



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

INSTITUTO DE ASTRONOMÍA  
CENTRO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Modelos de Chorros y Discos  
Alrededor de Estrellas Jóvenes

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

PRESENTA

FABIO DE COLLE

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO RAGA RASMUNSEN



M: 350299





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

A Alejandro Raga por haber dirigido esta tesis de doctorado, por su apoyo y disponibilidad, por creer en mis capacidades, por pasarme parte de su contagioso optimismo, y por su amistad.

A los sinodales por su atenta y *rápida* leída de esta tesis: Jorge Cantó, Adriano Cerqueira, William Lee, Sergio Mendoza, Luis Felipe Rodriguez y Pablo Velázquez. A Roman Rafikov por su ayuda y competencia durante mi estancia en el IAS.

A la DGEP-UNAM, por la beca que me permitió vivir durante estos años.

A mi compañero de cubículo Sinhué por los muchos días pasados platicando, entre una simulación y la otra.

A los “porros” del Instituto de Astronomía por haber sido amigos durante estos años: Alejandro, Isidro, Jorge, José Ignacio, Mario, Miguel y Sinhué. A todos los compañeros del IA con los que he compartido cuatro maravillosos años.

A Edith, *por su ayuda técnica*, por haber dado un rumbo a mi vida, por haberme hecho feliz en estos años, por comprenderme y amarme.

Autoctzo a la Dirección General de Bibliotecas de la  
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el  
contenido de mi trabajo recepcional.  
NOMBRE: FABIO DE COLLE  
FECHA: 21/10/05  
FIRMA: Fabio De Colle

# Resumen

## Modelos de chorros magnetizados

En numerosos sistemas astrofísicos se observan campos magnéticos: planetas, estrellas, viento solar y vientos estelares, discos de acreción, remanentes de supernova, galaxias y gas caliente en cúmulos de galaxias, entre otros. En muchos casos se dan las condiciones bajo las cuales se puede tratar el sistema como un fluido y, además, las fuerzas electromagnéticas son del mismo orden de magnitud, o más importantes, que las fuerzas hidrodinámicas.

La complejidad de estos sistemas es tal que sólo para un pequeño número de fenómenos es posible hacer cálculos analíticos, y para la mayoría de los problemas estudiados es necesario utilizar cálculos numéricos. Además, a diferencia de los plasmas terrestres, en el espacio habitualmente los sistemas estudiados involucran choques, y la presencia de discontinuidades hace que se necesiten códigos numéricos muy sólidos para obtener soluciones estables y precisas.

Como objetivo de esta tesis, se desarrollaron modelos numéricos de diversos flujos en el medio interestelar y se buscó obtener de ellos predicciones que se puedan comparar con observaciones. Para hacer estas simulaciones, por otro lado, se desarrolló un código numérico magnetohidrodinámico (MHD). En seguida resumiremos las características del código numérico elaborado y las aplicaciones astrofísicas estudiadas.

- **Código numérico MHD.**

Como parte de esta tesis se desarrolló un código numérico en una, dos y tres dimensiones en coordenadas cartesianas y cilíndricas, que resuelve las ecuaciones de la MHD ideal y no ideal. El código es “upwind”, utiliza una malla uniforme (o variable, pero no adaptativa) y resuelve muy bien los choques. Las variables conservadas (masa, momento, energía, campo magnético) están definidas en el centro de las celdas, y los flujos de las

variables conservadas están definidos en las interfases. Los algoritmos utilizados son de segundo orden espacial y temporal, donde la integración temporal es obtenida utilizando un método de Runge-Kutta. Por otro lado, el segundo orden espacial es alcanzado introduciendo “limitadores de pendiente” para reconstruir los valores de las variables conservadas en las interfases entre las celdas. Los esquemas utilizados para resolver el sistema de ecuaciones son los métodos de Lax-Friedrichs “modificado”, el método HLL, el método MUSTA y un Riemann Solver basado en el método de Godunov. La diferencia entre los distintos algoritmos es la difusión numérica propia de cada método: mientras el Riemann Solver tiene difusión numérica muy baja y es genuinamente “shock-capturing”, los otros métodos tienen mayor disipación. Por otro lado estos últimos son más sólidos y, sobre todo, mucho más rápidos computacionalmente.

Para conservar nula la divergencia del campo magnético se utilizan el método de Powell y el método CT, modificado para utilizar sólo las variables centradas.

Por medio de toda una serie de pruebas numéricas en una y dos dimensiones se demostró que el código es estable, rápido y preciso y se puede aplicar al estudio de problemas astrofísicos. Se implementaron además algunas extensiones al caso no ideal, y se consideraron problemas con pérdidas radiativas (con cálculo del enfriamiento con y sin equilibrio), con gravedad central y con conducción térmica (isótropa y anisótropa).

#### ▪ **Emisión en $H\alpha$ de chorros magnetizados.**

En los últimos diez años se ha empezado a estudiar el efecto de la presencia de un campo magnético sobre la dinámica de chorros. En esta tesis, continuando en esta línea de investigación, se hicieron simulaciones de la propagación de chorros astrofísicos magnetizados e hidrodinámicos (HD). Los primeros resultados obtenidos permitieron confirmar las características dinámicas fundamentales encontradas en trabajos anteriores, con particular referencia a la formación de “nose cones” en la cabeza principal del chorro, a la mayor colimación del chorro y a un incremento de la velocidad de propagación.

En esta tesis, además, se presentan los primeros cálculos detallados de la emisión de chorros magnetizados, que permiten en principio una comparación directa con los resultados observacionales. Se utilizaron simula-

ciones numéricas en dos dimensiones (en coordenadas cilíndricas), comparando la emisión en  $H\alpha$  obtenida con simulaciones HD con la que se obtuvo con simulaciones MHD. Se utilizó una configuración de campo magnético toroidal, y campos magnéticos con intensidades que llegan a ser un poco superiores a campos en equipartición con la presión térmica. Para simular la característica formación de nudos a lo largo de los chorros estelares se utilizaron velocidades de inyección del chorro variables en el tiempo.

Los resultados encontrados muestran un notable crecimiento en la emisión de  $H\alpha$  a lo largo del chorro en el caso MHD respecto al caso HD. La variación en la intensidad en la emisión obtenida, aplicada al estudio de algún objeto en particular, puede llevar a distintas predicciones en los parámetros físicos calculados utilizando líneas o cocientes de líneas.

También, la morfología de los nudos obtenida en las simulaciones presenta importantes aplicaciones observacionales. Algunos chorros de hecho presentan nudos elongados que difícilmente pueden ser explicados con un modelo HD, mientras que se obtienen naturalmente con modelos MHD, en donde la compresión del material debida a la componente toroidal del campo magnético tiende a producir más colimación del material.

- **Interacción de chorros magnetizados con nubes moleculares.**

La interacción de un chorro con una nube molecular puede ser un mecanismo importante de generación de turbulencia. Este aspecto ha sido estudiado en esta tesis por medio de simulaciones MHD isotérmicas con alta resolución, en coordenadas cartesianas y en dos dimensiones. Los chorros son simulados por medio de la propagación de nubes de alta densidad (que representan los nudos que se crean a lo largo de un chorro estelar durante su evolución) en un medio magnetizado. La presencia y la orientación del campo magnético de la nube molecular son fundamentales para la propagación y la transferencia de momento y energía del chorro a la nube. Mientras que campos orientados paralelos a la dirección de propagación del chorro permiten a éste salir de la nube sin transferir grandes cantidades de momento y energía, campos orientados perpendiculares a la dirección de propagación inicial del chorro, y con intensidades iguales a las intensidades típicas que se encuentran en las nubes, producen una muy rápida desaceleración del chorro, y un gran transporte de momento

en dirección perpendicular a la dirección de propagación. Este resultado muestra que los chorros pueden ser una fuente importante de turbulencia en nubes moleculares, por lo menos a escalas pequeñas.

Además, resultados recientes muestran que los chorros en nubes moleculares están orientados en dirección casual respecto a la dirección del campo magnético en el que se propagan. Por otro lado los chorros que se propagan perpendicularmente son más débiles y menos luminosos respecto a los que se propagan paralelamente. Esto puede ser interpretado como resultado de la interacción entre el campo más global y la propagación de los chorros, confirmando los resultados obtenidos en este estudio.

## **Modelos de discos de acreción**

En la segunda parte de la tesis presentamos un estudio semi-analítico de la estructura vertical de los discos circunestelares, suponiendo por simplicidad que éstos son calentados sólo por la radiación estelar. Se considera un nuevo método analítico que consiste en aproximar la complicada forma del transporte radiativo vertical. Se supone que el disco, en dirección vertical, tiene una transición suave entre una temperatura externa (que sale del balance entre la radiación proveniente de la estrella central absorbida y la radiación emitida por el polvo) constante y una temperatura interna (que se obtiene considerando que una parte de la radiación que llega a la superficie se propaga hacia adentro) también constante. Además, se encuentra que estas dos temperaturas no dependen de la opacidad, es decir no dependen de la componente vertical, sino que son sólo funciones de la distancia a la estrella central. Para resolver la ecuación de equilibrio hidrostático vertical se propone por otro lado un método aproximado sencillo, que consiste en notar que la variación vertical de la densidad es mucho más importante que la variación del término dependiente de  $z$  (estos son los términos que es necesario integrar para resolver la ecuación de equilibrio vertical). Este estudio resulta en una serie de prescripciones analíticas para la posición de la superficie del disco, para la posición de las distintas regiones de temperatura y para los perfiles radiales y verticales de densidad y presión. La distribución espectral de energía que se puede calcular de esta forma es muy similar a la que se obtiene resolviendo el problema del transporte radiativo en dos direcciones. Es así posible analizar grandes cantidades de

datos de espectros de emisión de estrellas jóvenes obteniendo predicciones de los parámetros físicos de los sistemas observados utilizando un método rápido, sencillo y eficiente.



# Índice

Agradecimientos	I
Resumen	III
<b>I Simulaciones de chorros magnetizados</b>	<b>1</b>
<b>1. Discos de acreción y chorros: observaciones y modelos teóricos</b>	<b>3</b>
1.1. Discos de acreción y eyección de chorros . . . . .	3
1.2. Chorros estelares . . . . .	9
1.2.1. Características observacionales . . . . .	9
1.2.2. Interpretaciones teóricas . . . . .	13
1.2.3. Campos magnéticos y chorros . . . . .	16
1.2.4. Simulaciones numéricas de la propagación de chorros . . . . .	18
1.2.5. Esta tesis . . . . .	21
<b>2. Magnetohidrodinámica</b>	<b>23</b>
2.1. La “derivación” de las ecuaciones de la MHD . . . . .	23
2.2. Las ecuaciones de la MHD . . . . .	26
2.3. Propiedades matemáticas de las ecuaciones de la MHD . . . . .	30
2.3.1. Sistemas hiperbólicos . . . . .	30
2.3.2. El problema de Riemann . . . . .	33
2.3.3. Autovalores y autovectores en MHD . . . . .	34
2.3.4. Ondas de choque en MHD . . . . .	37
<b>3. Métodos numéricos</b>	<b>41</b>
3.1. Introducción . . . . .	41
3.2. Desarrollo del código numérico en una dimensión . . . . .	43
3.2.1. Bases teóricas . . . . .	43
3.2.2. Métodos centrados . . . . .	45

3.2.3.	Método de Godunov . . . . .	48
3.2.4.	Métodos de Godunov simplificados . . . . .	49
3.2.5.	Generalización del método de Godunov a segundo orden . . . . .	51
3.2.6.	El problema de la presión negativa . . . . .	53
3.3.	Pruebas numéricas en una dimensión . . . . .	54
3.3.1.	Convección de ondas de densidad . . . . .	54
3.3.2.	Interacción de dos ondas explosivas . . . . .	55
3.3.3.	Ondas de rarefacción fuertes . . . . .	57
3.3.4.	Propagación de Ondas de Alfvén de “Shear” . . . . .	58
3.3.5.	Tubos de choque magnéticos . . . . .	59
3.4.	Desarrollo del código numérico en dos dimensiones . . . . .	62
3.4.1.	Extensiones a multi-dimensiones . . . . .	62
3.4.2.	La condición $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . . . . .	62
3.4.3.	Construcción de un método CT con valores centrados . . . . .	76
3.5.	Pruebas en dos dimensiones: . . . . .	80
3.5.1.	El vórtice de Orszag-Tang . . . . .	80
3.5.2.	Propagación de una onda explosiva . . . . .	82
3.5.3.	Rotor rápido . . . . .	83
3.5.4.	Interacción entre una nube densa y una onda de choque . . . . .	84
3.5.5.	Propagación de un chorro en coordenadas cilíndricas . . . . .	86
4.	<b>MHD simulations of radiative jets from young stellar objects:</b>	
	<b>H<math>\alpha</math> emission</b> . . . . .	<b>89</b>
4.1.	Abstract . . . . .	89
4.2.	Introduction . . . . .	90
4.3.	Simulations . . . . .	93
4.3.1.	Numerical method . . . . .	93
4.3.2.	Cooling term . . . . .	94
4.3.3.	Initial conditions . . . . .	96
4.4.	Results . . . . .	99
4.4.1.	General Results . . . . .	99
4.4.2.	Intensity maps . . . . .	100
4.5.	Conclusions . . . . .	101
5.	<b>Interaction of HH objects with molecular cloud and generation of Alfvén waves</b> . . . . .	<b>103</b>
5.1.	Abstract . . . . .	103
5.2.	Introduction . . . . .	104
5.3.	Simulations . . . . .	106

5.3.1. Numerical method . . . . .	106
5.3.2. Initial conditions . . . . .	110
5.4. Results . . . . .	111
5.5. Summary & conclusions . . . . .	113

**II Modelos de la estructura vertical de discos de acreción 119**

<b>6. La estructura vertical de discos de acreción:</b>	<b>121</b>
6.1. Discos protoplanetarios: introducción . . . . .	121
6.2. Modelos de discos protoplanetarios . . . . .	122
6.2.1. El modelo de dos temperaturas de Chiang y Goldreich .	124
6.2.2. La hipótesis de la “pared” de polvo . . . . .	125
<b>7. Vertical structure of protoplanetary disks: beyond the two-temperature approximation</b>	<b>129</b>
7.1. Abstract . . . . .	129
7.2. Disk surface density . . . . .	130
7.3. Radiation transfer . . . . .	130
7.4. Hydrostatic equilibrium . . . . .	135
7.5. Radial properties of disks . . . . .	138
7.6. Spectral energy distribution . . . . .	139
7.7. Correction factors for optically thin disks . . . . .	145
7.8. Radial properties of irradiated disks. . . . .	146
7.9. Conclusions . . . . .	149

**III Conclusiones 151**

<b>8. Conclusiones</b>	<b>153</b>
8.1. Un nuevo código numérico MHD . . . . .	153
8.2. Aplicaciones numéricas al estudio de chorros astrofísicos magnetizados. . . . .	154
8.3. Modelos de discos circunestelares . . . . .	155
8.4. Trabajo futuro . . . . .	155

**Bibliografía 157**



## Índice de figuras

1.1. Secuencia de evolución de estrellas en formación (Bachiller 1996).	6
1.2. Esquema simplificado del origen de los chorros en los modelos magnetocentrífugos. . . . .	8
1.3. Imágenes ópticas de HH30, HH34 y HH47 (HST). . . . .	12
1.4. Variaciones en la dinámica de HH30 observadas con el HST a distancia de un año. . . . .	13
1.5. Simulación numérica en dos dimensiones de la propagación de un jet adiabático. . . . .	14
1.6. Orientación de discos de acreción y chorros respecto a las líneas de fuerza del campo magnético en la nube molecular Taurus (Ménard & Duchêne 2004). . . . .	18
1.7. Emisión en H $\alpha$ encontrada con la fórmula semiempírica $I_{H\alpha} = 3.21 \times 10^{11} \rho v_{sh}^{3.8} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ (Cerqueira & de Gouveia Dal Pino 2001b) . . . . .	21
1.8. Densidad para simulaciones adiabáticas HD y MHD de chorros (De Colle & Raga 2004) . . . . .	22
3.1. Comparación entre los métodos de Lax-Friedrichs (en rojo) y Lax-Wendroff (en negro) para un problema de tipo “tubo de choque”. . . . .	47
3.2. Solución de los problemas de advección de una onda cuadrada y de una onda semicircular. . . . .	56
3.3. Interacción de dos ondas explosivas . . . . .	57
3.4. Ondas de rarefacción fuertes . . . . .	58
3.5. Propagación de ondas de Alfvén . . . . .	59
3.6. Solución de la “prueba del tubo de choque” I . . . . .	63
3.7. Solución de la “prueba del tubo de choque” II . . . . .	64
3.8. Solución de la “prueba del tubo de choque” III . . . . .	65
3.9. Solución de la “prueba del tubo de choque” IV . . . . .	66

3.10. Solución de la “prueba del tubo de choque” V . . . . .	67
3.11. Solución de la “prueba del tubo de choque” VI . . . . .	68
3.12. Solución de la “prueba del tubo de choque” VII . . . . .	69
3.13. Solución de la “prueba del tubo de choque” VIII . . . . .	70
3.14. Solución de la “prueba del tubo de choque” IX . . . . .	71
3.15. Solución de la “prueba del tubo de choque” X . . . . .	72
3.16. Solución de la “prueba del tubo de choque” XI . . . . .	73
3.17. Solución de la “prueba del tubo de choque” XII . . . . .	74
3.18. Prueba de Brio & Wu en dos dimensiones . . . . .	79
3.19. Imágenes de la densidad para la prueba del vórtice de Orszag- Tang para distintos métodos para conservar nula $\nabla \cdot \vec{B}$ . . . . .	81
3.20. Comparación entre el método MUSTA y el método de Godunov para la prueba del vórtice de Orszag-Tang. . . . .	82
3.21. Isocontornos de densidad para la propagación de una onda de choque inicialmente esférica en un medio magnetizado. . . . .	84
3.22. Isocontornos de presión para la prueba del rotor rápido. . . . .	85
3.23. Isocontornos de presión para la interacción de una nube densa con ondas de choque fuertes. . . . .	86
3.24. Propagación de un chorro ligero en coordenadas cilíndricas. . . . .	87
4.1. Numerical density of HD and MHD simulations of propagating jets . . . . .	92
4.2. Axial cuts of the density, hydrogen ionization fraction, axial ve- locity and temperature for HD and MHD simulations of propa- gating jets . . . . .	95
4.3. $H\alpha$ emission maps for HD and MHD simulations of propagating jets . . . . .	98
4.4. Ratios of the $H\alpha$ luminosities of the knots along magnetized jet models with respect to the $H\alpha$ luminosity of the corresponding knots in a HD jet, as a function of knot position along the jet axis. . . . .	101
5.1. Images of the gas density for the HD and MHD cases (with parallel and perpendicular magnetic field) . . . . .	108
5.2. Images of the gas density for the MHD case (with oblique mag- netic field) . . . . .	109
5.3. Temporal evolution of the maximum value of the velocity, and of the value of the total magnetic energy for the HD and MHD models . . . . .	112

5.4. Temporal evolution of the integrated momentum and the kinetic energy for the HD and MHD models . . . . .	114
6.1. Distribución de temperatura vertical de un disco irradiado alrededor de una estrella Herbig Ae . . . . .	124
6.2. Representación esquemática del modelo de la pared de polvo de Dullemond, Dominik & Natta. . . . .	125
6.3. Ajuste teórico al espectro observado de un objeto joven . . . . .	126
7.1. Opacity $k_\nu$ adopted in this paper as a function of frequency $\nu$ and Planck opacity $k_P$ based on this $k_\nu$ as a function of temperature $T = h\nu/k$ . . . . .	132
7.2. Spectral energy distribution of a disk annulus around an AeBe-type star ( $T_\star = 10^4$ K, $R_\star = 2R_{sun}$ ). Annulus is placed at $a = 1$ AU . . . . .	141
7.3. Spectral energy distribution of a disk annulus around an AeBe-type star ( $T_\star = 10^4$ K, $R_\star = 2R_{sun}$ ). Annulus is placed at $a = 50$ AU . . . . .	143
7.4. Spectral energy distribution of a disk annulus around an AeBe-type star ( $T_\star = 4000$ K, $R_\star = 2R_{sun}$ ). Annulus is placed at $a = 0.1$ AU . . . . .	144
7.5. Plots of $\psi_{ex}$ , $\psi_{ex}^C$ , and $\psi_{ex}^{DDN}$ , $\psi_{irr}^C$ and $\psi_{irr}^{DDN}$ for different values of disk surface density . . . . .	147



## Índice de tablas

3.1. Ondas que se propagan para cada prueba del tubo de choque magnético . . . . .	60
5.1. Parameters for the numerical simulations of the interaction of HH objects with molecular cloud . . . . .	110



---

**Parte I**

**Simulaciones de chorros  
magnetizados**

---

# 1

## Discos de acreción y chorros: observaciones y modelos teóricos

En esta introducción se describirá la fenomenología de los discos de acreción alrededor de estrellas jóvenes y de los chorros asociados a tales discos. En particular, se mostrarán los aspectos teóricos en los que el campo magnético parece jugar un papel importante en los discos de acreción y en la eyección y propagación de los chorros. Un análisis detallado de la estructura de los discos será presentado en la Parte II de esta tesis.

### 1.1. Discos de acreción y eyección de chorros

Los discos de acreción son un fenómeno muy común de la naturaleza, desde la escala típica de los planetas, con las estructuras de anillos, hasta escalas galácticas. Por otro lado, mientras los fundamentos físicos de la existencia de los discos parecen estar ligados a principios básicos simples (el equilibrio entre fuerzas gravitacionales, conservación del momento angular y procesos disipativos), todavía no se ha logrado obtener una completa comprensión del origen y la evolución de muchos de estos sistemas (por ejemplo del disco galáctico o de los procesos de formación del sistema solar).

Fundamentalmente hay tres tipos de discos de acreción:

- discos en sistemas binarios, producidos por transferencia de masa;
- discos en núcleos galáctico activos alrededor de agujeros negros supermasivos;
- discos protoestelares.

Estos últimos se forman durante las primeras fases de vida de las estrellas, producidas a su vez por el colapso de nubes moleculares gigantes (con dimensiones de  $\approx 50$  pc y masas de  $\approx 10^4 - 10^6 M_{\odot}$ ). Cuando las fuerzas que sostienen las partes más densas de las nubes (fuerza de presión térmica y turbulenta, y fuerzas debidas al campo magnético) ya no son suficientes para mantener en equilibrio al material, este empieza a moverse en caída libre (por ej. Shu, Adams & Lizano 1987; Ostriker 1998). Observacionalmente esta fase de la evolución de las estrellas (YSOs, “Young Stellar Objects”) es muy difícil de detectar, ya que los objetos son parte de nubes moleculares opacas a gran parte de la radiación. Los objetos observados son clasificados según sus características espectrales (Lada 1987; André et al. 1993) y la secuencia presente en esta clasificación es interpretada como correspondiente a las distintas fases de su evolución (Shu, Adams & Lizano 1987, Bachiller 1996). Esta clasificación es mostrada en la Figura 1.1 y puede ser resumida de la siguiente forma:

- **Objetos de clase 0:** tienen una emisión con un máximo en el sub-mm, emiten muy poco en el infrarrojo (IR) y no emiten en el visible. Estos objetos parecen ser protoestrellas “jóvenes” (objetos con material aún en fase de acreción aproximadamente esférica y con sólo una fracción de la masa final de la estrella).
- **Objetos de clase I:** parecen estar en una fase ligeramente más evolucionada, con temperaturas de 40 K y con un pico en el espectro de emisión de 10-100  $\mu\text{m}$  (en el lejano IR). Estos objetos aún tienen material circunestelar con masas  $\approx 0.1-0.3 M_{\odot}$ .
- **Objetos de clase II:** son detectados en el visible y son usualmente objetos T Tauri clásicos. Estas son estrellas (Herbig 1962) de baja luminosidad con líneas de emisión y fuertes vientos, con pérdidas de masa típicas de  $10^{-8} M_{\odot}/\text{año}$ . Muchos de estos objetos tienen fuertes excesos en IR y se cree que están formados por una estrella central (T Tauri), un disco de acreción y una envoltente de baja masa. Su edad típica es  $10^6$  años.

- **Objetos de clase III:** tienen espectros de cuerpo negro similares a las estrellas de secuencias principal, y no tienen signos de acreción. Estos objetos son estrellas que están a punto de entrar en la secuencia principal (objetos T Tauri débiles).

Durante el proceso de acreción la energía interna y la energía gravitatoria se pierden por emisión radiativa, mientras que el momento angular tiende a conservarse y no es separado del elemento de fluido que colapsa. Por otro lado, la observación indica que el sistema debe transferir el momento angular hacia afuera. Si el momento angular se conservara durante el proceso, las estrellas formadas tendrían una rotación rápida, en contraste con lo que se observa, y además no podría existir una acreción eficiente sobre la estrella. Es por esta razón que los modelos estándar de los discos de acreción (Shakura & Sunyaev 1973) suponen la presencia de una viscosidad turbulenta capaz de transferir el momento angular hacia afuera del disco. Para la más obvia fuente de viscosidad turbulenta, la viscosidad molecular, los cálculos muestran que se obtiene una tasa de acreción que es por lo menos ocho órdenes de magnitud inferior a la determinada por medio de las observaciones! (por ej. Verbunt 1982). Esto implica que los procesos puramente hidrodinámicos no son probablemente responsables del transporte del momento angular, o sólo bajo condiciones muy particulares (Schramkowski & Torkelsson 1996).

Por otro lado, hace una década se encontró que campos magnéticos débiles producen una inestabilidad lineal que lleva a la turbulencia del disco y pueden así representar una posible solución de este problema. Esta inestabilidad fue reconocida por primera vez por Chandrasekhar (1961) para el caso de un cilindro infinito magnetizado, pero fueron Balbus & Hawley (1991) quienes la aplicaron al estudio de los discos de acreción. Sus resultados analíticos fueron después confirmados utilizando simulaciones numéricas en 3D (Hawley, Gammie & Balbus 1995; Steinacker & Papalouizou 2002; Balbus & Hawley 1998). Prácticamente cualquier pequeño campo en un disco magnetizado en rotación diferencial (con un perfil de velocidad angular que disminuye con el radio) genera una inestabilidad dinámica. El principio físico de la inestabilidad es bastante simple: consideramos un disco axisimétrico en rotación con velocidad angular que varía en función del radio (en el caso de un disco kepleriano  $v_\phi \propto r^{-1/2}$ ), y un campo magnético paralelo al eje de rotación en el contexto de la MHD ideal (con las líneas de campo congeladas con los elementos de fluido). Si dos elementos de fluido inicialmente sobre la misma línea de campo magnético se alejan de ésta, debido a una perturbación (por ej. moviéndose uno hacia ra-

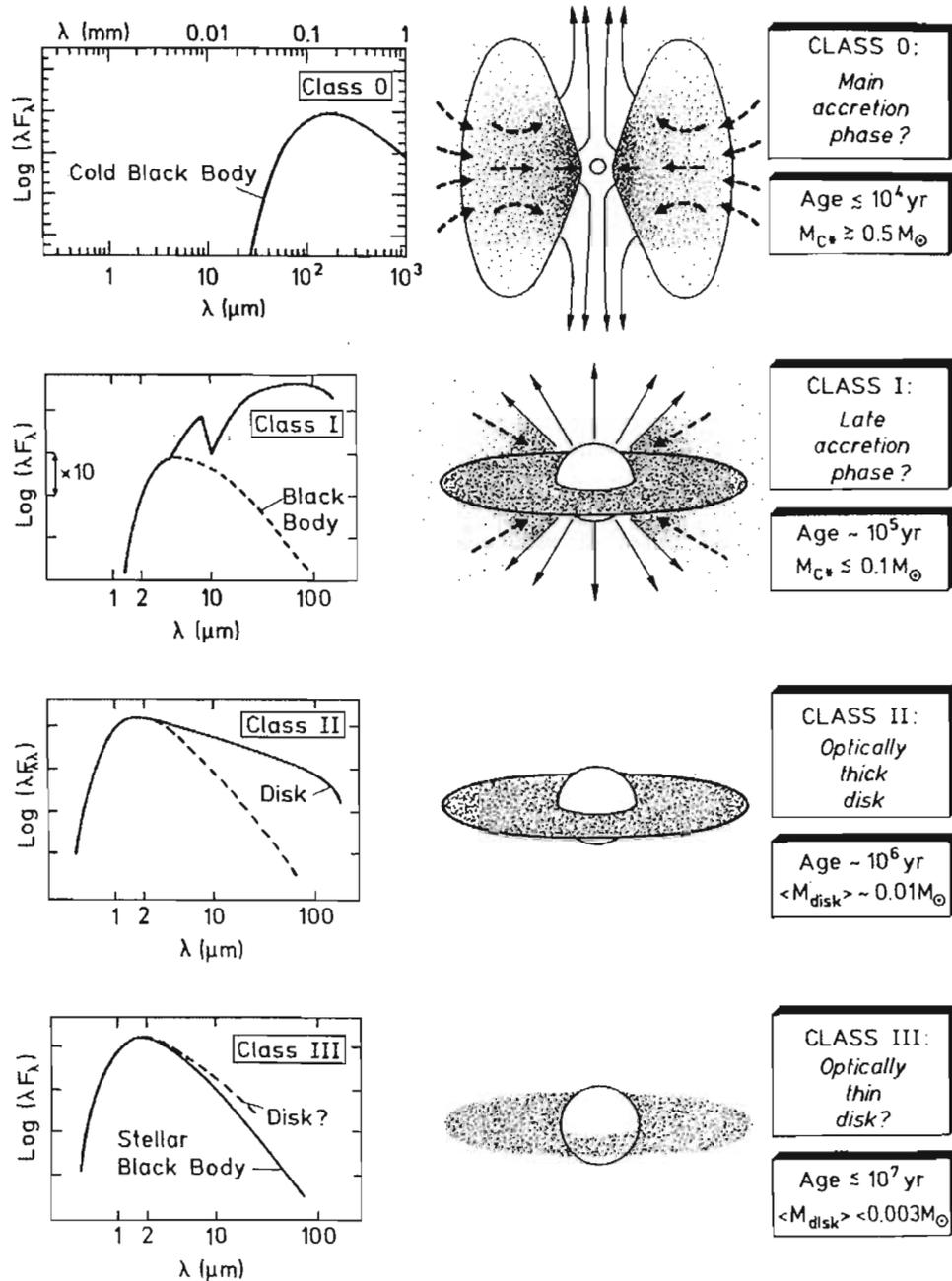


Figura 1.1: Secuencia de evolución de estrellas en formación (tomado de Bachiller 1996). En la figura se indican el espectro de emisión, la edad y la masa de la envoltante (o del disco) alrededor de la estrella en formación.

dios mayores y el otro hacia radios menores), la tensión magnética hace que el primer elemento (que tiene velocidad mayor) disminuya su velocidad, y que el segundo elemento incremente su velocidad. El resultado es un transporte neto de momento hacia afuera del disco.

Otro fenómeno importante conectado con el problema de la formación estelar es la existencia de flujos colimados de materia eyectada, muchas veces de manera bipolar, con velocidades supersónicas. Estos flujos, moleculares o atómicos, están presentes en todas las fases de la evolución estelar mostradas en la Figura 1.1. Un problema aún no completamente resuelto al respecto es como el material es expulsado y colimado desde el sistema estrella-disco. Si el campo magnético puede ser importante en la formación de inestabilidades magnetorotacionales en el disco, y de esta manera en la determinación de su tasa de acreción, es natural preguntarse si puede serlo también para la generación y colimación de chorros. De hecho existen varios modelos para explicar el lanzamiento de un jet desde discos de acreción, y los más aceptados son los que utilizan campos magnéticos<sup>1</sup> (modelos de “vientos magnetocentrífugos”). En estos modelos el jet se puede formar como un viento desde el disco, o desde la región de interacción entre estrella y disco. Los modelos de la primera clase tienen la ventaja de ofrecer un paradigma utilizable universalmente, desde protoestrellas hasta AGN, mientras que los de la segunda clase son aplicables solo a chorros estelares.

Los primeros fueron propuestos por Blandford & Paine (1982) en el contexto de chorros extragalácticos (pero después aplicados también a chorros protoestelares, ej. Konigl & Pudritz 2000). Estos modelos suponen la existencia de un disco de acreción en rotación kepleriana alrededor del objeto central y de un campo magnético ligado al disco (con MHD ideal)<sup>2</sup>. Si las líneas de fuerza del campo magnético crean un ángulo inferior a los  $60^\circ$  respecto al disco, las perturbaciones en dirección perpendicular al disco aceleran el material a lo largo de las líneas de fuerza del campo. El fenómeno se puede estudiar de manera muy simplificada despreciando los efectos térmicos, y considerando una línea de campo magnético que entra con un ángulo  $\alpha$  en el disco en un punto P. Los puntos a lo largo de la línea de fuerza están sujetos a la fuerza gravitacional y

---

<sup>1</sup>Existen también modelos hidrodinámicos de vientos estelares (por ej. Cantó 1980; Frank & Mellema 1996) colimados por el material mismo del disco.

<sup>2</sup>Para chorros relativistas desde agujeros negros en los que la emisión proviene desde una región muy cercana al objeto central el modelo más prometedor es el de Blandford & Znajek (1977).

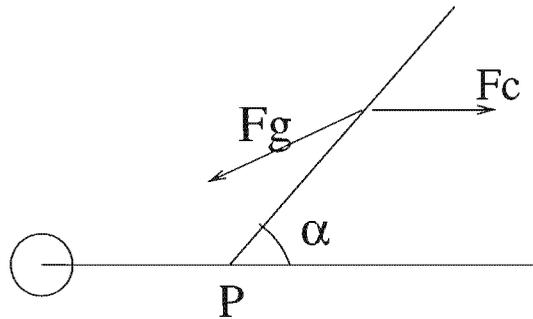


Figura 1.2: Esquema simplificado del origen de los chorros en los modelos magnetocentrífugos (Choudhuri 1998).

a la fuerza centrífuga. Entonces, si la resultante (a lo largo de la línea de fuerza del campo magnético) es directa hacia afuera, cualquier pequeña perturbación implicará la salida del material del disco. Para encontrar la fuerza podemos escribir el potencial:

$$\Phi(r, z) = -\frac{GM}{r_0} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 + \frac{r_0}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right] \quad (1.1)$$

debido a las contribuciones del potencial centrífugo y del potencial gravitacional (Blandford & Paine 1982). Podemos ahora escribir  $r = r_0 + r'$  donde  $r'$  representa una pequeña perturbación del elemento de fluido (este análisis se encuentra por ejemplo en Choudhuri 1998). Por otro lado, la perturbación en dirección perpendicular al disco es  $z = z'$ . Expandiendo los términos de la ecuación al orden  $1/r_0^2$  se obtiene:

$$\Phi(r, z) = -\frac{GM}{r_0} \left[ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \left( \frac{r'}{r_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{z'}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (1.2)$$

Para encontrar ahora la fuerza a lo largo de la línea de campo, sea  $s$  la distancia entre el punto P y el punto considerado sobre la línea de campo, así que  $r' = s \cos \alpha$  y  $z' = s \sin \alpha$  (Figura 1.2). Entonces la fuerza es:

$$F = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{GMs}{r_0^3} (3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \quad (1.3)$$

y  $F > 0$  (es decir dirigida hacia afuera) para  $\alpha < 60^\circ$ . El material que sale transportará también parte del momento angular, de manera que éste (junto

probablemente con otros) puede ser un mecanismo eficiente de pérdida de momento angular del sistema estrella-disco de acreción. Para la colimación del jet se puede demostrar (Blandford & Paine 1982) que donde las energías magnética y cinética tienen la misma intensidad (en la superficie de Alfvén) el fluido rota con velocidad menor que la velocidad kepleriana, por lo que las líneas de campo se enrollan. Cerca del plano domina entonces la componente axial del campo magnético, responsable de la eyección del material desde el disco. Lejos del plano domina la componente toroidal, que produce una colimación del material eyectado.

Una clase alternativa de modelos son los modelos “X-wind” (por ej. Shu et al. 2000). En este caso, la estrella central tiene un campo magnético dipolar que corta el disco gaseoso en un cierto radio (para radios menores puede existir un disco de cuerpos sólidos). En ese punto las líneas de campo se juntan con el disco formando un punto X. Para satisfacer los balances de masa y de momento, la acreción a través de este punto de corte produce un viento con una componente poco colimada y una segunda componente muy colimada en dirección bipolar.

Las simulaciones de la eyección de chorros desde discos (empezando con Uchida & Shibata 1985) o de la zona de interacción entre magnetosfera y discos (Hayashi et al. 1996) confirmaron los resultados teóricos, mostrando la posibilidad de eyección de un jet casi-estacionario. Por otro lado, para obtener una eyección estacionaria es necesario introducir un término resistivo en las ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal (Kuwabara et al. 2000).

## 1.2. Chorros estelares

### 1.2.1. Características observacionales

Los objetos HH, así llamados en homenaje a sus descubridores (Herbig 1950, Haro 1952), son pequeñas nebulosas con un espectro característico de emisión de hidrógeno y líneas prohibidas de átomos neutros e iones, y con un continuo muy débil (véase los review de Reipurth & Bally 2001; Reipurth 1999a). Estos objetos parecen ser un fenómeno muy común en nuestra galaxia (hay unos 600 objetos conocidos, Reipurth 1999b), y se encuentran asociados prácticamente a todos los objetos protoestelares y también a estrellas T Tauri clásicas.

El espectro óptico está formado por una serie de líneas permitidas y prohibidas de átomos neutros (por ej. [OI] 6300/6363 Å, [CI] 9848 Å, [NI] 5198/5200 Å), y de iones de baja energía de excitación (por ej. CaII, [CaII], [FeII], MgII, [NII] 6548/6584 Å, [SII] 6717/6731 Å), además de líneas de hidrógeno (las principales son H $\alpha$  y H $\beta$ ). Las líneas de baja ionización son más fuertes en los objetos HH que en regiones fotoionizadas. El cociente entre líneas puede variar muchísimo entre un objeto y otro y a menudo los objetos HH son clasificados en base a su grado de “excitación”: los objetos de baja excitación tienen fuertes líneas de [SII], [OI], [NI] y [CI], pero casi no tienen emisión en [OIII]; por otro lado los objetos de alta excitación tienen fuertes líneas de [OIII], y son moderadamente fuertes en [SII] y débiles en [NI] y [CI]. En el cercano infrarrojo, además, están presentes líneas de emisión de hidrógeno molecular (la más fuerte es la transición 1-0 S(1) a 2.12  $\mu$ m). Respecto a la emisión en el UV, los objetos de alta excitación tienen un espectro dominado por [CIV] y [CIII], mientras que los objetos de baja excitación tienen esencialmente líneas fluorescentes de moléculas de H<sub>2</sub>. En fin, los objetos HH tienen un continuo muy débil, que es interpretado como resultado de un mecanismo de decaimiento de dos fotones en hidrógeno neutro (Dopita et al. 1982; Brugel et al. 1982). Este continuo empieza en el azul, y termina en el UV.

Los objetos HH están caracterizados por velocidades radiales muy grandes (Cudworth & Herbig 1979; Herbig & Jones 1981), del orden de centenas de km/s. Muchas veces forman cadenas de objetos o “chorros HH”, a lo largo de líneas a veces muy colimadas, y con una separación entre los distintos nudos de los chorros HH aproximadamente periódica. Algunos objetos son arqueados y otros tienen una morfología casi recta. En el caso de los chorros lineales, el ángulo de apertura es en general pequeño, del orden de algunos grados, mientras que el cociente entre tamaño total del jet HH y ancho del jet puede variar desde 5, para chorros poco colimados, hasta 100 para chorros extremadamente colimados (como por ejemplo HH111).

En muchos casos los chorros son bipolares, con una parte que se aleja y una que se acerca al observador. Además, tienen velocidades típicas  $v_{ch} \approx 300$  km/s. Siendo la velocidad del sonido  $c_s \approx 10$  km/s, estas velocidades corresponden a movimientos supersónicos con número de Mach  $M = v_{ch}/c_s \approx 30$ . Por otro lado, las dispersiones de velocidad son en general pequeñas, del orden de 10 - 20 km/s. La colimación de estos flujos se explica así considerando que el ángulo de apertura depende del cociente de la velocidad del sonido respecto

a la velocidad de choque (ángulo de apertura  $\approx c_s/v_{sh} = 1/M \approx 0.05$  radianes).

Las densidades electrónicas, deducidas utilizando los cocientes de líneas (por ejemplo [SII] 6717/6731 Å, Osterbrock 1989) varían entre  $10^2$  y  $10^4$   $\text{cm}^{-3}$ . La densidad del gas no es fácilmente determinable, ya que el grado de ionización de los chorros es generalmente bajo. La fracción de ionización del hidrogeno es alrededor del 10%, lo que corresponde a una densidad  $\approx 10^3 - 10^5$   $\text{cm}^{-3}$ . Esto significa que el material de los chorros es mucho más denso que el de las regiones fotoionizadas ( $\rho \approx 10^2$   $\text{cm}^{-3}$ ) y de las nubes moleculares ( $\rho \approx 10^3$   $\text{cm}^{-3}$ ) que son los medios en los que los chorros HH se propagan.

La asociación entre los chorros HH y los discos de acreción alrededor de estrellas jóvenes ha sido ampliamente demostrada. Un buen ejemplo de esta asociación son los chorros de HH212 (vistos en  $\text{H}_2$  2.12 $\mu\text{m}$ , Zinneker et al.1998) y HH30 (filmados con el HST, Figuras 1.3 y 1.4).

Hasta hace una decena de años se pensaba que el tamaño típico de los chorros HH era de fracciones de pársec, hasta que se descubrió (Bally & Devine 1994, Devine et al. 1997) un complejo a lo largo de HH34 (que incluye también HH 33/40 y HH 86/87/88) con un tamaño total de 2.8 pc. Desde ese entonces un cierto número de flujos HH (Reipurth et al. 1997b descubrieron 9 chorros HH con dimensiones  $\approx$  algunos pc) de dimensiones gigantes fueron descubiertos, incluyendo a HH 111, que tiene un tamaño total de 7.7 pc. Estos objetos corresponden a edades dinámicas de  $10^4 - 10^5$  años.

En la Figura 1.3 se muestran algunos chorros HH observados con el HST, y que permiten mostrar algunas características clave de estos objetos. En la parte superior izquierda se muestra HH30 (Burrows et al. 1996), junto con un disco de gas y polvo visto de canto alrededor de la estrella en formación. El disco tiene un tamaño de 450 UA (del orden del tamaño del sistema solar), y es oscurecido por una banda negra de polvo. La radiación proveniente de la estrella central ilumina las partes superiores e inferiores del disco, haciéndolo así visible, mientras que la luz de la estrella es absorbida por la parte más interna y más densa del disco. Además se puede notar como el disco es “flared”<sup>3</sup>, confirmando así las predicciones teóricas (Cap. 6). La región de eyección del jet es muy cercana a la estrella central, y el jet queda colimado ya desde la región de eyección. Además, la Figura 1.4 muestra dos imágenes del mismo jet

---

<sup>3</sup>Es decir que, siendo H la altura del disco y R el radio,  $d(H/R)/dR > 1, \forall R$

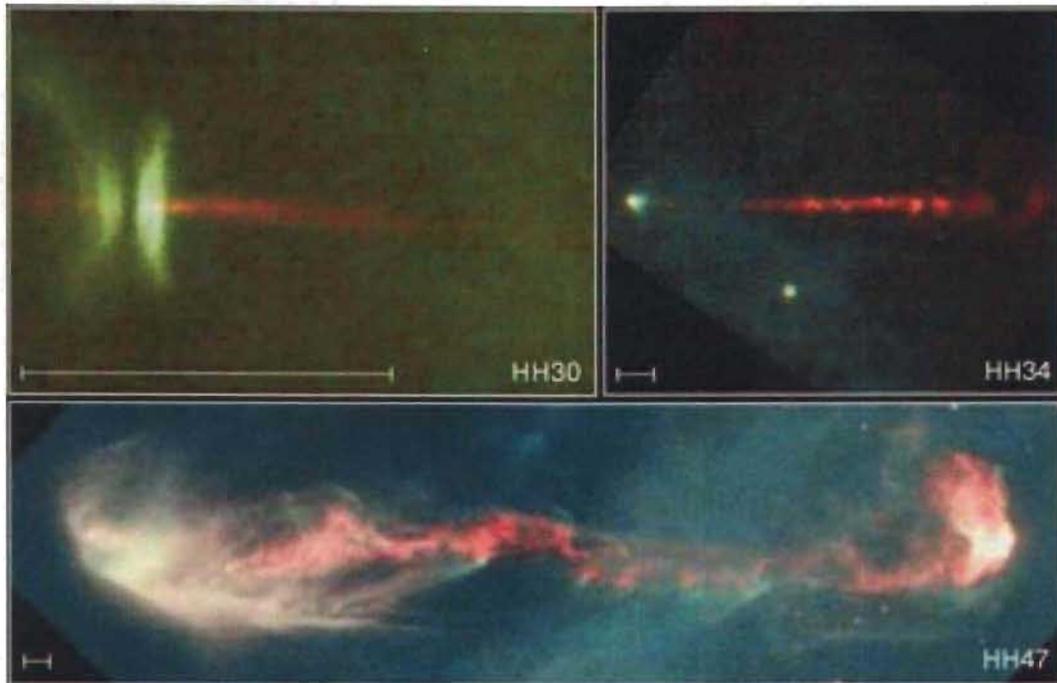


Figura 1.3: Imágenes ópticas de distintos chorros estelares (HH30: Burrows et al. 1996, HH34: Hester et al. 1994, HH47: Heathcote et al. 1996) obtenidos con la WFPC2 (HST)

tomadas en un intervalo de 1 año. Se pueden notar los nudos de gas, eyectados desde el sistema disco-estrella, que se propagan hacia la derecha. La presencia de los nudos implica que el proceso de acreción - eyección no es continuo. En la parte superior derecha se muestra HH34 (Hester et al. 1994), que es un óptimo ejemplo de un jet altamente colimado además que bipolar. HH34 tiene también un choque de proa muy bien definido (no mostrado en la imagen). En la parte inferior de la Figura 1.3 se puede observar HH47 (Heathcote et al. 1996), un jet con una estructura muy complicada, posiblemente debida a la presencia de una estrella compañera. El jet sale de una cavidad a través de un glóbulo de Bok (con una estrella T Tauri con fuerte emisión en el infrarrojo). La luz blanca presente en la parte izquierda es debida a luz estelar reflejada por la nube. La escala en la Figura 1.3 representa  $\approx 10^3$  UA.

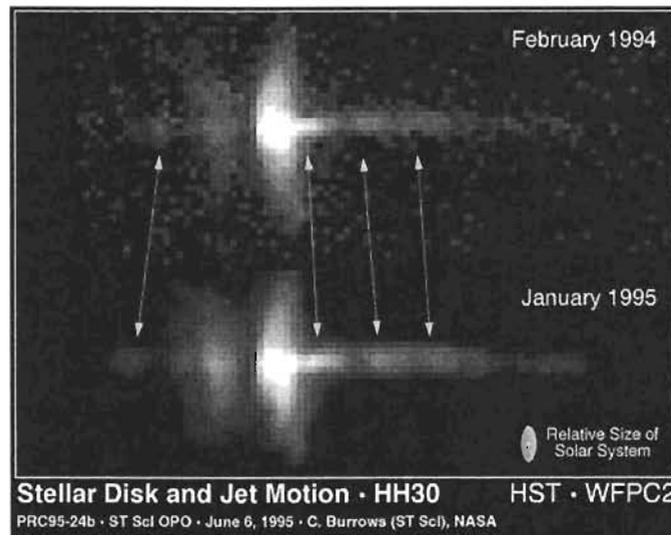


Figura 1.4: Variaciones en la dinámica de HH30 observadas con el HST a distancia de un año. La imagen fue tomada con la WFPC2 (Burrows et al. 1996). En la parte inferior derecha se puede apreciar el tamaño relativo del sistema solar.

### 1.2.2. Interpretaciones teóricas

El verdadero origen de los objetos HH no fue claro hasta que Schwartz (1975) sugirió que los objetos HH son choques radiativos resultantes de la interacción de un viento estelar supersónico con el medio ambiente. El espectro es entonces originado en la región de enfriamiento detrás del frente de choque. Con esta idea se pueden explicar muchas observaciones como el espectro de baja excitación, las velocidades radiales, las luminosidades y las escalas de variación de tiempo. En la Figura 1.5 se muestra una simulación numérica en dos dimensiones de la propagación de un jet hidrodinámico, adiabático y estacionario<sup>4</sup>. El material del jet sale de la frontera izquierda con velocidad constante y supersónica y se propaga en un medio uniforme. La interacción entre el jet y el medio ambiente en reposo crea el “choque de proa”. La velocidad de propagación del choque de proa se puede estimar haciendo un balance de la presión hidrodinámica en una dimensión, y se encuentra que (por ej. de Gouveia Dal Pino & Benz 1993)

$$v_{bs} = \frac{v_j}{1 + 1/\sqrt{\eta}} \quad (1.4)$$

<sup>4</sup>Los detalles sobre el código numérico utilizado serán descritos en el Capítulo 3.

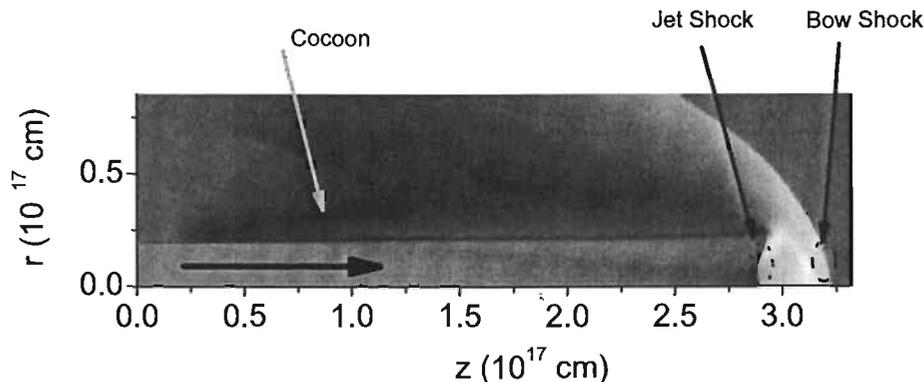


Figura 1.5: Simulación numérica en dos dimensiones de la propagación de un jet adiabático. El jet se mueve de izquierda a derecha con velocidad de inyección constante en  $z = 0$ . El código numérico será descrito en el capítulo 3.

donde  $\eta = \rho_j / \rho_{amb}$ . Este choque produce un incremento en la densidad (de un factor  $\approx 4$  para un choque fuerte sin campo magnético), en la velocidad y en la temperatura del medio ambiente ( $\approx 0.3 M^2$ ). Como se ve en la Figura 1.5, el frente de choque es perpendicular a la dirección de movimiento cerca del eje, pero se vuelve crecientemente oblicuo alejándose del eje.

Por otro lado, el material del jet estacionario (que se propaga hacia la derecha en la Figura 1.5) se mueve con velocidad  $v_j > v_{bs}$  por lo que este alcanza el material detrás del choque de proa generando así otro choque (“disco de Mach”), que se propaga con velocidad  $v_{dM} = v_j - v_{bs}$ . La zona de contacto entre los dos choques se llama discontinuidad de contacto, mientras que la estructura de dos choques es llamada la superficie de trabajo. Parte del material presente en la superficie de trabajo, con presión mayor respecto a la del medio aledaño, es expulsado lateralmente creando una cavidad (Figura 1.5).

El proceso de emisión de los chorros HH viene entonces de una transformación de energía cinética del jet en energía térmica: el gas se calienta y se ioniza. Los choques radiativos se conforman de una zona delgada en el frente de choque, donde el gas es calentado e ionizado, seguido por una zona de enfriamiento radiativo mucho más extendida (por ej. Draine & McKee 1993). En la región post-choque, el gas empieza a enfriarse, recombinarse y a perder energía térmica

por medio de la emisión de radiación. Además, los procesos de excitación colisional permiten excitar las líneas de los átomos neutros e ionizados, mientras que las líneas de hidrógeno son debidas mayormente a la cascada de recombinación. En la superficie de trabajo se crea una estratificación: alejándose del frente de choque está disponible menor energía térmica, y domina la emisión de las especies con menor excitación. De esta manera, se puede reproducir toda la variedad de líneas de alta y baja excitación observadas en los frentes de choque (por ej. Hartigan et al. 1987).

Si la presencia de líneas de alta o baja excitación depende entonces de la velocidad de choque, un problema puede ser como explicar la presencia de un espectro de baja excitación (con velocidades de choque de  $\approx 40$  km/s) en los nudos de los chorros, que tienen velocidades de propagación de cientos de km/s.

Para la generación de los nudos internos se propusieron en la literatura tres modelos (Bacciotti et al. 1995):

- El primer modelo considera un jet estacionario (por ej. Falle et al. 1987, Cantó et al. 1989) con presión mayor que la del medio ambiente. El jet durante su propagación se expande hasta que su presión llega a ser igual a la del medio ambiente. Ahí el jet es colimado nuevamente y se forma un “choque incidente”. En el punto en el que el choque llega sobre el eje se genera un “choque reflejado”, dejando al jet otra vez sobrepresurado con respecto al medio ambiente, de modo que el proceso se repite produciendo una cadena de nudos. Pero, los nudos observados en chorros muestran movimientos propios muy grandes, lo que no puede ser reproducido por estos modelos estacionarios.
- La segunda posibilidad es que sean choques oblicuos excitados por inestabilidades HD, MHD o térmicas. El hecho de que los chorros y contra-chorros (por ej. HH 111) sean muy simétricos parece indicar que este modelo no es el correcto, por que para tener simetría debería existir un medio ambiente con densidad simétrica, lo que no parece razonable. El mismo proceso se puede obtener en un jet magnetizado, debido a efecto “pinch”.
- Raga et al. (1990) consideraron el comportamiento de un jet con alto número de Mach, con velocidad y densidad variables.<sup>5</sup> Si en algún momento la velocidad de eyección crece con el tiempo, el material que sale

---

<sup>5</sup>Modelos similares fueron estudiados para el caso de los chorros extragalácticos por parte

más tarde alcanzará al material que salió primero, produciendo un choque. En este esquema para explicar las cadenas de nudos a lo largo de los chorros HH se usa un período típico de variación en la eyección de 10 años. Este modelo también puede explicar por qué los nudos alineados a lo largo de los chorros HH no tienen líneas de emisión de elementos fuertemente ionizados. Mientras que las velocidades típicas de los nudos son de  $\approx 300$  km/s, para reproducir los espectros de emisión observados son necesarias velocidades de choque hasta un orden de magnitud menores. En el caso en que los nudos sean superficies de trabajo internas, el problema es fácilmente resuelto por que los nudos no se propagan en un medio ambiente no perturbado, sino que en un medio ambiente en movimiento. La velocidad de choque en este caso sería la diferencia entre la velocidad de propagación del jet y la velocidad de propagación del material previamente eyectado. Dicho de otra forma, es la amplitud en la variación de la velocidad de eyección la que determina la velocidad de choque de los nudos.

### 1.2.3. Campos magnéticos y chorros

La importancia de los campos magnéticos en los chorros no es clara. De hecho, no hay ninguna observación concluyente de la presencia de campos magnéticos en chorros estelares<sup>6</sup>. Los métodos usualmente utilizados para encontrar la intensidad del campo magnético no son útiles en los chorros estelares: el “Zeeman splitting” es prácticamente imposible de medir debido al ancho térmico de las líneas, y la rotación de Faraday y la emisión de sincrotrón son efectos demasiado pequeños para ser medidos.

Hartigan et al. (1994) buscaron inferir la intensidad del campo magnético usando cocientes de líneas. Consideraron modelos de choque plano-paralelos radiativos y con campo magnético, cubriendo una gran variedad de densidades pre-choque, velocidades de choque e intensidades del campo magnético. Concluyeron que no se pueden derivar las intensidades del campo de esta manera, ya que los cocientes que se obtienen de un choque con un gran campo magnético parecen similares a los que se obtienen con un choque con velocidades de choque menores.

---

de Rees (1978).

<sup>6</sup>Ray et al. (1997) utilizando medidas de polarización, reportaron la evidencia de un campo magnético dinámicamente relevante en el jet eyectado de la fuente T Tauri S, pero la medida es muy controvertida

Pero existen fuertes razones teóricas para pensar que los campos magnéticos puedan jugar un papel importante en la dinámica de los chorros. La actual comprensión del fenómeno de la eyección de los chorros, como vimos, está basada sobre la presencia de campos magnéticos relevante en el sistema estrella-disco (Konigl y Pudritz 2000; Shu et al. 2000). En el marco de la teoría de la MHD ideal, argumentos de congelamiento de las líneas de fuerza nos indican que estos campos deberían seguir al material eyectado. Además, la difusión ambipolar no es capaz de disipar los campos magnéticos (Frank et al. 1999) en tiempos cortos.

Regresando a las observaciones, si por un lado es difícil determinar la intensidad del campo magnético en chorros estelares, por otro lado hay muchos estudios del campo magnético en nubes moleculares, es decir en el medio natural de propagación de los chorros HH. En particular ha sido muy estudiada la correlación entre la dirección del campo magnético en nubes moleculares y la dirección de los chorros observados. Si las nubes moleculares se contraen preferentemente en dirección paralela a las líneas de campo, se puede esperar que los chorros sean eyectados paralelos a las líneas de campo, ya que los discos se formarán en dirección perpendicular. Recientemente Ménard & Duchêne (2004), estudiando la nube molecular de Taurus, encontraron que los chorros parecen estar orientados de manera asarozza respecto a la dirección del campo magnético local de la nube (Figura 1.6). Estos nuevos resultados parecen contradecir análisis precedentes (por ej. Strom et al. 1986; Tamura & Sato 1989) que encontraron evidencias de que los chorros estaban orientados paralelamente a la dirección del campo magnético y que los discos estaban orientados perpendicularmente. La razón (Ménard & Duchêne 2004) es que en el subgrupo de chorros más luminosos y mejor definidos, considerado en los estudios precedentes (Strom et al. 1986; Tamura & Sato 1989) los chorros están orientados paralelamente a la dirección del campo magnético, mientras que en una muestra completa que incluya también chorros más débiles o irregulares, estos están orientados de manera asarozza. Es necesario entonces preguntarse por qué existe una correlación entre la fuerza del jet detectado y la dirección del campo magnético ambiental. Una posible razón es que el mecanismo de creación de los chorros dependa de la orientación relativa del disco y del campo magnético, mientras que otra posibilidad es que la debilidad del jet sea debido a que éste se propaga en un medio con un campo magnético *perpendicular* a la dirección de propagación. Esta segunda posibilidad será estudiada en el capítulo 5.

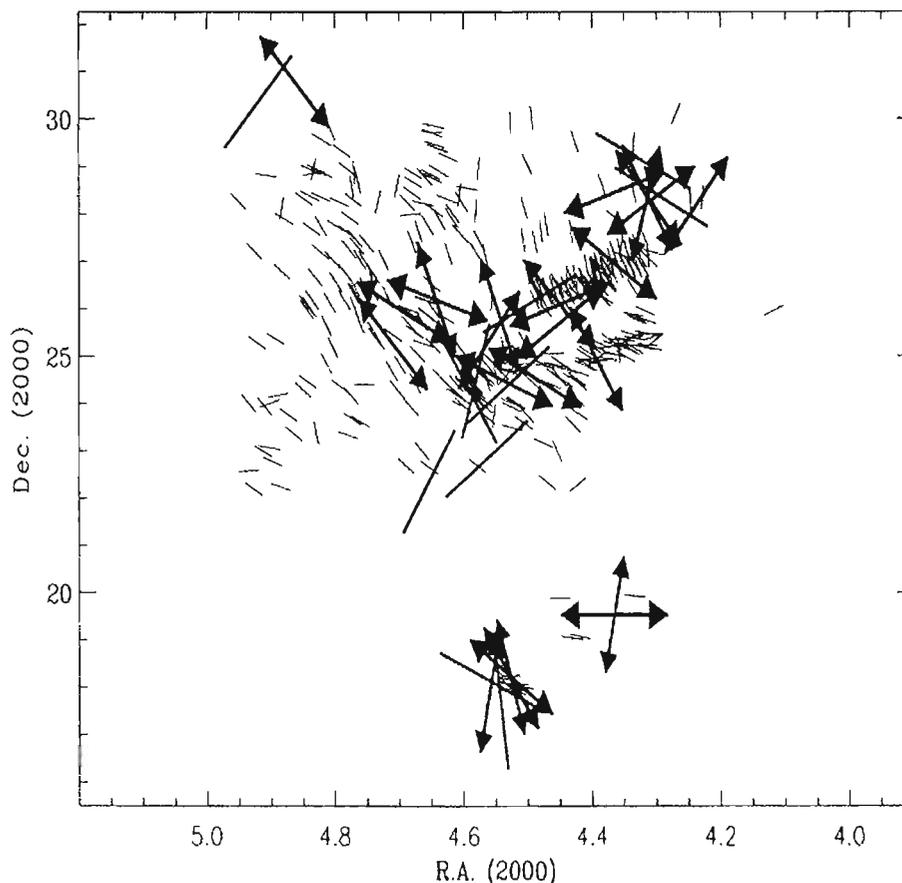


Figura 1.6: Orientación de discos de acreción y chorros respecto a las líneas de fuerza del campo magnético en la nube molecular Taurus. Los segmentos cortos representan las direcciones del campo magnético, mientras que las líneas largas con flechas y sin flechas representan las orientaciones de los discos alrededor de las estrellas T Tauri con y sin chorros asociados, respectivamente (Ménard & Duchêne 2004).

#### 1.2.4. Simulaciones numéricas de la propagación de chorros

En las simulaciones de chorros estelares existen dos problemas fundamentales. El primero es un problema práctico, debido a que existen pocas restricciones sobre parámetros importantes de los chorros como intensidad y dirección del campo magnético, o densidad del jet. Por esta razón el espacio de parámetros que se necesita explorar permanece muy amplio. El segundo problema es técni-

co, debido a que los chorros se enfrían *demasiado* rápido, y resolver la región de enfriamiento en simulaciones 3D que consideren también la dinámica global del jet es un problema muy grande. Por esta razón, a menudo es necesario considerar chorros que se propaguen con densidades mucho menores que las densidades reales de estos objetos (debe recordarse que el enfriamiento en el límite de baja densidad es proporcional al cuadrado de la densidad). Por otro lado, recientemente se introdujeron esquemas con mallas adaptativas que permiten alcanzar grandes resoluciones y calcular además con detalle el estado de no-equilibrio del gas (por ej. el código “Yguazú”: Raga et al. 2000<sup>7</sup>).

Se han hecho muchas simulaciones hidrodinámicas de chorros, mientras que los modelos MHD son menos explorados. Hay simulaciones de chorros extragalácticos (con densidades menores que la densidad del medio ambiente y no radiativos, Lind et al. 1989) y recientemente se han hecho algunas simulaciones con campo magnético en 2 y 3 dimensiones de chorros radiativos. Generalmente, las simulaciones utilizan hidrógeno ionizado con una ecuación de estado de gas ideal. Las simulaciones incluyen una tasa de enfriamiento radiativo (dada, por ejemplo, por la función de enfriamiento coronal de Dalgarno & McCray 1972), y diferentes geometrías del campo magnético: longitudinal (por ej. Cerqueira et al. 1997; Gardiner et al. 2000), toroidal (Frank et al. 1998) y helicoidal (O’Sullivan & Ray 2000). Además, existen simulaciones de chorros estacionarios y pulsados, para simular la presencia de nudos en el jet. Los resultados muestran que hay diferencias dinámicamente relevantes entre simulaciones HD y MHD, como un crecimiento en la colimación, el desarrollo de inestabilidades y la presencia de “nose cones” en el caso magnetizado (para un review véase Cerqueira 2001c y de Gouveia Dal Pino & Cerqueira 2002).

Las simulaciones con campo magnético se concentraron sobre los aspectos dinámicos y la evolución del jet más que sobre obtener predicciones del espectro de emisión. De hecho, no existen cálculos detallados del espectro de emisión utilizando modelos de chorros magnetizados. Cerqueira & de Gouveia Dal Pino (2001b) con una fórmula semiempírica (que es válida para velocidad de choque entre 20 y 80 Km s<sup>-1</sup>) calcularon la emisión de H $\alpha$  de chorros magnetizados y la compararon con la emisión de chorros hidrodinámicos. Ellos

---

<sup>7</sup>Las diferencias entre el código desarrollado como parte de esta tesis e Yguazú son que Yguazú tiene una malla adaptativa mientras que este código tiene una malla fija. Por otro lado este código resuelve las ecuaciones de la MHD mientras que Yguazú resuelve las ecuaciones de la HD.

utilizaron las predicciones de las velocidades de choque y de las densidades obtenidas con sus simulaciones 3D, para encontrar la emisión con y sin campo magnético. Claramente (Fig. 1.7) el campo magnético tiene un efecto considerable y máximo para una configuración toroidal del campo magnético.

En la Figura 1.8 se muestra un ejemplo de simulaciones de propagación de chorros adiabáticos, con parámetros similares a los de Frank et al. (1998). La densidad del medio ambiente es de  $90 \text{ cm}^{-3}$  y la del jet es de  $135 \text{ cm}^{-3}$ . El jet es eyectado con una velocidad  $v = 100 \text{ km/s}$  y la temperatura del medio ambiente y del jet es de  $15000 \text{ K}$  y  $10000 \text{ K}$  respectivamente, de manera que el jet queda en equilibrio de presión con el medio ambiente. El campo magnético es puramente toroidal y es distinto de cero sólo en el jet. De arriba a abajo en la Figura 1.8 se muestra un jet HD, un jet magnetizado con equilibrio hidromagnético radial (véase el capítulo 4 para más detalles sobre esta configuración) y un jet magnetizado con perfiles radiales iniciales constantes de densidad, presión y campo magnético. En el último caso se forman a lo largo del eje de simetría estructuras creadas por desbalances de la presión magnética (“efecto pinch”). En los casos magnetizados (respecto al caso HD) se puede notar que la superficie de trabajo se vuelve mucho más ancha. La estructura que se forma es conocida como “nose cone”. Además, los “nose cones” tienen densidades mayores que las superficies de trabajo HD (los valores son reportados en el pie de la Figura 1.8). Este es un hecho notable, por que un análisis de las ecuaciones de la MHD por medio de las condiciones de Rankine-Hugoniot (discutidas en el cap. 2) muestra que en el caso de choques plano-paralelos el efecto del campo magnético es una disminución de la densidad en la región post-choque respecto al caso HD. Este es un efecto que se puede explicar como debido al mayor confinamiento de la superficie de trabajo (en dirección radial) debida a la presencia de un campo toroidal. El material presente en la superficie de trabajo, mejor confinado, tiende a escaparse menos lateralmente, a formar cavidades mucho menos importantes (véase la Figura 1.8), lo que resulta en un incremento de la densidad dentro la superficie de trabajo.

Como fue notado por Frank et al. (1998), la velocidad del frente de choque es siempre mayor que la velocidad del correspondiente jet HD, y el hecho de que el jet MHD sea mucho más colimado explica la mucho mayor velocidad de propagación.

Las simulaciones radiativas muestran menores diferencias entre simulaciones

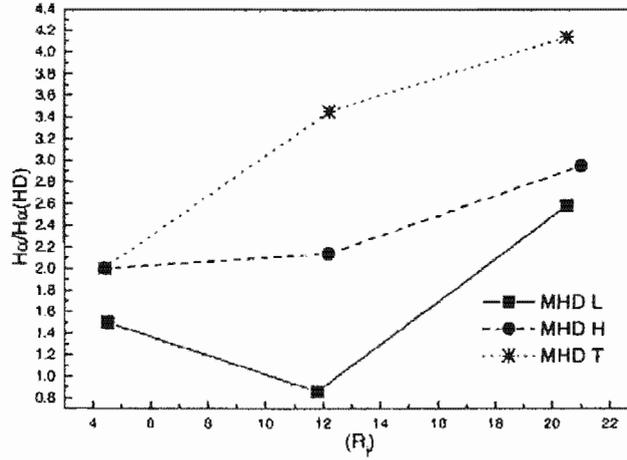


Figura 1.7: .

Figura tomada de Cerqueira & de Gouveia Dal Pino (2001b): Emisión en  $H\alpha$  encontrada con la fórmula semiempírica  $I_{H\alpha} = 3.21 \times 10^{11} \rho v_{sh}^{3.8} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  (Raga & Cantó 1998) para tres diferentes configuraciones de campo magnético: L = longitudinal, H = helicoidal, T = toroidal.

HD y MHD. Además, simulaciones 3D (Cerqueira 2001a) muestran menores diferencias entre los dos tipos de simulaciones, como la ausencia de “nose cones”. Este puede ser un efecto de inestabilidades tipo “kink” en las simulaciones 3D o un efecto de la menor resolución presente en las simulaciones SPH (“Smooth Particle Hydrodynamics”) utilizadas por estos autores. Entender estos efectos en simulaciones de alta resolución en 3D puede ser muy importante para dar restricciones sobre la presencia de un campo magnético dinámicamente relevante en los chorros estelares

### 1.2.5. Esta tesis

Como se mencionó, no existen cálculos directos del efecto del campo magnético sobre la estructura de emisión de un jet. Esta tesis retoma este aspecto del problema, desarrollando simulaciones MHD de chorros radiativos y estudiando el efecto de la presencia del campo magnético sobre la emisión en  $H\alpha$  (capítulo 4).

Los chorros HH son generados por discos alrededor de estrellas jóvenes, por lo que el ambiente natural en donde encontrarlos es en nubes moleculares. Es importante entonces entender cuál es el efecto de la interacción del jet con la

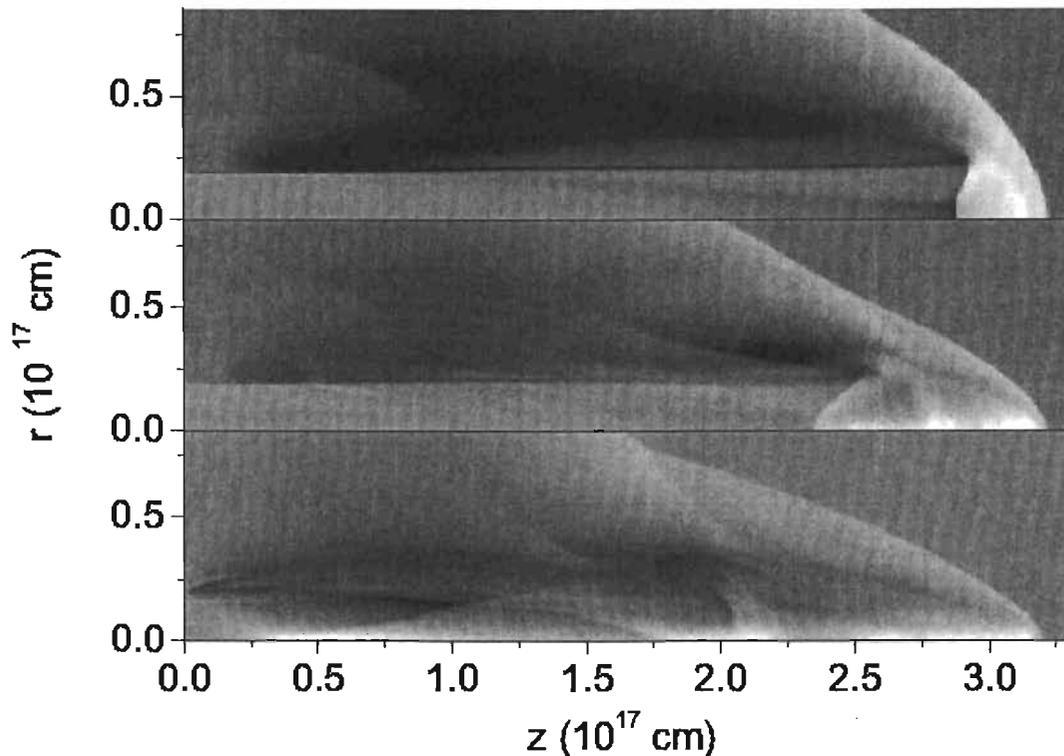


Figura 1.8: Representación en escala logarítmica de la densidad para simulaciones adiabáticas, para los tres casos: hidrodinámico, con campo magnético con equilibrio magnetostático radial, MHD sin equilibrio radial. Los tiempos de integración son de 1760, 1520 y 1460 años y los valores mínimos y máximos son 35/400, 20/650, 10/1050  $\text{cm}^{-3}$  (de arriba a abajo). El color negro representa valores bajos y el blanco valores altos de densidad (De Colle & Raga 2004)

nube, y determinar si esta puede ser una fuente importante de generación de turbulencia (por lo menos a las escalas típicas del tamaño del jet) o si hay algún proceso de retroalimentación entre la dinámica de la nube y la generación de los chorros (capítulo 5).

Para hacer estas simulaciones, es necesario desarrollar un código numérico que resuelva las ecuaciones de la MHD de manera eficiente. En el próximo capítulo describiremos las ecuaciones de la MHD y sus propiedades, y con estos conocimientos, en el capítulo 3, presentaremos el desarrollo del código y los tests numérico que lo validan.

---

# 2

## Magnetohidrodinámica

En este capítulo se mostrará una técnica simplificada y muy utilizada para estudiar los plasmas: la teoría de la magnetohidrodinámica (o MHD). Se describirán muy brevemente las técnicas que se utilizan para derivar teóricamente las ecuaciones de la MHD, sus limitaciones y sus propiedades principales. Además, para poder en el próximo capítulo entender los métodos numéricos utilizados para integrar las ecuaciones, se describirán algunas propiedades matemáticas de éstas, como su naturaleza de ecuaciones hiperbólicas, la propagación de ondas y la creación de ondas de choque.

### 2.1. La “derivación” de las ecuaciones de la MHD

El 99% de la materia visible del universo está constituido por plasma. Este es un estado de la materia en el que las partículas cargadas (y neutras) exhiben un comportamiento colectivo, y su estudio, fundamental para entender muchos fenómenos físicos, es particularmente complicado. En la aproximación MHD el plasma es tratado esencialmente como un gas magnetizado conductor de corriente y eléctricamente neutro. Muchos de los aspectos físicos que caracterizan a un plasma se pierden, y por otro lado esto puede representar una buena

primera aproximación de la naturaleza.

La técnica más básica (y complicada) para estudiar un plasma es resolver el problema que se obtiene considerando las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

y las ecuaciones de movimiento (la fuerza de Lorentz) para cada partícula:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (2.5)$$

Las interacciones entre las partículas son expresada por medio de los campos eléctricos y magnéticos, que son debidos al movimiento de *todas* las partículas. Por otro lado, con el crecimiento de las capacidades de cómputo, ha sido posible en los últimos años desarrollar códigos numéricos “PIC” (“Particle In Cell”), que resuelven este sistema de ecuaciones numéricamente. Un ejemplo muy popular es TRISTAN (TRIdimensional STANford) creado por Buneman en el 1993 (véase el review de Nishikawa 2001).

El análisis analítico de estas ecuaciones se conoce como “teoría de las órbitas”, y estudia el movimiento de una partícula cargada sujeta a unos campos eléctricos y magnéticos variables. Con este estudio es posible entender fenómenos como las derivas presentes en los plasmas o el efecto espejo (por ej. Morozov & Solov’ev 1966).

El problema se puede en parte simplificar considerando una descripción estadística, en la que en lugar de considerar el movimiento individual de las partículas se considera el movimiento de grupos homogéneos de partículas (por ej. electrones e iones). Cada conjunto de partículas se describe así por medio de la función de distribución  $f_\alpha$ , definida como la densidad de partículas de la especie  $\alpha$  en el espacio fase de las coordenadas posición y velocidad. La ecuación que se obtiene es la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}_\alpha}{c} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{v}} = C_\alpha(f) \quad (2.6)$$

donde el término  $C_\alpha(f)$  representa la contribución de las colisiones a la evolución de la función de distribución, las más importantes de las cuales son las que se obtienen para las interacciones de corta distancia entre las partículas. Por otro lado, los campos eléctricos y magnéticos son, en sistemas aislados, el resultado de las interacciones de larga distancia ya que las interacciones de corta distancia producen campos rápidamente fluctuantes y nulos para un grupo bastante grande de partículas. Un caso particular de esta ecuación es la ecuación de Vlasov, en la que no se considera el término colisional.

Muchas veces no es necesario conocer los detalles microscópicos sobre el sistema (incluidos en la teoría cinética), sino que sólo los parámetros macroscópicos (por ejemplo temperatura, densidad o presión). Una descripción en la que se utilizan parámetros macroscópicos para describir el sistema es la teoría de fluidos, que se puede aplicar en sistemas que tienen un número de colisiones suficientes para tener un estado cercano al equilibrio. Para obtener una descripción de fluidos desde la teoría cinética se consideran los momentos ( $m^n$ ) de orden  $n$  de la ecuación de Boltzmann, definidos como:

$$m^n = \int \vec{v}^n \frac{Df_\alpha}{Dt} d^3\vec{v}. \quad (2.7)$$

Con el momento de orden 0 se obtiene la ecuación de continuidad (para la especie  $\alpha$ ). Con el momento de orden 1 se obtiene la ecuación de conservación del momento. Con el momento de orden 2 se obtiene la ecuación de conservación de la energía.

En teoría, la integración podría seguir al infinito, y de hecho resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene con una serie infinita de momentos de la ecuación de Boltzmann equivale a resolver directamente la ecuación de Boltzmann. La simplificación consiste entonces en detener este procedimiento en el momento de orden 2 (por ej. Hazeltine & Waelbroeck 1998). Se considera la velocidad de cada especie como la suma de una velocidad macroscópica y de una velocidad microscópica fluctuante, con promedio temporal y espacial nulo. Se introducen así toda una serie de nuevos parámetros físicos como la presión, la temperatura, el flujo de calor, el transporte de momento y el transporte de calor (estos últimos términos corresponden a la integración de los momentos del término colisional).

En el cálculo del momento de orden  $n$  de la ecuación de Boltzmann se introducen momentos de orden  $n + 1$  de la función de distribución, debido a la

presencia del término proporcional a  $\vec{v}$ . Para cerrar el sistema (es decir tener un número de incógnitas igual al número de ecuaciones) se necesita entonces hipotetizar relaciones entre las variables de orden superior (flujo de calor, o transporte de momento y calor), y otras de orden inferior (densidad y temperatura). Se debe utilizar entonces una teoría del transporte (Braginskii 1965) por medio de la cual se sustituyen las variables arriba mencionadas con *parámetros* como la viscosidad, la conductividad térmica y la resistividad. Cabe subrayar aquí que este pasaje de la derivación de la teoría de fluidos es, por lo menos en el caso de un plasma, muy problemática (véase por ej. la discusión en Goedbloed & Poedts 2004; Hazeltine & Waelbroeck 1998), debido a que la teoría del transporte está aún en eras de desarrollo en el caso de los plasmas<sup>1</sup>.

En fin, una vez que se obtiene una teoría de fluidos para las distintas especies constituyentes el plasma, esta puede ser aún más simplificada suponiendo que las distintas especies tengan velocidades similares, y que el plasma sea casi neutro. El resultado final de todos estos procesos de simplificación son las ecuaciones de la MHD.

## 2.2. Las ecuaciones de la MHD

La presentación de las ecuación de la MHD se puede encontrar, de manera más o menos similar a la presentada aquí, en un gran número de libros (por ej. Alfvén & Falthammar 1963, Goedbloed & Poedts 2004; Hazeltine & Waelbroeck 1998).

La teoría de un fluido (MHD) describe un plasma en términos de promedios macroscópicos, funciones de posición y tiempo. Para que esta aproximación sea válida el tamaño, la duración, la densidad y la intensidad del campo magnético deberían ser bastante grandes para establecer un comportamiento de fluido y promediar los fenómenos microscópicos. La escala de tiempo debe ser mayor que el inverso de la frecuencia ciclotrónica, y la escala espacial debería ser mayor que el radio ciclotrónico. Además no se toman en cuenta los efectos de

---

<sup>1</sup>Una revisión de la historia de la física del plasma puede servir como demostración de este concepto. Cuando en los principios de los años cincuenta se comenzó a pensar como obtener energía desde procesos de fusión, la obtención de energía nuclear por medio de procesos de fusión en Tokamaks parecía ser una tarea muy sencilla. Pero en las décadas siguientes se entendió que el plasma quedaba mucho menos confinado que lo esperado teóricamente, y se tuvo que introducir el concepto de “transporte anómalo”.

separación de cargas y la diferencia entre las temperaturas de electrones e iones.

Las ecuaciones son las siguientes:

- Las ecuaciones de Maxwell<sup>2</sup>

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (2.10)$$

donde se suponen variaciones pequeñas en el tiempo (bajas frecuencias) a fin de que se pueda despreciar el término  $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  en la ley de Ampère (2.10).

- La ley de Ohm resistiva:

$$\frac{1}{\sigma} \vec{J} = \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c}. \quad (2.11)$$

Nótese que para conductividad magnética ( $\sigma$ ) grande, esta ecuación se reduce a la condición “libre de fuerzas”.

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.12)$$

que describe la conservación de la masa. Integrando en el volumen y utilizando el teorema de la divergencia de Gauss se obtiene

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (2.13)$$

donde  $A$  es la superficie que contiene el volumen  $V$ , y  $\vec{n}$  es la normal a esta superficie.

---

<sup>2</sup>La ecuación  $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$  no se usa para la derivación de las ecuaciones de la MHD, ya que se considera nula la separación de cargas.

Esta ecuación representa el hecho que la masa de gas contenida en un volumen  $V$  puede variar en el tiempo sólo si hay un flujo neto de masa a través de la superficie  $A$  que contiene ese volumen. Por esta razón, se dice que la masa es una variable conservada y las ecuaciones escritas en esta forma son ecuaciones en forma de *ley de conservación*.

- La ecuación de balance de las fuerzas por unidad de volumen o de conservación del momento:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.14)$$

donde  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ . El termino  $\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$  es la fuerza de Lorentz (por unidad de volumen y despreciando el campo eléctrico), debida a la presencia del campo magnético.

Este término puede escribirse como:

$$\vec{f}_L = \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.15)$$

donde  $\mathbf{T}$  es el tensor de los esfuerzos de Maxwell:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{4\pi} \vec{B} \vec{B} - \frac{B^2}{8\pi} \mathbf{I} \quad (2.16)$$

El primer término representa una tensión magnética, que se opone a la deformación de las líneas de campo, y el segundo término representa una presión magnética, que tiende a crear una distribución uniforme de campo magnético.

- La ecuación de conservación de la densidad de energía:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{v}(e + p)] = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (2.17)$$

donde el termino  $\vec{J} \cdot \vec{E}$  representa el gradiente del flujo de la energía magnética.

Las ecuaciones (2.8)-(2.17) representan el sistema de ecuaciones de la MHD resistiva.

Se puede eliminar el campo eléctrico  $\vec{E}$  de la ley de Faraday (2.8) utilizando la ley de Ohm resistiva (2.11) y la ley de Ampère (2.10), obteniendo:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \nabla \times \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{B} \right). \quad (2.18)$$

Recordando que la resistividad magnética está definida por:

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad (2.19)$$

esta ecuación se puede escribir (si  $\eta$  es constante) como:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (2.20)$$

El campo magnético tiende a moverse rígidamente con el fluido (por el primer término a la derecha en esta ecuación), y a difundirse (por el segundo término). Se puede estimar la importancia de la resistividad comparando los dos términos, y obteniendo el número de Reynolds magnético:

$$R_m = \frac{\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})}{\eta \nabla^2 \vec{B}} \approx \frac{L^{-1} v B}{L^{-2} \eta B} = \frac{Lv}{\eta} \quad (2.21)$$

Por otro lado, la escala de tiempo típica de disipación difusiva se encuentra considerando sólo el término difusivo:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{t} \approx \frac{\eta B}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \tau \approx \frac{L^2}{\eta} \quad (2.22)$$

donde  $L$  es la escala típica de variación del campo magnético. Si la resistividad es despreciable, esta ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = -\nabla \cdot (\vec{v} \vec{B} - \vec{B} \vec{v}). \quad (2.23)$$

Integrando el término izquierdo sobre una cierta superficie  $A$ , y utilizando el teorema de Stokes, se obtiene la derivada parcial del flujo magnético  $\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \vec{n} dA$ . Esta ecuación representa entonces la conservación del flujo del campo magnético, o el hecho de que el campo magnético está congelado con el fluido,

en la teoría MHD. Se puede además re-escribir la ecuación de conservación de la energía, utilizando la ley de Ampère (2.10), como:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{v}(e + p)] = \frac{1}{4\pi} \left[ \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{B}) - (\vec{u} \cdot \vec{B})\nabla \cdot \vec{B} \right] \quad (2.24)$$

y la ley de conservación del momento (2.14) como:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} \left[ \nabla \cdot (\vec{B}\vec{B}) - \nabla \cdot (B^2/2 \mathbf{I}) - \vec{B}(\nabla \vec{B}) \right]. \quad (2.25)$$

Las ecuaciones de la MHD se pueden así escribir en forma compacta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho\vec{v} \\ \vec{B} \\ e \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho\vec{v} \\ \rho\vec{v}\vec{v} + \mathbf{I}(p + B^2/2) - \vec{B}\vec{B} \\ \vec{v}\vec{B} - \vec{B}\vec{v} \\ (e + p + B^2/2)\vec{v} - \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{B}) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad, y donde  $\vec{B}$  está normalizado respecto a  $\sqrt{4\pi}$ . Estas ecuaciones están escritas en forma de ley de conservación.

El sistema de ocho ecuaciones está expresado como función de ocho variables: la densidad  $\rho$ , las velocidades  $\vec{v}$  (o los momentos  $\rho\vec{v}$ ), los campos magnéticos  $\vec{B}$  y la presión  $p$  o la energía  $e$  por unidad de volumen definida como:

$$e = c_v p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} B^2. \quad (2.27)$$

En esta ecuación se supone que no hay pérdidas de energía por radiación, es decir adiabaticidad. Además, si se desea conocer la temperatura se necesita una ecuación de estado, por ejemplo gas ideal.

## 2.3. Propiedades matemáticas de las ecuaciones de la MHD

### 2.3.1. Sistemas hiperbólicos

Consideramos un sistema de ecuaciones diferenciales escritas en forma de ley de conservación:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = 0 \quad (2.28)$$

con las condiciones iniciales  $u(x, t = 0) = u_0(x)$ .<sup>3</sup> En estas ecuaciones,  $u$  es el vector de las variables conservadas,  $f$  es el vector de los flujos convectivos, y  $A$  es el jacobiano:

$$A = \frac{df}{du} \quad (2.29)$$

por lo que el sistema de ecuaciones 2.28 se puede escribir como:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + A \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (2.30)$$

Los sistemas de ecuaciones (2.28) y (2.30) se dicen *hiperbólicos* si la matriz jacobiana tiene  $n$  autovalores reales y si es diagonalizable, es decir que admita  $n$  autovectores reales y linealmente independientes (LeVeque 1990). Además, el sistema se dice *estrictamente hiperbólico* si los autovalores son distintos.

Lo que es más importantes de las ecuaciones hiperbólicas es que los autovalores de la matriz Jacobiana están asociados a las velocidades de propagación de las ondas asociadas al sistema de ecuaciones considerado.

Siendo  $A$  diagonalizable, se puede escribir

$$A = R\Lambda R^{-1} \quad (2.31)$$

donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal de autovalores  $\lambda_i$ , con  $(i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $R$  es la matriz de los autovectores derechos (definidos por medio de la relación  $AR = RA$ ), y  $R^{-1}$  es la matriz de los autovalores izquierdos (definidos como  $R^{-1}A = R^{-1}\Lambda$ ).  $R$  y  $R^{-1}$  son ortonormales.

Un ejemplo clásico de ecuación hiperbólica en física es la ecuación de advección en una dimensión:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + v \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (2.32)$$

donde  $v$  es la velocidad de advección. Si  $v$  es constante la solución de esta ecuación es:

$$y(x, t) = y(x - vt) \quad (2.33)$$

---

<sup>3</sup>Este es conocido como el problema de Cauchy.

es decir que el perfil inicial solo se mueve (“advecta”) con velocidad  $v$ . Las ecuaciones de Euler son otro ejemplo de un sistema de ecuaciones estrictamente hiperbólico, mientras que las ecuaciones de la MHD (ideal), como veremos, forman un sistema de ecuaciones hiperbólico.

Utilizando el ejemplo de la ecuación de advección, podemos resolver el sistema de ecuaciones (2.28) de la siguiente forma (por ej. Toro 1999, LeVeque 1990):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + R \Lambda R^{-1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow R^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda R^{-1} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R^{-1}u}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial R^{-1}u}{\partial x} = 0 \quad (2.37)$$

donde la última operación ha sido posible suponiendo que la matriz  $A$  está compuesta por elementos constantes.

Este último es un sistema de ecuaciones desacopladas y cada ecuación es una ecuación de onda asociada a un particular autovalor:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0 \quad (2.38)$$

donde  $v = R^{-1}u$  se llama el vector de las “variables características”. La solución es entonces:

$$v_i(x, t) = v_i(x - \lambda_i t) \quad (2.39)$$

y regresando de variables características a variables conservadas:

$$u(x, t) = Rv(x, t) = \sum_{i=1}^n v_i(x - \lambda_i, t) r_i. \quad (2.40)$$

Las curvas  $x = x_0 + \lambda_i t$  son las “curvas características” del sistema de ecuaciones. A lo largo de estas curvas la solución es constante.

### 2.3.2. El problema de Riemann

Un problema particularmente interesante es el de Riemann, en el que las condiciones iniciales de la ecuación (2.28) son:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u^L & \text{si } x < 0 \\ u^R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

En este caso se pueden descomponer  $u^L$  y  $u^R$  en (LeVeque 1990):

$$u_L = \sum_{i=1}^n v_i^L r_i \quad u_R = \sum_{i=1}^n v_i^R r_i \quad (2.42)$$

por lo que se obtiene como condición inicial:

$$v_i(x, 0) = \begin{cases} v_i^L & \text{si } x < 0 \\ v_i^R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

y como solución

$$v_i(x, t) = \begin{cases} v_i^L & \text{si } x - \lambda_i t < 0 \\ v_i^R & \text{si } x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

por lo que la solución en coordenadas conservadas, para estas particulares condiciones iniciales, es:

$$u(x, t) = \sum_{\lambda_i < x/t} v_i^R r_i + \sum_{\lambda_i > x/t} v_i^L r_i. \quad (2.45)$$

Utilizando las ecuaciones (2.42) esto se puede escribir como:

$$u(x, t) = u^L + \sum_{\lambda_i < x/t} (v_i^R - v_i^L) r_i \quad (2.46)$$

$$= u^R - \sum_{\lambda_i > x/t} (v_i^R - v_i^L) r_i. \quad (2.47)$$

Estas ecuaciones, soluciones del problema de Riemann, pueden ser utilizadas para construir algoritmos numéricos.

Además, haciendo la diferencia entre  $u_L$  y  $u_R$  en las ecuaciones (2.42) se obtiene

$$[u_i] = [v_i] r_i \quad (2.48)$$

donde  $[u] = u^R - u^L$ . Los dos términos de esta ecuación multiplicados por la matriz jacobiana  $A$  dan respectivamente

$$A[u_i] = [f] \quad (2.49)$$

(donde  $f$  es el flujo), y

$$[v_i]Ar_i = \lambda_i[u] \quad (2.50)$$

por lo que se obtiene:

$$[f] = \lambda_i[U]$$

que son las condiciones de Rankine-Hugoniot.

### 2.3.3. Autovalores y autovectores en MHD

Se puede escribir el sistema de ecuaciones de la MHD en la forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (2.51)$$

en coordenadas cartesianas, donde  $U = [\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, e, B_x, B_y, B_z]^T$ , y

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p + \frac{B^2}{2} - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ (p(c_v + 1) + B^2 + \frac{\rho v^2}{2})v_x - B_x(\vec{v} \cdot \vec{B}) \\ 0 \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

$U$  es el vector de las variables conservadas y  $F, G, H$ , son los flujos en las direcciones  $x, y, z$  respectivamente. El vector  $G$  se obtiene desde  $F$  intercambiando los subíndices  $x$  con  $y$ , y las componentes  $x$  e  $y$  de los vectores velocidad y campo magnético. El vector  $H$  se obtiene a su vez intercambiando los subíndices  $x$  con  $z$ , y las componentes  $x$  y  $z$  de los vectores velocidad y campo magnético.

Se puede estudiar la estructura de tipo ondulatorio de este sistema de ecuaciones escribiéndolas como función de un sistema alternativo de variables primitivas  $P = [\rho, v_x, v_y, v_z, P, B_y, B_z]^T$ , y escribir así la ecuación (2.51), en el caso 1D, como:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + A \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (2.53)$$

donde  $A$  es una matriz  $7 \times 7$

$$A = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_x & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} \\ 0 & 0 & v_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} \\ 0 & \rho a^2 & 0 & 0 & v_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & 0 & v_x & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & v_x \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

El sistema de ecuaciones de la MHD, constituido originalmente por 8 ecuaciones, se redujo a 7 considerando la condición  $B_x = const$ , debido a que  $\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial x} = 0$  y que  $\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial t} = 0$  como se puede ver utilizando la ecuación (2.51) y las definiciones de  $F$  y  $U$ . Los autovalores y los autovectores de la matriz  $A$  corresponden (en el régimen lineal) a la propagación de 7 distintas ondas.

La propagación de ondas en un fluido conductor fué teorizada por primera vez en 1942 por Alfvén quien, para explicar las manchas solares, propuso que las ondas “electromagnéticas-hidrodinámicas” pueden propagarse en un fluido eléctricamente conductor en un campo magnético:

- Las ondas de Alfvén: son ondas puramente transversales y no compresivas, que solo producen “vibraciones” de las líneas de campo. Se propagan a lo largo de las líneas del campo magnético, sin generar cambios de magnitud del campo magnético mismo.
- Las ondas MHD rápidas y lentas: son ondas compresivas, parcialmente longitudinales, que cambian los valores de densidad, presión y campo magnético.

Las ondas que se propagan, con sus correspondientes autovalores y autovectores derechos e izquierdos, son las siguientes:

▪ una onda de entropía

$$\lambda_e = u \quad (2.55)$$

$$l_e = (1, 0, 0, 0, -\frac{1}{c^2}, 0, 0) \quad (2.56)$$

$$r_e = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (2.57)$$

▪ dos ondas de Alfvén

$$\lambda_a = u \mp c_a \quad (2.58)$$

$$l_a = (0, 0, \frac{s\beta_z}{2}, -\frac{s\beta_y}{2}, 0, \pm \frac{\beta_z}{2\sqrt{\rho}}, \mp \frac{\beta_y}{2\sqrt{\rho}}) \quad (2.59)$$

$$r_a = (0, 0, s\beta_z, -s\beta_y, 0, \pm\beta_z\sqrt{\rho}, \mp\beta_y\sqrt{\rho})^T \quad (2.60)$$

▪ dos ondas magnetoacústicas veloces

$$\lambda_f = u \mp c_f \quad (2.61)$$

$$l_f = (0, \mp \frac{\alpha_f}{2}, \pm \frac{s\beta_y\alpha_s c_a}{2c_f}, \pm \frac{s\beta_z\alpha_s c_a}{2c_f}, \frac{\alpha_f}{2\rho c_f}, \frac{\beta_y\alpha_s}{2\sqrt{\rho}}, \frac{\beta_z\alpha_s}{2\sqrt{\rho}}) \quad (2.62)$$

$$r_f = (\frac{\rho\alpha_f}{c_f}, \mp\alpha_f, \pm \frac{s\beta_y\alpha_s c_a}{c_f}, \pm \frac{s\beta_z\alpha_s c_a}{c_f}, \frac{\rho\alpha_f c^2}{c_f}, \beta_y\alpha_s\sqrt{\rho}, \beta_z\alpha_s\sqrt{\rho})^T \quad (2.63)$$

▪ dos ondas magnetoacústicas lentas

$$\lambda_s = u \mp c_s \quad (2.64)$$

$$l_s = (0, \mp \frac{c_a\alpha_s}{2c_f}, \mp \frac{s\beta_y\alpha_f}{2}, \mp \frac{s\beta_z\alpha_f}{2}, \frac{\alpha_s}{2\rho c}, -\frac{\beta_y\alpha_f c}{2c_f\sqrt{\rho}}, -\frac{\beta_z\alpha_f c}{2\sqrt{\rho}c_f}) \quad (2.65)$$

$$r_s = (\frac{\rho\alpha_s}{c}, \mp \frac{c_a\alpha_s}{c_f}, \mp s\beta_y\alpha_f, \mp s\beta_z\alpha_f, \alpha_s\rho c, -\frac{\beta_y\alpha_f c\sqrt{\rho}}{c_f}, -\frac{\sqrt{\rho}\beta_z\alpha_f c}{c_f})^T \quad (2.66)$$

Estos autovectores están ortonormalizados de manera que  $\vec{l}_i \cdot \vec{r}_i = \delta_{ij}$  y se obtienen definiendo (para un gas politrópico):

$$s = \text{sign}(B_x) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad c_a = \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho}} \quad (2.67)$$

$$c_{fs}^2 = \frac{1}{2} \left( c^2 + \frac{B^2}{\rho} \pm \sqrt{\left( \frac{B^2}{\rho} + c^2 \right)^2 - 4c_a^2 c^2} \right) \quad (2.68)$$

$$\alpha_f = \sqrt{\frac{c_f^2 - c_a^2}{c_f^2 - c_s^2}} \quad \alpha_s = \sqrt{\frac{c_f^2 - c^2}{c_f^2 - c_s^2}} \quad (2.69)$$

$$\beta_y = \frac{B_y}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}} \quad \beta_z = \frac{B_z}{\sqrt{B_y^2 + B_z^2}} \quad (2.70)$$

Se puede mostrar por sustitución directa que las cuatro velocidades no son independientes, siendo  $c_f c_s = c c_a$  y que además  $\lambda_{f-} \leq \lambda_{a-} \leq \lambda_{s-} \leq \lambda_e \leq \lambda_{s+} \leq \lambda_{a+} \leq \lambda_{f+}$  y  $c_s \leq c_a \leq c_f$ .

Los autovectores están bien determinados, siendo que los términos del denominador son siempre positivos ( $c$ ,  $c_a$ ,  $\rho$ ). Por otro lado, las únicas dificultades se encuentran cuando  $B_t^2 = B_y^2 + B_z^2 = 0$ : en este caso  $\beta_y$  y  $\beta_z$  son indeterminados. Todavía, notando que  $\beta_y^2 + \beta_z^2 = 1$ , se ve como  $\beta_y$  y  $\beta_z$  están siempre entre 0 y 1, por lo que parece una buena opción definir  $\beta_y = 1/\sqrt{2}$  y  $\beta_z = 1/\sqrt{2}$  cuando  $B_t^2 = 0$ .

Además, cuando  $B_t = 0$  y  $c_a = c$ ,  $\alpha_f$  y  $\alpha_s$  son indeterminados siendo  $c_f = c_s$ . Se puede mostrar fácilmente que  $\alpha_f$  y  $\alpha_s$  están también ente 0 y 1, siendo  $\alpha_f^2 = 1 - \alpha_s^2 c_s^2 / c^2 \leq 1$  y  $\alpha_s^2 = 1 - \alpha_f^2 c_s^2 / c_a^2 \leq 1$ , pero no parece existir ningún valor obvio que asignar a  $\alpha_f$  y  $\alpha_s$  en este caso. Nótese de cualquier forma que, evitando los valores iniciales  $B_t = 0$  y  $c_a = a$ , se puede tranquilamente ignorar este caso particular.

Se puede mostrar, finalmente, que en el límite  $B = 0$  el sistema se reduce al caso hidrodinámico.

### 2.3.4. Ondas de choque en MHD

Consideramos las condiciones de Rankine-Hugoniot:

$$[f] = \lambda_i [U]$$

las cuales expresan las condiciones que deben seguir los distintos parámetros físicos en presencia de discontinuidades. Escritas explícitamente en el sistema de referencia del frente de choque en movimiento en dirección del eje  $x$ , son:

$$[\rho v_x] = 0 \quad (2.71)$$

$$\left[ \rho v_x^2 + p + \frac{B_y^2}{2} \right] = 0 \quad (2.72)$$

$$[\rho v_x v_y - B_x B_y] = 0 \quad (2.73)$$

$$\left[ \frac{\gamma}{\gamma - 1} p v_x + \rho v_x \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} - B_x (v_x B_y - v_y B_x) \right] = 0 \quad (2.74)$$

$$[B_x] = 0 \quad (2.75)$$

$$[v_x B_y - v_y B_x] = 0. \quad (2.76)$$

Un análisis completo de la derivación de las soluciones de las condiciones de Rankine-Hugoniot se puede encontrar por ejemplo en Kennel et al. (1989). Aquí presentamos sólo los resultados de estos cálculos.

Las discontinuidades se pueden clasificar en base al comportamiento de la componente  $y$  del campo magnético (la componente  $x$  se conserva). En particular:

- $v_x = 0$ : en este caso no hay flujo de plasma a través de la discontinuidad.
  - **Discontinuidad de contacto**: se obtiene en el caso  $B_x \neq 0$ . Todos los parámetros son continuos excepto la densidad. Además, presión e intensidad del campo magnético no son continuos, pero si lo es el valor de la presión total ( $p + B^2/2$ ).
  - **Discontinuidad tangencial**: se obtiene en el caso  $B_x = 0$ . En este caso velocidad y campo magnético son paralelos a la superficie de la discontinuidad, y discontinuos. El valor de la presión total ( $p + B^2/2$ ) es otra vez continuo.
- $v_x \neq 0$ : en este caso general hay dos posibles comportamientos para la componente  $B_y$ :
  - **Choque rápido**: En este caso la presión térmica se incrementa, así como la presión magnética (es decir la componente  $y$  del campo magnético). La compresión de un plasma en este caso corresponde a la compresión del campo magnético. Para la velocidad del medio en la zona pre-choque en este caso se tiene  $v_x > c_f$ . Un caso particular

de *choque rápido* se obtiene cuando inicialmente  $B_y = 0$ . En la zona post-choque se tiene  $B_y \neq 0$ . En este caso se habla de un **choque encendido**.

- **Choque lento:** En este caso la presión térmica se incrementa, y la presión magnética (es decir la componente  $y$  del campo magnético) disminuye. La compresión de un plasma en este caso corresponde a la decompresión del campo magnético. Para la velocidad del medio en la zona pre-choque en este caso se tiene  $c_s < v_x < c_a$ . Un caso particular de *choque lento* se obtiene cuando inicialmente  $B_y \neq 0$ , y en la zona post-choque se tiene  $B_y = 0$ . En este caso se habla de un **choque apagado**.
- **Discontinuidad de Alfvén o rotacional:** En este caso no hay cambios de densidad y de velocidad normal a la discontinuidad, pero sí un cambio (una rotación) del campo magnético y la velocidad del plasma. La velocidad del medio en la zona pre-choque es  $v_x \geq c_a$ .



---

# 3

## Métodos numéricos

En este capítulo se mostrará el desarrollo de un código numérico uni y bidimensional en coordenadas cartesianas y cilíndricas, que resuelve las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) ideal y no ideal. El código está basado sobre un relativamente amplio número de distintos esquemas numéricos. El primero es un método de Godunov desarrollado en hidrodinámica (Falle 1991) y después extendido a la magnetohidrodinámica (Falle et al. 1998). Además son utilizados otros algoritmos como los métodos de Lax-Wendroff, Lax-Friedrichs modificado, el método HLL, y el nuevo método MUSTA (Toro 2004).

### 3.1. Introducción

El problema de resolver de manera precisa y eficiente las ecuaciones de la MHD (ideal y resistiva) es hoy en día uno de los problemas más importantes de la física computacional. Por otro lado, están presentes y distribuidos libremente por lo menos una decena de códigos que resuelven las ecuaciones de la MHD o más en general la clase de las ecuaciones hiperbólicas. Por poner algunos ejemplos: VAC (Toth et al. 1998), Athena (Gardiner & Stone 2005), Clawpack (LeVeque 1997), Flash (Universidad de Chicago), Nirvana (Ziegler 1998) y el famoso (y muy utilizado) ZEUS (Stone & Norman 1992).

La elaboración de un algoritmo numérico propio puede parecer a primera vista entonces superfluo, pero es motivado por lo menos por tres razones. La primera es que siendo la búsqueda del “código perfecto” hoy en día un problema científico muy interesante y “popular”, para participar activamente en este debate científico es necesario tener toda una serie de conocimientos que sólo el escribir *ex-novo* un código numérico puede dar. El segundo punto es más práctico: muchas veces es necesario cambiar un código numérico para agregar más fenómenos físicos u optimizar el código para una aplicación particular que se quiere estudiar. En este caso el uso de un código escrito por otras personas no permite hacer este proceso de modificación de forma rápida y eficiente, y a veces este proceso puede llevar más tiempo del que se necesitaría para escribir un código autónomamente. En fin, una tercera razón es que es mucho más fácil entender las limitaciones y los errores de las simulaciones numéricas si estas están hechas con un código del que se conocen todos los detalles.

En los años ochenta en hidrodinámica (HD) se introdujeron esquemas de Godunov de segundo orden que permiten calcular cualquier problema de flujo hidrodinámico imaginable (Roe 1981). En los últimos diez años estos esquemas están siendo extendidos a diferentes sistemas de ecuaciones hiperbólicas como la MHD (por ej. Balsara & Spicer 1999; Dai & Woodward 1994; Falle et al. 1998; Londrillo & Del Zanna 2000; Ryu et al. 1995, 1998; Zachary et al. 1994), la HD relativista (para un review véase Martí & Muller 2003), la MHD relativista (por ej. Komissarov 1999), la MHD de dos fluidos (por ej. Shumlak & Loverich 2003; Falle 2003) y otros ejemplos más (véase Toro 1999 para una revisión). Las dificultades principales en la extensión de tales esquemas a la MHD son de dos tipos: la primera es que, como vimos en el capítulo anterior, el número de ondas que se propagan es mucho mayor respecto al caso HD, y la segunda es que es difícil asegurar numéricamente que la divergencia del campo magnético sea nula (Brackbill & Barnes 1980).

Idealmente, un código numérico MHD debería tener las siguientes propiedades (algunas enumeradas también por Janhunen 2000):

- **Conservar exactamente masa, momento y energía:** este problema es resuelto integrando numéricamente las ecuaciones en forma conservativa. La razón es que, calculando los flujos en las interfases entre las celdas, el flujo que es sustraído de una celda es sumado a otra celda de forma que no hay sumideros o fuentes de las variables conservadas y el flujo total neto es cero. Además, hay otra importante razón para integrar

las ecuaciones en forma de ley de conservación, y es que los teoremas de Lax-Wendroff y Hou-LeFloch (por ej. Toro 1999) muestran que para que un esquema pueda converger a la solución correcta, si están presentes ondas de choque, éste debe ser conservativo. Un ejemplo de un método no conservativo muy exitoso es ZEUS<sup>1</sup>, que como Falle (2002) mostró, falla en algunas pruebas de tipo “tubo de choque” debido a su carácter no-conservativo.

- **Garantizar que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ :** este punto, que será ampliamente discutido en la sección (3.4.2), representa la diferencia más importante entre las distintos códigos utilizados para resolver las ecuaciones de la MHD.
- **Ser “positivo”:** es decir que nunca se encuentren puntos donde la presión sea negativa. Este es un problema muy común y muy poco discutido de los códigos numéricos. Lamentablemente no existe una solución completamente consistente y aceptable, como veremos en la sección (3.2.6).
- **Tener la menor disipación numérica posible:** esta propiedad es importante para que los choques sean resueltos adecuadamente, y es obtenida por medio de los métodos de tipo “shock capturing”.
- **Ser sencillo, rápido y fácilmente paralelizable:** un código debe ser sencillo, ya que cada cambio debe poderse hacer de manera rápida y eficiente. Además, debe ser fácilmente paralelizable, ya que para alcanzar buenas resoluciones en simulaciones en tres dimensiones se debe utilizar un código numérico que sea paralelo (y/o con malla adaptativa).

## 3.2. Desarrollo del código numérico en una dimensión

### 3.2.1. Bases teóricas

Consideramos el problema de Cauchy en una dimensión:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f[u(x, t)]}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Es interesante notar que ZEUS cumple sólo la segunda de las propiedades del código “ideal” indicadas aquí.

con la condición inicial  $u(x, t = 0) = u_0(x)^2$ .

Para resolver estas ecuaciones utilizamos la técnica de los volúmenes finitos (para una revisión véase por ej. LeVeque 1990; 2002 o Toro 1999) y dividimos el eje  $x$  en celdas de manera que la celda  $i$  ocupe la región  $(i - 1/2)\Delta x \leq x \leq (i + 1/2)\Delta x$  donde  $\Delta x$  es el tamaño constante de la celda (con  $1 \leq i \leq N$  y  $x = [0, N\Delta x]$ ). Además, consideramos incrementos  $\Delta t$  en el tiempo, e indicamos el vector de las variables conservadas al tiempo  $t^n$  y en la posición  $x_i$ , como  $u(t^n, x_i) = u_i^n$ . Integrando sobre el volumen ocupado por una celda se obtiene:

$$\int_{(i-1/2)\Delta x}^{(i+1/2)\Delta x} \frac{\partial u_i}{\partial t} dx + \int_{(i-1/2)\Delta x}^{(i+1/2)\Delta x} \frac{\partial f_i}{\partial x} dx = 0 \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x} = 0; \quad (3.3)$$

donde

$$U_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{(i-1/2)\Delta x}^{(i+1/2)\Delta x} u(x, t) dx \quad (3.4)$$

es el vector de las variables promediadas espacialmente sobre la celda  $i$ , y los flujos  $f$  son evaluados en las interfaces entre las celdas. Integrando en el tiempo se obtiene:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial U_i}{\partial t} dt + \int_t^{t+\Delta t} \frac{(f_{i+1/2} - f_{i-1/2})}{\Delta x} dt = 0 \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow U_i^{n+1} = U_i^n - (F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.6)$$

donde

$$F_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_{i+1/2} dt. \quad (3.7)$$

En esta notación,  $F$  y  $U$  representan los valores integrados sobre una cierta región del espacio o en el tiempo (de flujos y variables conservadas, respectivamente), mientras que  $f$  y  $u$  representan los valores definidos en la posición  $x$

---

<sup>2</sup>En esta forma se pueden escribir algunos sistemas de ecuaciones importantes de la física como las ecuaciones de Euler o de la MHD ideal.

y al tiempo  $t$ . La ecuación (3.6) es una solución exacta de la ecuación (3.1), y parece invitar a utilizar algún procedimiento iterativo, ya que para encontrar los flujos promedios (ecuación 3.7) es necesario conocer la solución en el intervalo temporal  $[t, t + \Delta t]$ . Por otro lado, la manera más práctica de tratar este término es introduciendo aproximaciones en la determinación de los promedios temporales de los flujos.

La calidad de la solución depende entonces del método que se utiliza para determinar la solución aproximada de los flujos, y existen fundamentalmente dos maneras para encontrarlos, como veremos en las secciones siguientes: utilizar un método centrado, o utilizar la información contenida en la propagación de las ondas asociadas a las ecuaciones hiperbólicas.

### 3.2.2. Métodos centrados

La aproximación consiste en considerar un flujo:

$$F_{i+1/2} = F(U_i^n, U_{i+1}^n) \quad (3.8)$$

que sea función sólo de las celdas cercanas a la interfase. La posibilidad más obvia (por ej. LeVeque 2002) es escoger un promedio espacial:

$$F_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(F_{i+1}^n + F_i^n) \quad (3.9)$$

donde por simplicidad de notación se entiende  $F_i^n = F(U_i^n)$ , y con lo que se obtiene<sup>3</sup>:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n). \quad (3.10)$$

Por otro lado, para calcular los  $U_i^n$  se considera  $u(x, t)$  constante en cada celda. Esta ecuación, como se puede demostrar utilizando el método de análisis de estabilidad de Von Neumann (por ej. LeVeque 1990), es inestable para cualquier elección de  $\Delta t$ .

---

<sup>3</sup>El mismo resultado se puede obtener directamente integrando la ecuación 3.1 con el método de diferencias finitas, y escogiendo para la derivada espacial una aproximación centrada, y hacia adelante para la derivada temporal (método "FTCS": "Forward Time Centered Space")

Para obtener un flujo que produzca soluciones estables se puede sustituir  $U_i^n$  por su promedio espacial, obteniendo el *método de Lax-Friedrichs (LF)*:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) \quad (3.11)$$

que en el formalismo de volúmenes finitos corresponde a considerar flujos en las interfaces construidos como:

$$F_{i+1/2}^{n+1/2, LF} = \frac{F_i^n + F_{i+1}^n}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (U_{i+1}^n - U_i^n) \quad (3.12)$$

En la ecuación (3.11) la solución es estable si  $\Delta t < \Delta x/v$  (este es el *criterio de Courant*, y es utilizado para determinar el valor máximo utilizable para calcular el tiempo de integración), donde  $v$  es la máxima velocidad de propagación de ondas en el sistema de ecuaciones considerado (en MHD es  $v = c_f$ ). Restando la ecuación (3.10) de la ecuación (3.11) se obtiene un término proporcional a  $(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1})/(2\Delta t)$  que en la ecuación (3.1) corresponde a un término proporcional a  $\partial^2 u / \partial x^2$ . El nuevo término equivale a un término disipativo, es decir a agregar viscosidad o disipación numérica a la ecuación. Nótese en fin que en la ecuación (3.12) para determinar la solución al tiempo  $n + 1$  se utilizan variables definidas al tiempo  $n$ . En este caso se dice que la solución es de primer orden temporal<sup>4</sup>.

Un esquema que sea de segundo orden temporal y espacial es el *método de Lax-Wendroff (LW)*, en el que se construye un vector  $U_i^{n+1/2}$  haciendo evolucionar el sistema de ecuaciones, y con este vector se construyen los flujos. En el formalismo de volúmenes finitos se puede escribir como (Toro 2004):

$$F_{i+1/2}^{LW} = F[U_{i+1/2}^{n+1/2}] \quad (3.13)$$

donde

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_i^n + U_{i+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n). \quad (3.14)$$

Los métodos considerados no utilizan la información relativa a la propagación de ondas contenida en los autovalores y autovectores de la matriz jacobiana

---

<sup>4</sup>La nomenclatura usada corresponde al hecho de que, haciendo un desarrollo en serie de Taylor de la solución, se están considerando sólo los términos de primer orden.

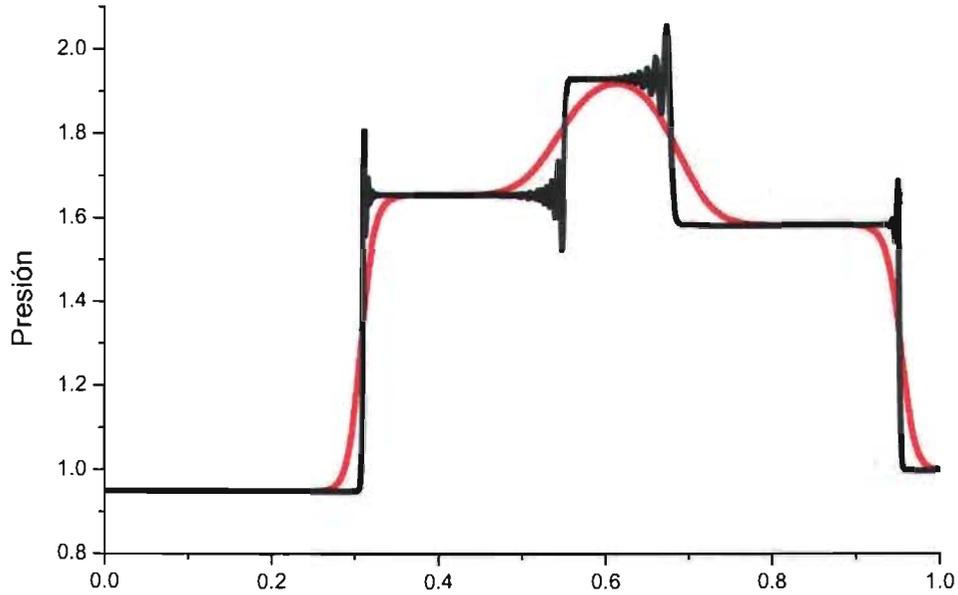


Figura 3.1: Comparación entre los métodos de Lax-Friedrichs (en rojo) y Lax-Wendroff (en negro) para un problema de tipo “shock-tube”. Las condiciones iniciales son las mismas que las de la Figura 3.8:  $P_L = (1.08, 1.2, 0.01, 0.5, 3.6/\sqrt{4\pi}, 2/\sqrt{4\pi}, 0.95)$ ,  $P_R = (1, 0, 0, 0, 4/\sqrt{4\pi}, 2/\sqrt{4\pi}, 1)$ ,  $B_x = 2/\sqrt{4\pi}$ ,  $t = 0.2$ .

en ecuaciones hiperbólicas, y por esta razón las discontinuidades obtenidas numéricamente no son bien resueltas. La Figura 3.1 muestra un ejemplo relativo a un problema de tipo “shock-tube”<sup>5</sup>. Como se ve claramente en la Figura 3.1 (que se puede comparar con la Figura 3.8) el método de LF (en rojo) tiene demasiada disipación numérica debido a que es un método de primer orden, mientras que para un método centrado del segundo orden como el método de LW (en negro en la Figura 3.1) se encuentran soluciones oscilantes cerca de las discontinuidades.

<sup>5</sup>Las pruebas de tipo “shock tube” corresponden al problema físico en el que dos gases con distintos valores de densidad, velocidad, presión y campo magnético están separados inicialmente por una membrana rígida. Al tiempo  $t = 0$  la membrana rígida es eliminada, y ondas de choque y de rarefacción se propagan a través de los dos fluidos.

### 3.2.3. Método de Godunov

El método de Godunov (1959) define el flujo en la interfase (situada en  $x = 0$ ) como la solución del problema de Riemann:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + A \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} P(x, 0) = P_L & \text{si } x < 0 \\ P(x, 0) = P_R & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde  $P$  es el vector de las variables primitivas. Una vez encontrada la solución del problema de Riemann, ésta es utilizada para calcular los flujos.

No teniendo el problema una escala de longitud característica, la solución debe tener la forma autosimilar  $P(x, t) = P(x/t)$ . En el Capítulo 2 se mostró que la solución del problema de Riemann es:

$$P(x, t) = P_L + \sum_{\lambda_i < x/t} (v_{R,i} - v_{L,i}) \tau_i \quad (3.16)$$

$$= P_R - \sum_{\lambda_i > x/t} (v_{R,i} - v_{L,i}) \tau_i \quad (3.17)$$

Es importante además recordar (véase la ecuación 3.15) que para derivar estas ecuaciones fue necesario suponer constante la matriz  $A$ . En general esto no es cierto, y los elementos de la matriz  $A$  son función de la solución  $P$ . Roe (1981) mostró que para la hidrodinámica es sencillo construir una matriz promedio con la propiedad  $F(U_R) - F(U_L) = \bar{A}(U_R - U_L)$  que asegura que la solución del problema de Riemann sea también solución de las condiciones de Rankine-Hugoniot. Por otro lado, Brio & Wu (1988) mostraron que tal matriz no tiene una forma sencilla en MHD<sup>6</sup>. Una expresión aproximada se obtiene (Brio y Wu 1988) utilizando una matriz promedio  $\bar{A} = A(\frac{P_R + P_L}{2})$ , y la solución del problema de Riemann se puede escribir de manera explícita como:

$$P^* = P_L + \sum_{\bar{\lambda}_k < 0} \left( \sum_j \bar{l}_{kj} \cdot (P_{Rj} - P_{Lj}) \right) \bar{r}_k \quad (3.18)$$

$$= P_R - \sum_{\bar{\lambda}_k > 0} \left( \sum_j \bar{l}_{kj} \cdot (P_{Rj} - P_{Lj}) \right) \bar{r}_k \quad (3.19)$$

<sup>6</sup>Excepto para el caso  $\gamma = 2$  para el cual Brio & Wu mostraron que existe una solución analítica.

y los flujos a primer orden son construidos considerando:

$$F_{i+1/2}^{n+1/2} = F [P^*(P_i^n, P_{i+1}^n)]. \quad (3.20)$$

Se hará referencia a este método como al RSM (“Riemann Solver Method”) en las secciones siguientes.

### 3.2.4. Métodos de Godunov simplificados

Existen también métodos para calcular los flujos tomando en cuenta la propagación de las ondas (necesario para no tener oscilaciones cerca de las discontinuidades) pero sin calcular explícitamente los autovectores y los autovalores del sistema de ecuaciones. En el código numérico desarrollado en esta tesis se utilizan tres de estos métodos.

1. El primero es el método HLL (Harten, Lax & Van Leer 1983). Estos autores propusieron evaluar el flujo como:

$$f^{HLL} = \begin{cases} f^L & \text{si } \alpha^- > 0 \\ f^* & \text{si } \alpha^- < 0 < \alpha^+ \\ f^R & \text{si } \alpha^+ < 0 \end{cases}$$

donde  $\alpha^+$  y  $\alpha^-$  son las velocidades mínima y máxima de propagación de ondas respectivamente. Si las velocidades son del mismo signo los flujos deben ser evaluados solo desde el lado “corriente arriba”. Si por ejemplo las velocidades son positivas respecto al eje  $x$  la información se propaga sólo de izquierda a derecha y el flujo es  $f^L$ . Si por otro lado las velocidades mínima y máxima tienen signos opuestos se utiliza un promedio pesado de los flujos de la forma:

$$f^* = \frac{\alpha^+ f^L + \alpha^- f^R - \alpha^+ \alpha^- (u^R - u^L)}{\alpha^+ + \alpha^-}. \quad (3.21)$$

Tomando las velocidades como  $\alpha^\pm = \max(0, \pm \alpha^\pm)$  la solución se reduce a  $f^{HLL} = f^*$ . El problema es como estimar las velocidades. Aquí utilizaremos la forma propuesta por Einfeldt et al. (1991, véase también Toth & Odstreil 1996 - TO96):  $\alpha^\pm = \max(0, c_f^L \pm v_x^L, c_f^R \pm v_x^R)$ .

En el caso HD este método tiene la propiedad de ser “positivo”. Por

otro lado en MHD esta forma (con dos velocidades características) representa solo una aproximación de un sistema más complejo (con seis velocidades) por lo que se pierde la propiedad de positividad<sup>7</sup>.

2. Otro método que muy recientemente ha sido propuesto es el método MUSTA<sup>8</sup> (“MUlti STAge method”, Toro 2004). Se trata de un método de Godunov aproximado “no-convencional”, en el que el flujo se encuentra en dos pasos:

- Paso I: **Evaluación del flujo**

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_{i+1/2}^{LW}(U_i^*, U_{i+1}) + F_{i+1/2}^{LF}(U_i, U_{i+1}))$$

- Paso II: **Evolución temporal de las ondas**

$$\begin{cases} U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_i) \\ U_{i+1}^{n+1} = U_{i+1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1} - F_{i+1/2}). \end{cases}$$

En el paso I el flujo es evaluado promediando los flujos de LW y LF. En el paso II el sistema (formado por sólo dos puntos:  $i$  e  $i + 1$ ) evoluciona en el tiempo. Los valores evolucionados son utilizados para calcular nuevamente el flujo (paso I) y el proceso continúa por  $n$  iteraciones (donde  $n = 3$  parece ya dar resultados satisfactorios). Evolucionar el sistema corresponde a resolver un problema de tipo “shock tube” en el que en lugar de muchos puntos se utilicen solo dos puntos. Durante su evolución *autosimilar* la solución produce su sistema de ondas (véase por ej. la Figura 3.1) y éstas (en el paso I) son utilizadas para construir la solución. Un ejemplo de una comparación entre este método y el RSM será mostrado más adelante en la Figura 3.20.

3. El método de Lax-Friedrichs “modificado” (LFM) es utilizado, por ejemplo, en el código VAC (Toth et al. 1998; TO96). El flujo es calculado como:

$$F_{i+1/2}^{LFM} = \frac{1}{2} [F(U^L) + F(U^R)] - \frac{1}{2} c_{i+1/2}^{max} (U^R - U^L)$$

<sup>7</sup>Recientemente Miyoshi & Kusano (2005) propusieron una modificación a estas ecuaciones que permite tomar en cuenta todas las ondas que se propagan en MHD y demostraron que esa forma tiene la propiedad de positividad.

<sup>8</sup>Éste es el primer código MHD a utilizar este método. Una aplicación astrofísica será presentada en el Capítulo 5.

donde:

$$U^L = U_i^n + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_i \quad U^R = U_{i+1}^n - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i+1} .$$

Las derivadas parciales en estas últimas ecuaciones serán explicadas en la próxima sección.

Todos estos métodos son más sencillos que un Riemann solver normal. Además, considerando la propagación de las ondas en sus ecuaciones, no tienen oscilaciones cerca de las discontinuidades. El precio que se debe pagar por la menor complejidad es que en todos estos métodos la disipación numérica es mayor que en el caso del Riemann solver de Godunov más complicado.

### 3.2.5. Generalización del método de Godunov a segundo orden

El método de Godunov es de primer orden espacial y temporal. Una extensión obvia a segundo orden temporal se obtiene utilizando una integración temporal de Runge-Kutta:

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n - (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) \frac{\Delta t}{2\Delta x} \quad (3.22)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^{n+1/2} - (F_{i+\frac{1}{2}}^{n+1/2} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+1/2}) \frac{\Delta t}{\Delta x} . \quad (3.23)$$

El cálculo de los flujos de Godunov se hace considerando valores promedios (integrados en el volumen) de las variables. En el caso de cálculos de primer orden estos valores son considerados como constantes dentro de cada celda. Por otro lado, para obtener algoritmos de segundo orden espacial es necesario aproximar las variables con polinomios interpolantes dentro de cada celda, y con estos valores calcular la integral de volumen:

$$P_L = P_i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_i \quad P_R = P_{i+1} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i+1} . \quad (3.24)$$

Un problema que se presenta es que cerca de las discontinuidades las derivadas espaciales tienen valores muy grandes. La presencia de derivadas espaciales muy grandes produce oscilaciones similares a las que se obtuvieron en el método LW cerca de las discontinuidades. Dicho de otra forma, el teorema de Godunov (1959) afirma que sólo esquemas de primer orden producen soluciones

monótonas (es decir, sin oscilaciones) cerca de las discontinuidades. Entonces, es necesario encontrar una función que sea cero cerca de las discontinuidades e igual a la derivada primera lejos de ellas. Existen obviamente infinitas funciones, llamadas “slope limiters” (SL) con estas características, y en este código serán implementadas algunas de esas, ya que, como se mostrará, los algoritmos son muy sensibles al particular SL utilizado. Siguiendo el formalismo de TO96, y suponiendo que queremos limitar la cantidad:

$$w_i = \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)_i = \frac{P_{i+1/2} - P_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad (3.25)$$

los slope limiters empleados en este código son los siguientes:

▪ **Minmod**

$$\bar{w}_i = \text{mm}[w_L, w_R] \quad (3.26)$$

▪ **UMIST**

$$\bar{w}_i = \text{mm}[2w_L, 2w_R, (w_L + 3w_R)/4, (3w_L + w_R)/4] \quad (3.27)$$

▪ **Woodward**

$$\bar{w}_i = \text{mm}[2w_L, 2w_R, (w_L + w_R)/2] \quad (3.28)$$

▪ **SuperBee**

$$\bar{w}_i = s \max[0, \min(2w_R, sw_R, \min(w_R, 2sw_L))] \quad (3.29)$$

▪ **Van Leer**

$$\bar{w}_i = \begin{cases} \frac{w_L^2 w_R + w_L w_R^2}{w_L^2 + w_R^2} & \text{si } w_L w_R > 0 \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

donde  $s = \text{sign}(w_{j+1/2})$ ,  $w_L = w_{i-1/2}$ ,  $w_R = w_{i+1/2}$  y mm indica el operador “minmod” definido como:

$$\text{minmod}(a_1, \dots, a_n) = s \max[0, \min(a_1, s(a_1)a_2, \dots, s(a_1)a_n)], \quad (3.30)$$

y otra vez  $s = \text{sign}(a_1)$ .

### 3.2.6. El problema de la presión negativa

No obstante que las ecuaciones de la MHD están escritas en forma conservativa y la variable que evoluciona es la energía, el valor de la presión debe ser calculado a cada paso en el tiempo, para poder determinar las velocidades de las ondas que se propagan. Para hacerlo se utiliza la ecuación:

$$p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}B^2\right) \quad (3.31)$$

Cuando  $p \ll B^2 + \rho v^2$  los errores de discretización en el cálculo de la energía total y de las energías cinética y magnética pueden llevar a presiones negativas. Este es un problema que se encuentra a menudo en simulaciones numéricas MHD, no obstante la casi total ausencia de discusiones de este punto en la literatura especializada.

En el caso que la presión se vuelva negativa, el problema principal es como determinar la velocidad del sonido  $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ . Se pueden utilizar diferentes estrategias para eliminar este problema, pero ninguna es completamente satisfactoria. Además, parece no existir un procedimiento utilizable para todas las clases de problemas. Balsara y Spicer (1999) utilizan una ecuación de la entropía modificada en lugar de la ecuación de la energía total cuando la energía total es menor que un cierto valor límite. Janhunen (2000) propone eliminar el paso de integración para las celdas en las cuales la presión es negativa, dejando el valor sin evolucionar en estos puntos. Tanaka (1994; 1995) por otro lado, en el caso de un campo magnético con una componente dipolar dominante, separa la componente dominante de las ecuaciones analíticamente, sólo considerando la evolución de las perturbaciones. Otra posibilidad, probablemente la más utilizada, es sumar energía localmente (o, análogamente, en poner un valor mínimo a la presión).

El procedimiento que se utiliza para resolver el problema, en este código, es la siguiente: primero se hace el promedio de la energía entre la celda con presión negativa y las celdas cercanas (de manera que la energía es conservada); segundo, se pone un valor mínimo en la presión. Alternativamente se puede utilizar un SL más difusivo (por ejemplo el *minmod*), o en casos extremos pasar a un algoritmo más difusivo (como el método HLL). Además, el código dispone de un término de viscosidad numérica artificial. Incrementando este término se resuelven muchos de los casos en los que se producen presiones negativas.

Puede haber también otro caso para el cual la presión se vuelva negativa, y es cuando el Riemann Solver mismo produzca resultados físicamente incorrectos, y estos sean utilizados para calcular los flujos. Esta es una buena razón del por qué es necesario calcular el problema de Riemann utilizando las variables primitivas y no las variables conservadas. Cuando el Riemann Solver produce presiones negativas, en nuestro código se recurre a un procedimiento iterativo que resuelve el problema en casi todos los casos. Este consiste en calcular iterativamente el valor en la interfase (utilizando el método de Godunov) y *limitando* la variación máxima de los parámetros físicos. Estos en cada paso del procedimiento iterativo pueden variar, por ejemplo, por menos de un 10 %.

### 3.3. Pruebas numéricas en una dimensión

En esta sección presentamos una serie bastante extendida de pruebas en una dimensión que nos permitan caracterizar completamente el código numérico. Varias de estas pruebas pueden ser encontrados en TO96 y Ryu & Jones (1995), no obstante que, cuando es posible, indicamos aquí la referencia original. En todas las simulaciones  $N$  representa el número de puntos,  $t$  el tiempo final de la prueba, la curva continua representa la solución exacta o casi exacta (determinada con un número suficientemente grande de puntos). En todas las pruebas, excepto cuando está indicado, se usa el método de Godunov y el SL de Van Leer.

#### 3.3.1. Convección de ondas de densidad

Estas pruebas (TO96) son muy simples y útiles para estudiar la difusión numérica presente en el algoritmo y para entender como la utilización de distintos limiters afecta la difusión numérica.

Se trata de resolver la ecuación de continuidad sobre una malla uniforme con  $N = 100$  y condiciones de frontera periódicas. La velocidad inicial es  $v_x = 1$  y se mantiene constante durante toda la evolución temporal. Los otros parámetros también se mantienen constantes. La onda se propaga hacia la derecha, sale de la frontera derecha y entra por la frontera de la malla periódicamente. Se presentan aquí dos pruebas con diferentes perfiles de densidad:

- Onda cuadrada:

$$\rho = \begin{cases} 2 & \text{si } 1 \leq i \leq 21 \\ 0.5 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

▪ **Onda semicircular:**

$$\rho = \begin{cases} 1 + 2[1 - (i - 20)^2/15^2]^{0.5} & \text{si } 5 \leq i \leq 35 \\ 1 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Los resultados son mostrados en las Figuras 3.2. Estos resultados pueden parecer poco halagadores, pero disipaciones numéricas de este orden de magnitud son comunes en los métodos shock-capturing. Para obtener menor disipación se necesitaría utilizar esquemas de orden superior al segundo. En la Figura 3.2 se reportan también los errores relativos para cada SL. El SL Minmod produce la máxima disipación y los errores máximos, mientras que el Superbee es el menos difusivo en el caso de la onda cuadrada. En el caso de la onda semicircular el superbee tiende a deformar la onda (se dice que es “anti-difusivo”), y el Woodward parece ser el que mejor reproduce la forma de la onda, dando el error mínimo. Otra vez los peores resultados se obtienen con el minmod. Por razones de espacio, presentamos en seguida sólo las pruebas obtenidas utilizando el SL de Van Leer, que se sitúa en una posición intermedia entre los distintos SL.

### 3.3.2. Interacción de dos ondas explosivas

Esta prueba (Woodward & Colella 1984) muestra la interacción hidrodinámica de dos ondas de choque fuertes. Las condiciones iniciales son las siguientes:

$$\begin{cases} p = 1000 & \text{si } 0 \leq x < 0.1 \\ p = 0.01 & \text{si } 0.1 \leq x < 0.9 \\ p = 100 & \text{si } 0.9 \leq x < 1 \end{cases}$$

con  $v_x = 0$ ,  $\rho = 1$  inicialmente. Los otros parámetros son iguales a cero. Los cálculos corresponden a pruebas con diferentes resoluciones: 200 y 1200 puntos respectivamente. Los resultados a  $t = 0.038$  son mostrados en la Figura 3.3. Esta prueba muestra como hasta códigos shock-capturing no pueden reconstruir adecuadamente estructuras con choques fuertes en simulaciones con baja resolución, como se puede ver de la parte izquierda de la Figura 3.3.

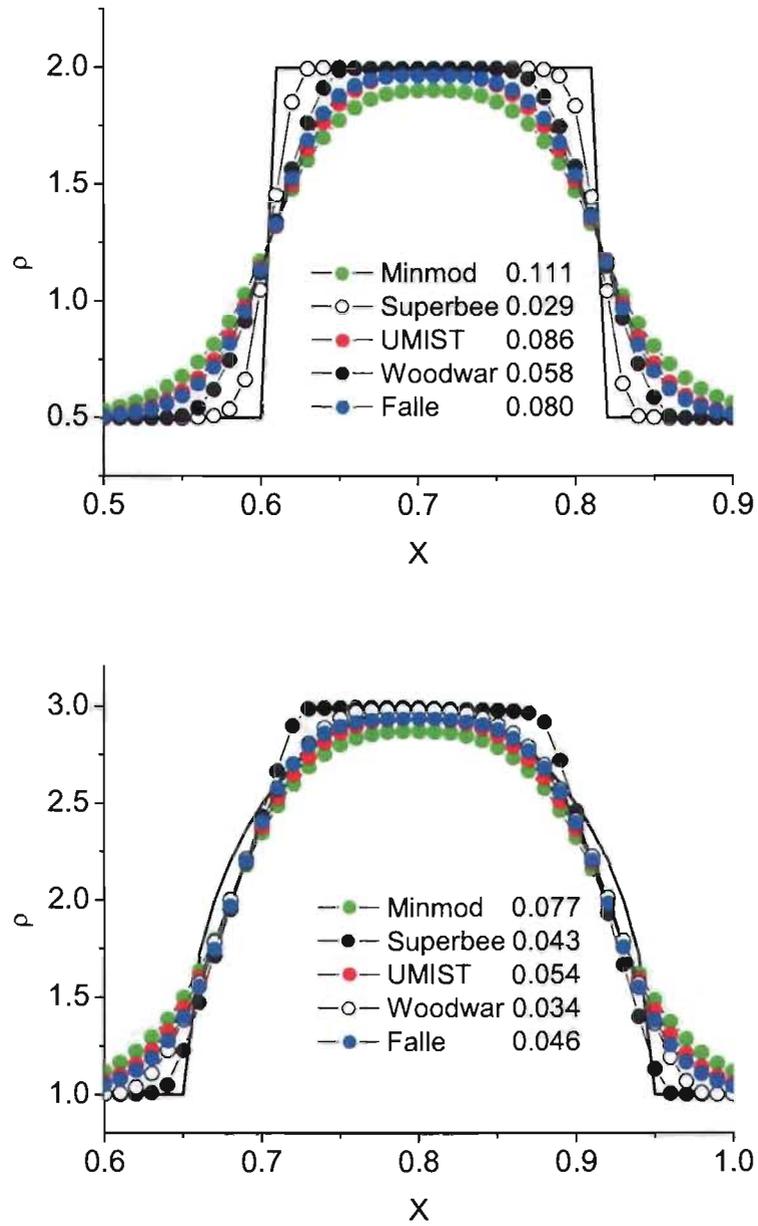


Figura 3.2: Solución de los problemas de advección de una onda cuadrada y de una onda semicircular.

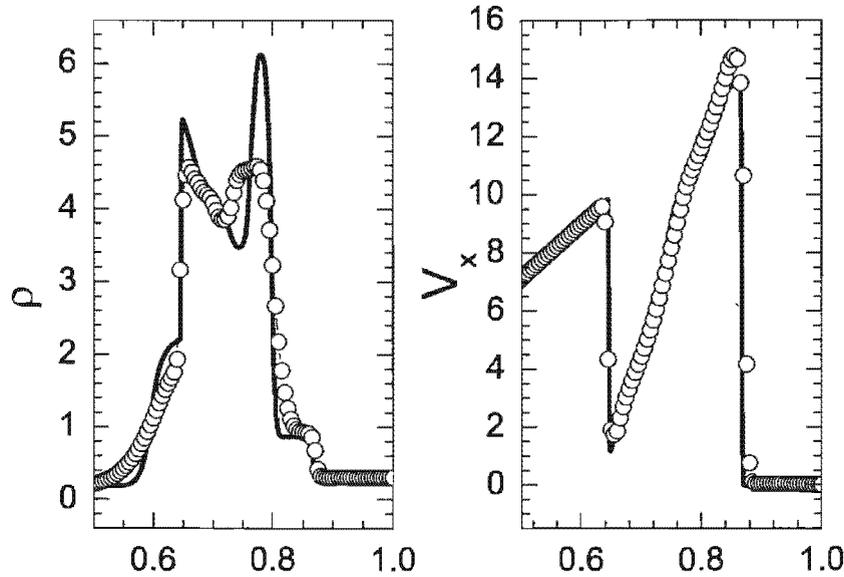


Figura 3.3: Interacción de dos ondas explosivas

### 3.3.3. Ondas de rarefacción fuertes

En este problema hidrodinámico (Einfeldt et al. 1991) dos ondas de rarefacción fuertes se mueven alejándose del centro de la malla. Las condiciones iniciales son:

$$\begin{cases} v_x = -2 & \text{si } 0 \leq x \leq 0.5 \\ v_x = 2 & \text{si } 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

con  $\rho = 1$ ,  $p = 0.4$ ,  $t = 0.1$  y  $N = 100$ . Esta es una de las pruebas donde este código muestra su eficiencia (véase la Figura 3.4), ya que, comparado con el resultado de otros algoritmos (TO96) este código reproduce la solución exacta bastante bien. De hecho, la solución del problema de Riemann produce presiones negativas en la discontinuidad, y es el procedimiento iterativo empleado en el Riemann Solver puede dar óptimos resultados para rarefacciones fuertes. Aún más interesante, se obtienen resultados similares poniendo ondas de rarefacción mucho más fuertes (por ej. con  $v = \pm 10^4$ ).

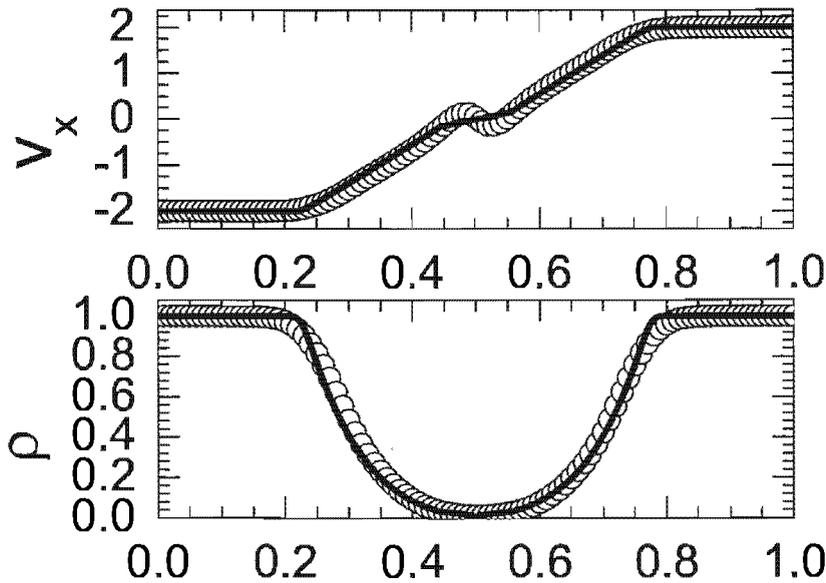


Figura 3.4: Ondas de rarefacción fuertes

### 3.3.4. Propagación de Ondas de Alfvén de “Shear”

Este (Stone & Norman 1992) es un problema de propagación de ondas de Alfvén. Las condiciones iniciales son:

$$\begin{cases} v_y = 0.001 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ v_y = 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

los otros parámetros son constantes y valen:  $\rho = 1$ ,  $v_x = 0$ ,  $B_x = 1$ ,  $B_y = 0$ ,  $p = 10^{-9}$ ,  $N = 150$ ,  $t = 0.1$ . Este problema (y los siguientes) no es estrictamente 1D, sino que  $1\frac{1}{2}D$ , es decir que en las ecuaciones es presente sólo la derivada espacial respecto a  $x$ , pero los parámetros tienen también componentes  $y$  y  $z$ . Como se muestra en la Figura 3.5, los resultados son muy buenos y las discontinuidades son reproducidas con 5-6 puntos. Muchos códigos fallan en esta prueba debido al bajo valor de la presión térmica respecto a la presión magnética. De hecho, para obtener presiones no negativas es necesario utilizar doble precisión en los cálculos.

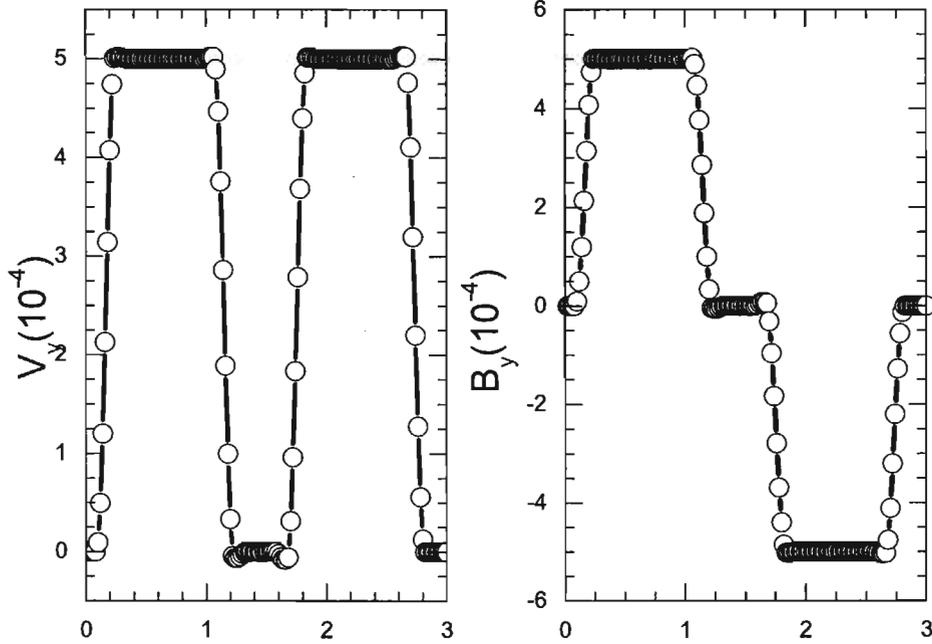


Figura 3.5: Propagación de ondas de Alfvén

### 3.3.5. Tubos de choque magnéticos

Ryu & Jones (1995) presentaron toda una serie de pruebas numéricas para algoritmos unidimensionales en MHD. Los resultados de estas pruebas se presentan en las próximas páginas. En todas las pruebas se utiliza  $c_v = 1.5$  y un intervalo de valores  $x = [0, 1]$  con 800 celdas. Las pruebas con alta resolución (las líneas continuas) están hechas considerando 10000 celdas. Las condiciones iniciales para el vector de las variables primitivas son:

$$\begin{cases} P = P_R & \text{si } x \geq 0.5 \\ P = P_L & \text{si } x < 0.5. \end{cases}$$

Las cantidades obtenidas y graficadas son densidad, presión del gas, energía total, velocidad en las tres direcciones las tres componentes del campo magnético. Abajo de cada gráfico están indicados los parámetros iniciales, el campo

Cuadro 3.1: Ondas que se propagan para cada prueba del tubo de choque magnético:

Prueba	Figura	Ondas <sup>(a)</sup>
1	3.6	CR, RL, DC, CL, CR
2	3.7	CR, CL, DC, RL, RR
3	3.8	CR, DR, CL, DC, CL, DR, CR
4	3.9	CR, DR, CL, DC, RL, DR, RR
5	3.10	CM, DT, CM
6	3.11	RM, RM
7	3.12	RR, RL, DC, CL, CRE
8	3.13	DC, RRA
9	3.14	CR, CLA, DC, CHD
10	3.15	RHD, RLE, DC, CL, DR, RR
11	3.16	RR, COL, DC, CL, RR
12	3.17	COR, CL, DC, CL, RR

<sup>a</sup>La nomenclatura utilizada es descrita en el texto.

magnético (constante) en dirección  $x$ , y el tiempo de integración  $t$ . Por otro lado, en la Tabla 3.1 se muestran las ondas que se propagan para cada prueba (reportadas también en Ryu & Jones 1995). La nomenclatura presente en la Tabla 3.1 es explicada en detalle en los párrafos siguiente.

Los choques que se propagan más rápidamente son los *choques rápidos* (CR), que producen un incremento en la densidad y en la presión, y una rotación (es decir un cambio de la dirección del vector en el plano  $xy$ ) en velocidad y campo magnético. Las correspondientes ondas de rarefacción son las *rarefacciones rápidas* (RR), que tienen características opuestas respecto a las CR, en el sentido de que corresponden a una disminución de los parámetros físicos. En el caso en el que inicialmente  $B_x = 0$  los casos límite de CR y RR son el *choque magnetosónico* (CM) y la *rarefacción magnetosónica* (RM), que son iguales al CR y RR excepto que no hay rotación del campo de velocidades (que es producido por la componente  $x$  del campo magnético). Por otro lado, el *choque lento* (CL) y la *rarefacción lenta* (RL) tienen las mismas características que CR y RR pero se propagan con velocidades menores. En el caso con  $B_x = 0$  los CL y RL no existen. Si es nulo el módulo del campo magnético se habla de *choque hidrodinámico* (CHD) y *rarefacción hidrodinámica* (RHD) que, obvia-

mente, tampoco tienen rotaciones de los campos.

Unos casos particulares de los CR, CL, RR y RL son el *choque rápido encendido* (CRE, para los cuales inicialmente  $B_y = 0$ , y durante la evolución del sistema  $B_y \neq 0$ ), el *choque lento apagado* (CLA, para los cuales inicialmente  $B_y \neq 0$ , y durante la evolución del sistema  $B_y = 0$ ), la *rarefacción rápida apagada* (RRA, como el CLA, pero para una onda de rarefacción), y la *rarefacción lenta encendida* (RLE, como el CRE, pero para una onda de rarefacción)

Las discontinuidades en las que no varía la presión son la *discontinuidad de contacto* (DC) para la cual varía solo la densidad; la *discontinuidad tangencial* (DT) para la cual varía la densidad y además se produce una rotación del campo magnético; y la *discontinuidad rotacional* (DR) para la cual sólo hay una rotación del campo de velocidades y del campo magnético.

Las últimas discontinuidades que se pueden formar son la *compuesta lenta* (COL) que corresponde a un CL y un RL moviéndose a la misma velocidad, y la *compuesta rápida* (COR) que corresponde a un CR y un RR moviéndose a la misma velocidad.

Los resultados obtenidos son los siguientes: los CR son resueltos con 2-4 puntos, mientras que los CL son resueltos con un número de puntos que depende de la fuerza del choque. Para CL fuertes se necesitan  $\sim 10$  puntos, y para CL lentos se pueden necesitar hasta  $\sim 20$  puntos. Las discontinuidades de contacto, rotacionales y tangencial, por otro lado, son resueltas con  $\sim 10$  puntos. Las ondas de rarefacción por su parte son reconstruidas muy bien, así como los casos límite de CRE, CLA, RRA, RLE.

Aparte de los errores debidos a la presencia de disipación numérica, otros errores están presentes en estas pruebas. En la Figura 3.6 se puede notar una pequeña oscilación de  $v_y$  en la región  $x \approx 0.8$  debido a la presencia de un choque fuerte resuelto con solo 1 punto. En la Figura 3.10 es presente un error en los valores de densidad y presión en correspondencia de la discontinuidad tangencial. Nótese también como la DT está muy mal resuelta en esta prueba ( $B_y$  en  $x \approx 0.8$ ). En la Figura 3.11 se muestra la propagación de dos ondas de rarefacción. Esta es fundamentalmente la generalización de la prueba mostrada en la Figura 3.4 al caso en el que también hay un campo magnético. Se puede notar como se produce un pequeño error en los valores de densidad, presión y

campo magnético en la discontinuidad de contacto.

La prueba mostrada en la Figura 3.16 es la famosa prueba desarrollada por Brio & Wu (1988), y es utilizada por muchos autores para verificar los códigos unidimensionales o la parte unidimensional de códigos en más dimensiones. Además, es interesante para entender la complejidad del sistema de ecuaciones y el tipo de problemas de interpretación que se generan. En la región alrededor de  $x = 0.5$  se puede notar un pico en densidad y presión. Esta discontinuidad es conocida como “choque intermedio”, y corresponde a un cambio en la orientación del campo magnético con un salto de  $\pi$ . Hay opiniones muy diferentes sobre como interpretar este pico. Algunos autores piensan que los choques intermedios no son físicos, y otros piensan que son posibles físicamente (ver por ej. Falle & Komissarov 1997; Myong & Roe 1998 que tienen opiniones opuestas al respecto).

## 3.4. Desarrollo del código numérico en dos dimensiones

### 3.4.1. Extensiones a multi-dimensiones

La construcción de algoritmos 2D se puede hacer reduciendo la resolución de las ecuaciones en dos dimensiones a la resolución de dos problemas unidimensionales. Es decir, se pueden determinar los flujos en dirección  $x$  y los flujos en dirección  $y$  independientemente y sumarlos para obtener los valores incrementados en el tiempo.

La única complicación, en el caso de la MHD, es que para una dimensión la condición  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  es satisfecha automáticamente, mientras que para dos dimensiones no lo es.

### 3.4.2. La condición $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Brackbill & Barnes (1980) mostraron que un esquema numérico en el cual no se fuerza la condición  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  lleva a errores si el estado inicial tiene discontinuidades del campo magnético. Consideramos la fuerza de Lorentz:

$$f_L = \nabla \cdot \mathbf{T} \tag{3.32}$$

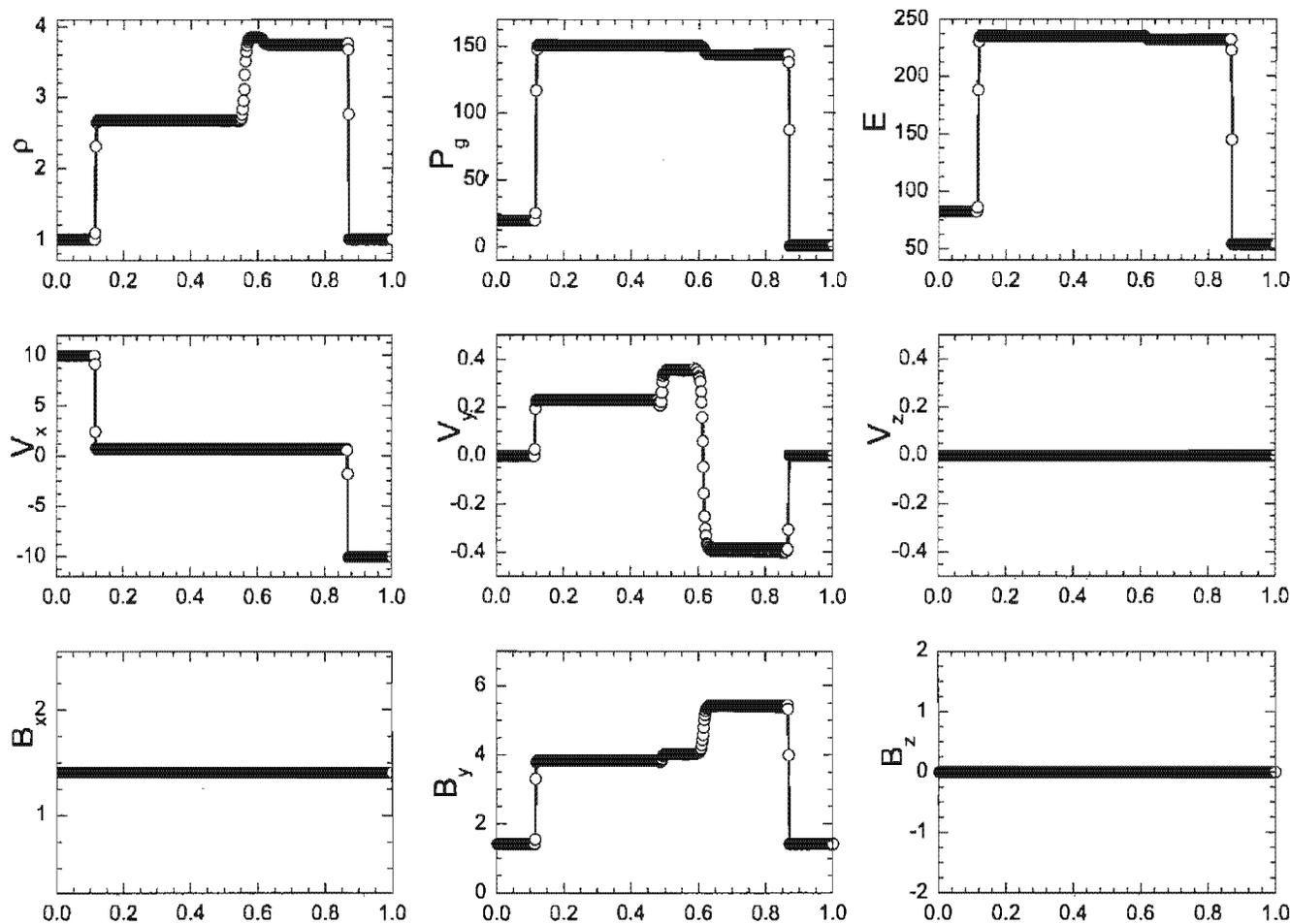


Figura 3.6: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (1, 10, 0, 0, 5/\sqrt{4\pi}, 0, 20)$ ,  $P_R = (1, -10, 0, 0, 5/\sqrt{4\pi}, 0, 1)$ ,  $B_x = 5/\sqrt{4\pi}$ ,  $t = 0.08$ .

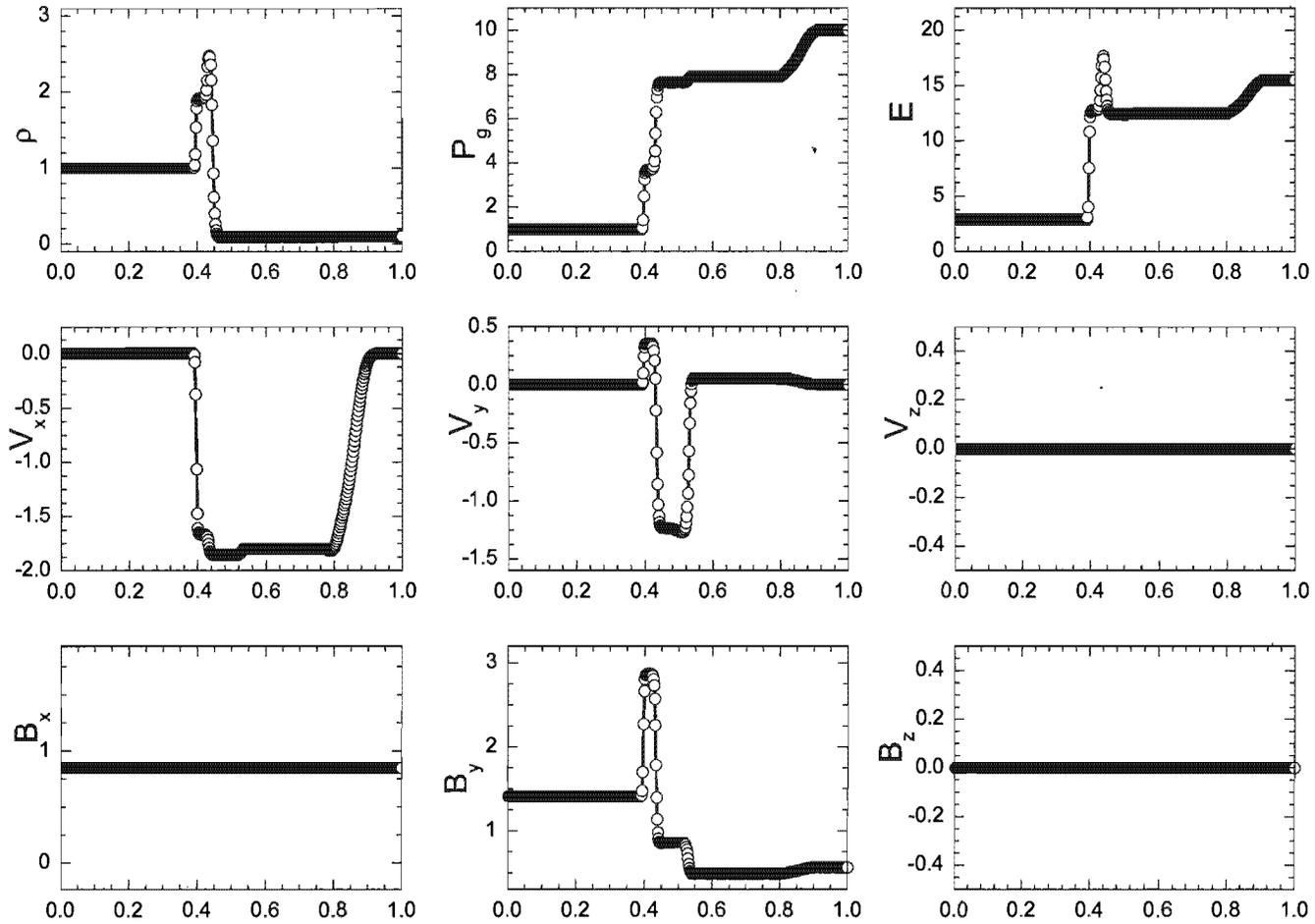


Figura 3.7: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (1, 0, 0, 0, 5/\sqrt{4\pi}, 0, 1)$ ,  $P_R = (0.1, 0, 0, 0, 2/\sqrt{4\pi}, 0, 10)$ ,  $B_x = 3/\sqrt{4\pi}$ ,  $t = 0.03$ .

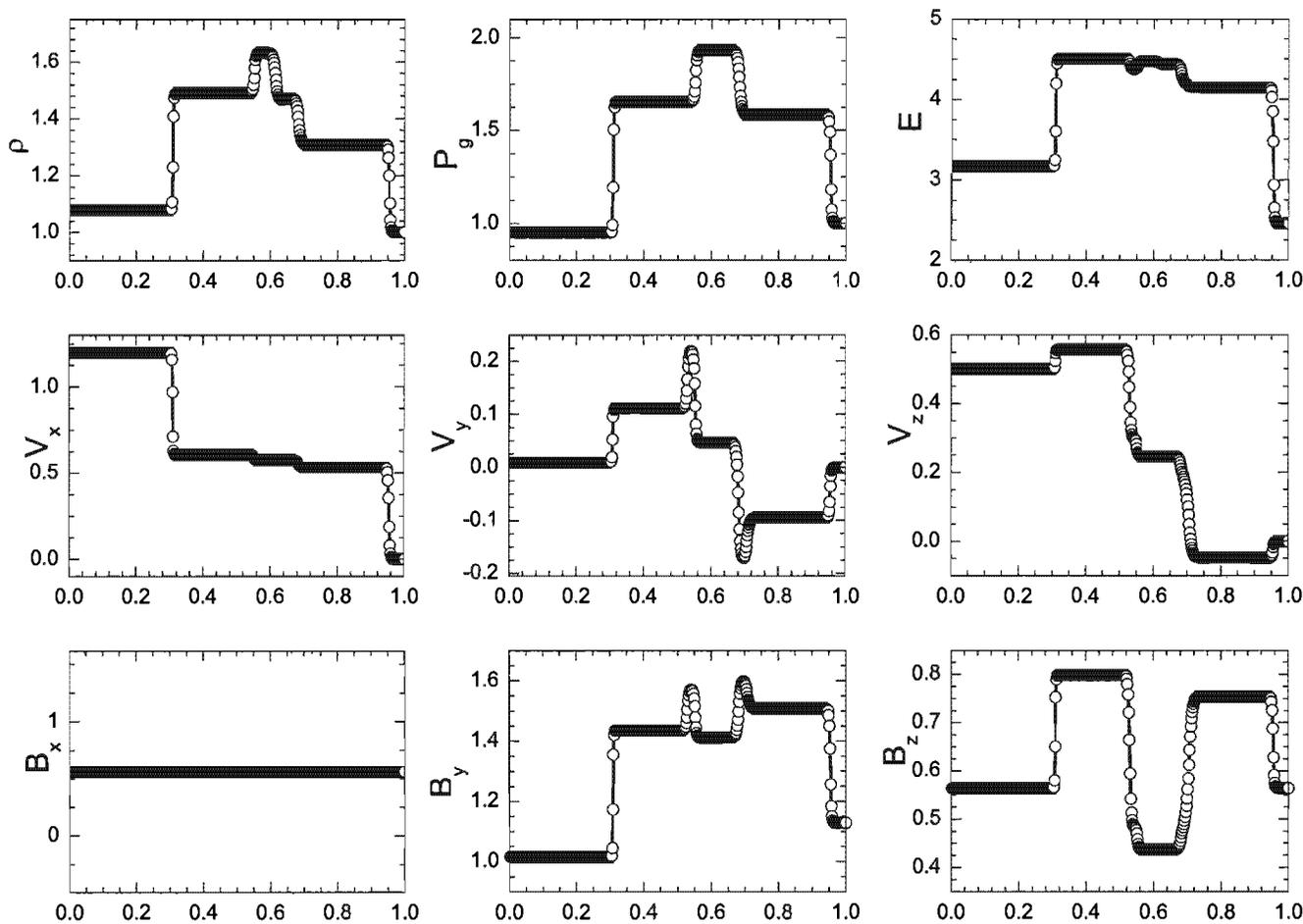


Figura 3.8: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (1.08, 1.2, 0.01, 0.5, 3.6/\sqrt{4\pi}, 2/\sqrt{4\pi}, 0.95)$ ,  $P_R = (1, 0, 0, 0, 4/\sqrt{4\pi}, 2/\sqrt{4\pi}, 1)$ ,  $B_x = 2/\sqrt{4\pi}$ ,  $t = 0.2$ .

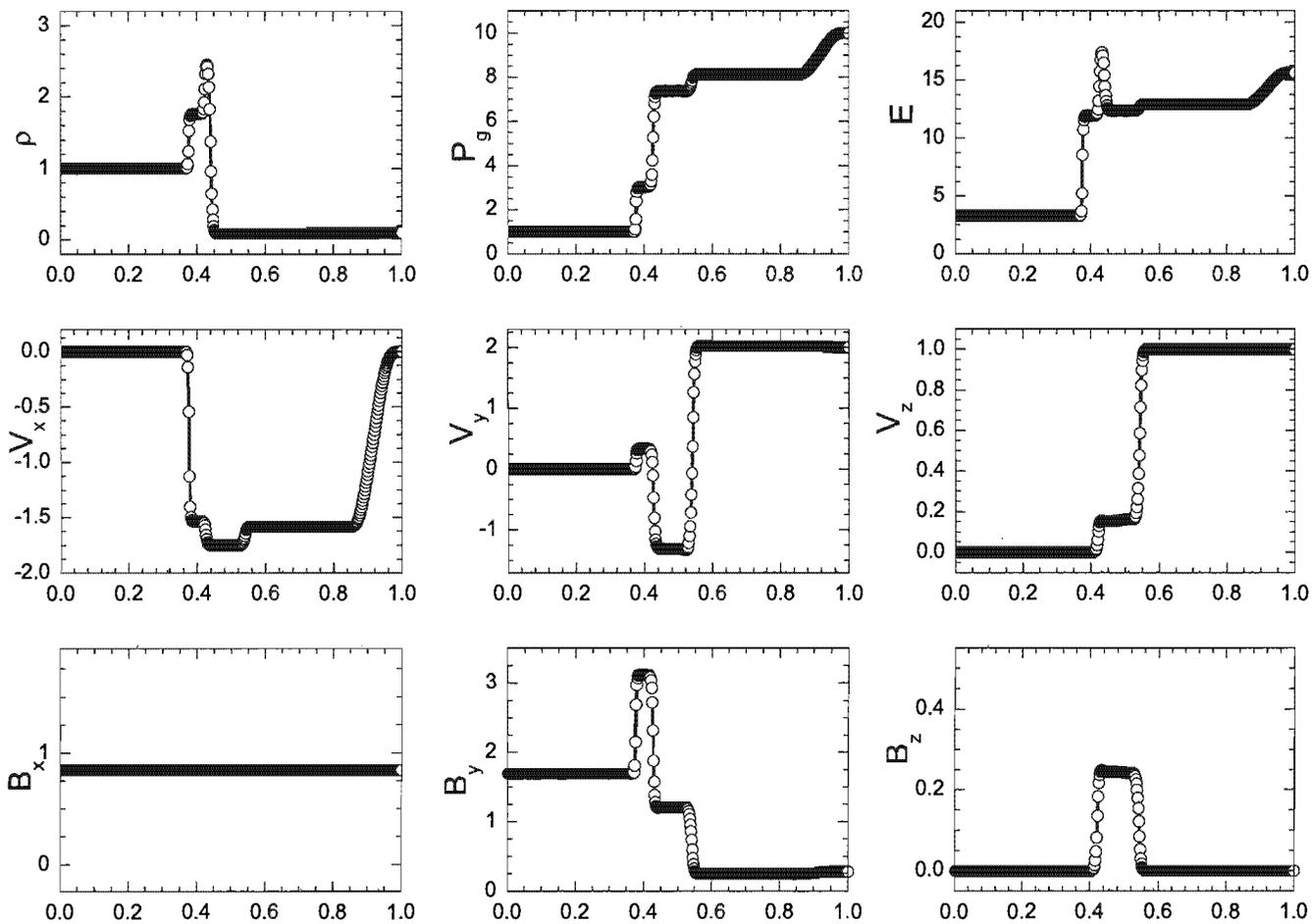


Figura 3.9: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (1, 0, 0, 0, 6/\sqrt{4\pi}, 0, 1)$ ,  $P_R = (0.1, 0, 2, 1, 1/\sqrt{4\pi}, 0, 10)$ ,  $B_x = 3/\sqrt{4\pi}$ ,  $t = 0.035$ .

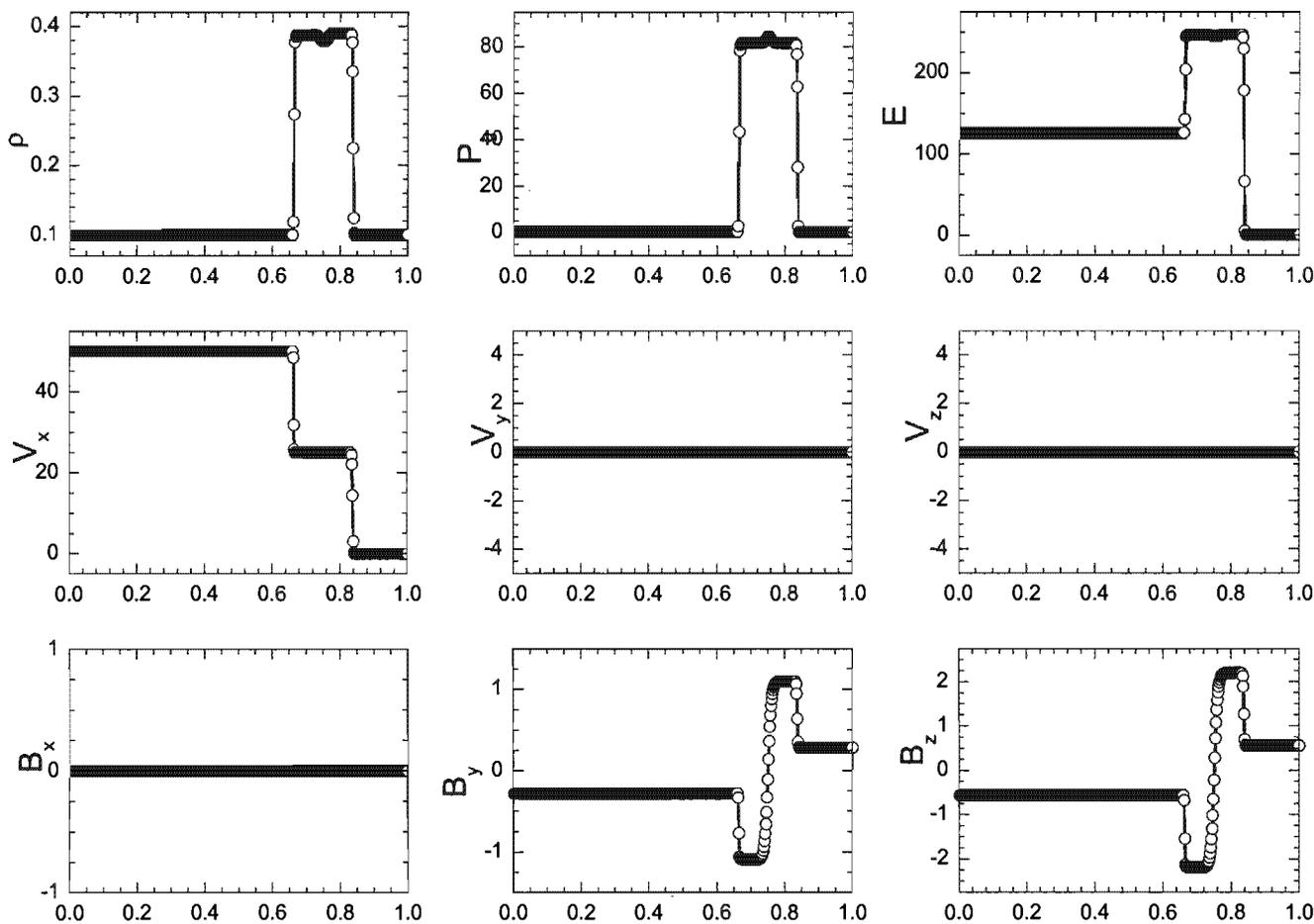


Figura 3.10: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (0.1, 50, 0, 0, -1/\sqrt{4\pi}, -2/\sqrt{4\pi}, 0.4)$ ,  $P_R = (0.1, 0, 0, 0, 1/\sqrt{4\pi}, 2/\sqrt{4\pi}, 0.2)$ ,  $B_x = 0$ ,  $t = 0.01$ .

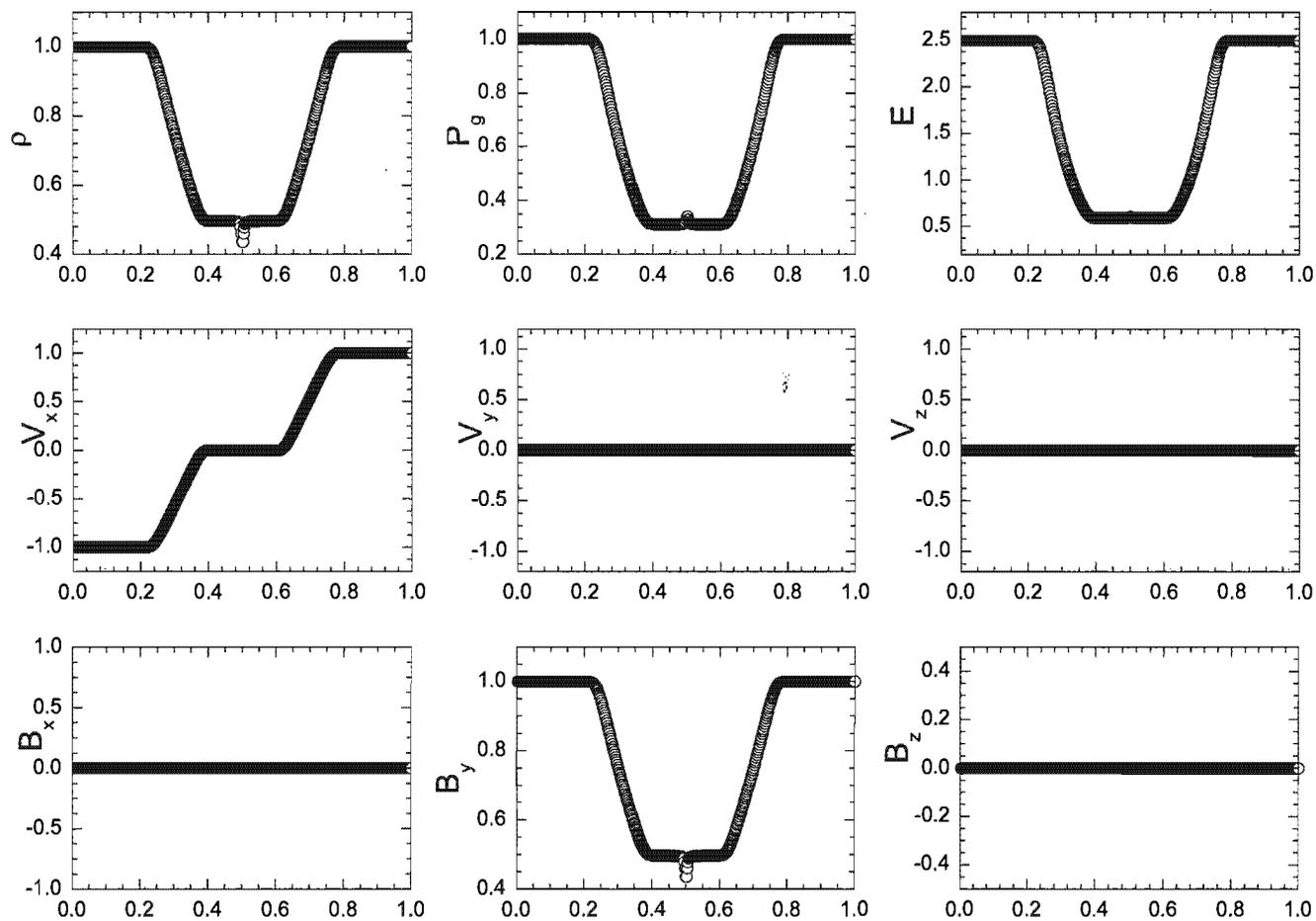


Figura 3.11: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (1, -1, 0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $P_R = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $B_x = 0$ ,  $t = 0.1$ .

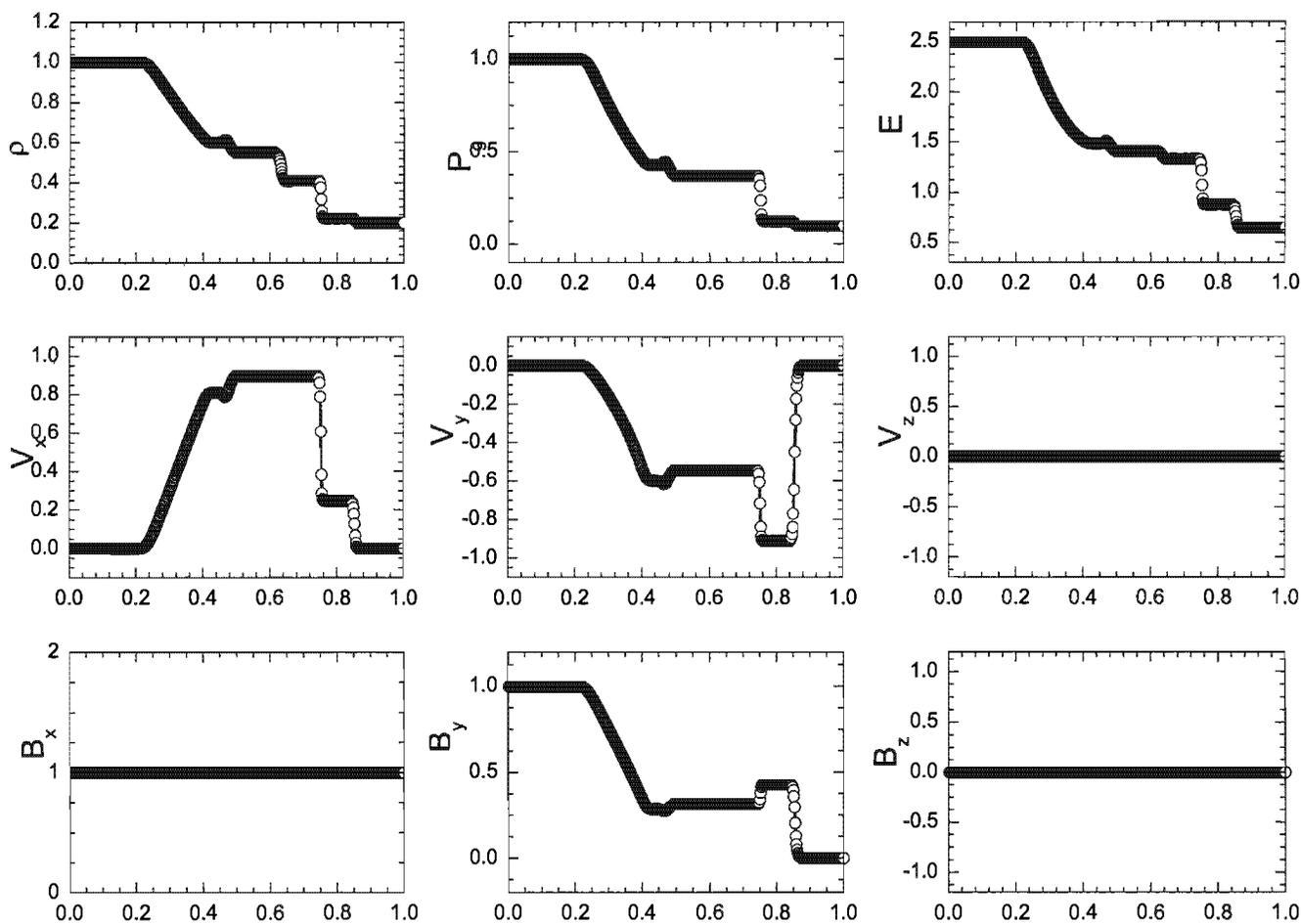


Figura 3.12: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $P_R = (0.2, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $B_x = 1$ ,  $t = 0.15$ .

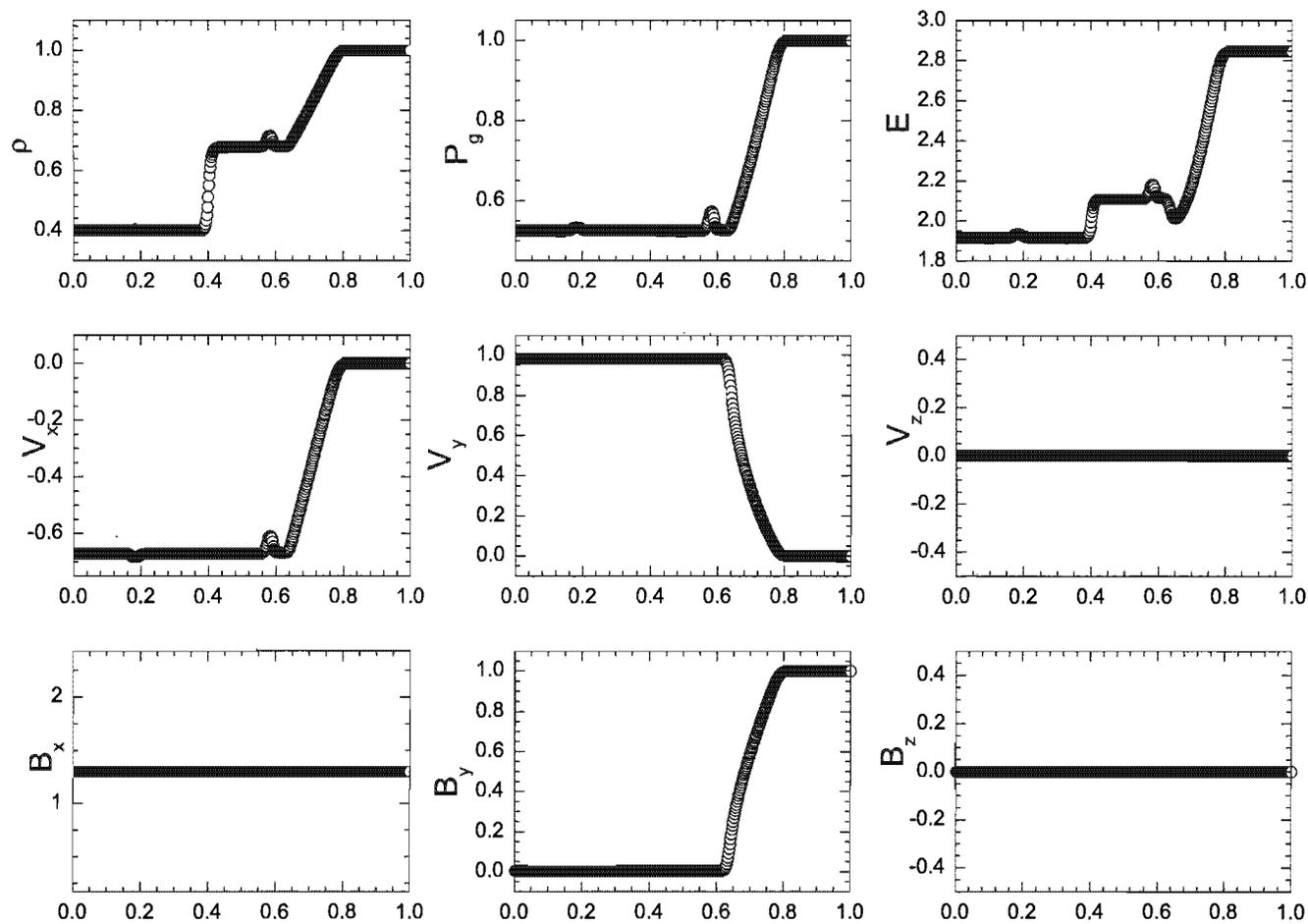


Figura 3.13: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (0.4, -0.66991, 0.98263, 0, 0.0025293, 0, 0.52467)$ ,  $P_R = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $B_x = 1.3$ ,  $t = 0.15$ .

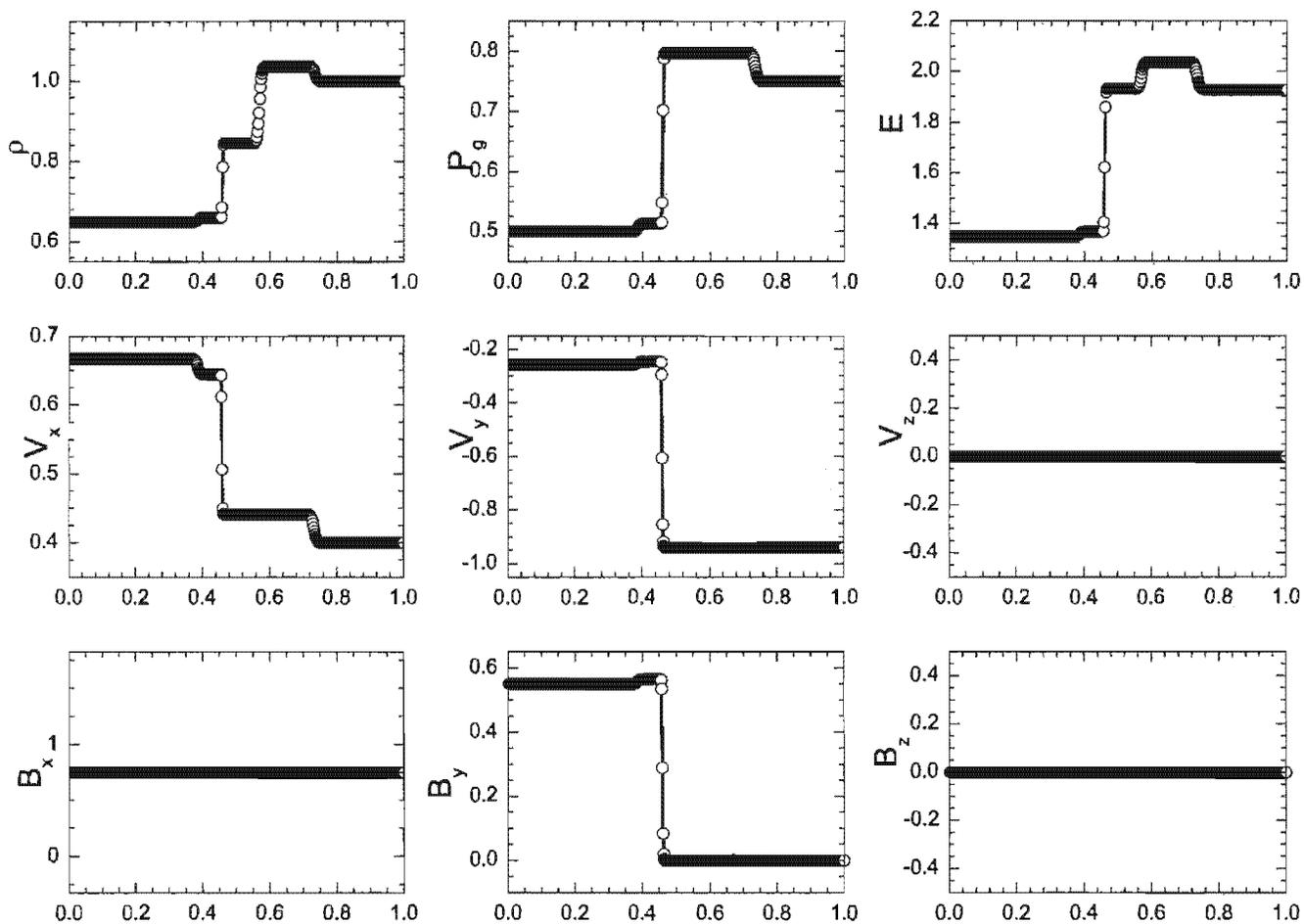


Figura 3.14: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (0.65, 0.667, -0.257, 0, 0.55, 0, 0.5)$ ,  $P_R = (1, 0.4, -0.94, 0, 0, 0, 0.75)$ ,  $B_x = 0.75$ ,  $t = 0.15$ .

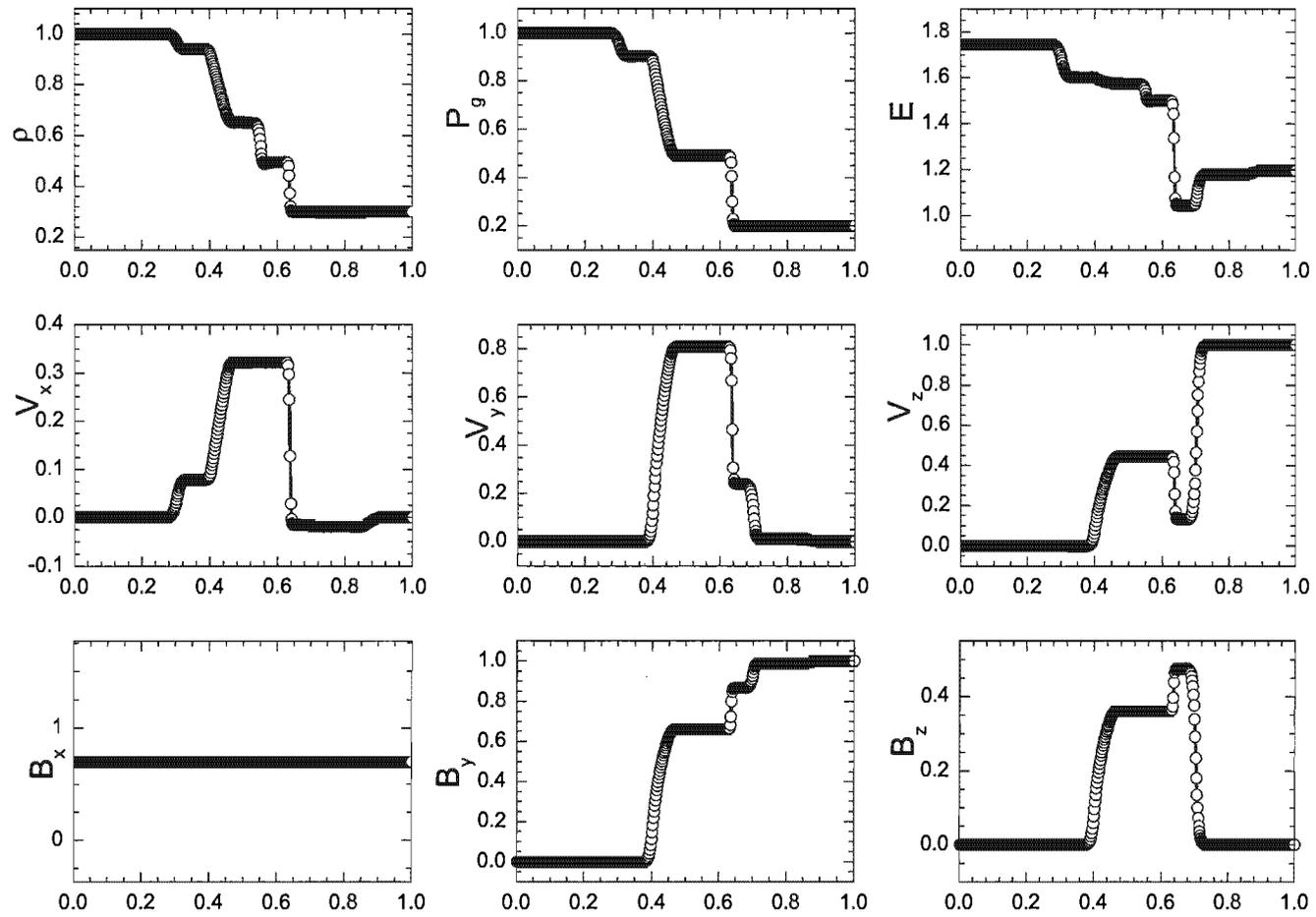


Figura 3.15: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $P_R = (0.3, 0, 0, 1, 1, 0, 0.2)$ ,  $B_x = 0.7$ ,  $t = 0.16$ .

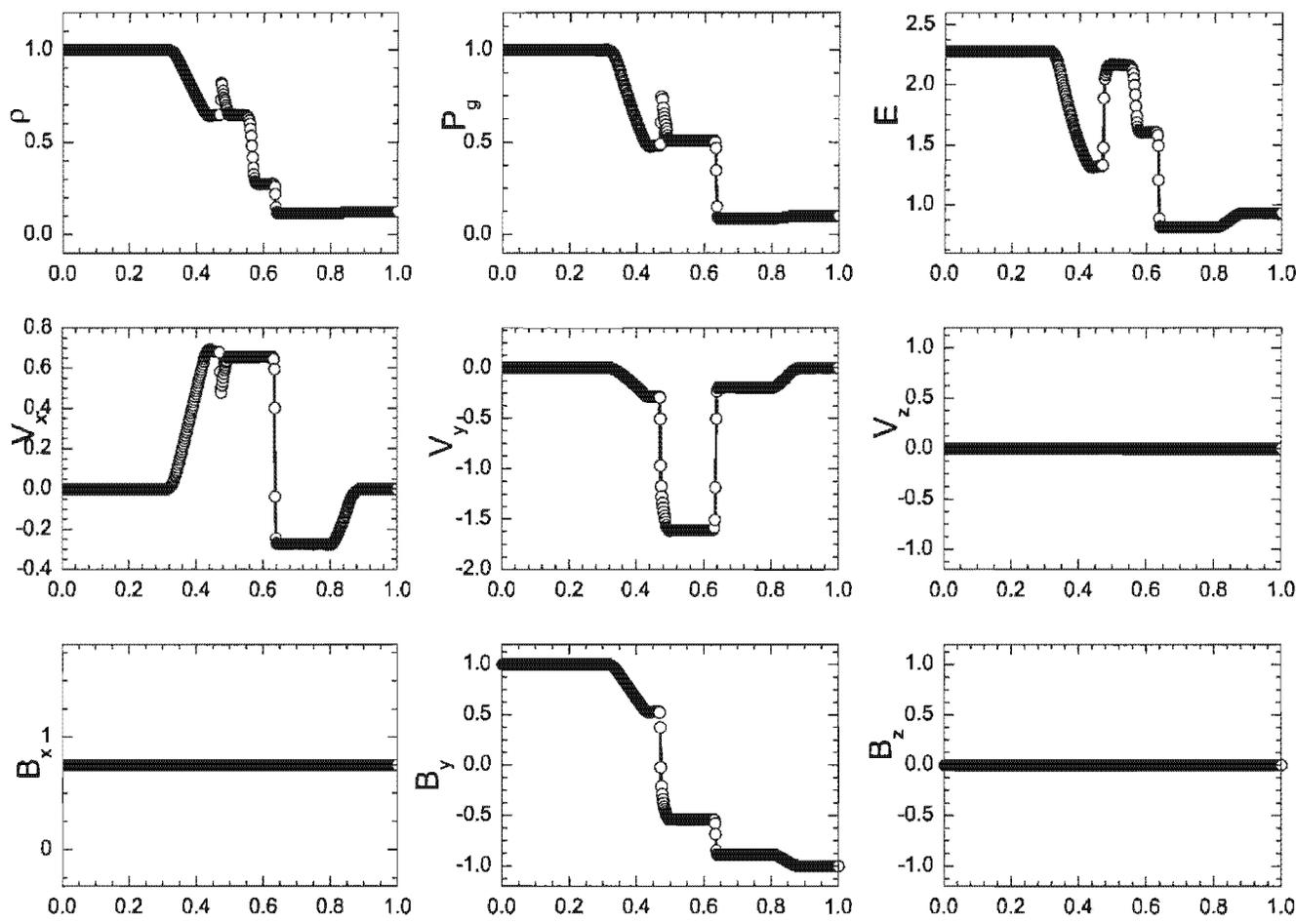


Figura 3.16: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $P_R = (0.125, 0, 0, 0, -1, 0, 0.1)$ ,  $B_x = 0.75$ ,  $t = 0.1$ .

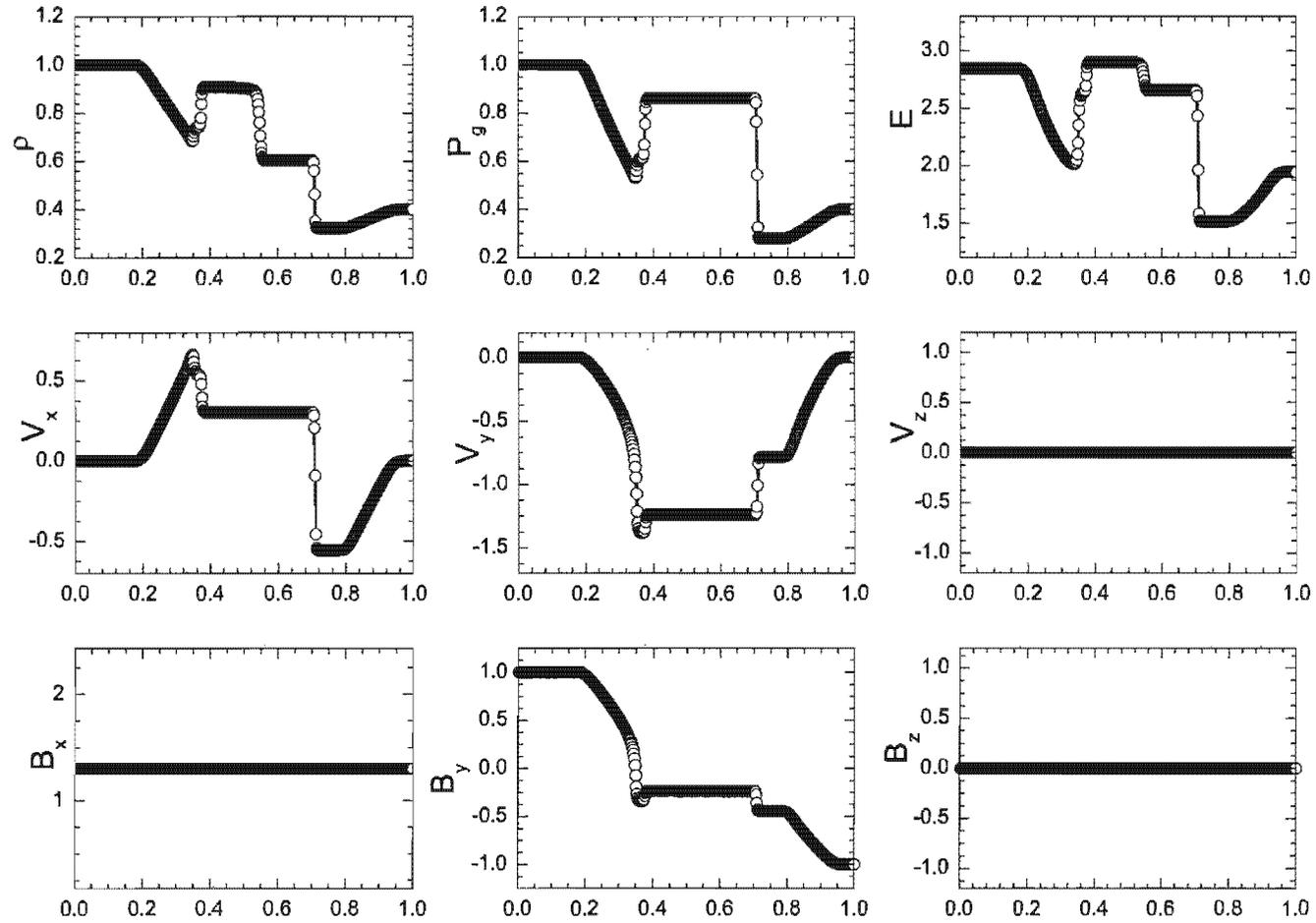


Figura 3.17: Solución de la “prueba del tubo de choque” con las condiciones:  $P_L = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $P_R = (0.4, 0, 0, 0, -1, 0, 0.4)$ ,  $B_x = 1,3$ ,  $t = 0..16$ .

donde  $\mathbf{T}$  es el tensor de los esfuerzos de Maxwell, definido como  $\mathbf{T} = \vec{B}\vec{B} - B^2/2 \mathbf{I}$ . La divergencia del primer término del tensor de Maxwell es:

$$\nabla \cdot (\vec{B}\vec{B}) = \vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} \quad (3.33)$$

La presencia de un término  $\nabla \cdot \vec{B} \neq 0$  produce así una fuerza paralela a las líneas de campo (de manera similar a lo que pasa para el campo eléctrico) y una aceleración magnética a lo largo de estas líneas. Además, se rompe la conservación de la energía, ya que un término  $\propto \nabla \cdot \vec{B}$  aparece también en la ecuación de conservación de energía.

Para encontrar una solución a este problema han sido propuestos en la literatura tres clases de métodos (ver Toth 2000 para una descripción detallada del problema):

- Los primeros métodos son los “projection schemes”, propuestos por Brackbill & Barnes (1980), que resuelven el problema eliminando los monopolos magnéticos generados después de cada paso en el tiempo. Siendo que cualquier vector puede ser escrito como la suma de un rotor y de un gradiente, podemos escribir el campo magnético al tiempo  $t + \Delta t$  como (Toth 2000):

$$\vec{B}^{n+1} = \nabla \times \vec{A} + \nabla\phi \quad (3.34)$$

y aplicando la divergencia a ambos términos se obtiene:

$$\nabla \cdot \vec{B}^{n+1} = \nabla^2\phi. \quad (3.35)$$

Resolviendo esta ecuación se puede calcular el potencial  $\phi$ , y así se puede calcular un campo magnético libre de monopolos como:

$$\vec{B}^{new} = \vec{B}^{n+1} - \nabla\phi \quad (3.36)$$

La limitación más importante de este método es que para utilizarlo es necesario resolver la ecuación de Poisson (3.35) para encontrar el potencial  $\phi$ . Los procedimientos para resolver la ecuación de Poisson son lentos (Toth 2000 calculó en un 30% el tiempo utilizado para resolver la ecuación de Poisson en su código) y difícilmente paralelizables.

- La segunda clase de métodos fue propuesta por Powell (1994), y consiste en reescribir las ecuaciones de la MHD *incluyendo* los términos proporcionales a  $\nabla \cdot \vec{B}$  y recalcular los autovalores y los autovectores del sistema

de ecuaciones. De esta forma Powell obtuvo un sistema de *ocho* ondas (en lugar de las siete obtenidas con el cálculo normal), donde la octava onda corresponde a la propagación de los monopolos magnéticos. Después de cada paso en el tiempo, los términos  $\propto \nabla \cdot \vec{B}$  son sustraídos de las ecuaciones.

Una versión simplificada se obtiene restando los términos proporcionales a  $\nabla \cdot \vec{B}$  en las ecuaciones de la MHD utilizando directamente el sistema de *siete* ondas (por ej. Falle et al. 1998; Janhunen 2000). Este último método es implementado en el esquema numérico desarrollado en esta tesis.

Existen dos problemas en la aplicación de estos métodos. El primero es que al agregar términos a la parte derecha de las ecuaciones de la MHD éstas pierden su carácter conservativo y el segundo es que los monopolos no son eliminados, sino que sólo son advectados de la región en la que se generan.

- Una última categoría son los esquemas basados en el “constrained transport method” (CT, Evans & Hawley 1988), en el que las ecuaciones son resueltas manteniendo la divergencia del campo magnético igual a cero *por construcción*.

### 3.4.3. Construcción de un método CT con valores centrados

Para entender la necesidad de utilizar un método CT debemos considerar nuevamente las ecuaciones de la MHD. Estas se pueden reescribir de la forma:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad (3.37)$$

donde  $U = (\rho, \vec{v}, e, B_z)$ , y

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (-\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (3.38)$$

con la condición:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.39)$$

Las ecuaciones (3.37) representan la conservación de las variables  $U$  integradas en el volumen. Por otro lado las ecuaciones (3.38) no corresponden a la conservación del campo magnético integrado en el volumen, sino que a la conservación del flujo del campo magnético, es decir de la integral *de superficie* del campo magnético. La ecuación (3.38) se puede integrar de la siguiente forma:

$$B_{x,i+1/2,j}^{n+1} = B_{x,i+1/2,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \Omega_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2} - \Omega_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} \right) \quad (3.40)$$

$$B_{y,i,j+1/2}^{n+1} = B_{y,i,j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \Omega_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \Omega_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} \right) \quad (3.41)$$

donde por  $\Omega$  se entiende la componente  $z$  del campo eléctrico  $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$ . Integrando los campos magnéticos utilizando estas expresiones se garantiza automáticamente que, si  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  inicialmente, así se mantiene durante la integración.

Por otro lado, la ecuación para el vector  $U$  se puede integrar como:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}). \quad (3.42)$$

Resumiendo, estamos suponiendo que el sistema de ecuaciones es hiperbólico y estamos utilizando un método de Godunov para integrarlo (3.37). Así encontramos valores del campo magnético que están asociados a la conservación de la integral en volumen del campo magnético, y no a la integral de superficie, y que llevan a la producción de monopolos magnéticos.

Para corregir este problema, utilizamos un método CT para calcular valores del campo magnético utilizando la conservación del flujo del campo magnético. Este procedimiento sería consistente si no fuera que para determinar los flujos (por ej. el flujo de energía) estamos considerando los valores calculados con el método de Godunov y no los valores correctos del campo obtenidos del método CT. Este problema es reflejo del hecho que el sistema de ecuaciones de la MHD se puede considerar hiperbólico sólo perdiendo las propiedades geométricas asociadas con las ecuaciones (3.38) y (3.39). Por otro lado, si se quiere conservar la ecuación de inducción en la forma (3.38), se pierde el carácter hiperbólico de las ecuaciones.

Una posible solución (Gardiner & Stone 2005) es determinar los campos magnéticos en las interfases (método CT) con un método independiente *antes* de calcular los flujos con el método de Godunov, y utilizar estos valores (y no los que se determinan con el método de Godunov) para evolucionar los flujos de las variables conservadas (energía, velocidad y densidad). El problema en este caso es que los métodos que se pueden utilizar para integrar la ecuación de inducción tienen una mayor disipación numérica que los métodos de Godunov. Por esta razón es mejor quedarse con este problema de inconsistencia de las ecuaciones y utilizar un método de Godunov con baja disipación numérica.

Muchos autores (por ej. Londrillo & Dal Zanna 2000; Gardiner & Stone 2005) utilizan valores del campo magnético definidos en las interfases para determinar el campo eléctrico (definido en los vértices de las celdas) y evolucionar los campos magnéticos utilizando el método CT, utilizando además los campos magnéticos definidos en el centro de las celdas para evolucionar las otras variables por medio del método de Godunov (los campos en el centro de las celdas se pueden calcular como promedios espaciales de los valores en las interfases).

Vamos aquí a mostrar como no es necesario utilizar valores en las interfases y se puede continuar considerando sólo valores centrados, simplificando así el algoritmo numérico. Siguiendo Gardiner & Stone (2005) definimos los flujos como:

$$E_{z,i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{2} (\Omega_{i+1/2,j} + \Omega_{i+1/2,j+1} + \Omega_{i,j+1/2} + \Omega_{i+1,j+1/2}) + \frac{1}{4} (\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j+1} + \Omega_{i+1,j} + \Omega_{i+1,j+1}). \quad (3.43)$$

Los flujos definidos de esta forma garantizan que para problemas uni-dimensionales estudiados en dos dimensiones las ecuaciones se pueden reducir al caso uni-dimensional. Otras fórmulas propuestas para los flujos (por ej. Dai & Woodward 1994, Ryu et al. 1998, Toth 2000) no tienen esta propiedad. Hacemos evolucionar *sólo* los campos centrados como:

$$B_{x,i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (B_{x,i-1/2,j}^{n+1} + B_{x,i+1/2,j}^{n+1}) = \quad (3.44)$$

$$= B_{x,i,j}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta y} (\Omega_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2} - \Omega_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + \Omega_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2} - \Omega_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}) \quad (3.45)$$

donde para deducir la última ecuación hemos utilizado las ecuaciones (3.44) y (3.40). Los campos eléctricos centrados (por ej.  $\Omega_{i,j}$ ) son calculados con los

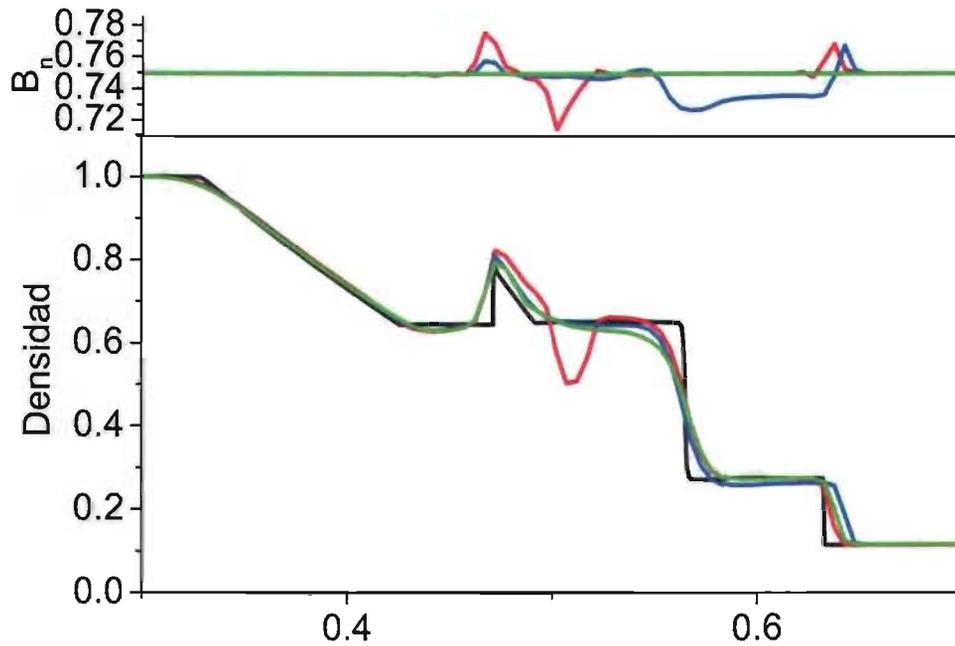


Figura 3.18: Prueba de Brio & Wu en dos dimensiones. Las condiciones iniciales son las mismas que en la Figura 3.16 pero proyectadas a lo largo de la diagonal:  $P_L = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ ,  $P_R = (0.125, 0, 0, 0, -1, 0, 0.1)$ ,  $B_n = 0.75$ ,  $t = 0.1$ . En la parte superior se muestra la componente normal del campo magnético, mientras que en la parte inferior se muestra la densidad. Los modelos correspondientes a las distintas curvas son explicados en el texto.

valores centrados (al tiempo  $t$ ), y los campos definidos en las interfases, (por ej.  $\Omega_{i+1/2,j}$ ) son calculados utilizando los valores obtenidos en las interfases con el método de Godunov.

Un ejemplo de los resultados que se obtienen con este procedimiento se muestra en la Figura 3.18. El problema estudiado es una prueba de tipo “tubo de choque” donde la discontinuidad inicial forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$ . El mismo problema fue estudiado en el caso unidimensional (Figura 3.16). En la parte inferior de la Figura 3.18 se muestra la densidad a lo largo de la diagonal, y en la parte superior se muestra la componente normal (a la discontinuidad inicial) del campo magnético ( $B_n$ ). La curva negra representa la solución obtenida resolviendo la prueba en una dimensión con alta resolución (10000 celdas), mientras que las otras curvas se obtuvieron utilizando una malla de  $200 \times 200$  celdas, con distintos métodos para conservar nula la divergencia

del campo magnéticos. En rojo se presenta el caso en el que no se hace nada para mantener nula la divergencia del campo magnético. En la zona  $x \approx 0.5$  se producen grandes errores en  $B_n$  y en la densidad (y análogamente en los otros parámetros no mostrados). El segundo caso, en azul en la Figura 3.18, se obtiene utilizando el método de Powell. La solución parece ser satisfactoria pero, como se nota en  $x \approx 0.6$ , no se obtiene la condición de salto correcta debido a que las ecuaciones ya no están en forma conservativa. Por otro lado,  $B_n$  no es constante, debido a que en este método, como se dijo, los monopolos no son eliminados, sino que solo advectados. El último caso, en verde, se obtiene utilizando el método CT. La divergencia del campo magnético se mantiene muy cerca de cero en todo el dominio. La componente  $B_n$  es constante, el error en la evaluación de la densidad no es muy grande y las condiciones de salto son las correctas. Es interesante notar como este último método parece tener más disipación numérica que el método de Powell (Figura 3.18, parte baja).

## 3.5. Pruebas en dos dimensiones:

### 3.5.1. El vórtice de Orszag-Tang

Esta es una prueba muy popular (Orszag & Tang 1979), presente en casi todas las publicaciones sobre códigos numéricos MHD. Aquí se utilizan condiciones iniciales similares a las de Ryu et al. (1998). El plano es constituido por una caja periódica con dimensiones  $[x, y] = [1, 1]$  con  $192 \times 192$  celdas. La velocidad inicial es  $v_x = -\sin(2\pi y)$ ,  $v_y = \sin(2\pi x)$  y el campo magnético inicial es:  $B_x = -\sin(2\pi y)$ ,  $B_y = \sin(4\pi x)$ . La presión y la densidad son uniformes inicialmente e iguales a  $5/(12\pi)$  y  $25/(36\pi)$ , respectivamente, de manera que la velocidad del sonido es  $c_s = 1$ .

En la Figura 3.19 se presentan imágenes de la densidad en escalas de grises. Las figuras izquierdas corresponden al caso en el que el algoritmo numérico no tiene términos correctores para controlar la divergencia del campo magnético. Como se puede notar, existen algunas zonas en las que se producen grandes errores en los valores de la densidad. Esto es debido a que en estas zonas se encuentran presiones negativas (la energía no se conserva si existen monopolos magnéticos). En este caso en el que no existe una solución analítica los errores se pueden medir haciendo una simulación con alta resolución (por ejemplo con  $1000 \times 1000$  celdas) y comparar los resultados obtenidos de las simulaciones con baja resolución con los resultados obtenidos con esta prueba a alta

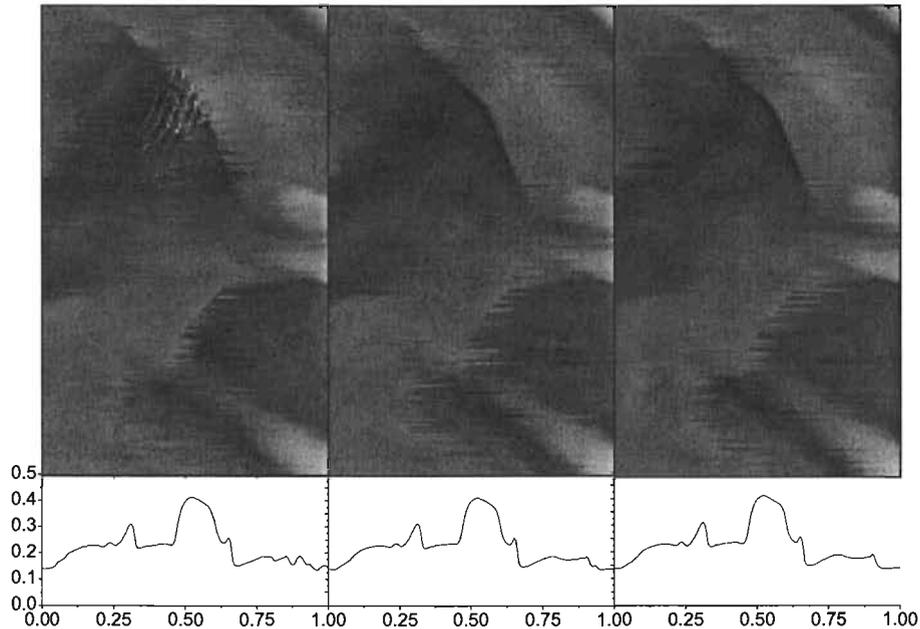


Figura 3.19: Imágenes en escala de grises de la densidad para la prueba del vórtice de Orszag-Tang. La escala de colores representa la densidad (de negro - baja densidad, a blanco - alta densidad). El tiempo final de integración es de  $t = 0.048$ . Las líneas en las Figuras inferiores representan un corte de la densidad a  $y = 0.4271$ . Las figuras izquierdas corresponden al caso sin corrección de la divergencia del campo magnético, el caso central corresponde al método de Powell y la parte derecha al método CT. Las condiciones iniciales son reportadas en el texto. En esta Figura se muestra solo la mitad izquierda de la región de integración, debido a que el problema es simétrico respecto a  $x = 0.5$ .

resolución. Los paneles centrales corresponden al método de Powell y los de la derecha al método CT. Entre estos dos métodos parece no haber diferencias substanciales. Las curvas en la parte inferior de las Figuras 3.19 permiten comparar de manera más cuantitativa nuestros resultados con los de Ryu et al. (1998), quienes en su Figura 3 muestran resultados muy similares.

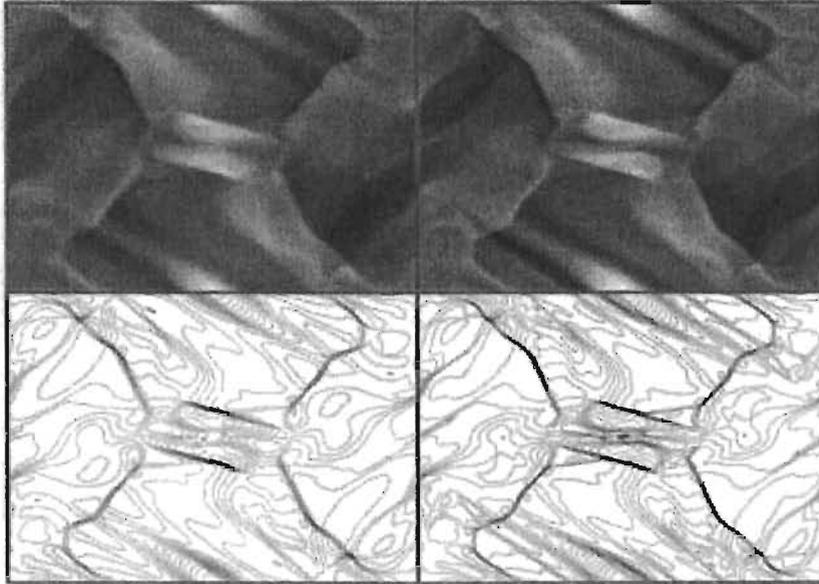


Figura 3.20: prueba del vórtice de Orszag-Tang: en la parte superior se muestra la densidad en escala de grises (negro corresponde a bajos valores de densidad y blanco a grandes valores de densidad). La Figura izquierda corresponde a los resultados obtenidos utilizando el método MUSTA, mientras que la parte derecha los resultados obtenidos con el método de Godunov. La parte inferior representa los contornos de densidad para los dos casos.

En la Figura 3.20 se presentan los resultados obtenidos con el método MUSTA (en la parte izquierda) comparados con los obtenidos con el Riemann Solver estándar (en la parte derecha). La parte inferior de la Figura 3.20 muestra las líneas de isodensidad para estos dos métodos. Como se ve de estas últimas gráficas, el método MUSTA tiene más disipación que el método de Godunov.

### 3.5.2. Propagación de una onda explosiva

Esta prueba (Zachary et al. 1994) consiste en la propagación de una onda explosiva en un medio magnetizado en el que la dinámica está dominada por la presencia del campo magnético. El tamaño total de la región de integración es de  $[x, y] = [1, 1]$  y se utilizan  $200 \times 200$  celdas. La densidad inicial es uniforme ( $\rho = 1$ ), mientras que la presión es igual a 1 en el medio ambiente y  $p = 100$  en un círculo con centro en  $[0.5, 0.5]$  y radio 0.1. El campo magnético tiene

componentes  $y$  y  $z$  nulas, y  $B_x = 10$ . La velocidad inicial es nula y el tiempo de integración es de  $t = 0.02$ .

Los resultados para la densidad son mostrados en la Figura 3.21. Como se puede notar, la propagación de las ondas de choque es asimétrica debido a la presencia de un campo magnético horizontal. Se puede observar como el código conserva la simetría respecto al eje  $x = 0.5$  y  $y = 0.5$ . Nuestros resultados (mostrados en la Figura 3.21) coinciden con los encontrados por Zachary et al. (1994) y Londrillo & Del Zanna (2000).

### 3.5.3. Rotor rápido

En esta prueba (Balsara & Spicer 1999) un cilindro infinito y denso rota rápidamente en un medio ligero magnetizado. Durante la rotación rápida las ondas de Alfvén se propagan hacia el medio ambiente llevando a una pérdida de momento angular del cilindro central. Este problema tiene relación con los procesos que ocurren en formación estelar.

Las condiciones iniciales son las siguientes: el medio ambiente tiene densidad y presión constante ( $P = 1$  y  $\rho = 1$ ) y velocidad  $\vec{v} = 0$ . El disco central, con centro en  $[0.5, 0.5]$  tiene un radio  $r = 0.1$  mientras que el tamaño total de la región de integración es  $[x, y] = [1, 1]$ . La densidad del disco central es  $\rho = 10$  y la presión está en equilibrio con el medio ambiente. La velocidad es:  $v_x = -(y - 0.5)/0.1$  y  $v_y = (x - 0.5)/0.1$ . El campo magnético inicial tiene componente no nula solo en dirección  $x$ :  $B_x = 2.5$ . El tiempo de integración es de  $t = 0.295$  y las simulaciones están hechas con  $200 \times 200$  celdas.

En la Figura 3.22 se muestran los isocontornos de presión para esta prueba. Estos resultados pueden ser comparados, por ejemplo, con los de Balsara & Spicer (1999). Muchos esquemas presentan problemas debidos a la generación de presiones negativas en esta prueba. Además, la región de interacción entre el rotor y el medio ambiente puede llevar a la producción de monopolos magnéticos en códigos no bien construidos. Ninguno de estos dos problemas fue encontrado en nuestro caso.

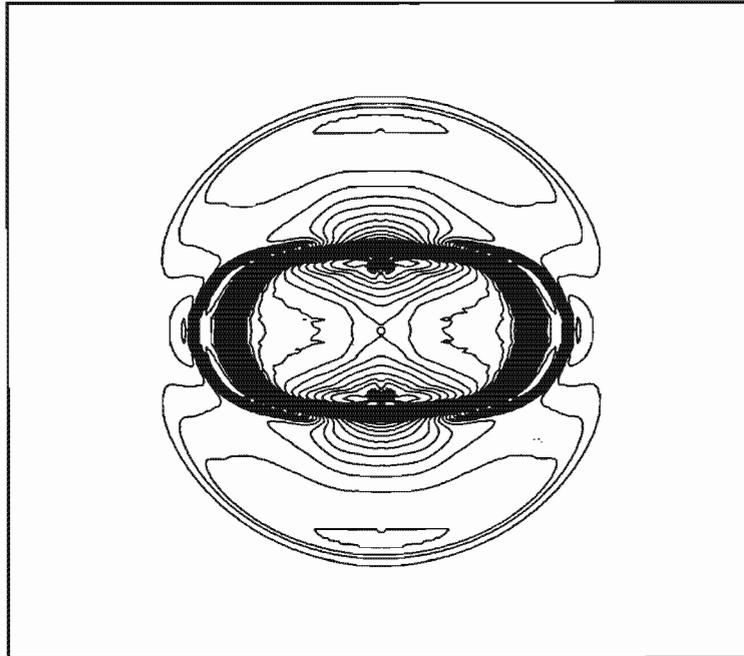


Figura 3.21: Isocontornos de densidad para la propagación de una onda de choque inicialmente esférica en un medio magnetizado. El tiempo de integración es  $t = 0.02$ . Los valores mínimos y máximos son  $0.2/3$  y se usan 50 líneas de isocontorno

### 3.5.4. Interacción entre una nube densa y una onda de choque

Este problema (Dai & Woodward 1998) corresponde a la interacción y siguiente destrucción de una nube densa por parte de una onda de choque fuerte. La nube se encuentra inicialmente en  $[x, y] = [0.2, 0.5]$  y tiene un radio inicial de  $r = 0.15$ , con una densidad inicial  $\rho = 10$  y una presión inicial  $p = 1$ . Su velocidad y campo magnético inicial son iguales a lo del medio ambiente

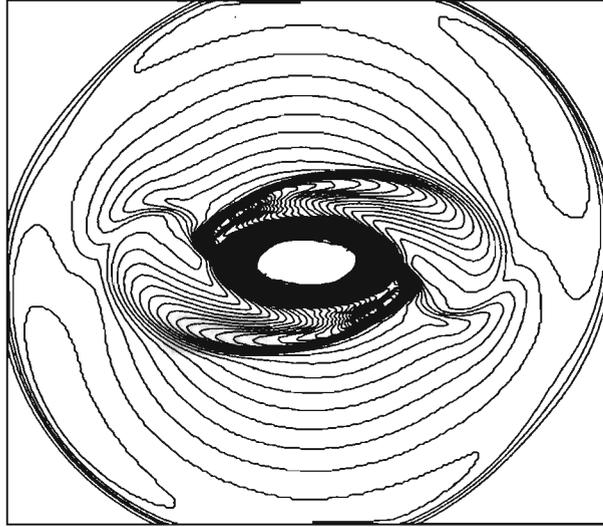


Figura 3.22: Isocontornos de presión para la prueba del rotor rápido. El tiempo de integración es  $t = 0.18$ . Las condiciones iniciales son explicadas en el texto.

en el que se encuentra. El medio ambiente tiene una discontinuidad inicial en  $x = 0.4$  y las condiciones en la parte izquierda y derecha de la discontinuidad son las siguientes:  $P_L = [167.345, 0, 0, 0, 0, 2.1826182, -2.1826182, 3.86859]$  y  $P_R = [1, 11.2536, 0, 0, 0, 0.56418959, 0.56418958, 1]$ .

En la figura 3.23 se muestran los isocontornos de densidad. En las regiones superiores e inferiores del frente de choque son evidentes zonas en donde la densidad se vuelve irregular y fluctuante. Este efecto es debido a que ahí se encuentran valores de presión negativa. Estos resultados entonces indican que los procedimientos utilizados para conservar la presión positiva no son completamente efectivos. Por otro lado, las estructuras más importantes dinámicamente son las debidas a la interacción entre la nube y el medio ambiente, las cuales son similares a las obtenidas por Dai & Woodward (1998).

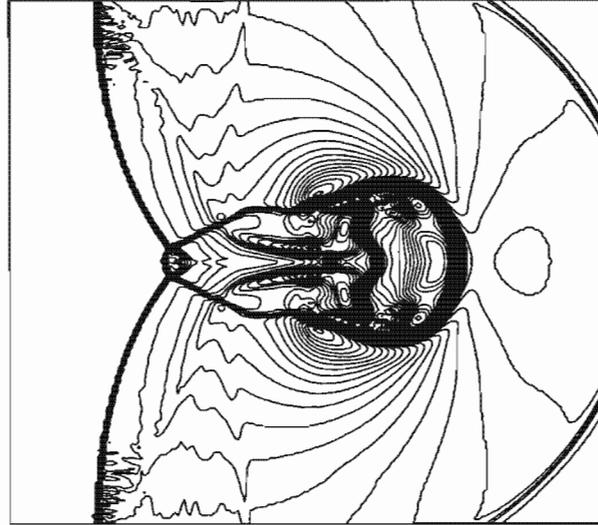


Figura 3.23: Isocontornos de densidad para la interacción de una nube densa con ondas de choque fuertes. Las condiciones iniciales están explicadas en el texto.

### 3.5.5. Propagación de un chorro en coordenadas cilíndricas

En esta prueba se muestra la propagación de un chorro magnetizado en coordenadas cilíndricas (Ryu et al. 1998). El chorro, con un radio inicial de 20 celdas, entra desde la frontera izquierda de la región y se propaga hacia la derecha con velocidad de inyección constante. El medio ambiente es uniforme, con densidad  $\rho = 10$  y  $p = 1$  y con campo magnético puramente poloidal, con  $\beta = p/(B^2/2) = 100$ . El chorro tiene número de Mach  $M = 20$ , densidad inicial  $\rho = 1$ , y un campo magnético en dirección  $z$  con la misma intensidad que el campo magnético del medio ambiente. Además, el chorro tiene una componente de campo toroidal, con intensidad creciente con el radio del chorro, y con intensidad máxima igual a dos veces la intensidad del campo magnético del medio ambiente en el borde externo del chorro. En la Figura 3.24 se muestra

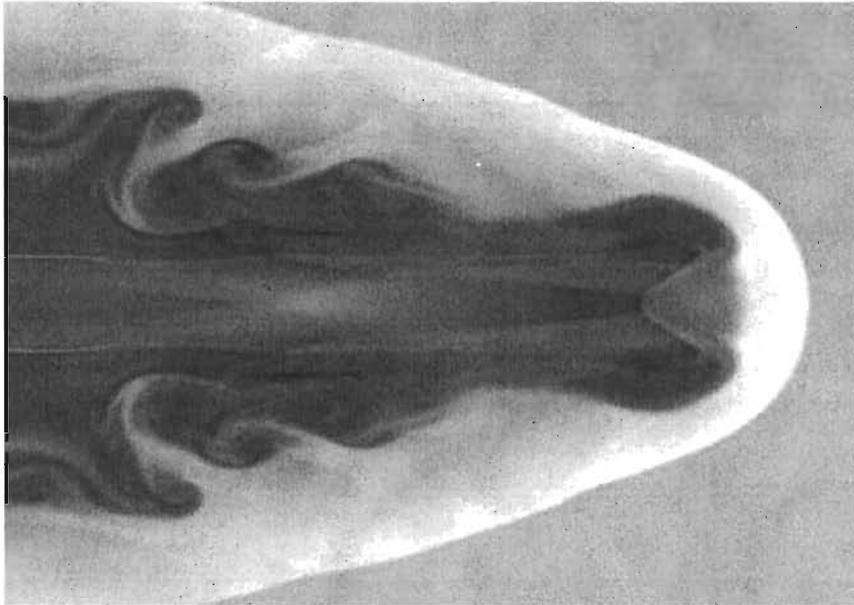


Figura 3.24: Propagación de un chorro más ligero que el medio ambiente. Se presenta en esta Figura el logaritmo de la densidad en escala de grises (negro - baja densidad; blanco - alta densidad).

una imagen del logaritmo de la densidad del chorro en el tiempo  $t = 0.5$ . Siendo el chorro más ligero que el medio ambiente se crea un considerable “cocoon” (similar a los que se forman en chorros extragalácticos). Comparando estos resultados con los obtenidos por Ryu et al.(1998) y Lind et al. (1989) se encuentra que la similitud es excelente.



---

# 4

## MHD simulations of radiative jets from young stellar objects: H $\alpha$ emission

*A&A, accepted for publication, F. De Colle and A.C. Raga*

### 4.1. Abstract

We study the H $\alpha$  emission from jets using two-dimensional axisymmetrical simulations. We compare the emission obtained from hydrodynamic (HD) simulations with the one obtained from magnetohydrodynamics (MHD) simulations. The magnetic field is supposed to be present in the jet only, and with a toroidal configuration. The simulations have time-dependent ejection velocities and different intensities for the initial magnetic field. The results show an increase in the H $\alpha$  emission along the jet for the magnetized cases with respect to the HD case. The increase in the emission is due to a better collimation of the jet in the MHD case, and to a small increase in the shock velocity. These results could have important implications on the interpretation of the observations of jets from young stellar objects.

**KEYWORDS:** *Magnetohydrodynamics (MHD) – Shock waves – Methods: numerical – Herbig-Haro objects – ISM: jets and outflows – Stars: winds, outflows*

## 4.2. Introduction

Collimated outflows are observed in a variety of astrophysical objects, with typical spatial scales ranging from  $\sim 1$  pc for jets from young stellar objects (YSOs) up to several megaparsecs for extragalactic jets. All of these jets seem to be associated with accretion disks, which suggests the existence of a scale-independent physical mechanism responsible for the ejection and collimation of these outflows. The presently more accepted models are the magnetocentrifugal models (Blandford & Payne 1982; Uchida & Shibata 1985), in which the ejection is driven by the presence of a dynamically important magnetic field in the accretion disk-central object system, and the collimation of the jet is due to the toroidal component of the magnetic field, which is able to collimate the outflows by pinching forces. The toroidal magnetic field is generated by the twisting of the magnetic field due to the rotation of the system. The region where this process acts is too close to the central object to be resolved observationally, and one possible way to obtain some insight into this region is by studying the properties of the outflows.

In particular, a lot of progress has recently been made regarding observations of the outflows from YSOs (see the review by Reipurth & Bally 2001). The characteristic spectral emission of these objects is believed to come from the region behind the shock, from recombination of the ionized gas (for the hydrogen lines) and electron excitation (and de-excitation) within ions (Schwartz 1975), and the typical knot structure visible along the jet could be interpreted as due to a time-dependent ejection from the young stellar object (YSO) (Reipurth 1989; Raga et al. 1990).

In the past few years, several authors have studied the effect of the magnetic field on the dynamical evolution of HH objects (e. g. O’Sullivan & Ray 2000; Stone & Hardee 2000; Cerqueira et al. 1997). Frank et al. (1999) showed that ambipolar diffusion could be important to smear out the magnetic field ejected with the jets, but only on timescales comparable or larger than the dynamical timescales of the jets. A determination of a magnetic field in the outflows would represent a test for the magnetocentrifugal mechanism. In particular, the presence of a dynamically important toroidal component of the magnetic field would represent an indirect proof of this mechanism. However, direct observations of magnetic fields in jets are very difficult, and there is yet no clear observational determination of the magnetic field intensity in jets.

Several hydrodynamic (HD) simulations with calculations of the spectral emission of HH objects have been presented in the past (e. g. Blondin et al. 1990; Raga 1994), but such calculations have never been published for the magnetized case. The simulations with magnetic fields have concentrated on the dynamical aspects and the evolution of the jet rather than on obtaining predictions of the emitted spectrum. These simulations usually include a radiative cooling rate (given, e. g., by the coronal cooling function of Dalgarno & McCray 1972), and different magnetic field configurations. The main features found in magnetized jets with respect to HD jets are the presence of a “nose cone”, better collimation, an increase in the density along the direction of propagation, and some effects on Kelvin-Helmoltz and Rayleigh-Taylor instabilities (resulting in changes in the leading bow shock, e. g. Todo et al. 1993; Cerqueira & de Gouveia Dal Pino 1999).

With respect to the emitted spectrum, Hartigan, Morse & Raymond (1994) compared observed and predicted emission lines ratios (using plane-parallel shock models) to find an upper limit of  $30 \mu\text{G}$  for the magnetic field of the jet. Cerqueira & de Gouveia Dal Pino (2001a), using a semiempirical formula (valid for a shock velocity between 20 and  $80 \text{ km s}^{-1}$ ) found the ratio between the  $\text{H}\alpha$  emission of a magnetized and a non-magnetized jet. They obtained that the  $\text{H}\alpha$  emission increases due to the presence of a magnetic field, and that the dominant cause of this increase is the toroidal component of the magnetic field.

Therefore, no direct calculation of the effect of the magnetic field on the emission from a jet has yet been made. Trying to fill this gap, we have carried out 2D, axisymmetric, MHD simulations of jets, looking for the differences in the predicted  $\text{H}\alpha$  emission from magnetized jets with respect to the hydrodynamic case. The paper is organized as follows. In section 4.3, we explain in some detail the numerical algorithm that has been used, the initial conditions of the simulations and the approximations used to calculate the emission. In section 4.4 we summarize and discuss the results obtained, and in section 4.5 we draw our conclusions.

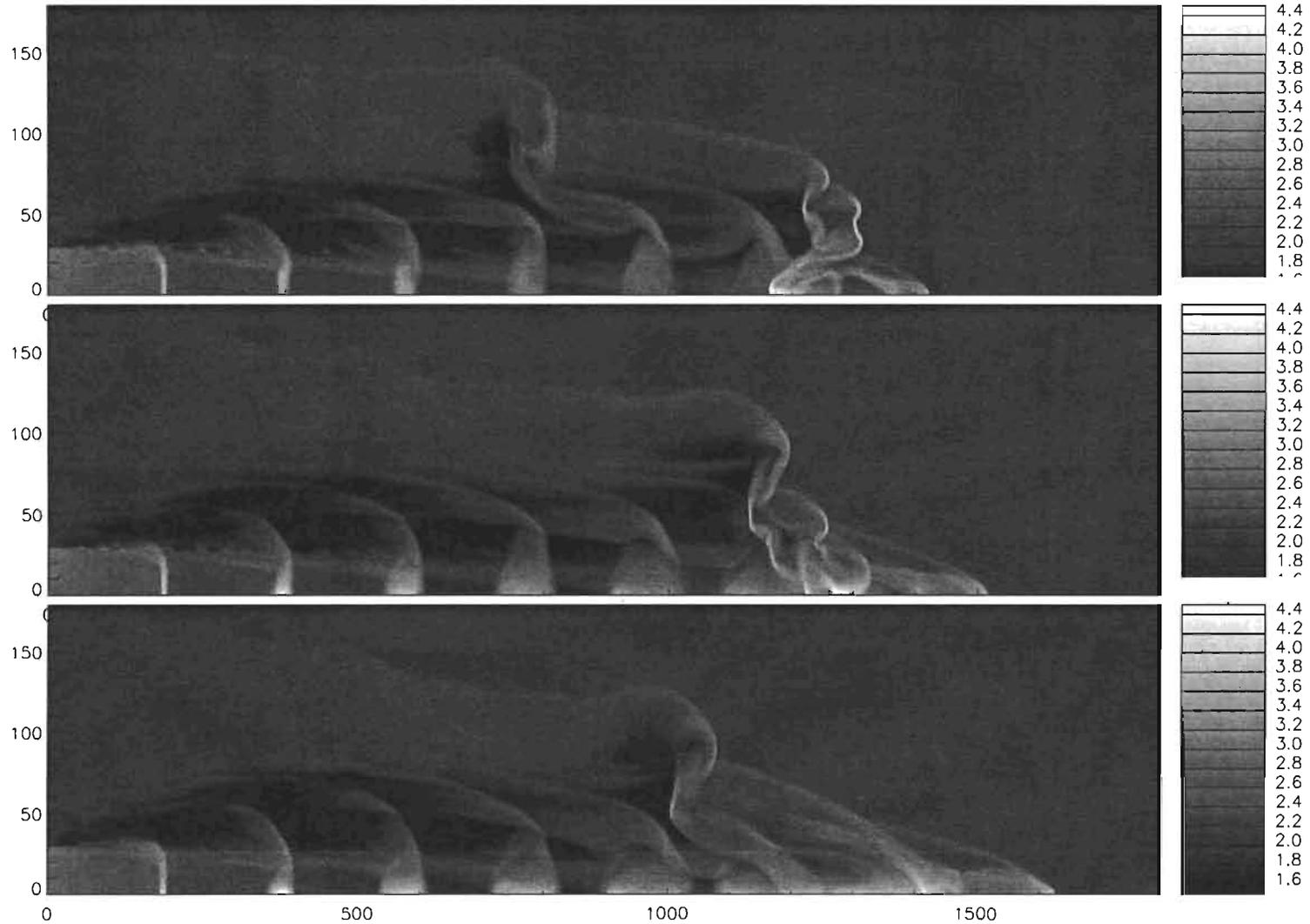


Figura 4.1: Numerical density for the models HD (hydrodynamic), weak MHD ( $\beta = 1$ ), and strong MHD ( $\beta = 0.4$ ), after a 500 yrs integration time. The right bar gives the logarithm of the numerical density (in  $\text{cm}^{-3}$ ). The axes are labelled in pixels, and the displayed domain has a physical size of  $(L_z, L_r) = (3 \times 10^{17}, 3 \times 10^{16})$  cm.

## 4.3. Simulations

### 4.3.1. Numerical method

To study the H $\alpha$  emission from YSO jets, we have carried out a set of 2D, axysymmetrical simulations using a MHD code, modified to include the cooling and the evolution of the hydrogen ionization fraction. We solve the following set of equations:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + p_{tot} I - \vec{B} \vec{B}) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot ((e + p_{tot}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{B}) = -n^2 \Lambda \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \vec{B} - \vec{B} \vec{v}) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial n_{H^0}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{H^0} \vec{v}) = n_{H^+} n_e \alpha(T) - n_{H^0} n_e C(T) \quad (4.5)$$

where  $\rho$  is the mass density,  $\vec{v}$  is the velocity vector,  $p_{tot} = p_{gas} + B^2/2$  is the (magnetic + thermal) total pressure,  $I$  is the identity matrix,  $\vec{B}$  is the magnetic field normalized with respect to  $\sqrt{4\pi}$ ,  $e$  is the total energy defined as  $e = \frac{1}{\gamma-1} p_{gas} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} B^2$  (with  $\gamma = 5/3$ ), and finally  $\Lambda$  is the cooling function. These equations represent the conservation of mass (4.1), momentum (4.2), energy (4.3) and magnetic flux (4.4). Eq. (4.5) represents the evolution of the hydrogen neutral fraction. This equation is coupled to the others by the cooling function  $\Lambda$ , which is a function of the ionization fraction. In Eq. (4.5):

$$\alpha(T) = 2.55 \cdot 10^{-13} (T/10^4)^{-0.79}$$

$$C(T) = 5.38 \cdot 10^{-11} e^{-\frac{157828}{T}} / \sqrt{T}$$

are the recombination and collisional ionization coefficients (Cox 1970), and  $T$  is the gas temperature.

To solve this equation system, we use a second order upwind scheme, which integrates the MHD equations using a Godunov method with a Riemann solver. The Riemann problem is solved using primitive variables and the magnetic field divergence is maintained close to zero using the CT method (Toth

2000). The algorithm is similar to the one of Falle, Komissarov & Joarder (1998), except that to preserve a small divergence of the magnetic field we use a constrained transport method. However, the magnetic field divergence is automatically equal to zero in all our axisymmetrical simulations because we use a toroidal magnetic field configuration. To treat correctly the source terms in cylindrical coordinates, these terms are averaged on the cell volume (see the discussion in the appendix of Falle 1991). The code was tested with one- and two-dimensional tests (Ryu et al. 1995; Toth 2000; also see De Colle 2005<sup>1</sup>).

To solve Eq. (4.3), we first integrate the equation without the cooling term finding a new value for the energy  $e'$ , and afterwards we use this new energy value to integrate the equation

$$\frac{\partial e'}{\partial t} = -n^2 \Lambda(T) = -n^2 \Lambda_0 \frac{T}{T_0}, \quad (4.6)$$

where  $n$  is the number density (assumed to be constant within the timestep) and we approximate  $\Lambda(T)$  in a locally linear form. This equation has an exact solution for the gas pressure:

$$p_{gas} = p_{0,gas} e^{-2\Lambda_0 n_H \Delta t / 3k_B T}. \quad (4.7)$$

where  $n_H$  is the total (ionized more neutral) hydrogen density,  $T$  is the gas temperature,  $k_B$  is the Boltzmann constant and  $\Delta t$  is the time step. A floor of 1000 K is used as the minimal temperature value.

Tests for adiabatic and radiative magnetized and HD jet propagation (reproducing the results of Frank et al. 1998) are reported in a previous paper (De Colle & Raga 2004).

### 4.3.2. Cooling term

We have used a non-equilibrium cooling function considering the energy loss due to collisional excitation of oxygen, radiative recombination of hydrogen, collisional ionization of the hydrogen and excitation of Lyman-alpha line (Biro et al. 1995). If one computes a coronal equilibrium cooling curve using this simplified scheme, one obtains a cooling function which is similar to the one of

---

<sup>1</sup>A detailed description of the free distributed numerical code with several different one, two and three dimensional numerical tests will be soon available at [www.astroscu.unam.mx/~fdecolle](http://www.astroscu.unam.mx/~fdecolle)

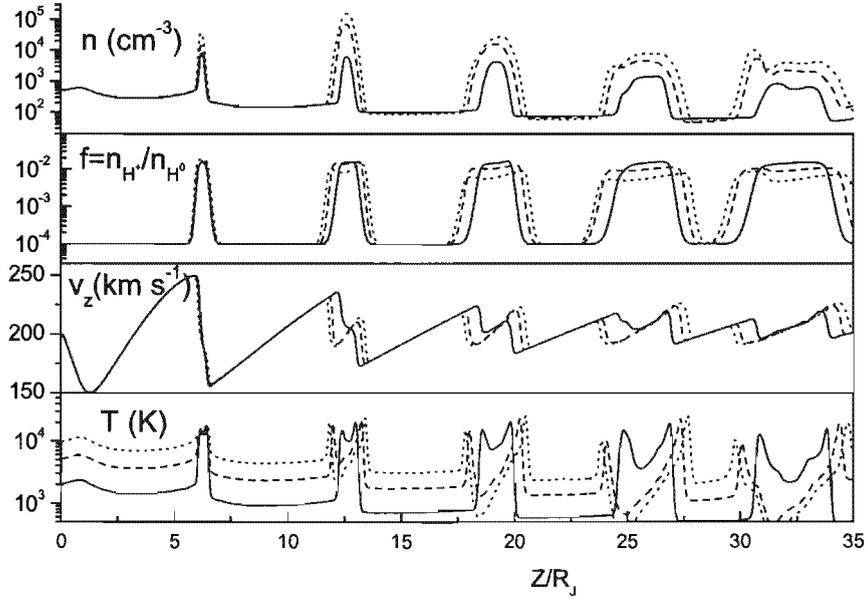


Figura 4.2: Axial cuts of the density (top), hydrogen ionization fraction, axial velocity and temperature (bottom) for the different models. The solid lines correspond to the HD model, the dashed lines correspond to the weak magnetic field ( $\beta = 1$ ) model, and the dotted lines correspond to the strong magnetic field ( $\beta = 0.4$ ) model.

Dalgarno & McCray (1972), which is usually used in MHD jets simulations. For temperatures between  $10^4$  K and  $10^5$  K it is necessary to use a non-equilibrium function instead of the simpler equilibrium cooling function. However, using our non-equilibrium cooling function, we find that the dynamical evolution of the jet and the main features (such as better collimation, presence of a small nose cone, etc.) are very similar to the ones of previous simulations (obtained with a coronal equilibrium cooling function).

To obtain the  $H\alpha$  emission we consider the contributions from the radiative recombination cascade (Aller 1984) and collisional excitations from the  $n = 1$  state (Giovanardi and Palla 1989). The  $H\alpha$  emission is then obtained as a function of the local temperature of the gas  $T$ , and of the neutral and total densities  $n_{H^0}$  and  $n_H$ .

### 4.3.3. Initial conditions

In our numerical simulations, we use a uniform grid of axial/radial size  $(L_z, L_r) = (3 \times 10^{17}, 3 \times 10^{16})$  cm. The resolution is of  $1.67 \times 10^{14}$  cm, corresponding to  $1800 \times 180$  cells along the  $z$ - and  $r$ -axes, respectively.

In the models, the atomic jet has an initial radius of  $6 \times 10^{15}$  cm (corresponding to 30 cells) and is moving in the  $z$ -direction with a mean velocity  $v_0 = 200$  km  $s^{-1}$  (on this mean velocity, we superimpose a sinusoidal velocity variability, see below). The initial jet density in all cases is  $n_{jet} = 500$   $cm^{-3}$ , the ambient density is uniform, with a value  $n_{amb} = 100$   $cm^{-3}$ , and the ambient sound speed is  $c_s = 10$  km  $s^{-1}$  (corresponding to  $T = 10000$  K). The edge of the jet and the ambient medium are initially in radial pressure equilibrium. The initial jet temperature has a radial profile which is discussed below.

The jet evolution is followed for a maximum of 500 yr as it propagates along the  $z$ -direction. We use reflection boundary conditions at  $z = 0$  and  $r = 0$ , and open boundary conditions for the outer boundaries of the  $r$  and  $z$ -axes.

To obtain a number of knots along the direction of propagation of the jet, we impose a sinusoidally variable ejection velocity of the form:

$$v(t) = v_0 \left( 1 + A \sin \frac{2\pi t}{\tau} \right) \quad (4.8)$$

where  $A = 0.25$  and  $\tau = 50$  yr are the amplitude and the period of the perturbation in the velocity.

Following Lind et al. (1989), we use the simple profile for the toroidal magnetic field:

$$B(r) = \begin{cases} B_m \frac{r}{R_m} & 0 \leq r < R_m \\ B_m \frac{R_m}{r} & R_m \leq r < R_j \\ 0 & R_j \leq r \end{cases} \quad (4.9)$$

To ensure initial hydromagnetic equilibrium in the radial direction, it is necessary that the magnetic and thermal pressures satisfy the radial equilibrium equation:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{B}{r} \frac{d(rB)}{dr} = 0. \quad (4.10)$$

Integrating this equation, using the magnetic field profile given by Eq. (4.9), it is possible to find the thermal pressure profile (Lind et al. 1989; O'Sullivan &

Ray 2000):

$$p(r) = \begin{cases} (\alpha + \frac{2}{\beta}(1 - \frac{r^2}{R_m^2}))p_{amb} & 0 \leq r < R_m \\ \alpha p_{amb} & R_m \leq r < R_j \\ p_{amb} & R_j \leq r \end{cases} \quad (4.11)$$

where  $\alpha$  is the integration constant of Eq. (4.10), which is connected to  $R_m$  by the relation:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\beta_m} \left( \frac{R_m}{R_j} \right)^2. \quad (4.12)$$

This is the magnetic field profile used by Lind et al. (1989), O’Sullivan & Ray (2000) and Frank et al. (1998), and is similar to the one Stone & Hardee (2000, who use a slightly different form for the magnetic field profile).

The free parameters in these formulae are the values of  $R_m$  (or equivalently  $\alpha$ ). We choose  $R_m = 0.6R_j$ . In this way the  $\alpha$  parameter (obtained from Eq. 4.12), is always positive and the thermal pressure (obtained from Eq. 4.11) is also positive.

We choose a toroidal field geometry for two reasons. The first one is that a toroidal magnetic field is necessary to collimate the jet during the ejection-collimation process, and would then also have to be present in the propagating jet. The second reason is that in shocks, the “important” component of the magnetic field is the one parallel to the surface of the shock (which is the toroidal component in our geometry). In fact, all of the previous simulations confirm this idea. Stone & Hardee (2000) and Frank et al. (1998) obtained relevant differences in MHD jets (with respect to the HD case) with a strong toroidal component of the magnetic field, and less important differences for a longitudinal magnetic field (see also Gardiner et al. 2000). Cerqueira & de Gouveia Dal Pino (2001a, 2001b) also showed that larger effects in the calculated H $\alpha$  emission are also obtained for toroidal field configurations.

We have computed models with different magnetic field intensities, ranging from  $B_m = 0$  to  $B_m = 93.2 \mu\text{G}$  (see equation 4.9), corresponding to  $\beta = \infty$  to  $\beta = 0.4$ , where  $\beta = 2P_{gas}/B^2$ . In all of our simulations, the ambient medium is not magnetized. The sound velocity and the Alfvén velocities, at the centre of the initial cross section, ranges from  $c_{s,0} = c_{s,amb}/\sqrt{5} \approx 4.5$  km/s and  $c_A = 0$  (for the  $\beta = \infty$  case) to  $c_{s,0} \approx 10$  km/s and  $c_A \approx 17.3$  km/s (for the  $\beta = 0.4$  case).

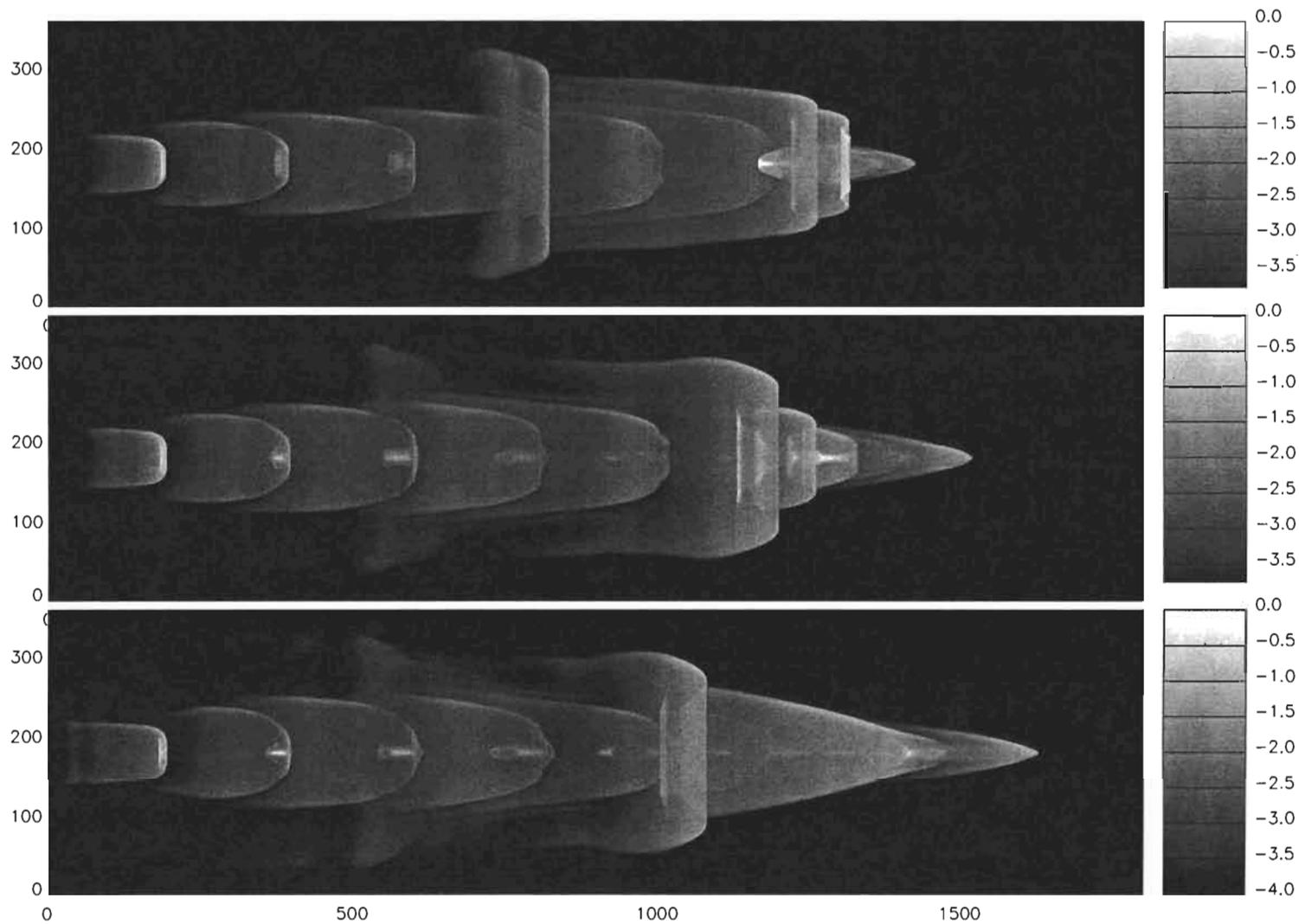


Figura 4.3:  $H\alpha$  emission maps for the three computed models. The frames correspond to the HD, weak MHD ( $\beta = 1$ ), and strong MHD ( $\beta = 0.4$ ) models (top to bottom), after 500 yrs integration time. The right bar gives the logarithm of the  $H\alpha$  emission, normalized to the maximum value of each frame. The axes are labelled in pixels, and the displayed domain has a physical size of  $(L_z, L_r) = (3 \times 10^{17}, 3 \times 10^{16})$  cm.

## 4.4. Results

### 4.4.1. General Results

The stratification of the numerical density for simulations with different values of the magnetic field intensity are shown in Fig. 4.1 for a  $t = 400$  yr time integration. The top frame shows the HD simulation, the central frame a weak magnetic field simulation (with  $\beta=1$ ,  $B_m = 58.9 \mu\text{G}$ ) and the bottom frame a strong magnetic field simulation ( $\beta=0.4$ ,  $B_m = 93.2 \mu\text{G}$ ).

The results show an increasing collimation for increasing toroidal magnetic fields. The knots are due to the imposed variable injection velocity (see Eq. 4.8). The head of the jet presents a very complicated structure, due to the presence of instabilities (see, e. g., Blondin et al. 1990) and to the interaction of successive knots which catch up with the head. Moreover, our simulations develop extended “nose cones”, due to the better confinement of the toroidal magnetic field component on the material included in the working surface of the jet. The structure of the head is strongly time-dependent, and will not be considered in the following analysis.

In Fig. 4.2 we show the density, the ionization fraction, the axial flow velocity and the temperature as a function of position along the symmetry axis for the three computed models. This figure does not include the region of the head of the jet.

Some effects due to the presence of the magnetic field are evident. We see that the on-axis ( $r = 0$ ) density increases  $\sim$  one order of magnitude from the HD to the  $\beta = 0.4$  model. The initial temperature is bigger for the magnetized cases due to the different pressure profiles present in the initial configuration of the jet (which correspond to temperature profiles, as the density is assumed to be constant, see section 4.3). However, within the internal working surfaces we obtain lower temperatures as a function of increasing magnetic field intensity (similar results were obtained by Stone & Hardee 2000). The ionization fraction in the central regions of the knots decreases as a function of increasing magnetic field strength (which is consistent with the temperature decrease described above).

The separation between the two shocks of the knots increases both as a function of distance from the source and of increasing magnetic field intensity. This

latter effect is due to the fact that the magnetic field tends to stop the lateral expansion of the material within the knots, so that more material remains in the region close to the symmetry axis. With respect to the velocity, we see that the shock velocities (which correspond to the velocity jumps observed at the edges of the knots in Fig. 4.2) increase as a function of increasing magnetic field. Finally, the propagation velocity of the head of the jet increases substantially as a function of increasing magnetic field (as can be seen in Fig. 4.1). This effect is also due to the increased collimation obtained for the MHD jets.

#### 4.4.2. Intensity maps

From our models, we have computed  $H\alpha$  emission line maps. These maps are obtained integrating the emission coefficient along lines of sight, and are computed assuming an optically thin jet moving parallel to the plane of the sky. In Fig. 4.3 we show the  $H\alpha$  emission line maps predicted from the models presented in Fig. 4.1. It is evident that the  $H\alpha$  emission is more concentrated to the jet axis in the magnetic jet models than in the HD jet.

To have a quantitative value of the  $H\alpha$  emission from the knots, we integrate the emission over regions around each knot. To this effect, we integrate the emission within circular diaphragms with a radius of  $7 \times 10^{15}$  cm centered on the successive knots. In fact, the regions outside these diaphragms have negligible emission (see Fig. 4.3).

In Fig. 4.4, we show the results obtained for the different models. The points represent the ratio of the  $H\alpha$  luminosities of the successive knots with respect to the  $H\alpha$  luminosity of the corresponding knot in the HD simulation. For the first knot (located at  $z \approx 4R_J$ ) we find that all of the magnetized jet models have almost the same  $H\alpha$  luminosity as the HD jet model (i. e.,  $L_{H\alpha}(MHD)/L_{H\alpha}(HD) \approx 1$ ). The value of  $L_{H\alpha}(MHD)/L_{H\alpha}(HD)$  increases as a function of  $z$  in the second and third knots (located at  $z \approx 8$  and  $14R_J$ ) and then decreases again for larger  $z$  values (i. e., for the fourth and fifth knots, located at  $z \approx 19$  and  $25R_J$ ).

From this Figure, we also see that a model with  $\beta = 5$  ( $B = 26.3\mu\text{G}$ ) produces knots with  $H\alpha$  luminosities which are basically indistinguishable from the HD simulation. For higher magnetic fields (i. e., for lower values of  $\beta$ ), knots with increasingly larger  $H\alpha$  luminosities (compared to the HD case)

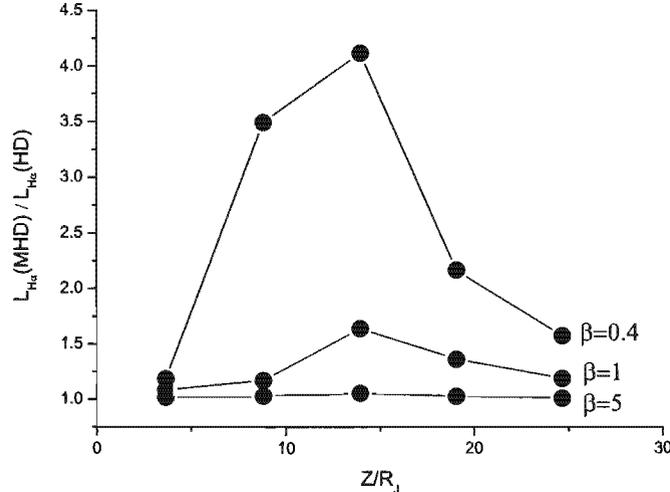


Figura 4.4: Ratios of the  $H\alpha$  luminosities of the knots along magnetized jet models with respect to the  $H\alpha$  luminosity of the corresponding knots in a HD jet, as a function of knot position along the jet axis. These luminosities have been obtained by integrating the  $H\alpha$  intensity over circular diaphragms centered on the successive knots (see the text and Fig. 4.3).

are obtained. The largest increase is found for the knot at position  $z \approx 14r_j$  ( $\approx 8.5 \times 10^{16}$  cm). These results agree at least qualitatively with the ones shown in Fig. 3 of Cerqueira and de Gouveia Dal Pino (2001a), who find increases in the  $H\alpha$  luminosity by factors of  $\sim 3 - 4$  with respect to the HD case for a  $\beta = 1$  magnetized jet model.

## 4.5. Conclusions

We have presented 2D numerical simulations of HD and magnetized, variable jets propagating in a homogeneous medium. Models with increasing magnetic fields show an increase in the  $H\alpha$  luminosities of the successive knots (which correspond to internal working surfaces which result from the injection velocity variability). This result confirms the work of Cerqueira & de Gouveia Dal Pino (2001a, 2001b), who estimated the  $H\alpha$  luminosity of the clumps along MHD jet simulations using a fit to predictions of plane-parallel shock models.

Somewhat surprisingly, our work presents the *first* predictions of emission line maps from MHD HH jet models. Therefore, our calculations for the first time show the emission line morphologies that would be expected for such models.

We find that the  $H\alpha$  emission of the leading head of the jet differs quite strongly between the HD and MHD cases. This is a result of the fact that our simulations develop extended “nose cones” (of somewhat dubious reality, as these structures might disappear in 3D jets without perfect axisymmetry, see Cerqueira & de Gouveia Dal Pino 2001b).

For the knots along the jet, we find that for increasing magnetic field strengths we obtain emission structures with stronger peaks towards the symmetry axis. This can be clearly seen in Fig. 4.3, in which the  $\beta = 0.4$  model has knots which are dominated by an elongated emission component along the jet axis.

This different type of knot morphology is interesting in terms of observations of HH jets. It has been a long-standing fact that while some HH jets (notably HH 111, see e. g. Reipurth et al. 1997a) show compact knots with “bow shock-like” morphologies which resemble the predictions from HD variable jet models (see Masciadri et al. 2002), other HH jets (e. g., HH 30, see Lopez et al. 1995) have emission knots with axially elongated structures. This second kind of morphology could not be modelled successfully in terms of variable HD jet models, and suggested the presence of a different mechanism for knot formation. We now find that variable jets with a strong enough toroidal magnetic field do lead to the formation of axially elongated knots, which in principle might be used to model objects such as HH 30.

The present paper is limited to a study of the effect of a toroidal magnetic field on the  $H\alpha$  emission of variable jet flows. In a future paper, we will present a study of a more extended set of emission lines. From such a study, we will attempt to produce a set of line diagnostics which could be used to estimate the magnetic field strength along observed HH jets.

---

# 5

## Interaction of HH objects with molecular cloud and generation of Alfvén waves

*MNRAS*, 359, 164-170 (2005), *F. De Colle and A.C. Raga*

### **5.1. Abstract**

The interaction of a jet with the surrounding molecular cloud can be a mechanism for turbulence generation. In this paper we present results of two-dimensional, cartesian, isothermal MHD simulations of high density clumps (which could be the result of a time-dependent ejection from a young, low mass star) propagating in a uniform medium, and we study the generation of Alfvén waves and the transfer of momentum and energy from the clump to the molecular cloud. We calculate the time and the distances in which the momentum and the energy of the clump are transferred to the molecular cloud, for models with different magnetic field configurations. We find that the presence of the magnetic field facilitates the transport of momentum and energy by the propagation of Alfvén waves in the direction perpendicular to the jet motion, and in this way jets can generate turbulence in the surrounding, magnetized

cloud. We also find that jets moving parallel to the ambient magnetic field travel much longer distances than jets moving perpendicular to the magnetic field. This effect could explain the correlation between the direction of the magnetic field and the directions of the outflows embedded in molecular clouds.

KEYWORDS: *ISM: clouds – ISM: Herbig-Haro objects – ISM: Jets and outflows – methods: numerical – MHD – waves*

## 5.2. Introduction

The origin of turbulence in molecular clouds is an unsolved problem. Observations of molecular lines show widths that are much broader than the thermal movement of the molecules ( $\sim 1 \text{ km s}^{-1}$  for CO at a typical temperature of 10-20 K).

These supersonic turbulent motions can be explained in terms of turbulent and/or wave motions in a magnetized gas. In addition, MHD wave models (Falle & Hartquist 2002) can explain why molecular clouds are clumped. Arons & Max (1975) explained the widths of CO emission lines in terms of the presence of magnetohydrodynamics (MHD) waves. They also found that the MHD waves are damped out fast enough so that the presence of an energy source (generating MHD waves) is necessary (see also Clifford & Elmegreen 1983 and Falgarone & Puget 1986). In a similar way, MHD turbulence tends to decay on relatively short time-scales compared with the lifetime of molecular clouds (Gammie & Ostriker 1996, Mac Low et al. 1998 and Mac Low 1999). The problem is therefore how to regenerate the rapidly decaying turbulence.

Possible energy sources are gravitationally collapsing regions, massive stars (winds, radiation or supernovae), low mass stars (which generate bipolar outflows) and the large scale motion of the cloud (see Mac Low & Klessen 2004 and references therein).

In the present paper, we focus on the influence of outflows from young stellar objects on the surrounding molecular clouds and the generation of Alfvén waves as a possible source of turbulence. Many bipolar outflows are typically embedded in molecular clouds with active star formation (Liseau 2004). These outflows are produced from young star+accretion disk systems, are initially collimated, and also preserve their collimation as they propagate to distances

of  $\sim 0.1 - 1$  pc from their sources (see, e. g., the review of Reipurth & Bally 2001). There is some evidence that the outflows have preferred orientations which are approximately parallel to the direction of the cloud magnetic field (Cohen, Rowland & Blair 1984, Strom et al. 1986, Tamura & Sato 1989).

Solomon, Huguenin & Scoville (1981) hypothesize that bipolar outflows first slow down to velocities comparable to the turbulent velocity of the cloud and then transfer their energies and momentum to the parent cloud. This energy could be an effective mechanism for maintaining the observed turbulence and for stabilizing magnetized clouds against gravitational collapse.

Partial evidence for an outflow/cloud motion coupling has been found by Arce (2003), who studied the giant protostellar outflows HH300 and HH315, and showed that both outflows have modified the density and velocity distributions of the molecular cloud in which they are propagating, at parsec-scale distances from their sources. These giant outflows have volume kinetic energies larger than the turbulent energy of the molecular cloud.

In this paper, we present a calculation of the coupling efficiency between propagating jets and the motions of the surrounding molecular cloud. To investigate this problem, we have carried out MHD simulations with a new two-dimensional (2D) cartesian code. We approximate HH objects as moving clumps, and we study the propagation of a single clump within a uniform “cloud”.

Recent laboratory experiments (Gekelman et al. 2003) studied the propagation of dense laser-produced plasmas within a low density, background magnetized plasma. The initial plasma motion along the magnetic field produces a focused jet. In addition, as the cloud expand along the magnetic field, it generates very strong Alfvén waves.

In the present paper, we describe a numerical study of the “plasma clump / background plasma coupling” problem in the context of outflows within molecular clouds. In section 5.3 we discuss the characteristics of the code and the initial conditions of our simulations and in section 5.4 we present the obtained results. A brief discussion is presented in section 5.5.

## 5.3. Simulations

### 5.3.1. Numerical method

For modelling the interaction of high velocity clumps moving within a molecular cloud it is in principle necessary to compute at least a rudimentary atomic/molecular network, and to include an appropriate radiative cooling term (in the energy equation). However, in the present paper we consider the much more simple isothermal MHD problem. This approximation is reasonable for describing the dynamics of a cloud moving within a strongly magnetized medium. For example, in our models we have chosen  $\beta = P_{gas}/P_{mag}$  substantially lower than unity, so that the magnetic pressure dominates over the thermal pressure in the unperturbed environment. When the gas is compressed by radiative shocks,  $\beta$  decreases to much lower values, so that the thermal pressure becomes negligible compared to the magnetic pressure. Therefore, the errors in the calculation of  $P_{gas}$  arising from the isothermal approximation are unlikely to be important for the dynamics of the flow.

We integrate the isothermal MHD equations in two dimensions in conservative form:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + p_{tot} I - \vec{B} \vec{B}) = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \vec{B} - \vec{B} \vec{v}) = 0 \quad (5.3)$$

where  $I$  is the identity matrix, and the other symbols having the usual meaning:  $\rho$  is the mass density,  $\vec{v}$  is the velocity vector,  $\vec{B}$  is the magnetic field divided by  $\sqrt{4\pi}$ ,  $p_{tot} = p_{gas} + B^2/2$  is the total (thermal and magnetic) pressure. The equations represent the conservation of mass, momentum, and magnetic flux respectively. The energy equation reduces to  $p_{gas} = \rho c^2$ , where  $c$  is the isothermal sound velocity.

We solve the MHD equations using the new “MUSTA” (MUlti STAge) numerical method of Toro (2004). Let us describe this algorithm in some detail. First, we can write the MHD equation system in two dimensions as:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0. \quad (5.4)$$

We know the initial state (at time  $n$ ) and we want to find the solution at time  $n + 1$ . Dividing the 2D plane in cells with  $(i - 1/2)\Delta x \leq x < (i + 1/2)\Delta x$  and  $(j - 1/2)\Delta y \leq y < (j + 1/2)\Delta y$ , the solution at the time  $n + 1$  can then be calculated as:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2};j}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2};j}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{i;j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - G_{i;j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}), \quad (5.5)$$

where  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ , and the fluxes are calculated at the interfaces between the successive cells.

The solution of this equation system depends on the particular method used to calculate the fluxes. In the nowadays “traditional” Godunov methods, the fluxes at the interfaces between successive cells are calculated by solving the Riemann problem, and associating the contact discontinuity of the Riemann problem with the cell interface. The Riemann problem is generally solved by considering the evolution of the different propagating wave solutions (in this case, we would have the magnetosonic fast and slow waves, and the Alfvén waves, see, e. g., Falle, Komissarov & Joarder 1998) of the system and calculating the effect of these waves on all of the flow parameters.

In the MUSTA method, the Riemann problem is solved numerically using a standard, second order finite difference method (e. g. the Lax-Wendroff method), and then using this numerical solution to calculate the interface fluxes. We have evaluated the performance of this algorithm with one and two-dimensional tests (Ryu & Jones 1995, Toth 2000), comparing the obtained results with a the ones from a “traditional” Riemann solver. The results obtained with the MUSTA algorithm and with a linear Riemann solver are very similar, the MUSTA algorithm producing slightly more diffusive solutions in the 2D test. The divergence of the magnetic field is maintained close to zero using the flux-interpolated central difference method (Toth 2000).

We also solve an equation to trace the location of the cloud material:

$$\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho f \vec{v}) = 0 \quad (5.6)$$

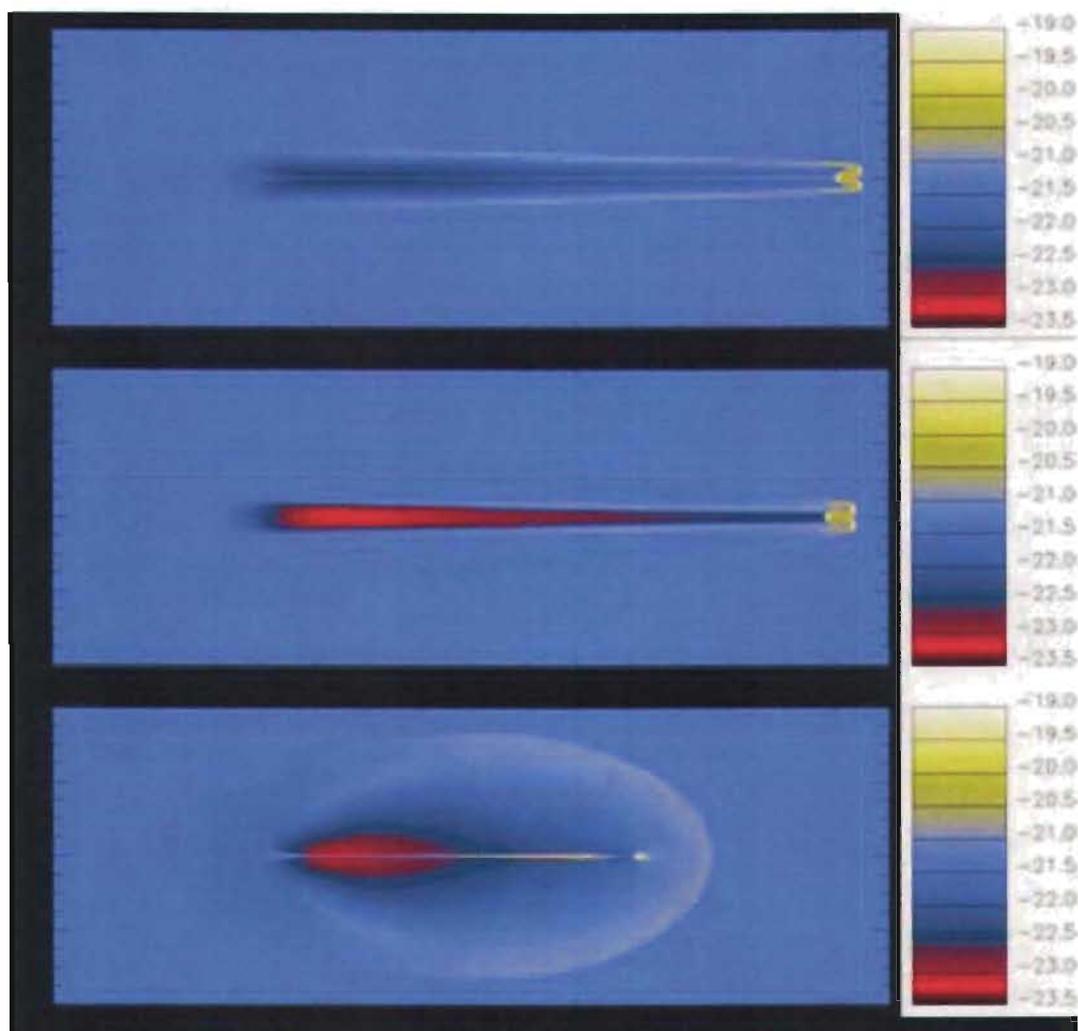


Figura 5.1: Logarithmic images of the gas density stratification for models HD, PL and PP (top to bottom) after time integrations of 40000 yr (see Table 5.1). The  $x$  (horizontal) and  $y$  (vertical) axes are labelled in pixels, and correspond to physical sizes of  $4 \times 10^{18}$  and  $2 \times 10^{18}$  cm, respectively. The bar to the right of the plots gives the values of  $\log_{10} \rho$  (with  $\rho$  in  $\text{g cm}^{-3}$ ).

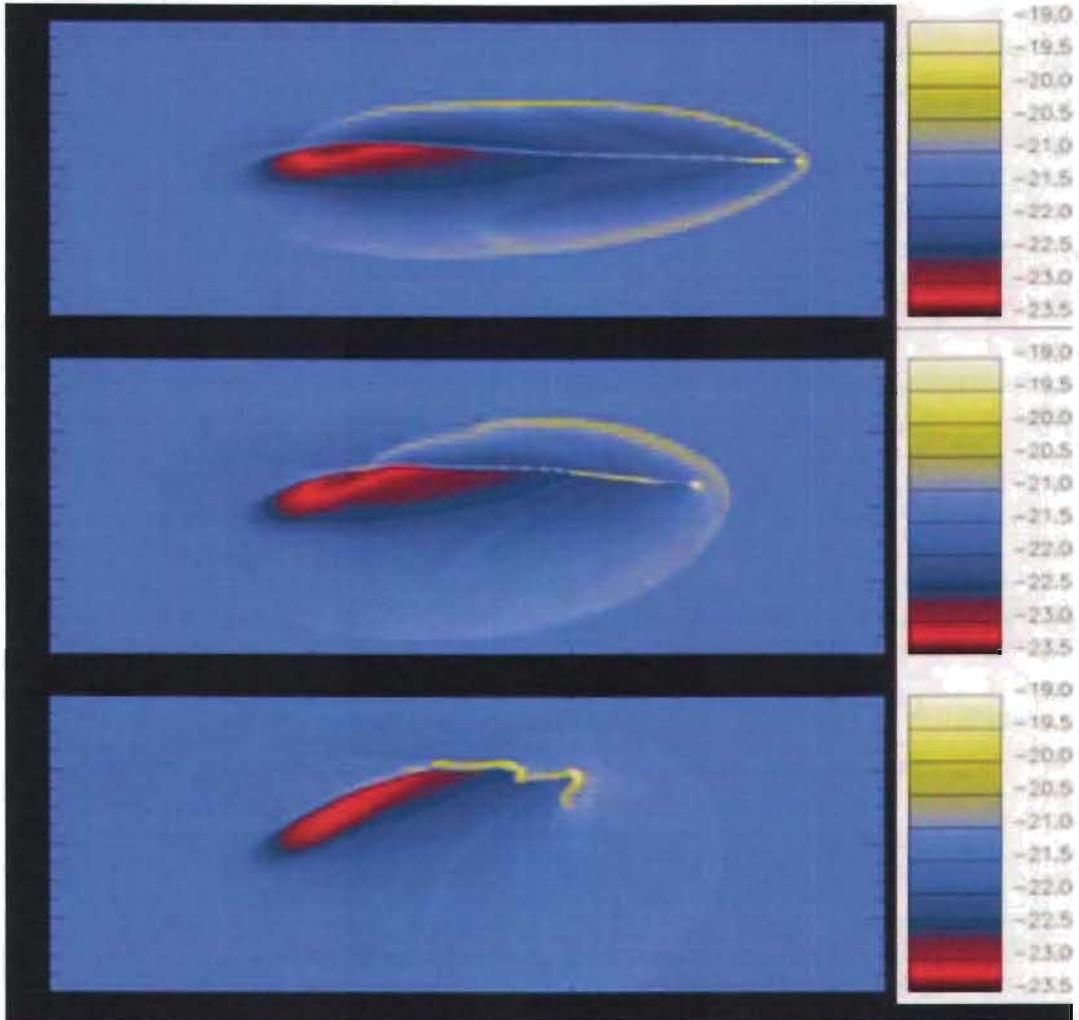


Figura 5.2: Logarithmic images of the gas density stratification for models OL, OM and OH (top to bottom) after time integrations of 40000 yr for the models OL and OM and of 25000 yr for the model OH (see Table 5.1). The  $x$  (horizontal) and  $y$  (vertical) axes are labelled in pixels, and correspond to physical sizes of  $4 \times 10^{18}$  and  $2 \times 10^{18}$  cm, respectively. The bar to the right of the plots gives the values of  $\log_{10} \rho$  (with  $\rho$  in  $\text{g cm}^{-3}$ ).

Cuadro 5.1: Parameters for the numerical simulations

Model	$\alpha(^{\circ})^a$	$B(\mu G)^b$	$\beta = p_{gas}/p_{mag}^c$
OH	45	58.9	0.01
OM	45	26.3	0.05
OL	45	11.8	0.25
PL	0	26.3	0.05
PP	90	26.3	0.05
HD	0	0	$\infty$

<sup>a</sup>  $\alpha$  is the angle between the initial magnetic field and the  $x$ -axis

<sup>b</sup>  $B$  is the magnetic field intensity

<sup>c</sup>  $p_{gas}$  and  $p_{mag}$  are the gas and magnetic pressures, respectively

where  $f$  is the fraction of the clump material normalized by the total mass in a cell. This equation is solved with the same algorithm as the others, except that we need an estimate of  $f$  at the cell interfaces. Considering for example the  $i + 1/2$  interface along the  $x$  (horizontal) axis, we take  $f_{i+1/2} = f_i$  if the  $x$ -velocity is positive,  $f_{i+1/2} = f_{i+1}$  if the  $x$ -velocity is negative, and  $f_{i+1/2} = (f_i + f_{i+1})/2$  if the velocity is zero. The same procedure is applied to the  $y$ -direction. Initially,  $f = 1$  inside the clump and  $f = 0$  in the surrounding molecular cloud.

### 5.3.2. Initial conditions

In our numerical simulations, we use a uniform grid, with spatial extents of  $4 \times 10^{18}$  cm and  $2 \times 10^{18}$  cm along the  $x$ - and  $y$ -axes, respectively. The resolution is of  $2.5 \times 10^{15}$  cm, corresponding to  $1600 \times 800$  cells. We have computed six models, differing in the orientation and the intensity of the initially uniform magnetic field. We have computed 3 models in which the magnetic field lies on the  $xy$ -plane at an angle  $\alpha = 45^{\circ}$  with the initial propagation direction of the clump (which is parallel to the  $x$ -axis), with magnetic field intensities  $B = 11.8, 26.3$  and  $58.9 \mu G$  (models OL, OM and OH of Table 5.1). We have then computed two models with  $B = 26.3 \mu G$  and magnetic field orientations  $\alpha = 0$  and  $90^{\circ}$  (models PL and PP of Table 5.1). Finally, we have computed a  $B = 0$ , hydrodynamical model (model HD of Table 5.1).

In all of the models, the clump has an initial radius of  $5 \times 10^{16}$  cm and is

moving in the  $x$ -direction with a  $M = 70$  Mach number, corresponding to a velocity  $v_x = 39.6 \text{ km s}^{-1}$ . The clump density in all cases is  $n_{clump} = 1950 \text{ cm}^{-3}$ , the cloud density is  $n_{cloud} = 130 \text{ cm}^{-3}$ , and the isothermal sound speed is  $c = 0.566 \text{ km s}^{-1}$  (corresponding to a  $T = 76.9 \text{ K}$  temperature).

The clump is initially centred at a distance of  $10^{18} \text{ cm}$  from the  $x = 0$  boundary of the domain, and its evolution is followed for 50000 yr as it propagates mainly along the  $x$ -direction. The obtained results do not depend on the conditions applied at the grid boundaries because the simulations are stopped before any perturbations reach the edge of the computational domain.

## 5.4. Results

Figure 5.1 shows the stratification of the mass density for models HD, PL and PP after a  $t = 40000 \text{ yr}$  integration time. The case with magnetic field oriented parallel to the direction of propagation (model PL) and the purely hydrodynamic case (model HD) are quite similar. The strong bow shock is followed by a region with very low densities. In model PL, the magnetic field lines envelop the bow shock and stop the post-bow shock material from refilling the low density wake left behind by the clump. The density in the wake of model PL is one order of magnitude lower than the one of the purely hydrodynamic HD model. In the HD and PL models, there is little motion along the  $y$ -axis (perpendicular to the direction of propagation of the clump), so that the flow remains confined throughout its evolution.

The case with magnetic field perpendicular to the direction of propagation of the clump (model PP, see Table 5.1 and Figure 5.1) is quite different. In this model, the width of the perturbed region is larger than in models HD and PL by a factor of  $\sim 5$ .

The magnetic field has a strong compression near the bow shock, and the clump slows down considerably during the time-integration. Strong Alfvén waves are excited, and propagate perpendicular to the direction of motion of the clump.

In Figure 5.1 we show the mass density stratification for models OL, OM and OH after a  $t = 40000 \text{ yr}$  integration time. These models have an “oblique” magnetic field, with different intensities (see Table 5.1). In the three models

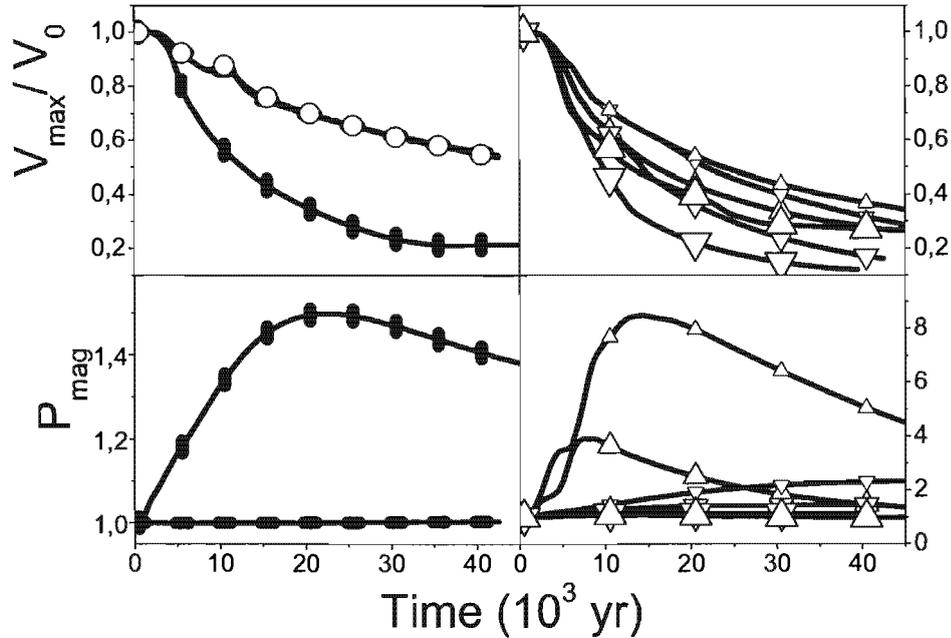


Figura 5.3: Top: temporal evolution of the maximum value of the velocity normalized with respect to the initial clump velocity. Bottom: temporal evolution of the value of the total magnetic energy normalized with respect to the initial total magnetic energy. The results refer to models PL (horizontal segments), HD (open circles), PP (vertical segments), OH (large triangles), OM (medium triangles) and OL (small triangles). Triangles directed upwards or downwards represent the parameters calculated for the upper and lower half of the computational domain, respectively.

(and particularly in the high magnetic field model OH) the oblique magnetic field changes the direction of propagation of the clump, and its associated bow shock distorts the magnetic field configuration in the upper part of the computational domain. The clump is destroyed very fast, and Alfvén waves are produced, and propagate along the magnetic field lines.

In the upper part of Figure 5.3 we show the evolution of the maximum value

of the velocity (modulus) as a function of the time (normalized with respect to the initial clump velocity) for all of the computed models. Model PL (with magnetic field parallel to the clump propagation) has an almost constant value of the magnetic pressure during the time integration, and at  $t = 50000$  yr has a maximum velocity of one half of the initial clump velocity, in the same way as model HD (purely hydrodynamic). In the models with magnetic fields in oblique or perpendicular directions (models OH, OM, OL and PP) the clump slows down much more rapidly, arriving in the higher magnetic field intensity model OH at velocities comparable to the Alfvén velocity.

In the bottom part of Figure 5.3, we show the value of the total magnetic energy for all of the computed models, normalized to the initial value of the total magnetic energy, and obtained integrating the magnetic pressure ( $p_{mag} = B^2/2$ , and then normalized to the initial value of the magnetic pressure) over the entire computational domain. For the case of the “oblique magnetic field models” (models OL, OM, OH), we have integrated  $p_{mag}$  over the upper and lower half of the computational domain, and we find that the upper region of the domain has a much larger magnetic energy enhancement than the lower region. This effect is due to the larger compression of the magnetic field lines in this region resulting from the deflection of the clump motion towards the top of the computational domain.

In Figure 5.4 we present other spatially integrated parameters. In the upper part we show the spatially integrated momentum (in the  $y$ -direction and total) and the kinetic energy integrated over the computational domain, and normalized with respect to the initial values. The momentum in  $y$ -direction is normalized with respect to the initial momentum in  $x$ -direction. In the bottom part we show the same quantities, but integrated only over the region of the computational domain occupied by the material that does not belong to the initial clump. These spatially integrated quantities are calculated for all of the models as a function of the time, until 50000 yr of evolution.

## 5.5. Summary & conclusions

Jones, Ryu & Tregillis (1996) presented a series of simulations studying the effect of a magnetic field on the dynamics of supersonic clumps. Their results show that a magnetic field oriented perpendicular to the direction of propagation of the clump can prevent the fragmentation of the clump. We find different

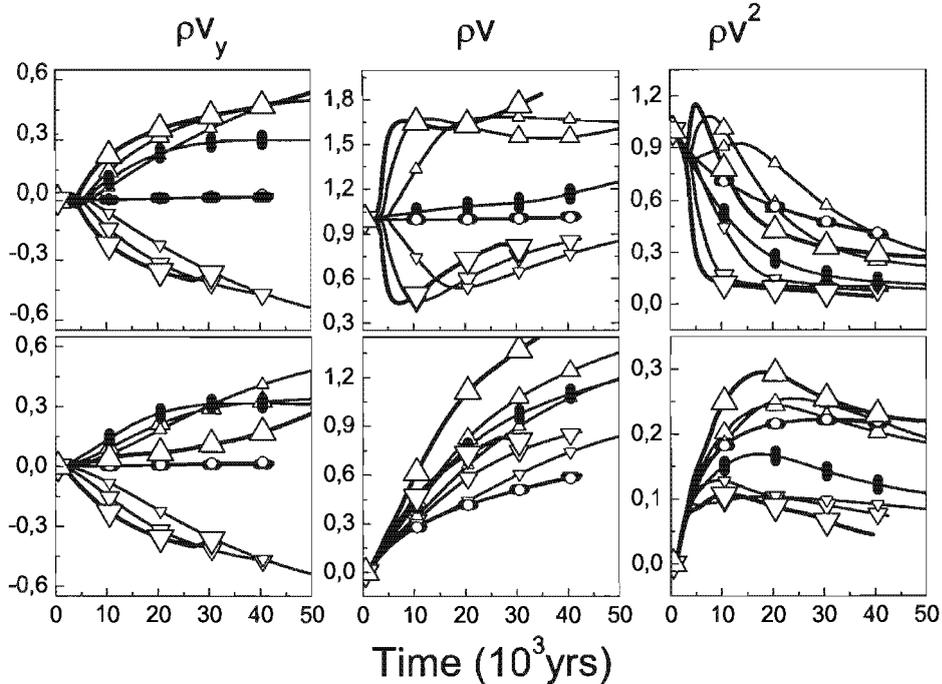


Figura 5.4: Top: temporal evolution of the  $y$ -momentum, the modulus of the total momentum and the kinetic energy integrated over the region of the computational domain occupied by the molecular cloud material, and normalized with respect to the initial integrated values. The momentum in  $y$ -direction is normalized with respect to the initial momentum in  $x$ -direction. Bottom: same parameters integrated over the region of the computational domain occupied by the material that does not belong to the initial clump. The graphs show the temporal evolution of the  $y$ -momentum, the total momentum and the kinetic energy integrated over the computational domain, and normalized with respect to the initial integrated values. The symbols representing the different models are described in the caption of Fig. 5.3.

results, namely that a perpendicularly oriented magnetic field results in a rapid slowing down of the clump, which ends up sharing its momentum with the surrounding environment.

The differences between our results and the ones of Jones, Ryu & Tregillis (1996) are due to the different magnetic field intensities and Mach numbers which have been used. In our simulations  $\beta \leq 0.25$ , so that the magnetic pressure in all cases dominates over the thermal pressure and the Mach number has a value  $M = 70$ . In the simulations of Jones, Ryu & Tregillis (1996),  $\beta \geq 1$  and  $M = 10$ .

We find that the coupling efficiency between the clump and the molecular cloud (in the transfer of energy and momentum) depends on the orientation and the intensity of the magnetic field. The component of the magnetic field perpendicular to the direction of motion has the effect of slowing down the jet and allowing the generation of Alfvén waves. The motion due to the propagation of Alfvén waves in the molecular cloud can contribute to the generation of turbulence in molecular clouds. Through the generation of Alfvén waves, the kinetic energy of the clump is transformed into magnetic energy (by the compression of the magnetic field lines), which is later transferred into kinetic energy of the molecular cloud material.

From Figs. 5.1 and 5.2, we see that in models HD and PP (with zero magnetic field and with the magnetic field parallel to the propagation direction, respectively, see Table 5.1) the clump propagates to larger distances than in the other models. This can also be seen in Fig. 5.3, which shows that in models HD and PP the maximum velocity within the clump drops faster than in the models with oblique and perpendicular magnetic fields. Therefore, in an ensemble of randomly oriented outflows within a molecular cloud, the ones directed along the magnetic field lines might produce clumps that leave the molecular cloud before slowing down considerably, while the outflows with other orientations might be producing clumps which end up slowing down and remaining trapped within the molecular cloud.

There is some evidence that the outflows have preferred orientations which are approximately parallel to the direction of the cloud magnetic field (Cohen, Rowland & Blair 1984, Strom et al. 1986, Tamura & Sato 1989). Recently, Ménard & Duchêne (2004), using a catalog of 37 classical T Tauri stars in the Taurus molecular cloud, find that the group of jets and disks associated with the T Tauri stars are randomly oriented with respect to the local magnetic field in Taurus, but that the subsample of bright and well collimated flows (used in the previous papers of Cohen, Rowland & Blair 1984, Strom et al. 1986

and Tamura & Sato 1989) show a tendency to align parallel to the magnetic field. In other words, weaker and/or shorter jets are randomly aligned with the cloud magnetic field. One possible interpretation (Ménard & Duchêne 2004) is that (citing this paper) “there is a connection between the orientation of a T Tauri star and the strength and/or the length of its jet, namely that systems aligned with the local magnetic field are more prone to drive bright, extended and well-defined jets while those largely misaligned cannot develop the proper conditions to drive extensive jet”. Another possibility is the one obtained from our present simulations: jets propagating with a substantial component of their velocity in a direction perpendicular with respect to the direction of the local magnetic field slow down and quickly lose part of their energy/momentum.

The  $y$ -momentum and the total momentum of the perturbed ambient medium increase as a function of time (see Figure 5.4), in all of the models except models HD and PP (the model with no magnetic field and with magnetic field parallel to the propagation direction, respectively, see Table 5.1), in which the ambient medium obtains almost no  $y$ -momentum. From this result, we conclude that if we have clumps moving along the magnetic field, only momentum directed along the propagation direction is transferred to the surrounding cloud. For “oblique” magnetic field geometries the perturbed cloud material has a momentum with a larger spread of directions (left and central panels of Fig. 4). Also, the fraction of the initial clump momentum which is transferred to the surrounding cloud is larger for the “oblique” magnetic field geometries. From our simulations, it is also evident that clumps propagating at substantial angles with respect to the magnetic field perturb a much larger volume of the surrounding cloud (this can be seen from a comparison of the two upper frames of Fig. 5.1 with the lower frame of Fig. 5.1 and with Fig. 5.2).

Therefore, if we have an ensemble of randomly oriented outflows within a molecular cloud, the ones directed along the magnetic field direction will perturb only a thin “pencil” of cloud material, giving it a momentum directed along the direction of the outflow. On the other hand, the outflows directed at substantial angles with respect to the magnetic field will perturb larger regions of the molecular cloud, giving it a momentum with a larger spread of directions. These outflows moving obliquely with respect to the magnetic field also transfer more momentum onto the surrounding cloud than the aligned cases.

Mac Low (2004) and Mac Low & Klessen (2004) estimated the energy injec-

tion rates for a number of different potential sources of turbulence in molecular clouds. In this work, it is argued that while jets from young stars do have the required energy, this energy is deposited only in low density gas which eventually leaves the molecular cloud. Our work shows that this is only true for outflows oriented parallel to the magnetic field, but that for large angles between the flow axes and the magnetic field the outflows do deposit their energy in material that stays within the molecular cloud.

Our present work quantifies the efficiency of momentum and energy transfer from outflows from young stars to the surrounding molecular cloud. These results could in principle be used as estimates of source terms to be included in simulations of turbulent molecular clouds (see, e. g., Vázquez-Semadeni et al. 2003, Cho & Lazarian 2003). However, our 2D models study the case of the propagation of outflows within a uniform cloud, which could differ substantially from the actual propagation of an outflow within a turbulent cloud. It is impossible to say a priori whether such a situation would lead to larger or smaller outflow/cloud coupling efficiencies than the ones which we have computed from our uniform cloud models.





## Parte II

# Modelos de la estructura vertical de discos de acreción



---

# 6

## La estructura vertical de discos de acreción:

### 6.1. Discos protoplanetarios: introducción

Los discos protoplanetarios se forman por el colapso gravitacional de una nube molecular con momento angular no nulo, y son los lugares donde se forman los sistemas planetarios.

Las características principales de estos sistemas son las siguientes:

- Están formados por una estrella central y un disco de gas y polvo, y la masa del disco es mucho menor que la masa de la estrella.
- El sistema tiene acreción hacia la estrella central (con una tasa de  $\sim 10^{-7}$  -  $10^{-9} M_{\odot}/\text{año}$ ).
- El espectro de emisión tiene típicamente un exceso en el IR y éste es interpretado como debido a la componente de emisión del disco.
- Donde el polvo está presente, éste domina la opacidad del sistema, mientras que el gas domina la masa con una proporción de  $\approx 100/1$ .

- Los discos son muy importantes en la producción de vientos y chorros (véase la discusión en el Capítulo 1).

## 6.2. Modelos de discos protoplanetarios

Los modelos existentes se basan en algunas hipótesis comunes. Respecto a la emisión en el infrarrojo, se cree que ésta provenga de la atmósfera del disco. Una fracción de la radiación de la estrella central incide sobre el disco y en parte es dispersada, dando origen a una componente en la emisión que tiene la misma distribución en frecuencia (o temperatura) que la radiación proveniente de la estrella. Otra parte de la radiación estelar es absorbida y “reprocesada” por el polvo (y en menor medida el gas) presente en el disco. El polvo absorbe la radiación estelar y la reemite en primera aproximación de manera isotrópica, con una temperatura típica igual a la temperatura local del disco en esa posición. Resulta entonces particularmente importante determinar la estructura vertical y radial de temperaturas en el disco.

Otro resultado fundamental fue encontrado por Kenyon & Hartmann (1987) quienes resolviendo la ecuación de equilibrio hidrostático vertical (entre la gravedad estelar y la presión térmica a lo largo de  $z$ ) y suponiendo un perfil vertical de temperatura isotérmico, encontraron que los discos son “flared” (es decir que el ángulo de apertura del disco crece con el radio  $a$ ).

Por otro lado Calvet et al. (1991) simplificaron el problema del transporte radiativo en dirección vertical utilizando la siguiente expresión:

$$T^4(a, z) = \frac{3}{4}T_v^4 \left( \tau_d + \frac{2}{3} \right) + T_*^4 \left( \frac{R_*}{a} \right)^2 \times \left[ \frac{\alpha}{4} \left( 2 + \frac{3\alpha}{q} \right) + \frac{1}{4} \left( q - \frac{3\alpha^2}{q} \right) e^{-\tau_*/\alpha} \right] \quad (6.1)$$

donde  $\pi/2 - \alpha$  es el ángulo entre la perpendicular a la superficie del disco y la dirección radial.

$$q(T) = \frac{\tau_P(T_*)}{\tau_P(T)}, \quad T_v = \left( \frac{3GM_*}{4\pi a^3} \right)^{1/4}. \quad (6.2)$$

En esta última expresión  $T_v$  es la temperatura viscosa, y  $\tau_P$  es el espesor óptico calculado suponiendo una opacidad igual a la opacidad promedio de Planck,

definida como

$$\tau_P(T) = \int_z^\infty k_P(T)\rho(z)dz. \quad (6.3)$$

La ecuación (6.1) muestra las posibles fuentes de calentamiento de un disco protoplanetario: el primer término corresponde al calentamiento debido a la viscosidad. Este término crece con  $\tau$  ya que hacia el centro del disco la densidad es mayor y los procesos viscosos transfieren más calor al polvo. El segundo término en la ecuación es debido al calentamiento por la radiación proveniente desde la estrella central y puede ser entendido de manera sencilla suponiendo que  $\alpha \ll 1$  y  $q > 1$ . Los términos de segundo orden en  $\alpha$  son despreciables, y cerca de la superficie del disco  $\tau_* \ll 1$ , por lo que domina el término  $q/4e^{-\tau_*/\alpha} \gtrsim 1$ . Cerca del plano ( $z = 0$ )  $\tau_* \gg 1$  y domina el término  $\alpha/2 \ll 1$ .

Por estas razones en el modelo de Calvet et al. (2001) el disco tiene una estructura con dos temperaturas, con una temperatura mayor cerca de la superficie del disco respecto a la zona cerca del plano central. Por otro lado, el término viscoso contribuye incrementando la temperatura del disco cerca de  $z = 0$ .

D'Alessio et al. (1998) también resolvieron la estructura vertical del disco integrando numéricamente las ecuaciones de equilibrio vertical (como en el caso de Calvet et al. 1991), y dando un tratamiento simplificado de la ecuación del transporte radiativo. D'Alessio et al (1998) consideraron como posibles fuentes de calentamiento la disipación viscosa, la radiación estelar, y la ionización por partículas energéticas. Para el transporte de energía consideran el transporte radiativo (con un tratamiento similar al de Calvet et al. 1991), el transporte por flujo turbulento y la convección. Estos cálculos mucho más complejos mostraron resultados similares a los de Calvet et al. (1991) para la estructura de temperaturas vertical. Un ejemplo de los resultados de D'Alessio et al. (1998) es presentado en Figura 6.1.

Más recientemente se empezó a introducir modelos que resuelven el problema del transporte radiativo en dos dimensiones (por ej. Dullemond 2002). Por otro lado, Chiang & Goldreich (1997) introdujeron modelos analíticos de discos basados en un tratamiento simplificado de las ecuaciones de transporte radiativo y de equilibrio hidrostático.

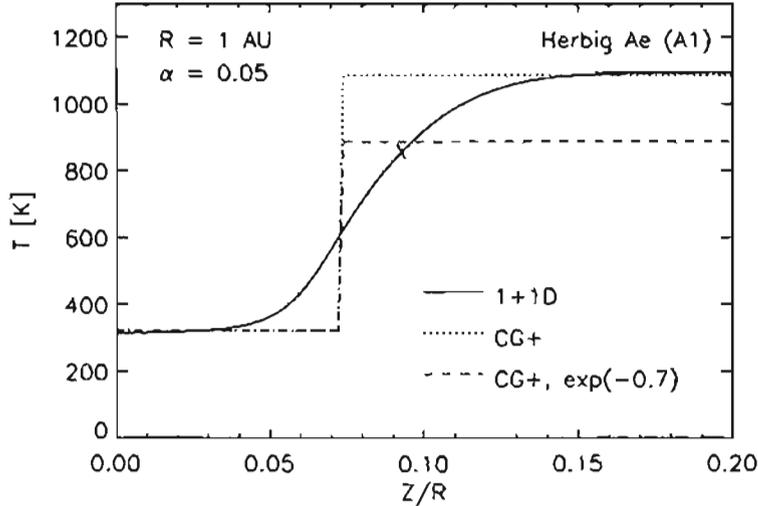


Figura 6.1: Distribución de temperatura vertical de un disco irradiado alrededor de una estrella Herbig Ae para distintos modelos (tomado de Dullemond & Natta 2003): la línea continua es para un modelo “estilo” D’Alessio et al. (1998). Los otros casos representan la solución para el modelo de Chiang & Goldreich de dos temperaturas (véase la sección 6.2.1).

### 6.2.1. El modelo de dos temperaturas de Chiang y Goldreich

Chiang y Goldreich (1997) calcularon el espectro de emisión de discos de acreción considerando un sencillo modelo en el que la transición entre las dos regiones con temperaturas distintas es una discontinuidad (Figura 6.1). La emisión de la radiación reprocesada por el disco (no considerando la dispersión de la radiación incidente desde la estrella central) es obtenida con la expresión:

$$L_\nu \propto \nu \int_{a_i}^{a_e} a B_\nu(T_e) da \quad (6.4)$$

donde los límites se encuentran suponiendo que el radio interno es el radio en el que el polvo sublima (correspondiente a  $T \approx 1500$  K) y el radio externo es el punto en el que la emisión se vuelve despreciable.

Las dos temperaturas tienen valores similares a los casos límite obtenidos de la ley de Calvet et al. (1991) descrita en el párrafo precedente. El espectro obtenido con este sencillo modelo permite reproducir exitosamente los datos

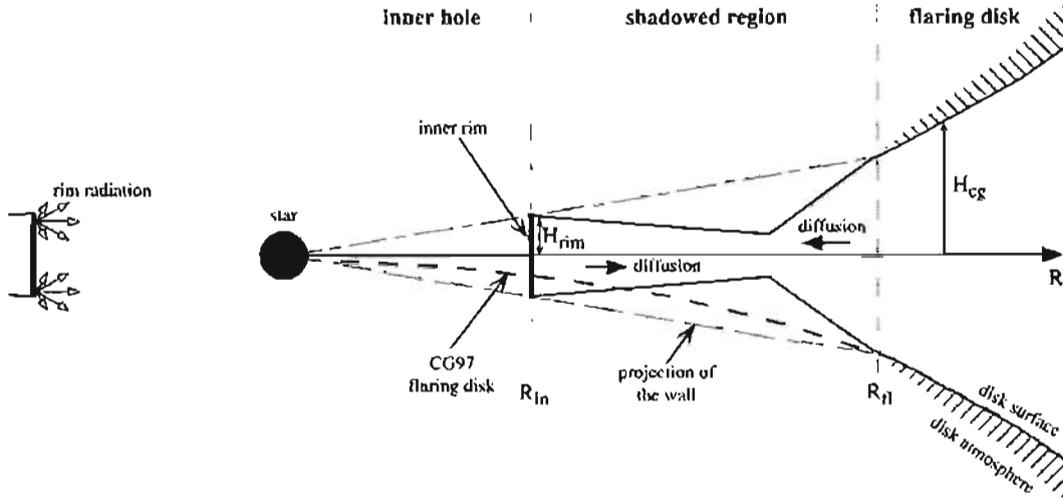


Figura 6.2: Modelo de Dullemond, Dominik & Natta (2001): la estrella central irradia el disco ensanchando la región correspondiente a  $T = 1500$  K, en donde el polvo se sublima.

observacionales, excepto que en la región cerca de  $\lambda \sim 3\mu m$ , donde la emisión predicha utilizando los modelos (incluyendo los modelos que resuelven numéricamente las ecuaciones) es menor que la emisión observada (a esto se le conoce como el “bump” de  $3\mu m$ ).

### 6.2.2. La hipótesis de la “pared” de polvo

Natta et al. (2001) y Dullemond, Dominik, & Natta (2001, DDN) construyeron un modelo en el que el “bump” es debido a la emisión desde la zona en donde el polvo sublima. Una representación esquemática de este modelo es mostrada en la Figura 6.2. Al moverse radialmente hacia la estrella central la temperatura crece hasta que, en la zona en donde la temperatura sube arriba de los 1500 K, el polvo se sublima. De ahí hacia adentro (Figura 6.2), el disco está dominado por gas por lo que, según el razonamiento de DDN, el disco se hace ópticamente delgado desde el centro hasta la zona de sublimación del polvo. La radiación estelar incide verticalmente en esta región, lo que produce un sobrecalentamiento con un consecuente incremento de presión y un ensanchamiento (hacia arriba) de esta región, con la creación de la que podría ser considerada una verdadera “pared” de polvo. Esta región extendida emite fuertemente en las frecuencias correspondientes a una temperatura de 1500 K, explicando el

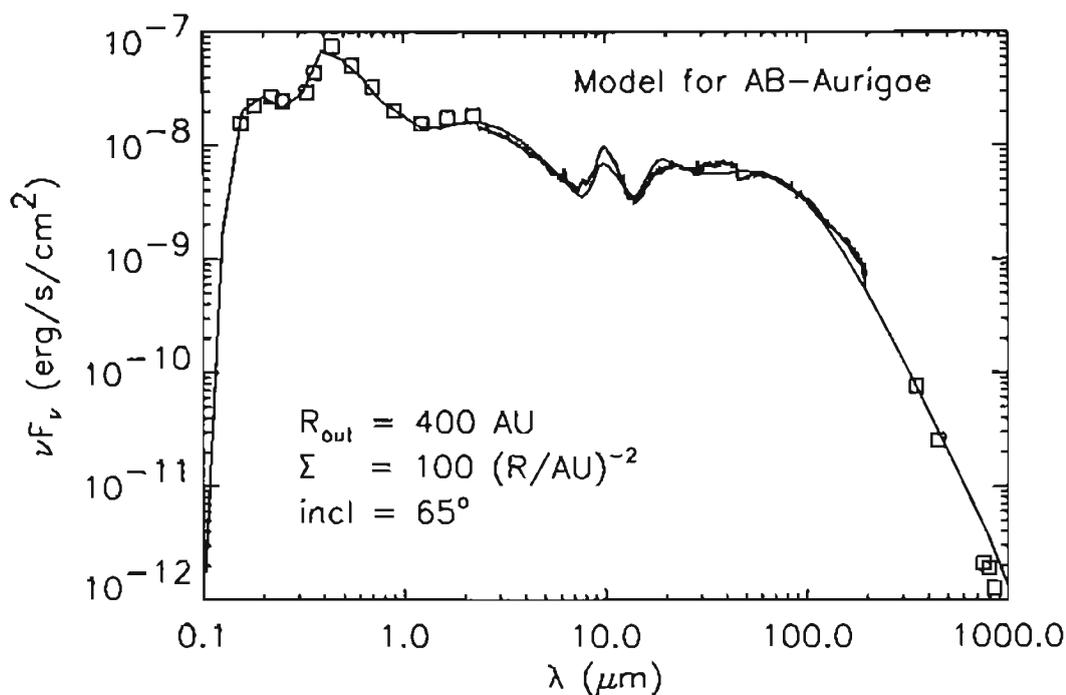


Figura 6.3: Comparación entre el espectro de un sistema disco - estrella observado y calculado (tomado de DDN). La línea continua representa el mejor ajuste a los datos observacionales (los puntos en la Figura).

bump del espectro presente a  $3\mu\text{m}$ . Como se deduce de la Figura 6.2 se crea una región de sombra en donde la radiación proveniente de la estrella no alcanza a llegar. En esta región la fuente de calentamiento principal es la radiación que se transporta a través de la región de sublimación del polvo y alcanza la región de sombra. El hecho de si el disco logra salir en algún punto de la región de sombra o no, es un problema que se necesita estudiar integrando numéricamente las ecuaciones del transporte radiativo 2D.

El espectro obtenido con este modelo produce un ajuste muy bueno con los resultados observacionales (un ejemplo es mostrado en la Figura 6.3).

El modelo de la pared de polvo tuvo mucho éxito en la literatura, y en la actualidad es utilizado substancialmente en cualquier estudio observacional de espectros de objetos jóvenes. Las limitaciones y los problemas de este modelo no han sido prácticamente considerados en la literatura. Aquí reportamos

algunos de ellos:

- Un problema muy grande de este modelo es que la pared de polvo no está en equilibrio. Así como la pared se ensancha verticalmente debido al calentamiento directo de la radiación, debería también ensancharse radialmente por el mismo fenómeno. DDN proponen que dos mecanismos puedan mantener el equilibrio: la presencia del gas en la región interna puede equilibrar la presión de la pared, así como una velocidad de rotación super-kepleriana. Este efecto no ha sido estudiado en detalle en la literatura hasta este momento.
- Otro defecto del modelo es que considera que la sublimación del polvo ocurre exactamente a 1500 K. En realidad, el punto de sublimación está dado en función de la temperatura pero también de la presión. Isella & Natta (2005) estudiaron este efecto mostrando que la pared de polvo en realidad es curvada, y que tomando en cuenta este efecto la emisión de la pared depende mucho menos del ángulo de inclinación del disco respecto a la línea de visión. Isella & Natta consideraron un disco isotérmico en dirección vertical. La presencia de una estructura de dos temperaturas cambia el resultado.
- Otro punto muy importante es que la región de sublimación es extendida radialmente. Duschl et al. (1996) hicieron un estudio de los procesos de destrucción del polvo en discos de acreción protoplanetarios, y encontraron que para pasar de la parte donde existe sólo polvo a donde el polvo está ausente es necesario considerar una región de transición muy grande en el disco, correspondiente a una variación en el radio de un factor de 8.
- En fin, el último punto importante es que DDN supusieron que la parte interna del disco es ópticamente delgada. Esta hipótesis es seguramente muy incierta. De hecho, tablas de opacidad calculadas recientemente (Ferguson et al. 2005) mostraron que la opacidad en regiones cercanas a la sublimación del polvo se debe incrementar por lo menos un orden de magnitud. Además, el hecho de que la parte interna sea ópticamente delgada es muy controversial y depende del tipo de composición química elegida para el polvo. Suponiendo por ejemplo que el polvo está compuesto por silicatos y grafitos (que subliman en condiciones distintas), deberían existir dos paredes de polvo, cada una por distintas especies que se subliman a distintas temperaturas.



---

# 7

## Vertical structure of protoplanetary disks: beyond the two-temperature approximation

*in preparation, R.R. Rafikov (CITA, Canada) & F. De Colle*

### 7.1. Abstract

We lay down a novel analytical approach for describing the vertical structure of externally irradiated circumstellar disks. It is based on the approximate solution of a local vertical radiation transfer which is characterized by a smooth temperature transition between the upper layer of superheated dust directly exposed to stellar radiation and the inner, fully shielded part of the disk. Assuming that stellar radiation is intercepted high above the disk midplane we provide a simple approximate method of solving for the disk structure in hydrostatic equilibrium. As a result, we come up with simple analytical prescriptions for the position of the disk surface and the vertical temperature and density distributions. For illustrative purposes we neglect the effects of radiation scattering and viscous dissipation in the disk interior. Our results compare favorably with disk structure calculations based on a numerical solution of a

hydrostatic equilibrium coupled with detailed frequency- and angle-dependent descriptions of the vertical radiation transfer in the disk. Based on our solution, we come up with a simple and efficient way of calculating a disk spectral energy distribution which fits much better the results of detailed numerical calculations at short wavelengths than the conventional two-temperature approximation.

KEYWORDS: *accretion, accretion disks – circumstellar matter – stars: pre-main sequence*

## 7.2. Disk surface density

In our study we assume the disk to be geometrically thin and this is always true for the inner parts of circumstellar disks. The disk surface density is assumed to vary as

$$\Sigma_0(a) = \Sigma_\star \left( \frac{R_\star}{a} \right)^\delta \quad (7.1)$$

where  $\Sigma_\star \equiv \Sigma_0(R_\star)$ . In the case of viscous disk both  $\Sigma_\star$  and  $\delta$  are set by the mass accretion rate  $\dot{M}$  and by the disk viscosity. In the case of inviscid disks passively irradiated by their central stars we will use some reasonable assumptions about the values of these constants.

## 7.3. Radiation transfer

A disk passively absorbs radiation coming from the central star of finite radius  $R_\star$  emitted with an effective temperature  $T_\star$ . Because of the geometric thinness of the disk we will only be interested in the transfer of radiation in the vertical direction at every point of the disk, thus neglecting the radial flux of radiation. Using this approximation also requires the surface of the disk to have a small slope with respect to the disk midplane, which we will always be checking in our study.

To describe the transfer of radiation within the disk we introduce several optical depths. First, for each component of locally present radiation with blackbody temperature  $T$  there is an optical depth in the direction perpendicular to the

disk surface

$$\tau(T, z) \approx \int_z^\infty \kappa_P(T(z)) \rho(z) dz \quad (7.2)$$

where we took into account the fact that the normal to the surface of a geometrically thin disk is almost vertical. Here  $\rho$  is the gas density and  $k_P(T)$  is the Planck mean opacity for blackbody radiation of temperature  $T$  (which can be different from the local gas temperature). This temperature is different for the stellar radiation and for the reprocessed radiation of the disk because of their different characteristic wavelengths.

Second, there is also an optical depth  $\tau_*(z)$  for the stellar emission with blackbody temperature  $T_*$  propagating *radially* almost along the disk surface. We adopt the conventional approach according to which  $\tau_*$  can be approximated as

$$\tau_*(z) \approx \alpha^{-1} \int_z^\infty \kappa_P(T_*) \rho(z) dz \approx \alpha^{-1} \tau(T_*, z) \quad (7.3)$$

where  $\pi/2 - \alpha$  is the angle between the normal to the disk surface and the radial direction. In the thin disk approximation

$$\alpha \approx \eta \frac{R_*}{a} + a \frac{d}{da} \left( \frac{H_1}{a} \right) \quad (7.4)$$

where  $\eta \approx 0.4$  is a constant. Because of the slanted propagation of the stellar emission with respect to the disk surface ( $\alpha \ll 1$ ) one expects  $\tau_*(T, z) \gg \tau(T, z)$ . At each semimajor axis  $a$  the disk surface  $H_1$  is defined as the height at which  $\tau_*(a, H_1) = 1$ .

In this study we assume that dust grains are the major contributor to the opacity. The opacity  $k_\nu$  is calculated for  $0.1 \mu\text{m}$  silicate grains (Draine & Lee 1984) with no scattering (the same as that used by Dullemond & Natta 2003 to facilitate subsequent comparisons, see §7.5). Its dependence on the frequency of the radiation  $\nu$  and the Planck opacity  $k_P(T)$  calculated based on this  $k_\nu$  are shown in Figure 7.1.

At low temperatures ( $T \lesssim 100$  K) the Planck opacity behaves as  $k_P \propto T^2$ . Motivated by this, in deriving our analytical results we employ the “local power law opacity” approximation in the form

$$k_P(T) = k_0(a) T^\beta(a), \quad (7.5)$$

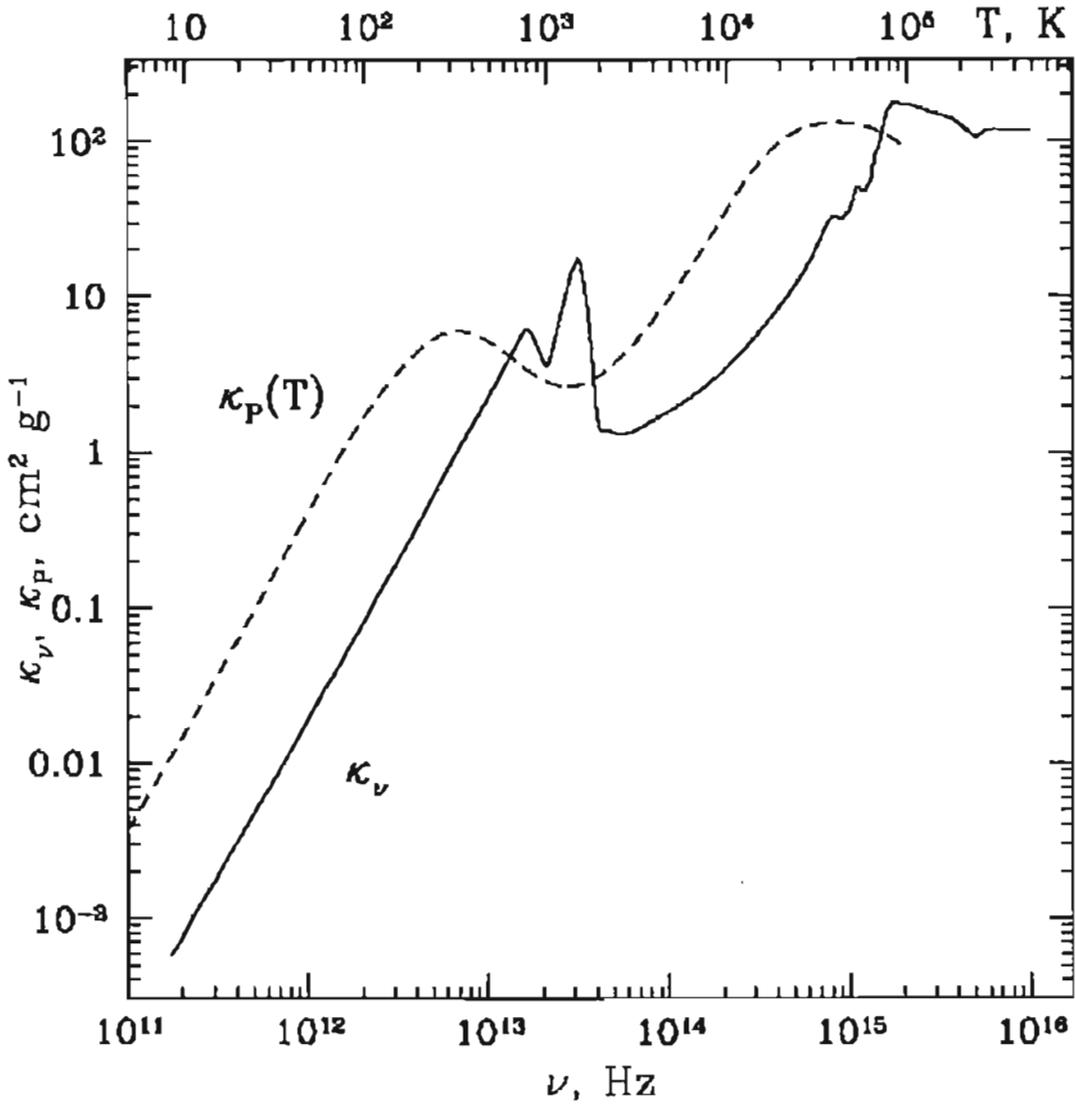


Figure 7.1: Opacity  $\kappa_\nu$  (solid curve) adopted in this paper as a function of frequency  $\nu$  (abscissa) and Planck opacity  $\kappa_P$  (dashed curve) based on this  $\kappa_\nu$  as a function of temperature  $T = h\nu/k$  (upper layer).

which is defined as the best fit power law approximation to the actual behaviour of  $k_P(T)$  in the temperature range typical for a given distance from the star  $a$ . The parameters  $k_0$  and  $\beta$  are thus functions of  $a$ . Our numerical calculations employ the full opacity shown in Figure 7.1 without simplifications.

Calvet et al. (1991) have calculated the temperature structure of accretion disks irradiated from the outside by the central source and heated from the inside by viscous dissipation. Their result assumes that the opacity of the disk material to its own radiation is independent of temperature and that the disk is optically thick not only to the incoming stellar flux but also to the disk's own radiation. In this study we neglect the effects of radiation scattering and viscous heating which allows us to simplify the Calvet et al. solution. At the same time, the assumption of a geometrically thin disk (well justified in our case) allows us to generalize their solution for an *arbitrary* dependence of  $k_P$  on  $T$ . Also, following Dullemond et al. (2001), we introduce some corrections which are meant to make the radiation transfer solution applicable even when the disk is transparent to its own radiation. As a result, one finds the following implicit solution for  $T$  as a function of  $\tau_*$ :

$$T(z)^4 = T_*^4 \left( \frac{R_*}{a} \right)^2 \left[ \frac{\alpha \psi_{ex}}{2 \psi_{irr}} + \frac{q(T)}{4} e^{-\tau_*(z)} \right] \quad (7.6)$$

Here  $q(T) = k_P(T_*)/k_P(T)$  is a ratio of opacities at temperatures  $T_*$  and  $T$ ,  $\alpha$  is given by (7.4) and  $\tau_*(z)$  by (7.3). The factors  $\psi_{ex}$  and  $\psi_{irr}$  account for the possibility of the disk being optically thin to radiation reprocessed in the outer layer of the disk and to radiation from its interior, respectively. We give details of their calculation in §7.8. In this work we use  $\psi_{ex}$  and  $\psi_{irr}$  given by equations (7.34) and (7.37). The optically thick solution of Calvet et al. (1991) assumes  $\psi_{ex} = \psi_{irr} = 1$ .

This simple solution of the radiation transfer suggests that the vertical temperature structure of the disk can be considered in a three-zone approximation in which the vertical extent of the disk is naturally divided into three distinct layers:

- *Directly exposed layer* at  $\tau_* \lesssim 1$  and  $z \gtrsim H_1$  - the lower boundary of this region is to be determined later in §7.3. Here

$$T \approx T_{ex}(a) = T_* \left[ \frac{q(T_{ex})}{4} \right]^{1/4} \left( \frac{R_*}{a} \right)^{1/2} =$$

$$= T_{\star} \left( \frac{R_{\star}}{2a} \right)^{2/(4+\beta)} \quad (7.7)$$

where in the second line we have evaluated  $T_{ex}$  for  $k_P(T)$  given by equation (7.5). One also obtains from (7.7) that  $q(T_{ex}) = (2a/R_{\star})^{2\beta/(4+\beta)}$ . Equation (7.7) is strictly valid only when  $\tau_{\star} \ll 1$ . The disk material in this layer receives virtually unattenuated and highly anisotropic stellar flux with blackbody temperature  $T_{\star}$  which is reradiated isotropically at a temperature  $T_{ex}$ . One half of the reradiated flux escapes while the second half illuminates the interior of the disk. Note that the correction factor  $\psi_{ex}$  is determined through  $T_{ex}$  according to equation (7.37).

- *Fully shielded layer* at  $\tau_{\star} \gtrsim \tau_c \equiv \ln(q_{irr}/\alpha)$  and  $z \lesssim H_0$  with

$$T \approx T_{irr}(a) = T_{\star} \left( \frac{\alpha \psi_{ex}}{2 \psi_{irr}} \right)^{1/4} \left( \frac{R_{\star}}{a} \right)^{1/2} \quad (7.8)$$

where  $q_{irr} = k_P(T_{\star})/k_P(T_{irr})$  and  $H_0$  is the upper boundary of this layer to be determined in §7.3. The critical value of the optical depth  $\tau_c$  is set by the condition that the flux of reprocessed radiation coming from the upper disk layers is comparable to the direct flux of the stellar radiation attenuated in the upper layers of the disk. Within the fully shielded layer the disk material receives only the radiation reprocessed in the directly exposed layer. Equation (7.8) results from balancing the incoming flux with the energy loss from unit surface  $\sigma T_{irr}^4$ . Factor  $\psi_{irr}$  accounting for the possibility of disk being optically thin to radiation coming from its own interior is determined by  $T_{irr}$ , see equation (7.34).

- *Partly shielded (or transition) layer* at  $1 \lesssim \tau_{\star} \lesssim \tau_c$  and  $H_0 \lesssim z \lesssim H_1$ , providing a smooth transition between the directly exposed and the fully shielded layers. Here

$$\begin{aligned} T &\approx T_{\star} \left( \frac{R_{\star}}{a} \right)^{1/2} \left[ \frac{q(T)}{4} e^{-\tau_{\star}(z)} \right]^{1/4} = \\ &= T_{ex}(a) e^{-\tau_{\star}/(4+\beta)} \end{aligned} \quad (7.9)$$

In this layer the gas temperature is still mainly determined by the direct absorption of stellar radiation, but its incoming flux is now strongly attenuated by absorption in the uppermost layers (unlike the situation in the directly exposed layer).

Equation (7.6) represents an implicit equation for  $T(\tau_*, a)$  because  $q$  is a function of  $T$ . However, using our results (7.7)-(7.9) for a power-law scaling of the opacity we can approximately rewrite the temperature dependence in a more convenient explicit form as:

$$T^4(z) = T_{irr}^4 + T_{ex}^4 e^{-4\tau_*(z)/(4+\beta)}. \quad (7.10)$$

It is important that both in the directly exposed and in the fully shielded layers the temperature is almost independent of the optical depth. As a result, these layers are vertically isothermal with temperatures  $T_{ex}$  and  $T_{irr}$  respectively which considerably simplifies the treatment of their structure.

## 7.4. Hydrostatic equilibrium

The hydrostatic equilibrium in the  $z$ -direction is described by the equation

$$\frac{dP}{dz} = -\Omega^2 z \rho \quad (7.11)$$

where  $P$  is the gas pressure and  $\Omega = (GM_*/a^3)^{1/2}$  is the disk angular frequency. In the isothermal, fully shielded layer this equation yields

$$\frac{\rho(a, z)}{\rho_0(a)} = \frac{P(a, z)}{P_0(a)} = \exp\left(-\frac{z^2}{2h_{irr}^2}\right), \quad z \lesssim H_0 \quad (7.12)$$

where  $h_{irr} = \Omega^{-1}(kT_{irr}/\mu)^{1/2}$  is the isothermal scale height of the disk in the fully shielded region, and  $\rho_0$  and  $P_0$  are the midplane values of the gas density and pressure. Because of the exponential decay of  $\rho$  with height most of the surface density  $\Sigma_0(a)$  of the disk is contained within the fully shielded region which, according to (7.12), implies that

$$\rho_0(a) \approx (2\pi)^{-1/2} \frac{\Sigma_0(a)}{h_{irr}} \quad (7.13)$$

The partly shielded region and the lower part of the directly exposed region are not isothermal which significantly complicates its treatment. However, we can still obtain many useful approximate results by noticing that the gas density is increasing very rapidly with decreasing  $z$  - in fact exponentially in the vertically isothermal parts of the disk. Then, in considering the hydrostatic equilibrium we can neglect the variation of  $z$  compared to the change of  $\rho$  in the right-hand side of the equation (7.11). Since the region of interest is centered at

the boundary between the fully exposed and the partly shielded layers we will choose  $z \approx H_1$  and perform the integration over  $z$  in equation (7.11). We find that  $P(z) \approx \Omega^2 H \Sigma(z)$ , where  $\Sigma(z) = \int_z^\infty \rho(z') dz'$  is the surface density of a slab of disk extending from  $z$  to infinity. By definition,  $\Sigma(z) = \tau(T_*, z)/k(T_*) \approx \alpha \tau_*(z)/k(T_*)$ . As a result, we obtain the following relation between  $P$  and  $\tau_*(z)$ :

$$P(\tau_*) \approx \alpha \frac{\Omega^2 H_1}{k(T_*)} \tau_*. \quad (7.14)$$

This relation is valid in those parts of all three disk layers where  $z \approx H_1$ . It certainly holds throughout the whole partly shielded region which extends from  $\tau_*(T_*) \approx 1$  to  $\tau_* \approx \tau_c$ . As a result, the gas pressure at the lower boundary of this layer is higher than the pressure at its upper boundary by a factor  $\tau_c \gtrsim 1$ . This confirms our assumption of rapid variation of  $\rho$  and  $P$  with  $z$ .

To understand the global vertical structure of the disk, we substitute our results (7.10) and (7.14) into equation (7.11). Under the assumption of “local power law opacity” (7.5) one finds

$$\frac{1}{\tau_*} \frac{d\tau_*}{dz} \approx -z \frac{\Omega^2 \mu}{k} [T_{irr}^4 + T_{ex}^4 e^{-4\tau_*/(4+\beta)}]^{-1/4}. \quad (7.15)$$

This equation can be integrated to yield

$$\frac{z^2}{2h_{irr}^2} = \ln \left[ \frac{P_0 k(T_*)}{\alpha \Omega^2 H_1} \right] - \int^{\tau_*} \frac{dx}{x} \left[ 1 + \frac{T_{ex}^4}{T_{irr}^4} e^{-4x/(4+\beta)} \right]^{1/4}. \quad (7.16)$$

The first term on the right-hand side of this equation represents an integration constant. We fix it using the fact that deep in the fully shielded region, for  $\tau_* \gg \tau_c$  (where we can neglect the exponential term in the integral and easily integrate the right-hand side of equation 7.16), the behaviour of  $\tau_*(z)$  must be given by equations (7.12) and (7.14). This procedure also yields

$$H_0 = \lambda h_{irr} \quad \lambda = (2 \ln \Lambda)^{1/2} \quad \Lambda = \frac{P_0 k(T_*)}{\alpha \tau_c \Omega^2 H_0} = \frac{\Sigma_0 k(T_*)}{\sqrt{2\pi} \alpha \tau_c \lambda} \quad (7.17)$$

where our use of  $H_0$  instead of  $H_1$  in the definition of  $\Lambda$  improves the accuracy of (7.17). Thus, the location of the upper boundary of the fully shielded layer

is determined through the disk and stellar parameters.

Above the fully shielded layer we can split the integral in equation (7.16) into two parts:  $\int^{\tau_c} + \int_{\tau_c}^{\tau_\star}$ . As before, in the first one we neglect the exponential term in the brackets under the integral, while in the second integral we neglect the first term in brackets. As a result, one finds

$$z^2 = H_0^2 - 2H_{ex}^2 \left[ \text{Ei} \left( -\frac{\tau_\star}{4 + \beta} \right) - \text{Ei} \left( -\frac{\tau_c}{4 + \beta} \right) \right] \quad z \gtrsim H_0 \quad (7.18)$$

where  $\text{Ei}(x)$  is an exponential integral defined as (Gradshteyn & Ryzhik 2000)

$$\text{Ei}(x) = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (7.19)$$

for  $x > 0$ .

Equation (7.18) also determines the position of the disk surface:

$$H_1^2 \approx H_0^2 + \chi^2 h_{ex}^2 \quad \chi^2 = -2 \left[ \text{Ei} \left( -\frac{1}{4 + \beta} \right) - \text{Ei} \left( -\frac{\tau_c}{4 + \beta} \right) \right] > 0 \quad (7.20)$$

where  $\chi \approx 1$  can be considered constant for all practical purposes - although  $\tau_c \gg 1$  depends on  $a$  the corresponding term in (7.20) is very small compared to the leading term  $\text{Ei}(-1/(4 + \beta))$ . Equations (7.17) and (7.20), determine the locations of the boundaries of the different disk layers through the disk and stellar parameters. In particular, substituting these results into Equation (7.4) one should be able to determine  $T_{irr}(a)$  and other radial dependencies, which we do in §7.5.

Asymptotically (Gradshteyn & Ryzhik 2000),

$$\text{Ei}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x} [1 + O(x^{-1})] & \text{if } x \gg 1 \\ \text{C} + \ln(x) + O(x) & \text{if } x \ll 1 \end{cases}$$

where  $\text{C} = 0.5772$  is the Euler constant. These limiting forms suggest that within the partly shielded region<sup>1</sup>

$$z^2 = H_0^2 + 2(4 + \beta) h_{ex}^2 \frac{e^{-\tau_\star/(4+\beta)}}{\tau_\star} \quad H_0 \lesssim z \lesssim H_1 \quad (7.21)$$

<sup>1</sup>This form assumes that  $\tau_\star \ll \tau_c$  which may be a questionable assumption in real disks.

while within the fully exposed region (7.18) and (??) result in the following behaviour typical for isothermal layers:

$$\tau_*(z) \approx (4 + \beta)e^{-C} \exp\left(-\frac{z^2 - H_0^2}{2h_{ex}^2}\right), \quad (7.22)$$

$$P(z) \approx P_0(z) \frac{(4 + \beta)e^{-C}}{\tau_c} \exp\left(-\frac{z^2 - H_0^2}{2h_{ex}^2} - \frac{H_0^2}{2h_{irr}^2}\right), \quad H_1 \lesssim z. \quad (7.23)$$

Comparing the equation (7.12) with (7.23) one can see that within the partly exposed region (between  $H_0$  and  $H_1$ ) the pressure drops by a factor  $\sim \tau_c \gg 1$  - a fact that can be deduced directly from the equation (7.14). It is also obvious from (7.21) that in the partly exposed region the pressure increases with depth faster than it would in the vertically isothermal disk.

Equations (7.17)-(7.23) fully determine the vertical density and pressure structure in the disk.

## 7.5. Radial properties of disks

A complete description of irradiated disks without dust sublimation consists of specifying the behaviour of  $T_{irr}$ ,  $P_0$ ,  $\rho_0$ , and  $H$  as functions of  $a$ . Scaling of these variables with  $a$  depend sensitively<sup>2</sup> on the way in which the central star illuminates the disk. Equation (7.4) demonstrates that there are two regimes of irradiation: “lamp-post” illumination when

$$\alpha \approx \eta \frac{R_*}{a} \quad \text{and} \quad R_* \gtrsim H \quad (7.24)$$

and “point-source” illumination when

$$\alpha \approx a \frac{d}{da} \left( \frac{H}{a} \right) \quad \text{and} \quad R_* \lesssim H. \quad (7.25)$$

In the first case the finite size of the source determines the geometry of the illumination, while in the second case it is the self-adjustment of the disk surface that sets its illumination angle. Apparently, in the latter case the disk must be *flared*, i.e.  $d(H/a)/da > 0$ .

---

<sup>2</sup>This is not the case for the behaviour  $T_{ex}(a)$  which is fully determined by equation 7.7 in both dusty and dust-free cases.

Section §7.9 contains analytical formulae for the behaviour of  $T_{irr}(a)$ ,  $h_{irr}(a)$ , etc. in both illumination regimes. Based on them we conclude that  $H \propto a^{9/8}$  for lamp-post illumination and  $H \propto a^{9/7}$  for point-like illumination, i.e. in both cases the disk surface is flared. The only assumptions that went into deriving these analytical results are that  $H_0 \gtrsim \chi h_{ex}$ , or that

$$\lambda \gtrsim (T_{ex}/T_{irr})^{1/2} \quad (7.26)$$

and that  $\lambda$  is only a very weak function of  $a$ . Both of these approximations are likely to be valid in the inner, dense regions of circumstellar disks.

In a more general case of  $H_1$  given by (7.20) one can find radial scaling of various disk quantities by simultaneously solving (7.4), (7.8), and (7.20) numerically.

## 7.6. Spectral energy distribution

The spectral energy distribution (SED) is a very important observable property of a circumstellar disk. For the sake of simplicity, it is very often calculated in the two-temperature approximation (Chiang & Goldreich 1997, CG97) which facilitates the analysis of large datasets of protoplanetary disk spectra (e. g. van Boekel et al. 2005). Here we describe a more accurate but still rather simple method of SED calculation based on the solution (7.6) for the gas temperature as a function of optical depth.

We assume that the SED is formed by two distinct thermal components of the disk: one is the fully shielded part of the disk characterized by a single temperature  $T_{irr}$  and the other is a combination of the partly shielded and the fully exposed layers of the disk, where the temperature varies smoothly between  $T_{irr}$  and  $T_{ex}$ . The contribution of the former to the SED per unit surface area of the disk  $dF_\nu^i(a)/dS$  is given simply by (Dullemond et al. 2001)

$$\frac{dF_\nu^i(a)}{dS} = 2\pi \cos i \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Sigma(a)k_\nu}{\cos i}\right) \right\} B_\nu[T_{irr}(a)] \quad (7.27)$$

where  $i$  is the inclination at which the disk is observed (we assume its geometric thickness to be so small that all disk surface elements can be characterized by a single value of  $i$ ),  $B_\nu(T)$  is a Planck function and the factor in parentheses is

meant to account for the possibility that the disk is optically thin at a given wavelength.

The emission from the upper layers of the disk is a sum of radiation coming from the outer layers where the temperature can be approximated as

$$T^d k_P(T) = T_\star^d \left( \frac{R_\star}{2a} \right)^2 k_P(T_\star) e^{-\tau} \quad (7.28)$$

with different temperatures in the optically thin regime:

$$\frac{dF_\nu^0(a)}{dS} = 2\pi \left\{ 1 + \exp \left( -\frac{\Sigma(a)k_\nu}{\cos i} \right) \right\} \int_0^{\tau_{\nu, \max}} B_\nu[T(a, \tau_\star)] d\tau_\nu \quad (7.29)$$

where  $\tau_\nu = \alpha \tau_\star k_\nu / k_P(T_\star)$  is an optical depth at a given wavelength,  $T(a, \tau_\star)$  is given by (7.28) and the factor in parentheses accounts for the contribution of the other surface of the disk when the disk is optically thin at a given wavelength. Here  $\tau_{\nu, \max} \ll 1$  is the value of  $\tau_\nu$  at the boundary between the fully and partly shielded layers.

In the case of an arbitrary dependence  $k_P(T)$  the combination of equations (7.28) and (7.29) seems to imply that to calculate the contribution of the outer layers to the SED one first needs to compute  $T(\tau_\star)$  by solving the implicit equation (7.28), and then to use the resulting temperature distribution for integrating (7.29). In reality, however, one can easily avoid the first step to calculate the SED. Indeed, first of all one can write  $\int_0^{\tau_{\nu, \max}} d\tau_\nu = \alpha k_\nu / k_P(T_\star) \int_0^{\tau_c} d\tau_\star$  and then extend the upper integration limit to infinity as  $\tau_c \gg 1$ . After that, using equation (7.28) one can switch from integrating over  $\tau_\star$  to integrating over  $y = h\nu/kT$ , extending from  $y_0 = h\nu/kT_{e\star}$  to infinity. As a result, one finally finds

$$\frac{dF_\nu^0(a)}{dS} = 2\pi \left\{ 1 + \exp \left( -\frac{\Sigma(a)k_\nu}{\cos i} \right) \right\} A_\nu(T_{e\star}), \quad (7.30)$$

where

$$\begin{aligned} A_\nu(T_{e\star}) &= \alpha \frac{k_\nu}{k_P(T_\star)} \int_0^{T_{e\star}} \frac{dT}{T} B_\nu(T) \psi(T) = \\ &= \alpha \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{k_\nu}{k_P(T_\star)} \int_{y_0}^\infty \frac{dy}{y} \frac{\psi(h\nu/ky)}{e^y - 1} \end{aligned} \quad (7.31)$$

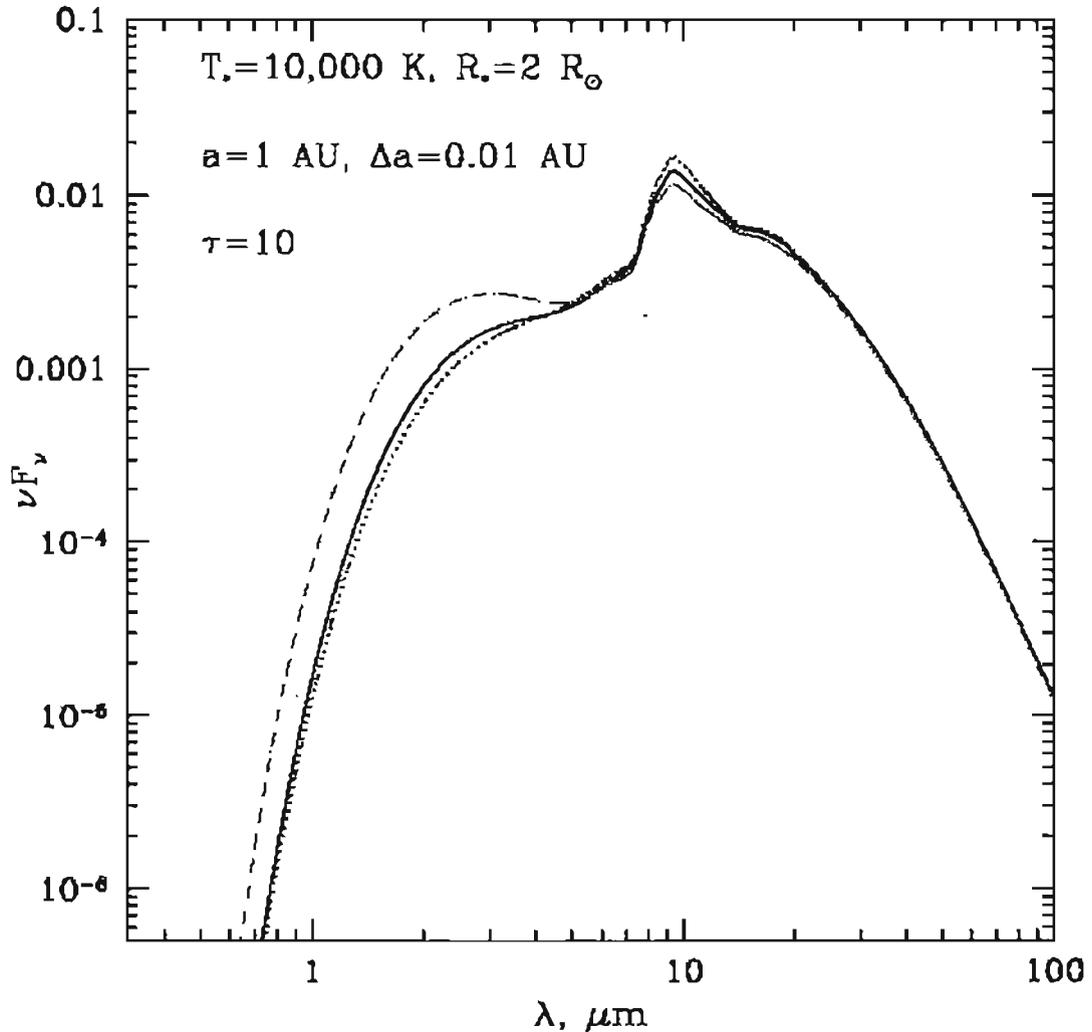


Figura 7.2: Spectral energy distribution of a disk annulus around an AeBe-type star ( $T_* = 10^4 \text{ K}$ ,  $R_* = 2R_{sun}$ ). Solid line shows SED calculated according to equations 7.27 and 7.30, dotted line represents SED calculated using full frequency- and angle-dependent radiation transfer, while dashed line is SED computed in the framework of two-temperature approximation (Dullemond & Natta 2003). Annulus is placed at  $a = 1 \text{ AU}$  and has a width  $\Delta a = 0.01 \text{ AU}$  and vertical optical depth in the visible  $\tau = 10$ .

is the emissivity of the combined fully exposed and partly shielded layers of the disk. The function  $\psi(T)$  is defined as

$$\psi(T) = 4 + \frac{d \ln k_P(T)}{d \ln T} = \frac{\int_0^\infty k_\nu (4 + \frac{d \ln k_\nu}{d \ln \nu}) d\nu}{\int_0^\infty k_\nu d\nu}. \quad (7.32)$$

An interesting point to make is that  $dF_\nu^0(a)/dS$  depends on  $T_\star$ ,  $a$ , and  $R_\star$  only through the dependence of  $T_{ex}$  on these variables.

The total spectral contribution coming from a given surface element of the disk is a sum of  $dF_\nu^i(a)/dS$  and  $dF_\nu^0(a)/dS$ . In Figures 7.2-7.4 we display the resulting spectra produced by the thin disk annulus at different distances from different objects assuming a given value of  $\alpha = 0.05$ . This choice allows us to directly compare our results with the calculations of Dullemond & Natta (2003, DN03). These authors have made an exhaustive comparison between the full numerical solutions of the radiative and hydrostatic equilibrium using frequency- and angle-dependent radiation transfer in the vertical direction and the two-temperature approximation of CG97 and DDN01. We follow the convention of DN03 when making the comparison with our own results for the disk annuli. In particular, we use their opacity<sup>3</sup>  $k_\nu$  rather than just the simple power-law approximation that we have been using before and adopt their values for the annuli and stellar parameters (indicated on each Figure).

An inspection of Figures 7.2-7.4 shows that at short wavelengths our treatment of the temperature structure of the outer disk layers reproduces the full numerical SED calculations much better than the two-temperature approximation. This is not surprising since, unlike our treatment, the two-temperature approximation does not follow the smooth temperature transition between  $T_{ex}$  and  $T_{irr}$  in the partly exposed layer and this spoils the agreement at high frequencies. On the other hand, our treatment reproduces the full numerical calculations in this frequency range remarkably well. At longer wavelengths the disk emission is dominated by radiation coming from the fully-shielded interior, which is treated by our three-layer and the two-temperature approximations in the same way. As a result, at long wavelengths they yield very similar results (although our treatment still provides somewhat better agreement with the more accurate numerical calculations of DN03). In particular cases represented in Figures 7.2 and 7.4 this leads to very good agreement between our annuli SED calculations and the full numerical results in the whole

---

<sup>3</sup>See <http://www.mpia-hd.mpg.de/homes/dullemond/radtrans/>.

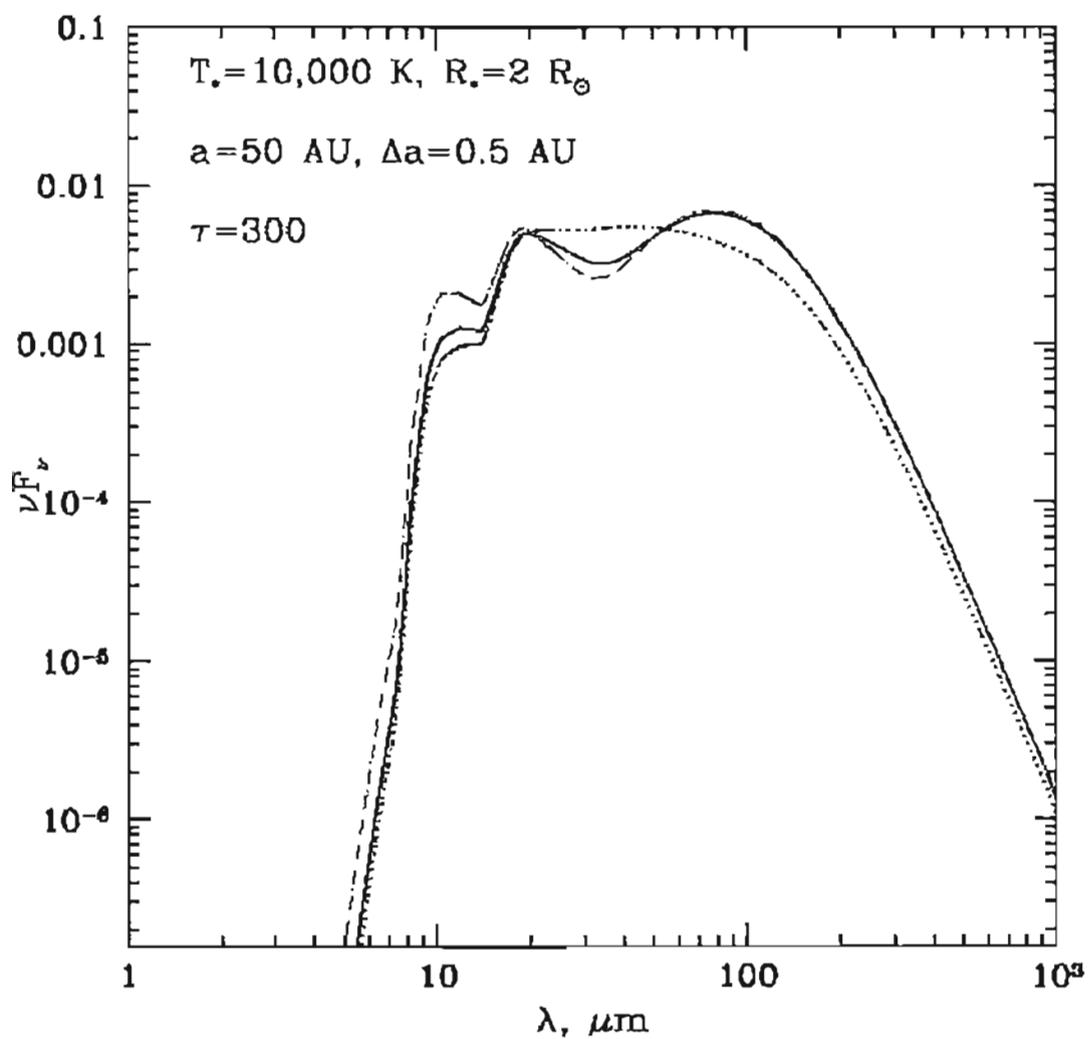


Figure 7.3: Same as Figure 7.2 but for an annulus at  $a = 50 \text{ AU}$  from the star having  $\Delta a = 0.5 \text{ AU}$  and vertical optical depth in the visible  $\tau = 300$ .

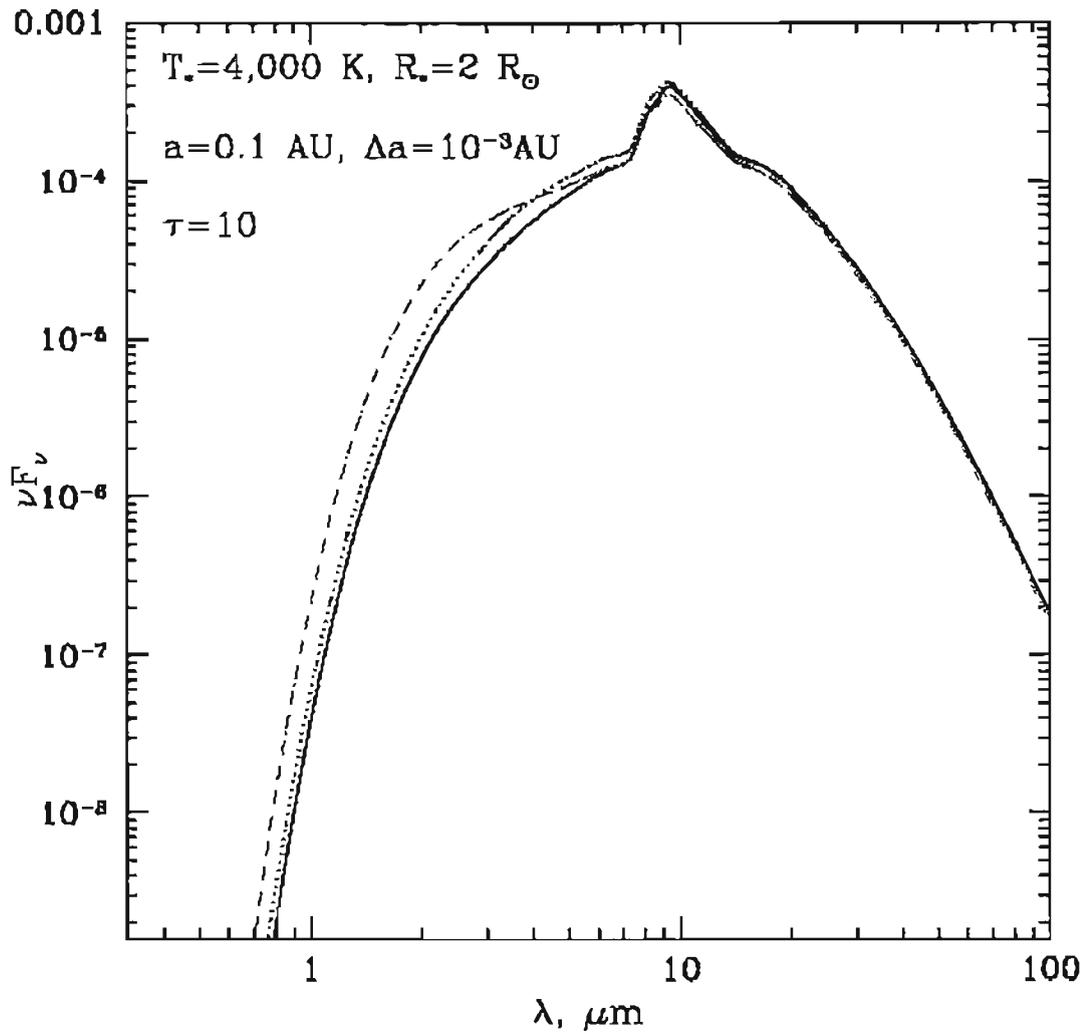


Figura 7.4: Same as Figure 7.2 but for an annulus around T Tauri type star ( $T_* = 4000\text{K}$ ,  $R_* = 2R_{sun}$ ). Annulus is at  $a = 0.1 \text{ AU}$  from the star having width  $\Delta a = 0.001 \text{ AU}$  and vertical optical depth in the visible  $\tau = 10$ .

range of wavelengths. The situation represented in Figure 7.3 is more complicated: both the two-temperature and the three-layer approximations give rise to a distinct bump in SED at  $\lambda \sim 100\mu m$  which is absent in more refined numerical calculations. This has to do with the fact that both approximations do not reproduce accurately the temperature structure of the fully shielded layer, as has been demonstrated rather convincingly in Dullemond, van Zadelhoff & Natta (2002). Nevertheless, the much better agreement at short wavelengths in the three-layer approximation obtained at the expense of only slightly increased (compared to the two-temperature approximation) complexity justifies its use in practical applications where large sequences of circumstellar disk SEDs need to be analyzed.

## 7.7. Correction factors for optically thin disks

Whenever in some regions we have  $\Sigma k_P(T_{irr}) \lesssim 1$ , the disk becomes optically thin to radiation from its own interior, which reduces the efficiency of its cooling. As a result,  $T_{irr}$  is higher than if we were assuming the disk to be optically thick. This usually happens in the distant part of the disk where temperatures and opacities are low. To compensate for this one can introduce a factor  $\psi_{irr}$  which is defined as the ratio of the disk emissivity with respect to its blackbody value  $\sigma T_{irr}^4$ . There are different ways of defining  $\psi_{irr}$ . In particular, Chiang et al. (2001) simply used

$$\psi_{irr}^C(T_{irr}) = 1 - \exp[-\Sigma k_P(T_{irr})]. \quad (7.33)$$

Following DDN01, for  $\psi_{irr}$  we use a more accurate expression

$$\psi_{irr}^{DDN}(T_{irr}) = \frac{\int_0^\infty B_\nu(T_{irr})[1 - \exp(-\Sigma k_\nu)]d\nu}{\sigma T_{irr}^4}. \quad (7.34)$$

In the optically thick case ( $\Sigma k_P(T_{irr}) \gtrsim 1$ ) both  $\psi_{irr}^{CG}$  and  $\psi_{irr}^{DDN}$  reduce to unity.

At even smaller temperatures the disk becomes optically thin to radiation at temperature  $T_{ex}$ . Whenever  $\Sigma k_P(T_{ex}) \lesssim 1$ , the disk can trap only part of the radiation coming from the star and reprocessed in the fully exposed and partly shielded layers. This reduces heating of the disk interior and decreases  $T_{irr}$  with respect to the optically thick case. The factor  $\psi_{ex}$  defined as the fraction of reprocessed emission coming from the outer disk layers which is trapped in the disk interior accounts for this possibility. Chiang et al. (2001) used

$$\psi_{irr}^C(T_{ex}) = 1 - \exp[-\Sigma k_P(T_{ex})] \quad (7.35)$$

while DDN01 again used a more refined version using the full frequency-dependent opacity  $k_\nu$ :

$$\psi_{ex}^{DDN}(T_{ex}) = \frac{\int_0^\infty B_\nu(T_{ex})k_\nu[1 - \exp(-\Sigma k_\nu)]d\nu}{k_P(T_{ex})}. \quad (7.36)$$

Clearly, equation (7.36) should give more accurate results than (7.35) but it still employs the assumption of a blackbody radiation from the fully exposed layer. We have demonstrated in §5 that the deviation from isothermality of real temperature structure in the fully exposed and partly shielded layers are important for determining the emission properties from this part of the disk. For this reason, we use the following expression for  $\psi_{ex}$  which takes into account the variation of gas temperature through this part of the disk:

$$\psi_{ex}(T_{ex}) = \frac{\int_0^\infty A_\nu(T_{ex})[1 - \exp(-\Sigma k_\nu)]d\nu}{\int_0^\infty A_\nu(T_{ex})d\nu} \quad (7.37)$$

where  $A_\nu(T)$  is given by (31). Clearly,  $\psi_{ex}^C$ ,  $\psi_{ex}^{DDN}$ ,  $\psi_{ex} \rightarrow 1$  in the optically thick case ( $\Sigma k^P(T_{ex}) > 1$ ).

In Figure 7.5 we plot the different  $\psi$ -factors for two values of the disk surface density. One can see that prescriptions (7.36) and (7.37) for  $\psi_{ex}$  give very similar results implying that the spectral shape of the emission from coming from the outer disk layer is not very much different from a blackbody with  $T = T_{ex}$ . At the same time, expressions (7.33) and (7.35) for  $\psi_{irr}$  and  $\psi_{ex}$  advocated by Chiang et al. (2001) differ quite significantly from both  $\psi_{irr}^{DDN}$ ,  $\psi_{ex}^{DDN}$  and  $\psi_{ex}$ . As a result, the use of  $\psi_{irr}^C$ ,  $\psi_{ex}^C$  for determining the disk temperature in (7.8) can lead to inaccurate results.

## 7.8. Radial properties of irradiated disks.

Let us assume that  $H_1 \approx H_0 = \lambda h_{irr}$ , where  $\lambda$  will be treated as a constant. This simplification is valid as long as condition (7.26) is fulfilled. Then, substituting this into (7.24) or (7.25) and using (7.8) one can directly solve for  $h_{irr}(a)$  in both illumination regimes.

In the case of lamp-post illumination one immediately finds from (7.1), (7.13) and (7.24), supposing  $\psi_{ex} = \psi_{irr} = 1$ , that

$$T_{irr}(a) = T_\star \left(\frac{\eta}{2}\right)^{1/4} \left(\frac{a}{R_\star}\right)^{-3/4}, \quad (7.38)$$

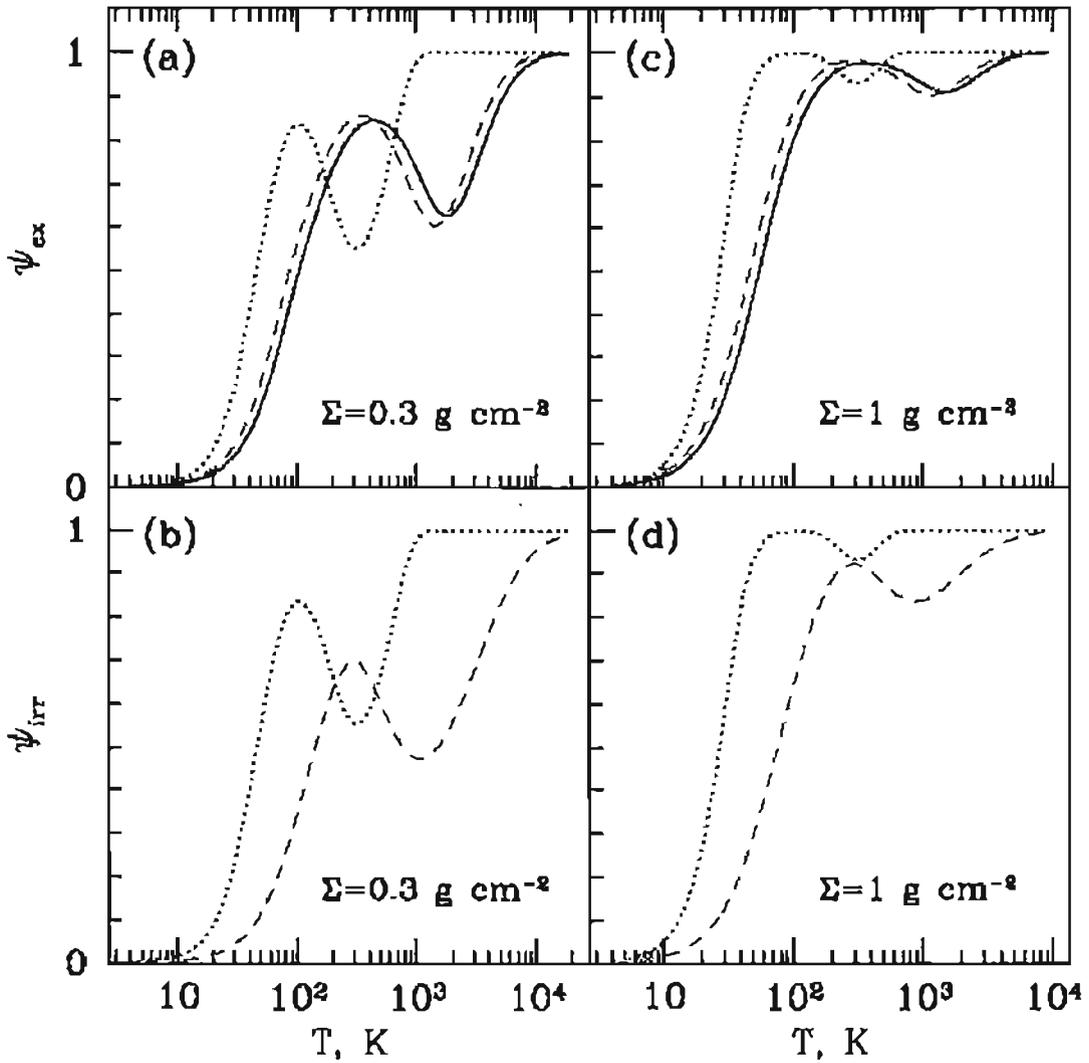


Figure 7.5: (a,c) Plots of  $\psi_{ex}$  (solid curve),  $\psi_{ex}^C$  (dotted curve), and  $\psi_{ex}^{DDN}$  (dashed curve) for two different values of disk surface density:  $\Sigma = 0.3 \text{ g cm}^{-2}$  (left panel) and  $\Sigma = 1.0 \text{ g cm}^{-2}$  (right panel). (b,d) The same for  $\psi_{irr}^C$  (dotted curve), and  $\psi_{irr}^{DDN}$  (dashed curve)

$$h_{irr}(a) = h_* \left(\frac{\eta}{2}\right)^{1/8} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{9/8}, \quad (7.39)$$

$$\rho_0(a) = \rho_* \left(\frac{\eta}{2}\right)^{-1/8} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{-(\delta+9/8)}, \quad (7.40)$$

$$P_0(a) = P_* \left(\frac{\eta}{2}\right)^{1/8} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{-(\delta+15/8)} \quad (7.41)$$

$$h_* = \left(\frac{kT_*}{\mu\Omega_*^2}\right)^{1/2}, \quad \Omega_* = \left(\frac{GM_*}{R_*^3}\right)^{1/2}, \quad (7.42)$$

$$\rho_* = (2\pi)^{-1/2} \frac{\Sigma_*}{h_*}, \quad P_* = \frac{\rho_* kT_*}{\mu} \quad (7.43)$$

The value of  $\Lambda$  in this case ( $\Lambda_{lp}$ ) is given by

$$\Lambda_{lp} = \frac{k(T_*)\Sigma_*}{(2\pi)^{1/2}\eta\lambda} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{1-\delta} \left[ \ln \left(\frac{q}{\eta} \frac{a}{R_*}\right) \right]^{-1}. \quad (7.44)$$

In the case of point-source illumination, substitution of equation (7.25) into equation (7.8) yields a differential equation for  $h_{irr}$ , which can easily be solved provided that  $\lambda$  is roughly constant. As a result, one finds

$$T_{irr}(a) = T_* \left(\frac{\lambda h_*}{7 R_*}\right)^{2/7} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{-3/7}, \quad (7.45)$$

$$h_{irr}(a) = h_* \left(\frac{\lambda h_*}{7 R_*}\right)^{1/7} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{9/7}, \quad (7.46)$$

$$\rho_0(a) = \rho_* \left(\frac{\lambda h_*}{7 R_*}\right)^{-1/7} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{-(\delta+9/7)}, \quad (7.47)$$

$$P_0(a) = P_* \left(\frac{\lambda h_*}{7 R_*}\right)^{1/7} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{-(\delta+12/7)}, \quad (7.48)$$

$$\alpha = 2 \left(\frac{\lambda h_*}{7 R_*}\right)^{8/7} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{2/7} \quad (7.49)$$

We also find that for point-source illumination  $\Lambda$  is given by

$$\begin{aligned} \Lambda_{ps} \approx & \frac{k(T_*)\Sigma_*}{(8\pi)^{1/2}\lambda} \left(\frac{\lambda h_*}{7 R_*}\right)^{-8/7} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{-(\delta+2/7)} \times \\ & \times \left\{ \ln \left[ \frac{q}{2} \left(\frac{\lambda h_*}{7 R_*}\right)^{-8/7} \left(\frac{a}{R_*}\right)^{-2/7} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Thus,  $\lambda$  is indeed a very weak function of  $a$  meaning that  $\Lambda$  ratio  $H_1/h_{irr}$  is almost constant throughout the disk.

## 7.9. Conclusions

In this Section we showed a new simple analytical method that allows us to overcome the limitations of the two-temperature model of CG97. The disk spectral energy distribution calculated by this method is more precise than the one obtained using the CG97 model. Moreover, the added complication is minimal.



---

**Parte III**  
**Conclusiones**

---

# 8

## Conclusiones

### 8.1. Un nuevo código numérico MHD

Como parte de esta tesis se desarrolló un nuevo código numérico MHD. Este ha sido probado con un gran número de tests en una y dos dimensiones. Analizando los resultados de estos tests se mostró que el código es estable, preciso y eficiente, y puede reproducir toda la variedad de ondas que se propagan en un medio descrito por medio de las ecuaciones de la MHD.

Se mostró la doble naturaleza de las ecuaciones MHD: por un lado, constituyen un sistema de ecuaciones hiperbólicas con además una limitación geométrica (representada por el término de divergencia nula) en la evolución del campo magnético. Por otro lado, las ecuaciones de la MHD representan un sistema no hiperbólico si se considera la ecuación de inducción en su forma de ley de conservación del flujo del campo magnético. Esta doble naturaleza limita la calidad de la solución numérica respecto a sistemas puramente hiperbólicos como la HD. Para obtener soluciones precisas se propuso un método CT en el que las variables consideradas están definidos sólo en el centro de las celdas.

## 8.2. Aplicaciones numéricas al estudio de chorros astrofísicos magnetizados.

En la parte central de la tesis se mostraron los resultados de estudios de la emisión en  $H\alpha$  de chorros magnetizados y de la propagación de chorros en nubes moleculares y de la consecuente interacción. Los resultados principales de estos estudios son los siguientes: un chorro magnetizado es más colimado y se propaga con mayor velocidad respecto a un chorro HD. La mayor colimación resulta en una mayor densidad del chorro, y además en una mayor presión respecto a la del medio ambiente. Por otro lado la fracción de ionización no varía sensiblemente entre el caso HD y el MHD. Los cálculos no lineales de la emisión en  $H\alpha$  muestran que los chorros MHD tienen una emisión casi un orden de magnitud superior al caso HD. Por otro lado, los distintos nudos reaccionan de manera sensiblemente diferente a la presencia del campo magnético. Alejándose de la fuente del chorro se llega a nudos que tienen un máximo en la emisión y para nudos más cercanos a la cabeza del chorro el cociente entre la emisión en el caso MHD respecto al caso HD se acerca nuevamente a uno.

Las limitaciones principales de este trabajo son las siguientes. La primera es que este trabajo es completamente general, y no permite comparar los valores de la emisión en  $H\alpha$  calculados con los emitidos por un chorro en particular, ya que los parámetros físicos utilizados son los valores promedios de los chorros estelares y no los correspondientes a un objeto dado. La segunda limitación es que en este estudio sólo se hicieron predicciones de la emisión de una línea. Un estudio detallado de cocientes de líneas es necesario para poder hacer un análisis más cuantitativo. En fin, estos resultados se obtuvieron haciendo simulaciones en dos dimensiones. Es difícil decir cuanto cambiarían los resultados encontrados con simulaciones en tres dimensiones. En tres dimensiones es posible simular la presencia de precesión en el chorro o el efecto de la rotación del material en el chorro. Además, se pueden desarrollar inestabilidades MHD no posibles en el caso axisimétrico.

Las simulaciones de la propagación de chorros magnetizados en nubes moleculares mostraron que la presencia de un campo magnético es muy importante para la interacción y el transporte de momento entre chorro y nube. Un campo magnético con una componente no paralela a la dirección de movimiento cambia la dirección de propagación del chorro y lo desacelera. Además, la componente perpendicular del campo es el principal elemento para transferir

momento a gran escala del chorro a la nube, por medio de la propagación de ondas de Alfvén. Tomando en cuenta que en general en una nube molecular el campo magnético nunca es completamente organizado y regular, estos efectos pueden ser muy importantes.

### 8.3. Modelos de discos circunestelares

En la segunda parte de la tesis se mostró como utilizando sencillas suposiciones sobre la distribución de temperatura y la estructura vertical del disco se pueden encontrar soluciones analíticas muy sencillas y fácilmente resolubles. Estas pueden además servir para predecir el espectro de emisión del disco. En esta tesis se mostró el cálculo del espectro de emisión para un anillo a radio fijo, y la extensión al cálculo del espectro desde todo el disco se puede obtener sumando los diferentes anillos calculados. Comparando los resultados con los que se obtienen con un modelo de dos temperaturas se encontró que nuestro método permite acercarse mucho más a los cálculos “exactos” que se obtienen resolviendo el problema del transporte radiativo en dirección vertical.

Las limitaciones de este trabajo son muchas. Un primer punto es que no se consideró el calentamiento debido a la viscosidad presente en el disco. En realidad, los procesos viscosos contribuyen a incrementar la temperatura del disco sólo en una región muy cercana a la zona central del disco, y por esta razón éstos no afectan mucho las predicciones del espectro de emisión del disco. Un segundo punto es que este modelo vale hasta radios cercanos al punto de sublimación del polvo. Para radios menores la estructura del disco es afectada por la ausencia de polvo y por el hecho de que la opacidad es debida sólo al gas. Un modelo que incluye también la región de sublimación del polvo está actualmente en preparación.

### 8.4. Trabajo futuro

- **Código numérico MHD.** Lamentablemente un código numérico nunca puede considerarse completo, ya que con el pasar del tiempo se crean algoritmos más eficientes y se presentan nuevos problemas físicos que requieren la utilización de modelos más complicados. En este sentido, el paso siguiente será resolver los problemas encontrados en la incorporación del algoritmo numérico en un esquema con malla adaptativa. Con un

código de malla adaptativa será posible estudiar un mayor número de problemas astrofísicos. Otro paso importante será después paralelizar el código, para poder alcanzar resoluciones muy superiores a las posibles hasta ahora.

- **Simulaciones de eyección y propagación de chorros estelares.** Utilizando un código 3d con malla adaptativa se podrán estudiar la dinámica y la emisión de chorros magnetizados de manera más realista. Un primer problema que se podrá resolver es si la presencia de “nose cones” es un efecto debido a los límites de las simulaciones en 2d o si es un efecto real. Otros problemas podrán ser el estudio de la interacción de muchos chorros con nubes moleculares con el cálculo de la turbulencia generada por este medio, y hasta seguir la evolución de un chorro desde la eyección hasta formar las distintas fases de su evolución por medio de una sola simulación. En fin, otros problemas que se están empezando a estudiar son la eyección de chorros desde discos y el efecto de una estrella compañera sobre la estabilidad y la periodicidad de la eyección, o el efecto de la inversión de las líneas de campo magnetosférico sobre la eyección de los chorros.
- **Modelos de discos.** En un futuro próximo se considerarán las resoluciones numéricas de las ecuaciones, para estudiar el efecto de una pared de polvo no vertical sobre el espectro de emisión de discos circunestelares. En seguida, se extenderán los modelos considerados para incluir efectos importantes como la transición suave entre la zona con polvo y la zona libre de polvo, o el efecto de un desacoplamiento entre la distribución de polvo y la de gas en los discos.

## Bibliografía

1. Alfvén, A., & Falthammer, C. G., *Cosmical Electrodynamics*, Oxford: Clarendon Press (1963).
2. Aller, L. H., *Physics of Thermal Gaseous Nebulae*, Ap&SS Library, 112 (1984).
3. André, P., Ward-Thompson, D. & Barsony, M. *Submillimeter continuum observations of Rho Ophiuchi A - The candidate protostar VLA 1623 and prestellar clumps* ApJ, 406, 122-141 (1993).
4. Arce, H. G., *The Impact of Giant Stellar Outflows on their Clouds*, RM-xAC,15, 123-125 (2003).
5. Arons, J., & Max C. E., *Hydromagnetic Waves in Molecular Clouds*, ApJ, 196, L77-L81 (1975).
6. Bacciotti, F., Chiuderi, C. & Oliva, E., *The structure of optical stellar jets: a phenomenological analysis*, A&A, 296, 185-200 (1995).
7. Bachiller, R., *Bipolar Molecular Outflows from Young Stars and Protostars*, ARA&A, 34, 111-154 (1996).
8. Balbus, S. A. & Hawley, J. F., *A powerful local shear instability in weakly magnetized disks: I-Linear analysis.*, ApJ, 376, 214-233 (1991).
9. Balbus, S. A., & Hawley, J. F., *Instability, turbulence and enhanced transport in accretion disks*, Rev.Mod.Phys. 70, 1-53 (1998).
10. Bally, J., & Devine, D., *A parsec-scale "superjet" and quasi-periodic structure in the HH 34 outflow?*, ApJ, 428, L65-L68 (1994).
11. Balsara, D. S., & Spicer, D., *Maintaining pressure positivity in magnetohydrodynamics simulations*, JCoPh, 148, 133-148 (1999).

- 
12. Biro, S. , Raga, A. C., & Cantó, J., *Numerical simulation of 2D jets with time-dependent direction of ejection*, MNRAS, 275, 557-566 (1995).
  13. Blandford, R. D., & Payne, D. G., *Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets*, MNRAS, 199, 883-903 (1982).
  14. Blandford, R. D., & Znajek, R. L., *Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes*, MNRAS, 179, 433-456 (1977).
  15. Blondin, J. M., Fryxell, B. A., & Konigl, A., *The structure and evolution of radiatively cooling jets*, ApJ, 360, 370-386 (1990).
  16. Brackbill, J. U., & Barnes, D. C., *The effect of nonzero  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations*, JCoPh, 35, 426-430 (1980).
  17. Braginskii, S. I., *Transport processes in a plasma*, RevPIPh, 1 (1965).
  18. Brio, M. W. & Wu, C. C., *An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics*, JCoPh, 75, 400-422 (1988).
  19. Brugel, E. W., Seab, C. G., & Shull, J. M., *The ultraviolet spectrum of Herbig-Haro object 2H*, ApJ, 262, L35-L39 (1982).
  20. Burrows, C. J., Stapelfeldt, K. R., Watson, A.M., Krist, J. E., Ballester, G. E., Clarke, J. T., Crisp, D., Gallagher, J. S., Griffiths, R. E., Hester, J. J., Hoessel, J. G., Holtzman, J. A., Mould, J. R. Scowen, P. A., Trauger, J. T., & Westphal, J. A, *Hubble Space Telescope Observations of the Disk and Jet of HH 30*, ApJ, 473, 437-451 (1996).
  21. Calvet, N., Patiño, A., Magris, G. C., & D'Alessio, P., *Irradiations of accretion disks around young objects. I. Near-infrared CO bands*, ApJ, 380, 617-630 (1991).
  22. Cantó, J., *A stellar wind model for Herbig-Haro objects*, A&A, 86, 327-338 (1980).
  23. Cantó, J., Raga, A. C., & Binette, L., *On the structure of steady stellar jets: an analytic model*, RMxAA, 17, 65-74 (1989).
  24. Cerqueira, A. H., *Magnetic field effects on the structure and evolution of Herbig-Hero jets*, PhD Thesis, UNiversidad de San Paolo, Brazil (2001c).

- 
25. Cerqueira, A. H. & de Gouveia Dal Pino, E. M., *Magnetic Field Effects on the Structure and Evolution of Overdense Radiatively Cooling Jets*, ApJ, 510, 828-845 (1999).
  26. Cerqueira, A. H., & de Gouveia Dal Pino, E. M., *On the Influence of Magnetic Fields on the Structure of Protostellar Jets*, ApJ 550, L91-L94 (2001a).
  27. Cerqueira, A. H. & de Gouveia Dal Pino, E. M., *Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Radiatively Cooling, Pulsed Jets*, ApJ, 560, 779-791 (2001b).
  28. Cerqueira, A. H., de Gouveia Dal Pino, E. M., & Herant, M., *Magnetic Field Effects on the Head Structure of Protostellar Jets*, ApJ, 489, L185-L188 (1997).
  29. Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford: Clarendon Press (1961).
  30. Chiang, E. I., & Goldreich, P., *Spectral energy distributions of T tauri stars with passive circumstellar disks*, ApJ, 490, 368-376 (1997, CG97).
  31. Chiang, E. I., Joungh, M. K., Creech-Eakman, M. J., Qi, C., Kessler, J. E., Black, G. A., & van Dishoeck, E. F., *Spectral energy distributions of passive T Tauri and haerbig Ae disks: grain mineralogy, parameter dependences, and comparison with ISO LWS observations*, ApJ, 547, 1077-1089 (2001).
  32. Cho J., & Lazarian A., *Compressible magnetohydrodynamic turbulence: mode coupling, scaling relations, anisotropy, viscosity-damped regime and astrophysical implications*, MNRAS, 345, 325-339 (2003).
  33. Choudhuri, A. R., *The physics of fluids and plasmas*, Cambridge University Press (1998).
  34. Clifford, P., & Elmegreen B. G., *A collision cross-section for interactions between magnetic diffuse clouds*, MNRAS, 202, 629-646 (1983).
  35. Cohen, R. J., Rowland, P. R., & Blair M. M., *The source of the bipolar outflow in Cepheus A*, MNRAS, 210, 425-438 (1984).
  36. Cox, D. P., *Some Calculations of Cooling Rates and Spectral Emission of Gaseous Nebulae*, PhD Thesis, Un. of California, San Diego (1970).

- 
37. Cudworth, K. M., & Herbig, G., *Two large-proper-motion Herbig-Haro objects*, AJ, 84, 548-551 (1979).
  38. Dai, W., & Woodward, P. R., *An Approximate Riemann Solver for Ideal Magnetohydrodynamics*, JCoPh, 111, 354-372 (1994).
  39. Dai, W., & Woodward, P., *A Simple Finite Difference Scheme for Multidimensional Magnetohydrodynamical Equations*, JCoPh, 142, 331-369 (1998).
  40. D'Alessio, P., Cantó, J., Calvet, N., & Lizano, S., *Accretion disks around young objects. I. The detailed vertical structure*, ApJ, 500, 411-427 (1998).
  41. Dalgarno, A., & McCray, R. A., *Heating and ionization of HI regions*, ARA&A, 10, 375-424 (1972).
  42. De Colle F., *Modelos de discos y jets alrededor de estrellas jóvenes*, PhD Thesis, UNAM, México D.F. (2005).
  43. De Colle F., & Raga, A. C., *Effects of the Magnetic Field on the H $\alpha$  Emission from Jets*, AP&SS, 293, 173-180 (2004).
  44. de Gouveia Dal Pino, E. M., & Benz, W., *Three-dimensional simulations of protostellar jets*, ApJ, 410, 686-695 (1993).
  45. de Gouveia Dal Pino, E. M., & Cerqueira, A. H., *The effects of magnetic fields on radiative cooling jets*, RMxAA 13, 29-35 (2002).
  46. Devine, D., Bally, J., Reipurth, B., & Heathcote, S., *Kinematics and Evolution of the Giant HH34 Complex*, AJ, 114, 2095-2111 (1997).
  47. Dopita, M. A., Binette, L., & Schwartz, R. D., *The two-photon continuum in Herbig-Haro objects*, ApJ, 261, 183-194 (1982).
  48. Draine, B. T., & Lee, H. M., *Optical properties of interstellar graphite and silicate grains*, ApJ, 285, 89-108 (1984).
  49. Draine, B. T., & McKee, *Theory of interstellar shocks*, ARA&A, 31, 373-432 (1993).
  50. Dullemond, C. P., *The 2-D structure of dusty disks around Herbig Ae/Be stars*, A&A, 395, 853-862 (2002).

- 
51. Dullemond, C. P., Dominik, C., & Natta, A., *Passive irradiated circumstellar disks with an inner hole*, ApJ, 560, 957-969 (2001, DDN01).
  52. Dullemond, C. P., & Natta, A., *An analysis of two-layer models for circumstellar disks*, A&A, 405, 597-605 (2003, DN03).
  53. Dullemond, C. P., van Zadelhoff, G. J., & Natta, A., *Vertical structure models of T Tauri and Herbig Ae/Be disks*, A&A, 389, 464-474, (2002).
  54. Duschl, W. J., Gail, H.-P., & Tscharnuter, *Destruction processes for dust in protoplanetary disks*, A&A, 312, 624-642 (1996).
  55. Einfeldt, B., Munz, C. D., Roe, P. L., & Sjogreen, B., *On Godunov-type methods near low densities*, JCoPh, 92, 273-295 (1991).
  56. Evans, C. R., Hawley, J. F., *Simulation of magnetohydrodynamic flows: a constrained transport method*, ApJ, 332, 659-677 (1988).
  57. Falgarone E., & Puget J. L., *Model of clumped molecular clouds. II - Physics and evolution of the hierarchical structure*, A&A, 162, 235-247 (1986).
  58. Falle, S. A. E. G., *Self-similar jets*, MNRAS, 250, 581-596 (1991).
  59. Falle, S. A. E. G., *Rarefaction Shocks, Shock Errors, and Low Order of Accuracy in ZEUS*, ApJ, 577, L123-L126 (2002).
  60. Falle, S. A. E. G., *A numerical scheme for multifluid magnetohydrodynamics*, MNRAS, 344, 1210-1218 (2003).
  61. Falle S. A. E. G., & Hartquist, T. W., *Generation of density inhomogeneities by magnetohydrodynamic waves*, MNRAS, 329, 195-203 (2002).
  62. Falle, S. A. E. G., & Komissarov, S. S., *On the existence of intermediate shocks*, APS Conf.Series 123, 66-71 (1997).
  63. Falle, S. A. E. G., Komissarov, S. S., & Joarder, P., *A multidimensional upwind scheme for magnetohydrodynamics*, MNRAS, 297, 265 (1998).
  64. Falle, S. A. E. G., Innes, D. E., & Wilson, M. J., *Steady stellar jets*, MNRAS, 225, 741-759 (1987).

- 
65. Ferguson, J. W., Alexander, D. R., Allard, F., Barman T., Bodnarik, J. G., Hauschildt, P. H., Heffner-Wong A., & Tamanai, A., *Low-temperature opacities*, ApJ, 623, 585-596 (2005).
  66. Frank, A., Gardiner, T. A., Delemarter, G., Lery, T., & Betti, R., *Ambipolar Diffusion in Young Stellar Object Jets*, ApJ, 524, 947-951 (1999).
  67. Frank, A., & Mellema, G., *Hydrodynamical Models of Outflow Collimation in Young Stellar Objects*, ApJ, 472, 684-702 (1996).
  68. Frank, A., Ryu, D., Jones, T. W., Noriega-Crespo, A. *Effects of Cooling on the Propagation of Magnetized Jets*, ApJ, 494, L79-L83 (1998).
  69. Gammie C. F., & Ostriker E. C., *Can Nonlinear Hydromagnetic Waves Support a Self-gravitating Cloud?*, ApJ, 466, 814-830 (1996).
  70. Gardiner, T. A., Frank, A., Jones, T. W., & Ryu, D., *Influence of magnetic field on pulsed, radiative jets*, ApJ, 530, 834-850 (2000).
  71. Gardiner, T. A., & Stone, J. M., *An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport*, JCoPh, 205, 503-539 (2005).
  72. Gekelman W., Van Zeeland M., Vincena S., & Pribyl P., *Laboratory experiments on Alfvén waves caused by rapidly expanding plasmas and their relationship to space phenomena*, JGRA, 108, 1281 (2003).
  73. Giovanardi, C., & Palla, F., *Revision and extension to low temperature of numerical estimates of the electron collisional rates for atomic hydrogen*, A&AS, 77, 157-160 (1989).
  74. Godunov, S. K., *Finite difference methods for numerical computations of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*, Math. USSR-Sb., 47 271-295 (1959).
  75. Goedbloeds, J. P. H., & Poedts, S., *Principles of Magneto-hydrodynamics*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, (2004).
  76. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M., *Table of integrals, series, and products*, San Diego: Academic Press (2000).
  77. Haro, G., *Herbig's Nebulous objects near NGC 1999*, ApJ, 115, 572-594 (1952).

- 
78. Harten, A., Lax, P., & Van Leer, B., *On upstream differencing and godunov type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Rev, 25, 35-61 (1983).
  79. Hartigan, P., Morse, J. A., & Raymond, J., *Mass-loss rates, ionization fractions, shock velocities, and magnetic fields of stellar jets*, ApJ 436, 125-143 (1994).
  80. Hartigan, P., Raymond, J., & Hartmann, L., *Radiative bow shock models of Herbig-Haro objects*, ApJ, 316, 323-348 (1987).
  81. Hayashi, M. R., Shibata, K., & Matsumoto, R., *X-Ray Flares and Mass Outflows Driven by Magnetic Interaction between a Protostar and Its Surrounding Disk*, ApJ, 468, L37-L40 (1996).
  82. Hawley, J. F., Gammie, C. F., & Balbus, S. A., *Local three-dimensional magnetohydrodynamics simulations of accretion disks*, ApJ 440, 742-763 (1995).
  83. Hazeltine, R. D., & Waelbroeck, F. L., *The framework of plasma physics*, Ed. Perseus book, Reading, Massachusetts (1998).
  84. Heathcote, S., Morse, J. A., Hartigan, P., Reipurth, B., Schwartz, R. D., Bally, J. & Stone, J. M., *Hubble Space Telescope Observations of the HH 47 Jet: Narrowband Images*, AJ, 112, 1141-1168 (1996).
  85. Herbig, H., *The spectrum of the nebulosity surrounding T Tauri*, ApJ, 111, 11-14 (1950).
  86. Herbig, H., *The properties and problems of T Tauri stars and related objects*, Adv.Astr.Astrophys., 1, 47-103 (1962).
  87. Herbig, G. H., & Jones, B. F. *Large proper motions of the Herbig-Haro objects HH 1 and HH 2*, AJ, 86, 1232-1244 (1981).
  88. Hester, J. J., Scowen, P. A., Lynds, R. & O'Neil, E. J. J., *WFPC2 Imaging of HH1-2 and HH34*, BAAS, 26, 1386, (1994).
  89. Kennel, C. F., Blandford, R. D., & Coppi, P., *MHD intermediate shock discontinuities. I - Rankine-Hugoniot conditions*, JPIPh, 42, 299-319, (1989).

- 
90. Kenyon, S. J., & Hartmann, L., *Spectral energy distributions of T Tauri stars: disk flaring and limits on accretion*, ApJ, 323, 714-733 (1987).
  91. Kitamura, Y., Momose, M., Yokogawa, S., Kawabe, R., Tamura, M., & Ida, S. *Investigation of the physical properties of protoplanetary disks around T Tauri stars by a 1 arcsecond imaging survey*, ApJ, 581, 357-380 (2002).
  92. Komissarov, S. S., *A Godunov-type scheme for relativistic magnetohydrodynamics*, MNRAS, 303, 343-366 (1999).
  93. Konigl, A. & Pudritz, R. E., *Disk Winds and the Accretion-Outflow Connection*, in Protostars and Planets IV, Eds. V.Manning, A.Boss, y S.Russell, Tucson: Univ. Arizona Press), 759-787 (2000).
  94. Kuwabara, T., Shibata, K., Kudoh, T., & Matsumoto, R., *Resistive Magnetohydrodynamics of Jet Formation and Magnetically Driven Accretion*, PASJ, 52, 1109-1124 (2000).
  95. Isella, A., & Natta, A., *The shape of the inner rim in the proto-planetary disks*, A&A, 483, 899-907 (2005).
  96. Janhunen, P. *A positive conservative method for magnetohydrodynamic based on HLL and Roe methods*, JCoPh, 160, 649-661 (2000).
  97. Jones T. W., Ryu D., Tregillis I. L., *The Magnetohydrodynamics of Supersonic Gas Clouds: MHD Cosmic Bullets and Wind-swept Clumps*, ApJ, 473, 365-382 (1996).
  98. Lada, C. J., *Star formation - From OB associations to protostars*, in IAU Symposium No. 115: Star Forming Region, M. Peimbert & J. Jugaku eds. (Dordrecht: Reidel), 1-18 (1987).
  99. LeVeque, R. J, *Wave Algorithms for Multidimensional Hyperbolic Systems*, JCoPh, 131, 327-353 (1997).
  100. LeVeque, R. J., *Numerical methods for conservation laws*, Basel: Birkhauser-Verlag (1990).
  101. LeVeque, R. J., *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press (2002).

- 
102. Lind, K. R., Payne, D. G., Meier, D.L., & Blandford, R. D., *Numerical simulation of magnetized jets*, ApJ, 344, 89-103 (1989).
  103. Liseau R., *Outflows in Regions of Star Formation*, astro-ph/0405248 (2004).
  104. Londrillo, P., & Del Zanna, L., *High-Order Upwind Schemes for Multidimensional Magnetohydrodynamics*, ApJ, 530, 508-524 (2000).
  105. Lopez, R., Raga, A., Riera, A., Anglada, G. & Estalella, R., *The extended structure of the HH 30 jet and other Herbig-Haro objects in the HL Tauri region*, MNRAS, 274, L19-L23 (1995).
  106. Mac Low, M.-M., *The Energy Dissipation Rate of Supersonic, Magnetohydrodynamic Turbulence in Molecular Clouds*, ApJ, 524, 169-178 (1999).
  107. Mac Low, M.-M., *Turbulence in the Interstellar Medium*, Ap&SS, 289, 323-331 (2004).
  108. Mac Low, M.-M., & Klessen, R. S., *Control of star formation by supersonic turbulence*, RvMP, 76, 125-194 (2004).
  109. Mac Low, M.-M., Klessen, R. S., Burkert, A., & Smith M. D., *Kinetic Energy Decay Rates of Supersonic and Super-Alfvénic Turbulence in Star-Forming Clouds*, Phys. Rev. Lett., 80, 2754-2757 (1998).
  110. Martí, J. M., & Muller, E. *Numerical Hydrodynamics in Special Relativity*, Living Rev. Relativity 6, (2003), <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-7>.
  111. Masciadri, E., Velázquez, P. F., Raga, A. C., Cantó, J., & Noriega-Crespo, A., *Analytic and Numerical Models for the Knots along the HH 111 Jet*, ApJ, 573, 260-269 (2002).
  112. Ménard, F., & Duchêne, G., *On the alignment of Classical T Tauri stars with the magnetic field in the Taurus-Auriga molecular cloud*, A&A, 425, 973-980 (2004).
  113. Miyoshi, T., & Kusano, K., *A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics*, JCoPh, 208, 315-344 (2005).
  114. Morozov, A. I., & Solov'ev, L.S., *Motion of Charged Particles in Electromagnetic Fields*, RevPIPh, 2, 201 (1966).
-

- 
115. Myong, R. S., & Roe, P. L., *On Godunov type scheme for magnetohydrodynamics*, JCoPh, 147, 545-567 (1998).
  116. Natta, A., Prusti, T., Neri, R., Grinin, V. P., & Mannings, V., *A re-consideration of disk properties in Herbig Ae stars*, A&A, 371, 186-197 (2001).
  117. Nishikawa, K.-I., *Tristan code and its application*, en *Space plasma simulation*, ed. by Buchner, J., Dum, C. T., & Scholer, M.. Berlin: Schaltungsdienst Lange, 306-309 (2001).
  118. Orszag, S. A., & Tang, C.-M., *Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence*, JFM, 90, 16, 129-143 (1979).
  119. Osterbrock, D. E., *Astrophysics of gaseous nebulae and active galactic nuclei*, University Science Books, (1989).
  120. Ostriker, E. C., *Teory of Protostellar Accretion*, AIP Conf. Proc, 484-494 (1998).
  121. O'Sullivan, S. & Ray, T. P., *Numerical simulations of steady and pulsed non-adiabatic magnetised jets from young stars*, A&A, 363: 355-372 (2000).
  122. Powell, K. B., *A Riemann solver for MHD that works in more than one dimension*, Reporte del ICASE 94-24, (1994).
  123. Raga, A. C., *Coupled stellar jet/molecular outflow models*, Ap&SS, 216, 105-112 (1994).
  124. Raga, A. C., & Cantó, J., *The Density Jump Across Internal Working Surfaces in HH Jets*, RMxAA, 34, 73-78 (1998).
  125. Raga, A. C., Cantó, J., Binette, L. & Calvet, N., *Stellar jets with intrinsically variable sources*, ApJ, 364, 601-610 (1990).
  126. Raga, A. C., Navarro-González, R., & Villagrán-Muniz, M., *A new, 3D adaptive grid code for astrophysical and geophysical gasdynamics*, RMxAA 36, 67-76 (2000).
  127. Ray, T. P., Muxlow, T. W. B., Axon, D. J., Brown, A., Corcoran, D., Dyson, J. & Mundt, R., *Large-scale magnetic fields in the outflow from the young stellar object T Tauri S*, Nature, 385, 415-417 (1997).

- 
128. Rees, M. J., *The M87 jet - Internal shocks in a plasma bean*, MNRAS, 184, 61-65 (1978).
  129. Reipurth, B., *The HH111 jet and multiple outflow episodes from young stars*, Nature, 340, 42-45 (1989).
  130. Reipurth, B., *Herbig-Haro objects and their energy sources*, Danish Natural Science Research Council (1999a).
  131. Reipurth, B., *A General Catalogue of Herbig-Haro Objects, 2nd Edition*, <http://casa.colorado.edu/hhcat/> (1999b).
  132. Reipurth, B. & Bally, J. *Herbig-Haro flows: probes of early stellar evolution*, ARA&A, 39: 403-455 (2001).
  133. Reipurth, B., Bally, J., & Devine, D. *Giant Herbig-Haro flows*, AJ, 114, 2708-2735 (1997b).
  134. Reipurth, B., Hartigan, P., Heathcote, S., Morse, J. A. & Bally, J., *Hubble Space Telescope Images of the HH 111 Jet*, AJ, 114, 757-780 (1997a).
  135. Roe, P. L., *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*, JCoPh, 43, 357-372 (1981).
  136. Ryu, D., & Jones, T. W., *Numerical MHD in astrophysics: algorithm and tests for one-dimensional flow*, ApJ, 442, 228-258 (1995).
  137. Ryu, D., Jones, T. W., & Frank, A., *Numerical Magnetohydrodynamics in Astrophysics: Algorithm and Tests for Multidimensional Flow*, ApJ, 452, 785-796 (1995).
  138. Ryu, D., Miniati, F., Jones, T. W., & Frank, A., *A Divergence-free Upwind Code for Multidimensional Magnetohydrodynamic Flows*, ApJ, 509, 244-255 (1998).
  139. Schramkowski, G. P., & Torkelsson, U., *Magnetohydrodynamic instabilities and turbulence in accretion disks*, A&ARv, 7, 55-96 (1996).
  140. Schwartz, R. D., *T Tauri nebulae and Herbig-Haro Nebulae - Evidence for excitation by a strong stellar wind*, ApJ, 195, 631-642 (1975).
  141. Shakura, N. I., & Sunyaev, R. A., *Black holes in binary systems. Observational appearance*, A&A, 24, 337-355 (1973).
-

- 
142. Shu, F. H., Adams, F. C. & Lizano, S, *Star formation in molecular clouds - Observation ant theory*, ARA&A, 25, 23-81 (1987).
  143. Shu, F. J., Najita, J.R., Shang, H. & Zhi-Yun, L., *X-winds:theory and observations*, en *Protostars and Planets IV*, Eds. Manning, V., Boss, A., & Russell, S., Tucson: Univ. Arizona Press, 789-813 (2000).
  144. Shumlak, U., & Loverich, J., *Approximate Riemann solver for the two-fluid plasma model*, JCoPh, 187, 620-638. (2003).
  145. Solomon P. M., Huguenin G. R., & Scoville N. Z., *The source of high-velocity emission at the Orion molecular cloud core*, ApJ, 245, L19-L22 (1981).
  146. Steinacker, A., & Papaloizou, J. C. B., *Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of an Accretion Disk with Star-Disk Boundary Layer*, ApJ, 571, 413-428 (2002).
  147. Stone, J. M., & Hardee, P. E., *Magnetohydrodynamic Models of Axisymmetric Protostellar Jets*, ApJ, 540, 192-210 (2000).
  148. Stone, J. M., & Norman, M.L., *ZEUS-2D: a radiation MHD code for astrophysical flows in two space dimension. II. The MHD algorithms and tests*, ApJS, 80, 791-818, (1992).
  149. Strom, K. M., Strom, S. E., Wolff, S. C., Morgan, J., & Wenz, M., *Optical manifestations of mass outflows from young stars - At atlas of CCD images of Herbig-Haro objects*, ApJSS 62, 39-80 (1986).
  150. Tamura M., & Sato S., *A two micron polarization survey of T Tauri stars*, AJ, 98, 1368-1381 (1989).
  151. Tanaka, T., *Finite volume TVD scheme on an unstructured grid system for three-dimensional MHD simulation of inhomogeneous systems including strong background potential fields*, JCoPh, 111, 381-390 (1994).
  152. Tanaka, T., *Generation mechanisms for magnetosphere-ionosphere current systems deduced from a three-dimensional MHD simulation of the solar wind-magnetosphere-ionosphere coupling processes*, JGR, 100, 12057-12074 (1995).

- 
153. Todo, Y., Uchida, Y., Sato, T. & Rosner, R., *Wiggled structure of Herbig-Haro objects - Helical kink instability of jets from young stellar objects*, ApJ, 403, 164-174 (1993).
154. Toro, E. F., *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*, Springer-Verlag, (1999).
155. Toro, E. F., *MUSTA: a multi-stage numerical flux*, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, preprint n. NI04008-NPA (2004).
156. Toth, G., *The  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes*, JCoPh, 161, 605-652 (2000).
157. Toth, G., Keppens, R., Botchev, M. A., *Implicit and semi-implicit schemes in the Versatile Advection Code: numerical tests*, A&A, 332, 1159-1170 (1998).
158. Toth, G., & Odstrcil, D., *COmparison of some flux corrected transport and total variation diminishink numerical schemes for hydrodynamic and MHD problems*, JCoPh, 128, 82-100 (1996).
159. Uchida, Y. & Shibata, K., *Magnetodynamical acceleration of CO and optical bipolar flows from the region of star formation*, PASJ 37, 515-535 (1985).
160. van Boekel, R., Dullemond, C. P., & Dominik, C., *Flaring and self-shadowed disks around Herbig Ae stars: simulations for 10  $\mu\text{m}$  interferometers*, A&A, en prensa (2005).
161. Vázquez-Semadeni, E., Ballesteros-Paredes J., & Klessen R. S., *A Holistic Scenario of Turbulent Molecular Cloud Evolution and Control of the Star Formation Efficiency: First Tests*, ApJ, 585, L131-L134 (2003).
162. Verbunt, F., *Accretion disks in stellar X-ray sources - A review of the basic theory of accretion disks and its problems*, Space Sci.Rev. 32, 379-404 (1982).
163. Woodward, P., & Colella, P., *The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks*, JCoPh, 54, 115-173 (1984).
164. Zachary, A. L., Malagoli, A., & Colella, P., *A Higher-Order Godunov Method for Multidimensional Ideal Magnetohydrodynamics*, SIAM JSC, 15, 263 (1994).
-

165. Ziegler, U., *NIRVANA+*: An adaptive mesh refinement code for gas dynamics and MHD, *Comp.Phys.Comm.*, 109, 111 (1998).
166. Zinnecker, H., McCaughrean, M. J., & Rayner, J. T., *A symmetrically pulsed jet of gas from an invisible protostar in Orion*, *Nature* 394, 862-865 (1998).