y es un arco con inicio en el inicio  $\mathbf{a}$  de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ , y final en el final  $\mathbf{b}$  de  $C(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ . En general, un conjunto ordenado de  $k$  arcos es concatenable si el final de cada arco coincide con el inicio del siguiente. Por tanto, se pueden concatenar las representaciones paramétricas  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  de arcos concatenables  $C_1, \dots, C_k$ , de modo que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \dots \oplus \dots \mathbf{x}_k$  es una representación paramétrica del arco concatenado,  $C_1 \dots \oplus \dots C_k$ . En general, para cualquier partición  $(\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b})$  de un arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  en  $R^n$ , los respectivos subarcos  $C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \subset C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $i = 0, \dots, k$  son concatenables, de modo que  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \dots \oplus \dots C(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ . Cualquier arco con ciclos se puede representar

concatenando arcos simples y cualquier arco clase  $C^1$  por pedazos es una concatenación de arcos simples clase  $C^1$ .

La propiedad que caracteriza a los arcos  $d$ -inducidos, de que todos sus subarcos son también arcos  $d$ -inducidos (corolario teorema 2.2), se puede entonces ampliar, y definir *curva  $d$ -inducida* como toda curva cuyos subarcos suficientemente pequeños son arcos  $d$ -inducidos. Por tanto, los arcos  $d$ -inducidos son curvas  $d$ -inducidas. También es curva  $d$ -inducida la concatenación  $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \oplus C(\mathbf{b},\mathbf{c})$  de dos curvas  $d$ -inducidas  $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$  y  $C(\mathbf{b},\mathbf{c})$ , siempre que el extremo común,  $\mathbf{b}$  sea un punto interior de algún subarco  $d$ -inducido de la concatenación,  $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \oplus C(\mathbf{b},\mathbf{c})$ . En estas condiciones, se dice que el arco  $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$  es una *extensión (hacia atrás)* del arco  $C(\mathbf{b},\mathbf{c})$ , y que el arco  $C(\mathbf{b},\mathbf{c})$  es una *extensión (hacia delante)* del arco  $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ . Resulta el siguiente teorema.

*Teorema 2.3. (El conjunto de las curvas  $d$ -inducidas es cerrado respecto de la operación de extensión).* Si  $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$  y  $C(\mathbf{b},\mathbf{c})$  son dos curvas  $d$ -inducidas concatenables, cuyo extremo común,  $\mathbf{b}$ , es un punto interior de algún subarco  $d$ -inducido de  $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \oplus C(\mathbf{b},\mathbf{c})$ , entonces  $C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \oplus C(\mathbf{b},\mathbf{c})$  es una curva  $d$ -inducida. Q.E.D.

Las curvas  $d$ -inducidas son de dos clases, las que admiten alguna extensión, es decir, que están contenidas en alguna curva  $d$ -inducida, y las que no. Estas últimas se denominan *curvas  $d$ -geodésicas* o simplemente  *$d$ -geodésicas*. Puesto que todo arco  $d$ -inducido es una curva  $d$ -inducida, resulta que todo arco  $d$ -inducido está contenido en alguna curva  $d$ -geodésica.

Cuando una  $d$ -geodésica tiene un extremo, al final, por ejemplo, significa que ella no puede ser extendida hacia delante con un nuevo arco  $d$ -inducido, lo cual podrá deberse a discontinuidades de la función distancia o sus derivadas.

Una función distancia es *completa* si todo par ordenado de puntos  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  en  $R^n$  está conectado por un arco  $d$ -inducido, o equivalentemente, si todo par ordenado de puntos está conectado por una  $d$ -geodésica. Para algunas funciones distancia, como es el caso de la métrica euclidiana, todo tramo de una  $d$ -geodésica es un arco  $d$ -inducido, pero esto no es lo general, porque para una función distancia completa puede ocurrir que un tramo  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  de una  $d$ -geodésica no sea un arco  $d$ -inducido, en cuyo caso existe al menos otra geodésica que los conecta, la cual contiene un arco  $d$ -inducido de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ .

Para una función distancia completa cualquier arco  $d$ -inducido  $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$  se puede extender hasta llegar a una  $d$ -geodésica, la cual va a contener por supuesto a dicho arco  $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ . Esta  $d$ -geodésica está contenida en el conjunto,

$$G(\mathbf{a},\mathbf{b}) = C(\mathbf{a},\mathbf{b}) \cup G^+(\mathbf{a},\mathbf{b}) \cup G^-(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

donde  $G^+(\mathbf{a},\mathbf{b})$ ,  $G^-(\mathbf{a},\mathbf{b})$  son extensiones hacia adelante y hacia atrás de  $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ , dados respectivamente por

$$G^+(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in R^n \mid d(\mathbf{a},\mathbf{b}) + d(\mathbf{b},\mathbf{x}) = d(\mathbf{a},\mathbf{x})\}$$

$$G^-(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{y} \in R^n \mid d(\mathbf{y},\mathbf{a}) + d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{y},\mathbf{b})\}$$

En el anexo 3 se demuestra que todo arco contiene un subarco simple con los mismos extremos. Por tanto las  $d$ -geodésicas de una función distancia completa se pueden descomponer en dos clases, las que se cierran sobre sí mismas formando ciclos, y las que se extienden indefinidamente si cortarse.

El siguiente teorema establece que las líneas rectas son  $d$ -geodésicas, aunque no necesariamente las únicas, de toda función distancia que sea uniforme y homogénea de grado uno.

*Teorema 2.4.* (Las líneas rectas son  $d$ -geodésicas, no necesariamente las únicas, de las funciones distancia uniformes y homogéneas de grado uno). Si  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  es una función distancia uniforme (P6) y homogénea de grado uno (P9), entonces cada línea recta de  $R^n$  es una  $d$ -geodésica.

*Demostración.* Sean  $\mathbf{a}$  un punto de  $R^n$ ,  $\mathbf{v}$  una dirección de  $R^n$  y  $s, t$  y  $b$  tres números reales tales que  $s < t < b$ . La demostración consiste en probar que los puntos  $\mathbf{a} + s\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a} + b\mathbf{v}$ , que se encuentran alineados sobre una recta, cumplen la igualdad del del triángulo (2.2), para lo cual se usa condición de uniformidad (P6) (al restar en los dos argumentos de  $d$  el mismo valor no altera el valor de la función), y la condición de homogeneidad positiva (P9) (los factores comunes en los argumentos de  $d$  se pueden factorizar):

$$d(\mathbf{a} + s\mathbf{v}, \mathbf{a} + t\mathbf{v}) + d(\mathbf{a} + t\mathbf{v}, \mathbf{a} + b\mathbf{v}) - d(\mathbf{a}, \mathbf{a} + b\mathbf{v}) = d(s\mathbf{v}, t\mathbf{v}) + d(t\mathbf{v}, b\mathbf{v}) - d(\mathbf{0}, b\mathbf{v}) =$$

$$= d(\mathbf{0}, (t-s)\mathbf{v}) + d(\mathbf{0}, (b-t)\mathbf{v}) - d(\mathbf{0}, b\mathbf{v}) = (t-s)d(\mathbf{0}, \mathbf{v}) + (b-t)d(\mathbf{0}, \mathbf{v}) - bd(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = 0$$

por lo que se cumple la igualdad del triángulo (2.2). Por tanto toda línea recta es un  $d$ -geodésica. Q.E.D.

## 2.4 Diferenciabilidad de caminos

Más adelante se usa la siguiente clasificación de las funciones según la continuidad de sus derivadas, así como el concepto de diferenciabilidad lateral de un camino.

Una función  $f : R^n \rightarrow R$  es *clase  $C^m$*  ( $m = 1, 2, \dots$ ) sobre un conjunto abierto  $G$  si todas sus derivadas parciales de orden  $m$  son continuas en  $G$ . Una función continua es *clase  $C^0$* . Evidentemente  $C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots$ . Una función perteneciente a  $C^\infty = \bigcap_{r=1}^\infty C^r$  se dice *clase  $C^\infty$*  o *infinitamente diferenciable*. Se dice que un arco es *clase  $C^1$*  o *arco suave* si tiene una representación paramétrica  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$  cuya derivada es continua y diferente de cero en su dominio. El conjunto de todos los arcos en  $R^n$  suaves por pedazos se denota por  $\Omega$ , y por comodidad  $\Omega_{[a, b]}$  denota tanto el conjunto de todos los arcos contenidos en  $\Omega$  que van de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , como el conjunto de sus respectivas representaciones paramétricas.

Un camino  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$  es *diferenciable por la derecha* en  $c \in [a, b]$ , si existe una transformación lineal  $\lambda(c)^+ : [a, b] \rightarrow R^m$ , llamada *derivada por la derecha* de  $\mathbf{x}$  en  $c$ , tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|\mathbf{x}(c+h) - \mathbf{x}(c) - \lambda^+(c; h)\|}{h} = 0,$$

donde  $h \rightarrow 0^+$  significa que solo se consideran sucesiones decrecientes con  $h > 0$ . Similarmente,  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$  es *diferenciable por la izquierda* en  $c \in [a, b]$  si existe una transformación lineal  $\lambda^-(c) : [a, b] \rightarrow R^m$ , llamada *derivada por la izquierda* de  $\mathbf{x}$  en  $c$ , tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\|\mathbf{x}(c+h) - \mathbf{x}(c) - \boldsymbol{\lambda}^-(c;h)\|}{|h|} = 0,$$

donde  $h \rightarrow 0^-$  significa que solo se consideran sucesiones crecientes con  $h < 0$ . Un camino es *diferenciable en*  $c \in [a, b]$  si su derivada por la izquierda y por derecha en  $c \in (a, b)$  existen y son iguales, la cual se llama *derivada* de  $\mathbf{x}$  en  $c \in (a, b)$ .

Sea  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  la imagen del camino  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  y  $c \in [a, b]$ . La imagen de las derivadas  $\boldsymbol{\lambda}(c)^+$  y  $\boldsymbol{\lambda}(c)^-$  son la *tangente por la derecha* y la *tangente por la izquierda*, respectivamente, al arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  en  $c \in [a, b]$  (o también, en  $\mathbf{x}(c) \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , si no existe otro  $c' \in [a, b]$  tal que  $\mathbf{x}(c') = \mathbf{x}(c)$ ). El arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se dice *diferenciable por la derecha (izquierda) en*  $c \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  si existe una parametrización de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ , *diferenciable por la derecha (izquierda) en*  $c \in [a, b]$ , donde  $\mathbf{c} = \mathbf{x}(c)$ , y para evitar confusiones no existe otro  $c' \in [a, b]$  tal que  $\mathbf{x}(c') = \mathbf{x}(c)$ . Un arco (camino) es *diferenciable* por la derecha (por la izquierda) si es *diferenciable por la derecha (por la izquierda)* en todos los puntos (de su dominio, respectivamente).

## 2.5 Conos inducidos, funciones $d$ -desviación, lagrangiana, y postlagrangiana

Se define una función de tres variables, llamada función  $d$ -desviación, la cual depende de dos puntos en  $R^n$ , uno “inicial” y el otro “final”, y de una “dirección”, la cual se asocia al punto “inicial”. Esta función se anula únicamente si la “dirección” coincide con la tangente en el punto “inicial” de algún arco inducido que va del punto “inicial” al punto “final”. A partir de esta función se define el cono  $d$ -inducido de un punto “inicial” a otro “final”, con vértice en el primero, como el conjunto de las direcciones en el punto “inicial” de los arcos  $d$ -inducidos que van del punto “inicial” al “final”. Se define también la función lagrangiana asociada a la función distancia, la cual representa el factor por el que hay que multiplicar una unidad de avance en el parámetro del camino para obtener la correspondiente  $d$ -longitud de un segmento de arco en una cierta dirección.

Sea  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  un arco  $d$ -inducido de una función distancia  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ , y  $\mathbf{x}: R^n \rightarrow R$  una representación paramétrica de este arco, la cual es diferenciable por la derecha en  $s \in [a, b]$ . Entonces el subarco  $C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s+h)) \subseteq C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco inducido, el cual, para  $h$  positivo suficientemente pequeño se puede aproximar por un segmento de recta tangente por la derecha al arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  en  $s \in [a, b]$ . En estas condiciones existe una transformación lineal  $\mathbf{v}: [a, b] \rightarrow R^n$ , que es la tangente por la derecha de la función  $\mathbf{x}$  en el punto  $s$ , que en la sección 2.4 se denota por  $\boldsymbol{\lambda}(s)^+$ , tal que para  $h$  positivo suficientemente pequeño se cumple la igualdad del triángulo,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{v}) + d(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 0.$$

Por tanto, si la función distancia  $d$  es *diferenciable en el punto*  $\mathbf{x}$  *con dirección*  $\mathbf{v}$  *y con destino*  $\mathbf{b}$ , en el sentido que existe el límite que define a  $D(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b})$  a través de

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{v}) + d(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{b})}{h},$$

entonces, si existe un arco  $d$ -inducido del punto  $\mathbf{x}$  al punto  $\mathbf{b}$ , el cual es diferenciable por la derecha en  $\mathbf{x}$ , siendo  $\mathbf{v}$  la correspondiente derivada, entonces  $D(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) = 0$ . Si  $D(\mathbf{x}, \cdot, \mathbf{b})$  es una función continua, entonces  $D(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b})$  es una medida de la desviación de  $\mathbf{v}$  respecto de la tangente en  $\mathbf{x}$  a un arco  $d$ -inducido que va de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{b}$ , tomando el valor cero cuando ambas direcciones coinciden.

Para formalizar lo anterior, la *función  $d$ -desviación* de una de función distancia  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$ , es una función  $D : R^n \times R^n \rightarrow R$  dada por

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{v})}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{b})}{h}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{v} \in R^n \times R^n \quad (2.4)$$

o lo que es lo mismo,

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}),$$

donde las funciones  $F : R^n \times R^n \rightarrow R$  y  $G : R^n \times R^n \times R^n \rightarrow R$ , denominadas *función  $d$ -lagrangiana* y *función postlagrangiana*, (de la función distancia  $d$ ), respectivamente, se definen por

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{v})}{h} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{v} \in R^n \quad (2.5)$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{b})}{h} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b} \in R^n \quad (2.6)$$

Por cumplir  $d$  la condición de identidad,  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  es la derivada direccional unilateral de la función  $d$  en  $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  con respecto a  $\mathbf{v}$  (Rockafellar, 1970, p213). El siguiente teorema se refiere a las funciones  $F$ ,  $G$  y  $D$  restringidas a un arco  $C(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ , las cuales se expresan en términos de una parametrización  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$  mediante

$$F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) + \dot{\mathbf{x}}(s)\Delta s)}{\Delta s} \quad (2.7)$$

y similarmente para las otras dos funciones  $G$  y  $D$ .

*Teorema 2.5 (Homogeneidad positiva de las funciones  $F$ ,  $G$  y  $S$ ).* Las funciones  $S$ ,  $F$  y  $G$ , definidas por (2.4)-(2.6), cumplen:

- (a) son homogéneas positivas de grado uno<sup>1</sup> en el segundo argumento.
- (b) los valores  $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))ds$ ,  $G(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{b})ds$  y  $S(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{b})ds$  no dependen de la representación paramétrica de  $\mathbf{x}$ , es decir, son invariantes bajo una transformación de la forma  $s = s(t)$ , con  $ds/dt > 0$

<sup>1</sup> Una función real  $f$  es *homogénea positiva de grado uno* si  $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$  para toda  $\lambda > 0$ .

*Demostración.*

(a) Las funciones  $F$  y  $G$  son funciones homogéneas positivas de grado uno en el segundo argumento, porque para  $\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{v}) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \alpha h \mathbf{v})}{h} = \alpha \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \alpha h \mathbf{v})}{\alpha h} \\ &= \alpha \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \beta \mathbf{v})}{\beta} = \alpha F(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \\ G(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{v}, \mathbf{b}) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x} + \alpha h \mathbf{v}, \mathbf{b})}{h} = \alpha \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x} + \alpha h \mathbf{v}, \mathbf{b})}{\alpha h} \\ &= \alpha \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{b})}{\beta} = \alpha G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Por tanto  $D$  es también homogénea positiva en el segundo argumento.

(b) Por ser  $F$  una función homogénea positivas de grado uno en el segundo argumento,  $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))ds$  es invariante frente a una transformación de la forma  $s = s(t)$ , con  $ds/dt > 0$  (nota:  $ds/dt > 0$  implica que la función  $s(t)$  es invertible y que ambas representaciones del arco tienen el mismo sentido de recorrido):

$$F(\mathbf{x}, d\mathbf{x}(t)/dt)dt = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}ds/dt)dt = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})(ds/dt)dt = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})ds.$$

y similarmente para las funciones  $G$  y  $D$ .

Q.E.D.

El inciso (b) del teorema 2.5 expresa que la función lagrangiana de una función distancia no depende explícitamente del parámetro  $s^2$ .

El siguiente teorema establece que si la función lagrangiana de una función distancia existe y es continua, entonces los arcos  $d$ -inducidos forman un campo de direcciones tal que en cada punto y en cada dirección pasa un arco  $d$ -inducido.

*Teorema 2.6 (Existencia de un arco  $d$ -inducido para cada dirección).* Si la función lagrangiana  $F$  de una función distancia  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  es una función continua sobre una vecindad de  $(\mathbf{a}, \mathbf{v}) \in R^n \times R^n$ , entonces para cada dirección  $\mathbf{v} \in R^n$  existe un arco  $d$ -inducido que parte de  $\mathbf{a}$  con dirección  $\mathbf{v}$ .

*Demostración.*

Por la continuidad de  $F(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ , existe un  $\varepsilon > 0$  tal que sobre la imagen del camino  $\mathbf{x} : [0, \varepsilon] \rightarrow R^n$ , dado por  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{a} + s\mathbf{v}$ ,  $0 \leq s \leq \varepsilon$ , la función  $F$  permanece constante,  $F(\mathbf{x}(s), \mathbf{v}) = F(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ ,  $0 \leq s \leq \varepsilon$ . Por la definición de  $F$  y ser  $F$  integrable en el intervalo  $[0, \varepsilon]$ , la función distancia  $d$  sobre este arco está dada por

$$d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) = \int_s^t F(\mathbf{x}(s'), \dot{\mathbf{x}}(s'))ds' = F(\mathbf{a}, \mathbf{v})(t-s) \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq t \leq \varepsilon.$$

Entonces (2.2) se cumple, y la imagen de  $\mathbf{x}$ , que es un segmento de recta de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{x}(\varepsilon)$ , tiene dirección  $\mathbf{v}$  y es un arco  $d$ -inducido. Q.E.D.

Por el teorema 2.6, si la función lagrangiana de una función distancia existe y es continua en todo su dominio, entonces los arcos  $d$ -inducidos forman un campo de direcciones tal que en cada punto y en cada dirección pasa un arco  $d$ -inducido, y por tanto en cada punto y en cada dirección pasa una  $d$ -geodésica.

---

<sup>2</sup> Esta afirmación no se aplica cuando  $n = 1$  (ver 2.11.2) porque el parámetro de la representación paramétrica de los arcos es también la variable coordenada.



### 2.5.1 Interpretación de las funciones $d$ -desviación, lagrangiana y postlagrangiana

Para interpretar las funciones  $F$ ,  $G$  y  $D$ , considérese un segmento de recta en  $R^n$ ,  $C(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{v})$ , que parte de  $\mathbf{x}$  y termina en  $\mathbf{x} + \mathbf{v}$ , con representación paramétrica  $\mathbf{z}: [0, 1] \rightarrow R^n$ , dada por  $\mathbf{z}(s) = \mathbf{x} + s\mathbf{v}$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , cuya longitud es suficientemente pequeña como para que las funciones  $F$ ,  $G$  y  $S$ , permanezcan constantes a lo largo de dicho segmento. Entonces, para todo  $s \in [0, 1]$  la distancia de  $\mathbf{x}$  al punto  $\mathbf{z}(s)$  vale  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})s$  y la  $d$ -distancia de  $\mathbf{z}(s)$  a  $\mathbf{b}$  vale  $G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b})s$ ; por el inciso (b) del teorema 2.5, estos valores no dependen de la representación paramétrica del camino  $\mathbf{z}$ . Por tanto,  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  y  $G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b})$  son las tasas de cambio de estas distancias por unidad de cambio del parámetro  $s$  del camino en la dirección  $\mathbf{v}$ .

Por tanto, una condición necesaria para que un arco  $C(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  diferenciable por la derecha del punto  $\mathbf{x}$  al punto  $\mathbf{b}$  sea un arco inducido, es que la tangente del arco por la derecha en el punto  $\mathbf{x}$ ,  $\lambda(\mathbf{x})^+$ , cumpla  $D(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x})^+, \mathbf{b}) = 0$ , es decir, que la dirección de  $\lambda(\mathbf{x})^+$  esté contenida en el conjunto

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \{ \mathbf{v} \in R^n \mid S(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) = 0 \}.$$

Por el inciso (b) del teorema 2.5, la función  $d$ -desviación es una función homogénea positiva de grado uno en el segundo argumento, es decir, para todo  $\lambda > 0$  se cumple que  $\mathbf{v} \in K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  implica  $\lambda\mathbf{v} \in K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ , y por tanto  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  es un cono, denominado *cono  $d$ -inducido en  $\mathbf{x} \in R^n$  hacia  $\mathbf{b} \in R^n$* . Se tiene entonces el siguiente teorema.

*Teorema 2.7 (Condiciones para la existencia de arcos  $d$ -inducidos).* Sean  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  una función distancia,  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  una representación paramétrica diferenciable por la derecha del camino  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y  $\lambda(s)^+$  la derivada por la derecha del camino  $\mathbf{x}$  en  $s$ . Entonces:

- (a) Si existe un arco  $d$ -inducido de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{b}$ , entonces el cono  $d$ -inducido en  $\mathbf{x} \in R^n$  hacia  $\mathbf{b} \in R^n$  no es vacío,  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ .
- (b)  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco  $d$ -inducido si y sólo si para todo  $s \in [a, b]$  se cumple cualquiera de las siguientes dos condiciones, las cuales son equivalentes:
  - (i)  $D(\mathbf{x}(s), \lambda(s)^+, \mathbf{b})$  existe y vale cero;
  - (ii)  $\lambda(s)^+ \in K(\mathbf{x}(s), \mathbf{b})$ .

Q.E.D.

Nota:

La función  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  puede no existir para valores específicos de sus argumentos  $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ , aún cuando la función  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{v}\lambda)$  sea continua para  $\lambda \in [0, \infty)$ . Este es el caso de la función  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{v}\lambda) = \lambda \text{sen}(1/\lambda)$  si  $\lambda > 0$ ,  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ , la cual es una función continua en  $\lambda = 0$ , y por tanto sobre el intervalo  $[0, \infty)$  (Sagan, 1974, ejemplo 5, p 85), pero el límite (2.5) que define a  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ,

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\Delta s \text{sen}(1/\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \text{sen}(1/\Delta s),$$

no existe, pues la función  $\text{sen}(1/\Delta s)$  oscila entre  $-1$  y  $+1$ .

### 2.6 $d$ -Longitud de un arco

Una función distancia, cuya función lagrangiana es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (por tanto integrable), determina una

funcional<sup>3</sup> sobre el conjunto de los arcos suaves por pedazos, la cual a cada arco suave por pedazos le asocia un número, denominado  $d$ -longitud del arco. Esta funcional es aditiva respecto de la concatenación de arcos, en el sentido que la  $d$ -longitud de un arco se puede descomponer como la suma de las longitudes de los subarcos que lo componen. Se muestra que la  $d$ -longitud de un arco  $d$ -inducido es igual a la distancia entre sus extremos. Se dan condiciones suficientes para que una función distancia sea completa, es decir, para que induzca al menos un arco para cada par ordenado de puntos.

*Teorema 2.8 (Condiciones para que una función distancia determine una funcional longitud, respecto de la cual la  $d$ -longitud de un arco  $d$ -inducido es igual a la distancia entre sus extremos).* Una función distancia  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  cuya función lagrangiana  $F$  es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (por tanto integrable), determina una funcional sobre el conjunto de los arcos suaves por pedazos,  $\ell_d : \Omega \rightarrow R$ , dada por

$$\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad \forall C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega \quad (2.8)$$

El valor de esta funcional para un arco  $d$ -inducido,  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , es igual a la  $d$ -distancia entre sus extremos,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ .

*Demostración.* Sea una función distancia  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  cuya función lagrangiana  $F : R^n \times R^n \rightarrow R$  dada por (2.5) es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (por tanto integrable). Entonces para cada arco suave por pedazos  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$  la integral (2.8) existe y por (b) del teorema 2.5, el valor  $\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  no depende de su parametrización  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$ . Para demostrar la última afirmación del teorema, sea  $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}(s_0), \mathbf{x}(s_1), \dots, \mathbf{x}(s_{k+1}) = \mathbf{b})$  una partición de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , donde  $s_1, s_2, \dots, s_k \in (a, b)$ ,  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1} = b$ . Si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco  $d$ -inducido, entonces la igualdad (2.3) se cumple para toda partición del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , incluyendo la del paso al límite que define la integral de Riemann:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

Q.E.D.

En el contexto de este teorema la función  $\ell_d : \Omega \rightarrow R$  se denomina *funcional longitud de la función distancia  $d$*  y el valor  $\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  es la  *$d$ -longitud del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$* .

Por la aditividad de la integral de Riemann, para toda partición  $(\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b})$  de un arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$ , la funcional longitud de una función distancia  $d$  cumple la *propiedad de aditividad* respecto de la concatenación de arcos:

$$\ell_d(C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \oplus \dots \oplus C(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})) = \sum_{i=0}^k \ell_d(C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})). \quad (2.9)$$

<sup>3</sup> Una *funcional* es una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

## 2.7 Premétricas, arcos mínimos y ecuaciones de Euler Lagrange

Para que la distancia de un punto a otro sea precisamente la longitud del arco de mínima longitud entre ellos, es necesario y suficiente que la función distancia cumpla la desigualdad del triángulo, es decir, que la función distancia sea una premétrica, y que entre dichos extremos exista un arco inducido por la función distancia. En estas condiciones, los arcos  $d$ -inducidos y los  $d$ -mínimos coinciden. Esta igualdad establece una relación entre la función distancia  $d$  y su función lagrangiana  $F$ , que es precisamente la relación inversa de la ecuación (2.5) que define a la función lagrangiana  $F$  en términos de su  $d$ -distancia. Dicha igualdad permite obtener una premétrica de su función lagrangiana mediante un problema variacional simple, el cual bajo ciertas condiciones puede resolverse mediante las ecuaciones de Euler Lagrange.

El siguiente teorema establece que la desigualdad del triángulo equivale a una condición de subaditividad.

*Teorema 2.9. (La desigualdad del triángulo como una condición de subaditividad)* Una función binaria  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  cumple la desigualdad del triángulo (P2) si y solamente si cumple la propiedad de *subaditividad* siguiente: la  $d$ -distancia  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  ente los puntos extremos de una sucesión  $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}) \in P[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  con inicio  $\mathbf{a}$  y final  $\mathbf{b}$ , es menor o igual que la longitud  $\Lambda(P)$  de la sucesión, es decir,

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \quad \forall P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}) \in P[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad (2.10)$$

o sea,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \Lambda(P)$  para toda  $P \in P[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

*Demostración.* Para  $k = 1$  la igualdad (2.10) expresa la desigualdad del triángulo P1. Ahora se muestra por inducción que la desigualdad del triángulo implica (2.10). Sea  $(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b})$  una partición del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  una representación paramétrica de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Entonces existen  $s_1, s_2, \dots, s_k \in (a, b)$ , tales que  $a = s_0 < s_1 \dots < s_k < s_{k+1} = b$ ,  $k \geq 1$  y  $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}(s_2) = \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}(s_k) = \mathbf{x}_k$ . Supóngase que  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cumple la desigualdad del triángulo P2. Entonces (2.10) para  $k = 1$  (primer paso de la demostración por inducción). Si (2.10) se cumple para toda partición del intervalo  $[a, b]$  de  $k$  puntos localizados arbitrariamente en el intervalo  $(a, b)$ ,  $s_1, s_2, \dots, s_k \in (a, b)$ , donde  $a = s_0 < s_1 \dots < s_k < s_{k+1} = b$ ,  $k \geq 1$ ,  $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}(s_2) = \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}(s_k) = \mathbf{x}_k$ , entonces (2.10) también se cumple si a esta sucesión se le adiciona un nuevo punto dentro del intervalo abierto  $(a, b)$ , digamos  $t \in (s_j, s_{j+1})$ ,  $0 \leq j \leq k$ , pues al despejar  $d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(s_{j+1}))$  de  $d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(s_{j+1})) + d(\mathbf{x}(s_{j+1}), \mathbf{b})$  y aplicar (2.2) dos veces resulta,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(s_{j+1})) &\geq d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}), \mathbf{b}) \geq d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}), \mathbf{b}) \geq \\ &\geq d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(s_{j+1})) + d(\mathbf{x}(s_{j+1}), \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s_{j+1}), \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(s_{j+1})), \end{aligned}$$

y al sustituir  $d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(s_{j+1})) \geq d(\mathbf{x}(s_j), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(s_{j+1}))$  en (2.10) se obtiene lo que se quiere demostrar. Q.E.D.

Un arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$  es un *arco  $d$ -mínimo* de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , si resuelve

$$\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  es una parametrización de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . El correspondiente valor  $\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  es la  $d$ -longitud mínima (de los arcos) de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ .

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para que la  $d$ -distancia entre dos puntos cualesquiera sea igual la correspondiente  $d$ -longitud mínima. Esta igualdad constituye una relación entre  $d$  y  $F$ , que es precisamente la relación inversa de la ecuación (2.5) que define a la función lagrangiana  $F$  en términos de su  $d$ -distancia.

*Teorema 2.10 (Condiciones para que la  $d$ -longitud mínima y la  $d$ -distancia de un punto a otro sean iguales).* Si  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  es una función distancia completa cuya función lagrangiana  $F$  es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (por tanto integrable), entonces las dos siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) la función distancia  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  cumple la desigualdad del triángulo (P2);
- (b) la  $d$ -distancia de un punto  $\mathbf{a}$  a un punto  $\mathbf{b}$  es igual a la  $d$ -longitud mínima de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ :

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n. \quad (2.12)$$

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Supóngase que  $d$  cumple la desigualdad del triángulo (P2) y que  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$  es un arco suave por pedazos con una parametrización  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ . Entonces, por el teorema 2.9, para cualquier partición  $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}) \in P[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se cumple la desigualdad (2.10), y al tomar en cuenta la definición de la integral de Riemann y la definición de  $\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  resulta

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_{i+1})) \leq \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})).$$

Por ser  $d$  completa, existe un arco  $d$ -inducido  $C_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , el cual por el teorema 2.8 cumple  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ . Por tanto  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \leq \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  para todo  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$ , pero como  $C_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$ , resulta (2.12).

(b)  $\Rightarrow$  (a): Por ser  $d$  completa existen arcos  $d$ -inducidos  $C_0(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ ,  $C_0(\mathbf{c}, \mathbf{b})$  y  $C_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , los cuales van de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{c}$ , de  $\mathbf{c}$  a  $\mathbf{b}$  y de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , respectivamente, los cuales por el teorema 2.8 y la igualdad (2.12) resuelven los mínimos

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{c}]}} \int_a^c F(\mathbf{y}(s), \dot{\mathbf{y}}(s)) ds, \quad d(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{c}, \mathbf{b}]}} \int_c^b F(\mathbf{z}(s), \dot{\mathbf{z}}(s)) ds,$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds$$

La concatenación de  $C_0(\mathbf{a}, \mathbf{c})$  y  $C_0(\mathbf{c}, \mathbf{b})$  es un arco  $C_0(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \oplus C_0(\mathbf{c}, \mathbf{b})$  de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , por lo que usando la aditividad de la funcional longitud, expresada por la igualdad (2.9),

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{c}]}} \int_a^c F(\mathbf{y}(s), \dot{\mathbf{y}}(s)) ds + \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{c}, \mathbf{b}]}} \int_c^b F(\mathbf{z}(s), \dot{\mathbf{z}}(s)) ds = \ell_d(C_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})) +$$

$$\ell_d(C_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \ell_d(C_0(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \oplus C_0(\mathbf{c}, \mathbf{b})) \geq \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds = d(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

Q.E.D.

Las condiciones del teorema 2.10 incluyen la continuidad de la función lagrangiana, por lo que del teorema 2.6 resulta que en las condiciones del teorema 2.10 por cada punto de  $R^n$  pasa una  $d$ -geodésica en cada dirección.

El siguiente teorema establece que en una premétrica, no necesariamente completa, los arcos  $d$ -inducidos son arcos  $d$ -mínimos.

*Teorema 2.11 (En una premétrica los arcos  $d$ -inducidos son arcos  $d$ -mínimos).* Si  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  es una premétrica cuya función lagrangiana  $F$  es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (por tanto integrable), y  $\ell_d : \Omega \rightarrow R$  su correspondiente funcional longitud, dada por (2.8), entonces:

- (a)  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$ ,
- (b)  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  si y sólo si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco  $d$ -inducido.
- (c) Un arco es  $d$ -mínimo si y solo si es un arco  $d$ -inducido.

*Demostración.* Sea  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$  es un arco suave por pedazos con una parametrización  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$  y  $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}(s_0), \mathbf{x}(s_1), \dots, \mathbf{x}(s_{k+1}) = \mathbf{b})$  una partición de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , donde  $s_1, s_2, \dots, s_k \in (a, b)$ ,  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1} = b$ .

(a) Por la condición de subaditividad (2.10) de toda premétrica, la aditividad de la integral definida (2.8), donde  $F$  está dada por (2.5), y al tomar en cuenta la definición de la integral de Riemann y la definición de  $\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ , resulta

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_{i+1})) \leq \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})).$$

(b) Si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco  $d$ -inducido, entonces por el teorema 2.2 y la definición de la integral de Riemann las dos desigualdades débiles anteriores se convierten en igualdades, y por tanto  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ . Recíprocamente, si  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ , entonces por la propiedad de aditividad de la funcional  $\ell_d$ , para cualquier partición  $P$  del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se cumple

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C(\mathbf{x}(s_0), \mathbf{x}(s_1)) \oplus \dots \oplus C(\mathbf{x}(s_k), \mathbf{x}(s_{k+1}))) = \sum_{i=0}^k \ell_d(C(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_{i+1}))) = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_{i+1})),$$

donde la última igualdad resulta de que la relación  $>$  no es aceptable porque se viola la desigualdad del triángulo (2.10), y la relación  $<$  tampoco es aceptable porque se viola la desigualdad  $\ell_d(C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})) \geq d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$  de la afirmación del inciso (a) anterior.

(c) Si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  no es un arco  $d$ -mínimo, entonces por el inciso (a),  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \ell_d(C^*(\mathbf{a}, \mathbf{b})) < \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  para algún otro arco  $C^*(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , y por tanto por el inciso (b)  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  no es un arco  $d$ -inducido, lo que demuestra por contradicción que un arco  $d$ -inducido es un arco  $d$ -mínimo. Recíprocamente, un arco  $d$ -mínimo es un arco  $d$ -inducido: Si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco mínimo, es decir, su longitud  $\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  cumple la ecuación (2.12), entonces, por la aditividad de la integral de Riemann respecto a concatenaciones, y porque el mínimo global implica mínimos locales, para toda partición de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se cumple

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds = \sum_{i=0}^k \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\mathbf{x}(s_i)}^{\mathbf{x}(s_{i+1})} F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_{i+1})).$$

Esta igualdad es la condición (2.3) para que el arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  sea un arco  $d$ -inducido.

Q.E.D.

El siguiente teorema establece que una premétrica completa se puede obtener de su función lagrangiana.

*Teorema 2.12 (Obtención de una premétrica completa a partir de una función lagrangiana).* Para que una función  $F: R^n \times R^n \rightarrow R$  determine una premétrica  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  mediante la ecuación (2.12), es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones de los incisos (a)-(c) siguientes, en cuyo caso la premétrica  $d$  es completa:

- (a)  $F(x_1(s), \dots, x_n(s), \dot{x}_1(s), \dots, \dot{x}_n(s))$  es una función homogénea positiva de grado uno en  $\dot{x}_1(s), \dots, \dot{x}_n(s)$ ,
- (b) para todo arco suave,  $F(s)$  es una función integrable
- (c) el mínimo en la ecuación (2.12) existe para todo par de puntos  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$ .

*Demostración.:*

$\Rightarrow$ : Si  $F$  determina a través de (2.12) una premétrica  $d$ , entonces se cumplen los incisos (a)-(c):

(a) Por (b) del teorema 2.5, la integral en (2.12) es independiente de la parametrización de los arcos, y por tanto  $F$  es invariante bajo una transformación de la forma  $s = s(t)$ , con  $ds/dt > 0$ , lo que equivale a que la función  $F(x_1(s), \dots, x_n(s), \dot{x}_1(s), \dots, \dot{x}_n(s))$  es homogénea positiva de grado uno en  $\dot{x}_1(s), \dots, \dot{x}_n(s)$ , es decir,

$$F(x_1(s), \dots, x_n(s), \lambda \dot{x}_1(s), \dots, \lambda \dot{x}_n(s)) = \lambda F(x_1(s), \dots, x_n(s), \dot{x}_1(s), \dots, \dot{x}_n(s)) \quad \forall \lambda > 0,$$

lo cual se deduce del siguiente desarrollo, que es válido para  $n \geq 2$  (para  $n = 1$  ver 2.11.2)

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}) dt &= \int_a^b F(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1 \frac{ds}{dt}, \dots, \dot{x}_n \frac{ds}{dt}) dt = \\ &= \int_a^b F(x_1(s), \dots, x_n(s), \dot{x}_1(s), \dots, \dot{x}_n(s)) \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b F(x_1(s), \dots, x_n(s), \dot{x}_1(s), \dots, \dot{x}_n(s)) ds \end{aligned}$$

(b)-(c)  $F$  determina a través de (2.12) una premétrica  $d$ . Por tanto, para todo par de puntos  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$  la función  $d$  está definida por (2.12), y existe un arco que cumplen los incisos (b) y (c). Además, y la premétrica  $d$  es completa.

$\Leftarrow$ : Si se cumplen los incisos (a)-(c) entonces  $F$  determina a través de (2.12) una premétrica  $d$ , la cual es completa.

Q.E.D.

El problema

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds,$$

se denomina problema variacional simple, el cual bajo ciertas condiciones se resuelve mediante las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales son las  $d$ -geodésicas de la premétrica  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ , las cuales contienen los arcos mínimos que resuelven (2.12). La distancia  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se determina sustituyendo en el integrando de (2.12) una  $d$ -geodésica que va de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , la cual pudiera no ser única.

La definición (2.7) de la función lagrangiana  $F$  restringida al arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $F(s)$ , implica que la función  $F(s)$  depende exclusivamente del parámetro  $s$ , y no de parámetros del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Así, si  $F$  dependiera de la derivada inicial  $\dot{\mathbf{x}}(a)$ , entonces la premétrica  $d$  dada por (2.12) no induciría arcos, pues la función  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  que resuelve el mínimo en (2.12) no cumplirá la condición (2.3), ya que al hacer una partición arbitraria del camino la condición final de cada subarco de la partición no tiene porqué respetar la condición inicial impuesta al siguiente subarco de la partición. Lo anterior se puede ilustrar con ejemplos de braquistócronas (Cap.6).

## 2.8 Obtención de una premétrica a partir de una funcional longitud

Una función distancia puede obtenerse directamente de una funcional longitud como la longitud del arco de longitud mínima entre los puntos considerados. Esta funcional es una función real que cumple ciertas condiciones y cuyo dominio es un conjunto de arcos. El valor de esta función para un arco se llama  $\ell$ -longitud del arco y puede ser negativo. Una funcional longitud tiene asociada una función binaria, llamada también función lagrangiana, la cual especifica la “diferencial longitud” en cada punto para cada dirección.

Una *funcional longitud* es una función  $\ell: \text{Dom } \ell \rightarrow R$  cuyo dominio es un conjunto no vacío de arcos orientados suaves por pedazos en  $R^n$ , tal que a cada arco en su dominio,  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell$ , le asocia un número real,  $\ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ , llamado  $\ell$ -longitud del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , cumpliéndose:

- (a) *Propiedad hereditaria de Dom  $\ell$* : Si  $C(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \subseteq C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell$  entonces  $C(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \in \text{Dom } \ell$
- (b) *Cerradura bajo concatenaciones de Dom  $\ell$* :  $\text{Dom } \ell$  es cerrado bajo la operación de concatenación, es decir,  $C(\mathbf{a}, \mathbf{c}), C(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell$  implica  $C(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \oplus C(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell$ .
- (c) *Propiedad de Aditividad de  $\ell$* : para toda partición  $(\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b})$  de un arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell$ ,

$$\ell(C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \oplus \dots \oplus C(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})) = \sum_{i=0}^k \ell(C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}))$$

- (d) *Continuidad de Dom  $\ell$* : Si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell$ , entonces  $\ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{x}))$  es una función continua en  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .
- (e) *Diferenciabilidad por la derecha de  $\ell$* : Para cada arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}$ , la función  $F: [a, b] \rightarrow R$ , dada por

$$F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\ell(C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) + \dot{\mathbf{x}}(s)\Delta s))}{\Delta s}, \quad \forall s \in [a, b] \quad (2.14)$$

existe, la cual es continua, y acotada por pedazos (integrable), donde  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  es una representación paramétrica de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y  $\dot{\mathbf{x}}(s)$  es la derivada de  $\mathbf{x}$  en  $s$ .

La función  $F(s)$  dada por (2.14) se llama función lagrangiana *de la funcional*  $\ell$  para el arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Es inmediato que el conjunto  $\Omega$  de todos los arcos en  $R^n$  suaves por pedazos es cerrado bajo concatenaciones, y que cada uno de sus elementos cumple la propiedad hereditaria.

Ahora se demuestra por los incisos (a), (c) y (d) que toda funcional  $\ell$  cumple la propiedad de identidad,  $\ell(C(\mathbf{x}, \mathbf{x})) = 0$  para todo  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , donde  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco simple: Sea  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  un arco en el dominio de  $\ell$ , parametrizado por  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ . Para toda partición  $(\mathbf{a}, \mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s + \Delta s), \mathbf{b})$  del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell$ , por las propiedades aditiva y hereditaria de  $\ell$ ,  $\ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{x}(s))) + \ell(C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s + \Delta s))) + \ell(C(\mathbf{x}(s + \Delta s), \mathbf{b}))$ , despejando,  $\ell(C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s + \Delta s))) = \ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) - (\ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{x}(s))) + \ell(C(\mathbf{x}(s + \Delta s), \mathbf{b})))$ . Si  $\Delta s \rightarrow 0$  entonces por la continuidad de  $\ell$  el lado derecho de la última expresión tiende a cero,  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \ell(C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s + \Delta s))) = 0$ , y por tanto para todo  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $\ell(C(\mathbf{x}, \mathbf{x})) = 0$ .

Un *arco mínimo* de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  de una funcional longitud  $\ell$ , o *arco  $\ell$ -mínimo*, es un arco que resuelve  $\min \{ \ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) : C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell \}$ . Una funcional longitud  $\ell(\cdot)$  es una *funcional longitud completa* si para todo par ordenado de puntos  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$  su dominio contiene al menos un arco mínimo suave por pedazos que los une,  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell$ . Los subarcos de un arco mínimo de una funcional longitud completa son también arcos mínimos.

*Teorema 2.13 (Propiedades de la función lagrangiana de una funcional longitud)* Si  $\ell: \text{Dom } \ell \rightarrow R$  es una funcional longitud, entonces su función lagrangiana, dada por (2.14), cumple:

- (a) No depende explícitamente del parámetro  $s$ .
- (b) Es una función homogénea positiva de grado uno en el segundo argumento,  $\dot{\mathbf{x}}(s)$ .
- (c) Si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell \subseteq \Omega_{[a, b]}$  es un arco suave por pedazos, parametrizado por  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ , entonces (2.8).

*Demostración.* Sea  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell$  un arco suave por pedazos parametrizado por  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ . Por tanto  $\dot{\mathbf{x}}(s)$  existe para todo  $s \in [a, b]$  y, por (d) de la definición de funcional longitud,  $\ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{x}))$  es una función continua para toda  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

- (a) En el proceso al límite en (2.14),  $\ell(C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) + \dot{\mathbf{x}}(s)\Delta s))$  depende solamente de puntos en el arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y no del parámetro  $s$ .
- (b) La función  $F$  es homogénea positiva de grado uno porque para  $\lambda > 0$



$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}(s), \lambda \dot{\mathbf{x}}(s)) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\ell(C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) + \lambda \dot{\mathbf{x}}(s) \Delta s))}{\Delta s} = \lambda \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\ell(C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) + \lambda \dot{\mathbf{x}}(s) \Delta s))}{\lambda \Delta s} \\
&= \lambda \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\ell(C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) + \dot{\mathbf{x}}(s) \alpha))}{\alpha} = \lambda F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)).
\end{aligned}$$

(c) Sea una partición del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  dada por  $\mathbf{x}(s_0), \mathbf{x}(s_1), \dots, \mathbf{x}(s_{k+1})$ , donde  $s_1, s_2, \dots, s_k \in (a, b)$  es una sucesión de puntos separados por una distancia constante,  $\Delta s = s_{i+1} - s_i > 0$ , con  $a = s_0 < s_1 \dots < s_k < s_{k+1} = b$ ,  $k > 1$ . Por la aditividad de la funcional  $\ell$ ,

$$\ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \sum_{i=0}^k \ell(C(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_{i+1}))).$$

Considerando que la representación paramétrica  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  es clase  $C^1$  sobre  $[a, b]$ , el arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es suave en el intervalo  $[a, b]$  y existe la función derivada por la derecha,  $\dot{\mathbf{x}}: [a, b) \rightarrow R^n$  dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{x}(s + \Delta s) - \mathbf{x}(s)}{\Delta s}.$$

Por el teorema del valor medio, para cada sección  $(s_i, s_{i+1})$  existe un escalar  $\xi_i (s_i, s_{i+1})$  tal que

$$\dot{\mathbf{x}}(\xi_i) = \frac{\mathbf{x}(s_i + \Delta s) - \mathbf{x}(s_i)}{\Delta s} = \frac{\mathbf{x}(s_{i+1}) - \mathbf{x}(s_i)}{s_{i+1} - s_i},$$

y por tanto  $\mathbf{x}(s_i + \Delta s) = \mathbf{x}(s_i) + \dot{\mathbf{x}}(\xi_i) \Delta s$ . Para  $\Delta s$  suficientemente pequeña, tal que  $\mathbf{x}(s_i) + \dot{\mathbf{x}}(\xi_i) \Delta s \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  para todo  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\ell(C(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_{i+1}))) = \frac{\ell(C(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_i) + \dot{\mathbf{x}}(\xi_i) \Delta s))}{\Delta s} \Delta s.$$

Por ser  $\mathbf{x}$  clase  $C^1$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  es una función continua, y

$$\ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \sum_{i=0}^k \frac{\ell(C(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_i) + \dot{\mathbf{x}}(\xi_i) \Delta s))}{\Delta s} \Delta s,$$

existe. El lado derecho de la igualdad anterior se puede expresar como:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \sum_{i=0}^k \frac{\ell(C(\mathbf{x}(s_i), \mathbf{x}(s_i) + \dot{\mathbf{x}}(s_i) \Delta s))}{\Delta s} \Delta s,$$

y por (2.14)

$$\ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \sum_{i=0}^k F(\mathbf{x}(s_i), \dot{\mathbf{x}}(s_i)) \Delta s.$$

Cuando  $k \rightarrow \infty$  se llega a (2.8),

$$\ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds \quad \forall C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell.$$

Lo anterior se puede extender al caso en que  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  sea suave por pedazos porque debido a la aditividad de la funcional longitud,  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se puede expresar como una concatenación de arcos suaves.

Q.E.D.

Por los incisos (a) y (b) del teorema anterior,  $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds$  y la longitud de cualquier arco son independientes de la parametrización usada, es decir,  $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds$  es invariante frente a una transformación de la forma  $s = s(t)$ , con  $ds/dt > 0$  (nota:

$ds/dt > 0$  implica que la función  $s(t)$  es invertible y que ambas representaciones del arco tienen el mismo sentido de recorrido):

$$F(\mathbf{x}, d\mathbf{x}(t)/dt)dt = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}ds/dt)dt = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})(ds/dt)dt = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})ds.$$

El lado derecho de la ecuación (2.14), el cual define a la función  $F$ , no es una derivada direccional porque  $\Delta s$  tiende a cero “por la derecha”, es decir, se da con  $\Delta s > 0$ , por lo que es una derivada por la derecha del segundo argumento de  $F$  en la dirección  $\dot{\mathbf{x}}$ . Esta observación es importante porque si en (2.14) se sustituyera  $0^+$  por  $0$ , entonces sí resultaría la derivada direccional en el segundo argumento de la función  $F$  en la dirección  $\dot{\mathbf{x}}$ , la cual si existiera cumpliría  $F(\mathbf{x}, \lambda \dot{\mathbf{x}}) = \lambda F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  para todo valor de  $\lambda$ , lo cual no es nuestro caso. En la sección 7.2 se muestra que esta derivada direccional no existe aún en la métrica euclidiana. Algo similar ocurre con la definición de  $\dot{\mathbf{x}}$  debido a que los arcos son dirigidos.

Si en (2.8) la función lagrangiana  $F: R^n \times R^n \rightarrow R$ , determinada por una premétrica  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  a través de (2.5), es una función acotada y continua salvo por un número finito de discontinuidades (y por tanto integrable), entonces para cada arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$  la integral (2.8) existe y, como se puede verificar directamente, la función resultante,  $\ell_d: \Omega \rightarrow R$ , dada por

$$\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{x}(t))) = \int_a^t F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))ds, \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.15)$$

es una funcional longitud, llamada *funcional longitud asociada a la premétrica  $d$* , cuyos arcos  $\ell_d$ -mínimos por comodidad se designan como *arcos  $d$ -mínimos*.

Se recuerda que una premétrica  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  es una premétrica completa si a cada par ordenado de puntos  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$  le asocia al menos un arco inducido  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  suave por pedazos, el cual por el Anexo 3 se puede suponer arco simple.

*Teorema 2.14 (Relaciones de una premétrica con su funcional longitud).* Sean una premétrica  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ , cuya función lagrangiana es acotada, y continuo salvo por un número finito de discontinuidades (y por tanto integrable), y  $\ell_d: \Omega \rightarrow R$  su correspondiente funcional longitud, dada por (2.15). Entonces:

- (a)  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ , para todo  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$ .
- (b)  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  si y sólo si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco  $d$ -inducido.
- (c) Si un arco es  $d$ -inducido entonces es un arco  $d$ -mínimo.
- (d) Si existe un arco  $d$ -inducido del punto  $\mathbf{a}$  al punto  $\mathbf{b}$ , entonces (2.12).
- (e) Si la premétrica  $d$  es completa entonces la funcional longitud  $\ell_d$  es completa.

*Demostración.* Inmediato del teorema 2.11.

Q.E.D.

## 2.9 Propiedades de una premétrica a partir de su función lagrangiana

Las propiedades de uniformidad, isotropía, simetría y antisimetría de una premétrica se pueden establecer en términos de su función lagrangiana.

Sea  $d$  una premétrica clase  $C^1$  y completa en  $R^n$  con  $n \geq 2$ . La premétrica  $d$  es *isótropa* o *anisótropa en un punto  $\mathbf{x} \in R^n$*  según se cumpla  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  para todo

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^n$ , o no, respectivamente. Isotropía significa que  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  no depende de  $\mathbf{v}$ . Una premétrica es isótropa en  $R^n$  si lo es en todos sus puntos, en cuyo caso  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  no depende explícitamente de  $\mathbf{v}$  para toda  $\mathbf{x}$ . Si  $d$  no es isótropa es anisótropa. Es inmediato que una premétrica  $d$  completa es uniforme (invariante bajo traslaciones, propiedad P6, sección 2.1) si y sólo si  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n, \forall \mathbf{v} \in S^n$ , lo cual equivale a que  $F$  no depende de  $\mathbf{x}$ . La siguiente tabla muestra propiedades de  $d$  que se obtienen a partir de su función lagrangiana.

**Tabla 2. Propiedades de una premétrica en términos de su función lagrangiana**

	Si	entonces $d$ es:	invariante bajo:	Ejemplos y referencias
(a)	$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{v})$ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n, \forall \mathbf{v} \in S^n$	Uniforme	traslaciones	Métricas $L_p$ (sección 7.2)
(b)	$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ $\forall \mathbf{x} \in R^n, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^n$	Isotrópica	rotaciones	Métrica euclidiana (sección 7.2)
(c)	$F(\mathbf{x}, -\mathbf{v}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ $\forall \mathbf{x} \in R^n, \forall \mathbf{v} \in S^n$	Simétrica	inversiones de dirección	Métricas $L_p$ (sección 7.2)
(d)	$F(\mathbf{x}, -\mathbf{v}) = -F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ $\forall \mathbf{x} \in R^n, \forall \mathbf{v} \in S^n$	antisimétrica	-----	Premétrica asociada a una función (sección 3.2)

*Demostración:*

(a) Supóngase que  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n, \mathbf{v} \in S^n$  y que  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  es una parametrización del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Entonces para toda  $\mathbf{c} \in R^n$  el arco  $C(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c})$  admite la parametrización  $\mathbf{y}: [a, b] \rightarrow R^n$ , con  $\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(s) + \mathbf{c}$ , teniéndose que  $\dot{\mathbf{y}}(s) = \dot{\mathbf{x}}(s)$ . Por tanto, los integrandos de (2.8) correspondientes a las  $d$ -longitudes de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y  $C(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c})$  son iguales, pues

$$F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) = F(\mathbf{x}(s) + \mathbf{c}, \dot{\mathbf{x}}(s)) = F(\mathbf{y}(s), \dot{\mathbf{y}}(s)),$$

y entonces  $\ell(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \ell(C(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}))$ , y por (2.12),  $d(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

(b) Si  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{x} \in R^n, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^n$ , entonces por (2.5)

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta s) = d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{u}\Delta s), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in S^n, \Delta s > 0 \text{ suficientemente pequeña.}$$

(c) Supóngase que  $F(\mathbf{x}, -\mathbf{v}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in R^n, \forall \mathbf{v} \in S^n$ . Sean  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  y  $\mathbf{y}: [a', b'] \rightarrow R^n$  dos parametrización del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , y sea  $s: [a', b'] \rightarrow [a, b]$  una función real, continua y estrictamente decreciente con rango  $[a, b]$ , tal que  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(s(t))$  para  $t \in [a', b']$ . Entonces los caminos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son parametrizaciones del mismo arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  en direcciones opuestas. Por la regla de la cadena,  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(s(t))ds/dt$ , donde  $ds/dt$  es estrictamente negativa, y por la homogeneidad positiva de grado uno de  $F$  en su segundo argumento,

$$F(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t))dt = F(\mathbf{x}(s(t)), \dot{\mathbf{x}}(s(t))ds/dt)dt = F(\mathbf{x}(s(t)), -\dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds/dt)dt = F(\mathbf{x}(s(t)), -\dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds) = F(\mathbf{x}(s(t)), \dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds).$$

Sustituyendo en (2.8) y puesto que las diferenciales  $ds$  y  $dt$  tienen sentidos opuestos, entonces  $\ell(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{y})$ , y por tanto  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ .

(d) Bajo las mismas consideraciones del inciso anterior, excepto que aquí  $F(\mathbf{x}, -\mathbf{v}) = -F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ,

$$F(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t))dt = F(\mathbf{x}(s(t)), \dot{\mathbf{x}}(s(t))ds / dt)dt = F(\mathbf{x}(s(t)), -\dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds / dt)dt = \\ F(\mathbf{x}(s(t)), -\dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds) = -F(\mathbf{x}(s(t)), \dot{\mathbf{x}}(s(t)))(-ds).$$

Sustituyendo en (2.8) y tomando en cuenta que las diferenciales  $ds$  y  $dt$  tienen sentidos opuestos, resulta  $\ell(\mathbf{x}) = -\ell(\mathbf{y})$ , de donde  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ .

Q.E.D.

### 2.9.1 Premétricas uniformes

Una premétrica uniforme es homogénea positiva de grado uno y entre sus  $d$ -geodésicas se encuentran las líneas rectas. Primero se muestra que las líneas rectas son geodésicas: Si  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{v})$  para todo par de puntos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$  y toda dirección  $\mathbf{v} \in S^n$ , entonces el valor  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  es constante en todos los puntos de una recta que parte de  $\mathbf{x}$  en la dirección  $\mathbf{v}$ . Esta recta se puede expresar en forma paramétrica por  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x} + \mathbf{v}s$ ,  $s \in [0, \infty)$ . Por tanto  $F(\mathbf{x}(s'), \dot{\mathbf{x}}(s')) = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  y la  $d$ -longitud de cualquier segmento  $C(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b))$  contenido en esta recta está dado por

$$\ell(C(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b))) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s'), \dot{\mathbf{x}}(s'))ds' = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})(b - a) \quad \text{para todo } 0 \leq a \leq b,$$

y el segmento de recta  $C(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b))$  cumple (2.3). Por tanto las líneas rectas son  $d$ -geodésicas. Esta demostración, de que en toda premétrica uniforme las líneas rectas son  $d$ -geodésicas, la cual usa la función lagrangiana, es considerablemente más general y breve que la demostración en que se usa la definición original (2.3) de arco inducido (ver 7.2 para el caso de las métricas  $Lp$ ). Ahora se demuestra que toda premétrica uniforme es homogénea positiva (comprar con el teorema 2.4):  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x} + \mathbf{v}s$ ,  $s \in [0, \infty)$  es un arco  $d$ -inducido por la premétrica  $d$ , y por (b) del teorema 2.11,  $d(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)) = \ell(C(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b))) = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})(b - a)$ ; si en  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x} + \mathbf{v}s$  se hace  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , entonces  $d(\mathbf{0}, \lambda\mathbf{x}(s)) = d(\mathbf{0}, \mathbf{x}(\lambda s)) = F(\mathbf{0}, \mathbf{v})\lambda s = \lambda d(\mathbf{0}, \mathbf{x}(s))$ .

### 2.9.2 Premétricas isótropas

Los arcos mínimos de una premétrica están determinados por su función lagrangiana a través de las soluciones de la ecuación variacional (2.12). Bajo ciertas condiciones esta ecuación variacional se puede resolver mediante las ecuaciones de Euler Lagrange (2.13), pero en otras esto no es posible, como es el caso de las premétricas cuya función lagrangiana no depende de  $\dot{\mathbf{x}}$ : Si este es el caso, entonces las ecuaciones de Euler Lagrange (2.13) no llevan a un sistema de ecuaciones diferenciales, sino a un sistema de ecuaciones algebraicas  $\partial F / \partial x_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , el cual carece de las constantes arbitrarias que permiten encontrar una solución que pase por dos puntos determinados. En estos casos  $F(\mathbf{x})$  se puede interpretar como el inverso de la velocidad  $v(\mathbf{x})$  en el punto  $\mathbf{x}$ , y  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  como el tiempo de recorrido de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ . En  $R^2$  y en  $R^3$  el problema es idéntico a encontrar las trayectorias de luz en un medio isótropo, en el que la velocidad de la luz puede depender de la posición pero no de la dirección. Este es un problema de óptica geométrica ampliamente estudiado, por lo que no es considerado en este trabajo. Hay que mencionar que este problema ha sido trasladado al problema de determinar los patrones del movimiento urbano (ver Angel y Hyman, 1976).

### 2.10 Cuasimétricas

Cuando una premétrica es estrictamente positiva, es decir, es una cuasimétrica, entonces es posible determinar si es completa o no sin recurrir a su función lagrangiana.

Además, en caso de ser completa todo arco inducido simple  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se puede extender hacia adelante y hacia atrás mediante  $d$ -esferas ya sea indefinidamente o bien hasta que ambas extensiones se unan formando un arco cerrado.

Una cuasimétrica completa permite definir los siguientes elementos geométricos sobre  $R^n$ , con los cuales se describe más adelante un procedimiento para extender un arco inducido.

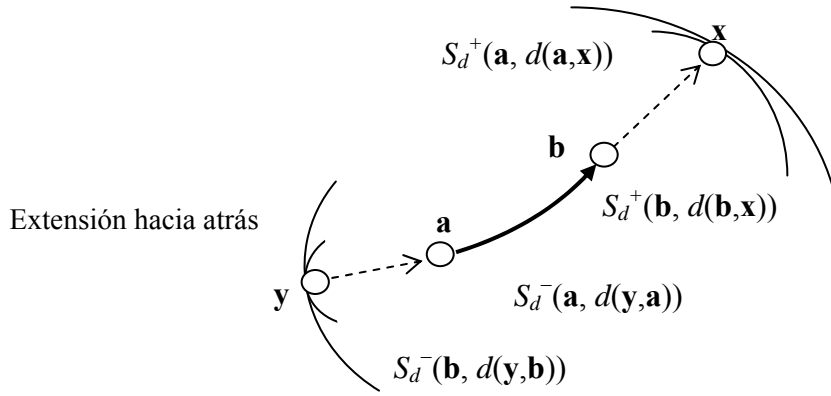
La  $d$ -esfera<sup>+</sup> y la  $d$ -esfera<sup>-</sup> con centro en  $\mathbf{a} \in R^n$  y radio  $r > 0$ , son subconjuntos de  $R^n$  dados por  $S_d^+(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x}: d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = r\}$  y  $S_d^-(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x}: d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = r\}$ , respectivamente.

Estas esferas son la frontera de las  $d$ -bolas abiertas,  $B_d^+(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x}: d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}$  y  $B_d^-(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x}: d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\}$ , respectivamente. Estas bolas contienen a su centro  $\mathbf{a}$ . Puesto que  $d$  es completa, cada una de estas bolas abiertas es conexa (lo es por arcos), y por tanto cada esfera también es conexa para  $n > 1$ , siendo una curva cerrada si  $n = 2$  y una superficie cerrada si  $n = 3$ . Para  $n = 1$  cada esfera está formada por un par de puntos y por tanto no es conexa.

Para extender un arco inducido  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  hasta construir una  $d$ -geodésica que lo contiene se puede seguir el siguiente procedimiento. La desigualdad del triángulo implica que si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco inducido de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{x}$  es un punto del arco inducido extendido hacia adelante, es decir,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ , entonces  $B_d^+(\mathbf{b}, d(\mathbf{b}, \mathbf{x})) \subset B_d^+(\mathbf{a}, d(\mathbf{a}, \mathbf{x}))$ , teniéndose que las fronteras o esferas de estas bolas tienen en común un punto  $\mathbf{x}$  (ver Fig. 1): si  $\mathbf{z} \in B_d^+(\mathbf{b}, d(\mathbf{b}, \mathbf{x}))$  entonces  $d(\mathbf{b}, \mathbf{z}) < d(\mathbf{b}, \mathbf{x})$  y por  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{x})$  resulta  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{z}) < d(\mathbf{a}, \mathbf{x})$  pero por la desigualdad del triángulo  $d(\mathbf{a}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{z})$ , de donde  $d(\mathbf{a}, \mathbf{z}) < d(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ , es decir,  $\mathbf{z} \in B_d^+(\mathbf{a}, d(\mathbf{a}, \mathbf{x}))$ . Similarmente se demuestra que si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco inducido de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{y}$  es un punto del arco inducido extendido hacia atrás, es decir,  $d(\mathbf{y}, \mathbf{a}) + d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{b})$ , entonces  $B_d^-(\mathbf{a}, d(\mathbf{y}, \mathbf{a})) \subset B_d^-(\mathbf{b}, d(\mathbf{y}, \mathbf{b}))$ , teniéndose que las fronteras o esferas de estas bolas tienen en común un punto  $\mathbf{y}$  (ver fig. 1). Es inmediato el siguiente teorema.

*Teorema 2.15 (Dos propiedades de las  $d$ -geodésicas de una cuasimétrica continua y completa).* Si  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  es una cuasimétrica continua y completa, entonces:

- (a) Dado un par ordenado de puntos de  $R^n$  existe al menos una  $d$ -geodésica que contiene un arco  $d$ -inducido que los une;
- (b) Dado un punto de  $R^n$  y una dirección, existe al menos una  $d$ -geodésica que pasa por ese punto en esa dirección. Q.E.D.

Fig 1. Extensión de un arco  $d$ -inducido

### 2.10.1 Caracterización de cuasimétricas completas

*Lema 1. (Parametrización de un arco  $d$ -inducido por una cuasimétrica continua).*

Todo arco simple  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq R^n$  inducido por una cuasimétrica continua  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  se puede parametrizar por la  $d$ -distancia  $d(\mathbf{a}, \mathbf{x})$  del punto inicial del camino,  $\mathbf{a}$ , a cada punto del camino,  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ; este camino  $\mathbf{g}: [0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \rightarrow R^n$  puede no ser único, pero cumple  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{x}$  si y sólo si  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y  $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = t$ , para todo  $t \in [0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$ . Recíprocamente, si  $d$  es una cuasimétrica clase  $C^1$  y  $\mathbf{g}: [0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \rightarrow R^n$  es una función uno a uno clase  $C^1$  que cumple  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ , y  $t + d(\mathbf{g}(t), \mathbf{b}) - d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  para toda  $t \in [0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$ , entonces  $d(\mathbf{a}, \mathbf{g}(t)) = t$  para toda  $t \in [0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$ , y la imagen del camino  $\mathbf{g}$  es un arco simple de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  inducido por  $d$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ : La función, dada por  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{x}$  si y sólo si  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y  $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = t$  para todo  $t \in [0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$ , existe porque de la continuidad de  $d$  y la continuidad del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se deduce que para cada  $t \in [0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$  existe un punto  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  tal que  $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = t$ , el cual es único porque si  $d(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = t$ ,  $\mathbf{y} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , entonces por ser  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  un arco  $d$ -inducido,  $t = d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , por tanto  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , por lo que de la propiedad de definitoreidad se obtiene  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . La función inversa  $\mathbf{g}^{-1}$  existe porque para cada  $\mathbf{x} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  la cantidad  $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = t$  está bien definida, pertenece al dominio de la variable  $t$ ,  $t \in [0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$  (esto por la continuidad de  $d$  y  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ), y además es única, porque si  $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = s$ , es decir,  $\mathbf{g}(s) = \mathbf{x}$ , entonces  $t=s$  porque  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco simple. Por continuidad de  $d$  y del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , la función  $\mathbf{g}$  es continua, y por tanto es una parametrización de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .  $\Leftarrow$ : Por ser las funciones  $d$  y  $g$  clase  $C^1$ , y cumplirse  $d(\mathbf{a}, \mathbf{g}(t)) = t$ , para  $t = 0$ , existe una vecindad de 0,  $(0, s)$ , tal que  $d(\mathbf{a}, \mathbf{g}(t)) = t$ , para todo  $t \in (0, s)$ . Sea ahora  $s = \sup\{t \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{g}(t)) = t\}$ . Si  $s < d(\mathbf{a}, \mathbf{g}(t))$  entonces se viola que las funciones  $d$  y  $g$  son clase  $C^1$  y por tanto  $d(\mathbf{a}, \mathbf{g}(t)) = t$  para toda  $t \in [0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$  y  $\mathbf{g}$  cumple la condición (2.2) de ser un arco inducido.

Q.E.D.

En la demostración de la primera parte de este lema no interviene explícitamente que la premétrica sea no negativa, por lo que se podría pensar en generalizarlo a premétricas que incluyan distancias positivas y negativas. Esto no es posible porque por la continuidad de  $d$  habrá distancias cero entre puntos distintos, violándose la definitoreidad.

El teorema de la función implícita aplicado a nuestra situación se puede enunciar de la siguiente forma (Apostol, 1974, p 374), donde  $D_t f(\mathbf{a}_0, t_0)$  denota la derivada parcial de la función  $f$  con respecto a la variable  $t$  en el punto  $(\mathbf{a}_0, t_0)$ .

*Teorema de la función implícita.* Sea  $f: S \rightarrow R$  con  $S \subseteq R^n \times R$  una función clase  $C^1$  sobre un conjunto abierto  $S$  en  $R^{n+1}$  con valores en  $R$ . Sea  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  un punto en  $S$  para el cual  $f(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ ,  $D_t f(\mathbf{x}_0, t_0) \neq 0$ . Entonces existen un intervalo abierto  $T_0$  conteniendo  $t_0$  y una única función  $\mathbf{g}: T_0 \rightarrow R^n$  tales que:

- a)  $\mathbf{g}$  es clase  $C^1$  sobre  $T_0$ ;
- b)  $\mathbf{g}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ;
- c)  $f(\mathbf{g}(t); t) = 0$  para todo  $t \in T_0$ .

*Teorema 2.16 (Caracterización de las cuasimétricas completas).*  
 Toda cuasimétrica clase  $C^1$  es completa.

*Demostración.* Sea  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  una cuasimétrica clase  $C^1$  y  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$  un par ordenado de puntos. La premétrica  $d$  determina una función  $f: R^{n+1} \rightarrow R$  dada por  $f(\mathbf{x}, t) = t + d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , la cual es clase  $C^1$ . El punto  $(\mathbf{a}, 0)$  cumple las condiciones del teorema de la función implícita:  $f(\mathbf{a}, 0) = 0$ ,  $D_t f(\mathbf{a}, 0) = 1 \neq 0$ . Por tanto existe un intervalo abierto  $T_0$ , con  $0 \in T_0$ , y una función única  $\mathbf{g}: T_0 \rightarrow R^n$ , tal que:

- a)  $\mathbf{g}$  es clase  $C^1$  sobre  $T_0$ ;
- b)  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ ;
- c)  $f(\mathbf{g}(t); t) = 0$  para todo  $t \in T_0$ , es decir,  $t + d(\mathbf{g}(t), \mathbf{b}) - d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  para todo  $t \in T_0$ .

Este intervalo abierto  $T_0$  no es por supuesto único, pero existe uno, que se denota también por  $T_0$ , el cual contiene a  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , pues si no fuera así se llega a una contradicción: por la continuidad de  $\mathbf{g}$  el valor  $\mathbf{g}(\sup T_0)$  está definido, teniéndose que la igualdad  $t + d(\mathbf{g}(t), \mathbf{b}) - d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  se cumple para todo  $t \in T_0$ , pero no se cumple para  $t = \sup T_0$ . Por tanto  $t + d(\mathbf{g}(t), \mathbf{b}) - d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  para todo  $t \in [0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$ , y por el lema anterior la imagen de la función  $\mathbf{g}$  restringida al intervalo  $[0, d(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$  es una representación paramétrica de un arco  $d$ -inducido de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , el cual es único.

Q.E.D.

Observar que en la demostración de este teorema interviene la igualdad del triángulo (2.1) pero no la desigualdad del triángulo. Observar también que la función  $\mathbf{g}$  tiene por imagen no solo el arco que conecta  $\mathbf{a}$  con  $\mathbf{b}$ , sino que podría ser una  $d$ -geodésica que conecta dichos puntos. De esta demostración es inmediata la siguiente afirmación.

*Corolario.* Si  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  es una premétrica estrictamente positiva clase  $C^1$  sobre  $R^n \times R^n$ , entonces (2.1) implica (2.2), es decir, para que un arco sea  $d$ -inducido es suficiente que su representación paramétrica  $\mathbf{x}$  cumpla (2.1).

El ejemplo 7.1 muestra una premétrica no completa que para algunos pares de puntos se cumple (2.1) pero no (2.2), y que aunque es una métrica continua (pero no clase  $C^1$ ) no induce arcos para al menos algunos pares de puntos.

### 2.10.2. Mapas $d$ -isodistancia, $d$ -esferas y ángulo entre arcos inducidos

Un *mapa d-isodistancia* correspondiente a un punto fijo dado, es una representación gráfica de arcos  $d$ -inducidos que parten de (o llegan a) ese punto, así como de las superficies (curvas en el caso  $R^2$ )  $d$ -isodistancia para valores prefijados, generalmente con incrementos constantes. De esta manera se representan en la misma gráfica los arcos inducidos y sus respectivas curvas de nivel en unidades de  $d$ -distancia (tiempo, energía, costo, longitud, etc). Por supuesto que en una misma gráfica se pueden representar mapas isodistancia para distintos puntos fijos.

Sea  $d$  una premétrica completa, continua y estrictamente positiva sobre  $R^n$ . Por tanto, la función sobre  $R^n$   $d(\mathbf{a}, \cdot)$  ( $d(\cdot, \mathbf{a})$ ), con  $\mathbf{a} \in R^n$  fijo, se puede utilizar para la representación paramétrica de los arcos inducidos que parten de (llegan a, respectivamente) el punto fijo  $\mathbf{a} \in R^n$ . En esta representación paramétrica, cada punto  $\mathbf{x} \in R^n$  es la imagen  $\mathbf{x}(d(\mathbf{a}, \mathbf{x}))$  ( $\mathbf{x}(d(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$ ) de un camino  $d$ -inducido simple que inicia (termina) en  $\mathbf{a}$ . Recordando algunas definiciones de la sección 2.10, una ( $d$ -) *esfera*  $^+$  ( $d$ -*esfera*  $^-$ ) con *centro* en  $\mathbf{a} \in R^n$  y *radio*  $r > 0$ , es un subconjunto de  $R^n$  dado por  $S_d^+(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x}: d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = r\}$  ( $S_d^-(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x}: d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = r\}$ , respectivamente). Esta esfera es la frontera de la  $d$ -bola abierta,  $B_d^+(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x}: d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}$  ( $B_d^-(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x}: d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\}$ , respectivamente). Esta(s) bola(s) contiene(n) a su centro  $\mathbf{a}$ . Puesto que  $d$  es completa, cada una de estas bolas abiertas es conexa (lo es por arcos) y por tanto cada esfera también es conexa para  $n > 1$ , siendo una curva cerrada si  $n = 2$  y una superficie cerrada si  $n = 3$ . Para  $n = 1$  cada esfera no es conexa porque está formada por un par de puntos.

Cuando  $n \geq 2$ , el arco inducido por  $d$  que inicia (termina) en  $\mathbf{a}$ , forma un ángulo con el vector normal a cada  $d$ -esfera, que puede ser calculado de acuerdo con el siguiente teorema. El procedimiento es el mismo para esferas  $S_d^+(\mathbf{a}, d(\mathbf{a}, \mathbf{x}))$  y  $S_d^-(\mathbf{a}, d(\mathbf{a}, \mathbf{x}))$ .

*Teorema 2.17 (Ángulo entre arcos inducidos e isodistancias).* Sea  $d$  una premétrica completa clase  $C^1$  casi en todas partes y estrictamente positiva sobre  $R^2$ . Si  $\mathbf{x} \in R^2$  es un punto de la imagen de un camino  $\mathbf{x}$  y  $\hat{\mathbf{n}} \in S^2$  es el vector unitario normal a la  $d$ -esfera en ese punto  $\mathbf{x}$  en el sentido en que  $d$  aumenta, entonces la dirección  $\dot{\mathbf{x}} \in S^2$  del arco inducido de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{x}$  es la que resuelve  $\min\{F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})/(\dot{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}): \dot{\mathbf{x}} \in S^2, (\dot{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \geq 0\}$ , es decir, el ángulo  $\theta$  de llegada del arco inducido con respecto a  $\hat{\mathbf{n}}$  es el que hace mínima la función  $F(\mathbf{x}, \theta)/\cos\theta$ ,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ , donde  $\cdot$  representa producto escalar.

*Demostración.* La continuidad de las primeras derivada parciales de la función  $d$  en el punto  $\mathbf{x} \in R^2$  garantizan que la esfera  $S_d^+(\mathbf{a}, d(\mathbf{a}, \mathbf{x}))$  tiene un hiperplano tangente en  $\mathbf{x}$ , cuyo vector unitario normal se denota por  $\hat{\mathbf{n}} \in S$ . Sea  $\mathbf{x}' \in R^2$  un punto en el arco inducido que inicia en  $\mathbf{a}$  y se dirige a  $\mathbf{x}$ , tan próximo a  $\mathbf{x}$  que el arco inducido de  $\mathbf{x}'$  a  $\mathbf{x}$  se puede considerar un segmento de recta y la  $d$ -esfera se puede aproximar en  $\mathbf{x}$  como el plano tangente. No hay pérdida de generalidad si se considera que el camino está parametrizado por la longitud euclidiana de arco a partir de un cierto punto. La longitud euclidiana de un segmento de recta que va de  $\mathbf{x}'$  a un punto del plano tangente es  $h/\cos\theta$ , donde  $h$  es la distancia de  $\mathbf{x}'$  dicho plano, por lo que la correspondiente  $d$ -longitud es  $F(\mathbf{x}, \theta)/\cos\theta$ ,  $0 \leq \theta < \pi/2$ .

Q.E.D.

Esta demostración se ilustra en la siguiente figura.



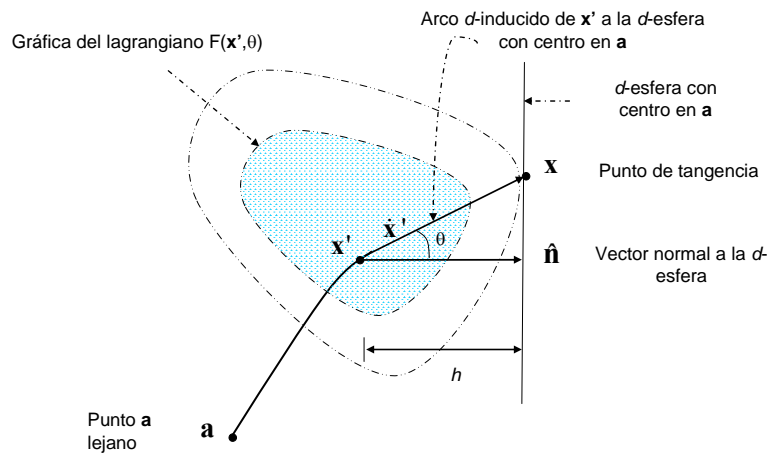


Fig. 2 Ángulo entre un arco  $d$ -inducido y una  $d$ -esfera

*Corolario (Caso isotrópico).* En las condiciones del teorema anterior, en los puntos  $\mathbf{x} \in R^n$  en los que la premétrica  $d$  es isotrópica, los arcos  $d$ -inducidos son ortogonales a las superficies  $d$ -isodistancia.

Si la premétrica  $d$  es isotrópica en todo el espacio, entonces por este corolario los arcos inducidos que parten de (llegan a) un punto son ortogonales a las esferas y por tanto estas determinan totalmente los arcos inducidos por la premétrica.

## 2.11 Modelado de premétricas en $R^2$ y $R$ a partir de su función lagrangiana

Los espacios  $R^2$  y  $R$  son los casos más comunes en el modelado de premétricas y dan bases para construir premétricas en espacios de mayor dimensión.

### 2.11.1 Caso $R^2$

Las coordenadas se denotan por  $x, y$ . Entonces por (2.8), (2.12) y (2.13)

$$\ell(\mathbf{x}) = \int_a^b F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) ds, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{[a, b]} \quad (2.16)$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[a, b]}} \int_a^b F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) ds, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2 \quad (2.17)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.18a)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (2.18b)$$

Aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} \ddot{y}$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} \ddot{y}$$

por lo que las ecuaciones de Euler Lagrange (2.17) adoptan la forma

$$-\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} \ddot{y} = 0, \quad (2.19a)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} \ddot{y} = 0, \quad (2.19b)$$

Considerando que  $F$  es homogénea positiva de grado uno en  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{x}) &= \int_a^b F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) ds = \int_a^b F\left(x, y, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) ds = \int_a^b F\left(x, y, \frac{dx}{dx} \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds}\right) ds \\ &= \int_a^b F\left(x, y, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{dx}\right) \frac{dx}{ds} ds = \int_a^b F(x, y, 1, y') dx \end{aligned}$$

donde  $dx = \dot{x} ds$ . Por tanto en  $R^2$  el argumento de la funcional  $\ell$  es un camino dado por una función  $y(x)$  de la coordenada  $x$ , la cual hace también las veces del parámetro del camino. Omitiendo el 1 en  $F(x, y, 1, y')$ , las igualdades (2.16) y (2.17) se pueden escribir respectivamente como

$$\ell(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{[a, b]} \quad (2.20)$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[a, b]}} \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2 \quad (2.21)$$

y las dos ecuaciones de Euler Lagrange (2.20) se reducen a

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

la cual, al considerar que

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x},$$

se escribe finalmente como

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 0 \quad (2.22)$$

### 2.11.2 Caso $R$

En una dimensión pueden existir únicamente dos  $d$ -geodésicas, las cuales se encuentran sobre el propio eje de la variable, digamos  $x$ . Una  $d$ -geodésica tiene el sentido de recorrido en el que  $x$  aumenta y la otra el sentido en el que  $x$  disminuye. Entonces un arco es simple si y sólo si está contenido en una de las dos  $d$ -geodésicas. No hay pérdida de generalidad si todo arco simple se representa con la propia variable  $x$  como parámetro, y concretamente, si se adopta la convención de que cada camino simple es la función identidad restringida al correspondiente dominio, es decir,  $\mathbf{x}(x) = x$ .

En estas condiciones la función  $F$  en (2.12) tiene la forma  $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ , con  $\dot{\mathbf{x}}(x) \in \{1, -1\}$ , donde 1 corresponde al sentido en que  $x$  aumenta y  $-1$  al sentido en que  $x$  disminuye. La igualdad (2.12), que determina la distancia de  $a$  a  $b$ , toma la forma

$$d(a, b) = \begin{cases} \int_a^b F(x, 1) dx & \text{si } a \leq b, \\ \int_b^a F(x, -1) dx = -\int_a^b F(x, -1) dx & \text{si } b \leq a, \end{cases} \quad \forall a, b \in R \quad (2.23)$$

Para que el resultado de quitarle los ciclos a un arco inducido sea a su vez un arco inducido (corolario teorema 2.2), se requiere que la integral de  $F$  sobre cualquier ciclo sea no negativa, es decir,  $\forall a, b \in R$ , con  $a \leq b$ ,

$$0 \leq \int_a^b F(x, 1) dx + \int_b^a F(x, -1) dx = \int_a^b F(x, 1) dx - \int_a^b F(x, -1) dx = \int_a^b (F(x, 1) - F(x, -1)) dx,$$

lo cual equivale a

$$F(x, 1) - F(x, -1) \geq 0, \quad \forall x \in R \quad (2.24)$$

Esta desigualdad significa que los regresos no conducen a arcos inducidos por la premétrica.

*Teorema 2.18 (Condición necesaria y suficiente para que una función lagrangiana induzca una premétrica en  $R$ ).* La función binaria  $d$  sobre  $R$  definida por (2.23) es una premétrica si y sólo si la función lagrangiana  $F$  cumple (2.24), en cuyo caso la premétrica es completa.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ : Primero se demuestra que si la función  $d$  definida por (2.23) cumple (2.24), entonces cumple la desigualdad del triángulo,  $d(a, c) + d(c, b) - d(a, b) \geq 0$ , para tres puntos cualesquiera  $a, b, c$ . Esto es inmediato para arcos en un solo sentido, es decir, en los que solo interviene uno de los dos funciones lagrangianas,  $F(x, 1)$  para  $a < c < b$  y  $F(x, -1)$  para  $b < c < a$ . En estos casos la desigualdad del triángulo da una igualdad. Si  $a < b < c$  entonces por (2.23)

$$d(a, c) + d(c, b) = \int_a^c F(x, 1) dx - \int_b^c F(x, -1) dx$$

y

$$d(a, b) = \int_a^b F(x, 1) dx = \int_a^c F(x, 1) dx - \int_b^c F(x, 1) dx$$

de donde por las propiedades de las integrales definidas y por (2.24),

$$\begin{aligned} d(a, c) + d(c, b) - d(a, b) &= \int_a^c F(x, 1) dx - \int_b^c F(x, -1) dx - \int_a^c F(x, 1) dx + \int_b^c F(x, 1) dx = \\ &= \int_b^c (F(x, 1) - F(x, -1)) dx \geq 0, \end{aligned}$$

y por tanto se cumple la desigualdad del triángulo. De idéntica forma se demuestra la desigualdad del triángulo para  $c < b < a$ .  $\Leftarrow$ : Recíprocamente, si no se cumple (2.24), entonces existe un intervalo cerrado  $[a, c]$  tal que  $F(x, 1) - F(x, -1) < 0$  para todo

$x \in [a, c]$ . Para  $b \in (a, c)$  se cumple  $a < b < c$ , y es aprovechable el desarrollo anterior, lo que lleva a que se viola la desigualdad del triángulo,

$$d(a, c) + d(c, b) - d(a, b) = \int_b^c (F(x, 1) - F(x, -1)) dx < 0.$$

Por la propiedad aditiva de las integrales definidas, la premétrica dada por (2.23) es completa. Q.E.D.

Si  $F(x, 1)$  y  $F(x, -1)$  son funciones continuas, entonces existen funciones  $e(\cdot, 1)$  y  $e(\cdot, -1)$  sobre  $R$ , únicas salvo constantes aditivas, tales que sus derivadas  $e'(x, 1)$ ,  $e'(x, -1)$  cumplen

$$e'(x, 1) = F(x, 1); \quad e'(x, -1) = F(x, -1), \quad \forall x \in R \quad (2.25)$$

Entonces (2.23) y (2.24) se escriben respectivamente como

$$d(a, b) = e(b, 1) - e(a, 1) \text{ si } a \leq b; \quad d(a, b) = e(b, -1) - e(a, -1) \text{ si } b \leq a, \quad \forall x \in R \quad (2.26)$$

$$e'(x, 1) - e'(x, -1) \geq 0 \quad \forall x \in R \quad (2.27)$$

Directamente se demuestra el siguiente corolario.

*Corolario.* La función distancia dada por (2.26) es una pseudométrica ( $d$  no negativa y simétrica) si y sólo si  $e(x, 1) = -e(x, -1)$  y  $e'(x, 1) \geq 0$  para todo  $x \in R$ , en cuyo caso  $d(a, b) = |e(b, 1) - e(a, 1)|$  para todo  $x \in R$ , y es una métrica si y sólo si además  $e'(x, 1) > 0$  para todo  $x \in R$ . En particular, para  $e(x, 1) = -e(x, -1) = x^n$  con  $n \geq 1$  la correspondiente función distancia  $d(a, b) = |b^n - a^n|$  es una métrica, la cual es uniforme únicamente para  $n = 1$ , que corresponde a la métrica euclidiana en  $R$ .

$F(x, 1)$  y  $-F(x, -1)$  representan la cantidad de recurso gastado por unidad de recorrido en el sentido correspondiente a partir de la posición  $x$ . En particular, si  $d(a, b)$  representa el tiempo para ir de  $a$  a  $b$  con  $a \leq b$  ( $b \leq a$ ), entonces en (2.23) se sustituye  $F(x, 1) = 1/v(x, 1)$  ( $F(x, -1) = -1/v(x, -1)$ ), donde  $v(x, 1) > 0$  ( $v(x, -1) > 0$ ) es la magnitud de la velocidad en el sentido en que  $x$  aumenta (disminuye, respectivamente).

# 3. Geodésicas de combinaciones de premétricas

## 3.1 Geodésicas de una combinación lineal positiva de premétricas

Se demuestra que los arcos que son simultáneamente arcos inducidos de varias premétricas, son también arcos inducidos de cualquier combinación lineal positiva de esas premétricas, propiedad que también se cumple para las geodésicas de las premétricas.

*Teorema 3.1 (Arcos inducidos por una combinación lineal positiva de premétricas).*

Sea una premétrica  $d$  sobre  $R^n$ , definida como una combinación lineal positiva de  $m$  premétricas  $d_1, \dots, d_m$  sobre  $R^n$ ,  $d = k_1 d_1 + \dots + k_m d_m$ , donde  $k_1, \dots, k_m$ , son  $m$  números reales positivos. Entonces todo arco que es arco inducido por todas las premétricas  $d_1, \dots, d_m$ , es también arco inducido por  $d$ . Si las premétricas  $d_1, \dots, d_m$  son no negativas (métricas débiles), entonces todo arco inducido por  $d$  es también un arco inducido por todas las premétricas  $d_1, \dots, d_m$ . Estas afirmaciones se cumplen si se sustituye “arco inducido” por “geodésica”.

*Demostración.* Si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq R^n$  es un arco  $d_i$ -inducido para todo  $i = 1, \dots, m$ , entonces para cualquier representación paramétrica de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ ,  $\mathbf{x}(a) = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x}(b) = \mathbf{b}$  y para toda  $i = 1, \dots, m$  se cumple

$$d_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) + d_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) - d_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{b}) = 0 \quad \forall s \in [a, b] \text{ y } \forall t \in [s, b],$$

por lo que  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es también arco inducido de la premétrica  $d$ :

$$d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) - d(\mathbf{x}(s), \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^m k_i (d_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) + d_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) - d_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{b})) = 0, \\ \forall s \in [a, b] \text{ y } \forall t \in [s, b].$$

Recíprocamente, si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco inducido por la premétrica  $d$ ,

$$\sum_{i=1}^m k_i (d_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) + d_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) - d_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{b})) = 0 \quad \forall s \in [a, b] \text{ y } \forall t \in [s, b],$$

y además las premétricas  $d_1, \dots, d_m$  son no negativas, entonces, como las constantes  $k_1, \dots, k_m$  son positivas,

$$d_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) + d_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) - d_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{b}) = 0 \quad \forall s \in [a, b] \text{ y } \forall t \in [s, b],$$

por lo que  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es también un arco inducido para cada premétrica  $d_1, \dots, d_m$ . Q.E.D.

## 3.2 Premétrica asociada a una función real

Como se mencionó en la sección 2.1, toda función distancia asimétrica se puede descomponer como la suma de dos funciones distancia, una simétrica y otra antisimétrica. La premétrica asociada a una función real que se define a continuación, es una premétrica antisimétrica que tiene la propiedad de que todos los arcos son arcos inducidos. Estas premétricas son una herramienta para modelar funciones distancia asimétricas: Al sumarse una premétrica asociada a una función real con cualquier premétrica, resulta una premétrica asimétrica, la cual es completa si y sólo si la segunda premétrica es completa.

Sea una función real  $h: R^n \rightarrow R$ . La función binaria  $d_h: R^n \times R^n \rightarrow R$  determinada por una función mediante

$$d_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a}) \quad \text{para todo } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n,$$

cumple la desigualdad del triángulo en su forma de igualdad,

$$d_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d_h(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d_h(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \quad \text{para todo } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^n,$$

así como la propiedad de identidad (P2), y por tanto  $d_h$  es una premétrica, denominada *premétrica asociada a la función  $h$* . Esta premétrica es antisimétrica, y como se demuestra directamente, tiene la singularidad de que todo arco, simple o no, que va de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  es un arco inducido por  $d_h$ , es decir, todos los arcos de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  tienen la misma  $d_h$ -longitud. Esta premétrica es completa aún cuando sea una función binaria discontinua. Si la función  $h$  es diferenciable, entonces la función lagrangiana de  $d_h$  es

$$F_h(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d_h(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{h(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta s) - h(\mathbf{x})}{\Delta s} = (\nabla h) \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{x} \in R^n, \dot{\mathbf{x}} \in S^n,$$

donde  $\nabla h$  es el gradiente de la función  $h$  y  $\cdot$  la operación de producto escalar. Por tanto, la longitud con respecto a esta premétrica de cualquier arco  $\mathbf{x}$  con inicio  $\mathbf{a}$  y final  $\mathbf{b}$  está dado por

$$\ell_h(\mathbf{x}) = \int_a^b (\nabla h) \cdot \dot{\mathbf{x}} ds = h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a}) = d_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}$$

lo que confirma que respecto de esta premétrica  $d_h$ , todos los arcos con inicio  $\mathbf{a}$  y final  $\mathbf{b}$  tienen la misma longitud  $h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a})$ .

Esta premétrica  $d_h$  cumple además que si se suma a otra premétrica  $d_F$ , la premétrica suma tiene exactamente las mismas geodésicas que está última,  $d_F$ , como lo expresa el siguiente teorema.

*Teorema 3.2 (Geodésicas de una suma de premétricas).* Sea  $d_F$  una premétrica y  $d_h$  la premétrica asociada a la función  $h: R^n \rightarrow R$ . Entonces las geodésicas de  $d_F$  y las geodésicas de la distancia suma,  $d = d_h + d_F$ , coinciden.

*Demostración.* La premétrica  $d$  se define como la suma de dos premétricas,

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d_F(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \text{para todo } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$$

donde  $d_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a})$  es la premétrica asociada a la función  $h$ , entonces las geodésicas de la premétrica  $d$  coinciden con las de la premétrica del sumando  $d_F$ , pues para cualquier  $s$  se cumple (2.3) en ambos lados de la equivalencia:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= d(\mathbf{a}, \mathbf{x}(s)) + d(\mathbf{x}(s), \mathbf{b}) \Leftrightarrow (h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a})) + d_F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= (h(\mathbf{x}(s)) - h(\mathbf{a})) + d_F(\mathbf{a}, \mathbf{x}(s)) + (h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{x}(s))) + d_F(\mathbf{x}(s), \mathbf{b}) \end{aligned}$$

y similarmente se demuestra (2.2).

Q.E.D.

Observar que si  $d_F$  es una premétrica simétrica y  $h$  no es una función constante, entonces la premétrica suma  $d = d_F + d_h$  no es simétrica, y  $d_F, d_h$  son los componentes simétrico y antisimétrico de  $d$ , respectivamente. Las premétricas que provienen de una función real, son de interés para modelar funciones distancia asimétricas, porque al sumarlas a una premétrica, no alteran las geodésicas de esta.

## 4. Premétricas obtenidas de modelos de deslizamiento sobre superficies

Para modelar una premétrica con interpretación física se puede recurrir a un modelo de la forma (2.12), cuya premétrica puede o no inducir arcos. La expresión (2.12) que define la premétrica puede representar una ley física, en cuyo caso la minimización se cumple necesariamente por ser una ley de la naturaleza. Los siguientes dos ejemplos ilustran esta situación. El primer ejemplo es el de una partícula libre, la cual tiene una dinámica que se puede expresar en la forma (2.12), conocida como principio de mínima acción, donde  $F$  es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial de la partícula, el parámetro  $s$  es el tiempo, y por tanto  $\dot{\mathbf{x}}$  es la velocidad de la partícula. La trayectoria que sigue la partícula está gobernada por las correspondientes ecuaciones de Euler Lagrange (2.13), cuya solución depende de la velocidad inicial de la partícula, razón por la cual se llega a una premétrica que *no* induce arcos. El segundo ejemplo se refiere a la propagación de una onda como la luz, la cual cumple (2.12), donde  $s$  es el tiempo y la función lagrangiana  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  es el recíproco de la velocidad de propagación de la onda en el punto  $\mathbf{x}$  en la dirección  $\mathbf{v}$ . En este caso, la distancia de un punto a otro es el tiempo que le lleva a la onda pasar de un punto a otro. La premétrica obtenida en este caso sí induce arcos, porque si la luz se emite en cualquier punto intermedio  $\mathbf{c}$  de una trayectoria que va de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , entonces el recorrido mínimo de  $\mathbf{c}$  a  $\mathbf{b}$  coincide con el tramo recorrido  $\mathbf{c}-\mathbf{b}$  de la trayectoria original  $\mathbf{a}-\mathbf{c}-\mathbf{b}$ .

En los modelos que se proponen en esta capítulo la expresión (2.12) no representa una ley física, sino que es una “función objetivo” expresada en los siguientes términos: La distancia de un punto a otro es la mínima energía gastada para llevar una partícula de un punto a otro venciendo las fuerzas de gravedad y de fricción, con la restricción de que la partícula permanezca sobre una superficie dada. Se supone que la velocidad de la partícula es suficientemente pequeña como para que la fuerza inercial sea despreciable comparada con las otras dos fuerzas. Entonces, la energía cinética es despreciable respecto de la energía potencial y de la energía disipada por la fricción. Evidentemente, en este caso la partícula no es una partícula libre. Aquí, las premétricas sí inducen caminos, son premétricas completas, donde las soluciones de las ecuaciones de Euler Lagrange (2.13) son geodésicas, formadas por arcos inducidos, cada una de las cuales está determinada por un punto y una dirección (teorema 2.5).

Puesto que el sistema no es conservativo debido a las pérdidas por fricción, la energía total de la partícula y su momento lineal no se conservan. En estos modelos el parámetro  $s$  de los caminos no es el tiempo, y por tanto  $\dot{\mathbf{x}}$  no representa velocidad.

### 4.1 Objeto sujeto a la gravedad deslizándose sobre una superficie

Sea un cuerpo pequeño de masa  $m$  sujeto a la gravedad, que se puede deslizar sobre una superficie dada por  $z=f(x,y)$ , donde  $f$  es una función  $f: R^2 \rightarrow R$  diferenciable. Entre el cuerpo y la superficie hay un coeficiente de fricción  $\mu(x,y, \dot{x}, \dot{y})$  que puede depender del punto  $(x,y)$  y de la dirección  $(\dot{x}, \dot{y})$  del movimiento. Por comodidad, cuando no haya lugar a confusión se podrán omitir los argumentos  $(x,y, \dot{x}, \dot{y})$  en el coeficiente de fricción y simplemente se escribe  $\mu$ . La función distancia para el par ordenado de puntos  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2$  es el trabajo necesario para que el cuerpo pase del punto  $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$  al punto  $(\mathbf{b}, f(\mathbf{b}))$ , deslizándose sobre la superficie, bajo el supuesto de ir a una velocidad

constante, suficientemente pequeña como para que la energía cinética sea despreciable comparada con la energía potencial. Esta suposición es necesaria para que la premétrica dada por (2.12) induzca arcos, los cuales, por definición, cumplirán la propiedad de aditividad (2.3). Si dicho supuesto no se cumple, la propiedad de aditividad (2.3) no se satisface, porque en una partición cualquiera de un arco, la velocidad final de un tramo de esa partición no es igual a la velocidad inicial del siguiente tramo, por lo que las soluciones de (2.13) serían arcos  $d$ -mínimos pero no arcos  $d$ -inducidos.

La fuerza que hace deslizar al cuerpo sobre la superficie  $f$  debe vencer dos fuerzas:

- a) La de la gravedad, la cual va de arriba hacia abajo, con magnitud  $mg$ ; y
- b) La de fricción, con dirección opuesta al deslizamiento y magnitud  $\mu mg \cos\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo que el plano tangente a  $f$  en el punto  $(x, y, f(x, y))$  forma con el plano horizontal.

Puesto que

$$tg\theta = |\nabla f(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \quad \text{y} \quad \cos^2\theta = \frac{1}{1 + tg^2\theta},$$

entonces se puede expresar  $\cos\theta$  en términos de las derivadas parciales de  $f$ ,

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \quad (4.1)$$

Supóngase que el cuerpo pasa del punto  $(x, y, f(x, y))$  al punto  $(x + \Delta x, y + \Delta y, f(x + \Delta x, y + \Delta y))$  deslizándose lentamente sobre la superficie  $f$ , donde  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son arbitrarios pero suficientemente pequeños como para considerar que:

- a) La proyección de la trayectoria del cuerpo sobre el plano horizontal es el segmento rectilíneo de  $(x, y)$  a  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ;
- b) El deslizamiento ocurre sobre el plano tangente a  $f$  a partir del punto  $(x, y, f(x, y))$ ;
- c) El coeficiente de fricción  $\mu(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  es constante en esa trayectoria.

Por tanto es aceptable la aproximación

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

Entonces el cuerpo recorre sobre la superficie  $f$  el segmento lineal que inicia en el punto  $(x, y, f(x, y))$  y termina en el punto

$$\left( x + \Delta x, y + \Delta y, f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right),$$

Este segmento está contenido en el plano tangente en el punto  $(x, y)$  y tiene una longitud  $l$  dada por

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)^2.$$

La cantidad de energía que hay que aplicar al cuerpo para vencer la fuerza de gravedad es,

$$\Delta W_g = mg \Delta f = mg \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)$$

y la que hay que aplicar para vencer la fuerza de fricción es



$$\Delta W_f = \mu m \cos\theta \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Haciendo por comodidad  $mg = 1$  y sustituyendo el valor de  $\cos\theta$  considerando (4.1), la energía total es

$$\Delta W = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \mu \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)^2 \right)^{1/2}$$

Por (2.6) la función lagrangiana  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  está dado por

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\Delta W}{\Delta s},$$

donde  $\Delta s$  es la proyección de  $\Delta l$  sobre el plano horizontal. Es decir,  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  representa el factor por el que hay que multiplicar  $ds$  para obtener la energía  $dW$  requerida para desplazar el cuerpo, una distancia  $ds$  sobre la superficie horizontal, o equivalentemente, una distancia  $dl$  sobre la superficie  $f$ . Entonces  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  viene a ser

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left[ \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Como el parámetro  $s$  es la longitud euclidiana del arco a partir de un punto, entonces  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ , y por tanto,

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ 1 + \left[ \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (4.2)$$

La suma de dos primeros términos del lado derecho de (4.2) es el gradiente de la función  $f$ . Esta función define la premétrica  $d_f$ ,

$$d_f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.3)$$

la cual es una premétrica antisimétrica (ver sección 3.2), que se calcula de inmediato.

El resto de la función lagrangiana, denotada por  $F_\mu$ ,

$$F_\mu(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \mu \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ 1 + \left[ \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right\}^{1/2},$$

es una función homogénea positiva de grado uno en  $\dot{x}, \dot{y}$  que no depende explícitamente de  $s$ , por lo que puede considerarse una función lagrangiana que tiene asociada una premétrica  $d_\mu$ , dada por

$$d_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{x \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} F_\mu(x, y, \dot{x}, \dot{y}) ds, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.4)$$

cuyas geodésicas por el teorema 3.2 coinciden con las de la premétrica suma,  $d_f + d_\mu$ , asociada a la función lagrangiana (4.2), cuya premétrica  $d_F$ , es la suma de dos premétricas independientes, que se calculan por separado, la premétrica  $d_f$  dada por (4.3), más la premétrica  $d_\mu$  dada por (4.4), o sea,

$$d_{\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F_{\mu}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) ds, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.4)$$

$$d_F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d_f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d_{\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.5)$$

La premétrica  $d_{\mu}$  se determina resolviendo (4.4) mediante las ecuaciones de Euler Lagrange.

A continuación se muestra que las ecuaciones de Euler Lagrange correspondientes a (4.4) se reducen a una ecuación diferencial de segundo orden: La igualdad (4.4) se puede escribir como

$$d_{\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b \mu \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left[ \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right\}^{1/2} ds$$

$$d_{\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b \mu \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ 1 + y'^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right\}^{1/2} dx$$

donde  $dx = \dot{x} ds$  y el camino está dado por una función  $y(x)$ . Por tanto (4.4) se puede escribir como

$$d_{\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F_{\mu}(x, y, y') dx, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.6)$$

donde, haciendo explícitos los argumentos de la función  $\mu$ ,

$$F_{\mu}(x, y, y') = \mu(x, y, y') \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ 1 + y'^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.7)$$

La ecuación (4.6) se resuelve a través de la ecuación de Euler Lagrange

$$\frac{\partial F_{\mu}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_{\mu}}{\partial y'} = 0,$$

la cual, al considerar la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F_{\mu}}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F_{\mu}}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F_{\mu}}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F_{\mu}}{\partial y' \partial x}$$

se escribe finalmente como:

$$-\frac{\partial F_{\mu}}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_{\mu}}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F_{\mu}}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F_{\mu}}{\partial y' \partial x} = 0 \quad (4.8)$$

Debido a la presencia del término antisimétrico  $d_f$ , la función distancia  $d_F$  en general no es simétrica.

## 4.2 Objeto deslizando sobre una superficie sin considerar la gravedad

Si la longitud de un arco cualquiera sobre el plano horizontal es igual a la longitud euclidiana de la elevación de este arco sobre la superficie  $f$ , afectada por un coeficiente "de fricción"  $\mu(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ , que representa la dificultad para moverse del punto  $(x, y)$  en la dirección  $(\dot{x}, \dot{y})$ , entonces la función lagrangiana en (2.16) está dada por

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \mu(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \left[ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left[ \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right]^{1/2}. \quad (4.9)$$

A esta igualdad se llega también considerando que la ausencia de gravedad hace que en (4.2) el gradiente  $\dot{x} \partial f / \partial x + \dot{y} \partial f / \partial y$  esté multiplicado por cero y que el factor  $(1 + (\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2)^{-1/2}$  (que vale  $\cos\theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo de inclinación del plano tangente) no debe afectar la función lagrangiana, por lo que debe eliminarse, o equivalentemente, considerarse constante e igual a 1. Haciendo la sustitución de  $ds$  por  $dx/\dot{x}$  que condujo a (4.9), se obtiene la ecuación de Euler Lagrange del problema,

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 0, \quad (4.10)$$

donde

$$F(x, y, y') = \mu(x, y, y') \left[ 1 + y'^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right]^{1/2} \quad (4.11)$$

# 5. Modelos de deslizamiento sobre superficies

Se determinan diversas premétricas a partir de modelos de deslizamiento sobre superficies, y para cada una de ellas se especifica:

a) Aquellas propiedades P3- P7 que cumple la premétrica, así como su clasificación dentro de la tabla 1;

b) Si es completa o no, y en caso afirmativo su función lagrangiana y las respectivas geodésicas.

## 5.1 Plano inclinado en presencia de gravedad y fricción constante

En este caso la función  $f$  es un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con el plano horizontal,  $0 \leq \theta < \pi/2$ , y el coeficiente de fricción  $\mu$  se considera constante. Por comodidad, el eje  $X$  se sitúa perpendicular al vector gradiente. Entonces en (4.2)

$$\partial f / \partial x = 0, \partial f / \partial y = tg\theta \text{ (constante)}, \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$$

$$\begin{aligned} F(x,y, \dot{x}, \dot{y}) &= \dot{y} tg\theta + \mu(1 + tg^2\theta)^{-1/2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{y} tg\theta)^2]^{1/2} \\ &= \dot{y} tg\theta + \mu \cos\theta [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{y} tg\theta)^2]^{1/2} \\ &= \dot{y} tg\theta + \mu \cos\theta [\dot{x}^2 + \dot{y}^2(1 + tg^2\theta)]^{1/2} \end{aligned}$$

y finalmente

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = F_f + F_\mu = \dot{y} \tan \theta + \mu(\dot{x}^2 \cos^2 \theta + \dot{y}^2)^{1/2}, \quad (5.1)$$

donde  $F_\mu(x, y, \dot{x}, \dot{y}) ds = \mu(\dot{x}^2 \cos^2 \theta + \dot{y}^2)^{1/2} ds$ , que en términos de  $(x, y, y')$ , se llega a  $F_\mu(x, y, y') dx = \mu(\cos^2 \theta + y'^2)^{1/2} dx$ , y la ecuación de Euler Lagrange correspondiente a la función lagrangiana

$$F_\mu(x, y, y') = \mu(\cos^2 \theta + y'^2)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \quad (5.2)$$

es

$$-\frac{\partial F_\mu}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y' \partial x} = 0 \quad (5.3)$$

Las geodésicas que resuelven esta ecuación son líneas rectas, y por el teorema 3.2 también son líneas rectas las geodésicas correspondientes a la función lagrangiana total  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ . De estas geodésicas la que pasa por los puntos  $(a, b)$  y  $(x, y)$  es la recta que los une, y por tanto  $\dot{x} = (x - a) / l$ ,  $\dot{y} = (y - b) / l$ , donde  $l = ((x - a)^2 + (y - b)^2)^{1/2}$  es la distancia euclidiana entre estos dos puntos sobre el plano horizontal. Sustituyendo  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  en (5.1) e integrando a lo largo de la geodésica que une  $(a, b)$  con  $(x, y)$ ,

$$d_F((a, b), (x, y)) = \int_0^l \left( \frac{\tan \theta (y - b)}{l} + \mu \left[ \left( \frac{x - a}{l} \right)^2 \cos^2 \theta + \left( \frac{y - b}{l} \right)^2 \right]^{1/2} \right) ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\tan \theta (y-b)}{l} + \mu \left[ \left( \frac{x-a}{l} \right)^2 \cos^2 \theta + \left( \frac{y-b}{l} \right)^2 \right]^{1/2} \right) l \\
&= \tan \theta (y-b) + \mu \left[ (x-a)^2 \cos^2 \theta + (y-b)^2 \right]^{1/2},
\end{aligned}$$

donde  $d_F((a,b),(x,y))$  es la premétrica o función distancia buscada, la cual coincide con Hodgson (1987).

La premétrica obtenida no es simétrica por la presencia del término antisimétrico  $\tan \theta (y-b)$  y es uniforme (P6). Si  $\tan \theta > \mu$ , entonces se presentan distancias negativas: para  $x = a, b > y$  se tiene

$$d_F((a,b),(x,y)) = \tan \theta (y-b) + \mu |y-b| = (y-b)(\tan \theta - \mu) < 0.$$

Por tanto en este caso la premétrica  $d_F$  viola la no negatividad (P3) y la definitoreidad (P5), siendo entonces una premétrica uniforme que no llega a ser métrica débil. Si  $\tan \theta \leq \mu$ ,  $d_F$  es una métrica débil (no negativa) que cumple definitoreidad.

Aplicando (2.6) a esta premétrica se puede reencontrar la función lagrangiana (5.1):

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\tan \theta (\dot{y} \Delta s) + \mu \left[ (\dot{x} \Delta s)^2 \cos^2 \theta + (\dot{y} \Delta s)^2 \right]}{\Delta s} \\
&= \dot{y} \tan \theta + \mu \left[ \dot{x}^2 \cos^2 \theta + \dot{y}^2 \right]^{1/2},
\end{aligned}$$

que es la ecuación (5.1).

## 5.2 Media esfera en presencia de gravedad y fricción constante

Se considera primero el caso de una media esfera en ausencia de gravedad, y al final se incluye una premétrica que representa el efecto de la gravedad.

Sea una media esfera de radio  $r$ ,  $f(x,y) = (r^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$  cuyo dominio es el disco abierto  $x^2 + y^2 < r^2$ . Por tanto, la función lagrangiana (4.11) se escribe como:

$$F(x, y, y') = [1 + y'^2 + (r^2 - x^2 - y^2)^{-1} (x + y y')^2]^{1/2}.$$

Al resolver la correspondiente ecuación de Euler Lagrange,

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 0$$

resulta que cada geodésica sobre el disco abierto  $x^2 + y^2 < r^2$  es la proyección sobre este de una geodésica en la esfera, la cual como se sabe es un círculo de radio máximo, en este caso radio  $r$ . Por tanto, la geodésica que pasa por dos puntos  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  en el disco abierto  $x^2 + y^2 < r^2$  es la proyección sobre el disco de la geodésica en la media esfera que pasa por los puntos  $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$  y  $(\mathbf{b}, f(\mathbf{b}))$ , y la distancia entre ellos es la longitud del arco de esfera que une tales puntos. Para determinar la ecuación de estas geodésicas, sea  $(x_1, y_1)$  un punto en el disco y por tanto  $z = \sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2}$  la coordenada  $Z$  del correspondiente punto sobre la media esfera. Los vectores  $(x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$  ortogonales al vector  $(x_1, y_1, \sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2})$  forman una geodésica en la esfera y por tanto sus proyecciones  $(x, y)$  forman una geodésica en el disco:

$$x_1x + y_1y + \sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = 0,$$

por lo que al dividir entre  $\sqrt{r^2 - x_1^2 - y_1^2}$  resultan circunferencias deformadas por un término lineal (ver Fig. 3),

$$\alpha x + \beta y + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = 0$$

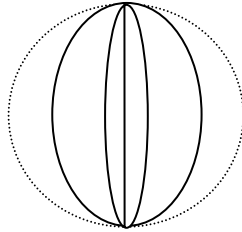


Fig. 3 Geodésicas sobre el disco abierto

Si  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  entonces la longitud del arco sobre la esfera que une  $(a_1, a_2, \sqrt{r^2 - a_1^2 - a_2^2})$  con  $(b_1, b_2, \sqrt{r^2 - b_1^2 - b_2^2})$ , es  $r\theta$ , donde  $\theta$  está determinada por el producto escalar de los vectores  $(a_1, a_2, \sqrt{r^2 - a_1^2 - a_2^2})$  y  $(b_1, b_2, \sqrt{r^2 - b_1^2 - b_2^2})$ ,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \sqrt{r^2 - a_1^2 - a_2^2} \sqrt{r^2 - b_1^2 - b_2^2} = r^2 \cos\theta,$$

es decir,

$$\theta = \arccos\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \sqrt{r^2 - a_1^2 - a_2^2} \sqrt{r^2 - b_1^2 - b_2^2}}{r^2}\right),$$

y por tanto, la premétrica es:

$$d_F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = r \arccos\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \sqrt{r^2 - a_1^2 - a_2^2} \sqrt{r^2 - b_1^2 - b_2^2}}{r^2}\right).$$

Esta función distancia cumple la desigualdad del triángulo porque si se consideran tres puntos sobre la media esfera,  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{c}'$ , y  $\theta_{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}$ ,  $\theta_{\mathbf{b}'\mathbf{c}'}$ ,  $\theta_{\mathbf{a}'\mathbf{c}'}$ , son los ángulos que forman los correspondientes radios, entonces  $\theta_{\mathbf{a}'\mathbf{b}'} + \theta_{\mathbf{b}'\mathbf{c}'} \geq \theta_{\mathbf{a}'\mathbf{c}'}$ . Además cumple P3, P4 y P5, y por tanto  $d$  es una métrica. Sin embargo, esta métrica no es uniforme: para  $r = 1$ ,  $d((0,0),(0,0.8)) = .93 \neq d((0.5,0),(0.5,0.8)) = 1.003$ .

Por el teorema 3.2 a la premétrica  $d_F$  se le puede adicionar una premétrica derivada de una función, resultando una función distancia

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a}) + r \arccos\left(\frac{(a_1b_1 + a_2b_2 + \sqrt{r^2 - a_1^2 - a_2^2} \sqrt{r^2 - b_1^2 - b_2^2})}{r^2}\right)$$

Si para determinados valores de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  el término  $h(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a})$  es negativo y supera al término  $r \arccos[(a_1b_1 + a_2b_2 + \sqrt{r^2 - a_1^2 - a_2^2} \sqrt{r^2 - b_1^2 - b_2^2})/r^2]$ , entonces esta función distancia es una premétrica en un sentido estricto porque viola no negatividad, la simetría y la definitividad.

## 6. Braquistócronas sobre $R^2$

Se formulan cuatro funciones distancia sobre el semiplano cerrado que se encuentra abajo de un nivel de referencia, al que se le asigna ordenada cero. En todos los casos la  $d$ -distancia  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de un punto  $\mathbf{a}$  a un punto  $\mathbf{b}$  que se encuentra abajo de  $\mathbf{a}$ , es el tiempo necesario para que una partícula vaya de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  por la acción de la gravedad sin fricción, siguiendo una trayectoria de mínimo tiempo. Si el punto  $\mathbf{b}$  se encuentra arriba o a la misma altura que  $\mathbf{a}$ , entonces  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es una cantidad  $M$  mayor que la mayor de las distancias  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de interés. Las funciones distancia difieren en la asignación de las velocidades iniciales y en la ausencia o presencia de fuerzas viscosas. Las cuatro funciones distancia resultan ser premétricas asimétricas, no negativas (P3) que cumplen la propiedad de definitoreidad (P5), por lo que se trata de cuasimétricas. La primera y la tercera resultan premétricas uniformes que no inducen arcos, la segunda una premétrica no uniforme que induce arcos, y la cuarta una premétrica uniforme que también induce arcos.

En las dos primeras funciones distancia (secciones 6.1 y 6.2, respectivamente) se supone que la partícula se mueve en el vacío y que la velocidad inicial es cero. En la primera premétrica esta velocidad cero ocurre en el punto inicial del arco,  $\mathbf{a}$  (Fig. 4.1). En la segunda premétrica la velocidad cero ocurre en un punto  $\mathbf{o}$  con ordenada cero, tal que la duración del recorrido  $\mathbf{o}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$  es de mínimo tiempo (Fig. 4.2), lo cual equivale a que el recorrido  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$  también es de mínimo tiempo. Por el principio de la conservación de la energía, esto último equivale a que la velocidad de la partícula en  $\mathbf{a}$ , es la velocidad de la partícula en caída libre desde un punto  $\mathbf{o}$  de ordenada cero. Ambas funciones distancia resultan ser premétricas, de las cuales solo la segunda induce arcos.

En la tercera función distancia (sección, 6.3) la partícula parte con velocidad cero en el punto inicial del arco,  $\mathbf{a}$ , como en la primera premétrica, solo que ahora los movimientos de la partícula ocurren en un medio viscoso. Resulta una premétrica que no induce arcos. Las correspondientes ecuaciones dinámicas muestran que cada dirección de descenso tiene asociada una cierta velocidad, llamada velocidad estacionaria, porque ella se mantiene constante a lo largo de esa dirección.

La cuarta y última función distancia (sección, 6.4) resulta de observar que al considerar en la premétrica anterior pares de puntos muy alejados, los tiempos de recorrido pueden ser tan grandes que se puede desprestigiar el tiempo que la partícula tarda en alcanzar la velocidad estacionaria. En tal caso se puede suponer que la partícula viaja todo el tiempo a la velocidad estacionaria. Esta aproximación lleva a definir una premétrica que sí induce caminos: los movimientos de la partícula ocurren en un medio viscoso y la velocidad inicial en vez de cero es la velocidad estacionaria que corresponde a la dirección inicial. Los arcos inducidos de esta premétrica son todos los segmentos de recta no horizontales con dirección descendente.

En todas las funciones distancia se considera un sistema cartesiano de coordenadas con un eje horizontal  $X$  y un eje vertical  $Y$ , que por comodidad apunta hacia abajo (Fig.4).

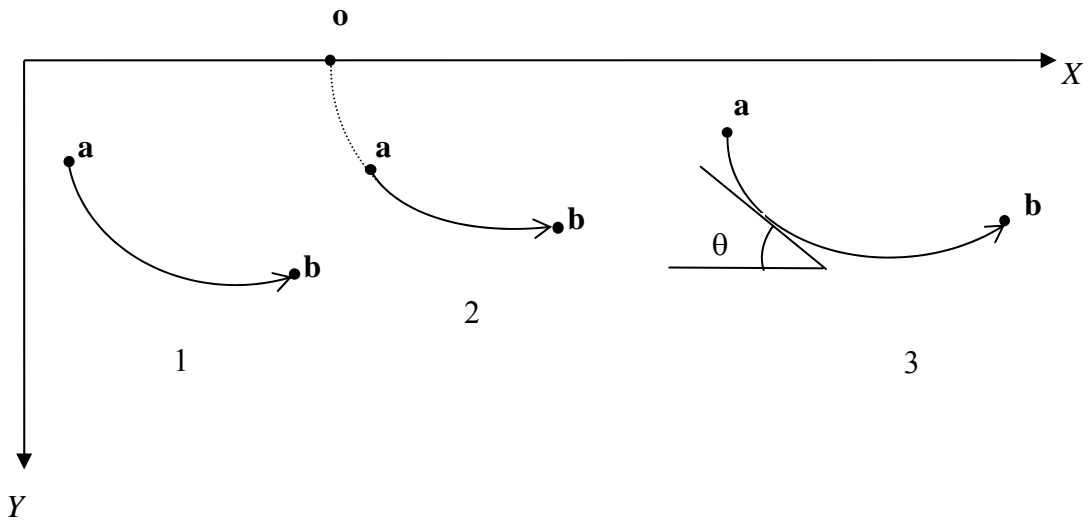


Fig. 4 Braquistócronas

Respecto de este sistema de coordenadas sea  $y = f(x)$  es una función con derivadas continuas que une los puntos **a**, **b**,

$$y(a_1) = a_2, \quad y(b_1) = b_2$$

y  $s$  la distancia sobre  $y = f(x)$  medida a partir de **a**. La velocidad de la partícula está dada por

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

donde  $t$  representa el tiempo.

El tiempo para que una partícula vaya de **a** a **b** por la acción de la gravedad, siguiendo la curva  $y = f(x)$  es

$$\int_a^b \frac{ds}{v(s)}$$

donde  $v(s)$  es la velocidad de la partícula en la posición  $s$  del arco, la cual debe cumplir las ecuaciones dinámicas del caso. La función distancia se define entonces como

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{y \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b \frac{ds}{v(s)}, \quad 0 \leq a_2 < b_2 \quad (6.1)$$

### 6.1 Braquistócrona que no induce arcos

La función distancia  $d$  se define de la siguiente manera: Si el punto **b** se encuentra abajo del punto **a**, entonces  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es el tiempo que transcurre desde que una partícula de masa  $m$  partiendo del reposo en el punto **a** y por la acción de la gravedad desciende sobre la trayectoria de mínimo tiempo hasta llegar al punto **b**. Por hipótesis, el movimiento ocurre en el vacío y sin fricción, y por tanto se aplica el principio de la conservación de la energía,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y - a_2),$$

donde se supone que  $y > a_2$  y que en **a** la velocidad inicial es cero,  $v(\mathbf{a}) = 0$ . Por tanto



$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y - a_2)},$$

y

$$t = \int_a^b \frac{ds}{v(s)} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)} dx}{\sqrt{2g(y - a_2)}},$$

y por tanto

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{y \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)} dx}{\sqrt{2g(y - a_2)}}.$$

Se demuestra que la trayectoria de mínimo tiempo que va de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  es la cicloide

$$x = \frac{r}{2}(\theta - \sin\theta) - a_1,$$

$$y = \frac{r}{2}(\theta - \cos\theta) - a_2,$$

donde  $r$  es el radio del círculo generador que rueda sin deslizarse sobre la recta horizontal que pasa por  $\mathbf{a}$ , y  $\theta$  el ángulo de rotación de este círculo correspondiente al punto  $(x, y)$  de la cicloide. Si  $\beta$  es el ángulo de rotación del círculo generador correspondiente al punto  $\mathbf{b}$ , entonces los parámetros  $r$  y  $\beta$  se encuentran resolviendo

$$r(\beta - \sin\beta) = 2(b_1 - a_1),$$

$$r(\beta - \cos\beta) = 2(b_2 - a_2).$$

El tiempo de recorrido de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ ,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , está dado por (Smith, 1998, p 129)

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\frac{r}{2g}} \beta. \quad (6.2)$$

La función lagrangiana depende de la ordenada  $a_2$  del punto inicial, y por tanto se puede asegurar que  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es una premétrica que no induce arcos (sección 2.9). Para que esta premétrica indujera arcos se requeriría que al detener la partícula en cualquier punto de su trayectoria de mínimo tiempo, y se dejara continuar hacia el mismo destino con velocidad inicial cero, el arco de mínimo tiempo coincidiría con la continuación del arco interrumpido, lo cual no se cumple.

## 6.2 Braquistócrona que induce arcos

La dependencia lineal de la premétrica  $d$  respecto del ángulo  $\beta$ , mostrada en la ecuación (6.2), sugiere que si en la función distancia anterior se modifica el punto en el que la velocidad inicial es cero, siendo ahora aquél punto  $\mathbf{o}$  con ordenada cero cuya cicloide de mínimo tiempo de  $\mathbf{o}$  a  $\mathbf{b}$  pase también por  $\mathbf{a}$  (Fig. 4.2), entonces la nueva premétrica sí induce caminos. Esta modificación equivale a que la velocidad inicial en el punto  $\mathbf{a}$  no es cero, sino la que corresponde a una caída libre desde la altura 0.

Un razonamiento similar al de la sección anterior lleva a que la velocidad  $v$  de la partícula y su ordenada  $y$  están relacionados por

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

obteniéndose

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{y \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gy}} dx$$

y

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\frac{r}{2g}} (\theta_b - \theta_a) \quad (6.3)$$

donde  $\theta_a$  y  $\theta_b$  son los ángulos de rotación del círculo generador de la cicloide  $\mathbf{o-a-b}$ , correspondientes a los puntos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , respectivamente.

Por su forma lineal, la premétrica dada por la ecuación (6.3) sí induce arcos, los cuales son las cicloides que inician en la horizontal  $\mathbf{o}$  con ordenada cero (Fig. 4.2). La función lagrangiana no depende de parámetros del arco, por lo que esta premétrica induce arcos para cada par de puntos en el orden apropiado (sección 2.9). Esto también se explica porque por el principio de la conservación de la energía, la velocidad en cada punto está totalmente determinada por su ordenada.

### 6.3 Braquistócrona en un medio viscoso que no induce arcos

Sea una partícula de masa  $m$  en un medio viscoso que desciende bajo la acción de la gravedad a lo largo de una trayectoria  $y = f(x)$ . Entonces por la segunda ley de Newton

$$m \frac{dv}{dt} = mkv(t) - mg \sin \theta(t)$$

donde  $v(t)$  es la velocidad de la partícula al tiempo  $t$ ,  $\theta(t)$  el ángulo de descenso al tiempo  $t$  respecto de la horizontal (Fig.4.3),  $mkv(t)$  la fuerza viscosa, y  $mg \cos \theta(t)$  la componente tangencial de la fuerza de gravedad. Considerando que  $y' = \tan \theta$  y que  $x$  denota la coordenada horizontal de la partícula, las ecuaciones de movimiento de la partícula son

$$\frac{dv}{dt} = -kv(t) + g \frac{y'(x)}{\sqrt{y'^2(x) + 1}}$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \frac{1}{\sqrt{y'^2(x) + 1}}$$

donde la última igualdad resulta de que  $v(t) \cos \theta(t)$  es la componente horizontal de la velocidad de la partícula.

Este sistema tiene la característica de que para cada ángulo de descenso  $\theta$  existe una velocidad  $v(\theta)$ , llamada *velocidad estacionaria* para el ángulo  $\theta$ , la cual se mantiene constante mientras el ángulo de descenso  $\theta$  se mantenga constante: La velocidad

$$v(\theta) = \frac{g}{k} \frac{y'(x)}{\sqrt{y'^2(x) + 1}} = \frac{g}{k} \sin \theta = v_0 \sin \theta$$

implica que  $dv/dt = 0$ , donde  $v_0 = v(\pi/2) = g/k$  es la velocidad estacionaria para caída libre.

La premétrica  $d$  se define como sigue. Si el punto  $\mathbf{b}$  se encuentra debajo de  $\mathbf{a}$ , entonces  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  está dada por aquella función  $y = f(x)$  que resuelve la ecuación (6.1) con las restricciones

$$\dot{v}(s) = -k + \frac{g}{v(s)} \frac{y'(x)}{\sqrt{y'^2(x) + 1}}$$

$$\dot{x}(s) = \frac{1}{\sqrt{y'^2(x) + 1}}$$

Estas restricciones resultan de expresar las ecuaciones dinámicas no en términos del tiempo  $t$  sino en términos de la longitud euclidiana  $s$  del arco, través de las identidades

$$\dot{v} = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dt}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} \frac{dx}{dt}$$

La solución de este problema de cálculo de variaciones se sale de los intereses de este trabajo.

#### 6.4 Braquistócrona en un medio viscoso que induce arcos

Considérese ahora una modificación de la premétrica anterior, consistente en suponer que la partícula desciende en cada instante a la velocidad estacionaria que corresponde al ángulo de descenso en ese momento. Por tanto, el tiempo de recorrido de un punto  $\mathbf{a}$  a un punto  $\mathbf{b}$  debajo de  $\mathbf{a}$  es

$$\int_a^b \frac{ds}{v_0 \sin \theta(s)} = \int_a^b \frac{\sqrt{y'^2(x) + 1} \sqrt{y'^2(x) + 1}}{v_0 y'(x)} dx = \int_a^b \frac{y'^2(x) + 1}{v_0 y'(x)} dx$$

es decir,

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{y \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b \frac{y'^2(x) + 1}{v_0 y'(x)} dx,$$

y la función lagrangiana correspondiente es

$$F(x, y, y') = \frac{y'^2(x) + 1}{v_0 y'(x)}.$$

Por tanto

$$v_0 \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} (y'(x) + (y'(x))^{-1}) = 2(y'(x))^{-3}$$

y la correspondiente ecuación de Euler Lagrange (2.20),

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 0,$$

se puede escribir como  $y'(x)^{-3} y'' = 0$ , es decir,  $y''' = 0$ , y por tanto las soluciones son de la forma  $y' = \text{constante}$ . Por tanto la función distancia definida por

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{y \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b \frac{y'^2(x) + 1}{v_0 y'(x)} dx$$

tiene por geodésicas las líneas rectas no horizontales el sentido que descienden. A lo largo de estas geodésicas la función lagrangiana permanece constante e igual a

$$\frac{1}{v_0 \sin \theta}.$$

Por tanto si  $\mathbf{b}$  está debajo de  $\mathbf{a}$ ,

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}{v_0 \sin \theta} = \frac{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}{v_0 (b_2 - a_2)}.$$

Esta premétrica induce arcos porque a lo largo de cualquier recta el ángulo  $\theta$  permanece constante, pudiéndose verificar que se cumple la igualdad del triángulo:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}),$$

donde  $\mathbf{x}(t)$  es cualquier punto en el segmento de recta de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ .

# 7. Premétricas sobre $R^n$ obtenidas de combinar $m$ premétricas en $R$

Por el teorema 2.1, una combinación lineal positiva de premétricas es una premétrica. Para que esta induzca arcos se requiere que las componentes compartan geodésicas. También es el caso de la combinación de premétricas que a continuación se propone, basada en la desigualdad de Minkowski, la cual es una herramienta más para modelar funciones distancia asimétricas y no uniformes.

## 7.1 Métricas $K_p$ (una generalización de las métricas $L_p$ )

Para cada  $k \in \{1, \dots, m\}$  sea  $(u_k, \gamma_k)$  un par, donde:

$u_k : R^n \rightarrow R$  es una función continua y

$\gamma_k$  una premétrica sobre  $R$ .

Entonces la correspondiente función compuesta  $\rho_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \gamma_k(u_k(\mathbf{a}), u_k(\mathbf{b}))$ , es una premétrica sobre  $R^n$ , llamada *premétrica inducida* sobre  $R^n$  por el par  $(u_k, \gamma_k)$ .

Si  $\gamma_k : R \times R \rightarrow R$  es completa, entonces  $\rho_k : R^n \times R^n \rightarrow R$  cumple la desigualdad del triángulo en la forma de igualdad,

$$\rho_k(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \rho_k(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \rho_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^n$$

Por tanto, si en la desigualdad de Minkowski

$$\left( \sum_{k=1}^m |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^m |a_k|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{1/p} \quad p \geq 1$$

se hacen las identificaciones  $a_k = \rho_k(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ ,  $b_k = \rho_k(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ , y si cada premétrica  $\rho_k$  es no negativa (métrica débil) y completa, entonces cada término  $k$  de la sumatoria del lado izquierdo de la desigualdad es el valor absoluto de  $\rho_k(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \rho_k(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \rho_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Resulta entonces inmediato el sentido de la siguiente definición y el correspondiente teorema.

Una *combinación  $K_p$*  de  $m$  métricas débiles  $\rho_k$  sobre  $R^n$  inducidas por pares  $(u_k, \gamma_k)$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ , donde cada  $\gamma_k$  es completa, es la función binaria  $d_p$  sobre  $R^n$  dada por

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left( \sum_{k=1}^m \rho_k^p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right)^{1/p}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n, p \geq 1 \quad (7.1a)$$

$$d_\infty(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max\{|\rho_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})| : k \in \{1, \dots, m\}\}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n \quad (7.1b)$$

Se puede demostrar que  $d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  decrece cuando  $p$  crece, y que en el límite resulta el lado derecho de (7.1b).

*Teorema 7.1 (Combinación tipo Minkowski de métricas débiles).* Toda combinación  $K_p$  de métricas débiles  $\rho_k$  sobre  $R^n$  inducidas por pares  $(u_k, \gamma_k)$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ , donde cada  $\gamma_k$  es completa, es una métrica débil sobre  $R^n$ , la cual no necesariamente es completa.

Q.E.D

En particular, si las funciones  $u_k : R^n \rightarrow R$  constituyen un sistema de coordenadas de  $R^n$ , es decir, hay una correspondencia biunívoca y continua de cada punto  $\mathbf{x}$  de  $R^n$  y su juego de coordenadas  $(u_1(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x}))$ , entonces:

- $m = n$ ;
  - las funciones  $u_k$  tienen primera derivada continua y
  - el determinante del jacobiano  $D(x_1 \dots x_n)/D(u_1 \dots u_n)$  es distinto de cero en  $R^n$ .
- Por tanto se cumple el siguiente corolario.

*Corolario.* En las condiciones del teorema anterior, si las funciones  $u_k : R^n \rightarrow R$  constituyen un sistema de coordenadas del espacio  $R^n$ , entonces  $d_p$  es una cuasimétrica, pseudométrica, pseudométrica o pseudométrica uniforme si y sólo si cada  $\gamma_k : R \times R \rightarrow R$  es una cuasimétrica, pseudométrica, pseudométrica o pseudométrica uniforme, respectivamente. Q.E.D.

## 7.2 Métricas $L_p$

Cuando en el corolario anterior cada función  $u_k$  es la coordenada cartesiana  $x_k$  y cada métrica débil  $\rho_k$  es la correspondiente métrica euclidiana, se obtienen las conocidas métricas  $L_p$ : Para cada valor de  $p \geq 1$  y para  $p = \infty$  la función binaria  $d_p : R^n \times R^n \rightarrow R$  dada por:

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left( \sum_{i=1}^n |b_i - a_i|^p \right)^{1/p} \quad p \geq 1, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n,$$

$$d_\infty(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max\{|b_i - a_i| : i \in I\}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n,$$

es una métrica, denominada *métrica  $L_p$* , la cual es uniforme.

En particular, la *distancia rectangular* y la *distancia euclidiana* están dadas respectivamente por:

$$d_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n,$$

$$d_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left( \sum_{i=1}^n |b_i - a_i|^2 \right)^{1/2} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n,$$

siendo esta última una métrica uniforme e invariante frente a rotaciones. De las métricas  $L_p$  la distancia euclidiana es la única que es isotrópica.

*Teorema 7.2 (Arcos inducidos por las métricas  $L_p$ ).* Para toda métrica  $L_p$  ( $p \geq 1$  o  $p = \infty$ ), el segmento de recta que une dos puntos es un arco inducido, aunque no necesariamente es el único: para  $p = 1$  o  $p = \infty$  los arcos monótonos, en algún sentido, que unen dos puntos son arcos inducidos.

*Demostración.* La demostración se restringe a  $R^2$  y se considera  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ . Su generalización a  $R^n$  es inmediata. Sea  $f$  una función definida sobre  $[a_1, b_1]$ , con  $a_1 < b_1$ , que pasa por los puntos  $(a_1, a_2)$ ,  $(b_1, b_2)$ , es decir,  $f(a_1) = a_2$ ,  $f(b_1) = b_2$ , la cual es monótona, esto es,  $x_2 \geq x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ . Como caso particular esta función podría ser la recta que une los dos puntos  $(a_1, a_2)$  y  $(b_1, b_2)$ . Se supone sin pérdida de generalidad que  $a_2 \leq b_2$ . Entonces por la monotonía de  $f$  se obtiene  $a_2 \leq f(x) \leq b_2$ .

Caso  $p \neq \infty$ . Por las suposiciones  $a_1 < b_1$ ,  $a_1 \leq x \leq b_1$ , y la monotonía de  $f$ , la igualdad en la desigualdad del triángulo

$$(|x - a_1|^p + |y - a_2|^p)^{1/p} + (|b_1 - x|^p + |b_2 - y|^p)^{1/p} = (|b_1 - a_1|^p + |b_2 - a_2|^p)^{1/p} \quad (7.2)$$

se puede escribir como

$$((x - a_1)^p + (y - a_2)^p)^{1/p} + ((b_1 - x)^p + (b_2 - y)^p)^{1/p} = ((b_1 - a_1)^p + (b_2 - a_2)^p)^{1/p} \quad (7.3)$$

si  $p = 1$ , se obtiene la identidad:

$$x - a_1 + y - a_2 + b_1 - x + b_2 - y = b_1 - a_1 + b_2 - a_2,$$

lo que demuestra que para  $p = 1$  cualquier arco monótono que une  $(a_1, a_2)$  con  $(b_1, b_2)$  representa un arco inducido por la premétrica.

Si  $f$  es una recta, entonces su pendiente vale  $m = (b_2 - a_2)/(b_1 - a_1) = (y - a_2)/(x - a_1) = (b_2 - y)/(b_1 - x)$ , por lo que multiplicando y dividiendo apropiadamente cada término de (7.3) por  $(x - a_1)$ ,  $(b_1 - x)$  y  $(b_1 - a_1)$ , respectivamente, resulta la identidad:

$$(x - a_1) (1^p + m^p)^{1/p} + (b_1 - x) (1^p + m^p)^{1/p} = (b_1 - a_1) (1^p + m^p)^{1/p},$$

lo que demuestra que para  $p \neq \infty$  la recta que une  $(a_1, a_2)$  con  $(b_1, b_2)$  es un arco inducido por la premétrica.

Caso  $p = \infty$ . Para que el camino  $y = f(x)$  represente un arco inducido por la premétrica se requiere que cumpla la igualdad en la desigualdad del triángulo

$$\text{máx}\{(x - a_1), (y - a_2)\} + \text{máx}\{(b_1 - x), (b_2 - y)\} = \text{máx}\{(b_1 - a_1), (b_2 - a_2)\},$$

Considerando que  $f$  es la recta con los parámetros anteriores,

$$\begin{aligned} \text{máx}\{(x - a_1), m(x - a_1)\} + \text{máx}\{(b_1 - x), m(b_1 - x)\} &= \text{máx}\{(b_1 - a_1), m(b_1 - a_1)\}, \\ (x - a_1) \text{máx}\{1, m\} + (b_1 - x) \text{máx}\{1, m\} &= (b_1 - a_1) \text{máx}\{1, m\}, \end{aligned}$$

y se llega a la identidad

$$(x - a_1) + (b_1 - x) = (b_1 - a_1),$$

lo que demuestra que para  $p = \infty$  la recta que une  $(a_1, a_2)$  con  $(b_1, b_2)$  es un arco inducido por la premétrica

Lo anterior demuestra (2.3), pero también demuestra (2.2) si se considera que las implicaciones usadas siguen siendo válidas si se considera que  $(a_1, a_2)$  ya no es el punto **a** sino un punto de un arco inducido que va de **a** a **b**, sea recta o función monótona.

Q.E.D.

Ahora se va a determinar la función  $F$  (la función lagrangiana) para cada métrica  $Lp$ , la cual sirve para determinar la longitud de cualquier arco en esa métrica a través de (2.8). Si  $p \geq 1$  la función lagrangiana  $F$  de  $d_p$  es

$$F_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d_p(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\left( \sum_{i=1}^n |x_i + \dot{x}_i \Delta s - x_i|^p \right)^{1/p}}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i \Delta s|^p \right)^{1/p}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{(|\Delta s|^p)^{1/p}}{\Delta s} \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p},$$

es decir,

$$F_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \quad p \geq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in R^n, \dot{\mathbf{x}} \in 1^n,$$

donde los componentes  $\dot{x}_i$  de  $\dot{\mathbf{x}}$  son los cosenos directores de  $\dot{\mathbf{x}}$ . Por (2.8)

$$\ell_p(\mathbf{x}) = \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} ds \quad p \geq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{[a,b]}$$

Para  $p = \infty$  la función lagrangiana correspondiente a  $d_p$  es

$$F_\infty(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\max |\dot{x}_i \Delta s|}{\Delta s} = \max |\dot{x}_i|.$$

Es aquí oportuno mencionar la necesidad de especificar que la función lagrangiana  $F_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  se obtiene mediante un paso al límite por la derecha,  $\Delta s \rightarrow 0^+$ , como indica la definición (2.6), pues si este signo se omite resulta la derivada direccional en el segundo argumento de la función  $d$ , en la dirección  $\dot{\mathbf{x}}$ , la cual en las métricas que nos ocupa no existe porque el límite por la derecha,  $\Delta s \rightarrow 0^+$ , difiere del límite por la izquierda,  $\Delta s \rightarrow 0^-$ ,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0^\pm} \frac{d_p(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^\pm} \frac{(|\Delta s|)^{1/p}}{\Delta s} \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} = \pm \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \quad (7.4)$$

lo cual era de esperar porque la función valor absoluto no es diferenciable en el vértice.

La función lagrangiana permite reencontrar propiedades de las premétricas. En las métricas que nos ocupa la función lagrangiana  $F_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  depende de la dirección  $\dot{\mathbf{x}}$  pero no del punto  $\mathbf{x} \in R^n$ , por lo que  $d_p$  es una premétrica uniforme, que además es simétrica porque  $F_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = F_p(\mathbf{x}, -\dot{\mathbf{x}})$ . Para  $p = 2$ , que es la métrica euclidiana, además  $F_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 1$ , por lo que ella es isotrópica.

Ahora se va a determinar la función antilagrangiana  $G$ , dada por la ecuación (2.7), para cada métrica  $Lp$ , la cual junto que la función lagrangiana  $F$  va a determinar los conos que determinan las  $d$ -geodésicas. Si  $p \geq 1$  la función postlagrangiana  $G_p$  de  $d_p$  es

$$G_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{b}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta s, \mathbf{b})}{\Delta s},$$

$$G_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{b}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\left( \sum_{i=1}^n |b_i - x_i|^p \right)^{1/p} - \left( \sum_{i=1}^n |b_i - x_i - \dot{x}_i \Delta s|^p \right)^{1/p}}{\Delta s} \quad (7.5)$$

La dirección  $\dot{\mathbf{x}}$  del segmento de recta de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{b}$ , denotada por  $\mathbf{v}_0$ , está dada por

$$\dot{x}_i = \frac{b_i - x_i}{\sqrt{\sum (b_i - x_i)^2}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

lo que al sustituir en la ecuación (7.5), factorizar y tomar en cuenta que en el proceso al límite  $\Delta s$  es pequeño, resulta



$$\begin{aligned}
G_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0, \mathbf{b}) &= \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sum (b_i - x_i)^2} - \left| \sqrt{\sum (b_i - x_i)^2} - \Delta s \right|}{\Delta s} \\
&= \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sum (b_i - x_i)^2} - (\sqrt{\sum (b_i - x_i)^2} - \Delta s)}{\Delta s} \\
&= \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\Delta s}{\Delta s}
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$G_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0, \mathbf{b}) = \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p},$$

obteniéndose:

$$S_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0, \mathbf{b}) = F_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0) - G_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}_0, \mathbf{b}) = \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} - \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} = 0.$$

Por el inciso (b) del teorema 2.6, la dirección  $\mathbf{v}_0$  del segmento de recta de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{b}$  es tangente a un arco inducido que va de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{b}$ . esto demuestra que para toda métrica  $L_p$  ( $p \geq 1$  o  $p = \infty$ ), el segmento de recta que une dos puntos es un arco inducido (teorema 7.2).

Caso  $p = 1$ . Por la ecuación (7.5)

$$G_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\left( \sum_{i=1}^n |b_i - x_i| \right) - \left( \sum_{i=1}^n |b_i - x_i - v_i \Delta s| \right)}{\Delta s}$$

Por el inciso (b) del teorema 2.6, las geodésicas que van de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{b}$  tienen derivadas por la derecha en  $\mathbf{x}$  que se encuentran en el cono  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \{ \mathbf{v} \in R^n \mid S(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) = 0 \}$ , el cual está dado por las direcciones  $\mathbf{v}$  que resuelven  $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = G_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b})$ , donde

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

es decir, que resuelven

$$\sum_{i=1}^n |v_i| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\left( \sum_{i=1}^n |b_i - x_i| \right) - \left( \sum_{i=1}^n |b_i - x_i - v_i \Delta s| \right)}{\Delta s}$$

Si  $b_i > x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  entonces esta igualdad se escribe como

$$\sum_{i=1}^n |v_i| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{i=1}^n (b_i - x_i) - \sum_{i=1}^n (b_i - x_i - v_i \Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{i=1}^n v_i \Delta s}{\Delta s} = \sum_{i=1}^n v_i$$

Esta igualdad se cumple solamente si  $v_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Por tanto todas las geodésicas de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{b}$  son arcos monótonos de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  (ver teorema 7.2).

El caso caso  $p = \infty$  se desarrolla de manera similar.

### 7.3 Premétricas derivadas de funciones patrón (*gauges*)

Una *función patrón* (*gauge*) es una función real  $\gamma$  sobre  $R^n$  que cumple cualquiera de las dos definiciones siguientes, las cuales son equivalentes:

*Definición 1* (Minkowski, 1911): Para todo  $\mathbf{a} \in R^n$ ,  $\gamma(\mathbf{a}) = \inf\{k > 0: k \mathbf{a} \in B\}$ , donde  $B$  es un conjunto acotado y convexo que contiene al origen, llamada *bola unitaria*.

*Definición 2* (Rockafelar, 1970): Para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$ :

- (a)  $\gamma(\mathbf{a}) \geq 0$
- (b)  $\gamma(\mathbf{a}) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{a} = 0$
- (c)  $\gamma(k\mathbf{a}) = k\gamma(\mathbf{a})$  para todo  $k \geq 0$
- (d)  $\gamma(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \gamma(\mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{b})$

De la definición 2 a la definición 1 se pasa observando que la bola unitaria de la definición 1 es el conjunto  $B = \{\mathbf{a} \in R^n: \gamma(\mathbf{a}) \leq 1\}$ .

Una *norma* sobre  $R^n$  es una función patrón que cumple la condición de simetría,  $\gamma(-\mathbf{a}) = \gamma(\mathbf{a})$ , o equivalentemente, que cumple

- (a)  $\gamma(\mathbf{a}) \geq 0$
- (e)  $\gamma(k\mathbf{a}) = |k|\gamma(\mathbf{a})$
- (d)  $\gamma(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \gamma(\mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{b})$

En particular, las funciones patrón

$$\gamma(\mathbf{a}) = \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{si } p \geq 1,$$

$$\gamma_\infty(\mathbf{a}) = \max\{|a_i|: i \in I\},$$

son normas, denominadas *normas  $L_p$* , de cada una de las cuales se deriva las respectiva bola unitaria (Love et al, 1988, p 258). Cada función patrón determina su correspondiente premétrica de acuerdo con la mecánica siguiente, y en particular, cada norma  $L_p$  determina de esta manera su correspondiente métrica  $L_p$ .

Cada función patrón  $\gamma$  determina su respectiva premétrica,  $d_\gamma: R^n \rightarrow R$ ,  $d_\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \gamma(\mathbf{b} - \mathbf{a})$  (por los incisos d y c de la definición 2,  $d_\gamma$  satisface la desigualdad del triángulo, y por el inciso b de la definición 2,  $d_\gamma$  cumple la propiedad de identidad), llamada *premétrica derivada de la función patrón  $\gamma$* , conocida en la literatura como *cuasimétrica*, la cual es uniforme, no negativa y cumple la propiedad de definitoreidad. En particular, la premétrica derivada de la norma  $L_p$  es la métrica  $L_p$ . Como en el caso de las métricas  $L_p$ , toda premétrica derivada de una función patrón induce arcos inducidos que son líneas rectas. Por (2.6) la función  $F_\gamma$  correspondiente a esta premétrica está dada por

$$F_\gamma(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d_\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\gamma(\dot{\mathbf{x}}\Delta s)}{\Delta s} = \gamma(\dot{\mathbf{x}}).$$

Por (2.9) la longitud de un arco de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  está dada por

$$\ell(\mathbf{x}) = \int_a^b F_\gamma(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) ds = \int_a^b \gamma(\dot{\mathbf{x}}) ds, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega_{[a, b]},$$

y por (2.12) las ecuaciones de Euler Lagrange son

---

<sup>1</sup> En general las normas se definen sobre espacios lineales ( $R^n$  es un espacio lineal particular)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

por tanto,

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Esta condición de que todas las derivadas parciales  $\partial \gamma / \partial \dot{x}_i$  sean constantes para  $i = 1, 2, \dots, n$  a lo largo de un arco que va de **a** a **b** se satisface si el arco es el segmento de recta que va de **a** a **b**. Por tanto las líneas rectas son geodésicas de esta premétrica, como fue el caso de las métricas  $Lp$ .

Una premétrica uniforme y clase  $C^1$  por pedazos tiene de la forma  $F(\dot{\mathbf{x}})$ , pero ella no necesariamente es una premétrica derivada de una función patrón, es decir,  $F$  no necesariamente cumple las condiciones a)-d) de una función patrón.

# 8. Contraejemplos

Una conjetura es una proposición consistente con los datos conocidos, pero que no se ha demostrado que sea verdadera o falsa<sup>1</sup> Los contraejemplos son ejemplos diseñados para demostrar que cierta conjetura es falsa. En relación con esto se presentan ejemplos de premétricas en  $R$  no completas. Un ejemplo demuestra dos cosas, en primer lugar que la igualdad (2.2) que define un arco inducido por una premétrica no puede deducirse de la igualdad más simple (2.1), aún bajo la suposición de que la premétrica es una función continua en todo su dominio, y en segundo lugar que, al menos en  $R$ , las condiciones necesarias para que una premétrica induzca arcos no se pueden reducir a condiciones locales, como continuidad y diferenciabilidad. Esto es de esperar si se observa que la desigualdad del triángulo es una condición de tipo global. De estos ejemplos se concluye también que dos puntos pueden estar conectados por uno o una infinidad de arcos sin que exista entre ellos un arco inducido por la premétrica. Se enuncian conjeturas sobre condiciones en las que una premétricas contiene distancias negativas.

## Contraejemplo 8.1 Premétrica continua no uniforme y no completa.

Este ejemplo muestra:

a) Que la condición (2.1) no es suficiente para definir un arco inducido, requiriéndose la definición original (2.2);

b) Que una premétrica puede ser métrica continua y no ser completa.

La función binaria  $d$  sobre  $R$  dada por

$$d(a,b) = \begin{cases} (b-a) & \text{si } a \leq b \text{ y } (a > 2 \text{ o } b > 2) \\ (b-a) + a(2-b)(b-a) & \text{si } 0 \leq a \leq b \leq 2 \\ (a-b) & \text{si } b \leq a \text{ y } (b > 2 \text{ o } a > 2) \\ (a-b) + b(2-a)(a-b) & \text{si } 0 \leq b \leq a \leq 2 \end{cases}$$

cumple la desigualdad del triángulo (ver más adelante). Directamente se puede verificar que  $d$  cumple las propiedades de identidad, no negatividad, simetría y definitividad, siendo por tanto una métrica. Las distancias difieren de la euclidiana únicamente si ambos puntos se encuentra dentro del intervalo abierto  $(0,2)$ . En este caso la diferencia con la distancia euclidiana es que  $d$  tiene el término adicional  $a(2-b)(b-a)$  si  $b \leq a$  ( $b(2-a)(a-b)$  en caso contrario), definido para la región triangular  $T = \{(a,b): 0 \leq a \leq b \leq 2\}$ , el cual es positivo en el interior,  $T^i = \{(a,b): 0 < a < b < 2\}$ , y cero en la frontera,  $T^f = \{(a,b): (a = 0 \text{ o } a = b \text{ o } b = 2) \text{ y } (0 \leq a \leq b \leq 2)\}$ . La métrica  $d$  es entonces continua y no uniforme. Las primeras derivadas de  $d$  son continuas excepto en la frontera  $T^f$ .

Una peculiaridad de la métrica  $d$  es que para  $a = 0, b = 2$  se cumple la igualdad del triángulo (2.1),

$$d(0, x) + d(x, 2) - d(0, 2) = x + (2-x) - 2 = 0 \quad \forall x \in [0,2],$$

pero no la igualdad (2.2) porque para  $y \in (x,2), x \in (0,2)$  se tiene

$$d(x, y) + d(y,2) - d(x,2) = (y-x) + x(2-y)(y-x) + (2-y) - (2-x) = x(2-y)(y-x) > 0,$$

<sup>1</sup> <http://mathworld.wolfram.com/Conjecture.html>

lo que comprueba que (2.1) no es condición suficiente para que  $d$  induzca arcos.

A continuación se verifica que  $d$  cumple la desigualdad del triángulo  $f(a,c,b) \equiv d(a,c) + d(c,b) - d(a,b) \geq 0$ . En todos los casos se supone  $a \leq b$ . Si solo uno de los tres puntos  $a, b, c$  se encuentre en el intervalo  $(0,2)$ , entonces las distancias  $d(a,c)$ ,  $d(c,b)$  y  $d(a,b)$  coinciden con la métrica euclidiana y por tanto se cumple la desigualdad del triángulo. Entonces solo hay que verificar la desigualdad del triángulo cuando dos o los tres puntos  $a, b$  y  $c$  se encuentran en tal intervalo:

**Casos  $c \leq a \leq b$**

**1.1  $c < 0 \leq a \leq b \leq 2$ .**

$$\begin{aligned} f(a, c, b) &\equiv d(a,c) + d(c,b) - d(a,b) = \\ &= (a-c) + (b-c) - (b-a) - a(2-b)(b-a) \\ &= 2(a-c) - a(2-b)(b-a), \end{aligned}$$

$\partial f / \partial c = -2$ , por tanto  $f$  es decreciente y  $f(a, c, b)$  toma su valor mínimo en el extremo superior de su intervalo,  $f(a, 0, b) = 2a - a(2-b)(b-a) \geq$

$a \min\{2 - (2-b)(b-a): 0 \leq a \leq b \leq 2\} \geq a \min\{2 - (2-b)b: 0 \leq a \leq b \leq 2\} \geq a \geq 0$  en donde el primer mínimo resulta de hacer dentro del corchete a  $a$  lo menor posible, es decir, 0, y el segundo mínimo se obtiene observando que  $(2-b)b$  alcanza su máximo en  $b = 1$ .

**1.2.  $0 \leq c \leq a \leq b \leq 2$ .** En el último paso se usa que  $\partial f / \partial c < 0$ , por lo que  $f$  es mínimo para  $c = a$ :

$$\begin{aligned} f(a, c, b) &\equiv d(a,c) + d(c,b) - d(a,b) = \\ &= (a-c) + c(2-a)(a-c) + (b-c) + c(2-b)(b-c) - (b-a) - a(2-b)(b-a) \\ &= 2(a-c) + c(2-a)(a-c) + c(2-b)(b-c) - a(2-b)(b-a) \\ &\geq a(2-b)(b-a) - a(2-b)(b-a) = 0. \end{aligned}$$

**1.3.  $0 \leq c \leq a \leq 2 \leq b$ :**

$$\begin{aligned} f(a, c, b) &\equiv d(a,c) + d(c,b) - d(a,b) = \\ &= (a-c) + c(2-a)(a-c) + (b-c) - (b-a) \\ &= 2(a-c) + c(2-a)(a-c) = (a-c)(2 + c(2-a)) \\ &\geq \min((a-c)(2 + c(2-a)): 0 \leq c \leq a \leq 2) = 0 \text{ donde el mínimo ocurre para} \\ &a = c. \end{aligned}$$

**Casos  $a \leq c \leq b$**

**2.1.  $a < 0 \leq c \leq b \leq 2$ :**

$$\begin{aligned} f(a, c, b) &\equiv d(a,c) + d(c,b) - d(a,b) = \\ &= (c-a) + (b-c) + c(2-b)(b-c) - (b-a) = c(2-b)(b-c) \geq 0. \end{aligned}$$

**2.2.  $0 \leq a \leq c \leq b \leq 2$ :**

$$\begin{aligned} f(a, c, b) &\equiv d(a,c) + d(c,b) - d(a,b) = \\ &= (c-a) + a(2-c)(c-a) + (b-c) + c(2-b)(b-c) - (b-a) - a(2-b)(b-a) \\ &= a(2-c)(c-a) + c(2-b)(b-c) - a(2-b)(b-a) \\ \partial f / \partial c &= -a(c-a) + a(2-c) + (2-b)(b-c) - c(2-b) - c(2-b) \\ &= -a(c-a) + a(2-c) + (2-b)(b-3c), \end{aligned}$$

$\partial^2 f / \partial c^2 = -2a - 3(2-b) < 0$ , concavidad hacia abajo, por lo que el mínimo de  $f$  está para  $c$  igual a alguno de los extremos del intervalo  $[a, b]$ ,

$$f(a, c, b) \geq \min\{f(a, a, b), f(a, b, b)\} = \min\{0, 0\} = 0.$$

**2.3.**  $0 \leq a \leq c \leq 2 \leq b$ :

$$\begin{aligned} f(a, c, b) &\equiv d(a, c) + d(c, b) - d(a, b) = \\ &= (c-a) + a(2-c)(c-a) + (b-c) - (b-a) = a(2-c)(c-a) \geq 0. \end{aligned}$$

**Casos**  $a \leq b \leq c$

**3.1.**  $a \leq 0 \leq b \leq c \leq 2$ :

$$\begin{aligned} f(a, c, b) &\equiv d(a, c) + d(c, b) - d(a, b) = \\ &= (c-a) + (c-b) + b(2-c)(c-b) - (b-a) \\ &= 2(c-b) + b(2-c)(c-b) \geq 0. \end{aligned}$$

**3.2.**  $0 \leq a \leq b \leq c \leq 2$ :

$$\begin{aligned} f(a, c, b) &\equiv d(a, c) + d(c, b) - d(a, b) = \\ &= (c-a) + a(2-c)(c-a) + (c-b) + b(2-c)(c-b) - (b-a) - a(2-b)(b-a) \\ &= 2(c-b) + a(2-c)(c-a) + b(2-c)(c-b) - a(2-b)(b-a), \end{aligned}$$

$$\partial f / \partial c = 2 - a(c-a) + a(2-c) - b(c-b) + b(2-c),$$

$\partial^2 f / \partial c^2 = -2a - 2b < 0$ , concavidad hacia abajo, por lo que el mínimo de  $f$  se obtiene cuando  $c$  toma uno de los valores extremos del intervalo  $[b, 2]$ ,

$$f(a, c, b) \geq \min\{f(a, b, b), f(a, 2, b)\} = \min\{0, (2-b)(2-a(b-a))\} = 0,$$

donde  $f(a, b, b) = 0$  se obtiene directamente y

$$f(a, 2, b) \geq (2-b) \min((2-a(b-a)): 0 \leq a \leq b \leq 2) \geq 0 \text{ resulta de que}$$

$\partial(2-a(b-a)) / \partial a = -b + 2a = 0$  implica que  $a = b/2$ , que es un mínimo porque la segunda derivada respecto de  $a$  es positiva, el cual da un valor  $2 - a(b-a) = 2 - (b/2)(b-(b/2)) = 2 - b/4 \geq 1.5 > 0$ .

**3.3.**  $0 \leq a \leq b \leq 2 \leq c$ :

$$\begin{aligned} f(a, c, b) &\equiv d(a, c) + d(c, b) - d(a, b) = (c-a) + (c-b) - (b-a) - a(2-b)(b-a) \\ &= 2(c-b) - a(2-b)(b-a), \end{aligned}$$

$\partial f / \partial c = 2$ , por lo que  $f(a, c, b)$  es creciente en  $c$  y entonces usando el argumento del caso anterior,

$$\begin{aligned} f(a, c, b) &\geq f(a, 2, b) = 2(2-b) - a(2-b)(b-a) \\ &= (2-b)(2-a(b-a)) \geq (2-b)(2-(b/2)(b-(b/2))) \\ &= (2-b)(2-b/4) \geq 0. \end{aligned}$$

### Contraejemplo 8.2 Premétrica discontinua.

Sea una región lineal  $[0, 3]$ , formada por tres subregiones consecutivas que son homogéneas en lo que toca a velocidades de transporte. Estas subregiones ocupan los subintervalos  $[0, 1]$ ,  $(1, 2)$  y  $[2, 3]$ , es decir,  $[0, 3] = [0, 1] \cup (1, 2) \cup [2, 3]$ . La función distancia  $d: [0, 3] \rightarrow R$  se define por

$$d(a,b) = \begin{cases} b-a & \text{si } a \leq b \text{ y } a \in [0,1] \cup [2,3], \\ b-2a+2 & \text{si } a \leq b \text{ y } a \in (1,2), b \in [2,3], \\ a-b & \text{si } b \leq a \text{ y } b \in [0,1] \cup [2,3], \\ a-2b+2 & \text{si } b \leq a \text{ y } b \in (1,2), a \in [2,3]. \end{cases}$$

Observar que para  $a \in (1,2)$  y  $b \in [2,3]$  la velocidad de transporte en cada parte del recorrido es la que corresponde a la subregión, por lo cual  $d(a,b) = 2(2-a) + b - 2 = b - 2a + 2$ , pues de otra manera se violaría la desigualdad del triángulo. La función  $d$  cumple la desigualdad del triángulo, lo cual se verifica en la tabla 3, en donde se consideran solamente recorridos de izquierda a derecha, es decir, para  $a < x < b$ . Las tres columnas encabezadas por  $A$  indican cuántos de los puntos  $a$ ,  $x$  y  $b$  se encuentran en cada uno de los intervalos  $[0,1]$ ,  $(1,2)$  y  $[2,3]$ , lo cual facilita verificar que aparecen todas las combinaciones posibles.

Directamente se puede comprobar que  $d$  cumple las propiedades de identidad, no negatividad, simetría y definitoreidad, siendo por tanto una métrica, la cual es además no uniforme y discontinua. Esta métrica  $d$  no induce un arco para algunos pares ordenados de puntos, los cuales corresponden a los dos renglones de la tabla 3, en los que aparecen desigualdades estrictas. Esta métrica induce arcos para pares de puntos en regiones en la que ella es continua, que se identifican en la tabla 3 por el signo de igualdad.

**Tabla 3. Verificación del cumplimiento de la desigualdad del triángulo**

$A$	$B$			$a \in$	$x \in$	$b \in$	$d(a,x)$	$d(x,b)$	$-d(a,b)$	$=$	$Z$
1	3			$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1]$	$x - a$	$b - x$	$-(b - a)$	0	$= 0$
2	2	1		$[0,1]$	$[0,1]$	$(1,2)$	$x - a$	$b - x$	$-(b - x)$	0	$= 0$
3	2		1	$[0,1]$	$[0,1]$	$[2,3]$	$x - a$	$b - x$	$-(b - x)$	0	$= 0$
4	1	2		$[0,1]$	$(1,2)$	$(1,2)$	$x - a$	$2(b - x)$	$-(b - a)$	$b + a - 2x$	$> 0$
5	1	1	1	$[0,1]$	$(1,2)$	$[2,3]$	$x - a$	$b - 2x + 2$	$-(b - a)$	$2 - x$	$> 0$
6	1		2	$[0,1]$	$[2,3]$	$[2,3]$	$x - a$	$b - x$	$-(b - a)$	0	$= 0$
7		3		$(1,2)$	$(1,2)$	$(1,2)$	$2(x - a)$	$2(b - x)$	$-2(b - a)$	0	$= 0$
8		2	1	$(1,2)$	$(1,2)$	$[2,3]$	$2(x - a)$	$b - 2x + 2$	$-(b - 2a + 2)$	0	$= 0$
9		1	2	$(1,2)$	$[2,3]$	$[2,3]$	$x - 2a + 2$	$b - x$	$-(b - 2a + 2)$	0	$= 0$
10			3	$[2,3]$	$[2,3]$	$[2,3]$	$x - a$	$b - x$	$-(b - x)$	0	$= 0$

## 9. Conclusiones

En este trabajo de investigación se propuso un marco teórico para modelar funciones distancia en  $R^n$  que pueden ser asimétricas, no uniformes y no positivas definidas.

Este marco se basó en dos nuevos conceptos: arco inducido por una función distancia, y premétrica. Un arco inducido por una función distancia es un arco dirigido, tal que para cualquier triada de puntos del arco, se cumple la desigualdad del triángulo en su forma de igualdad. Una premétrica es una función distancia que satisface la desigualdad del triángulo y la propiedad de identidad (la distancia de un punto dado a ese mismo punto es cero). Estos nuevos conceptos permitieron extender la idea de longitud euclidiana de un arco a “longitud” de un arco medido respecto a una premétrica.

Se demostró que una premétrica se puede obtener resolviendo un problema de cálculo de variaciones, cuyo integrando es una función binaria, la cual llamamos función lagrangiana. Esto tiene importancia teórica, porque establece una correspondencia biunívoca entre las funciones lagrangianas y las premétricas. En este trabajo, la función lagrangiana depende de cada punto y su vecindad, y por tanto contiene información local, en cambio, una función distancia depende de cada par ordenado de puntos localizados arbitrariamente, y por tanto proporciona información global.

Cuando no se tiene información *a priori* acerca de la función distancia, puede ser ventajoso modelarla a través de su función lagrangiana, debido a que es menos difícil sistematizar información local que información global. En otras palabras, es más difícil encontrar un patrón para un cúmulo de parejas ordenadas de puntos que para un cúmulo de puntos y sus vecindades inmediatas.

También se mostró que algunos modelos físicos pueden ser útiles para modelar funciones distancia, lo cual se ilustró con ejemplos.

Como trabajo futuro se propone extender las ideas presentadas a funciones distancia sobre topologías distintas de la usual. En cuanto a aplicaciones, se podrán formular y resolver problemas de localización de servicios con funciones distancia no uniformes, asimétricas y no positivas definidas. En estos problemas, la función a optimizar puede referirse a costos de transporte, tiempo de recorrido, o energía consumida. Estas aplicaciones requerirán el desarrollo de nuevos métodos de optimización.

Otra posible aplicación es el diseño de redes de costo mínimo que conectan determinados puntos en una región, por ejemplo redes de oleoductos, líneas eléctricas de transmisión, redes de transporte, etc.



# Anexo 1. Compendio de fórmulas

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.1)$$

$$d(\mathbf{x}(s), \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}))) \quad \forall s \in [a, b] \text{ y } \forall t \in [s, b] \quad (2.2)$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \quad \forall P = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b}) \in P[C(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \quad (2.3)$$

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{v})}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{b})}{h}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{v} \in R^n \times R^n \quad (2.4)$$

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{v})}{h} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{v} \in R^n \quad (2.5)$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) - d(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{b})}{h} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{b} \in R^n \quad (2.6)$$

$$F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) + \dot{\mathbf{x}}(s)\Delta s)}{\Delta s} \quad (2.7)$$

$$\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad \forall C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega \quad (2.8)$$

$$\ell_d(C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \oplus \dots \oplus C(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})) = \sum_{i=0}^k \ell_d(C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})). \quad (2.9)$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \quad \forall P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}) \in P[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad (2.10)$$

$$\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega \quad (2.11)$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.13)$$

$$F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\ell(C(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) + \dot{\mathbf{x}}(s)\Delta s))}{\Delta s}, \quad \forall s \in [a, b] \quad (2.14)$$

$$\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{x}(t))) = \int_a^t F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.15)$$

$$\ell(\mathbf{x}) = \int_a^b F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) ds, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \quad (2.16)$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) ds, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2 \quad (2.17)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.18a)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (2.18b)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} \ddot{y} = 0, \quad (2.19a)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial x} \dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y} \partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2} \ddot{y} = 0, \quad (2.19b)$$

$$\ell(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{[a,b]} \quad (2.20)$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[a,b]}} \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2 \quad (2.21)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 0 \quad (2.22)$$

$$d(a, b) = \begin{cases} \int_a^b F(x, 1) dx & \text{si } a \leq b, \\ \int_a^b F(x, -1) dx = -\int_b^a F(x, -1) dx & \text{si } b \leq a, \end{cases} \quad \forall a, b \in R \quad (2.23)$$

$$F(x, 1) - F(x, -1) \geq 0, \quad \forall x \in R \quad (2.24)$$

$$e'(x, 1) = F(x, 1); \quad e'(x, -1) = F(x, -1), \quad \forall x \in R \quad (2.25)$$

$$d(a, b) = e(b, 1) - e(a, 1) \text{ si } a \leq b; \quad d(a, b) = e(b, -1) - e(a, -1) \text{ si } b \leq a \quad \forall x \in R \quad (2.26)$$

$$e'(x, 1) - e'(x, -1) \geq 0 \quad \forall x \in R \quad (2.27)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}. \quad (4.1)$$

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ 1 + \left[ \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (4.2)$$

$$d_f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2 \quad (4.3)$$

$$d_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[a,b]}} \int_a^b F_\mu(x, y, \dot{x}, \dot{y}) ds, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2 \quad (4.4)$$

$$d_F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d_f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2 \quad (4.5)$$

$$d_\mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[a,b]}} \int_a^b F_\mu(x, y, y') dx, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2 \quad (4.6)$$

$$F_\mu(x, y, y') = \mu(x, y, y') \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ 1 + y'^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (4.7)$$

$$-\frac{\partial F_\mu}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y' \partial x} = 0 \quad (4.8)$$

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \mu(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \left[ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left[ \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right]^{1/2} \quad (4.9)$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 0 \quad (4.10)$$

$$F(x, y, y') = \mu(x, y, y') \left[ 1 + y'^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right]^{1/2} \quad (4.11)$$

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = F_f + F_\mu = \dot{y} \tan \theta + \mu(\dot{x}^2 \cos^2 \theta + \dot{y}^2)^{1/2} \quad (5.1)$$

$$F_\mu(x, y, y') = \mu(\cos^2 \theta + y'^2)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2 \quad (5.2)$$

$$-\frac{\partial F_\mu}{\partial y} + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y' \partial x} = 0 \quad (5.3)$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{y \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b \frac{ds}{v(s)}, \quad 0 \leq a_2 < b_2 \quad (6.1)$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\frac{r}{2g}} \beta \quad (6.2)$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{\frac{r}{2g}} (\theta_b - \theta_a) \quad (6.3)$$

$$d_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left( \sum_{k=1}^m \rho_k^p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right)^{1/p}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n, p \geq 1 \quad (7.1a)$$

$$d_\infty(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max\{|\rho_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})| : k \in \{1, \dots, m\}\}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n \quad (7.1b)$$

$$(|x - a_1|^p + |y - a_2|^p)^{1/p} + (|b_1 - x|^p + |b_2 - y|^p)^{1/p} = (|b_1 - a_1|^p + |b_2 - a_2|^p)^{1/p}$$

(7.2)

$$((x - a_1)^p + (y - a_2)^p)^{1/p} + ((b_1 - x)^p + (b_2 - y)^p)^{1/p} = ((b_1 - a_1)^p + (b_2 - a_2)^p)^{1/p}$$

(7.3)

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0^\pm} \frac{d_p(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \Delta s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^\pm} \frac{(|\Delta s|)^{1/p}}{\Delta s} \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} = \pm \left( \sum_{i=1}^n |\dot{x}_i|^p \right)^{1/p} \quad (7.4)$$

$$G_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{b}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0^+} \frac{\left( \sum_{i=1}^n |b_i - x_i|^p \right)^{1/p} - \left( \sum_{i=1}^n |b_i - x_i - \dot{x}_i \Delta s|^p \right)^{1/p}}{\Delta s} \quad (7.5)$$

## Anexo 2. Compendio de teoremas

En este anexo se agrupan los enunciados de los teoremas presentados en este trabajo.

**Toda combinación lineal positiva de funciones binarias que cumple una determinada propiedad PX es también una función binaria que cumple dicha propiedad. Esto permite construir funciones  $d$ -distancia a partir de otras.**

*Teorema 2.1 (Cerradura de las propiedades PX bajo combinaciones lineales positivas).* Cada una de las propiedades P1 a P9 es cerrada bajo combinaciones lineales positivas: si  $d_1, \dots, d_m$  son  $m$  funciones binarias sobre  $R^n$  que cumplen la propiedad PX ( $X = 1, \dots, 9$ ) y  $k_1, \dots, k_m$ , son  $m$  números reales no negativos, entonces la función binaria sobre  $R^n$  definida por  $d = k_1d_1 + \dots + k_md_m$  cumple la misma propiedad PX.

**El siguiente teorema caracteriza a los arcos  $d$ -inducido por dos condiciones equivalentes.**

*Teorema 2.2 (Definiciones equivalentes de arco  $d$ -inducido).* Sea una función binaria  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$ . Para todo arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  en  $R^n$  las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(a) *igualdad del triángulo:*

$$d(\mathbf{x}(s), \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(t)) + d(\mathbf{x}(t), \mathbf{b}) \quad \forall s \in [a, b] \text{ y } \forall t \in [s, b] \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$ ,  $\mathbf{x}(a) = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x}(b) = \mathbf{b}$ , es una representación paramétrica de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ;

(b) propiedad de *aditividad*: la longitud de toda partición  $P = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b})$ ,  $k \geq 1$ , de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es igual a la  $d$ -distancia del inicio al final del arco,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) \text{ para toda } P = (\mathbf{a}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{b}) \in P[C(\mathbf{a}, \mathbf{b})] \quad (2.3)$$

**El siguiente corolario establece que todo subarco de un arco  $d$ -inducido es un arco  $d$ -inducido.**

*Corolario.* Sea una función binaria  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  y  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  un arco  $d$ -inducido. Entonces:

(a) todos los subarcos de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  son arcos  $d$ -inducidos;

(b) todos los puntos de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cumplen la propiedad de identidad  $d(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = 0$  para todo  $\mathbf{c} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , y

(c)  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cumple la forma simple de la igualdad del triángulo, ecuación (2.1).

**El siguiente teorema establece que el conjunto de curvas  $d$ -inducidas es cerrado respecto de las extensiones, lo cual da un procedimiento para construir  $d$ -geodésicas.**

*Teorema 2.3. (El conjunto de las curvas  $d$ -inducidas es cerrado respecto de la operación de extensión).* Si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y  $C(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  son dos curvas  $d$ -inducidas concatenables, cuyo extremo común,  $\mathbf{b}$ , es un punto interior de algún subarco  $d$ -inducido de  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \oplus C(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ , entonces  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \oplus C(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  es una curva  $d$ -inducida.

**El siguiente teorema establece que en una función  $d$ -distancia uniforme y homogénea de grado uno todas las líneas rectas son  $d$ -geodésicas, aunque no necesariamente las únicas.**

*Teorema 2.4.* (Las líneas rectas son  $d$ -geodésicas, no necesariamente las únicas, de las funciones distancia uniformes y homogéneas de grado uno). Si  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  es una función distancia uniforme (P6) y homogénea de grado uno (P9), entonces cada línea recta de  $R^n$  es una  $d$ -geodésica.

**El siguiente teorema afirma que las funciones  $F$ ,  $G$  y  $S$  son homogéneas positivas de grado uno, y enuncia una propiedad de invariancia respecto de la representación paramétrica.**

*Teorema 2.5* (Homogeneidad positiva de las funciones  $F$ ,  $G$  y  $S$ ). Las funciones  $F$ ,  $G$  y  $S$  cumplen:

- (a) son homogéneas positivas de grado uno en el segundo argumento.
- (b) los valores  $F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))ds$ ,  $G(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{b})ds$  y  $S(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{b})ds$  no dependen de la representación paramétrica de  $\mathbf{x}$ , es decir, son invariantes bajo una transformación de la forma  $s = s(t)$ , con  $ds/dt > 0$ .

**El siguiente teorema establece que si la función lagrangiana de una función distancia existe y es continua, entonces los arcos  $d$ -inducidos forman un campo de direcciones tal que en cada punto y en cada dirección pasa un arco  $d$ -inducido.**

*Teorema 2.6* (Existencia de un arco  $d$ -inducido para cada dirección). Si la función lagrangiana  $F$  de una función distancia  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  es una función continua sobre una vecindad de  $(\mathbf{a}, \mathbf{v}) \in R^n \times R^n$ , entonces para cada dirección  $\mathbf{v} \in R^n$  existe un arco  $d$ -inducido que parte de  $\mathbf{a}$  con dirección  $\mathbf{v}$ .

**El siguiente teorema da condiciones necesarias para que exista un arco inducido de un punto a otro.**

*Teorema 2.7* (Condiciones para la existencia de arcos  $d$ -inducidos). Sean  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  una función distancia,  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$  una representación paramétrica diferenciable por la derecha del camino  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  y  $\lambda(s)^+$  la derivada por la derecha del camino  $\mathbf{x}$  en  $s$ . Entonces:

- (a) Si existe un arco  $d$ -inducido de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{b}$ , entonces el cono  $d$ -inducido en  $\mathbf{x} \in R^n$  hacia  $\mathbf{b} \in R^n$  no es vacío,  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ .
- (b)  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco  $d$ -inducido si y sólo si para todo  $s \in [a, b]$  se cumple cualquiera de las siguientes dos condiciones, las cuales son equivalentes:
  - (i)  $D(\mathbf{x}(s), \lambda(s)^+, \mathbf{b})$  existe y vale cero;
  - (ii)  $\lambda(s)^+ \in K(\mathbf{x}(s), \mathbf{b})$ .

**El siguiente teorema establece condiciones para que una función distancia determine una funcional longitud, respecto de la cual la  $d$ -longitud de un arco  $d$ -inducido es igual a la  $d$ -distancia entre sus extremos.**

*Teorema 2.8* (Condiciones para que una función distancia determine una funcional longitud, respecto de la cual la  $d$ -longitud de un arco  $d$ -inducido es igual a la  $d$ -distancia entre sus extremos). Una función distancia  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  cuya función lagrangiana  $F$  es una función acotada, y continua salvo por un número finito de

discontinuidades (por tanto integrable), determina una funcional sobre el conjunto de los arcos suaves por pedazos,  $\ell_d : \Omega \rightarrow R$ , dada por

$$\ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds \quad \forall C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega \quad (2.8)$$

El valor de esta funcional para un arco  $d$ -inducido,  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , es igual a la  $d$ -distancia entre sus extremos,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ .

**El siguiente teorema establece que la desigualdad del triángulo equivale a una condición de subaditividad.**

*Teorema 2.9. (La desigualdad del triángulo como una condición de subaditividad)*

Una función binaria  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  cumple la desigualdad del triángulo (P2) si y solamente si cumple la propiedad de *subaditividad* siguiente: la  $d$ -distancia  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  ente los puntos extremos de una sucesión  $P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}) \in P[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  con inicio  $\mathbf{a}$  y final  $\mathbf{b}$ , es menor o igual que la longitud  $\Lambda(P)$  de la sucesión, es decir,

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \sum_{i=0}^k d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}), \quad \forall P = (\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}) \in P[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad (2.10)$$

o sea,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \Lambda(P)$  para toda  $P \in P[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

**El siguiente teorema establece condiciones suficientes para que la  $d$ -longitud mínima y la  $d$ -distancia de un punto a otro sean iguales. Esta igualdad constituye una relación entre  $d$  y  $F$ , que es precisamente la relación inversa de la que define a la función lagrangiana  $F$  en términos de su  $d$ -distancia (ecuación (2.5)).**

*Teorema 2.10 (Condiciones para que la  $d$ -longitud mínima y la  $d$ -distancia de un punto a otro sean iguales).* Si  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  es una función distancia completa cuya función lagrangiana  $F$  es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (por tanto integrable), entonces las dos siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) la función distancia  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  cumple la desigualdad del triángulo (P2);
- (b) la  $d$ -distancia de un punto  $\mathbf{a}$  a un punto  $\mathbf{b}$  es igual a la  $d$ -longitud mínima de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ :

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n. \quad (2.12)$$

**El siguiente teorema establece que en una premétrica, no necesariamente completa, un arco es un arco  $d$ -mínimo si y solamente si es un arco  $d$ -inducido.**

*Teorema 2.11 (En una premétrica los arcos  $d$ -inducidos son arcos  $d$ -mínimos).* Si  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  es una premétrica cuya función lagrangiana  $F$  es una función acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (por tanto integrable), y  $\ell_d : \Omega \rightarrow R$  su correspondiente funcional longitud, dada por (2.8), entonces:

- (a)  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$ ,
- (b)  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  si y sólo si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco  $d$ -inducido.
- (c) Un arco es  $d$ -mínimo si y solo si es un arco  $d$ -inducido.

**El siguiente teorema proporciona bases para modelar una premétrica completa a partir de una función lagrangiana.**

*Teorema 2.12 (Obtención de una premétrica completa a partir de una función lagrangiana).* Para que una función  $F: R^n \times R^n \rightarrow R$  determine una premétrica  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  mediante la ecuación (2.12), es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones de los incisos (a)-(c) siguientes, en cuyo caso la premétrica  $d$  es completa:

- (a)  $F(x_1(s), \dots, x_n(s), \dot{x}_1(s), \dots, \dot{x}_n(s))$  es una función homogénea positiva de grado uno en  $\dot{x}_1(s), \dots, \dot{x}_n(s)$ ,
- (b) para todo arco suave,  $F(s)$  es una función integrable
- (c) el mínimo en la ecuación (2.12) existe para todo par de puntos  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$ .

**El siguiente teorema enuncia propiedades de una funcional longitud**

*Teorema 2.13 (Propiedades de la función lagrangiana de una funcional longitud)* Si  $\ell: \text{Dom } \ell \rightarrow R$  es una funcional longitud, entonces su función lagrangiana, dada por (2.14), cumple:

- (a) No depende explícitamente del parámetro  $s$ .
- (b) Es una función homogénea positiva de grado uno en el segundo argumento,  $\dot{\mathbf{x}}(s)$ .
- (c) Si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Dom } \ell \subseteq \Omega_{[a, b]}$  es un arco suave por pedazos, parametrizado por  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ , entonces (2.8).

**El siguiente teorema relaciona una premétrica y su funcional longitud.**

*Teorema 2.14 (Relaciones de una premétrica con su funcional longitud).* Sean una premétrica  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ , cuya función lagrangiana es acotada, y continua salvo por un número finito de discontinuidades (y por tanto integrable), y  $\ell_d: \Omega \rightarrow R$  su correspondiente funcional longitud, dada por (2.15). Entonces:

- (a)  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ , para todo  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \Omega$ .
- (b)  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \ell_d(C(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  si y sólo si  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  es un arco  $d$ -inducido.
- (c) Si un arco es  $d$ -inducido entonces es un arco  $d$ -mínimo.
- (d) Si existe un arco  $d$ -inducido del punto  $\mathbf{a}$  al punto  $\mathbf{b}$ , entonces (2.12).
- (e) Si la premétrica  $d$  es completa entonces la funcional longitud  $\ell_d$  es completa.

**Las  $d$ -geodésicas contienen a todos los arcos  $d$ -inducidos. En toda premétrica dos puntos distintos o bien un punto y una dirección determinan una  $d$ -geodésica:**

*Teorema 2.15 (Dos propiedades de las  $d$ -geodésicas de una cuasimétrica continua y completa).* Si  $d: R^n \times R^n \rightarrow R$  es una cuasimétrica continua y completa, entonces:

- (a) dado un par ordenado de puntos de  $R^n$  existe al menos una  $d$ -geodésica que contiene un arco  $d$ -inducido que los une;
- (b) dado un punto de  $R^n$  y una dirección, existe al menos una  $d$ -geodésica que pasa por ese punto en esa dirección.

*Teorema de la función implícita.* Sea  $f: S \rightarrow R$  con  $S \subseteq R^n \times R$  una función clase  $C^1$  sobre un conjunto abierto  $S$  en  $R^{n+1}$  con valores en  $R$ . Sea  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  un punto en  $S$  para el cual  $f(\mathbf{x}_0, t_0) = 0$ ,  $D_t f(\mathbf{x}_0, t_0) \neq 0$ . Entonces existen un intervalo abierto  $T_0$  conteniendo  $t_0$  y una única función  $\mathbf{g}: T_0 \rightarrow R^n$  tales que:

- a)  $\mathbf{g}$  es clase  $C^1$  sobre  $T_0$ ;

- b)  $\mathbf{g}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ;  
 c)  $f(\mathbf{g}(t); t) = 0$  para todo  $t \in T_0$ .

**El siguiente teorema caracteriza las cuasimétricas completas.**

*Teorema 2.16 (Caracterización de una cuasimétrica completa).* Toda cuasimétrica clase  $C^1$  es completa.

*Corolario.* Si  $d : R^n \times R^n \rightarrow R$  es una premétrica estrictamente positiva clase  $C^1$  sobre  $R^n \times R^n$ , entonces (2.1) implica (2,3), es decir, para que un arco sea  $d$ -inducido es suficiente que su representación paramétrica  $\mathbf{x}$  cumpla (2.1).

**Cuando  $n \geq 2$  el arco inducido por  $d$  que inician (termina) en  $\mathbf{a}$  forma un ángulo con el vector normal a una  $d$ -esfera, que puede ser calculado de acuerdo con el siguiente teorema. El procedimiento es el mismo para esferas  $S_d^+(\mathbf{a}, d(\mathbf{a}, \mathbf{x}))$  y  $S_d^-(\mathbf{a}, d(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$ . Este teorema tiene un corolario que se aplica cuando la premétrica es isotrópica.**

*Teorema 2.17 (Ángulo entre arcos inducidos e isodistancias).* Sea  $d$  una premétrica completa clase  $C^1$  casi en todas partes y estrictamente positiva sobre  $R^2$ . Si  $\mathbf{x} \in R^2$  es un punto de la imagen de un camino  $\mathbf{x}$  y  $\hat{\mathbf{n}} \in S^2$  es el vector unitario normal a la  $d$ -esfera en ese punto  $\mathbf{x}$  en el sentido en que  $d$  aumenta, entonces la dirección  $\dot{\mathbf{x}} \in S^2$  del arco inducido de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{x}$  es la que resuelve  $\min\{F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})/(\dot{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) : \dot{\mathbf{x}} \in S^2, (\dot{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \geq 0\}$ , es decir, el ángulo  $\theta$  de llegada del arco inducido con respecto a  $\hat{\mathbf{n}}$  es el que hace mínima la función  $F(\mathbf{x}, \theta)/\cos\theta$ ,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ , donde  $\cdot$  representa producto escalar.

*Corolario (Caso isotrópico).* En las condiciones del teorema anterior, en los puntos  $\mathbf{x} \in R^n$  en los que la premétrica  $d$  es isotrópica, los arcos  $d$ -inducidos son ortogonales a las superficies  $d$ -isodistancia.

**En ocasiones interesa modelar funciones distancia sobre  $R$ . La relación biunívoca entre la función lagrangiana y su premétrica se especifica para este caso en el siguiente teorema.**

*Teorema 2.18 (Condición necesaria y suficiente para que una función lagrangiana induzca una premétrica en  $R$ ).* La función binaria  $d$  sobre  $R$  definida por (2.23) es una premétrica si y sólo si la función lagrangiana  $F$  cumple (2.24), en cuyo caso la premétrica es completa.

*Corolario.* La función distancia dada por (2.26) es una pseudométrica ( $d$  no negativa y simétrica) si y sólo si  $e(x, 1) = -e(x, -1)$  y  $e^{\prime}(x, 1) \geq 0$  para todo  $x \in R$ , en cuyo caso  $d(a, b) = |e(b, 1) - e(a, 1)|$  para todo  $x \in R$ , y es una métrica si y sólo si además  $e^{\prime}(x, 1) > 0$  para todo  $x \in R$ . En particular, para  $e(x, 1) = -e(x, -1) = x^n$  con  $n \geq 1$  la correspondiente función distancia  $d(a, b) = |b^n - a^n|$  es una métrica, la cual es uniforme únicamente para  $n = 1$ , que corresponde a la métrica euclidiana en  $R$ .

**En el modelado de funciones distancia es útil aprovechar el hecho de que una  $d$ -geodésica o arco inducido que es común a un conjunto de premétricas, es también un arco inducido de toda combinación lineal positiva de esas premétricas.**

*Teorema 3.1 (Arcos inducidos por una combinación lineal positiva de premétricas).* Sea una premétrica  $d$  sobre  $R^n$ , definida como una combinación lineal positiva de  $m$



premétricas  $d_1, \dots, d_m$  sobre  $R^n$ ,  $d = k_1d_1 + \dots + k_md_m$ , donde  $k_1, \dots, k_m$ , son  $m$  números reales positivos. Entonces todo arco que es arco inducido por todas las premétricas  $d_1, \dots, d_m$ , es también arco inducido por  $d$ . Si las premétricas  $d_1, \dots, d_m$  son no negativas (métricas débiles), entonces todo arco inducido por  $d$  es también un arco inducido por todas las premétricas  $d_1, \dots, d_m$ . Estas afirmaciones se cumplen si se sustituye “arco inducido” por “geodésica”.

**Toda premétrica  $d_h$  que proviene de una función cumple que si se suma a otra premétrica  $d_F$ , la premétrica suma tiene exactamente las mismas geodésicas que está última.**

*Teorema 3.2 (Geodésicas de una suma de premétricas).* Sea  $d_F$  una premétrica y  $d_h$  la premétrica asociada a la función  $h: R^n \rightarrow R$ . Entonces las geodésicas de  $d_F$  y las geodésicas de la distancia suma,  $d = d_h + d_F$ , coinciden.

**Las combinaciones tipo Minkowski de métricas débiles y completas dan por resultado métrica débiles no necesariamente completas.**

*Teorema 7.1 (Combinación tipo Minkowski de métricas débiles).* Toda combinación  $K_p$  de métricas débiles  $\rho_k$  sobre  $R^n$  inducidas por pares  $(u_k, \gamma_k)$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ , donde cada  $\gamma_k$  es completa, es una métrica débil sobre  $R^n$ , la cual no necesariamente es completa.

*Corolario.* En las condiciones del teorema anterior, si las funciones  $u_k: R^n \rightarrow R$  constituyen un sistema de coordenadas del espacio  $R^n$ , entonces  $d_p$  es una cuasimétrica, pseudométrica, pseudométrica o pseudométrica uniforme si y sólo si cada  $\gamma_k: R \times R \rightarrow R$  es una cuasimétrica, pseudométrica, pseudométrica o pseudométrica uniforme, respectivamente..

**En todas las métricas  $\ell_p$  un arco inducido entre dos puntos dados es el segmento de recta que los une. Para  $p = 1$  cualquier arco monótono que une dos puntos fijos es un arco inducido por la métrica.**

*Teorema 7.2 (Arcos inducidos por las métricas  $L_p$ ).* Para toda métrica  $L_p$  ( $p \geq 1$  o  $p = \infty$ ), el segmento de recta que une dos puntos es un arco inducido, aunque no necesariamente es el único: para  $p = 1$  o  $p = \infty$  los arcos monótonos, en algún sentido, que unen dos puntos son arcos inducidos.

## Anexo 3. Subarcos simples de un arco

Se demuestra que todo arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  contiene un subarco sin ciclos con los mismos extremos. Esta afirmación es evidente para  $n = 1$ , por lo que se supone que  $n \geq 2$ . La demostración consiste en probar que todo arco con un número finito de ciclos contiene un subarco simple con los mismos extremos, y que todo arco con un número infinito de ciclos contiene un subarco con un número finito de ciclos y los mismos extremos.

### A.3.1 Definiciones

Un *arco* en  $R^n$  con inicio  $\mathbf{a} \in R^n$  y final  $\mathbf{b} \in R^n$ , es la imagen  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de una función continua  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ , con  $\mathbf{x}(a) = \mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}(b) = \mathbf{b}$ , llamada *camino* o *parametrización* del arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Un intervalo abierto  $(t_1, t_2) \subseteq [a, b]$  es un *ciclo* del camino  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  si:

- (a)  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$ ;
- (b) existe una  $t' \in (t_1, t_2)$  tal que  $\mathbf{x}(t') \neq \mathbf{x}(t_1)$ .

En estas condiciones, el punto  $\mathbf{c} = \mathbf{x}(t_1) \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  se denomina *punto de cruce* del ciclo  $(t_1, t_2)$ . Cada ciclo tiene asociado un único punto de cruce, pero un punto puede ser punto de cruce de varios ciclos.

Un ciclo del camino  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ ,  $(s_1, s_2) \subseteq [a, b]$ , es un *ciclo simple* si:

- (a)  $\mathbf{x}(s_1) = \mathbf{x}(s_2)$ ;
- (b) para todo  $t \in (s_1, s_2)$ ,  $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{x}(s_1)$ ;

Por la continuidad de la función  $\mathbf{x}$ , todo ciclo  $(t_1, t_2) \subseteq [a, b]$  contiene un ciclo simple  $(s_1, s_2) \subseteq (t_1, t_2)$  con el mismo punto de cruce. Por tanto, un arco no tiene ciclos si y solamente si no tiene ciclos simples. En adelante solo se consideran ciclos simples, por lo que el término *simple* se omite generalmente. La expresión *ciclo* se refiere tanto a un ciclo del camino  $\mathbf{x}$ ,  $(t_1, t_2)$ , como a su imagen,  $\mathbf{x}((t_1, t_2)) \subseteq C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

El conjunto formado por el intervalo  $[a, b]$  y los ciclos simples de  $\mathbf{x}$  se denota por  $S(\mathbf{x})$ , y se denomina *conjunto de los intervalos soporte*. Sus elementos se denominan *intervalos soporte* y se denotan por  $A, B$ , etc. Excepto el intervalo  $[a, b]$ , todos los demás intervalos soporte son ciclos simples, cada uno de los cuales está contenido propiamente en a lo más un número finito de intervalos soporte de  $\mathbf{x}$  (lema 3). Por tanto, la intersección de todos los intervalos soporte de  $\mathbf{x}$  que contienen propiamente un ciclo  $A$  es un intervalo soporte bien definido, que se denota por  $A'$  y se denomina *intervalo soporte del ciclo  $A$* . Es decir,  $A' \in S(\mathbf{x})$  es el intervalo soporte "más pequeño" que contiene propiamente al ciclo  $A$ , y por tanto contiene también a sus extremos:  $A \subset A'$  si y solamente si no existe otro  $C \in S(\mathbf{x})$  tal que  $A \subset C \subset A'$ . El conjunto de ciclos de  $\mathbf{x}$  cuyo intervalo soporte es  $H \in S(\mathbf{x})$  se denota por  $K(H)$ ,

$$K(H) = \{A \in S(\mathbf{x}) : A' = H\}.$$

Los *ciclos máximos* de un conjunto arbitrario de ciclos son los ciclos de ese conjunto que no están contenidos en ningún ciclo del conjunto. El conjunto de los ciclos máximos de un conjunto  $K$  se denota por  $M(K)$ ,  $M(K) \subseteq K$ . Los ciclos cuyo intervalo soporte es  $H \in S(\mathbf{x})$  se pueden intersectar pero no se contienen entre sí, y por

tanto todos ellos son ciclos máximos de  $K(H)$ . En otras palabras, par todo intervalo soporte  $H \in S(\mathbf{x})$ ,  $M(K(H)) = K(H)$ . Si  $K(H)$  es vacío el intervalo soporte  $A$  se dice *vacío* o sin ciclos. Los ciclos cuyo intervalo soporte es  $[a, b]$  se denota por  $K(\mathbf{x})$ , y por lo anterior sus elementos son ciclos máximos. Un camino  $\mathbf{x}$  es simple si y solamente si  $K(\mathbf{x})$  es un conjunto vacío.

Se definen las funciones *valor inicial*,  $i$ , y *valor final*,  $f$ , sobre  $S(\mathbf{x})$  por

$$i(A) = \inf A, \quad f(A) = \sup A, \quad \text{para todo } A \in S(\mathbf{x})$$

así como la relación binaria,  $\leq$ , llamada *relación de referencia* sobre  $S(\mathbf{x})$ ,

$$A \leq B \text{ si y solo si } i(A) \leq i(B), \quad \text{para todo } A, B \in S(\mathbf{x})$$

### A.3.2 Eliminación de ciclos

*Lema 1. (Eliminación de un ciclo simple).* Si  $A$  es un ciclo simple de un camino  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$  con punto de cruce  $\mathbf{c}$ , entonces la función  $\mathbf{q} : [a, b] \rightarrow R^n$  dada por

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{c} \text{ para } t \in A, \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{x}(t) \text{ para } t \in [a, b] - A,$$

es un camino con los mismos extremos que  $\mathbf{x}$ , el cual contiene los mismos ciclos que  $\mathbf{x}$ , excepto el ciclo  $A$ , los ciclos contenidos por  $A$  y los ciclos que se intersecan con  $A$ .

*Demostración.* La continuidad de  $\mathbf{x}$  implica la continuidad de la función  $\mathbf{q}$ , la cual está definida sobre el intervalo  $[a, b]$ . Si  $B \subseteq A$ , entonces  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$  para todo  $t \in B$ , por lo que  $B$  no es un ciclo de  $\mathbf{q}$ . Si  $B$  se interseca con  $A$  pero no está contenido en  $A$ , entonces  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \cap B \neq A$ , y por tanto  $\mathbf{q}(i(B)) \neq \mathbf{q}(f(B))$  y  $B$  no es un ciclo de  $\mathbf{q}$ . Si el ciclo  $B$  no se interseca con  $A$ , entonces es claro que  $B$  es también un ciclo de  $\mathbf{q}$ . Si  $B$  contiene a  $A$  entonces  $A \subset B$ ,  $i(B) < i(A) < f(A) < f(B)$  y por tanto  $\mathbf{q}(i(B)) = \mathbf{q}(f(B))$  y  $B$  es un ciclo de  $\mathbf{q}$ .

Q.E.D.

Un conjunto  $Q$  de ciclos máximos con el mismo intervalo soporte  $H \in S(\mathbf{x})$ ,  $Q \subseteq K(H)$  es un *conjunto completo de  $H$* , si sus elementos son ajenos entre sí y todo ciclo en  $K(H)$  se interseca con al menos un elemento de  $Q$ . Con los cambios evidentes, el siguiente lema es aplicable a cualquier intervalo soporte, pero se enuncia en términos del intervalo  $[a, b]$  porque es el que determina si un camino  $\mathbf{x}$  tiene ciclos o no.

*Lema 2 (Eliminación de un conjunto completo de ciclos).* Sea  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$  un camino y  $Q \subseteq S(\mathbf{x})$  un conjunto de ciclos máximos de  $[a, b]$  ajenos entre sí. Entonces:

(a) la función  $\mathbf{q} : [a, b] \rightarrow R^n$  dada por

$$\mathbf{q}(t) = i(A) \text{ si } t \in A \in Q, \text{ y } \mathbf{q}(t) = \mathbf{x}(t) \text{ si } t \in [a, b] - \bigcup_{A \in Q} A,$$

es un camino con los mismos extremos que  $\mathbf{x}$ , el cual contiene los mismos ciclos que  $\mathbf{x}$ , excepto los ciclos en  $Q$ , los ciclos contenidos por algún ciclo en  $Q$ , y los ciclos que se intersecan con algún ciclo en  $Q$ .

- (b) si  $Q$  es un conjunto completo de  $[a, b]$  entonces el camino  $\mathbf{q}$  es simple;  
 (c) todo camino con un número finito de ciclos tiene un subcamino simple con los mismos extremos.

*Demostración.* (a) La función  $\mathbf{q}$  está bien definida porque los elementos en  $Q$  no se intersecan, y es una función continua porque la función  $\mathbf{x}$  es una función continua.

(b) Inmediato del inciso anterior y de la definición de conjunto completo de ciclos.

(c) Si el camino  $\mathbf{x}$  tiene un número finito de ciclos, entonces se puede formar un conjunto completo  $Q$  de ciclos siguiendo el siguiente procedimiento: a partir de un ciclo máximo, o de varios que son ajenos entre sí, se va incluyendo un ciclo tras otro que no se interseque con las que ya están, hasta que no es posible agregar ninguno más porque se interseca con alguno de los que ya elegidos. El conjunto así obtenido es completo, y el correspondiente camino  $\mathbf{q}$  definido por el inciso (a) a partir de  $\mathbf{x}$ , no contiene ciclos máximos, y por tanto no contiene ciclos. Q.E.D.

En las condiciones de los lemas 1 y 2 se dice que  $\mathbf{q}$  es el *subcamino de  $\mathbf{x}$  con los mismos extremos* que resulta de *colapsar*: el ciclo  $A$  para el caso del lema 1, el conjunto  $Q$  para el caso del lema 2. Los ciclos que están en  $\mathbf{x}$  pero no en  $\mathbf{q}$  son *ciclos eliminados*.

### A.3.3 Puntos de acumulación de ciclos

Un *punto de acumulación (de ciclos)* de un camino  $\mathbf{x}$  es un valor  $h \in [a, b]$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  el conjunto  $K(h, \varepsilon)$  de los ciclos contenidos en el intervalo  $[h - \varepsilon, h + \varepsilon]$ , dado por

$$K(h, \varepsilon) = \{A \in C(\mathbf{x}) : h - \varepsilon \leq i(A) < f(A) \leq h + \varepsilon\},$$

contiene al menos un ciclo de  $\mathbf{x}$ . Equivalentemente,  $h \in [a, b]$  es un punto de acumulación si y solo si para todo  $\varepsilon > 0$  el conjunto  $K(h, \varepsilon)$  contiene un número infinito de elementos.

El conjunto  $K(h, \varepsilon)$  es la unión ajena de tres conjuntos de ciclos:

$$K_0(h, \varepsilon) = \{A \in C(\mathbf{x}) : i(A) + \varepsilon \geq h \geq f(A) - \varepsilon\}$$

$$K_1(h, \varepsilon) = \{A \in C(\mathbf{x}) : i(A) + \varepsilon \leq h, f(A) \leq h\}$$

$$K_2(h, \varepsilon) = \{A \in C(\mathbf{x}) : h \leq i(A), h \leq f(A) - \varepsilon\}$$

Si para todo  $\varepsilon > 0$  el conjunto  $K_0(h, \varepsilon)$ ,  $K_1(h, \varepsilon)$  o  $K_2(h, \varepsilon)$  contiene al menos un elemento, entonces el punto  $h$  es un *punto de acumulación* del camino  $\mathbf{x}$ , en el primer caso de *ciclos anidados*, en el segundo de *ciclos a la izquierda*, y en el tercero de *ciclos a la derecha (de  $h$ )*, respectivamente, donde *derecha* e *izquierda* son relativas al sentido de la parametrización  $\mathbf{x}$  del camino  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . A los puntos de acumulación de ciclos a la derecha y a la izquierda se les llama *puntos de acumulación de ciclos no anidados*.

### A.3.4 Puntos de acumulación de ciclos anidados.

*Lema 3.* Sea un camino  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$ . Todo intervalo  $(i, f) \subseteq [a, b]$ ,  $i > f$ , está contenido en un número finito de ciclos de  $\mathbf{x}$ . La intersección de un número infinito de ciclos de  $\mathbf{x}$  es una de dos, un punto de  $[a, b]$  o bien el conjunto vacío.

*Demostración.* Sea una sucesión infinita de ciclos simples,  $A_1, A_2, \dots$ , de un camino  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ , tal que  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$ . Las sucesiones  $i_1 < i_2 < \dots$  y  $f_1 > f_2 > \dots$  de los respectivos valores iniciales y finales son sucesiones monótonas acotadas, la primera creciente y la segunda decreciente, con  $i_n < f_n$  para todo  $n$ , por lo que sus respectivos límites,  $i, f$ , cumplen  $i \leq f$ . Las imágenes en  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de los elementos de estas sucesiones forman una sucesión de puntos de cruce,  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{x}(i_1) = \mathbf{x}(f_1)$ ,  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{x}(i_2) = \mathbf{x}(f_2)$ ,  $\dots$ , cuyo límite, por la continuidad de  $\mathbf{x}$ , cumple  $\mathbf{x}(i) = \mathbf{x}(f) = \mathbf{c} \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Toda vecindad de  $\mathbf{c}$  debe contener una infinidad de puntos de la sucesión  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots$ , es decir, la imagen inversa bajo  $\mathbf{x}$  de cualquier vecindad de  $\mathbf{c}$  debe contener un número infinito de elementos de ambas sucesiones,  $i_1 < i_2 < \dots$  y  $f_1 > f_2 > \dots$ , lo cual implica que  $i = f$ . Esto significa que un intervalo, y por tanto un ciclo, no puede estar contenido en un número infinito de ciclos de un camino  $\mathbf{x}$ . De aquí resultan las afirmaciones del lema.

Q.E.D.

El Lema 3 elimina la posibilidad de que un intervalo pueda estar contenido en un número infinito de ciclos de  $\mathbf{x}$ , lo que permite caracterizar a los puntos de acumulación de ciclos anidados como aquellos puntos  $h$  contenidos en un número infinito de intervalos soporte (ver Fig. A3.1).

*Lema 4. (Separabilidad y eliminación de los puntos de acumulación de ciclos anidados)* Sea un camino  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ . Entonces:

- (a) todo punto de acumulación de ciclos anidados de  $\mathbf{x}$  está contenido en un ciclo que no contiene a ningún otro punto de acumulación de ciclos anidados de  $\mathbf{x}$ ;
- (b)  $\mathbf{x}$  contiene un subcamino  $\mathbf{q}$  con los mismos extremos que  $\mathbf{x}$ , el cual no contiene puntos de acumulación de ciclos anidados.

*Demostración.* (a) Sea  $h$  un punto de acumulación de ciclos anidados de  $\mathbf{x}$ . Todo ciclo  $A$  en  $K_0(h, \varepsilon)$  contiene al punto  $h$ . Si  $A$  contiene *otro* punto de acumulación con ciclos anidados, entonces existe un  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeño tal que los ciclos en  $K(h, \varepsilon_0)$  contienen a  $h$  pero no al otro punto de acumulación, porque si esto no fuera así ambos puntos de acumulación son el mismo punto.

(b) Por la afirmación del inciso anterior, el conjunto de todos los puntos de acumulación de ciclos anidados del camino  $\mathbf{x}$  se puede cubrir por un conjunto  $Q$  de ciclos ajenos, cada uno de los cuales contiene exclusivamente uno y solo uno de estos puntos de acumulación. La función  $\mathbf{q}$  del lema 2 es una función continua con los mismos extremos que  $\mathbf{x}$ , y es un camino que no contiene a los ciclos en  $Q$ , y por tanto no contiene ningún punto de acumulación de ciclos anidados.

Q.E.D.

### A.3.5 Puntos de acumulación de ciclos no anidados.

Un punto  $h \in [a, b]$  es un *punto de acumulación de un intervalo soporte*  $H \in S(\mathbf{x})$ , si para todo  $\varepsilon > 0$  al menos uno de los intervalos  $[h - \varepsilon, h]$  o  $[h, h + \varepsilon]$  contiene un número infinito de ciclos del intervalo soporte  $H \in S(\mathbf{x})$  (ver Fig A3.2). Equivalentemente,  $h \in [a, b]$  es punto de acumulación del intervalo soporte  $H$  si y solo si para todo  $\varepsilon > 0$  al menos uno de los siguientes conjuntos contiene un número infinito de elementos,

$$K_1(H, h, \varepsilon) = \{A \in K(H) : i(A) + \varepsilon \leq h, f(A) \leq h\} \text{ o}$$

$$K_2(H, h, \varepsilon) = \{A \in K(H) : h \leq i(A), h \leq f(A) - \varepsilon\},$$

donde  $K(H)$  denota el conjunto de ciclos cuyo intervalo soporte es  $H$ . Si el conjunto  $K_1(H, h, \varepsilon)$  (el conjunto  $K_2(H, h, \varepsilon)$ ) contiene un número infinito de elementos, entonces el punto de acumulación  $h$  del intervalo soporte  $H$  se denomina *de ciclos a la izquierda* (*de ciclos a la derecha*) *de  $h$*  (respectivamente).

Es inmediato que un punto de acumulación de un intervalo soporte es también un punto de acumulación del camino, y que un punto puede ser un punto de acumulación de ciclos a la izquierda de un intervalo soporte y al mismo tiempo ser un punto de acumulación de ciclos a la derecha del mismo o de otro intervalo soporte. Todo punto de acumulación de un intervalo soporte  $H$  se puede encontrar en el intervalo abierto  $(i(H), f(H))$  o en uno de sus extremos,  $i(H)$ , o  $f(H)$ , es decir, se encuentra en el intervalo cerrado  $[i(H), f(H)]$ .

Un punto de acumulación de un intervalo soporte  $H$  se puede definir también como un punto  $h \in [a, b]$  tal que la longitud del ciclo,  $f(A) - i(A)$ ,  $A \in K(H)$ , tiende a cero cuando el valor inicial  $i(A)$  tiende a  $h$  de izquierda a derecha (punto de acumulación a la izquierda) o cuando el valor final  $f(A)$  tiende a  $h$  de derecha a izquierda (punto de acumulación a la derecha).

*Lema 5. (Separabilidad de los puntos de acumulación de ciclos no anidados).* Sea un camino  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$ . Entonces:

(a) Todo punto de acumulación  $h \in [a, b]$  de ciclos a la izquierda (derecha) de un camino,  $\mathbf{x}$ , es un punto de acumulación de ciclos a la izquierda (derecha) de un único intervalo soporte del camino,  $H \in S(\mathbf{x})$ .

(b) Los puntos de acumulación de un intervalo soporte  $H \in S(\mathbf{x})$  se encuentran en el conjunto  $Z(H)$  definido por

$$Z(H) = \{s \in H : s \notin A \text{ para todo } A \in K(H)\} \cup \{i(H), f(H)\}$$

(c) Si  $h_1$  y  $h_2$  son dos puntos de acumulación de un intervalo soporte,  $H \in S(\mathbf{x})$ ,  $h_1$  de ciclos a la derecha y  $h_2$  de ciclos a la izquierda, y  $h_1 < h_2$ , entonces existe al menos un  $z \in Z(H)$  tal que  $h_1 < z < h_2$ .

*Demostración.* (a): Sea  $h \in [a, b]$  un punto de acumulación de ciclos a la izquierda de  $\mathbf{x}$ . Entonces existe una sucesión infinita de ciclos,  $A_1, A_2, \dots$ , tal que sus respectivos valores iniciales y finales forman sucesiones monótonas  $i_1 < i_2 < \dots$ , y  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ , las cuales convergen al punto  $h$ . Las imágenes en  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de los respectivos pares de valores  $(i_1, f_1)$ ,  $(i_2, f_2)$ ,  $\dots$ , forman una sucesión de puntos de cruce,  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{x}(i_1) = \mathbf{x}(f_1)$ ,  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{x}(i_2) = \mathbf{x}(f_2)$ ,  $\dots$ , la cual por la continuidad de  $\mathbf{x}$  converge al punto  $\mathbf{c} = \mathbf{x}(h) \in C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Por la continuidad de  $\mathbf{x}$ , cualquier vecindad de  $\mathbf{c}$  contiene una infinidad de puntos de la sucesión,  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots$ , y además ningún par de ciclos puede coincidir en su inicio o en su final. Por tanto existe una vecindad abierta de  $\mathbf{c}$  suficientemente pequeña tal que su imagen inversa contiene ciclos contenidos exclusivamente en uno y solo uno de los intervalos soporte de  $\mathbf{x}$ ,  $H$ . El correspondiente intervalo cerrado  $[i(H), f(H)]$  contiene a  $h$  y a una infinidad de ciclos de la sucesión  $A_1, A_2, \dots$ , y por tanto  $h$  es punto de acumulación del intervalo soporte  $H$ , y no de otro intervalo soporte de  $\mathbf{x}$ . Lo mismo para un punto de acumulación de ciclos a la izquierda.

(b) Si  $h$  es el punto límite a la izquierda o a la derecha de una sucesión  $A_1, A_2, \dots$ , de ciclos en  $K(H)$ , entonces  $h \in A \in S(\mathbf{x})$  implica que  $A$  contiene una infinidad de elementos de la sucesión  $A_1, A_2, \dots$ , y por tanto  $A$  no puede ser elemento de  $K(H)$ . De otra manera,  $h$  no puede pertenecer a un ciclo en  $K(H)$ . Por otro lado, los valores inicial y final del ciclo  $H$  puede ser cada uno un punto de acumulación de  $H$ , de ciclos a la derecha y de ciclos a la izquierda, respectivamente, por lo que dichos valores deben estar incluidos en  $Z(H)$ .

(c) Si el intervalo abierto  $(h_1, h_2)$  no tiene ningún punto de  $Z(H)$ , entonces por el inciso (b) tampoco contiene puntos de acumulación de  $H$  ni ciclos cuyo intervalo soporte es  $H$ , y por tanto  $h_1$  solo puede ser punto de acumulación a la izquierda y  $h_2$  punto de acumulación a la derecha, lo que contradice la hipótesis.

Q.E.D.

En el siguiente apartado se demuestra que todo camino con puntos de acumulación de ciclos a la izquierda o a la derecha, contiene un subarco con los mismos extremos, el cual no contiene puntos de acumulación de ciclos a la izquierda o a la derecha.

#### A.3.6 Eliminación de los puntos de acumulación de ciclos a la derecha y a la izquierda

La expresión “punto de acumulación” se refiere aquí a puntos de acumulación de ciclos a la derecha o a la izquierda. El procedimiento para eliminar estos puntos de acumulación no depende del intervalo soporte donde se encuentren los ciclos correspondientes. Por tanto, no hay pérdida de generalidad si se considera la eliminación de los puntos de acumulación del intervalo  $[a, b]$ . Este intervalo incluye a sus extremos, por lo que por el inciso (b) del lema 5, los puntos en donde pueden ubicarse sus puntos de acumulación están en el conjunto  $Z(\mathbf{x})$  dado por

$$Z(\mathbf{x}) = \{s \in [a, b] : s \notin A \text{ para todo } A \in K(\mathbf{x})\}.$$

Los ciclos máximos de  $[a, b]$  son los que tienen a este intervalo como intervalo soporte, los cuales forman el conjunto que se denota por  $K(\mathbf{x})$ . Por el inciso (b) del Lema 2, el problema es demostrar que el conjunto de ciclos  $K(\mathbf{x})$  contiene un conjunto completo de ciclos,  $\mathcal{Q}$ . Esto se va a hacer descomponiendo el camino  $\mathbf{x}$  en subcaminos llamados estándar.

Un *camino estándar* es un camino  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$  con a lo más un punto de acumulación, el cual solo puede encontrarse en uno de sus dos extremos. Hay tres tipos posibles de caminos estándar:

- (a) *camino estándar tipo 0*:  $\mathbf{x}$  no contiene puntos de acumulación;
- (b) *camino estándar tipo 1*:  $b$  es el único punto de acumulación (necesariamente a la izquierda);
- (c) *camino estándar tipo 2*:  $a$  es el único punto de acumulación (necesariamente a la derecha).

Los caminos estándar tipo 1 y tipo 2 difieren solo en el sentido de la representación paramétrica; esta distinción es conveniente para la siguiente definición.

Una *descomposición en caminos estándar* de un camino  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow R^n$ , es un conjunto de subcaminos de la forma  $\mathbf{z} : [z_1, z_2] \rightarrow R^n$ , donde  $z_1, z_2 \in Z(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{z}$  es la

restricción de  $\mathbf{x}$  al intervalo  $[z_1, z_2]$ , cuya concatenación es el propio camino  $\mathbf{x}$ , cada uno de los cuales es un camino estándar, llamado *subcamino estándar de  $\mathbf{x}$* .

Al separar entre sí a los caminos estándar por puntos en  $Z(\mathbf{x})$ , se garantiza que cada ciclo de  $S(\mathbf{x})$  no se rompe y pertenece a uno y solo uno de los subcaminos estándar en que se descompone  $\mathbf{x}$ .

*Lema 6. (Descomposición de un camino en subcaminos estándar).* Todo camino  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  admite una descomposición en subcaminos estándar:

*Demostración.* Cada punto de acumulación a la derecha (a la izquierda) define el inicio (el final) de un camino estándar tipo 1 (tipo 2, respectivamente). El intervalo  $[h_1, h_2] \subseteq [a, b]$  entre dos puntos de acumulación consecutivos,  $h_1, h_2 \in Z(\mathbf{x})$ , que para generalizar se consideran puntos de acumulación por ambos lados, por el inciso (c) del lema 5 se puede dividir en dos por un punto intermedio  $z \in Z(\mathbf{x})$ , que no es punto de acumulación de  $K(\mathbf{x})$ , obteniéndose dos subcaminos estándar de  $\mathbf{x}$ , uno tipo 2, cuyo dominio es  $[h_1, z] \subseteq [a, b]$ , el otro tipo 1, cuyo dominio es  $[z, h_2] \subseteq [a, b]$ .

Q.E.D.

Para demostrar que todos camino estándar contiene un conjunto completo de ciclos se requiere el siguiente lema.

*Lema 7. (El conjunto de todos los ciclos máximos de un camino estándar es un conjunto bien ordenado).* Todo conjunto de ciclos de un camino estándar *está bien ordenado* respecto de la relación de referencia  $\leq$ :

- (a)  $\leq$  es transitiva, completa y antisimétrica;
- (b) todo subconjunto no vacío de ciclos máximos de un camino estándar tipo 1 (tipo 2) tiene un mínimo (un máximo, respectivamente).

*Demostración.* (a) Dado que la relación  $\leq$  sobre los números reales es transitiva y completa, y que  $\{i(A) : A \in S(\mathbf{x})\}$  es un conjunto de números reales, la relación  $\leq$  sobre  $S(\mathbf{x})$  debe ser también reflexiva, transitiva y completa. Resta probar que  $\leq$  sobre  $S(\mathbf{x})$  es antisimétrica (por contradicción): Si los ciclos  $A$  y  $B$  inician en el mismo punto de  $[a, b]$ ,  $i(A) = i(B)$ , entonces por el inciso (a) de la definición de ciclo simple,  $\mathbf{c} = \mathbf{x}(f(A)) = \mathbf{x}(f(B))$ , por lo que si ambos ciclos no finalizan en el mismo punto,  $f(A) \neq f(B)$ , digamos  $f(A) < f(B)$ , entonces  $i(B) = i(A) < f(A) < f(B)$  y como  $\mathbf{x}(f(A)) = \mathbf{c}$ , se contradice la condición (b) para que  $B$  sea un ciclo simple.

(b) Sea  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  un camino estándar tipo 1, es decir, el extremo final,  $b$ , es el único punto de acumulación de  $[a, b]$ . Por tanto, para cualquier  $c < b$  el intervalo  $[a, c]$  contiene un número finito de ciclos de  $K(\mathbf{x})$ . Si  $K \subseteq K(\mathbf{x})$  es un subconjunto no vacío de ciclos de  $K(\mathbf{x})$ , entonces para algún  $c < b$  el intervalo  $[a, c]$  contiene al ínfimo de  $K$ , pero como el número de ciclos en  $[a, c]$  es finito, este ínfimo se encuentra en  $K$ . Similarmente para un camino estándar tipo 2. Q.E.D.



*Lema 8. (Todo camino estándar contiene un conjunto completo).* Si  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  es un camino estándar, entonces  $K(\mathbf{x})$  contiene un subconjunto completo de ciclos,  $Q \subseteq S(\mathbf{x})$ , es decir, un subconjunto de ciclos en  $K(\mathbf{x})$ , ajenos entre sí y tal que todo ciclo en  $K(\mathbf{x})$  se interseca con al menos un ciclo en  $Q$ .

*Demostración.* Supóngase que  $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$  es un camino estándar tipo 1. Por tanto  $b$  es el único punto de acumulación de  $K(\mathbf{x})$ . Sean  $F(z)$  el conjunto de los *siguientes ciclos (máximos)* de  $\mathbf{x}$  después de  $z \in Z(\mathbf{x})$ , dado por

$$F(z) = \{A : i(A) \geq z, A \in K(\mathbf{x})\}, \quad z \in Z(\mathbf{x})$$

y  $A(z)$  el *siguiente ciclo después de*  $z \in Z(\mathbf{x})$ , dado por la función  $A: Z(\mathbf{x}) \rightarrow Z(\mathbf{x})$ , definida por

$$A(z) = \min\{A : i(A) \geq z, A \in K(\mathbf{x})\}, \quad F(z) \neq \emptyset, z \in Z(\mathbf{x})$$

la cual está bien definida porque por el inciso (b) del lema 7 tal mínimo existe y es único. La imagen de  $A$  está en  $Z(\mathbf{x})$  porque el conjunto que se minimiza está acotado por abajo por un punto  $z$  en este conjunto. Se define también el sucesor de  $z \in Z(\mathbf{x})$ ,  $k(z)$ , dado por la función *sucesor*,  $k: Z(\mathbf{x}) \rightarrow Z(\mathbf{x})$ , definida por

$$\begin{aligned} k(z) &= f(A(z)) \text{ si } F(z) \neq \emptyset, \\ k(z) &= b \text{ si } F(z) = \emptyset, \text{ o } z = b \end{aligned}$$

la cual da el punto final del arco inmediatamente después de  $z$ ,  $k(z) \in Z(\mathbf{x})$ .

Al aplicar las funciones anteriores a partir del inicio  $a$  del intervalo  $[a, b]$ , se obtiene una sucesión infinita  $Q$  de ciclos de  $\mathbf{x}$ ,  $A(a)$ ,  $A(k(a))$ ,  $\dots$ ,  $A(k^n(a))$ , cuyos valores iniciales y finales forman la sucesión de puntos en  $Z(\mathbf{x})$  dada por

$$\begin{aligned} a &\leq i(A(a)) < f(A(a)) \equiv k(a) \\ k(a) &\leq i(A(k(a))) < f(A(k(a))) \equiv k^2(a) \end{aligned}$$

$$k^n(a) \leq i(A(k^n(a))) < f(A(k^n(a))) \equiv k^{n+1}(a)$$

donde  $k^n(a)$  es la aplicación de la función  $k$ ,  $n$  veces sobre el punto inicial  $a$ .

Los valores  $i(A(k^n(a)))$  y  $f(A(k^n(a)))$  forman sendas sucesiones monótonas acotadas por  $b$ , por lo que ambas convergen (Sagan, 1974, p 69), precisamente a  $b$  porque este es el único punto de acumulación de  $\mathbf{x}$ . Para todo  $n$  el conjunto  $Q(n)$  de ciclos,  $A(a)$ ,  $A(k(a))$ ,  $\dots$ ,  $A(k^n(a))$ , cumple que todos sus elementos son ajenos entre sí, y que todo ciclo  $A$  de  $\mathbf{x}$  tal que  $f(A) < f(A(k^n(a)))$  se interseca con algún ciclo en  $Q(n)$  (de hecho, algunos de estos ciclos están en  $Q(n)$ ). Dado que para todo  $c < b$  el intervalo  $[a, c]$  contiene un número finito de ciclos de  $\mathbf{x}$ , para todo ciclo  $A$  en  $K(\mathbf{x})$  existe un  $n$  finito tal que  $f(A) < f(A(k^n(a)))$ , y por tanto  $A$  está en  $Q$  o se interseca con algún ciclo en  $Q$ . Q.E.D.

### A.3.7 Teorema de existencia de subcaminos simples

*Teorema A3 (Eliminación de los ciclos de un arco).* Todo arco  $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  en  $R^n$  contiene un subarco simple con los mismos extremos.

*Demostración.* Sea  $x:[a,b] \rightarrow R^n$  una representación paramétrica del camino  $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ . Los conjuntos de valores iniciales y finales de los ciclos de  $x$  forman sendos conjuntos acotados. Se sabe que todo conjunto acotado infinito tiene al menos un punto de acumulación (teorema de Bolzano Weierstrass, Apostol, 1974, p 54). Por tanto, si el intervalo  $[a,b]$  no contiene puntos de acumulación de ciclos del camino  $x$ , entonces  $x$  tiene un número finito de ciclos, y por el inciso (c) del lema 2, contiene un subcamino simple con los mismos extremos. Hay que demostrar que todo camino con puntos de acumulación de ciclos contiene un subcamino con los mismos extremos, el cual no contiene puntos de acumulación de ciclos. Por el inciso (b) del lema 4, esto se cumple para los puntos de acumulación de ciclos anidados.

Para demostrar que todo camino con puntos de acumulación de ciclos a la derecha y a la izquierda, contiene un subcamino con los mismos extremos sin estos puntos de acumulación, primero se prueba que todo camino se puede descomponer en subcaminos, llamados estándar (lema 6), los cuales tienen sus puntos de acumulación en los extremos. Por el lema 8, cada camino estándar contiene un conjunto completo de ciclos máximos, y por tanto contiene (por el inciso (b) del lema 2) un subcamino con los mismos extremos y sin estos puntos de acumulación.

Q.E.D.

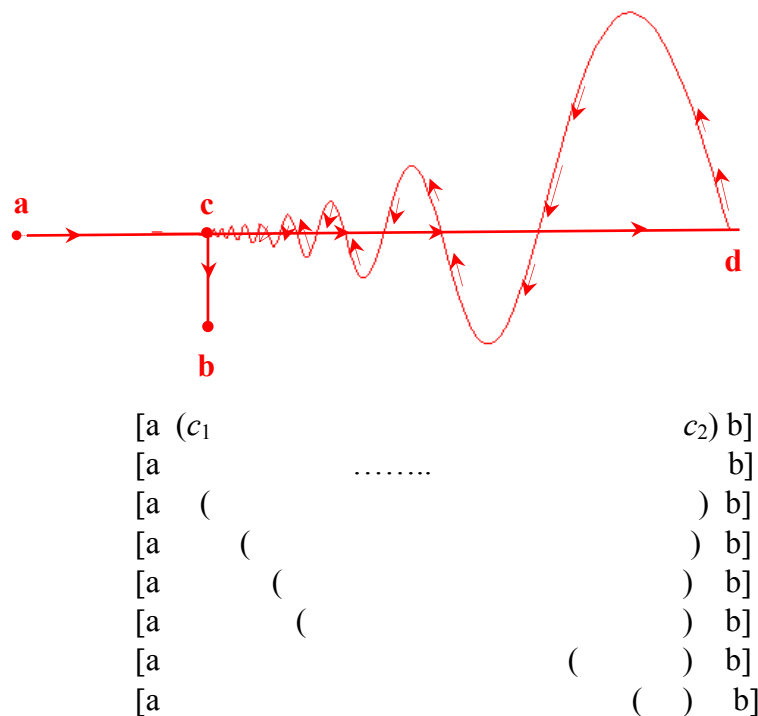
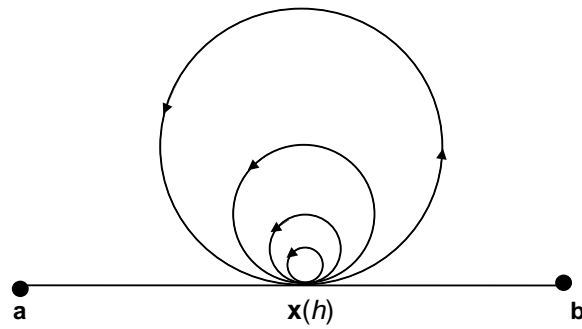


Fig. A3.1. Camino con un punto de acumulación de ciclos anidados en  $c_2$

La Fig A3.1 muestra un arco  $C(\mathbf{a},\mathbf{b})$ , con recorrido  $\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{c},\mathbf{b}$ . Los intervalos abiertos dentro del intervalo  $[a,b]$  corresponden con los ciclos del arco. El subarco  $C(\mathbf{d},\mathbf{c})$  cruza un número numerable de puntos la porción de recta  $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ . El ciclo simple  $(c_1, c_2)$  contiene propiamente a todos los demás ciclos. El camino tiene un punto de acumulación de ciclos anidados en  $c_2$ . Al colapsar el ciclo simple  $(c_1, c_2)$  se eliminan todos los ciclos.



:  $[a ( \quad ) ( \quad ) \dots (h) \dots b]$

Fig. A3.2. Camino con un punto de acumulación de ciclos a la izquierda

La Fig. A3.2 muestra un arco formado por una sucesión numerable de circunferencias, donde el radio de la primera determina el radio de las demás mediante la regla de que el radio de cada circunferencia es la mitad del radio de la circunferencia anterior. Entonces el arco tiene una longitud finita porque el valor de la sumatoria  $1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n \dots$  es finito, vale 1. En esta sucesión de circunferencias el radio se va reduciendo. Por tanto, el punto de acumulación es de ciclos a la izquierda. En la figura los intervalos abiertos dentro del intervalo  $[a, b]$  corresponden con los ciclos del arco.

# Referencias

- Anderson, Larry R. and Fontenot, Robert A. (1992) Optimal Positioning of Service Units Along a Coordinate Line, *Transportation Science*, Vol. 26, No. 4, 346-351.
- Angel, S; Hyman, G (1976) Urban fields. A Geometry of movement for regional science, Pion Limited, Londres.
- Apostol T. M. (1974) *Mathematical analysis*, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, London.
- Batta, R., Ghose, A., Palekar, U., (1989) Locating Facilities on the Manhattan metric with arbitrarily shaped barriers and convex forbidden regions, *Transportation Science*, Vol. 23, No. 1, 26-36.
- Berens, W. (1988) The Suitability of the Weighted Lp-norm in Estimating Actual Road Distances, *European Journal of Operational Research* 34, 39-43.
- Berens, W., Körling, F. (1985) Estimating Road Distances by Mathematical Functions, *European Journal of Operational Research* 21, 54-56.
- Berens, W., Körling, F. (1988) On estimating road distances by mathematical functions-A rejoinder, *European Journal of Operational Research* 36, 254-255.
- Brimberg, J., Love, R. F., (1992) A new distance function for modeling travel distances in a transportation network, *Transportation Science*, Vol. 26, No. 2, 129-137.
- Brimberg, J., Love, R. F., (1993) General considerations on the use of the weighted Lp norm as an empirical distance measure, *Transportation Science*, Vol. 27, No. 4, 341-349.
- Drezner, Z., Wesolowsky, G. O. (1989) The Asymmetric Distance Location Problem, *Transportation Science* Vol. 23, No. 3, 201-207.
- Durier R., Michelot C., 1985 Geometrical properties of the Fermat-Weber problem, *European Journal of Operational Research* 20, 332-343.
- Fernández, J., Fernández, P., y Pelegrín, B. (2002) Estimating actual distances by norm functions: a comparison between the  $\ell_{k,p,\theta}$  - norm and the  $\ell_{b_1,b_2,\theta}$  - norm and a study about the selection of the data set, *Computers & Operations Research* 29, 609-623.
- Fréchet, M. (1906) Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 22, 1-74.
- Gatrell, Anthony (1983) *Distance and Space*, Clarendon Press, Oxford.
- Gelfand, I. M.; Fomi, S V (1963) *Calculus of variations*, Prentice-Hall, Inc.
- Hodgson, M. J., Wong, R. T., Honsaker, J. (1987) The p-centroid problem on an inclined plane, *Operations Research* 35, 221-233.
- Infante-Macias, R., Muñoz-Perez, J. (1995) Competitive location with rectilinear distances, *European Journal of Operacional Research* 80, 77-85.
- Kolmogorov, A. N.; Fomi, S. V. (1978) *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Volume I, Metric and Normed Spaces*, Graylock Press, Rochester, N. Y.
- Love, R. F., Morris, J. G. (1972) Modelling Inter-City Road Distances by Mathematical Functions, *Operacional Research Quarterly* 23, 61-71.
- Love, R. F., Morris, J. G. (1979) Mathematical Models of Road Travel Distances, *Management Sciences* 25, 130-139.
- Love, R. F., Morris, J. G. (1988) On Estimating Road Distances by Mathematical Functions, *European Journal of Operational Research* 36, 251-253.
- Love, R. F., Morris, J. G., Wesolowsky, J. (1988) *Facilities Location: Models and Methods*, North-Holland, New York.

- Lyusternik, L. A. (1964) Shortest Paths. Variational Problems, The MacMillan Company, New York.
- Minkowski, H. (1911) Theorie der konvexen Körper, Gesammelte Abhandlungen, Vol. 11, Teubner, Berlin.
- Mittal, A. K., Palsule, V.(1984) Facilities Location with Ring Radial Distances, *Institute of Industrial Engineers Transactions* **16**, 59-64.
- Munkres, J. R. (1975) *Topology: A first Course*, Prentice –Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Neil C. Rowe; Ron S. Ross (1990) Optimal grid-free path planning across arbitrarily contoured terrain with anisotropic friction and gravity effects. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(5), 540-553. Oct. 1990.
- Perreur, J., Thisse, J. (1974) Central Metrics and Optimal Location, *Journal of Regional Science* **14**, 411-421.
- Plastria, F. (1992) On destination optimality in asymmetric distance Fermat-Weber problems, *Annals of Operations Research* **40**, 355-369.
- Plastria, F. (2001) Asymmetric Distances, Semidirected Networks, and Majority in Fermat-Weber Problems, *ePublication of Location Analysis* Vol. **2**, Number 1.
- Rockafellar, T. (1970) Convex analysis, *Princeton University Press*, Princeton, New Jersey.
- Sagan, Hans (1974) Advanced Calculus, *Houghton Mifflin Company*, Boston
- Sagan, Hans (1992) Introduction to the calculus of variations, *Dover Publications*, Nueva York.
- Smith, Donald R. (1998) Variational methods in optimizaion, *Dover Publications*, Nueva York.
- Sun, Zheng; John Reif (2003) On energy-minimizing paths on terrains for a mobile robot, *IEEE International Conference on Robotics & Automation*.
- Ward, J. E.; Wendell, R. E. (1980) A new norm for measuring distance which yields linear loction problems, *Operations Research*, **28**, 836-844.