UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DE BORG-MARCHENKO PARA EL OPERADOR DE SCHRÖDINGER CON ESPECTRO CONTINUO EN EL SEMI-EJE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

EDGAR NOE RODRÍGUEZ CRUZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RICARDO ALBERTO WEDER ZANINOVICH

2005

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Teorema de Borg-Marchenko para el operador de Schrödinger con espectro continuo en el semi-eje"

realizado por Edgar Noe Rodríguez Cruz

con número de cuenta 09519739-3, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich

Propietario Dr. Luis Octavio Silva Pereyra

Propietario Dr. Julio Hugo Toloza Pera

Suplente Dr. Rafael René Del Río Castillo

Suplente Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
DE
MATEMATICAS

Agradecimientos

Agradezco a mis padres.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por contribuir de manera tan grande en mi formación.

A mis amigos y compañeros de la facultad de ciencias Álvaro, Adrián, Ángel, Ángeles, Angélica, Antonio, América, Azael, Belén, Carlos, Carlos Zaragoza, Carlos Preisser, Claudio, Citlali, Germán, Kenia, Javier, Jorge, Juan Carlos, Daniela, Edgar, Fernando, Mario, Marisol, Marco, Miguel, Natalia, Pablo, Patricia, Pedro, Rafael, Ramón, Rosana, Santa Helena, Sergio, Violeta, Víctor. A Yvon por su gran apoyo.

Un especial agradecimiento a mis profesores Cesar Cedillo, Javier Páez, Alejandro Garciadiego y Maria de la Luz Teresa por haber contribuido a mi formación.

A mis sinodales: Dr. Ricardo Berlanga, Dr. Luis Octavio Silva, Dr. Julio Hugo Toloza y Dr. Rafael Del Río.

A Paola, Hoffman, Raymundo, Tania, Edgar e Igmar.

A Héctor e Ixchel quienes a pesar del tiempo seguimos juntos.

Un especial y sincero agradecimiento al Dr. Ricardo Weder, POR SER MI MAESTRO, POR SER MI asesor, por haber dirigido este trabajo de Tesis. Por sus enseñanzas, su paciencia y sus muy útiles consejos. Quien a pesar de mi renuencia, siempre ha sabido dirigirme EN ESTE PROCESO.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo esta basado en el artículo de investigación publicado por el Dr. Ricardo Weder y el Dr. Tuncay Aktosun y que lleva por nombre "Inverse Spectral-Scattering Problem With Two Sets Of Discrete Spectra For The Radial Schrödinger Equation"(ver [1]). Este trabajo tiene como objetivo principal desarrollar y explicar a detalle el artículo antes citado y cuyo contenido y estructura se exponen a continuación.

En los problemas inversos de la teoría espectral se trata de, a partir de algunos datos o características espectrales, reconstruir algún operador lineal, en este caso un operador diferencial lineal. Siendo que, en particular, los problemas inversos tratan ciertas clases especiales de operadores diferenciales ordinarios, en principio se considera la expresión diferencial

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

donde $V(x)$ toma valores reales, esta expresión induce un operador lineal, cabe hacer mención, de los más simples. Esta expresión es un caso particular de la ecuación de Sturm-Liouville (ver [5]. Se considera dicho operador definido sobre el semi-eje ($x \in (0, \infty)$), en tal caso al operador de Sturm-Liouville también se le llama operador unidimensional de Schrödinger y a la función V se le llama potencial.

Dado el operador de Schrödinger sobre el semi-eje se pretende entonces, a partir de ciertos datos del espectro para dos condiciones en el origen tales como la llamada función espectral, datos de dispersión, etc., no solo reconstruir el potencial V de dicho operador, sino también demostrar la unicidad en la reconstrucción de las condiciones en la frontera.

Remontándonos un poco hacia los orígenes del problema, es importante mencionar uno de los primeros y, por ello más importantes, resultados el cual fué desarrollado por Ambartsumyam en 1929 [27]. Este resultado nos dice lo siguiente:

Se considera el problema de Sturm-Liouville dado por

$$-\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x), \ x \in [0, \pi] \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dx}\varphi(0) = \frac{d}{dx}\varphi(\pi) = 0$$

donde V se supone una función real y continua, dados $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots$ son los eigenvalores asociados a dicho problema. Se tiene que, si $\lambda_n = n^2$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$, entonces $V \equiv 0$.

Otro nombre importante, sin duda fue el del matemático Borg, quien notó la importancia del resultado de Ambartsumyam. Es el quien inició la investigación sistemática acerca de los problemas inversos del operador clásico de Sturm-Liouville, Borg probó que en general un espectro no determina de forma única un operador de Sturm-Liouville y que el resultado de Ambartsumyam era una excepción. También Borg probó el siguiente resultado acerca de unicidad [28].

Para el problema

$$-\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = \lambda\varphi(x), \tag{1.2}$$

con $x \in [0, \pi]$. Si $\{\lambda_n\}_{j=0}^{\infty}$ es el conjunto de eigenvalores para las condiciones de frontera

$$\cos\alpha \cdot \varphi'(0) + \operatorname{sen}\alpha \cdot \varphi(0) = 0, \ \cos\beta \cdot \varphi'(\pi) + \operatorname{sen}\beta \cdot \varphi(\pi) = 0$$

y $\{\mu_n\}_{j=0}^{\infty}$ es el conjunto de eigenvalores para las condiciones a la frontera

$$\cos\gamma \cdot \varphi'(0) + \operatorname{sen}\gamma \cdot \varphi(0) = 0, \ \cos\beta \cdot \varphi'(\pi) + \operatorname{sen}\beta \cdot \varphi(\pi) = 0$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi)$, $\alpha \neq \gamma$. Entonces ambos conjuntos, $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, determinan de forma unica α, β, γ y V.

Borg [30] y Marchenko [31] estudiaron el operador de Sturm-Liouville inducido por la forma diferencial (1.2) en el semi-eje, $x \in [0, \infty)$, con la condición a la frontera en el origen,

$$\cos\alpha \cdot \varphi'(0) + \operatorname{sen}\alpha \cdot \varphi(0) = 0, \ \ \alpha \in [0, \pi),$$

en el caso en que no hay espectro continuo. Borg [30] y Marchenko [31] demostraron que los espectros discretos asociados a dos condiciones a la frontera en cero diferentes (con una condición a la frontera fija en $x = +\infty$, en el caso en que sea necesaria) determina univocamente el potencial y las condiciones a la frontera en cero. En [1] se generaliza el resultado de Borg-Marchenko para el caso en que también hay espectro continuo.

Es en 1952 cuando Gel'fand y Levitan publican un método ([4], [13], [29]) para la reconstrucción del operador de Sturm-Liouville a través de la función espectral, además de dar una caracterización de la función espectral para el operador de Sturm-Liouville ya sea en el semi-eje o en toda la recta real. Se puede encontrar una amplia referencia histórica en textos como [4], [13], [17], [18] y [19].

Con respecto a la estructura general del trabajo en el Capítulo 2 se reseña de forma breve la base teórica matemática necesaria para el desarrollo del resultado, de modo mas específico, se comentan y citan resultados básicos acerca de los espacios de Hilbert, operadores lineales en espacios de Hilbert, operadores simétricos, existencia y unicidad de sus extensiones auto-adjuntas, así como sus propiedades espectrales. Se dan por conocidos temas tales como topología de espacios métricos y resultados generales acerca de la medida de Lebesgue y la medida de Lebesgue-Stieltjes desarrollándose con cierto detalle la medida espectral y resultados referentes a la función espectral. En su momento se comentan resultados básicos de los espacios L^2 y espacios que se pueden identificar como subconjuntos de L^2 tales como los espacios de Sobolev $W_{2,n}$. Acerca de la bibliografía se encuentran excelentes textos en los cuales se ha basado este segundo capítulo tales como [2], [3], [6], [7], [9] y [10].

El Capítulo 3 se refiere a hechos relacionados con el operador unidimensional de Schrödinger $l = -d^2/dx^2 + V(x)$ tales como su dominio de definición, la existencia y unicidad de su realización auto-adjunta (la cual depende de las condiciones a la frontera determinadas por α y se le llama H_α), así como sus propiedades espectrales y la función espectral relacionada a dicho operador. Se hace especial énfasis en la solución de Jost, a partir de la cual se define la función de Jost y esta a su vez nos proporciona propiedades espectrales importantes del operador unidimensional de Schrödinger. Esta parte del trabajo se ha basado en textos como [4], [5] y [12], en los cuales se desarrollan de forma amplia y detallada las propiedades de operadores, en algunos casos, mas generales que el operador $l = -d^2/dx^2 + V(x)$.

También en el Capítulo 3 se exhiben los distintos métodos que se han desarrollado para la reconstrucción del potencial $V(x)$. Se citan el método de Gel'fand-Levitan, el método de Marchenko, y el método de Faddeev-Marchenko, mostrando los diferentes conjuntos de datos necesarios en cada método así como las ecuaciones integrales asociadas a cada uno de estos.

Esta parte del trabajo esta basada en textos como [4] y [13], así como del artículo en el cual se basa este trabajo (ver [1]) y que corresponde a la sección 5 del mismo.

Sabiendo ahora el contexto en el que estamos situados, en el Capítulo 4 se procede a enunciar y demostrar los resultados preliminares para la exposición y demostración del resultado final. Este capítulo corresponde a la tercera parte del artículo [1], sobre el cual se trabajó. Se da una representación explícita de la función de Jost para los distintos casos $\alpha \in (0, \pi)$ y $\alpha = \pi$, se observan y demuestran propiedades importantes del comportamiento asintótico de dicha función y propiedades del comportamiento de los autovalores del operador H_α, para las condiciones a la frontera inducidas por $\alpha, \beta \in (0, \pi]$,con $\alpha \neq \beta$.

Finalmente en el Capítulo 5 se expone el resultado central de este trabajo correspondiente a las secciones 2 y 4 del artículo [1]. El resultado consta de ocho teoremas (Aktosun-Weder, [1]), en los cuales se analizan ocho distintos casos para los datos espectrales involucrados en la reconstrucción de $V(x)$, α y β, se generaliza el teorema de Borg-Marchenko cuando se tiene un espectro continuo en el semi-eje. Se prueba que el potencial y las condiciones a la frontera se determinan de forma única a partir de datos apropiados que contienen los autovalores discretos para una condición a la frontera, la parte continua de la medida espectral para esa condición a la frontera y un subconjunto de los autovalores discretos para una condición a la frontera diferente. En la última sección de este capítulo se han incluido algunos ejemplos ilustrando algunos de los teoremas que conforman el resultado principal y que han sido tomados de la sección 6 del artículo [1].

Capítulo 2

Elementos del análisis funcional

Este capítulo es una breve discusión de los conceptos de análisis que serán utilizados en el desarrollo del texto, esto debido a que es nuestra principal herramienta teórica. Se puede encontrar una amplia y detallada exposición de estos temas en textos como [2], [3], [7], [9] y [10], de donde se ha basado esta parte del presente trabajo.

En las siguientes secciones se definen y se citan algunos resultados importantes de los espacios de Hilbert, esto es, espacios vectoriales y espacios vectoriales con producto interno, operadores lineales, operadores lineales auto-adjuntos, valores y vectores propios, acerca del espectro y del resolvente de operadores auto-adjuntos, así como algunos resultados importantes de la teoría espectral para operadores auto-adjuntos.

2.1. Espacios de Banach. Espacios de Hilbert

El concepto básico algebraico dentro de la teoría de los espacios de Hilbert es la noción de espacio vectorial el cual se supone conocido, así como los conceptos básicos de teoría de la medida (definición de medida, definición de integral, medida e integral de Lebesgue, etc.) y de topología general (punto límite, punto de acumulación, cerradura, densidad, separabilidad, etc.). En adelante se consideran, salvo excepciones explícitas espacios vectoriales complejos. Comenzamos con dos definiciones importantes.

Definición 2.1 *(Producto interno, espacio con producto interno)*

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un mapeo dado $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ se llama producto interno en E si para cualesquiera $u, v, w \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se verifica:

a) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ *(donde la barra denota el complejo conjugado).*

b) $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$.

c) $\langle u, u\rangle > 0$ *para toda* $u \in E$, $u \neq 0$, $\langle u, u\rangle = 0$ *si y solo si* $u = 0$.

Al par $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *se le llama espacio con producto interno.*

Definición 2.2 *(Norma, espacio normado)*

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una norma es un mapeo $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ el cual, dados $u, v \in E$, $\alpha \in \mathbb{C}$ se satisface:

a) $\|u\| = 0$ *si y solo si* $u = 0$.

b) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$.

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Al par $(E, \|\cdot\|)$ *se le llama espacio normado*

Se sabe que, dado un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ podemos definir una métrica, la cual a su vez genera una topología, entonces tiene sentido hablar de propiedades en el espacio E méramente topológicas como convergencia, densidad, separabilidad, etc. Recordemos que dada una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, se dice que (u_n) es sucesión de Cauchy si dados $n, m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ para toda $n, m \geq n_0$.

Definición 2.3 *(Completés)*

Un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ se dice que es completo si dada una sucesión de Cauchy (u_n) de elementos de E y $\varepsilon > 0$ existe $u \in E$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u - u_n\| < \varepsilon$ para toda $n \geq n_0$. Esto es (u_n) converge a u bajo la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$. Esto se denota usualmente como $u_n \to u$, para $n \to \infty$.

Existen otras formas equivalentes de esta definición (ver [8]), sin embargo se tomara ésta por ser la más común. Por otro lado, si se tiene un espacio con producto interno $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, podemos definir una norma en E poniendo simplemente $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$, $u \in E$. A esta norma se le llama la norma inducida por el producto interno en E.

Definición 2.4 *(Espacio de Banach)*

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Se dice que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si es completo en el sentido de la Definición (2.3)

Para ilustrar los conceptos anteriores se citan a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.1 *(El espacio $L^{\infty}(M)$)*
Sea $M \subset \mathbb{R}$ conjunto λ-medible (de aquí en adelante λ denotará la medida de Lebesgue) y definamos $\mathfrak{M}(M) = \{f : M \to \mathbb{C} : \ f \ \lambda - \text{medible}\ \}$. Se define el espacio

$$L^{\infty}(M) = \{f \in \mathfrak{M}(M) : \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| < c \text{ casi dondequiera en } M\}$$

y la norma en $L^{\infty}(M)$ esta dada por:

$$\|f\|_{\infty} = \text{ínf}\{c > 0 : \lambda\{(x \in M : |f(x)| > c)\} = 0\}$$

mas aún, se puede probar (ver [2], [3]) que, dada una sucesión de Cauchy (f_n) de elenmentos de $L^{\infty}(M)$, existe $f \in L^{\infty}(M)$ tal que $f_n \to f$ en el sentido de $\|\cdot\|_{\infty}$, es decir, $(L^{\infty}(M), \|\cdot\|_{\infty})$ es completo.

Ejemplo 2.1.2 *(El espacio $L^1(M)$)*
Sea $M \subset \mathbb{R}$ conjunto λ-medible denotemos por $\mathfrak{L}^1(M)$ el conjunto definido como:

$$\mathfrak{L}^1(M) = \{\ f : M \to \mathbb{C},\ \lambda - \text{medibles} \quad : \int_M |f(x)|dx < +\infty\}$$

es fácil ver que este conjunto resulta ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ en el cual podemos definir la relación de equivalencia $\sim$ dada por

$$f \sim g \text{ si y solo si } \lambda(\{x \in M : f \neq g\}) = 0$$

a partir de $\mathfrak{L}^1(M)$ y la relación $\sim$ se define formalmente $\mathrm{L}^1(M)$ como

$$\mathrm{L}^1(M) = \mathfrak{L}^1(M)/\sim$$

y la norma en $\mathrm{L}^1(M)$ viene dada por

$$\|f\|_1 = \int_M |f|dx$$

se puede probar que este espacio es completo (Teorema de Riesz, ver [3])

Espacios de particular importancia son los llamados espacios de Hilbert cuya definición se cita a continuación (ver [3])

Definición 2.5 *(Espacio de Hilbert) Un espacio vectorial E con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se dice que es un espacio de Hilbert si es completo en el sentido de la norma inducida por su producto interno, esto es $H = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, es completo bajo la norma dada por $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$*

Dado un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y su norma asociada $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ se verifica la llamada desigualdad de Schwarz:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \; x,y \in E. \tag{2.1}$$

Una condición que se pedirá de aquí en adelante respecto a los espacios de Hilbert es la separabilidad, es decir, dado un espacio de Hilbert H, existe $D \subset H$, D numerable tal que $\overline{D} = H$ o, dicho de otro modo, $D = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ tal que, dada $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in H$, existe $\varphi_\varepsilon \in D$ tal que $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\| < \varepsilon$. Se prueba (ver [2], [3] o [7]) que esta definición es equivalente a decir que existe una sucesión ortonormal completa, $(\varphi_n) \subset H$, $\|\varphi_n\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tal que para cualquier $\varphi \in H$, existe $(\mu_n) \subset \mathbb{C}$ tal que φ se puede representar como

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n$ se entiende como una serie de elementos de H que converge en la norma inducida por el producto interno de dicho espacio.

Ejemplo 2.1.3 *(El espacio* $\mathrm{L}^2(M)$*) Dado un subconjunto* $M \subset \mathbb{R}$ *λ-medible, se define el espacio* $\mathrm{L}^2(M)$ *como*

$$\mathrm{L}^2(M) = \{f : M \to \mathbb{C} : |f|^2 \in \mathrm{L}^1(M)\}$$

con el producto interno dado por

$$\langle f,g\rangle := \int_M f(x)\overline{g(x)}dx$$

así, la norma en $\mathrm{L}^2(M)$ *esta dada por*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_M |f(x)|^2 dx}$$

Se prueba (ver, p.ej.[2], [3]) que $\mathrm{L}^2(M)$ *es completo bajo dicha norma.*

Dos hechos importantes que debemos recordar a cerca de $\mathrm{L}^2(M)$ son: recordemos que $\mathrm{L}^2(M)$ es separable (esto es claro tomando funciones simples con valores racionales). Por otro lado $\mathrm{L}^2(M)$ resulta ser la completación del espacio $C^\infty(M)$ definido como (ver [11]):

$$C^\infty(M) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(M),$$

donde $C^n(\Omega)$ se define de manera recursiva del siguiente modo

$$C(\Omega) = C^0(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ continua } \},$$

y

$$C^n(\Omega) = \{f : f \in C^{n-1}(\Omega), \frac{d^n f}{dx^n} \in C(\Omega)\}$$

Ejemplo 2.1.4 *(Espacios de Sobolev) Sean $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a < b$. Definamos el conjunto:*

$$\begin{aligned} A_n(a,b) \ &= \ \{f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C} : f, f', \cdots, f^{(n-2)} \text{ son continuamente} \\ &\quad \text{diferenciables en } (a,b) \text{ y } f^{(n-1)} \text{ es absolutamente continua en } (a,b)\} \end{aligned}$$

Donde $' = \frac{d}{dx}$. Notemos que para $f \in A_n(a,b)$ existe la n-esíma derivada $f^{(n)}$ casi en todo punto, la cual es integrable sobre cada conjunto compacto de (a,b). Además, para $a < \alpha < \beta < b$, dada una función absolutamente continua $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se verifica la relación:

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta g(x) f^{(j)}(x) dx \ &= \ g(\beta) f^{(j-1)}(\beta) - g(\alpha) f^{(j)}(\alpha) - \\ &\quad - \int_\alpha^\beta g'(x) f^{(j-1)}(x) dx. \end{aligned}$$

Se cita a continuación el siguiente teorema (ver [2]):

Proposición 1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, cada intervalo (a,b), y cada $\epsilon > 0$ existe una $C > 0$ tal que para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y toda $f \in A_n(a,b)$ se tiene que*

$$\int_a^b |f^{(j)}(x)|^2 dx \leq \epsilon \int_a^b |f^{(n)}(x)|^2 dx + C \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Aquí se considera la integral como ∞ (infinita) en caso de que el integrando sea no integrable.

De esta última proposición para $f \in A_n(a,b) \cap L^2(a,b)$ y $f^{(n)} \in L^2(a,b)$ se sigue que $f^{(j)} \in L^2(a,b)$ para $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$

Definición 2.6 *El espacio de Sobolev de orden n sobre (a,b) se define como*

$$W_{2,n}(a,b) = \{f \in A_n(a,b) \cap L^2(a,b) : f^{(n)} \in L^2(a,b)\}.$$

Proposición 2 *Sea (a,b) cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $f \in W_{2,n}(a,b)$. Si $-\infty < a$, entonces $f^{(j)}$ se puede extender continuamente al punto a para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.*

2.2. Ortogonalidad y teorema de proyección

En la presente sección se mencionan e ilustran con ejemplos algunos resultados importantes a cerca de la ortogonalidad en los espacios de Hilbert. Dado un espacio de Hilbert H, un subconjunto de $E \subset H$ se llama subespacio de H si es un subespacio vectorial cerrado en H, es decir, E resulta ser por si mismo un espacio de Hilbert en H. Para un espacio de Hilbert H, donde es $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su producto interno, se dice que, dados $\varphi, \psi \in H$, φ es ortogonal a ψ $(\varphi \perp \psi)$ si $\langle\varphi, \psi\rangle = 0$. Dado un subconjunto arbitrario $A \subset H$ y $\varphi \in H$ se dice que φ es ortogonal a A $(A \perp \varphi)$ si $\langle\psi, \varphi\rangle = 0$ para toda $\psi \in A$. Así, si $A, B \subset H$ son dos subconjuntos cualesquiera se dice que A es ortogonal a B si para cualesquiera $\varphi \in A$, $\psi \in B$ se verifica $\langle\varphi, \psi\rangle = 0$. Por último, para $A \subset H$ definimos el complemento ortogonal de A como el subconjunto de H dado por $A^\perp = \{\varphi \in H : \varphi \perp A\}$.

Dado un subconjunto $A \subset H$ donde H es un espacio de Hilbert, podemos definir $L(A)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de A:

$$L(A) = \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \in H : \alpha_k \in \mathbb{C}, \varphi_k \in A, k = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposición 3 *Sea H un espacio de Hilbert y sean $A, B \subset H$. Entonces*

a) $H^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = H$.

b) $A^\perp$ es un subespacio cerrado de H. $(A^\perp = \overline{A^\perp})$.

c) Si $A \subset B$ entonces $B^\perp \subset A^\perp$.

d) $A^\perp = L(A)^\perp = \overline{L(A)}^\perp$.

e) $L(A)$ es el subespacio mas pequeño de H que contiene a A.

Un resultado importante de ortogonalidad, es el llamado teorema de proyección.

Proposición 4 *(Teorema de proyección) Sea H un espacio de Hilbert y $S \subset H$ un subespacio cerrado de H. Entonces*

a) $S^{\perp\perp} = S$, donde $S^{\perp\perp} = (S^\perp)^\perp$.

b) Dado $\varphi \in H$ existe una única descomposición de la forma $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, donde $\varphi_1 \in S$, $\varphi_2 \in S^\perp$.

Se puede decir más acerca de este último resultado. Dado un espacio de Hilbert H y S_1, S_2 dos subespacios de H tales que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ definimos $S_1 + S_2 = \{\varphi \in H : \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ con $\varphi_1 \in S_1$, $\varphi_2 \in S_2\}$, a $S_1 + S_2$ se le llama suma directa de S_1 y S_2. Además si $S_1 \perp S_2$, a $S_1 + S_2$ se le llama suma ortogonal y se denota como $S_1 \oplus S_2$. Ahora bien, si S en un subespacio de H, por el teorema de proyección se tiene la descomposición de H de la forma $H = S \oplus S^{\perp}$. Por otro lado, dado $D \subset H$, D es denso si y sólo si el único vector ortogonal a D en H es el vector nulo.

Ejemplo 2.2.1 *Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y consideremos el espacio $L_2(-a, a)$. Consideremos a continuación los subespacios de $L_2(-a, a)$ dados por*

$$\begin{aligned} T_+ &= \{f \in L_2(-a,a) : f(x) = f(-x) \text{ c. d. en } (-a,a)\} \\ T_- &= \{f \in L_2(-a,a) : -f(x) = f(-x) \text{ c. d. en } (-a,a)\} \end{aligned}$$

Para $f \in L^2(-a, a)$ se tiene que $f(x) = g(x) + h(x)$, donde $g \in T_+$, $h \in T_-$ y están dadas por las fórmulas $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$ y $h(x) = (f(x) - f(-x))/2$. Además $T_+ \cap T_- = \{0\}$ y para $g \in T_+$, $h \in T_-$ se tiene

$$\langle g, h\rangle = \int_{-a}^{a} g(x)\overline{h(x)}dx = \int_{-a}^{0} g(x)\overline{h(x)}dx + \int_{0}^{a} g(x)\overline{h(x)}dx = 0$$

esto es $L^2(-a, a) = T_+ \oplus T_-$.

Ejemplo 2.2.2 *Sean $-\infty \leq a \leq c \leq b \leq \infty$ y definamos en $L^2(a, b)$ los subespacios*

$$\begin{aligned} T_1 &= \{f \in L_2(a,b) : f = 0 \text{ c. d. en } (a,c)\} \\ T_2 &= \{f \in L_2(a,b) : f = 0 \text{ c. d. en } (c,b)\} \end{aligned}$$

Ambos son subespacios de $L^2(a, b)$ y $T_1 \cap T_2 = \{0\}$. Para $f \in T_1$, $g \in T_2$ se tiene $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = 0$, es decir $T_1 \perp T_2$ y dado $f \in L^2(a, b)$ dicho elemento se puede expresar de la forma $f(x) = g(x) + h(x)$, donde $g(x) = \chi_{[a,c]}(x)f(x)$ y $h(x) = \chi_{[c,d]}(x)f(x)$. De esto concluimos que $L^2(a, b) = T_1 \oplus T_2$.

2.3. Operadores lineales en espacios de Hilbert

Sean dos espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ H_1 y H_2. A un mapeo de H_1 en H_2, T, se le llama operador lineal, o simplemente operador de H_1 en H_2 si T es lineal y esta definido es un subespacio vectorial $D(H_1)$ de H_1 (llamado dominio de T). Bajo esta última condición se comprueba fácilmente que el rango de T, $T(D(H_1))$ resulta ser también un subespacio vectorial de H_2. Si $H_1 = H = H_2$ a T se le llama simplemente operador en H. Si $H_1 = H$, $H_2 = \mathbb{C}$ a T se le llama funcional lineal. Un operador lineal T es inyectivo si y solo si $T\varphi = 0$ implica $\varphi = 0$. Para T inyectivo podemos definir T^{-1} del siguiente modo $D(T^{-1}) = R(D(T))$, $T^{-1}\psi = \varphi$, donde $T\varphi = \psi$, $\psi \in D(T^{-1}) = R(D(T))$. Es sencillo comprobar la linealidad de T^{-1} que, además, resulta ser operador de H_2 en H_1. Dados los espacios de Hilbert H_1, H_2 y H_3 se definen las siguientes operaciones básicas entre operadores:

Sean $T_1 : D(T_1) \to H_2$, $T_2 : D(T_2) \to H_2$ con $D(T_1), D(T_2) \subset H_1$. Producto por escalar: Para $\alpha \in \mathbb{C}$ se define αT, para $T = T_1$, del siguiente modo

$$D(\alpha T) = D(T), \ (\alpha T)\varphi = \alpha(T\varphi), \ \varphi \in D(T).$$

Suma: Se define la suma $T_1 + T_2$ como

$$D(T_1 + T_2) = D(T_1) \cap D(T_2), \ (T_1 + T_2)\varphi = T_1\varphi + T_2\varphi, \ \varphi \in D(T_1 + T_2).$$

Composición. Por último si $T_2 : D(T_2) \to H_3$, $D(T_2) \subset H_2$ se define el producto (composición de operadores) T_2T_1 como

$$D(T_2T_1) = \{\varphi \in D(T_1) : T_1\varphi \in D(T_2)\}, \ (T_2T_1)\varphi = T_2(T_1\varphi), \ \varphi \in D(T_2T_1).$$

De esta última definición se observa que si $T_1 = T$, $T_2 = T^{-1}$ entonces $T^{-1}T = I|_{D(T)}$ y $TT^{-1} = I|_{D(T^{-1})}$, donde I es el operador identidad.

Si T_1, T_2 son dos operadores de H_1 en H_2, se dice que T_1 es una extensión de T_2 ($T_2 \subset T_1$) si $D(T_2) \subset D(T_1)$ y $T_1\varphi = T_2\varphi$ para toda $\varphi \in D(T_2)$. Si H_1 y H_2 son dos espacios de Hilbert y $D \subset H_1$ es un subespacio, el conjunto de todos los operadores T de H_1 en H_2 tales que $D(T) = D$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, el cero en dicho espacio esta dado por $T_0\varphi = 0$ para toda $\varphi \in D$.

Ejemplo 2.3.1 *Sea H un espacio de Hilbert y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto interno definido en H. Para $\varphi_0 \in H$ fijo podemos definir, debido a las propiedades del producto interno, el funcional lineal $T_{\varphi_0} : H \to \mathbb{C}$ dado por la expresión*

$$T_{\varphi_0}\varphi = \langle\varphi, \varphi_0\rangle$$

Ejemplo 2.3.2 *Considérese el subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ dado por $L_0^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \exists k > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$* c. d. *y $f(x) = 0$ c.d. para $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x| > k\}$. Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función continua. Definamos $T : L_0^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ como*

$$T_\psi f = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi(x)}dx$$

se tiene pues que T_ψ es un funcional lineal que se puede extender, por continuidad, a todo el espacio $L^2(\mathbb{R})$

Ejemplo 2.3.3 *(Proyección ortogonal) Para H espacio de Hilbert y $S \subset H$ subespacio se tiene que $H = S \oplus S^{\perp}$. Así, dada $\varphi \in H$, φ tiene una descomposición única de la forma $\varphi = f + g$ con $f \in S$, $g \in S^{\perp}$. Definimos la proyección ortogonal sobre S como el operador $P_S : H \to S$ dado por*

$$P_S(\varphi) = P_S(f + g) = f$$

P_S resulta ser un operador lineal definido en todo H

Dado un operador $T : D(T) \to H_2$, $D(T) \subset H_1$ se dice que T es continuo en $\varphi \in D(T)$ si $(\varphi_n) \subset D(T)$ es tal que $\varphi_n \to \varphi$, $n \to \infty$, entonces $T\varphi_n \to T\varphi$ cuando $n \to \infty$. T es continuo en $D(T)$ si es continuo en φ para toda $\varphi \in D(T)$. Se dice que T es acotado si existe $k > 0$ tal que $\|T\varphi\| \leq k\|\varphi\|$ para todo $\varphi \in D(T)$.

Proposición 5 *Dado $T : D(T) \to H_2$, $D(T) \subset H_1$ las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

a) T es continuo en cero.
b) T es continuo.
c) T es acotado.

Ejemplo 2.3.4 *Consideremos, para $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, el funcional lineal T_φ como*

$$T_\varphi f = \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi}(x)dx$$

entonces, por la desigualdad de Schwarz, se tiene

$$\|T_\varphi f\| = |\langle f, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|\|f\|,$$

es decir, T_φ es acotada.

Ahora bien dado un operador $T : D(T) \to H_2$, $D(T) \subset H_1$ acotado la siguiente expresión define una norma para T

$$\|T\| = \inf\{c \geq 0 : \|T\varphi\| \leq c\|\varphi\| \text{ para toda } \varphi \in D(T)\} \tag{2.2}$$

y esta norma es equivalente a

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|T\varphi\| : \|\varphi\| = 1, \varphi \in D(T)\} \\ &= \sup\{\|T\varphi\| : \|\varphi\| \leq 1, \varphi \in D(T)\} \\ &= \sup\{\|T\varphi\| : \|\varphi\| < 1, \varphi \in D(T)\} \end{aligned}$$

Por otro lado, el conjunto de los operadores con un dominio común define un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Si se define $\mathfrak{B}(H_1, H_2) = \{T$ operador de H_1 en $H_2 : T$ es acotado y esta densamente definido$\}$ se tiene que el espacio $(\mathfrak{B}(H_1, H_2), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si H_2 es un espacio de Hilbert, donde la norma $\|\cdot\|$ esta definida como en (2.2). Si $H_1 = H_2 = H$, se escribe simplemente $\mathfrak{B}(H)$. Aquí al decir que $\mathfrak{B}(H_1, H_2)$ es completo implícitamente estamos hablando de propiedades topológicas, para precisar esto definimos la convergencia en $\mathfrak{B}(H_1, H_2)$ como:

Definición 2.7 *(Convergencia fuerte. Convergencia débil. Convergencia en norma)*

a) Dada $(T_n) \subset \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ se dice que (T_n) es fuertemente convergente a T si para toda $\varphi \in H_1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} T_n\varphi = T\varphi$ en H_2 y se escribe $T_n \to_s T$.

b) Para $(T_n) \subset \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ se dice que (T_n) es débilmente convergente a T si para toda $\varphi \in H_1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty}\langle T_n\varphi, \psi\rangle = \langle T\varphi, \psi\rangle$ para cualquier $\psi \in H_2$, en tal caso se escribe $T_n \to_w T$.

c) Dada $(T_n) \subset \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ se dice que (T_n) converge en norma a T si $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$.

Definición 2.8 *Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert. Dado $T : D(T) \to H_2$, $D(T) \subset H_1$ se dice que*

a) T esta densamente definido si $D(T)$ es denso en H_1 (esto es $\overline{D(T)} = H_1$).

b) Para $H_1 = H_2 = H$ un operador T densamente definido en el espacio de Hilbert H se dice simétrico si para cualesquiera φ_1,$\varphi_2 \in D(T)$ se tiene que $\langle T\varphi_1, \varphi_2\rangle = \langle \varphi_1, T\varphi_2\rangle$.

Proposición 6 *Dados H_1 y H_2 espacios de Hilbert. Sea $T : D(T) \to H_2$, $D(T) \subset H_1$ y T acotado. Entonces existe una única extensión S de T tal que $D(S) = \overline{D(T)}$ y $\|S\| = \|T\|$. Para el caso en que $D(T)$ es denso se observa que T se puede extender de manera única a todo el espacio H_1.*

Habiendo discutido la definición de operadores entre espacios de Hilbert y sus propiedades básicas podemos hablar ahora de una clase de operadores con características especiales, estos son los llamados operadores adjuntos.

Definición 2.9 *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y T un operador de H_1 en H_2, S un operador de H_2 en H_1. El operador S se llama adjunto formal de T si para cualesquiera $\varphi \in D(T)$, $\psi \in D(S)$ se tiene*

$$\langle \psi, T\varphi\rangle_{H_2} = \langle S\psi, \varphi\rangle_{H_1}$$

Observemos que bajo esta definición T también es adjunto formal de S, es decir, S y T son adjuntos formales el uno del otro. El operador S_0 con $D(T) = \{0\}$ es adjunto formal de todo operador T de H_1 en H_2.

Ahora, si S es adjunto formal de T, entonces, para $\psi \in D(S) \subset H_2$, el funcional lineal dado por

$$D(L_\psi) = D(T),\ L_\psi(\varphi) = \langle T\varphi, \psi\rangle$$

es continuo y se tiene que

$$L_\psi(\varphi) = \langle T\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, S\psi\rangle$$

es decir, L_ψ es la restricción a $D(T)$ del funcional $T_{S\psi}$ inducido por $S\psi$

De la Proposición 6 si $D(T)$ es denso en H_1 y L_ψ es continuo, L_ψ se puede extender de manera única a todo $H_1 = \overline{D(T)}$ es decir, existe un único $f_\psi \in H_1$ determinado por ψ y T y dado por

$$\langle T\varphi, \psi\rangle = L_\psi(\varphi) = \langle \varphi, f_\psi\rangle$$

y si S es adjunto formal de T para $\varphi \in D(L_\psi)$, $\psi \in D(S)$ se tendrá $f_\psi = S\psi$.

Antes de definir el operador adjunto se considera T un operador densamente definido de H_1 en H_2 y sea

$$\begin{aligned} D^* &= \{\psi \in H_2 : L_\psi(\cdot) \text{ es continua en } D(T)\} \\ &= \{\psi \in H_2 : \exists f_\psi \in H_1 \text{ tal que } \langle \varphi, f_\psi\rangle = \langle T\varphi, \psi\rangle\} \end{aligned}$$

aquí D^* es un subespacio de H_2 y el mapeo $D^* \to H_1$ dado por $\psi \mapsto f_\psi$ es por definición una transformación lineal, de este modo podemos concretar la definición de operador adjunto del siguiente modo

Definición 2.10 *(Operador adjunto) Sea T un operador densamente definido de H_1 en H_2, el operador T^* de H_1 en H_2 dado por*

$$D(T^*) = D^*,\ T^*\psi = f_\psi,\ \psi \in D$$

se llama operador adjunto de T

Notemos que cada adjunto formal de T es una restricción de T^*, de hecho, se pueden probar los siguientes resultados:

Proposición 7 *Sea T un operador densamente definido de H_1 en H_2. Entonces*

a) Si T^* esta densamente definido entonces T^{**} es una extensión de T.
b) $N(T^*) = R(T)^\perp$.

Proposición 8 *Sea T un operador densamente definido de H_1 en H_2. Entonces*

a) T es acotado si y solo si $T^* \in \mathfrak{B}(H_2, H_1)$.

b) Si T es acotado, entonces $\|T\| = \|T^*\|$.

c) Si T es acotado, entonces T^{**} es la extensión continua de T a todo el espacio H_1.

En esta última proposición se habla de la extensión continua de T a todo el espacio H_1, pues T^{**} resulta ser única (Proposición 6). Por otro lado, para $T \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ se tiene que $T = T^{**}$

Ejemplo 2.3.5 *Sea T un funcional lineal es un espacio de Hilbert H. Para calcular T^*, por el teorema de representación de Riesz, existe un único $\psi \in H$ tal que*

$$T\varphi = \langle \varphi, \psi \rangle \text{ para toda } \varphi \in H$$

entonces, para $\zeta \in \mathbb{C}$ y $\varphi \in H$ se tiene

$$T\varphi\overline{\zeta} = \langle \varphi, \zeta\psi \rangle.$$

Definición 2.11 *(Operador auto-adjunto)*

Sea H un espacio de Hilbert. Un operador T en H se dice que es auto-adjunto si T esta densamente definido $D(T)$ y $T = T^*$

Recordemos que un operador densamente definido es simétrico si $T \subset T^*$, esto es, si $\langle T\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, T\psi \rangle$ para todo $\varphi, \psi \in D(T)$.

Para dos espacios de Hilbert H_1 y H_2 los operadores adjuntos y auto-adjuntos tienen las siguientes propiedades básicas

Proposición 9 *Sean S, T operadores densamente definidos de H_1 en H_2 tales que $S \subset T$. Entonces $T^* \subset S^*$*

Proposición 10 *Sean T_1 en T_2 operadores densamente definidos de H_1 en H_2 y de H_2 en H_3 respectivamente*

a) Si T_2T_1 está densamente definido entonces $T_1^*T_2^* \subset (T_2T_1)^*$.

b) Si $T_2 \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ entonces $T_1^*T_2^* = (T_2T_1)^*$.

Proposición 11 *Sean S, T operadores de H_1 en H_2*

a) Si T está densamente definido entonces $(aT)^* = \overline{a}T^*$, para $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

b) Si $S + T$ está densamente definido, entonces $S^* + T^* \subset (S + T)^*$.

c) Si $S \in \mathfrak{B}(H_1, H_2)$ y T está densamente definido entonces $(S + T)^* = S^* + T^*$.

Proposición 12 *Sea T auto-adjunto e inyectivo. Entonces T^{-1} es también auto-adjunto*

Dados los espacios de Hilbert H_1 y H_2, un operador T de H_1 en H_2 se dice que es cerrado si verifica la siguiente condición

Definición 2.12 *(Operador cerrado) Un operador T es cerrado si dada una sucesión convergente (φ_n) en $D(T) \subset H_1$ tal que $(T\varphi_n)$ es convergente en H_2, entonces se verifica $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \in D(T)$ y $\lim_{n\to\infty} T\varphi_n = T\varphi$*

Esta definición es equivalente a, dada $(\varphi_n) \subset D(T)$ tal que $(\varphi_n) \to 0$ entonces $T\varphi_n \to 0$ en H_2. Para algunos operadores T la manera mas natural de definir una extensión $\overline{T}$ en $\overline{D(T)}$ es, dada $(\varphi_n) \subset D(T)$ sucesión de Cauchy, si $(T\varphi_n)$ resulta ser también sucesión de Cauchy tal que $T\varphi_n \to \psi \in H_2$ con $\varphi_n \to \varphi \in H_1$, entonces podemos definir $\overline{T}\varphi = \psi$. Esta construcción es válida siempre y cuando el elemento ψ sea independiente de la elección de la sucesión (φ_n).

Definición 2.13 *(Operador cerrable) Dado un operador T de H_1 en H_2 T es cerrable si, dada $(\varphi_n) \subset D(T)$ tal que $\varphi_n \to 0$ y $(T\varphi_n)$ es de Cauchy en el sentido de $\|\cdot\|$, entonces $T\varphi_n \to 0$.*

Así, dado un operador cerrable T de H_1 en H_2, se tiene que $\overline{T}$ es una extensión cerrada de T, mas aún, $\overline{T}$ es el operador cerrado mas pequeño que contiene a T. A partir de esta última definición se pueden establecer los siguientes resultados:

Proposición 13 *Dado un operador T de H_1 en H_2, definimos en $D(T)$ el producto escalar y la norma dadas por*

$$\langle\varphi,\psi\rangle_T = \langle\varphi,\psi\rangle_{H_1} + \langle T\varphi, T\psi\rangle_{H_2} \text{ y } \|\varphi\|_T = (\|\varphi\|_{H_1} + \|T\varphi\|_{H_2})^{1/2}$$

a esta última se le llama T-norma. Entonces T es cerrado si y solo si $(D(T), \|\cdot\|_T)$ es un espacio de Hilbert.

Proposición 14 *Sea T un operador densamente definido de H_1 en H_2, entonces*

a) T^* es cerrado.

b) T es cerrable si y solo si T^* esta densamente definido. Se tiene entonces la igualdad $\overline{T} = T^{**}$.

c) Si T es cerrable, entonces $\overline{T}^* = T^*$.

Se ha visto que, dado un operador T de H_1 en H_2, una manera de extender T, es caso de ser posible, es tomando $\overline{T}$. Por otro lado, si S de H_1 en H_2 es un operador simétrico se tiene que $S \subset S^*$ y para cada extensión simétrica se tiene la relación $S \subset T \subset T^* \subset S^*$. Existe entonces la posibilidad de encontrar una extensión T suficientemente grande de S tal que T sea auto-adjunto, es decir, se tendrá $S \subset T = T^* \subset S^*$.

Definición 2.14 *Un operador simétrico T en un espacio de Hilbert H se dice que es esencialmente auto-adjunto si $\overline{T}$ es auto-adjunto.*

A partir de esto se pueden establecer los siguientes resultados

Proposición 15 *Un operador T en un espacio de Hilbert H es esencialmente auto-adjunto si y solo si T^* es simétrico. Entonces se tiene $\overline{T} = T^*$*

Proposición 16 *Sean T_1, T_2 operadores de H_1 en H_2, entonces*

a) Si $T_1 \subset T_2$ y T_1, T_2 son operadores auto-adjuntos, entonces $T_1 = T_2$.

b) Si S es un operador simétrico de H_1 en H_2 y T_1, T_2 son extensiones auto-adjuntas de S tales que $D(T_1) \subset D(T_2)$, entonces $T_1 = T_2$.

c) Si S de H_1 en H_2 es esencialmente auto-adjunto, entonces $\overline{S}$ es la única extensión auto-adjunta de S.

Ejemplo 2.3.6 *Considérese el espacio de Hilbert $L^2(a,b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $-\infty \leq a < b \leq \infty$ y el operador en $L^2(a,b)$ inducido por la forma diferencial $\tau_2 = -d^2/dx^2$. El operador minimal $T_{2,0}$ inducido por τ_2 esta definido por*

$$D(T_{2,0}) = C_0^\infty(a,b),\ T_{2,0}f = \tau_2 f, \quad f \in D(T_{2,0})$$

El operador maximal T_2 inducido por τ_2 esta definido por

$$D(T_2) = W_{2,2}(a,b),\ T_2 f = \tau_2 f, \quad f \in D(T_2)$$

Se observa que el operador maximal esta definido en el mayor subespacio posible donde τ_2 tenga sentido. Para $T_{2,0}$ y T_2 se tienen los siguientes resultados:

Proposición 17 *Se tiene la igualdad $T_{2,0}^* = T_2$*

Proposición 18 *Para el caso $(a,b) = \mathbb{R}$ se tiene*

$$\overline{T_{2,0}} = T_2 = T_2^*$$

es decir, $T_{2,0}$ es esencialmente auto-adjunto y T_2 es auto-adjunto.

Recordemos que el teorema de proyección nos dice que dado un espacio de Hilbert H y $S \subset H$ subespacio cerrado y $\varphi \in H$ entonces existen $f \in S$, $g \in S^{\perp}$ tales que $\varphi = f + g$ donde, el mapeo dado por $D(P_S) = H$, $P_S = \varphi$ es un operador lineal. A partir de la identidad del paralelogramo se obtiene, para $\varphi \in S$, la identidad pitagórica $\|\varphi\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$, de donde $\|P_S\varphi\| = \|f\| \leq \|\varphi\|$ entonces $\|P_S\| \leq 1$. Por otro lado, para $S \neq \{0\}$, $\varphi \in S$, $\varphi \neq 0$ se tiene que $P_S\varphi = \varphi$, esto es $P_S = I_H|_S$, por lo cual $\|P_S\| = 1$, también para $\varphi \in S$, $P_S^2\varphi = P_SP_S\varphi = \varphi$ (idempotencia) y $P_S\varphi \in S$ para toda $\varphi \in H$, esto es, $R(P_S) = S$ y $P_S\varphi = 0$ si y solo si $\varphi \in N(P_S) = S^{\perp}$, donde $N(T)$ es el núcleo del operador T, esto es $N(T) = \{\varphi \in H : T\varphi = 0\}$.

Definición 2.15 *Dado un operador P en un espacio de Hilbert H, (P es un operador de H en H) se dice que P es una proyección ortogonal si existe $M \subset H$ tal que $P_M = P$.*

Proposición 19 *Dado un operador $P \in \mathfrak{B}(H)$ los siguientes enunciados son equivalentes*

a) P es una proyección ortogonal.

b) $I - P$ es una proyección ortogonal.

c) P es idempotente y $R(P) = N(P)^{\perp}$.

d) P es idempotente y auto-adjunto.

Proposición 20 *Sean M_1, M_2 subespacios de un espacio de Hilbert H y P_{M_1}, P_{M_2} las respectivas proyecciones ortogonales sobre M_1 y M_2 . Entonces*

a) $P = P_{M_1}P_{M_2}$ es una proyección ortogonal si y solo si se verifica $P_{M_1}P_{M_2} = P_{M_2}P_{M_1}$ entonces se tiene $P = P_{M_1 \cap M_2}$ si además $M_1 \perp M_2$ entonces $P_{M_1}P_{M_2} = P_{M_2}P_{M_1} = 0$.

b) $Q = P_{M_1} + P_{M_2}$ es una proyección ortogonal si y solo si $M_1 \perp M_2$, en tal caso se tiene $P = P_{M_1 \oplus M_2}$.

Así, dada una proyección ortogonal P, se tiene que P es auto-adjunta, luego P es, en particular, simétrico (para toda $\varphi \in H$ se tiene que $\langle P\varphi, \varphi\rangle \in \mathbb{R}$, pues $\overline{\langle P\varphi, \varphi\rangle} = \langle \varphi, P\varphi\rangle = \langle P\varphi, \varphi\rangle$). Por otro lado, si $T_1, T_2 \in \mathfrak{B}(H)$ son operadores simétricos tales que para todo $\varphi \in H$ se verifica $\langle T_1\varphi, \varphi\rangle \leq \langle T_2\varphi, \varphi\rangle$ escribimos $T_1 \leq T_2$. Si $T \in B(H)$ es un operador simétrico tal que $T \geq 0$ se dice entonces que T es no negativo.

Proposición 21 *Sean M_1, M_2 subespacios de un espacio de Hilbert H y P_{M_1}, P_{M_2} las respectivas proyecciones ortogonales sobre M_1 y M_2 . Entonces*

a) $0 \leq P_{M_1} \leq I$.

b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) $P_{M_1} \leq P_{M_2}$
ii) $M_1 \subset M_2$
iii) $P_{M_2} P_{M_1} = P_{M_1}$.

Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert. Un operador U de H_1 en H_2 tal que $D(U) = H_1$ se le llama isometría si $\|U\varphi\| = \|\varphi\|$ para todo $\varphi \in H_1$. Además si $R(U) = H_2$ a U se le llama isomorfismo. En este caso al operador U se le llama operador unitario.

Un operador U de H_1 en H_2 tal que $D(U) = H_2$ se le llama isometría parcial si existe un subespacio M de H_2 tal que

$$\|U\varphi\| = \|\varphi\| \text{ para } \varphi \in M, \quad \|U\varphi\| = 0 \text{ para } \varphi \in M^{\perp}$$

de esto se tiene que $R(U) = U(M)$ de lo cual se infiere de inmediato que $R(U)$ es cerrado. A los subespacios M y $R(M)$ se les llama dominio inicial y dominio final de U respectivamente.

Proposición 22 *Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert y sea U un operador de H_1 en H_2 tal que $D(U) = H_1$. Entonces*
a) Las siguientes afirmaciones son equivalentes
i) U en una isometría parcial.
ii) $R(U) = N$ y $\langle U\varphi, U\psi\rangle_{H_2} = \langle P_M\varphi, \psi\rangle_{H_1}$ para todo $\varphi, \psi \in H$
iii) $U^*U = P_M$, $UU^* = P_N$
iv) U^* es una isometría parcial.
b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes
i) U en unitario
ii) $R(U) = H_2$ y $\langle U\varphi, U\psi\rangle_{H_2} = \langle P_M\varphi, \psi\rangle_{H_1}$ para todo $\varphi, \psi \in H$
iii) $U^*U = I_{H_1}$, $UU^* = I_{H_2}$
iv) U^* es unitario.

2.4. Medida espectral. El teorema espectral para operadores auto-adjuntos

Dado un espacio de Hilbert H y T un operador en H, se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un es un eigenvalor de T si la ecuación $T\varphi = \lambda\varphi$ tiene solución no trivial ($\varphi \neq 0$) en H, o bien, el operador $\lambda - T = I\lambda - T$ no es inyectivo. Al subespacio $N(\lambda - T)$ se llama eigenespacio asociado al eigenvalor λ, a la dimensión del espacio $N(\lambda - T)$ se le llama multiplicidad de λ. Al vector φ se le llama eigenvector de T asociado al eigenvalor λ. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$\lambda - T$ es inyectivo, es decir, λ no es un eigenvalor de T podemos definir el operador

$$R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$$

Definición 2.16 *Dado un espacio de Hilbert H y un operador T en H*

a) El conjunto dado por

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - T \text{ es inyectivo y } R(\lambda, T) \in \mathfrak{B}(H)\}$$

se le llama conjunto resolvente de T.

b) Al mapeo

$$\begin{array}{rcl} R(\cdot, T) : \rho(T) & \longrightarrow & \mathfrak{B}(H) \\ \lambda & \mapsto & R(\lambda, T) \end{array}$$

se le llama resolvente de T. El operador $R(\lambda, T)$, $\lambda \in \rho(T)$ se llama resolvente de T en el punto λ.

c) El conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ se llama espectro de T. El conjunto $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es eigenvalor de } T\} \subset \sigma(T)$ se llama espectro puntual de T.

Ejemplo 2.4.1 *Sea $H = L^2[0, 2\pi]$ y $T : L^2[0, 2\pi] \longrightarrow L^2[0, 2\pi]$ el operador integral definido como*

$$(A\mathrm{u})(t) = \int_0^{2\pi} dy \cos(t - y)\ \mathrm{u}(y)$$

se tiene entonces la ecuación $A\mathrm{u} = \lambda \mathrm{u}$, esto es

$$\int_0^{2\pi} dy \cos(t - y)\ \mathrm{u}(y) = \lambda \mathrm{u}(t)$$

o bien

$$\cos t \int_0^{2\pi} dy \operatorname{sen} y\ \mathrm{u}(y) dy + \operatorname{sen} t \int_0^{2\pi} dy \cos y\ \mathrm{u}(y) dy = \lambda \mathrm{u}(t) \qquad (2.3)$$

así, para $\lambda \neq 0$, $\mathrm{u}(t)$ es una combinación lineal de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, es decir, $\mathrm{u}(t) = \alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, sustituyendo esta última expresión en (2.3) se tiene

$$\pi\alpha = \lambda\alpha,\ \ \pi\beta = \lambda\beta$$

de lo cual se concluye que $\lambda = \pi$ si $\lambda \neq 0$.

Proposición 23 *Sean S y T operadores cerrados en H*

a) (Primera ecuación resolvente) Para toda $\lambda, \lambda' \in \rho(T)$ se tiene

$$\begin{aligned} R(\lambda,T) - R(\lambda',T) &= (\lambda' - \lambda)R(\lambda,T)R(\lambda',T) \\ &= (\lambda' - \lambda)R(\lambda',T)R(\lambda,T) \end{aligned}$$

(en particular $R(\lambda,T)$ y $R(\lambda',T)$ conmutan).

b) (Segunda ecuación resolvente) Si $D(S) = D(T)$ se tiene que para toda $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$

$$\begin{aligned} R(\lambda,T) - R(\lambda,S) &= R(\lambda,T)(T - S)R(\lambda,S) \\ &= R(\lambda,S)(T - S)R(\lambda,T) \end{aligned}$$

Proposición 24 *Si T es un operador cerrado en un espacio de Hilbert H, entonces $\rho(T)$ es abierto y $\sigma(T)$ es cerrado.*

Si $\lambda_0 \in \rho(T)$, entonces $\lambda \in \rho(T)$ para todo λ tal que

$$|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0,T)\|^{-1}$$

y además

$$R(\lambda,T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0,T)^{n+1}$$

Si $T \in \mathfrak{B}(H)$ entonces $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\} \subset \rho(T)$ y $\sigma(T)$ es compacto. Mas aún, para $|\lambda| > \|T\|$ se tiene

$$R(\lambda,T) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1}T^n \text{ (serie de Von Neumann)}$$

Dado un espacio de Hilbert H y su producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podemos hablar de convergencia débil y de convergencia fuerte en H, Ahora, consideremos $F : \Omega \longrightarrow H$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio (abierto y conexo) entonces las nociones de convergencia débil y convergencia fuerte nos permiten dar los siguientes conceptos: La función $F(\zeta)$ se dice que es analítica si dada $\zeta \in \Omega$ existe el límite $[F(\zeta + h) - F(\zeta)]/h$ cuando $h \to 0$ en el sentido de $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. La función $F(\cdot)$ se dice que es holomorfa si para cada $\zeta_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ y $\varphi_n \in H$ tales que, si $|\zeta - \zeta_0| < r$

$$F(\zeta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n \varphi_n \tag{2.4}$$

donde la convergencia de (2.4) se entiende en el sentido de $\| \cdot \|$.

Proposición 25 *Sea T un operador cerrado en un espacio de Hilbert H. Entonces las funciones*

$$
\begin{array}{rc}
a) & R(\cdot,T):\rho(T)\longrightarrow \mathfrak{B}(H) \\
 & \zeta\mapsto R(\zeta,T) \\
b) & R(\cdot,T)\varphi:\rho(T)\longrightarrow H \\
 & \zeta\mapsto R(\zeta,T)\varphi \\
c) & \langle\psi,R(\cdot,T)\varphi\rangle:\rho(T)\longrightarrow \mathbb{C} \\
 & \zeta\mapsto \langle\psi,R(\zeta,T)\varphi\rangle
\end{array}
$$

son holomorfas.

Proposición 26 *Sea T un operador simétrico sobre un espacio de Hilbert H. Entonces*

a) Cada eigenvalor de T es real.

b) Si λ y μ son eigenvalores de T, $\lambda\neq\mu$ y φ_λ, φ_μ son eigenvectores de λ y μ respectivamente se tiene que $\langle\varphi_\lambda,\varphi_\mu\rangle=0$, $(\varphi_\lambda\perp\varphi_\mu)$.

c) Si H esta definido sobre los números complejos, para $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ el operador $\zeta-T$ es continuamente invertible y $\|R(\zeta,T)\|<|Im\zeta|^{-1}$.

A continuación se establece la definición de familia espectral la cual generará la medida espectral, ésto conduce a una integral con respecto a la familia espectral dada.

Dada una función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, λ-medible, no decreciente y continua por la derecha (izquierda respectivamente) y un intervalo semi-abierto en $\mathbb{R}$ de la forma $(a,b]$ definimos los valores

$$
\begin{array}{rl}
a) & \mu_f((a,b])=f(b)-f(a) \\
b) & \mu_f((-\infty,b])=f(b)-\lim\limits_{x\to-\infty}f(x) \\
c) & \mu_f((a,+\infty))=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-f(a) \\
d) & \mu_f(-\infty,\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)
\end{array}
$$

Extendiendola aditivamente a la σ-álgebra de los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$, $(\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ podemos definir una medida $\mu_f:\mathscr{B}(\mathbb{R})\longrightarrow[0,\infty)$. Entonces, para una función $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μ_f-medible, tiene sentido hablar de la integral

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi d\mu_f$$

así, para un subconjunto $M \subset \mathbb{R}$ el espacio $L^2(M, \mu_f)$ esta dado por

$$L^2(M, \mu_f) = \{\varphi : M \to \mathbb{R} | \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu_f < \infty\}$$

(integral de Lebesgue-Stieltjes).

El concepto de familia espectral resulta fundamental para el desarrollo de la integral que se quiere construir (ver [2]):

Definición 2.17 *Dado un espacio de Hilbert H sobre $\mathbb{C}$ una familia espectral sobre H es una función $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{B}(H)$ con las siguientes propiedades:*

a) $E(t)$ es una proyección ortogonal para toda $t \in \mathbb{R}$.

b) $E(t) \leq E(t')$ y $t \leq t'$ (monotonia).

c) $E(t + \epsilon) \to E(t)$ fuertemente para toda $t \in \mathbb{R}$, cuando $\epsilon \to 0$, $\epsilon > 0$ (continuidad por la derecha).

d) $E(t) \to 0$ cuando $t \to -\infty$. $E(t) \to I$ fuertemente cuando $t \to +\infty$. A la familia espectral la denotaremos $\{E(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Observemos que la condición (c) en la definición anterior podría cambiarse por continuidad por la izquierda.

Ejemplo 2.4.2 *Sea $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de funciones no-decrecientes y continuas por la derecha definidas sobre $\mathbb{R}$. Las igualdades*

$$\begin{aligned} E(t)(f_\alpha) &= \chi_{(-\infty,t]}(f_\alpha) \\ &= \chi_{(-\infty,t]}(f_\alpha) \end{aligned}$$

para $(f_\alpha) \in \bigoplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \mu_\alpha)$, $t \in \mathbb{R}$ definen una familia espectral en

$$\bigoplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \mu_\alpha).$$

Prueba.

Se observa que $E(t)$ es una proyección ortogonal para toda $t \in \mathbb{R}$. Ahora, para $t \geq s$ y $(f_\alpha) \in \bigoplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \mu_\alpha)$ se tiene

$$\langle (f_\alpha), (E(t) - E(s))(f_\alpha) \rangle = \sum_\alpha \int_{(s,t]} |f_\alpha|^2 d\mu_\alpha \geq 0$$

de lo cual $E(t) \geq E(s)$. Por otro lado para $t \to s^+$, $\alpha \in A$

$$\int_{(s,t]} |f_\alpha(x)|^2 d\mu_\alpha(x) \to 0$$

pues μ_α es continua por la derecha.

Además

$$\int_{(s,t]} |f_\alpha(x)|^2 d\mu_\alpha(x) \leq \int_{\mathbb{R}} |f_\alpha(x)|^2 d\mu_\alpha(x)$$

para toda $s, t \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in A$ y

$$\sum_{\alpha\in A} \int_{\mathbb{R}} |f_\alpha(x)| d\mu(x) = \|(f_\alpha)_{\alpha\in A}\|^2 < \infty,$$

de lo cual es inmediato que

$$\|(E(t) - E(s))(f_\alpha)\|^2 = \sum_{\alpha\in A} \int_{(s,t]} |f_\alpha(x)|^2 d\mu(x) \to 0$$

es decir, E es continua fuertemente por la derecha. Entonces las afirmaciones $E(t) \to I$, $t \to \infty$ y $E(t) \to 0$, $t \to -\infty$ son claras. ■

Respecto a la construcción de una integral a partir de una familia espectral, si un espacio de Hilbert H dado y $t \in \mathbb{R}$. Para cada $\varphi \in H$ definamos

$$\mu_\varphi = \langle \varphi, E(t)\varphi \rangle = \|E(t)\varphi\|^2$$

se verifica inmediatamente que la función $\mu_\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, no-decreciente y continua por la derecha. Más aún, se verifica

$$\lim_{t\to-\infty} \mu_\varphi(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \mu_\varphi(t) = \|\varphi\|^2$$

Esta función, por sus características, induce una medida en $\mathbb{R}$.

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que f es E-medible si f es μ_φ-medible para cada $\varphi \in H$. Se observa que si $f_1 \equiv 1$ entonces $f_1 \in L^2(\mathbb{R}, \mu_\varphi)$, de aqui que cualquier función acotada E-medible $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pertenezca a $L^2(\mathbb{R}, \mu_\varphi)$ para toda $\varphi \in H$.

El procedimiento para definir la integral es el mismo que se sigue en la construcción de la integral de Lebesgue -Stieltjes. Para las funciones simples f se define $\int f(t)dE(t)$ como

$$\int \sum_{i=1}^{n} c_j \chi_{J_i}(t) dE(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(J_i)$$

con

$$\begin{aligned} E((a,b]) &= E(b) - E(a) \\ E([a,b]) &= E(b) - E(a^-) \\ E((a,b)) &= E(b^-) - E(a) \\ E([a,b)) &= E(b^-) - E(a) \end{aligned}$$

donde $E(t^-) = s - \lim_{\epsilon \to 0} E(t-\epsilon)$, $\epsilon > 0$. Así para cualquier función simple f se tiene

$$\| \int f(t) dE(t)\varphi \|^2 = \int |f(t)|^2 d\mu_\varphi(t)$$

Luego, dada $\varphi \in H$ y $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu_\varphi)$ se puede probar que existe una sucesión $(f_n) \subset L^2(\mathbb{R}, \mu_\varphi)$ tal que $f_n \to f$ en el sentido de $L^2(\mathbb{R}, \mu_\varphi)$. Entonces la sucesión $(\int f_n dE(t)\varphi)$ es una sucesión de Cauchy en H, lo cual nos permite darle sentido a la expresión

$$\int f(t) dE(t)\varphi = \lim_{n\to\infty} \int f_n(t) dE(t)\varphi$$

Es fácil comprobar que cumple con las propiedades elementales de linealidad.

Esta última expresión define una integral para $\varphi \in H$ dada, pues es independiente de la elección de la sucesión (f_n). Además verifica le relación

$$\| \int f(t) dE(t)\varphi \|^2 = \int |f(t)|^2 d\mu_\varphi(t)$$

Para $\varphi, \psi \in H$ y una función acotada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, E-medible, podemos definir (utilizando la identidad de polarización) para $\varphi, \psi \in H$

$$\begin{aligned} \int f(t) d\langle \psi, E(t)\varphi \rangle &= \frac{1}{4}[\int f(t) d\mu_{\psi+\varphi}(t) - \int f(t) d\mu_{\psi-\varphi}(t) + \\ &\quad + i \int f(t) d\mu_{\psi - i\varphi}(t) - i \int f(t) d\mu_{\psi + i\varphi}(t)] \end{aligned}$$

De esta definición se obtiene de manera inmediata, para f y g funciones E-medibles, la relación

$$\int g(x)\overline{f(t)} d\langle \psi, E(t)\varphi \rangle = \langle \int g(t) dE(t)\psi, \int f(t) dE(t)\varphi \rangle.$$

Proposición 27 *Sea E una familia espectral sobre un espacio de Hilbert H y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función E-medible. Entonces las fórmulas*

$$\begin{aligned} D(\hat{E}(f)) &= \{\varphi \in H : f \in L^2(\mathbb{R}, \mu_\varphi)\} \\ \hat{E}(f)\varphi &= \int f(t) dE(t)\varphi, \ \varphi \in D(\hat{E}(f)) \end{aligned}$$

definen un operador normal $\hat{E}(f) = \int f(t) dE(t)$ sobre H.

Donde un operador T densamente definido en un espacio de Hilbert H, se dice que T es un operador normal si

$$D(T) = D(T^*) \text{ y } \|T\varphi\| = \|T^*\varphi\| \text{ para toda } \varphi \in D(T)$$

Se observa que cada operador auto-adjunto es normal.

Dada una función f con valores en $\mathbb{R}$ tal que f es E-medible entonces el operador $\hat{E}(f)$ es auto-adjunto. Aquí se presenta el llamado teorema espectral para operadores auto-adjuntos (ver [2]), el cual nos dice que cada operador auto-adjunto puede ser representado de esta manera y existe una única representación a través del teorema espectral

Proposición 28 *(El teorema espectral) Para cada operador auto-adjunto T en un espacio de Hilbert H existe exactamente una familia espectral E para la cual $T = \hat{E}(id)$ o bien $T = \int t dE(t)$. La familia espectral esta dada por*

$$\langle \psi, (E(b) - E(a))\varphi \rangle = \lim_{\delta \to 0^+} \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b+\delta} \langle \psi, (R(t - i\varepsilon, T) - R(t + i\varepsilon, T))\varphi \rangle dt$$

para toda $\varphi, \psi \in H$ y $-\infty < a \leq b < \infty$.

Este resultado es para el caso complejo, pues en principio aquí se consideran espacios complejos.

Proposición 29 *(El teorema de la representación espectral)Sea T un operador auto-adjunto en H. Entonces existe una familia $\rho_\alpha : \alpha \in A$ de funciones no-decrecientes continuas por la derecha y un operador unitario $U : H \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)$ para el cual*

$$T = U^{-1} T_{id} U$$

donde T_{id} denota el operador maximal de multiplicación por la función id en $\bigoplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)$. Para la familia espectral E de T se tiene $E(t) = U^{-1}\chi_{(-\infty, t]}U$.

Para operadores auto-adjuntos se sabe que su espectro es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Lo que se hace ahora es caracterizar los puntos de un operador auto-adjunto a través de su familia espectral.

Supóngase que T es un operador auto-adjunto en un espacio de Hilbert H, hasta ahora se han definido el espectro $\sigma(T)$ y el espectro puntual $\sigma_p(T)$ de T.

Proposición 30 *Sea λ un punto aislado del espectro de un operador auto-adjunto T. Entonces λ es un eigenvalor de T.*

El espectro esencial $\sigma_e(T)$ de un operador auto-adjunto T es el subconjunto de puntos de $\sigma(T)$ que son, o bien, puntos de acumulación de $\sigma(T)$ o eigenvalores aislados de multiplicidad infinita de $\sigma(T)$. El conjunto $\sigma_d(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_e(T)$ se llama espectro discreto de T y de esta última proposición sabemos que todos los eigenvalores (incluidos los de multiplicidad infinita) son puntos aislados de $\sigma(T)$. Por último, se dice que T tiene espectro discreto puro si $\sigma_e(T)$ es vacío.

Para un operador T en un espacio de Hilbert H se pueden caracterizar todavía más los puntos del su espectro $\sigma(T)$ del siguiente modo:

Definición 2.18 *Sea T un operador auto-adjunto en un espacio de Hilbert H.*

a) $H_p(T)$ es la cerradura de todas las combinaciones lineales de los eigenvalores de T definimos $H_p(H_p(T))$ como el subespacio discontinuo de H con respecto a T.

b) El complemento ortogonal de H_p se llama espacio continuo de H con respecto a T y se denota $H_c(T) = H_c$.

c) El conjunto de todos los $\varphi \in H_c$ tales que existe un conjunto de Borel $N \subset \mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero y $\mu_\varphi(N) \neq 0$ se llama subespacio singular continuo de H con respecto a T (pues es cerrado. ver [2]) y se denota $H_{sc} = H_{sc}(T)$.

d) Al complemento ortogonal de H_{sc} con respecto a H_c se le llama subespacio absolutamente continuo de H con respecto a T y se denota $H_{ac} = H_{ac}$.

e) El subespacio singular de H con respecto a T se define como $H_s = H_s(T) = H_p \oplus H_{sc}$.

Para un subespacio M de H, P la proyección sobre M y un operador T en H se dice que M reduce a T si $PT \subset TP$. Las fórmulas

$$D(T_M) = M \cap D(T), \quad T_M\varphi = T\varphi, \quad \varphi \in D(T_M)$$

definen un operador en M. Se tiene entonces que el subespacio M reduce a T si y solo si $M^\perp$ lo reduce. Entonces $D(T) = D(T_M) + D(T_{M^\perp})$ y $\sigma(T) = \sigma(T_M) \cup \sigma(T_M^\perp)$.

Proposición 31 *Sea T un operador auto-adjunto en un espacio de Hilbert H, entonces los subespacios H_p, H_c, H_{sc}, H_{ac} y H_s reducen el operador T.*

Definición 2.19

a) Dados los operadores $T_p = T|_{H_p}$, $T_c = T|_{H_c}$, $T_{sc} = T|_{H_{sc}}$, $T_{ac} = T|_{H_{ac}}$ y $T_s = T|_{H_s}$ se les llama la parte espectral discontinua, continua, singular continua, absolutamente continua y singular respectivamente de T.

b) El espectro continuo ($\sigma_c(T)$), espectro singular continuo ($\sigma_{sc}(T)$), espectro absolutamente continuo ($\sigma_{ac}(T)$) y espectro singular ($\sigma_s(T)$) de T se definen como el espectro de T_c, T_{sc}, T_{ac} y T_s respectivamente. El espectro puntual de T, $\sigma_p(T)$ se define como el conjunto de eigenvalores de T (aunque en general se tiene $\sigma(T_p) = \overline{\sigma_p(T)}$).

Los conjuntos $\sigma_c(T)$, $\sigma_{sc}(T)$, $\sigma_{ac}(T)$ y $\sigma_s(T)$ son cerrados y además se tienen las igualdades $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)} \cup \sigma_{sc}(T) \cup \sigma_{ac}(T) = \sigma_s(T) \cup \sigma_{ac}(T) = \overline{\sigma_p(T)} \cup \sigma_c(T)$.

Definición 2.20 *Se dice que T tiene un espectro puntual puro, espectro continuo puro, espectro singular continuo puro, espectro absolutamente continuo puro y espectro singular puro si $H_p = H$, $H_c = H$, $H_{sc} = H$, $H_{ac} = H$ y $H_s = H$ respectivamente. Para tales casos se tiene $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}$, $\sigma(T) = \sigma_c(T)$, $\sigma(T) = \sigma_{sc}(T)$, $\sigma(T) = \sigma_{ac}(T)$ y $\sigma(T) = \sigma_s(T)$ respectivamente.*

Capítulo 3

El operador unidimensional de Schrödinger

3.1. El operador $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

La primera sección esta dedicada a discutir las propiedades básicas del operador unidimensional de Schrödinger en el semi-eje inducido por la forma diferencial

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{3.1}$$

donde $V(x)$ pertenece a la clase de Faddeev (Definición 3.2). Entre estas propiededes destacan la existencia y unicidad de su realización auto-adjunta (la cual depende de las condiciones a la frontera) en un dominio adecuado y las propiedades de su espectro (ver [12]).

Dada la expresión diferencial l, en (3.1), con $x \in (a, b)$ y las condiciones a la frontera

$$\begin{cases} f'(k,0) + \cot\alpha \cdot f(k,0) = 0, & \alpha \in (0, \pi) \\ f(k,0), & \alpha = \pi \end{cases}$$

se entienden por realizaciones auto-adjuntas de l los operadores auto-adjuntos generados por dicha expresión. El operador diferencial l se llama regular en a si $a > -\infty$ (respectivamente en b si $b < +\infty$) y si, en este caso, V es integrable en $[a, b)$ (respectivamente en $(a, b]$), l se llama singular si no es regular en al menos uno de los puntos de la frontera.

Para poder empezar a establecer los dominios adecuados se introducen el operador maximal H y el operador minimal h_0 generados por l. El operador maximal H esta definido en el subespacio lo mas grande posible del espacio $L^2(0,+\infty)$. El operador minimal h_0 es una restricción de operador maximal y tal que su adjunto es igual al operador maximal, esto es $h_0^* = H$. Esto implica que h_0 es simétrico. Ahora, para toda realización auto-adjunta de l, digamos T, se tendrá que T es una restricción de operador maximal H, es decir $h_0 \subset T \subset H$. El operador maximal H generado por l se define en el dominio dado por

$$\begin{aligned} D(H) &= \{\varphi \in L^2(0,+\infty) \\ &\quad : \varphi, \varphi' \; absolutamente \; continuas \; en \; (0,+\infty) \;, l\varphi \in L^2(0,+\infty)\} \end{aligned}$$

$$H\varphi = l\varphi \;\; \in D(H)$$

el operador minimal h_0 se construye del siguiente modo: consideremos el operadores h_0' dado por

$$D(h_0') = \{\varphi \in D(H) : \varphi \; tiene \; soporte \; compacto \; en \; (0,+\infty)\}$$

de la definición de h_0' se tiene la relación $h_0' \subset H$ y que h_0' no es cerrado. Por otro lado se tiene también que h_0' es simétrico.

Para el caso singular, que es el de nuestro interés, se define el operador minimal cerrado como el operador tal que

$$h_0 := \bar{h}_0' = h_0'^{**}$$

más aún, se puede establecer el siguiente resultado (ver [12])

Proposición 32 *Sean h_0', h_0 y H definidos como antes. Entonces se tienen las relaciones*

$$h_0' \subset \bar{h}_0' = h_0 \subset h_0^* = h_0'^* = H, \;\; H^* = h_0$$

Para concretar, se considera el operador unidimensional

$$-\varphi'' + V(x)\varphi = k^2\varphi, \qquad x \in (0,\infty) \tag{3.2}$$

junto con la condición a la frontera

$$\begin{cases} f'(k,0) + \cot\alpha \cdot f(k,0) = 0, & \alpha \in (0,\pi) \\ f(k,0), & \alpha = \pi \end{cases} \tag{3.3}$$

Aquí se distinguen los casos $\alpha \in (0,\pi)$ y $\alpha = \pi$ de 3.3 también se observa que se obtienen las condiciones de Dirichlet para $\alpha = \pi$, de Newman para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y condiciones mixtas en cualquier otro caso.

Además se supone al potencial V en la clase de Faddeev, que se define como

Definición 3.1 *Dada $V(x)$, $x \in (0,\infty)$, función, se dice que $V(x)$ pertenece a la clase de Faddeev si*

a)

$$V(x) \in \mathbb{R} \text{ para todo } x \in (0,\infty)$$

b)

$$V(x) \in \mathrm{L}_1^1(0,\infty) := \{f \in \mathrm{L}_1(0,\infty) : \int_{(0,\infty)} dx(1+|x|)f(x) < \infty\}$$

Se tiene (ver [12]) que para cada α existe una única realización auto-adjunta de $l = -d^2/dx^2 + V(x)$, con V en la clase de Faddeev, a dicha realización se le denotará como H_α. Se demuestra (ver [12], sec. 17.B) que el espectro de H_α es simple, tiene un número finito de eigenvalores, todos ellos negativos, no tiene espectro singular continuo y su espectro absolutamente continuo consiste en $[0,\infty)$. El espectro discreto (eigenvalores de H_α) se denota como $\sigma_d(H_\alpha) = \{-\kappa_{\alpha j}^2\}_{j=1}^{N_\alpha}$, donde $0 < \kappa_{\alpha 1} < \kappa_{\alpha 2} < \ldots < \kappa_{\alpha N_\alpha}$.

3.2. Solución de Jost. Función espectral.

Considérese ahora la ecuación (3.2) con $V(x)$ en la clase de Faddeev, sea $f(k,x)$ la solución de Jost (ver [4]) asociada a dicha ecuación. Este verifica las condiciones asintóticas

$$f(k,x) = e^{ikx}[1+o(1)] \tag{3.4}$$
$$f'(k,x) = ike^{ikx}[1+o(1)] \tag{3.5}$$

para $x \to +\infty$. Se define entonces (ver [4]) la función de Jost de (3.2) como

Definición 3.2 *Si $f(k,x)$ es la solucion de Jost de la ecuación (3.2), se define la función de Jost como*

$$F_\alpha(k) = \begin{cases} -i[f'(k,0) + \cot\alpha \cdot f(k,0)], & \alpha \in (0,\pi) \\ f(k,0), & \alpha = \pi \end{cases}$$

Entonces se tiene que (ver [4]) $F_\alpha(k)$ es analítica en $\mathbb{C}^+$ y continua en $\overline{\mathbb{C}^+}$. Además que $F_\alpha(k)$ tiene un número finito de ceros todos ellos situados en $\mathbb{I}^+$, estos ceros son simples y el único cero real puede ser en $k = 0$. Estos ceros se denotaran como $i\kappa_{\alpha j}$ con $j = 1,\cdots,N_\alpha$ y N_α es el número de autovalores del operador H_α el cual, recordemos, es finito y esta dado por $\sigma_d(H_\alpha) = \{-\kappa_{\alpha j}^2\}_{j=1}^{N_\alpha}$.

Para la función espectral, si $\varphi_\alpha(k,x)$ es una solución regular de (3.2) relacionada a las condiciones a la frontera dadas por

$$\varphi_\alpha(k,0) = 1, \quad \varphi'_\alpha(k,0) = -\cot\alpha, \quad \alpha \in (0,\pi), \tag{3.6}$$

$$\varphi_\pi(k,0) = 0, \quad \varphi'_\pi(k,0) = 1, \quad \alpha = \pi \tag{3.7}$$

se tiene entonces (ver [5], [12]) que existe una función monótona creciente $\rho_\alpha(\lambda)$ (ver [1], [5]) con $\lambda \in \mathbb{R}$, conocida como función espectral y además, para cada $g(x) \in L^2(0,\infty)$ se verifica que $(U_\alpha g)(\lambda)$, dado por la fórmula

$$(U_\alpha g)(\lambda) = G_\alpha(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n dx \varphi_\alpha(\sqrt{\lambda}, x) g(x) \tag{3.8}$$

existe como límite fuerte en $L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha(\lambda))$, dicho resultado se enuncia formalmente del siguiente modo.

Proposición 33 *Sea $g(x) \in L^2(0,\infty)$. Entonces existe una función no decreciente $\rho_\alpha(\lambda)$ (que no necesariamente es única), la cual no depende de $g(x)$, y una función $G_\alpha(\lambda)$ (la transformada generalizada de Fourier de $g(x)$) tal que*

$$\int_0^\infty |g|^2(x)dx = \int_{-\infty}^\infty |G_\alpha|^2(\lambda) d\rho(\lambda) \tag{3.9}$$

La función $G_\alpha(\lambda)$ es el límite en media cuadrática (relativa a $d\rho_\alpha(\lambda)$) de la sucesión de funciones continuas

$$G_{\alpha\ n}(\lambda) = \int_0^n dx g(x) \varphi_\alpha(x,\lambda) \tag{3.10}$$

esto es

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty [G_\alpha(\lambda) - G_{\alpha\ n}(\lambda)]^2 d\rho_\alpha(\lambda) = 0$$

De este último resultado se verifica directamente la igualdad de Parseval. Si $G_\alpha(\lambda)$ y $K_\alpha(\lambda)$ son las transformadas generalizadas de Fourier de $g(x)$ y $k(x)$ respectivamente, se tiene que

$$\int_0^\infty g(x)\overline{k(x)}dx = \int_{-\infty}^\infty G_\alpha(\lambda)\overline{K_\alpha(\lambda)} d\rho_\alpha(\lambda) \tag{3.11}$$

Además el mapeo dado en (3.8) es unitario y nos da una representación espectral de H_α de la forma

$$H_\alpha = U_\alpha^* \lambda U_\alpha,$$

Se tiene que la parte de la medida espectral asociada al espectro continuo y su derivada en k^2 esta determinada por $F_\alpha(k)$ La parte correspondiente al espectro discreto esta determinada por el conjunto de eigenvalores $\{-\kappa_{\alpha j}^2\}_{j=1}^{N_\alpha}$ y las constantes de normalización $\{g_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}$, en concreto, $d\rho_\alpha(\lambda)$ queda determinada como ([4], [13]):

$$d\rho_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \frac{1}{|F_\alpha(\sqrt{\lambda})|^2} d\lambda & \lambda > 0 \\ \sum_{j=1}^{N_\alpha} g_{\alpha j}^2 \delta(\lambda + \kappa_{\alpha j}^2) d\lambda & \lambda < 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

donde $\delta(\cdot)$ es la distribución delta de Dirac y las constantes $g_{\alpha j}$ están dadas por

$$g_{\alpha j} = \begin{cases} \frac{|f(i\kappa_{\alpha j}, 0)|}{\|f(i\kappa_{\alpha j}, \cdot)\|} & \alpha \in (0, \pi) \\ \frac{|f'(i\kappa_{\pi j}, 0)|}{\|f(i\kappa_{\pi j}, \cdot)\|} & \alpha = \pi \end{cases}$$

y $\|\cdot\|$ es la norma en $L^2(0,\infty)$ y $f(k,x)$ es la solución de Jost de (3.2). Ahora, las constantes de normalización de Marchenko $m_{\alpha j}$ asociadas a los eigenvalores $-\kappa_{\alpha j}^2$ están dadas como

$$m_{\alpha j} = \frac{1}{\|f(i\kappa_{\alpha j}, \cdot)\|}, \qquad j = 1, \cdots, N_\alpha.$$

Así (ver [8]) considerando que

$$f'(k,0)\dot{f}(k,0) - \dot{f}'(k,0)(k,0) = -2k \int_0^\infty f^2(k,x)dx \tag{3.13}$$

donde $f(k,x)$ es la solución de Jost de (3.2) y $\dot{f}(k,0)$, $\dot{f}'(k,0)$ denotan las derivadas con respecto a k, se tiene que

$$\|f(i\kappa_{\alpha j}, \cdot)\|^2 = \begin{cases} \frac{1}{2\kappa_{\alpha j}} \dot{F}_\alpha(i\kappa_{\alpha j}) f(i\kappa_{\alpha j}, 0), & \alpha \in (0, \pi) \\ \frac{i}{2\kappa_{\pi j}} \dot{F}_\pi(i\kappa_{\pi j}) f'(i\kappa_{\pi j}, 0), & \alpha = \pi \end{cases}$$

con $\dot{F}_\alpha(k) = -i[\dot{f}'(k,0) + \cot\alpha \dot{f}(k,0)]$ y $\dot{F}_\pi(k) = \dot{f}(k,0)$. Entonces, dado $\alpha \in (0,\pi)$, el conjunto de constantes $\{g_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}$ y $\{m_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}$ se pueden construir cuando se conocen $F_\alpha(k)$ y $f(i\kappa_{\alpha j},0)$. Por otro lado, dados $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, definimos la constante

$$h_{\beta\alpha} = \cot\beta - \cot\alpha, \tag{3.14}$$

para el caso $\alpha=\pi$ se construyen cuando conocemos $F_\pi(k)$ y $f'(i\kappa_{\pi j},0)$. Si $0<\beta<\alpha<\pi$ y se conocen $F_\alpha(k)$, $F_\beta(k)$ y $h_{\beta\alpha}$ podemos evaluar $f(k,0)$ y, por tanto $f(i\kappa_{\alpha j},0)$, en particular se tiene $F_\beta(i\kappa_{\alpha j}) = -ih_{\beta\alpha}f(,i\kappa_{\alpha j},0)$. Si $0<\beta<\alpha=\pi$ se tiene que $f'(i\kappa_{\pi j},0) = iF_\beta(i\kappa_{\pi j})$ y, ahora que se conocen $F_\beta(k)$ y $F_\pi(k)$ podemos construir las constante de Gel'fand-Levitan (ver [1], [4] y [13])

$$g_{\alpha j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2i\kappa_{\alpha j}F_\beta(i\kappa_{\alpha j})}{h_{\beta\alpha}\dot{F}_\alpha}(i\kappa_{\alpha j})}, & 0<\beta<\alpha<\pi \\ \sqrt{\frac{2\kappa_{\pi j}F_\beta(i\kappa_{\pi j})}{\dot{F}_\pi(i\kappa_{\pi j})}}, & 0<\beta<\alpha=\pi \end{cases} \tag{3.15}$$

y las constantes de Marchenko

$$m_{\alpha j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{-2i\kappa_{\alpha j}h_{\beta\alpha}}{F_\beta(i\kappa_{\alpha j})\dot{F}_\alpha(i\kappa_{\alpha j})}}, & 0<\beta<\alpha<\pi \\ \sqrt{\frac{-2\kappa_{\pi j}}{F_\beta(i\kappa_{\pi j})\dot{F}_\pi(i\kappa_{\pi j})}}, & 0<\beta<\alpha=\pi \end{cases} \tag{3.16}$$

Al ser cotangente una función monótona decreciente en $(0,\pi)$, para $0<\beta<\alpha<\pi$ se tiene de 3.14 que $h_{\beta\alpha}>0$. Utilizando la Definición (3.2) podemos expresar

$$f(k,0) = \begin{cases} \frac{i}{h_{\beta\alpha}}[F_\beta(k) - F_\alpha(k)], & \alpha\in\beta(0,\pi) \\ F_\pi(k) \end{cases} \tag{3.17}$$

$$f'(k,0) = \begin{cases} \frac{i}{h_{\beta\alpha}}[\cot\beta\cdot F_\alpha(k) - \cot\alpha\cdot F_\beta(k)], & \alpha,\beta\in(0,\pi) \\ iF_\beta(k) - \cot\beta\cdot F_\pi(k), & \beta\in(0,\pi) \end{cases} \tag{3.18}$$

Por último, resumimos el comportamiento asintótico de las funciones $f(k,0)$ y $f'(k,0)$, esto ayudara en lo posterior a deducir el comportamiento asintótico de la función de Jost $F_\alpha(k)$, $\alpha\in(0,\pi)$ (Def.3.2). Describimos dicho comportamiento en las siguiente proposición (ver [1], [4], [13], [17], [18], [20]-[25]).

Proposición 34 **(1)** *Sea $f(k,0)$ la solución de Jost del sistema (3.2)-(3.3) evaluada en $x=0$ y $f'(k,0)$ la primera derivada con respecto a x evaluada en $x=0$, entonces se verifica:*

a) Para $k \to \infty$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$

$$
\begin{aligned}
i) &\quad f(k,0) = 1 - \frac{1}{2ik}\int_0^\infty dxV(x) + o(\frac{1}{k}) \\
ii) &\quad f'(k,0) = ik - \frac{1}{2}\int_0^\infty dxV(x) + o(1) \\
iii) &\quad \frac{f'(k,0)}{f(k,0)} = ik - \int_0^\infty dxV(x)e^{2ikx} + o(\frac{1}{k})
\end{aligned}
$$

b) Para $k \to 0$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$

$$i) \quad \tfrac{f'(k,0)}{f(k,0)} = \tfrac{f'(k,0)}{f(k,0)} + \tfrac{ik}{f(0,0)^2} + o(k), \quad f(k,0) \neq 0$$

$$ii) \quad \tfrac{f(k,0)}{f'(k,0)} = \tfrac{f(k,0)}{f'(k,0)} - \tfrac{ik}{f'(0,0)^2} + o(k), \quad f'(k,0) \neq 0$$

3.3. Reconstrucción del potencial $V(x)$

Aquí se explican varios métodos a través de los cuales el potencial puede ser reconstruido de forma única de cada uno de los conjuntos de datos $\mathcal{D}_j$, $j = 1, ..., 8$ dados en la Sección 5.1. Estos métodos incluyen el método de Gel'fand-Levitan (ver [4], [13], [17] ,[18], [19]) y el método de Marchenko para el problema inverso de dispersión en el semi-eje (ver [4], [13], [18], [19], [20]), el método de Faddeev-Marchenko en todo $\mathbb{R}$ (ver [13], [17], [21], [22], [23], [24]) y otros métodos (ver [17], [23]) usados para resolver el problema de dispersión inverso en todo el eje real. Probaremos que $\mathcal{D}_i, i = 1..,8$ (definidos en (5.1)-(5.8))construye los conjuntos $\mathcal{G}_\alpha$, $\mathcal{M}_\alpha$ y $\mathcal{F}$ definidos mas adelante (3.19, 3.22 y 3.32 resp.). Si tenemos como datos F_α, F_β y $h_{\beta\alpha}$ se construyen las constantes de normalización $g_{\alpha j}$ y $m_{\alpha j}$ como en (3.15) y (3.16). Así, cada uno de los $\mathcal{D}_j$, $j = 1,3,5,7$ nos da $\mathcal{G}_\alpha$ y $\mathcal{M}_\alpha$. Por otro lado, si se conocen $F_\pi(k)$ y $F_\beta(k)$ las constantes de normalización $g_{\pi j}$ y $m_{\pi j}$ se construyen como en (3.15) y (3.16). Así, para $\mathcal{D}_j$, $j = 2,4,6,8$ obtenemos $\mathcal{G}_\pi$ y $\mathcal{M}_\pi$, la construcción de $\mathcal{F}$ de $\mathcal{D}_j$, $j = 1, ..., 8$ se hace utilizando $L(k)$, $R(k)$ y $T(k)$ definidos mas adelante.

3.3.1. Ecuaciones integrales de Gel'fand-Levitan

El conjunto de datos $\mathcal{G}_\alpha$ es utilizado en el método de Gel'fand-Levitan y esta dado por

$$\mathcal{G}_\alpha = \{|F_\alpha(k)| \text{ para } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}, \{g_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}\}, \ \alpha \in (0,\pi) \quad (3.19)$$

el cual nos permite reconstruir la solución regular $\varphi_\alpha(k,x)$ de forma única que satisface (3.2) y (3.3) como

$$\varphi_\alpha(k,x) = \begin{cases} \cos kx + \int_0^x dy A_\alpha(x,y)\cos kx, & \alpha \in (0,\pi) \\ \frac{\operatorname{sen} kx}{k} + \int_0^x A(x,y)\frac{\operatorname{sen} kx}{k}, & \alpha = \pi \end{cases}$$

y el correspondiente potencial V de forma única como

$$V(x) = 2\frac{d}{dx}A_\alpha(x,x^-) \qquad \alpha \in (0,\pi] \quad (3.20)$$

donde $A_\alpha(x,y)$ se obtiene resolviendo la ecuación integral de Gel'fand-Levitan (ver [4], [13], [17], [18]):

$$A_\alpha(x,y) + G_\alpha(x,y) + \int_0^x dt G_\alpha(y,t)A_\alpha(x,y) = 0, \quad 0 < y < x \quad (3.21)$$

donde el núcleo $G_\alpha(x,y)$ esta dado, para $\alpha \in (0,\pi)$:

$$G_\alpha(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk[\frac{1}{|F_\pi(k)|^2} - 1]\cos kx \cos ky + \sum_{j=1}^{N_\alpha} g_{\alpha j}^2 \cosh \kappa_{\alpha j}x \cosh \kappa_{\alpha j}y$$

y, para $\alpha = \pi$:

$$G_\pi(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk[\frac{1}{|F_\pi(k)|^2} - 1]\operatorname{sen} kx \operatorname{sen} ky + \sum_{j=1}^{N_\pi} \frac{g_{\pi j}^2}{\kappa_{\pi j}^2} \operatorname{senh} \kappa_{\pi j}x \operatorname{senh} \kappa_{\pi j}y$$

Observemos que de las partes (i) y (ii) del Lema 4.2 (Capítulo 4) es posible decir cuando se tiene $\alpha < \pi$ o $\alpha = \pi$. Para el caso $\alpha < \pi$ se observa que α se obtiene resolviendo (3.21) pues $\cot\alpha = -A_\alpha(0,0)$.

3.3.2. Método de Marchenko

El conjunto de datos $\mathcal{M}_\alpha$ esta dado por

$$\mathcal{M}_\alpha = \{S_\alpha \text{ para } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}, \{m_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}\}, \ \alpha \in (0,\pi) \quad (3.22)$$

donde S_α es la matriz de dispersión dada por

$$S_\alpha(k) = \begin{cases} -\frac{F_\alpha(-k)}{F_\alpha(k)} & \alpha \in (0,\pi) \\ \frac{F_\pi(-k)}{F_\pi(k)} & \alpha = \pi \end{cases}$$

Dado $\mathcal{M}_\alpha$ podemos entonces reconstruir la correspondiente solución de Jost de forma única

$$f(k,x) = e^{ikx} + \int_x^\infty dy K(x,y) e^{ikx} \tag{3.23}$$

y el correspondiente potencial V de forma única como

$$V(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x^+) \tag{3.24}$$

donde $K(x,y)$ se obtiene resolviendo la ecuación integral de Marchenko ([4], [13], [17], [20]):

$$K(x,y) + M_\alpha(x+y) + \int_x^\infty dt M_\alpha(y+t)K(x,t) = 0, \quad 0 < x < y, \tag{3.25}$$

y el núcleo M_α tiene la forma, para $\alpha \in (0,\pi)$:

$$M_\alpha(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk[S_\alpha(k) - 1]e^{iky} + \sum_{j=1}^{N_\alpha} m_{\alpha j}^2 e^{-\kappa_{\alpha j} y}, \tag{3.26}$$

y, para $\alpha = \pi$:

$$M_\pi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk[S_\pi(k) - 1]e^{iky} + \sum_{j=1}^{N_\pi} m_{\pi j}^2 e^{-\kappa_{\pi j} y}. \tag{3.27}$$

Se tiene que la solución $K(x,y)$ de (3.25) es la misma para toda $\alpha \in (0,\pi)$, sin embargo, la solución $A_\alpha(x,y)$ en (3.21) depende de α. Se observa pues $K(x,y)$ que esta relacionada a la transformada de Fourier de la solución de Jost $f(k,x)$, la cual no depende de α mientras que $A_\alpha(x,y)$ esta relacionada a la transformada de Fourier de la solución regular, la cual depende de α.

Se destaca el hecho de que las funciones $A_\alpha(x,x^-)$ y $K(x,x^+)$ en (3.20) y (3.24) se obtienen como valores límite. Si invertimos las transformadas de Fourier dadas para $\varphi_\alpha(k,x)$ y $f(k,x)$ obtenemos $A_\alpha(x,y) = 0$ para $y > x$ y $K(x,y) = 0$ para $y < x$. Para enfatizar las discontinuidades de salto a lo largo de la recta $x = y$, se utilizan los valores límites apropiados en (3.20) y (3.24), los cuales no siempre están indicados en la literatura de forma explícita ([4], [13], [17]).

El potencial V puede, de forma alternativa, ser reconstruido utilizando el método de Gel'fand-Levitan o bien el método de Marchenko en el caso en que las condiciones de frontera sean del tipo de Dirichlet. Esto es, si se tiene $F_\alpha(k)$, $F_\beta(k)$ y $h_{\beta\alpha}$ para algún $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ con $\alpha \neq \beta$, entonces de (3.17)-(3.18) se puede reconstruir $F_\pi(k) = f(k, 0)$. Teniendo $F_\pi(k)$ se obtiene entonces $\kappa_{\pi j}$ para $j = 1, \cdots, N$ y, finalmente, las constantes de normalización de Gel'fand-Levitan $g_{\pi j}$ y las constantes de normalización de Marchenko $m_{\pi j}$ se pueden reconstruir utilizando (3.15) y (3.16).

3.3.3. Método de Faddeev-Marchenko

También se puede reconstruir al potencial V considerándolo como un potencial definido en toda la recta real en la ecuación de Schrödinger con $V \equiv 0$ para $x < 0$. Considerando que tanto la solución derecha de Jost, como la solución izquierda de Jost , ver [4], son ambas soluciones para el caso de todo el eje real en la ecuación de Schrödinger con las respectivas condiciones asintóticas para $x \to +\infty$:

$$f_l(k, x) = e^{ikx}[1 + o(1)], \quad f_l'(k, x) = ike^{ikx}[1 + o(1)], \tag{3.28}$$

$$f_r(k, x) = e^{-ikx}[1 + o(1)], \quad f_r'(k, x) = -ike^{-ikx}[1 + o(1)], \tag{3.29}$$

en este caso $f_l(k, x)$ satisface

$$f_l(k, x) = \frac{e^{ikx}}{T(k)} + \frac{L(k)e^{-ikx}}{T(k)} \qquad x \leq 0 \tag{3.30}$$

y esta ultima relación coincide con la solución de Jost $f(k, x)$ para el caso $x \geq 0$, donde L es el coeficiente de reflexión izquierdo y T es el coeficiente de transmisión. El coeficiente de reflexión derecho R esta dado por la expresión

$$R(k) = -\frac{L(-k)T(k)}{T(-k)}, \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{3.31}$$

El potencial puede ser reconstruido de forma única utilizando cualquiera de los métodos de inversión en todo el eje real, entonces podemos construir el conjunto de datos $\mathcal{F}$ definido como:

$$\mathcal{F} = \{L(k), T(k), R(k), \{\tau_j\}_{j=1}^N, \{c_{lj}\}_{j=1}^N, \{c_{rj}\}_{j=1}^N, \{\gamma_j\}_{j=1}^N\} \tag{3.32}$$

donde las $-\tau_j^2$ corresponden a los estados de energía acotados en todo el eje real. Nótese que T tiene polos en $k = i\tau_j$ en $\mathbb{C}^+$ para $j = 1, \cdots, N$ las c_{lj} son las constantes de normalización definidas como

$$c_{lj} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} dx f_l(i\tau_j, x)^2}}, \qquad j = 1, \cdots, N. \tag{3.33}$$

las c_{rj} son las constantes de normalización dadas en (3.33) reemplazando $f_l(k, x)$ por $f_r(k, x)$ y las γ_j son las constantes dependientes de los estados acotados definidas como

$$\gamma_j = \frac{f_l(i\tau_j, x))}{f_r(i\tau_j, x)}, \qquad j = 1, \cdots, N. \tag{3.34}$$

Para el método de Faddeev-Marchenko (ver [13], [17], [21]-[24]) el potencial V y f_l se pueden reconstruir de forma única como:

$$V(x) = -2\frac{d}{dx} B_l(x, 0^+), \quad f_l(k, x) = e^{ikx}[1 + \textstyle\int_0^{\infty} dy B_l(x, y) e^{iky}], \tag{3.35}$$

donde $B_l(x, y)$ se obtiene resolviendo la ecuación integral derecha de Faddeev-Marchenko

$$B_l(x, y) + \Omega_l(2x + y) + \int_0^{\infty} dy \Omega_l(2x + y + z) B_l(x, z) = 0, \ y > 0 \tag{3.36}$$

con los datos iniciales

$$\Omega_l(y) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk R(k) e^{iky} + \sum_{j=1}^{N} c_{lj}^2 e^{-\tau_j y}. \tag{3.37}$$

De forma equivalente, el potencial V y $f_r(k, x)$ se puede reconstruir de forma única como

$$V(x) = 2\frac{d}{dx} B_r(x, 0^+), \quad f_r(k, x) = e^{-ikx}[1 + \textstyle\int_0^{\infty} dy B_r(x, y) e^{iky}], \tag{3.38}$$

donde $B_r(x, y)$ se obtiene resolviendo la ecuación integral derecha de Faddeev-Marchenko

$$B_r(x, y) + \Omega_r(-2x + y) + \int_0^{\infty} dy \Omega_r(-2x + y + z) B_r(x, z) = 0, \ y > 0 \tag{3.39}$$

con los datos iniciales

$$\Omega_r(y) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk L(k) e^{iky} + \sum_{j=1}^{N} c_{rj}^2 e^{-\tau_j y}. \tag{3.40}$$

Se describe a continuación la construcción de $\mathcal{F}$ dada en (3.32) a partir de $\{F_\alpha, F_\beta, \alpha, \beta\}$ con $\alpha \neq \beta$ o de $\{F_\pi, F_\beta, \pi, \beta\}$ con $\beta \neq \pi$, con lo cual ya podemos utilizar cualquiera de los métodos de inversión para reconstruir V cuando se trata de todo el eje real. Utilizando (3.28) y su derivada con respecto a x evaluada en $x = 0$ obtenemos

$$L(k) = \frac{ikf(k,0) - f'(k,0)}{ikf(k,0)}, \tag{3.41}$$

$$T(k) = \frac{2ik}{ikf(k,0) + f'(k,0)} \quad . \tag{3.42}$$

Si $\alpha \neq \beta$ con la ayuda de (3.17)-(3.20) y (3.42) para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ se obtiene

$$L(k) = \begin{cases} \frac{(k-i\cot\beta)F_\alpha(k)-(k-i\cot\alpha)F_\beta(k)}{(k+i\cot\beta)F_\alpha(k)-(k+i\cot\alpha)F_\beta(k)}, & \alpha,\beta \in (0,\pi) \\ \frac{(k-i\cot\beta)F_\pi(k)-F_\beta}{(k+i\cot\beta)F_\pi(k)+F_\beta}, & \beta \in (0,\pi) \end{cases}$$

$$T(k) = \begin{cases} \frac{2ikh_{\beta\alpha}}{(k+i\cot\beta)F_\alpha(k)-(k+i\cot\alpha)F_\beta(k)}, & \alpha,\beta \in (0,\pi) \\ \frac{2k}{(k+i\cot\beta)F_\pi(k)+F_\beta(k)}, & \beta \in (0,\pi) \end{cases}$$

y, para $k \in \mathbb{R}$ resulta

$$R(k) = \begin{cases} \frac{-(k+i\cot\beta)F_\alpha(-k)+(k+i\cot\alpha)F_\beta(-k)}{(k+i\cot\beta)F_\alpha(k)-(k+i\cot\alpha)F_\beta(k)} & \alpha,\beta \in (0,\pi) \\ -\frac{(k+i\cot\beta)F_\pi(-k)+F_\beta(-k)}{(k+i\cot\beta)F_\pi(k)+F_\beta(k)} & \beta \in (0,\pi) \end{cases}$$

Al ser V para $x < 0$, se conocen entonces las constantes de normalización c_{rj} se relacionan ([23]) a los residuos de L en los polos $k = i\tau_j$ por medio de las fórmulas

$$c_{rj} = \sqrt{-i\mathrm{Res}(L, i\tau_j)} \qquad j = 1 \cdots, N. \tag{3.43}$$

Utilizando (3.30) y el hecho de que $f_r(k,x) = e^{ikx}$ para $x \leq 0$ se tiene

$$\gamma_j = f_l(i\tau_j, 0) = f(i\tau_j, 0) = \frac{L}{R}(i\tau_j) = \frac{\mathrm{Res}(L, i\tau_j)}{\mathrm{Res}(T, i\tau_j)} \tag{3.44}$$

y entonces por medio de (3.33) y (3.34) finalmente obtenemos

$$c_{lj} = \frac{c_{rj}}{|\gamma_j|} = \frac{(-1)^{N-j}c_{rj}}{\gamma_j} = \frac{i(-1)^{N-j+1}\mathrm{Res}(t, i\tau_j)}{\sqrt{-i\mathrm{Res}(L, i\tau_j)}} \tag{3.45}$$

aquí se usa el hecho de que el signo de γ_j es el mismo que de $(-1)^{N-j}$ (ver [23]).

Capítulo 4

Preliminares

4.1. Resultados preliminares

Comenzamos con dos resultados, uno de ellos propio de análisis complejo y el otro de análisis de Fourier para funciones en la clase de Hardy, los cuales nos servirán en lo posterior para obtener una única representación de la función de Jost en $\overline{\mathbb{C}^+}$ por medio de sus valores en la frontera (en este caso de $\mathbb{R}$), ver [6] y [14] respectivamente.

Sea $F(z)$ en la clase de Hardy, es decir, para $z = x + iy$ se tiene que $F(z)$ es una función analítica, regular para $y > 0$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |F(x+iy)|^2$$

existe y esta acotada uniformemente para todo $y > 0$ (ver [6]). Entonces para $y \to 0$ se tiene que $F(x+iy) \to F(x)$ casi dondequiera y $F(x+iy) \to F(x)$ en el sentido de L^2. Para $y > 0$ se tiene

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{F(x+iy)}{t-z}, \ t \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

Se tiene además que si $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ y $F(x) = f(x) + ig(x)$, las funciones U y V se relacionan con F a través de las fórmulas

$$U(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} \tag{4.2}$$

$$V(x,y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{(t-x)f(t)}{(t-x)^2 + y^2} \tag{4.3}$$

utilizando (4.1)-(4.3) se obtiene una única representación de $F(z)$ en términos de $f(x)$ como

$$F(z) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{f(t)}{(t-x)-iy}. \tag{4.4}$$

A esta última expresión (4.4) se le conoce como fórmula de Schwarz.

Sea una región del plano complejo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ función analítica en Ω. Si $z_0 \in \Omega$ es un cero de $\varphi(z)$ de orden n entonces existe una vecindad de z_0 tal que $\varphi(z)$ se puede descomponer en la forma

$$\varphi(z) = (z - z_0)^n \varphi_0(z) \tag{4.5}$$

donde $\varphi_0(z)$ es una función analítica en dicha vecindad y además $\varphi_0(z_0) \neq 0$.

Lema 4.1 *[1] Dada una función V en la clase de Faddeev y $\alpha \in (0,\pi]$ la correspondiente función de Jost $F_\alpha(k)$ se puede reconstruir de forma única utilizando su amplitud dada en $\mathbb{R}$ y sus ceros en $\mathbb{C}^+$. Para $\alpha \in (0,\pi)$ se tiene*

$$F_\alpha(k) = k\prod_{j=1}^{N_\alpha} \frac{k - i\kappa_{\alpha j}}{k + i\kappa_{\alpha j}} \exp\left(-\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\log|t/F_\alpha(t)|}{t-k-i0^+}\right), \quad k \in \overline{\mathbb{C}^+} \tag{4.6}$$

y para $\alpha = \pi$ se tiene

$$F_\pi(k) = \prod_{j=1}^{N_\pi} \frac{k - i\kappa_{\pi j}}{k + i\kappa_{\pi j}} \exp\left(-\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\log|F_\pi(t)|}{t-k-i0^+}\right), \quad k \in \overline{\mathbb{C}^+} \tag{4.7}$$

donde $i0^+$ indica que, para $k \in \mathbb{R}$, el valor de $F_\alpha(k)$ se obtiene como el límite desde $\overline{\mathbb{C}^+}$

Prueba. Esta prueba se divide en dos partes, primero el caso $\alpha = \pi$ y la segunda parte se refiere al caso $\alpha \in (0,\pi)$.

Para $\alpha = \pi$ sea

$$G_\pi(k) = F_\pi(k)\prod_{j=1}^{N_\pi} \frac{k + i\kappa_{\pi j}^2}{k - i\kappa_{\pi j}^2}.$$

Examinemos ahora el comportamiento asintótico de $G_\alpha(k)$. Esto es, a continuación se analiza el comportamiento de $\log G_\pi(k)$, para $k \longrightarrow \infty$ y $k \longrightarrow 0$ con $k \in \mathbb{C}^+$.

Para $k \to \infty$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\log G_\pi(k) &= \log F_\pi(k) + \log \prod_{j=1}^{N_\pi} \frac{k + i\kappa_{\pi j}}{k - i\kappa\pi j} \\
&= \log\left(1 - \frac{1}{2ik}\int_0^\infty dx V(x) + o\Big(\frac{1}{k}\Big)\right) + \sum_{j=1}^{N_\pi} \log\left(\frac{k + i\kappa_{\pi j}}{k - i\kappa\pi j}\right) \\
&= \log\left(1 + \frac{1}{k}[-\frac{1}{2i}\int_0^\infty dx V(x) + o(1)]\right) + \sum_{j=1}^{N_\pi} \log\left(\frac{1 + \frac{i\kappa_{\pi j}}{k}}{1 - \frac{i\kappa_{\pi j}}{k}}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2ik}\int_0^\infty dx V(x) + o\Big(\frac{1}{k}\Big)\right) + \sum_{j=1}^{N_\pi}\left(\frac{i\kappa_{\pi j}}{k} + o\Big(\frac{1}{k}\Big)\right) \\
&= -\frac{1}{2ik}\int_0^\infty dx V(x) + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{N_\pi} i\kappa_{\pi j} + o\Big(\frac{1}{k}\Big) \\
&= O\Big(\frac{1}{k}\Big)
\end{aligned}
$$

Notemos que $f(0,0)$ y $f'(0,0)$ no pueden ser ambas cero simultáneamente pues si $f'(0,0) = 0$ se tendría $f(0,x)$ es constante, esto es $f(0,x) = 0$ para toda $x \geq 0$, lo cual no es posible para $F_\pi(k)$. Esto último debido al comportamiento asintótico de $f(k,x)$ para $k \to \infty$ (ver (3.4)-(3.5)), pues $f(k,x)$ tiene un comportamiento exponencial para $k \to 0$. Para $k \to 0$, destaca el caso $f(0,0) = 0$, que se desarrolla a continuación: Utilizando la Proposición 34 (b) se tiene

$$
\begin{aligned}
\log G_\pi(k) &= \log F_\pi(k) + \log \prod_{j=1}^{N_\pi} \frac{k + i\kappa_{\pi j}}{k - i\kappa\pi j} \\
&= \log f(k,0) + \sum_{j=1}^{N_\pi} \log\left(-\frac{1 + \frac{k}{i\kappa_{\pi j}}}{1 - \frac{k}{i\kappa\pi j}}\right) \\
&= \log f'(k,0) + \log\left(\frac{-ik}{f'(0,0)^2}\right) + o(k)
\end{aligned}
$$

de lo cual se sigue que existe $C_0 > 0$ tal que

$$
|\log G_\pi(k)| \leq |\log f'(k,0)| + |\log(-ik/f'(0,0)^2)| + C_0
$$

elevando al cuadrado se tiene

$$\begin{aligned}|\log G_\pi(k)|^2 \;\leq\; & |\log f'(k,0)|^2 + |\log(-ik/f'(0,0)^2)|^2 + C_0^2 + \\ & +2C_0^2|\log f'(k,0)| + 2C_0^2|\log(-ik/f'(0,0)^2)| \\ & +2|\log f'(k,0)||\log(-ik/f'(0,0)^2)|\end{aligned}$$

Ahora, para poder utilizar la fórmula de Schwarz (4.4), si $k = u + iv$ se debe probar la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} du|\log G_\pi(u+iv)|^2 \leq C, \tag{4.8}$$

para alguna $C \in \mathbb{R}$, para toda $v > 0$. Dividamos la integral en tres partes: para $\epsilon > 0$ tomemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} du|\log G_\pi(u+iv)|^2 \;=\; & \int_{-\infty}^{-\epsilon} du|\log G_\pi(u+iv)|^2 + \\ & + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} du|\log G_\pi(u+iv)|^2 + \\ & + \int_{\epsilon}^{\infty} du|\log G_\pi(u+iv)|^2\end{aligned}$$

Utilizando las estimaciones anteriores se tiene que, para la primera y tercera integral existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|\log G_\pi(k)| \leq C_1$$

elevando al cuadrado e integrando con respecto a u de $-\infty$ a $-\epsilon$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-\epsilon} du|\log G_\pi(u+iv)|^2 \;\leq\; & \int_{-\infty}^{-\epsilon} duC_1^2\frac{1}{|u+iv|^2} = \int_{-\infty}^{-\epsilon} duC_1^2\frac{1}{u^2+v^2} \leq \\ \leq\; & C_1^2\int_{-\infty}^{-\epsilon} du\frac{1}{u^2} = C_1^2\frac{1}{\epsilon}\end{aligned}$$

y, del mismo modo, para el intervalo $[\epsilon, \infty)$

$$\int_{\epsilon}^{\infty} du|\log G_\pi(u+iv)|^2 \;\leq\; C_1^2\int_{\epsilon}^{\infty} du\frac{1}{u^2} = C_1^2\frac{1}{\epsilon}$$

por último, para $k \to 0$ existe $C_2 \in \mathbb{R}$ para la cual, haciendo $k = u + iv$, para $\epsilon > 0$, integrando ambos lados de $-\epsilon$ a ϵ con respecto a u se tiene que

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} du|\log G_\pi(u+iv)|^2 \leq C_2$$

al ser $\epsilon > 0$ arbitrario, la relación (4.8) queda probada. Ahora, para $k \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\log G_\pi(k) &= \log|G_\pi(k)| = \log|F_\pi(k)\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{k+i\kappa_{\pi j}}{k-i\kappa\pi j}| \\ &= \log|F_\pi(k)| + \sum_{j=1}^{N_\pi}\log|\frac{k+i\kappa_{\pi j}}{k-i\kappa\pi j}| \\ &= \log|F_\pi(k)|\end{aligned}$$

así, al ser $\mathrm{Re}[\log G_\pi(k)] = \log|G_\pi(k)| = \log|F_\pi(k)|$, $\log G_\pi(k)$ se puede expresar de la forma

$$\log G_\pi(k) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dt\frac{|G_\pi(t)|}{t-k}, \quad k \in \mathbb{C}^+ \quad t \in \mathbb{R}$$

luego

$$\log F_\pi(k)\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{k+i\kappa_{\pi j}}{k-i\kappa\pi j} = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dt\frac{|F_\pi(t)|}{t-k}$$

para $k \in \mathbb{C}^+$, de donde se deduce de manera inmediata la fórmula

$$F_\pi(k) = \prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{k+i\kappa_{\pi j}}{k-i\kappa\pi j}\exp\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} dt\frac{|F_\pi(t)|}{t-k-i0^+}\right)$$

para $k \in \mathbb{C}^+$.

Para $\alpha \in (0,\pi)$ sea

$$G_\alpha(k) = \frac{k}{F_\alpha(k)}\prod_{j=1}^{N_\alpha}\frac{k-i\kappa_{\alpha j}}{k+i\kappa_{\alpha j}},$$

al igual que el caso anterior se investiga el comportamiento de $G_\alpha(k)$ para $k \to \infty$ y $k \to 0$, $k \in \mathbb{C}^+$ para después poder hacer uso de la fórmula de Schwarz (4.4). Esto se desarrolla del siguiente modo:

Para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$, recordemos que la función de Jost, en este caso $F_\alpha(k)$ es analítica en $\mathbb{C}^+$, además sus ceros en dicha región son simples y están dados por $k = \kappa_{\alpha j}$, para $j = 1, ..., N_\alpha$ y en el caso $k = 0$, $F_\alpha(0)$ podría ser cero o no, en caso afirmativo, dicho cero también sería simple, en ambos casos, por ser analítica, $F_\alpha(k)$ tiene una representación, en alguna vecindad de $k = \kappa_{\alpha j}$ de la forma

$$F_\alpha(k) = (k - i\kappa_{\alpha j})\varphi_{\alpha j}(k)$$

donde $\varphi_{\alpha j}(i\kappa_{\alpha j}) \neq 0$, para el caso $F_\alpha(0) = 0$ se tiene

$$F_\alpha(k) = k\varphi_{\alpha 0}(k)$$

donde $\varphi_{\alpha 0}(k) \neq 0$

Se sigue entonces de estas observaciones que $G_\alpha(k)$ no tiene ceros en $\overline{\mathbb{C}^+}$ y, por construcción, es analítica.

Lo anterior nos permite definir, para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ la función $\log G_\alpha(k)$. El objetivo ahora es expresar esta nueva función a través de sus valores en la frontera de la región donde esta bien definida, esto es, a través de sus valores en $\mathbb{R}$ y por medio de la fórmula de Schwarz (4.4). Averigüemos ahora el comportamiento asintótico de $\log G_\alpha(k)$. Para $k \to \infty$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$ haciendo uso de la Proposición 34 y de la definición de $F_\alpha(k)$ se tiene

$$\begin{aligned} G_\alpha(k) &= k\frac{1}{k - i\big[\cot\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\infty dxV(x)\big] + o(1)}\big[1 - \frac{2i}{k}\sum_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j} + o(\frac{1}{k})\big] \\ &= \big[1 - \frac{i}{k}\big[\cot\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\infty dxV(x)\big] + o(1)\big]\big[1 - \frac{2i}{k}\sum_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j} + o(\frac{1}{k})\big] \\ &= 1 - \frac{i}{k}\big[\big(\cot\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\infty dxV(x)\big) + 2\sum_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}\big] + o(\frac{1}{k}) \end{aligned}$$

tomando el desarrollo parcial de la función logaritmo, finalmente se tiene

$$\begin{aligned} \log G_\alpha(k) &= -\frac{i}{k} - \frac{i}{k}\big[\big(\cot\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\infty dxV(x)\big) + 2\sum_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}\big] + o(\frac{1}{k}) \\ &= O(\frac{1}{k}) \end{aligned}$$

esto nos da, para $\epsilon > 0$ y $k = u + iv$

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} du|\log G_(u + iv)| < \infty$$

y

$$\int_{-\epsilon}^{-\infty} du|\log G_(u + iv)| < \infty.$$

Ahora, para $k \to 0$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$ analicemos el comportamiento asintótico de $k/F_\alpha(k)$ que, en tal caso es la parte mas comprometida de la función, pues el producto esta bien definido cerca de 0 y es distinto de cero para $k = 0$. Para el caso $F_\alpha(0) = 0$ se tiene $f'(0,0) = -\cot\alpha f(0,0)$, donde al menos $f(0,0)$ es distinta de cero, entonces de la definición de $F_\alpha(k)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{k}{F_\alpha(k)} &= \frac{ik}{f(k,0)}\Big[\frac{k}{\frac{f'(k,0)}{f(k,0)} + \cot\alpha}\Big] \\
&= \frac{f(0,0)^2}{f(k,0)}\frac{1}{1+o(1)} \\
&= \frac{f(0,0)^2}{f(k,0)}(1+o(1))
\end{aligned}$$

así

$$\log G_\alpha(k) = \log\frac{1}{f(k,0)} + O(1)$$

entonces existe $C_0 > 0$ tal que

$$|\log G_\alpha(k)| \leq |\log(1/f(k,0))| + C_0$$

elevando al cuadrado se tiene

$$|\log G_\alpha(k)|^2 \leq |\log 1/f(k,0))|^2 + 2C_0^2 + C_0|\log(1/f(k,0))|$$

esto es, si $k = u + iv$ y > 0 se tiene que, integrando de $-\epsilon$ a ϵ con respecto a u

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} du|\log G_\alpha(k)|^2 \leq C_1$$

de las observaciones anteriores se tiene que, si $k = u + iv$, para $v \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du|\log G_\alpha(u+iv)| < C$$

Por otro lado, $\mathrm{Re}[\log G_\alpha(k)] = \log|G_\alpha(k)|$, para $k \in \mathbb{R}$. Lo anterior nos permite utilizar la fórmula de Schwarz (4.4) y se obtiene la representación única

$$\log G_\alpha(k) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\frac{\log G_\alpha(k)}{t-k}$$

$t \in \mathbb{R}$, o bien

$$G_\alpha(k) = \exp\big(\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\frac{\log G_\alpha(k)}{t-k}\big)$$

esto es, para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$, $F_\alpha(k)$ se representa como

$$
\begin{aligned}
F_\alpha(k) &= k \prod_{j=1}^{N_\alpha} \frac{k - i\kappa_{\alpha j}}{k + i\kappa_{\alpha j}} \frac{1}{G_\alpha(k)} \\
&= k \prod_{j=1}^{N_\alpha} \frac{k - i\kappa_{\alpha j}}{k + i\kappa_{\alpha j}} \exp\Big(- \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\log G_\alpha(k)}{t - k - i0^+} \Big)
\end{aligned}
$$

■

Lema 4.2 *[1] Sean $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, entonces para $k \to \infty$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene*

$$
\begin{aligned}
&i) \quad F_\alpha(k) = k - i[\cot\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\infty dx V(x)] + o(1) \\
&ii) \quad F_\pi(k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int_0^\infty dx V(x) + o\left(\frac{1}{k}\right) \\
&iii) \quad F_\alpha(k) - F_\beta(k) = i\mathrm{h}_{\beta\alpha} - \frac{\mathrm{h}_{\beta\alpha}}{2k}\int_0^\infty dx V(x) + o\left(\frac{1}{k}\right) \\
&iv) \quad \frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)} = k - i\cot\beta + i\int_0^\infty dx V(x) e^{2ikx} + o\left(\frac{1}{k}\right) \\
&v) \quad \frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)} = \frac{1}{k} + \frac{i}{k^2}\left[\cot\beta - \int_0^\infty dx V(x) e^{2ikx}\right] - \frac{\cot^2\beta}{k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \\
&vi) \quad \frac{F_\alpha(k)}{F_\beta(k)} = 1 + \frac{ih_{\beta\alpha}\cot\beta}{k} - \frac{h_{\beta\alpha}\cot\beta}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)
\end{aligned}
$$

Prueba. Utilizando la Proposición 34-(a) y la Definición 3.2 y para (v) y (vi) recordando que, dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$ se tiene

$$
\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + o(z^n) \tag{4.9}
$$

entonces

i)

$$
\begin{aligned}
F_\alpha(k) &= -i[f'(k,0) + \cot\alpha f(k,0)] = \\
&= -i[ik - \int_0^\infty dx V(x) + o(1) + \cot\alpha - \frac{\cot\alpha}{2ik}\int_0^\infty + o(1/k)] \\
&= k - i\left[\cot\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\infty dx V(x)\right] + o(1)
\end{aligned}
$$

ii)

$$F_\pi(k) = \quad f(k,0) = \quad 1 - \frac{1}{2ik}\int_0^\infty dx V(x) + o(1/k)$$

iii)

$$\begin{aligned}
F_\alpha(k) - F_\beta(k) &= -i[f'(k,0) + \cot\alpha f(k,0)] + i[f'(k,0) + \cot\beta f(k,0)] \\
&= i(\cot\beta - \cot\alpha) f(k,0) \\
&= ih_{\beta\alpha} f(k,0) \\
&= ih_{\beta\alpha} - \frac{ih_{\beta\alpha}}{2k}\int_0^\infty dx V(x) + o(1/k)
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
\frac{F_\alpha(k)}{F_\pi(k)} &= -i\frac{f'(k,0)}{f(k,0)} - i\cot\alpha \\
&= k + i\left[\int_0^\infty dx V(x) e^{2ikx} - \cot\alpha\right] + o(1/k)
\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}
\frac{F_{\pi(k)}}{F_\beta(k)} &= i\frac{f(k,0)}{f'(k,0) + \cot\beta f(k,0)} \\
&= i\frac{1}{\frac{f'(k,0)}{f(k,0)} + \cot\beta} \\
&= i\frac{1}{ik - \int_0^\infty dx V(x) e^{2ikx} + o(1/k) + \cot\beta} \\
&= \frac{1}{k}\frac{1}{1 + \frac{1}{ik}\Big(- \int_0^\infty dx V(x) e^{2ikx} + \cot\beta + o(1/k)\Big)} \\
&= \frac{1}{k}\Bigg[1 - \frac{1}{ik}\Big(- \int_0^\infty dx V(x) e^{2ikx} + \cot\beta + o(1/k)\Big) + \\
&\quad + \frac{1}{(ik)^2}\Big(- \int_0^\infty dx V(x) e^{2ikx} + \cot\beta + o(1/k)\Big)^2 + o(1/k^2)\Bigg] \\
&= \frac{1}{k} + \frac{i}{k^2}\left[\cot\beta - \int_0^\infty dx V(k) e^{2ikx}\right] - \frac{1}{k^3}\cot^2\beta + o(1/k^3)
\end{aligned}$$

vi)

$$
\begin{aligned}
\frac{F_\alpha(k)}{F_\beta(k)} &= \frac{f'(k,0)+\cot\alpha f(k,0)}{f'(k,0)+\cot\beta f(k,0)} \\
&= 1-h_{\beta\alpha}\frac{1}{\frac{f'(k,0)}{f(k,0)}+\cot\beta} \\
&= 1-h_{\beta\alpha}\frac{1}{1+\frac{1}{k}\left[-\int_0^\infty dxV(x)e^{2ikx}+o(1)\right]} \\
&= 1-\frac{h_{\beta\alpha}}{ik}\left[1-\frac{1}{ik}\left(\cot\beta-\int_0^\infty dxV(k)e^{2ikx}\right)\right]+o\left(\frac{1}{k}\right) \\
&= 1+i\frac{h_{\beta\alpha}}{k}-\frac{h_{\beta\alpha}}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)
\end{aligned}
$$

■

Observamos que $F_\alpha(k)$ es imaginario puro para valores de k en $\mathbb{I}^+$ si $\alpha\in(0,\pi)$ y que $F_\alpha(k)$ es real para $k\in\mathbb{I}^+$. A continuación se analiza el comportamiento asintótico de la función de Jost para k cercana a cero.

Recordemos que $f(0,0)$ y $f'(0,0)$ no pueden ser ambas cero simultáneamente, así, si $F_\alpha(0)=0$ para $\alpha\neq 0$ entonces de la definición se tiene $f'(0,0)+\cot\alpha f(0,0)=0$ de aqui que $f(0,0)\neq 0$ y $f'(0,0)\neq 0$, pues de lo contrario se tiene $f(0,0)=f'(0,0)=0$, lo cual es falso.

Para el caso $\alpha=\pi$ se tiene que $F_\pi=0$ si y solo si $f(0,0)=0$, de lo cual se deduce que $f'(0,0)\neq 0$. Por último, para $\alpha,\beta\in(0,\pi]$, $\alpha\neq\beta$ la igualdad $F_\alpha(0)=F_\beta(0)=0$ no puede ser cierta pues $F_\alpha(0)-F_\beta(0)=0$ entonces $f'(0,0)+\cot\alpha f(0,0)-f'(0,0)-\cot\beta f(0,0)=(\cot\alpha-\cot\beta)f(0,0)=0$, luego $f(0,0)=0=f'(0,0)$, es decir $F_\alpha(0)$ y $F_\beta(0)=0$ no pueden ser cero simultáneamente para $\alpha\neq\beta$.

Lema 4.3 *[1] Sean $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, entonces para $k\to 0$, $k\in\overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene*

$$
\frac{F_\alpha(k)}{F_\beta(k)}\begin{cases} \frac{F_\alpha(0)}{F_\beta(0)}-\frac{ikh_{\beta\alpha}}{F_\beta(0)^2}+o(k), & F_\beta(0)\neq 0 \\ -\frac{i}{k}\frac{F_\alpha(0)^2}{h_{\beta\alpha}}[1+o(1)], & F_\beta(0)=0,\ \alpha\neq\beta \end{cases} \tag{4.10}
$$

Prueba.

a)$F_\beta(0) \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{F_\alpha(k)}{F_\beta(k)} &= \frac{f'(k,0)+\cot\alpha f(k,0)}{f'(k,0)+\cot\beta f(k,0)}\\
&= \frac{1}{1+\cot\beta\frac{f(k,0)}{f'(k,0)}} + \frac{\cot\alpha}{\frac{f'(k,0)}{f(k,0)}+\cot\beta}\\
&= \frac{1}{1+\cot\beta[\frac{f(0,0)}{f'(0,0)} - \frac{ik}{f'(0,0)^2}+o(k)]}\\
&\quad + \frac{\cot\alpha}{\frac{f'(0,0)}{f(0,0)}+\cot\beta+\frac{ik}{f(0,0)^2}+o(k)}\\
&= -\frac{if'(0,0)}{F_\beta(0)} - \frac{ik\cot\beta}{F_\beta(0)^2} - \frac{i\cot\beta f(0,0)}{F_\beta(0)} + \frac{ik\cot\alpha}{F_\alpha(0)^2}+o(k)\\
&= \frac{F_\alpha(0)}{F_\beta(0)} - \frac{ikh_{\beta\alpha}}{F_\beta(0)^2}+o(k)
\end{aligned}$$

b)$F_\beta(0) = 0$. Evaluando (3.15) en $k=0$ se obtiene $F_\alpha(0) = ih_{\beta\alpha}f(0,0)$ por otro lado, $k=0$ es un cero simple de $F_\beta(0)$, dividiendo por k y calculando para $k \to 0$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{F_\beta(k)}{k} &= -i\frac{f'(k,0)+\cot\beta f(k,0)}{k}\\
&= -i\frac{f(k,0)}{k}[\frac{f'(k,0)}{f(k,0)}+\cot\beta]\\
&= -i\frac{f(k,0)}{k}[\frac{f'(0,0)}{f(0,0)}+\frac{ik}{f(0,0)^2}+\cot\beta+o(k)]\\
&= \frac{1}{f(0,0)}+o(1)
\end{aligned}$$

esto es

$$f(0,0)\frac{F_\beta(k)}{k} = 1+o(1)$$

así

$$-\frac{k}{i}\frac{h_{\beta\alpha}}{F_\alpha(0)^2}\frac{F_\beta(k)}{F_\alpha(k)} = 1+o(1)$$

finalmente

$$\frac{F_\beta(k)}{F_\alpha(k)} = -\frac{i}{k}\frac{F_\alpha(0)^2}{h_{\beta\alpha}}[1+o(1)]$$

∎

Lema 4.4 *[1] Sea $\beta \in (0,\pi)$. Para $k \to 0$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene*

i)

$$\frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)} \begin{cases} \frac{F_\pi(0)}{F_\beta(0)} - \frac{k}{F_\beta(0)^2} + o(k), & F_\beta(0) \neq 0 \\ \frac{F_\pi(0)^2}{k}[1+o(1)], & F_\beta(0) = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

ii)

$$\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)} \begin{cases} \frac{F_\beta(0)}{F_\pi(0)} - \frac{k}{F_\pi(0)^2} + o(k), & F_\pi(0) \neq 0 \\ -\frac{F_\beta(0)^2}{k}[1+o(1)], & F_\pi(0) = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

Prueba. De la Proposición 34 y la Definición 3.2 se tiene que
i)
a)$F_\beta(0) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)} &= i\frac{f(k,0)}{[f'(k,0)+\cot\beta f(k,0)]} \\ &= \frac{i}{\frac{f'(0,0)}{f(0,0)} + \cot\beta + \frac{ik}{f(0,0)^2} + o(k)} \\ &= \frac{f(0,0)}{F_\beta(0)}[1 + i\frac{f(0,0)}{F_\beta(0)}(\frac{ik}{f(0,0)^2}) + o(k)] \\ &= \frac{f(0,0)}{F_\beta(0)} - \frac{k}{F_\beta(0)^2} + o(k) \\ &= \frac{F_\pi(0)}{F_\beta(0)} - \frac{k}{F_\beta(0)^2} + o(k) \end{aligned}$$

b)$F_\beta(0) = 0$. Al no poder ser ambos $f'(0,0)$ y $f(0,0)$ cero simultáneamente se tiene que $F_\pi(0) = f(0,0) \neq 0$, evaluando (3.15) en $k = 0$, del mismo modo que en el Lema 4.3(b), resulta

$$f(0,0)\frac{F_\beta(k)}{k} = 1 + o(1)$$

luego entonces

$$\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)} = \frac{F_\pi(k)}{k}[1 + o(1)]$$

ii)

a)$F_\pi(0) \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)} &= -i\frac{[f'(k,0) + \cot\beta f(k,0)]}{f(k,0)} \\
&= -i\frac{f'(k,0)}{f(k,0)} - i\cot\beta \\
&= -i\frac{f'k,0}{f(k,0)} - i\cot\beta + \frac{k}{f(0,0)^2} + o(k) \\
&= \frac{F_\beta(0)}{F_\pi(0)} + \frac{k}{F_\pi(0)^2} + o(k)
\end{aligned}$$

b)$F_\pi(0) = 0$. En este caso se tiene $F_\beta(0) = -if'(0,0)$ y $k = 0$ es un cero simple de $F_\pi(k)$, así, podemos calcular el comportamiento asintótico del cociente $F_\pi(k)/k$, para $k \to 0$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$, por la Proposición 34-(b) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{F_\pi(k)}{k} &= \frac{f(k,0)}{k} \\
&= \frac{1}{k}[i\frac{ik}{f'(0,0)^2}f'(k,0) + o(k)]
\end{aligned}$$

así, para $k \to 0$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene que

$$-\frac{k}{F_\beta(0)^2}\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)} = 1 + o(1)$$

esto es

$$\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)} = -\frac{F_\beta(0)^2}{k}[1 + o(1)]$$

■

Lema 4.5 *[1] Sea $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, entonces para $k \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\begin{aligned}
&i) \quad \mathrm{Re}[\frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)}] = \frac{k}{|F_\beta(k)|^2} \\
&ii) \quad \mathrm{Re}[\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)}] = \frac{k}{|F_\pi(k)|^2} \\
&iii) \quad \mathrm{Re}[\frac{iF_\beta(k)}{F_\alpha(k)}] = \frac{kh_{\beta\alpha}}{|F_\alpha(k)|^2}
\end{aligned}$$

Prueba. Se tiene (ver [4], Capítulo 4) la identidad del Wronskiano para la solución de Jost:

$$f(k,0)\overline{f'(k,0)} - \overline{f(k,0)}f'(k,0) = -2ikx, \ x \in \mathbb{R}$$

ahora, utilizando esta igualdad

i)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[\frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)}\right] &= \frac{1}{2}\left[\frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)}+\overline{\frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)}}\right] \\
&= \frac{i}{2|F_\beta(k)|^2}([\overline{f'(k,0)}+\cot\beta\overline{f(k,0)}]f(k,0)- \\
&\quad -[f'(k,0)+\cot\beta f(k,0)]f(k,0)) \\
&= \frac{i}{2|F_\beta(k)|^2}(-2ik) \\
&= \frac{k}{|F_\beta(k)|^2}
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)}\right] &= \frac{1}{2}\left[\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)}+\overline{\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)}}\right] \\
&= \frac{i}{2|F_\pi(k)|^2}([f'(k,0)+\cot\beta f(k,0)]\overline{f(k,0)}- \\
&\quad -[\overline{f'(k,0)}+\cot\beta\overline{f(k,0)}]f(k,0)) \\
&= \frac{i}{2|F_\pi(k)|^2}(-2ik) \\
&= \frac{k}{|F_\pi(k)|^2}
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[i\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)}\right] &= \frac{1}{2}\left[\frac{F_\beta(k)}{F_\alpha(k)}+\overline{\frac{F_\beta(k)}{F_\alpha(k)}}\right] \\
&= \frac{i}{2|F_\alpha(k)|^2}([\overline{f'(k,0)}+\cot\beta\overline{f(k,0)}][f'(k,0)+\cot\beta f(k,0)] \\
&\quad +[f'(k,0)+\cot\alpha f(k,0)][\overline{f'(k,0)}+\cot\alpha\overline{f(k,0)}]) \\
&= \frac{-i}{2|F_\alpha(k)|^2}[\cot\beta-\cot\alpha][\overline{f(k,0)}f'(k,0)-f(k,0)\overline{f'(k,0)}] \\
&= \frac{-ih_{\beta\alpha}}{2|F_\alpha(k)|^2}2ik \\
&= \frac{h_{\beta\alpha}k}{2|F_\alpha(k)|^2}
\end{aligned}$$

■

Lema 4.6 *[1] Sean H_α y H_β dos realizaciones del operador de Schrödinger para el potencial V en la clase de Faddeev con respecto a las condiciones iniciales inducidas por α y β y $\{-\kappa_{\alpha j}^2\}_{j=1}^{N_\alpha}$, $\{-\kappa_{\beta j}^2\}_{j=1}^{N_\beta}$ los respectivos conjuntos de eigenvalores. Supóngase que $0 < \beta < \alpha \leq \pi$. Entonces $\sigma_d(H_\alpha) \cap \sigma_d(H_\beta) = \varnothing$ y $N_\beta = N_\alpha$ o bien $N_\beta = N_\alpha + 1$ y además se tiene*

$$0 < \kappa_{\alpha 1} < \kappa_{\beta 1} < \kappa_{\alpha 2} < \kappa_{\beta 2} < \cdots < \kappa_{\alpha N_\alpha} < \kappa_{\beta N \alpha}$$

o bien

$$0 < \kappa_{\alpha 1} < \kappa_{\beta 1} < \kappa_{\alpha 2} < \kappa_{\beta 2} < \cdots < \kappa_{\alpha N_\alpha} < \kappa_{\beta (N\alpha+1)}$$

según sea el caso.

Prueba.

Primero se prueba que, en efecto, $\sigma_d(H_\alpha) \cap \sigma_d(H_\beta) = \varnothing$. Sean $F_\alpha(k)$ y $F_\beta(k)$ las respectivas funciones de Jost asociadas a H_α y H_β, se tiene entonces que los eigenvalores de H_α corresponden a los ceros de $F_\alpha(k)$ y los eigenvalores de H_β corresponden a los ceros de $F_\beta(k)$, ambos en $\mathbb{C}^+$

Supóngase entonces que la intersección es distinta del vació y sea $-\kappa^2$ un cero común de $F_\alpha(k)$ y $F_\beta(k)$, esto es

$$F_\alpha(i\kappa) = F_\beta(i\kappa) = 0$$

o bien, para $\alpha \neq \pi$ se tiene

$$f'(i\kappa, 0) + \cot\beta f(i\kappa, 0) = f'(i\kappa, 0) + \cot\alpha f(i\kappa, 0) = 0$$

de donde , al ser $\alpha \neq \beta$ y $\cot\beta - \cot\alpha \neq 0$

$$(\cot\beta - \cot\alpha) f(i\kappa, 0) = 0$$

luego

$$f(i\kappa, 0) = 0$$

y por lo tanto

$$f'(i\kappa, 0) = 0$$

lo cual implica que $f(i\kappa, x) = 0$ para toda $x \geq 0$. Esto no es posible debido al comportamiento asintótico de $f(i\kappa, x)$.

De forma aún mas sencilla, para $\alpha = \pi$ se tiene

$$-i[f'(i\kappa, 0) + \cot\beta f(i\kappa, 0)] = f(i\kappa, 0) = 0$$

de lo cual se infiere de inmediato $f'(i\kappa, 0) = f(i\kappa, 0) = 0$, lo cual, por el argumento anterior, resulta ser falso.

De esto se concluye que H_α y H_β no pueden tener eigenvalores en común.

Ahora, considérense $\alpha, \beta \in (0, \pi]$, como se ha supuesto en un principio $\beta < \alpha$ y sean H_α, H_β las realizaciones auto-adjuntas respectivas y ambas asociadas al potencial V. Se tiene de [7] que las formas cuadráticas asociadas a H_α y H_π son; para H_α, con $\alpha \in (0, \pi)$

$$Q_\alpha(\varphi, \psi) = \langle \varphi', \psi' \rangle + \langle V\varphi, \psi \rangle - \cot\alpha \cdot \varphi(0) \cdot \psi(0)$$

cuyo dominio es el espacio de Sobolev $W_{1,2}(0, \infty)$. Para $\alpha = \pi$ se tiene

$$Q_\alpha(\varphi, \psi) = \langle \varphi', \psi' \rangle + \langle V\varphi, \psi \rangle$$

con dominio $W_{1,2}^{(0)}(0, \infty) = \{\varphi \in W_{1,2}(0, \infty) : \varphi(0) = 0\}$.

Por otro lado, según el principio del minimax (ver [7], [2], [9]), se tiene que, para H_α, cada eigenvalor $-\kappa_{\alpha j}^2$ viene dado por la expresión

$$-\kappa_{\alpha j}^2 = \sup_{\operatorname{codim} M = j-1} \{ \inf_{\substack{\varphi \in M \\ \|\varphi\|=1}} [Q_\alpha(\varphi, \varphi)]\}$$

donde $M \subset W_{1,2}(0, \infty)$ para $\alpha \in (0, \pi)$, o bien $M \subset W_{1,2}^{(0)}(0, \infty)$ para el caso $\alpha = \pi$. Observemos que, por las propiedades de la función cotangente, para $\alpha \in (0, \pi)$ se tiene que

$$Q_\beta(\varphi, \varphi) \leq Q_\alpha(\varphi, \varphi)$$

para $0 < \beta < \alpha \leq \pi$, además $W_{1,2}^{(0)}(0, \infty) \subset W_{1,2}(0, \infty)$. Por otro lado, para concluir, se tiene que, según las fórmulas de Krein (ver [26]), para H_α y H_β, si $R(\mu, H_\alpha)$ y $R(\mu, H_\beta)$ son los respectivos resolventes asociados, entonces su diferencia

$$(R(\mu, H_\alpha) - R(\mu, H_\beta))\varphi = \langle \varphi, \phi(\mu) \rangle \psi(\mu)$$

es un operador de rango uno, mas aún, por el teorema del mapeo espectral (ver [2], [9]), cada uno de estos resolventes tienen la forma

$$R(\mu, H_\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_\alpha(\mu)}{t - \mu}$$

de donde se concluye que

$$-\kappa_{\alpha j}^2 < -\kappa_{\beta j}^2 < -\kappa_{\alpha j+1}^2$$

para $N_\alpha = N_\beta$, $j = 1, \ldots, N_\alpha - 1$, o bien

$$-\kappa_{\beta j}^2 < -\kappa_{\alpha j}^2 < -\kappa_{\beta j+1}^2$$

en el caso $N_\alpha + 1 = N_\beta$, $j = 1, \ldots, N_\alpha + 1$.

∎

Lema 4.7 *[1] Supóngase que $0 < \beta < \alpha \leq \pi$ y sean $F_\alpha(k)$, $F_\beta(k)$ las respectivas funciones de Jost asociadas al potencial V en la clase de Faddeev con respecto a las condiciones iniciales inducidas por α y β respectivamente. Entonces:*

i) Si $F_\alpha(0) = 0$ entonces $N_\beta = N_\alpha + 1$

ii) Si $F_\beta(0) = 0$ entonces $N_\beta = N_\alpha$

Prueba. Por las propiedades de las funciones $F_\alpha(k)$ y el Lema (4.6) sabemos que los ceros de F_α y F_β son simples y se entrelazan en $\mathbb{I}^+$ además se verifica alguna de las igualdades $N_\beta = N_\alpha$ o bien $N_\beta = N_\alpha + 1$. Ahora también conocemos el comportamiento asintótico de F_α y F_β para $k \to \infty$, $k \in \mathbb{I}^+$, esto se sigue del Lema (4.2). Analizando los signos de F_α y F_β para $k \to 0$ en $\mathbb{I}^+$ podemos afirmar $N_\beta = N_\alpha$ o bien $N_\beta = N_\alpha + 1$.

Cuando $0 < \beta < \alpha < \pi$ se tiene entonces que $N_\beta = N_\alpha$ si $F_\alpha(k)/F_\beta(k)$ permanece positivo (o se aproxima a 0^+ o a $+\infty$) para $k \to 0$, $k \in \mathbb{I}^+$ y se tiene $N_\beta = N_\alpha + 1$ si el signo permanece negativo (o, análogo al caso anterior, se aproxima a 0^- o a $-\infty$).

Para el caso $0 < \beta < \alpha = \pi$ por el Lema (4.2)-(v) se tiene que para $k \to 0$ en $\mathbb{I}^+$ se tiene $N_\beta = N_\alpha$ si $F_\alpha(k)/F_\beta(k)$ permanece positivo (o se aproxima a 0^+ o a $+\infty$) para $k \to 0$, $k \in \mathbb{I}^+$ y se tiene $N_\beta = N_\alpha + 1$ si el signo permanece negativo (o, análogo al caso anterior, se aproxima a 0^- o a $-\infty$).

Para el primer caso, es decir, $0 < \beta < \alpha < \pi$ utilizando el Lema (4.3)-(i) se tiene el signo de $F_\alpha(k)/F_\beta(k)$, para $k \to 0$ en $\mathbb{I}^+$ coincide con en signo de $h_{\beta\alpha}/F_\beta(0)^2$ el cual es negativo pues $h_{\beta\alpha} > 0$ y $F_\beta(0)$ es imaginario puro. Así (i) se verifica para $\alpha \in (0, \pi)$.Para el caso $\alpha = \pi$ si $F_\pi(0) = 0$ en el Lema (3.4)-(i)-(a) y considerando que $F_\pi(0)$ es imaginario puro se deduce que el signo de $iF_\pi(k)/F_\beta(k)$ es negativo para $k \to 0$ en $\mathbb{I}^+$.

Ahora, para (ii). Si $\alpha \in (0, \pi)$ del Lema (4.3)-(i) con α y β intercambiadas y haciendo $F_\beta(0) = 0$ se observa que el signo de $F_\alpha(k)/F_\beta(k)$ para $k \to 0$ en $\mathbb{I}^+$ coincide con el signo de $h_{\beta\alpha}/F_\alpha(0)^2$ el cual es negativo pues $h_{\alpha\beta} = -h_{\beta\alpha} < 0$ y $F_\alpha(0)$ es imaginario puro, es decir, (ii) se verifica para $\alpha \in (0, \pi)$. Para $\alpha = \pi$ del Lema (4.4)-(i)-(b) se observa que es signo de $iF_\alpha(k)/F_\beta(k)$ es positivo para $k \to 0$ en $\mathbb{I}^+$ y, por tanto $N_\beta = N_\alpha$ si $F_\beta(0) = 0$. ■

Capítulo 5

Unicidad en la reconstrucción de α, β y $V(x)$

5.1. Los distintos conjuntos de datos iniciales

En esta sección se enuncian y prueban los ocho teoremas que generalizan el teorema de Borg-Marchenko del caso de espectro puramente discreto al caso en el que también hay espectro continuo. Se consideran las posibilidades para $N_\alpha = N_\beta$ o bien $N_\alpha = N_\beta - 1$, con $\alpha \in (0, \pi)$ o $\alpha = \pi$, suponiendo conocidos $|F_\alpha(k)|$ y $|F_\beta(k)|$ para $k \in \mathbb{R}$. Estos resultados corresponden a las secciones 2 y 4 de [1]. Para los ocho diferentes casos se definen los siguientes conjuntos de datos [1]:

$$\mathcal{D}_1 := \{h_{\beta\alpha}, |F_\alpha(k)| \text{ para } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}, \{\kappa_{\beta j}\}_{j=1}^{N_\beta}\} \tag{5.1}$$

$$\mathcal{D}_2 := \{\beta, |F_\pi(k)| \text{ para } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\pi j}\}_{j=1}^{N_\pi}, \{\kappa_{\beta j}\}_{j=1}^{N_\beta}\} \tag{5.2}$$

$$\mathcal{D}_3 := \{h_{\beta\alpha}, |F_{\alpha|} \text{ para } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}, \{\kappa_{\beta j_i}\}_{i=1}^{N_\alpha} \subset \{\kappa_{\beta j}\}_{j=1}^{N_\beta}\} \tag{5.3}$$

$$\mathcal{D}_4 := \{\beta, |F_\pi(k)| \text{ para } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\pi j}\}_{j=1}^{N_\pi}, \{\kappa_{\beta j_i}\}_{i=1}^{N_\pi} \subset \{\kappa_{\beta j}\}_{j=1}^{N_\beta}\} \tag{5.4}$$

$$\mathcal{D}_5 := \{h_{\beta\alpha}, |F_\beta(k)| \text{ para } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}, \{\kappa_{\beta j}\}_{j=1}^{N_\beta}\} \tag{5.5}$$

$$\mathcal{D}_6 := \{|F_\beta(k)| \text{ para } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\pi j}\}_{j=1}^{N_\pi}, \{\kappa_{\beta j}\}_{j=1}^{N_\beta}\} \tag{5.6}$$

$$\mathcal{D}_7 := \{\beta, h_{\beta\alpha}, |F_\beta(k)| \text{ para } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}, \{\kappa_{\beta j}\}_{j=1}^{N_\beta}\} \tag{5.7}$$

$$\mathcal{D}_8 := \{\beta, |F_\beta(k)| \text{ para } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\pi j}\}_{j=1}^{N_\pi}, \{\kappa_{\beta j}\}_{j=1}^{N_\beta}\} \tag{5.8}$$

Estos datos tienen un claro significado físico. Los autovalores corresponden a los estados ligados de una partícula cuántica que satisface la ecuación de Schrödinguer con un potencial radial y momento angular cero, donde se ha separado la variable radial y angulares (ver [4]). Además a partir de $|F_\alpha(k)|$ se obtiene la densidad espectral del espectro continuo del operador de Schrödinger, (3.12). El espectro continuo corresponde a los estados de dispersión que describen las colisiones de la partícula cuántica con un blanco que en este modelo es representado por el potencial.

5.2. Enunciación y prueba de los resultados de unicidad

Recordemos que H_α denota la realización auto-adjunta del operador inducido por la forma diferencial $l = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ y las condiciones de frontera asociadas a α. Ver [1], [12] y sección 3.1.

Teorema 5.1 *(Aktosun-Weder) [1] Sean las realizaciones H_α y H_β correspondientes al potencial V en la clase de Faddeev cuyas condiciones de frontera están dadas para α y β respectivamente. Considérense también $\tilde{H}_\gamma$ y $\tilde{H}_\delta$ las realizaciones correspondientes al potencial $\tilde{V}$ con las condiciones de frontera dadas para γ y δ respectivamente. Se denotan las correspondientes funciones de Jost por F_α, F_β, $\tilde{F}_\gamma$, y $\tilde{F}_\delta$ respectivamente. Supóngase que*

i) $0 < \beta < \alpha < \pi$.

ii) $N_\alpha = N_\beta \geq 0$.

iii) $h_{\beta\alpha} = h_{\delta\gamma}$.

iv) $\sigma_d(H_\alpha) = \sigma_d(\tilde{H}_\gamma)$.

v) $\sigma_d(H_\beta) = \sigma_d(\tilde{H}_\delta)$.

vi) $|F_\alpha(k)| = |\tilde{F}_\gamma(k)|$ *para* $k \in \mathbb{R}$.

Entonces se tiene que $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ y $\tilde{V} = V$. Esta afirmación es equivalente a decir que si $N_\alpha = N_\beta \geq 0$ y $0 < \beta < \alpha < \pi$ entonces el conjunto de datos $\mathcal{D}_1$ definido en (5.1) determina de manera única $\{V, \alpha, \beta\}$.

Prueba. Primero, observemos el comportamiento asintótico de F_α y F_π para $k \to \infty$, $k \in \mathbb{C}^+$ se tiene, del Lema (4.2) (i) y (ii)

$$F_\alpha(k) = k - i\big[\cot\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\infty dxV(x)\big] + o(1)$$

y

$$F_\pi(k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int_0^\infty dxV(x) + o(\frac{1}{k})$$

respectivamente, por otro lado, para $k \in \mathbb{R}$ es $|\tilde{F}_\gamma(k)| = |F_\alpha(k)|$. De esto es inmediato que $\gamma < \pi$, ahora, al ser $h_{\epsilon\gamma} = h_{\beta\alpha}$ de lo cual se infiere que $\epsilon < \delta$.

La idea fundamental ahora, y en las siguientes demostraciones, es construir una función en la cual se involucran las funciones de Jost correspondientes. De ésta, a su vez, haciendo algunas observaciones acerca de las propiedades elementales de dicha función tales como analiticidad en el dominio de definición, comportamiento asintótico y regularidad, podremos reconstruir las correspondientes funciones de Jost a través de la fórmula de Schwarz (4.4) con solo los datos de los correspondientes $\mathcal{D}_j$, $j = 1, ..., 8$, dando así una representación explicita de las mismas. Todo esto nos permitirá recuperar los datos necesarios para la reconstrucción del potencial V.

Por hipótesis se cumple la relación $N_\beta = N_\alpha$. Se define entonces la función

$$\Lambda_1(k) = -i + i\frac{F_\beta(k)}{F_\alpha(k)} \prod_{j=1}^{N_\alpha} \frac{k^2 + \kappa_{\alpha j}^2}{k^2 + \kappa_{\beta j}^2}$$

Se deduce, del Lema 4.7-(i) que $F_\alpha(0) \neq 0$ por lo cual $\Lambda_1(k)$ esta bien definida en cero, por otro lado, obsérvese que $\Lambda_1(k)$ es analítica en $\mathbb{C}^+$ y continua en $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$. Observemos ahora el comportamiento asintótico de $\Lambda_1(k)$, para $k \to \infty$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(k) &= -i + i[1 - \frac{ih_{\beta\alpha}}{k} + \frac{h_{\beta\alpha}\cot\alpha}{k^2} + o(\frac{1}{k^2})] \\
&\quad \cdot [\frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{N_\alpha}(\kappa_{\alpha j}^2 - \kappa_{\beta j}^2) + 1 + o(\frac{1}{k^2})] \\
&= \frac{h_{\beta\alpha}}{k} + \frac{ih_{\beta\alpha}\cot\alpha}{k^2} + \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{N_\alpha}(\kappa_{\alpha j}^2 \kappa_{\beta j}^2) + o(\frac{1}{k^2}) \\
&= O(\frac{1}{k})
\end{aligned}$$

y, para $k \to 0$, $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$

$$\prod_{j=1}^{N_\alpha} \frac{k^2 + \kappa_{\alpha j}^2}{k^2 + \kappa_{\beta j}^2} = O(1)$$

de esto, al ser $F_\alpha(0) \neq 0$ (ver Lema 4.7), el comportamiento de $\Lambda_1(k)$ en torno a cero para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(k) &= -1 + [\frac{F_\beta(0)}{F_\alpha(0)} - \frac{ikh_{\beta\alpha}}{F_\beta(0)^2} + o(1)]O(1) \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que, por un lado $\Lambda_1(k)$ es continua en cero y, por otro lado se observa que, poniendo $k = u + iv$, existen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tales que, si $\epsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} du|\Lambda_1(u+iv)|^2 &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} du|\Lambda_1(u+iv)|^2 + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} du|\Lambda_1(u+iv)|^2 + \\
&\quad + \int_{\epsilon}^{\infty} du|\Lambda_1(u+iv)|^2 \\
&\leq C_2^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} du + 2C_1^2 \int_{\epsilon}^{\infty} du \frac{1}{u^2+v^2} \\
&\leq 2C_2^2\epsilon + 2C_1^2 \int_{\epsilon}^{\infty} du \frac{1}{u^2} \\
&= 2C_2^2\epsilon + 2C_1^2 \frac{1}{\epsilon}
\end{aligned}$$

al ser $\epsilon > 0$ arbitraria se deduce

$$\int_{-\infty}^{\infty} du|\Lambda_1(u+iv)|^2 < +\infty$$

para toda $v \in [0, \infty)$, lo cual prueba que dicha integral esta uniformemente acotada.

Habiendo probado que $\Lambda_1(k)$ cumple con los requerimientos de la Proposición 4.1 procedemos a calcular ahora la parte real de esta función para $k \in \mathbb{R}$, del Lema 4.5-(iii) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}[\Lambda_1(k)] &= \mathrm{Re}[i\frac{F_\beta(k)}{F_\alpha(k)}] \prod_{j=1}^{N_\alpha} \frac{k^2+\kappa_{\alpha j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2} \\
&= \frac{h_{\beta\alpha}k}{|F_\alpha(k)|^2} \prod_{j=1}^{N_\alpha} \frac{k^2+\kappa_{\alpha j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2}
\end{aligned}$$

esta expresión se puede reconstruir totalmente debido a los datos dados en $\mathcal{D}_1$, de esta forma $\Lambda_1(k)$ queda reconstruida de forma única en $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ como

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(k) &= \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t-k+i0^+} \mathrm{Re}[\Lambda_1(k)] \\
&= \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t-k+i0^+} \frac{h_{\beta\alpha}k}{|F_\alpha(k)|^2} \prod_{j=1}^{N_\alpha} \frac{k^2+\kappa_{\alpha j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2}
\end{aligned}$$

De la estimación de $\Lambda_1(k)$ para $k \to \infty$ se obtiene el valor de $\cot\alpha$ y por tanto el valor de α, para conocer $\cot\beta$ se utiliza la igualdad

$$\cot\beta = h_{\beta\alpha} + \cot\alpha$$

de donde se obtiene directamente el valor de β.

Por último, con los datos dados el $\mathcal{D}_1$ se puede reconstruir $F_\alpha(k)$ y por tanto $F_\beta(k)$ tiene la forma

$$F_\beta(k) = F_\alpha(k)[1 - i\Lambda_1(k)] \prod_{j=1}^{N_\alpha} \frac{k^2 + \kappa_{\alpha j}^2}{k^2 + \kappa_{\beta j}^2}$$

Conociendo ahora $F_\alpha(k)$, $F_\beta(k)$ y $h_{\beta\alpha}$ se puede reconstruir $V(x)$ por cualquiera de los métodos presentados en la sección 3 del Capítulo 3.

Para la unicidad, se observa que a $\mathcal{D}_1$ le corresponde un único conjunto V, α, β pues se ha probado la igualdad $\tilde{\mathcal{D}}_1 = \mathcal{D}_1$ donde

$$\tilde{\mathcal{D}}_1 \quad := \quad \{h_{\delta\gamma}, |\tilde{F}_\gamma(k)| \ k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\gamma j}\}_{j=1}^{N_\gamma}, \{\kappa_{\delta j}\}_{j=1}^{N_\delta}\}.$$

■

Teorema 5.2 *(Aktosun-Weder) [1] Sean las realizaciones H_α y H_β correspondientes al potencial V en la clase de Faddeev cuyas condiciones de frontera están dadas por α y β respectivamente. Considérense también $\tilde{H}_\gamma$ y $\tilde{H}_\delta$ las realizaciones correspondientes al potencial $\tilde{V}$ con las condiciones de frontera dadas por γ y δ respectivamente. Se denotan las correspondientes funciones de Jost por F_α, F_β, $\tilde{F}_\gamma$, y $\tilde{F}_\delta$ respectivamente. Supóngase que*

i) $0 < \beta < \alpha = \pi$.

ii) $N_\alpha = N_\beta \geq 0$.

iii) $\beta = \delta$.

iv) $\sigma_d(H_\alpha) = \sigma_d(\tilde{H}_\gamma)$.

v) $\sigma_d(H_\beta) = \sigma_d(\tilde{H}_\delta)$.

vi) $|F_\alpha(k)| = |\tilde{F}_\gamma(k)|$ *para* $k \in \mathbb{R}$.

Entonces se tiene que $\alpha = \gamma$ y $\tilde{V} = V$. Lo cual equivale a decir que si $N_\alpha = N_\beta \geq 0$ y $0 < \beta < \alpha = \pi$ entonces el conjunto de datos $\mathcal{D}_2$ definido en (5.2) determina de manera única a V.

Prueba. Del mismo modo que en la demostración del Teorema 5.1 se tiene que $\epsilon < \gamma = \pi$. Además,$N_\pi = N_\beta$ entonces del Lema 4.7-(ii) se tiene que $F_\pi(0) \neq 0$.

Defínase la función

$$\Lambda_2(k) = -1 - \frac{1}{k}\frac{F_\beta(0)}{F_\pi(0)}\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{\kappa_{\pi j}^2}{\kappa_{\beta j}^2} + \frac{1}{k}\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)}\prod_{j=1}^{N_\alpha}\frac{k^2+\kappa_{\pi j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2}$$

Es importante destacar el hecho de que $\Lambda_2(k)$ es analítica para $k \in \mathbb{C}^+$ y continua en $\overline{\mathbb{C}^+}\backslash\{0\}$, para el comportamiento asintótico de $\Lambda_2(k)$ se tiene en primer lugar, para $k \to \infty$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$

$$\begin{aligned}
\Lambda_2(k) &= -1 - \frac{1}{k}\frac{F_\beta(0)}{F_\pi(0)}\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{\kappa_{\pi j}^2}{\kappa_{\beta j}^2} \\
&\quad + \frac{1}{k}[k - i\cot\beta + i\int_0^\infty dx V(x)e^{2ikx} + o(\frac{1}{k})] \\
&\quad [\frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{N_\alpha}(\kappa_{\alpha j}^2 - \kappa_{\beta j}^2) + 1 + o(\frac{1}{k^2})] \\
&= -\frac{1}{k}[i\cot\beta + \frac{1}{k}\frac{F_\beta(0)}{F_\pi(0)}\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{\kappa_{\pi j}^2}{\kappa_{\beta j}^2}] + o(\frac{1}{k})
\end{aligned}$$

Ahora, para $k \to 0$, en $\overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\Lambda_2(k) &= -1 - \frac{1}{k}\frac{F_\beta(0)}{F_\pi(0)}\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{\kappa_{\pi j}^2}{\kappa_{\beta j}^2} \\
&\quad + \frac{1}{k}[\frac{F_\beta(0)}{F_\pi(0)} + \frac{k}{F_\pi(0)^2} + o(k)]\,[\frac{1}{k}\frac{F_\beta(0)}{F_\pi(0)}\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{\kappa_{\pi j}^2}{\kappa_{\beta j}^2} + o(k)] \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

de lo cual se deduce la continuidad de $\Lambda_2(k)$ en $k = 0$, pero, además se tiene que para $k = u + iv$, $v \in [0, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du|\Lambda_2(u+iv)| < +\infty$$

se tiene que primero, para $k \in \mathbb{R}$ se tiene que $F_\beta(0)$ es imaginario puro, en tanto que $F_\pi(0)$ es real. Luego, utilizando el Lema 4.5(ii) se tiene para $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}[\Lambda_2(k)] &= -1 + \frac{1}{k}\mathrm{Re}[\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)}]\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{k^2+\kappa_{\pi j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2} \\
&= -1\frac{1}{|F_\pi(k)|^2}\prod_{j=1}^{N_\alpha}\frac{k^2+\kappa_{\alpha j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2}
\end{aligned}$$

Utilizando esto en la fórmula de Schwarz (4.4) se tiene

$$\begin{aligned}
\Lambda_2(k) &= = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\mathrm{Re}[\Lambda_2(t)] \\
&= \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+} - 1\frac{1}{|F_\pi(k)|^2}\prod_{j=1}^{N_\alpha}\frac{k^2+\kappa_{\alpha j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2}
\end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

Para obtener información a cerca de β se tiene que, del comportamiento asintótico de $k \to \infty$, se infiere la igualdad

$$\frac{F_\beta(0)}{F_\pi(0)}\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{\kappa_{\pi j}^2}{\kappa_{\beta j}^2} = -i\cot\beta - \lim_{k\to\infty}[k\Lambda_2(k)]$$

para cualquier dirección se k en $\overline{\mathbb{C}^+}$. De esta última igualdad y de la definición de $\Lambda_2(k)$, $F_\beta(k)$ adquiere la forma

$$\begin{aligned}
F_\beta(k) &= kF_\pi(k)\big[\Lambda_2(k) + 1 - \frac{1}{k}\frac{F_\beta(0)}{F_\pi(0)}\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{\kappa_{\pi j}^2}{\kappa_{\beta j}^2}\big]\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{k^2+\kappa_{\pi j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2} \\
&= kF_\pi(k)\big[\Lambda_2(k) + 1 - \frac{1}{k}(-i\cot\beta - \lim_{k\to\infty}[k\Lambda_2(k)])\big]\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{k^2+\kappa_{\pi j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2}
\end{aligned}$$

Teniendo $F_\beta(k)$ y $kF_\pi(k)$ se puede ahora reconstruir de forma única $V(x)$ por alguno de los métodos expuestos en el Capítulo 3 sección 3.

■

Teorema 5.3 *(Aktosun-Weder) [1] Sean las realizaciones H_α y H_β correspondientes al potencial V en la clase de Faddeev cuyas condiciones de frontera están dadas por α y β respectivamente. Considérense también $\tilde{H}_\gamma$ y $\tilde{H}_\delta$ las realizaciones correspondientes al potencial $\tilde{V}$ con las condiciones de frontera dadas por γ y δ respectivamente. Se denotan las correspondientes funciones de Jost por F_α, F_β, $\tilde{F}_\gamma$, y $\tilde{F}_\delta$ respectivamente. Supóngase que*

i) $0 < \beta < \alpha < \pi$.

ii) $N_\alpha = N_\beta - 1 \geq 0$.

iii) $h_{\beta\alpha} = h_{\delta\gamma}$.

iv) $\sigma_d(H_\alpha) = \sigma_d(\tilde{H}_\gamma)$.

v) La intersección de $\sigma_d(H_\beta)$ y $\sigma_d(\tilde{H}_\delta)$ contiene al menos N_α elementos en común.

vi) $|F_\alpha(k)| = |\tilde{F}_\gamma(k)|$ *para* $k \in \mathbb{R}$.

Entonces se tiene que $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ *y* $\tilde{V} = V$. *Esta afirmación es equivalente a decir que si* $N_\alpha = N_\beta - 1 \geq 0$ *y* $0 < \beta < \alpha < \pi$ *entonces el conjunto de datos* $\mathcal{D}_3$ *definido en (5.3) determina de manera única* $\{V, \alpha, \beta\}$.

Prueba.

Repitiendo el razonamiento de Teorema 5.1 se deduce $\epsilon < \delta < \pi$.

Se supone es este caso $N_\beta = N_\alpha + 1$. De este hecho se observa la falta de $\kappa_{\beta j}$, se supondrá, sin perdida de generalidad, que el elemento faltante en $\mathcal{D}_3$ es $\kappa_{\beta N_\beta}$, esto es posible debido al hecho de que la prueba y la obtención de dicho valor no depende de la $j \in \{1, ..., N_\beta\}$ que se halla tomado (ver Proposición 35(a)). Así, el conjunto de datos toma la forma:

$$\mathcal{D}_3 = \{h_{\beta\alpha}, |F_\alpha(k)| \text{ } para \text{ } k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\alpha j}\}_{j=1}^{N_\alpha}, \{\kappa_{\beta j}\}_{j=1}^{N_\alpha}\}$$

De aquí, por el Lema 4.1 es inmediata la obtención de $F_\alpha(k)$, además del Lema 4.7(ii) se tiene que $F_\beta(0) \neq 0$, definamos entonces

$$\Lambda_3(k) = ik\frac{F_\beta(k)}{F_\alpha(k)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\alpha}(k^2 + \kappa_{\alpha j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2 + \kappa_{\beta j}^2)}$$

por construcción esta función es también analítica en $\mathbb{C}^+$, mas aún, es continua y suficientemente regular en $\overline{\mathbb{C}^+}$, pues en caso de ser $k = 0$ un cero de $F_\alpha(k)$, este queda anulado debido a que es, a lo más, un cero simple de la función.

Se sigue ahora con el comportamiento asintótico de dicha $\Lambda_3(k)$, para $k \to \infty$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\Lambda_3(k) &= ik\frac{F_\beta(k)}{F_\alpha(k)}\prod_{j=1}^{N_\alpha}\frac{k^2 + \kappa_{\alpha j}^2}{k^2 + \kappa_{\beta j}^2}\frac{1}{k^2 + \kappa_{\beta N_\beta}^2} \\
&= ik(1 - \frac{ih_{\beta\alpha}}{k} + \frac{h_{\beta\alpha}\cot\alpha}{k^2} + o(\frac{1}{k^2})) \\
&\quad \cdot(1 + \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{N_\alpha}(\kappa_{\alpha j}^2 - \kappa_{\beta j}^2) + o(\frac{1}{k^2}))\frac{1}{k^2}(1 - \frac{\kappa_{\beta N_\beta}^2}{k^2} + o(\frac{1}{k^2})) \\
&= \frac{1}{k} + \frac{h_{\beta\alpha}}{k^2} + \frac{i}{k^3}[h_{\beta\alpha}\cot\alpha + \sum_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2 - \sum_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2] + o(\frac{1}{k^3})
\end{aligned}$$

Por la continuidad de $\Lambda_3(k)$ en cero se tiene que, si $k = u + iv$ también se verifica que, para toda $v \in [0, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du|\Lambda_3(u + iv)|^2 < +\infty$$

calculando la parte real de $\Lambda_3(k)$ para $k \in \mathbb{R}$ se tiene, del Lema 4.5(iii)

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[\Lambda_3(k)] &= k\mathrm{Re}\big[i\frac{F_\beta(k)}{F_\alpha(k)}\big]\frac{\prod_{j=1}^{N_\alpha}(k^2+\kappa_{\alpha j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)} \\ &= \frac{h_{\beta\alpha}k^2}{|F_\alpha(k)|^2}\frac{\prod_{j=1}^{N_\alpha}(k^2+\kappa_{\alpha j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)}\end{aligned}$$

Echando mano nuevamente de la fórmula de Schwarz (4.4) se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned}\Lambda_3(k) &= \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\mathrm{Re}[\Lambda_3(k)] \\ &= \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\frac{h_{\beta\alpha}k^2}{|F_\alpha(k)|^2}\frac{\prod_{j=1}^{N_\alpha}(k^2+\kappa_{\alpha j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)}\end{aligned}$$

Esta fórmula es imposible de obtener aún, pues se desconoce $\kappa_{\beta N_\beta}$. El método utilizado para encontrarlo es reemplazarlo por un parámetro, en este caso κ, construyendo de la fórmula anterior la familia de funciones

$$\mathcal{H}(k,\kappa) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\prod_{j=1}^{N_\alpha}\frac{k^2+\kappa_{\alpha j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2}\frac{1}{k^2+\kappa^2}$$

para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$. Debido a las propiedades de la propia $\Lambda_3(k)$ se tiene que dicha familia es analítica para k en $\mathbb{C}^+$ y continua en $\overline{\mathbb{C}^+}$, lo anterior debido a que debe cumplir la igualdad

$$\mathcal{H}(k,\kappa_{\beta N_\beta}) = \Lambda_3(k)$$

por las propiedades asintóticas de $\Lambda_3(k)$ para $k \to \infty$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty}[k\Lambda_3(k)] = i$$

es decir, se busca una κ en $\mathbb{C}^+$ tal que

$$\lim_{k\to\infty}[k\mathcal{H}(k,\kappa)] = i$$

Haciendo uso de la Proposición 35-(a) (ver página 75) e interpretando este último como límite no tangencial en $\mathbb{C}^+$ se tiene une única solución dada por $k = \kappa_{\beta N_\beta}$. Habiendo calculado $\kappa_{\beta N_\beta}$ con este procedimiento se tiene entonces $\mathcal{H}(k, \kappa_{\beta N_\beta}) = \Lambda_3(k)$, finalmente se obtiene $F_\beta(k)$ directamente de la definición de $\Lambda_3(k)$ como

$$\begin{aligned} F_\beta(k) &= \frac{1}{ik} F_\alpha(k)\Lambda_3(k)\frac{\prod_{j=1}^{N_\alpha}(k^2+\kappa_{\alpha j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)} \\ &= \frac{1}{ik} F_\alpha(k)\mathcal{H}(k, \kappa_{\beta N_\beta})\frac{\prod_{j=1}^{N_\alpha}(k^2+\kappa_{\alpha j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)} \end{aligned}$$

Para obtener los valores de α Y β se procede del siguiente modo: de la estimación asintótica de $\Lambda_3(k)$ para $k \to \infty$ se obtiene el valor de $\cot\alpha$ y por lo tanto α, β se calcula directamente de la igualdad $\cot\beta = h_{\beta\alpha} + \cot\alpha$.

Conociendo $F_\alpha(k)$, $F_\beta(k)$ y $h_{\beta\alpha}$ se calcula V por cualquiera de los métodos discutidos en el Capítulo 3 sección 3.

■

Teorema 5.4 *(Aktosun-Weder) [1] Sean las realizaciones H_α y H_β correspondientes al potencial V en la clase de Faddeev cuyas condiciones de frontera están dadas por α y β respectivamente. Considérense también $\tilde{H}_\gamma$ y $\tilde{H}_\delta$ las realizaciones correspondientes al potencial $\tilde{V}$ con las condiciones de frontera dadas por γ y δ respectivamente. Se denotan las correspondientes funciones de Jost por F_α, F_β, $\tilde{F}_\gamma$, y $\tilde{F}_\delta$ respectivamente. Supóngase que*

i) $0 < \beta < \alpha = \pi$.

ii) $N_\alpha = N_\beta - 1 \geq 0$.

iii) $\beta = \delta$.

iv) $\sigma_d(H_\alpha) = \sigma_d(\tilde{H}_\gamma)$.

v) La intersección de $\sigma_d(H_\beta)$ y $\sigma_d(\tilde{H}_\delta)$ contiene al menos N_α elementos en común.

vi) $|F_\alpha(k)| = |\tilde{F}_\gamma(k)|$ *para* $k \in \mathbb{R}$.

Entonces se tiene que $\alpha = \gamma$ y $\tilde{V} = V$. Esta afirmación es equivalente a decir que si $N_\alpha = N_\beta - 1 \geq 0$ y $0 < \beta < \alpha = \pi$ entonces el conjunto de datos $\mathcal{D}_4$ definido en (5.4) determina de manera única V.

Prueba. Haciendo una discusión análoga al Teorema 5.1 se tiene que, al ser $0 < \beta < \alpha = \pi$, se tiene $\epsilon < \gamma = \pi$, de los datos dados en $\mathcal{D}_4$ se tiene la igualdad $N_\beta = N_\alpha + 1$, esto es, se desconoce algún elemento $\kappa_{\beta j}$, para ello, al igual que en el Teorema 5.3, sin perdida de generalidad se supone que el elemento faltante es $\kappa_{\beta N_\beta}$, por lo que $\mathcal{D}_4$ tiene la forma

$$\mathcal{D}_4 = \{\beta, |F_\pi(k)| \ para \ k \in \mathbb{R}, \{\kappa_{\pi j}\}_{j=1}^{N_\pi}, \{\kappa_{\beta j}\}_{j=1}^{N_\pi}\}$$

De aqui, por el Lema 4.1 nos es posible obtener $F_\pi(k)$, además, por el Lema 4.7(ii) se tiene que $F_\beta(0) \neq 0$. Definamos para este caso la función

$$\Lambda_4(k) = -1 + k\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\pi}(k^2+\kappa_{\pi j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)}$$

Procediendo como el los caso anteriores, se analizan ahora las propiedades de $\Lambda_4(k)$ se tiene que esta función no solo es analítica en $\mathbb{C}^+$ y continua en $\overline{\mathbb{C}^+}$, esto último debido a que si $k = 0$ es un cero de $F_\pi(k)$, este sería simple entonces, se tiene que quedaría anulado en $\Lambda_4(k)$.

Pasemos ahora a examinar el comportamiento asintótico de $\Lambda_4(k)$. Para $k \to \infty$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene

$$\begin{aligned}\Lambda_4(k) &= -1 + k\big(k - i\cot\beta + \int_0^\infty dxV(x)e^{2ikx} + o(\frac{1}{k})\big) \\ &\quad \cdot\frac{1}{k^2}\big(1 - \frac{\kappa_{\beta N_\beta}^2}{k^2} + o(\frac{1}{k^2})\big)\big(1 + \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{N_\alpha}(\kappa_{\alpha j}^2 - \kappa_{\beta j}^2) + o(\frac{1}{k^2})\big) \\ &= -\frac{i\cot\beta}{k} + o(\frac{1}{k})\end{aligned}$$

y, para $k \to 0$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$, se tiene

$$\Lambda_4(k) = O(1)$$

por lo cual, si $k = u + iv$ se tiene que, para toda $v \in [0,\infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du|\Lambda_4(u+iv)|^2 < +\infty$$

esto es, podemos hacer uso de la fórmula de Schwarz (4.4) para calcular $\Lambda_4(k)$ por medio de su parte real para $k \in \mathbb{R}$, del Lema 4.5(ii) se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[\Lambda_4(k)] &= -1 + k\mathrm{Re}[\frac{F_\beta(k)}{F_\pi(k)}]\frac{\prod_{j=1}^{N_\pi}(k^2+\kappa_{\pi j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)} \\ &= -1 + \frac{k^2}{|F_\pi(k)|^2}\frac{\prod_{j=1}^{N_\pi}(k^2+\kappa_{\pi j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)}\end{aligned}$$

es decir, para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$, $\Lambda_4(k)$ toma la forma

$$\begin{aligned}\Lambda_4(k) &= \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\mathrm{Re}[\Lambda_4(k)] \\ &= \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\Big[-1 + \frac{k^2}{|F_\pi(k)|^2}\frac{\prod_{j=1}^{N_\pi}(k^2+\kappa_{\pi j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)}\Big]\end{aligned}$$

Recordemos que esta reconstrucción es incompleta, pues se desconoce el valor de $\kappa_{\beta N_\beta}$. Sustituyendo este valor por un parámetro κ se obtiene la familia de funciones

$$\mathcal{G}(k,\kappa) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t-k-i0^+}\Big[-1+\frac{k^2}{|F_\pi(k)|^2}\prod_{j=1}^{N_\beta}\frac{k^2+\kappa_{\pi j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2}\frac{1}{k^2+\kappa^2}\Big]$$

la cual, evidentemente, queremos que satisfaga la igualdad

$$\mathcal{G}(k,\kappa) = \Lambda_4(k)$$

para ello, siguiendo las condiciones dadas por el comportamiento asintótico de $\Lambda_4(k)$ para $k \to \infty$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene

$$\lim_{k\to\infty}[k\Lambda_4(k)] = -i\cot\beta$$

el valor elegido de κ debe entonces cumplir la igualdad

$$\lim_{k\to\infty}[k\mathcal{G}(k,\kappa)] = -i\cot\beta$$

La existencia y, mas aún, la unicidad de dicho valor esta asegurada por la Proposición 35-(b) interpretando este último como límite no tangencial en $\overline{\mathbb{C}^+}$, dicho límite tiene una única solución dada por $\kappa = \kappa\beta_{N_\beta}$

Ahora ya se conocen $\Lambda_4(k)$ y $F_\pi(k)$ finalmente se obtiene de la definición de $\Lambda_4(k)$ y conocidos todos los datos involucrados en dicha fórmula la expresión para $F_\beta(k)$ de la forma

$$\begin{aligned} F_\beta(k) &= \frac{1}{k}F_\pi(k)[\Lambda_4(k)+1]\frac{\prod_{j=1}^{N_\pi}(k^2+\kappa_{\pi j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)} \\ &= \frac{1}{k}F_\pi(k)[\mathcal{G}(k,\kappa_{\beta N_\beta}^2)+1]\frac{\prod_{j=1}^{N_\pi}(k^2+\kappa_{\pi j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)} \end{aligned}$$

para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$.

Conociendo ambas funciones $F_\pi(k)$ y $F_\beta(k)$ podemos finalmente obtener el potencial V a través de alguno se los métodos ya discutidos en el Capítulo 3 sección 3.

■

Proposición 35 *[1] Supóngase que cada uno de los conjuntos de datos $\mathcal{D}_3$ y $\mathcal{D}_4$ dados en (5.3) y (5.4) respectivamente esta asociado con un potencial en la clase de Faddeev y los límites*

$$\lim_{k\to\infty} = [k\mathcal{H}(k,\kappa)] = i \tag{5.9}$$

y

$$\lim_{k\to\infty} k\mathcal{G}(k,\kappa) = -i\cot\beta \tag{5.10}$$

donde $\mathcal{H}(k,\kappa)$ y $\mathcal{G}(k,\kappa)$ estan dadas por

$$\mathcal{H}(k,\kappa) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t-k-i0^+} \prod_{j=1}^{N_\alpha} \frac{k^2+\kappa_{\alpha j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2} \frac{1}{k^2+\kappa^2}$$

y

$$\mathcal{G}(k,\kappa) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t-k-i0^+}\Big[-1+\frac{k^2}{|F_\pi(k)|^2}\prod_{j=1}^{N_\beta} \frac{k^2+\kappa_{\pi j}^2}{k^2+\kappa_{\beta j}^2}\frac{1}{k^2+\kappa^2}\Big],$$

son interpretados como límites no tangenciales en $\overline{\mathbb{C}^+}$. Entonces cada uno de dichos límites tienen una única solución positiva y ésta está dada por $\kappa = \kappa_{\beta N_\beta}$.

Prueba. Esta prueba se divide en dos partes, la primera referente al Teorema (5.3) y la segunda al Teorema (5.4).

(a)

Para la parte relacionada al Teorema (5.3) se define las funciones

$$I_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{k}{t-k-i0^+}\frac{\mathrm{Re}[\Lambda_3(t)]}{t^2+\kappa^2}$$

y

$$I_2(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{t}{t-k-i0^+}\frac{\mathrm{Re}[\Lambda_3(t)]}{t^2+\kappa^2}$$

del comportamiento asintótico de $\Lambda_3(k)$ para $k\to\infty$ en $\mathbb{C}^+$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty}[k\Lambda_3(k)] = i$$

así, la expresión anterior toma la forma

$$\lim_{k\to\infty}[k\mathcal{H}(k,\kappa) - k\Lambda_3(k)] = 0$$

así, consideremos entonces la diferencia $k\mathcal{H}(k,\kappa) - k\Lambda_3(k)$, la cual, desarrollándola, obtenemos

$$k\mathcal{H}(k,\kappa) - k\Lambda_3(k) = \frac{1}{i\pi}(\kappa^2 - \kappa_{\beta N_\beta}^2)I_1(k)$$

de aqui que se deba probar que $\lim_{k\to\infty} I_1(k) \neq 0$, esto nos indica que , efectivamente $\kappa^2 = \kappa_{\beta N_\beta}^2$, para ello consideremos la diferencia

$$I_1(k) - I_2(k) = -\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\mathrm{Re}[\Lambda_3(t)]}{t^2 + \kappa^2}$$

Primero, el lado derecho de esta igualdad existe, es distinto de cero, mas aún, es positivo, pues $\mathrm{Re}[\Lambda_3(t)]$ es positivo, excepto para $t = 0$, por tanto, dicho termino de la igualdad es negativo. Por otro lado, $I_2(k) \to 0$, para $k \to \infty$ en $\mathbb{C}^+$, en efecto, si $k = u + iv$ se tiene que, al ser $\mathrm{Re}[\Lambda_3(t)]$ acotada, existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|I_1(k)| \leq C_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{|t|}{|(t-u) - iv|} \frac{1}{(t^2 - \kappa^2)(t^2 - \kappa_{\beta N_\beta})}$$

y si se considera la estimación, para $|t| \geq |u|/2$

$$\frac{1}{|t-k|} \leq \frac{1}{v}$$

y para $|t| \leq |u|/2$

$$\frac{1}{|t-k|} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{4} + v^2}}$$

de donde se tiene que, en el primer caso

$$|I_1(k)| \leq C_1 \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{(t^2 - \kappa^2)(t^2 - \kappa_{\beta N_\beta})} \to 0, k \to \infty$$

o bien, en el segundo caso

$$|I_1(k)| \leq C_1 \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{4} + v^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{(t^2 - \kappa^2)(t^2 - \kappa_{\beta N_\beta})} \to 0, k \to \infty$$

esto es

$$I_1(k) = o(1)$$

para $k \to \infty$ en $\mathbb{C}^+$, lo cual prueba que el límite no tangencial cuando $k \to \infty$ de $I_1(k)$ existe y es distinto de cero.

(b)

Al igual que en la parte (a), definamos la función

$$I(k) = \int_{\infty}^{\infty} dt \frac{t}{t-k-i0^+} \frac{\mathrm{Re}[\Lambda_4(t)+1]}{t^2+\kappa^2}$$

dada $M > 0$ podemos separar dicha función como

$$I(k) = I_3(k) + I_4(k)$$

donde

$$I_3(k) = \int_{|t|\geq M} dt \frac{t}{t-k-i0^+} \frac{\mathrm{Re}[\Lambda_4(t)+1]}{t^2+\kappa^2}$$

y

$$I_4(k) = \int_{|t|\leq M} dt \frac{t}{t-k-i0^+} \frac{\mathrm{Re}[\Lambda_4(t)+1]}{t^2+\kappa^2}$$

respectivamente.

Observemos ahora que, para $t \in \mathbb{R}$ se tiene que la parte real de $\Lambda_4(t)+1$ es acotada, esto es

$$\mathrm{Re}[\Lambda_4(t)+1] = \frac{1}{|F_\alpha(k)|} \frac{t^2}{t^2+\kappa^2_{\beta N_\beta}} \prod_j^{N_\pi} \frac{t^2+\kappa^2_{\pi j}}{t^2+\kappa^2_{\beta j}}$$

al no tener $F_\alpha(k)$ ceros reales y, de ser así, este sería un cero simple en $t = 0$, el cual estaría anulado por el segundo factor, de cualquier modo, se observa que esta expresión esta acotada, esto es

$$|\mathrm{Re}[\Lambda_4(t)+1]| \leq C_0$$

para alguna $C_0 \in \mathbb{R}$ apropiada y para toda $t \in \mathbb{R}$.

Para $k = u + iv$ se tiene que, por la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned}
|I_3(k)| &= |\int_{|t|\geq M} dt \frac{t}{t-k-i0^+} \frac{\mathrm{Re}[\Lambda_4(t)+1]}{t^2+\kappa^2}| \\
&\leq C \int_{|t|\geq M} dt \frac{t^2}{t^2+k^2} \frac{1}{(t^2+\kappa^2)^2} \\
&\leq C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+v^2} \int_{|t|\geq M} dt \frac{t^2}{(t^2+\kappa^2)^2}
\end{aligned}$$

de donde, para $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ fijos, se tiene que, al ser $k \in \mathbb{C}^+$ $(k = u + iv)$ para $v > \delta$ existe M suficientemente grande tal que

$$|I_3(k)| \leq \epsilon$$

Por último, para $I_4(k)$ con $k \in \mathbb{C}^+$ ($k = u + iv$) para $|u| > 2M$ al integrar en un intervalo finito se tendrá $C \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|I_4(k)| \leq \frac{CM}{|u| + v}$$

de estas últimas observaciones se sigue que

$$\lim_{k \to \infty} I(k) = 0.$$

■

Teorema 5.5 *(Aktosun-Weder) [1] Sean las realizaciones H_α y H_β correspondientes al potencial V en la clase de Faddeev cuyas condiciones de frontera están dadas por α y β respectivamente. Considérense también $\tilde{H}_\gamma$ y $\tilde{H}_\delta$ las realizaciones correspondientes al potencial $\tilde{V}$ con las condiciones de frontera dadas por γ y δ respectivamente. Se denotan las correspondientes funciones de Jost por F_α, F_β, $\tilde{F}_\gamma$, y $\tilde{F}_\delta$ respectivamente. Supóngase que*

i) $0 < \beta < \alpha < \pi$.

ii) $N_\alpha = N_\beta \geq 0$.

iii) $h_{\beta\alpha} = h_{\delta\gamma}$.

iv) $\sigma_d(H_\alpha) = \sigma_d(\tilde{H}_\gamma)$.

v) $\sigma_d(H_\beta) = \sigma_d(\tilde{H}_\delta)$.

vi) $|F_\beta(k)| = |\tilde{F}_\delta(k)|$ *para* $k \in \mathbb{R}$.

Entonces se tiene que $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ y $\tilde{V} = V$. Esta afirmación es equivalente a decir que si $N_\alpha = N_\beta \geq 0$ y $0 < \beta < \alpha < \pi$ entonces el conjunto de datos $\mathcal{D}_5$ definido en (5.5) determina de manera única $\{V, \alpha, \beta\}$.

Prueba.

Para probar la desigualdad $\epsilon < \gamma < \pi$ se razona del mismo modo que en ele Teorema 5.1. Por otro lado se tiene la igualdad $N_\beta = N_\alpha$, en este caso se toma la función dada por

$$\Lambda_5(k) \quad = \quad ik - h_{\beta\alpha} - ik\frac{F_\alpha(k)}{F_\beta(k)} \prod_{j=1}^{N_\beta} \frac{k^2 + \kappa_{\beta j}^2}{k^2 + \kappa_{\alpha j}^2}$$

A partir de aqui examinaremos el comportamiento de esta función y verificaremos que es posible expresarla a través de la formula de Schwarz (4.4).

En primer lugar observemos que, por construcción, $\Lambda_5(k)$ es analítica para $k \in \mathbb{C}^+$, además se observa que carece de polos en $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ pues los ceros de $F_\beta(k)$ quedan anulados por el numerador del producto en el tercer sumando de la fórmula para $\Lambda_5(k)$. Investiguemos ahora el comportamiento asintótico de $\Lambda_5(k)$, para $k \to \infty$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene del Lema 4.2-(vi) que

$$\begin{aligned}\Lambda_5(k) &= ik - h_{\beta\alpha} - ik\big[1 + i\frac{h_{\beta\alpha}}{k} - \frac{h_{\beta\alpha}}{k^2}\cot\beta + o(\frac{1}{k^2})\big] \\ &\quad \big[1 + \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{N_\beta}(\kappa_{\beta j}^2 + \kappa_{\alpha j}^2) + o(\frac{1}{k^2})\big] \\ &= \frac{i}{k}\big[h_{\beta\alpha}\cot\beta + \sum_{j=1}^{N_\beta}(\kappa_{\beta j}^2 + \kappa_{\alpha j}^2)\big] + o(\frac{1}{k^2}),\end{aligned}$$

para el caso $k \to 0$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene que, si $F_\beta(0) = 0$

$$\begin{aligned}\Lambda_5(k) &= ik - h_{\beta\alpha} - ik\big[-\frac{i}{k}\frac{F_\alpha(0)^2}{h_{\beta\alpha}}[1 + o(1)]\big]\big[1 + o(1)\big] \\ &= O(1)\end{aligned}$$

y, si $F_\beta(0) \neq 0$

$$\begin{aligned}\Lambda_5(k) &= ik - h_{\beta\alpha} - ik\big[\frac{F_{\alpha(0)}}{F_\beta(0)} - i\frac{h_{\beta\alpha}k}{F_\beta(0)^2} + o(k)\big]\big[1 + o(1)\big] \\ &= O(1)\end{aligned}$$

es decir, en ambos casos es $\Lambda_5(k) = O(1)$, lo cual, por un lado, prueba la continuidad de esta función en $k = 0$, y por otro lado, nos asegura que $\Lambda_5(k)$, poniendo $k = u + iv$, se satisface, para toda $v \in [0, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} du|\Lambda_5(u + iv)|^2 < +\infty$$

Calculando finalmente la parte real de $\Lambda_5(k)$ para $k \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[\Lambda_5(k)] &= -h_{\beta\alpha} - k\mathrm{Re}\big[i\frac{F_\beta(k)}{F_\alpha(k)}\big]\prod_{j=1}^{N_\beta}\frac{k^2 + \kappa_{\beta j}^2}{k^2 + \kappa_{\alpha j}^2} \\ &= -h_{\beta\alpha} - k\mathrm{Re}\big[\frac{h_{\beta\alpha}k^2}{|F_\alpha(k)|^2}\big]\prod_{j=1}^{N_\beta}\frac{k^2 + \kappa_{\beta j}^2}{k^2 + \kappa_{\alpha j}^2}\end{aligned}$$

Al estar todos los datos de esta última fórmula contenidos en $\mathcal{D}_5$ podemos reconstruir totalmente $\Lambda_5(k)$ para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ como

$$\begin{aligned}\Lambda_5(k) &= \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0+}[\mathrm{Re}[\Lambda_5(t)]] \\ &= \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0+}\Big[-h_{\beta\alpha} - kRe\Big[\frac{h_{\beta\alpha}t^2}{|F_\alpha(t)|^2}\Big]\prod_{j=1}^{N_\beta}\frac{t^2+\kappa_{\beta j}^2}{t^2+\kappa_{\alpha j}^2}\Big]\end{aligned}$$

Por otro lado, para obtener el valor de β se utiliza la expresión asintótica $\Lambda_5(k)$ de para $k \to \infty$ de la cual se conoce, junto con los datos correspondientes en $\mathcal{D}_5$, $\cot\beta$ y, por tanto el valor requerido de β. De todo lo anterior se puede expresar ahora $F_\alpha(k)$, para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$, de la forma

$$F_\alpha(k) = \frac{i}{k}F_\beta(k)[_{\beta\alpha} - ik + \Lambda_5(k)]\prod_{j=1}^{N_\beta}\frac{k^2+\kappa_{\beta j}^2}{k^2+\kappa_{\alpha j}^2}$$

De la definición de $h_{\beta\alpha}$ se deduce el valor de α. Conociendo α, β, $F_\alpha(k)$ y $F_\beta(k)$ se puede ahora reconstruir V a partir de alguno de los métodos discutidos en el Capítulo 3 sección 3.

■

Teorema 5.6 *(Aktosun-Weder) [1] Sean las realizaciones H_α y H_β correspondientes al potencial V en la clase de Faddeev cuyas condiciones de frontera están dadas por α y β respectivamente. Considérense también $\tilde{H}_\gamma$ y $\tilde{H}_\delta$ las realizaciones correspondientes al potencial $\tilde{V}$ con las condiciones de frontera dadas por γ y δ respectivamente. Se denotan las correspondientes funciones de Jost por F_α, F_β, $\tilde{F}_\gamma$, y $\tilde{F}_\delta$ respectivamente. Supóngase que*

i) $0 < \beta < \alpha = \pi$.
ii) $N_\alpha = N_\beta \geq 0$.
iii) $\alpha = \gamma$.
iv) $\sigma_d(H_\alpha) = \sigma_d(\tilde{H}_\gamma)$.
v) $\sigma_d(H_\beta) = \sigma_d(\tilde{H}_\delta)$.
vi) $|F_\beta(k)| = |\tilde{F}_\delta(k)|$ *para* $k \in \mathbb{R}$.

Entonces se tiene que $\beta = \delta$ y $\tilde{V} = V$. Esta afirmación es equivalente a decir que si $N_\alpha = N_\beta \geq 0$ y $0 < \beta < \alpha = \pi$ entonces el conjunto de datos $\mathcal{D}_6$ definido en (5.6) determina de manera única $\{V, \beta\}$.

Prueba. Por hipótesis se tiene $0 < \beta < \alpha = \pi$, repitiendo una vez mas el razonamiento hecho en el Teorema 5.1 se tiene que $0 < \epsilon < \gamma = \pi$.

Se define en este caso la función

$$\Lambda_6(k) = -1 + k\frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)} \prod_{j=1}^{N_\pi} \frac{k^2+\kappa_{\beta j}^2}{k^2+\kappa_{\pi j}^2}$$

Al igual que en los casos anteriores se tiene que $\Lambda_6(k)$ es analítica en $\mathbb{C}^+$ y, al estar bien definida, se tiene que es continua en $\overline{\mathbb{C}^+}\backslash\{0\}$, para el comportamiento asintótico en $k \to \infty$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$se obtiene, la relación

$$\begin{aligned}
\Lambda_6(k) &= -1 + k\Big[\frac{1}{k} + \frac{i}{k^2}\Big(\cot\beta - \int_0^\infty dxV(x)e^{2ikx}\Big) - \frac{\cot^2\beta}{k^3} + o\Big(\frac{1}{k^3}\Big)\Big] \\
&\quad \Big[1 + \frac{1}{k^2}\sum_{j=1} N_\pi(\kappa_\pi^\beta) + o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\Big] \\
&= i\frac{\cot\beta}{k} + o\Big(\frac{1}{k}\Big)
\end{aligned}$$

para $k \to 0$ en $\overline{\mathbb{C}^+}\backslash\{0\}$, se divide en dos casos: para $F_\beta(0) \neq 0$ se tiene del Lema 4.3(i)

$$\begin{aligned}
\Lambda_6(k) &= -1 + k\Big[\frac{F_\pi(0)}{F_\beta(0)} - \frac{k}{F_\beta(0)^2} + o(k)\Big]\big[1+o(k)\big] \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

en el caso $F_\beta(0) = 0$ se obtiene del Lema 4.3(ii)

$$\begin{aligned}
\Lambda_6(k) &= -1 + k\Big[\frac{F_\pi(0)^2}{k}[1+o(1)]\Big]\big[1+o(k)\big] \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

así, en cualquier caso se tiene que $\Lambda_6(k) = O(1)$, lo cual nos da la continuidad de $\Lambda_6(k)$ en $k = 0$. De lo anterior, si $k = u + iv$, se observa que, para $v \in [0, \infty)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} du|\Lambda_6(u+iv)|^2 < +\infty$$

es decir, $\Lambda_6(k)$ satisface las hipótesis requeridas para poder utilizar la fórmula de Schwarz (4.4).

Nuestro último elemento por calcular para poder utilizar (4.4) es la parte real de $\Lambda_6(k)$, para $k \in \mathbb{R}$ se tiene, de Lema 4.5(i)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}[\Lambda_6(k)] &= -1+\mathrm{Re}[\frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)}]\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{k^2+\kappa_{\beta j}^2}{k^2+\kappa_{\pi j}^2} \\
&= -1+\frac{k^2}{|F_\beta(k)|^2}\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{k^2+\kappa_{\beta j}^2}{k^2+\kappa_{\pi j}^2}
\end{aligned}
$$

por lo cual $\Lambda_6(k)$ obtiene la forma

$$
\begin{aligned}
\Lambda_6(k) &= \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\mathrm{Re}[\Lambda_6(k)] \\
&= \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}[-1+\frac{t^2}{|F_\beta(t)|^2}\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{t^2+\kappa_{\beta j}^2}{t^2+\kappa_{\pi j}^2}]
\end{aligned}
$$

conocidos $\Lambda_6(k)$ y $F_\pi(k)$, esta última es posible reconstruirla gracias a los datos dados en $\mathcal{D}_6$ y las fórmulas dadas en el Lema 4.1, podemos ahora poner $F_\beta(k)$ de la forma

$$
F_\pi(k)=\frac{1}{k}F_\pi(k)[\Lambda_6(k)+1]\prod_{j=1}^{N_\pi}\frac{k^2+\kappa_{\beta j}^2}{k^2+\kappa_{\pi j}^2}
$$

Ahora que se conocen $F_\pi(k)$ y $F_\beta(k)$ Podemos reconstruir, siguiendo alguno de los métodos del Capítulo 3 sección 3, a V de forma única.

■

Teorema 5.7 *(Aktosun-Weder) [1] Sean las realizaciones H_α y H_β correspondientes al potencial V en la clase de Faddeev cuyas condiciones de frontera están dadas por α y β respectivamente. Considérense también $\tilde{H}_\gamma$ y $\tilde{H}_\delta$ las realizaciones correspondientes al potencial $\tilde{V}$ con las condiciones de frontera dadas por γ y δ respectivamente. Se denotan las correspondientes funciones de Jost por F_α, F_β, $\tilde{F}_\gamma$, y $\tilde{F}_\delta$ respectivamente. Supóngase que*

i) $0<\beta<\alpha<\pi$.
ii) $N_\alpha=N_\beta-1\geq 0$.
iii) $\beta=\delta$.
iv) $h_{\beta\alpha}=h_{\delta\gamma}$.
v) $\sigma_d(H_\alpha)=\sigma_d(\tilde{H}_\gamma)$.
vi) $\sigma_d(H_\beta)=\sigma_d(\tilde{H}_\delta)$.
vii) $|F_\beta(k)|=|\tilde{F}_\delta(k)|$ *para* $k\in\mathbb{R}$.

Entonces se tiene que $\alpha = \gamma$ y $\tilde{V} = V$. Esta afirmación es equivalente a decir que si $N_\alpha = N_\beta - 1 \geq 0$ y $0 < \beta < \alpha < \pi$ entonces el conjunto de datos $\mathcal{D}_7$ definido en (5.7) determina de manera única $\{V, \alpha, \beta\}$.

Prueba. Al igual que en el Teorema 5.1 se tiene que, al ser $0 < \beta < \alpha < \pi$, se cumple la relación $\epsilon < \gamma < \pi$.

En este caso se tiene que $N_\beta = N_\alpha + 1$, se tiene entonces del Lema 4.7(ii) que $F_\beta(0) \neq 0$. Para este caso se define la función

$$\Lambda_7(k) = -ik + h_{\beta\alpha} - \frac{i}{k}\frac{F_\alpha(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2} + \frac{i}{k}\frac{F_\alpha(k)}{F_\beta(k)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}(k^2+\kappa_{\beta j}^2)}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}(k^2+\kappa_{\alpha j}^2)}$$

Es inmediato, por la definición de $\Lambda_7(k)$ que es analítica en $\mathbb{C}^+$ y continua en $\overline{\mathbb{C}^+}\backslash\{0\}$. Para el comportamiento asintótico de $\Lambda_7(k)$, primero, para $k \to \infty$ del Lema 4.2 se tiene que

$$\begin{aligned}
\Lambda_7(k) &= -ik + h_{\beta\alpha} - \frac{i}{k}\frac{F_\alpha(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2} + \frac{i}{k}[1 + \frac{ih_{\beta\alpha}}{k} - \frac{h_{\beta\alpha}\cot\beta}{k^2} + o(\frac{1}{k^2})] \\
&\quad [1 + \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{N_\alpha}(\kappa_{\beta j}^2 - \kappa_{\alpha j}^2) + o(\frac{1}{k^2})](k^2 + \kappa_{\beta N_\beta}^2) \\
&= \frac{i}{k}[-h_{\beta\alpha}\cot\beta + \sum_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2 - \sum_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2 - \frac{F_\alpha(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2}] + o(\frac{1}{k^2})
\end{aligned}$$

para $k \to 0$ se tiene, del Lema 4.7(iii), para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}\backslash\{0\}$, la relación

$$\begin{aligned}
\Lambda_7(k) &= -ik + h_{\beta\alpha} - \frac{i}{k}\frac{F_\alpha(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2} \\
&\quad + \frac{i}{k}[\frac{F_\alpha(0)}{F_\beta(0)} - \frac{ih_{\beta\alpha}k}{F_\beta(0)} + o(k)] \\
&\quad \cdot[\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2} + o(k)] \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

sin importar el valor de $F_\alpha(k)$ en $k = 0$. De esto último se concluye la continuidad de $\Lambda_7(k)$ en $k = 0$ y además, si $k = u + iv$ se tiene que, para toda $v \geq 0$ la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} du|\Lambda_7(k)|^2 < +\infty$$

lo cual, calculando la parte real de $\Lambda_7(k)$ para $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}[\Lambda_7(k)] &= h_{\beta\alpha} + \frac{1}{k}\mathrm{Re}\big[i\frac{F_\alpha(k)}{F_\beta(k)}\big]\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2} \\
&= h_{\beta\alpha} + \frac{h_{\beta\alpha}}{|F_\beta(k)|^2}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2}
\end{aligned}$$

podemos expresarla de la forma

$$\begin{aligned}
\Lambda_7(k) &= \frac{i}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\mathrm{Re}[\Lambda_7(k)] \\
&= \frac{i}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\Big[h_{\beta\alpha} + \frac{h_{\beta\alpha}}{|F_\beta(k)|^2}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2}\Big]
\end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que de las condiciones asintóticas de $\Lambda_7(k)$ para $k \to \infty$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty}[ik\Lambda_7(k)] = -\big[h_{\beta\alpha}\cot\beta + \sum_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2 - \sum_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2 - \frac{F_\alpha(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2}\big]$$

de aqui que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\big[ik\Lambda_7(k) - h_{\beta\alpha}\cot\beta + \sum_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2 - \sum_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2\big] &= \lim_{k\to\infty}[A(k)] \\
&= -\frac{F_\alpha(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2}
\end{aligned}$$

así, al conocer explícitamente la forma de $\Lambda_7(k)$ y $F_\beta(k)$, se tiene que

$$F_\alpha(k) = \frac{k}{i}F_\beta(k)[-ik -_{\beta\alpha} + \Lambda_7(k) + \frac{i}{k}(\lim_{k\to\infty}A(k))]\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\alpha}\kappa_{\alpha j}^2}$$

Ahora que ya se conocen los valores de $F_\alpha(k)$, $F_\beta(k)$ y $h_{\beta\alpha}$ de forma explícita podemos calcular V de forma única con cualquier método explicado en el Capítulo 3 sección 3.

■

Teorema 5.8 *(Aktosun-Weder) [1] Sean las realizaciones H_α y H_β correspondientes al potencial V en la clase de Faddeev cuyas condiciones de frontera están dadas por α y β respectivamente. Considérense también $\tilde{H}_\gamma$ y $\tilde{H}_\delta$ las realizaciones correspondientes al potencial $\tilde{V}$ con las condiciones de frontera dadas por γ y δ respectivamente. Se denotan las correspondientes funciones de Jost por F_α, F_β, $\tilde{F}_\gamma$, y $\tilde{F}_\delta$ respectivamente. Supóngase que*

i) $0 < \beta < \alpha = \pi$.
ii) $N_\alpha = N_\beta - 1 \geq 0$.
iii) $\beta = \delta$.
iv) $\alpha = \gamma$.
v) $\sigma_d(H_\alpha) = \sigma_d(\tilde{H}_\gamma)$.
vi) $\sigma_d(H_\beta) = \sigma_d(\tilde{H}_\delta)$.
vii) $|F_\beta(k)| = |\tilde{F}_\delta(k)|$ *para* $k \in \mathbb{R}$.

Entonces se tiene que $\tilde{V} = V$. Esta afirmación es equivalente a decir que si $N_\alpha = N_\beta - 1 \geq 0$ y $0 < \beta < \alpha = \pi$ entonces el conjunto de datos $\mathcal{D}_8$ definido en (5.8) determina de manera única V.

Prueba. En este caso se tiene $0 < \beta < \alpha = \pi$, entonces de la hipótesis (iii) y (iv) se tiene que $0 < \epsilon < \gamma = \pi$ También se tiene que $N_\beta = N_\alpha + 1$, luego, por el Lema 4.7 se debe tener $F_\beta(0) \neq 0$. En este caso se define la función

$$\Lambda_8(k) = -1 - \frac{1}{k}\frac{F_\pi(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2} + \frac{1}{k}\frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2 + k^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2 + k^2}$$

A partir de $\mathcal{D}_8$ y la fórmula dada en el Lema 4.1 se reconstruye $F_\beta(k)$ para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$. Por otro lado, de las propiedades elementales de las funciones de Jost se deduce que $\Lambda_8(k)$ es analítica para $k \in \mathbb{C}^+$ y continua para $k \in \overline{\mathbb{C}^+}\backslash\{0\}$

Ahora, para el comportamiento asintótico de $\Lambda_8(k)$ primero, para $k \to \infty$ en $k \in \overline{\mathbb{C}^+}$ se tiene, utilizando el Lema 4.2(v)

$$\begin{aligned}
\Lambda_8(k) &= -1 - \frac{1}{k}\frac{F_\pi(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2} \\
&\quad + \frac{1}{k}\Big[\frac{1}{k} + \frac{i}{k}\big(cot\beta - \int_0^\infty dx V(x) e^{2ikx}\big) - \frac{cot^2\beta}{k^3} + o\big(\frac{1}{k^3}\big)\Big] \\
&\quad \Big[1 + \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{N_\pi}(\kappa_{\beta j}^2 - \kappa_{\alpha j}^2) + o\big(\frac{1}{k^2}\big)\Big](k^2 + \kappa_{\beta N_\beta}^2) \\
&= \frac{1}{k}\Big[i\cot\beta - \frac{F_\pi(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2}\Big] + o\big(\frac{1}{k}\big)
\end{aligned}$$

y, para el comportamiento asintótico de $\Lambda_8(k)$ para $k \to 0$ en $\overline{\mathbb{C}^+}\backslash\{0\}$ se tiene del Lema 4.4(ii) el comportamiento

$$\begin{aligned}\Lambda_8(k) &= -1 - \frac{1}{k}\frac{F_\pi(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2} + \frac{1}{k}\Big[\frac{F_\pi(0)}{F_\beta(0)} - \frac{k}{F_\beta(0)^2}\Big]\Big[\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2} + o(k)\Big] \\ &= O(1)\end{aligned}$$

de aqui se tiene, en primer lugar, que $\Lambda_8(k)$ es continua en $k = 0$, además, si consideramos ambos comportamientos asintóticos se concluye que si $k = u + iv$, para $v \geq 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} du|\Lambda_8(u+iv)|^2 < +\infty$$

estos resultados nos permiten utilizar la fórmula de Schwarz (4.4), para lo cual debemos calcular ahora la parte real de $\Lambda_8(k)$ para $k \in \mathbb{R}$, del Lema 4.5 se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[\Lambda_8(k)] &= -1 + \frac{1}{k}\mathrm{Re}\Big[\frac{F_\pi(k)}{F_\beta(k)}\Big]\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2} \\ &= -1 + \frac{1}{|F_\beta(k)|^2}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2}\end{aligned}$$

la cual puede ser reconstruida totalmente con los datos dados en $\mathcal{D}_8$. Finalmente $\Lambda_8(k)$ adquiere la forma

$$\begin{aligned}\Lambda_8(k) &= \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\mathrm{Re}[\Lambda_8(k)] \\ &= \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-k-i0^+}\Big[\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2}\Big]\end{aligned}$$

Observamos que

$$\lim_{k\to\infty}[k\Lambda_8(k)] = i\cot\beta - \frac{F_\pi(0)}{F_\beta(0)}\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2}$$

De aqui que podamos escribir $F_\pi(k)$ como

$$F_\alpha(k) = kF_\beta(k)\big[1 + \Lambda_8(k) + \frac{i\cot\beta}{k} - \frac{1}{k}\big(\lim_{k\to\infty}[k\Lambda_8(k)]\big)\big]\frac{\prod_{j=1}^{N_\beta}\kappa_{\beta j}^2}{\prod_{j=1}^{N_\pi}\kappa_{\pi j}^2}$$

habiendo obtenido $F_\pi(k)$ y $F_\beta(k)$ ahora podemos reconstruir V como se explica en el Capítulo 3 sección 3.

■

5.3. Ejemplos

A continuación se presentan un par de ejemplos ilustrando algunos de los teoremas expuestos anteriormente. En estos ejemplos tanto las funciones de Jost como los coeficientes de dispersión son funciones racionales de k, por lo cual las ecuaciones integrales correspondientes tienen núcleos degenerados. Esto nos permite saber la expresión explicita de los potenciales correspondientes. Estos potenciales son conocidos como potenciales de Bargman, que decaen de forma exponencial para $k \to \infty$.

Ejemplo 5.3.1

Para el Teorema 5.2, consideremos el conjunto de datos

$$N_\pi = 0, \quad N_\beta = 0, \quad |F_\pi(k)|^2 = 1 \ k \in \mathbb{R}$$

Dejando a β como parámetro. Se tiene entonces que

$$F_\alpha(k) = e^0 = 1$$

y

$$\mathrm{Re}[\Lambda_2(k)] = 0$$

luego

$$\Lambda_2(k) = -1 + 1 = 0$$

y para $F_\beta(k)$ se tiene la forma

$$F_\beta(k) = k[0 + i + \frac{i\cot\beta}{k} - 0] = k - i\cot\beta$$

esta función, según los datos dados al principio, no tiene ceros en $\mathbb{I}^+$, para ello se debe hacer la restricción $\cot\beta > 0$, es decir, $\beta \in [\pi/2, \pi)$. Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned} f(k,0) &= F_\pi(k) = 1, \\ f'(k,0) &= iF_\beta(k)i\cot\beta = ik \end{aligned}$$

por lo cual el correspondiente potencial es $V \equiv 0$.

Ejemplo 5.3.2

En el Teorema 5.3 considérense los datos

$$N_\alpha = 0, \quad N_\beta = 1, \quad |F_\pi(k)|^2 = k^2 + 4, \; k \in \mathbb{R}$$

dejando $h_{\beta\alpha}$ como un parámetro. Para poder determinar el valor de $\kappa_{\beta 1}$ definamos la familia de funciones

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(k,\kappa) &= \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t-k}\frac{t^2}{t^2-\kappa^2}\frac{h_{\beta\alpha}}{t^2+4} \\ &= \frac{ih_{\beta\alpha k}}{(k+2)(k-i\kappa)(k+i2)} \end{aligned}$$

calculando

$$\lim_{k\to\infty}[k\mathcal{H}(k,\kappa)] = \frac{ih_{\beta\alpha}}{\kappa+2}$$

de donde se debe verificar la igualdad

$$\frac{ih_{\beta\alpha}}{\kappa+2} = \lim_{k\to\infty}[k\mathcal{H}(k,\kappa)] = 1$$

donde $\kappa_{\beta 1} = h_{\beta\alpha} - 2$, ahora, al ser $\kappa_{\beta 1} > 0$ se tiene la restricción $h_{\beta\alpha} > 2$. Ahora del Lema 4.1 se tiene que

$$F_\alpha(k) = k + 2i$$

luego

$$\begin{aligned} F_\beta(k) &= \frac{(k+2i)ik}{ik(k+i[h_{\beta\alpha}-2])}k^2 + [h_{\beta\alpha}-2]^2 \\ &= k - i[h_{\beta\alpha}-2] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Lambda_3(k) &= \mathcal{H}(k,\kappa_{\beta 1}) \\ &= \frac{ik}{(k+i[h_{\beta\alpha}-2])(k+2i)} \end{aligned}$$

donde, de esta ultima expresión, para k, separando $\Lambda_3(k)$ en fracciones parciales y desarrollando, se tiene

$$\Lambda_3(k) = \frac{i}{k} + \frac{h_{\beta\alpha}}{k^2} + \frac{i}{k^3}[-2h_{\beta\alpha} - (h_{\beta\alpha}-2)^2] + O(1/k^4)$$

así, considerando la expansión asintótica dada en la prueba del Teorema 5.3 se tiene la igualdad

$$-2h_{\beta\alpha} - (h_{\beta\alpha} - 2)^2 = h_{\beta\alpha}\cot\alpha - (h_{\beta\alpha} - 2)^2$$

esto es $\cot\alpha = -2$ luego, por la definición de $h_{\beta\alpha}$, se tiene $\cot\beta = h_{\beta\alpha} - \cot\alpha = h_{\beta\alpha} - 2$, este último, al igual que el valor especifico de $F_\beta(k)$, esta determinado cuando $h_{\beta\alpha}$ toma un valor en particular.

Por último se tiene que

$$f(k,0) = \frac{i}{h_{\beta\alpha}}[k - i(h_{\beta\alpha} - 2) - k - 2i] = 1$$

de aqui que $V \equiv 0$ para $x \in [0, \infty)$.

Bibliografía

[1] Tuncay Aktosun, Ricardo Weder. Inverse Spectral-Scattering Problem with two Sets of Discrete Spectra for the Radial Schrödinger Equation. Pretiraje 2004. 47 páginas. IMA preprint Series number 1960, 2004, http://www.ima.umn.edu/preprints/feb2004/1960.pdf. ArXiv math-ph/0402019, http://front.math.ucdavis.edu/math-ph/0402019. Mp_arc 04-30, http://www.ma.utexas.edu/mp_arc-bin/mpa?yn=04-30. Sometido a Inverse Problems.

[2] Joachim Weidmann. Linear Operators in Hilbert Spaces. Springer-Verlag, Berlin 1980

[3] Lokenath Debnat, Priot Mikusinski. Introduction to Hilbert Spaces with Applications. Academic Press, San Diego 1999.

[4] B. M. Levitan. Inverse Sturm-Liouville problems. VNU Science Press BV, Utrecht 1987.

[5] B. M. Levitan and I. S. Sargsjan. Introduction to Spectral Theory: Self-adjoint Ordinary Differential Operators. American Mathematical Society, Providence, 1975.

[6] E. C. Titchmarsh. Introduction to Theory of Fourier Integrals. 2a. edición. Oxford University Press, London, 1962.

[7] Tosio Kato. Perturbation Theory for Linear Operators. 2a. edición. Springer, Berlin. 1976.

[8] James Dugundji. Topology. Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[9] Michael Reed, Barry Simon. Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I. Functional Analysis. Academic Press, New York. 1975

[10] Michael Reed, Barry Simon. Methods of Modern Mathematical Physics Vol. II. Fourier analysis, Self-Adjointness. Academic Press, New York. 1975

[11] Jean-Émile Rakotoson, Jean-Michel Rakotoson. Analyse Fonctionnelle Appliquée aux Équations aux Dérivées Partielles. Presses universitaires de France. 1999

[12] Joachim Weidmann. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators. Lecture Notes in Math. 1258. Springer, Berlin. 1987.

[13] V. A. Marchenko, Sturm-Liouville Operators and its Applicatios. Birkhäuser, Basel. 1986.

[14] L. Ahlfors. Complex Analysis, 2nd ed. McGraw-Hill, New York. 1986.

[15] F. Gesztesy and B. Simon. Uniqueness theorems in inverse spectral theory for one-dimensional Schrödinger operators. Transac. Am. Math. Soc. **348**, 349-373 (1996)

[16] B. M. Levitan and M. g. Gasymov. Determination of a differential equation by two of its spectra. Uspekhi Mat. Nauk 19, 3-63 [Rusian Math. Surveys 19, 1-63 (1964)]

[17] K. Chadan and P. C. Sabatier. Inverse Problems in Quantum Scattering theory, 2nd edition. Springer, New York. 1989

[18] I. M. Gel'fand and B. M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spectral function. Dokl. Akad. Nauk SSSR 104, 695-698 (1995).

[19] K. Chadan and P. C. Sabatier. Chapter 2.2.1, Radial Inverse Scattering Problems. In: E. R. Pike and P. C. Sabatier (eds.), Scattering. Academic Press, London, 2001. pp. 226-271

[20] V. A. Marchenko. On reconstruction of the potential energy from phases of the scattered waves. Dokl. Akad. Nauk SSSR **104**, 695-698 (1955).

[21] L. D. Faddeev. Propierties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation. Trudy Mat. Inst. Steklov. **73**, 314-336 (1964)

[22] A. Melin. Operator methods for inverse scattering on the real line. Comm. Partial differential equations **10**, 677-766 (1985).

[23] T. Aktosun and M. Klaus. Chapter 2.2.4, Inverse Theory: Problem on the Line. In: E. R. Pike and P. C. Sabatier (eds.), Scattering, Academic Press, London, 2001, pp. 770-785.

[24] P. Dieft and E. Trubowitz. Inverse scattering on the line. Comm. Pure Appl. Math. **32**, 121-251 (1979).

[25] T. Aktosun and M Klaus. Small-energy asymptotics for the Schrödinger equation. Inverse Problems **17**, 619-632 (2001).

[26] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Dover Publications, Inc. New York. 1963

[27] V. A. Ambartsumyan. Über eine Frage der Eigenwerttheorie. Z. Phys. **53**, 690-695 (1929).

[28] G. Borg. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Acta Math. **78**, 1-96 (1946).

[29] I. M. Gel′fand and B. M. Levitan on the determination of a differential equation from its espectral function. Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **15**, 309-360 (1951).

[30] G. Borg Uniquess Theorems in the spectral theory of $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$. Proc. 11th Scandinavian congress of mathematics, Johan Gruntdt Tanums Forlag, Oslo, 1952, pp 276-287

[31] V. A. Marchenko. Some questions in the theory of one-dimensional linear differential operators of second order. I, Trudy, Moskov. Math. Obsc 1, 327-420 (1952).